



**UNICAMP**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica

ALBERTO MARTINS

**Integral de Sugeno e o Teorema Fundamental  
do Cálculo *Fuzzy*-Aplicações**

Campinas

2023

Alberto Martins

# **Integral de Sugeno e o Teorema Fundamental do Cálculo *Fuzzy*-Aplicações**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica da Uni-  
versidade Estadual de Campinas como parte  
dos requisitos exigidos para a obtenção do  
título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Rodney Carlos Bassanezi

Este trabalho corresponde à versão final da  
Tese defendida pelo aluno Alberto Martins e  
orientada pelo Prof. Dr. Rodney Carlos Bas-  
sanezi.

Campinas

2023

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M366i Martins, Alberto, 1954-  
Integral de Sugeno e o teorema fundamental do cálculo fuzzy - aplicações /  
Alberto Martins. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Rodney Carlos Bassanezi.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Integrais fuzzy. 2. Cálculo fuzzy. 3. Teorema de representação de Riesz.  
I. Bassanezi, Rodney Carlos, 1943-. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

**Título em outro idioma:** Sugeno Integral and the fundamental theorem of fuzzy calculus - applications

**Palavras-chave em inglês:**

Fuzzy integrals

Fuzzy calculus

Riesz representation theorem

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Doutor em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

Rodney Carlos Bassanezi [Orientador]

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Michael Macedo Diniz

Lucy Tiemi Takahashi

**Data de defesa:** 10-03-2023

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0003-9710-8367>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/5055877630830889>

**Tese de Doutorado defendida em 10 de março de 2023 e aprovada  
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). RODNEY CARLOS BASSANEZI**

**Prof(a). Dr(a). MARCOS EDUARDO RIBEIRO DO VALLE MESQUITA**

**Prof(a). Dr(a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER**

**Prof(a). Dr(a). MICHAEL MACEDO DINIZ**

**Prof(a). Dr(a). LUCY TIEMI TAKAHASHI**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*À Deus, quem propicia a estabilidade e o equilíbrio do(s) Universo(s).  
Aos meus pais Mário e Glória (In Memoriam), referências para minha vida e a minha  
esposa Márcia que resignada e paciente acompanhou meu trabalho.*

# Agradecimentos

Aos meus pais (referências de vida) e a minha esposa Márcia pelos apoios recebidos.

Ao professor Rodney Carlos Bassanezi pela amizade e seguras orientações durante o mestrado e doutorado e ao professor Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira pelo importante incentivo e encorajamento para cursar o doutorado.

Aos professores Francisco Blasi, Ronaldo Passini, (ambos in Memoriam), exemplos de caráter e conduta, mestres que delinearam as sendas para minha carreira.

Aos professores João Frederico da Costa Azevedo Meyer, Makoto Anbe que despertaram visão e o prazer pelos estudos da Matemática.

Às IES PUC Campinas e Universidade Estadual de Campinas que em seus projetos Institucionais proporcionam ascensão social, conhecimentos científicos e humanísticos.

À banca que se disponibilizou para a leitura, avaliação e sugestões para aperfeiçoamento da tese.

Para a amiga e colega de turma Ariquele Ramos Rios, que além de proceder a digitação desse trabalho, colaborou com importantes sugestões, inserções e modificações para o aperfeiçoamento do texto

A minha família pela compreensão e respeito nas ausências em vários momentos para dedicar-me a esse trabalho.

Para colegas Anna Lígia, Ariquele, Cryslaine, Diego, Douglas, José Vanteler, Mônica, Tatiana (in Memoriam), Tieme e Silvia, pela convivência harmoniosa e construtiva.

