UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

MARCOS HENRIQUE DE PAULA DIAS DA SILVA

JUSTAPOR DEMONSTRAÇÕES E SEU EFEITO NA ESCRITA DE DEMONSTRAÇÕES

JUXTAPOSE PROOFS AND ITS EFFECT ON PROOF WRITING

CAMPINAS
2023

MARCOS HENRIQUE DE PAULA DIAS DA SILVA

JUSTAPOR DEMONSTRAÇÕES E SEU EFEITO NA ESCRITA DE DEMONSTRAÇÕES

JUXTAPOSE PROOFS AND ITS EFFECT ON PROOF WRITING

PRUEBAS YUXTAPUESTAS Y SU EFECTO EN LA REDACCIÓN DE PRUEBAS

Tese apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática, na área de Ensino de Ciências e Matemática

ORIENTADOR: SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA
CO-ORIENTADOR: JOÃO VILHETE VIEGAS D’ABREU

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO DISCENTE MARCOS HENRIQUE DE PAULA DIAS DA SILVA, E ORIENTADA PELOS PROFESSORES DOUTORES SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA E JOÃO VILHETE VIEGAS D’ABREU.

CAMPINAS
2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

Si38j

Silva, Marcos Henrique de Paula Dias da, 1991-
Justapor demonstrações e seu efeito na escrita de demonstrações / Marcos Henrique de Paula Dias da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Samuel Rocha de Oliveira.
Coorientador: João Vilhete Viegas d'Abreu.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Teoria das demonstrações. 2. Ensino superior. 3. Sistemas multimídia. I. Oliveira, Samuel Rocha de, 1962-. II. D'Abreu, João Vilhete Viegas, 1954-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Juxtapose proofs and its effect on proof writing
Palavras-chave em inglês:
Proof theory
Education, Higher
Multimedia systems
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática
Titulação: Doutor em Ensino de Ciências e Matemática
Banca examinadora:
Samuel Rocha de Oliveira [Orientador]
Miriam Cardoso Utsumi
Maurício Urban Kleinke
Marcelo Firer
Valdinei Cezar Cardoso
Daniel Miranda Machado
Leonardo Barichello
Data de defesa: 16-03-2023
Programa de Pós-Graduação: Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-8636-7959
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/6130937835002478

COMISSÃO EXAMINADORA

Data: 16/03/2023

Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira (PRESIDENTE – ORIENT.)
Profa. Dra. Miriam Cardoso Utsumi – Unicamp
Prof. Dr. Maurício Urban Kleinke – Unicamp
Prof. Dr. Marcelo Firer – Unicamp
Prof. Dr. Valdinei Cezar Cardoso – UFES
Prof. Dr. Daniel Miranda Machado – UFABC
Prof. Dr. Leonardo Barichello – USP

A Ata de defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Primeiramente devo agradecer aos financiadores desta pesquisa, a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por meio da Bolsa de Doutorado na categoria Demanda Social, processo nº 88882.435460/2019-01 (Migrado – SACPAIS), concedida ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da UNICAMP e às bolsas de auxílio permanência providas pelo SAE (Serviço de Apoio ao Estudante) da UNICAMP, que me permitiram uma dedicação integral a esta pesquisa.

Tentarei escrever alguns agradecimentos de coração (quem me conhece sabe que este não é meu forte, então adianto as desculpas caso esta parte fique estranha). Devo muito aos meus pais, que sempre investiram em mim mais do que podiam, colocando sempre seus próprios interesses em 2º plano para me ajudar nesta saga. Em seguida devo muito a meus amigos de escola, pois esse foi um ambiente socialmente hostil e vocês me permitiram criar algumas boas lembranças desta fase. Coloco aqui meus imensos agradecimentos às amizades que sobreviveram à escola e as que emergiram da vida adulta, vocês realmente foram companheiros inestimáveis para mim, dividindo fardos e fechando feridas. Sou grato também aos professores e mentores que passaram por minha vida, desde os que se lembram de mim aos que passaram por mim indiferentes, pois guardo aquilo que dividiram comigo, suas experiências, seus exemplos como profissionais, suas críticas compartilhadas sobre eu, meu ser e meu trabalho, e que considero terem me ajudado a lapidar-me. Agradeço a meus companheiros de trabalho, que foram fieis nos momentos de vitória, derrota e incertezas, os quais batalharam ao meu lado por tantas causas. Meus agradecimentos à minha esposa que me acompanha, suporta e assiste, compartilha, discute experiências e reflete comigo, e à sua família que me acolheu e cuidou durante esta longa jornada que venho percorrendo.

RESUMO

Nesta tese definimos o procedimento de demonstrar por justaposição como uma ação semelhante à montagem de um quebra-cabeça em que as peças são segmentos do texto de uma demonstração matemática. Identificamos na justaposição de demonstrações, além de características comuns à leitura e escrita de demonstrações, um potencial emergente da interação entre múltiplas mídias de contribuir para o aprendizado das demonstrações, o que nos levou a investigar a influência de seu exercício com alunos de graduação em matemática. A relevância desta pesquisa se destaca tanto pelo papel que as demonstrações desempenham na formação de matemáticos, da sua ausência na Educação Básica e pela forma como são consideradas conhecimentos prévios para alunos de graduação. Somado a isso temos as dificuldades relacionadas ao seu aprendizado no Ensino Superior discutidas na literatura e a ausência de produções científicas sobre a justaposição de demonstrações no Ensino Superior. Para investigar a influência exercida pelas demonstrações por justaposição, realizamos um estudo experimental focado em comparar o efeito dessa abordagem em relação ao exercício de demonstrar por escrito a partir de exemplos, nas demonstrações realizadas por alunos de graduação em matemática. Trabalhamos com quatro turmas de alunos da graduação em matemática dentro de disciplinas semestrais obrigatórias ministradas à distância devido à pandemia do COVID-19, para as duas turmas de alunos do primeiro ano utilizamos demonstrações de Álgebra Matricial, e para as duas turmas do 4º semestre, demonstrações de Geometria Euclidiana. Cada demonstração foi avaliada de acordo com os critérios desenvolvidos durante este estudo e devolvida individualmente na forma de feedback aos participantes, servindo como material para análise. Concluímos que para os alunos do primeiro ano, as demonstrações de justaposição desenvolveram aspectos complementares à outra abordagem, já com os alunos do 4º semestre observamos que associar as ações de escrita nas demonstrações por justaposição teve um impacto negativo à medida que os enunciados se tornaram mais complexos, mas o foco na ação de justapor demonstrações ajudou a manter baixo o nível de dificuldade das demonstrações de Geometria Euclidiana apesar do gradual avanço de sua complexidade.

Palavras-chave: Teoria das demonstrações; Ensino superior; Sistemas multimídia.

ABSTRACT

In this thesis, we define the procedure of proof by juxtaposition as an action similar to assembling a puzzle in which the pieces are segments of the text of a mathematical proof. We identified in the juxtaposition of proofs, in addition to characteristics common to reading and writing proofs, an emerging potential of the interaction between multiple media to contribute to the learning of proofs, which led us to investigate the influence of its exercise with undergraduate students in Mathematics. The relevance of this research stands out both for the role that proofs play in the formation of mathematicians, their absence in Basic Education and for the way in which they are considered prior knowledge for undergraduate students. Added to this, we have the difficulties related to their learning in Higher Education discussed in the literature and the absence of scientific productions on the juxtaposition of proofs in Higher Education. To investigate the influence exerted by proofs by juxtaposition, we carried out an experimental study focused on comparing the effect of this approach in relation to the exercise of writing proofs based in examples, in proofs carried out by undergraduate mathematics students. We worked with four classes of undergraduate students in Mathematics within mandatory semester courses taught at a distance due to the COVID-19 pandemic, for the two classes of first year students we used proofs of Matrix Algebra, and for the two classes of the 4th semester, proofs of Euclidean Geometry. Each proof was evaluated according to the criteria developed during this study and returned individually as a form of feedback to the participants, serving as material for analysis. We concluded that for the first year students, the juxtaposition demonstrations developed complementary aspects to the other approach, while with the 4th semester students we observed that associating the writing actions in the juxtaposition demonstrations had a negative impact as the utterances became more complex, but the focus on the action of juxtaposing proofs helped to keep the difficulty level of Euclidean Geometry proofs low despite the gradual increase in their complexity.

Key words: Proof theory; Education, Higher; Multimedia systems.

RESUMEN

En esta tesis definimos el procedimiento de demostración por yuxtaposición como una acción similar a armar un rompecabezas en el que las piezas son segmentos del texto de una demostración. Identificamos en la yuxtaposición de pruebas, además de características comunes a la lectura y escritura de pruebas, un potencial emergente de la interacción entre múltiples medios para contribuir al aprendizaje de las pruebas, lo que nos llevó a investigar la influencia de su ejercicio con estudiantes de grado en Matemáticas La relevancia de esta investigación se destaca por el papel que juegan las demostraciones en la formación de matemáticos, su ausencia en la Educación Básica y la forma en que son consideradas conocimientos previos para los estudiantes de pregrado. Sumado a esto, tenemos las dificultades relacionadas con su aprendizaje en la Educación Superior discutidas en la literatura y la ausencia de producciones científicas sobre la yuxtaposición en la Educación Superior. Para investigar la influencia que ejercen las demostraciones por yuxtaposición, llevamos a cabo un estudio experimental centrado en comparar el efecto de este enfoque en relación con el ejercicio de demostrar por escrito a partir de ejemplos, en demostraciones realizadas por estudiantes de matemáticas. Trabajamos con cuatro clases de estudiantes de matemáticas dentro de cursos semestrales obligatorios dictados a distancia por la pandemia del COVID-19, para las dos clases de estudiantes de primer año utilizamos demostraciones de Álgebra Matricial, y para las dos promociones de segundo año, demostraciones de Geometría Euclidiana. Cada demostración fue evaluada de acuerdo con los criterios desarrollados durante este estudio y devuelta individualmente a los participantes, sirviendo como material de análisis. Concluimos que para los estudiantes de primer año, las demostraciones de yuxtaposición desarrollaron aspectos complementarios al otro enfoque, mientras que con los estudiantes de segundo año observamos que asociar las acciones de escritura en las demostraciones de yuxtaposición tuvo un impacto negativo a medida que los enunciados se complejizaron, pero la centrarse en la acción de yuxtaponer pruebas ayudó a mantener bajo el nivel de dificultad de las pruebas de Geometría Euclidiana a pesar del aumento gradual de su complejidad.

Palabras clave: Teoría de las demostraciones; Enseñanza superior; Sistemas multimedia.

Sumário

1. INTRODUÇÃO.....10
1.1. Justapor demonstrações.....18
1.2. Escrever, Ler, Completar, Apurar e Justapor demonstrações.....23
1.3. Pergunta de pesquisa e objetivos.....30
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....32
2.1. Demonstrações no currículo.....33
2.2. Aprender a demonstrar.....42
2.3. Justaposição na literatura.....45
3. METODOLOGIA.....57
3.1. Procedimentos.....58
3.2. Tratamento dos dados.....76
3.3. Análise de dados.....87
4. RESULTADOS.....90
4.1. Erros/dificuldades nas demonstrações escritas.....90
4.2. Demonstrações válidas e inválidas.....94
5. CONSIDERAÇÕES.....105
5.1. Reflexões e ideias.....108
6. REFERÊNCIAS.....121
ANEXO 1: Enunciados das demonstrações.....127

[illegible]

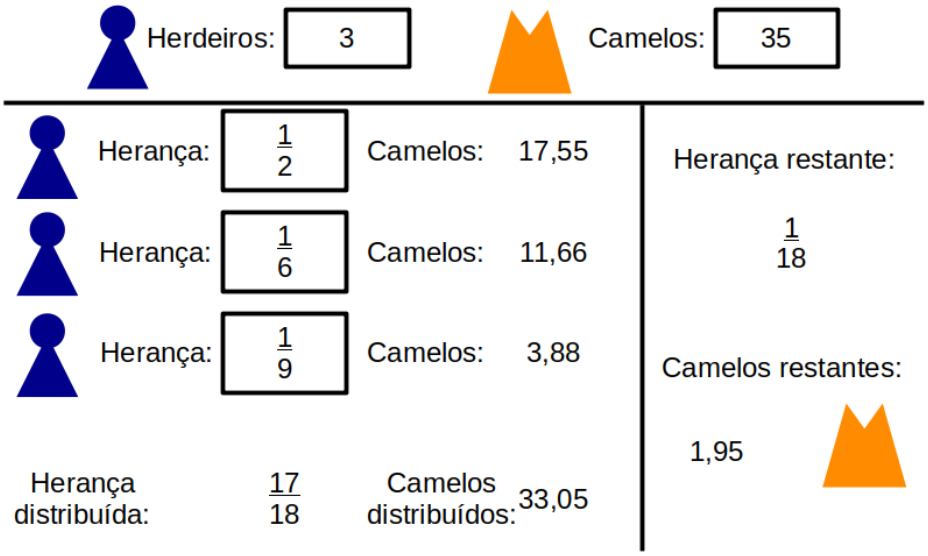
[illegible]

