



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

JEFFERSON CASTRO SILVA

**Algumas conexões entre a derivada generalizada
de Hukuhara e a derivada fuzzy baseada em
independência linear forte**

Campinas

2023

Jefferson Castro Silva

**Algumas conexões entre a derivada generalizada de
Hukuhara e a derivada fuzzy baseada em independência
linear forte**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Uni-
versidade Estadual de Campinas como parte
dos requisitos exigidos para a obtenção do
título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Estevão Esmi Laureano

Este trabalho corresponde à versão
final da Tese defendida pelo aluno Jef-
ferson Castro Silva e orientada pelo
Prof. Dr. Estevão Esmi Laureano.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38a Silva, Jefferson Castro, 1987-
Algumas conexões entre a derivada generalizada Hukuhara e a derivada fuzzy baseada em independência linear forte / Jefferson Castro Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Estevão Esmi Laureano.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Números fuzzy. 2. Independência linear forte (Álgebra linear). 3. Cálculo fuzzy. 4. Teoria da aproximação. 5. Espaços de Banach. I. Esmi, Estevão, 1982-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Some connections between the generalized Hukuhara derivative and the fuzzy derivative based on strong linear independence

Palavras-chave em inglês:

Fuzzy numbers

Strong linear independence (Linear algebra)

Fuzzy calculus

Approximation theory

Banach spaces

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Estevão Esmi Laureano [Orientador]

Peter Sussner

Vinícius Francisco Wasques

Francielle Santo Pedro Simões

Marina Tuyako Mizukoshi

Data de defesa: 22-11-2023

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0003-9157-1289>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/5498640799213531>

**Tese de Doutorado defendida em 22 de novembro de 2023 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). ESTEVÃO ESMI LAUREANO

Prof(a). Dr(a). PETER SUSSNER

Prof(a). Dr(a). VINÍCIUS FRANCISCO WASQUES

Prof(a). Dr(a). FRANCIELLE SANTO PEDRO SIMÕES

Prof(a). Dr(a). MARINA TUYAKO MIZUKOSHI

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos meus amados sobrinhos Louise, Levi e Miguel.

Agradecimentos

A Deus pelas graças recebidas mesmo em tempos de dificuldade que enfrentamos.

A minha família pela compreensão, paciência e entendimento da minha escolha em estudar distante de casa. Em especial, a minha amada mãe Giovana e a minha amada e gentil companheira Sarah pela compreensão dos momentos que ficamos distantes.

Ao meu orientador professor Estevão Laureano pela paciência em me guiar no processo do desenvolvimento desse trabalho o qual não seria possível sem ele.

Aos colegas de trabalho do Ciclo Básico de Engenharia da Universidade do Estado do Amazonas que me apoiaram e incentivaram, sem seus esforços não estaria chegando a esse momento. Em especial, gostaria de agradecer ao meu amigo Prof. Adrian Ribeiro pelo constante incentivo a seguir firme e forte no curso.

Aos colegas de pós-graduação, seja do Mestrado em Matemática Aplicada ou de Doutorado em Matemática ou Matemática Aplicada pelo incentivo e ajuda em diversos momentos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas pela formação e ensinamentos.

A Universidade Estadual de Campinas pela estrutura e suportes oferecidos.

A Universidade Estadual do Amazonas por autorizar meu afastamento durante 48 meses para realizar o processo de doutoramento.

A todos aqueles que me apoiaram durante a realização deste trabalho, em especial aos professores Sandro Bittar, Nilomar Vieira e Flávia Morgana da Universidade Federal do Amazonas pela recomendação e posterior incentivo a realização do curso de Doutorado em Matemática Aplicada. *In memoriam, Nilomar.*

"A felicidade é um estado de espírito, e mesmo nas horas mais difíceis, podemos encontrar motivos para sorrir e agradecer.- José Lins do Rego, Menino de Engenho (1932).

Resumo

Neste trabalho estabeleceremos conexões entre os conceitos de derivada generalizada de Hukuhara (gH-derivada) e a Ψ -derivada de funções fuzzy. Os resultados estabelecidos dessa relação serão utilizados para obter métodos de resolução analíticos de problemas de valor inicial fuzzy (PVIF) sob a gH-derivada ou sob a Ψ -derivada. Definiremos a Ψ -derivada de funções da forma $f(x) = p_1(x)A_1 + \cdots + p_n(x)A_n$, em que $p_1, \dots, p_n$ são n funções reais e $\{A_1, \dots, A_n\}$ é um conjunto fortemente linearmente independente (FLI) de números fuzzy. Analisaremos quais são as condições necessárias e suficientes para que a Ψ -derivada e a gH-derivada da função f coincidam para $x \in (a, b)$. Concluiremos que somente a análise das funções coeficientes p_i e de suas derivadas p'_i é suficiente para determinar se f é gH-diferenciável e se a gH-derivada de f coincide com a Ψ -derivada. Exibiremos um conjunto $\{1, A_1, \dots, A_n\}$ FLI de números fuzzy cujos elementos da forma $B = p_0 + p_1A_1 + \cdots + p_nA_n$ podem ser aproximados de forma arbitrária de um número fuzzy A , cujos extremos dos intervalos associados aos seus α -níveis são contínuos. Sob algumas condições fracas, aplicaremos esse último resultado para aproximar uniformemente uma função fuzzy g arbitrária continuamente gH-diferenciável da função f da forma $f(x) = p_0(x) + p_1(x)A_1 + \cdots + p_n(x)A_n$ e, da mesma maneira, aproximaremos uniformemente a gH-derivada de g da respectiva Ψ -derivada de f . Aplicaremos os resultados para obter soluções analíticas de um PVIF, sob a gH-derivada, a partir da solução de um PVIF que é equivalente ou aproximado via Ψ -derivada. A partir de alguns modelos fuzzy simples como os de decaimento e de crescimento populacional, com condições iniciais incertas, e com algumas hipóteses adicionais, verificaremos que é possível obter a solução analítica de um PVIF, sob a Ψ -derivada, quando o conjunto solução do PVIF sob a gH-derivada é fortemente linearmente independente.

Palavras-chave: Números Fuzzy; Independência Linear Forte; Cálculo Fuzzy; Espaços de Banach; Aproximação; Derivada generalizada de Hukuhara; Ψ -derivada.

Abstract

In this study, we will establish connections between the concepts of Hukuhara generalized derivative (gH-derivative) and the Ψ -derivative of fuzzy functions. The results established from this relation will be used to obtain analytical methods for solving fuzzy initial value problems (FIVPs) under the gH-derivative or under the Ψ -derivative. We will define the Ψ -derivative of functions of the form $f(x) = p_1(x)A_1 + \cdots + p_n(x)A_n$, where $p_1, \dots, p_n$ are n real functions, and $A_1, \dots, A_n$ is a strongly linearly independent set of fuzzy numbers. We will analyze what are the necessary and sufficient conditions so that the Ψ -derivative and the gH-derivative of the function f coincide for $x \in (a, b)$. We will conclude that only the analysis of the coefficient functions p_i and their derivatives p_i' is sufficient to determine whether f is gH-differentiable and whether the gH-derivative of f coincides with the Ψ -derivative. We will exhibit an SLI set $\{1, A_1, \dots, A_n\}$ of fuzzy numbers whose elements of the form $B = p_0 + p_1A_1 + \cdots + p_nA_n$ can be approximated arbitrarily to a fuzzy number A , whose endpoints of their α -levels are continuous. Under some weak conditions, this latest result to uniformly approximate an arbitrary continuously gH-differentiable fuzzy function g to the function f , of the form $f(x) = p_0(x) + p_1(x)A_1 + \cdots + p_n(x)A_n$ and in the same way, we will uniformly approximate the gH-derivative of g to the respective Ψ -derivative of f . We will apply the results to obtain analytical solutions of a PVIF, under the gH-derivative, from the solution of a PVIF that is equivalent or approximated via the Ψ -derivative. From some simple fuzzy models such as the decay and the population growth, with uncertain initial conditions, and with some additional hypotheses, we will verify that it is possible to obtain the analytical solution of a PVIF, under the Ψ -derivative, when the solution set of the PVIF under the gH-derivative is strongly linearly independent.

Keywords: Fuzzy Numbers; Strong Linear Independence; Fuzzy Calculus; Banach Space; Approximation; Generalized Hukuhara derivative; Ψ -derivative.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação gráfica do conjunto Fuzzy A definido no Exemplo 1.	25
Figura 2 – Representação do conjunto de nível $[A]_{0.5}$	26
Figura 3 – Exemplo de um número fuzzy e seu respectivo α -nível	28
Figura 4 – Conjunto fuzzy que não é um número fuzzy	28
Figura 5 – Representação do número real $x = 0.5$ como um número fuzzy	29
Figura 6 – Representação do intervalo real $[-1, 1]$ como um número fuzzy	29
Figura 7 – Números fuzzy triangular e fuzzy trapezoidal	31
Figura 8 – Número fuzzy em forma de sino	32
Figura 9 – Gráfico da função fuzzy f (região cinza) onde cada reta no feixe representa a variação dos parâmetros $\alpha \in [0, 1]$; os extremos inferior e superior do suporte de $f(t)$ são representados pelos “lados opostos da figura triangular”; no eixo vertical o intervalo $[-1, 1]$ é a imagem de $t = \frac{1}{2}$ no suporte de $f(t)$	34
Figura 10 – Representação dos Números Fuzzy A , B e seu produto $A \cdot B$	41
Figura 11 – À esquerda o gráfico de f e à direita o gráfico da sua respectiva gH-derivada. Nota-se que $t = 0$ é o <i>switch point</i> de f	50
Figura 12 – $(1; 3; 5)$ -curva azul- é um número fuzzy simétrico em relação a 3 e $(1; 2; 5)$ -curva vermelha tracejada- é um número fuzzy assimétrico.	57
Figura 13 – A função que associa números reais a números fuzzy $f(x) = (1 + x^2)(1; 2; 3) + (-\sin^2(0.5\pi x))(0; 0; 1)$, $x \in (-1, 1)$, dada no Exemplo 25, e sua Ψ -derivada $f'(x) = 2x(1; 2; 3) + (-\pi \sin(0.5\pi x)) \cos(0.5\pi x)(0; 0; 1)$, respectivamente.	83
Figura 14 – Na parte superior da figura estão representados (da esquerda para direita, respectivamente) os números fuzzy A_0 e A_i , com $\alpha_i = 0.7$, do Lema 1. Enquanto na parte inferior está representado o número fuzzy A_n do mesmo lema.	85
Figura 15 – Construção iterativa da aproximação B do número fuzzy em forma de sino A por meio das inversas da função degrau unitário representado pelos retângulos de base $[p_i - p_0, p_0]$, quando i é ímpar e $[p_0, p_i + p_0]$ quando i é par, com alturas correspondentes $\alpha_i \in [0, 1]$	88
Figura 16 – Seja $\epsilon = 0.1$. A aproximação ao número fuzzy A para os casos $n = 3$ (à esquerda) e $n = 4$ (à direita).	90
Figura 17 – Seja $\epsilon = 0.1$. A aproximação ao número fuzzy A para os casos $n = 5$ (à esquerda) e $n = 6$ (à direita), respectivamente.	91

Figura 18 – Seja $\epsilon = 0.1$. A aproximação ao número fuzzy A para $n = 33$ (imagem superior) e $n = 60$ (imagem inferior), respectivamente. À medida que n cresce, melhor se torna a aproximação $B = p_0A_0 + p_1A_1 + \dots + p_nA_n$ ao número fuzzy A	92
Figura 19 – Seja $\epsilon = 0.1$. Cada imagem retrata o número fuzzy $A = (1; 2; 3.5; 5)$ através da linha sólida azul e a sua aproximação $B = p_0A_0 + \dots + p_nA_n$ através da região cinza, com $A_0, \dots, A_n$ dados conforme o Lema 1 e cujos coeficientes p_i são definidos pelas igualdades em (3.10), para $n = 6, 12, 18, 30$ respectivamente.	93
Figura 20 – Gráficos de f (superior à esquerda) e f'_{gH} (superior à direita); gráficos de g (inferior à esquerda) e g' (inferior à direita).	98
Figura 21 – Gráfico da solução $X(t)$ do Exemplo 28 para a condição inicial $X_0 = (0; 1; 3) \in \mathcal{S}(A_1, A_2)$, com $A_1 = (0; 0; 1)$, $A_2 = (0; 1; 2)$ e $a = 0.25$	101
Figura 22 – Gráfico da solução $X(t)$ do Exemplo 29 para as condições iniciais $X_0 = (0; 1; 3)$ e $X'_0 = (-1; 1; 2)$ em $\mathcal{S}(A_1, A_2)$, com $A_1 = (0; 0; 1)$, $A_2 = (0; 1; 2)$ e $a = -5$ e $b = 2$	103
Figura 23 – Gráfico da solução $X(t)$ do Exemplo 30 para a condição inicial $X_0 = (-1; 0.5; 2)$ em $\mathcal{S}(1, A_1, A_2)$, com $A_1 = (-1; -0.5; 1)$, $A_2 = (0; 0; 1)$ e $X_0 = A_1 + A_2$	105
Figura 24 – Gráfico da solução X do modelo de decaimento fuzzy (ii)-gH-diferenciável para a condição inicial $X_0 = (0.5; 1; 1.25)$ e $\lambda = 0.5$ (parte superior), gráfico do valor médio $\frac{1}{2}\delta_{X(t)}$ quando $\alpha = 1$ (inferior à esquerda) e o gráfico do diâmetro $\text{diam}(X(t))$ (inferior à direita).	115
Figura 25 – Gráfico da solução X do modelo de decaimento fuzzy (i)-gH-diferenciável para condição inicial $X_0 = (0.5; 1; 1.25)$ e $\lambda = 0.5$ (parte superior), gráfico do valor médio $\frac{1}{2}\delta_{X(t)}$ quando $\alpha = 1$ (parte inferior à esquerda) e o gráfico do diâmetro $\text{diam}(X(t))$ (parte inferior à direita).	120
Figura 26 – Gráfico da solução X do modelo de crescimento fuzzy (i)-gH-diferenciável para a condição inicial $X_0 = (0.5; 1; 1.25)$ e $\lambda = 0.5$ (parte superior), gráfico do valor médio $\delta_{X(t)}$ para $\alpha = 1$ (parte inferior à esquerda) e o gráfico do diâmetro $\text{diam}(X(t))$ (parte inferior à direita).	122

Lista de abreviaturas e siglas

LI	Conjunto Linearmente Independente de Vetores
FLI	Conjunto Fortemente Linearmente Independente de Números Fuzzy
PVI	Problema de Valor Inicial
PVIF	Problema de Valor Inicial Fuzzy
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDF	Equação Diferencial Fuzzy
gH-derivada	Derivada Generalizada de Hukuhara de uma Função Fuzzy
(i)-gH	Função Fuzzy (i)-gH-diferenciável
(ii)-gH	Função Fuzzy (ii)-gH-diferenciável
PVIF-gH	Problema de Valor Inicial Fuzzy sob a gH-derivada
PVIF- Ψ	Problema de Valor Inicial Fuzzy sob a Ψ -derivada

Lista de símbolos

U : Conjunto Universo

$\mathcal{F}(U)$: Coleção de subconjuntos fuzzy do conjunto U

A, B, C, D : Conjuntos Fuzzy ou Números Fuzzy ou Conjuntos Clássicos

$\mathbb{N}$: Conjunto dos Números Naturais (incluindo o zero)

$\mathbb{R}$: Conjunto dos Números Reais

$\alpha, \beta, \lambda, \rho$: Números Reais ou Funções Reais

$\mathbb{I}$: Conjunto dos Intervalos Reais

$\mathbb{R}^n$: Conjunto das n -upla reais ou Espaço Vetorial Real n -dimensional

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$: Conjunto dos Números Fuzzy

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$: Conjunto dos Números Fuzzy com extremos dos seus α -níveis contínuos

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$: Conjunto de Números Fuzzy linearmente correlacionados ao número fuzzy A

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^*$: Conjunto dos Números Fuzzy cujo o interior do núcleo não contém zero

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\wedge}$: Conjuntos dos Números Fuzzy cujo núcleo é unitário em que o interior não contém zero

$(a; b; c)$: número fuzzy triangular

$(a; b; c; d)$: número fuzzy trapezoidal

χ_A : Função Característica do Conjunto Clássico A

φ_A : Função Pertinência do Conjunto Fuzzy A

$A(x)$: Valor de Pertinência de $x \in U$ relativo ao conjunto fuzzy $A \subseteq U$

$[A]_{\alpha}$: Conjuntos de Nível do Conjunto Fuzzy A ou α -nível do Número Fuzzy A

$\text{supp}(A)$: Suporte do Conjunto Fuzzy A

$\text{int}(\Omega)$: Interior de um espaço topológico Ω

$\text{cl}(\Omega)$: Fecho de um subespaço topológico Ω

a_α^- e a_α^+ : Extremos dos α -níveis do Número Fuzzy A ;

$\text{diam}(A)$: Diâmetro do Número Fuzzy A

δ_A : Função Valor Médio dos α -níveis do Número Fuzzy A

d_H : Função Distância de Hausdorff-Pompeiu em $\mathbb{I}$

d_∞ : Função Distância ou Métrica no conjunto $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

$\overline{B(0,1)}$: Bola Fechada Unitária em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

$f, g, X, \tilde{X}$: Funções Fuzzy (funções de variável real que assumem valores em números fuzzy)

D_∞ : Função Distância ou Métrica Uniforme entre funções fuzzy

f'_{gH} : Derivada Generalizada de Hukuhara da função fuzzy f

f' : Derivada ordinária de uma função real f ou Ψ -derivada de uma função fuzzy f

f_α^- e f_α^+ : Extremos dos α -níveis da função fuzzy f

$(f_\alpha^-)'$ e $(f_\alpha^+)'$: Derivada ordinária dos extremos f_α^- e f_α^+

X'_{gH} : gH-derivada da função fuzzy X ou campo das gH-derivadas

X' : Ψ -derivada da função fuzzy X ou campo das Ψ -derivadas

$(A \mid x)$: Número Fuzzy A simétrico a $x \in \mathbb{R}$

$\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$: espaço das combinações entre os números fuzzy $A_1, \dots, A_n$

Ψ : Isomorfismo entre o espaço n -dimensional e $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$

$+\Psi$ e $\cdot\Psi$: soma e produto por escalar em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ induzidas pelo isomorfismo Ψ

$\|\cdot\|$ norma arbitrária em $\mathbb{R}^n$

$\|\cdot\|_\Psi$: norma em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ induzida pelo isomorfismo Ψ

$\sup(A)$: elemento supremo do conjunto clássico A

$\sup_{x \in \Omega} f(x)$: valor do supremo da função real f em Ω

$\max(A)$: elemento máximo do conjunto clássico A

$\max_{x \in \Omega} f(x)$: valor máximo da função real f em Ω

$X^{(k)}$: Ψ -derivada de ordem k da função fuzzy X

$X_{gH}^{(k)}$: gH-derivada de ordem k da função fuzzy X

$\text{Re}(z)$: parte real do número complexo z

$\text{Im}(z)$: parte imaginária do número complexo z

Sumário

	Introdução	18
1	ELEMENTOS DA TEORIA FUZZY	23
1.1	Conjuntos Fuzzy	23
1.2	Números Fuzzy	26
1.3	Aritmética Fuzzy	32
1.3.1	Princípio de Extensão de Zadeh	33
1.3.2	A Diferença Generalizada de Hukuhara	37
1.3.3	Produto entre Números Fuzzy e o Produto Cruzado	39
1.4	Espaços Métricos de Números Fuzzy	43
1.5	Diferenciabilidade de Funções Fuzzy	46
1.6	Equações Diferenciais Fuzzy	51
2	CONJUNTOS FORTEMENTE LINEARMENTE INDEPENDENTES E A Ψ-DERIVADA DE FUNÇÕES FUZZY	55
2.1	Independência Linear Forte de Subconjuntos Fuzzy	55
2.2	Espaços de Banach gerados por números fuzzy FLI	59
2.2.1	O operador Ψ e suas propriedades	59
2.2.2	O Ψ -Produto Cruzado e suas propriedades	62
2.2.3	Os espaços de Banach $\mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n)$	63
2.3	A Ψ -derivada de uma função fuzzy	67
3	DERIVADA GENERALIZADA DE HUKUHARA E SUA RELAÇÃO COM A Ψ-DERIVADA	69
3.1	Conexões entre a gH-Diferenciabilidade e a Ψ -Diferenciabilidade de Funções Fuzzy	69
3.2	Aproximação de funções gH-diferenciáveis através de funções Ψ - diferenciáveis	83
4	APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE VALOR INICIAL FUZZY	99
4.1	Relações entre a Ψ -Derivada e a gH-derivada para PVIF	99
4.1.1	Modelo de decaimento sob a (ii)-gH-diferenciabilidade	112
4.1.2	Modelo de decaimento sob a (i)-gH-diferenciabilidade	115
4.1.3	Modelo de crescimento populacional sob a gH-diferenciabilidade	120
4.2	Condições suficientes para a solução de um PVIF-gH ser solução de um PVIF- Ψ e de um PVI n -dimensional	124

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	131
	REFERÊNCIAS	135

Introdução

Na Matemática Aplicada a ideia é a de buscar soluções para problemas em diversas áreas do conhecimento humano utilizando conceitos e métodos matemáticos. Em particular, busca-se modelos que possam representar de forma eficiente sistemas físicos, biológicos, econômicos ou sociais.

Entretanto, no dia a dia, é perceptível que diversos fenômenos apresentem um certo grau de incerteza quanto as suas características e comportamento, por isso costuma-se utilizar conceitos e termos de linguagem para caracterizá-los. Por exemplo, para estimar ou valorar características são usados termos vagos e imprecisos como “alto” e “baixo” para indicar o nível de ruído de um ambiente, “quente” e “frio” para indicar a sensação da temperatura naquele momento ou “barato” e “caro” para indicar a percepção de valor de um produto ou serviço.

Em vista dessas características e complexidade de fenômenos, o pesquisador Lofti Zadeh propôs em (ZADEH, 1965) a ideia de que a incerteza pode ser formalmente tratada pela Lógica. Surgiu então o que é hoje conhecido como Lógica Fuzzy ou Lógica Difusa ou como chamaremos de forma ampla **Teoria Fuzzy**.

Desde a sua proposição, a Teoria Fuzzy tem sido amplamente utilizada em aplicações práticas como em Economia [(ZADEH, 1975),(KLIR; YUAN, 1995)], Medicina e Saúde [(PAL; BEZDEK, 1995), (GUPTA; NISHIDA, 2008)], Biologia [(BARROS; BAS-SANEZI, 2006), (KAUFMANN; GUPTA, 1985), (WANG; MENDEL, 1992)], Engenharia [(JANG, 1993),(DUBOIS; PRADE, 1980)] e tantas outras. No entanto, para alcançar esse nível de aplicabilidade foi necessário o desenvolvimento de uma teoria matemática forte, sólida e robusta da Teoria Fuzzy, em especial, na matemática que ajuda a analisar o comportamento de fenômenos da natureza por meio do Cálculo Diferencial.

A teoria do Cálculo sobre as mais diversas classes de objetos matemáticos é desenvolvida de forma mais apropriada e tem seus aspectos funcionais bem estabelecidos em Espaços de Banach, uma vez que esses espaços permitem a definição de operadores lineares contínuos e a construção de espaços funcionais que são úteis para o desenvolvimento da teoria do Cálculo em espaços mais gerais (ALLAN, 2001).

Os objetos mais apropriados para o desenvolvimento de uma concepção de Cálculo na Teoria Fuzzy são os números fuzzy, pois estes são compreendidos como uma extensão ao conceito de número real. Além disso, esses números são sempre associados a objetos bem conhecidos na teoria do Cálculo: os intervalos compactos da reta real. Os intervalos da reta real associados a um número fuzzy são chamados de α -nível desse respectivo número.

Obstante a associação entre um número fuzzy e um intervalo contido em $\mathbb{R}$, o conjunto dos números fuzzy, denotado por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, não possui a estrutura de espaço vetorial com as suas operações usuais de soma e produto por escalar (definidas por meio desses intervalos), mas uma estrutura algébrica mais fraca [(LUPLESCU; O'REGAN, 2020), (MARKOV, 2004)]. Sendo assim, $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ não representa um Espaço de Banach e portanto não possui todas as propriedades de uma teoria de Cálculo.

Por consequência, várias abordagens para uma teoria de Cálculo Fuzzy foram propostas na literatura e muitas delas com diferentes noções de diferenciabilidade para funções que expressam incertezas [(BARROS; GOMES; TONELLI, 2013), (BARROS; PEDRO, 2017), (BEDE; STEFANINI, 2013), (CHALCO-CANO; ROMÁN-FLORES; JIMÉNEZ-GAMERO, 2009), (ESMI et al., 2018), (KALEVA, 1987), (MAZANDARANI; PARIZ; KAMYAD, 2017), (SEIKKALA, 1987), (SHEN, 2022)]. A mais conhecida e amplamente utilizada é a chamada derivada generalizada de Hukuhara (gH-derivada), que é baseada na diferença generalizada de Hukuhara (BEDE; STEFANINI, 2013).

A gH-derivada tem sido extensivamente investigada na Teoria Fuzzy por ser caracterizada pelos extremos dos α -níveis das funções de valores fuzzy (ou simplesmente, funções fuzzy). No entanto, seu uso envolve alguns problemas, por exemplo, a existência da derivada depender das condições do chamado Teorema do Empilhamento e, mesmo existindo, pode surgir *switch points* em seu domínio de definição. Assim sendo, esse tipo de ponto pode dificultar a resolução de problemas que modelam fenômenos, por meio de Equações Diferenciais, que levam em conta a incerteza de algum componente do fenômeno modelado.

Os *switch points* tem um papel similar aos pontos de inflexão de uma função de valores reais, isto é, eles indicam que existe uma vizinhança desses pontos em que a taxa de variação da derivada de uma função altera de sinal. No sentido da gH-derivada, esses pontos forçam uma mudança na sua respectiva natureza e portanto alteram a forma da equação diferencial descrita por meio da gH-derivada.

As equações diferenciais que consideram a incerteza presente no fenômeno de um sistema, dadas por números fuzzy, são denominadas Equações Diferenciais Fuzzy (EDF). Quando é estabelecido alguma condição inicial sob a EDF, tem-se um Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF).

Os PVIF são utilizados na modelagem de sistemas nos quais um ou mais dos seus componentes apresentam algum tipo de grau de incerteza. Por exemplo:

- (SALGADO et al., 2018) a medição de corrente elétrica em um circuito RL, composto de um resistor de resistência R , um indutor com indutância L , alimentados, ao longo do tempo, por uma fonte de tensão $E(t)$ cujo valor da corrente elétrica $I(t)$, no

instante $t = 0$, é incerto:

$$\begin{cases} I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{E(t)}{L} \\ I(0) = I_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}; \end{cases}$$

- (CECCONELLO; DORINI; HAESER, 2017) a variação de uma população $P(t)$, ao longo do tempo, cuja taxa de crescimento populacional r , a capacidade de suporte K em um ambiente e a população inicial P_0 são incertas:

$$\begin{cases} P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) \\ P(0) = P_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Obter a solução de EDF, via gH-derivada, pode ser difícil, ainda mais se existirem *switch points* que alteram o comportamento da equação diferencial como mencionamos anteriormente. Uma forma de se contornar esse problema é associando a gH-derivada a outros tipos de derivadas as quais não necessariamente apresentam aspectos dessa natureza.

Daí, surge a meta desse trabalho que é a de estabelecer conexões entre a gH-derivada e uma derivada fuzzy baseada no conceito de independência linear forte e dessa maneira resolver PVIF's escritos sob a gH-derivada.

O conceito de conjunto Fortemente Linearmente Independente (FLI) foi recentemente introduzido por *Esmi et. al.* em (ESMI et al., 2022) para subconjuntos de números fuzzy contidos em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. A noção de conjunto FLI permite contornar o problema da falta de estrutura de espaço de Banach em subconjuntos de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Precisamente, dados números fuzzy FLI $A_1, \dots, A_n$ em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, o conjunto das suas combinações, que é definido e denotado por

$$\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n) = \{A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} | \exists p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R} \text{ tais que } A = p_1 A_1 + \dots + p_n A_n\},$$

em que “+” representa a soma usual de números fuzzy, induz um operador linear contínuo $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ que corresponde um espaço de números fuzzy a um espaço de Banach por meio de um isomorfismo isométrico. Assim, tem-se um conjunto formado por números fuzzy $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ cujas propriedades algébricas, analíticas e geométricas são idênticas ao espaço $\mathbb{R}^n$.

Ainda mais, em espaços de Banach compostos por números fuzzy $A_1, \dots, A_n$ pode-se trabalhar com funções fuzzy da forma

$$f(x) = p_1(x)A_1 + p_2(x)A_2 + \dots + p_n(x)A_n, \quad (1)$$

em que p_i é uma função real, $i = 1, \dots, n$, e $\{A_1, \dots, A_n\}$ é um conjunto FLI, de forma a definir um conceito de derivada de f em x_0 , por meio do isomorfismo Ψ , em que $f'(x_0)$ é dada simplesmente em termos das derivadas de cada função p_i por (ESMI et al., 2022):

$$f'(x_0) = p'_1(x_0)A_1 + p'_2(x_0)A_2 + \dots + p'_n(x_0)A_n. \quad (2)$$

Ou seja, quando a derivada é induzida pelo operador Ψ , o conjunto $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ herda as propriedades do Cálculo Diferencial estabelecidas em $\mathbb{R}^n$. A derivada da função fuzzy f em x , induzida pelo isomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$, será chamada de Ψ -derivada de f em x e denotado por $f'(x)$.

Convém observar que se a função fuzzy f tem a forma dada por (1), não é verdade que sua gH-derivada possui as mesmas propriedades da sua Ψ -derivada, isto é, a gH-derivada de f , que será denotada ao longo desse trabalho por f'_{gH} , não será expressa em termos das derivadas de cada p_i (veja o Exemplo 1 em (ESMI et al., 2022)).

A partir do que foi discutido anteriormente, podemos apresentar o objetivo geral e os objetivos específicos desse trabalho e posteriormente a estrutura desta tese com sua devida linha de desenvolvimento:

- **Objetivo Geral:** Estabelecer as condições necessárias e suficientes a fim de que a gH-derivada e Ψ -derivada de funções fuzzy coincidam ou que sejam suficientemente próximas para se obter soluções de problemas de valor inicial fuzzy.
- **Objetivos Específicos:**
 - Analisar sob quais condições a gH-derivada e a Ψ -derivada de uma função fuzzy $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$, definida por $f(x) = p_1(x)A_1 + \dots + p_n(x)A_n$, coincidem em algum $x_0 \in (a, b)$, ou seja, obter condições sobre as funções p_i a fim de que $f'(x_0) = f'_{gH}(x_0)$.
 - Definir um conjunto FLI $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ de números fuzzy, com propriedades que garantem a seus elementos se aproximar de números fuzzy cujos extremos dos seus α -níveis são contínuos.
 - Analisar sob quais condições fracas uma função gH-diferenciável arbitrária e sua gH-derivada podem ser aproximadas uniformemente por uma função Ψ -diferenciável e por sua Ψ -derivada, respectivamente.
 - Aplicar os resultados que relacionam os conceitos de gH-derivada e Ψ -derivada na solução de problemas de valor inicial fuzzy.
 - Compreender quais são as condições para que a solução de um PVIF sob a gH-derivada seja uma solução (ou uma aproximação à solução) de um PVIF submetido a Ψ -derivada.
 - Sintetizar os resultados obtidos pelas relações entre um PVI n -dimensional, um PVIF sob a gH-derivada e um PVIF sob a Ψ -derivada.

Estrutura de desenvolvimento do trabalho

No Capítulo 1 revisaremos os conceitos básicos da Teoria Fuzzy. Apresentaremos as definições de Conjuntos Fuzzy, Números Fuzzy e Funções Fuzzy assim como das operações

de soma e produto de números reais estendidas a números fuzzy por meio da Extensão de Zadeh. Veremos que com uma estrutura básica de operações, munido de uma métrica d_∞ , o conjunto dos números fuzzy $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ torna-se um espaço métrico e assim é possível definir o conceito de gH-derivada de uma função fuzzy.

Recordaremos que o subconjunto dos números fuzzy cujos extremos dos seus α -níveis são contínuos, o conjunto $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$, com a métrica herdada de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, é um espaço métrico separável e, portanto, existem $n \in \mathbb{N}$ e subconjuntos $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ de números fuzzy nesse espaço tais que $B = p_0 + p_1 A_1 + \dots + p_n A_n$ se aproxima arbitrariamente de elementos $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$.

No Capítulo 2 apresentaremos a definição de um operador Ψ que atua a partir do $\mathbb{R}^n$ no espaço $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ formado pelas combinações de números fuzzy $A_1, \dots, A_n$ FLI, o qual é capaz de induzir operações de soma e produto por escalar em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ que tornam este conjunto, munido dessas operações induzidas, um espaço de Banach n -dimensional. Através do conceito de conjunto FLI e do operador Ψ , que é um isomorfismo, apresentaremos a definição de Ψ -derivada de uma função fuzzy que assume valores fuzzy em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ e que possui as mesmas propriedades operatórias clássicas da derivada em $\mathbb{R}^n$.

No capítulo 3, desenvolveremos os resultados obtidos da investigação das relações entre a gH-derivada e a Ψ -derivada de funções fuzzy. Estabeleceremos as conexões entre esses conceitos e sob quais condições coincidem ou são equivalentes. Apresentaremos resultados de existência de aproximações uniformes para funções fuzzy gH-diferenciáveis que sejam Ψ -diferenciáveis e cuja imagem seja um subconjunto de $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$.

Em outras palavras, usaremos o fato de $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}, d_\infty)$ ser um espaço métrico separável para obter conjuntos densos e enumeráveis $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$, que forneçam $B \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ arbitrariamente próximo de um dado $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$, e assim funções que assumem valores em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$ podem ser aproximadas uniformemente por funções que tomam valores fuzzy em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$.

No Capítulo 4, aplicaremos os resultados do capítulo anterior para relacionar PVIF sob a gH-derivada e PVIF similares, mas submetidos a Ψ -derivada. Investigaremos sob quais condições fracas as soluções de um PVIF, perante a gH-derivada, fornecem ou aproximam a solução de um PVIF sob a Ψ -derivada. Veremos que aspectos comportamentais do valor médio e do diâmetro das soluções dos PVIF, sob a gH-derivada, determinam se uma solução é adequada para resolver ou aproximar a solução de um PVIF via Ψ -derivada.

Por fim, nas Considerações Finais apresentaremos algumas reflexões sobre os resultados da pesquisa e destacaremos suas contribuições para os estudos em Teoria Fuzzy. De maneira geral, recapitularemos os objetivos e resultados da pesquisa, apresentaremos as suas limitações e contribuições e forneceremos sugestões de pesquisas futuras.

1 Elementos da Teoria Fuzzy

Neste capítulo relembremos os principais elementos da teoria algébrica, topológica e analítica de números fuzzy a fim de desenvolvermos a teoria de aproximação entre números fuzzy e, conseqüentemente, de funções fuzzy apresentadas no Capítulo 3 e sua posterior aplicação na resolução de problemas de valor inicial fuzzy no Capítulo 4.

1.1 Conjuntos Fuzzy

Considere um conjunto universo U e um subconjunto $A \subseteq U$. Diremos que A é um conjunto no sentido clássico quando a propriedade que descreve os seus elementos é clara e precisa, ou seja, não apresenta subjetividades.

Alguns exemplos de conjuntos clássicos são o conjunto dos números pares contidos no conjunto universo $\mathbb{R}$, o conjunto de todos os polígonos com quatro lados no conjunto universo constituído de todos os polígonos e o conjunto de todos os seres humanos cuja altura é inferior a 175cm, no conjunto universo constituído pela humanidade.

Todos os conjuntos mencionados anteriormente têm seus elementos determinados de forma precisa, no entanto, existem conjuntos em que a propriedade que os descreve pode apresentar alguma subjetividade.

Por exemplo, no conjunto universo representado pela humanidade se pensarmos no subconjunto formado pelos seres humanos altos, sem especificar um valor numérico para o qual a partir deste uma pessoa pode ser considerada alta, teremos um conjunto que apresenta incerteza ou subjetividade na propriedade que determina os seus elementos, assim não se caracterizando como conjunto clássico.

Devido a isso, o pesquisador Lotfali Askar-Zadeh¹ introduziu em (ZADEH, 1965) o conceito de conjunto fuzzy (conjunto difuso) com o intuito de ampliar o conceito de conjunto clássico.

Os conjuntos fuzzy flexibilizam a exigência imposta sobre a caracterização de um conjunto clássico uma vez que a propriedade que o define pode ser representada por uma expressão subjetiva ou incerta obtida por meio de termos linguísticos (variáveis linguísticas). Além disso, um conjunto fuzzy não limita somente a duas possibilidades a sua relação com um elemento arbitrário $x \in U$: ou x pertence a A ou x não pertence a A .

Dado $x \in U$ arbitrário, a relação entre o elemento x e o conjunto fuzzy A é

¹ Lotfali Askar-Zadeh (1921-2017), mais conhecido como Lotfi A. Zadeh, foi um matemático, engenheiro eletrônico, cientista da computação, pesquisador em inteligência artificial e professor emérito de Ciência da Computação na Universidade da Califórnia em Berkeley (SELASE et al., 2015).

descrita por uma função de pertinência. O valor dessa função (chamado grau de pertinência) varia conforme a incerteza com a qual x está “mais próximo” ou “mais distante” de representar aquilo descrito pela propriedade que define o conjunto A .

Para deixarmos mais claro o conceito de conjunto fuzzy e de grau de pertinência de um elemento em relação a esse conjunto, apresentamos o seguinte exemplo.

Exemplo 1. *Um cidadão no Brasil é considerado uma pessoa de classe média quando sua renda domiciliar mensal varia entre 2,5 e 5,5 salários-mínimos (Fonte: Instituto Locomotiva, 2021). Considere o conjunto fuzzy $A = \{\text{classe média}\}$ em que “classe média” representa contextualmente “uma pessoa de classe média” no universo de pessoas cuja renda varia entre 0 e 10 salários-mínimos, isto é, o conjunto universo onde A está contido é o intervalo $U = [0, 10]$.*

Se um cidadão P tem renda igual a 3 salários-mínimos intuimos que o grau de pertinência de P em relação a A é total, ou seja, atinge o seu valor máximo. Notamos também que à medida que a renda varia de 0 a 2,5 salários-mínimos, o grau de pertinência é crescente, ou seja, mais o cidadão tende a ser classificado como uma pessoa de classe média.

Por outro lado, se a renda familiar varia de 5,5 a 10 a pessoa tende a pertencer menos a classe média, ou seja, o grau de pertinência decresce à medida que sua renda aumenta.

Antes de definirmos formalmente um conjunto fuzzy, relembremos a definição de função característica de um conjunto clássico $A \subseteq U$ a fim de compreender o conjunto fuzzy como uma extensão natural de um conjunto clássico.

Definição 1. *Seja X um conjunto e A um subconjunto de U . Então, a função $\chi : U \rightarrow \{0, 1\}$ definida por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

é chamada de função característica do conjunto A em U .

Enquanto os valores do grau de pertinência de $x \in U$, em relação ao conjunto clássico, são apenas os valores da imagem da função característica, ou seja, o conjunto $\{0, 1\}$, os conjuntos fuzzy admitem valores para o grau de pertinência de x , em relação a esse conjunto, no intervalo $[0, 1]$ e é este fato que caracteriza um conjunto fuzzy conforme apresentado inicialmente em (ZADEH, 1965).

Definição 2. (ZADEH, 1965) *Um **conjunto fuzzy** A (subconjunto fuzzy de um conjunto universo U) é caracterizado por uma aplicação*

$$\varphi_A : U \rightarrow [0, 1]$$

em que os valores $\varphi_A(x)$ descrevem o grau de pertinência do elemento $x \in U$ em relação ao conjunto fuzzy A . Denotaremos por $\mathcal{F}(U)$ a coleção de todos os subconjuntos fuzzy de U .

É conveniente observar que todo conjunto clássico $A \subseteq U$ também é um conjunto fuzzy uma vez que a função de pertinência de $x \in U$ em relação a A pode ser definida simplesmente como $\varphi_A(x) = \chi_A(x)$ para todo $x \in U$.

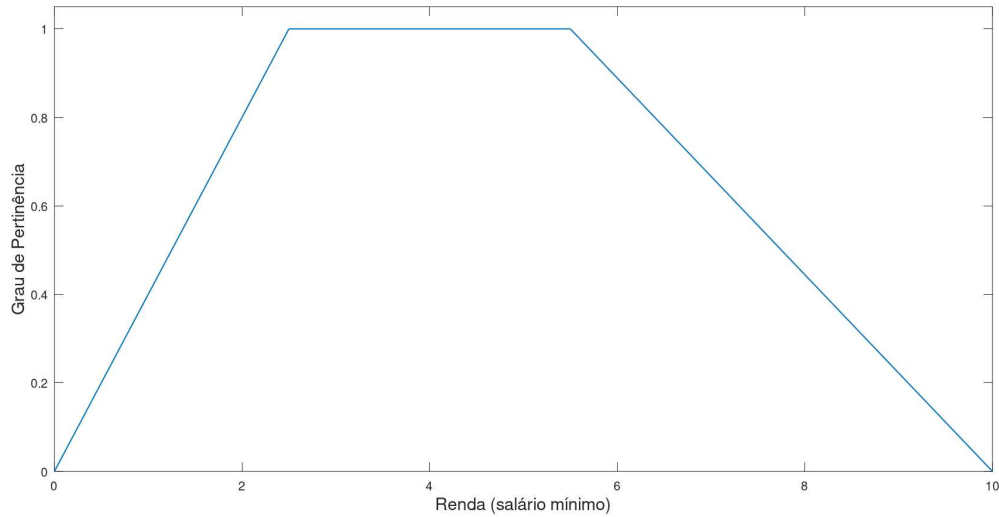
Por fim de simplicidade, identificaremos um conjunto fuzzy com a sua função de pertinência, isto é, $\varphi_A \equiv A$ e assim cometeremos o abuso de notação $\varphi_A(x) = A(x)$ para representar a pertinência de $x \in U$ em relação ao conjunto fuzzy A .

Exemplo 2. Seja $U = [0, 10]$. O conjunto fuzzy $A : [0, 10] \rightarrow [0, 1]$ descrito no Exemplo 1 pode ser representado pela função de pertinência

$$A(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x & \text{se } 0 \leq x < 2,5 \\ 1 & \text{se } 2,5 \leq x \leq 5,5 \\ \frac{20 - 2x}{9} & \text{se } x > 5,5 \end{cases}$$

e é ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Representação gráfica do conjunto Fuzzy A definido no Exemplo 1.



Fonte: Autor.

Na Matemática é usual estudar objetos de maior complexidade a partir de objetos mais simples. Essa premissa pode ser aplicada a conjuntos fuzzy, os relacionando a conjuntos clássicos através dos chamados α -níveis.

Definição 3. *[(KLIR; YUAN, 1996), (BEDE, 2013)]* Seja $A : U \rightarrow [0, 1]$ um conjunto fuzzy. Os α -níveis de A são definidos como os conjuntos clássicos

$$[A]_\alpha = \{x \in U | A(x) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Em particular, para $\alpha = 1$,

$$[A]_1 = \{x \in U | A(x) \geq 1\}$$

define o **núcleo** do conjunto fuzzy A , enquanto

$$\text{supp}(A) = \{x \in U | A(x) > 0\}$$

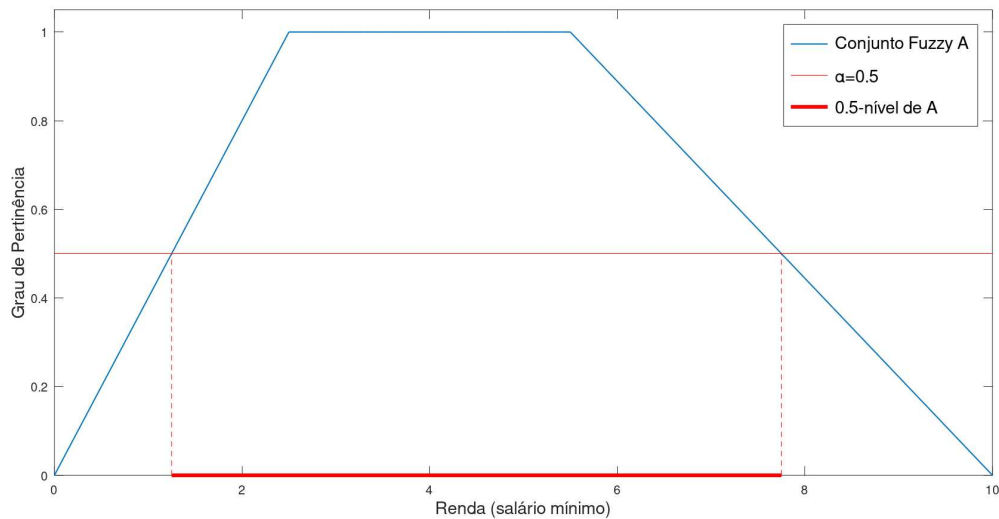
é chamado de **suporte** do conjunto fuzzy A . O nível $\alpha = 0$ de um subconjunto fuzzy A é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de U que contém o suporte de A .

Exemplo 3. No Exemplo 2, o núcleo de A , $[A]_1 = [2.5, 5.5]$ representa o conjunto de valores de renda que faz o cidadão ser de classe média a partir de parâmetros com grau de pertinência igual a 1. Os respectivos α -níveis de A são os intervalos

$$[A]_\alpha = [2.5\alpha, 10 - 4.5\alpha]$$

com $0 < \alpha \leq 1$. O suporte de A é o intervalo aberto $\text{supp}(A) = (0, 10)$ enquanto seu 0-nível é o intervalo fechado $[A]_0 = [0, 10]$. Uma ilustração do conjunto de nível do conjunto fuzzy A para $\alpha = 0.5$ é dada na Figura 2.

Figura 2 – Representação do conjunto de nível $[A]_{0.5}$



Fonte: Autor.

1.2 Números Fuzzy

Na Seção 1.1 definimos os α -níveis de um conjunto fuzzy. Os α -níveis são a conexão entre um conjunto fuzzy e uma família de conjuntos clássicos. Dentre os conjuntos fuzzy existe uma classe chamada de **números fuzzy** e estes são nada mais do que

subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}$ nos quais os seus α -níveis, que chamaremos de α -níveis, são intervalos de $\mathbb{R}$ não-vazios, fechados e limitados nos extremos pelas funções $a_{\alpha}^{-} = a^{-}(\alpha)$ e $a_{\alpha}^{+} = a^{+}(\alpha)$. (ver Teorema 1).

Os números fuzzy são os tipos de conjunto fuzzy mais utilizados para o desenvolvimento teórico de áreas como Análise Fuzzy e Equações Diferenciais Fuzzy. Assim, apresentaremos alguns deles e as propriedades mais importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Iniciaremos definindo formalmente um número fuzzy como feito em (DIAMOND; KLOEDEN, 2000).

Definição 4. (DIAMOND; KLOEDEN, 2000) *Considere um subconjunto fuzzy da reta real $A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Então, A é um **número fuzzy** se ele satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) *A é normal, isto é, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $A(x_0) = 1$;*
- ii) *A é fuzzy convexo, isto é, $A(tx + (1 - t)y) \geq \min\{A(x), A(y)\}$ para todo $t \in [0, 1]$;*
- iii) *A é semicontínua superior em $\mathbb{R}$, isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $A(x) - A(x_0) < \epsilon$;*
- iv) *$\text{cl}\{x \in \mathbb{R}; A(x) > 0\}$ é compacto, onde $\text{cl}(\Omega)$ denota o fecho do conjunto Ω .*

O conjunto dos números fuzzy será denotado por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Exemplo 4 ((BEDE, 2013), p.51). O conjunto fuzzy $A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^3 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ (2 - x)^3 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

é um número fuzzy. (Ver Figura 3).

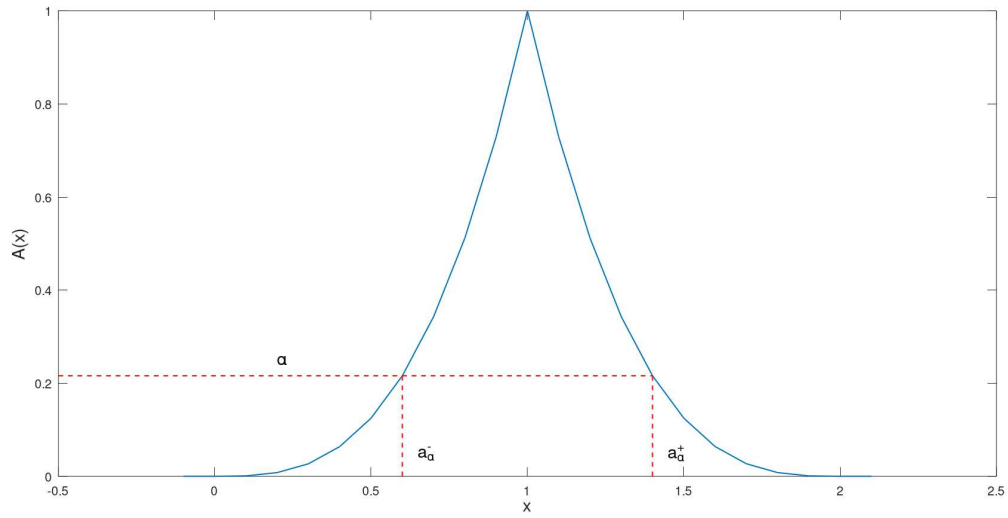
Exemplo 5. O conjunto fuzzy representado na Figura 4 não é um número fuzzy, pois não é fuzzy convexo.

