



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

GABRIELA SCAVAZINI DA SILVA DE OLIVEIRA

**A Difusão Evolutiva de um Material Impactante
em um Meio Fluvial: a modelagem e a
simulação numérica de um estudo de caso no
Rio das Mortes, MT**

Campinas

2023

Gabriela Scavazini da Silva de Oliveira

**A Difusão Evolutiva de um Material Impactante em um
Meio Fluvial: a modelagem e a simulação numérica de um
estudo de caso no Rio das Mortes, MT**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada.

Orientador: João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Coorientador: André Krindges

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Gabriela Scavazini da Silva de Oliveira e orientada pelo Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4d Oliveira, Gabriela Scavazini da Silva de, 1995-
A difusão evolutiva de um material impactante em um meio fluvial : a modelagem e a simulação numérica de um estudo de caso no Rio das Mortes, MT / Gabriela Scavazini da Silva de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: João Frederico da Costa Azevedo Meyer.

Coorientador: André Krindges.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Modelagem matemática. 2. Método dos elementos finitos. 3. Impacto ambiental. 4. Ecologia matemática. 5. Análise numérica. I. Meyer, João Frederico da Costa Azevedo, 1947-. II. Krindges, André, 1978-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: The dynamics of environmental impact in a medium-sized river : modeling and numerical simulation of a case study for the Rio das Mortes river, MT

Palavras-chave em inglês:

Mathematical modeling

Finite element method

Environmental impact

Mathematical ecology

Mathematical modeling

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestra em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

João Frederico da Costa Azevedo Meyer [Orientador]

José Carlos Rubianes Silva

Gesivaldo dos Santos Silva

Data de defesa: 02-06-2023

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0007-9496-2882>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/9503274544046908>

**Dissertação de Mestrado defendida em 02 de junho de 2023 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER

Prof(a). Dr(a). JOSÉ CARLOS RUBIANES SILVA

Prof(a). Dr(a). GESIVALDO DOS SANTOS SILVA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Dedico este trabalho ao meu avô Eurides(in memoriam),
ao ditchan Altino(in memoriam) e a todas as pessoas que
me fizeram, fazem e ainda vão me fazer sorrir.*

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram para a conclusão desta etapa e que estarão presentes nas muitas outras que estão por vir. Início meus agradecimentos em uma ordem cronológica.

Primeiramente, quero agradecer aos meus pais, Adibe Antônio e Lucineia Clozza, e minhas irmãs, Paulina e Fabiane. Sem vocês, jamais teria chegado onde estou. Vocês são a minha base em tudo na vida. Agradeço por cada palavra de apoio e carinho que recebi durante todos esses anos, espero um dia poder retribuir tudo o que fizeram e fazem por mim.

Em seguida, agradeço aos meus professores desde a pré-escola até o ensino médio. Vocês sempre buscaram incentivar meus estudos, mesmo diante de um sistema educacional falho e da falta de apoio dos nossos governantes. Parablenizo cada um de vocês por fazerem a educação acontecer em nosso país.

Um agradecimento especial vai para meus professores da graduação, com quem tive a oportunidade de me encontrar recentemente e compartilhar um pouco do que tenho feito desde que me formei na UFMT em 2017.

Também agradeço aos meus colegas de trabalho, que me ensinaram muito sobre o processo de ensino-aprendizagem e a importância de dedicar uma atenção especial aos estudantes do ensino fundamental e médio. Durante esses anos de trabalho, ministrei aulas para diversos alunos, mas alguns se tornaram especialmente próximos e queridos. Quero mencionar Kevin, que esteve ao meu lado ao longo de todos esses anos, e a todos os outros alunos que acompanham minha vida pelas redes sociais e me apoiam nas escolhas que tenho feito.

Aos meus amigos de Nova Nazaré, que mesmo à distância, me apoiaram. Márcia, Claudiane, Joicielly, Denise, Luiz, Rafael, Mari, João Neto, Vitin, Kênia e Wilmar, cada um de vocês carrega um abraço apertado meu. Em especial quero agradecer a você Elson, que se fez presente em minha vida por muito tempo, partilhamos bons momentos juntos, muito obrigada por me incentivar a seguir nos estudos. Não poderia deixar de mencionar Alice, Ana Luiza e Anna Sophia, as meninas mais lindas que conheço. Vocês brilharão muito.

Agradeço aos meus queridos cunhados, André e Chicão. Vocês trazem muita felicidade aos meus dias. Obrigada por cada mensagem recebida em momentos totalmente aleatórios, que arrancaram sorrisos de onde eu nem imaginava que fosse possível.

Agora, um agradecimento mais do que especial ao meu orientador, querido

Joni, você é a pessoa mais incrível que já conheci. Agradeço por cada palavra de incentivo e motivação, por me ouvir nos momentos mais difíceis e desesperadores. Sei que enfrentei muitas dificuldades ao longo desses 2 anos e meio de mestrado, mas você sempre tentou me motivar e tornar possível a realização de cada sonho. Muito obrigada, Professor Doutor João Frederico da Costa Azevedo Meyer. Nunca se esqueça do quão incrível você se faz ser.

Agradeço a paciência do professor André por me aceitar como orientada, mesmo sabendo que não tomo café, não bebo cerveja e não como pimenta e coentro (essas são palavras dele). Muito obrigada, professor André, por sua coorientação, sua ajuda foi fundamental na elaboração da parte final do trabalho. Nada disso seria possível sem você.

Agradeço ao meu amigo e professor Geraldinho por me hospedar e ajudar durante minha estadia temporária em Cuiabá. Não tenho palavras para descrever o quanto sou grata a você.

Quero agradecer também a todos os funcionários da UFMT. Vocês estiveram ao meu lado em momentos muito importantes. Muito obrigada, professor Moiseis, por alegrar minhas manhãs no Laboratório de Inteligência Artificial e Matemática Aplicada com sua simplicidade e simpatia.

Um agradecimento especial a todos os meus amigos, em especial: Natália, Beatriz Akiria, Luana, Vitor Hugo, José Manuel Samo, Erivaldo, Alexandre e Rafaella. Aos meus queridos amigos do Laboratório de Biomatemática, Marcelo, Ana Isabel, Fernando Gomes e Michele, com vocês tive a oportunidade de aprender muitas coisas e compartilhar boas risadas.

Agradeço também às minhas grandes amigas: Miliene Rodrigues, Bárbara, Beatriz Imauchi e Joice Gomes. Obrigada por tudo, por me ouvirem em todos os momentos, principalmente nesta reta final. Agradeço por cada festinha e momento de descontração. Isso foi crucial para que eu terminasse essa etapa mais do que feliz. Obrigada, Mili e Babi, por cada lanchinho que trouxeram para mim no IMECC. Vocês são perfeitas! Mili, obrigada por me ouvir em cada ligação, em momentos de alegria e tristeza. Você foi minha base nos últimos tempos, a família que eu precisava para me apoiar. Você se tornou uma irmã para mim.

Agradeço aos meus professores do IMECC, em especial: Aurelio, Cristhian, Sandra, Maicon e Wilson. Seus ensinamentos foram fundamentais para a escolha e desenvolvimento da minha pesquisa.

Gostaria de agradecer a toda a equipe do IMECC pelo apoio técnico e à secretaria de pós-graduação. Vocês nos ajudaram em tudo o que estava e não estava ao alcance de vocês. Muito obrigada por me ouvirem e responderem meus e-mails fora de hora. Imagino o quanto dei trabalho a vocês.

Quero agradecer alguém que surgiu nesta reta final e ocupou um espaço imenso

no meu coração. Alguém não menos especial e extremamente importante. Fernando Cherchiglia, muito obrigada por cada palavra de amor e carinho. Seu sorriso desperta uma emoção em mim que é impossível descrever. Amar é incrível, mas saber que alguém te ama tanto quanto você o ama é ainda melhor. Obrigada, meu namorado.

Existem dois bebês na minha vida que são parte de todos os meus sonhos, Ninja e Farofa, vocês são a base da minha inspiração em querer fazer do mundo um lugar melhor, em acreditar que meus sonhos podem se tornar realidade. Vocês não sabem ler, mas eu não poderia jamais deixar de agradecer os meus pets, amo vocês!

Por fim, agradeço à Universidade Federal de Mato Grosso, à Universidade Estadual de Campinas e ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica. Vocês fazem parte de tudo isso em minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

*Creio nos risos e nas lágrimas
como antídotos contra o ódio e o terror.
(Charles Chaplin)*

Resumo

A pesquisa apresentada é uma contribuição para o Grupo de Biomatemática da UNICAMP, com foco no Grupo de Ecologia Matemática que trabalha com problemas relacionados à poluição e impactos ambientais. O objetivo principal é criar um instrumento algorítmico pra poder simular a difusão evolutiva de um material impactante em um meio fluvial. Um estudo de caso é apresentado, estudando um trecho do Rio das Mortes localizado no estado de Mato Grosso, com a extensão de aproximadamente 10km. Foram usadas técnicas de modelagem e simulação numérica com o uso do Método dos Elementos Finitos, o que inclui a formulação variacional do problema, sua discretização com o método de Galerkin via elementos finitos de primeira ordem para discretização espacial e Crank-Nicolson para a discretização temporal. As conclusões podem ser inferidas a partir da análise dos resultados obtidos na simulação numérica de diversos cenários e das discussões realizadas ao longo da dissertação.

Palavras-chave: modelagem matemática, impacto ambiental, método de elementos finitos e ecologia matemática.

Abstract

The presented research is a contribution to the effort of the Biomathematics Group at UNICAMP, with a focus on the Mathematical Ecology Group with problems related to pollution and environmental impacts. The main objective is to address the evolutionary diffusion of an environmental impact in medium-sized river, using as case study a part of the Rio das Mortes river, located in the state of Mato Grosso, with an extension of approximately 10km. Modeling and numerical simulation techniques for approximating weak solutions in the presented case study, used the Finite Element Method, including the variational formulation of the problem, discretizing space variables using Galerkin's method via first-order finite elements for spatial discretization and Crank-Nicolson for temporal discretization. Conclusions can be inferred from the analysis of the results obtained in the numerical simulation and from the discussions of several scenarios carried out throughout the dissertation.

Keywords: mathematical modeling, finite element method, environmental impact and mathematical ecology.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Mapa do Brasil e do estado de Mato Grosso.	17
Figura 2 – Bacia do Rio Araguaia no Estado de Mato Grosso.	18
Figura 3 – Rio das Mortes e seus afluentes.	19
Figura 4 – Mapa do local de estudo.	21
Figura 5 – Imagens do local.	22
Figura 6 – Fronteira.	25
Figura 7 – Passos para resolução do problema.	28
Figura 8 – Malha ampliada.	38
Figura 9 – Perfil de velocidade de entrada do Rio da Mortes rotacionado.	39
Figura 10 – Entrada do domínio com o campo de velocidades.	40
Figura 11 – Campo de velocidades: via Navier-Stokes.	40
Figura 12 – Campo de velocidades: via Navier-Stokes, na entrada do córrego.	41
Figura 13 – Transformação afim.	41
Figura 14 – Pontos selecionados para análise.	43
Figura 15 – Concentração de poluente ao longo do tempo para o cenário 1.	44
Figura 16 – Cenário 1: 150 dias.	44
Figura 17 – Cenário 1: poluição inicial e final.	45
Figura 18 – Cenário 1: destaque na região da mineradora.	46
Figura 19 – Concentração de poluente ao longo do tempo para o cenário 2.	47
Figura 20 – Cenário 2: 150 dias.	47
Figura 21 – Cenário 2: poluição inicial e final.	48
Figura 22 – Cenário 2: destaque na região da ilha.	48
Figura 23 – Cenário 2: destaque no córrego e no ribeirão Antártico.	49
Figura 24 – Como obter a velocidade máxima.	54

Lista de tabelas

Tabela 1 – Trabalhos realizados pelo grupo de Biomatemática utilizando o método de elementos finitos (MEF)	23
Tabela 2 – Parâmetros dos cenários.	42

Sumário

1	Introdução	15
2	Delimitação do Problema	17
2.1	O local de estudo	17
2.2	Grupo Biomatemática	22
3	Modelo Clássico	24
3.1	Equação de Difusão-Advecção	24
3.2	Equação de Navier-Stokes	27
4	Formulação Variacional	28
5	Discretização da Equação de Difusão-advecção	31
5.1	Discretização Espacial	31
5.2	Discretização Temporal	34
5.3	Estabilidade Numérica	35
6	Resultados Numéricos	37
6.1	Discretização do domínio e perfil de velocidade de entrada	37
6.2	Análise e construção dos resultados	41
7	Considerações Finais e trabalhos futuros	50
	Referências	52
	APÊNDICE A Perfil de Velocidade	54
	APÊNDICE B Código Fonte	57

1 Introdução

O constante desenvolvimento da ciência traz diversas contribuições para a sociedade, sejam elas positivas ou negativas. Desde a pré-história e até quando o ser humano descobriu como chegar à lua, os conhecimentos tiveram incomensuráveis avanços. Estamos em um período em que a corrida tecnológica proporciona um crescimento econômico fundamental para a humanidade. Assim como é um fato aceito que essa ciência pode trazer vários benefícios, como a produção de mais alimentos, geração de empregos, criação de vacinas em tempo recorde, desenvolvimento de energias sustentáveis, também é verdade que devemos nos atentar ao fato de que todas essas contribuições geram uma infinidade de problemas, como a poluição ambiental, a poluição por irradiações de materiais radioativos descartados, efeitos de toda a ordem como consequências de guerras, um brutal desequilíbrio econômico, enfim, uma grande número de resultados desastrosos e de duradouros efeitos para a sociedade e para a natureza.

É importante pensar que a ciência e a tecnologia têm que assumir um papel fundamental na contenção de todos esses impactos, bem como na construção e, no geral, na reconstrução de um ambiente saudável para toda a sociedade e para a natureza. Na tentativa de conter e de amenizar tais impactos ambientais, o presente trabalho tem como objetivo criar instrumentos matemáticos e computacionais que permitam fazer estudos sobre determinados locais em que se acredita que a emissão de poluentes gerados pelos seres humanos, tanto na agricultura, pecuária, turismo e extração de minérios, pode levar a contaminação dos rios e todo o seu ecossistema que ali habita.

Neste sentido, faz-se necessário o uso de algumas ferramentas muito importantes para a análise de problemas reais, que no caso, são as Equações Diferenciais. Segundo [Bassanezi e Ferreira Jr. \(1988\)](#) é um recurso utilizado para a modelagem de problemas reais e que podem ser simplificada nos seguintes passos: experimentação (coleta dos dados), abstração (montagem do modelo), resolução (análise dos dados), validação (comparação do modelo obtido com os dados reais), modificação (necessária, caso a aproximação obtida não seja o esperado) e aplicação (o modelo está apto a ser aplicado em outros locais/situações).

Sendo assim, o problema a ser estudado tem como ferramenta Equações Diferenciais Parciais (EDP) que, de acordo com [Bassanezi e Ferreira Jr. \(1988\)](#), são muito utilizadas em problemas da Física Matemática e da Biomatemática. Usando como principais referências os trabalhos de [Krindges \(2011\)](#), [Wolmuth \(2009\)](#) e [Silva \(2022\)](#), fizemos um estudo de caso sobre o Rio das Mortes localizado no Estado de Mato Grosso e analisamos quais os impactos de um poluente neste local.

Com exceção da introdução, este trabalho está dividido em 5 capítulos, em

que no primeiro capítulo fazemos uma breve explicação sobre o problema e o local o qual será estudado, apresentamos também alguns trabalhos relevantes para o desenvolvimento desta pesquisa. Em seguida, no segundo temos o modelo clássico, com as equações que serão utilizadas e suas respectivas condições de contorno. Depois fazemos a formulação variacional do problema para então aplicar o método de Galerkin, via elementos finitos de primeira ordem, para discretização espacial e Crank-Nicolson para a discretização temporal no capítulo 4. No capítulo 5 temos o resultados numéricos e por fim as considerações finais.

2 Delimitação do Problema

2.1 O local de estudo

A água é um recurso de extrema importância para a sobrevivência de tudo que habita a Terra, está presente em diversos setores sejam eles agrícolas, industriais, lazer, cultura, esporte, dentre outros. Assim, é fundamental que nós devemos cuidar de algo tão importante para a existência da humanidade.

De acordo com [Vianna et al. \(2008\)](#), o planeta Terra é composto por 71% de água, dos quais 97% estão nos oceanos e apenas 3% são água doce. Deste total de água doce, apenas 22% compõe as águas subterrâneas e uma fração dessa porcentagem está presente em rios, lagos e riachos. Sendo assim, segundo [Lima \(2001\)](#), apenas 0,007% dos recursos hídricos estão disponíveis para consumo dos seres humanos.

Com o intuito de analisar as condições de poluição presente em rios, determinamos onde será feito este estudo, o qual faremos uma breve apresentação. O local escolhido é o Rio das Mortes, tendo sua nascente localizada no estado de Mato Grosso na Serra de São Lourenço, no município de Campo Verde. De acordo com [Melo et al. \(2007\)](#), se trata da sub-bacia mais importante do rio Araguaia, localizada na margem esquerda. O rio conta com uma extensão de aproximadamente 1150km, com uma biodiversidade de plantas e animais características da região do Cerrado, como mostram as Figuras 1 e 2.