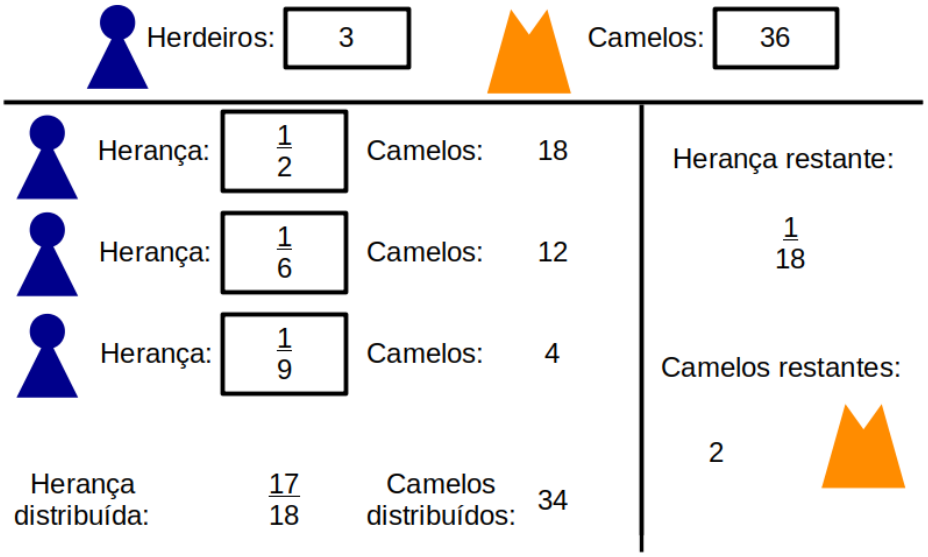
> [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]


Herdeiros: 3
Camelos: 35
Herança: 1/2
Camelos: 17,55
Herança: 1/6
Camelos: 11,66
Herança: 1/9
Camelos: 3,88
Herança distribuída: 17/18
Camelos distribuídos: 33,05
Herança restante: 1/18
Camelos restantes: 1,95


Herdeiros: 3
Camelos: 36
Herança: 1/2
Camelos: 18
Herança: 1/6
Camelos: 12
Herança: 1/9
Camelos: 4
Herança distribuída: 17/18
Camelos distribuídos: 34
Herança restante: 1/18
Camelos restantes: 2

[illegible]

[illegible]

□□□□□□□ □□□□ □□□□ □□□□□□□□□□□□ □□□□ □ □□□□□□□ □□ □□□□□□□□□□□□□□ □□ □□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□

□□

□□□

[illegible]

[illegible]

```
   Troque as lentes do microscópio para ampliar um inseto com largura
de 3 milímetros a uma largura entre 180 e 200 milímetros.
No microscópio:
Lente ocular 5x;
Lente objetiva 10x;
Inseto aparece 50 vezes maior;
Largura aparente: 150 milímetros.

   Digite "ocular <número de vezes>" para trocar a amplitude da
lente ocular. Digite "objetiva <número de vezes>" para trocar a
amplitude da lente objetiva.
```

```
Marcos: ocular 6
```

```
   Objetivo alcançado! O inseto com largura de 3 milímetros aparece no
microscópio com uma largura entre 180 e 200 milímetros.
No microscópio:
Lente ocular 6x;
Lente objetiva 10x;
Inseto aparece 60 vezes maior;
Largura aparente: 180 milímetros.

   Digite "ocular <número de vezes>" para trocar a amplitude da
lente ocular. Digite "objetiva <número de vezes>" para trocar a
amplitude da lente objetiva.
```

```
Marcos:
```

[illegible]

[illegible]

□□□

Figura 4: Demonstração da propriedade de soma das derivadas

$$\text{(D1)}\ (f+g)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{[f(x)+g(x)]-[f(p)+g(p)]}{x-p}$$
$$= \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p} + \frac{g(x)-g(p)}{x-p} \right]$$
$$= f'(p) + g'(p).$$

(Em palavras: *a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas das parcelas.*)

Fonte: Guidorizzi (1998, p. 154).

Figura 5: Demonstração análoga à da Figura anterior referente à propriedade de soma das derivadas

DEMONSTRAÇÃO Seja $F(x) = f(x) + g(x)$. Então

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad \text{(pela Propriedade 1)}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

Fonte: Stewart (2013, p. 161).

Para acelerar essas verificações poderíamos reduzir a gama de estratégias e escolhas de palavras disponíveis durante uma demonstração, assemelhando-se até certo ponto a uma linguagem de programação baseada em blocos. Na parte superior da Figura 6 apresentamos os termos e expressões necessários para mostrar que “se a ∈ ∈ e b ∈ ∈ então a + b ∈ ∈ e na parte inferior apresentamos a demonstração a partir desta estrutura baseada em blocos.

□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Vamos obter uma fórmula para a área de um conjunto A assim descrito sem transformar a equação para coordenadas cartesianas. Façamos uma aproximação do conjunto A pela justaposição de setores circulares centrados na origem, procedendo da seguinte forma:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Vamos finalizar esta seção justapondo as duas partes do Teorema Fundamental.

Teorema Fundamental do Cálculo Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.

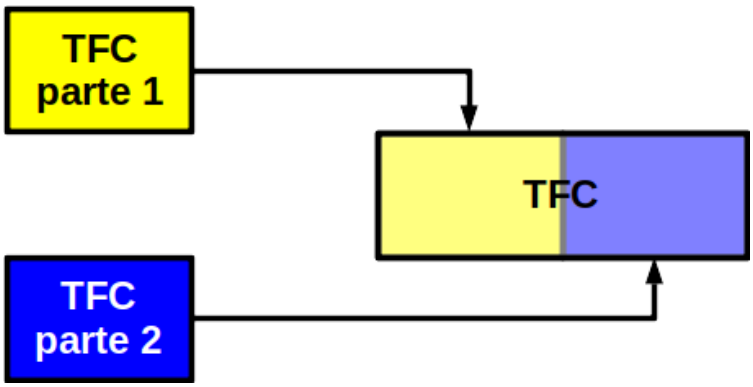
1. Se $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

[illegible]

[illegible]

[illegible]



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Demonstre que se o limite de f: B → ℝ em um ponto existir, então ele é único.

se $x \in B$: $0 < \lvert x - a\rvert < \delta_1$ $0 < \lvert x - a\rvert < \delta_2$	escolhendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$	$\Rightarrow \lvert f(x) - L_1\rvert$ $\Rightarrow \lvert f(x) - L_2\rvert$	se $x \in B$ e $0 < \lvert x - a\rvert < \delta$ temos	$\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, logo $L_1 = L_2$
e seja dado $\varepsilon > 0$, agora tome $\varepsilon/2$	suponha que	$0 \leq \lvert L_1 - L_2\rvert =$	$\lvert f(x) - L_1\rvert +$ $\lvert f(x) - L_2\rvert <$	$\lvert L_1 - f(x) +$ $f(x) - L_2\rvert \leq$
então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ de modo que	$\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$	$< \varepsilon/2$ $< \varepsilon/2$		

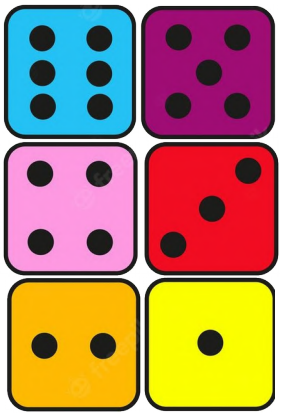
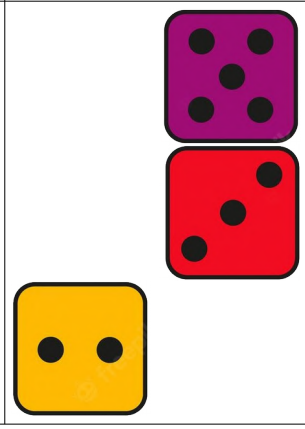
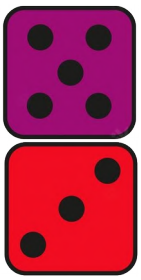
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]			
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
			

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Suponha que existam apenas k primos, $p_1.p_2...p_k$, tome $n = p_1.p_2...p_k$, sendo n+1 maior que p_k.
n+1 não é primo e não tem um divisor comum com n.
Sendo p_j divisor de n e n+1, então divide (n+1)-n=1, absurdo.
Suponha que existam apenas k primos, $p_1.p_2...p_k$, tome $n = p_1.p_2...p_k$, sendo n+1 maior que p_k.
n+1 não é primo e não tem um divisor comum com n.
Sendo p_j divisor de n e n+1, então divide (n+1)-n=1, absurdo.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Complete the following proof.

Let $P(n)$ be the statement

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$

> Since $1^2 =$ [ ]
>
> and $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} =$ [ ]
>
> it follows that $P(1)$ is true.

> Assume that $P(n)$ is true.
>
> $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 =$ sum(?,k,1,n)+?
>
> $= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6} + (n+1)^2$ (No answer given)
>
> $= \frac{(n+2)\cdot(2\cdot n+3)\cdot(n+1)}{6}$
>
> $=$ [ ]

Since $P(1)$ and $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ it follows that $P(n)$ is true for all $n \in \mathbb{N}$ by the principal of mathematical induction.

[illegible]

This question is about the following **incorrect** proof.

1. Using real arithmetic $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$
2. Taking square roots $\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$
3. Rules of indices $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$
4. Definition of $\sqrt{-1} = i$ gives $\frac{i}{1} = \frac{1}{i}$
5. Algebraic rearranging gives $i^2 = 1$
6. Defining property of i gives $-1 = 1$

Which is a contradiction.

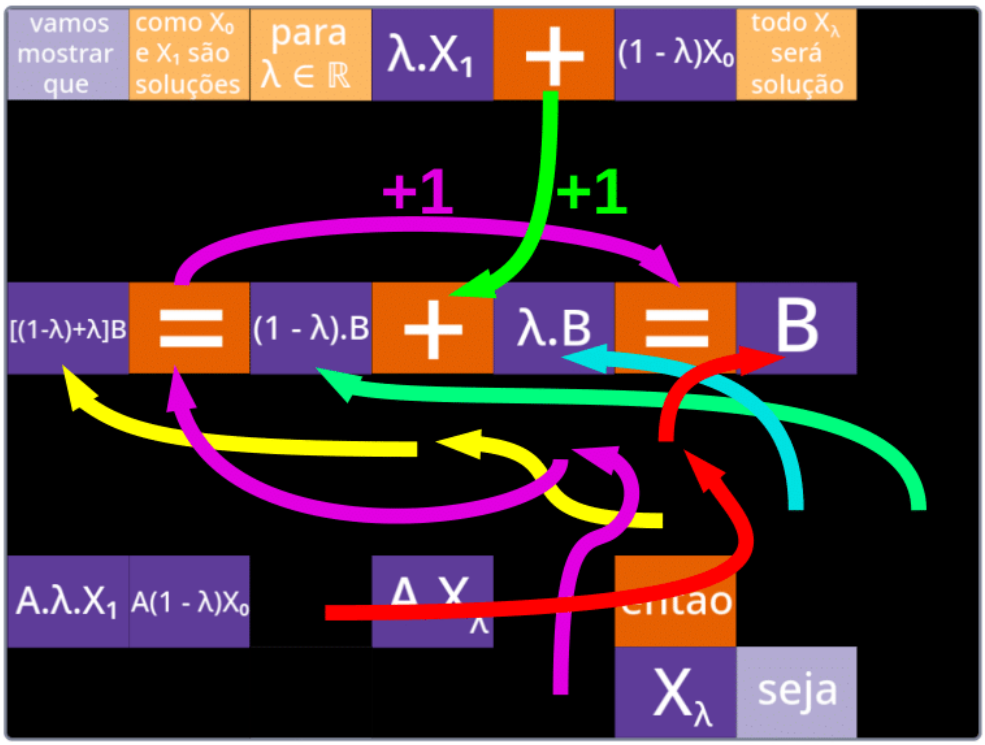
Which line of the proof is incorrect?

Why is this line incorrect?

□ □□□□

[illegible]

[illegible]


vamos mostrar que
como X_0 e X_1 são soluções
para $\lambda \in \mathbb{R}$
$\lambda.X_1$
+
$(1 - \lambda)X_0$
todo X_λ será solução
+1
+1
$[(1-\lambda)+\lambda]B$
=
$(1 - \lambda).B$
+
$\lambda.B$
=
B
$A.\lambda.X_1$
$A(1 - \lambda)X_0$
X_λ
seja

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Questão 176 2020enem2020enem2020enem

A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (r). Ela é dada por

$$f = \frac{A}{r^B}$$

O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, $r = 1$ para a palavra mais frequente, $r = 2$ para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente. A e B são constantes positivas.

Diponível em: http://klein.sbm.org.br. Acesso em: 12 ago. 2020 (adatpado).

Com base nos valores de $X = \log(r)$ e $Y = \log(f)$, é possível estimar valores para A e B.