Aos funcionários, em especial a Luciana, Magali e Ronaldo da Secretaria da Pós-Graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

# Resumo

Nesse trabalho retomamos os resultados obtidos por Michio Sugeno em sua tese de doutorado (SUGENO, 1974), estendendo-os através de implementações de outras medidas como: *fuzzy* generalizada (sem a condição de continuidade), probabilidade e possibilidade, estabelecendo comparações entre as integrais *fuzzy* correspondentes. Desenvolvemos interpretações e formulações geométricas, analisamos sequências de funções e convergências para respectivas integrais em casos específicos. Demonstramos a relação existente entre as integrais *fuzzy* e os pontos fixos das funções que medem os  $\alpha$ -níveis. Desenvolvemos estudos sobre diferenciabilidade *fuzzy* relacionados com integrais *fuzzy* e apresentamos um teorema fundamental para o cálculo integral *fuzzy*. Conceituamos Sistema de Bases de Regras *Fuzzy* (SBRF) para um problema com dois antecedentes e um consequente e utilizamos a integral *fuzzy* como meio para desfuzzificação no método de inferência de Mamdani. Generalizamos esses resultados para problemas com quaisquer números de antecedentes e consequentes, utilizando os resultados para estudar a relação entre sistemas dinâmicos contínuos e discretos e as convergências de suas soluções por sistemas *p-fuzzy*. Estabelecemos comparações entre as hipóteses de funcionais representados por integrais: Riemann-Stieltjes, monótonas e *fuzzy*, com teoremas similares ao de Representação de Riesz.

**Palavras-chave:** Integral *fuzzy*. Teorema fundamental do cálculo *fuzzy*. Teorema de representação de Riesz.

# Abstract

In this work we resumed Michio Sugeno's results obtained in his doctoral thesis (SUGENO, 1974), extending them implementing other measures such as: generalized fuzzy (without the continuity condition), probability and possibility and establishing comparisons between the corresponding fuzzy integrals. We developed interpretations and geometric formulations, we analyzed sequences of functions and convergences for respective integrals in specific cases. We demonstrated the relationship between the fuzzy integrals and the functions' fixed that measure the  $\alpha$ -levels. We developed studies on fuzzy differentiability related to fuzzy integrals and presented a fundamental theorem for the fuzzy integral calculus. We conceptualized System of Fuzzy Rule Bases (SFRB) for a problem with two antecedents and a consequent and we used the fuzzy integral as a means for defuzzing in Mamdani's inference method. We generalized these results to problems with any antecedent numbers and consequences, using the results to study the relationship between continuous and discrete dynamic systems and the convergences of their solutions by  $p$ -fuzzy system. We established comparisons between the hypotheses of functionals represented by integrals: Riemann-Stieltjes, monotone and fuzzy, with theorems similar to the Riesz representation.