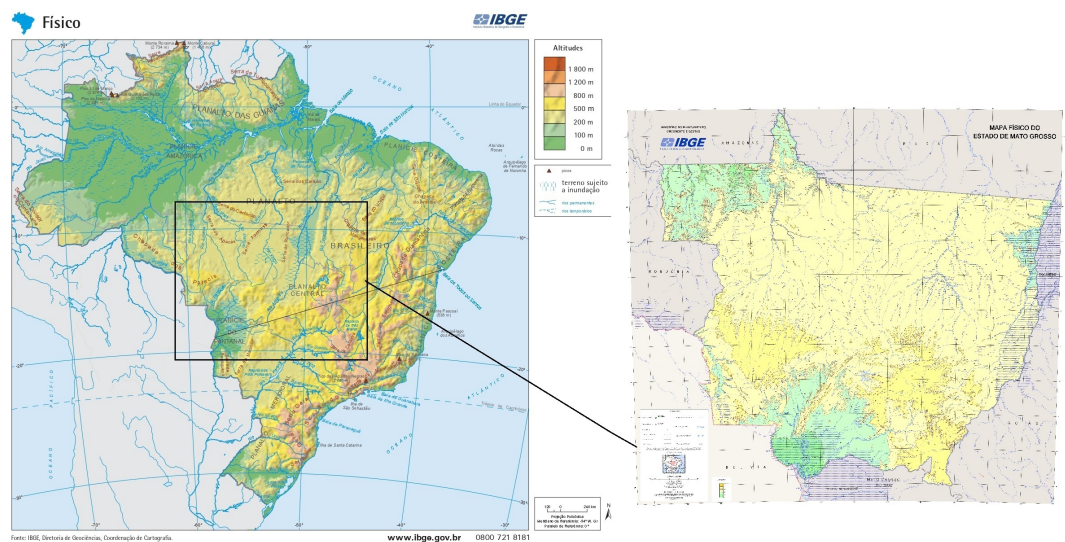


Figura 1 – Mapa do Brasil e do estado de Mato Grosso.

Fonte: [IBGE \(2010\)](#)

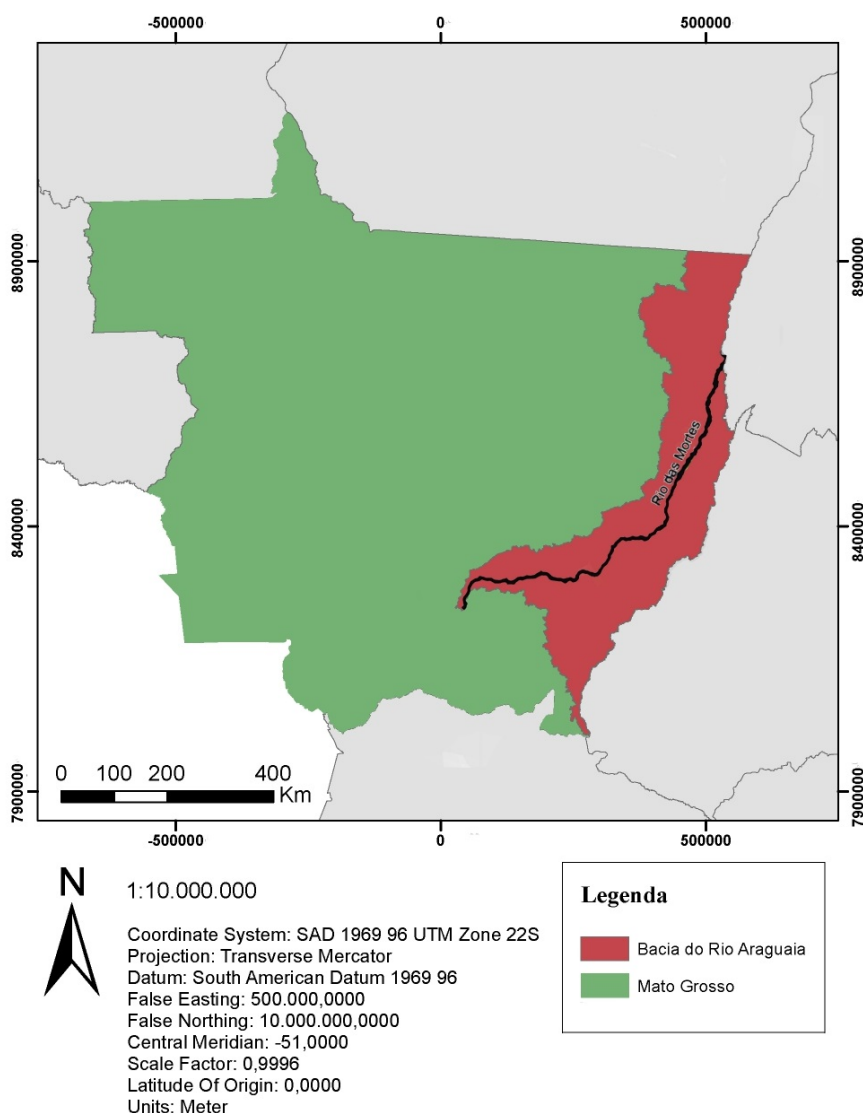


Figura 2 – Bacia do Rio Araguaia no Estado de Mato Grosso.

Elaboração: Gabriela Scavazini e Douglas Castro, 2023

Conhecido também como Rio Manso, no entanto, não é o nome mais utilizado, de acordo com Nápolis (2010) isso deve ao fato de que na época da colonização foram travadas várias batalhas entre os povos indígenas e os não indígenas, que eram o grupo de expedição dos Bandeirantes, neste processo houve muitas mortes e as pessoas eram jogadas no rio, e desde então, ficou conhecido como Rio das Mortes.

A sazonalidade no Estado de Mato Grosso é bem definida, cujos períodos de estiagem das chuvas se concentram entre os meses de maio a outubro, que é quando o rio está bem delimitado, ficando dentro dos limites estabelecidos. Já nos meses de novembro a abril, com as grandes chuvas, o mesmo tem seu nível de água muito maior, ocasionando assim um alagamento das planícies locais. Porém, neste trabalho, vamos considerar apenas a largura do rio fornecida pelo site Google Maps.

O Rio das Mortes passa pelas seguinte cidades do estado de Mato Grosso: Campo Verde, Poxoréo, Primavera do Leste, Novo São Joaquim, Indianópolis, Nova Xavantina, Nova Nazaré, Cocalinho e Novo Santo Antônio. Dentre essas cidades, a única que o rio passa dentro é Nova Xavantina. Seus principais afluentes são: Rio São Marcos, Noidore, Areões, Pindaíba, Borecaia, Água Suja, Pimentel Barbosa e Corixão, isto é possível observar com mais detalhes na Figura 3.

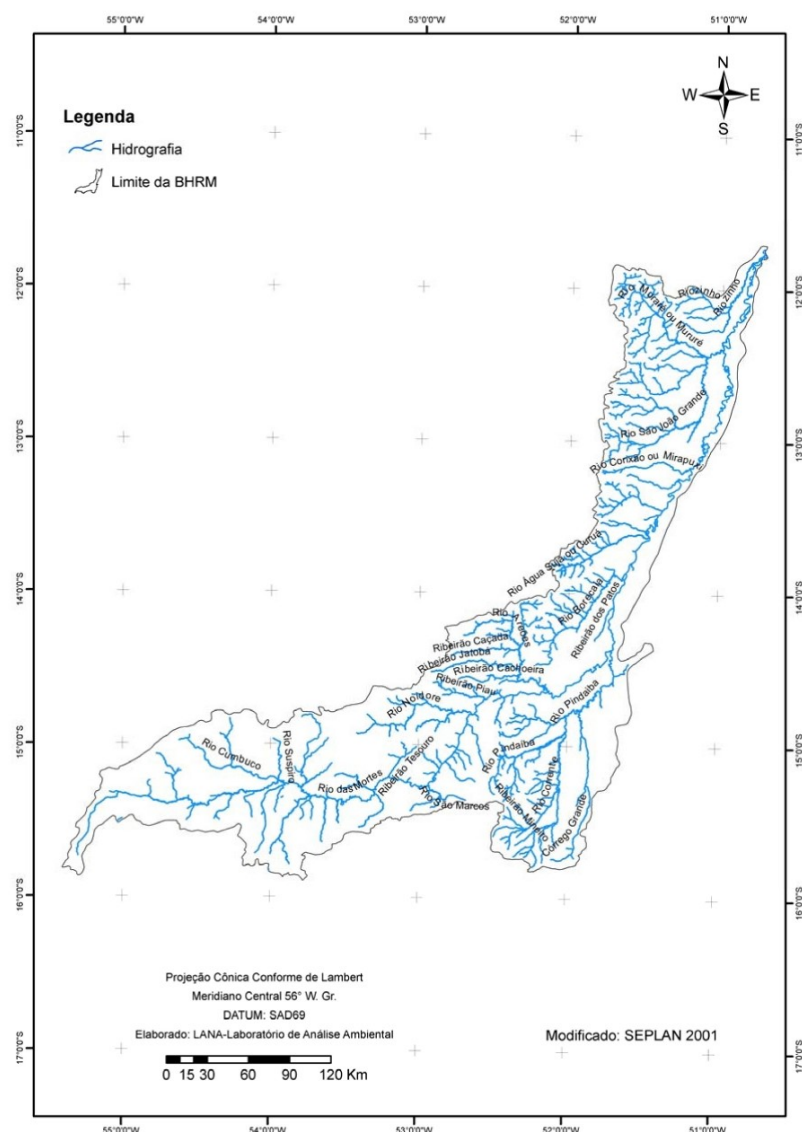


Figura 3 – Rio das Mortes e seus afluentes.

Fonte: Nápolis (2010)

A escolha para se trabalhar com este problema de dispersão de poluentes neste rio se faz importante, pois segundo Nápolis (2010) é um dos principais rios do estado, sendo responsável pelo abastecimento de 21 municípios e 11 destes tem atividades econômicas predominantes na bacia do rio. As principais atividades desenvolvidas são: lavoura, pecuária,

atividades esportivas e pesca para alimentação das comunidades indígenas e população ribeirinha.

De acordo com Nápolis (2010) a bacia hidrográfica do Rio das Mortes vem sendo afetada pelo desmatamento indiscriminado das atividades que são desenvolvidas pela agricultura. A partir de uma análise feita através do depoimento de pessoas que moram na região, foi possível identificar a necessidade de uma Educação Ambiental, para as pessoas se conscientizarem da importância que o rio tem nas atividades que são desenvolvidas.

Neste sentido, é muito interessante analisarmos quais são os efeitos de um material poluente nesta região de Nova Xavantina - MT, pois o rio passa por dentro da cidade se tornando extremamente relevante para as atividades locais. Esta análise se faz importante para alertar as autoridades locais e estaduais sobre os impactos que os poluentes despejados no rio podem trazer para o ecossistema que ali habita.

Por se tratar de um rio muito extenso, delimitamos nosso estudo em uma região localizada no município de Nova Xavantina – MT. Neste local, temos o registro de plantações agrícolas, uma mineradora de ouro, dois riachos que entram no rio das Mortes, um sem descrição e o outro ribeirão Antártico, e alguns ranchos nas margens do rio, como mostra nas Figuras 4 e 5.



Figura 5 – Imagens do local.

Fonte: autora

A seguir vamos apresentar os trabalhos realizados no grupo de Biomatemática, que vão contribuir para o desenvolvimento desta pesquisa.

2.2 Grupo Biomatemática

O estudo desses tipos de fenômenos que ocorrem na natureza, vem sendo desenvolvido há muito tempo pelo grupo de Biomatemática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC). Nesta modalidade de dispersão de poluentes tem diversos trabalhos que foram realizados ao longo dos anos. Dentre esses trabalhos há um destaque maior no último realizado por [Silva \(2022\)](#), pois ele faz uma abordagem

diferente com relação a fronteira variando no tempo (FVT), ou seja, leva em consideração a sazonalidade da região. Na tabela a seguir apresento os trabalhos envolvendo dispersão de poluentes, eles estão organizados de acordo com a dificuldade do campo de velocidades, ou seja, se iniciam desde o mais simples, considerando a campo de velocidades como constante, até o último que utiliza o campo de Navier-Stokes para analisar o perfil de velocidades.

Tabela 1 – Trabalhos realizados pelo grupo de Biomatemática utilizando o método de elementos finitos (MEF)

Autor	Dim.	Domínio	Meio	Campo de Vel.	FVT
Mistro (1992)	$\mathbb{R}^2$	retângulo	água	constante	constante
Wolmuth (2009)	$\mathbb{R}^2$	mapa	água	constante	constante
Bernardes (1998)	$\mathbb{R}^2$	mapa	água	const. por partes	constante
Cantão (1998)	$\mathbb{R}^2$	mapa	água	interp. de dados	constante
Diniz (2003)	$\mathbb{R}^2$	regular	água e ar	perfil parabólico	constante
Oliveira (2003)	$\mathbb{R}^2$	mapa	água	Stokes	constante
Vásquez (2005)	$\mathbb{R}^3$	paralelepípedo	água	Stokes	constante
Inforzato (2008)	$\mathbb{R}^3$	paralelepípedo	água e ar	Stokes	constante
Krindges (2011)	$\mathbb{R}^3$	mapa 3D	água	Navier-Stokes	constante
Silva (2022)	$\mathbb{R}^2$	mapa2D	água	Navier-Stokes	var. no tempo

Após a delimitação do problema e um estudo sobre os trabalhos realizados, vamos agora apresentar as equações e as ferramentas que serão utilizadas para o desenvolvimento deste estudo.

3 Modelo Clássico

3.1 Equação de Difusão-Advecção

O estudo de poluições em meios aquáticos se fazem necessárias para analisar os possíveis impactos ambientais causados por ações dos seres humanos. Deste modo, surgem os primeiros modelos clássicos de equação de difusão-advecção e transporte. Estes modelos podem ser organizados em situações envolvendo apenas variáveis espaciais ou com variáveis espaciais e temporais.

A variação do poluente com relação ao tempo dá-se da seguinte forma:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Variação do} \\ \text{poluente com} \\ \text{relação ao} \\ \text{tempo} \end{array} \right) = (\text{difusão}) - (\text{transporte}) - (\text{decaimento}) + (\text{fonte})$$

Nesta equação podemos observar que a variação do poluente depende de alguns fatores, os quais daremos uma breve explicação para contextualizar o leitor.

A difusão, segundo [Okubo \(1980\)](#), é um processo em que um grupo de partículas se espalha ao longo do espaço em relação ao tempo, ocupando cada vez mais o domínio estudado a partir do ponto inicial.

De acordo com [Marchuk \(1986\)](#), os poluentes despejados na atmosfera são levados por correntes de ar, com fluxos de correnteza de curto alcance. Desta forma, o transporte de poluentes se deve a ações que são geradas pela própria natureza.

Ao longo do domínio, o poluente pode ir se depositando nas margens do rio, o que ocasiona uma taxa de decaimento, ou seja, a quantia de poluente que se encontra no local em que está sendo despejado não é a mesma em todo o trecho, pois há perda de material.

O termo fonte representa o local em que a substância é inserida ou retirada do ambiente em questão que, neste caso, serão os dois riachos na margem direita e os resíduos da mineradora levados pelas chuvas até o leito do rio, localizado na margem esquerda.

A partir disso, obtemos a equação que será usada no problema em questão, na qual faremos algumas definições sobre o domínio espacial e a variável temporal.

Seja $(x, y) \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ variável espacial e $t \in J = (0, T]$ variável temporal. Assim, nossa equação de difusão-advecção será definida da seguinte forma: considere a concentração de poluente como sendo $C(x, y, t)$, então:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \Delta C - \nabla \cdot \vec{\nabla} C - \sigma C + f, \forall (x, y) \in \Omega \text{ e } t \in J = (0, T].$$

Ou ainda, podemos escrevê-la como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \alpha \Delta C + \nabla \cdot \vec{\nabla} C + \sigma C = f, \forall (x, y) \in \Omega \text{ e } t \in J = (0, T], \quad (3.1)$$

em que:

$\frac{\partial C}{\partial t}$: variação do poluente com relação ao tempo;

α : coeficiente de difusibilidade do poluente;

$\vec{\nabla}$: campo das velocidades, neste caso longitudinal e transversal;

σ : taxa de decaimento do poluente;

f : termo fonte de poluição.

Nosso problema será analisado em uma situação bidimensional, por se tratar de um problema envolvendo equações diferenciais parciais, vamos precisar definir algumas condições, que neste caso serão condições de fronteira. Para este problema faremos uso de dois tipos, Von Neumann e Robin. A escolha destas condições se dá pelo fato de, elas representarem melhor a entrada e perda de poluentes.

Para facilitar a identificação de cada condição vamos dividir nossa fronteira $\partial\Omega$ em várias partes, que será denotada por $\partial\Omega = \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9, \Gamma_{10}$ e Γ_{11} . E podemos observar essa divisão na figura a seguir, que estão apresentadas em coordenadas geográficas (latitude e longitude).

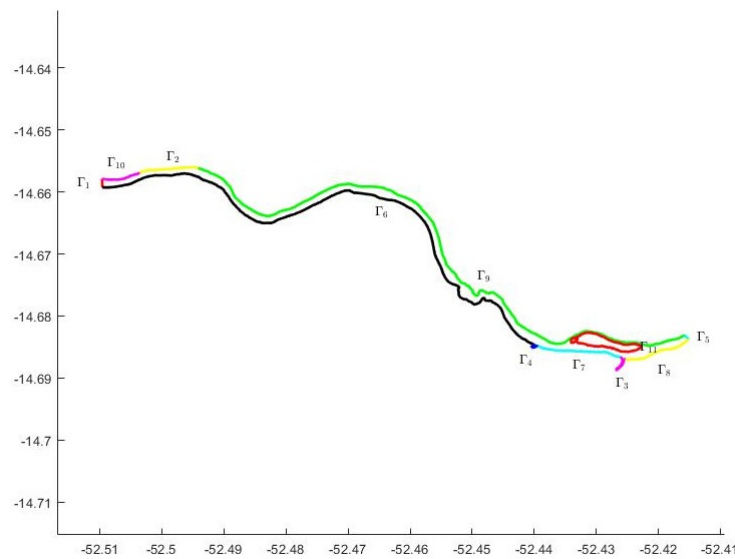


Figura 6 – Fronteira.