No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é

[illegible]

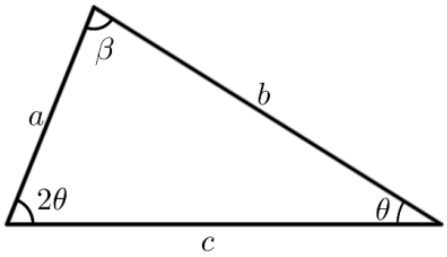
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

A figura abaixo exibe um triângulo com lados de comprimentos a, b e c e ângulos internos θ, 2θ e β.



a) Supondo que o triângulo seja isósceles, determine todos os valores possíveis para o ângulo θ.

b) Prove que, se $c = 2a$, então $\beta = 90^o$.

[illegible]

[illegible]

Sabendo que p e q são números reais, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

a) Prove que para quaisquer p e q teremos $B^T AB \geq 0$.

b) Determine os valores de p e q para os quais o sistema linear nas variáveis reais x, y e z, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$, tem infinitas soluções.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Sabendo que c é um número real, considere a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 3x + c$, definida para todo número real x.

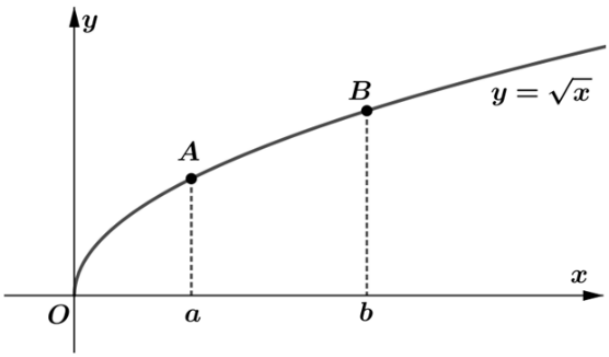
a) Determine todos os valores de c para os quais $f(-1)f(1) = f(-1) + f(1)$.

b) Sejam p e q números reais distintos tais que $f(p) = f(q)$. Prove que p e q não podem ser ambos números inteiros.

[illegible]

[illegible]

A figura abaixo exibe, no plano cartesiano, o gráfico de $y = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$, em que os pontos A e B têm abscissas $x_A = a > 0$ e $x_B = b > a$, e O é a origem do sistema de coordenadas.



a) Prove que os pontos A, B e $C = (-\sqrt{ab}, 0)$ são colineares.

b) Para $b = 3$, determine o valor de a para o qual a distância da origem ao ponto A é igual à distância do ponto A ao ponto B.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

A definição 1.1.2 implica as seguintes propriedades:

1. $|x| = |-x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$
2. $|x| \geqslant 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$
3. $x \leqslant |x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$
4. $|xy| = |x||y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},$

cujas demonstrações são deixadas como exercício.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

EXEMPLO 1.1.3. (1) Dado $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a, \tag{1.1.1}$$

como está indicado na figura 1.1.1.

De fato, multiplicando a desigualdade $-a < x < a$ por -1, obtemos a equivalência $-a < x < a \Leftrightarrow -a < -x < a$. Logo

$$-a < x < a \quad \Rightarrow \quad -a < -x < a \ \text{ e } \ -a < x < a \quad \Rightarrow \quad |x| < a,$$

uma vez que, sempre, $|x| = x$ ou $|x| = -x$. Reciprocamente, de acordo com as propriedades 1 e 3, acima, podemos escrever

$$|x| < a \ \Rightarrow \ |-x| < a \ \text{ e } \ |x| < a \ \Rightarrow \ -x < a \ \text{ e } \ x < a \ \Rightarrow \ -a < x < a.$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Desigualdade Triangular. *Para quaisquer* $a, b \in \mathbb{R}$*:*

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|. \tag{1.1.2}$$

Demonstração. Pela propriedade 3 subseqüente à definição 1.1.2, página 12, valem as seguintes desigualdades:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$
$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Somando membro a membro vem

$$-\big(|a| + |b|\big) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

e, de acordo com a equivalência (1.1.1) com "$\leqslant$" em vez de "$<$", temos $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. □

[illegible]

[illegible]

Bacharelado e Licenciatura), Bacharelado em Matemática Aplicada e Computação Científica, Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação em Matemática.

> **Noções de lógica.**
>
> **Estratégias de provas:** provas diretas, provas por contrapositiva e por contradição.
>
> **Conjuntos:** subconjuntos, operações com conjuntos, produtos cartesianos. Relações: relações binárias, relações de equivalência, relações de ordem.
>
> **Funções:** conceito, imagem inversa e imagem direta, funções injetoras e sobrejetoras, função inversa, composição de função. Noções de cardinalidade .
>
> **Os números naturais:** Axioma de Peano, indução.
>
> **Os números inteiros:** construção lógico-formal do conjunto dos números inteiros, imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, operações e relação de ordem em $\mathbb{N}$, valor absoluto, divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, primos, congruências e critérios de divisibilidade.
>
> **Os números racionais:** a divisão em $\mathbb{N}$, construção dos números racionais, operações e relações de ordem, valor absoluto, números racionais decimais.
>
> (<https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/>. Acesso em: 5 Set. 2022. Negrito nosso, entendemos neste contexto, prova como sinônimo de demonstração)

Cockcroft (1994) sustenta que a compreensão de demonstrações é absolutamente necessária para um aprofundamento formal dos conteúdos que a antecedem e sem tal viés prático, é possível apenas trabalhar a matemática no nível das propriedades operacionais e de aplicação. A ação de abstrair conceitos básicos das demonstrações permite o tratamento de problemas de naturezas mais complexas e segundo o autor, essa capacidade desenvolvida a partir do entendimento das demonstrações aumenta o poder de manipulação da matemática nos níveis já estudados. Hanna, Jahnke e Pulte (2010) argumentam que os matemáticos não usam demonstrações apenas para verificar se uma determinada afirmação é válida, mas que a própria demonstração contém conhecimento matemático que relaciona a afirmação válida às definições assumidas, o que fica evidente quando percebemos as demonstrações nos conteúdos usuais de disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral (Figura 2) ou Álgebra Linear (Figura 23), oferecidas para diversos cursos de graduação no 1º e 2º semestre, até mesmo para as graduações de matemática, em conflito com a ideia de que o domínio das demonstrações se desenvolveria a partir de disciplinas específicas. Esse conflito pode ser intensificado se considerarmos que alguns autores chegam a omitir o termo

[illegible]

[illegible]

[illegible]

EXEMPLO 2 Prove que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

SOLUÇÃO

1. *Uma análise preliminar do problema* (*conjecturando um valor para* δ). Seja ε um número positivo dado. Queremos encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Porém $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Portanto, queremos δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

isto é,

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Isso sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon/4$.

[illegible]

[illegible]

6. Seja $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{C}\}$. Mostrar que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com a adição e a multiplicação por escalares definidas assim:

   (I) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\forall (x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2) \in V$ e

   (II) $a(x, y) = (ax, ay)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall (x, y) \in V$.

7. Seja $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. Considerando sobre $\mathbb{R}^\infty$ as operações dadas por $(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$ e $a(x_1, x_2, \ldots) = (ax_1, ax_2, \ldots)$, mostrar que $\mathbb{R}^\infty$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

8. Mostrar que todo espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ também é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

[illegible]

[illegible]

□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

□□□ □□□□□□□□□[□] □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

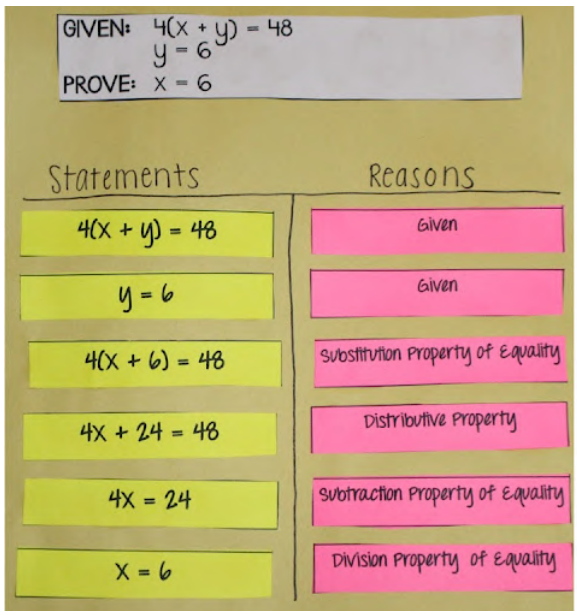
[illegible]

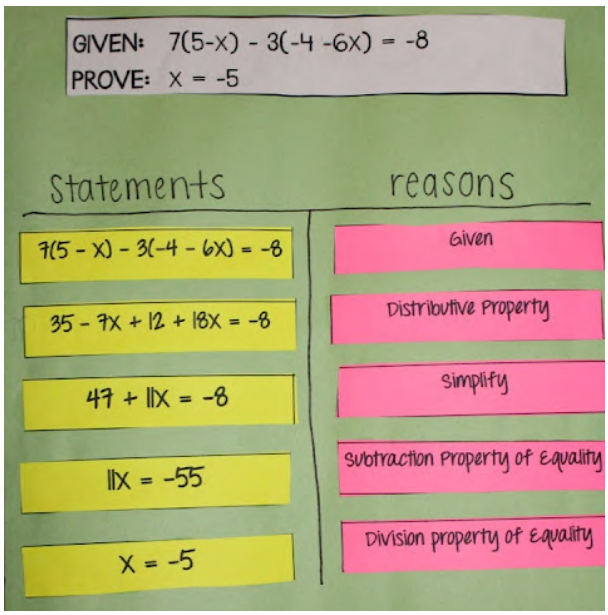
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]


GIVEN: 4(x + y) = 48
y = 6
PROVE: x = 6
Statements
Reasons
4(x + y) = 48
Given
y = 6
Given
4(x + 6) = 48
Substitution Property of Equality
4x + 24 = 48
Distributive Property
4x = 24
Subtraction Property of Equality
x = 6
Division Property of Equality


GIVEN: 7(5-x) - 3(-4 -6x) = -8
PROVE: x = -5
Statements
reasons
7(5 - x) - 3(-4 - 6x) = -8
Given
35 - 7x + 12 + 18x = -8
Distributive Property
47 + 11x = -8
Simplify
11x = -55
Subtraction Property of Equality
x = -5
Division property of Equality

[illegible]

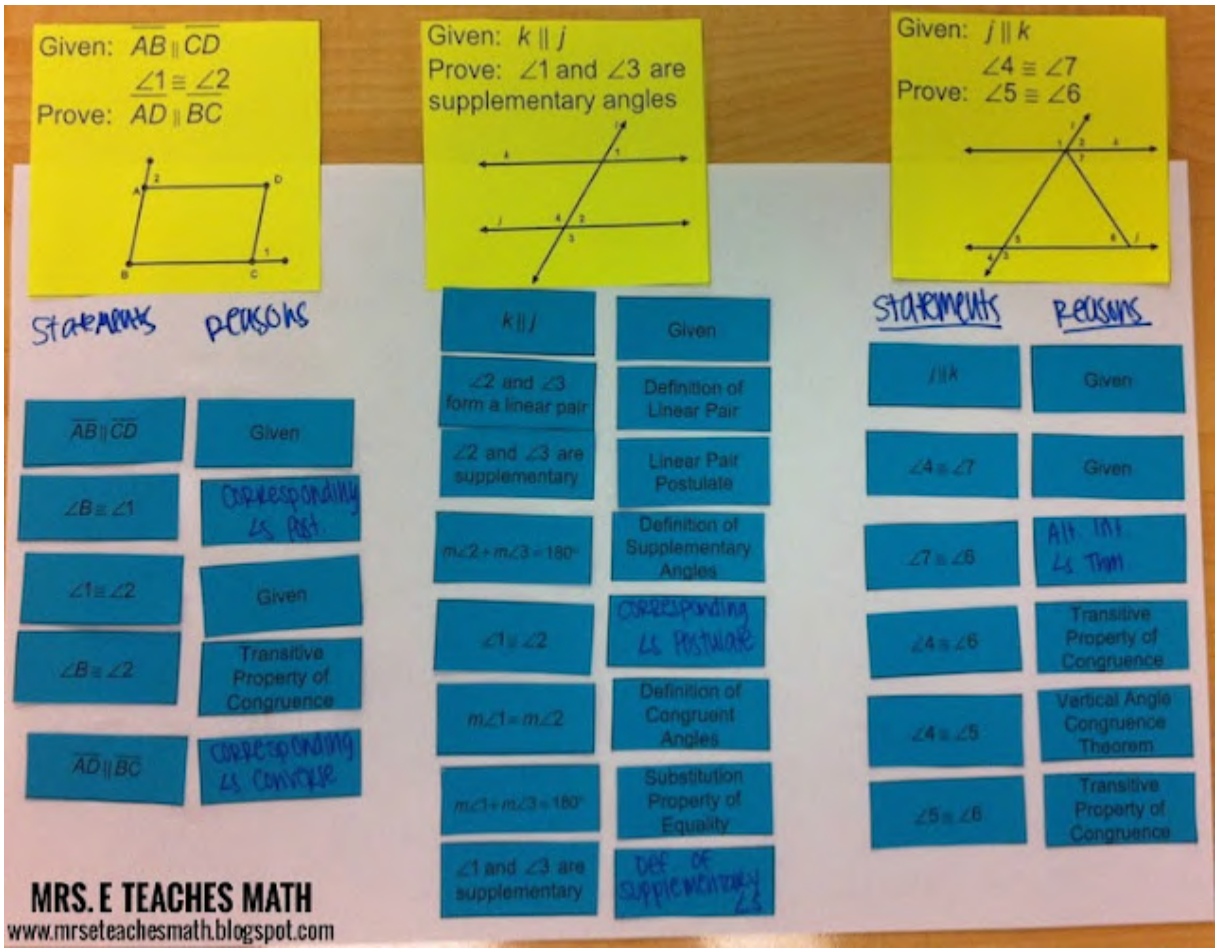
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]