**Keywords:** Fuzzy Integral. Fundamental Theorem of Fuzzy Calculus. Theorem of Representation of Riesz.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Família de funções de pertinência triangulares. . . . .	23
Figura 2 – Família de funções de pertinência. . . . .	23
Figura 3 – Exemplos de subconjuntos normais. . . . .	26
Figura 4 – Gráfico em que $\text{supp}(A) \neq [A]^0$ . . . . .	27
Figura 5 – Número real como um conjunto crisp (número <i>fuzzy</i> ). . . . .	31
Figura 6 – Número <i>fuzzy</i> . . . . .	31
Figura 7 – Número <i>fuzzy</i> triangular. . . . .	32
Figura 8 – Número <i>fuzzy</i> trapezoidal. . . . .	32
Figura 9 – Número <i>fuzzy</i> gaussiano. . . . .	33
Figura 10 – Número <i>fuzzy</i> triangular $A$ (Exemplo 1.5). . . . .	34
Figura 11 – Soma de números <i>fuzzy</i> . . . . .	35
Figura 12 – Extensão de Zadeh. . . . .	37
Figura 13 – Diagrama do princípio da Extensão de Zadeh. . . . .	38
Figura 14 – Números <i>fuzzy</i> - peso de roupa. . . . .	39
Figura 15 – Números <i>fuzzy</i> - sujeira. . . . .	40
Figura 16 – Conjunto dos números <i>fuzzy</i> representando as quantidades de detergentes. . . . .	41
Figura 17 – Representação das regras. . . . .	42
Figura 18 – Organograma SBRF. . . . .	45
Figura 19 – Representação de conjuntos não disjuntos. . . . .	47
Figura 20 – Sequência não crescente de conjuntos. . . . .	52
Figura 21 – Sequência não crescente convergente de conjuntos. . . . .	54
Figura 22 – Representação da operação diferença entre conjuntos. . . . .	58
Figura 23 – Representação de sequência de conjuntos. . . . .	60
Figura 24 – Representação do conjunto $B = A \cup (A^C \cap B)$ . . . . .	65
Figura 25 – Representação dos conjuntos $F^c = X \cap F^c$ e $(X \cap F^c) \cap F = \emptyset$ . . . . .	66
Figura 26 – Representação do conjunto $E \cap A^c \subset E$ . . . . .	68
Figura 27 – Triângulo Isósceles com base e altura unitárias. . . . .	78
Figura 28 – Representação de um $\alpha$ -nível em um triângulo isósceles . . . . .	78
Figura 29 – Interpretação do valor da integral <i>fuzzy</i> como média. . . . .	80
Figura 30 – Representação da função medida. . . . .	99
Figura 31 – Representação de função simples, com $a_k = a_{k-1}$ . . . . .	103
Figura 32 – Representação de função simples. . . . .	103
Figura 33 – Gráfico da função $f(x) = 4(x - x^2)$ . . . . .	109
Figura 34 – Representações das funções $f$ e $g$ . . . . .	113
Figura 35 – Representação de conjuntos <i>fuzzy</i> e $\alpha$ -nível. . . . .	114
Figura 36 – Representação de um subconjunto <i>fuzzy</i> . . . . .	114

Figura 37 – Quadrado inserido no sub-gráfico de $g(F_\alpha)$ . . . . .	115
Figura 38 – Representações das funções $h$ e $g(F_\alpha)$ . . . . .	115
Figura 39 – Função $h$ e função medida dos $\alpha$ -níveis $g(F_\alpha)$ , para (i). . . . .	116
Figura 40 – Função $h$ e função medida dos $\alpha$ -níveis $g(F_\alpha)$ , para (ii). . . . .	117
Figura 41 – Função $h$ e função medida dos $\alpha$ -níveis $g(F_\alpha)$ , para (iii). . . . .	117
Figura 42 – Diagrama de representação de medidas. . . . .	120
Figura 43 – Sequência de $\alpha$ -níveis para a função $\Pi_\varphi$ de possibilidade. . . . .	122
Figura 44 – Representação da função $h(x)$ (caso d) . . . . .	124
Figura 45 – Função medida de possibilidade $\Pi_\varphi(F_\alpha)$ (caso d). . . . .	125
Figura 46 – Representação de $f(x)$ e $g(F_\alpha)$ (caso e). . . . .	126
Figura 47 – Representação de $f(x)$ (item ii). . . . .	126
Figura 48 – Representação de $f(x)$ (item iii). . . . .	127
Figura 49 – Representação de $h(x)$ e $\varphi(x)$ com $y_0 \geq z_0, A = \text{supp} [h(x) \wedge \varphi(x)]$ . . . . .	129
Figura 50 – Representações de $h(x)$ e $\varphi(x)$ com $y_0 < z_0, A = \text{supp} [h(x) \wedge \varphi(x)]$ . . . . .	129
Figura 51 – Representações de $h(x), \varphi(x)$ com $y_0 > z_0$ e $h(x_0) = \varphi(x_0)$ . . . . .	130
Figura 52 – Representações de $h, \varphi$ com $y_0 \leq z_0$ . . . . .	131
Figura 53 – Representações de $h$ e $\varphi$ . . . . .	132
Figura 54 – Gráficos de $h$ e $\varphi$ . . . . .	132
Figura 55 – Gráficos de $h_1$ e $\Pi(F_\alpha^1)$ . . . . .	133
Figura 56 – Representação da sequência de funções $\{h_n\}$ . . . . .	134
Figura 57 – Gráficos identificando a convergência das integrais com a medida $\Pi_\varphi$ . . . . .	135
Figura 58 – Gráficos identificando a convergência das integrais com a medida $g$ . . . . .	136
Figura 59 – Função de pertinência da distância. . . . .	138
Figura 60 – Função de pertinência da velocidade. . . . .	138
Figura 61 – Função de pertinência do atraso. . . . .	139
Figura 62 – Função de pertinência do tempo total da viagem $T$ . . . . .	140
Figura 63 – Função de pertinência do tempo $T$ e do número <i>fuzzy</i> $h(t)$ . . . . .	140
Figura 64 – Representação da função $h(x)$ (Exemplo 4.1). . . . .	144
Figura 65 – Representação da função $g(F_\alpha)$ (Exemplo 4.1). . . . .	144
Figura 66 – Função $g(F_\alpha)$ restrita em $[a, b]$ . . . . .	145
Figura 67 – Gráfico de $g(F_\alpha \cap [a, b])$ . . . . .	146
Figura 68 – Gráfico da função $g$ . . . . .	146
Figura 69 – Gráfico da função $g(F_\alpha \cap [a, b])$ . . . . .	147
Figura 70 – Gráfico da função $h(x)$ (Exemplo 4.2). . . . .	148
Figura 71 – Gráfico da função $g(F_\alpha)$ (Exemplo 4.2). . . . .	149
Figura 72 – Gráfico da função $g(F_\alpha \cap A)$ . . . . .	150
Figura 73 – Gráfico da função $g(F_\alpha \cap A)$ (Exemplo 4.2). . . . .	151
Figura 74 – Representação dos abertos na reta. . . . .	154
Figura 75 – Representação de: aberto, ponto interior e fronteira. . . . .	154