Fonte: Autora

Para os casos de ingresso de poluente no meio aquático, vamos utilizar a condição de fronteira do tipo Von Neumann, pois esta representa a entrada de poluente, a qual depende de uma função g_m na posição (x, y) e no instante t .

$$\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_m} = g_m \quad (\text{Von Neumann})$$

Γ_1 representa o corte de entrada do rio e nos lugares com $m = 2, 3$ e 4 temos 3 fontes de poluição que caem diretamente no rio.

Nos casos de perda de poluente vamos utilizar a condição de fronteira de Robin, em que k_m é um constante responsável por controlar a perda de poluente. As fronteiras em que vamos utilizar esta condição é Γ_5 representa o corte de saída do rio e para as fronteiras com $m = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ e 11

$$\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_m} = k_m C \quad (\text{Robin})$$

De uma forma mais simplificada, podemos reescrever a equação do nosso problema como sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} - \alpha \Delta C + \nabla \cdot \vec{\nabla} C + \sigma C = f, \forall (x, y) \in \Omega \quad e \quad t \in J = (0, T], \\ \nabla \cdot \vec{\nabla} = 0 \quad (\text{fluido incompressível}) \\ \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = g_1(x, y, t), t \in J = (0, T]; \\ \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_2} = g_2(x, y, t), t \in J = (0, T]; \\ \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_3} = g_3(x, y, t), t \in J = (0, T]; \\ \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_4} = g_4(x, y, t), t \in J = (0, T]; \\ -\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_5} = k_5 C, t \in J = (0, T]; \\ -\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_6} = k_6 C, t \in J = (0, T]; \\ -\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_7} = k_7 C, t \in J = (0, T]; \\ -\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_8} = k_8 C, t \in J = (0, T]; \\ -\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_9} = k_9 C, t \in J = (0, T]; \\ -\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_{10}} = k_{10} C, t \in J = (0, T]; \\ -\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_{11}} = k_{11} C, t \in J = (0, T]; \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Após definirmos nossa equação e as condições de contorno necessárias para analisar este problema, vamos agora definir a equação de Navier-Stokes, que será usada para determinar o campo de velocidades.

3.2 Equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes é utilizada em mecânica de fluidos para descrever o comportamento de fluidos newtonianos, um exemplo clássico de fluido newtoniano é a água, pois esta independentemente da velocidade de fluxo ou cisalhamento permanece com a mesma viscosidade, por isso vamos usar esta equação para criar um campo de velocidades.

Ao observarmos a equação (3.1) temos um componente $\vec{V}$ que é responsável pelo transporte do poluente no curso da água. Deste modo, utilizando como referência [Silva \(2022\)](#) e [Krindges \(2011\)](#), faremos a construção do nosso campo de velocidades a partir de um perfil de velocidade criado na entrada do rio.

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \nabla p - \nu \Delta \vec{V} = \vec{F}, \forall (x, y) \in \Omega, t \in J = (0, T], \\ \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{fluido incompressível}), \end{cases} \quad (3.3)$$

em que:

$\vec{V}$: campo das velocidades, neste caso horizontal e vertical;

p : é a pressão exercida no fluido;

ν : viscosidade do fluido, ou seja, o atrito que ele tem com o meio;

$\vec{F}$: campo de forças externo.

Assim como na equação de difusão-advecção, é necessário definir as condições de contorno para a equação de Navier-Stokes. Considere as seguintes condições:

- Entrada d'água: na entrada do rio vamos definir o perfil de velocidade da água, para isto vamos utilizar uma condição de Dirichlet não homogênea.

$$\vec{V}|_{\Gamma_1} = \vec{q}(x, y, t), \text{ para } (x, y) \in \Omega \text{ e } t \in J = (0, T].$$

- Saída d'água: vamos deixar a saída livre, então vamos usar um condição de Von Neumann homogênea, pois o vetor saída tem que ser perpendicular a secção que foi feita no rio.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta}|_{\Gamma_m} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \eta}|_{\Gamma_m} = 0, \text{ com } m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \text{ e } 11 \text{ e } \vec{V} = (\vec{u}, \vec{v})$$

Após a definição das equações que vamos utilizar, agora vamos montar a formulação variacional e a discretização para a equação de difusão-advecção.

4 Formulação Variacional

O uso da modelagem matemática para estudar problemas do nosso cotidiano se faz necessário em diversas situações, em particular para este caso de ecologia matemática no Rio das Mortes.

Para este problema é difícil determinarmos a solução de $C(x, y, t)$, na forma forte, ou seja, encontrar a solução analítica da equação (3.1) muitas vezes não é possível, pois o domínio utilizado não tem uma regularidade que é necessária para a solução analítica desse tipo de situação e, muitas vezes esta pode até mesmo não existir. Por isso, vamos em busca de uma solução aproximada ou, o que chamamos também, de solução fraca. Para tal construção iremos utilizar os seguintes passos.



Figura 7 – Passos para resolução do problema.

Deste modo, encontrar a solução aproximada é o equivalente a encontrar a solução analítica do problema, para isto vamos definir espaços que nos permitam tal formulação variacional, ou seja, espaço das funções quadrados integráveis, espaço L^2 .

De acordo com Wolmuth (2009), sabemos que o modelo clássico exige que a solução de $C(x, y, t)$ esteja em $\mathcal{C}^2$, porém estamos em busca de um conjunto maior de candidatas a solução, por isso vamos definir nosso espaço de funções quadrados integráveis no sentido de Lebesgue. Seja Ω nosso domínio, tal que $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, agora vamos definir o

espaço das funções quadrados integráveis, ou seja, $L^2(\Omega)$ como sendo:

$$L^2(\Omega) = \left\{ C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \int_{\Omega} [C(x, y, t)]^2 d\mu < \infty, \forall (x, y) \in \Omega \text{ e } t \in J = (0, T] \right\}.$$

O produto interno e sua norma, são respectivamente:

$$(u|v)_{L^2} = \int_{L^2(\Omega)} uv d\mu \text{ e } \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (u, u)_{L^2(\Omega)}, \forall u \text{ e } v \in L^2(\Omega).$$

Utilizando a equação do modelo clássico, vamos precisar que as derivadas parciais com relação a x e y sejam quadrado integráveis. Deste modo, é necessário definir um subespaço de $L^2(\Omega)$ que satisfaça essas condições.

Seja $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, o espaço das funções quadrado integráveis, cuja sua primeira derivada também pertence ao espaço $L^2(\Omega)$.

O espaço $H^1(\Omega)$ pode ser definido da seguinte maneira:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Conhecido como espaço de Hilbert, que por ser um espaço normado possui um produto interno e uma norma que são definidos a seguir:

$$(u|v)_{H^1(\Omega)} = (u|v)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mid \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \mid \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{L^2(\Omega)}$$

e

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Após estas definições estamos prontos para iniciar a solução aproximada da equação 3.1 através do Método de Galerkin.

Seja $v \in H^1(\Omega)$ e $C = C(x, y, t) \in \mathcal{V}$, tal que $\mathcal{V}$ é da seguinte forma:

$$\mathcal{V} = \left\{ C \in L^2((0, T] \times H^1(\Omega)) \mid \frac{\partial C}{\partial t} \in L^2(\Omega), \forall t \in J = (0, T] \right\}.$$

A partir da equação (3.1), quando multiplicamos v por cada elemento e aplicamos a integral, obtemos a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} \cdot v d\mu - \alpha \int_{\Omega} \Delta C \cdot v d\mu + \int_{\Omega} \nabla(\vec{\nabla} C) \cdot v d\mu + \sigma \int_{\Omega} C \cdot v d\mu = \int_{\Omega} f \cdot v d\mu, \forall C \in \mathcal{V},$$

$$v \in H^1(\Omega) \text{ e } t \in J = (0, T].$$

(4.1)

Pela definição do Teorema de Green temos que:

$$-\alpha \int_{\Omega} \Delta C \cdot v d\mu = \alpha \int_{\Omega} \nabla C \cdot \nabla v d\mu - \alpha \int_{\partial\Omega} \frac{\partial C}{\partial \eta} \cdot v d\mu, \forall C \in \mathcal{V}, v \in H^1(\Omega) \text{ e } t \in J = (0, T]. \quad (4.2)$$

Substituindo a expressão (4.2) em (4.1), temos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} \cdot v d\mu + \alpha \int_{\Omega} \nabla C \cdot \nabla v d\mu - \alpha \int_{\partial\Omega} \frac{\partial C}{\partial \eta} \cdot v d\mu + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{\nabla} C) \cdot v d\mu + \sigma \int_{\Omega} C \cdot v d\mu = \int_{\Omega} f \cdot v d\mu, \forall C \in \mathcal{V}, v \in H^1(\Omega) \text{ e } t \in J = (0, T].$$

Aplicando as condições de contorno que foram determinadas no capítulo anterior na equação (3.2) temos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} \cdot v d\mu + \alpha \int_{\Omega} \nabla C \cdot \nabla v d\mu + \sum_{m=5}^{11} \int_{\Gamma_m} k_m C \cdot v d\mu + \int_{\Omega} \vec{\nabla}(\nabla C) \cdot v d\mu + \sigma \int_{\Omega} C \cdot v d\mu = \int_{\Omega} f \cdot v d\mu + \sum_{m=1}^4 \int_{\Gamma_m} g_m \cdot v d\mu, \forall C \in \mathcal{V}, v \in H^1(\Omega) \text{ e } t \in J = (0, T]. \quad (4.3)$$

Para simplificar a equação (4.3) podemos escrevê-la utilizando a definição de produto interno, obtendo:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} | v \right)_{\Omega} + \alpha (\nabla C | \nabla v)_{\Omega} + \sum_{m=5}^{11} k_m (C | v)_{\Gamma_m} + \left(\vec{\nabla} \cdot \nabla C | v \right)_{\Omega} + \sigma (C | v)_{\Omega} = (f | v)_{\Omega} + \sum_{m=1}^4 (g_m | v)_{\Gamma_m}, \forall C \in \mathcal{V}, v \in H^1(\Omega) \text{ e } t \in J = (0, T]. \quad (4.4)$$

Deste modo obtemos nossa formulação variacional (4.4) que satisfaz a solução da equação (3.1). Com relação a existência e unicidade, podemos verificar em Cantão (1998), Inforzato (2008) e Diniz (2003), eles apresentam e verificam a validade desta solução para este problema. Agora, o próximo passo é obter a aproximação numérica espacial via Galerkin, utilizando o método de elementos finitos. Para a aproximação numérica temporal faremos o uso do método de Crank-Nicolson.

5 Discretização da Equação de Difusão-advecção

A partir da formulação variacional, vamos determinar a solução do nosso problema. Sabendo que esta situação pode não possuir solução analítica, vamos agora fazer uma aproximação do resultado analítico através do Método de Galerkin. Para isto, vamos utilizar elementos finitos para a discretização espacial e na discretização temporal faremos o uso do método de Crank-Nicolson.

5.1 Discretização Espacial

O método de elementos finitos consiste em dividir o domínio da solução em um número finito de subdomínios que chamamos de elementos, para determinar a aproximação da solução do problema. Neste caso, considere Ω a região que contém todos os resultados da equação (3.1), vamos dividir Ω em um número finito de triângulos bidimensionais, de tal forma que a união de todos esses elementos seja o mais próximo possível do domínio Ω .

Seja $\Omega_h \rightarrow \Omega$, tal que quanto mais próximo $\partial\Omega_h$ for de $\partial\Omega$ teremos uma maior precisão da nossa solução fraca, ou seja, quanto mais elementos escrevermos melhor será nosso resultado.

Seja $\mathcal{V}_h$ subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ finito de dimensão n , tal que a base $\mathfrak{B}(V_h) = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_n\}$, agora vamos fazer nossa aproximação de $C(x, y, t) \approx C_h(x, y, t)$. Seja $C_h(x, y, t) \in \mathcal{V}_h$, deste modo, podemos escrevê-la como combinação linear dos elementos da base.

$$C_h(x, y, t) = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + c_3\Phi_3 + \dots + c_n\Phi_n = \sum_{j=1}^n c_j(t)\Phi_j(x, y). \quad (5.1)$$

Substituindo $C_h(x, y, t) = C_h$ na equação (4.4), temos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial C_h}{\partial t} | v \right)_{\Omega} + \alpha (\nabla C_h | |\nabla v|)_{\Omega} + \sum_{m=5}^{11} k_m (C_h | v)_{\Gamma_m} + \left(\vec{\nabla} \cdot \nabla C_h | v \right)_{\Omega} + \sigma (C_h | v)_{\Omega} = (f | v)_{\Omega} \\ & + \sum_{m=1}^4 (g_m | v)_{\Gamma_m}, \forall \quad v \in H^1(\Omega), t \in J = (0, T] \quad e \quad C_h \in \mathcal{V}_h. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ainda,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^n c_j(t) \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} + \alpha \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \nabla \Phi_j(x, y) \Big\| \nabla v \right)_{\Omega} + \\ & \sum_{m=5}^{11} k_m \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Gamma_m} + \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \vec{\nabla} \cdot \nabla \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} + \\ & \sigma \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} = (f|v)_{\Omega} + \sum_{m=1}^4 (g_m|v)_{\Gamma_m}, \forall \ v \in H^1(\Omega), t \in J = (0, T] \text{ e} \\ & \Phi_j \in \mathfrak{B}(V_h). \end{aligned} \tag{5.3}$$

A propriedade do somatório nos garante que:

$$\frac{\partial C_h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} \tag{5.4}$$

Substituindo a equação (5.4) em (5.3), segue que:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} + \alpha \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \nabla \Phi_j(x, y) \Big\| \nabla v \right)_{\Omega} + \\ & \sum_{m=5}^{11} k_m \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Gamma_m} + \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \vec{\nabla} \cdot \nabla \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} + \sigma \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} \\ & = (f|v)_{\Omega} + \sum_{m=1}^4 (g_m|v)_{\Gamma_m}, \forall \ v \in H^1(\Omega), t \in J = (0, T] \text{ e } \Phi_j \in \mathfrak{B}(V_h). \end{aligned}$$

Temos que a variável c_j depende apenas de t , então podemos reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} + \alpha \sum_{j=1}^n c_j(t) \left(\nabla \Phi_j(x, y) \Big\| \nabla v \right)_{\Omega} + \sum_{m=5}^{11} k_m \sum_{j=1}^n c_j(t) \left(\Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Gamma_m} \\ & + \sum_{j=1}^n c_j(t) \left(\vec{\nabla} \cdot \nabla \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} + \sigma \sum_{j=1}^n c_j(t) \left(\Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} = (f|v)_{\Omega} + \sum_{m=1}^4 (g_m|v)_{\Gamma_m}, \end{aligned}$$

$$\forall \ v \in H^1(\Omega), t \in J = (0, T] \text{ e } \Phi_j \in \mathfrak{B}(V_h).$$

Como $\sum_{j=1}^n c_j(t)$ é comum em alguns termos, podemos colocá-lo em evidência e obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} + \sum_{j=1}^n c_j(t) \left\{ \alpha \left(\nabla \Phi_j(x, y) \Big\| \nabla v \right)_{\Omega} + \sum_{m=5}^{11} k_m \left(\Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Gamma_m} + \right. \\ & \left. \left(\vec{\nabla} \cdot \nabla \Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} + \sigma \left(\Phi_j(x, y) \Big| v \right)_{\Omega} \right\} = (f|v)_{\Omega} + \sum_{m=1}^4 (g_m|v)_{\Gamma_m}, \end{aligned}$$

$$\forall \ v \in H^1(\Omega), t \in J = (0, T] \text{ e } \Phi_j \in \mathfrak{B}(V_h).$$

Temos que $v \in H^1(\Omega)$, por outro lado, segue que $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V} \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Portanto, $v \in V_h$, deste modo, podemos escrevê-la como os elementos da base $\mathfrak{B}(V_h)$ e, assim, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \Phi_j(x, y) \middle| \sum_{i=1}^n c_j(t) \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} + \sum_{j=1}^n c_j(t) \left\{ \alpha \left(\nabla \Phi_j(x, y) \middle| \sum_{i=1}^n c_j(t) \nabla \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} + \right. \\ & \sum_{m=5}^{11} k_m \left(\Phi_j(x, y) \middle| \sum_{i=1}^n c_j(t) \Phi_i(x, y) \right)_{\Gamma_m} + \left(\vec{\nabla} \cdot \nabla \Phi_j(x, y) \middle| \sum_{i=1}^n c_j(t) \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} + \\ & \left. \sigma \left(\Phi_j(x, y) \middle| \sum_{i=1}^n c_j(t) \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} \right\} = \left(f \middle| \sum_{i=1}^n c_j(t) \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} + \\ & \sum_{m=1}^4 \left(g_m \middle| \sum_{i=1}^n c_j(t) \Phi_i(x, y) \right)_{\Gamma_m}, \forall \Phi_i \in B(\mathcal{V}_h), t \in J = (0, T] \text{ e } \Phi_j, \Phi_i \in \mathfrak{B}(V_h). \end{aligned}$$