Given: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
Prove: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
Statements
Reasons
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
Given
$\angle B \cong \angle 1$
Corresponding ∠s Post.
$\angle 1 \cong \angle 2$
Given
$\angle B \cong \angle 2$
Transitive Property of Congruence
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
Corresponding ∠s Converse
Given: $k \parallel j$
Prove: $\angle 1$ and $\angle 3$ are supplementary angles
$k \parallel j$
Given
$\angle 2$ and $\angle 3$ form a linear pair
Definition of Linear Pair
$\angle 2$ and $\angle 3$ are supplementary
Linear Pair Postulate
$m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$
Definition of Supplementary Angles
$\angle 1 \cong \angle 2$
Corresponding ∠s Postulate
$m\angle 1 = m\angle 2$
Definition of Congruent Angles
$m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$
Substitution Property of Equality
$\angle 1$ and $\angle 3$ are supplementary
Def. of Supplementary ∠s
Given: $j \parallel k$
$\angle 4 \cong \angle 7$
Prove: $\angle 5 \cong \angle 6$
Statements
Reasons
$j \parallel k$
Given
$\angle 4 \cong \angle 7$
Given
$\angle 7 \cong \angle 6$
Alt. Int. ∠s Thm
$\angle 4 \cong \angle 6$
Transitive Property of Congruence
$\angle 4 \cong \angle 5$
Vertical Angle Congruence Theorem
$\angle 5 \cong \angle 6$
Transitive Property of Congruence
MRS. E TEACHES MATH
www.mrseteachesmath.blogspot.com

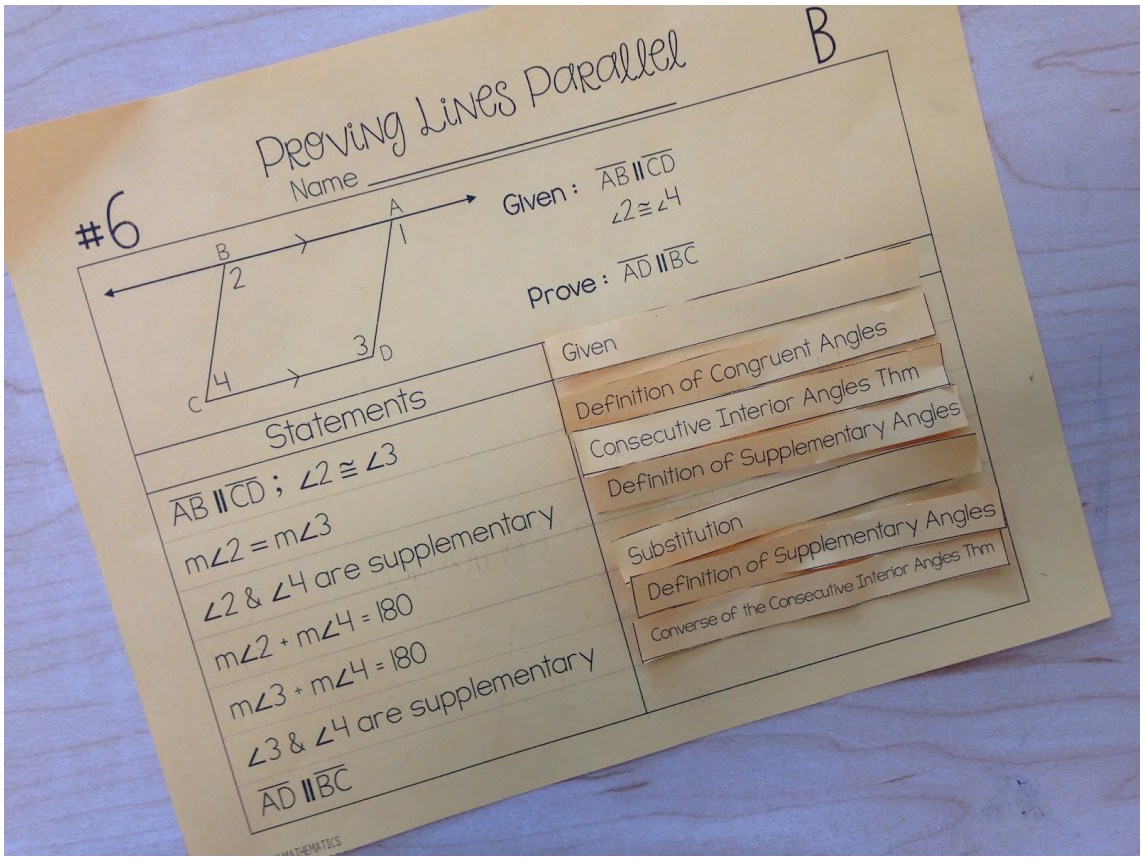
[illegible]

[illegible][1] [illegible]

[1] [illegible]

[illegible]

[illegible]


B
Proving Lines Parallel
Name
#6
Given : AB ∥ CD
∠2 ≅ ∠4
Prove : AD ∥ BC
Statements
AB ∥ CD ; ∠2 ≅ ∠3
m∠2 = m∠3
∠2 & ∠4 are supplementary
m∠2 + m∠4 = 180
m∠3 + m∠4 = 180
∠3 & ∠4 are supplementary
AD ∥ BC
Given
Definition of Congruent Angles
Consecutive Interior Angles Thm
Definition of Supplementary Angles
Substitution
Definition of Supplementary Angles
Converse of the Consecutive Interior Angles Thm

[illegible]

[illegible]

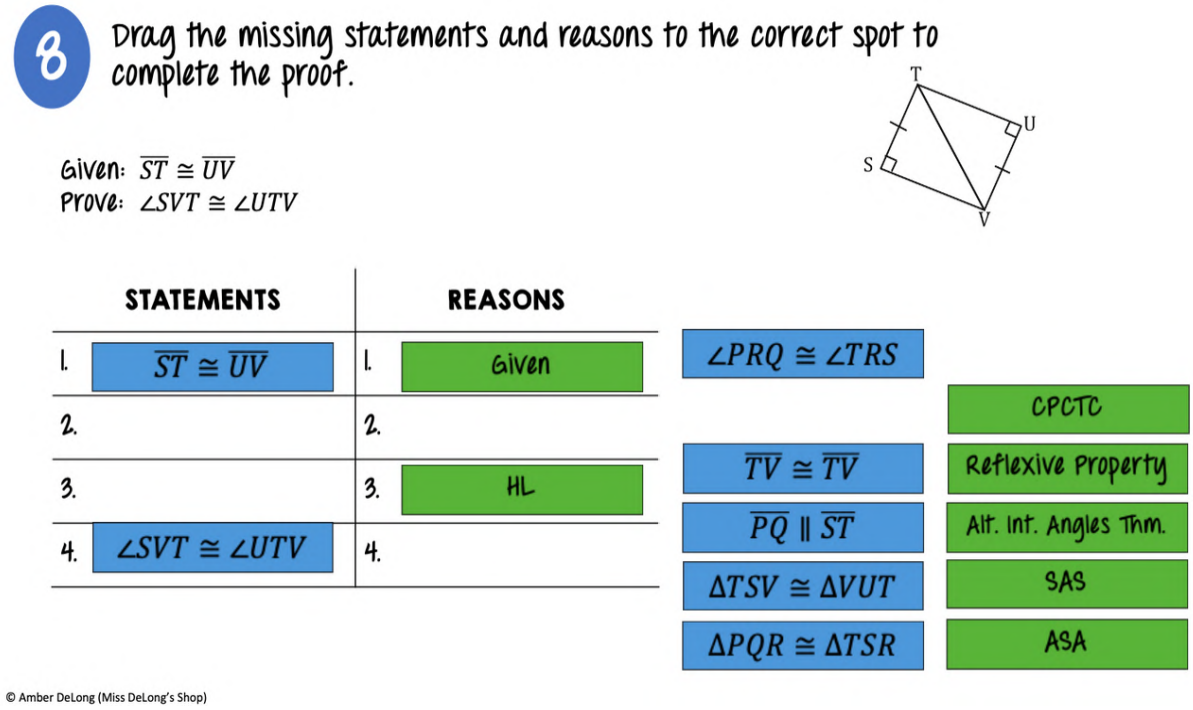
[illegible]

[illegible]

□□□

[illegible]

[illegible]


8
Drag the missing statements and reasons to the correct spot to complete the proof.
Given: $\overline{ST} \cong \overline{UV}$
Prove: $\angle SVT \cong \angle UTV$
T
U
S
V
STATEMENTS
REASONS
1. $\overline{ST} \cong \overline{UV}$
1. Given
2.
2.
3.
3. HL
4. $\angle SVT \cong \angle UTV$
4.
$\angle PRQ \cong \angle TRS$
CPCTC
$\overline{TV} \cong \overline{TV}$
Reflexive Property
$\overline{PQ} \parallel \overline{ST}$
Alt. Int. Angles Thm.
$\Delta TSV \cong \Delta VUT$
SAS
$\Delta PQR \cong \Delta TSR$
ASA
© Amber DeLong (Miss DeLong's Shop)

[illegible]

[illegible]

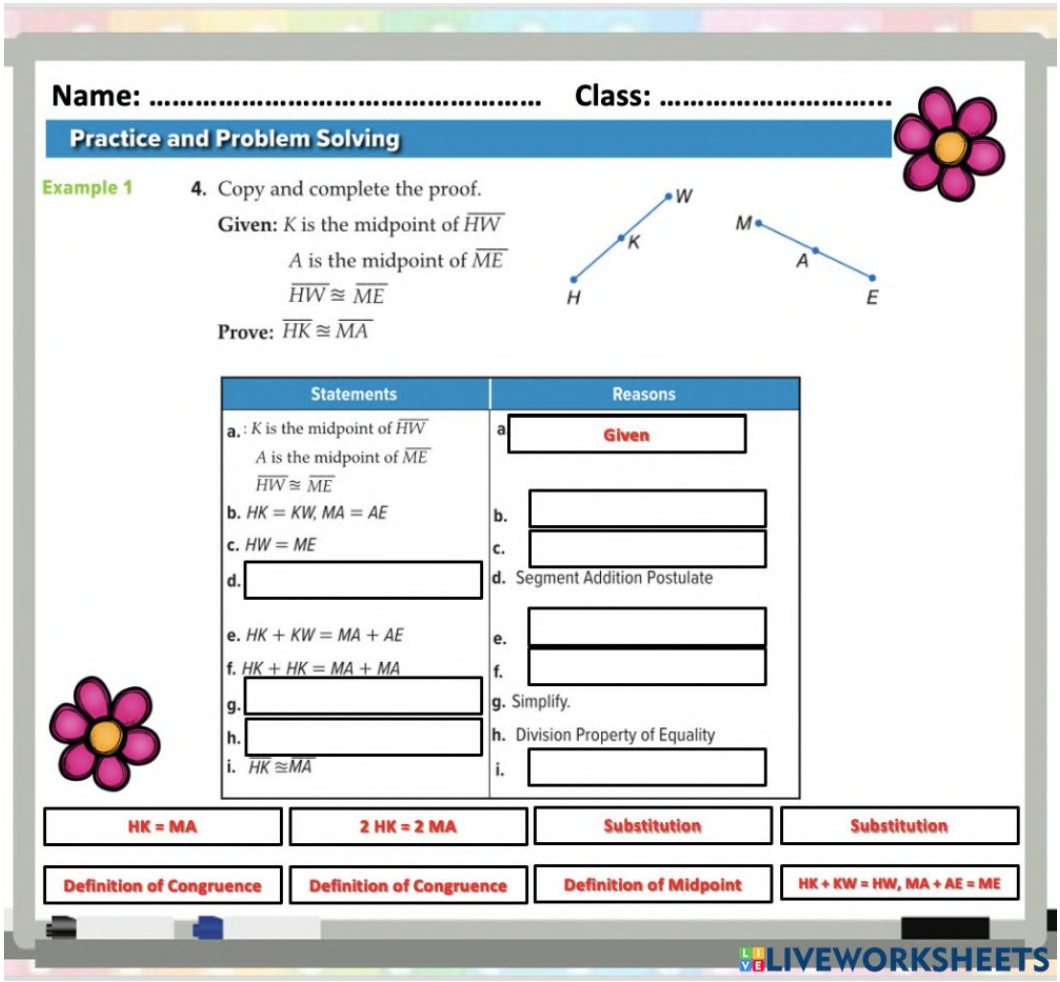
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]



Name: ..... Class: .....