Observação 1. Todo número real é um número fuzzy, isto é, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Convém observar que, neste caso, o conjunto dos números reais é interpretado como

$$\mathbb{R} = \{\chi_{\{x\}} : x \text{ é um número real}\}.$$

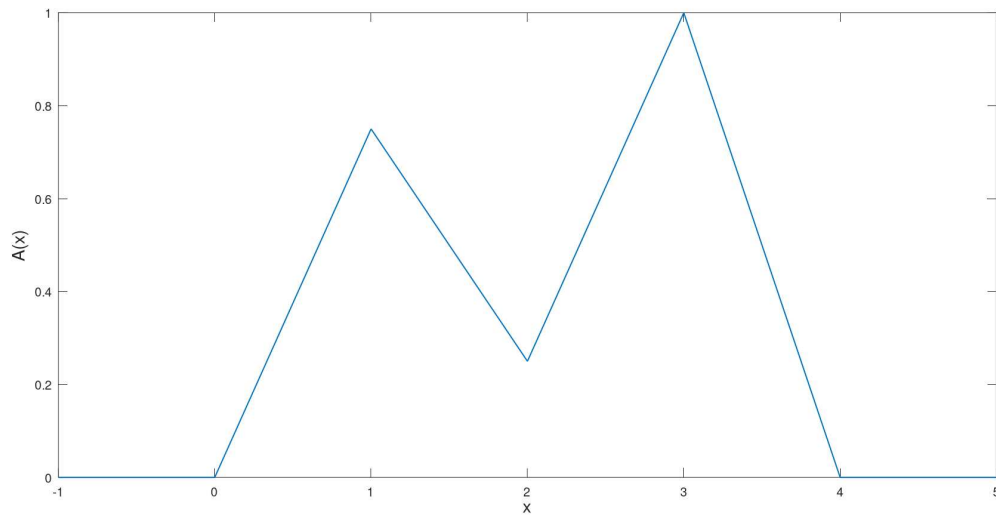
$\chi_{\{x\}}$ é um número fuzzy descrito pela função característica de $\{x\}$ e pode ser identificado com $x \in \mathbb{R}$, conforme é exemplificado na Figura 5.

Nota 1. Os conjuntos clássicos são frequentemente chamados de conjuntos crisp. Todo número real é denominado um valor crisp.

Figura 3 – Exemplo de um número fuzzy e seu respectivo α -nível

Fonte: (BEDE, 2013), p.52.

Figura 4 – Conjunto fuzzy que não é um número fuzzy

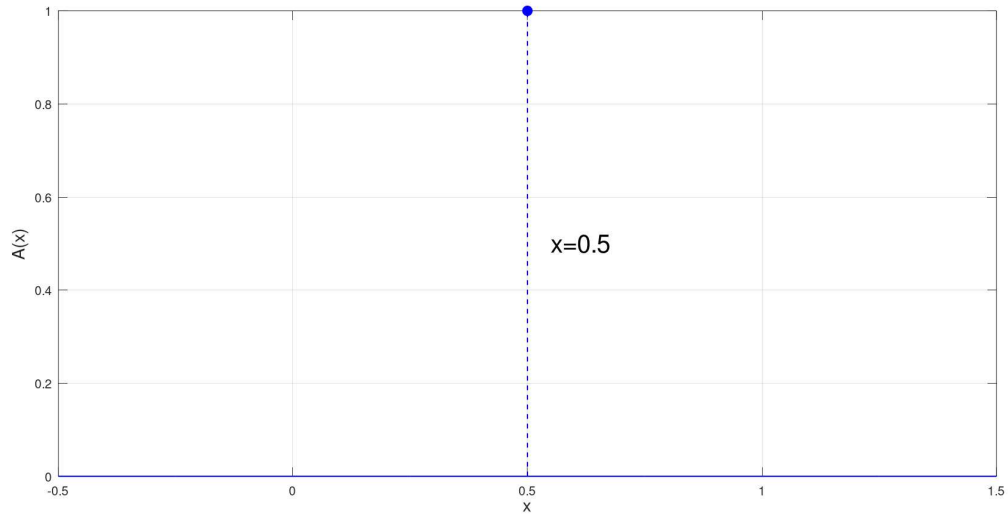


Fonte: Autor.

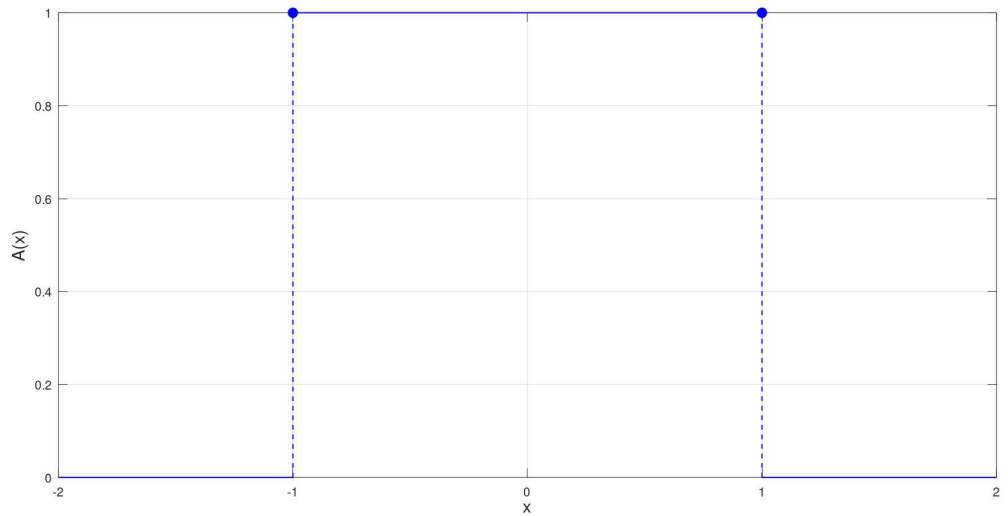
Observação 2. Os números fuzzy também generalizam os intervalos reais. Se $\mathbb{I}$ denota o conjunto de todos os intervalos reais, então $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e

$$\mathbb{I} = \{ \chi_{[a,b]} : [a,b] \text{ é um intervalo real} \}.$$

Os α -níveis, o núcleo e o suporte de um número fuzzy são definidos de forma análoga ao apresentado para conjuntos fuzzy. Uma característica intrínseca aos números fuzzy é determinada por seus α -níveis a partir do Teorema do Empilhamento.

Figura 5 – Representação do número real $x = 0.5$ como um número fuzzy

Fonte: Autor.

Figura 6 – Representação do intervalo real $[-1, 1]$ como um número fuzzy

Fonte: Autor.

Teorema 1. [(NEGOITA; RALESCU, 1975) - Teorema do Empilhamento]. *Seja $\alpha \in [0, 1]$. Se $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é um número fuzzy e $[A]_{\alpha}$ são seus α -níveis, então:*

- i) $[A]_{\alpha}$ é um intervalo fechado, isto é, $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$ para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ em que $a_{\alpha}^{-} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $a_{\alpha}^{+} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções que determinam os extremos dos α -níveis de A ;*
- ii) para $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, tem-se $[A]_{\beta} \subseteq [A]_{\alpha}$;*

iii) para qualquer sequência $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ que converge por baixo a $\alpha \in (0, 1]$, tem-se

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n} = [A]_{\alpha};$$

iv) para qualquer sequência $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ que converge por cima a 0, tem-se

$$\text{cl} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A]_{\alpha_n} \right) = [A]_0.$$

Demonstração. Ver a prova em (BEDE, 2013), p.55. □

Veremos na Seção 1.6 que a verificação do item i) do Teorema do Empilhamento (Teorema 1) é essencial para determinar se uma solução encontrada para uma equação diferencial fuzzy, sob a derivada generalizada de Hukuhara, é de fato uma função fuzzy bem definida.

As funções $a_{\alpha}^{-} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $a_{\alpha}^{+} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, apresentadas no item i) do Teorema 1, são chamadas de extremos dos α -níveis do número fuzzy A e nelas temos $a^{-}(\alpha) = a_{\alpha}^{-}$ e $a^{+}(\alpha) = a_{\alpha}^{+}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. O conjunto de números fuzzy A no qual os α -níveis $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$ possuem extremos a_{α}^{-} e a_{α}^{+} contínuos em $[0, 1]$ será denotado por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$. Eventualmente, nessa tese, escreveremos os “extremos de A ” com a finalidade de expressar “os extremos dos α -níveis do número fuzzy A ”.

A caracterização de um número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ pode ser feita em termo dos extremos dos seus respectivos α -níveis.

Proposição 1. (NEGOITA; RALESCU, 1975). *Seja o número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com α -níveis $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$. As funções $a_{\alpha}^{-} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $a_{\alpha}^{+} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem:*

- i) a_{α}^{-} é uma função limitada, crescente, contínua à esquerda em $(0, 1]$ e contínua à direita em 0;
- ii) a_{α}^{+} é uma função limitada, decrescente, contínua à esquerda em $(0, 1]$ e contínua à direita em 0;
- iii) $a_1^{-} \leq a_1^{+}$.

Reciprocamente, se $a^{-} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $a^{+} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cumprem (i)-(iii), então existe um único número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $[A]_{\alpha} = [a^{-}(\alpha), a^{+}(\alpha)]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Demonstração. Ver a prova em (BEDE, 2013), p.p. 58-59. □

Alguns exemplos de números fuzzy, nos quais os extremos desses números são contínuos, são os números fuzzy triangulares e trapezoidais. Para $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, com

$a \leq b \leq c \leq d$, podemos definir um número fuzzy $A = (a; b; c; d)$ chamado **trapezoidal** cujos α -níveis são dados por

$$[A]_\alpha = [a + \alpha(b - a), d - \alpha(d - c)] \quad (1.1)$$

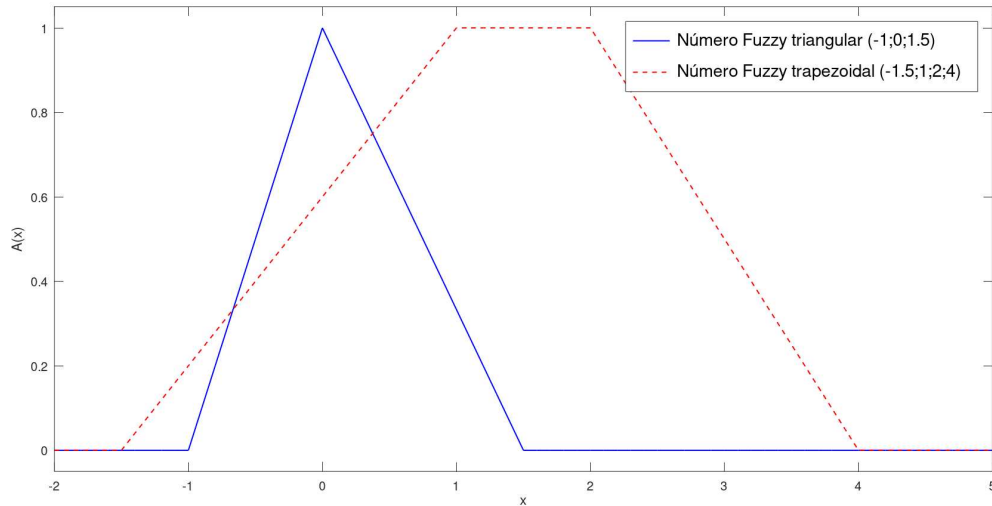
para todo $\alpha \in [0, 1]$. Quando $b = c$ o número fuzzy A é dito **triangular** e é denotado por $A = (a; b; d)$. Um outro exemplo de número fuzzy com relevante grau de importância é o número fuzzy em forma de sino. Denotaremos os números fuzzy em forma de sino por $A = (a; \sigma; \delta)$, com a, σ e δ reais e $\delta > 0$. Os seus respectivos α -níveis são dados por:

$$[A]_\alpha = \begin{cases} \left[a - \sigma \sqrt{\ln \left(\frac{1}{\alpha} \right)}, a + \sigma \sqrt{\ln \left(\frac{1}{\alpha} \right)} \right] & \text{se } \alpha \geq e^{-\frac{\delta^2}{\sigma}} \\ [a - \delta, a + \delta], & \text{se } \alpha < e^{-\frac{\delta^2}{\sigma}} \end{cases} \quad (1.2)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Os números fuzzy triangular, trapezoidal e em forma de sino são ilustrados nas Figuras 7 e 8, respectivamente.

Nota 2. *Todo número real x pode ser representado como o número fuzzy triangular $(x; x; x)$ e os intervalos reais $[a, b]$ por números fuzzy trapezoidais da forma $(a; a; b; b)$. Assim, a partir de agora designaremos esses números fuzzy simplesmente por $x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $[a, b] \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.*

Figura 7 – Números fuzzy triangular e fuzzy trapezoidal



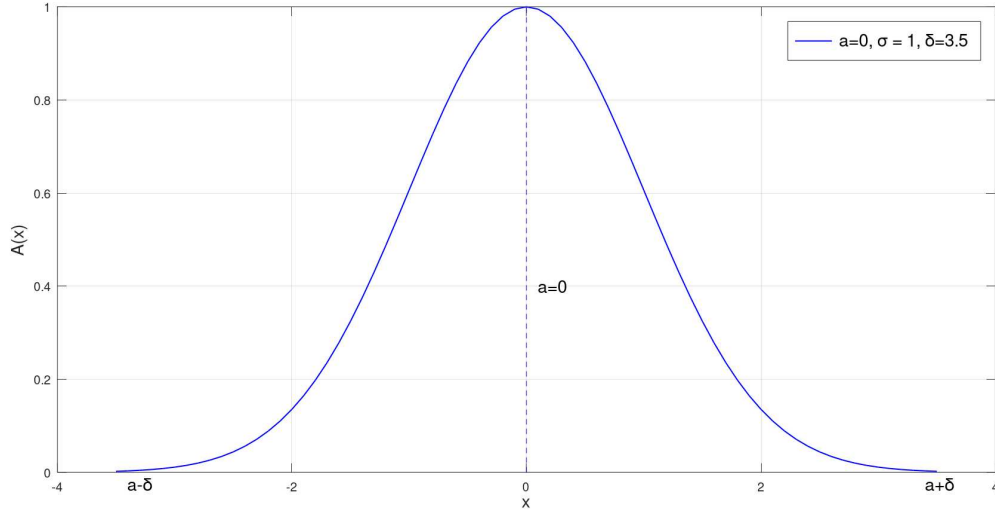
Fonte: Autor.

Finalizaremos essa seção definindo o diâmetro de um número fuzzy e o valor médio de um α -nível de um número fuzzy.

Definição 5. *Dado o número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ o **diâmetro** de A é denotado e definido por*

$$\text{diam}(A) = a_0^+ - a_0^-.$$

Figura 8 – Número fuzzy em forma de sino



Fonte: Autor.

Em particular, $A \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\text{diam}(A) = 0$.

Definição 6. Dado o número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ o **valor médio** dos α -níveis $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$ é a função $\frac{1}{2}\delta_A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\delta_A(\alpha) = a^{-}(\alpha) + a^{+}(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Veremos no Capítulo 4 que, sob determinadas condições, um modelo matemático descrito por uma equação diferencial fuzzy, sob a derivada generalizada de Hukuhara, possui solução cujo diâmetro tem um comportamento não esperado para o modelo.

1.3 Aritmética Fuzzy

Nesta Seção apresentaremos as operações aritméticas de soma e multiplicação de números fuzzy e a multiplicação de um escalar por um número fuzzy no conjunto $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e suas respectivas propriedades. Veremos inicialmente que essas operações são nada mais que a extensão das operações usuais existentes em $\mathbb{R}$ propostas por Zadeh (1975) no chamado Princípio de Extensão.

Por seguinte, veremos que geralmente a diferença entre números fuzzy não admite como resultado o valor zero e assim se fez necessário apresentar propostas de diferenças que se anulem quando um número fuzzy é subtraído de si mesmo. Em especial, destaca-se entre elas a chamada diferença generalizada de Hukuhara.

Finalizaremos a seção apresentando um tipo especial de produto de números fuzzy chamado produto cruzado. Este produto tem como propriedade preservar a forma dos números fuzzy com núcleo unitário em que o zero não é um elemento em seu suporte.

1.3.1 Princípio de Extensão de Zadeh

Na Seção 1.1 apresentamos a extensão do conceito de conjunto clássico a um conjunto fuzzy definindo, a partir destes, os chamados números fuzzy. Assim como estendemos o conceito de conjunto clássico, podemos estender a ideia de operações em conjuntos dessa natureza através dos parâmetros que descrevem as incertezas intrínsecas a esses conjuntos.

A fim de estender o conceito de operação entre elementos de conjuntos clássicos, Zadeh apresentou em (ZADEH, 1975) uma função que associa um dado conjunto fuzzy A a um outro conjunto fuzzy B , construídos a partir de dois conjuntos de valores *crisp* X e Y , respectivamente, que estão relacionados por meio de uma função usual f que corresponde elementos $x \in X$ a elementos $y = f(x) \in Y$. A essa função denominou-se **extensão de Zadeh** e esta representa nada mais que a extensão do conceito de função de variável real a valores reais para conjuntos fuzzy.

Definição 7. (ZADEH, 1975) - **Princípio de Extensão de Zadeh.** *Seja a função $f : X \rightarrow Y$, em que $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$ são conjuntos crisp. A relação f pode ser estendida a uma função $F : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ tal que $B = F(A)$, em que*

$$B(y) = \begin{cases} \sup\{A(x) : x \in X, f(x) = y\}, & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Chamaremos a função F de extensão de Zadeh de f .

O princípio de extensão de Zadeh pode ser aplicado naturalmente a números fuzzy, com sua caracterização descrita a partir dos α -níveis dos elementos dos espaços de entrada e saída das funções fuzzy que relacionam esses números.

Teorema 2 ((NGUYEN, 1978), (GOO; PARK, 2007), (FULLÉR; KERESZTFALVI, 1991)). *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser estendida a uma função fuzzy $F : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Dado $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, com $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$, podemos determinar $B = F(A) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ por meio dos seus α -níveis $[B]_{\alpha} = [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}] = F([A]_{\alpha})$, isto é,*

$$\begin{aligned} b_{\alpha}^{-} &= \inf\{f(x) | x \in [A]_{\alpha}\} \\ b_{\alpha}^{+} &= \sup\{f(x) | x \in [A]_{\alpha}\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver Teorema 5.3 em (BEDE, 2013), p.65. □

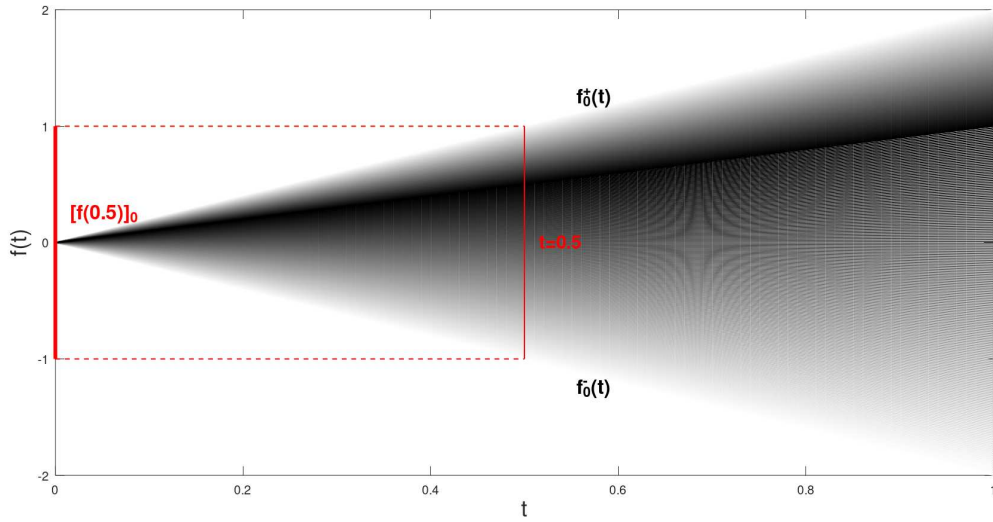
Dado um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ao restringimos a extensão F no conjunto de valores *crisp* $[a, b]$, obtemos uma função $\tilde{F} = F|_{[a, b]} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ que chamaremos de função de variável real a valores fuzzy ou, simplesmente, de **função fuzzy**.

Exemplo 6. A aplicação $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ definida por $f(t) = t \cdot A$, com $A = (-2; 1; 2)$, é uma função fuzzy. Podemos determinar a imagem de f através dos α -níveis de A . Com efeito,

$$[f(t)]_{\alpha} = [t \cdot A]_{\alpha} = [(3\alpha - 2)t, (2 - \alpha)t], \quad t \in [0, 1].$$

A partir daí, podemos fazer uma representação do gráfico de f através dos seus α -níveis conforme a Figura 9.

Figura 9 – Gráfico da função fuzzy f (região cinza) onde cada reta no feixe representa a variação dos parâmetros $\alpha \in [0, 1]$; os extremos inferior e superior do suporte de $f(t)$ são representados pelos “lados opostos da figura triangular”; no eixo vertical o intervalo $[-1, 1]$ é a imagem de $t = \frac{1}{2}$ no suporte de $f(t)$.



Fonte: Autor.

Agora para estendermos as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, do conjunto dos números reais para números fuzzy, precisamos do Princípio de Extensão de Zadeh aplicado ao produto cartesiano entre conjuntos clássicos, uma vez que a soma e produto por escalar são operações binárias de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

Definição 8. (BEDE, 2013) A função $f : X \times Y \rightarrow Z$ definida entre conjuntos crisp $X \times Y$ e Z pode ser estendida a função fuzzy $F : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ tal que $C = F(A, B)$ e

$$C(z) = \begin{cases} \sup_{x \in X, y \in Y} \{ \min\{A(x), B(y)\}; f(x, y) = z \} & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação 3. Conforme menciona (BEDE, 2013), deve-se ter cautela com a Definição 8, uma vez que (HUANG, 2010) mostrou que um princípio de extensão baseado em subconjuntos convexos compactos de $\mathbb{R}^2$ não é possível. A versão corrigida dessa extensão no Teorema 3 permite estender as operações clássicas entre números reais a números fuzzy.

Teorema 3. [(NGUYEN, 1978), (GOO; PARK, 2007), (FULLÉR; KERESZTFALVI, 1991)] Se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então podemos estendê-la a função fuzzy $F : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $C = F(A, B)$ tem seus α -níveis dados por

$$[C]_{\alpha} = \{f(x, y) | x \in [A]_{\alpha}, y \in [B]_{\alpha}\}$$

para qualquer $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, isto é, se $C = [c_{\alpha}^{-}, c_{\alpha}^{+}]$ então

$$\begin{aligned} c_{\alpha}^{-} &= \inf\{f(x, y) | x \in [A]_{\alpha}, y \in [B]_{\alpha}\} \\ c_{\alpha}^{+} &= \sup\{f(x, y) | x \in [A]_{\alpha}, y \in [B]_{\alpha}\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver Teorema 5.6 em (BEDE, 2013), p.68. □

Utilizando a Extensão de Zadeh, apresentada no Teorema 3, podemos definir a soma de dois números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e a multiplicação de um número real por um número fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, que herdaram algumas propriedades da soma usual e do produto por escalar dos números reais. De fato, seja $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a soma usual em $\mathbb{R}$ definida por $s(x, y) = x + y$. Então, a Extensão de Zadeh a função s é dada por $S : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $C = S(A, B)$ tem seus α -níveis determinados por

$$c_{\alpha}^{-} = \inf\{x + y; x \in [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}], y \in [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}]\} = a_{\alpha}^{-} + b_{\alpha}^{-}$$

e

$$c_{\alpha}^{+} = \sup\{x + y; x \in [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}], y \in [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}]\} = a_{\alpha}^{+} + b_{\alpha}^{+}$$

uma vez que $a_{\alpha}^{-} \leq a_{\alpha}^{+}$ e $b_{\alpha}^{-} \leq b_{\alpha}^{+}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Logo,

$$[C]_{\alpha} = [S(A, B)]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-} + b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} + b_{\alpha}^{+}].$$

Prosseguindo, seja $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o produto de números reais em $\mathbb{R}$ definido por $p(\lambda, x) = \lambda \cdot x$. O produto de um escalar real por um número fuzzy é a Extensão de Zadeh do produto de números fuzzy restrito a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, isto é, é a função fuzzy $P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $C = P(\lambda, A)$ tem seus extremos dados por:

$$c_{\alpha}^{-} = \inf\{\lambda \cdot x; \lambda \in \mathbb{R}, x \in [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]\} = \begin{cases} \lambda \cdot a_{\alpha}^{-}, & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \lambda \cdot a_{\alpha}^{+}, & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

e

$$c_{\alpha}^{+} = \sup\{\lambda \cdot x; \lambda \in \mathbb{R}, x \in [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]\} = \begin{cases} \lambda \cdot a_{\alpha}^{+}, & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \lambda \cdot a_{\alpha}^{-}, & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

Logo,

$$[C]_{\alpha} = [P(\lambda, A)]_{\alpha} = \begin{cases} [\lambda \cdot a_{\alpha}^{-}, \lambda \cdot a_{\alpha}^{+}], & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda \cdot a_{\alpha}^{+}, \lambda \cdot a_{\alpha}^{-}], & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

Concluimos assim que a soma usual e a produto por escalar em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ são definidos a partir dos conjuntos de níveis dos números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Ou seja, dados $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$ e $[B]_{\alpha} = [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, a soma de A e B em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, denotada por $A + B$, e o produto entre o escalar λ e A , denotado por λA , são determinados pelos α -níveis

$$[A + B]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-} + b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} + b_{\alpha}^{+}] \quad (1.3)$$

e

$$[\lambda A]_{\alpha} = \begin{cases} [\lambda a_{\alpha}^{-}, \lambda a_{\alpha}^{+}] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_{\alpha}^{+}, \lambda a_{\alpha}^{-}] & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

respectivamente, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Considerando as operações (1.3) e (1.4), a Proposição 2 a seguir descreve algumas das propriedades da soma e produto por escalar em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e a Proposição 3 algumas propriedades do diâmetro e do valor médio de um número fuzzy.

Proposição 2. [(ANASTASSIOU; GAL, 2001), (DUBOIS; PRADE, 1993), (GAL, 2014)]
Sejam A, B e C números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e α, β e λ escalares reais. Então:

- (a) $A + B = B + A$ para todo $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;
- (b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ para todo $A, B, C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;
- (c) $0 = \chi_{\{0\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é o elemento neutro da soma usual, isto é, $A + 0 = A$;
- (d) Nenhum elemento $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ possui um oposto (ou simétrico aditivo) em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com respeito a soma usual, isto é, não existe $B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $A + B = 0$;
- (e) Se $A + C = B + C$ então $A = B$;
- (f) Para qualquer α, β com $\alpha \cdot \beta \geq 0$ e qualquer $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tem-se

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A;$$

- (g) $\lambda(A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;
- (h) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$ para todo α, β reais e todo $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Proposição 3. Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ números fuzzy. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

- (a) $\text{diam}(A + \lambda B) = \text{diam}(A) + |\lambda| \text{diam}(B)$
- (b) $\delta_{(A+\lambda B)}(\alpha) = \delta_A(\alpha) + \lambda \delta_B(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Demonstração. (a)

$$\begin{aligned}
 \text{diam}(A + \lambda B) &= \begin{cases} (a_0^+ - a_0^-) + (\lambda b_0^+ - \lambda b_0^-) & \text{se } \lambda \geq 0 \\ (a_0^+ - a_0^-) + (\lambda b_0^- - \lambda b_0^+) & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (a_0^+ - a_0^-) + \lambda(b_0^+ - b_0^-) & \text{se } \lambda \geq 0 \\ (a_0^+ - a_0^-) + (-\lambda)(b_0^+ - b_0^-) & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \\
 &= (a_0^+ - a_0^-) + |\lambda|(b_0^+ - b_0^-) \\
 &= \text{diam}(A) + |\lambda| \text{diam}(B).
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \delta_{(A+\lambda B)}(\alpha) &= \begin{cases} (a_\alpha^+ + \lambda b_\alpha^+) + (a_\alpha^- + \lambda b_\alpha^-), & \text{se } \lambda \geq 0 \\ (a_\alpha^+ + \lambda b_\alpha^-) + (a_\alpha^- + \lambda b_\alpha^+), & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \\
 &= (a_\alpha^+ + a_\alpha^-) + \lambda(b_\alpha^+ + b_\alpha^-) = \delta_A(\alpha) + \lambda \delta_B(\alpha).
 \end{aligned}$$

□

Observação 4. A inexistência de um elemento oposto para $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, descrita pelo item (d) da Proposição 2, mostra que $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, +, \cdot)$ não admite uma estrutura de espaço vetorial.

1.3.2 A Diferença Generalizada de Hukuhara

Seja A um número fuzzy. No item (d) da Proposição 2 mencionamos que se $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$, então $A - A = A + (-1)A \neq 0$, isto é, A não possui elemento oposto com respeito a soma usual de números fuzzy definida em (1.3).

A fim de se contornar esse problema foram propostas alternativas para a definição de diferença entre números fuzzy, entre elas a diferença de Hukuhara, proposta originalmente em (HUKUHARA, 1967) para diferenças entre subconjuntos compactos convexos em $\mathbb{R}^n$ e estendida para números fuzzy em (PURI; RALESCU, 1983).

A diferença de Hukuhara raramente existe [(BEDE, 2013), p.74]. Portanto, buscou-se alternativas para a definição e entre essas foi proposta por (STEFANINI; BEDE, 2009) e (STEFANINI, 2010) uma generalização para a diferença de Hukuhara, chamada diferença generalizada de Hukuhara, ou simplesmente gH-diferença.

Definição 9. [(STEFANINI; BEDE, 2009), (STEFANINI, 2010), (BEDE, 2013)]. *Dados dois números fuzzy A e B pertencentes a $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, a **diferença generalizada de Hukuhara** (gH-diferença) entre A e B é o número fuzzy C , se existir, tal que*

$$A -_{gH} B = C \iff \begin{cases} (i) & A = B + C \\ & \text{ou} \\ (ii) & B = A - C. \end{cases}$$

Veremos, adiante, que a gH-diferença é essencial para definirmos na Seção 1.5 a derivada generalizada de Hukuhara. Prosseguindo, uma propriedade bem simples e útil, que decorre diretamente da Definição 9, é que a gH-diferença entre dois números fuzzy satisfaz uma condição similar a propriedade (g) da Proposição 2.

Proposição 4. *Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ vale:*

$$\lambda(A -_{gH} B) = \lambda A -_{gH} \lambda B.$$

Demonstração. Se $\lambda = 0$ não há nada a ser verificado. Se $\lambda \neq 0$ então, pela Definição 9, temos:

$$\begin{aligned} \lambda A -_{gH} \lambda B = C & \iff \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \lambda A = \lambda B + C \\ (ii) \quad \lambda B = \lambda A - C \end{array} \right. \underbrace{\iff}_{\text{Prop. 2 - (g)}} \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad A = B + \frac{1}{\lambda} C \\ (ii) \quad B = A + (-1) \frac{1}{\lambda} C \end{array} \right. \\ & \underbrace{\iff}_{\text{Def. 8}} A -_{gH} B = \frac{1}{\lambda} C \\ & \iff \lambda(A -_{gH} B) = C. \end{aligned}$$

□

Outra propriedade da gH-diferença entre números fuzzy pode ser determinada a partir dos seus respectivos α -níveis e isso é mostrado na seguinte Proposição.

Proposição 5. (BEDE, 2013) *Para quaisquer A e B em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tais que $A -_{gH} B$ existe, tem-se:*

$$[A -_{gH} B]_{\alpha} = [\min\{a_{\alpha}^{-} - b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} - b_{\alpha}^{+}\}, \max\{a_{\alpha}^{-} - b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} - b_{\alpha}^{+}\}]$$

em que $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$ e $[B]_{\alpha} = [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}]$ são os α -níveis de A e B , respectivamente.

Em suma, da Proposição 5 segue que para calcularmos a gH-diferença entre dois números fuzzy, basta determinarmos os α -níveis da gH-diferença entre esses números. E, em seguida, verificar se o conjunto de nível encontrado satisfaz as condições i)-iii) da Proposição 1.

Exemplo 7. *Sejam $A = (0; 1; 2; 3)$ e $B = (-2; 0; 3)$. Os α -níveis de A e B são $[A]_{\alpha} = [\alpha, 3 - \alpha]$ e $[B]_{\alpha} = [-2 + 2\alpha, 3 - 3\alpha]$, respectivamente, com $\alpha \in [0, 1]$. Verificamos que se “+” é a soma usual de números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, então $C = A - B = A + (-1)B$ possui α -níveis $[C]_{\alpha} = [4\alpha - 3, 5 - 3\alpha]$ e assim $C = (-3; 1; 2; 5)$. Por outro lado, se $D = A -_{gH} B$ então*

$$[D]_{\alpha} = \begin{cases} [2 - \alpha, 2\alpha] & \text{se } \frac{2}{3} < \alpha \leq 1 \\ [2\alpha, 2 - \alpha] & \text{se } \alpha \leq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Assim, sendo $[D]_\alpha = [d_\alpha^-, d_\alpha^+]$ verificamos que $d_\alpha^- = \begin{cases} 2 - \alpha & \text{se } \frac{2}{3} < \alpha \leq 1 \\ 2\alpha & \text{se } \alpha \leq \frac{2}{3} \end{cases}$ não é uma função crescente em $(0, 1]$, assim a condição i) da Proposição 1 não é satisfeita e portanto a gH -diferença entre A e B não existe uma vez que, neste caso, D não será um número fuzzy. Por fim, se $G = A + (-1)A$ então $[G]_\alpha = (-2\alpha + 3)[-1, 1]$ e assim $G = (-3; -1; 1; 3) \neq 0$, no entanto, $H = A -_{gH} A$ tem α -níveis $[H]_\alpha = \{0\}$, ou seja, $H = 0$.

1.3.3 Produto entre Números Fuzzy e o Produto Cruzado

Nesta Seção apresentamos o produto de números fuzzy advindo do Princípio de Extensão de Zadeh aplicado a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x \cdot y$. Em particular, veremos que o produto de dois números fuzzy do mesmo tipo não é do mesmo tipo que o gerou e, assim, surgiu o conceito de produto cruzado, o qual preserva as características dos números fuzzy envolvidos na operação.

Definição 10. O produto dos números fuzzy A e B em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é o número fuzzy $C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ cujos α -níveis são determinados por:

$$c_\alpha^- = \inf\{x \cdot y | x \in [A]_\alpha, y \in [B]_\alpha\}$$

e

$$c_\alpha^+ = \sup\{x \cdot y | x \in [A]_\alpha, y \in [B]_\alpha\}.$$

Note que o produto $x \cdot y$ é uma função contínua no conjunto compacto $[A]_\alpha \times [B]_\alpha$. Assim, o produto atinge seus valores máximo e mínimo em $[A]_\alpha \times [B]_\alpha$. Como $a_\alpha^- \leq a_\alpha^+$ e $b_\alpha^- \leq b_\alpha^+$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, então os valores máximo e mínimo do produto são atingidos nos extremos dos α -níveis dos números fuzzy A e B . Logo,

$$c_\alpha^- = \min\{a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+\} \quad \text{e} \quad c_\alpha^+ = \max\{a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+\}. \quad (1.5)$$

Portanto, o produto dos números fuzzy A e B é o número fuzzy C cujos α -níveis são determinados por (1.5). Denotaremos o produto de A por B como $A \cdot B$ ou, simplesmente, AB . Eventualmente, o produto de um número fuzzy A por si mesmo k -vezes será denotado por $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k\text{-vezes}}, k \geq 1$.

Exemplo 8. Sejam $A = (0; 0; a)$, $a > 0$, e $B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $[B]_\alpha = \begin{cases} \{0\} & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ [0, 1] & \text{se } \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Veja que $[A]_\alpha = [0, (1 - \alpha)a]$. Então, $A \cdot B$ é o número fuzzy C cujos α -níveis são determinados por:

$$c_\alpha^- = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ 0 = \min\{0, (1 - \alpha)a\} & \text{se } \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad c_\alpha^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ (1 - \alpha)a = \max\{0, (1 - \alpha)a\} & \text{se } \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Logo, $A \cdot B$ é o número fuzzy cujo α -nível é dado por:

$$[A \cdot B]_\alpha = \begin{cases} \{0\} & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ [0, (1 - \alpha)a] & \text{se } \alpha \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Por fim, verificamos que $A^k = (0; 0; ((1 - \alpha)a)^k)$ e $B^k = B$ para todo $k \geq 1$.

Veremos, a seguir, algumas propriedades do produto de números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Particularmente, assim como a soma usual de números fuzzy apresenta uma restrição sob a existência de um simétrico aditivo, o produto de números fuzzy não admite um inverso multiplicativo.

Teorema 4. (BEDE, 2013)

- i) O conjunto fuzzy unitário $\{1\} = \chi_{\{1\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é o elemento neutro do produto, isto é, $A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$ para qualquer $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;
- ii) Nenhum elemento $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ possui um inverso em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com respeito ao produto de números fuzzy;
- iii) Para quaisquer $A, B, C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, temos:

$$[(A + B) \cdot C]_\alpha \subseteq [A \cdot C]_\alpha + [B \cdot C]_\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1];$$

- iv) Para quaisquer $A, B, C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tais que seus suportes não contêm zero, temos:

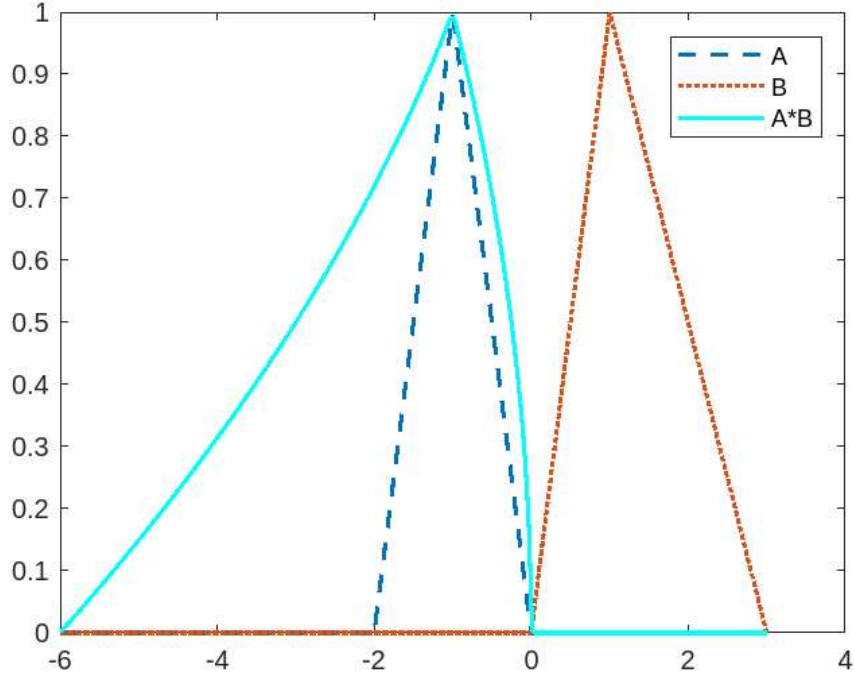
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Demonstração. Ver Teorema 5.10 em (BEDE, 2013), p.71. □

O produto de números fuzzy é uma operação fechada em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, no entanto, essa operação não é capaz de preservar certas características dos números fuzzy por ele operados. Por exemplo, sejam os números fuzzy triangulares $A = (-2; -1; 0)$ e $B = (0; 1; 3)$. Temos que $[A]_\alpha = [\alpha - 2, -\alpha]$ e $[B]_\alpha = [\alpha, 3 - 2\alpha]$ e assim

$$\begin{aligned} [A \cdot B]_\alpha &= [(-2; -1; 0) \cdot (0; 1; 3)]_\alpha \\ &= [\min\{\alpha^2 - 2\alpha, -2\alpha^2 + 7\alpha - 6, -\alpha^2, 2\alpha^2 - 3\alpha\}, \\ &\quad \max\{\alpha^2 - 2\alpha, -2\alpha^2 + 7\alpha - 6, -\alpha^2, 2\alpha^2 - 3\alpha\}] \\ &= [-2\alpha^2 + 7\alpha - 6, -\alpha^2]. \end{aligned}$$

Para o limitante inferior dos α -níveis de $A \cdot B$ se fizermos $x = -2\alpha^2 + 7\alpha - 6$ e $y = \alpha$, obtemos o arco de parábola $y = \frac{1}{4}(7 - \sqrt{1 - 8x})$ para $x \in [-6, -1]$. Enquanto para o limite superior se fizermos $x = -\alpha^2$ e $y = \alpha$, obtemos outro arco de parábola cuja equação é

Figura 10 – Representação dos Números Fuzzy A , B e seu produto $A \cdot B$ 

Fonte: Autor.

$y = \sqrt{-x}$ com $x \in [-1, 0]$. Assim, $A \cdot B$ não possui uma representação geométrica de um triângulo, portanto não pode ser um número fuzzy triangular (ver Figura 10).

A fim de preservar o tipo dos números fuzzy após o produto deles foi proposto em (BAN; BEDE, 2002), (BAN; BEDE, 2006a) e (BAN; BEDE, 2006b) o chamado **produto cruzado** de números fuzzy. Enquanto o produto em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é a extensão de Zadeh da função f dada por $f(x, y) = xy$, o produto cruzado é a extensão da linearização de f , em torno do ponto (a, b) , através da função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = ay + bx - ab$.

O produto cruzado sempre existe para quaisquer dois números fuzzy com núcleo unitário. No entanto, ele pode eventualmente não ser uma operação fechada em conjuntos gerados por números fuzzy contidos em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, como veremos na Seção 2.2. Apesar disso, ele apresenta propriedades importantes quando atua em uma certa classe de números fuzzy, a saber, os números fuzzy positivos ou negativos com núcleo unitário.

Diremos que um número fuzzy A é positivo se o extremo inferior do seu núcleo é não-negativo, isto é, $a_1^- \geq 0$. Um número fuzzy é negativo quando $a_1^+ \leq 0$. Denotaremos por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^*$ o conjunto dos números fuzzy positivos ou negativos, isto é,

$$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^* = \{A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} | 0 \notin \text{int}([A]_1)\}$$

em que $\text{int}([A]_1)$ é o conjunto de pontos interiores (no sentido topológico) ao núcleo de A .

Exemplo 9. O número fuzzy triangular $A = (-1; 2; 4)$ é positivo uma vez que $a_1^- = 2 \geq 0$. Por outro lado, o número fuzzy trapezoidal $B = (-2; -1; 1; 2)$ não é positivo e nem negativo

visto que $0 \in \text{int}([B]_1) = (-1, 1)$.

Com o conceito de número fuzzy positivo (ou negativo) estabelecido, podemos definir o produto cruzado de dois números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^*$.

Definição 11. (BAN; BEDE, 2002) *Sejam A e B dois números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^*$ tais que $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^-, a_{\alpha}^+]$ e $[B]_{\alpha} = [b_{\alpha}^-, b_{\alpha}^+]$. A operação binária $\odot : \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^* \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^*$ definida a partir dos α -níveis*

$$[A \odot B]_{\alpha} = [a_{\alpha}^- b_1^- + a_1^- b_{\alpha}^- - a_1^- b_1^-, a_{\alpha}^+ b_1^+ + a_1^+ b_{\alpha}^+ - a_1^+ b_1^+] \quad (1.6)$$

é chamada **produto cruzado** dos números fuzzy A e B .

Considere o conjunto dos números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^*$ que possuem núcleo unitário definido por:

$$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\wedge} = \{A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} : \text{existe um único } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } A(x_0) = 1\}.$$

Quando A e B são números fuzzy positivos em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\wedge}$, então $[A]_1 = \{a\}$ e $[B]_1 = \{b\}$ com $a \geq 0$ e $b \geq 0$ e dessa forma o produto cruzado de A e B será dado por:

$$A \odot B = a \cdot B + b \cdot A - ab.$$

Finalizaremos essa seção apresentando algumas propriedades importantes dos números fuzzy positivos (ou negativos), com respeito ao produto cruzado. Veremos que o produto cruzado de A por B , dado em (1.6), é uma operação fechada em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^*$.

Proposição 6 ((BAN; BEDE, 2002), (BAN; BEDE, 2006a), (BEDE; FODOR, 2006)). *Se A e B são números fuzzy positivos, então $C = A \odot B$ é um número fuzzy positivo.*

Demonstração. Ver Proposição 5.11 em (BEDE, 2013), p.72. □

Proposição 7. (BEDE, 2013) *Sejam A e B dois números fuzzy.*

i) Se A é positivo e B é negativo, então:

$$A \odot B = -(A \odot (-B))$$

é um número fuzzy negativo.

ii) Se A é negativo e B é positivo, então:

$$A \odot B = -((-A) \odot B)$$

é um número fuzzy negativo.

iii) Se A e B são negativos, então:

$$A \odot B = (-A) \odot (-B)$$

é um número fuzzy positivo.

Demonstração. Vamos mostrar somente o item i) para $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\wedge}$, os demais casos são análogos. Sejam $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$ e $[B]_{\alpha} = [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}]$ em que $a = a_1^{+} = a_1^{-}$ e $b = b_1^{+} = b_1^{-}$. Se B é negativo, então $b_{\alpha}^{+} \leq 0$, isto é, $-b_{\alpha}^{+} \geq 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Assim, $-B$ é um número fuzzy positivo. Como $[-B]_{\alpha} = [-b_{\alpha}^{+}, -b_{\alpha}^{-}]$ segue que $[-B]_1 = \{-b\}$. Logo,

$$\begin{aligned} [-(A \odot (-B))]_{\alpha} &= [-(-bA + a(-B) - a(-b))]_{\alpha} \\ &= [bA + aB - ab]_{\alpha} \\ &= [A \odot B]_{\alpha} \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Portanto, $-(A \odot (-B)) = A \odot B$. $\square$

Em virtude da Proposição 7, concluímos que o produto cruzado dado em (1.6) é válido para A e B negativos, A positivo e B negativo e A negativo e B positivo.

Exemplo 10. Considere os números fuzzy $A = (-3; -2; -1)$ e $B = (0; 1; 3)$. É fácil ver que A e B pertencem a $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\wedge}$ e que $[A]_1 = \{-2\}$ e $[B]_1 = \{1\}$. Assim, $A \odot B$ existe e está bem definido. Logo,

$$A \odot B = aB + bA - ab = -2(0; 1; 3) + (-3; -2; -1) + 2 = (-7; -2; 1).$$

1.4 Espaços Métricos de Números Fuzzy

Na Matemática, em especial na Análise, o conhecimento da teoria dos espaços métricos é essencial para avaliarmos se uma determinada função f é ou não uma “boa aproximação” para uma dada função g , isto é, se a distância entre f e g é tão pequena o quanto desejarmos de acordo com a métrica estabelecida no espaço.

A ideia explanada acima pode ser replicada para números fuzzy (e posteriormente para funções que assumem valores que sejam números fuzzy) através da métrica associada ao espaço que contém os seus respectivos α -níveis.

O conjunto formado por todos os intervalos limitados e fechados contém os α -níveis de qualquer número fuzzy e a distância nesse conjunto é baseada na clássica distância de Hausdorff-Pompeiu para subconjuntos compactos convexos não vazios de $\mathbb{R}^n$ (BEDE, 2013). Essa métrica no conjunto de números fuzzy é a utilizada mais amplamente e foi introduzida originalmente em (ERCEG, 1979) e popularizada nos trabalhos de (PURI; RALESCU, 1983) e (DIAMOND; KLOEDEN, 2000).

A métrica no conjunto de números fuzzy $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é uma função $d_{\infty} : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow [0, +\infty)$ definida a partir da métrica de Hausdorff-Pompeiu d_H restrita ao conjunto constituído pelos intervalos limitados $\mathbb{I}$ da reta real.

Sejam $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ dois intervalos em $\mathbb{R}$. A métrica de Hausdorff-Pompeiu (restrita ao conjunto $\mathbb{I}$) é a distância $d_H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$d_H(I, J) = \max\{|a - c|, |b - d|\}.$$

Com essa métrica definida, podemos definir uma distância entre dois números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Definição 12. [(DIAMOND; KLOEDEN, 2000), (BEDE, 2013)] *Seja $d_{\infty} : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow [0, +\infty)$ dada por*

$$\begin{aligned} d_{\infty}(A, B) &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} \max\{|a_{\alpha}^{-} - b_{\alpha}^{-}|, |a_{\alpha}^{+} - b_{\alpha}^{+}|\} \\ &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([A]_{\alpha}, [B]_{\alpha}) \end{aligned}$$

em que $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$ e $[B]_{\alpha} = [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}]$ são intervalos da reta real e d_H é a clássica distância de Hausdorff-Pompeiu entre intervalos. A função d_{∞} é chamada distância de Hausdorff entre números fuzzy.

Definida uma distância no conjunto de números fuzzy $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ vejamos algumas das suas propriedades no teorema seguir.

Proposição 8 ((DIAMOND; KLOEDEN, 2000), (BEDE, 2013)). *$(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_{\infty})$ é um espaço métrico.*

Demonstração. Ver item (i) da Proposição 8.3 em (BEDE, 2013). □

Proposição 9 ((DIAMOND; KLOEDEN, 2000), (BEDE, 2013)). *Sejam $A, B, C, D \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. As seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (b) $d_{\infty}(A + C, B + C) = d_{\infty}(A, B);$
- (c) $d_{\infty}(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| d_{\infty}(A, B);$
- (d) $d_{\infty}(A + C, B + D) \leq d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(C, D).$

Demonstração. Ver itens (ii)-(iv) da Proposição 8.3 em (BEDE, 2013). □

Uma classe importante de espaços métricos, a qual será valiosa no desenvolvimento desse trabalho, é aquela que apresenta propriedades de completude e separabilidade.

Teorema 5 ((DIAMOND; KLOEDEN, 2000),(BEDE, 2013)). $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_{\infty})$ é um espaço métrico completo.

Demonstração. Ver Teorema 8.5 em (BEDE, 2013). $\square$

Apesar de $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_{\infty})$ ser um espaço métrico completo ele não é um espaço separável [(DIAMOND; KLOEDEN, 2000), p.608]. Esse fato é apresentado na seguinte proposição.

Teorema 6. (BEDE, 2013) A bola fechada unitária

$$\overline{B(0, 1)} = \{A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} | d_{\infty}(A, 0) \leq 1\}$$

em $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_{\infty})$ não é separável. Consequentemente, $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_{\infty})$ não é um espaço separável.

Demonstração. Ver Teorema 8.12 em (BEDE, 2013). $\square$

As propriedades decorrentes da completude de $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_{\infty})$ nos permite definir os conceitos de limite e continuidade de funções de variáveis reais que assumem valores que são números fuzzy, isto é, funções fuzzy $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, conforme apresentado na Observação 8.14 em [(BEDE, 2013), p.150]. Além disso, a distância uniforme D_{∞} entre funções contínuas $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é definida, naturalmente, a partir da métrica d_{∞} como

$$\begin{aligned} D_{\infty}(f, g) &= \sup_{x \in [a, b]} d_{\infty}(f(x), g(x)) \\ &= \sup_{x \in [a, b]} \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([f(x)]_{\alpha}, [g(x)]_{\alpha}) \end{aligned}$$

para funções f e g com α -níveis $[f(x)]_{\alpha} = [f_{\alpha}^{-}(x), f_{\alpha}^{+}(x)]$ e $[g(x)]_{\alpha} = [g_{\alpha}^{-}(x), g_{\alpha}^{+}(x)]$.