Fazendo alguns ajustes obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \left(\Phi_j(x, y) \middle| \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} + \sum_{j=1}^n c_j(t) \left\{ \alpha \left(\nabla \Phi_j(x, y) \middle| \nabla \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} + \right. \\ & \sum_{m=5}^{11} k_m \left(\Phi_j(x, y) \middle| \Phi_i(x, y) \right)_{\Gamma_m} + \left(\vec{\nabla} \cdot \nabla \Phi_j(x, y) \middle| \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} + \sigma \left(\Phi_j(x, y) \middle| \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} \left. \right\} = \\ & (f | \Phi_i(x, y))_{\Omega} + \sum_{m=1}^4 (g_m | \Phi_i(x, y))_{\Gamma_m}, \forall \Phi_i \text{ e } \Phi_j \in \mathfrak{B}(V_h) \text{ e } t \in J = (0, T]. \end{aligned}$$

Em notação matricial podemos escrever da seguinte forma:

$$\frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \cdot \mathbb{M} + c_j(t) \cdot \mathbb{P} = \mathbb{B}, \quad (5.5)$$

em que:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{n \times n} &= (m_{ij}) = \left(\Phi_j(x, y) \middle| \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega}, \\ \mathbb{P}_{n \times n} &= (p_{ij}) = \alpha \left(\nabla \Phi_j(x, y) \middle| \nabla \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} + \sum_{m=5}^{11} k_m \left(\Phi_j(x, y) \middle| \Phi_i(x, y) \right)_{\Gamma_m} + \\ & \left(\vec{\nabla} \cdot \nabla \Phi_j(x, y) \middle| \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} + \sigma \left(\Phi_j(x, y) \middle| \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} \text{ e} \\ \mathbb{B}_{n \times n} &= (b_{ij}) = (f | \Phi_i(x, y))_{\Omega} + \sum_{m=1}^4 (g_m | \Phi_i(x, y))_{\Gamma_m}. \end{aligned}$$

Observe que a matriz $\mathbb{P}$ contém a componente do campo de velocidades, que será construída a partir da Equação de Navier-Stokes. De acordo com [Silva \(2022\)](#), podemos escrever $\mathbb{P}_{n \times n}$ em duas matrizes, para que a segunda possa receber o tratamento adequado. Deste modo, a equação (5.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \cdot \mathbb{M} + c_j(t) \cdot (\mathbb{P} + \mathbb{Q}) = \mathbb{B}, \quad (5.6)$$

em que:

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{n \times n} &= (m_{ij}) = \left(\Phi_j(x, y) \Big| \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega}, \\ \mathbb{P}_{n \times n} &= (p_{ij}) = \alpha \left(\nabla \Phi_j(x, y) \Big| \nabla \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} + \sum_{m=5}^{11} k_m \left(\Phi_j(x, y) \Big| \Phi_i(x, y) \right)_{\Gamma_m} + \\ &\sigma \left(\Phi_j(x, y) \Big| \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega}, \\ \mathbb{Q}_{n \times n} &= \left(\vec{\nabla} \cdot \nabla \Phi_j(x, y) \Big| \Phi_i(x, y) \right)_{\Omega} \quad e \\ \mathbb{B}_{n \times n} &= (b_{ij}) = (f | \Phi_i(x, y))_{\Omega} + \sum_{m=1}^4 (g_m | \Phi_i(x, y))_{\Gamma_m}.\end{aligned}$$

Após obtermos os resultados da discretização espacial, agora vamos fazer a discretização com relação a variável temporal.

5.2 Discretização Temporal

Para fazer a aproximação temporal podemos utilizar três métodos, sendo eles:

- Método de Euler explícito: convergência condicional e erro de ordem Δt ;
- Método de Euler implícito: convergência incondicional e erro de ordem Δt ;
- Método de Crank-Nicolson: convergência incondicional e erro de ordem Δt^2 .

Ao levarmos em consideração a convergência e a ordem do erro, o método ideal para fazer a discretização temporal é Crank-Nicolson, que consiste em fazer a aproximação da derivada pelo ponto intermediário, ou seja, $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$. Segundo [Diniz \(2003\)](#), mesmo com sua instabilidade numérica logo no início, após algumas iterações ele estabiliza, obtendo assim a curva que melhor se ajusta ao problema.

Deste modo, temos as seguintes aproximações numéricas:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \right|_{t_{n+\frac{1}{2}}} &\cong \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t}, & c_j(t) \Big|_{t_{n+\frac{1}{2}}} &\cong \frac{c_j^{n+1} + c_j^n}{2}, \\ \mathbb{Q} \Big|_{t_{n+\frac{1}{2}}} &= \frac{\mathbb{Q}^{n+1} + \mathbb{Q}^n}{2}, & g_m \Big|_{t_{n+\frac{1}{2}}} &= \frac{g_m^{n+1} + g_m^n}{2}\end{aligned}\tag{5.7}$$

Substituindo as equações (5.7) em (5.6), temos que:

$$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} \cdot \mathbb{M} + \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{2} \cdot \mathbb{P} + \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{2} \left(\frac{\mathbb{Q}^{n+1} + \mathbb{Q}^n}{2} \right) = \mathbb{B}^{n+\frac{1}{2}}$$

Multiplicando todos os elementos por Δt e fazendo alguns ajustes obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbb{P} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\mathbb{Q}^{n+1} + \mathbb{Q}^n}{2} \right) \right) C_j^{n+1} = \\ \left(\mathbb{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbb{P} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\mathbb{Q}^{n+1} + \mathbb{Q}^n}{2} \right) \right) C_j^n + \Delta t \cdot \mathbb{B}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

Deste modo, construímos a discretização com relação ao espaço e ao tempo. Agora, vamos analisar as condições de estabilidade.

5.3 Estabilidade Numérica

O uso de métodos numéricos para resolver as equações que surgem nos problemas estudados, faz com que seja necessário recorrer algumas técnicas para obter a estabilidade numérica, ou seja, necessitamos de recursos que possam garantir que a solução encontrada está próxima da realidade.

A estabilidade numérica é uma consideração crítica na escolha e implementação de métodos numéricos, e é necessário realizar análises cuidadosas de estabilidade para garantir a confiabilidade dos resultados obtidos. Métodos numéricos estáveis são capazes de fornecer soluções precisas e confiáveis para uma ampla gama de problemas, e são fundamentais na simulação e modelagem de fenômenos complexos em diversas áreas da ciência e engenharia.

Uma das formas de garantir que o problema tenha estabilidade é utilizar o número de Péclet. O número de Péclet (Pe) é um número adimensional usado na mecânica dos fluidos e na transferência de calor. Ele é usado para descrever a relação entre o transporte convectivo e o transporte difusivo em um sistema. Segundo [Diniz \(2003\)](#) o uso de uma malha bem refinada nos garante também uma solução estável, porém o custo computacional acaba se tornando muito caro. Neste sentido, faremos o uso dos recursos da Universidade Federal de Mato Grosso, com o auxílio do professor Dr. André Krindges, para encontrar as soluções desejadas com uma malha bem refinada.

O número de Péclet é definido como a razão entre o transporte convectivo e o transporte difusivo, e é expresso da seguinte forma:

$$\frac{v_i \Delta x_i}{\alpha} \leq 2, i = 1, 2$$

em que:

- v_i : é a componente na velocidade na direção x_i ;
- Δx_i : é o comprimento máximo do vetor na direção x_i ;

- α : é o coeficiente de difusibilidade.

O número de Péclet (**Pe**) é usado para determinar se o transporte convectivo ou o transporte difusivo é dominante em um sistema. Se o valor de **Pe** for muito maior que 1, o transporte convectivo é dominante e a transferência de massa ou calor ocorre principalmente devido ao movimento do fluido. Se o valor de **Pe** for muito menor que 1, o transporte difusivo é dominante e a transferência de massa ou calor ocorre principalmente devido à difusão molecular.

Desta forma, para o próximo capítulo ao fazer as escolhas dos parâmetros, vamos levar em consideração o número de Péclet, pois este vai nos garantir que a solução do problema é estável.

6 Resultados Numéricos

Após fazer um estudo detalhado sobre a equação de difusão-advecção, agora vamos obter os resultados numéricos através de simulações computacionais. Para gerar estas simulações vamos precisar de alguns parâmetros que serão extraídos dos trabalhos de [Silva \(2022\)](#), [Krindges \(2011\)](#), [Wolmuth \(2009\)](#), [Diniz \(2003\)](#).

6.1 Discretização do domínio e perfil de velocidade de entrada

Para fazer a construção dos resultados, devemos primeiro discretizar nosso domínio, ou seja, dividi-lo em uma quantidade finita de elementos e, a partir disso, começar a implementação para obter os resultados.

De acordo com [Oden et al. \(1981\)](#), o método de elementos finitos (MEF), consiste em dividir o domínio do problema em uma malha ou rede de elementos menores e mais simples, como triângulos ou tetraedros no caso de problemas bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. Cada elemento é caracterizado por uma série de propriedades físicas e está associado a uma função matemática de aproximação, conhecida como função de forma. Essas funções de forma são usadas para representar o comportamento do problema dentro de cada elemento. Para este problema em questão, faremos o uso de elementos triangulares e bidimensionais.

A construção da malha foi feita através do software GMSH. Este é um software livre e de código aberto utilizado para geração de malhas em simulações numéricas e modelagem computacional. Ele é amplamente utilizado na área de métodos numéricos, especialmente no contexto do método de elementos finitos. Sob a orientação do professor Dr. André Krindges fizemos a construção da malha no sentido anti-horário, vale ressaltar que todos os gráficos a seguir estão em coordenadas UTM.

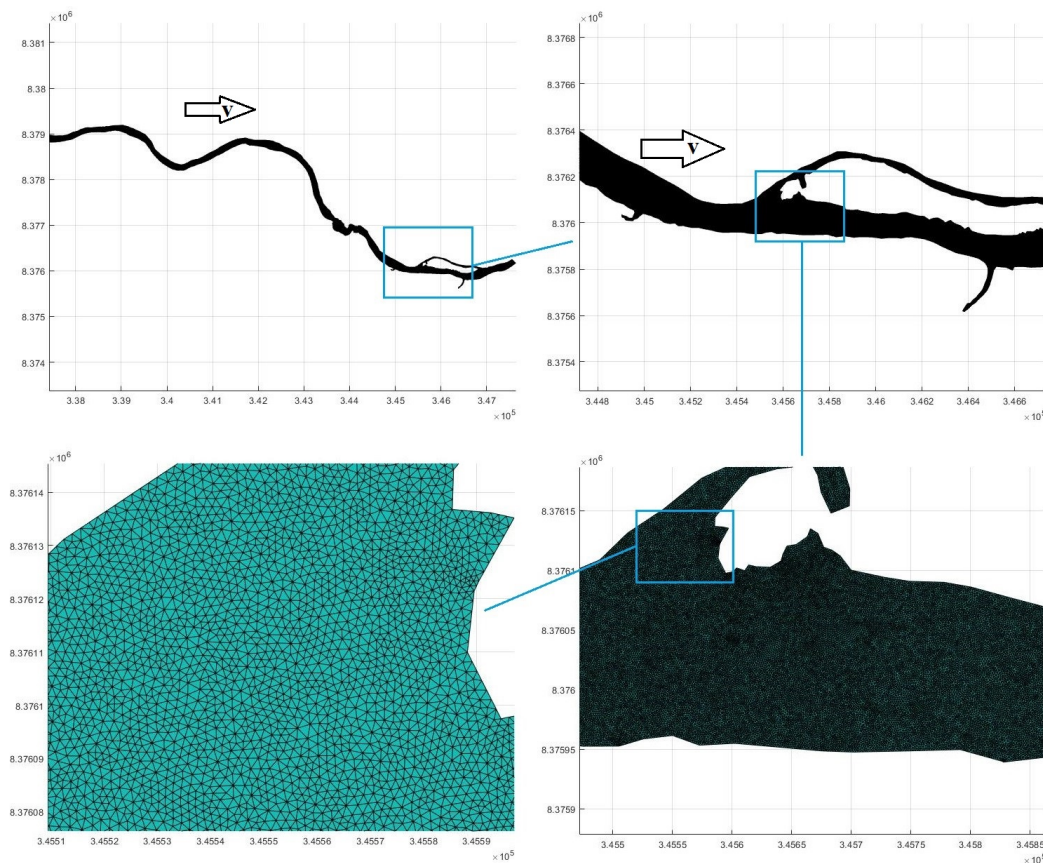


Figura 8 – Malha ampliada.

Fonte: Autora

- Número de nós: 592.477
- Número de elementos: 1.170.230
- Número de elementos da fronteira: 14.724

Uma vez que o domínio tenha sido discretizado com elementos finitos, são estabelecidas condições de contorno que foram apresentadas no capítulo 3.1 e o sistema de equações que governa o problema é formulado. O sistema de equações resultante é geralmente um conjunto de equações algébricas lineares, que são resolvidas numericamente usando técnicas como o método de eliminação de Gauss ou métodos iterativos como o método de Jacobi ou Gauss-Seidel.

Feita a discretização da malha, partimos para a construção do perfil de velocidade de entrada do rio, pois através da equação de Navier Stokes, estabelecemos o perfil de velocidade do rio e então aplicamos na equação de difusão-advecção. As equações utilizadas para construir o perfil de velocidades se encontram no apêndice A deste trabalho.

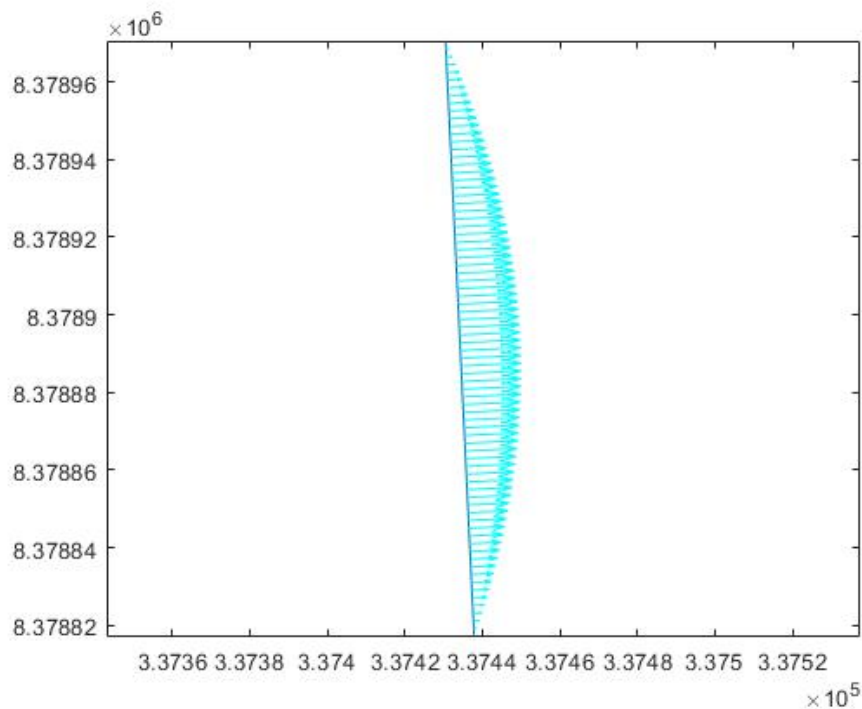


Figura 9 – Perfil de velocidade de entrada do Rio da Mortes rotacionado.

Fonte: Autora

A Figura 10, ilustra o perfil parabólico inserido no corte de entrada do rio. Com o uso da equação de Navier-Stokes e este perfil de velocidade, foi possível construir todo o campo de velocidades ao longo do domínio estudado. Nas Figura 11 podemos observar também que, quanto maior o fluxo de água, maiores são as velocidades descritas pelos vetores, e ao observar a parte ampliada da figura, vemos velocidades quase inexistentes no canto superior direito. Isto indica que o fluxo de água não é tão intenso, devido a geomorfologia do rio, e aparecem locais onde o curso da água é mais tranquilo, também conhecido como "rebojo".

Para ilustrar melhor o comportamento da equação de Navier-Stokes temos a Figura 12, na qual apresenta-se um campo de velocidades para o córrego. A partir do momento que este entra no rio, se adapta e segue o fluxo mais intenso de água. Feita esta construção do campo de velocidades, agora vamos encontrar a solução numérica aproximada para a equação 3.1.

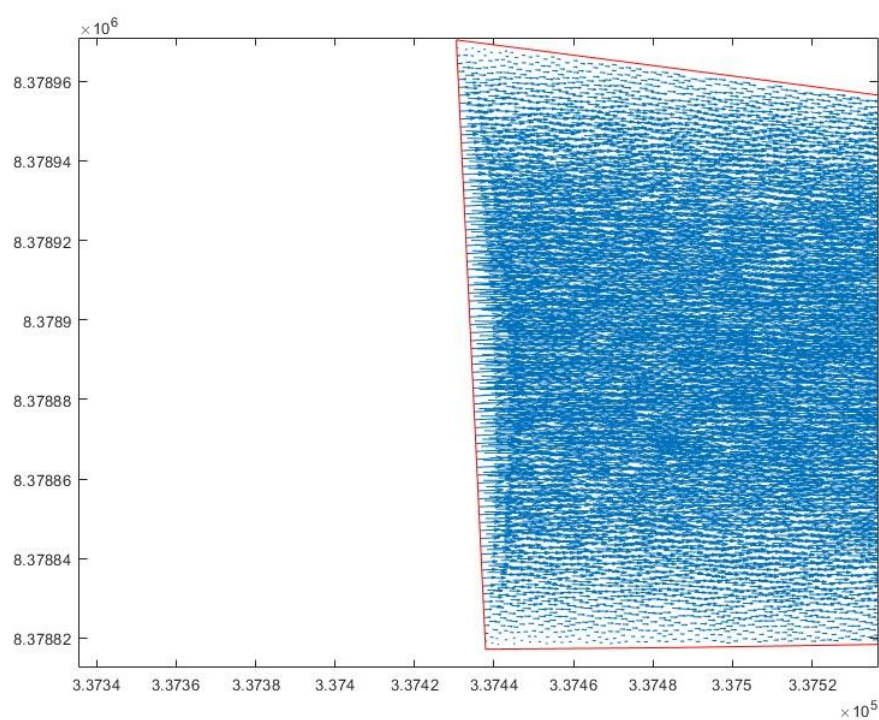


Figura 10 – Entrada do domínio com o campo de velocidades.