Practice and Problem Solving

Example 1

4. Copy and complete the proof.

Given: K is the midpoint of $\overline{HW}$

A is the midpoint of $\overline{ME}$

$\overline{HW} \cong \overline{ME}$

Prove: $\overline{HK} \cong \overline{MA}$

Statements	Reasons
a. K is the midpoint of $\overline{HW}$; A is the midpoint of $\overline{ME}$; $\overline{HW} \cong \overline{ME}$	a. Given
b. $HK = KW$, $MA = AE$	b.
c. $HW = ME$	c.
d.	d. Segment Addition Postulate
e. $HK + KW = MA + AE$	e.
f. $HK + HK = MA + MA$	f.
g.	g. Simplify.
h.	h. Division Property of Equality
i. $\overline{HK} \cong \overline{MA}$	i.

HK = MA | 2 HK = 2 MA | Substitution | Substitution

Definition of Congruence | Definition of Congruence | Definition of Midpoint | HK + KW = HW, MA + AE = ME

LIVEWORKSHEETS

[illegible]

[illegible]

□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□□

[illegible]

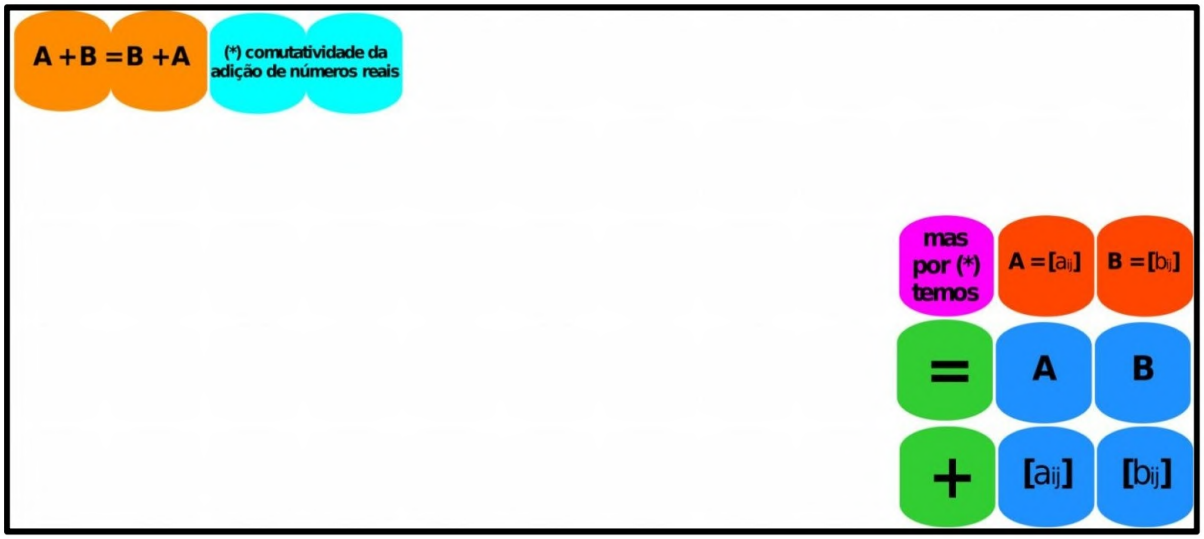
[illegible]

[illegible]

□□□

□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□

[illegible]


A +B =B +A
(*) comutatividade da adição de números reais
mas por (*) temos
A =[aij]
B =[bij]
=
A
B
+
[aij]
[bij]

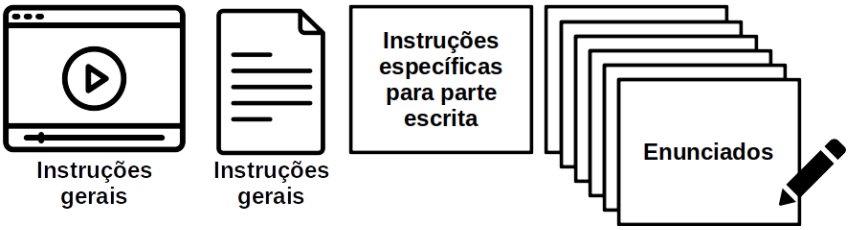
[illegible]

[illegible]

[illegible]

□□□

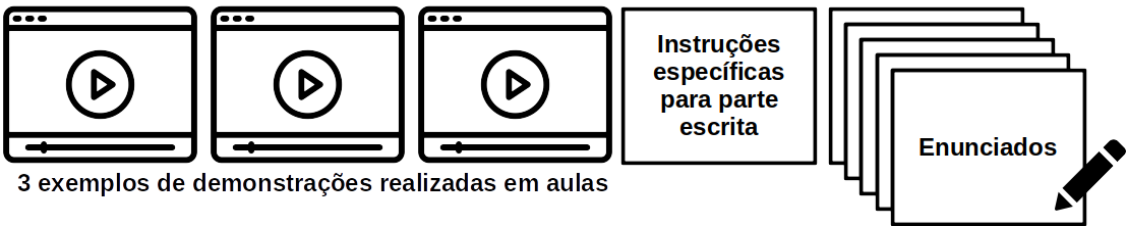
[illegible]


Instruções gerais
Instruções gerais
Instruções específicas para parte escrita
Enunciados

[illegible]

- [illegible]

[illegible]


3 exemplos de demonstrações realizadas em aulas
Instruções específicas para parte escrita
Enunciados

[illegible]

- [illegible]

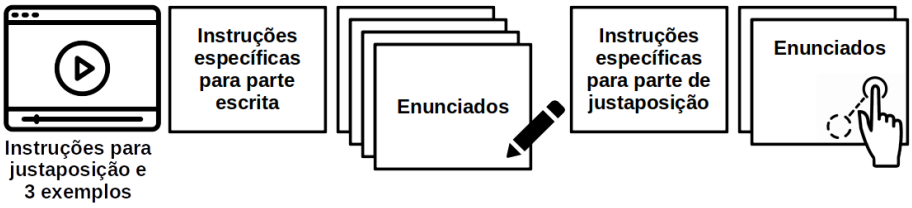
[illegible]

Instruções para justaposição e 3 exemplos
Instruções específicas para parte de justaposição
Enunciados

[illegible]

- [illegible]

[illegible]


Instruções para justaposição e 3 exemplos
Instruções específicas para parte escrita
Enunciados
Instruções específicas para parte de justaposição
Enunciados

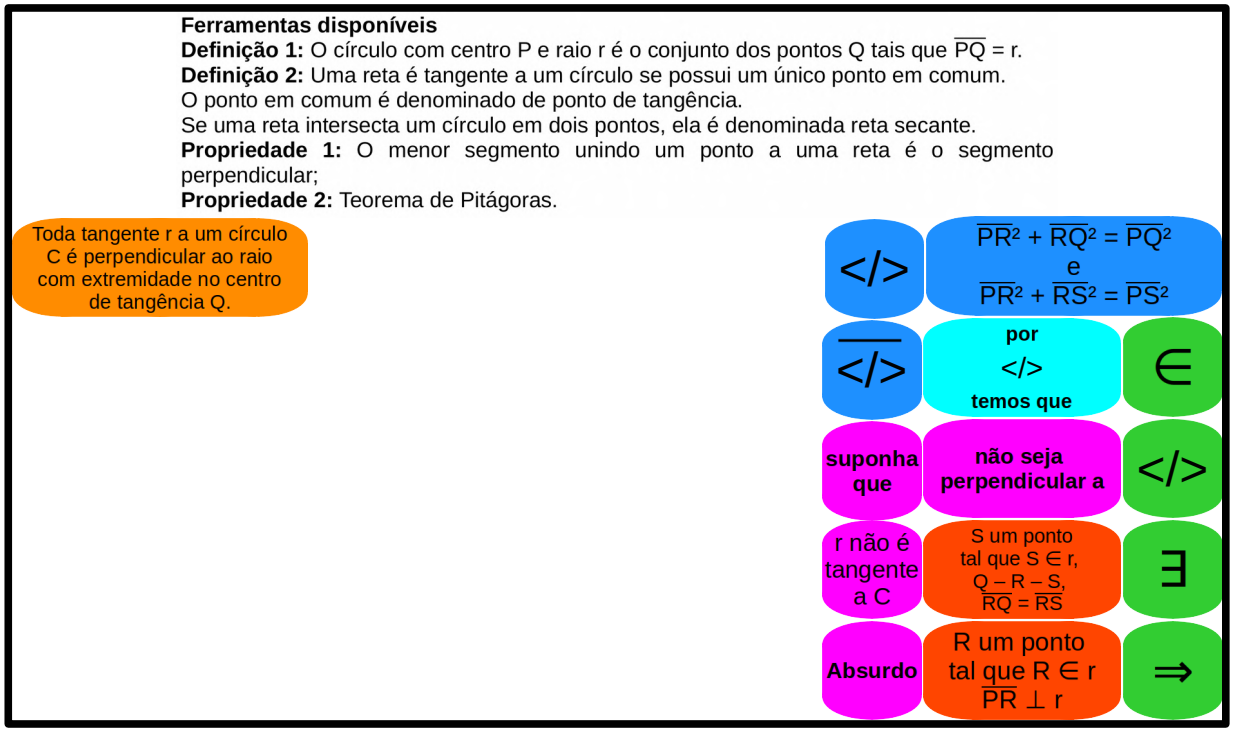
[illegible]

[illegible]

□□□

[illegible]

[illegible]

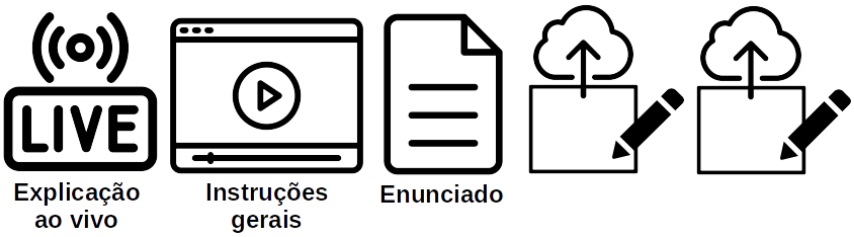

Ferramentas disponíveis
Definição 1: O círculo com centro P e raio r é o conjunto dos pontos Q tais que $\overline{PQ}$ = r.
Definição 2: Uma reta é tangente a um círculo se possui um único ponto em comum.
O ponto em comum é denominado de ponto de tangência.
Se uma reta intersecta um círculo em dois pontos, ela é denominada reta secante.
Propriedade 1: O menor segmento unindo um ponto a uma reta é o segmento perpendicular;
Propriedade 2: Teorema de Pitágoras.
Toda tangente r a um círculo C é perpendicular ao raio com extremidade no centro de tangência Q.
</>
$\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 = \overline{PQ}^2$ e $\overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 = \overline{PS}^2$
$\overline{</>}$
por
</>
temos que
∈
suponha que
não seja perpendicular a
</>
r não é tangente a C
S um ponto tal que S ∈ r, Q – R – S, $\overline{RQ} = \overline{RS}$
∃
Absurdo
R um ponto tal que R ∈ r $\overline{PR} \perp r$
⇒

[illegible]

[illegible]

■ [illegible]

[illegible]

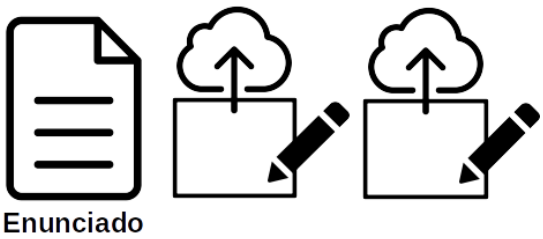

LIVE
Explicação ao vivo
Instruções gerais
Enunciado

[illegible]

[illegible]

■ [illegible]

[illegible]


Enunciado

[illegible]

■ [illegible]

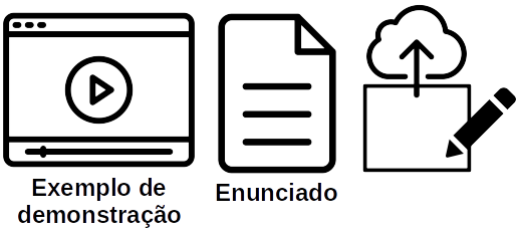
[illegible]

Instruções para justaposição e 1 exemplo
Enunciados

[illegible]

■ [illegible]

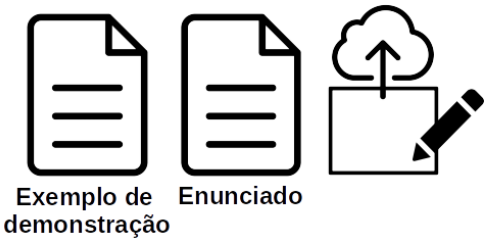
[illegible]


Exemplo de demonstração
Enunciado

[illegible]

■ [illegible]