Finalizaremos esta seção apresentando o conjunto de números fuzzy cujos extremos dos seus α -níveis são funções contínuas em $[0, 1]$, e no qual a propriedade mais notável é a separabilidade.

Seja $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um número fuzzy com α -níveis $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. O conjunto dos números fuzzy com extremos contínuos é definido por

$$\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c} = \{A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} | [A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}] \text{ em que } a^{+}, a^{-} \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})\}.$$

Note que $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Além disso, em [(BEDE, 2013), p.153] é observado que o conjunto $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$ não coincide com o conjunto dos números fuzzy com funções de pertinência contínuas.

Proposição 10. (BEDE, 2013) O conjunto $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$ com a métrica d_{∞} é um espaço métrico completo separável.

Demonstração. Ver Proposição 8.17 em (BEDE, 2013), p.153. $\square$

Veremos nos Teoremas 12 e 13 do Capítulo 3 que o fato de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$ ser um espaço métrico completo e separável permite desenvolver uma teoria de aproximação para números fuzzy e, conseqüentemente, para funções fuzzy.

1.5 Diferenciabilidade de Funções Fuzzy

O conceito de derivada de uma função de variável real que assumem valores em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ pode ser definido através do conceito de limite em $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_{\infty})$ tomado sob a métrica d_{∞} . No entanto, o fato de $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, +, \cdot)$ não ter a estrutura de um espaço vetorial com as operações usuais “+” e “ $\cdot$ ” definidas na Subseção 1.3.1 não permite definir diretamente um tipo de derivada para a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, em $x_0 \in (a, b)$, através do limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

uma vez que $h \rightarrow 0$ não necessariamente implica que $[f(x+h) - f(x)]_{\alpha} \rightarrow \{0\}$ com respeito a métrica d_H . No entanto, conforme visto na Seção 1.3, podemos contornar esse entrave através da diferença generalizada de Hukuhara. Usando o conceito de gH-diferença garantimos que

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow [f(x+h) -_{gH} f(x)]_{\alpha} \rightarrow \{0\}, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

com respeito a métrica de Hausdorff-Pompeiu, se a gH-diferença existir e f for contínua para $x \in [a, b]$.

A partir da gH-diferença definiremos um tipo de derivada para funções fuzzy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ chamada derivada generalizada de Hukuhara ou, simplesmente, gH-derivada [(BEDE; STEFANINI, 2013), (STEFANINI; BEDE, 2009)].

Definição 13. [(STEFANINI; BEDE, 2009), (BEDE; STEFANINI, 2013)] *Seja $x_0 \in (a, b)$. Então, a gH-derivada de uma função fuzzy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ em x_0 é definida como*

$$f'_{gH}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x_0 + h) -_{gH} f(x_0)].$$

Se $f'_{gH}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ existe na métrica de Hausdorff, diremos que f é gH-diferenciável em x_0 .

A Definição 13 também pode ser caracterizada em termos dos α -níveis das funções fuzzy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, conforme é apresentado em [(CHALCO-CANO; RODRÍGUEZ-LÓPEZ; JIMÉNEZ-GAMERO, 2016), p.p. 40-41] através do seguinte teorema:

Proposição 11. (CHALCO-CANO; RODRÍGUEZ-LÓPEZ; JIMÉNEZ-GAMERO, 2016) *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função gH-diferenciável em $x \in (a, b)$ tal que $[f(x)]_{\alpha} = [f_{\alpha}^{-}(x), f_{\alpha}^{+}(x)]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Um dos seguintes casos ocorre:*

(i) f_α^- e f_α^+ são funções diferenciáveis em x e

$$[f'_{gH}(x)]_\alpha = [(f_\alpha^-)'(x), (f_\alpha^+)'(x)] , \text{ para todo } \alpha \in [0, 1];$$

(ii) f_α^- e f_α^+ são funções diferenciáveis em x e

$$[f'_{gH}(x)]_\alpha = [(f_\alpha^+)'(x), (f_\alpha^-)'(x)] , \text{ para todo } \alpha \in [0, 1];$$

(iii) f_α^- e f_α^+ são diferenciáveis à esquerda e à direita em x e

$$[f'_{gH}(x)]_\alpha = [(f_\alpha^-)'_+(x), (f_\alpha^+)'_+(x)] = [(f_\alpha^+)'_-(x), (f_\alpha^-)'_-(x)] , \forall \alpha \in [0, 1],$$

ou

$$[f'_{gH}(x)]_\alpha = [(f_\alpha^+)'_+(x), (f_\alpha^-)'_+(x)] = [(f_\alpha^-)'_-(x), (f_\alpha^+)'_-(x)] , \forall \alpha \in [0, 1].$$

Demonstração. Ver Teorema 3 em (CHALCO-CANO; RODRÍGUEZ-LÓPEZ; JIMÉNEZ-GAMERO, 2016). $\square$

A partir do que apresentamos na Proposição 11, temos três casos (ou tipos) de gH-diferenciabilidade, entre os quais os dois primeiros são mais importantes, na teoria de Equações Diferenciais Fuzzy.

Definição 14. *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ uma função gH-diferenciável em $x \in (a, b)$.*

(1) *Diremos que f é (i)-gH-diferenciável em x quando f satisfaz o caso (i) da Proposição 11. Neste caso, denotaremos por $f'_{((i)-gH)}(x)$ a gH-derivada de f em x .*

(2) *Diremos que f é (ii)-gH-diferenciável em x quando f satisfaz o caso (ii) da Proposição 11. Neste caso, denotaremos por $f'_{((ii)-gH)}(x)$ a gH-derivada de f em x .*

Exemplo 11. (BEDE, 2013) *Considere a função $f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$, definida pelo número fuzzy triangular $f(t) = (x(t); y(t); z(t))$ com $x, y, z : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $t_0 \in (a, b)$. Suponha que f é (i)-gH-diferenciável em t_0 . Sejam os α -níveis de f dados por*

$$f_\alpha^-(t) = x(t) + \alpha(y(t) - x(t))$$

e

$$f_\alpha^+(t) = z(t) - \alpha(z(t) - y(t)).$$

Então, $(f_\alpha^-)'(t_0) = x'(t_0) + \alpha(y'(t_0) - x'(t_0))$ e $(f_\alpha^+)'(t_0) = z'(t_0) - \alpha(z'(t_0) - y'(t_0))$. Assim, pela Proposição 11, temos

$$[f'_{((i)-gH)}(t_0)]_\alpha = [(f_\alpha^-)'(t_0), (f_\alpha^+)'(t_0)] = [x'(t_0) + \alpha(y'(t_0) - x'(t_0)), z'(t_0) - \alpha(z'(t_0) - y'(t_0))].$$

A partir daí obtemos a (i)-gH-derivada de f em t_0 expressa por

$$f'_{((i)-gH)}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Se supormos que f é (ii)-gH-diferenciável obtemos, pela Proposição 11,

$$[f'_{((ii)-gH)}(t_0)]_\alpha = [z'(t_0) - \alpha(z'(t_0) - y'(t_0)), x'(t_0) + \alpha(y'(t_0) - x'(t_0))]$$

o qual nos fornece a (ii)-gH-derivada de f em t_0 como

$$f'_{((ii)-gH)}(t_0) = (z'(t_0), y'(t_0), x'(t_0)).$$

Exemplo 12. Sejam $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ um número fuzzy e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função fuzzy (i)-gH-diferenciável em $x \in (a, b)$, definida por $f(x) = p(x)A$ com $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x \in (a, b)$. Considere $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ e $[f(x)]_\alpha = [f_\alpha^-(x), f_\alpha^+(x)]$ os α -níveis de A e $f(x)$, respectivamente, para $\alpha \in [0, 1]$. A partir da Definição 13 e da Proposição 5, verifica-se:

$$\begin{aligned} [f'_{gH}(x)]_\alpha &= \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) -_{gH} f(x)}{h} \right]_\alpha \\ &= \left[\lim_{h \rightarrow 0} \min \left\{ \frac{f_\alpha^-(x+h) - f_\alpha^-(x)}{h}, \frac{f_\alpha^+(x+h) - f_\alpha^+(x)}{h} \right\}, \right. \\ &\quad \left. \lim_{h \rightarrow 0} \max \left\{ \frac{f_\alpha^-(x+h) - f_\alpha^-(x)}{h}, \frac{f_\alpha^+(x+h) - f_\alpha^+(x)}{h} \right\} \right] \\ &= \left[\min \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_\alpha^- p(x+h) - a_\alpha^- p(x)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_\alpha^+ p(x+h) - a_\alpha^+ p(x)}{h} \right\}, \right. \\ &\quad \left. \max \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_\alpha^- p(x+h) - a_\alpha^- p(x)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_\alpha^+ p(x+h) - a_\alpha^+ p(x)}{h} \right\} \right] \\ &= [\min \{a_\alpha^- p'(x), a_\alpha^+ p'(x)\}, \max \{a_\alpha^- p'(x), a_\alpha^+ p'(x)\}]. \end{aligned}$$

Como f é (i)-gH-diferenciável, então $[f'_{gH}(x)]_\alpha = [(f_\alpha^-)'(x), (f_\alpha^+)'(x)]$ e assim

$$(f_\alpha^-)'(x) = \min \{a_\alpha^- p'(x), a_\alpha^+ p'(x)\}$$

e

$$(f_\alpha^+)'(x) = \max \{a_\alpha^- p'(x), a_\alpha^+ p'(x)\}.$$

Em particular, a gH-derivada é determinada exclusivamente pelo sinal das derivadas de p . Veremos no Capítulo 3 que essa ideia é essencial para relacionar os conceitos de gH-derivada de derivada fuzzy definido na Seção 2.3 para funções que tem uma forma semelhante a expressão que foi definida para f nesse exemplo.

Baseados nos tipos de gH-diferenciabilidade estabelecidos na Definição 14 podemos estabelecer a noção de “**switch points**” a seguir.

Definição 15. (STEFANINI; BEDE, 2009) O valor $x \in (a, b)$ é dito um *switch point* de uma função fuzzy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ gH -diferenciável quando para qualquer vizinhança V de x existem pontos $y, z \in (a, b)$, com $y < x < z$, tais que

- a) f é (i) - gH -diferenciável em y e não é (ii) - gH -diferenciável neste ponto enquanto f é (ii) - gH -diferenciável em z e não é (i) - gH -diferenciável neste ponto ou
- b) f é (ii) - gH -diferenciável em y e não é (i) - gH -diferenciável neste ponto enquanto f é (i) - gH -diferenciável em z e não é (ii) - gH -diferenciável neste ponto.

Exemplo 13. Considere a função $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ definida pelo número fuzzy triangular $f(t) = (-t^2; 0; 2t^2)$. Para os α -níveis de f , $f_{\alpha}^{-}(t) = t^2(\alpha - 1)$ e $f_{\alpha}^{+}(t) = 2t^2(1 - \alpha)$, obtemos $(f_{\alpha}^{+})'(t) - (f_{\alpha}^{-})'(t) = 6t(1 - \alpha)$ e daí

- $(f_{\alpha}^{+})'(t) - (f_{\alpha}^{-})'(t) > 0$ quando $t \in (0, 1)$ e
- $(f_{\alpha}^{+})'(t) - (f_{\alpha}^{-})'(t) < 0$ quando $t \in (-1, 0)$.

Logo, f é (i) - gH -diferenciável em todo $z \in (0, 1)$ e (ii) - gH -diferenciável em todo $y \in (-1, 0)$. Segue, pela Definição 15, que $t = 0$ é um *switch point* de f em $(-1, 1)$. Em particular,

$$f'_{gH}(t) = \begin{cases} (-2t; 0; 4t) & \text{se } t \in (0, 1) \\ (4t; 0; -2t) & \text{se } t \in (-1, 0) \end{cases}$$

e

$$f'_{gH}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) -_{gH} f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2(-1; 0; 2)}{h} = 0.$$

Na Figura 11 exibimos uma representação de f e de sua derivada f'_{gH} .

Finalizaremos essa seção fazendo algumas observações sob a gH -derivada e sua relação com algumas propriedades clássicas da derivada usual.

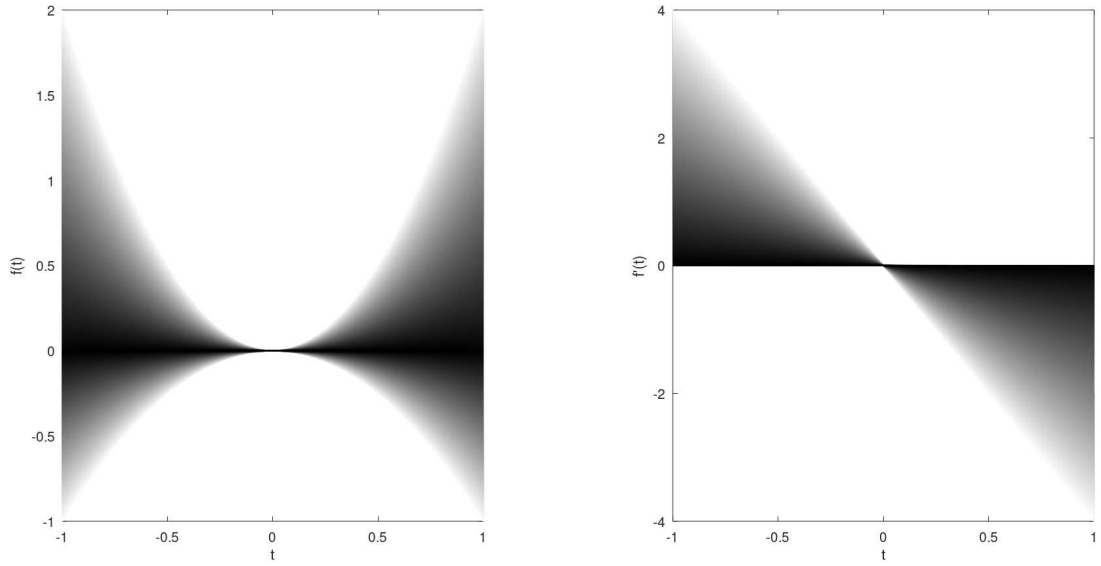
Observação 5. a) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função gH -diferenciável em $x_0 \in (a, b)$. Então:

$$(\lambda f)'_{gH}(x_0) = \lambda f'_{gH}(x_0).$$

De fato, pela Definição 13 e pela Proposição 4 segue que:

$$\begin{aligned} (\lambda f)'_{gH}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(\lambda f)(x_0 + h) -_{gH} (\lambda f)(x_0)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\lambda f(x_0 + h) -_{gH} \lambda f(x_0)] \\ &= \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x_0 + h) -_{gH} f(x_0)] \\ &= \lambda f'_{gH}(x_0). \end{aligned}$$

Figura 11 – À esquerda o gráfico de f e à direita o gráfico da sua respectiva gH -derivada. Nota-se que $t = 0$ é o *switch point* de f .



Fonte: Autor.

b) Existem funções fuzzy $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ gH -diferenciáveis em $x_0 \in (a, b)$ tais que

$$(f + g)'_{gH}(x_0) \neq f'_{gH}(x_0) + g'_{gH}(x_0).$$

Com efeito, tome $f = -g$ gH -diferenciável em $x_0 \in (a, b)$. Então,

$$0 = (f + (-1) \cdot f)'_{gH}(x_0) = (f + g)'_{gH}(x_0) \neq f'_{gH}(x_0) + (-1) \cdot f'_{gH}(x_0).$$

Observação 6. Na Observação 5 verificamos no item b) que a regra de derivação da soma geralmente não é válida para a gH -derivada. No entanto, existem alguns casos em que a gH -derivada da soma de funções será igual a soma das gH -derivadas dessas funções.

Considere, por exemplo, as funções fuzzy $X, Y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tais que X é (i) - gH -diferenciável em $(0, T)$ e $Y(t) = \beta(t)\tilde{\epsilon}$ em que $\tilde{\epsilon} = (0; 0; \epsilon)$, $\epsilon > 0$ e $\beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $(0, T)$ com $\beta(t) > 0$ e $\beta'(t) > 0$ para todo $t \in (0, T)$. Defina a função fuzzy $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ como $\tilde{X}(t) = X(t) + Y(t)$. Mostraremos que $\tilde{X}$ é gH -diferenciável e que $\tilde{X}'_{((i)-gH)}(t) = X'_{((i)-gH)}(t) + Y'_{((i)-gH)}(t)$ para todo $t \in (0, T)$.

Sejam $[X(t)]_{\alpha} = [x_{\alpha}^{-}(t), x_{\alpha}^{+}(t)]$ e $[\tilde{X}(t)]_{\alpha} = [\tilde{x}_{\alpha}^{-}(t), \tilde{x}_{\alpha}^{+}(t)]$ os α -níveis de X e $\tilde{X}$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} [\tilde{X}(t)]_{\alpha} &= [X(t) + \tilde{\epsilon}\beta(t)] \\ &= [x_{\alpha}^{-}(t), x_{\alpha}^{+}(t)] + \beta(t)[0, (1 - \alpha)\epsilon] \\ &= [x_{\alpha}^{-}(t), x_{\alpha}^{+}(t) + (1 - \alpha)\epsilon\beta(t)]. \end{aligned}$$

Daí, $\tilde{x}_\alpha^-(t) = x_\alpha^-(t)$ e $\tilde{x}_\alpha^+(t) = x_\alpha^+(t) + (1 - \alpha)\epsilon\beta(t)$. Prosseguindo, verificamos aplicando a definição de gH -derivada a função $\tilde{X}$ que:

$$\begin{aligned} [\tilde{X}'_{gH}(t)]_\alpha &= \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{X}(t+h) -_{gH} \tilde{X}(t)}{h} \right] \\ &= \left[\lim_{h \rightarrow 0} \min \left\{ \frac{x_\alpha^-(t+h) - x_\alpha^-(t)}{h}, \frac{x_\alpha^+(t+h) - x_\alpha^+(t) + (1 - \alpha)\epsilon(\beta(t+h) - \beta(t))}{h} \right\}, \right. \\ &\quad \left. \lim_{h \rightarrow 0} \max \left\{ \frac{x_\alpha^-(t+h) - x_\alpha^-(t)}{h}, \frac{x_\alpha^+(t+h) - x_\alpha^+(t) + (1 - \alpha)\epsilon(\beta(t+h) - \beta(t))}{h} \right\} \right] \\ &= [\min\{(x_\alpha^-)'(t), (x_\alpha^+)'(t) + (1 - \alpha)\epsilon\beta'(t)\}, \max\{(x_\alpha^-)'(t), (x_\alpha^+)'(t) + (1 - \alpha)\epsilon\beta'(t)\}]. \end{aligned}$$

Como X é (i)- gH -diferenciável, então da Proposição 11 segue que $(x_\alpha^-)'(t) \leq (x_\alpha^+)'(t)$, e de $\beta'(t) > 0$ que $(1 - \alpha)\epsilon\beta'(t) \geq 0$. Logo, $(x_\alpha^-)'(t) \leq (x_\alpha^+)'(t) + (1 - \alpha)\epsilon\beta'(t)$, o que mostra que os α -níveis do conjunto fuzzy $\tilde{X}'_{gH}(t)$ satisfazem o Teorema do Empilhamento e assim $\tilde{X}'_{gH}(t)$ é um número fuzzy, e isso garante que $\tilde{X}$ é gH -diferenciável. Em particular,

$$(\tilde{x}_\alpha^-)'(t) = (x_\alpha^-)'(t) \leq (x_\alpha^+)'(t) + (1 - \alpha)\epsilon\beta'(t) = (\tilde{x}_\alpha^+)'(t)$$

o que implica que $\tilde{X}$ é (i)- gH -diferenciável. Portanto,

$$\begin{aligned} [\tilde{X}'_{((i)-gH)}(t)]_\alpha &= [(x_\alpha^-)'(t), (x_\alpha^+)'(t) + (1 - \alpha)\epsilon\beta'(t)] \\ &= [(x_\alpha^-)'(t), (x_\alpha^+)'(t)] + [0, (1 - \alpha)\epsilon\beta'(t)] \\ &= [X'_{((i)-gH)}(t)]_\alpha + [Y'_{((i)-gH)}(t)]_\alpha, \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, isto é, $\tilde{X}'_{((i)-gH)}(t) = X'_{((i)-gH)}(t) + Y'_{((i)-gH)}(t)$.

Na Seção 2.3 veremos que é possível construir uma derivada fuzzy, a partir dos chamados conjuntos fortemente linearmente independentes de números fuzzy, definidos na Seção 2.1, a qual satisfaz as propriedades esperadas da derivada usual.

1.6 Equações Diferenciais Fuzzy

Nesta Seção apresentaremos os conceitos necessários ao desenvolvimento desse trabalho com respeito a teoria de Equações Diferenciais que envolvem funções de variáveis reais que assumem valores fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e suas, respectivas, derivadas generalizadas de Hukuhara.

Seja a função fuzzy $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ gH -diferenciável em (a, b) . Uma Equação Diferencial Fuzzy (EDF), em termos da gH -derivada, é uma equação diferencial da forma

$$X'_{gH}(t) = F(t, X) \tag{1.7}$$

em que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é uma função contínua (ou um campo de vetores fuzzy contínuo). Quando é dada uma condição inicial $X(t_0) = X_0$, $t_0 \in [a, b]$, teremos o Problema de Valor

Inicial Fuzzy (PVIF) sob a gH-derivada:

$$\begin{cases} X'_{gH} = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Sejam os α -níveis da função fuzzy X e do campo $F(t, X)$ dados por $[X]_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$ e $[F(t, X)]_\alpha = [f_\alpha^-(s, x_\alpha^-, x_\alpha^+), f_\alpha^+(s, x_\alpha^-, x_\alpha^+)]$, respectivamente. Em termos dos α -níveis, o PVIF (1.8) é equivalente a

$$\begin{cases} x_\alpha^-(t) = (x_0)_\alpha^- + \int_{t_0}^t f_\alpha^-(s, x_\alpha^-, x_\alpha^+) ds \\ x_\alpha^+(t) = (x_0)_\alpha^+ + \int_{t_0}^t f_\alpha^+(s, x_\alpha^-, x_\alpha^+) ds \end{cases} \quad (1.9)$$

quando X é (i)-gH-diferenciável e

$$\begin{cases} x_\alpha^-(t) = (x_0)_\alpha^- + \int_{t_0}^t f_\alpha^+(s, x_\alpha^-, x_\alpha^+) ds \\ x_\alpha^+(t) = (x_0)_\alpha^+ + \int_{t_0}^t f_\alpha^-(s, x_\alpha^-, x_\alpha^+) ds \end{cases} \quad (1.10)$$

quando X é do tipo (ii)-gH-diferenciável. Note que as equações integrais obtidas em (1.9) e (1.10) são correspondentes a equações diferenciais ordinárias escritas em termos dos extremos x_α^- e x_α^+ e de suas respectivas derivadas satisfazendo uma condição inicial:

$$(i)\text{-gH: } \begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) = f_\alpha^-(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+), & x_\alpha^-(t_0) = (x_0)_\alpha^- \\ (x_\alpha^+)'(t) = f_\alpha^+(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+), & x_\alpha^+(t_0) = (x_0)_\alpha^+ \end{cases} \quad (1.11)$$

e

$$(ii)\text{-gH: } \begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) = f_\alpha^+(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+), & x_\alpha^-(t_0) = (x_0)_\alpha^- \\ (x_\alpha^+)'(t) = f_\alpha^-(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+), & x_\alpha^+(t_0) = (x_0)_\alpha^+. \end{cases} \quad (1.12)$$

A existência e unicidade de uma solução para os Problemas de Valor Inicial (PVI's) (1.11) e (1.12) são garantidas pelo Teorema de Picard-Lindelöf (Teorema 8.13 de (KELLEY; PETERSON, 2010), p.350). No entanto, esse fato não é suficiente para garantir a existência e unicidade da solução do PVIF dado por (1.8) uma vez que as soluções encontradas x_α^- e x_α^+ podem não satisfazer o Teorema do Empilhamento (ver Exemplo 14).

Exemplo 14. Considere o PVIF sob a gH-derivada

$$X'_{gH} = -X + 2e^{-t}(-1; 0; 1), \quad X(0) = (-1; 0; 1).$$

Sejam $[X]_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$ e $[X(0)]_\alpha = [x_\alpha^-(0), x_\alpha^+(0)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$. Suponha que X é (i)-gH-diferenciável então, pela igualdade (1.11), obtemos

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) = -x_\alpha^+ - 2(1 - \alpha)e^{-t}, & x_\alpha^-(0) = \alpha - 1 \\ (x_\alpha^+)'(t) = -x_\alpha^- + 2(1 - \alpha)e^{-t}, & x_\alpha^+(0) = 1 - \alpha. \end{cases} \quad (1.13)$$

Defina a função diferenciável $y = x_\alpha^+ + x_\alpha^-$ com $y(0) = x_\alpha^+(0) + x_\alpha^-(0) = 0$. A partir de (1.13) obtemos o PVI:

$$y' = -y \text{ com } y(0) = 0$$

cujas soluções são $y = 0$. Assim,

$$x_\alpha^+(t) = -x_\alpha^-. \quad (1.14)$$

Substituindo a expressão (1.14) na primeira linha de (1.13) obtemos o PVI

$$(x_\alpha^-)'(t) = x_\alpha^- - 2(1 - \alpha)e^{-t}, \quad x_\alpha^-(0) = \alpha - 1$$

que possui solução

$$x_\alpha^-(t) = (\alpha - 1)(e^{-t} - 2e^t).$$

Daí, encontramos

$$x_\alpha^+(t) = (1 - \alpha)(e^{-t} - 2e^t).$$

Por fim, devemos verificar se o Teorema do Empilhamento é satisfeito ou, em outras palavras, para quais valores $t \in \mathbb{R}$ tem-se $x_\alpha^+(t) \geq x_\alpha^-(t)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Sendo assim,

$$x_\alpha^+(t) - x_\alpha^-(t) = 2(1 - \alpha)(e^{-t} - 2e^t) \geq 0 \iff t \in \left(-\infty, 0.5 \ln \left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

Logo, $X(t) = (e^{-t} - 2e^t)(-1; 0; 1)$ é uma solução do PVIF somente se $t \in \left(-\infty, 0.5 \ln \left(\frac{1}{2}\right)\right]$. Suponhamos que X é uma função fuzzy (ii)-gH-diferenciável. Temos a partir de (1.12) que

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) = -x_\alpha^- + 2(1 - \alpha)e^{-t}, & x_\alpha^-(0) = \alpha - 1 \\ (x_\alpha^+)'(t) = -x_\alpha^+ - 2(1 - \alpha)e^{-t}, & x_\alpha^+(0) = 1 - \alpha. \end{cases} \quad (1.15)$$

As soluções dos PVI's em (1.15) são $x_\alpha^-(t) = (1 - \alpha)(2t - 1)e^{-t}$ e $x_\alpha^+(t) = (1 - \alpha)(1 - 2t)e^{-t}$ as quais verificam $x_\alpha^+(t) \geq x_\alpha^-(t)$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, se e somente se,

$$x_\alpha^+(t) - x_\alpha^-(t) = 2(1 - \alpha)(1 - 2t)e^{-t} \geq 0 \iff t \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

Obtemos assim a solução do PVIF como $X(t) = (1 - 2t)e^{-t}(-1; 0; 1)$ para $t \leq \frac{1}{2}$.

Nota 3. Na teoria de Equações Diferenciais Fuzzy existe uma versão similar do Teorema de Picard-Lindelöf desenvolvida inicialmente por (WU; SONG; LEE, 1996) para PVIF's escritos sob a derivada de Hukuhara (chamada de H-derivada) introduzida em (PURI; RALESCU, 1983).

Posteriormente (LUPULESCU, 2009) estudou resultados de existência e unicidade para PVIF's sob esse mesmo tipo de derivada e (BEDE; GAL, 2010) a existência e unicidade de duas soluções para EDF's baseadas em derivadas generalizadas fortes [ver (BEDE; GAL, 2005) ou Definição 8.31 de (BEDE, 2013)].

Um outro aspecto importante é que mesmo que a solução X de (1.8) seja um número fuzzy bem definido o comportamento do seu diâmetro pode contrariar a conduta ou a dinâmica natural do fenômeno modelado por esse problema. Por exemplo, no Capítulo 4, veremos que no modelo de decaimento fuzzy, dependendo do tipo de gH-derivada, o diâmetro da solução não tem o comportamento esperado para um modelo de decaimento uma vez que à medida que o tempo cresce o valor de incerteza aumenta em vez de diminuir.

O comportamento conflitante entre o diâmetro da solução de um PVIF e a natureza do fenômeno por ele modelado ocorre porque as equações diferenciais em função dos extremos x_{α}^{-} e x_{α}^{+} dependem do tipo de gH-diferenciabilidade da gH-derivada da função fuzzy $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Isto é, a mudança desse tipo de gH-diferenciabilidade ao longo do interior do domínio de X ocasionada pela existência de *switch points* em (a, b) implica na mudança da forma da equação diferencial ordinária descrita por (1.11) ou (1.12).

2 Conjuntos Fortemente Linearmente Independentes e a Ψ -derivada de Funções Fuzzy

Neste Capítulo apresentaremos os conceitos fundamentais da teoria de independência linear forte de conjuntos formados por números fuzzy. Veremos que esses conceitos são essenciais para relacionar subconjuntos de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com espaços reais n -dimensionais. Em particular, essa relação permitiu (ESMI et al., 2021b) estabelecer a chamada de Ψ -derivada de funções fuzzy de tal sorte que essa derivada fuzzy goza das propriedades de linearidade da derivada tradicional em $\mathbb{R}^n$.

2.1 Independência Linear Forte de Subconjuntos Fuzzy

Nesta Seção apresentaremos o conceito de conjunto fortemente linearmente independente (FLI) de números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Este conceito é essencial para o desenvolvimento da teoria de aproximação de funções fuzzy por aquelas que tem essa natureza e, consequentemente, uma estrutura mais simples como, por exemplo, funções fuzzy cuja lei de formação se assemelhe a de funções lineares em $\mathbb{R}^n$.

A consequência imediata dessa aproximação é poder relacionar soluções de Equações Diferenciais Fuzzy (EDF), escritas sob a gH-derivada, com soluções de EDF perante uma estrutura de derivada fuzzy construída a partir de subconjuntos FLI de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, na qual essa derivada fuzzy possui propriedades semelhantes às da derivada clássica em $\mathbb{R}^n$.

A fim de definirmos o conceito de conjunto fortemente linearmente independente, no conjunto de números fuzzy $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, precisaremos definir uma classe especial de números fuzzy que está diretamente relacionada aos conjuntos FLI: o conjunto dos números fuzzy simétricos.

Definição 16. (ESMI et al., 2018) *Um número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é simétrico, com respeito a $x \in \mathbb{R}$, se*

$$A(x - y) = A(x + y) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Diremos que um número fuzzy A é não-simétrico (ou assimétrico) se para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $A(x - y) \neq A(x + y)$. Denotaremos $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ simétrico a $x \in \mathbb{R}$ por $(A \mid x)$.

Exemplo 15. *Todo número real é um número fuzzy simétrico em relação a si mesmo. De*

fato, cada $x \in \mathbb{R}$ é identificado com $\chi_{\{x\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e assim, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, verifica-se que

$$\chi_{\{x\}}(x - y) = \chi_{\{x\}}(x + y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{se } y \neq 0. \end{cases}$$

O resultado a seguir é uma outra forma de verificar quando um número fuzzy A é simétrico, em relação a $x \in \mathbb{R}$, através dos seus respectivos α -níveis.

Proposição 12. (ESMI et al., 2018) *Seja $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$. Então, A é um número fuzzy simétrico em relação a $x \in \mathbb{R}$, se e somente se, $a_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{+} = 2x$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Em particular, o valor médio dos α -níveis de A , denotado por $\delta_A(\alpha)$, é uma função constante.*

Demonstração. Ver Lema 3.5 em (ESMI et al., 2018), p.153. □

Exemplo 16. *O número fuzzy triangular $A = (1; 3; 5)$ é simétrico em relação a $x = 3$. De fato, sendo $[A]_{\alpha} = [1 + 2\alpha, 5 - 2\alpha]$ obtemos*

$$2x = a_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{+} = (1 + 2\alpha) + (5 - 2\alpha) = 6.$$

Por outro lado, o número fuzzy $B = (1; 2; 5)$, com α -níveis $[B]_{\alpha} = [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}]$, não é simétrico, uma vez que

$$[B]_{\alpha} = [1 + \alpha, 5 - 3\alpha] \implies \delta_B(\alpha) = b_{\alpha}^{-} + b_{\alpha}^{+} = 2(3 - \alpha) \neq \text{cte. } \forall \alpha \in [0, 1].$$

Podemos ver na Figura 12 a representação dos números fuzzy A e B e perceber facilmente que A é simétrico em relação a $x = 3$ e que B não é simétrico a nenhum valor $x \in \mathbb{R}$.

Baseados na noção de assimetria de um número fuzzy, o conceito de independência linear forte pode ser definido como segue.

Definição 17. (ESMI et al., 2021a) *Considere “+” a soma usual em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $A_1, A_2, \dots, A_n$ números fuzzy quaisquer. O subconjunto finito $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é dito fortemente linearmente independente se*

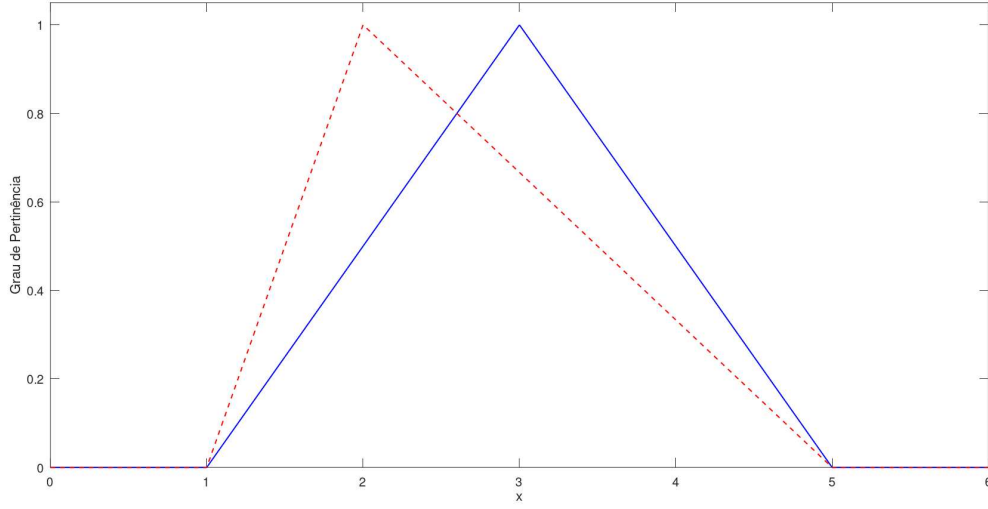
$$(q_1 A_1 + q_2 A_2 \cdots + q_n A_n \mid 0) \implies q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0,$$

em que $q_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$.

Determinar se um subconjunto de números fuzzy é fortemente linearmente independente pode ser uma tarefa complicada se for feita a partir da Definição 17. Sendo assim, devemos encontrar caminhos alternativos para realizar esse processo de verificação.

Uma forma de realizarmos a verificação de que um conjunto de números fuzzy é FLI é conectando os elementos desse conjunto ao conjunto de funções determinado pelo valor médio dos respectivos α -níveis desses números (ver Definição 6). A vantagem dessa abordagem é podermos relacionar o conceito de subconjunto FLI ao conceito de conjunto linearmente independente de funções de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Figura 12 – $(1; 3; 5)$ -curva azul- é um número fuzzy simétrico em relação a 3 e $(1; 2; 5)$ -curva vermelha tracejada- é um número fuzzy assimétrico.



Fonte: Autor.

Proposição 13. (ESMI et al., 2021a) *Sejam $A_i \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\delta_{A_i} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\delta_{A_i}(\alpha) = (a_i)_{\alpha}^{-} + (a_i)_{\alpha}^{+}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$. O conjunto $\{A_1, \dots, A_n\}$ é FLI se, e somente se, o conjunto de funções $\{\delta_{A_1}, \dots, \delta_{A_n}\}$ é linearmente independente (LI).*

Demonstração. Ver Teorema 2 em (ESMI et al., 2021a), p.120. □

A Proposição 13 nos faz esperar que alguns resultados da teoria clássica de Álgebra Linear possam ser desenvolvidos de forma semelhante para a teoria de subconjuntos FLI de números fuzzy. Os próximos dois resultados caracterizam essa similaridade e assim são consequências imediatas da Proposição 13.

Corolário 1. *Se $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $n > 2$, é um conjunto FLI então o conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\}$ é FLI.*

Demonstração. Seja δ_{A_i} o valor médio do número fuzzy $A_i \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pela Proposição 13, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ é FLI se, e somente se, $\{\delta_{A_1}, \dots, \delta_{A_n}\}$ é LI. Pela teoria clássica de Álgebra Linear, todo subconjunto de um conjunto LI é também LI, logo $\{\delta_{A_1}, \dots, \delta_{A_{n-1}}\}$ é LI e novamente pela Proposição 13,

$$\{\delta_{A_1}, \dots, \delta_{A_{n-1}}\} \text{ é LI } \iff \{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \text{ é FLI } .$$

□

Corolário 2. (ESMI et al., 2021a) *Sejam $A_i \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\delta_{A_i} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\delta_{A_i}(\alpha) = (a_i)_{\alpha}^{-} + (a_i)_{\alpha}^{+}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$. Se existe $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$, com $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i \neq j$ e a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} \delta_{A_1}(\alpha_1) & \delta_{A_2}(\alpha_1) & \dots & \delta_{A_n}(\alpha_1) \\ \delta_{A_1}(\alpha_2) & \delta_{A_2}(\alpha_2) & \dots & \delta_{A_n}(\alpha_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{A_1}(\alpha_n) & \delta_{A_2}(\alpha_n) & \dots & \delta_{A_n}(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

é não-singular, então $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ é um conjunto FLI.

Demonstração. Ver Corolário 5 em (ESMI et al., 2021a), p.121. $\square$

Exemplo 17. *Sejam $a > 0$ e $A = (-a; 0; a)$ um número fuzzy simétrico. O conjunto $\{A\}$ não é FLI. De fato, verificamos imediatamente que $\delta_A(\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, e assim*

$$\{\delta_A\} \text{ não é LI} \iff \{A\} \text{ não é FLI.}$$

Por outro lado, seja $B = \left(x_1; \frac{x_1 + x_2}{2}; x_2\right)$ um número fuzzy triangular com $x_1 \neq -x_2$. Verificamos que $\delta_B(\alpha) = \frac{x_1 + x_2}{2} \neq 0$ e assim

$$\{\delta_B\} \text{ é LI} \iff \{B\} \text{ é FLI.}$$

Por fim, se C é um número fuzzy não-simétrico, então $\delta_C(\alpha)$ não é uma função constante. Logo, $\{\delta_C\}$ é LI e portanto $\{C\}$ é FLI.

Exemplo 18. *Sejam $A_1 = (0; 1; 2)$ e $A_2 = (0; 1; 2; 2)$ dois números fuzzy com $\delta_{A_1}(\alpha) = 2$ e $\delta_{A_2}(\alpha) = \alpha + 2$ para $\alpha \in [0, 1]$. Dados $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{1}{4}$, encontramos a matriz*

$$\begin{pmatrix} \delta_{A_1}(\alpha_1) & \delta_{A_2}(\alpha_1) \\ \delta_{A_1}(\alpha_2) & \delta_{A_2}(\alpha_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 2 & 9/4 \end{pmatrix}$$

cujos determinante é $-\frac{1}{2}$. Portanto, pelo Corolário 2, $\{A_1, A_2\}$ é um conjunto FLI.

Uma das características dos conjuntos de números fuzzy que são fortemente linearmente independentes é que eles contêm no máximo um número fuzzy que seja simétrico. Como consequência imediata desse fato, um conjunto FLI pode conter no máximo um número real arbitrário. Veremos esse resultado na seguinte proposição.

Proposição 14. (ESMI et al., 2021a) *Sejam $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Se existem números reais y e z tais que $(A_i \mid y)$ e $(A_j \mid z)$ para algum $i \neq j$, então $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ não é um conjunto FLI.*

Demonstração. Ver Proposição 4 em (ESMI et al., 2021a), p.119. $\square$

Observação 7. *Seja $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Como todo número real é um número fuzzy simétrico a si mesmo, então $\{1, A\}$ ser um conjunto FLI implica que A é não-simétrico. De fato, se A fosse simétrico em relação a algum $x \in \mathbb{R}$, então $\delta_A(\alpha) = 2x$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Assim,*

$$\delta_A(\alpha) = 2x = x \cdot \delta_{\{1\}}(\alpha) \implies \{\delta_{\{1\}}, \delta_A\} \text{ é um conjunto LD,}$$

absurdo, uma vez que $\{1, A\}$ é FLI $\iff \{\delta_{\{1\}}, \delta_A\}$ é LI.

2.2 Espaços de Banach gerados por números fuzzy FLI

Nesta Seção apresentaremos os espaços de Banach que são gerados a partir de conjuntos de números fuzzy fortemente linearmente independentes em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Os espaços de Banach são os ambientes mais apropriados para o desenvolvimento de uma teoria de Cálculo para classes de objetos matemáticos, pois com as operações definidas nesses conjuntos e com as normas que os estruturam, definem-se apropriadamente os conceitos de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade para funções que assumam valores nesses conjuntos e que satisfaçam propriedades clássicas do Cálculo.

O conjunto de números fuzzy $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ não é um espaço vetorial, portanto não é apropriado para o desenvolvimento de uma teoria de Cálculo Diferencial que satisfaça propriedades básicas como a derivada da soma de funções ser igual a soma das derivadas das respectivas funções e tantas outras. Apesar da métrica d_{∞} nos permitir definir o conceito de gH-derivada, para funções fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, esse tipo de derivada não satisfaz propriedades elementares do Cálculo como a dada por (2.6) na Seção 2.3.

Devido a essa dificuldade, (ESMI et al., 2021a) introduziu a noção de conjuntos FLI que apresentamos na Seção 2.1. A partir dos conjuntos FLI obtém-se funções fuzzy, com conjunto imagem contido em espaços de Banach, que possuem derivadas que satisfazem propriedades clássicas da teoria do Cálculo Diferencial.

A fim de tornar conjuntos de números fuzzy FLI em espaços de Banach, necessitaremos estabelecer estruturas algébrica e métrica por meio de um operador que corresponda um espaço vetorial real n -dimensional ao conjunto $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e que conecte vetores n -dimensionais a conjuntos FLI formados por n números fuzzy.

Em particular, esse operador induz um caso especial de produto cruzado de números fuzzy que é fechado em certos espaços de Banach gerados por números fuzzy.

2.2.1 O operador Ψ e suas propriedades

O operador que definiremos a seguir estabelece um isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ e um subconjunto de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ formado por n números fuzzy. Em particular, a propriedade de injetividade desse operador garante que o subconjunto de números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é FLI.

Teorema 7. (ESMI et al., 2021a) *Seja $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $n > 0$. Considere “+” a soma usual em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e o operador $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ definido por*

$$\Psi(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1 A_1 + p_2 A_2 + \dots + p_n A_n \quad (2.1)$$

para cada $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. O operador Ψ é uma função injetiva se, e somente se, $\{A_1, \dots, A_n\}$ é um conjunto FLI.

Demonstração. Ver Teorema 1 em (ESMI et al., 2021a), p.116. $\square$

Observação 8. *No Teorema 7 é verificado de forma imediata que se $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, então Ψ é um operador injetivo se, e somente se, $(\Psi(p) \mid 0)$ implica que $p = 0$.*

Observação 9. *Ainda no Teorema 7 observamos que o operador Ψ tem o aspecto de uma função linear, no entanto, Ψ não é um operador linear. De fato, para um conjunto $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com $n \geq 1$ e $A_1 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$, verificamos para $p = (1, 0, \dots, 0)$ e $q = (-1, 0, \dots, 0)$ em $\mathbb{R}^n$ que*

$$\Psi(p + q) = \Psi(0, 0, \dots, 0) = 0$$

mas

$$\Psi(p) + \Psi(q) = A_1 + (-1)A_1 \neq 0.$$

O exemplo acima nos mostra que o operador Ψ não é linear com respeito a soma usual de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ definida em (1.3).

O seguinte teorema afirma que podemos aplicar o operador Ψ , definido na Proposição 7, para induzir estruturas algébrica e métrica de um espaço de Banach na imagem

$$\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n) := \{A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \mid \exists p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R} \text{ tais que } A = p_1 A_1 + \dots + p_n A_n\}$$

desse operador. Em particular, o operador Ψ proverá uma soma e um produto por escalar que o tornam um operador linear.

Proposição 15. (ESMI et al., 2021a) *Sejam $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ FLI e $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$. Então, $(\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n), +_{\Psi}, \cdot_{\Psi}, \|\cdot\|_{\Psi})$ é um espaço de Banach real com*

$$B +_{\Psi} C = \Psi(\Psi^{-1}(B) + \Psi^{-1}(C)), \quad \forall B, C \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n), \quad (2.2)$$

$$\lambda \cdot_{\Psi} B = \Psi(\lambda \Psi^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n) \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

e

$$\|B\|_{\Psi} = \|\Psi^{-1}(B)\|, \quad \forall B \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n). \quad (2.4)$$

Além disso, $(\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n), +_{\Psi}, \cdot_{\Psi}, \|\cdot\|_{\Psi})$ é isomorfo ao espaço de Banach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ sob o isomorfismo Ψ .

Demonstração. Ver Teorema 1 em (ESMI et al., 2021a). $\square$

A seguir, faremos duas observações importantes sobre as operações definidas por (2.2) e (2.3) no espaço $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$.

Observação 10. *O produto por escalar usual coincide com o induzido pelo isomorfismo Ψ , isto é, para todo $B = \Psi(p_1, \dots, p_n)$ com $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$\begin{aligned} \lambda \cdot B &= \lambda \cdot (p_1 A_1 + \dots + p_n A_n) \\ &= (\lambda \cdot p_1) A_1 + \dots + (\lambda \cdot p_n) A_n \\ &= \Psi(\lambda p_1, \dots, \lambda p_n) \\ &= \Psi(\lambda \Psi^{-1}(B)) \\ &= \lambda \cdot_{\Psi} B. \end{aligned}$$

Observação 11. *Note que para $B = \Psi(p_1, \dots, p_n)$ e $C = \Psi(q_1, \dots, q_n)$, com $(p_1, \dots, p_n)$ e $(q_1, \dots, q_n)$ em $\mathbb{R}^n$, a soma $B +_{\Psi} C$ é dada em termos da soma usual dos vetores $(p_1, \dots, p_n)$ e $(q_1, \dots, q_n)$ correspondentes, isto é,*

$$\begin{aligned} B +_{\Psi} C &= \Psi(\Psi^{-1}(B) + \Psi^{-1}(C)) \\ &= \Psi((p_1, \dots, p_n) + (q_1, \dots, q_n)) \\ &= \Psi((p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n)) \\ &= (p_1 + q_1) A_1 + \dots + (p_n + q_n) A_n. \end{aligned}$$

Devido ao fato apresentado na Observação 10, a partir de agora denotaremos e trataremos o produto por escalar induzido por Ψ simplesmente como o produto usual no conjunto $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Veremos no exemplo a seguir que a soma usual entre números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ e a soma induzida pelo isomorfismo Ψ geralmente não coincidem no espaço $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$.

Exemplo 19. *Seja $\{A, B\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um conjunto FLI formado por $A = (0; 1; 1)$ e $B = (0; 2; 4)$. Esse conjunto induz o isomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}(A, B)$ definido por*

$$\Psi(x, y) = x(0; 1; 1) +_{\Psi} y(0; 2; 4).$$

Verificamos que $C = (0; 3; 5)$ e $D = (-1; -1; 0)$ são elementos de $\mathcal{S}(A, B)$, pois $\Psi(1, 1) = C$ e $\Psi(-1, 0) = D$, tais que sua soma usual é igual a $C + D = (-1; 2; 5)$, enquanto a sua soma induzida pelo isomorfismo Ψ é

$$\begin{aligned} C +_{\Psi} D &= \Psi(\Psi^{-1}(C) + \Psi^{-1}(D)) \\ &= \Psi((1, 1) + (-1, 0)) \\ &= \Psi(0, 1) \\ &= (0; 2; 4). \end{aligned}$$

2.2.2 O Ψ -Produto Cruzado e suas propriedades

Na Subseção 2.2.1 mostramos via isomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ que as operações de soma e produto por escalar induzidas por Ψ são fechadas em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$.

Nesta Subseção veremos que podemos restringir o conceito de produto cruzado (ver Subseção 1.3.3) ao espaço $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ definindo assim o que chamaremos de Ψ -produto cruzado. Esta versão forte do produto cruzado tem como propriedade fundamental a preservação das características algébricas e geométricas de certos números fuzzy em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ os quais possuem núcleo unitário, o interior não admite o valor nulo e $A_i \in \mathbb{R}$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Isto é, o Ψ -produto cruzado é uma operação fechada em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ que preserva a forma dos números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\wedge}$ contidos em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$.

Antes de definirmos o Ψ -produto cruzado, convém exemplificarmos que o produto cruzado em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ nem sempre é uma operação fechada em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ e portanto pode não ser uma operação válida nesse espaço.

Exemplo 20. (LONGO et al., 2022) *Seja $A = (-1; 0; 0.5)$ um número fuzzy não-simétrico. O produto cruzado não é fechado em $\mathcal{S}(1, A)$. Com efeito, definamos $B = A - 1 = (-2; -1; -0.5)$ e $C = 2A + 1 = (-1; 1; 2)$ números fuzzy negativo e positivo, respectivamente, em $\mathcal{S}(1, A)$. Então:*

$$B \odot C = (-1) \cdot C + B + 1 = (-3; -1; 1.5) \notin \mathcal{S}(1, A).$$

Uma forma de fazer com que o produto cruzado seja uma operação fechada, no espaço $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$, foi apresentada por (LAIATE et al., 2021) e consistia em substituir as operações de soma e produto escalar usuais, herdadas de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, pelas operações de soma e produto escalar induzidas pelo isomorfismo Ψ em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ de acordo com a seguinte definição.