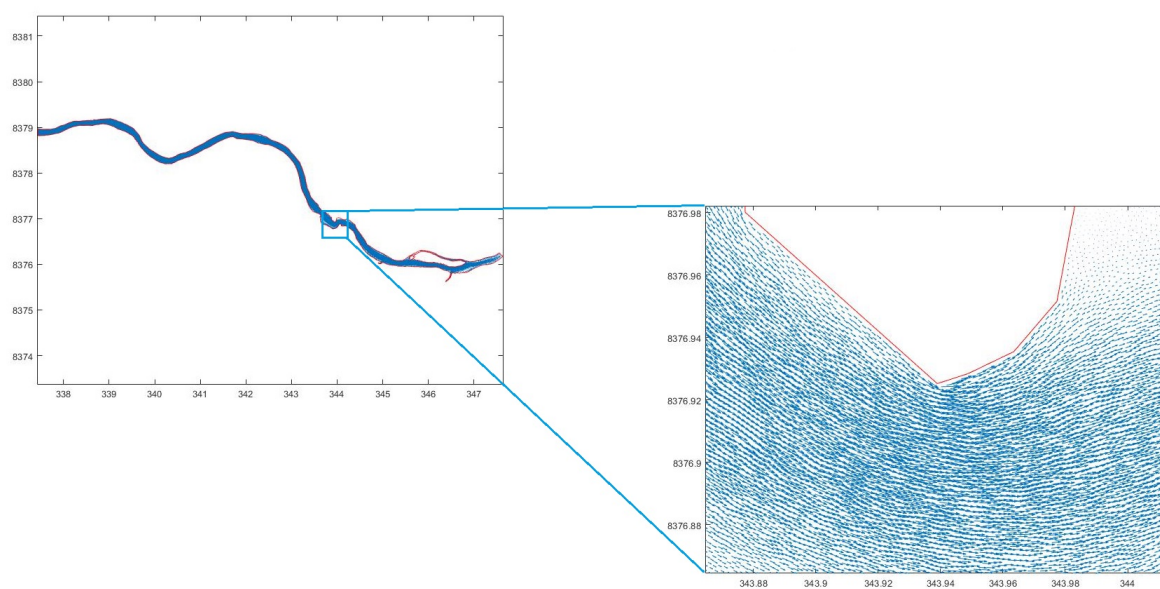
Fonte: Autora

Figura 11 – Campo de velocidades: via Navier-Stokes.

Fonte: Autora

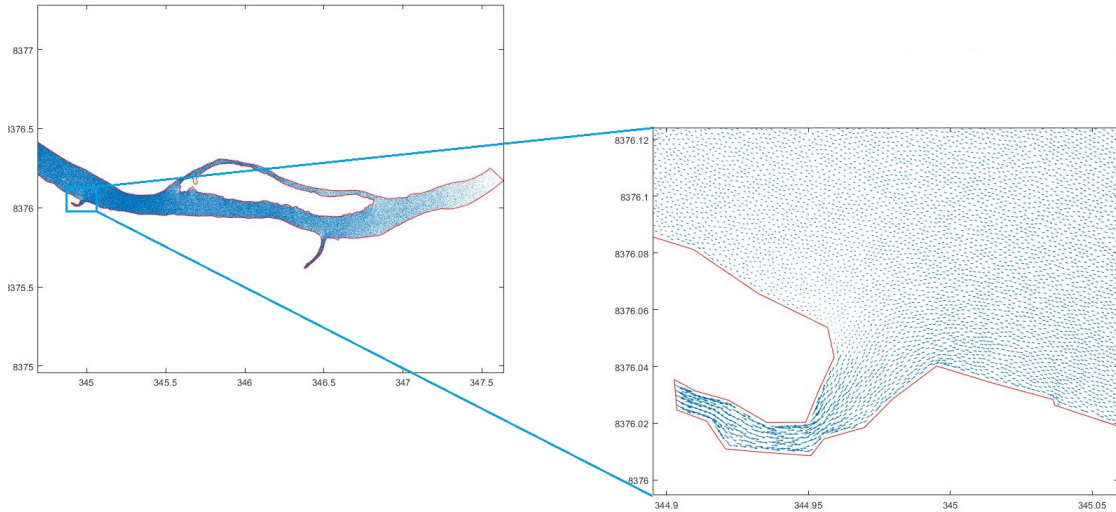


Figura 12 – Campo de velocidades: via Navier-Stokes, na entrada do córrego.

Fonte: Autora

6.2 Análise e construção dos resultados

Para implementação do código utilizando o método de elementos finitos, é necessário fazer os cálculos em um elemento de referência e depois encontrar a solução no elemento que estamos trabalhando, como mostramos na Figura 13 a seguir:

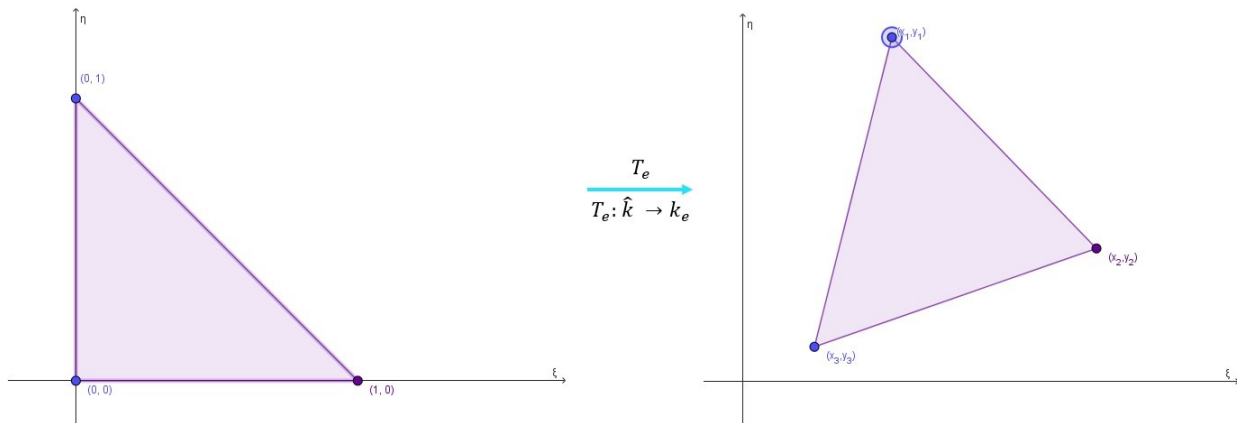


Figura 13 – Transformação afim.

Fonte: Autora

O programa utilizado para obter os resultados foi o MATLAB, que é muito adotado no meio acadêmico e nas engenharias para geração de resultados numéricos. A parte técnica da implementação é possível ver em Krindges (2011), Wolmuth (2009) e Silva (2022), contendo em seus anexos ou no corpo do texto toda a teoria para empregar o método de elementos finitos no âmbito computacional.

O código utilizado para implementação tem como referência principal [Silva \(2022\)](#). Através de algumas adaptações, foi possível criar cenários para analisar o comportamento de um poluente qualquer no Rio das Mortes. Vale ressaltar, que os dados dos parâmetros são heurísticos, pois até o momento não foram coletados materiais.

Para fins de utilização futura do código, é necessário acrescentar algumas informações. Como já descrito anteriormente, a malha foi construída no sentido anti-horário e as coordenadas estão em quilômetros. Os campos de velocidade dos três rios (Rio das Mortes, Ribeirão Antártico e o córrego) encontram-se com as unidades de medida em km/dia, e são sempre os mesmos independentemente do cenário utilizado. Nestes experimentos, consideramos que a fronteira não varia com o tempo, ou seja, o rio não tem cheia nem baixa, apenas um nível de água.

A escolha das unidades de medida em km/dia deve-se ao fato de que, durante a resolução do sistema linear, se usarmos as unidades de medida fornecidas pelos dados das coordenadas (em metros), teremos números muito grandes, o que pode causar erros de arredondamento ao resolver o sistema. Portanto, é melhor trabalharmos com unidades de medidas maiores, neste caso, quilômetros por dia. A seguir, apresenta-se a Tabela 2 com dois cenários e, em seguida, avalio os resultados gráficos obtidos.

Tabela 2 – Parâmetros dos cenários.

Parâmetros	Cenário 1	Cenário 2	Unidade
Δt	0,05	0,05	passo no tempo
α	0,2	0,2	km^2/dia
σ	24×10^{-4}	24×10^{-4}	$1/dia$
g_1	0	24×10^{-12}	km/dia
g_2	24×10^{-3}	24×10^{-3}	km/dia
g_3	0	24×10^{-6}	km/dia
g_4	0	24×10^{-6}	km/dia
k_5	0	24×10^{-5}	km/dia
k_6	0	24×10^{-5}	km/dia
k_7	0	24×10^{-5}	km/dia
k_8	0	0	km/dia
k_9	0	24×10^{-5}	km/dia
k_{10}	0	24×10^{-5}	km/dia
k_{11}	0	24×10^{-5}	km/dia
Re	100	100	-

Para análise destes cenários, escolhemos quatro pontos no rio, que vão servir de apoio para analisar a estabilidade do poluente, ou seja, com esses pontos é possível verificar que a partir de um certo número de iterações, o gráfico se estabiliza, isto quer dizer que encontramos a solução numérica aproximada para o cenário escolhido. A seguir, apresentamos a Figura 14 que contém os pontos que serão utilizados para testar numericamente esta estabilidade.

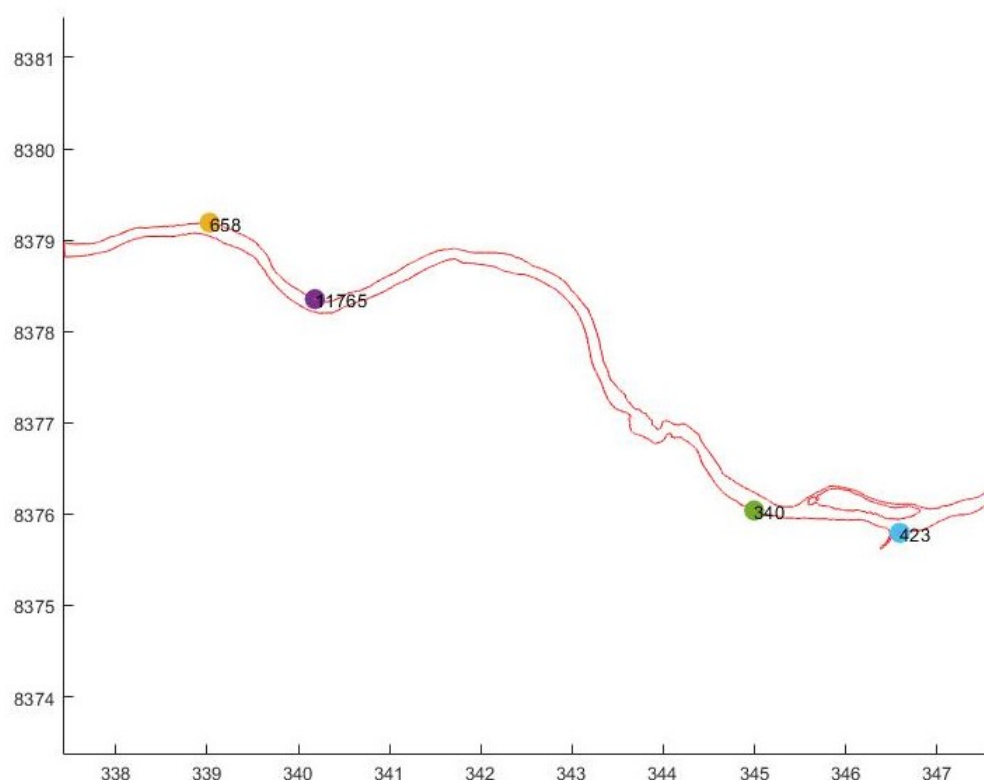


Figura 14 – Pontos selecionados para análise.

Fonte: Autora

Neste primeiro cenário, criamos uma situação em que a única fonte de poluição é o curso de água a montante do qual se localiza a mineradora, e todos os outros parâmetros foram considerados iguais a zero. Foram realizadas 3000 iterações, mas a partir de 120 iterações, que é o equivalente a 6 dias, é possível perceber que a poluição se estabiliza, isto é, a quantidade poluente que entra e sai é proporcional, fazendo assim com que a variação da poluição se mantenha constante. A Figura 15 nos mostra a partir de que iteração a quantidade de poluente se estabiliza.

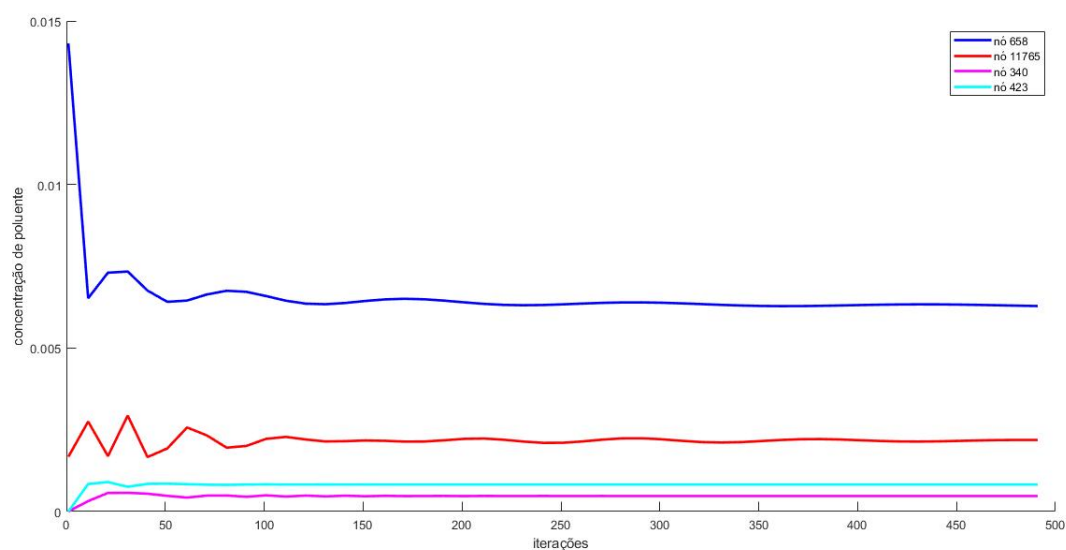


Figura 15 – Concentração de poluente ao longo do tempo para o cenário 1.

Fonte: Autora

A Figura 16 ilustra o desenvolvimento da poluição ao longo de 150 dias, já a Figura 17 representa a quantidade de poluição na primeira iteração e na última iteração.

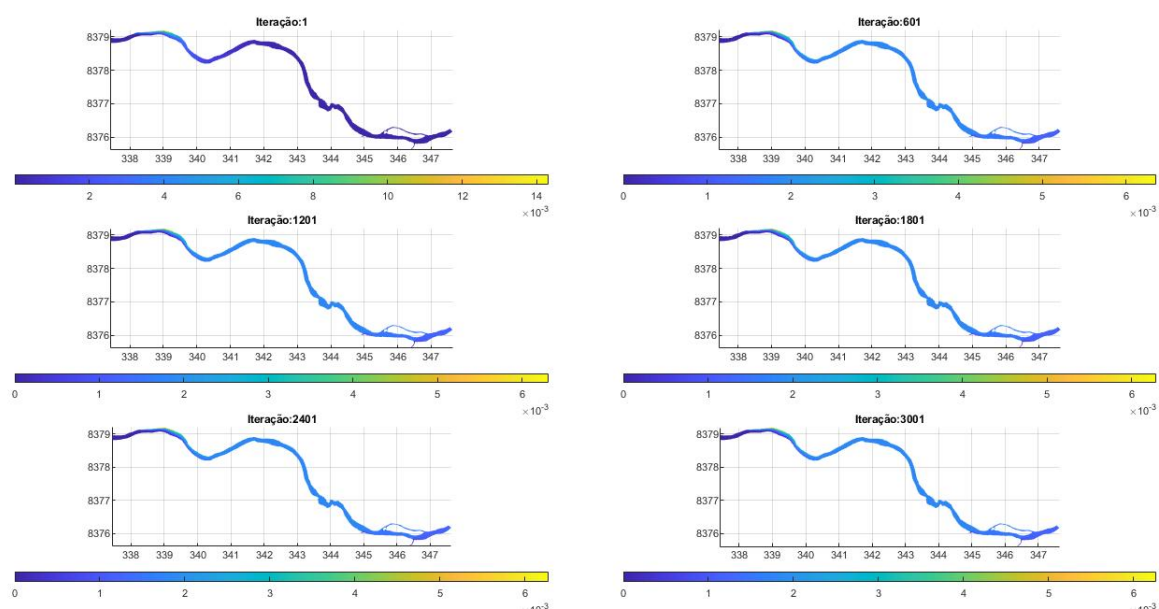


Figura 16 – Cenário 1: 150 dias.