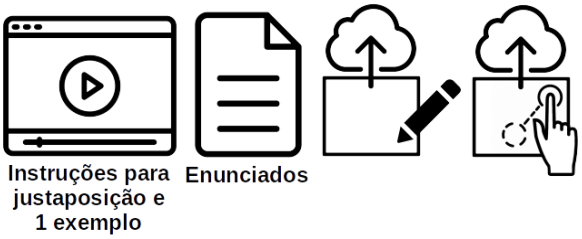
[illegible]


Exemplo de demonstração
Enunciado

[illegible]

■ [illegible]

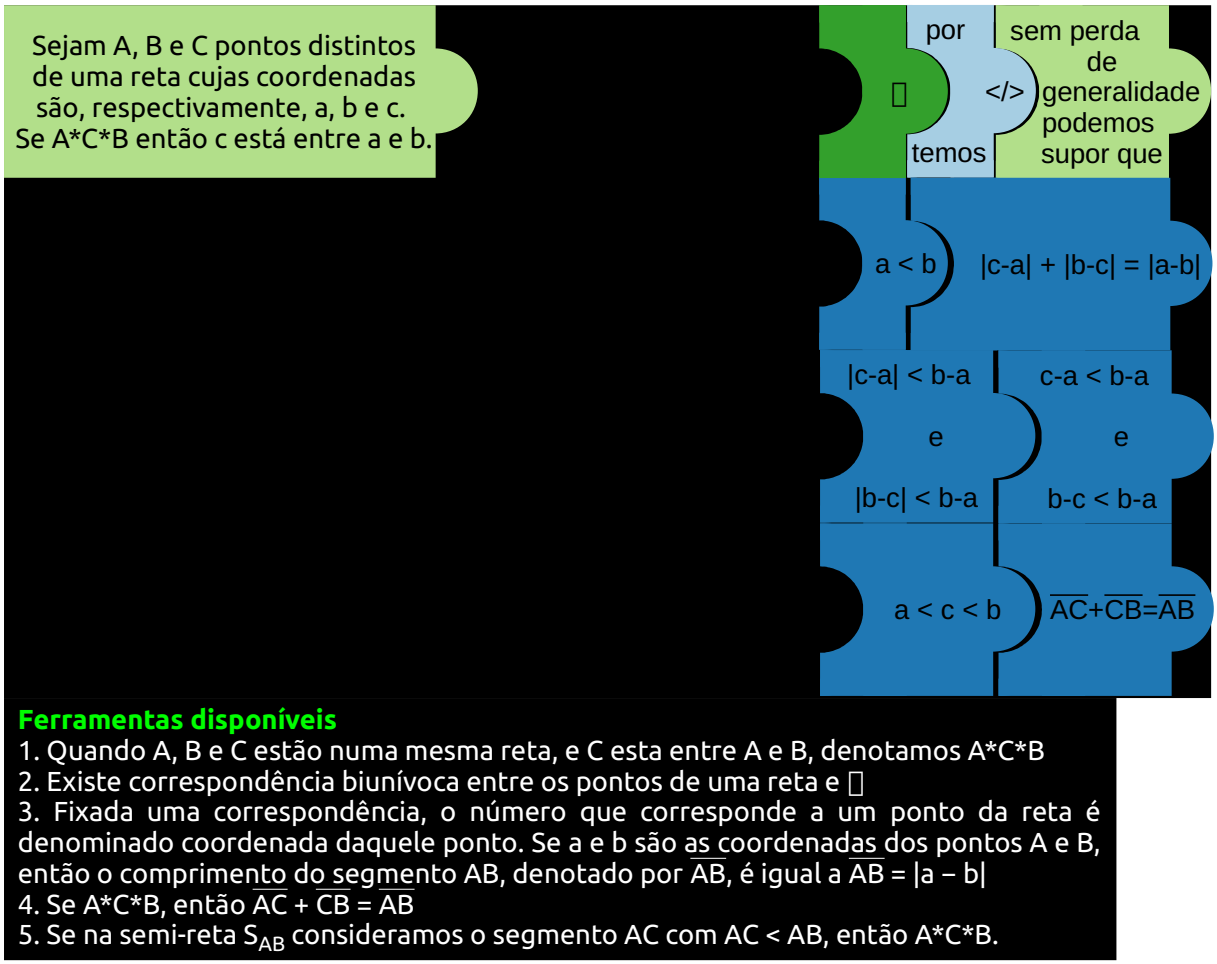
[illegible]


Instruções para justaposição e 1 exemplo
Enunciados

[illegible]

□ □□□□

□□□□ □□□□ □□□□□


Sejam A, B e C pontos distintos de uma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. Se A*C*B então c está entre a e b.
por
sem perda de generalidade podemos supor que
</>
temos
a < b
|c-a| + |b-c| = |a-b|
|c-a| < b-a
e
|b-c| < b-a
c-a < b-a
e
b-c < b-a
a < c < b
AC+CB=AB
Ferramentas disponíveis
1. Quando A, B e C estão numa mesma reta, e C esta entre A e B, denotamos A*C*B
2. Existe correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e
3. Fixada uma correspondência, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado coordenada daquele ponto. Se a e b são as coordenadas dos pontos A e B, então o comprimento do segmento AB, denotado por AB, é igual a AB = |a – b|
4. Se A*C*B, então AC + CB = AB
5. Se na semi-reta S_{AB} consideramos o segmento AC com AC < AB, então A*C*B.

[illegible]

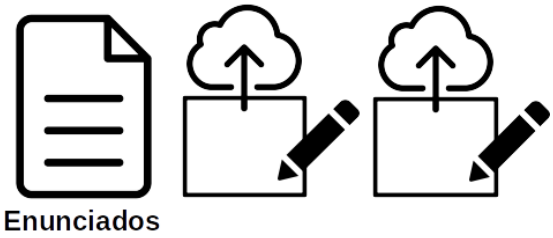
[illegible]

LIVE
Explicação ao vivo
Enunciados

[illegible]

- [illegible]

[illegible]


Enunciados

[illegible]

- [illegible]

[illegible]

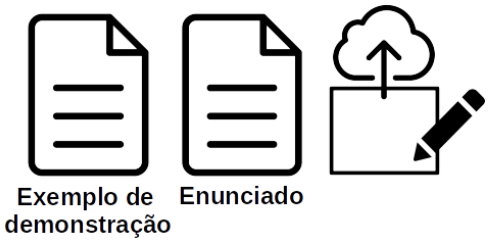
Instruções para justaposição e 1 exemplo
Enunciados

[illegible]

[illegible]

■ [illegible]

[illegible]


Exemplo de demonstração
Enunciado

[illegible]

■ [illegible]

[illegible]

Instruções para justaposição e 1 exemplo
Enunciados

[illegible]

[illegible]

■ [illegible]

[illegible]

Aa
Aula síncrona
Enunciados

[illegible]

- [illegible]

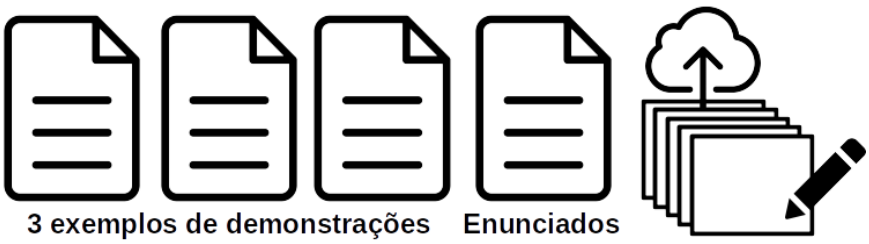
[illegible]

Instruções para justaposição e 1 exemplo
Enunciados

[illegible]

- [illegible]

[illegible]


3 exemplos de demonstrações
Enunciados

[illegible]

■ [illegible]

[illegible]

Aa
Aula síncrona
Instruções para justaposição e 1 exemplo
Enunciados

[illegible]

[illegible]

[illegible]

	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

□□□

[illegible]

[illegible]	[illegible]		[illegible]			[illegible]		[illegible]			[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]		[illegible]			[illegible]		[illegible]			[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

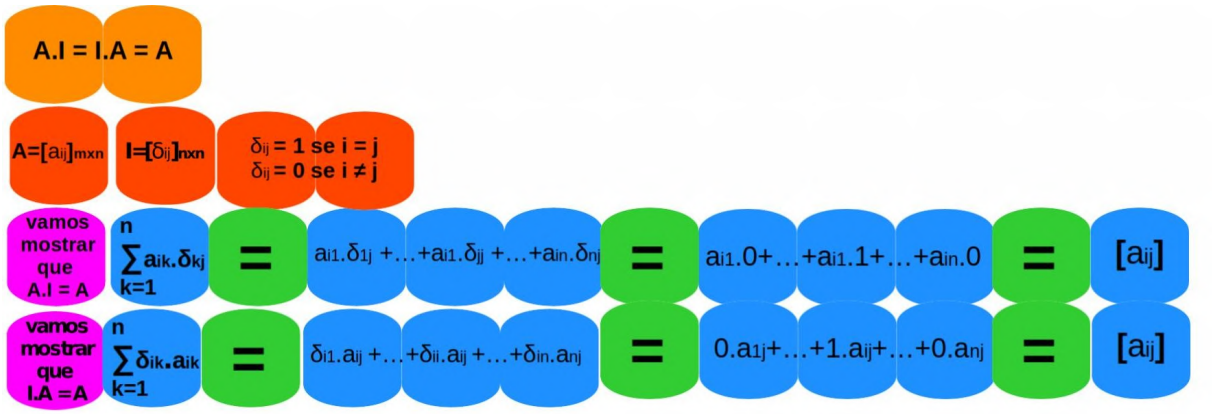
[illegible]

[illegible]

[illegible]

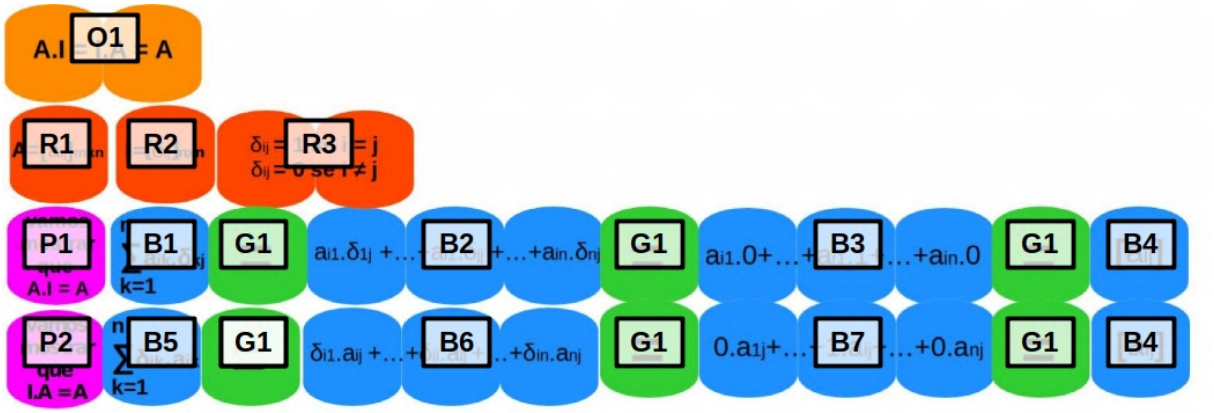
[illegible]

[illegible]


A.I = I.A = A
A=[aij]mxn
I=[δij]nxn
δij = 1 se i = j
δij = 0 se i ≠ j
vamos mostrar que A.I = A
n
∑ aik.δkj
k=1
=
ai1.δ1j +…+ai1.δjj +…+ain.δnj
=
ai1.0+…+ai1.1+…+ain.0
=
[aij]
vamos mostrar que I.A =A
n
∑ δik.aik
k=1
=
δi1.aij +…+δii.aij +…+δin.anj
=
0.a1j+…+1.aij+…+0.anj
=
[aij]

[illegible]

[illegible]


O1
R1
R2
R3
P1
B1
G1
B2
G1
B3
G1
B4
P2
B5
G1
B6
G1
B7
G1
B4

[illegible]

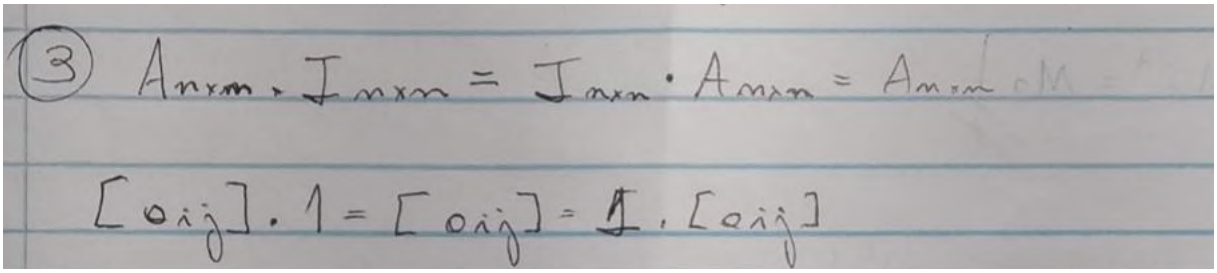
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]