Figura 76 – Representação de abertos e fechados. . . . .	155
Figura 77 – Representações de abertos, fechado, pontos interior e fronteira. . . . .	156
Figura 78 – Representação de vizinhas de ponto na reta. . . . .	156
Figura 79 – Representação da família de funções $\Phi_{\alpha_i}(x)$ . . . . .	167
Figura 80 – Retângulos do sub-gráfico de $g(F_\alpha)$ associados a $D_gF$ . . . . .	168
Figura 81 – Representações de $C = \mathbb{B}_{F(A)}$ e $D = \mathbb{B}_{F(B)}$ . . . . .	170
Figura 82 – Vizinhança do ponto menos a intersecção. . . . .	171
Figura 83 – Representações de $\alpha$ -níveis de $D_gF$ . . . . .	174
Figura 84 – Função escada de aproximação a $f(x)$ (Definição 5.3). . . . .	177
Figura 85 – Gráfico de $h_n(t)$ . . . . .	182
Figura 86 – Variações de $h_n(t)$ com os parâmetros $n$ e $t$ . . . . .	183
Figura 87 – Representação de pontos em intervalos. . . . .	184
Figura 88 – Interpretação de $h_n(t_k) - h_n(t_{k-})$ . . . . .	185
Figura 89 – Interpretação da diferença: $h_n(t_{k+1}) - h_n(t_k)$ , para $1 \leq k \leq m - 1$ . . . . .	186
Figura 90 – Aproximação entre os gráficos das funções $\tilde{f}(t)$ e $f(t)$ . . . . .	187
Figura 91 – Gráficos respectivos de $f, f \wedge a, f - f \wedge a$ ( $f \in B$ da Definição 5.6). . . . .	191
Figura 92 – Representação de $f \vee (g \wedge a)$ . . . . .	195
Figura 93 – Exemplo para $\alpha(F_t)$ contínua. . . . .	196
Figura 94 – Exemplo para $\alpha(F_t)$ descontínua, sem ponto fixo. . . . .	197
Figura 95 – Gráficos, da função característica $\mathcal{X}_A$ e das funções $f \geq \mathcal{X}_A, f \leq \mathcal{X}_A$ . . . . .	199
Figura 96 – Representação da aplicação $[f \wedge a - f \wedge t]$ . . . . .	200
Figura 97 – Estrutura do sistema de inferência . . . . .	207
Figura 98 – Fuzificação - Peso. . . . .	208
Figura 99 – Fuzificação - Sujeira. . . . .	209
Figura 100 – Consequente: Quantidade de detergente. . . . .	209
Figura 101 – Conjunto <i>fuzzy</i> resultante da Inferência de Mamdani, sem o nivelamento 0,25. . . . .	212
Figura 102 – Conjunto <i>fuzzy</i> final resultante do Método de Inferência de Mandani. . . . .	212
Figura 103 – Diagrama do sistema <i>p-fuzzy</i> (Definição 6.2). . . . .	217
Figura 104 – Variações discretas do tempo (Equações (6.2)). . . . .	218
Figura 105 – Variável de entrada: População. . . . .	220
Figura 106 – Variável de saída: Variação. . . . .	221
Figura 107 – Gráficos: modelo logístico com $K = 234.71$ e $a = 0.022$ e modelo <i>p-fuzzy</i> . . . . .	222