Fonte: Autora

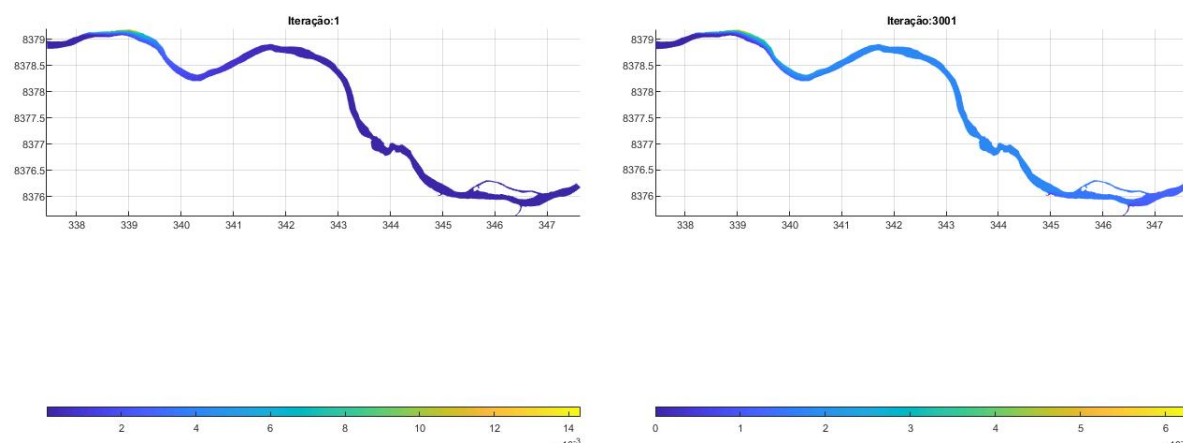


Figura 17 – Cenário 1: poluição inicial e final.

Fonte: Autora

Na Figura 18 temos uma imagem ampliada na região da mineradora, após 150 dias de poluição efetiva.

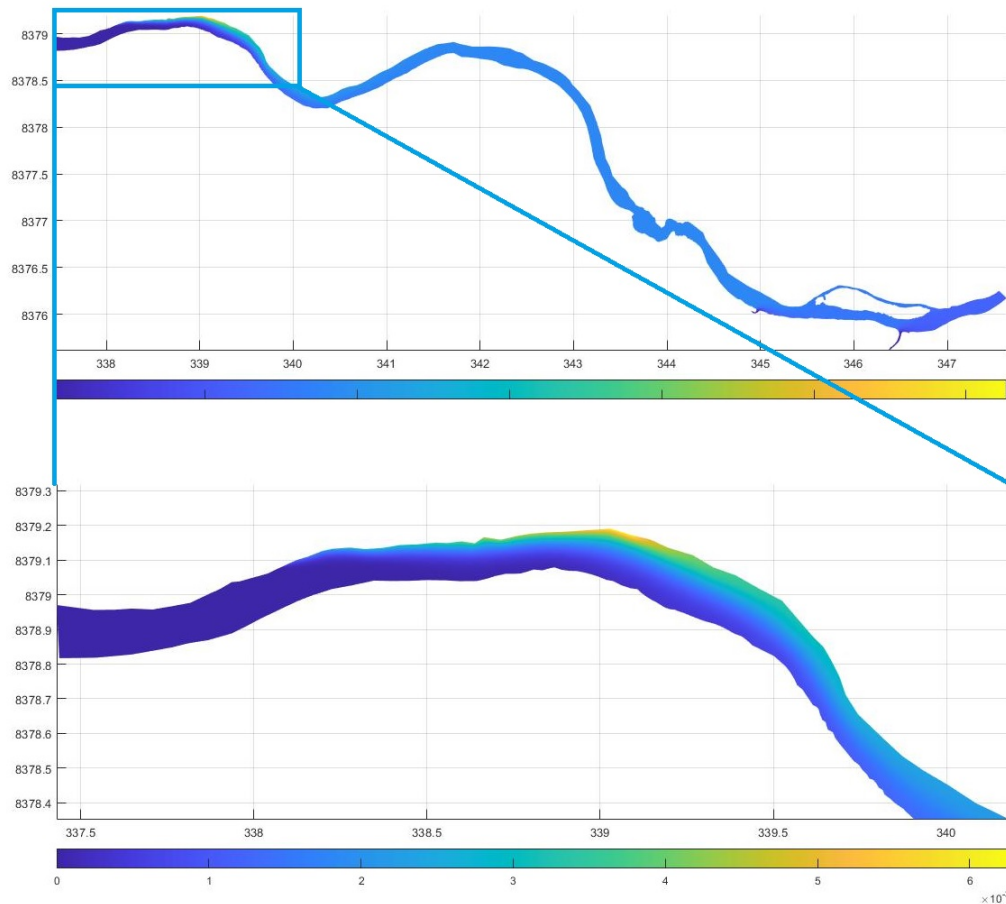


Figura 18 – Cenário 1: destaque na região da mineradora.

Fonte: Autora

Com os dados da Tabela 2, ilustramos a seguir o cenário 2, em que aplicamos poluente na região da mineradora, do córrego e do ribeirão Antártico. Entre o ribeirão Antártico e a saída do rio, está localizada a condição de fronteira k_8 , que consideramos igual a 0. Nas outras condições colocamos uma perda de poluente baixa e analisamos o resultado após 3000 iterações. A Figura 19 mostra a concentração de poluente ao longo do tempo, neste a estabilidade numérica é atingida após 2500 iterações, o equivalente a 125 dias.

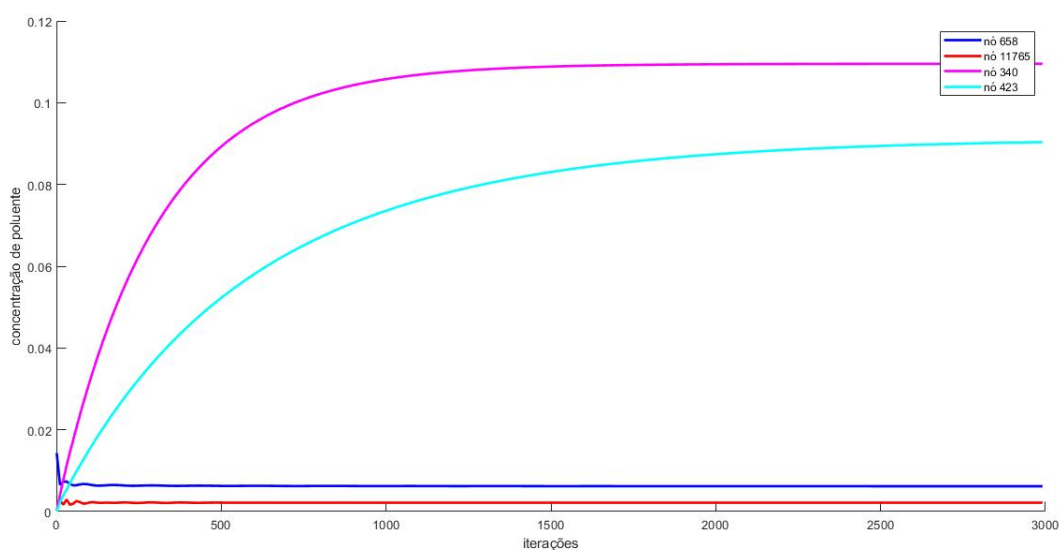


Figura 19 – Concentração de poluente ao longo do tempo para o cenário 2.

Fonte: Autora

Nas Figuras 20 e 21, temos a evolução do poluente ao longo de 150 dias. Vale ressaltar que neste caso a estabilidade da concentração do poluente só pode ser vista nas 2 últimas imagens da Figura 20.

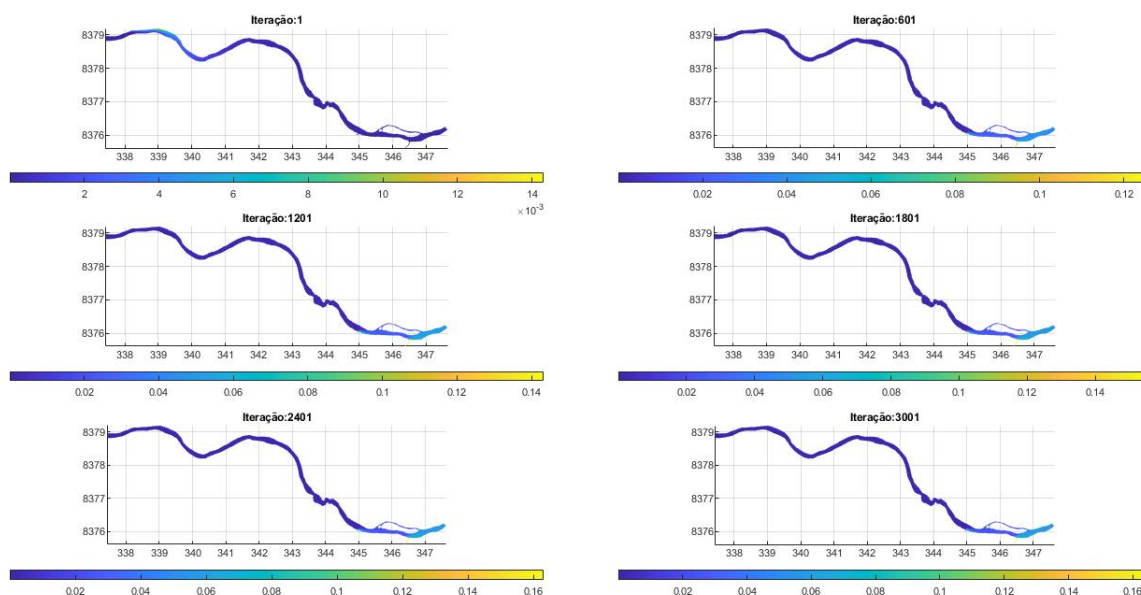


Figura 20 – Cenário 2: 150 dias.

Fonte: Autora

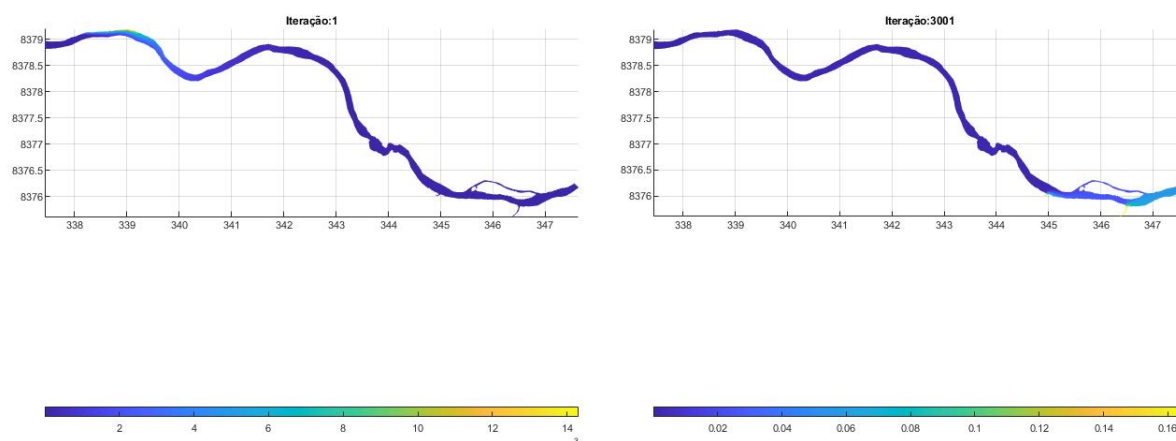


Figura 21 – Cenário 2: poluição inicial e final.

Fonte: Autora

As Figuras 22 e 23 destacam a região da ilha e, na primeira apresentamos a região da ilhota e como se comporta o poluente naquele lugar. Já a segunda faz evidência no córrego e no ribeirão Antártico. Nestes é possível perceber como é a entrada de poluente no rio pelos riachos, esta que, por sua vez, ocasionada pelo campo de velocidades.

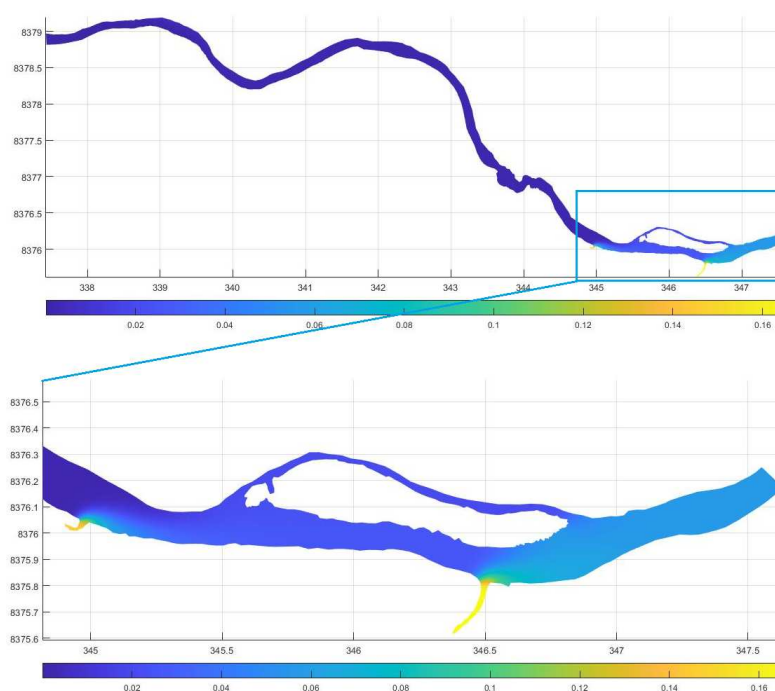


Figura 22 – Cenário 2: destaque na região da ilha.

Fonte: Autora

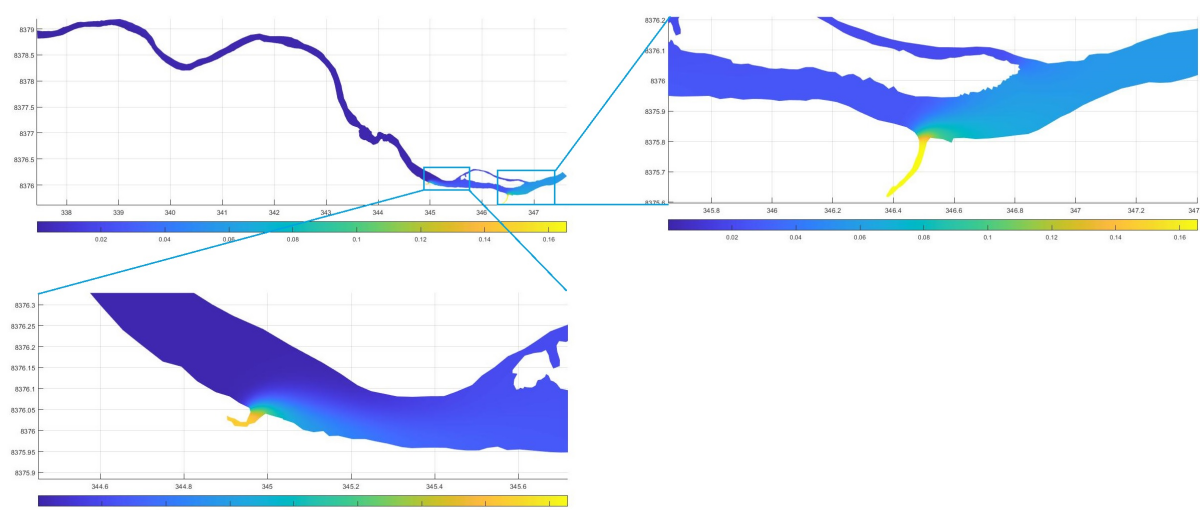


Figura 23 – Cenário 2: destaque no córrego e no ribeirão Antártico.

Fonte: Autora

A seguir apresentamos as considerações finais a respeito desta pesquisa, e a possibilidade de trabalhos futuros.

7 Considerações Finais e trabalhos futuros

Durante o estudo de caso realizado no Rio das Mortes, foi possível identificar a presença de um determinado poluente, que neste caso não foi especificado pois não temos nenhum dado a respeito de alguma substância tóxica no local. Sendo assim fizemos uma análise para mostrar como seria o comportamento de um poluente caso ele seja despejado no rio, os resultados foram satisfatórios, pois vimos que a tanto a equação de Navier-Stokes, quanto a equação de difusão-advecção cumprem o seu papel descrevendo a ação dos materiais tóxicos. No entanto, é importante considerar outros fatores que influenciam a dispersão de poluentes nessa região específica, como as características hidrodinâmicas do rio, as condições meteorológicas locais e a interação com a flora e fauna aquáticas.

Devido à falta de referências bibliográficas sobre os parâmetros específicos utilizados na equação de difusão-advecção, tornou-se imprescindível realizar um estudo aplicado para estabelecer esses valores. Essa abordagem permitirá uma melhor compreensão da dinâmica de dispersão dos poluentes no meio aquático do Rio das Mortes e fornecerá informações mais confiáveis para análises futuras.

Uma proposta interessante para trabalhos futuros é a realização de coletas de dados em campo, abrangendo diversas regiões do rio. Essa abordagem permitirá uma avaliação mais ampla da quantidade de poluentes ao longo do curso d'água, auxiliando na identificação de pontos críticos e na elaboração de estratégias de mitigação efetivas.