③ $A_{n\times m} \cdot I_{m\times m} = I_{n\times n} \cdot A_{n\times m} = A_{n\times m}$

$[a_{ij}] \cdot 1 = [a_{ij}] = 1 \cdot [a_{ij}]$

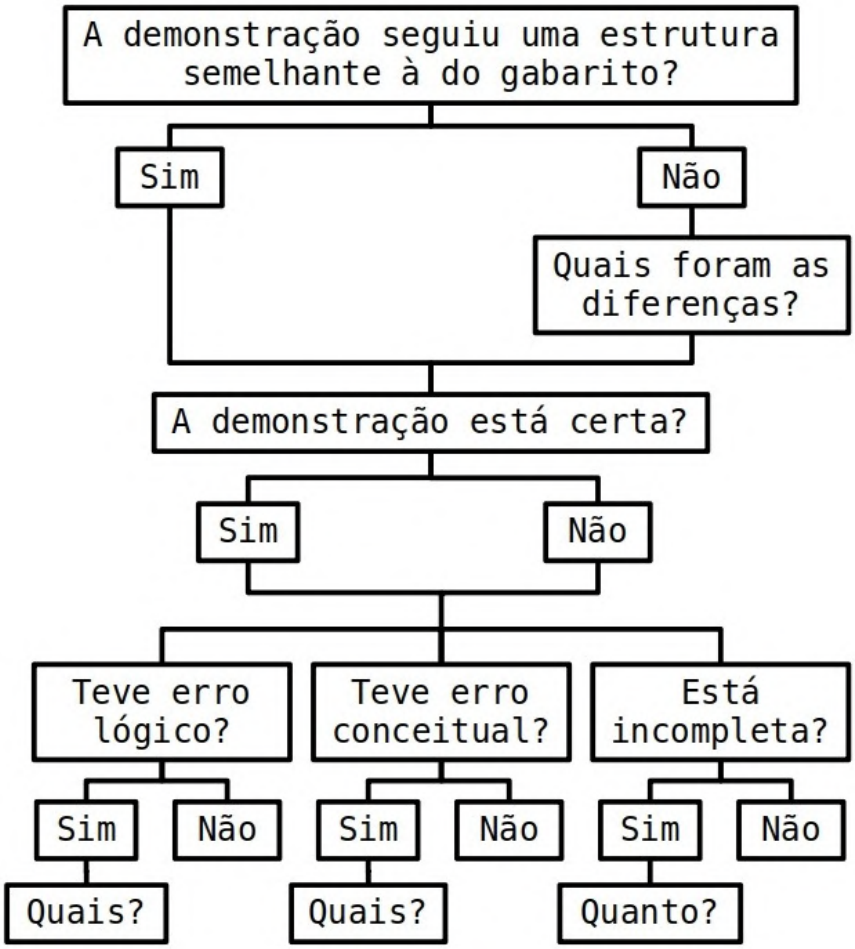
[illegible]

[illegible]

[illegible]

□□□□

[illegible]


A demonstração seguiu uma estrutura semelhante à do gabarito?
Sim
Não
Quais foram as diferenças?
A demonstração está certa?
Sim
Não
Teve erro lógico?
Teve erro conceitual?
Está incompleta?
Sim
Não
Sim
Não
Sim
Não
Quais?
Quais?
Quanto?

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

[illegible]

□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□ □□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□

[illegible]

[illegible] α [illegible] α [illegible] α [illegible]

[illegible]

3 - $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$ Verdadeira

$A = [a_{ij}]$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(\alpha+\beta)\cdot[a_{ij}] = \sum_{k=1}^{n}[(\alpha+\beta)\cdot[a_{ij}]] = \sum_{k=1}^{n}[\alpha\cdot[a_{ij}] + \beta[a_{ij}]] = \sum_{k=1}^{n} \alpha\cdot[a_{ij}] + \beta[a_{ij}]$

$= \alpha\cdot A + \beta\cdot A$

[illegible]

[illegible]

□ □□□□

□ □□□□

□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□

□□□

[illegible]

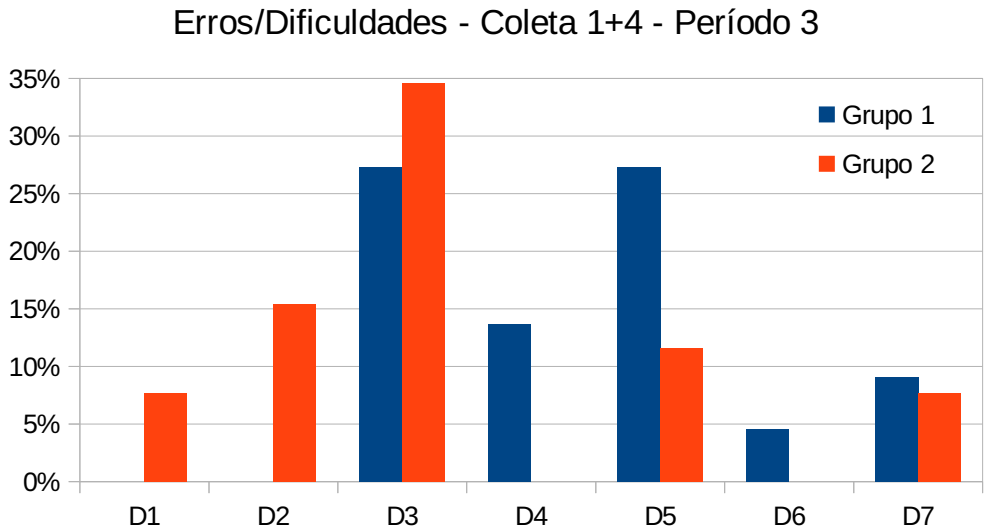
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]


Erros/Dificuldades - Coleta 1+4 - Período 3
35%
30%
25%
20%
15%
10%
5%
0%
D1
D2
D3
D4
D5
D6
D7
Grupo 1
Grupo 2

[illegible]

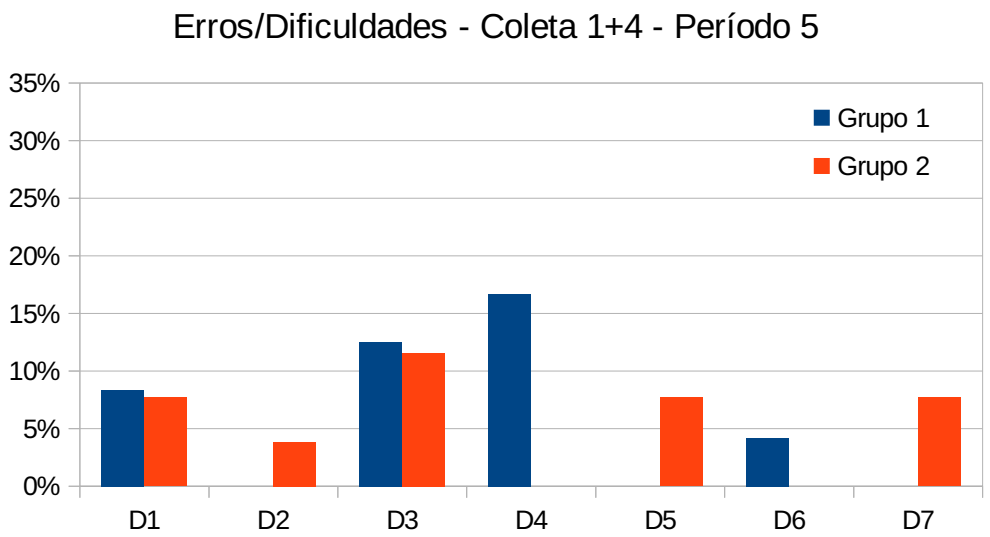
[illegible]

[illegible]	[illegible] α [illegible] α [illegible] α [illegible]
[illegible]	[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]


Erros/Dificuldades - Coleta 1+4 - Período 5
35%
30%
25%
20%
15%
10%
5%
0%
Grupo 1
Grupo 2
D1
D2
D3
D4
D5
D6
D7

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible] α [illegible] α [illegible] α [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

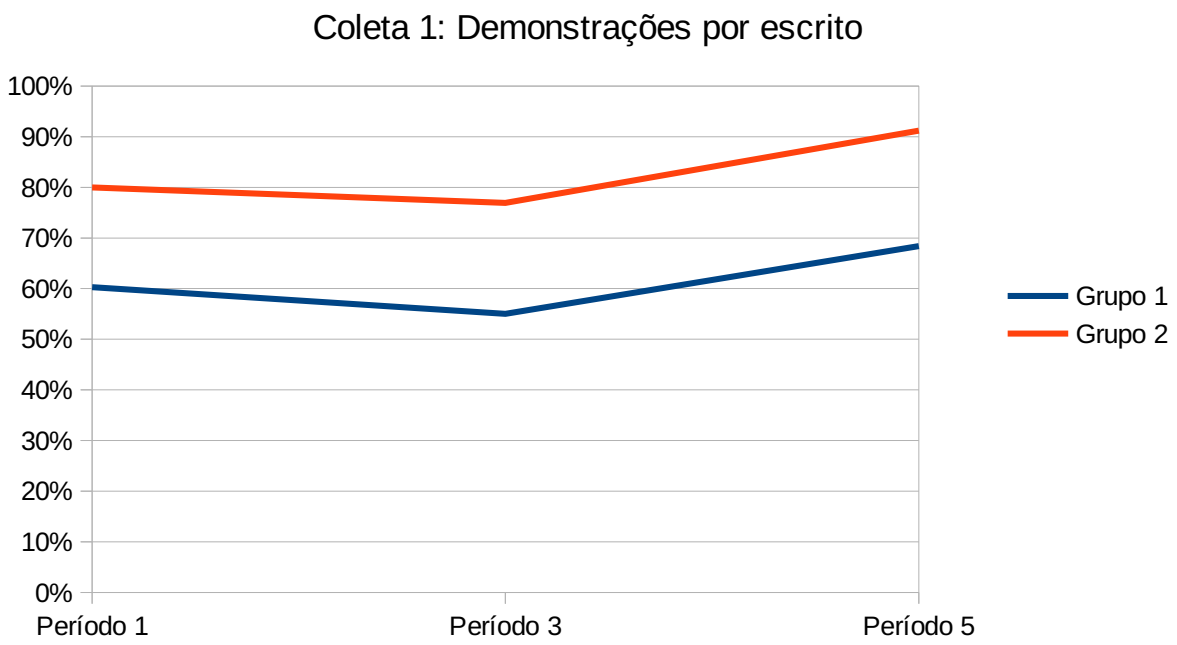
□□□□□ □□ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□ □□□□

[illegible]

[illegible]


Coleta 1: Demonstrações por escrito
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
Período 1
Período 3
Período 5
Grupo 1
Grupo 2

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible]

□□□

□ □□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

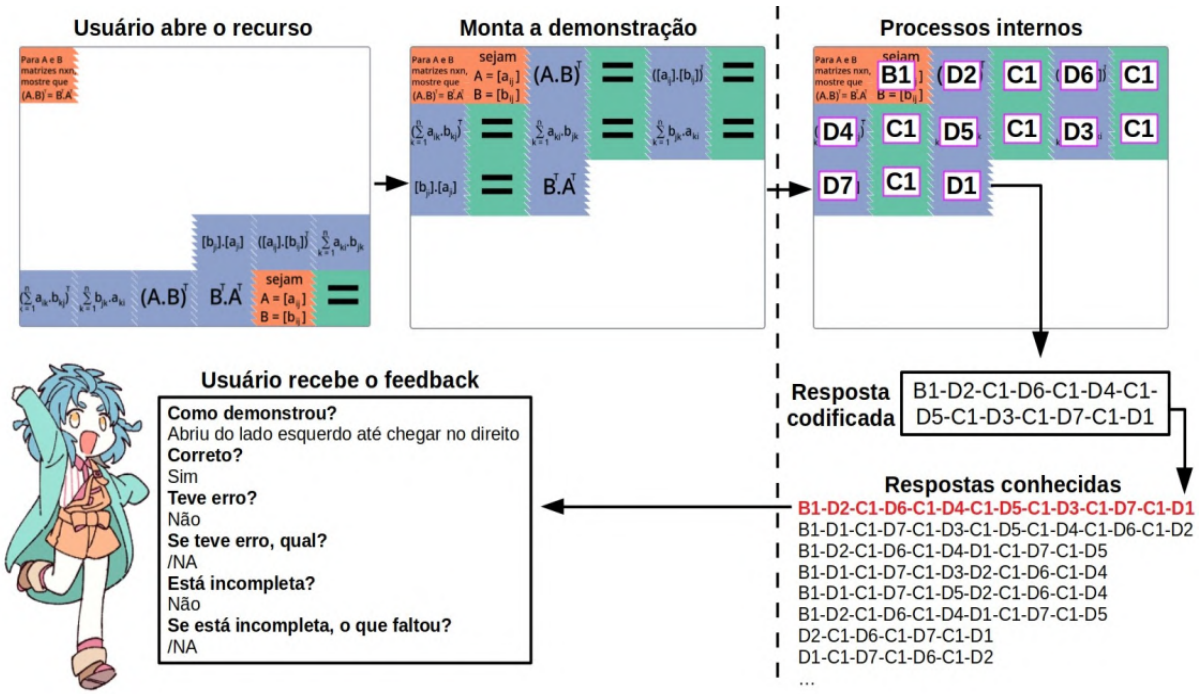
[illegible]

[illegible]

□□□

[illegible]

[illegible]


Usuário abre o recurso
Monta a demonstração
Processos internos
Usuário recebe o feedback
Como demonstrou?
Abriu do lado esquerdo até chegar no direito
Correto?
Sim
Teve erro?
Não
Se teve erro, qual?
/NA
Está incompleta?
Não
Se está incompleta, o que faltou?
/NA
Resposta codificada
B1-D2-C1-D6-C1-D4-C1-D5-C1-D3-C1-D7-C1-D1
Respostas conhecidas
B1-D2-C1-D6-C1-D4-C1-D5-C1-D3-C1-D7-C1-D1
B1-D1-C1-D7-C1-D3-C1-D5-C1-D4-C1-D6-C1-D2
B1-D2-C1-D6-C1-D4-D1-C1-D7-C1-D5
B1-D1-C1-D7-C1-D3-D2-C1-D6-C1-D4
B1-D1-C1-D7-C1-D5-D2-C1-D6-C1-D4
B1-D2-C1-D6-C1-D4-D1-C1-D7-C1-D5
D2-C1-D6-C1-D7-C1-D1
D1-C1-D7-C1-D6-C1-D2
...