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1</b>	<b>TÓPICOS BÁSICOS DE LÓGICA FUZZY</b> . . . . .	<b>21</b>
1.1	Conceitos básicos da Lógica fuzzy. . . . .	21
1.2	Operações com Conjuntos Fuzzy . . . . .	24
1.3	Números Fuzzy . . . . .	30
1.4	Exemplos de Números Fuzzy . . . . .	30
1.5	Operações com Números Fuzzy . . . . .	33
1.6	Princípio da Extensão de Zadeh . . . . .	35
1.7	Sistemas de Bases de Regras Fuzzy (SBRF) . . . . .	38
1.7.1	Inferência sobre SBRF . . . . .	43
1.7.1.1	Resumo Passo a Passo das Ações de um SBRF (Mamdani) para o Exemplo 1.6 . . . . .	43
<b>2</b>	<b>INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA</b> . . . . .	<b>46</b>
<b>2.1</b>	<b>Conceito de medir</b> . . . . .	<b>46</b>
2.1.1	Gerando $\sigma$ -álgebras . . . . .	48
2.1.1.1	Medida usual definida em uma $\sigma$ -álgebra sobre um Espaço Métrico . . . . .	49
2.1.2	Definições e exemplos de Medidas . . . . .	55
2.1.2.1	Medida Exterior . . . . .	55
2.1.2.2	Medida Exterior de Lebesgue . . . . .	56
2.1.2.3	Medida Exterior de Hausdorf . . . . .	56
2.1.2.4	Conjuntos de Medidas Nulas . . . . .	57
2.1.2.5	Medida Exterior de Lebesgue-Stieltjes . . . . .	57
<b>2.2</b>	<b>Medidas de Probabilidade</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>2.3</b>	<b>Medidas Fuzzy/Fuzzy geral</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>2.4</b>	<b>Construção de Medida Fuzzy</b> . . . . .	<b>64</b>
<b>2.5</b>	<b>Medida de Possibilidade</b> . . . . .	<b>72</b>
2.5.1	Forma equivalente para descrever Medida de Possibilidade . . . . .	72
<b>3</b>	<b>INTEGRAIS: FUZZY(SUGENO) E FUZZY GENERALIZADA</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>3.1</b>	<b>Integral Fuzzy</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>3.2</b>	<b>Comparação entre Integral Fuzzy e de Lebesgue</b> . . . . .	<b>100</b>
<b>3.3</b>	<b>Exemplos e Extensões dos Resultados</b> . . . . .	<b>109</b>
<b>3.4</b>	<b>Integral Fuzzy geral ou generalizada, com medidas diversas</b> . . . . .	<b>119</b>
<b>3.5</b>	<b>Integrais com medida de Possibilidade.</b> . . . . .	<b>127</b>