Além disso, a criação de um programa computacional geral, capaz de lidar com diferentes situações relacionadas à equação de difusão-advecção em meio aquático fluvial ou costeiro, se mostra uma necessidade. Esse recurso seria uma ferramenta valiosa para a realização de estudos futuros não apenas no Rio das Mortes, mas em outras regiões hidrográficas, contribuindo para avanços significativos no campo da modelagem ambiental. Futuramente seria interessante, se não necessário, acrescentar um fator, o estudo do domínio variando no tempo, com o qual pretendemos simular a presença de rios com regime de variação periódica de maiores amplitudes de largura, por exemplo, devidas sobretudo as condições sazonais.

No contexto da Biomatemática, esse estudo desempenha um papel fundamental na área da ecologia, pois proporciona insights importantes sobre o impacto dos poluentes na saúde dos ecossistemas aquáticos. Essas informações são essenciais para embasar tomadas de decisão voltadas à preservação e manejo sustentável dos recursos hídricos.

Por fim, é válido ressaltar que a participação da população, tanto local quanto global, é crucial para o sucesso e relevância de qualquer pesquisa. A conscientização pública sobre os problemas relacionados à poluição dos rios e a disseminação dos resultados obtidos

são fundamentais para incentivar ações coletivas e políticas ambientais mais eficazes, promovendo o avanço tecnológico e o bem-estar da sociedade como um todo.

Referências

- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações Diferenciais com Aplicações*. Harbra, S. Paulo. Citado na página 15.
- Bernardes, M. (1998). Poluição em corpos aquáticos de baixa circulação: modelagem e simulação numérica. Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP. Citado na página 23.
- Cantão, R. F. (1998). Modelagem e simulação numérica de derrames de óleo no canal de são sebastião. Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 30.
- Diniz, G. L. (2003). *Dispersão de Poluentes num Sistema ar-água: modelagem, aproximação e aplicações*. Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, Campinas/SP. Citado 5 vezes nas páginas 23, 30, 34, 35 e 37.
- IBGE (2010). Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Cartas e mapas. Disponível em <https://portaldemapas.ibge.gov.br/portal.php#homepage> Acesso em: 21/02/2023. Citado na página 17.
- Inforzato, N. F. (2008). *Dispersão de Poluentes num Sistema ar-água: modelagem matemática, aproximação numérica e simulação computacional*. Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 30.
- Krindges, A. (2011). *Modelagem e Simulação Computacional de um Problema Tridimensional de Difusão-Advecção com Uso de Navier-Stokes*. Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP. Citado 5 vezes nas páginas 15, 23, 27, 37 e 41.
- Lima, J. E. F. W. (2001). Recursos hídricos no brasil e no mundo. Relatório técnico, Embrapa, Planaltina. Citado na página 17.
- Marchuk, G. I. (1986). *Mathematical models in environmental problems: studies in mathematics and its applications*. North-Holland, Netherlands. Citado na página 24.
- Melo, T. L., L.Tejerina-Garro, F., e Melo, C. E. (2007). Diversidade biológica da comunidade de peixes no baixo rio das mortes, mato grosso, brasil. *Revista Brasileira de Zoologia*, 24:657–665. Citado na página 17.
- Mistro, D. C. (1992). O problema da poluição em rios por mercúrio metálico: Modelagem e simulação numérica. Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP. Citado na página 23.

- Nápolis, P. M. M. (2010). *Políticas Públicas na Bacia Hidrográfica do Rio das Mortes Mato Grosso-Brasil: Educação Ambiental para Vidas*. Tese de Doutorado, CCBS-UFSCar, S. Carlos/SP. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 20.
- Oden, J. T., Backer, E. B., e Carey, G. F. (1981). Finite elements an introduction. In *Finite Element Method*, volume 1. Prentice-Hall, N. Jersey. Citado na página 37.
- Okubo, A. (1980). *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*. Springer, N. York. Citado na página 24.
- Oliveira, R. F. (2003). *O comportamento evolutivo de uma mancha de óleo na Baía de Ilha Grande, RJ : modelagem, análise numérica e simulações*. Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP. Citado na página 23.
- Silva, G. S. (2022). *Modelagem, Aproximação Numérica e Simulação Computacional de Impacto Ambiental em Meio Fluvial: o Rio Tocantins no Município de Imperatriz (MA)*. Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP. Citado 9 vezes nas páginas 15, 22, 23, 27, 33, 37, 41, 42 e 54.
- TerraMetrics (2012). Mapa Rio das Mortes, Nova Xavantina - MT. Disponível em <https://www.google.pt/maps/place/Nova+Xavantina,+MT,+78690-000/@-14.6469556,-52.4759005,11985m/data=!3m1!1e3!4m6!3m5!1s0x936e6cc89e0069eb:0xd91de61c262dab44!8m2!3d-14.6768999!4d-52.3532892!16s%2Fm%2F09rt60q?hl=pt-PT> Acesso em: 21/02/2023. Citado na página 21.
- Vásquez, C. S. J. (2005). *Comportamento Evolutivo de Descarga de Água de Produção decorrente de Atividades OFFSHORE: tratamento numérico e simulação computacional*. Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP. Citado na página 23.
- Vianna, R. C., Jr., C. C. V., e Vianna, R. M. (2008). Os recursos de água doce no mundo – situação, normatização e perspectiva. *Revista Da Faculdade De Direito - JURIS*, 11:247–270. Citado na página 17.
- Wolmuth, L. D. (2009). Modelagem e simulação do comportamento evolutivo de poluentes em corpos aquáticos de grande extensão: o caso da represa do rio manso. Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, Campinas/SP. Citado 5 vezes nas páginas 15, 23, 28, 37 e 41.

APÊNDICE A – Perfil de Velocidade

Para determinar o perfil de velocidade do rio, foram necessárias fazer algumas calibrações nos dados coletados. Aos 22 dias do mês de janeiro de 2023, fizemos uma coleta da velocidade do rio através de garrafas, onde a soltamos a em um determinado ponto do rio, em seguida medimos o tempo gasto para percorrer uma determinada distância. Os dados foram obtidos nas seguintes condições:

- **Largura média do Rio:** 230 metros;
- **Distância percorrida:** 1510 metros;
- **Tempo gasto:** 1323 segundos e
- **Velocidade máxima:** 1,1413m/s.

No entanto nosso domínio estudado apresenta uma largura de 153.4142 metros, então para obter a velocidade máxima neste local de acordo com [Silva \(2022\)](#), seguimos os seguintes passos:

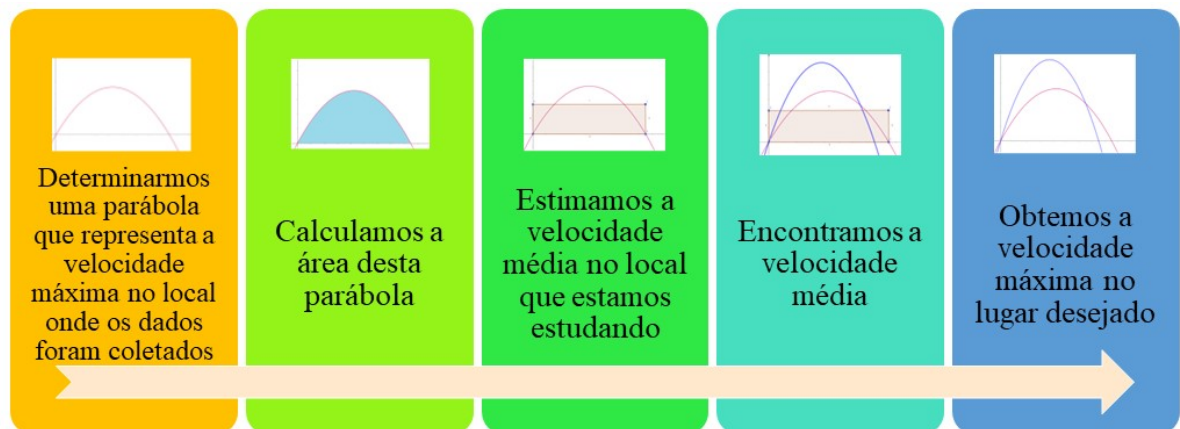


Figura 24 – Como obter a velocidade máxima.

Seja $f_1(x) = ax(x - L_1)$ para a primeira velocidade obtida, onde L_1 é a equivalente a 230 metros. Com as condições que temos sobre $f_1(x)$, é possível determinar o valor do coeficiente a .

- $f_1(0, 0)$;
- $f_1(230, 0)$ e

- $f_1(115, 1.1413)$.

Fazendo os cálculos obtemos que $a = -\frac{1.1413}{115^2}$, então $f_1(x) = -\frac{1.1413}{115^2} \cdot x(x - 230)$. Após determinar a função, agora podemos ir em busca de calcular a área da região parabólica e em seguida encontrar a velocidade média da região a ser estudada. Para isso vamos utilizar a seguinte equação:

$$V_{m_1} = \frac{1}{L_1} \int_{L_1} f_1(x) dx = \frac{1}{230} \int_0^{230} -\frac{1.1413}{115^2} \cdot x(x - 230) dx \quad (\text{A.1})$$

Resolvendo a equação (4.1) obtemos o seguinte resultado:

$$V_{m_1} = 0.7609 m/s. \quad (\text{A.2})$$

Por outro lado temos que V_{m_1} pode ser obtido da seguinte forma:

$$V_{m_1} = \frac{\text{Vazão}}{\text{Área}} = \frac{\text{Vazão}}{\text{Largura} \times \text{Profundidade}} = \frac{\text{Vazão}}{230 \cdot P}. \quad (\text{A.3})$$

Se considerarmos que a profundidade é a mesma ao longo de todo o rio, temos que a velocidade média ao longo do problema é a seguinte:

$$V_{m_2} = \frac{\text{Vazão}}{\text{Área}} = \frac{\text{Vazão}}{\text{Largura} \times \text{Profundidade}} = \frac{\text{Vazão}}{153.4142 \cdot P}. \quad (\text{A.4})$$

Fazendo alguns ajustes em V_{m_1} e substituindo a equação (4.4) em (4.3), temos:

$$V_{m_1} = \frac{V_{m_2}}{1.62} \iff V_{m_2} = V_{m_1} \cdot 1,62 \iff V_{m_2} = 1.1407 m/s \quad (\text{A.5})$$

Seja $f_2(x) = bx(x - L_2)$, onde $L_2 = 142$ é a função que determina a parábola que forma o perfil de velocidades no corte feito para o estudo do problema. Temos as seguintes informações:

- $f_2(0, 0)$;
- $f_2(153.4142, 0)$ e
- $f_2(76.7071, q)$.

Deste modo obtemos que $b = -\frac{q}{71^2}$. Substituindo na equação a seguir, temos que:

$$V_{m_2} = \frac{1}{L_2} \int_{L_2} f_2(x) dx \iff 1.1407 = \frac{1}{153.4142} \int_0^{153.4142} -\frac{q}{76.7071^2} x(x - 153.4142) dx \quad (\text{A.6})$$

Resolvendo a equação (4.6), obtemos:

$$q = 1.7110m/s \tag{A.7}$$

e conseqüentemente,

$$b = -2.9080 \times 10^{-4} \tag{A.8}$$

Portando a função que modela o perfil parabólico de entrada do rio é $f_2(x) = -2.9080 \times 10^{-4}x(x - 153.4142)$.

APÊNDICE B – Código Fonte

Código-fonte 1 – Perfil de velocidades

```

1 clear
2 clc
3 load('gab_anti_horario.mat') %arquivo que contem os dados das
   coordenadas e dos elementos de fronteira
4 format short
5
6 %%Construcao da parabola do perfil de velocidade na entrada
   do Rio das Mortes
7 %
8 %%%-----Determinar a velocidade media
   -----%%%
9 %
10 L1=230; %largura do rio onde foram feitas as medicoes
11 a1=-(1.1413/((L1/2)^2)); %coeficiente da f1(x)
12 syms x
13 f1(x)=a1*x*(x-L1); %funcao que determina o perfil de
   velocidade onde foram feitas as medicoes
14 Vm1=(1/L1)*(int (f1(x),x,0,230)); %calcular a area sob a
   curva para determinar a velocidade media
15 %
16 %%%-----Determinar a velocidade media
   -----%%%
17 %L2 = sqrt((coordenadas(1,1)-coordenadas(693,1))^2 + (
   coordenadas(1,2)-coordenadas(693,2))^2);
18 L2=norm((coordenadas(1,:)-coordenadas(693,:)),2); %largura do
   local onde estamos trabalhando
19 c=L1/L2; %obtido da equacao V=Vazao/area
20 Vm2=Vm1*c; %velocidade media no local onde estamos
   trabalhando
21 If2=-(4/L2^3)*(int(x*(x-L2),x,0,L2)); %calcular a area sob a
   funcao f2(x)
22 q=Vm2/If2 ; %velocidade maxima do rio no local onde estamos
   trabalhando
23 b=-((4*q)/(L2^2)); %coeficiente da f2(x)

```

```

24 f2(x)=b*x*(x-L2); %funcao que indica o perfil de velocidade
    do local onde estamos trabalhando
25 %
26 %% Transformacao Linear
27 %%%-----Dados de entrada do dominio
    -----%%%
28 %
29 x1=coordenadas(1,1); %coordenadasenada do no 1 no eixo x
30 y1=coordenadas(1,2); %coordenadasenada do no 1 no eixo y
31 x693=coordenadas(693,1); %coordenadasenada do no 623 no eixo
    x
32 y693=coordenadas(693,2); %coordenadasenada do no 623 no eixo
    y
33 %%%-----Determinando o x-vertice e o y-
    vertice-----
34 %
35 m=(y1-y693)/(x1-x693); %coeficiente da reta que passa pelas
    coordenadasenadas da entrada do dominio
36 n=((y693-y1)/(x1-x693))*x1 + y1; %coeficiente da reta que
    passa pelas coordenadasenadas da entrada do dominio
37 c1=(x1+x693)/2; %media do comprimento do eixo x
38 c2=(y1+y693)/2; %%media do comprimento do eixo y
39 xv=(1/(m^2+1))*(c1+c1*m^2-m*q*sqrt(m^2+1)); %xv do vetor que
    indica velocidade maxima do rio
40 xv=double(xv); %determina o valor do xv no formato decimal
41 yv=(-xv/m)+c2+(c1/m); %%xv do vetor que indica velocidade
    maxima do rio
42 yv=double(yv); %determina o valor do yv no formato decimal
43 nos=1:693;
44 nos=[nos 1];
45 %%%-----Transformacao Linear
    -----%%%
46 %
47 front693=find(elementos_frenteira(:,1)==693); %procura na
    primeira coluna do elementos_frenteira todos os elementos
    que tem seus vertices sob a linha 693
48 front693=elementos_frenteira(front693,2:3); %determina os nos
    dos elementos encontrados

```

```

49 front693=[front693(:,1);front693(end,2)]; %retira os nos
    repetidos
50 %
51 for i=1:length(front693)
52     D(i)=norm(coordenadas(front693(i,:),:)-coordenadas(front693
        (1,:),2); %distancia de cada no ate o no inicial
53 end
54 x=D;
55 y=zeros(size(x));
56 for i=1:length(x)
57     [X,Y]=transformacao(x(i),y(i),x1,x693,xv,y1,y693,yv,L2,q)
        ; %transformacao linear do eixo x
58     ptos_eixox(i,:)=[X Y]; %associa os pontos do eixo x a
        transformacao linear
59     p(i)=b*x(i)*(x(i)-L2); %parabola do perfil de velocidade
        com i variando nos nos do perfil de entrada
60     [X,Y]=transformacao(x(i),p(i),x1,x693,xv,y1,y693,yv,L2,q)
        ; %transformacao linear da parabola
61     ptos_parabola(i,:)=[X Y]; %associa os pontos da parabola
        a transformacao linear
62 end
63 % figure(2)
64 % plot ([x693;x1],[y693;y1]) %visualizacao dos pontos
    extremos
65 % %plot (xv,yv,'r*')
66 % %plot(coordenadas(nos,1),coordenadas(nos,2),xv,yv,'m*') %
    visualizacao do desenho do rio e do ponto que ira definir
    o xv e yv
67 % view([0 90]) %visualizar o grafico completo
68 % axis equal %mesmas unidades de comprimento no grafico
69 % hold on %gera um grafico em cima do outro
70 % quiver(ptos_eixox(:,1),ptos_eixox(:,2),ptos_parabola(:,1)-
    ptos_eixox(:,1),ptos_parabola(:,2)-ptos_eixox(:,2),'c')
    %visualizacao dos vetores, lembrar que o 0 plota o tamanho
    real do vetor
71 % axis equal
72 vel_entrada=double([ptos_eixox(:,1) ptos_eixox(:,2)
    ptos_parabola(:,1)-ptos_eixox(:,1) ptos_parabola(:,2)-
    ptos_eixox(:,2)]);

```

```

73 save vel_entrada vel_entrada
74 function [X,Y]= transformacao(x,y,x1,x693,xv,y1,y693,yv,L2,q)
75 T1 = [((x1-x693)/L2) ((1/(2*q))*(2*xv-x1-x693));((y1-y693)/L2
      ) ((1/(2*q))*(2*yv-y1-y693))];
76 T2 = [x693;y693];
77 a = T1*[x;y]+T2; %matriz da transformacao linear
78 X = a (1) ; %coordenadasenada do X
79 Y = a (2) ; %coordenadasenada do Y
80 end