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

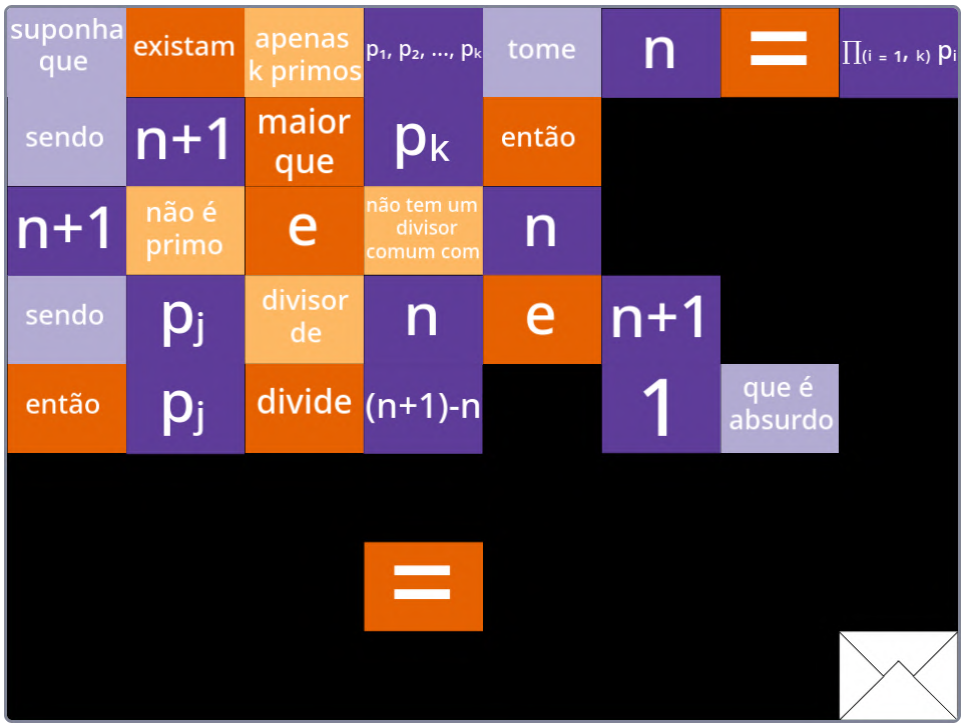
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]


suponha que
existam
apenas k primos
$p_1, p_2, \ldots, p_k$
tome
n
=
$\prod_{(i = 1, k)} p_i$
sendo
n+1
maior que
p_k
então
n+1
não é primo
e
não tem um divisor comum com
n
sendo
p_j
divisor de
n
e
n+1
então
p_j
divide
(n+1)-n
1
que é absurdo
=

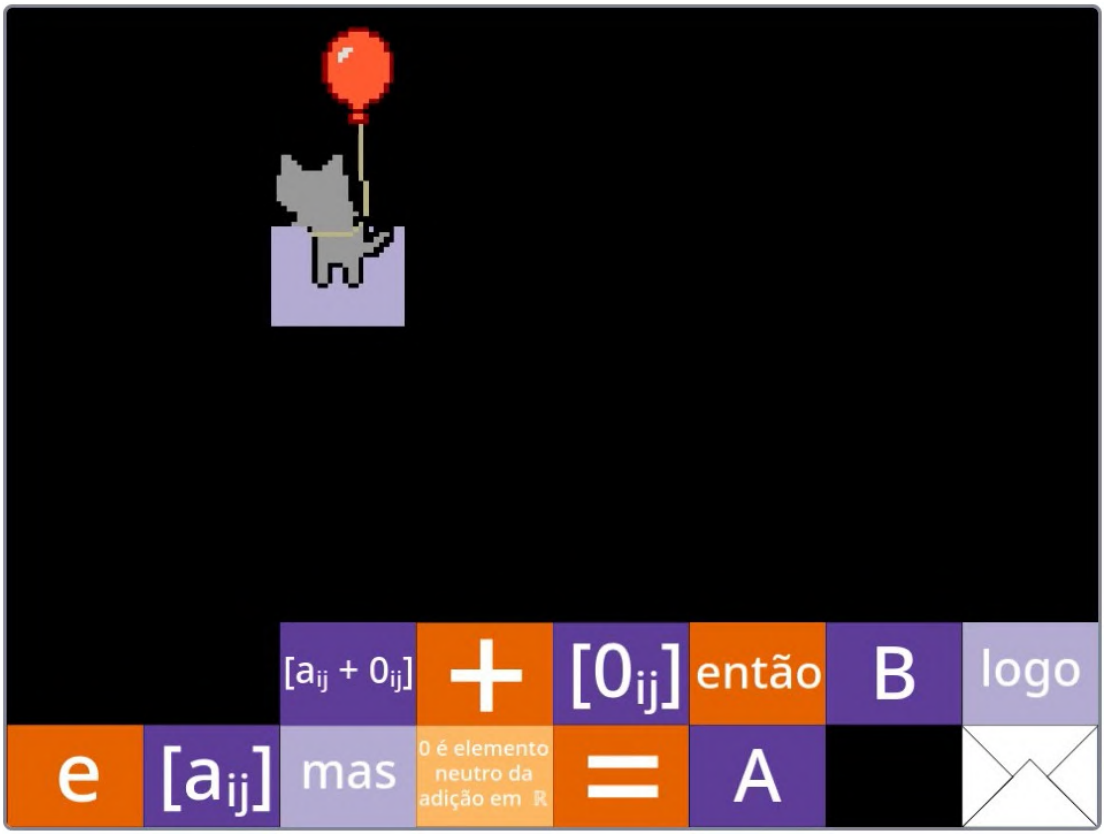
[illegible]

□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible]


[aij + 0ij]
+
[0ij]
então
B
logo
e
[aij]
mas
0 é elemento neutro da adição em ℝ
=
A

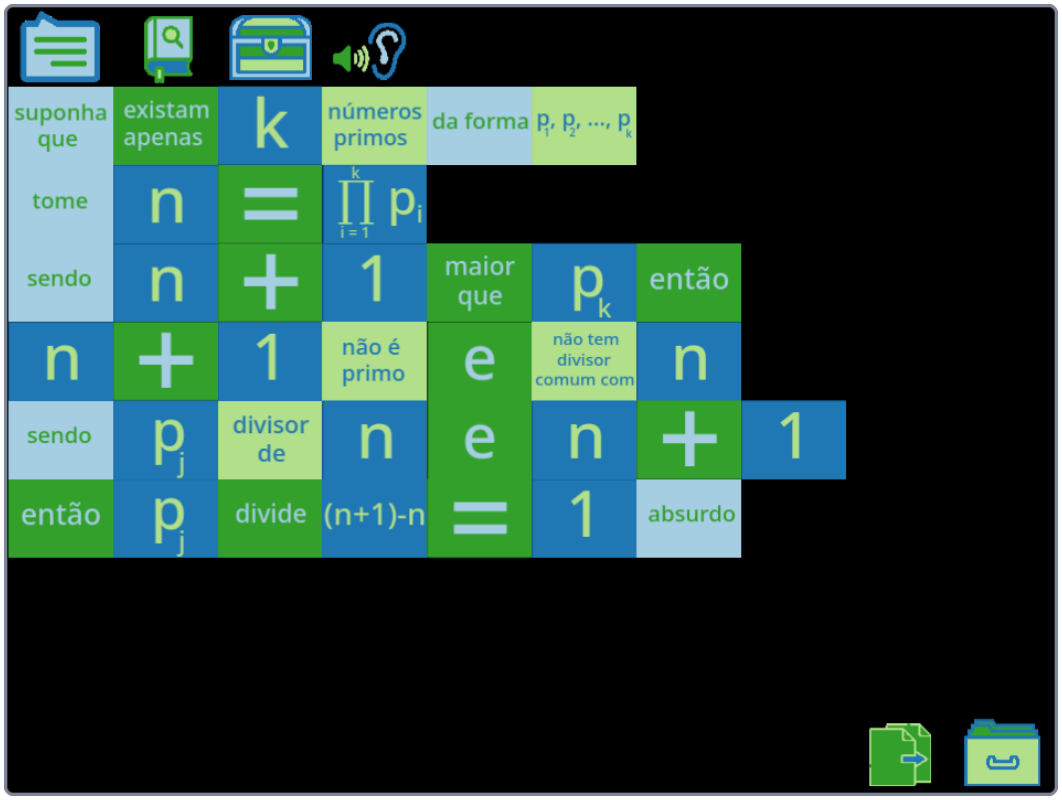
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]


suponha que
existam apenas
k
números primos
da forma
$p_1, p_2, \ldots, p_k$
tome
$n = \prod_{i=1}^{k} p_i$
sendo
$n + 1$
maior que
p_k
então
$n + 1$
não é primo
e
não tem divisor comum com
n
sendo
p_j
divisor de
n
e
$n + 1$
então
p_j
divide
(n+1)-n
= 1
absurdo

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Demonstre que se o limite de f: B → ℝ em um ponto existir, então ele é único.

suponha que	$\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$	e seja dado $\varepsilon > 0$, agora tome $\varepsilon/2$	então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ de modo que	se $x \in B$: $0 < \lvert x - a \rvert < \delta_1$ $0 < \lvert x - a \rvert < \delta_2$
$\Rightarrow \lvert f(x) - L_1 \rvert$ $\Rightarrow \lvert f(x) - L_2 \rvert$	$< \varepsilon/2$ $< \varepsilon/2$	escolhendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$	se $x \in B$ e $0 < \lvert x - a \rvert < \delta$ temos	$0 \leq \lvert L_1 - L_2 \rvert =$
$\lvert L_1 - f(x) +$ $f(x) - L_2 \rvert \leq$	$\lvert f(x) - L_1 \rvert +$ $\lvert f(x) - L_2 \rvert <$	$\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, logo $L_1 = L_2$		

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Prove que existem infinitos
números primos positivos:
sendo n+1 maior que pk

[illegible]

[illegible]

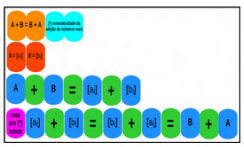
[illegible]

[illegible]

[illegible]

Arrasta o X é um recurso virtual construído durante a pandemia de COVID-19 para servir de instrumento na coleta de dados de uma pesquisa de doutorado que ocorreu em formato remoto. A respectiva pesquisa, investigou o efeito de colocar em ordem os segmentos de texto que formavam uma demonstração original, através dos processos de arrastar, duplicar e editar seus conteúdos.

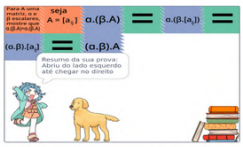
Nesta página você encontrará os materiais desenvolvidos e os dados brutos (sem identificação) que nos permitiram compreender os ganhos que esta abordagem proporciona ao estudante.



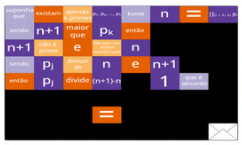
Geração 1

Geração 2

Geração 3



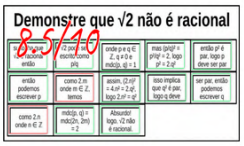
Geração 4



Geração 5

Geração 6

Geração 7



Geração 8

Geração 9

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

□□□

□□□

□□□ □ □□□ □□ □ □□□□□ □ □□□ □□□□ □□□□□

□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

□□□□

[illegible]	
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

[illegible]	
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

[illegible]	
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

[illegible]	
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

| □□□□

| □□□□