Definição 18. (LAIATE et al., 2021) *Seja $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\wedge}$ um conjunto FLI tal que $\mathbb{R} \subset \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$, isto é, $A_i = 1$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Considere os números fuzzy A e B em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$. O Ψ -produto cruzado de A por B é definido como o número fuzzy C dado por:*

$$C = A \odot_{\Psi} B = aB +_{\Psi} bA -_{\Psi} ab$$

em que $+_{\Psi}$ é a soma induzida pelo isomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ e $[A]_1 = \{a\}$ e $[B]_1 = \{b\}$.

Note que o fato de $(\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n), +_{\Psi}, \cdot)$ ser um espaço vetorial implica que $aB +_{\Psi} bA -_{\Psi} ab \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Daí, $A \odot_{\Psi} B \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ quaisquer que sejam os números fuzzy $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\wedge}$, ou seja, o Ψ -produto cruzado é uma operação fechada em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$.

Um fato interessante é que o isomorfismo Ψ ao induzir a Ψ -soma e o Ψ -produto cruzado descreve os α -níveis dos números fuzzy sob ação dessas operações de maneira bastante simples, conforme apresentamos na Proposição a seguir.

Proposição 16. (LAIATE et al., 2021) *Sejam $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\wedge}$ um conjunto FLI e A e B em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$. Então valem as seguintes propriedades:*

$$i) [A +_{\Psi} B]_1 = [A]_1 + [B]_1;$$

$$ii) [A \odot_{\Psi} B]_1 = [A]_1[B]_1.$$

Demonstração. Ver Lema 2 em (LAIATE et al., 2021), p.4. □

Observação 12. *Como consequência da Proposição 16 o Ψ -produto cruzado é uma extensão direta do produto entre números reais, isto é, se $A, B \in \mathbb{R}$ então $A \odot_{\Psi} B = ab$ com $[A]_1 = \{a\}$ e $[B]_1 = \{b\}$.*

O Ψ -produto cruzado possui as seguintes propriedades operatórias no conjunto $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$.

Proposição 17. (LAIATE et al., 2021) *Seja $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{\wedge}$ um conjunto FLI tal que $\mathbb{R} \subset \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$, isto é, $A_i \in \mathbb{R}$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Para todo $A, B \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ valem as seguintes propriedades:*

$$i) A \odot_{\Psi} B = B \odot_{\Psi} A;$$

$$ii) (A +_{\Psi} B) \odot_{\Psi} C = (A \odot_{\Psi} C) +_{\Psi} (B \odot_{\Psi} C);$$

$$iii) (\lambda A) \odot_{\Psi} B = \lambda(A \odot_{\Psi} B)$$

$$iv) (A \odot_{\Psi} B) \odot_{\Psi} C = A \odot_{\Psi} (B \odot_{\Psi} C);$$

$$v) A \odot_{\Psi} 1 = 1 \odot_{\Psi} A \text{ em que } 1 = \chi_{\{1\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}};$$

$$vi) A \odot_{\Psi} B \subseteq A \odot B.$$

Demonstração. Ver Teorema 3 em (LAIATE et al., 2021), p.4. □

2.2.3 Os espaços de Banach $\mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n)$

Um simples e interessante caso de espaço de Banach gerado por um conjunto de números fuzzy FLI é o espaço da forma $\mathcal{S}(1, A)$. Em (ESMI et al., 2018), os autores mostram que o conjunto $\{1, A\}$ é FLI quando A é um número fuzzy não-simétrico. Isto significa que podemos construir espaços de Banach (contidos em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$) apenas escolhendo adequadamente um elemento não-simétrico $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Ainda mais, mesmo que A seja

simétrico ainda é possível construir um espaço de Banach da forma $\mathcal{S}(1, \tilde{A})$, uma vez que se A é simétrico o número fuzzy $\tilde{A} = A + (0; 0; \epsilon)$, $\epsilon > 0$, será assimétrico.

Os espaços de Banach gerados pelos conjuntos de números fuzzy da forma $\{1, A\}$ serão denotados por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ e chamados de espaço de números fuzzy correlacionados linearmente. A importância dos espaços dessa forma está no fato de que, dada uma função fuzzy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$, é sempre possível decompor f em uma aplicação da forma $f(x) = \rho(x)A + \beta(x)$, $x \in [a, b]$, com $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. E, nesse caso, $f(x)$ pode ser visto intuitivamente como a soma de um valor determinístico $\beta(x)$ e um valor incerto $\rho(x)A$. Além disso, se A é um número fuzzy “ao torno de zero”, isto é, 0 pertence ao núcleo de A , então a função β pode ser vista como um “*drift determinístico*” de f e a função $\rho(x)A$, $x \in [a, b]$, a incerteza ao redor desse *drift*. Assim, a função ρ modula a incerteza ao redor do *drift* β .

Um fato importante a se observar é que as funções ρ e β podem ser regidas por regras distintas. Por exemplo, β pode ser governada por uma equação diferencial e convergir para algum estado estacionário enquanto ρ pode descrever algum tipo de sazonalidade na incerteza envolvida.

De maneira geral, se $\{1, A_1, A_2, \dots, A_n\}$ é um subconjunto FLI com $\text{diam}(A_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$, então a função fuzzy f , com $f(x) \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n)$, $x \in [a, b]$, pode ser vista como o resultado da soma de um valor determinístico $\beta(x)$ e um valor incerto $\rho_1(x)A_1 + \dots + \rho_n(x)A_n$, isto é,

$$f(x) = \beta(x) + \rho_1(x)A_1 + \dots + \rho_n(x)A_n. \quad (2.5)$$

Assim como antes, β pode ser interpretado como “*drift determinístico*” e $\rho_1(x)A_1 + \dots + \rho_n(x)A_n$ pode representar um “*ruído*” no ponto x resultante de n diferentes fontes $A_1, \dots, A_n$.

As funções fuzzy que tomam valores em espaços de Banach, gerados por um conjunto FLI contendo um número real, podem ser naturalmente divididas em uma parte determinística (*drift*) e uma parte incerta (ruído) e esse tipo de decomposição é interessante partindo do ponto de vista da modelagem matemática uma vez que a decomposição apresentada em (2.5) permite avaliar o comportamento de uma solução de um problema de valor inicial fuzzy, no sentido que, podemos observar o comportamento do valor médio da solução e de como a incerteza é modulada em torno desse valor, conforme será exemplificado no Capítulo 4.

Uma questão que surge naturalmente é o que pode ocorrer se os conjuntos da forma $\{1, A_1, \dots, A_n\}$ não forem FLI e portanto não poder realizar a decomposição desejada. A resposta a essa dúvida é apresentada no teorema a seguir, o qual mostra que independente de $\{1, A_1, \dots, A_n\}$ ser FLI ou não podemos aproximá-lo a fim de obter um conjunto $\{1, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n\}$ que seja FLI.

Em particular, podemos construir espaços de Banach reais $(n+1)$ -dimensionais, contidos em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, a partir de qualquer conjunto arbitrário de números fuzzy $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Teorema 8. (*ESMI et al., 2021a*) *Sejam A_i números fuzzy tais que $\text{diam}(A_i) > 0$ para $i = 1, \dots, n$. Para cada $\epsilon > 0$, existem números fuzzy $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ tais que $\{1, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n\}$ é um conjunto FLI, $d_{\infty}(A_i, \tilde{A}_i) < \epsilon$ e $\text{diam}(\tilde{A}_i) > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Seja $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $0 < \epsilon < 1$. Seja $\epsilon = (0; 0; \epsilon)$. Provaremos este teorema usando indução.

Para $n = 1$. Se $\{A_1\}$ é FLI e A_1 é um número fuzzy não-simétrico, então definiremos $\tilde{A}_1 = A_1$ e teremos $d_{\infty}(A_1, \tilde{A}_1) = 0 < \epsilon$, $\text{diam}(\tilde{A}_1) = \text{diam}(A_1) > 0$ e, além disso, $\{1, \tilde{A}_1\}$ será um conjunto FLI, pois $\{\delta_{\{1\}}, \delta_{\tilde{A}_1}\}$ é um conjunto LI.

Se $\{A_1\}$ é FLI e A_1 é um número fuzzy simétrico, definimos $\tilde{A}_1 = A_1 + \epsilon$ e teremos que $\tilde{A}_1$ é um número fuzzy não-simétrico, $\{1, \tilde{A}_1\}$ um conjunto FLI e

$$d_{\infty}(A_1, \tilde{A}_1) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [(1-\alpha)\epsilon] < \epsilon \text{ e } \text{diam}(\tilde{A}_1) = \text{diam}(A_1) + \epsilon > 0.$$

Agora, se $\{A_1\}$ não é FLI então, a partir da Proposição 14, $\delta_{A_1}(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Definindo $\tilde{A}_1 = A_1 + \epsilon$, teremos $d_{\infty}(A_1, \tilde{A}_1) < \epsilon$, $\text{diam}(\tilde{A}_1) > 0$ e

$$\delta_{\tilde{A}_1}(\alpha) = \delta_{A_1}(\alpha) + (1-\alpha)\epsilon = (1-\alpha)\epsilon \neq 0 \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]$$

e assim $\{1, \tilde{A}_1\}$ será um conjunto FLI.

Suponha que o Teorema seja válido para $n-1$, com $n > 2$. Se $\{A_1, \dots, A_n\}$ é FLI, não há nada mais a ser provado. Então, suponha que $\{A_1, \dots, A_n\}$ não é um conjunto FLI. Pela hipótese de indução, existe um conjunto FLI $\{1, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{n-1}\}$ com $d_{\infty}(A_i, \tilde{A}_i) < \epsilon$ e $\text{diam}(\tilde{A}_i) > 0$ para $i = 1, \dots, n-1$. Se $\{1, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{n-1}, A_n\}$ é FLI, então basta definirmos $\tilde{A}_n = A_n$ e obteremos $d_{\infty}(A_n, \tilde{A}_n) = 0 < \epsilon$ e $\text{diam}(\tilde{A}_n) = \text{diam}(A_n) > 0$. Por outro lado, se $\{1, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{n-1}, A_n\}$ não é FLI, então definamos $\tilde{A}_n = A_n + \epsilon^r$ em que $\epsilon^r = (0; 0; \epsilon)^r = \underbrace{(0; 0; \epsilon) \cdot (0; 0; \epsilon) \cdots (0; 0; \epsilon)}_{r \text{ vezes}}$, $r = \inf I$ e

$$I = \{s \in \mathbb{N} \mid \{1, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{n-1}, A_n + \epsilon^s\} \text{ é FLI e } s \geq 1\}.$$

O número fuzzy $\tilde{A}_n$ é bem definido uma vez que $I \subset \{1, 2, \dots\}$ é um conjunto não-vazio. De fato, se $I = \emptyset$, então para cada $s = 1, 2, \dots$, teremos que $\{1, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{n-1}, A_n + \epsilon^s\}$ não é FLI ou, equivalentemente, $\{2, \delta_{\tilde{A}_1}, \dots, \delta_{\tilde{A}_{n-1}}, \delta_{A_n + \epsilon^s}\}$ é linearmente dependente, pela Proposição 14. Note que

$$\begin{aligned} \delta_{A_n + \epsilon^s}(\alpha) &= a_{A_n + \epsilon^s}^-(\alpha) + a_{A_n + \epsilon^s}^+(\alpha) \\ &= a_{A_n}^-(\alpha) + a_{\epsilon^s}^-(\alpha) + a_{A_n}^+(\alpha) + a_{\epsilon^s}^+(\alpha) \\ &= (a_{A_n}^-(\alpha) + a_{A_n}^+(\alpha)) + (a_{\epsilon^s}^-(\alpha) + a_{\epsilon^s}^+(\alpha)) \\ &= \delta_{A_n}(\alpha) + (1-\alpha)^s \epsilon^s \end{aligned}$$

em virtude de $[\epsilon^s]_\alpha = [(0; 0; \epsilon)^s]_\alpha = [(a_{\epsilon^s}^-(\alpha))^s, (a_{\epsilon^s}^+(\alpha))^s] = [0, (1 - \alpha)^s \epsilon^s]$, em que $a_{A_i}^-$ e $a_{A_i}^+$ são os extremos de A_i . Então, para todo $s = 1, 2, \dots$, teremos que $g_s := \delta_{A_n + \epsilon^s} - \delta_{A_n}$ pertence a $\text{span}\{2, \delta_{\tilde{A}_1}, \dots, \delta_{\tilde{A}_{n-1}}\}$ uma vez que $\delta_{A_n}, \delta_{A_n + \epsilon^s} \in \text{span}\{2, \delta_{\tilde{A}_1}, \dots, \delta_{\tilde{A}_{n-1}}\}$ e $\text{span}\{2, \delta_{\tilde{A}_1}, \dots, \delta_{\tilde{A}_{n-1}}\}$ é um espaço vetorial n -dimensional. Contudo, o fato de que $g_s(\alpha) = (1 - \alpha)^s \epsilon^s, \alpha \in [0, 1]$, é um polinômio de ordem s e $\{g_s | s \in \mathbb{N}\}$ ser linearmente independente contradiz a hipótese da dimensão de $\text{span}\{2, \delta_{\tilde{A}_1}, \dots, \delta_{\tilde{A}_{n-1}}\}$ ser finita. Portanto, $I \neq \emptyset$, $r = \inf I$ existe e $r \in I$. Isto implica que $\{1, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{n-1}, A_n + \epsilon^s\} = \{1, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{n-1}, \tilde{A}_n\}$ é um conjunto FLI. Além do mais, teremos que

$$d_\infty(\tilde{A}_i, A_i) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} (1 - \alpha)^{s_i} \epsilon^{s_i} \leq (1 - \alpha) \epsilon < \epsilon$$

e $\text{diam}(\tilde{A}_i) = \text{diam}(A_i) + \epsilon^{s_i} > 0$ quando $s_i \in I$. $\square$

Exemplo 21. Considere os números fuzzy triangulares $A_1 = (0; 1; 2)$, $A_2 = (0; 2; 4)$ e $A_3 = (0; 0; 1)$. O conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ não é FLI, pois A_1 e A_2 são simétricos em relação a $x = 1$ e $x = 2$, respectivamente. No entanto, pelo Teorema 8, existem $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ e $\tilde{A}_3$ em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tais que $\{1, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3\}$ é FLI, $d_\infty(A_i, \tilde{A}_i) < \delta$ e $\text{diam}(\tilde{A}_i) > 0$, com $\delta > 0$ arbitrário e $i = 1, 2, 3$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, tome

$$\tilde{A}_1 = A_1 + (0; 0; \epsilon), \tilde{A}_2 = A_2 + (0; 0; \epsilon)^2, \tilde{A}_3 = A_3.$$

Teremos que $\{1, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3\}$ é FLI,

$$d_\infty(A_i, \tilde{A}_i) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \max\{0, (1 - \alpha)\epsilon^i\} = \sup_{\alpha \in [0, 1]} (1 - \alpha)\epsilon^i \leq \epsilon^i = \delta$$

e

$$\text{diam}(\tilde{A}_i) = \text{diam}(A_i) + \epsilon^i > 0.$$

Finalizaremos essa seção apresentando uma propriedade simples dos elementos do espaço $\mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n)$ com $\{1, A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ FLI.

Proposição 18. Para quaisquer $A \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n)$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $\rho \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\beta A +_{\Psi} \rho = \beta A + \rho$$

em que $+$ é a soma usual em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $+_{\Psi}$ é a soma usual induzida pelo isomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow (1, A_1, \dots, A_n)$.

Demonstração. Sejam $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ e $q = (1, 0, \dots, 0)$ vetores em $\mathbb{R}^{n+1}$ tais que $\Psi(p) = A$ e $\Psi(q) = 1$. Temos:

$$[\beta A +_{\Psi} \rho]_\alpha = [\Psi(\Psi^{-1}(\beta A) + \Psi^{-1}(\rho))]_\alpha = [\Psi(\beta \Psi^{-1}(A) + \rho \Psi^{-1}(1))]_\alpha = [\Psi(\beta p + \rho q)]_\alpha$$

e assim

$$\begin{aligned}
 [\beta A +_{\Psi} \rho]_{\alpha} &= [\Psi(\beta p_0 + \rho, \beta p_1, \dots, \beta p_n)]_{\alpha} \\
 &= [(\beta p_0 + \rho) \cdot 1 + \beta p_1 A_1 + \dots + \beta p_n A_n]_{\alpha} \\
 &= [\beta(p_0 + p_1 A_1 + \dots + p_n A_n) + \rho]_{\alpha} \\
 &= [\beta A + \rho]_{\alpha}
 \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Portanto, $\beta A +_{\Psi} \rho = \beta A + \rho$. $\square$

2.3 A Ψ -derivada de uma função fuzzy

Nesta Seção apresentaremos a chamada Ψ -derivada de uma função fuzzy definida a partir das operações usuais induzidas pelo isomorfismo Ψ construído a partir de um conjunto FLI de números fuzzy.

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função fuzzy. Na Seção 1.4 constatou-se que $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_{\infty})$ é um espaço métrico completo e conseqüentemente, conforme a Seção 1.5 foi possível definir um conceito de derivada para a função f , em algum ponto $x \in (a, b)$, denominada derivada generalizada de Hukuhara de f em $x \in (a, b)$. No entanto, esse tipo de derivada não satisfaz algumas propriedades clássicas da derivada usual de funções definidas em (a, b) e que tomam valores em $\mathbb{R}$. Por exemplo, vimos na Observação 5 que se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é uma função gH-diferenciável em $x_0 \in (a, b)$, então

$$0 = (f + (-1) \cdot f)'_{gH}(x_0) \neq f'_{gH}(x_0) + (-1) \cdot f'_{gH}(x_0) \quad (2.6)$$

em que as operações “+” e “ $\cdot$ ” no lado esquerdo da diferença são as operações usuais no espaço $\mathcal{C}^1((a, b), \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ das funções gH-diferenciáveis em (a, b) , e à direita são as operações usuais em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, definidas por (1.3) e (1.4), respectivamente.

A fim de definirmos uma derivada para uma função fuzzy f que satisfaça propriedades como a apresentada em (2.6) é necessário que a imagem de f seja um espaço de Banach contido no espaço métrico $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Na Seção 2.2, verificamos que é possível construir espaços de Banach a partir de conjuntos arbitrários de números fuzzy fortemente linearmente independentes em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Assim, para cada função fuzzy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ para qual existam números fuzzy $A_1, \dots, A_n$, fortemente linearmente independentes em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, e $p_i : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, diferenciáveis em (a, b) , tais que

$$f(x) = p_1(x)A_1 + \dots + p_n(x)A_n, \quad x \in (a, b), \quad (2.7)$$

é possível definir uma derivada na qual a propriedade (2.6) seja válida. Essa derivada será chamada de Ψ -derivada e é determinada pelo isomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ definido por (2.1).

A definição formal da Ψ -derivada de uma função fuzzy é dada a seguir.

Definição 19. (ESMI et al., 2022) Seja $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um conjunto FLI. Uma função $f : (a, b) \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ é Ψ -diferenciável em $x \in (a, b)$ se existe um número fuzzy $f'(x) \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ tal que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) -_{\Psi} f(x)}{h}$$

em que $(-_{\Psi}) \equiv (-1) \cdot (+_{\Psi})$. Neste caso, $f'(x)$ é a Ψ -derivada de f em $x \in (a, b)$.

Finalizaremos essa seção apresentando o teorema a seguir, o qual afirma que a existência da Ψ -derivada para f , definida por (2.7), depende exclusivamente da existência das derivadas ordinárias das correspondentes funções coeficientes $p_i, i = 1, \dots, n$ de f . Em particular, as propriedades clássicas de derivadas são válidas para funções fuzzy da forma (2.7) sob a Ψ -derivada.

Proposição 19. (ESMI et al., 2022) Seja $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um conjunto FLI. A aplicação $f : (a, b) \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ dada por

$$f(x) = p_1(x)A_1 + \dots + p_n(x)A_n$$

é Ψ -diferenciável em $x_0 \in (a, b)$ se, e somente se, p_i é diferenciável em x_0 para todo $i = 1, \dots, n$. Além disso,

$$f'(x_0) = \Psi(p'_1(x_0), \dots, p'_n(x_0)) = p'_1(x_0)A_1 + \dots + p'_n(x_0)A_n.$$

Demonstração. Ver Corolário 5 em (ESMI et al., 2022). □

3 Derivada generalizada de Hukuhara e sua relação com a Ψ -derivada

Neste Capítulo, apresentaremos os principais resultados deste trabalho nos quais relacionamos a noção de derivada generalizada de Hukuhara de uma função fuzzy $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com a Ψ -derivada de uma função fuzzy $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ em que $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é um conjunto fortemente linearmente independente de números fuzzy.

Na Seção 3.1, estabeleceremos condições a fim de que se tenha $f'_{gH}(x) = f'(x)$, em algum $x \in (a, b)$, quando f toma valores em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$, isto é,

$$f(x) = p_1(x)A_1 + \dots + p_n(x)A_n, \quad \forall x \in [a, b], \quad (3.1)$$

onde $p_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis em (a, b) as quais chamaremos de funções coeficientes de f .

Na Seção 3.2, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$ é uma função gH-diferenciável em (a, b) arbitrária e g é dada por

$$g(x) = p_1(x)A_1 + \dots + p_n(x)A_n, \quad \forall x \in [a, b], \quad (3.2)$$

obteremos condições para que g e g' se aproximem uniformemente de f e f'_{gH} , respectivamente, quando $x \in (a, b)$.

3.1 Conexões entre a gH-Diferenciabilidade e a Ψ -Diferenciabilidade de Funções Fuzzy

Nesta Seção apresentaremos teoremas que estabelecem conexões entre as noções de gH-diferenciabilidade e Ψ -diferenciabilidade de funções fuzzy da forma (3.1) em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Precisamente, dado um conjunto arbitrário $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ FLI se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ admite uma decomposição em $\mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$, isto é, existem funções $p_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = p_1(x)A_1 + p_2(x)A_2 + \dots + p_n(x)A_n, \quad \forall x \in [a, b],$$

estabeleceremos condições a fim de que a Ψ -derivada e a gH-derivada de f coincidam em algum $x \in (a, b)$. Veremos, essencialmente, que isso depende exclusivamente das funções coeficientes $p_i, i = 1, \dots, n$, da função fuzzy f .

Antes de apresentarmos esses resultados, mostraremos que as noções de gH-diferenciabilidade e Ψ -diferenciabilidade para a função fuzzy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, apresentadas

nas seções 1.4 e 2.2, respectivamente, não são necessariamente coincidentes. Verificamos isso no exemplo a seguir, desenvolvido originalmente em [(ESMI et al., 2022), p.15]:

Exemplo 22. *Sejam $A = (0; 0; 1)$ e $B = (0; 1; 2)$ números fuzzy com α -níveis $[A]_\alpha = [0, 1 - \alpha]$ e $[B]_\alpha = [\alpha, 2 - \alpha]$, respectivamente. Considere a função fuzzy $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ definida por $f(t) = \cos(t)A + \sin(t)B$. Note que $\{A, B\}$ é um conjunto FLI, pois $\{\delta_A, \delta_B\} = \{1 - \alpha, 2\}$ é LI. Além disso, as funções coeficientes de f são diferenciáveis em $(0, \pi)$ e então, pela Proposição 19, f é Ψ -diferenciável em $(0, \pi)$ com*

$$f'(t) = -\sin(t)A + \cos(t)B = \begin{cases} (-\sin(t); \cos(t); 2\cos(t)) & \text{se } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ (2\cos(t) - \sin(t); \cos(t); 0) & \text{se } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases} \quad (3.3)$$

Por outro lado, vamos determinar a gH -derivada de f . Sejam os α -níveis de f dados por $[f(t)]_\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$, $\alpha \in [0, 1]$. Então:

1) Para $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, temos:

$$f_\alpha^-(t) = \alpha \sin(t) \quad e \quad f_\alpha^+(t) = \cos(t) + 2\sin(t) - \alpha(\cos(t) + \sin(t)).$$

Logo, $(f_\alpha^-)'(t) = \alpha \cos(t)$ e $(f_\alpha^+)'(t) = -\sin(t)(1 - \alpha) + \cos(t)(2 - \alpha)$ e daí

$$\begin{aligned} (f_\alpha^+)'(t) - (f_\alpha^-)'(t) &= (1 - \alpha)(2\cos(t) - \sin(t)) \geq 0 \iff 2\cos(t) \geq \sin(t) \\ &\iff t \leq \arctan(2). \end{aligned}$$

Encontramos, dessa forma,

$$[f'_{gH}(t)]_\alpha = [(f_\alpha^-)'(t), (f_\alpha^+)'(t)] = [(0; \cos(t); -\sin(t) + 2\cos(t))]_\alpha$$

que são os α -níveis do conjunto fuzzy $(0; \cos(t); -\sin(t) + 2\cos(t))$, $0 < t \leq \arctan(2)$. Em particular, verifica-se em (BEDE, 2013) que $(0; \cos(t); -\sin(t) + 2\cos(t))$ é um número fuzzy se, e somente se,

$$0 < \cos(t) \leq 2\cos(t) - \sin(t) \text{ em } t \in (0, \arctan(2)].$$

Isto é,

$$t \in (0, \arctan(2)] \Rightarrow 0 < \cos(t) \leq 2\cos(t) - \sin(t) \iff \operatorname{tg}(t) \leq 1 \iff t \leq \frac{\pi}{4}.$$

Como $(f_\alpha^-)' \left(\frac{\pi}{4} \right)$ e $(f_\alpha^+)' \left(\frac{\pi}{4} \right)$ não estão definidos, então $(0; \cos(t); -\sin(t) + 2\cos(t))$ é um número fuzzy somente se $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Prosseguindo, com cálculos análogos aos realizados acima, verificamos que $(f_\alpha^+)'(t) \leq (f_\alpha^-)'(t)$ para todo $t \in \left(\arctan(2), \frac{\pi}{2}\right)$ uma vez que $(f_\alpha^-)'(\arctan(2))$ e $(f_\alpha^+)'(\arctan(2))$ não estão definidos. No entanto, os α -níveis

$$[(f_\alpha^+)'(t), (f_\alpha^-)'(t)] = [(\sin(t) + 2\cos(t)); \cos(t); 0]_\alpha$$

não estão associados a número fuzzy algum, pois $\cos(t) > 0$ para $t \in \left(\arctan(2), \frac{\pi}{2}\right)$. Logo, devemos ter

$$f'_{gH}(t) = (0; \cos(t); -\sin(t) + 2\cos(t)) \text{ para } t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

2) Para $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, temos:

$$f_{\alpha}^{-}(t) = \cos(t) + \alpha(\sin(t) - \cos(t)) \quad e \quad f_{\alpha}^{+}(t) = (2 - \alpha)\sin(t).$$

Assim, $(f_{\alpha}^{-})'(t) = -\sin(t) + \alpha(\cos(t) + \sin(t))$ e $(f_{\alpha}^{+})'(t) = (2 - \alpha)\cos(t)$ e daí

$$\begin{aligned} (f_{\alpha}^{+})'(t) - (f_{\alpha}^{-})'(t) &= (1 - \alpha)(2\cos(t) + \sin(t)) \geq 0 \iff 2\cos(t) \geq -\sin(t) \\ &\iff t \geq \arctan(-2). \end{aligned}$$

Note que $\arctan(-2) \notin \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e assim $(f_{\alpha}^{+})'(t) \geq (f_{\alpha}^{-})'(t)$ não deve ocorrer. Logo, devemos ter $(f_{\alpha}^{+})'(t) \leq (f_{\alpha}^{-})'(t)$ em todo $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. A partir daí, encontramos respectivamente os α -níveis

$$[(f_{\alpha}^{+})'(t), (f_{\alpha}^{-})'(t)] = [(2 - \alpha)\cos(t), -\sin(t) + \alpha(\cos(t) + \sin(t))]$$

do conjunto fuzzy $(2\cos(t); \cos(t); -\sin(t))$. Esse último conjunto é um número fuzzy se satisfaz

$$2\cos(t) \leq \cos(t) \leq (-\sin(t)) \text{ em } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Assim,

$$t \in \left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2\cos(t) \leq \cos(t) \leq -\sin(t) \iff -1 \leq \operatorname{tg}(t) \iff t \geq \frac{3\pi}{4}.$$

Como $(f_{\alpha}^{-})'_{+}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $(f_{\alpha}^{+})'_{-}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ não estão definidos, devemos ter

$$f'_{gH}(t) = (2\cos(t); \cos(t); -\sin(t)) \text{ para } t \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right).$$

Pelo exposto nos itens 1) e 2), concluímos que f não é gH -diferenciável em $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, pois não é um número fuzzy nesse intervalo, e que a derivada generalizada de Hukuhara de f será uma função com o domínio restrito ao conjunto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. Portanto,

$$f'_{gH}(t) = \begin{cases} (0; \cos(t); 2\cos(t) - \sin(t)) & \text{se } t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ (2\cos(t); \cos(t); -\sin(t)) & \text{se } t \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases}$$

que claramente não coincide com a Ψ -derivada de f obtida em (3.3).

A seguir, obteremos condições necessárias e suficientes para que os conceitos de gH-derivada e Ψ -derivada sejam coincidentes. Isto é, estabeleceremos sob quais hipóteses as funções fuzzy f do tipo i)-gH-diferenciável ou ii)-gH-diferenciável coincidem com as suas respectivas Ψ -derivadas quando essas funções são da forma

$$f(x) = p_1(x)A_1 + \cdots + p_n(x)A_n \quad (3.4)$$

em que $\{A_1, \dots, A_n\}$ é um conjunto FLI e $p_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis em (a, b) , para cada $i = 1, \dots, n$. Primeiro, analisaremos o caso mais simples de função fuzzy da forma (3.4) para então mostrar o caso geral. Seja a função fuzzy $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}(A)$ definida por $f(x) = p(x)A$.

- Se $A \in \mathbb{R}$ a igualdade $f'(x) = f'_{gH}(x)$ é satisfeita para qualquer $x \in (a, b)$.
- Se $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ é um número fuzzy simétrico a zero, então $\delta_A(\alpha) = 0$ e assim $\{\delta_A\}$ é um conjunto LD, logo $\{A\}$ não é FLI e $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}(A)$ não define um isomorfismo. Em particular, a Ψ -derivada de f não está definida.
- Se $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ é um número fuzzy simétrico a $x \neq 0$ ou $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é um número fuzzy não-simétrico, então $\delta_A(\alpha) \neq 0$ o que implica que $\{\delta_A\}$ é LI e daí $\{A\}$ é FLI. Assim, existe um isomorfismo $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}(A)$ e portanto f é Ψ -diferenciável. Em particular, a Proposição 14, nos garante que p é diferenciável em todo $x \in (a, b)$. Queremos avaliar em que condições $f'(x) = f'_{gH}(x)$. Ou seja, vamos supor que f é gH-diferenciável em $x \in (a, b)$ e verificar quais condições sobre a função p devem ser verificadas a fim de que a igualdade seja válida. Sem perda de generalidade, suponha que f é (i)-gH-diferenciável e seja $[f(x)]_{\alpha} = [f_{\alpha}^{-}(x), f_{\alpha}^{+}(x)]$.

i) Se $p > 0$ obtemos $f_{\alpha}^{-}(x) = a_{\alpha}^{-}p(x)$ e $f_{\alpha}^{+}(x) = a_{\alpha}^{+}p(x)$. Assim,

$$f'(x) = f'_{gH}(x) \Rightarrow p'(x)[a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}] = [(f_{\alpha}^{-})'(x), (f_{\alpha}^{+})'(x)] = [p'(x)a_{\alpha}^{-}, p'(x)a_{\alpha}^{+}].$$

Note que será válida a igualdade de acordo com o sinal de p' . Se $p' \geq 0$ então a igualdade é satisfeita. Se $p' < 0$ obtemos $p'(x)a_{\alpha}^{+} = p'(x)a_{\alpha}^{-}$. Como $p' \neq 0$ segue que $a_{\alpha}^{+} = a_{\alpha}^{-}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, o que não pode acontecer uma vez que $A \notin \mathbb{R}$.

ii) Se $p < 0$ obtemos $f_{\alpha}^{-}(x) = a_{\alpha}^{+}p(x)$ e $f_{\alpha}^{+}(x) = a_{\alpha}^{-}p(x)$. Assim,

$$f'(x) = f'_{gH}(x) \Rightarrow p'(x)[a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}] = [(f_{\alpha}^{-})'(x), (f_{\alpha}^{+})'(x)] = [p'(x)a_{\alpha}^{+}, p'(x)a_{\alpha}^{-}].$$

Se $p' \leq 0$ então claramente a igualdade já é satisfeita. Caso $p' > 0$, obtemos $p'(x)a_{\alpha}^{+} = p'(x)a_{\alpha}^{-}$. Como $p' \neq 0$, segue que $a_{\alpha}^{+} = a_{\alpha}^{-}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, o que é impossível.

iii) Se p muda o seu sinal em (a, b) , então a continuidade de p nos garante a existência de algum $x \in (a, b)$ tal que $p(x) = 0$ e, além disso, dada uma sequência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decrescente positiva convergente a zero, teremos:

- 1) $p(x - h_n) < 0 < p(x + h_n)$ ou
- 2) $p(x + h_n) < 0 < p(x - h_n)$

para n suficientemente grande. Em particular, $p(x) = 0$ implica $f_\alpha^-(x) = f_\alpha^+(x) = 0$. Logo, sendo f (i)-gH-diferenciável teremos $[f'_{gH}(x)] = [(f_\alpha^-)'(x), (f_\alpha^+)'(x)]$ e portanto no caso 1), obteremos

$$(f_\alpha^-)'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\alpha^-(x + h_n) - f_\alpha^-(x)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\alpha^-(x + h_n)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_\alpha^- \frac{p(x + h_n)}{h_n} = a_\alpha^- \underbrace{p'(x)}_{\geq 0}$$

e

$$(f_\alpha^+)'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\alpha^+(x + h_n) - f_\alpha^+(x)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\alpha^+(x + h_n)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_\alpha^+ \frac{p(x + h_n)}{h_n} = a_\alpha^+ \underbrace{p'(x)}_{\geq 0}.$$

De forma análoga o caso 2) nos fornece

$$(f_\alpha^-)'(x) = a_\alpha^+ \underbrace{p'(x)}_{\leq 0} \text{ e } (f_\alpha^+)'(x) = a_\alpha^- \underbrace{p'(x)}_{\leq 0}.$$

Por outro lado, sendo f uma função Ψ -diferenciável, obteremos

$$f'(x) = p'(x)A \Rightarrow [f'(x)]_\alpha = [p'(x)A]_\alpha = \begin{cases} [p'(x)a_\alpha^-, p'(x)a_\alpha^+] & \text{se } p'(x) \geq 0 \\ [p'(x)a_\alpha^+, p'(x)a_\alpha^-] & \text{se } p'(x) < 0. \end{cases}$$

Concluimos daí $f'(x) = f'_{gH}(x)$ implica que os casos i) e ii) também são válidos quando p muda de sinal em (a, b) , onde $f'(x)$ é a Ψ -derivada de f em $x \in (a, b)$.

Portanto, para $f(x) = p(x)A$, com $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ não simétrico ou $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ simétrico a $x \neq 0$ e f (i)-gH-diferenciável, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) = f'_{gH}(x) &\Rightarrow (p(x) > 0 \text{ e } p'(x) \geq 0) \text{ ou } (p(x) < 0 \text{ e } p'(x) \leq 0) \\ &\Rightarrow p(x)p'(x) \geq 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga, verifica-se que quando f é (ii)-gH-diferenciável ocorre $f'(x) = f'_{gH} \Rightarrow p(x)p'(x) \leq 0$. Verifiquemos agora se essa implicação admite uma recíproca. Suponha novamente, sem perda de generalidade, que f é (i)-gH-diferenciável para $f(x) = p(x)A$ e que $p(x) \geq 0$ e $p'(x) \geq 0$. Temos que mostrar primeiro que f é Ψ -diferenciável. Isso é bem simples, pois a existência de p' por hipótese garante, pela Proposição 14, que f é Ψ -diferenciável em $x \in (a, b)$ quando $\{A\}$ é FLI. Agora, da Proposição 1 segue que $f'(x)$ é igual $f'_{((i)-gH)}(x)$ se seus α -níveis são coincidentes em todo $\alpha \in [0, 1]$.

Ora, se $p(x) \geq 0$ teremos que $[f(x)]_\alpha = [a_\alpha^- p(x), a_\alpha^+ p(x)]$ e da hipótese de f ser (i)-gH-diferenciável segue que $[f'_{gH}(x)]_\alpha = [a_\alpha^- p'(x), a_\alpha^+ p'(x)]$. Por outro lado, sendo f Ψ -diferenciável, $f'(x) = p'(x)A$ e como $p'(x) \geq 0$, obteremos $[f'(x)]_\alpha = [a_\alpha^- p'(x), a_\alpha^+ p'(x)]$. Logo, $[f'_{gH}(x)]_\alpha = [f'(x)]_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e assim $f'_{gH}(x) = f'(x)$.

Se supormos que $p(x) \leq 0$ e $p'(x) \leq 0$, obtemos de maneira análoga o mesmo resultado. Por fim, se p alterna o sinal em (a, b) , a continuidade de p implica que $p(x) = 0$, em algum $x \in (a, b)$, e existe uma sequência decrescente $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números positivos que converge para zero, quando $n \rightarrow \infty$, tal que:

$$1) \quad p(x + h_n) > 0 > p(x - h_n);$$

$$2) \quad p(x - h_n) > 0 > p(x + h_n).$$

No caso 1) teremos que a existência de p' nos garante que f é Ψ -diferenciável e, além disso, $p'(x) \geq 0$, uma vez que as derivadas laterais p'_+ e p'_- de p são tais que

$$p'_+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(x + h_n) - p(x)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(x + h_n)}{h_n} \geq 0$$

e

$$p'_-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(x) - p(x - h_n)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-p(x - h_n)}{h_n} \geq 0.$$

Daí, a partir do Exemplo 12, concluímos que $(f_\alpha^-)'(x) = p'(x)a_\alpha^-$ e $(f_\alpha^+)'(x) = p'(x)a_\alpha^+$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e todo $x \in (a, b)$ tal que $p(x) = 0$. Logo, quando p alterna de sinal em (a, b) e $p'(x) \geq 0$, obtemos $f'_{gH}(x) = f'(x)$ visto que

$$[f'_{gH}(x)]_\alpha = [p'(x)a_\alpha^-, p'(x)a_\alpha^+] = p'(x)[a_\alpha^-, a_\alpha^+] = p'(x)[A]_\alpha = [p'(x)A]_\alpha = [f'(x)]_\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. No caso 2), com argumentos análogos, teremos que f é Ψ -diferenciável e que $p'(x) \leq 0$ pois

$$p'_+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(x + h_n) - p(x)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(x + h_n)}{h_n} \leq 0$$

e

$$p'_-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(x) - p(x - h_n)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-p(x - h_n)}{h_n} \leq 0.$$

Assim, novamente pelo Exemplo 12, concluímos que $(f_\alpha^-)'(x) = p'(x)a_\alpha^+$ e $(f_\alpha^+)'(x) = p'(x)a_\alpha^-$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e todo $x \in (a, b)$ tal que $p(x) = 0$. Segue daí que quando p alterna seu sinal em (a, b) e $p'(x) \leq 0$, teremos que $f'_{gH}(x) = f'(x)$.

Concluímos, a partir do que foi desenvolvido acima, que se $\{A\}$ é um conjunto fortemente linearmente independente com $f(x) = p(x)A$ e p é diferenciável, então para f (i)-gH-diferenciável teremos $f'(x) = f'_{gH}(x)$ se, e somente se, $p(x)p'(x) \geq 0$.

De forma geral, o desenvolvimento anterior pode ser generalizado no seguinte resultado.

Teorema 9. *Considere um conjunto de números fuzzy $\{A_1, \dots, A_n\}$ fortemente linearmente independente e $x \in [a, b]$ arbitrário. Sejam $p_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, funções diferenciáveis em x tais que $f(z) = p_1(z)A_1 + \dots + p_n(z)A_n$ para todo $z \in [a, b]$.*

- (a) Se f é (i)-gH-diferenciável em x , então $f'(x) = f'_{gH}(x)$ se, e somente se, $p_i(x)p'_i(x) \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ com $\text{diam}(A_i) > 0$.
- (b) Se f é (ii)-gH-diferenciável em x , então $f'(x) = f'_{gH}(x)$ se, e somente se, $p_i(x)p'_i(x) \leq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ com $\text{diam}(A_i) > 0$.

Demonstração. Provaremos apenas o Item (a) deste teorema uma vez que a prova do Item (b) é similar.

Sejam $K = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \text{diam}(A_i) > 0\}$ e $K^C = \{1, \dots, n\} \setminus K$. Note que $a_i^-(\alpha) = a_i^+(\alpha)$ para todo $i \in K^C$. Pela Proposição 14, temos que $|K| \geq n - 1$. Considere os seguintes conjuntos de índices:

$$P = \{i \in K \mid p_i(x) > 0\}, N = \{i \in K \mid p_i(x) < 0\}, \text{ e } Z = \{i \in K \mid p_i(x) = 0\}.$$

Note que P , N , e Z são conjuntos disjuntos e $K = P \cup N \cup Z$. Em adição a isso, da continuidade de p , podemos obter uma sequência decrescente (h_n) que converge para zero, i.e, $h_n > 0$ e $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, tal que para todo $i \in Z$ temos $p_i(x + h_n) \geq 0$, para todo $n > 0$, ou $p_i(x + h_n) < 0$, para todo $n > 0$. Assim, Z pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos ZP e ZN da seguinte forma:

$$ZP = \{i \in Z \mid p_i(x + h_n) \geq 0, \forall n > 0\}$$

e

$$ZN = \{i \in Z \mid p_i(x + h_n) < 0, \forall n > 0\}.$$

Uma vez que todo p_i é contínuo em x , para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} f_\alpha^-(x + h_n) &= \sum_{i \in K^C} p_i(x + h_n)a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in P} p_i(x + h_n)a_i^-(\alpha) + \\ &\quad \sum_{i \in ZP} p_i(x + h_n)a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in N} p_i(x + h_n)a_i^+(\alpha) + \\ &\quad \sum_{i \in ZN} p_i(x + h_n)a_i^+(\alpha) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_\alpha^+(x + h_n) &= \sum_{i \in K^C} p_i(x + h_n)a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in P} p_i(x + h_n)a_i^+(\alpha) + \\ &\quad \sum_{i \in ZP} p_i(x + h_n)a_i^+(\alpha) + \sum_{i \in N} p_i(x + h_n)a_i^-(\alpha) + \\ &\quad \sum_{i \in ZN} p_i(x + h_n)a_i^-(\alpha). \end{aligned}$$

A hipótese de que f é (i)- gH -diferenciável em x implica que $[f'_{gH}(x)]_\alpha = [f_\alpha^-(x), f_\alpha^+(x)]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
 (f_\alpha^-)'(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\alpha^-(x + h_n) - f_\alpha^-(x)}{h_n} \\
 &= \sum_{i \in K^C} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i(x + h_n) - p_i(x)}{h_n} \right) a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i(x + h_n) - p_i(x)}{h_n} \right) a_i^-(\alpha) + \\
 &\quad \sum_{i \in ZP} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i(x + h_n) - 0}{h_n} \right) a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in N} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i(x + h_n) - p_i(x)}{h_n} \right) a_i^+(\alpha) + \\
 &\quad \sum_{i \in ZN} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i(x + h_n) - 0}{h_n} \right) a_i^+(\alpha) \\
 &= \sum_{i \in K^C} p'_i(x) a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in P} p'_i(x) a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in N} p'_i(x) a_i^+(\alpha) + \\
 &\quad \sum_{i \in ZP} \underbrace{p'_i(x)}_{\geq 0} a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in ZN} \underbrace{p'_i(x)}_{\leq 0} a_i^+(\alpha)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 (f_\alpha^+)'(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\alpha^+(x + h_n) - f_\alpha^+(x)}{h_n} \\
 &= \sum_{i \in K^C} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i(x + h_n) - p_i(x)}{h_n} \right) a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i(x + h_n) - p_i(x)}{h_n} \right) a_i^+(\alpha) + \\
 &\quad \sum_{i \in ZP} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i(x + h_n) - 0}{h_n} \right) a_i^+(\alpha) + \sum_{i \in N} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i(x + h_n) - p_i(x)}{h_n} \right) a_i^-(\alpha) + \\
 &\quad \sum_{i \in ZN} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i(x + h_n) - 0}{h_n} \right) a_i^-(\alpha) \\
 &= \sum_{i \in K^C} p'_i(x) a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in P} p'_i(x) a_i^+(\alpha) + \sum_{i \in N} p'_i(x) a_i^-(\alpha) + \\
 &\quad \sum_{i \in ZP} \underbrace{p'_i(x)}_{\geq 0} a_i^+(\alpha) + \sum_{i \in ZN} \underbrace{p'_i(x)}_{\leq 0} a_i^-(\alpha).
 \end{aligned}$$

Note que para todo $i \in ZP$ temos que $p'_i(x) \geq 0$, porque $\frac{p_i(x + h_n) - 0}{h_n} \geq 0$ para todo n . De forma similar, para todo $i \in ZN$ temos $p'_i(x) \leq 0$.

Pela Proposição 19, temos que f é Ψ -diferenciável em x , pois todo p_i é diferenciável em x . Agora, considere os seguintes conjuntos de índices definidos em termos dos sinais das derivadas de p_i em x :

$$P' = \{i \in K \mid p'_i(x) > 0\}, N' = \{i \in K \mid p'_i(x) < 0\} \text{ e } Z' = \{i \in K \mid p'_i(x) = 0\}.$$

Note que P' , N' e Z' são subconjuntos disjuntos tais que $K = P' \cup N' \cup Z'$. Além do mais, todo índice $i \in Z'$ pode ser desprezado uma vez que $p'_i(x) = 0$. Assim, se $C = f'(x) = p'_1(x)A_1 + \dots + p'_n(x)A_n$, então os α -níveis de C são dados por

$$c_\alpha^-(x) = \sum_{i \in K^C} p'_i(x) a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in P'} p'_i(x) a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in N'} p'_i(x) a_i^+(\alpha)$$

e

$$c_{\alpha}^{+}(x) = \sum_{i \in K^C} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in P'} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) + \sum_{i \in N'} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha).$$

Observe que todo índice $i \in Z'$ pode também ser desprezado nas expressões de $(f_{\alpha}^{-})'(x)$ e $(f_{\alpha}^{+})'(x)$. Considerando $\overline{P} = P \setminus Z'$, $\overline{N} = N \setminus Z'$, $\overline{ZP} = ZP \setminus Z'$ e $\overline{ZN} = ZN \setminus Z'$, obtemos

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^{-'}(x) &= \sum_{i \in K^C} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{P}} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N}} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) + \\ &\quad \sum_{i \in \overline{ZP}} \underbrace{p'_i(x) a_i^{-}(\alpha)}_{>0} + \sum_{i \in \overline{ZN}} \underbrace{p'_i(x) a_i^{+}(\alpha)}_{<0} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^{+'}(x) &= \sum_{i \in K^C} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{P}} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N}} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \\ &\quad \sum_{i \in \overline{ZP}} \underbrace{p'_i(x) a_i^{+}(\alpha)}_{>0} + \sum_{i \in \overline{ZN}} \underbrace{p'_i(x) a_i^{-}(\alpha)}_{<0}. \end{aligned}$$

Note que $C = f'_{gH}(x)$ se, e somente se $c_{\alpha}^{-} = f_{\alpha}^{-'}(x)$ e $c_{\alpha}^{+} = f_{\alpha}^{+'}(x)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Usando o fato de que $\overline{ZP} \subseteq P'$ e $\overline{ZN} \subseteq N'$, podemos definir $\overline{P}' = P' \setminus \overline{ZP}$ e $\overline{N}' = N' \setminus \overline{ZN}$ que conduzem a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^{-'}(x) &= c_{\alpha}^{-} \\ \Leftrightarrow \sum_{i \in \overline{P}} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N}} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) &= \sum_{i \in \overline{P}'} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N}'} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Note que $K = P \cup N \cup Z = P' \cup N' \cup Z'$ e isso implica que $\overline{P} = P \setminus Z' \subseteq P' \cup N'$ e $\overline{N} = N \setminus Z' \subseteq P' \cup N'$. Além disso, uma vez que $Z = ZP \cup ZN$, $P \cap Z = \emptyset$, e $\overline{ZP} \subseteq ZP$ e $\overline{ZN} \subseteq ZN$, teremos

$$\overline{P} \subseteq (P' \setminus \overline{ZP}) \cup (N' \setminus \overline{ZN}) = \overline{P}' \cup \overline{N}' \Rightarrow \overline{P} = (\overline{P} \cap \overline{P}') \cup (\overline{P} \cap \overline{N}')$$

e

$$\overline{N} \subseteq (P' \setminus \overline{ZP}) \cup (N' \setminus \overline{ZN}) = \overline{P}' \cup \overline{N}' \Rightarrow \overline{N} = (\overline{N} \cap \overline{P}') \cup (\overline{N} \cap \overline{N}').$$

Por outro lado, sendo $P' \cap Z' = \emptyset$, $N' \cap Z' = \emptyset$ e $K = \overline{P} \cup \overline{N} \cup \overline{ZN} \cup \overline{ZP} \cup Z'$ segue que

$$\begin{cases} P' \subseteq \overline{P} \cup \overline{N} \cup \overline{ZN} \cup \overline{ZP} \\ N' \subseteq \overline{P} \cup \overline{N} \cup \overline{ZN} \cup \overline{ZP} \end{cases}.$$

Usando os fatos de que $P' \cap N' = \emptyset$, $\overline{ZN} \subseteq N'$ e $\overline{ZP} \subseteq P'$, obtemos

$$\begin{cases} P' \subseteq \overline{P} \cup \overline{N} \cup \overline{ZP} \\ N' \subseteq \overline{P} \cup \overline{N} \cup \overline{ZN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{P}' = P' \setminus \overline{ZP} \subseteq \overline{P} \cup \overline{N} \\ \overline{N}' = N' \setminus \overline{ZN} \subseteq \overline{P} \cup \overline{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{P}' = (\overline{P}' \cap \overline{P}) \cup (\overline{P}' \cap \overline{N}) \\ \overline{N}' = (\overline{N}' \cap \overline{P}) \cup (\overline{N}' \cap \overline{N}) \end{cases}.$$

Pela equação (3.5) e pelos comentários feitos acima, temos

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha}^{-'}(x) &= c_{\alpha}^{-} \quad (3.6) \\
 \Leftrightarrow \left(\sum_{i \in \overline{P} \cap \overline{P}'} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{P} \cap \overline{N}'} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N} \cap \overline{P}'} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N} \cap \overline{N}'} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) \right) &= \left(\sum_{i \in \overline{P}' \cap \overline{P}} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{P}' \cap \overline{N}} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N}' \cap \overline{P}} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N}' \cap \overline{N}} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) \right) \\
 \Leftrightarrow \sum_{i \in \overline{P} \cap \overline{N}'} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N} \cap \overline{P}'} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) &= \sum_{i \in \overline{P}' \cap \overline{N}} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N}' \cap \overline{P}} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha)
 \end{aligned}$$

Similarmente, temos

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha}^{+'}(x) &= c_{\alpha}^{+} \quad (3.7) \\
 \Leftrightarrow \sum_{i \in \overline{P} \cap \overline{N}'} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N} \cap \overline{P}'} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) &= \sum_{i \in \overline{P}' \cap \overline{N}} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N}' \cap \overline{P}} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha)
 \end{aligned}$$

Como podemos observar, as últimas igualdades em (3.6) e (3.7) são iguais o que significa que $C = f'_{gH}(x)$ se, e somente se as seguintes igualdades valem:

$$\sum_{i \in \overline{P} \cap \overline{N}'} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N} \cap \overline{P}'} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha) = \sum_{i \in \overline{P}' \cap \overline{N}} p'_i(x) a_i^{-}(\alpha) + \sum_{i \in \overline{N}' \cap \overline{P}} p'_i(x) a_i^{+}(\alpha). \quad (3.8)$$

Suponha que para todo índice $i \in K$ temos $p_i(x)p'_i(x) \geq 0$. Isto implica que $\nexists i \in K$ tal que $p_i(x) > 0$ e $p'_i(x) < 0$, que por sua vez implica que $\overline{P} \cap \overline{N}' = \emptyset \Rightarrow \overline{P} \subseteq \overline{P}'$. De forma similar, $\nexists i \in K$ tal que $p_i(x) < 0$ e $p'_i(x) > 0$ e, portanto, $\overline{N} \cap \overline{P}' = \emptyset \Rightarrow \overline{N} \subseteq \overline{N}'$. Consequentemente, $\overline{P} = \overline{P}'$ e $\overline{N} = \overline{N}'$ porque $\overline{P}' \subseteq \overline{P} \cap \overline{N}$, $\overline{N}' \subseteq \overline{P} \cap \overline{N}$, e $\overline{P}' \cap \overline{N}' = \emptyset$. Assim, $C = f'_{gH}(x)$ é verdadeiro se (3.5) for satisfeita.