```

Código-fonte 2 – Programa Principal

```

1 clear all
2 clc
3 % arquivo malha%
4 load('gab_anti_horario.mat')
5 load('nos_contorno.mat')
6 load('vel_entrada.mat')
7 ntn=size(coordenadas,1);
8 %
9 continuacao=input('Continuacao de outra simulacao? (responda
    1 para sim ou 0 para nao) = ');
10 n_iteracoes=input('Numero de iteracoes = ');
11
12 if continuacao==1
13     nome_arquivo=input('De o nome do arquivo para continuacao
        : ');
14     load(nome_arquivo)
15     v1=solucao(:,size(solucao,2)-1:size(solucao,2));
16     pol1=solupol(:,size(solupol,2));
17 else
18     solucao=[];
19     iteracao=[];
20     solupol=[];
21     nome_arquivo=strcat('CENARIOteste_', '10');
22     save(nome_arquivo, 'solucao', 'iteracao', 'solupol', '-v7.3')
23     v1=zeros(ntn,2);
24     pol1=zeros(ntn,1);
25 end
26 proximo=nome_arquivo(end-1:end);

```

```

27 proximo=str2num(proximo);
28 proximo=proximo+1;
29 proximo=num2str(proximo);
30 %%
31 phii_phij=[1/12 1/24 1/24; 1/24 1/12 1/24; 1/24 1/24
1/12];
32 dfipsi_dfipsi=[1/2 0 -1/2;0 0 0; -1/2 0 1/2];
33 dfijpsi_dfieta=[0 0 0;1/2 0 -1/2;-1/2 0 1/2];%
dfcsi_dfieta
34 dfieta_dfipsi=[0 1/2 -1/2;0 0 0;0 -1/2 1/2];%
dpjeta_dficsi
35 dfijeta_dfieta=[0 0 0;0 1/2 -1/2;0 -1/2 1/2];
36 %
37 dhipsi_j_phii=[1/6 0 -1/6;1/6 0 -1/6;1/6 0 -1/6]; %dphi
/dpsi * phii
38 dphijeta_phii=[ 0 1/6 -1/6;0 1/6 -1/6;0 1/6 -1/6];
39 %
40 elem_front1=[1/3 1/6;1/6 1/3]; %phii_phij
41 elem_front2=[1/2;1/2];% um phi
42
43 %Dados de entrada da Matriz%
44 nte=size(elementos,1);
45 ntn=size(coordenadas,1);
46 ntef=size(elementos_frenteira,1);
47 nf=elementos_frenteira(:,2:3);
48 nf=nf(:);
49 nf=sort(nf);
50 nf=unique(nf);
51 nf=nf(end);
52
53 teta1=24e-12;
54 teta2=24e-2;
55 teta3=24e-6;
56 teta4=24e-6;
57
58 kk5=24e-5;
59 kk6=0;
60 kk7=24e-5;
61 kk8=24e-5;

```

```
62 kk9=0;
63 kk10=24e-5;
64 kk11=24e-5;
65
66 band=zeros(ntef,1);
67
68 band(13124:13200)=1; %G1
69 band(12250:12779)=2; %G2
70 band(6037:6040)=3; %G3
71 band(5052:5057)=4; %G4
72 band(6796:6854)=5; %G5
73 band(1:5051)=6; %G6
74 band(5058:6036)=7; %G7
75 band(6041:6795)=8; %G8
76 band(6855:12249)=9; %G9
77 band(12780:13123)=10; %G10
78 band(13201:14724)=11; %G11
79
80 %Parametros fundamentais%
81 dt=0.05;
82 Re=100; % numero de reynolds
83 alpha=0.2; % coeficiente de difusao
84 sigma=24e-10;% decaimento
85
86 %Dados de entrada%
87
88 fronteira4=nos_mortes;
89
90 %co_pre=fronteira2;
91 inco_pre=(1:ntn)';
92 %inco_pre(co_pre)=[];
93
94 %
95 inco_v1=[nf+1:ntn]; %co_pre'];% estou tirando a fronteira de
    entrada,as laterais e as do disco.
96 inco_v1=sort(inco_v1);
97 %inco_v1(cacau)=[];
98 inco_v1=inco_v1';
99 %
```

```

100 co_v1=(1:ntn)';
101 co_v1(inco_v1)=[];
102
103 % % cognitاس e incognitas%
104 inco_v2=inco_v1;
105 co_v2=co_v1;
106
107 if isempty(iteracao)==1
108     it_inicial=1;
109 else
110     it_inicial=iteracao(end)+1;
111 end
112
113
114
115 Mfront=zeros(2,3,nf);
116 MFIJ=zeros(2,6,nf);
117 parfor k=1:nf
118     MFIJ(:,:,k)=EIFFL_FRONT(elementos_frenteira(k,:));
119     Mfront(:,:,k)=trab_matriz_front(k,coordenadas,
120         elementos_frenteira,elem_front1,band,...
121         teta1,teta2,teta3,teta4,kk5,kk6,kk7,kk8,kk9,kk10,kk11
122         )
121 end
122 % I e J para a frenteira phii_phiij robin%
123 I_front_1=MFIJ(:,1:2,:); I_front_1=I_front_1(:);
124 J_front_1=MFIJ(:,3:4,:); J_front_1=J_front_1(:);
125
126 % I e J para a frenteira um_phii Von Neumann%
127 I_front_2=MFIJ(:,5,:); I_front_2=I_front_2(:);
128 J_front_2=MFIJ(:,6,:); J_front_2=J_front_2(:);
129
130 % valores para as condicoes de fronteiras
131
132 Vfront1=Mfront(:,1:2,:); Vfront1=Vfront1(:);
133 Vfront2=Mfront(:,3,:); Vfront2=Vfront2(:); %alterei aqui
134
135 %Montando as matrizes sparse para as fronteiras%
136

```

```

137 R=sparse(I_front_1,J_front_1,Vfront1,ntn,ntn); %Sparse para
    front phi_phij
138 S=sparse(I_front_2,1,Vfront2,ntn,1); %sparse para front phi
139 parfor ke=1:nte
140     %      COORD=[coordenadas(elementos(ke,1),:); %
    coordenadas(elementos(ke,1),2);
141     %      coordenadas(elementos(ke,2),:); %
    coordenadas(elementos(ke,2),2);
142     %      coordenadas(elementos(ke,3),:)]]; %
    coordenadas(elementos(ke,3),2)]
143     MMM(:,:,ke)=EIFFL_II_JJ(elementos(ke,:));%armazenei as
    phi_phij
144 end
145 % valores para I e J empilhados%
146 I=MMM(:,1:3,:); I=I(:);
147 J=MMM(:,4:6,:); J=J(:);
148
149 for it=it_inicial:n_iteracoes
150     tic
151     if it<=it_inicial+0
152         % theta variando%
153         MM=zeros(3,12,nte);
154         MMM=zeros(3,6,nte);
155         WW=zeros(3,3,nte);
156
157
158         parfor ke=1:nte
159             %      COORD=[coordenadas(elementos(ke,1),:); %
    coordenadas(elementos(ke,1),2);
160             %      coordenadas(elementos(ke,2),:); %
    coordenadas(elementos(ke,2),2);
161             %      coordenadas(elementos(ke,3),:)]];
    %coordenadas(elementos(ke,3),2)]
162
163
164             MM(:,:,ke)=MATMP(ke,elementos,coordenadas,
    phii_phij,dfipsi_dfipsi,...
165             dfijpsi_dfieta,dfieta_dfipsi,dfijeta_dfieta,
    dphipsij_phii,dphijeta_phii);

```



```

166         WW(:, :, ke) = vel_media(ke, elementos, coordenadas, v1,
167             dphipsij_phii, dphijeta_phii); % subrotina
168     end
169     % valores para I e J empilhados%
170     % Valores para as matrizes M e PQ%
171     V1 = MM(:, 1:3, :); V1 = V1(:); % phi_phj
172     V2 = MM(:, 4:6, :); V2 = V2(:); % Gradiente phi_phj
173     V3 = MM(:, 7:9, :); V3 = V3(:); % dphix_phi
174     V4 = MM(:, 10:12, :); V4 = V4(:); % dphiy_phi
175     % Sparse para a matriz M fruto de phii_phij_global%
176     M = sparse(I, J, V1, ntn, ntn); % matriz esparsa para
        phi_phij
177     PQ = sparse(I, J, V2, ntn, ntn); % matriz esparsa para o
        gradiente
178     M1 = sparse(I, J, V3, ntn, ntn); % matriz esparsa para
        dphix_phi
179     M2 = sparse(I, J, V4, ntn, ntn); % matriz esparsa para
        dphiy_phi
180
181     WW = WW(:); % empilhamento dos dados para a velocidade
        media nos tres nos
182     %length(WW) teste
183     FF = sparse(I, J, WW, ntn, ntn); % esparsa para a velocidade
        media nos tres nos
184     % montando o b1_esterisco
185
186     b1_star = (1/dt)*M(inco_v1, :)*v1(:, 1) - ((1/dt)*M(inco_v1
        , co_v1) + (1/Re)*PQ(inco_v1, co_v1) + ...
187         FF(inco_v1, co_v1))*v1(co_v1, 1); %comentado geral
188     %montando o b2_asterisco
189     b2_star = (1/dt)*M(inco_v2, :)*v1(:, 2) - ((1/dt)*M(inco_v2
        , co_v2) + (1/Re)*PQ(inco_v2, co_v2) + ...
190         FF(inco_v2, co_v2))*v1(co_v2, 2); %comentado geral
191
192     % %comentado geral
193     NS_apr1 = (1/dt)*M(inco_v1, inco_v1) + (1/Re)*PQ(inco_v1,
        inco_v1) + FF(inco_v1, inco_v1);
194     NS_apr2 = (1/dt)*M(inco_v2, inco_v2) + (1/Re)*PQ(inco_v2,

```

```

        inco_v2)+FF(inco_v2,inco_v2);
195
196     % Resolvendo os sistemas para v1 e v2 aproximado
197     VE1=NS_apr1\b1_star;
198     VE2=NS_apr2\b2_star;
199
200     %
201     vel_star=zeros(ntn,2);
202     %
203     vel_star(inco_v1,1)=VE1; % abrange toda superficie e
        os no da fronteira cog_pressao
204     vel_star(inco_v2,2)=VE2; % abrange toda superficie e
        os no da fronteira cog_pressao
205     %      vel_star(cacau,1)=0.432e+02;% km/dia
206     %
207     vel_star(fronteira4,:)=rio_mortes;
208     %vel_star(fronteira4,2)=vel_entrada(:,3);
209     %corregos%
210     vel_star(nos_antartico,:)=rio_antartico;
211     vel_star(nos_juma,:)=rio_juma;
212     % vel_star(belavista,1)=0.43e+2;
213     % vel_star(capivara,1)=-0.43e+2;
214     % vel_star(stereza,1)=-0.43e+2;
215     %
216     bpre=-(1/dt)*M1(inco_pre,:)*vel_star(:,1)-(1/dt)*M2(
        inco_pre,:)*vel_star(:,2);
217     wp=PQ(inco_pre,inco_pre)\bpre;
218     pre=zeros(ntn,1);
219     pre(inco_pre)=wp; %calculo da pressao
220
221     %
222     b1=M(inco_v1,:)*vel_star(:,1)-dt*M1(inco_v1,:)*pre;%
        comentado geral
223     b2=M(inco_v2,:)*vel_star(:,2)-dt*M2(inco_v2,:)*pre;
224
225     %resolver o sistema
226
227     velocidade1=M(inco_v1,inco_v1)\b1;
228     velocidade2=M(inco_v2,inco_v2)\b2;

```

```

229         % Armazenando na matriz velocity12
230         v2=zeros(ntn,2);
231
232         %v2(fronteira4,1)=vel_rio;%velocidade na entrada do
           duto
233         v2(inco_v1,1)=velocidade1; % abrange toda superficie
           e os no da fronteira cog_pressao
234         v2(inco_v2,2)=velocidade2;
235
236         v2(fronteira4,:)=rio_mortes;
237         %v2(fronteira4,1)=ptos_parabola(:,1)-ptos_eixox(:,1);
238         %Corregos corrigidas%
239         v2(nos_antartico,:)=rio_antartico;
240         v2(nos_juma,:)=rio_juma;
241         % v2(cacau,1)=-0.43e+2;
242         % v2(bacuri,1)=-0.43e+2;
243         % v2(belavista,1)=0.43e+2;
244         % v2(capivara,1)=-0.43e+2;
245         % v2(stereza,1)=-0.43e+2;
246         %
247
248         % km/dia
249         % v2(cacau,1)=43.2;
250         % v2(fronteira4,2)=0.00923;%*dt*it;
251         % v2(fronteira4,1)=0.0025;%*dt*it;
252         % velocidade no dois passos%
253
254     else
255         v2=v1;
256     end
257     VPOL=zeros(3,3,nte);
258     parfor el=1:nte
259         VPOL(:,:,el)=vel_grad_phii(el,elementos,v1,v2,
           coordenadas,dhipsiij_phii,dphijeta_phii);
260     end
261     VPOL=VPOL(:);
262     G=sparse(I,J,VPOL,ntn,ntn);
263     %Equacao da Poluicao%
264     GE=M+(dt/2)*(alpha*PQ+sigma*M+R)+(dt/2)*G;

```

```

265     EL=(M-(dt/2)*(alpha*PQ+sigma*M+R)-(dt/2)*G)*pol1+dt*S;%dt
        *f
266     %
267     pol2=GE\EL;
268     v1=v2;
269     pol1=pol2;
270     % tetaco1=tetaco;
271     % tetaem1=tetaem;
272     %
273     it
274
275     if mod(it,10)==1
276         if size(solupol,2)<50
277             solucao=[solucao v2];
278             iteracao=[iteracao;it];
279             solupol=[solupol pol2];
280             save(nome_arquivo,'solucao','iteracao','solupol',
                '-v7.3')
281         else
282             solucao=v2;
283             iteracao=[iteracao;it];
284             solupol=pol2;
285             nome_arquivo=strcat('CENARIOteste_',proximo);
286             save(nome_arquivo,'solucao','iteracao','solupol',
                '-v7.3')
287             proximo=nome_arquivo(end-1:end);
288             proximo=str2num(proximo);
289             proximo=proximo+1;
290             proximo=num2str(proximo);
291         end
292     end
293     toc
294 end

```

Código-fonte 3 – Visualização Gráfica

```

1 clear
2 load('gab_anti_horario.mat')
3 load('vel_entrada.mat')
4 load('CENARIO1_10.mat')

```

```
5 load('nos_contorno.mat')
6 %%
7 %plot do campo de velocidade:
8 quiver(coordenadas(:,1),coordenadas(:,2),solucao(:,end-1),
        solucao(:,end))
9 hold on
10 plot(coordenadas(nos_rio,1),coordenadas(nos_rio,2),"red")
11 plot(coordenadas(nos_ilha,1),coordenadas(nos_ilha,2),"red")
12 axis equal
13
14 %%
15 %plot do perfil de poluicao
16 trisurf(elementos,coordenadas(:,1),coordenadas(:,2),solupol
       (:,end),'edgeColor','none','faceColor','interp')
17 axis equal
18 view([0 90])
19
20 %% plot do perfil de poluicao com varias imagens
21
22 nti=size(solupol,2);
23 p=floor(1+nti/10);
24 if mod(p,2)==0
25     p=p/2;
26 else
27     p=ceil(p/2);
28 end
29 k=1;
30 t=tilayout(p,2,'TileSpacing','Compact');
31 for i=1:10:nti
32     ax1=nexttile;
33     %ax1=subplot(p,2,k);
34     trisurf(elementos,coordenadas(:,1),coordenadas(:,2),
        solucao(:,i),'edgeColor','none','faceColor','interp')
35     axis equal
36     view([0 90])
37     str=strcat('Iteracao:',string(iteracao(i)));
38     title(str)
39     ax1.FontSize = 8;
40     k=k+1;
```

```
41 end
42 t.TileSpacing='compact';
43 t.Padding='compact';
44
45 %%
46 str = '1';
47 str={str, '862'};
48
49 for i=3:size(elementos_frenteira,1)
50     str{1,i}=mat2str(elementos_frenteira(i,2));
51 end
52
53 plot(coordenadas(elementos_frenteira(:,2),1),coordenadas(
54     elementos_frenteira(:,2),2),'.')
55 text(coordenadas(elementos_frenteira(:,2),1),coordenadas(
56     elementos_frenteira(:,2),2),str)
57
58 %%
59 A=zeros(size(elementos,1),1);
60
61 for i=1:size(elementos,1)
62     a(1)=norm(coordenadas(elementos(i,1),:)-coordenadas(
63         elementos(i,2),:),2);
64     a(2)=norm(coordenadas(elementos(i,1),:)-coordenadas(
65         elementos(i,3),:),2);
66     a(3)=norm(coordenadas(elementos(i,2),:)-coordenadas(
67         elementos(i,3),:),2);
68
69     v(1)=norm([solucao(elementos(i,1),end-1) solucao(
70         elementos(i,2),end)],2);
71     v(2)=norm([solucao(elementos(i,1),end-1) solucao(
72         elementos(i,3),end)],2);
73     v(3)=norm([solucao(elementos(i,2),end-1) solucao(
74         elementos(i,3),end)],2);
75
76     A(i,1)=min(a)/max(a);
77     A(i,2)=mean(a)*mean(v)/0.20;
78
79 end
```

```
72 figure
73 qm=A(:,1);
74 qm=sort(qm);
75 plot(qm)
76
77 figure
78 pe=A(:,2);
79 pe=sort(pe);
80 plot(pe)
81 %%
```