Agora, se $C = f'_{gH}(x)$ então (3.8) é válida e isto implica que

$$d := \sum_{i \in \overline{P} \cap \overline{N}'} \underbrace{-p'_i(x)}_{>0} (a_i^{+}(\alpha) - a_i^{-}(\alpha)) + \sum_{i \in \overline{N} \cap \overline{P}'} \underbrace{p'_i(x)}_{>0} (a_i^{+}(\alpha) - a_i^{-}(\alpha)) = 0$$

Para $\alpha = 0$, obtemos a contradição $0 = d > 0$ pois $\text{diam}(A_i) > 0$ para todo $i \in k$. Portanto, a igualdade acima é possível apenas se $\overline{P} \cap \overline{N}' = \overline{N} \cap \overline{P}' = \emptyset$. Novamente, obtemos que $\overline{P} = \overline{P}'$ e $\overline{N} = \overline{N}'$ e, consequentemente, $C = f'_{gH}(x)$. $\square$

Exemplo 23. Seja $\{(0; 0; 1), (0; 1; 2)\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um conjunto FLI. Considere $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ a função fuzzy definida por

$$f(t) = e^t(0; 0; 1) + t^2(0; 1; 2).$$

Verificamos que os α -níveis de $f(t)$ são os intervalos $[f(t)]_{\alpha} = [\alpha t^2, (2 - \alpha)t^2 + (1 - \alpha)e^t]$ e assim os seus extremos são $f_{\alpha}^{+}(t) = (2 - \alpha)t^2 + (1 - \alpha)e^t$ e $f_{\alpha}^{-}(t) = \alpha t^2$ cujas derivadas são $(f_{\alpha}^{+})'(t) = 2(2 - \alpha)t + (1 - \alpha)e^t$ e $(f_{\alpha}^{-})'(t) = 2\alpha t$. Daí, para todo $\alpha \in [0, 1]$, verificamos que

$$(f_{\alpha}^{+})'(t) - (f_{\alpha}^{-})'(t) = (1 - \alpha)(4t + e^t) \geq 0,$$

isto é, f é (i) -gH-diferenciável em todo $t \in (0, 1)$. Uma vez que p_1 e p_2 são diferenciáveis em $(0, 1)$, então a Ψ -derivada de f existe nesse intervalo. Além disso, como $p_1(t)p'_1(t) = 2t^3 > 0$, $p_2(t)p'_2(t) = e^{2t} > 0$ em $(0, 1)$ e $\text{diam}((0; 0; 1)) = 1 > 0$ e $\text{diam}((0; 1; 2)) = 2 > 0$ segue, pelo Teorema 9, que

$$f'_{gH}(t) = f'(t) = e^t(0; 0; 1) + 2t(0; 1; 2) = (0; 2t; 2t + e^t)$$

para todo $t \in (0, 1)$.

O próximo teorema fornece condições suficientes para que a Ψ -diferenciabilidade de uma função fuzzy implique na sua respectiva gH-diferenciabilidade. Particularmente, essas condições são dadas em termos das funções coeficientes p_i uma vez que uma função fuzzy da forma $f(z) = p_1(z)A_1 + \dots + p_n(z)A_n$ é Ψ -diferenciável em algum x se, e somente se, todo p_i é também diferenciável em x , conforme a Proposição 19.

Teorema 10. *Sejam $\{A_1, \dots, A_n\}$ um conjunto de número fuzzy fortemente linearmente independente e n funções $p_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, que são diferenciáveis em algum $x \in (a, b)$.*

- (a) *Se $p_i(x)p'_i(x) > 0$ para cada índice $i \in \{1, \dots, n\}$ com $\text{diam}(A_i) > 0$, então a função fuzzy $f(z) = p_1(z)A_1 + \dots + p_n(z)A_n$, $z \in [a, b]$, é (i) -gH-diferenciável em x e $f'_{gH}(x) = f'(x)$.*
- (b) *Se $p_i(x)p'_i(x) < 0$ para cada índice $i \in \{1, \dots, n\}$ com $\text{diam}(A_i) > 0$, então a função fuzzy $f(z) = p_1(z)A_1 + \dots + p_n(z)A_n$, $z \in [a, b]$, é (ii) -gH-diferenciável em x e $f'_{gH}(x) = f'(x)$.*

Demonstração. Provaremos apenas o Item (a) deste teorema uma vez que a prova do Item (b) é similar.

Sejam $K = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \text{diam}(A_i) > 0\}$ e $K^C = \{1, \dots, n\} \setminus K$. Observe que $a_i^-(\alpha) = a_i^+(\alpha)$ para todo $i \in K^C$. Pela Proposição 14, temos que $|K| \geq n - 1$. Por seguinte, considere os conjuntos de índices:

$$P = \{i \in K \mid p_i(x) > 0\} \text{ e } N = \{i \in K \mid p_i(x) < 0\}.$$

Uma vez que $p_i(x)p'_i(x) > 0$, temos que $K = P \cup N$, $i \in P \Leftrightarrow p'_i(x) > 0$ e $i \in N \Leftrightarrow p'_i(x) < 0$. Note que $i \in P \Leftrightarrow p'_i(x) > 0$ implica que p_i é localmente crescente em x . Similarmente, $i \in N \Leftrightarrow p'_i(x) < 0$ implica que p_i é localmente decrescente em x . Seja $h > 0$ um número real suficientemente próximo de 0. Se $h > 0$, temos que

$$\begin{cases} 0 < p_i(x - h) \leq p_i(x) \leq p_i(x + h) & , \text{ se } i \in P \\ p_i(x + h) \leq p_i(x) \leq p_i(x - h) < 0 & , \text{ se } i \in N \end{cases}.$$

Essas últimas desigualdades implicam que

$$\sum_{i \in P} p_i(x-h)a_i^{\pm}(\alpha) \leq \sum_{i \in P} p_i(x)a_i^{\pm}(\alpha) \leq \sum_{i \in P} p_i(x+h)a_i^{\pm}(\alpha)$$

e

$$\sum_{i \in P} p_i(x+h)a_i^{\pm}(\alpha) \leq \sum_{i \in P} p_i(x)a_i^{\pm}(\alpha) \leq \sum_{i \in P} p_i(x-h)a_i^{\pm}(\alpha),$$

Por outro lado, seja B_h um número fuzzy tal que

$$b_h^-(\alpha) = \sum_{i \in K^C} (p_i(x+h) - p_i(x))a_i^-(\alpha) \sum_{i \in P} (p_i(x+h) - p_i(x))a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in N} (p_i(x+h) - p_i(x))a_i^+(\alpha)$$

e

$$b_h^+(\alpha) = \sum_{i \in K^C} (p_i(x+h) - p_i(x))a_i^+(\alpha) \sum_{i \in P} (p_i(x+h) - p_i(x))a_i^+(\alpha) + \sum_{i \in N} (p_i(x+h) - p_i(x))a_i^-(\alpha).$$

Note que a Proposição 1 garante que B_h é bem definida uma vez que (b_h^-, b_h^+) satisfaz suas hipóteses. Pela igualdade (1.3), temos que $f(x) + B_h = f(x+h)$ e, conseqüentemente, $f(x+h) - {}_{gH}f(x) = B_h$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - {}_{gH}f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{B_h}{h} \\ &= \sum_{i \in K^C} p'_i(x)A_i \sum_{i \in P} p'_i(x)A_i + \sum_{i \in N} p'_i(x)A_i. \end{aligned}$$

Por outro lado, seja C_h um número fuzzy tal que

$$c_h^-(\alpha) = \sum_{i \in K^C} (p_i(x-h) - p_i(x))a_i^-(\alpha) \sum_{i \in P} (p_i(x-h) - p_i(x))a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in N} (p_i(x-h) - p_i(x))a_i^+(\alpha)$$

e

$$c_h^+(\alpha) = \sum_{i \in K^C} (p_i(x-h) - p_i(x))a_i^+(\alpha) \sum_{i \in P} (p_i(x-h) - p_i(x))a_i^-(\alpha) + \sum_{i \in N} (p_i(x-h) - p_i(x))a_i^+(\alpha).$$

Note que a Proposição 1 garante que C_h está bem definida. Além disso, temos que $f(x-h) - C_h = f(x)$ e, conseqüentemente, $f(x-h) - {}_{gH}f(x) = C_h$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x-h) - {}_{gH}f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{C_h}{h} \\ &= \sum_{i \in K^C} p'_i(x)A_i \sum_{i \in P} p'_i(x)A_i + \sum_{i \in N} p'_i(x)A_i. \end{aligned}$$

A partir de ambos os limites acima, concluímos que $f'_{gH}(x)$ existe. A aplicação do Teorema 9 nos garante que $f'_{gH}(x) = f'(x)$. $\square$

Observação 13. *Sejam p_i as funções coeficientes da função fuzzy f definida em (3.4). Observe pelo Teorema 9 que*

$$(f \text{ é } (i)\text{-}gH \text{ e } f' = f'_{gH}) \Rightarrow (p_i p'_i \geq 0),$$

para cada $i = 1, \dots, n$. No entanto, o Teorema 10 nos mostra que a recíproca do Teorema 9 nem sempre válida uma vez que, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$(p_i p'_i > 0) \Rightarrow (f \text{ é } (i)\text{-}gH \text{ e } f' = f'_{gH}).$$

Exemplo 24. Neste exemplo ilustraremos a Observação 13. Seja uma função fuzzy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ definida por

$$f(t) = p_1(t)A_1 + p_2(t)A_2$$

com $p_1(t) = e^{-t^2}$, $p_2(t) = e^t$, $A_1 = (0; 0; 1)$ e $A_2 = (0; 1; 2)$. Observe que $\{A_1, A_2\}$ é um conjunto FLI e que p_1 e p_2 são diferenciáveis em $t \in \mathbb{R}$ então, pela Proposição 19, f é Ψ -diferenciável em $\mathbb{R}$ e por consequência

$$f'(t) = -2te^{-t^2}(0; 0; 1) + e^t(0; 1; 2) = \begin{cases} (-2te^{-t^2}; e^t; 2e^t), & \text{se } t \geq 0; \\ (0; e^t; 2e^t - 2te^{-t^2}), & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Por outro lado, sendo os α -níveis de f dados por

$$[f(t)]_{\alpha} = [\underbrace{\alpha e^t}_{f_{\alpha}^{-}(t)}, \underbrace{(1 - \alpha)e^{-t^2} + (2 - \alpha)e^t}_{f_{\alpha}^{+}(t)}], \quad \alpha \in [0, 1],$$

obtemos

$$(f_{\alpha}^{+})'(t) - (f_{\alpha}^{-})'(t) = 2(1 - \alpha)(e^t - te^{-t^2}) \geq 0 \iff e^t \geq te^{-t^2}$$

que é válido para todo $t \in \mathbb{R}$, pois quando $t \leq 0$ tem-se $te^{-t^2} \leq 0 < e^t$ e

$$t > 0 \Rightarrow t \geq \ln(t) \Rightarrow t^2 + t = t(t + 1) \geq \ln(t) \Rightarrow e^{t^2+t} \geq t \Rightarrow e^t \geq te^{-t^2}.$$

Logo, f é (i) - gH -diferenciável. Em particular,

$$[f'_{gH}(t)]_{\alpha} = [\underbrace{\alpha e^t}_{(f_{\alpha}^{-})'(t)}, \underbrace{(1 - \alpha)(e^t - 2te^{-t^2}) + e^t}_{(f_{\alpha}^{+})'(t)}] \Rightarrow f'_{gH}(t) = (0; e^t; 2e^t - 2te^{-t^2})$$

e portanto $f'(t) \neq f'_{gH}(t) \forall t > 0$. Claramente, a tese do Teorema 10 não foi atingida porque $p_1(t)p'_1(t) < 0$ e $p_2(t)p'_2(t) > 0$ para todo $t > 0$.

Baseados no Teorema 9, podemos estabelecer condições necessárias para um ponto $x \in (a, b)$ ser um *switch point* de uma função fuzzy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, como segue.

Teorema 11. Sejam $\{A_1, \dots, A_n\}$ um conjunto de número fuzzy fortemente linearmente independente e $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Considere $p_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, funções continuamente diferenciáveis em (a, b) e $f(z) = p_1A_1 + \dots + p_nA_n$, $z \in [a, b]$, uma função (i) - gH -diferenciável ou (ii) - gH -diferenciável em (a, b) tal que $f'_{gH}(w) = f'(w)$ para todo $w \in (a, b)$. Se um ponto $x \in (a, b)$ é um *switch point* de f , então $p_i(x)p'_i(x) = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ com $\text{diam}(A_i) > 0$.

Demonstração. Seja $K = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \text{diam}(A_i) > 0\}$. Como x é um *switch point*, é possível obter sequências $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tais que $y_n < x < z_n$ para todo $n > 0$, com $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ e $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ tais que o caso (1) da Definição 14 é satisfeito para todo n ou o caso (2) da Definição 14 é satisfeito para todo n .

Suponha que o caso (1) da Definição 14 seja satisfeito para todo n . Pelo Teorema 9, temos que

$$p_i(y_n)p'_i(y_n) \geq 0 \geq p_i(z_n)p'_i(z_n)$$

para todo $i \in K$. Usando a continuidade de p_i e p'_i em x , concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_i(y_n)p'_i(y_n) = p_i(x)p'_i(x) \geq 0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} p_i(z_n)p'_i(z_n) = p_i(x)p'_i(x)$$

para todo $i \in K$. Logo, concluímos que $p_i(x)p'_i(x) = 0$ para $i \in K$. De maneira similar, pode-se provar que $p_i(x)p'_i(x) = 0$ para $i \in K$ se o Caso (2) da Definição 14 é satisfeito para todo n . $\square$

Exemplo 25. Considere os números fuzzy $A_1 = (1; 2; 3)$ e $A_2 = (0; 0; 1)$. Seja f a função fuzzy definida, para todo $t \in [-1, 1]$, por

$$f(t) = p_1(t)A_1 + p_2(t)A_2$$

com $p_1(t) = 1 + t^2$ e $p_2(t) = -\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ para todo $t \in (-1, 1)$. Pela Proposição 19, f é Ψ -diferenciável em $(-1, 1)$ e

$$f'(t) = p'_1(t)A_1 + p'_2(t)A_2,$$

em que $p'_1(t) = 2t$ e $p'_2(t) = -\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $t \in (-1, 1)$. Note que

$$p_1(t)p'_1(t) < 0 \quad e \quad p_2(t)p'_2(t) < 0 \quad \text{para todo } t \in (-1, 0)$$

e

$$p_1(t)p'_1(t) > 0 \quad e \quad p_2(t)p'_2(t) > 0 \quad \text{para todo } t \in (0, 1).$$

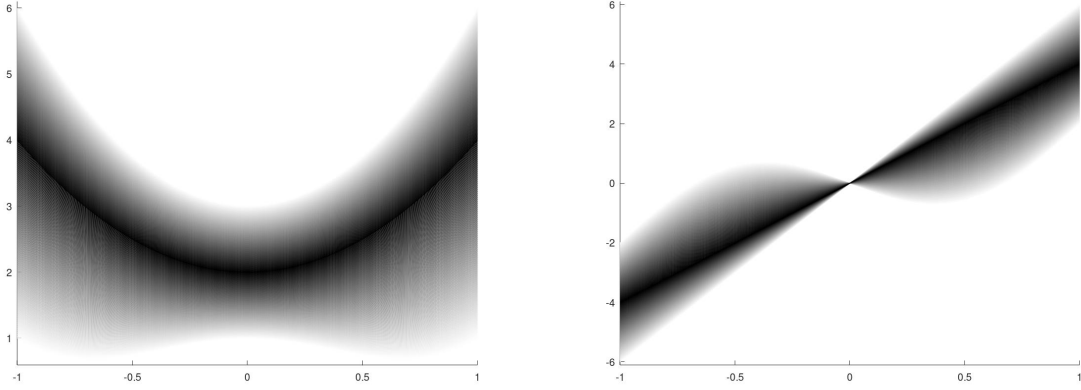
Pelo Teorema 10, concluímos que f é gH -diferenciável em todo $t \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ e $f'(t) = f'_{gH}(t)$. Ainda mais, f é (ii)- gH -diferenciável em $(-1, 0)$ e é (i)- gH -diferenciável em $(0, 1)$. Além disso, f também é gH -diferenciável em 0, pois

$$\begin{aligned} f'_{gH}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h^2)A_1 + (-\sin^2(0.5\pi h)A_2) -_{gH} A_1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 A_1 + (-\sin^2(0.5\pi h)A_2)}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, pela Definição 15, 0 é um *switch point* de f . Esse fato está de acordo com as afirmações do Teorema 11 uma vez que $p_1(0)p'_1(0) = p_2(0)p'_2(0) = 0$.

A Figura 13 a seguir exhibe as funções fuzzy f e f' , dadas no Exemplo 25, respectivamente.

Figura 13 – A função que associa números reais a números fuzzy $f(x) = (1 + x^2)(1; 2; 3) + (-\sin^2(0.5\pi x))(0; 0; 1)$, $x \in (-1, 1)$, dada no Exemplo 25, e sua Ψ -derivada $f'(x) = 2x(1; 2; 3) + (-\pi \sin(0.5\pi x)) \cos(0.5\pi x)(0; 0; 1)$, respectivamente.



Fonte: Autor.

3.2 Aproximação de funções gH-diferenciáveis através de funções Ψ -diferenciáveis

Na Seção 3.1, através do Teorema 9, estabelecemos as condições necessárias e suficientes para que coincidam a gH-diferenciabilidade e Ψ -diferenciabilidade de uma função fuzzy da forma descrita por (3.4).

Nesta Seção, mostraremos que, sob algumas condições fracas, qualquer função gH-diferenciável arbitrária, definida em um intervalo real $[a, b]$, e sua gH-derivada em (a, b) podem ser aproximadas uniformemente por uma função Ψ -diferenciável e por sua respectiva Ψ -derivada em (a, b) . Para esta finalidade, iremos considerar os conjuntos fortemente linearmente independentes de números fuzzy dados conforme o seguinte lema.

Lema 1. *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$ arbitrários tais que $n > 0$ e $\epsilon > 0$, sejam $A_0 = (1; 1; 1) \equiv 1$, $A_n = (-0.5; -0.5; 0.5; 0.5 + \epsilon)$ e $\alpha_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Para $i = 1, \dots, n-1$, considere os números fuzzy A_i determinados pelos seus α -níveis*

$$[A_i]_\alpha = \begin{cases} \{0\} & \text{se } \alpha \in (\alpha_i, 1] \\ [0, 1] & \text{se } \alpha \in [0, \alpha_i]. \end{cases} \quad (3.9)$$

Nestas condições, o conjunto $\{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n\}$ é fortemente linearmente independente.

Demonstração. Note que $\delta_{A_0}(\alpha) = 2$ e $\delta_{A_n}(\alpha) = (1 - \alpha)\epsilon$ para $\alpha \in [0, 1]$. Ademais, para $i = 1, \dots, n-1$, $\delta_{A_i} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$\delta_{A_i}(\alpha) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \alpha \in (\alpha_i, 1] \\ 1 & , \text{ se } \alpha \in [0, \alpha_i]. \end{cases}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Considere $\tilde{\alpha}_0 = 0$, $\tilde{\alpha}_n = 1$, $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \frac{1}{2n}$ for $i = 1, \dots, n-1$, e a matriz $A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{A_0}(\tilde{\alpha}_n) & \delta_{A_n}(\tilde{\alpha}_n) & \delta_{A_{n-1}}(\tilde{\alpha}_n) & \delta_{A_{n-2}}(\tilde{\alpha}_n) & \dots & \delta_{A_1}(\tilde{\alpha}_n) \\ \delta_{A_0}(\tilde{\alpha}_{n-1}) & \delta_{A_n}(\tilde{\alpha}_{n-1}) & \delta_{A_{n-1}}(\tilde{\alpha}_{n-1}) & \delta_{A_{n-2}}(\tilde{\alpha}_{n-1}) & \dots & \delta_{A_1}(\tilde{\alpha}_{n-1}) \\ \delta_{A_0}(\tilde{\alpha}_{n-2}) & \delta_{A_n}(\tilde{\alpha}_{n-2}) & \delta_{A_{n-1}}(\tilde{\alpha}_{n-2}) & \delta_{A_{n-2}}(\tilde{\alpha}_{n-2}) & \dots & \delta_{A_1}(\tilde{\alpha}_{n-2}) \\ \delta_{A_0}(\tilde{\alpha}_{n-3}) & \delta_{A_n}(\tilde{\alpha}_{n-3}) & \delta_{A_{n-1}}(\tilde{\alpha}_{n-3}) & \delta_{A_{n-2}}(\tilde{\alpha}_{n-3}) & \dots & \delta_{A_1}(\tilde{\alpha}_{n-3}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{A_0}(\tilde{\alpha}_1) & \delta_{A_n}(\tilde{\alpha}_1) & \delta_{A_{n-1}}(\tilde{\alpha}_1) & \delta_{A_{n-2}}(\tilde{\alpha}_1) & \dots & \delta_{A_1}(\tilde{\alpha}_1) \\ \delta_{A_0}(\tilde{\alpha}_0) & \delta_{A_n}(\tilde{\alpha}_0) & \delta_{A_{n-1}}(\tilde{\alpha}_0) & \delta_{A_{n-2}}(\tilde{\alpha}_0) & \dots & \delta_{A_1}(\tilde{\alpha}_0) \end{pmatrix}.$$

Para $i = 1, \dots, n-1$ e $j = 0, 1, \dots, n$, temos

$$\delta_{A_i}(\tilde{\alpha}_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } j \geq i \\ 1 & , \text{ se } j < i \end{cases}.$$

Assim, A é a seguinte matriz triangular

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \epsilon/2n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \frac{3\epsilon}{2n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & \frac{(2n-3)\epsilon}{2n} & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 2 & \epsilon & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

que é não-singular uma vez que o determinante de A é $\frac{\epsilon}{n}$. Pelo Corolário 2, concluímos que o conjunto $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ é fortemente linearmente independente. $\square$

A Figura 14 exhibe os números fuzzy A_0, A_i e A_n , com $\alpha_i = 0.7$, conforme definidos no Lema 1.

Observação 14. *Sejam os números fuzzy A_i definidos no Lema 1, $i = 1, \dots, n-1$. Podemos redefinir os números A_i em termos dos extremos dos seus respectivos α -níveis*

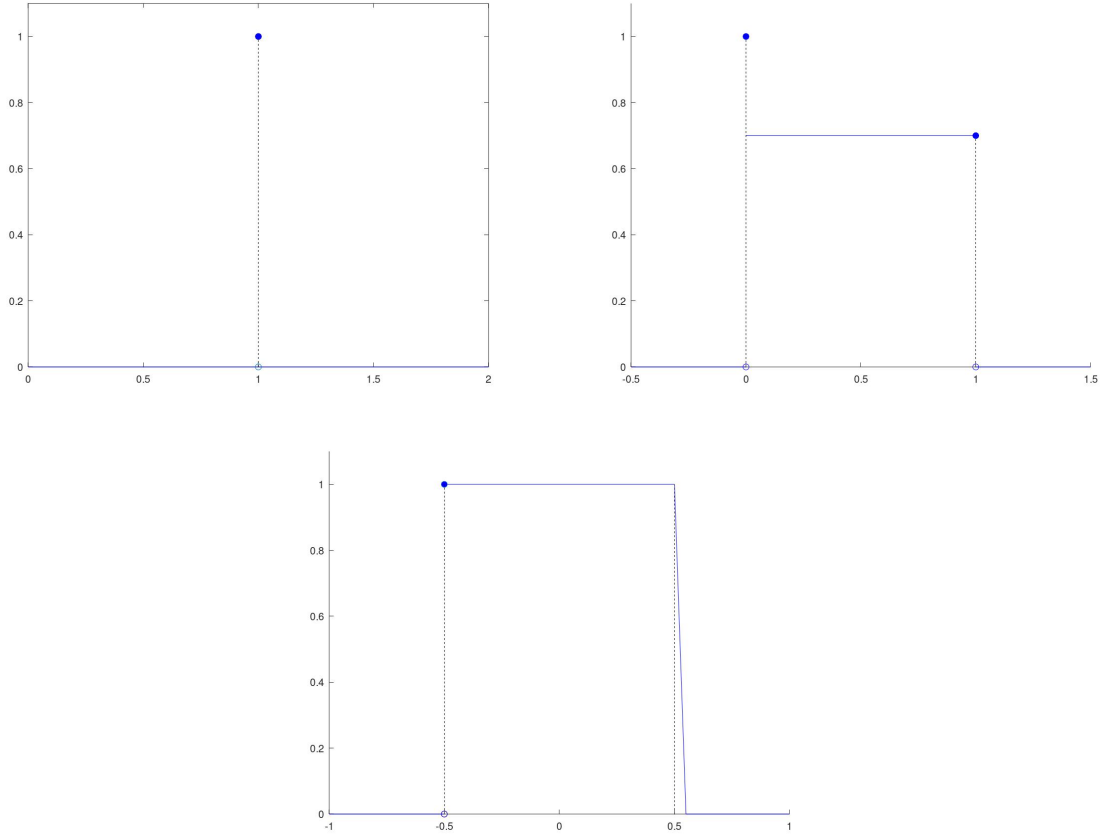
$$[A_i]_\alpha = [(a_i)_\alpha^-, (a_i)_\alpha^+] \text{ como } [A_i]_\alpha = \begin{cases} (a_i)_\alpha^- = 0 & \text{para todo } \alpha \in [0, 1] \\ (a_i)_\alpha^+ = 0 & \text{se } \alpha > \alpha_i \\ (a_i)_\alpha^+ = 1 & \text{se } \alpha \leq \alpha_i \end{cases}. \text{ Em particular, a}$$

função $(a_i)_\alpha^+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é a translação horizontal no intervalo $[0, 1]$ da inversa da função

$$\text{degrau unitário } u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}, \text{ ou seja:}$$

$$1 - u(\alpha - \alpha_i) = (a_i)_\alpha^+ = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \leq \alpha_i \\ 0 & \text{se } \alpha > \alpha_i. \end{cases}$$

Figura 14 – Na parte superior da figura estão representados (da esquerda para direita, respectivamente) os números fuzzy A_0 e A_i , com $\alpha_i = 0.7$, do Lema 1. Enquanto na parte inferior está representado o número fuzzy A_n do mesmo lema.



Fonte: Autor.

O caminho natural para se construir uma teoria de aproximação entre funções fuzzy, com respeito a métrica uniforme D_∞ , é construindo a aproximação entre números fuzzy via a métrica d_∞ em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Aproximar números fuzzy, considerando as representações geométricas das suas funções de pertinência, é decompor a “forma geométrica” que o descreve como uma composição de figuras geométricas mais simples que estão associadas a números fuzzy como os de valores *crisp*, triangulares ou trapezoidais. Em particular, os números que temos interesse são uma classe especial de números fuzzy cujas representações se assemelham a funções “degraus”, como as definidas no Lema 1 em (3.9) e caracterizadas na Observação 14.

Assim, o nosso objetivo é dado um número fuzzy arbitrário em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$ aproximá-lo por um número fuzzy pertencente a $\mathcal{S}(A_0, A_1, \dots, A_n)$, com A_i definido através do Lema 1, para $i = 0, 1, \dots, n$. Esse objetivo tem seu resultado estabelecido no seguinte teorema.

Teorema 12. *Seja $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$. Dado $\tilde{\epsilon} > 0$, existem $n \in \mathbb{N}$, um conjunto fortemente linearmente independente $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, definido conforme o Lema 1, e um número fuzzy $B \in \mathcal{S}(A_0, A_1, \dots, A_n)$ tais que*

$$d_\infty(A, B) < \tilde{\epsilon}.$$

Demonstração. Fixados $\gamma = a^+(1) - a^-(1)$ e $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{4 \max\{1, \gamma\}}$, segue, pelo teorema de Heine-Cantor (RUDIN et al., 1976), que a^- e a^+ são uniformemente contínuas em $[0, 1]$ e, portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$|a^-(\alpha) - a^-(p)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |a^+(\alpha) - a^+(p)| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $\alpha, p \in [0, 1]$ satisfazendo $|\alpha - p| < \delta$.

Seja m um número natural que $\frac{1}{m} < \delta$. Considere $n = 2m$ e o conjunto fortemente linearmente independente de números fuzzy $A_0, A_1, \dots, A_n$ definidos como no Lema 1, com $\alpha_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Definamos

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{a^+(1) + a^-(1)}{2}, \\ p_n &= a^+(1) - a^-(1), \\ p_{n-1} &= a^-(\alpha_{n-1}) - a^-(1), \\ p_i &= \begin{cases} a^-(\alpha_i) - a^-(\alpha_{i+2}) & , \text{ se } i \text{ é ímpar} \\ a^+(\alpha_i) - a^+(\alpha_{i+2}) & , \text{ se } i \text{ é par} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

para $i = 1, \dots, n-2$. Seja $B \in \mathcal{S}(A_0, A_1, \dots, A_n)$ tal que

$$B = p_0 A_0 + p_1 A_1 + \dots + p_n A_n.$$

Para $\alpha \in [0, 1]$, existe $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_j < \alpha$ se $j < i$, e $\alpha \leq \alpha_i$ se $j \geq i$, i.e., $j = \inf\{i \mid \alpha \leq \alpha_i\}$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} [B]_\alpha &= [p_0 A_0 + p_1 A_1 + \dots + p_n A_n]_\alpha \\ &= p_0 \{1\} + p_n [-0.5, 0.5 + (1 - \alpha)\epsilon] + \sum_{j=i}^{n-1} p_j [0, 1]. \end{aligned}$$

Note que, para $j = 1, \dots, n-1$, $p_j \geq 0$ se j é par, e $p_j \leq 0$ se j é ímpar. Assim, segue que

$$\begin{aligned} b^-(\alpha) &= \frac{a^+(1) + a^-(1)}{2} + (-0.5)(a^+(1) - a^-(1)) + \\ &\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ i \text{ é ímpar}}} a^-(\alpha_i) - a^-(\alpha_{i+2}) \\ &= a^-(1) + (a^-(\alpha_{n-1}) - a^-(1)) + \\ &\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-3 \\ i \text{ é ímpar}}} a^-(\alpha_i) - a^-(\alpha_{i+2}) \\ &= a^-(\alpha_i) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b^+(\alpha) &= \frac{a^+(1) + a^-(1)}{2} + (0.5 + (1 - \alpha)\epsilon)(a^+(1) - a^-(1)) + \\
&\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ i \text{ é par}}} a^+(\alpha_i) - a^+(\alpha_{i+2}) \\
&= a^+(1) + (1 - \alpha)\epsilon(a^+(1) - a^-(1)) + \\
&\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-2 \\ i \text{ é par}}} a^+(\alpha_i) - a^+(\alpha_{i+2}) \\
&= a^+(\alpha_i) + (1 - \alpha)\epsilon(a^+(1) - a^-(1))
\end{aligned}$$

Uma vez que $|\alpha_i - \alpha| < \frac{1}{n} = \frac{1}{2m} < \frac{1}{m} < \delta$ e $(1 - \alpha)\epsilon(a^+(1) - a^-(1)) < (1 - \alpha)\frac{\tilde{\epsilon}}{4} < \frac{\tilde{\epsilon}}{4}$, obtemos

$$\begin{aligned}
d_H([A]_\alpha, [B]_\alpha) &= \max\{|a^-(\alpha) - b^-(\alpha)|, |a^+(\alpha) - b^+(\alpha)|\} \\
&< \max\{0.5\tilde{\epsilon}, 0.5\tilde{\epsilon} + 0.25\tilde{\epsilon}\} = 0.75\tilde{\epsilon} < \tilde{\epsilon}
\end{aligned}$$

e isto implica que

$$d_\infty(A, B) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([A]_\alpha, [B]_\alpha) < \tilde{\epsilon}.$$

□

Na prova do Teorema 12 foi apresentada uma forma de se construir os coeficientes que descrevem o número fuzzy B em $\mathcal{S}(A_0, A_1, \dots, A_n)$, por meio dos extremos $a_\alpha^\pm$ dos α -níveis do número fuzzy A que desejamos realizar a aproximação. Essa escolha de coeficientes foi originalmente proposta pelo pesquisador Hideyuki Tsukamoto [(TSUKAMOTO, 1984), (ARIANI; ENDRA, 2013)], com o objetivo de calcular a média ponderada de conjuntos fuzzy com base nas suas respectivas funções de pertinência.

A fim de calcular os coeficientes propostos por Tsukamoto são necessários os valores de $a^-(\alpha)$ e $a^+(\alpha)$ para cada conjunto fuzzy A . O primeiro coeficiente, p_0 , é a média aritmética das funções de pertinência inferior e superior do primeiro conjunto fuzzy, A_0 .

Os coeficientes restantes p_i são calculados de maneira diferente, dependendo se o índice do conjunto fuzzy A_i é par ou ímpar. Para índices ímpares, o coeficiente é a diferença entre as funções de pertinência inferiores dos conjuntos fuzzy de índices adjacentes. Para índices pares, o coeficiente é a diferença entre as funções de pertinência superiores dos conjuntos fuzzy de índices adjacentes. Os últimos dois coeficientes p_{n-1} e p_n são calculados de maneira semelhante, mas usando o conjunto fuzzy final A_{n-1} e o conjunto fuzzy inicial A_0 , respectivamente.

Descrevendo esses coeficientes em termos algébricos teremos, para cada elemento do conjunto $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ FLI, definido pelo Lema 1, os coeficientes p_i de $B = p_0 A_0 +$

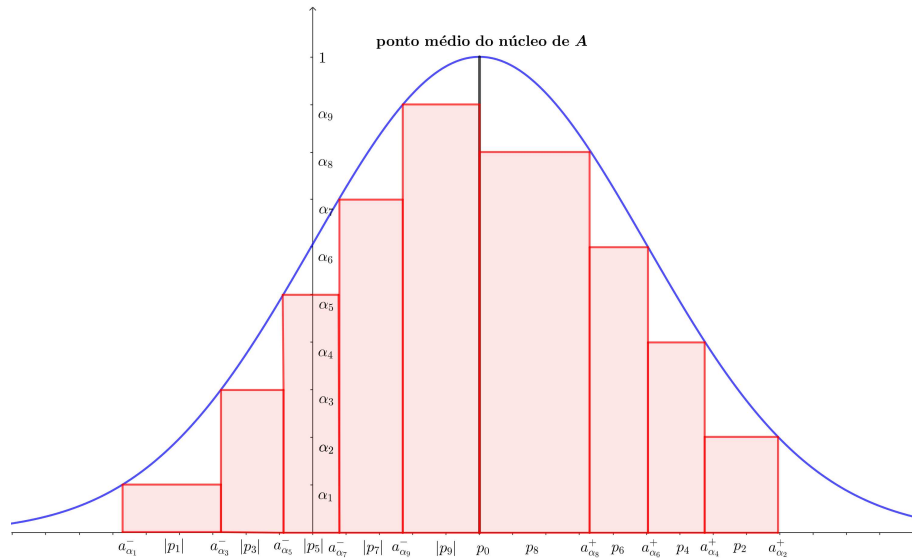
$p_1 A_1 + \dots + p_n A_n$ determinados pelo valor dos extremos do número fuzzy A dado, em cada nível $\alpha_i = \frac{i}{n} \in [0, 1]$, para $i = 0, 1, \dots, n$, como:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{a^+(1) + a^-(1)}{2}, \\ p_i &= \begin{cases} a^-(\alpha_i) - a^-(\alpha_{i+2}), & \text{se } i \text{ é ímpar;} \\ a^+(\alpha_i) - a^+(\alpha_{i+2}), & \text{se } i \text{ é par} \end{cases} \\ p_{n-1} &= a^-(\alpha_{n-1}) - a^-(1), \\ p_n &= a^+(1) - a^-(1) \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n-2$.

Agora, em termos geométricos, a representação do número fuzzy $B = p_0 A_0 + p_1 A_1 + \dots + p_n A_n$ é feita, inicialmente, representando o número fuzzy $p_0 A_0$ o qual, pelo conjunto definido no Lema 1, é o ponto médio do núcleo do número fuzzy A ao qual está se realizando a aproximação. Em seguida, ao se verificar que $i = 1, \dots, n-2$ é ímpar, os retângulos que correspondem a aproximação B de A serão determinados pelos intervalos $[a_{\alpha_i}^-, a_{\alpha_{i+2}}^-]$, que correspondem a sua base, e pelo valor de pertinência $\alpha = \alpha_i$, que corresponderá à sua altura. De forma análoga, quando $i = 2, \dots, n-2$ é par, os retângulos que correspondem a aproximação B de A serão determinados pelos intervalos $[a_{\alpha_{i+2}}^+, a_{\alpha_i}^+]$ e pela altura $\alpha = \alpha_i$. Por fim, quando $i = n-1$ é par o retângulo correspondente será o de base $[a^-(1), a_{\alpha_{n-1}}^-]$ e para $i = n-1$ ímpar a base será $[a_{\alpha_{n-1}}^-, a^-(1)]$ ambos com altura $\alpha = \alpha_{n-1}$. Podemos ter uma ideia dessa construção geométrica na Figura 15.

Figura 15 – Construção iterativa da aproximação B do número fuzzy em forma de sino A por meio das inversas da função degrau unitário representado pelos retângulos de base $[p_i - p_0, p_0]$, quando i é ímpar e $[p_0, p_i + p_0]$ quando i é par, com alturas correspondentes $\alpha_i \in [0, 1]$.



Notaremos através de um exemplo numérico que quanto mais valores $n \in \mathbb{N}$ são considerados, mais aprimorada é a aproximação a um número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$ obtida a partir de elementos do conjunto FLI $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ definidos no Lema 1. Em termos geométricos, mais a figura determinada pela função de pertinência do número fuzzy A é “preenchida” por “combinações” de números fuzzy definidos a partir de (3.9).

Exemplo 26. *Vamos buscar uma aproximação $B = p_0A_0 + p_1A_1 + \dots + p_nA_n$ para o número fuzzy triangular $A = (0; 1; 2)$ nos casos $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$.*

- *Caso $n = 3$. Neste caso, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ e assim $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = 2/3$ e $\alpha_3 = 1$. Daí, $p_0 = 1$, $p_1 = -2/3$, $p_2 = -1/3$ e $p_3 = 0$. Logo, para $B = p_0A_0 + p_1A_1 + p_2A_2 + p_3A_3$ obtemos:*

$$\begin{aligned} [B]_\alpha &= \{1\} + (-2/3) \begin{cases} \{0\}, & 1/3 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 1/3 \end{cases} + (-1/3) \begin{cases} \{0\}, & 2/3 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 2/3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{1\}, & 2/3 < \alpha \leq 1 \\ [2/3, 1], & 1/3 < \alpha \leq 2/3 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 1/3. \end{cases} \end{aligned}$$

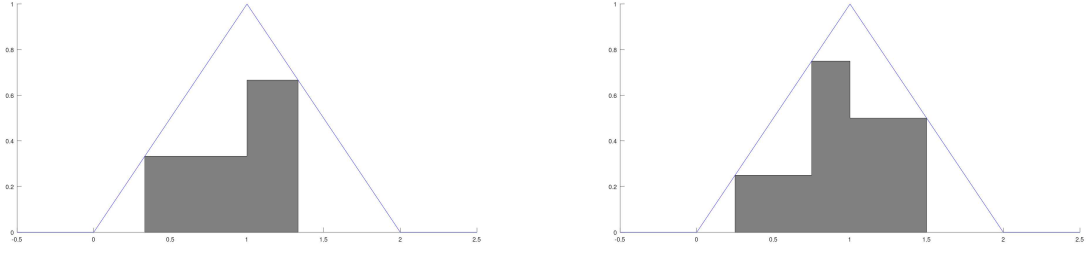
- *Caso $n = 4$. Neste caso, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e daí $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 3/4$ e $\alpha_4 = 1$. Assim, obtemos $p_0 = 1$, $p_1 = -1/2$, $p_2 = 1/2$, $p_3 = -1/4$ e $p_4 = 0$. Logo,*

$$\begin{aligned} [B]_\alpha &= [p_0A_0 + p_1A_1 + p_2A_2 + p_3A_3 + p_4A_4]_\alpha \\ &= \{1\} + (-1/2) \begin{cases} \{0\}, & 1/4 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 1/4 \end{cases} + 1/2 \begin{cases} \{0\}, & 1/2 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 1/2 \end{cases} \\ &\quad + (-1/4) \begin{cases} \{0\}, & 3/4 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 3/4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{1\}, & 3/4 < \alpha \leq 1 \\ [3/4, 1], & 1/2 < \alpha \leq 3/4 \\ [3/4, 3/2], & 1/4 < \alpha \leq 1/2 \\ [1/4, 3/2], & 0 \leq \alpha \leq 1/4. \end{cases} \end{aligned}$$

A comparação gráfica entre os números fuzzy A e B nos casos $n = 3, 4$ são feitas na Figura 16.

- *Caso $n = 5$. Neste caso, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e daí $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1/5$, $\alpha_2 = 2/5$, $\alpha_3 = 3/5$, $\alpha_4 = 4/5$ e $\alpha_5 = 1$. Logo, $p_0 = 1$, $p_1 = p_3 = -2/5$, $p_2 = 2/5$, $p_4 = -1/5$ e $p_5 = 0$.*

Figura 16 – Seja $\epsilon = 0.1$. A aproximação ao número fuzzy A para os casos $n = 3$ (à esquerda) e $n = 4$ (à direita).



Fonte: Autor.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 [B]_\alpha &= [p_0 A_0 + p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + p_4 A_4 + p_5 A_5]_\alpha \\
 &= \{1\} + (-2/5) \begin{cases} \{0\}, & 1/5 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 1/5 \end{cases} + 2/5 \begin{cases} \{0\}, & 2/5 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 2/5 \end{cases} \\
 &+ (-2/5) \begin{cases} \{0\}, & 3/5 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 3/5 \end{cases} + (-1/5) \begin{cases} \{0\}, & 4/5 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 4/5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

isto é,

$$[B]_\alpha = \begin{cases} \{1\}, & 4/5 < \alpha \leq 1 \\ [4/5, 1], & 3/5 < \alpha \leq 4/5 \\ [2/5, 1], & 2/5 < \alpha \leq 3/5 \\ [2/5, 7/5], & 1/5 < \alpha \leq 2/5 \\ [0, 7/5], & 0 \leq \alpha \leq 1/5. \end{cases}$$

- Caso $n = 6$. Para este caso, temos $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e daí $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1/6$, $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 1/2$, $\alpha_4 = 2/3$, $\alpha_5 = 5/6$ e $\alpha_6 = 1$. Logo, $p_0 = 1$, $p_1 = p_3 = -1/3$, $p_2 = p_4 = 1/3$, $p_5 = -1/6$ e $p_6 = 0$. Portanto,

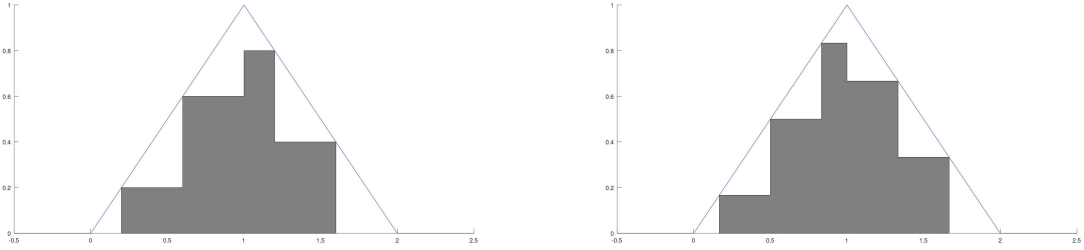
$$\begin{aligned}
 [B]_\alpha &= [p_0 A_0 + p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + p_4 A_4 + p_5 A_5 + p_6 A_6]_\alpha \\
 &= \{1\} + (-1/3) \begin{cases} \{0\}, & 1/6 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 1/6 \end{cases} + 1/3 \begin{cases} \{0\}, & 1/3 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 1/3 \end{cases} \\
 &+ (-1/3) \begin{cases} \{0\}, & 1/2 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 1/2 \end{cases} + 1/3 \begin{cases} \{0\}, & 2/3 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 2/3 \end{cases} \\
 &+ (-1/6) \begin{cases} \{0\}, & 5/6 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 5/6 \end{cases}
 \end{aligned}$$

isto é,

$$[B]_{\alpha} = \begin{cases} \{1\}, & 5/6 < \alpha \leq 1 \\ [5/6, 1], & 2/3 < \alpha \leq 5/6 \\ [5/6, 4/3], & 1/2 < \alpha \leq 2/3 \\ [1/2, 4/3], & 1/3 < \alpha \leq 1/2 \\ [1/2, 5/3], & 1/6 < \alpha \leq 1/3 \\ [1/6, 5/3], & 0 \leq \alpha \leq 1/6 \end{cases}.$$

A comparação gráfica entre os números fuzzy A e B nos casos $n = 5, 6$ são feitas na Figura 17.

Figura 17 – Seja $\epsilon = 0.1$. A aproximação ao número fuzzy A para os casos $n = 5$ (à esquerda) e $n = 6$ (à direita), respectivamente.



Fonte: Autor.

No Exemplo 26, quanto mais aumentarmos os valores de n , melhor será a aproximação por B do número fuzzy A triangular dado. Podemos observar isso na Figura 18 para os casos em que $n = 33$ e $n = 60$ e considerando um erro de aproximação $\epsilon = 0.1$.

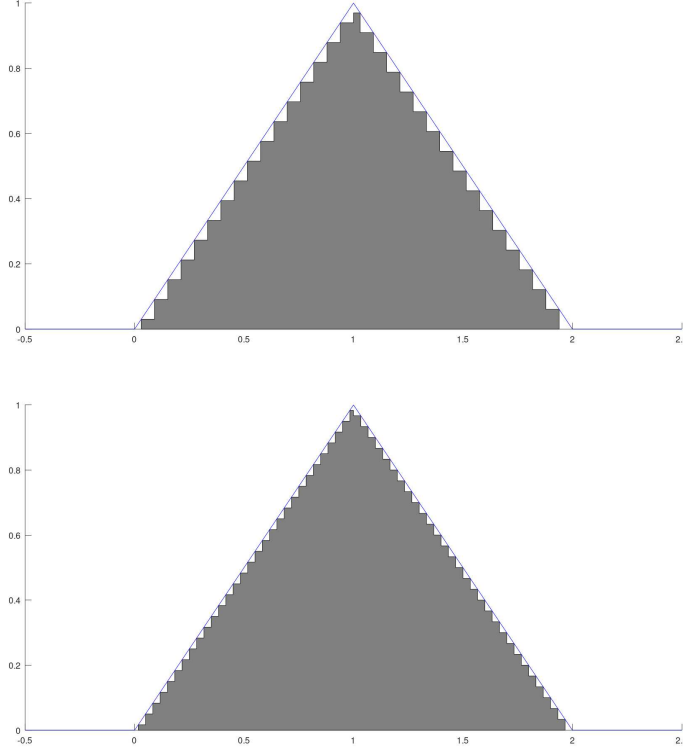
Outra ilustração que descreve as afirmações do Teorema 12 agora para um número fuzzy trapezoidal $A = (1; 2; 3.5; 5)$ e para valores $n = 6, 12, 18, 30$, é dada através da Figura 19. Nela também é evidente que quanto maior o valor de n , mais próximo o número fuzzy $B = p_0A_0 + p_1A_1 + \dots + p_nA_n$ será do número fuzzy A para $\epsilon = 0.1$.

Finalizaremos essa seção apresentando outra aplicação do Lema 1, a qual consiste em realizar a aproximação uniforme de uma função continuamente gH-diferenciável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$ e da sua gH-derivada f'_{gH} por uma função Ψ -diferenciável e sua Ψ -derivada em $[a, b]$, respectivamente.

Teorema 13. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$ tal que f é continuamente gH-diferenciável em (a, b) sem switch points em (a, b) e $f'_{gH}(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$ para todo $x \in (a, b)$. Para cada $\tilde{\epsilon} > 0$ existem $n \in \mathbb{N}$, um conjunto fortemente linearmente independente $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, definido conforme o Lema 1, e uma função $g : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}(A_0, A_1, \dots, A_n)$ Ψ -diferenciável tais que*

$$D_{\infty}(f, g) < \tilde{\epsilon} \quad e \quad D_{\infty}(f'_{gH}, g') < \tilde{\epsilon}.$$

Figura 18 – Seja $\epsilon = 0.1$. A aproximação ao número fuzzy A para $n = 33$ (imagem superior) e $n = 60$ (imagem inferior), respectivamente. À medida que n cresce, melhor se torna a aproximação $B = p_0A_0 + p_1A_1 + \cdots + p_nA_n$ ao número fuzzy A .



Fonte: Autor.

Demonstração. Sejam $[f(x)]_\alpha = [f^-(x, \alpha), f^+(x, \alpha)]$, $\frac{\partial f^-}{\partial x}(x, \alpha) = (f^-)'(x, \alpha)$, e $\frac{\partial f^+}{\partial x}(x, \alpha) = (f^+)'(x, \alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Como f'_{gH} é contínua e f não possui *switch points* no intervalo (a, b) , onde $f'_{gH}(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$ para todo $x \in [a, b]$, as funções $f^\pm$ e $(f^\pm)'$ são uniformemente contínuas em $[a, b] \times [0, 1]$. Sejam

$$\gamma_1 = \sup_{x \in [a, b]} (f^+(x, 1) - f^-(x, 1)) \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \sup_{x \in [a, b]} |(f^+)'(x, 1) - (f^-)'(x, 1)|.$$

Fixando $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{4 \max\{1, \gamma_1, \gamma_2\}}$ existe $\delta > 0$ tal que

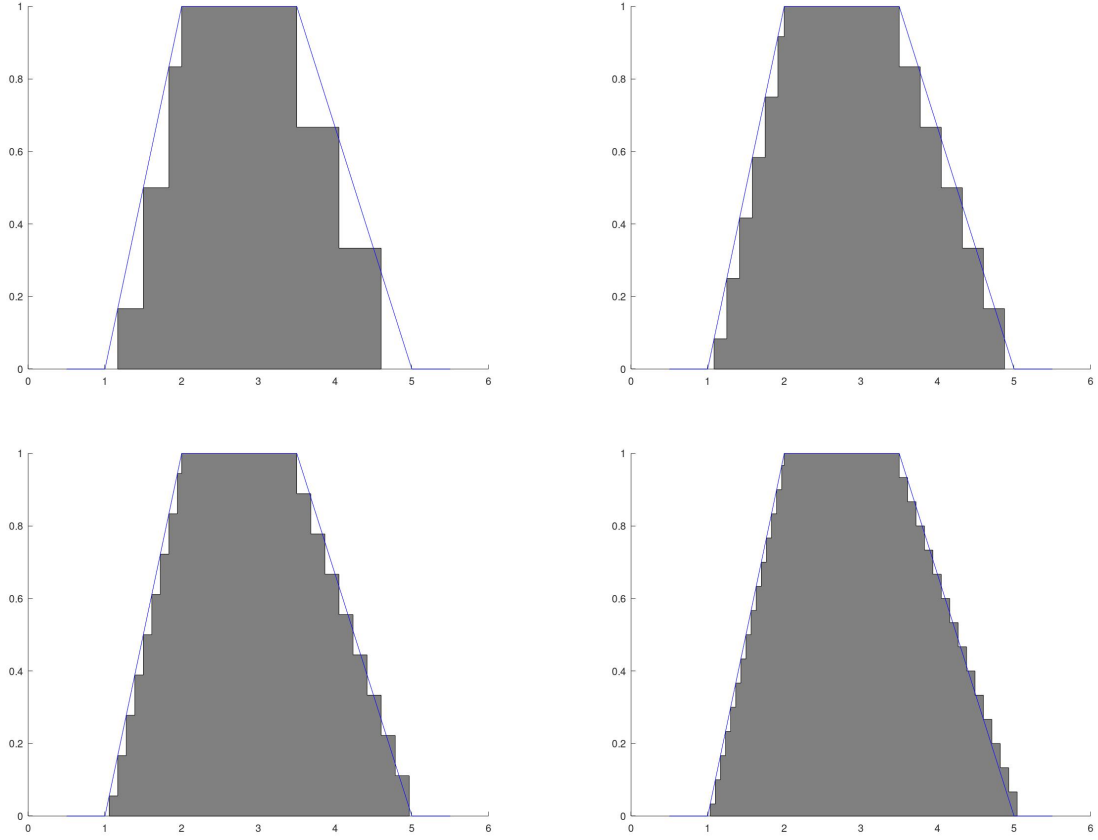
$$|f^\pm(x, \alpha) - f^\pm(y, p)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |(f^\pm)'(x, \alpha) - (f^\pm)'(y, p)| < \frac{\epsilon}{2}$$

se $|x - y| < \delta$ e $|\alpha - p| < \delta$, para $x, y \in [a, b]$ e $\alpha, p \in [0, 1]$.

Seja m um número natural tal que $\frac{1}{m} < \delta$. Considere $n = 2m$ e os números fuzzy $A_0, A_1, \dots, A_n$ fortemente linearmente independentes definidos como no Lema 1, com $\alpha_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Defina

$$p_0(x) = \frac{f^+(x, 1) + f^-(x, 1)}{2}, \quad x \in [a, b],$$

Figura 19 – Seja $\epsilon = 0.1$. Cada imagem retrata o número fuzzy $A = (1; 2; 3.5; 5)$ através da linha sólida azul e a sua aproximação $B = p_0A_0 + \dots + p_nA_n$ através da região cinza, com $A_0, \dots, A_n$ dados conforme o Lema 1 e cujos coeficientes p_i são definidos pelas igualdades em (3.10), para $n = 6, 12, 18, 30$ respectivamente.



Fonte: Autor.

$$p_n(x) = f^+(x, 1) - f^-(x, 1), \quad x \in [a, b],$$

$$p_{n-1}(x) = f^-(x, \alpha_{n-1}) - f^-(x, 1), \quad x \in [a, b],$$

e, para $i = 1, \dots, n-2$,

$$p_i(x) = \begin{cases} f^-(x, \alpha_i) - f^-(x, \alpha_{i+2}), & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ f^+(x, \alpha_i) - f^+(x, \alpha_{i+2}), & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

para todo $x \in [a, b]$.

Seja a função $g : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}(A_0, A_1, \dots, A_n)$ tal que

$$g(x) = p_0(x)A_0 + p_1(x)A_1 + \dots + p_n(x)A_n.$$

Para $\alpha \in [0, 1]$, existe $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_j < \alpha$ se $j < i$, e $\alpha \leq \alpha_i$ se $j \geq i$, i.e.,

$i = \inf\{j \mid \alpha \leq \alpha_i\}$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} [g(x)]_\alpha &= [p_0(x)A_0 + p_1(x)A_1 + \dots + p_n(x)A_n]_\alpha \\ &= p_0(x)\{1\} + p_n(x)[-0.5, 0.5 + (1 - \alpha)\epsilon] + \sum_{j=i}^{n-1} p_j(x)[0, 1]. \end{aligned}$$

Note que, para $j = 1, \dots, n-1$, $p_j(x) \geq 0$ se j é par e $p_j(x) \leq 0$ se j é ímpar. Assim, segue que

$$\begin{aligned} g^-(x, \alpha) &= \frac{f^+(x, 1) + f^-(x, 1)}{2} + -0.5(f^+(x, 1) - f^-(x, 1)) + \\ &\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ i \text{ é ímpar}}} f^-(x, \alpha_i) - f^-(x, \alpha_{i+2}) \\ &= f^-(x, 1) + (f^-(x, \alpha_{n-1}) - f^-(x, 1)) + \\ &\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-3 \\ i \text{ é ímpar}}} f^-(x, \alpha_i) - f^-(x, \alpha_{i+2}) \\ &= f^-(x, \alpha_i) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g^+(x, \alpha) &= \frac{f^+(x, 1) + f^-(x, 1)}{2} + (0.5 + (1 - \alpha)\epsilon)(f^+(x, 1) - f^-(x, 1)) + \\ &\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ i \text{ é par}}} f^+(x, \alpha_i) - f^+(x, \alpha_{i+2}) \\ &= f^+(x, 1) + (1 - \alpha)\epsilon(f^+(x, 1) - f^-(x, 1)) + \\ &\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-2 \\ i \text{ é par}}} f^+(x, \alpha_i) - f^+(x, \alpha_{i+2}) \\ &= f^+(x, \alpha_i) + (1 - \alpha)\epsilon(f^+(x, 1) - f^-(x, 1)). \end{aligned}$$

Uma vez que $|\alpha_i - \alpha| < \frac{1}{n} = \frac{1}{2m} < \frac{1}{m} < \delta$ e $(1 - \alpha)\epsilon(f^+(x, 1) - f^-(x, 1)) < (1 - \alpha)\frac{\tilde{\epsilon}}{4} < \frac{\tilde{\epsilon}}{4}$, obtemos

$$\begin{aligned} d_H([f(x)]_\alpha, [g(x)]_\alpha) &= \max\{|f^-(x, \alpha) - g^-(x, \alpha)|, |f^+(x, \alpha) - g^+(x, \alpha)|\} \\ &< \max\{0.5\tilde{\epsilon}, 0.5\tilde{\epsilon} + 0.25\tilde{\epsilon}\} = 0.75\tilde{\epsilon} \end{aligned}$$

e isso implica que

$$D_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} \left(\sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([f(x)]_\alpha, [g(x)]_\alpha) \right) < \tilde{\epsilon}.$$

A função g é Ψ -diferenciável em (a, b) pois as funções p_i são também diferenciáveis em (a, b) . Logo, $g'(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$ para todo $x \in (a, b)$ com seus α -níveis dados por $[g'(x)] = [c^-(x, \alpha), c^+(x, \alpha)]$. Como f é gH -diferenciável em (a, b) e não possui *switch*

points em (a, b) , então ou f é (i)- gH -diferenciável em (a, b) ou (ii)- gH -diferenciável em (a, b) . Se f é (i)- gH -diferenciável em (a, b) , então

$$[f'_{gH}(x)]_\alpha = [(f^-)'(x, \alpha), (f^+)'(x, \alpha)]$$

para todo $x \in (a, b)$ e $\alpha \in [0, 1]$. Sejam $\alpha \in [0, 1]$ e $j = \inf\{i \mid \alpha \leq \alpha_i\}$. Temos, para $j = 1, \dots, n$, que $p'_j(x) \geq 0$ se j é par e $p'_j(x) \leq 0$ se j é ímpar. Daí,

$$\begin{aligned} c^-(x, \alpha) &= \frac{(f^+)'(x, 1) + (f^-)'(x, 1)}{2} + (-0.5((f^+)'(x, 1) - (f^-)'(x, 1))) + \\ &\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ i \text{ é ímpar}}} (f^-)'(x, \alpha_i) - (f^-)'(x, \alpha_{i+2}) \\ &= f^{-'}(x, \alpha_i) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c^+(x, \alpha) &= \frac{(f^+)'(x, 1) + (f^-)'(x, 1)}{2} + (0.5 + (1 - \alpha)\epsilon)((f^+)'(x, 1) - (f^-)'(x, 1)) + \\ &\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ i \text{ é par}}} (f^+)'(x, \alpha_i) - (f^+)'(x, \alpha_{i+2}) \\ &= (f^+)'(x, \alpha_i) + (1 - \alpha)\epsilon((f^+)'(x, 1) - (f^-)'(x, 1)). \end{aligned}$$

Novamente, como $|\alpha_i - \alpha| < \delta$ e $|(1 - \alpha)\epsilon((f^+)'(x, 1) - (f^-)'(x, 1))| < \frac{\tilde{\epsilon}}{4}$, temos

$$d_H([f'_{gH}(x)]_\alpha, [g'(x)]_\alpha) = \max\{|(f^-)'(x, \alpha) - c^-(x, \alpha)|, |(f^+)'(x, \alpha) - c^+(x, \alpha)|\} \leq 0.75\tilde{\epsilon}.$$

Logo, concluímos que

$$D_\infty(f'_{gH}, g') = \sup_{x \in [a, b]} \left(\sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([f'_{gH}(x)]_\alpha, [g'(x)]_\alpha) \right) < \tilde{\epsilon}.$$

Finalmente, se f é (ii)- gH -diferenciável em (a, b) , então

$$[f'_{gH}(x)]_\alpha = [(f^+)'(x, \alpha), (f^-)'(x, \alpha)]$$

para todo $x \in (a, b)$ e $\alpha \in [0, 1]$. Sejam $\alpha \in [0, 1]$ e $i = \inf\{j \mid \alpha \leq \alpha_j\}$. Para $j = 1, \dots, n$, temos que $p'_j(x) \leq 0$ se j é par e $p'_j(x) \geq 0$ se j é ímpar. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} c^-(x, \alpha) &= \frac{(f^+)'(x, 1) + (f^-)'(x, 1)}{2} + (0.5 + (1 - \alpha)\epsilon)((f^+)'(x, 1) - (f^-)'(x, 1)) + \\ &\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ i \text{ é par}}} (f^+)'(x, \alpha_i) - (f^+)'(x, \alpha_{i+2}) \\ &= (f^+)'(x, \alpha_i) + (1 - \alpha)\epsilon((f^+)'(x, 1) - (f^-)'(x, 1)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c^+(x, \alpha) &= \frac{(f^+)'(x, 1) + (f^-)'(x, 1)}{2} + (-0.5((f^+)'(x, 1) - (f^-)'(x, 1))) + \\ &\quad \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ i \text{ é par}}} (f^-)'(x, \alpha_i) - (f^-)'(x, \alpha_{i+2}) \\ &= (f^-)'(x, \alpha_i). \end{aligned}$$

Usando os fatos de que $|\alpha_i - \alpha| < \delta$ e $|(1 - \alpha)\epsilon((f^+)'(x, 1) - (f^-)'(x, 1))| < \frac{\tilde{\epsilon}}{4}$, obtemos

$$d_H([f'_{gH}(x)]_\alpha, [g'(x)]_\alpha) = \max\{|(f^+)'(x, \alpha) - c^-(x, \alpha)|, |(f^-)'(x, \alpha) - c^+(x, \alpha)|\} \leq 0.75\tilde{\epsilon}.$$

Portanto, concluímos que

$$D_\infty(f'_{gH}, g') = \sup_{x \in [a, b]} \left(\sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([f'_{gH}(x)]_\alpha, [g'(x)]_\alpha) \right) < \tilde{\epsilon}.$$

□

Exemplo 27. *Sejam o número fuzzy $A = (-1; 0; 1)$ e a função fuzzy $f : [-1, -1/2] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ definida por $f(t) = (e^{-t} - 2e^t)A$. Verifica-se que f é gH -diferenciável e que $f'_{gH}(t) = -f(t) + 2e^{-t}A$. No entanto, o conjunto $\{A\}$ não é FLI (pois, $\delta_A(\alpha) = 0$) e assim não é possível definir uma Ψ -derivada para f . Apesar disso, observe que f é continuamente gH -diferenciável, não possui switch points em $(-1, -1/2)$, pois é (i) - gH -diferenciável nesse intervalo e $f'_{gH}(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$ para todo $t \in (-1, -1/2)$.*

Logo, podemos aproximar uniformemente f e f'_{gH} por meio de uma função $g : [-1, -1/2] \rightarrow \mathcal{S}(A_0, A_1, \dots, A_n)$ e de sua Ψ -derivada g' , respectivamente. Vamos ilustrar uma dessas aproximações para o caso $n = 5$.

Considere $g : [-1, -1/2] \rightarrow \mathcal{S}(A_0, A_1, \dots, A_5)$ uma função Ψ -diferenciável. Então, existem funções diferenciáveis f_i em $t \in (-1, -1/2)$ tais que

$$g(t) = f_0(t)A_0 + f_1(t)A_1 + \dots + f_5(t)A_5$$

em que A_i são os números fuzzy do Lema 1. Na demonstração do Teorema 13 os coeficientes $f_i(t)$, da combinação que determina a aproximação g , são definidos como

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{f^+(t, 1) + f^-(t, 1)}{2} \\ f_n(t) &= f^+(t, 1) - f^-(t, 1) \\ f_{n-1}(t) &= f^-(t, \alpha_{n-1}) - f^-(t, 1) \\ f_i(t) &= \begin{cases} f^-(t, \alpha_i) - f^-(t, \alpha_{i+2}), & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ f^+(t, \alpha_i) - f^+(t, \alpha_{i+2}), & \text{se } i \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

em que $f^-(t, \alpha) = f_\alpha^-(t)$ e $f^+(t, \alpha) = f_\alpha^+(t)$ são os extremos inferior e superior dos α -níveis de $f(t)$, definidos por $f_\alpha^-(t) = (e^{-t} - 2e^t)(\alpha - 1)$ e $f_\alpha^+(t) = (e^{-t} - 2e^t)(1 - \alpha)$, respectivamente. Para $i = 0, 1, \dots, 5$, encontramos: $f_0(t) = 0$, $f_1(t) = f_3(t) = (2/5)(e^{-t} - 2e^t)$, $f_2(t) = (-2/5)(e^{-t} - 2e^t)$, $f_4(t) = (-1/5)(e^{-t} - 2e^t)$ e $f_5(t) = 0$. Daí,

$$g(t) = (2/5)(e^{-t} - 2e^t)A_1 + (-2/5)(e^{-t} - 2e^t)A_2 + (2/5)(e^{-t} - 2e^t)A_3 + (-1/5)(e^{-t} - 2e^t)A_4$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned} [g(t)]_\alpha &= (2/5)(e^{-t} - 2e^t) \begin{cases} \{0\}, & 1/5 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 1/5 \end{cases} + (-2/5)(e^{-t} - 2e^t) \begin{cases} \{0\}, & 2/5 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 2/5 \end{cases} \\ &+ (2/5)(e^{-t} - 2e^t) \begin{cases} \{0\}, & 3/5 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 3/5 \end{cases} + (-1/5)(e^{-t} - 2e^t) \begin{cases} \{0\}, & 4/5 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 4/5 \end{cases} \end{aligned}$$

isto é,

$$[g(t)]_\alpha = (e^{-t} - 2e^t) \begin{cases} \{0\}, & 4/5 < \alpha \leq 1 \\ [-1/5, 0], & 3/5 < \alpha \leq 4/5 \\ [-1/5, 2/5], & 2/5 < \alpha \leq 3/5 \\ [-3/5, 2/5], & 1/5 < \alpha \leq 2/5 \\ [-3/5, 4/5], & 0 \leq \alpha \leq 1/5. \end{cases}$$

Por fim, sabendo que g é uma função Ψ -diferenciável segue pela Proposição 19 que

$$g'(t) = (-e^{-t} - 2e^t) [(2/5)A_1 + (-2/5)A_2 + (2/5)A_3 + (-1/5)A_4]$$

com α -níveis dados por

$$[g'(t)]_\alpha = (e^{-t} + 2e^t) \begin{cases} \{0\}, & 4/5 < \alpha \leq 1 \\ [0, 1/5], & 3/5 < \alpha \leq 4/5 \\ [-2/5, 1/5], & 2/5 < \alpha \leq 3/5 \\ [-2/5, 3/5], & 1/5 < \alpha \leq 2/5 \\ [-4/5, 3/5], & 0 \leq \alpha \leq 1/5. \end{cases}$$

Uma representação dos gráficos de f , g , f'_{gH} e g' são dados na Figura 20.

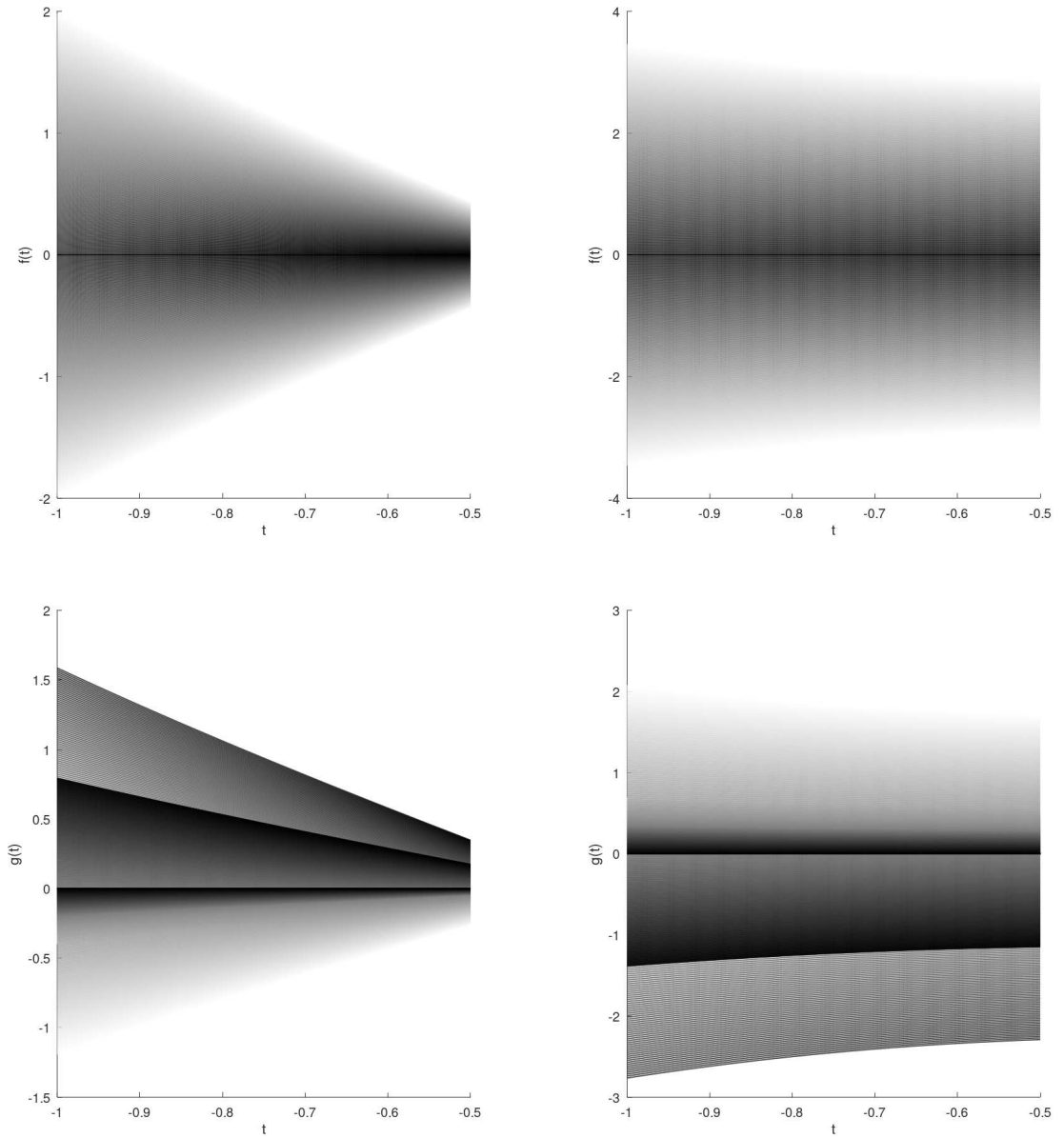
Neste capítulo estabelecemos conexões entre os conceitos de gH-diferenciabilidade e Ψ -diferenciabilidade de funções fuzzy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ da forma

$$f(x) = p_1(x)A_1 + \cdots + p_n(x)A_n$$

em $x_0 \in (a, b)$, através dos Teoremas 9 e 10 quando $\{A_1, \dots, A_n\}$ é um conjunto FLI de números fuzzy e p_i é diferenciável em x_0 .

Demonstramos que a relação entre a Ψ -derivada e a gH-derivada, nesse caso, é determinada pela análise do sinal das funções p_i e p'_i em $x_0 \in (a, b)$ para cada i no qual $\text{diam}(A_i) > 0$. Em particular, estabelecemos uma condição necessária para que x_0 seja *switch point* de f a partir do fato de x_0 ser um zero e/ou um ponto crítico de f em (a, b) no Teorema 11.

Figura 20 – Gráficos de f (superior à esquerda) e f'_{gH} (superior à direita); gráficos de g (inferior à esquerda) e g' (inferior à direita).



Fonte: Autor.

Realizamos aproximações de funções continuamente gH -diferenciáveis por meio de funções Ψ -diferenciáveis no Teorema 13, a partir da teoria de aproximação de números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$ desenvolvidas no Teorema 12 por meio de números fuzzy, apresentados no Lema 1, cuja representação das suas funções de pertinência se assemelham ao gráfico da função degrau unitário.

No capítulo seguinte, aplicaremos esses resultados para relacionar problemas de valor inicial fuzzy descritos sob a gH -derivada a problemas descritos via Ψ -derivada.

4 Aplicações em Problemas de Valor Inicial Fuzzy

Neste Capítulo apresentaremos as aplicações dos teoremas desenvolvidos no Capítulo 3, que relacionaram a Ψ -derivada e gH-derivada de uma função de variável real que assume valores fuzzy, na resolução de equações diferenciais cujo campo de direções, obtido da função fuzzy $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $T > 0$, é descrito por valores fuzzy.

Nas seções deste capítulo, com a finalidade de simplificar, omitiremos (na maior parte dos casos) a variável t ao descrevermos a função fuzzy X e suas respectivas gH-derivada e Ψ -derivada, além de suprimirmos essa variável ao representar os extremos dos seus respectivos α -níveis. Além disso, em todo o capítulo as condições iniciais dos Problema de Valor Inicial (PVI) e do Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF) serão consideradas em $t = 0$, uma vez que se $t = t_0 \in [0, T]$ e $t_0 \neq 0$, então através da translação $t \mapsto t - t_0$ as condições iniciais são determinadas novamente em $t_0 \mapsto 0$.

4.1 Relações entre a Ψ -Derivada e a gH-derivada para PVIF

Sejam $\{A_1, \dots, A_n\}$ um conjunto fortemente linearmente independente de números fuzzy e $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ o isomorfismo definido por

$$\Psi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \beta_1 A_1 + \dots + \beta_n A_n. \quad (4.1)$$

Seja $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função fuzzy k -vezes Ψ -diferenciável com $T > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $k > 0$. Denotemos por $X^{(k)}$ a k -ésima Ψ -derivada da função X . Consideremos o seguinte problema valor inicial fuzzy (PVIF) generalizado sob a noção de Ψ -diferenciabilidade:

$$\begin{cases} X^{(k)} = \Psi(\beta^{(k)}) = \Psi(F(t, \beta, \beta', \dots, \beta^{(k-1)})) \\ X^{(j)}(0) = \Psi(\beta^{(j)}(0)) = X_0^{(j)} \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n), j = 0, 1, \dots, k-1 \end{cases} \quad (4.2)$$

em que $\beta_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções k -vezes diferenciáveis em $(0, T)$, $\beta^{(j)}(t) = (\beta_1^{(j)}(t), \dots, \beta_n^{(j)}(t))$, $j = 0, 1, \dots, k$ e $F : [0, T] \times \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $T > 0$.

Note que, sob a Ψ -diferenciabilidade, toda solução X do PVIF (4.2) deve assumir a forma

$$X(t) = \beta_1(t)A_1 + \dots + \beta_n(t)A_n = \Psi(\beta(t)).$$

Além disso, a bijetividade do operador Ψ nos mostra que o campo de direções em (4.2) é dado implicitamente por uma função $G : [0, T] \times \underbrace{(\mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \dots \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}})}_{k\text{-vezes}} \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ tal

que

$$\begin{aligned} G(t, X, X', \dots, X^{(k-1)}) &= \Psi(F(t, \Psi^{-1}(X), \Psi^{-1}(X') \dots, \Psi^{-1}(X^{(k-1)})) \\ &= \Psi(F(t, \beta, \beta', \dots, \beta^{(k-1)})). \end{aligned}$$

Assim, resolver o problema (4.2) é equivalente a obter a solução do problema de valor inicial n -dimensional:

$$\begin{cases} \Psi^{-1}(X^{(k)}) = \beta^{(k)} = F(t, \beta, \beta', \dots, \beta^{(k-1)}) \\ \beta^{(j)}(0) = \Psi^{-1}(X_0^{(j)}) = \beta_0^{(j)} \in \mathbb{R}^n, j = 0, 1, \dots, k-1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Como consequência imediata desse fato, temos:

Proposição 20. (ESMI et al., 2022) *O problema (4.2) tem solução se, e somente se, o problema (4.3) tem uma solução. Além disso, se β é uma solução (analítica ou numérica) de (4.3), então $X = \Psi \circ \beta$, isto é, $X(t) = \Psi(\beta(t))$, para todo $t \in [0, T]$, é uma solução (analítica ou numérica) de (4.2).*

Demonstração. Ver Teorema 15 em (ESMI et al., 2022), p.26. □

Logo, pela Proposição 20, a tarefa de resolver equações diferenciais fuzzy (EDF), descritas sob a Ψ -diferenciabilidade, consiste na resolução de equações diferenciais clássicas. Veremos essa relação através dos Exemplos 28, 29 e 30 que ilustram, a seguir, a conexão entre um PVI n -dimensional e um PVIF sob a Ψ -derivada.

Exemplo 28. *Seja Ψ o isomorfismo definido em (4.1). Considere o PVIF, sob a Ψ -derivada, descrito por*

$$\begin{cases} X' = aX \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n) \end{cases} \quad (4.4)$$

com $a \in \mathbb{R}$ uma constante não-nula. Seja $X(t) = \Psi(\beta(t))$ em que $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ e $\beta_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções deriváveis em $(0, T)$, $i = 1, \dots, n$. Pela Proposição 19, temos $X'(t) = \Psi(\beta'(t))$ e assim

$$X' = aX \Rightarrow \Psi^{-1}(X'(t)) = \Psi^{-1}(aX(t)) \Rightarrow \beta'(t) = a\beta(t) \Rightarrow \beta(t) = ce^{at}$$

com $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $X(0) = \Psi(\beta(0))$ então $\Psi^{-1}(X_0) = \beta(0) = c$. Portanto, a solução do problema (4.4) será dada por

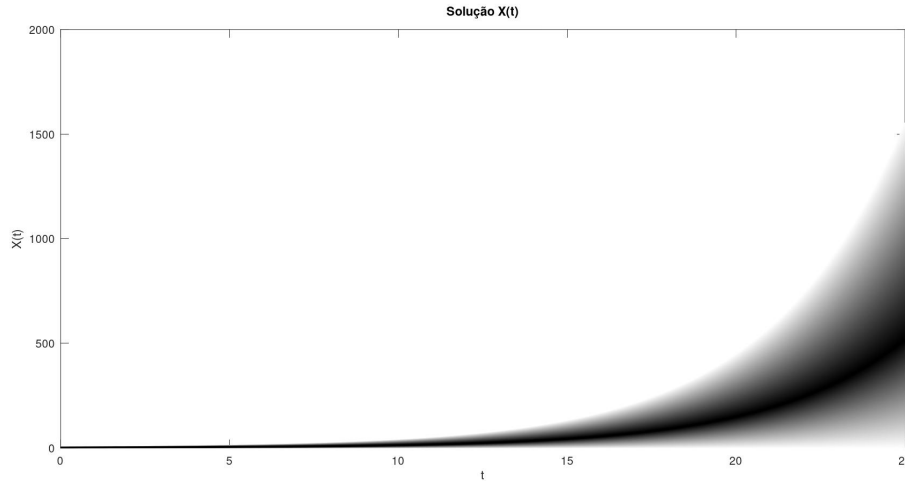
$$X(t) = \Psi(\beta(t)) = \Psi(ce^{at}) = \Psi(e^{at}\Psi^{-1}(X_0)) = e^{at}X_0.$$

Na Figura 21 temos uma ilustração dessa solução aplicada ao PVIF, sob a Ψ -derivada, dado por

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{4}X \\ X(0) = (0; 1; 3) \in \mathcal{S}(A_1, A_2) \end{cases}$$

em que $A_1 = (0; 0; 1)$ e $A_2 = (0; 1; 2)$ formam um conjunto FLI e $X_0 = A_1 + A_2$.

Figura 21 – Gráfico da solução $X(t)$ do Exemplo 28 para a condição inicial $X_0 = (0; 1; 3) \in \mathcal{S}(A_1, A_2)$, com $A_1 = (0; 0; 1)$, $A_2 = (0; 1; 2)$ e $a = 0.25$.



Fonte: Autor.

Exemplo 29. Sejam $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $T > 0$, uma função fuzzy duas vezes Ψ -diferenciável com o isomorfismo Ψ definido em (4.1). Considere o PVIF de segunda ordem, sob a Ψ -derivada, dado por

$$\begin{cases} X'' = aX +_{\Psi} bX' \\ X(0) = X_0 \\ X'(0) = X'_0 \end{cases} \quad (4.5)$$

com $X_0, X'_0 \in \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ e a e b constantes reais com $b \neq 0$. Sejam $X(t) = \Psi(\beta(t))$, $\Psi^{-1}(X_0) = \beta(0) = \beta_0$ e $\Psi^{-1}(X'_0) = \beta'(0) = \beta'_0$. Então,

$$\begin{cases} X'' = aX +_{\Psi} bX' \\ X(0) = X_0 \\ X'(0) = X'_0 \end{cases} \xRightarrow{\Psi^{-1}} \begin{cases} \Psi^{-1}(X'') = \Psi^{-1}(aX) + \Psi^{-1}(bX') \\ \Psi^{-1}(X_0) = \beta_0 \\ \Psi^{-1}(X'_0) = \beta'_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta''(t) = a\beta(t) + b\beta'(t) \\ \beta(0) = \beta_0 \\ \beta'(0) = \beta'_0 \end{cases}$$

donde

$$\beta(t) = c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{\omega_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n,$$

com $\omega_1 = \frac{1}{2} \left(b - \sqrt{b^2 + 4a} \right)$ e $\omega_2 = \frac{1}{2} \left(b + \sqrt{b^2 + 4a} \right)$. Aplicando as condições iniciais, encontramos $c_1 = \frac{\omega_2 \beta_0 - \beta'_0}{\omega_2 - \omega_1}$ e $c_2 = \frac{\beta'_0 - \omega_1 \beta_0}{\omega_2 - \omega_1}$ e assim

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \frac{(\omega_2 e^{\omega_1 t} - \omega_1 e^{\omega_2 t})}{\omega_2 - \omega_1} \beta_0 + \frac{(e^{\omega_2 t} - e^{\omega_1 t})}{\omega_2 - \omega_1} \beta'_0 \\ &= \lambda_1(t) \beta_0 + \lambda_2(t) \beta'_0 \end{aligned}$$

em que $\lambda_1(t) = \frac{\omega_2 e^{\omega_1 t} - \omega_1 e^{\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1}$ e $\lambda_2(t) = \frac{e^{\omega_2 t} - e^{\omega_1 t}}{\omega_2 - \omega_1}$. Logo, a solução de (4.5) será dada por

$$\begin{aligned} X(t) = \Psi(\beta(t)) &= \Psi(\lambda_1(t)\beta_0 + \lambda_2(t)\beta'_0) \\ &= \Psi(\lambda_1(t)\Psi^{-1}(X_0) + \lambda_2(t)\Psi^{-1}(X'_0)) \\ &= \Psi(\Psi^{-1}(\lambda_1(t)X_0) + \Psi^{-1}(\lambda_2(t)X'_0)) \\ &= \lambda_1(t)X_0 +_{\Psi} \lambda_2(t)X'_0. \end{aligned}$$

Na Figura 22 temos uma ilustração dessa solução aplicada ao PVIF, sob a Ψ -derivada, dado por

$$\begin{cases} X''(t) = (-5)X(t) +_{\Psi} 2X(t) \\ X(0) = (0; 1; 3) \in \mathcal{S}(A_1, A_2) \\ X'(0) = (-1; 1; 2) \in \mathcal{S}(A_1, A_2), \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{5\pi}{4}\right],$$

em que $A_1 = (0; 0; 1)$ e $A_2 = (0; 1; 2)$ formam um conjunto FLI e $X_0 = A_1 + A_2$ e $X'_0 = (-1)A_1 + A_2$. Em particular, neste caso obtemos os valores $\omega_1 = 1 - 2i$ e $\omega_2 = 1 + 2i$ que nos fornecem as funções λ_1 e λ_2 como:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{\omega_2 e^{\omega_1 t} - \omega_1 e^{\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{(1 + 2i)e^{(1-2i)t} - (1 - 2i)e^{(1+2i)t}}{4i} \\ &= \frac{e^t[(e^{-2it} - e^{2it}) + 2i(e^{-2it} + e^{2it})]}{4i} \\ &= \frac{e^t(2i\operatorname{Im}(e^{-2it}) + 4i\operatorname{Re}(e^{-2it}))}{4i} \\ &= \frac{e^t(-\sin(2t) + 2\cos(2t))}{2} \end{aligned}$$

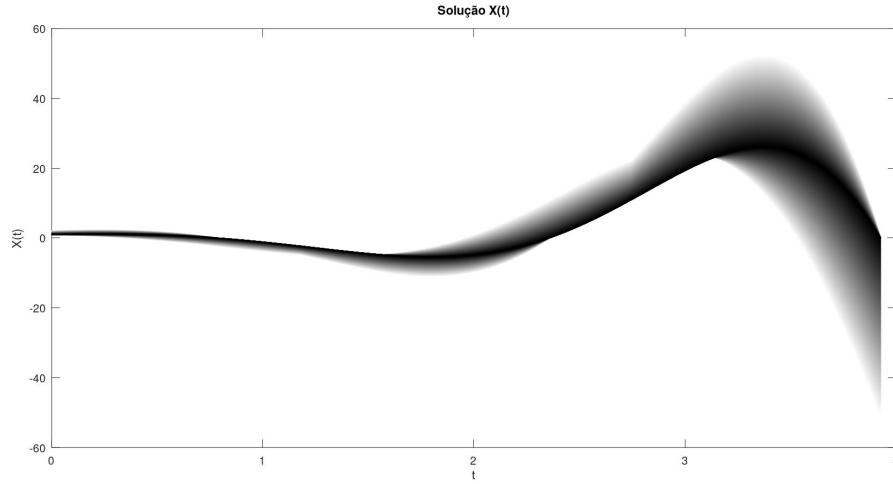
e

$$\lambda_2(t) = \frac{e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{e^{(1-2i)t} - e^{(1+2i)t}}{4i} = \frac{e^t(e^{2it} - e^{-2it})}{4i} = \frac{e^t(2i\operatorname{Im}(e^{2it}))}{4i} = \frac{e^t\sin(2t)}{2}.$$

Por sua vez, com as funções λ_1 e λ_2 assim dadas e com o isomorfismo $\Psi(p_1, p_2) = p_1A_1 + p_2A_2$ posto, obtemos a solução:

$$\begin{aligned} X(t) &= \lambda_1(t)X_0 +_{\Psi} \lambda_2(t)X'_0 \\ &= \Psi(\lambda_1(t)\Psi^{-1}(X_0) + \lambda_2(t)\Psi^{-1}(X'_0)) \\ &= \Psi(\lambda_1(t)(1, 1) + \lambda_2(t)(-1, 1)) \\ &= (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))A_1 + (\lambda_1(t) + \lambda_2(t))A_2 \\ &= \begin{cases} (0; \lambda_1(t) + \lambda_2(t); 3\lambda_1(t) + \lambda_2(t)), t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}\right]; \\ (\lambda_1(t) - \lambda_2(t); \lambda_1(t) + \lambda_2(t); 2(\lambda_1(t) + \lambda_2(t))), t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right]; \\ (3\lambda_1(t) + \lambda_2(t); \lambda_1(t) + \lambda_2(t); 0), t \in \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right]; \\ (2(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)); \lambda_1(t) + \lambda_2(t); \lambda_1(t) - \lambda_2(t)), t \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}\right]. \end{cases} \end{aligned}$$

Figura 22 – Gráfico da solução $X(t)$ do Exemplo 29 para as condições iniciais $X_0 = (0; 1; 3)$ e $X'_0 = (-1; 1; 2)$ em $\mathcal{S}(A_1, A_2)$, com $A_1 = (0; 0; 1)$, $A_2 = (0; 1; 2)$ e $a = -5$ e $b = 2$.



Fonte: Autor.

Exemplo 30. Sejam $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função fuzzy Ψ -diferenciável em $(0, T)$, $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, com f não nula em quase todo $t \in [0, T]$, e $\{1, A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um conjunto FLI. Considere o PVIF, sob a Ψ -derivada,

$$\begin{cases} X' = f(t)X +_{\Psi} g(t) \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{S}(1, A_1, A_2, \dots, A_n). \end{cases} \quad (4.6)$$

Sejam $X(t) = \Psi(\beta(t))$, $X'(t) = \Psi(\beta'(t))$ e $\Psi(v) = 1$ com $\beta(t) = (\beta_0(t), \beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ e $v = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Então, aplicando o operador Ψ^{-1} em $X' = f(t)X +_{\Psi} g(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(X') &= \Psi^{-1}(f(t)X +_{\Psi} g(t)) = \Psi^{-1}(\Psi(\Psi^{-1}(f(t)X) + \Psi^{-1}(g(t) \cdot 1))) \\ &= f(t)\Psi^{-1}(X) + g(t)\Psi^{-1}(1) \end{aligned}$$

que nos fornece a equação diferencial ordinária (EDO) na forma vetorial

$$\beta'(t) = f(t)\beta(t) + g(t)v$$

cujas componentes são as EDOs lineares

$$\begin{aligned} \beta'_0(t) &= f(t)\beta_0(t) + g(t) \\ \beta'_1(t) &= f(t)\beta_1(t) \\ &\vdots \\ \beta'_n(t) &= f(t)\beta_n(t). \end{aligned}$$

Seja $\Psi^{-1}(X_0) = \beta(0) = (\beta_0(0), \beta_1(0), \dots, \beta_n(0))$ a condição inicial associada as EDOs obtidas acima. As soluções dessas equações são assim dadas por

$$\beta_0(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \left[\int_0^t \exp\left(-\int_{u_0}^u f(s)ds\right) g(u)du + \beta_0(0) \right] \quad (4.7)$$

e

$$\beta_i(t) = \beta_i(0) \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \quad (4.8)$$

para $i = 1, \dots, n$. Logo,

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \left(\int_0^t \exp\left(-\int_{u_0}^u f(s)ds\right) g(u)du + \beta_0(0), \beta_1(0), \dots, \beta_n(0) \right) \\ &= \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \left[\left(\int_0^t \exp\left(-\int_{u_0}^u f(s)ds\right) g(u)du, 0, \dots, 0 \right) + (\beta_0(0), \dots, \beta_n(0)) \right] \\ &= \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \left[\left(\int_0^t \exp\left(-\int_{u_0}^u f(s)ds\right) g(u)du \right) v + \beta(0) \right] \\ &= \varphi(t) \left[\left(\int_0^t (\varphi(u))^{-1} g(u)du \right) \Psi^{-1}(1) + \Psi^{-1}(X_0) \right] \end{aligned}$$

em que $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right)$. Note que a continuidade de f em $[0, T]$ garante que f atinge seu valor mínimo $\bar{y}$ em $\mathbb{R}$ e assim $\int_0^t f(s)ds \geq \int_0^t \bar{y}ds = \bar{y}t \geq 0$. Logo, $\varphi(t) > 0$ para todo $t \in [0, T]$ qualquer que seja a função contínua f definida em $[0, T]$. Portanto, a solução do PVIF dado em (4.6) será

$$\begin{aligned} X(t) = \Psi(\beta(t)) &= \Psi\left(\varphi(t) \left(\int_0^t \frac{1}{\varphi(u)} g(u)du \right) \Psi^{-1}(1) + \varphi(t) \Psi^{-1}(X_0)\right) \\ &= \Psi\left(\Psi^{-1}\left(\left(\varphi(t) \int_0^t \frac{1}{\varphi(u)} g(u)du\right) \cdot 1\right) + \Psi^{-1}(\varphi(t) \cdot X_0)\right) \\ &= \varphi(t) \int_0^t \frac{1}{\varphi(u)} g(u)du +_{\Psi} \varphi(t) \cdot X_0 \\ &= \lambda(t) \cdot 1 +_{\Psi} \varphi(t) \cdot X_0 \end{aligned}$$

em que $\lambda(t) = \varphi(t) \left(\int_0^t \frac{1}{\varphi(u)} g(u)du \right)$. Para ilustrarmos essa solução, considere o PVIF dado em (4.6) para $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = \cos(t)$, com $t \geq 0$, e $X_0 = (-1; -0.5; 2) \in \mathcal{S}(1, A_1, A_2)$ onde $A_1 = (-1; -0.5; 1)$ e $A_2 = (0; 0; 1)$. Neste caso, teremos que

$$\varphi(t) = \exp(1 - \cos(t))$$

e

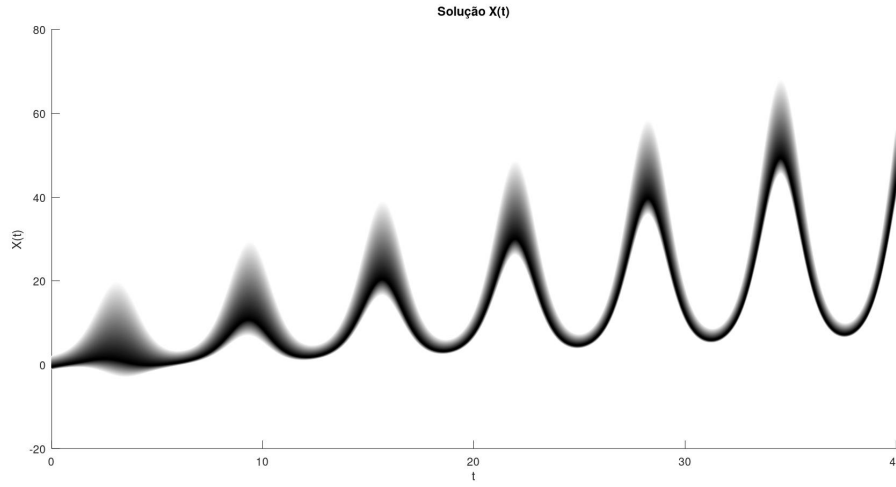
$$\lambda(t) = \exp(1 - \cos(t)) \int_0^t \exp(\cos(u) - 1) \cos(u)du.$$

E assim, os α -níveis da solução X do PVIF serão expressos por:

$$[X(t)]_{\alpha} = \lambda(t) + \varphi(t)[0.5\alpha - 1, 2 - 2.5\alpha].$$

A Figura 23 nos traz uma representação da solução X do PVIF em (4.6) com as funções escolhidas acima.

Figura 23 – Gráfico da solução $X(t)$ do Exemplo 30 para a condição inicial $X_0 = (-1; 0.5; 2)$ em $\mathcal{S}(1, A_1, A_2)$, com $A_1 = (-1; -0.5; 1)$, $A_2 = (0; 0; 1)$ e $X_0 = A_1 + A_2$.



Fonte: Autor.

Observação 15. Observe que nos Exemplos 28 e 29 a solução X do PVIF proposto ficou explicitamente descrita pela condição inicial do problema. Em geral, no PVIF, sob a Ψ -derivada, dado por

$$X^{(k)}(t) = a_0 X(t) + {}_{\Psi} a_1 X'(t) + {}_{\Psi} \cdots + {}_{\Psi} a_{k-1} X^{(k-1)}(t), \quad X^{(j)}(0) = X_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

a solução X é tal que

$$X(t) \in \mathcal{S} \left(X_0, X_0', \dots, X_0^{(k-1)} \right) \text{ para todo } t \in [0, T]$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$ e $a_{k-1} \neq 0$. Isto decorre naturalmente do fato de que toda solução de uma equação diferencial ordinária (EDO) de k -ésima ordem, com coeficientes constantes e termo fonte nulo (ou termo homogêneo nulo), é unicamente determinada pelas condições iniciais fornecidas pelas derivadas de ordem $0, 1, \dots, k-1$.

Agora nos casos de equações diferenciais fuzzy associadas a EDOs lineares com termo fonte não-nulo, conforme apresentado no Exemplo 30 para Ψ -derivada de primeira ordem, teremos

$$X(t) \in \mathcal{S} (1, X_0) \text{ para todo } t \in [0, T],$$

visto que na teoria de EDOs toda equação linear, com termo fonte não-nulo, é escrita por meio de uma combinação linear da solução da sua chamada forma homogênea $\beta'(t) = f(t)\beta(t)$ com uma solução particular determinada pelo termo não-homogêneo $g(t)$, e cada uma dessas soluções correspondem, respectivamente, ao valor incerto $f(t)X$ e ao valor determinístico $g(t)$.

Os Teorema 9 e 10 do Capítulo 3 nos permitem estabelecer condições para que uma solução do problema (4.2) seja solução de um PVIF equivalente obtido pela troca do conceito de Ψ -diferenciabilidade pelo de gH -diferenciabilidade. Os detalhes relativos a essa análise são estabelecidos nos seguintes corolários, para o caso de equações diferenciais fuzzy de primeira ordem.

Corolário 3. *Seja $X : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ uma solução do PVIF descrito por (4.2) para $k = 1$, isto é, a função fuzzy X satisfaz*

$$X(0) = X_0 \text{ e } X' = \Psi(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = G(t, X) = \Psi(F(t, \beta_1, \dots, \beta_n)) \quad (4.9)$$

para funções diferenciáveis $\beta_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Suponha que X é gH -diferenciável em $(0, T)$.

(a) *Se para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{diam}(A_i) > 0$, tem-se $\beta_i(t)\beta'_i(t) \geq 0$ para todo $t \in (0, T)$, então X é (i)- gH -diferenciável e é uma solução do seguinte PVIF:*

$$\begin{cases} X'_{((i)-gH)} = G(t, X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} ; \quad (4.10)$$

(b) *Se para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{diam}(A_i) > 0$, tem-se $\beta_i(t)\beta'_i(t) \leq 0$ para todo $t \in (0, T)$, então X é (ii)- gH -diferenciável e é uma solução do seguinte PVIF:*

$$\begin{cases} X'_{((ii)-gH)} = G(t, X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} . \quad (4.11)$$

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 9. □

Corolário 4. *Seja $X : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ uma solução do PVIF descrito por (4.2) para $k = 1$, isto é, a função fuzzy X satisfaz*

$$X(0) = X_0 \text{ e } X' = \Psi(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = G(t, X) = \Psi(F(t, \beta_1, \dots, \beta_n)) \quad (4.12)$$

para funções diferenciáveis $\beta_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

(a) *Se para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{diam}(A_i) > 0$, tem-se $\beta_i(t)\beta'_i(t) > 0$ para todo $t \in (0, T)$, então X é (i)- gH -diferenciável e é uma solução do seguinte PVIF:*

$$\begin{cases} X'_{((i)-gH)} = G(t, X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} ; \quad (4.13)$$

(b) *Se para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{diam}(A_i) > 0$, tem-se $\beta_i(t)\beta'_i(t) < 0$ para todo $t \in (0, T)$, então X é (ii)- gH -diferenciável e é uma solução do seguinte PVIF:*

$$\begin{cases} X'_{((ii)-gH)} = G(t, X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} . \quad (4.14)$$

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 10. $\square$

Exemplo 31. Seja $\{1, A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um conjunto FLI tal que $\text{diam}(A_i) > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. No Exemplo 30, a solução $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ do PVIF em (4.6), sob a Ψ -derivada, é

$$X(t) = \lambda(t) +_{\Psi} \varphi(t)X_0 \text{ com } X_0 \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n),$$

$$\lambda(t) = \varphi(t) \left(\int_0^t \frac{1}{\varphi(u)} g(u) du \right) \text{ e } \varphi(t) = \exp \left(\int_0^t f(s) ds \right) \text{ em que } f \text{ e } g \text{ são contínuas em } [0, T] \text{ e } f \text{ é não nula em quase todo } t \in [0, T].$$

Suponhamos que X seja uma função fuzzy gH -diferenciável em $(0, T)$. Verificamos que os extremos dos α -níveis de X são as funções $x_{\alpha}^{-}(t) = \lambda(t) + \varphi(t)(x_0)_{\alpha}^{-}$ e $x_{\alpha}^{+}(t) = \lambda(t) + \varphi(t)(x_0)_{\alpha}^{+}$ e que se $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$, então

$$(x_{\alpha}^{+})' - (x_{\alpha}^{-})' = \varphi'(t)((x_0)_{\alpha}^{+} - (x_0)_{\alpha}^{-}) = f(t)\varphi(t) \text{diam}(X_0) \geq 0.$$

Assim, X é uma função (i) - gH -diferenciável em $(0, T)$. Como $\varphi(t)\varphi'(t) = f(t)(\varphi(t))^2 \geq 0$ para todo $t \in (0, T)$ então, pelo Corolário 3, X é solução do PVIF sob a (i) - gH -derivada:

$$\begin{cases} X'_{((i)-gH)} = f(t)X +_{\Psi} g(t) \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Analogamente, se $f(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, T]$, concluímos que X é (ii) - gH -diferenciável em $(0, T)$ e é solução do PVIF sob a (ii) - gH -derivada:

$$\begin{cases} X'_{((ii)-gH)} = f(t)X +_{\Psi} g(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}.$$

Em particular, a Proposição 18 nos garante que $f(t)X +_{\Psi} g(t) = f(t)X + g(t)$ e portanto X é solução do PVIF:

$$\begin{cases} X'_{gH} = f(t)X + g(t) \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n). \end{cases}$$

Observação 16. No Exemplo 31, verificamos pelo Corolário 3, que se X é gH -diferenciável e $f(t) \geq 0$, então X é (i) - gH -diferenciável. Como $\varphi(t)\varphi'(t) \geq 0$ então X é solução de

$$\begin{cases} X'_{((i)-gH)} = f(t)X +_{\Psi} g(t) \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Note que se não tivermos a hipótese de X ser gH -diferenciável, mas $f(t) > 0$ em todo $t \in [0, T]$, então $\varphi(t)\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in (0, T)$ e assim, pelo Corolário 4, X será (i) - gH -diferenciável e solução de

$$\begin{cases} X'_{((i)-gH)} = f(t)X +_{\Psi} g(t) \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Exemplo 32. [(LONGO et al., 2022), p.248] (**Modelo Logístico linearizado com condição inicial incerta.**) *Seja $\{1, A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um conjunto FLI tal que $\text{diam}(A_i) > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Considere a soma e o produto cruzado induzidos pelo isomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{S}(1, A_1, A_2, \dots, A_n)$ definido por $\Psi(p_0, p_1, \dots, p_n) = p_0 + p_1 A_1 + \dots + p_n A_n$. Considere o modelo de crescimento populacional de Verhulst linearizado, com população inicial incerta, escrito sob a Ψ -derivada:*

$$\begin{cases} X' = rX \odot_{\Psi} \left(1 - \frac{1}{K} X\right) \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n) \end{cases} \quad (4.15)$$

em que $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função fuzzy com núcleo $[X(t)]_1 = \{x(t)\}$ para todo $t \in [0, T]$, $r > 0$ é a taxa de crescimento populacional e $K > 0$ é a capacidade suporte do meio à população, com $K > x(0)$. Sejam as funções $\beta_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis em $(0, T)$ e $\beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função definida por $\beta(t) = (\beta_0(t), \beta_1(t), \dots, \beta_n(t)) = \Psi^{-1}(X(t))$. Temos que:

$$\begin{aligned} \beta'(t) = \Psi^{-1}(X'(t)) &= \Psi^{-1} \left(rX \odot_{\Psi} \left(1 - \frac{1}{K} X\right) \right) \\ &= \Psi^{-1} \left((rX \odot_{\Psi} 1) -_{\Psi} (rX \odot_{\Psi} \frac{1}{K} X) \right) \\ &= \Psi^{-1} \left((rX +_{\Psi} rx -_{\Psi} rx) -_{\Psi} \left(\frac{x}{K} rX +_{\Psi} rx \frac{1}{K} X -_{\Psi} rx \frac{x}{K} \right) \right) \\ &= \Psi^{-1} \left(rX -_{\Psi} \left(\frac{2xr}{K} X -_{\Psi} \frac{rx^2}{K} \right) \right) \\ &= r\Psi^{-1}(X) - \frac{2xr}{K} \Psi^{-1}(X) + \frac{rx^2}{K} \Psi^{-1}(1) \\ &= r \left(1 - \frac{2x}{K} \right) \beta(t) + \frac{rx^2}{K} v, \end{aligned}$$

com $v = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Definamos as funções $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ através das relações $f(t) = r \left(1 - \frac{2x(t)}{K} \right)$ e $g(t) = \frac{r(x(t))^2}{K}$. Note que f e g são contínuas em $[0, T]$, f é não nula em quase todo $t \in [0, T]$ e que a equação $\beta'(t) = \Psi^{-1}(X'(t))$ é equivalente a EDO

$$\beta'(t) = f(t)\beta(t) + g(t)v,$$

que resolvemos no Exemplo 30. Portanto, a solução do PVIF em (4.15) será dada por $X(t) = \lambda(t) +_{\Psi} \varphi(t)X_0$ com $\varphi(t) = \exp \left(\int_0^t f(s)ds \right)$ e $\lambda(t) = \varphi(t) \left(\int_0^t (\varphi(u))^{-1} g(u)du \right)$. Isto é,

$$\begin{aligned} X(t) &= \lambda(t) +_{\Psi} \varphi(t)X_0 \\ &= \Psi \left(\lambda(t)\Psi^{-1}(1) + \varphi(t)\Psi^{-1}(X_0) \right) \\ &= \Psi \left(\lambda(t)(1, 0, \dots, 0) + \varphi(t)(\beta_0(0), \beta_1(0), \dots, \beta_n(0)) \right) \\ &= \Psi \left(\lambda(t) + \varphi(t)\beta_0(0), \varphi(t)\beta_1(0), \dots, \varphi(t)\beta_n(0) \right) \\ &= [\lambda(t) + \varphi(t)\beta_0(0)] \cdot 1 + \varphi(t)\beta_1(0) \cdot A_1 + \dots + \varphi(t)\beta_n(0) \cdot A_n \end{aligned}$$

Em particular, a Proposição 16 nos garante que

$$\begin{aligned}
 X'(t) &= rX \odot_{\Psi} \left(1 -_{\Psi} \frac{1}{K} X \right) \\
 &\Downarrow \\
 [X'(t)]_1 &= \left[rX \odot_{\Psi} \left(1 -_{\Psi} \frac{1}{K} X \right) \right]_1 \\
 &= [rX]_1 \left[1 -_{\Psi} \frac{1}{K} X \right]_1 \\
 &\Downarrow \\
 x'(t) &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right),
 \end{aligned}$$

ou seja, o núcleo da solução do PVI é nada mais do que a solução do modelo logístico com condição inicial crisp. Logo,

$$x(t) = \frac{Kx_0 e^{rt}}{K + x_0(e^{rt} - 1)}, \quad x_0 = x(0).$$

Prosseguindo, vamos supor que a solução do problema (4.15) seja gH -diferenciável em $(0, T)$. No Exemplo 31 verificamos que os extremos $x_{\alpha}^{\pm}$, dos α -níveis da solução X , são tais que

$$(x_{\alpha}^{+})'(t) - (x_{\alpha}^{-})'(t) = \varphi'(t)((x_0)_{\alpha}^{+} - (x_0)_{\alpha}^{-}) = f(t)\varphi(t) \text{diam}(X_0).$$

Como $\varphi(t) > 0$ para todo $t \in [0, T]$ e $\text{diam}(X_0) \geq 0$, então

$$(x_{\alpha}^{+})'(t) - (x_{\alpha}^{-})'(t) \geq 0 \iff f(t) \geq 0 \iff r \left(1 - \frac{2x(t)}{K} \right) \geq 0 \iff x(t) \geq \frac{K}{2}.$$

Analogamente, $(x_{\alpha}^{+})'(t) - (x_{\alpha}^{-})'(t) \leq 0$ se, e somente se, $x(t) \leq \frac{K}{2}$. Calculando o valor $\bar{t} \in [0, T]$ tal que $x(\bar{t}) = \frac{K}{2}$, obtemos

$$\frac{Kx_0 e^{r\bar{t}}}{K + x_0(e^{r\bar{t}} - 1)} = \frac{K}{2} \iff e^{r\bar{t}} = \frac{K - x_0}{x_0} \iff \bar{t} = \ln \left(\frac{K - x_0}{x_0} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Logo,

$$(x_{\alpha}^{+})'(t) \geq (x_{\alpha}^{-})'(t) \iff x(t) \geq \frac{K}{2} \iff 0 < t \leq \bar{t}$$

e

$$(x_{\alpha}^{+})'(t) \leq (x_{\alpha}^{-})'(t) \iff x(t) \leq \frac{K}{2} \iff \bar{t} \leq t < T.$$

Portanto, X é (i)- gH -diferenciável em $(0, \bar{t})$ e é (ii)- gH -diferenciável em $(\bar{t}, T)$. Como

$$f(t) > 0 \iff x(t) > \frac{K}{2} \iff t \in (0, \bar{t}),$$

então, para $i = 1, \dots, n$,

$$(\beta_i(0)\varphi(t))(\beta_i(0)\varphi(t))' = (\beta_i(0))^2\varphi(t)\varphi'(t) = (\beta_i(0))^2 f(t)(\varphi(t))^2 > 0$$

em $(0, \bar{t})$. Segue pelo Corolário 3 que X é solução do PVIF sob a (i)-gH-derivada:

$$\begin{cases} X'_{((i)-gH)} = rX \odot_{\Psi} \left(1 - \frac{1}{K}X\right) \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n) \end{cases}$$

para $t \in [0, \bar{t}]$. Analogamente, $(\beta_i(0)\varphi(t))(\beta_i(0)\varphi(t))' < 0$ se, e somente se, $t \in (\bar{t}, T)$ e portanto X é solução do PVIF sob a (ii)-gH-derivada:

$$\begin{cases} X'_{((ii)-gH)} = rX \odot_{\Psi} \left(1 - \frac{1}{K}X\right) \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n) \end{cases}$$

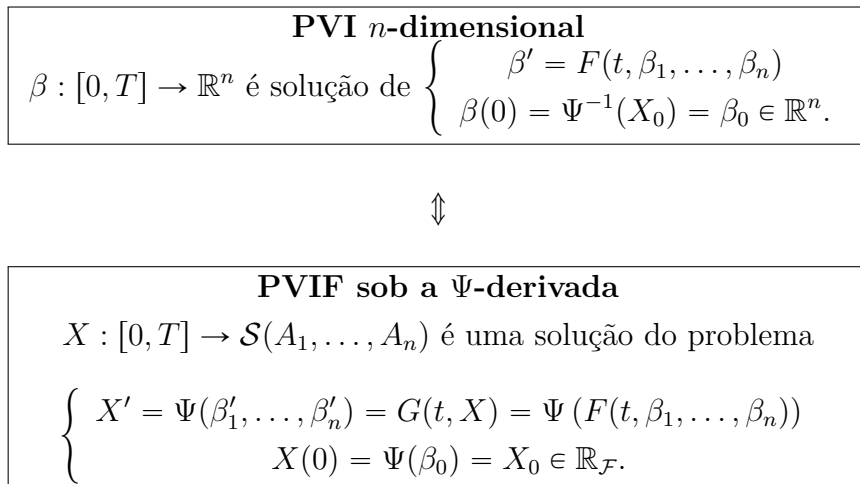
para $t \in [\bar{t}, T]$. Em particular, em $t = \bar{t}$ temos um switch point para o PVIF dado em (4.15). Além disso, note que a Proposição 18 nos garante que $1 - \frac{1}{K}X = 1 - \frac{1}{K}X$ e portanto X é solução de $X'_{gH} = rX \odot_{\Psi} \left(1 - \frac{1}{K}X\right)$ com $X(0) = X_0 \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n)$. Particularmente, a solução X do PVIF sob a Ψ -derivada em (4.15) é uma aproximação por baixo (sob a métrica d_{∞}) à solução do PVIF sob a gH-derivada, dado a seguir em (4.16), na vizinhança da condição inicial $X_0 \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n)$:

$$\begin{cases} X'_{gH} = rX \odot \left(1 - \frac{1}{K}X\right) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (4.16)$$

visto que, pela Proposição 17, item vi), temos

$$rX \odot_{\Psi} \left(1 - \frac{1}{K}X\right) \subseteq rX \odot \left(1 - \frac{1}{K}X\right).$$

Resumindo, a Proposição 20 e o Corolário 3 nos dizem que é possível estabelecer uma relação entre um PVI n -dimensional, um PVIF sob a Ψ -derivada e um PVIF sob a gH-derivada, conforme apresentamos nos Exemplos 28, 29, 30, 31 e 32. Podemos sintetizar essas relações percorridas até o momento seguindo o diagrama a seguir:



↓ (sob as condições do Corolário 3)

PVIF sob a gH-derivada

$X : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} X'_{gH} = G(t, X) = \Psi(F(t, \beta_1, \dots, \beta_n)) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases}$$

Em outras palavras, é possível estabelecer condições a fim de que uma solução de um PVI n -dimensional nos forneça uma solução de um PVIF, sob a Ψ -derivada, e conseqüentemente essa solução nos providencie a solução do mesmo PVIF sob a gH-derivada.

Contudo, pelos resultados vistos no Capítulo 3, um questionamento natural que surge é: a solução de uma EDF sob a gH-derivada pode coincidir ou se aproximar de uma solução da mesma quando escrita sob a Ψ -derivada? Se a resposta for sim, sob que circunstâncias ou hipóteses o diagrama dado é verdadeiro?

PVIF sob a gH-derivada

$$X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \text{ é uma solução de } \begin{cases} X'_{gH} = G(t, X) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases}$$

↓ (quais hipóteses?)

PVIF sob a Ψ -derivada

$X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} X' = \Psi(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = H(t, X) = \Psi(F(t, \beta_1, \dots, \beta_n)) \\ X(0) = \Psi(\beta_0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

ou

PVIF sob a Ψ -derivada (por aproximação)

Existe $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ solução do problema

$$\begin{cases} \tilde{X}' = \Psi(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = \tilde{H}(t, \tilde{X}) = \Psi(F(t, \beta_1, \dots, \beta_n)) \\ \tilde{X}(0) = \Psi(\beta_0) = \tilde{X}_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

tal que $D_{\infty}(X, \tilde{X}) < \epsilon$ e $D_{\infty}(X'_{gH}, \tilde{X}') < \epsilon$.

A fim de obter a resposta para esse último questionamento, consideramos o modelo de decaimento fuzzy

$$\begin{cases} X'_{gH} = -\lambda X, & \lambda > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (4.17)$$

e o modelo de crescimento populacional fuzzy

$$\begin{cases} X'_{gH} = \kappa X, & \kappa > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (4.18)$$

em que $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é gH-diferenciável em $(0, T)$, $T > 0$, com $[X]_{\alpha} = [x_{\alpha}^{-}, x_{\alpha}^{+}]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Analisaremos, nas Subseções 4.1.1 e 4.1.2, o modelo (4.17) quando escrito em termos da (i) e (ii)-gH-diferenciabilidade a fim de avaliar sob que circunstâncias uma solução do PVIF (4.17) fornece uma solução do PVIF sob a Ψ -derivada ou uma boa aproximação para a solução do respectivo problema. Por seguinte, faremos o mesmo processo de análise para o modelo (4.18) na Subseção 4.1.3.

4.1.1 Modelo de decaimento sob a (ii)-gH-diferenciabilidade

Seja a função fuzzy X com α -níveis $[X]_{\alpha} = [x_{\alpha}^{-}, x_{\alpha}^{+}]$, $\alpha \in [0, 1]$. Suponha que X seja (ii)-gH-diferenciável então, pela Proposição 11, $[X'_{((ii)-gH)}]_{\alpha} = [(x_{\alpha}^{+})', (x_{\alpha}^{-})']$. Assim, para $\lambda > 0$,

$$\begin{cases} X'_{((ii)-gH)} = -\lambda X \\ X(0) = X_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(x_{\alpha}^{+})', (x_{\alpha}^{-})'] = -\lambda [x_{\alpha}^{-}, x_{\alpha}^{+}] = [-\lambda x_{\alpha}^{+}, -\lambda x_{\alpha}^{-}] \\ [x_{\alpha}^{-}(0), x_{\alpha}^{+}(0)] = [(x_0)_{\alpha}^{-}, (x_0)_{\alpha}^{+}], \end{cases}$$

isto é, resolver (4.17) é equivalente a encontrar a solução do seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} (x_{\alpha}^{-})' = -\lambda x_{\alpha}^{-} \\ (x_{\alpha}^{+})' = -\lambda x_{\alpha}^{+} \\ x_{\alpha}^{-}(0) = (x_0)_{\alpha}^{-} \\ x_{\alpha}^{+}(0) = (x_0)_{\alpha}^{+} \end{cases} \quad (4.19)$$

Não é difícil verificarmos que a solução de (4.19) é $x_{\alpha}^{-}(t) = (x_0)_{\alpha}^{-} e^{-\lambda t}$ e $x_{\alpha}^{+}(t) = (x_0)_{\alpha}^{+} e^{-\lambda t}$. Assim,

$$[X(t)]_{\alpha} = [(x_0)_{\alpha}^{-} e^{-\lambda t}, (x_0)_{\alpha}^{+} e^{-\lambda t}] = e^{-\lambda t} [(x_0)_{\alpha}^{-}, (x_0)_{\alpha}^{+}] = e^{-\lambda t} [X_0]_{\alpha},$$

ou seja, a solução de (4.17) será a função $X(t) = X_0 e^{-\lambda t}$.

Agora, vamos verificar se a solução encontrada para (4.19) é também solução desse problema sob a Ψ -derivada. Com essa finalidade, faremos a decomposição da solução $X(t)$ do problema como uma soma de um valor determinístico com um valor incerto, conforme o desenvolvimento na Subseção 2.2.3.

A vantagem dessa abordagem é podermos avaliar o comportamento da parte da solução do PVIF, que está associada ao núcleo da condição inicial, sem precisarmos considerar hipóteses adicionais sob a condição inicial do problema como, por exemplo, a continuidade dos extremos dos seus α -níveis.

Com efeito, para $a = \frac{1}{2}\delta_{X_0}(1) = \frac{1}{2}((x_0)_1^- + (x_0)_1^+)$, consideremos $A = X_0 - a$ uma perturbação na condição inicial. Note que se X_0 é inicialmente um número fuzzy não-simétrico, o número fuzzy A também é não-simétrico. Neste caso, a solução X toma valores em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ uma vez que X pode ser reescrito como

$$X(t) = X_0 e^{-\lambda t} = (A + a)e^{-\lambda t} = Ae^{-\lambda t} + ae^{-\lambda t},$$

isto é,

$$X(t) = \beta(t)A + \rho(t)$$

com as funções $\beta, \rho : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\beta(t) = e^{-\lambda t}$ e $\rho(t) = ae^{-\lambda t}$.

Além disso, a assimetria de A nos garante que podemos definir o operador bijetivo $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}(1, A)$ através da relação $\Psi(\rho(t), \beta(t)) = \beta(t)A + \rho(t)$ uma vez que A não-simétrico implica que $\{1, A\}$ é FLI, conforme demonstrado em (ESMI et al., 2018). Em particular, veja que $X(t) = \Psi(\rho(t), \beta(t))$ e que β e ρ são funções diferenciáveis o que nos garante que X é Ψ -diferenciável, consonante ao verificado na Proposição 19. Como $\text{diam}(A) = \text{diam}(X_0 - a) = \text{diam}(X_0) > 0$ (pois X_0 não-simétrico implica que $X_0 \notin \mathbb{R}$) e $\beta(t)\beta'(t) = -\lambda e^{-2\lambda t} < 0$ para todo $t \in (0, T)$ então, pelo item (b) do Teorema 9, segue que a (ii)-gH-derivada de X coincide com a Ψ -derivada de X em todo $t \in (0, T)$ visto que X é uma função (ii)-gH-diferenciável em $(0, T)$. Logo, $X'_{(ii)-gH}(t) = X'(t)$ para todo $t \in (0, T)$. Dado que $X(t) = \Psi(\rho(t), \beta(t))$ segue, pela Proposição 19, que

$$-\lambda X(t) = X'_{(ii)-gH}(t) = X'(t) = \Psi(\rho'(t), \beta'(t))$$

com $X(0) = \Psi(\rho(0), \beta(0)) = \Psi(a, 1) = X_0$. Dessa forma, o modelo de decaimento sob a Ψ -derivada será

$$\begin{cases} X' = \Psi(\rho'(t), \beta'(t)) = -\lambda X = -\lambda \Psi(\rho(t), \beta(t)), & \lambda > 0, \\ X(0) = \Psi(\rho(0), \beta(0)) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Aplicando o operador inverso $\Psi^{-1} : \mathcal{S}(1, A) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ao PVIF em (4.20), encontramos o par de PVI's

$$\begin{cases} \beta'(t) = -\lambda \beta(t) \\ \beta(0) = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \rho'(t) = -\lambda \rho(t) \\ \rho(0) = a \end{cases}$$

cujas solução são, respectivamente, $\beta(t) = e^{-\lambda t}$ e $\rho(t) = ae^{-\lambda t}$. Assim, a solução X do modelo de decaimento sob a Ψ -derivada será

$$X(t) = Ae^{-\lambda t} + ae^{-\lambda t} = X_0 e^{-\lambda t}$$

que é também uma solução do PVIF dado em (4.17), o qual está escrito sob a (ii)-gH-derivada. Observe que essa conclusão corrobora com o resultado apresentado no Corolário 3.

Por fim, observe que como $\lambda > 0$ e as funções β e ρ tendem a zero quando t cresce, o desvio (*drift*) determinístico ρ tende a um estado estacionário e a incerteza $\beta(t)A$ que o circunda diminui ao longo do tempo, conforme é esperado para o fenômeno de decaimento (ver Figura 24).

Observação 17. *Uma outra forma de analisarmos o comportamento da solução é avaliar a atuação das funções que descrevem o valor médio e o diâmetro da solução X do modelo de decaimento fuzzy (4.17) quando a condição inicial é assimétrica. Com respeito ao valor médio $\frac{1}{2}\delta_X(\alpha)$ dos α -níveis da solução $X(t) = X_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, verificamos que:*

$$\frac{1}{2}\delta_{X(t)}(\alpha) = \frac{1}{2}\delta_{(e^{-\lambda t}X_0)}(\alpha) = e^{-\lambda t} \frac{\delta_{X_0}(\alpha)}{2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

que é o comportamento esperado no modelo de decaimento com valores crisp. Agora com respeito ao papel do diâmetro da solução, observamos que:

$$\text{diam}(X(t)) = \text{diam}(X_0 e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} \text{diam}(X_0) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

o que mostra que a incerteza da solução do PVIF, sob a (ii)-gH-derivada, e respectivamente pelo PVIF sob a Ψ -derivada, decresce ao longo do tempo (ver gráficos na Figura 24).

Prosseguindo, vamos avaliar o caso em que a condição inicial X_0 do modelo de decaimento em (4.17) é um número fuzzy simétrico. Para $\epsilon > 0$ arbitrário, defina o número fuzzy $\tilde{X}_0 = X_0 + (0; 0; \epsilon)$. Observe que $\tilde{X}_0$ é um número fuzzy não-simétrico e assim, a partir do que foi desenvolvido acima, determinamos uma função fuzzy $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $T > 0$, com $\tilde{X}(t) = \tilde{X}_0 e^{-\lambda t}$ tal que $\tilde{X}$ é (ii)-gH-diferenciável, pois

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_0 e^{-\lambda t} = X_0 e^{-\lambda t} + (0; 0; \epsilon) e^{-\lambda t} = X(t) + (0; 0; \epsilon) e^{-\lambda t} \quad (4.21)$$

e para funções especificamente da forma (4.21), verificamos na Observação 6 que é válida a regra de derivação da soma para a gH-derivada. Além disso, com o isomorfismo Ψ definido anteriormente por $\Psi(\rho(t), \beta(t)) = \beta(t)A + \rho(t) = \tilde{X}(t)$, com $A = \tilde{X}_0 - a$, $a = \frac{1}{2}\delta_{\tilde{X}_0}(1)$, $\beta(t) = e^{-\lambda t}$ e $\rho(t) = a e^{-\lambda t}$, teremos que $\tilde{X}$ é Ψ -diferenciável. Pelo Teorema 9, $\tilde{X}'_{((ii)-gH)} = \tilde{X}'$ pois $\beta(t)\beta'(t) = -\lambda e^{-2\lambda t} < 0$ para todo $t \in (0, T)$. Assim, obtemos um PVIF equivalente ao problema de decaimento (4.17), com o conceito de gH-derivada substituído pela Ψ -derivada, descrito por:

$$\begin{cases} \tilde{X}' = \Psi(\rho'(t), \beta'(t)) = -\lambda \tilde{X} = -\lambda \Psi(\rho(t), \beta(t)), & \lambda > 0, \\ \tilde{X}(0) = \Psi(\rho(0), \beta(0)) = \tilde{X}_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (4.22)$$

cuja solução $\tilde{X}(t) = \tilde{X}_0 e^{-\lambda t}$ é uma aproximação da solução $X(t)$ do modelo de decaimento, sob a gH-derivada, uma vez que

$$D_{\infty}(X, \tilde{X}) = \sup_{t \in [0, T]} d_{\infty}(X(t), \tilde{X}(t)) = \sup_{t \in [0, T]} [e^{-\lambda t} d_{\infty}(X_0, X_0 + (0; 0; \epsilon))] \leq d_{\infty}(0, (0; 0; \epsilon)) = \epsilon$$

e

$$D_{\infty}(X'_{((ii)-gH)}, \tilde{X}') = D_{\infty}(-\lambda X, -\lambda \tilde{X}) = \lambda D_{\infty}(X, \tilde{X}) \leq \lambda \epsilon.$$

Observação 18. Procedendo de forma análoga a análise realizada na Observação 17, agora para a solução aproximada $\tilde{X}(t) = \tilde{X}_0(t)e^{-\lambda t}$ do modelo (4.22), verificamos que o respectivo valor médio e o diâmetro são tais que

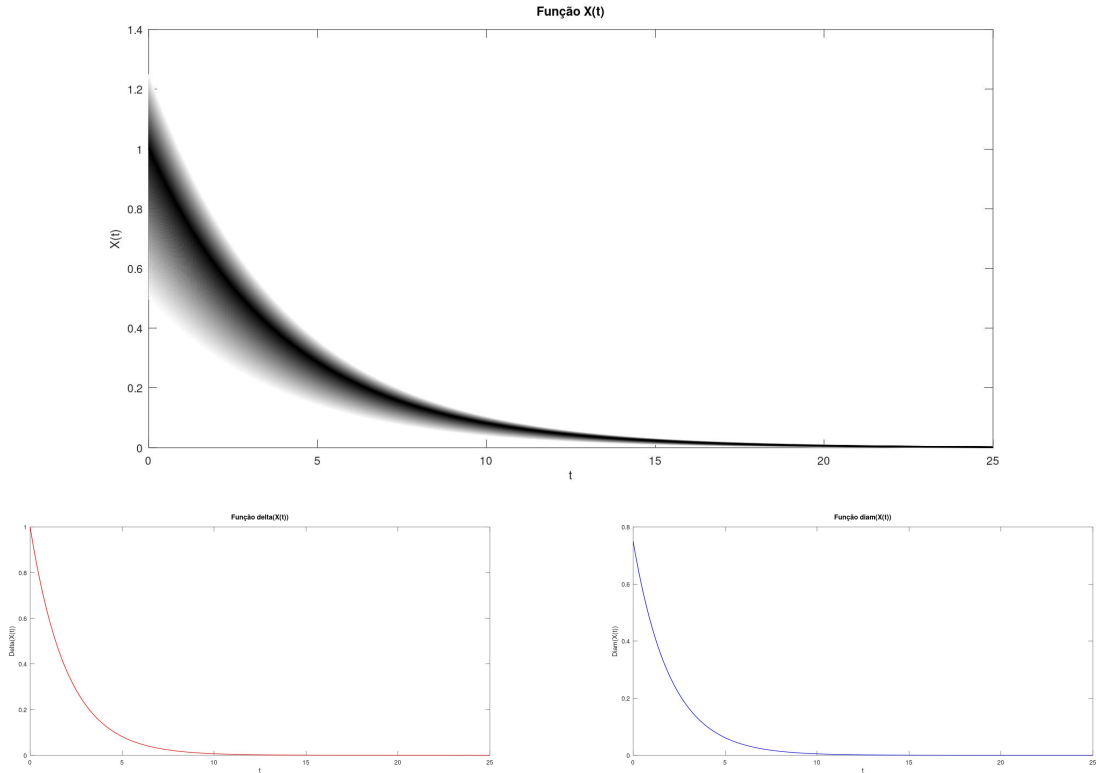
$$\frac{1}{2}\delta_{\tilde{X}(t)}(\alpha) = e^{-\lambda t} \frac{\delta_A(\alpha)}{2} = e^{-\lambda t} \left[\frac{1}{2}\delta_{X_0}(\alpha) + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\epsilon \right] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

e

$$\text{diam}(\tilde{X}(t)) = \text{diam}(e^{-\lambda t} A) = e^{-\lambda t} [(\text{diam}(X_0)) + \epsilon] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

o que condiz com o comportamento natural do modelo de decaimento.

Figura 24 – Gráfico da solução X do modelo de decaimento fuzzy (ii)-gH-diferenciável para a condição inicial $X_0 = (0.5; 1; 1.25)$ e $\lambda = 0.5$ (parte superior), gráfico do valor médio $\frac{1}{2}\delta_{X(t)}$ quando $\alpha = 1$ (inferior à esquerda) e o gráfico do diâmetro $\text{diam}(X(t))$ (inferior à direita).



Fonte: Autor.

4.1.2 Modelo de decaimento sob a (i)-gH-diferenciabilidade

Assumamos que X seja (i)-gH-diferenciável. Então, pela Proposição 11, temos que $[X'_{((i)-gH)}]_{\alpha} = [(x_{\alpha}^{-})', (x_{\alpha}^{+})']$. Assim, para $\lambda > 0$,

$$\begin{cases} X'_{((i)-gH)} = -\lambda X \\ X(0) = X_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(x_{\alpha}^{-})'(t), (x_{\alpha}^{+})'(t)] = [-\lambda x_{\alpha}^{+}(t), -\lambda x_{\alpha}^{-}(t)] \\ [x_{\alpha}^{-}(0), x_{\alpha}^{+}(0)] = [(x_0)_{\alpha}^{-}, (x_0)_{\alpha}^{+}]. \end{cases} \quad (4.23)$$

Note que o lado direito de (4.23) é um sistema de equações diferenciais bidimensional escrito em termos das funções x_α^- e x_α^+ . Uma forma de resolver esse problema é primeiro observar que sendo X uma função (i)-gH-diferenciável e $X'_{((i)-gH)} = -\lambda X$, então $X'_{((i)-gH)}$ é naturalmente (i)-gH-diferenciável e portanto a (i)-gH-derivada de segunda ordem $X''_{((i)-gH)}$ existe em todo $t \in (0, T)$. Nesse caso, teremos $X''_{((i)-gH)} = -\lambda X'_{((i)-gH)} = \lambda^2 X$. Logo,

$$\begin{aligned} \begin{cases} X'_{((i)-gH)} = -\lambda X \\ X(0) = X_0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} X''_{((i)-gH)} = \lambda^2 X \\ X(0) = X_0 \\ X'_{((i)-gH)}(0) = -\lambda X_0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} [(x_\alpha^+)''(t), (x_\alpha^-)''(t)] = [\lambda^2 x_\alpha^-(t), \lambda^2 x_\alpha^+(t)] \\ [x_\alpha^-(0), x_\alpha^+(0)] = [(x_0)_\alpha^-, (x_0)_\alpha^+] \\ [(x_\alpha^+)'(0), (x_\alpha^-)'(0)] = [-\lambda(x_0)_\alpha^+, -\lambda(x_0)_\alpha^-] \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja, os α -níveis de (4.17) podem ser escritos pelos PVI's equivalentes:

$$\begin{cases} (x_\alpha^+)' = -\lambda x_\alpha^- \\ (x_\alpha^-)' = -\lambda x_\alpha^+ \\ x_\alpha^-(0) = (x_0)_\alpha^- \\ x_\alpha^+(0) = (x_0)_\alpha^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_\alpha^-)'' = \lambda^2 x_\alpha^- \\ (x_\alpha^+)'' = \lambda^2 x_\alpha^+ \\ x_\alpha^-(0) = (x_0)_\alpha^- \text{ e } (x_\alpha^-)'(0) = -\lambda(x_0)_\alpha^+ \\ x_\alpha^+(0) = (x_0)_\alpha^+ \text{ e } (x_\alpha^+)'(0) = -\lambda(x_0)_\alpha^- \end{cases} \quad (4.24)$$

O lado direito de (4.24) são PVI's de segunda ordem cujas soluções são

$$x_\alpha^- = \frac{1}{2}(e^{-\lambda t} + e^{\lambda t})(x_0)_\alpha^- + \frac{1}{2}(e^{-\lambda t} - e^{\lambda t})(x_0)_\alpha^+$$

e

$$x_\alpha^+ = \frac{1}{2}(e^{-\lambda t} + e^{\lambda t})(x_0)_\alpha^+ + \frac{1}{2}(e^{-\lambda t} - e^{\lambda t})(x_0)_\alpha^-$$

que podem ser reescritas como

$$x_\alpha^- = (x_0)_\alpha^- \cosh(\lambda t) - (x_0)_\alpha^+ \sinh(\lambda t)$$

e

$$x_\alpha^+ = (x_0)_\alpha^+ \cosh(\lambda t) - (x_0)_\alpha^- \sinh(\lambda t).$$

Daí,

$$\begin{aligned} [X]_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+] &= [(x_0)_\alpha^- \cosh(\lambda t) - (x_0)_\alpha^+ \sinh(\lambda t), (x_0)_\alpha^+ \cosh(\lambda t) \\ &\quad - (x_0)_\alpha^- \sinh(\lambda t)] \\ &= \cosh(\lambda t)[(x_0)_\alpha^-, (x_0)_\alpha^+] + (\sinh(\lambda t))[-(x_0)_\alpha^+, -(x_0)_\alpha^-] \\ &\Downarrow \\ X(t) &= \cosh(\lambda t)X_0 + \sinh(\lambda t)(-X_0) \end{aligned}$$

é a solução do modelo de decaimento fuzzy sob a (i)-gH-derivada.

Observação 19. *Seja $\lambda > 0$. Note que*

$$\frac{1}{2e^{\lambda t}}(e^{-\lambda t} + e^{\lambda t}) = \frac{1 + e^{2\lambda t}}{2e^{2\lambda t}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{2\lambda t}}{2e^{2\lambda t}} = \frac{1}{2}$$

e que

$$\frac{1}{2e^{\lambda t}}(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) = \frac{e^{2\lambda t} - 1}{2e^{2\lambda t}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2\lambda t} - 1}{2e^{2\lambda t}} = \frac{1}{2}$$

o que significa que para $t > 0$ suficientemente grande, teremos

$$\frac{1}{2e^{\lambda t}}(e^{-\lambda t} + e^{\lambda t}) \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(e^{-\lambda t} + e^{\lambda t}) \approx \frac{1}{2}e^{\lambda t}$$

e

$$\frac{1}{2e^{\lambda t}}(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) \approx \frac{1}{2}e^{\lambda t},$$

respectivamente. Segue daí

$$\cosh(\lambda t) = \frac{1}{2}(e^{-\lambda t} + e^{\lambda t}) \approx \frac{1}{2}e^{\lambda t}$$

e

$$\sinh(\lambda t) = \frac{1}{2}(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) \approx \frac{1}{2}e^{\lambda t}.$$

Concluimos assim que quanto maior o valor $t \in (0, T)$, teremos

$$X(t) = \cosh(\lambda t)X_0 + \sinh(\lambda t)(-X_0) \approx \frac{e^{\lambda t}}{2}(X_0 - X_0),$$

ou seja, mais próximo a solução $X(t)$ estará de $(X_0 - X_0)\frac{e^{\lambda t}}{2}$. Isso significa que se X_0 é não-simétrico, o número fuzzy $X(t)$ se aproximará de um número fuzzy simétrico a medida que t cresce, visto que $X_0 - X_0$ é simétrico com respeito a 0.

Agora vamos avaliar se a solução encontrada para o modelo de decaimento em (4.17) sob a (i)-gH-diferenciabilidade é solução desse problema escrito sob a Ψ -derivada ou, assim como ocorreu na Subseção 4.1.1, essa solução é uma aproximação a solução de um PVIF sob a Ψ -derivada equivalente ao problema original.

Sejam $a = \frac{1}{2}\delta_{X_0}(1) = \frac{1}{2}((x_0)_1^- + (x_0)_1^+)$ a perturbação à condição inicial X_0 do problema. Fazendo $A = X_0 - a$ na solução $X(t) = \cosh(\lambda t)X_0 + \sinh(\lambda t)(-X_0)$ do PVIF, obtemos:

$$X(t) = \cosh(\lambda t)A + \sinh(\lambda t)(-A) + ae^{-\lambda t} \approx (A - A)\frac{e^{\lambda t}}{2} + ae^{-\lambda t} \quad (4.25)$$

para $t > 0$ suficientemente grande. Note que quanto maior o valor $t > 0$ mais próximo $X(t)$ está de $(A - A)\frac{e^{\lambda t}}{2}$. Novamente, concluimos que mesmo sendo A assimétrico, o número fuzzy $X(t)$ se aproxima de um número fuzzy simétrico a medida que t cresce, visto que $A - A$ é simétrico com respeito a 0.

Pelo Teorema 8, dado $\epsilon > 0$ existem dois números fuzzy A_1 e A_2 não-simétricos tais que $d_\infty(A, A_1) < \epsilon$, $d_\infty(-A, A_2) < \epsilon$ e $\{1, A_1, A_2\}$ é um conjunto fortemente linearmente independente.

A partir daí, a solução de (4.23) é dada por (4.25) e a gH-derivada de X podem ser aproximadas por uma função $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}(1, A_1, A_2)$ e por sua Ψ -derivada, respectivamente. Assim, considerando $\tilde{X}$ definido por

$$\tilde{X}(t) = \beta_1(t)A_1 + \beta_2(t)A_2 + \rho(t),$$

com $\beta_1(t) = \cosh(\lambda t)$, $\beta_2(t) = \sinh(\lambda t)$ e $\rho(t) = ae^{-\lambda t}$, segue pelo Teorema 9 que

$$\tilde{X}'_{gH}(t) = \tilde{X}'(t) = -\lambda\tilde{X}(t)$$

visto que $\beta_1(t)\beta_1'(t) > 0$ e $\beta_2(t)\beta_2'(t) > 0$ para todo $t \in (0, T)$. Note que $\tilde{X}$ é a solução do seguinte PVIF

$$\begin{cases} \tilde{X}'' = \lambda^2 \tilde{X} \\ \tilde{X}(0) = \Psi(a, 1, 0) = A_1 + a \quad (\approx X_0) \\ \tilde{X}'(0) = \Psi(-a\lambda, 0, \lambda) = \lambda A_2 - a\lambda \quad (\approx -\lambda X_0) \end{cases} \quad (4.26)$$

que está relacionado ao PVI dado no lado direito de (4.24). Além disso, verifica-se que

$$\begin{aligned} D_\infty(X, \tilde{X}) &= \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(X(t), \tilde{X}(t)) \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} |\cosh(\lambda t)| d_\infty(A, A_1) + |\sinh(\lambda t)| d_\infty(-A, A_2) \\ &\leq 2 \cosh(\lambda T) \epsilon \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_\infty(X'_{gH}, \tilde{X}') &= \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(X'_{gH}(t), \tilde{X}'(t)) \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(-\lambda X(t), -\lambda \tilde{X}'(t)) \\ &\leq \lambda \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(X(t), \tilde{X}'(t)) \\ &\leq 2\lambda \cosh(\lambda T) \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, a solução X do PVIF de decaimento, sob a gH-derivada, nos fornece uma solução

$$\tilde{X}(t) = \beta_1(t)A_1 + \beta_2(t)A_2 + \rho(t),$$

com $\beta_1(t) = \cosh(\lambda t)$, $\beta_2(t) = \sinh(\lambda t)$ e $\rho(t) = ae^{-\lambda t}$, que será uma aproximação à solução do PVIF

$$\begin{cases} X'' = \lambda^2 X \\ X(0) = X_0 \\ X'(0) = -\lambda X_0 \end{cases}$$

obtido a partir do modelo de decaimento em (4.24) sob a Ψ -derivada. Analisando o comportamento da parcela relativa a incerteza e ao desvio (*drift*) determinístico da solução $\tilde{X}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta_1(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} = +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta_2(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2} = +\infty\end{aligned}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} a e^{-\lambda t} = 0.$$

Daí, vemos que para o tempo crescendo as funções β_1 e β_2 aumentam seus valores indefinidamente, ou seja, a incerteza $\beta_1(t)A_1 + \beta_2(t)A_2$ cresce ao redor do desvio (*drift*) determinístico, enquanto ρ tende a um estado estacionário e isso não condiz com o comportamento esperado do fenômeno de decaimento ao longo do tempo.

Portanto, a solução $\tilde{X}$ encontrada não é adequada para fins de aproximação a uma solução do modelo de decaimento fuzzy em termos da Ψ -derivada.

Observação 20. *Note que as soluções numérica ou analítica para o modelo de decaimento fuzzy, sob a (i)-gH derivada, podem ser obtidas a partir do mesmo modelo de decaimento fuzzy sob a Ψ -derivada. Por outro lado, soluções numéricas para esse modelo também podem ser obtidas pela resolução de uma equação diferencial fuzzy de segunda ordem sob a Ψ -derivada.*

A hipótese da solução X do modelo de decaimento ser (i)-gH-diferenciável implicou que os extremos x_α^- e x_α^+ , dos seus respectivos α -níveis, são determinadas por um sistema acoplado que é equivalente a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem similar a obtida com a Ψ -derivada.

Concluimos assim que a solução

$$X(t) = \cosh(\lambda t)X_0 + \sinh(\lambda t)(-X_0)$$

do modelo de decaimento fuzzy, que é (i)-gH-diferenciável, não é consistente com o fenômeno de decaimento, pois nesse modelo espera-se que a variável de estado decaia para um estado de estabilidade o que intuitivamente significa que a incerteza decresce ao longo do tempo (ver Figura 25). Precisamente, quando calculamos o diâmetro da solução verificamos que

$$\text{diam}(X(t)) = x_0^+(t) - x_0^-(t) = e^{\lambda t} \text{diam}(X_0) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

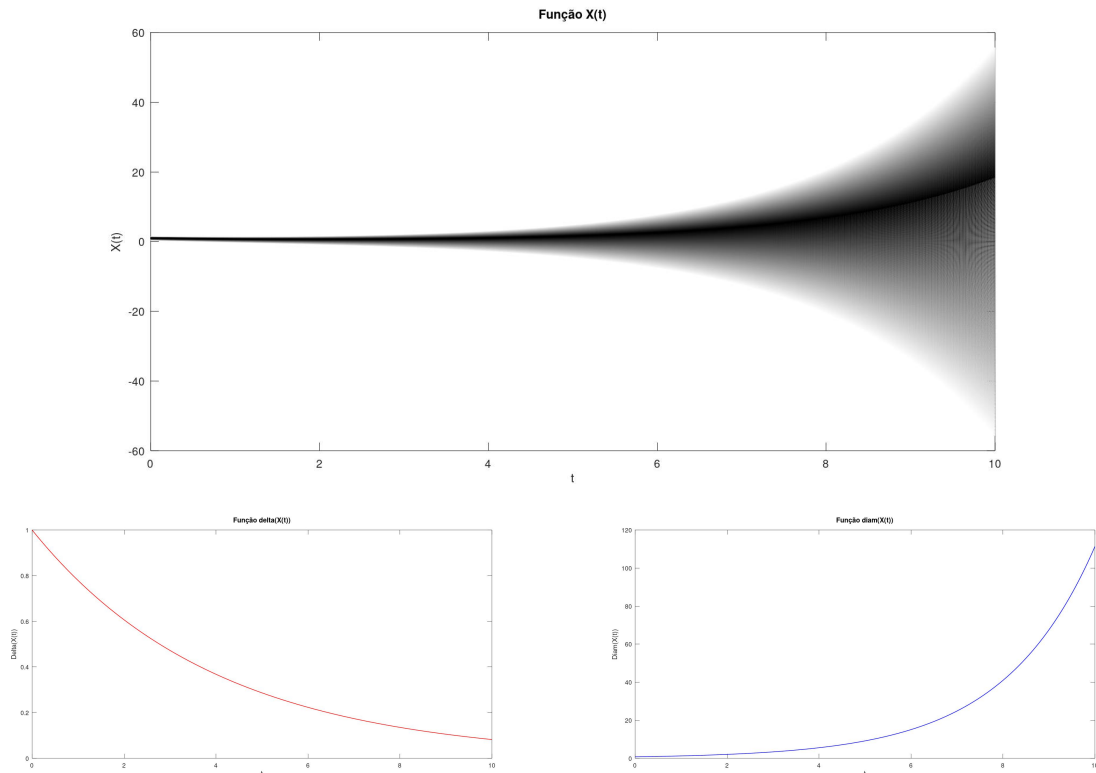
o que indica o aumento da incerteza. Logo, essa solução não é adequada para o modelo de decaimento fuzzy, apesar do seu valor médio se comportar da maneira que é esperada para

o modelo de decaimento com valores crisp:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\delta_{X(t)}(\alpha) &= \cosh(\lambda t)\frac{1}{2}\delta_{X_0}(\alpha) + \sinh(\lambda t)\frac{1}{2}\delta_{(-X_0)}(\alpha) \\
 &= (\cosh(\lambda t) - \sinh(\lambda t))\frac{1}{2}\delta_{X_0}(\alpha) \\
 &= \left(\frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} - \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2}\right)\frac{1}{2}\delta_{X_0}(\alpha) \\
 &= e^{-\lambda t}\frac{\delta_{X_0}(\alpha)}{2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.
 \end{aligned}$$

Além disso, essa inconsistência é também observada no fato de que obtemos uma EDF de segunda ordem sob a Ψ -derivada para produzir soluções numéricas para uma EDF de primeira ordem sob a gH -derivada.

Figura 25 – Gráfico da solução X do modelo de decaimento fuzzy (i)- gH -diferenciável para condição inicial $X_0 = (0.5; 1; 1.25)$ e $\lambda = 0.5$ (parte superior), gráfico do valor médio $\frac{1}{2}\delta_{X(t)}$ quando $\alpha = 1$ (parte inferior à esquerda) e o gráfico do diâmetro $\text{diam}(\bar{X}(t))$ (parte inferior à direita).



Fonte: Autor.

4.1.3 Modelo de crescimento populacional sob a gH -diferenciabilidade

- 1) Sejam a função fuzzy X e os seus respectivos α -níveis $[X]_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$. Suponha que o modelo de crescimento dado em (4.18) esteja sob a (i)- gH -diferenciabilidade.

Então,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} X'_{((i)-gH)} = \kappa X, & \kappa > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} & \iff \begin{cases} [(x_{\alpha}^{-})', (x_{\alpha}^{+})'] = \kappa[x_{\alpha}^{-}, x_{\alpha}^{+}] \\ [(x_{\alpha}^{-})(0), (x_{\alpha}^{+})(0)] = \kappa[(x_0)_{\alpha}^{-}, (x_0)_{\alpha}^{+}] \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} (x_{\alpha}^{\pm})' = \kappa x_{\alpha}^{\pm} \\ (x_{\alpha}^{\pm})(0) = (x_0)_{\alpha}^{\pm} \end{cases} \\
 & \iff x_{\alpha}^{\pm}(t) = (x_0)_{\alpha}^{\pm} e^{\kappa t} \\
 & \iff X(t) = X_0 e^{\kappa t}.
 \end{aligned}$$

Se X_0 é não-simétrico, então $\{X_0\}$ é FLI e assim $\Psi(\beta(t)) = \beta(t)X_0$ define um isomorfismo $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}(X_0)$. Em particular, para $\beta(t) = e^{\kappa t}$, temos $\Psi(\beta(t)) = e^{\kappa t}X_0 = X(t)$ e assim X é Ψ -diferenciável pela Proposição 19. Além disso, como $\beta(t)\beta'(t) = \kappa e^{2\kappa t} > 0$ e X é uma função (i)-gH-diferenciável então, pelo Teorema 9,

$$X'(t) = X'_{((i)-gH)}(t) = \kappa X(t)$$

para todo $t \in (0, T)$. Como $\Psi(\beta'(t)) = X'(t)$ e $\Psi(e^{\kappa t}) = e^{\kappa t}X_0 = X(0)$, então X é também solução do PVIF, sob a Ψ -derivada, descrito por

$$\begin{cases} X'(t) = \Psi(\beta'(t)) = \kappa \Psi(\beta(t)) = \kappa X(t) \\ X(0) = \Psi(1) = X_0. \end{cases}$$

Logo, a solução X do PVIF, sob a (i)-gH-derivada, é também solução do modelo de crescimento populacional, mas sob a Ψ -derivada.

Agora, caso X_0 seja simétrico, basta fazer o processo análogo ao realizado no caso em que a condição inicial é simétrica no modelo de decaimento e na qual a solução X é (ii)-gH-diferenciável. Efetivamente, fazendo a substituição de $-\lambda$ por κ obteremos a solução $\tilde{X}$ de um PVIF, sob a Ψ -derivada, que satisfaz $D_{\infty}(X, \tilde{X}) \leq \epsilon$ e $D_{\infty}(X'_{((i)-gH)}, \tilde{X}') \leq \epsilon\kappa$ para algum $\epsilon > 0$ dado.

As soluções $X(t)$ e $\tilde{X}(t)$ encontradas para os casos em que X_0 é simétrico e não-simétrico, respectivamente, se comportam da maneira esperada para o modelo de crescimento populacional malthusiano uma vez que o valor médio da solução encontrada aumenta ao longo do tempo, isto é,

$$\frac{1}{2}\delta_{X(t)}(\alpha) = \delta_{(e^{\kappa t}X_0)}(\alpha) = e^{\kappa t} \frac{\delta_{X_0}(\alpha)}{2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty,$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\delta_{\tilde{X}(t)}(\alpha) &= \frac{1}{2}\delta_{(X(t)+e^{\kappa t}(0;0;\epsilon))}(\alpha) = \frac{1}{2}\delta_{(e^{\kappa t}X_0)}(\alpha) + \frac{1}{2}\delta_{(e^{\kappa t}(0;0;\epsilon))}(\alpha) \\
 &= \frac{e^{\kappa t}}{2}[\delta_{X_0}(\alpha) + (1-\alpha)\epsilon] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty,
 \end{aligned}$$

conforme esperado no modelo clássico de crescimento populacional com valores *crisp* e o seus diâmetros

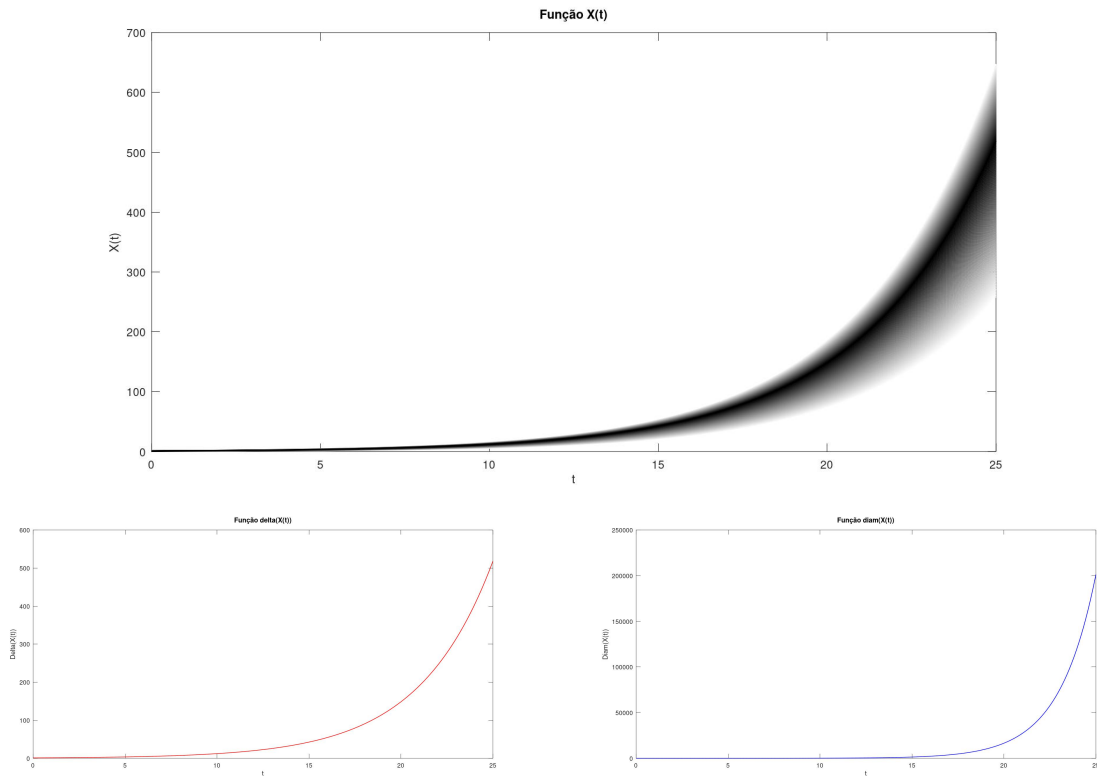
$$\text{diam}(X(t)) = \text{diam}(X_0 e^{\kappa t}) = e^{\kappa t} \text{diam}(X_0) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty,$$

e

$$\begin{aligned} \text{diam}(\tilde{X}(t)) &= \text{diam}(X(t) + e^{\kappa t}(0; 0; \epsilon)) = \text{diam}(X_0 e^{\kappa t}) + \epsilon e^{\kappa t} \\ &= e^{\kappa t}[\text{diam}(X_0) + \epsilon] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

o que mostra que o valor da incerteza da solução do PVIF, tanto sob a (i)-gH-derivada como sob a Ψ -derivada, crescem ao longo do tempo, independente da condição inicial, conforme esperado para esse tipo de fenômeno (Ver gráficos na Figura 26).

Figura 26 – Gráfico da solução X do modelo de crescimento fuzzy (i)-gH-diferenciável para a condição inicial $X_0 = (0.5; 1; 1.25)$ e $\lambda = 0.5$ (parte superior), gráfico do valor médio $\delta_{X(t)}$ para $\alpha = 1$ (parte inferior à esquerda) e o gráfico do diâmetro $\text{diam}(X(t))$ (parte inferior à direita).



Fonte: Autor.

2) Suponha que o modelo de crescimento populacional dado em (4.18) esteja sob a

(ii)-gH-diferenciabilidade. Então:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} X'_{((ii)-gH)} = \kappa X, & \kappa > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} [(x_{\alpha}^+)', (x_{\alpha}^-)'] = \kappa[x_{\alpha}^-, x_{\alpha}^+] \\ [(x_{\alpha}^-)(0), (x_{\alpha}^+)(0)] = [(x_0)_{\alpha}^-, (x_0)_{\alpha}^+] \end{cases} \\
 & \Rightarrow \begin{cases} [(x_{\alpha}^-)'', (x_{\alpha}^+)'] = \kappa[(x_{\alpha}^+)', (x_{\alpha}^-)'] = \kappa^2[x_{\alpha}^-, x_{\alpha}^+] \\ [(x_{\alpha}^-)(0), (x_{\alpha}^+)(0)] = [(x_0)_{\alpha}^-, (x_0)_{\alpha}^+] \\ [(x_{\alpha}^-)'(0), (x_{\alpha}^+)'(0)] = \kappa[(x_0)_{\alpha}^-, (x_0)_{\alpha}^+] \end{cases} \\
 & \Rightarrow \begin{cases} (x_{\alpha}^{\pm})'' = \kappa^2 x_{\alpha}^{\pm} \\ (x_{\alpha}^{\pm})(0) = (x_0)_{\alpha}^{\pm} \\ (x_{\alpha}^{\pm})'(0) = \kappa(x_0')_{\alpha}^{\mp} \end{cases}
 \end{aligned}$$

o que nos fornece

$$x_{\alpha}^-(t) = \cosh(\kappa t)(x_0)_{\alpha}^- + \sinh(\kappa t)(x_0)_{\alpha}^+$$

e

$$x_{\alpha}^+(t) = \cosh(\kappa t)(x_0)_{\alpha}^+ + \sinh(\kappa t)(x_0)_{\alpha}^-.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 [X(t)]_{\alpha} &= [x_{\alpha}^-, x_{\alpha}^+] \\
 &= [\cosh(\kappa t)(x_0)_{\alpha}^- + \sinh(\kappa t)(x_0)_{\alpha}^+, \cosh(\kappa t)(x_0)_{\alpha}^+ \\
 &\quad + \sinh(\kappa t)(x_0)_{\alpha}^-] \\
 &= \cosh(\kappa t)[(x_0)_{\alpha}^-, (x_0)_{\alpha}^+] + \sinh(\kappa t)[(x_0)_{\alpha}^-, (x_0)_{\alpha}^+]
 \end{aligned}$$

Como $X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ então $(x_0)_{\alpha}^- \leq (x_0)_{\alpha}^+$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Logo, a fim de que $[X(t)]_{\alpha}$ represente os α -níveis de um número fuzzy é necessário que $(x_0)_{\alpha}^- = (x_0)_{\alpha}^+$, ou seja, a condição inicial é um valor *crisp* $X_0 \in \mathbb{R}$. Segue daí que

$$\begin{aligned}
 [X(t)]_{\alpha} &= [\cosh(\kappa t)X_0 + \sinh(\kappa t)X_0, \cosh(\kappa t)X_0 \\
 &\quad + \sinh(\kappa t)X_0] \\
 &\Downarrow \\
 X(t) &= X_0[\cosh(\kappa t) + \sinh(\kappa t)] \\
 &= X_0 e^{\kappa t}.
 \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que X é (ii)-gH-diferenciável o modelo de crescimento populacional se reduz ao caso clássico do modelo malthusiano com valores *crisp*. Em particular, todos os PVIF, sob a gH-derivada ou Ψ -derivada, representam o mesmo problema e portanto têm a mesma solução.

Na próxima seção, apresentaremos as conclusões obtidas a partir do estudo dos modelos de decaimento e crescimento populacional fuzzy apresentados nas Subseções

4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3, a fim de obtermos uma resposta à pergunta: quais são as condições ou hipóteses que a solução do PVIF, sob a gH-derivada, deve satisfazer para que ela também seja solução do PVIF sob a Ψ -derivada ou que seja aproximação?

4.2 Condições suficientes para a solução de um PVIF-gH ser solução de um PVIF- Ψ e de um PVI n -dimensional

O nosso objetivo nesta Seção é, a partir dos modelos apresentados nas Subseções 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3, a de generalizar as conclusões obtidas. Para simplificarmos as referências aos PVIF's, sob a gH-derivada e Ψ -derivada, abreviaremos a notação desses problemas escrevendo simplesmente PVIF-gH e PVIF- Ψ , respectivamente.

Conclusões sob as soluções do modelo de decaimento fuzzy

No PVIF-gH de decaimento fuzzy as soluções respectivas nos forneceram soluções para o PVIF- Ψ ou para uma das suas formas aproximadas. No entanto, somente em um dos casos de gH-diferenciabilidade obtemos soluções consistentes ou que são adequadas ao comportamento esperado no fenômeno de decaimento. Quando X é uma solução (ii)-gH-diferenciável do PVIF-gH, a condição inicial $X_0 = X(0)$ sob o problema nos levará a dois casos:

- i) se $X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é não-simétrico e $X'_{((ii)-gH)}(t) = X'(t)$ para todo $t \in (0, T)$, então a solução $X(t) = X_0 e^{-\lambda t}$ do PVIF-gH será também uma solução do PVIF- Ψ , via isomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ dado por $\Psi(\rho(t), \beta(t)) = \beta(t)A + \rho(t)$ em que $A = X_0 - a$ e $a = \frac{1}{2}\delta_{X_0}(1)$;
- ii) se $X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é simétrico, então existe uma função fuzzy $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ construída a partir de uma aproximação à solução $X(t) = X_0 e^{-\lambda t}$ do PVIF-gH, a qual será Ψ -diferenciável e solução de um PVIF- Ψ , equivalente ao problema de decaimento fuzzy, com isomorfismo Ψ idêntico ao dado no caso i).

Note que a condição inicial do PVIF-gH induz o isomorfismo Ψ e portanto ele caracteriza o PVIF- Ψ . Assim, a natureza da condição inicial que nos indica se a solução do PVIF-gH sob a (ii)-gH-derivada é uma solução do PVIF- Ψ ou uma aproximação de um problema equivalente sob a Ψ -diferenciabilidade.

Agora, quando o problema de decaimento é (i)-gH-diferenciável, a solução encontrada para o PVIF-gH não tem o comportamento condizente com o que se espera do fenômeno. A solução da EDF nessa situação apresenta aumento de incerteza ao longo do tempo em contraste com o seu valor médio, que diminui ao longo do tempo como é esperado para o modelo de decaimento. Ademais, a situação contraditória para essa

solução é também observada quando se obtém um sistema acoplado sob a Ψ -derivada produzindo soluções numéricas para a EDF de primeira ordem sob a (i)-gH-derivada.

Conclusões sob as soluções do modelo de crescimento populacional fuzzy

No PVIF-gH de crescimento populacional, sob a (i)-gH-diferenciabilidade, foi obtida uma solução equivalente a do PVIF- Ψ quando a condição inicial é um número fuzzy assimétrico, e uma aproximação a do PVIF- Ψ quando a condição inicial é um número simétrico. Em contrapartida, o PVIF-gH sob a (ii)-gH-diferenciabilidade nos leva a uma forma degenerada do PVIF fazendo com que a incerteza seja eliminada do modelo.

Note que assim como ocorreu no modelo de decaimento, a condição inicial do problema determinou a forma como o isomorfismo do problema equivalente (ou aproximado) foi construído. As conclusões feitas acima nos indicam que dado um PVIF-gH, dependendo do tipo de gH-diferenciabilidade, podemos encontrar um PVIF- Ψ equivalente cuja solução é a mesma para o caso da condição inicial assimétrica ou a solução é uma aproximação para o caso da condição inicial simétrica.

Sendo assim, podemos enunciar um resultado que estabelece as condições necessárias a fim de que solução obtida de um PVIF-gH seja solução de um PVIF- Ψ equivalente. Em particular, como os PVIF que foram tratados são de maneira geral funções $F : [0, T] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ da forma $F(t, X) = f(t)X + g(t)$ com condição inicial $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, o resultado que apresentamos a seguir se limita a esse caso.

Teorema 14. *Seja $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $T > 0$, uma função fuzzy gH-diferenciável. Suponha que X seja uma solução do PVIF sob a gH-derivada:*

$$\begin{cases} X'_{gH}(t) = f(t)X(t) + g(t) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (4.27)$$

em que $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e f não muda de sinal em $[0, T]$. Então, ocorre um dos seguintes casos:

- (i) Se X é (i)-gH-diferenciável e $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$, então existem funções $\rho, \beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis em $(0, T)$ e um número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ tais que X é aproximado uniformemente por uma função fuzzy $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ Ψ -diferenciável definida por

$$\tilde{X}(t) = \rho(t) + \beta(t)A$$

em que $\tilde{X}_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$, $\beta(t)\beta'(t) \geq 0$ e que é solução do PVIF sob a Ψ -derivada:

$$\begin{cases} \tilde{X}' = \Psi(\rho'(t), \beta'(t)) = \Psi(F(t, \rho, \beta)) \\ \tilde{X}(0) = \Psi(\rho(0), \beta(0)) = \tilde{X}_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}, \end{cases}$$

em que $F : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(ii) Se X é (ii)-gH-diferenciável e $f(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, T]$, então existem funções $\rho, \beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis em $(0, T)$ e um número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ tais que X é aproximado uniformemente por uma função fuzzy $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ Ψ -diferenciável definida por

$$\tilde{X}(t) = \rho(t) + \beta(t)A$$

em que $\tilde{X}_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$, $\beta(t)\beta'(t) \leq 0$ e que é solução do PVIF sob a Ψ -derivada:

$$\begin{cases} \tilde{X}' = \Psi(\rho'(t), \beta'(t)) = \Psi(F(t, \rho, \beta)) \\ \tilde{X}(0) = \Psi(\rho(0), \beta(0)) = \tilde{X}_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}, \end{cases}$$

em que $F : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Demonstração. Vamos provar o caso em que X é (i)-gH-diferenciável, a demonstração para o caso em que X é (ii)-gH-diferenciável é similar. Sejam $[X]_{\alpha} = [x_{\alpha}^{-}, x_{\alpha}^{+}]$ os α -níveis da solução X da equação $X'_{((i)-gH)}(t) = f(t)X(t) + g(t)$ do PVIF dado em (4.27). Então, $[X'_{((i)-gH)}]_{\alpha} = [(x_{\alpha}^{-})', (x_{\alpha}^{+})']$ e

$$[(x_{\alpha}^{-})', (x_{\alpha}^{+})'] = [f(t)x_{\alpha}^{-} + g(t), f(t)x_{\alpha}^{+} + g(t)] \Rightarrow (x_{\alpha}^{\pm})' = f(t)x_{\alpha}^{\pm} + g(t).$$

Com a condição inicial $x_{\alpha}^{\pm}(0) = (x_{\alpha}^{\pm})_0$ aplicada à solução da EDO linear $(x_{\alpha}^{\pm})' = f(t)x_{\alpha}^{\pm} + g(t)$, obtemos:

$$x_{\alpha}^{\pm}(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \left[\left(\int_0^t g(u) \exp\left(-\int_0^u f(s)ds\right) du + (x_{\alpha}^{\pm})_0 \right) \right].$$

Logo,

$$X(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \int_0^t g(u) \exp\left(-\int_0^u f(s)ds\right) du + \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) X_0. \quad (4.28)$$

Se X_0 é não-simétrico, então defina o número fuzzy não-simétrico $A = X_0 - a$ com $a = \frac{1}{2}\delta_{X_0}(1)$. Assim, a solução X obtida acima pode ser reescrita como:

$$X(t) = \rho(t) + \beta(t)A$$

em que $\rho, \beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções definidas por

$$\rho(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \left(a + \int_0^t g(u) \exp\left(-\int_0^u f(s)ds\right) du \right) \quad (4.29)$$

e

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right). \quad (4.30)$$

Agora, defina a aplicação $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ como $\Psi(p, q) = p + qA$. Note que Ψ é um isomorfismo uma vez que $\{1, A\}$ é FLI e que $\Psi(\rho(t), \beta(t)) = X(t)$. Além disso, a continuidade das funções f e g em $[0, T]$ garante que ρ e β são funções diferenciáveis

em $(0, T)$ e assim X é Ψ -diferenciável devido a Proposição 19. Como $\text{diam}(A) > 0$ e $\beta(t)\beta'(t) = f(t) \exp\left(2 \int_0^t f(s)ds\right) \geq 0$ para todo $t \in (0, T)$, segue pelo Corolário 3 que $X'_{((i)-gH)}(t) = X'(t)$ em $t \in (0, T)$. Em particular, $X'_{((i)-gH)}(t) = \rho'(t) + \beta'(t)A$ e assim a solução X do PVIF-gH em (4.27) é também solução do PVIF- Ψ descrito por:

$$\begin{cases} X' = \Psi(\rho'(t), \beta'(t)) = \rho'(t) + \beta'(t)A = X'_{((i)-gH)} = f(t)X(t) + g(t), & f(t) \geq 0, \\ X(0) = \Psi(\rho(0), \beta(0)) = \Psi(a, 1) = a + A = X_0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Aplicado o operador inverso $\Psi^{-1} : \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ao PVIF dado em (4.31) encontramos os PVI's:

$$\begin{cases} (\rho'(t), \beta'(t)) = \Psi^{-1}(f(t)X(t) + g(t)) \\ (\rho(0), \beta(0)) = (a, 1). \end{cases} \quad (4.32)$$

Uma vez que $f(t)X(t) + g(t) = f(t)X(t) +_{\Psi} g(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(f(t)X(t) + g(t)) &= \Psi^{-1}(f(t)X(t) +_{\Psi} g(t)) \\ &= \Psi^{-1}[\Psi(f(t)\Psi^{-1}(X(t)) + g(t)\Psi^{-1}(1))] \\ &= f(t)(\rho(t), \beta(t)) + g(t)(1, 0) \end{aligned}$$

E assim os PVI's em (4.32) nos fornecem duas EDOs lineares, com as suas respectivas condições iniciais,

$$\begin{cases} \rho'(t) = f(t)\rho(t) + g(t) \\ \rho(0) = a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \beta'(t) = f(t)\beta(t) \\ \beta(0) = 1 \end{cases}$$

cujas soluções são exatamente

$$\rho(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \left(a + \int_0^t g(u) \exp\left(-\int_0^u f(s)ds\right) du\right)$$

e

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right).$$

Isso significa que a solução do PVIF sob a (i)-gH-derivada é também solução do mesmo PVIF escrito sob a Ψ -derivada.

Suponha agora que X_0 seja um número fuzzy simétrico. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, o número fuzzy $\tilde{X}_0 = X_0 + \tilde{\epsilon}$, com $\tilde{\epsilon} = (0; 0; \epsilon)$, é não-simétrico. Para $a = \frac{1}{2}\delta_{X_0}(1)$, o número fuzzy $\tilde{A} = \tilde{X}_0 - a$ é também não-simétrico. A partir da solução X do PVIF em (4.28), defina a função fuzzy $\tilde{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ por

$$\tilde{X}(t) = \rho(t) + \beta(t)\tilde{A} = X(t) + \tilde{\epsilon}\beta(t)$$

com as expressões das funções ρ e β dadas em (4.29) e (4.30), respectivamente. Note que $\tilde{X}$ é (i)-gH-diferenciável e que $\tilde{X}'_{((i)-gH)}(t) = X'_{((i)-gH)}(t) + \tilde{\epsilon}\beta'(t) = f(t)X(t) + g(t) + \tilde{\epsilon}\beta'(t)$.

Por outro lado, $\{1, \tilde{A}\}$ é um conjunto FLI e assim a aplicação $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}(\tilde{A})}$, definida por $\Psi(p, q) = p + q\tilde{A}$, é um isomorfismo. Como $\tilde{X}(t) = \Psi(\rho(t), \beta(t))$ e ρ e β são diferenciáveis em $(0, T)$, então $\tilde{X}$ é Ψ -diferenciável e $\tilde{X}'(t) = \rho'(t) + \beta'(t)\tilde{A}$ para todo $t \in (0, T)$. Uma vez que $\text{diam}(\tilde{A}) > 0$ e $\beta(t)\beta'(t) > 0$ em todo $t \in (0, T)$, decorre que $\tilde{X}'_{((i)-gH)}(t) = \tilde{X}'(t)$ para todo $t \in (0, T)$.

Agora, veja que

$$\tilde{X}'(t) = f(t)X(t) + g(t) + \underbrace{\tilde{\epsilon} \beta'(t)}_{f(t)\beta(t)} = f(t) \underbrace{(X(t) + \tilde{\epsilon}\beta(t))}_{\tilde{X}(t)} + g(t) = f(t)\tilde{X}(t) + g(t)$$

e daí concluímos que $\tilde{X}$ é solução do PVIF, sob a Ψ -derivada,

$$\begin{cases} \tilde{X}'(t) = \Psi(\rho'(t), \beta'(t)) = f(t)\tilde{X}(t) + g(t), & f(t) \geq 0, \\ \tilde{X}(0) = \Psi(\rho(0), \beta(0)) = \Psi(a, 1) = a + \tilde{A} = \tilde{X}_0. \end{cases}$$

Aplicando o operador inverso $\Psi^{-1} : \mathbb{R}_{\mathcal{F}(\tilde{A})} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ao PVIF acima, obtemos os PVI's:

$$\begin{cases} \rho'(t) = f(t)\rho(t) + g(t) \\ \rho(0) = a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \beta'(t) = f(t)\beta(t) \\ \beta(0) = 1 \end{cases}$$

cujas soluções são exatamente as obtidas no caso em que X_0 é não-simétrico. Por fim, observamos que:

$$\begin{aligned} D_\infty(X, \tilde{X}) &= \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(X(t), \tilde{X}(t)) = \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(X(t), X(t) + \tilde{\epsilon}\beta(t)) \\ &= \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(0, \tilde{\epsilon}\beta(t)) \\ &= \epsilon \sup_{t \in [0, T]} \left[\exp \left(\int_0^t f(s) ds \right) \right] \\ &= \epsilon \exp \left(\int_0^T f(s) ds \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_\infty(\tilde{X}', X'_{((i)-gH)}) &= \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(\tilde{X}'(t), X'_{((i)-gH)}(t)) = \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(f(t)\tilde{X}(t) + g(t), f(t)X(t) \\ &\quad + g(t)) \\ &= \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(f(t)\tilde{X}(t), f(t)X(t)) \\ &= \sup_{t \in [0, T]} [|f(t)| d_\infty(\tilde{X}(t), X(t))] \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} |f(t)| \cdot \sup_{t \in [0, T]} d_\infty(\tilde{X}(t), X(t)) \\ &= M\epsilon \exp \left(\int_0^T f(s) ds \right) \end{aligned}$$

em que $M = \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|$. Daí, concluímos que a solução do PVIF-gH nos fornece uma solução uniformemente próxima de um PVIF- Ψ o qual é uma aproximação ao PVIF-gH original com a gH-derivada substituída pela Ψ -derivada. $\square$

Sejam $\beta_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, T > 0, i = 1, \dots, n$ funções diferenciáveis em $(0, T)$ e $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ a função fuzzy definida por

$$X(t) = \beta_1(t)A_1 + \dots + \beta_n(t)A_n \quad (4.33)$$

em que $\{A_1, \dots, A_n\}$ é um subconjunto FLI de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Ao longo deste capítulo, relembremos que um PVIF- Ψ está diretamente relacionado a um PVI n -dimensional, em que n é a dimensão da imagem do operador $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}(A_1, \dots, A_n)$. Mais precisamente, vimos que os coeficientes β_i de uma solução da forma (4.33) são as soluções de um PVI n -dimensional.

Por seguinte, mostramos, sob algumas condições, que uma solução da forma (4.33) de um PVIF- Ψ pode também ser solução desse PVIF escrito sob a gH-derivada. Apresentamos também as condições sob as quais uma solução $X(t)$, dada por (4.33), de um certo PVIF-gH é solução ou é uma aproximação da solução de um PVIF- Ψ ou, sob outra perspectiva, quando a solução de um PVIF-gH é aproximada pela solução de um PVIF- Ψ cujo aspecto é similar ao dado em (4.33).

Resta a nós conectarmos a solução de um PVIF-gH diretamente as soluções de um PVI n -dimensional para fecharmos de certa forma o ciclo de equivalências, sem precisarmos necessariamente nos ater a resolução do PVIF sob a Ψ -derivada. Em particular, estabeleceremos a relação entre a solução de um PVIF-gH cujo campo é descrito por $X'_{gH}(t) = f(t)X + g(t)$ com a solução de n PVI's descritos por meio de um sistema de EDO's lineares de primeira ordem.

Teorema 15. *Sejam $\{1, A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um conjunto fortemente linearmente independente e $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, T > 0$, uma função fuzzy gH-diferenciável definida por*

$$X(t) = \beta_0(t) + \beta_1(t)A_1 + \dots + \beta_n(t)A_n$$

em que $\beta_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis em $(0, T)$ com $i = 0, 1, \dots, n$. Considere $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $[0, T]$.

(i) *Se $\beta_i(t)\beta'_i(t) > 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$ nos quais $\text{diam}(A_i) > 0$, então o PVIF*

$$\begin{cases} X'_{gH}(t) = f(t)X(t) + g(t), f(t) > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (4.34)$$

é equivalente ao PVI n -dimensional

$$\begin{cases} \beta'_i(t) = f(t)\beta_i(t) + g(t) \\ \beta_i(0) = (\beta_i)_0 \end{cases}$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

(ii) *Se $\beta_i(t)\beta'_i(t) < 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$ nos quais $\text{diam}(A_i) > 0$, então o PVIF*

$$\begin{cases} X'_{gH}(t) = f(t)X(t) + g(t), f(t) < 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (4.35)$$

é equivalente ao PVI n -dimensional

$$\begin{cases} \beta'_i(t) = f(t)\beta_i(t) + g(t) \\ \beta_i(0) = (\beta_i)_0 \end{cases}$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Vamos provar o primeiro caso, o segundo é análogo. Para isto, considere a aplicação $\Psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n)$ definida por

$$\Psi(p_0, p_1, \dots, p_n) = p_0 + p_1 A_1 + \dots + p_n A_n.$$

Então, da Proposição 19 segue que $X(t) = \Psi(\beta_0(t), \beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ é Ψ -diferenciável, pois as funções $\beta_i, i = 0, 1, \dots, n$, são diferenciáveis. Além disso,

$$X'(t) = \Psi(\beta'_0(t), \beta'_1(t), \dots, \beta'_n(t)) = \beta'_0(t) + \beta'_1(t)A_1 + \dots + \beta'_n(t)A_n.$$

Como $\beta(t)\beta'(t) > 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$ para os quais $\text{diam}(A_i) > 0$, então

$$X'_{((i)-gH)}(t) = X'(t) = \beta'_0(t) + \beta'_1(t)A_1 + \dots + \beta'_n(t)A_n.$$

Denotando $\beta_i(0) = (\beta_i)_0$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$, teremos que $X(0) = (\beta_0)_0 + (\beta_1)_0 A_1 + \dots + (\beta_n)_0 A_n$ e assim,

$$\begin{cases} X'_{((i)-gH)}(t) = f(t)X(t) + g(t), \quad f(t) > 0, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \beta'_0(t) + \beta'_1(t)A_1 + \dots + \beta'_n(t)A_n = f(t)(\beta_0(t) + \beta_1(t)A_1 + \dots + \beta_n(t)A_n) + g(t), \\ \beta_0(0) + \beta_1(0)A_1 + \dots + \beta_n(0)A_n = (\beta_0)_0 + (\beta_1)_0 A_1 + \dots + (\beta_n)_0 A_n. \end{cases}$$

Como $\{1, A_1, \dots, A_n\}$ é um conjunto FLI, segue que

$$\begin{cases} \beta'_0(t) + \beta'_1(t)A_1 + \dots + \beta'_n(t)A_n = f(t)(\beta_0(t) + \beta_1(t)A_1 + \dots + \beta_n(t)A_n) + g(t), \\ \beta_0(0) + \beta_1(0)A_1 + \dots + \beta_n(0)A_n = (\beta_0)_0 + (\beta_1)_0 A_1 + \dots + (\beta_n)_0 A_n. \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \beta'_0(t) = f(t)\beta_0(t) + g(t) \\ \beta_0(0) = (\beta_0)_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \beta'_i(t) = f(t)\beta_i(t) \\ \beta_i(0) = (\beta_i)_0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n,$$

o que prova a equivalência entre um PVIF sob a gH -derivada e um PVI n -dimensional sob as condições impostas. $\square$

5 Considerações Finais

No início deste trabalho propusemos estabelecer relações a fim de que a gH-derivada e a Ψ -derivada de uma função fuzzy f coincidissem em espaços de Banach construídos a partir de um conjunto fortemente linearmente independente de números fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Além disso, propusemos analisar as condições a fim de que pudéssemos aproximar funções arbitrárias gH-diferenciáveis de funções Ψ -diferenciáveis, com respeito métrica uniforme de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, para assim então obter soluções de problemas de valor inicial fuzzy sob a ótica dessas derivadas.

Verificamos que as conexões entre a gH-derivada e a Ψ -derivada de uma função fuzzy f , da forma

$$f(x) = p_1(x)A_1 + \cdots + p_n(x)A_n, \quad (5.1)$$

ocorrem por meio do estudo do sinal do produto das funções coeficientes p_i por suas derivadas de primeira ordem p'_i . Mostramos no Teorema 9 que analisar os coeficientes p_i de f é suficiente para determinar se a gH-derivada e a Ψ -derivada da função f , dada em (5.1), coincidem quando f é (i) ou (ii)-gH-diferenciável. Ainda mais, o valor do sinal de $p_i p'_i$ é condição suficiente para f ser gH-diferenciável e sua gH-derivada coincidir com a sua Ψ -derivada como foi provado no Teorema 10.

Exibimos um conjunto de números fuzzy fortemente linearmente independente $\{1, A_1, \dots, A_n\}$ no Lema 1 e no Teorema 12 verificamos que ele tem propriedade similar a um conjunto denso enumerável em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$, no sentido que todo número fuzzy $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$ é aproximado arbitrariamente por elementos $B \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n)$. A partir daí, concluímos no Teorema 13 que toda função fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_c}$, continuamente diferenciável e sem *switch points*, é aproximada uniformemente por uma função g cuja imagem está em $\mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n)$ e vale o mesmo para a gH-derivada de f e para a respectiva Ψ -derivada de g .

Aplicamos os resultados do Teorema 9 na resolução de problemas de valor inicial fuzzy ao mostrar que toda solução de um PVIF- Ψ da forma (5.1) é solução PVIF sob a gH-derivada, conforme estabelecido no Corolário 3 e aplicado aos Exemplos 31 e 32.

Em seguida, investigamos a partir de modelos de decaimento e crescimento populacional, com condição inicial fuzzy, as condições para que a solução de um PVIF, sob a gH-derivada, seja a mesma ou aproxime a solução do PVIF sob a Ψ -derivada.

Vimos que sob a (ii)-gH-diferenciabilidade a solução do decaimento nos fornece a solução sob a Ψ -diferenciabilidade, enquanto na (i)-gH-diferenciabilidade a solução do crescimento populacional é a mesma sob a Ψ -diferenciabilidade. Em ambos os casos, a condição inicial ser um número fuzzy não-simétrico foi essencial para a solução do PVIF-gH corresponder uma solução do PVIF- Ψ .

Verificamos que quando a condição inicial dos PVIF-gH de decaimento e crescimento populacional era simétrica, ainda sim era possível obter soluções aproximadas para os mesmos modelos sob a perspectiva da Ψ -diferenciabilidade.

A partir desses modelos explorados nas Subseções 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3, no Teorema 13 pudemos obter condições fracas para a partir das soluções do PVIF-gH encontrar ou aproximar soluções do PVIF- Ψ , conforme o Teorema 14.

Por fim, no Teorema 15, foram estabelecidas condições para se obter soluções de Problemas de Valor Inicial em $\mathbb{R}^n$ a partir de PVIF-gH cujas soluções são da forma (5.1).

Os seguintes resultados constituem a nossa contribuição teórica e prática para Teoria Fuzzy. O sentido prático é expresso pela contribuição à pesquisa de métodos de obtenção de soluções analítica (ou numéricas) de problemas de valor inicial fuzzy.

O sentido teórico da contribuição se relaciona ao Cálculo Fuzzy, para funções fuzzy da forma (5.1), ao garantir que a análise das funções coeficientes é uma condição necessária e suficiente para avaliar a existência de gH-derivadas e, além disso, expressá-las a partir de suas Ψ -derivadas.

Apesar desses resultados positivos, convém considerar (ou melhor, expor) as limitações da pesquisa, mostrando as dificuldades encontradas para o desenvolvimento do trabalho e como elas afetaram os resultados.

Inicialmente, o candidato a uma solução de um PVIF-gH de 1ª ordem é obtido pelos α -níveis da EDF associada, e estes por terem que satisfazer as condições do Teorema do Empilhamento implicam em um PVIF-gH sempre associado a dois sistemas bidimensionais de equações diferenciais: um gerado pela (i)-gH-diferenciabilidade e outro pela (ii)-gH-diferenciabilidade. Quando cada uma das equações do sistema depender apenas das funções x_α^- ou x_α^+ , o sistema se reduz a uma EDO linear, geralmente simples de resolver, como se verifica nas Subseções 4.1.1 e 4.1.3 caso 1).

No entanto, no PVIF de 1ª ordem, o sistema obtido em cada equação depende mutualmente tanto de x_α^- como x_α^+ , então pode acabar em alguns casos associada a uma EDO de segunda ordem, isto é, um sistema acoplado, similar ao obtido com a Ψ -derivada, como foi visto na Subseção 4.1.2. Em alguns casos, os sistemas de equações diferenciais determinado por x_α^- e x_α^+ se degeneram ao caso *crisp*, conforme foi mostrado na Subseção 4.1.1 caso 2).

Independentemente do que ocorra, sempre é possível obter uma solução para o PVIF- Ψ a partir do PVIF-gH, mas será necessário considerar o comportamento das mesmas para se verificar se elas agem de acordo com o que se espera do fenômeno estudado. Ao fazermos essa análise, concluímos que as soluções encontradas para o modelo de decaimento e crescimento populacional fuzzy não são consistentes com o comportamento esperado

do fenômeno, uma vez que no de decaimento uma das soluções encontradas aumenta sua incerteza ao longo do tempo, e no crescimento populacional a incerteza pode ser nula quanto maior a população e isso contraria a concepção natural de cada modelo.

Outro obstáculo é a existência de *switch points* no domínio de definição do PVIF, uma vez que isso obrigatoriamente “separa” a equação diferencial fuzzy em duas partes gerando assim duas soluções locais para esse modelo, conforme verificado no Exemplo 32. No exemplo, a Ψ -diferenciabilidade nos fornece uma solução ao modelo logístico linearizado, com condição inicial incerta, que na verdade é solução de dois PVIF’s, sob a gH-derivada, do mesmo modelo mas em intervalos distintos. Assim, concluímos que se resolvermos o PVIF:

$$\begin{cases} X'_{gH} = rX \odot_{\Psi} \left(1 - \frac{1}{K}X\right) \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{S}(1, A_1, \dots, A_n) \end{cases}$$

para $t \in [0, T], T > 0$, supondo que X é (i)-gH-diferenciável ou (ii)-gH-diferenciável não encontraremos uma solução global do PVIF, apenas soluções restritas aos intervalos $[0, \bar{t}]$ e $[\bar{t}, T]$ onde em $\bar{t}$ ocorre o *switch point* da EDF $X'_{gH} = rX \odot_{\Psi} \left(1 - \frac{1}{K}X\right)$. Esse comportamento é o oposto do que aconteceu para os modelos de decaimento sob a (ii)-gH-diferenciabilidade ou de crescimento populacional sob a (i)-gH-diferenciabilidade.

Considerando tudo que foi exposto, compreendemos que a teoria aqui desenvolvida, relacionando os conceitos de gH-derivada e Ψ -derivada e que permitiu avaliar a gH-diferenciabilidade de uma função da forma (5.1) e posteriormente calcular gH-derivadas a partir de Ψ -derivadas, apenas baseado no conceito de independência linear forte, é uma contribuição importante à área da Teoria Fuzzy e, em especial, ao estudo de métodos e técnicas para a resolução de PVIF sob a gH-derivada.

Em particular, o projeto de tese de doutorado aqui apresentado teve como resultado direto o artigo intitulado “*Some connections between the generalized Hukuhara derivative and the fuzzy derivative based on strong linear independence*” com número de manuscrito INS-D-22-3089R1, e que foi publicado no volume 643 da *Information Sciences* em setembro de 2023, o qual pode ser consultado em doi.org/10.1016/j.ins.2023.119249.

Por fim, concluímos esse trabalho observando que como essa teoria ainda é incipiente mais estudos e investigações são necessários para estabelecer resultados para uma classe geral de equações diferenciais fuzzy, além daqueles apresentados nos Teoremas 14 e 15 e, sendo assim, nos permitimos deixar algumas sugestões para futuras pesquisas sob o tema:

- No Capítulo 3, especificamente nos Lema 1 e Teorema 12, a proposta de construção dos coeficientes p_i do número fuzzy $B = p_0A_0 + p_1A_1 + \dots + p_nA_n$ que aproxima $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}_C}$ poderia ser alterada por outras abordagens e comparadas ao método

aqui exposto, verificando se as estimativas de erro de aproximação são menores. Dentre as abordagens de construção de coeficientes poderíamos utilizar a estrutura de espaço de Banach de $\mathcal{S}(A_0, A_1, \dots, A_n)$ para muni-lo de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Psi$, transformando-o num Espaço de Hilbert, e assim explorar naturalmente os coeficientes de Fourier $p_i = \langle A, A_i \rangle_\Psi / \|A_i\|_\Psi^2$ para determinar a aproximação B .

- Em vez das gH-derivadas, considerar outras derivadas fuzzy existentes como, por exemplo, a derivada interativa definida em (BARROS; PEDRO, 2017), a qual no próprio artigo é comparada a gH-derivada no problema de decaimento fuzzy (Exemplo 7.2). Outros exemplos de derivadas fuzzy desenvolvidas ao longo das últimas cinco décadas, e que se pode avaliar se vale a pena ou não as comparar a Ψ -derivada, são apresentadas em (MAZANDARANI; XIU, 2021).

Referências

- ALLAN, G. *Introduction to Banach spaces and algebras*. [S.l.]: Oxford University Press, 2001. Citado na página 18.
- ANASTASSIOU, G. A.; GAL, S. On a fuzzy trigonometric approximation theorem of weierstrasstype. *JOURNAL OF FUZZY MATHEMATICS*, 2001. Citado na página 36.
- ARIANI, F.; ENDRA, R. Y. Implementation of fuzzy inference system with tsukamoto method for study programme selection. In: *International Conference on Engineering and Technology Development (ICETD)*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado na página 87.
- BAN, A.; BEDE, B. Cross product of lr fuzzy numbers and applications. *Anal. Univ. Oradea, fasc. math*, v. 9, p. 95–108, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- _____. Power series of fuzzy numbers with cross product and applications to fuzzy differential equations. *Journal of Concrete & Applicable Mathematics*, v. 4, n. 2, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- _____. Properties of the cross product of fuzzy numbers. *Journal of Fuzzy Mathematics*, INTERNATIONAL FUZZY MATHEMATICS INSTITUTE, v. 14, n. 3, p. 513, 2006. Citado na página 41.
- BARROS, L.; BASSANEZI, R. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Campinas, São Paulo: Editora UNICAMP, 2006. Citado na página 18.
- BARROS, L. C.; GOMES, L. T.; TONELLI, P. A. Fuzzy differential equations: An approach via fuzzification of the derivative operator. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 230, p. 39 – 52, 2013. Citado na página 19.
- BARROS, L. C.; PEDRO, F. S. Fuzzy differential equations with interactive derivative. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier North-Holland, Inc., Amsterdam, The Netherlands, v. 309, p. 64–80, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 134.
- BEDE, B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. 1. ed. Berlin: Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2013. (295). Citado 17 vezes nas páginas 25, 27, 28, 30, 33, 34, 35, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 47, 53 e 70.
- BEDE, B.; FODOR, J. Product type operations between fuzzy numbers and their applications in geology. *Acta Polytechnica Hungarica*, v. 3, n. 1, p. 123–139, 2006. Citado na página 42.
- BEDE, B.; GAL, S. G. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 151, n. 3, p. 581–599, 2005. Citado na página 53.
- _____. Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability. *Communications in Mathematical Analysis*, Mathematical Research Publishers, v. 9, n. 2, p. 22–41, 2010. Citado na página 53.

- BEDE, B.; STEFANINI, L. Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 230, p. 119–141, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 46.
- CECCONELLO, M.; DORINI, F. A.; HAESER, G. On fuzzy uncertainties on the logistic equation. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 328, p. 107–121, 2017. Citado na página 20.
- CHALCO-CANO, Y.; RODRÍGUEZ-LÓPEZ, R.; JIMÉNEZ-GAMERO, M.-D. Characterizations of generalized differentiable fuzzy functions. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 295, p. 37–56, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- CHALCO-CANO, Y.; ROMÁN-FLORES, H.; JIMÉNEZ-GAMERO, M.-D. Fuzzy differential equation with p-derivative. In: CITESEER. *IFSA/EUSFLAT Conf.* [S.l.], 2009. p. 703–706. Citado na página 19.
- DIAMOND, P.; KLOEDEN, P. Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis. In: DUBOIS, D.; PRADE, H. (Ed.). *Fundamentals of Fuzzy Sets*. [S.l.]: Springer US, 2000, (The Handbooks of Fuzzy Sets Series, v. 7). p. 583–641. Citado 4 vezes nas páginas 27, 43, 44 e 45.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*. [S.l.]: Academic Press, 1980. v. 144. Citado na página 18.
- _____. Fuzzy numbers: an overview. *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, Elsevier, p. 112–148, 1993. Citado na página 36.
- ERCEG, M. A. Metric spaces in fuzzy set theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 69, n. 1, p. 205–230, 1979. Citado na página 43.
- ESMI, E.; BARROS, L. C. de; PEDRO, F. S.; LAIATE, B. Banach spaces generated by strongly linearly independent fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 417, p. 110–129, 2021. Citado 7 vezes nas páginas 56, 57, 58, 59, 60, 61 e 65.
- ESMI, E.; LAIATE, B.; PEDRO, F. S.; BARROS, L. C. Calculus for fuzzy functions with strongly linearly independent fuzzy coefficients. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, p. 1–31, 2021. Citado na página 55.
- _____. Calculus for fuzzy functions with strongly linearly independent fuzzy coefficients. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 436, p. 1–31, 2022. Citado 5 vezes nas páginas 20, 21, 68, 70 e 100.
- ESMI, E.; PEDRO, F. S.; BARROS, L. C. de; LODWICK, W. Fréchet derivative for linearly correlated fuzzy function. *Information Sciences*, Elsevier, v. 435, p. 150–160, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 19, 55, 56, 63 e 113.
- FULLÉR, R.; KERESZTFALVI, T. On generalization of nguyen’s theorem. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 41, n. 3, p. 371–374, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- GAL, S. G. Linear continuous functionals on fn-type spaces. *arXiv preprint arXiv:1407.7898*, 2014. Citado na página 36.
- GOO, Y. H.; PARK, J. S. On the continuity of the zadeh extensions. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, v. 20, n. 4, p. 525–525, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.

- GUPTA, M. M.; NISHIDA, T. *Advances in fuzzy clustering and its applications*. [S.l.]: John Wiley Sons, 2008. Citado na página 18.
- HUANG, H. Some notes on zadeh's extensions. *Information Sciences*, Elsevier, v. 180, n. 19, p. 3806–3813, 2010. Citado na página 34.
- HUKUHARA, M. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj*, v. 10, n. 3, p. 205–223, 1967. Citado na página 37.
- JANG, J.-S. R. Anfis: adaptive-network-based fuzzy inference system. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, IEEE, v. 23, n. 3, p. 665–685, 1993. Citado na página 18.
- KALEVA, O. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 24, n. 3, p. 301 – 317, 1987. Citado na página 19.
- KAUFMANN, A.; GUPTA, M. M. *Fuzzy mathematical models in engineering and management science*. [S.l.]: Elsevier, 1985. Citado na página 18.
- KELLEY, W.; PETERSON, A. *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative*. New York, NY, USA: Springer, 2010. Citado na página 52.
- KLIR, G. J.; YUAN, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995. Citado na página 18.
- _____. Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications. *Possibility Theory versus Probab. Theory*, v. 32, n. 2, p. 207–208, 1996. Citado na página 25.
- LAIATE, B.; WATANABE, R. A.; ESMI, E.; PEDRO, F. S.; BARROS, L. C. A cross product of $\mathcal{S}$ -linearly correlated fuzzy numbers. In: IEEE. *2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. [S.l.], 2021. p. 1–6. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 63.
- LONGO, F.; LAIATE, B.; PEDRO, F. S.; ESMI, E.; BARROS, L. C.; MEYER, J. F. A-cross product for autocorrelated fuzzy processes: the hutchinson equation. In: SPRINGER. *Explainable AI and Other Applications of Fuzzy Techniques: Proceedings of the 2021 Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS 2021*. [S.l.], 2022. p. 241–252. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 108.
- LUPULESCU, V.; O'REGAN, D. A new derivative concept for set-valued and fuzzy-valued functions. differential and integral calculus in quasilinear metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, 2020. Citado na página 19.
- LUPULESCU, V. On a class of fuzzy functional differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 160, n. 11, p. 1547–1562, 2009. Citado na página 53.
- MARKOV, S. On quasilinear spaces of convex bodies and intervals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 162, n. 1, p. 93–112, 2004. Citado na página 19.
- MAZANDARANI, M.; PARIZ, N.; KAMYAD, A. V. Granular differentiability of fuzzy-number-valued functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 26, n. 1, p. 310–323, 2017. Citado na página 19.

- MAZANDARANI, M.; XIU, L. A review on fuzzy differential equations. *IEEE Access*, IEEE, v. 9, p. 62195–62211, 2021. Citado na página 134.
- NEGOITA, C. V.; RALESCU, D. A. *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*. 1. ed. Basel: Birkhäuser Basel, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- NGUYEN, H. T. A note on the extension principle for fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications*, Academic Press, v. 64, n. 2, p. 369–380, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- PAL, N. R.; BEZDEK, J. C. On cluster validity for the fuzzy c-means model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 3, n. 3, p. 370–379, 1995. Citado na página 18.
- PURI, M. L.; RALESCU, D. A. Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 91, n. 2, p. 552–558, 1983. Citado 3 vezes nas páginas 37, 43 e 53.
- RUDIN, W. et al. *Principles of mathematical analysis*. [S.l.]: McGraw-hill New York, 1976. v. 3. Citado na página 86.
- SALGADO, S.; FERREIRA, L.; PIRES, D. M.; VELOZO, F. A. Fuzzy differential equation in a rl-type circuit. *Int J Adv Appl Math Mech*, v. 6, n. 1, p. 43–48, 2018. Citado na página 19.
- SEIKKALA, S. On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 24, n. 3, p. 319 – 330, 1987. Citado na página 19.
- SELASE, A. E.; XING, C.; AGBADZE, O. K.; THOMPSON, B. E. The general overview of the phrase ‘fuzzy logic’. *International Journal of Engineering, Management and Sciences*, v. 2, n. 5, p. 68–73, 2015. Citado na página 23.
- SHEN, Y. Calculus for linearly correlated fuzzy number-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 429, p. 101–135, 2022. Citado na página 19.
- STEFANINI, L. A generalization of hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 161, n. 11, p. 1564–1584, 2010. Citado na página 37.
- STEFANINI, L.; BEDE, B. Generalized hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 71, n. 3-4, p. 1311–1328, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 37, 46 e 49.
- TSUKAMOTO, H. An approach to fuzzy reasoning method. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 1–13, 1984. Citado na página 87.
- WANG, L.-X.; MENDEL, J. M. Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, v. 22, n. 6, p. 1414–1427, 1992. Citado na página 18.
- WU, C.; SONG, S.; LEE, E. S. Approximate solutions, existence, and uniqueness of the cauchy problem of fuzzy differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 202, n. 2, p. 629–644, 1996. Citado na página 53.

ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338 – 353, 1965. Citado 3 vezes nas páginas 18, 23 e 24.

ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information sciences*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 199–249, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 33.