3.5.1	Aplicação Sobre Números <i>Fuzzy</i> e Integral <i>Fuzzy</i> Geral com Medida de Possibilidade. . . . .	136
<b>4</b>	<b>DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO NO CÁLCULO <i>FUZZY</i></b> . . . . .	<b>142</b>
4.1	<b>Teorema Fundamental do Cálculo <i>Fuzzy</i></b> . . . . .	<b>152</b>
4.2	<b>Espaço Topológico de Hausdorff</b> . . . . .	<b>152</b>
4.2.1	Resultados decorrentes da Sessão 4.2 . . . . .	154
4.3	<b>Operador de Derivação</b> . . . . .	<b>157</b>
4.4	<b>Teorema Fundamental do Cálculo de Sugeno.</b> . . . . .	<b>164</b>
4.4.1	Interpretação geométrica de $D_g F$ . . . . .	166
<b>5</b>	<b>TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DE RIESZ</b> . . . . .	<b>176</b>
5.1	<b>Sobre a Integral de Riemann-Stieltjes.</b> . . . . .	<b>176</b>
5.1.1	Integração de Funções Contínuas . . . . .	180
5.1.2	Teorema Clássico da Representação de Riesz. . . . .	181
5.2	<b>Teorema de representação de Riesz para Integrais Monótonas.</b> . . .	<b>190</b>
5.3	<b>Teorema da Representação de Funcionais pela Integral <i>Fuzzy</i> Geral</b> . . .	<b>193</b>
5.4	<b>O Teorema de Representação de Riesz para Funcionais <i>Fuzzy</i></b> . . .	<b>198</b>
5.4.1	Comparações entre os conceitos e resultados obtidos a partir das medidas <i>fuzzy</i> e <i>fuzzy</i> geral. . . . .	202
<b>6</b>	<b>SISTEMAS DINÂMICOS: CONTÍNUOS E <math>p</math>-<i>FUZZY</i>.</b> . . . . .	<b>206</b>
6.1	<b>Sistemas de Inferências com Bases de Regras <i>Fuzzy</i> (SBRF), utilizando o Fluxo da Máquina de Lavar.</b> . . . . .	<b>206</b>
6.2	<b>Uma Generalização para o Sistema de Base de Regras <i>Fuzzy</i></b> . . . . .	<b>215</b>
6.3	<b>Sistemas <math>p</math>-<i>fuzzy</i> com Aplicações: em Sistemas Dinâmicos e Discretos. Convergências</b> . . . . .	<b>217</b>
6.3.1	Sistemas $p$ - <i>fuzzy</i> . . . . .	217
6.3.2	Sistema Dinâmicos com uso de $p$ - <i>fuzzy</i> . . . . .	217
6.3.3	Aplicações em convergências . . . . .	220
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>223</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>226</b>

# Introdução

## Breve Relato Histórico

*“O mistério da vida me causa a mais forte emoção. É o sentimento que suscita a beleza e a verdade, cria arte e a ciência. Se alguém não conhece esta sensação ou não pode mais experimentar espanto ou surpresa, já é um morto vivo e seus olhos se cegam.” (Albert Einstein)*

Visto que a teoria *fuzzy* trabalha com eventos que envolvem incertezas e esse conceito permeia antigas discussões filosóficas, apresentamos a seguir, de forma resumida, fatos históricos da filosofia, matemática e física (Burton (2017), Moraes (2007), Demo (2000), Santos (2022), Khalili (2014), Mlodinow (2009), Porfírio (2022), Silva (2022)) considerados por nós como pressupostos que se interligam com a Teoria implementada por Askar-Zadeh (1965).

Na trajetória da existência humana a incerteza esteve sempre presente nas ações, reflexões e lutas pela sobrevivência. A Ciência, Filosofia, Religião e outras crenças se inserem nesse contexto através das experiências e práticas, explicitando indecisões, equívocos e redirecionamentos.

Tomando por base a Filosofia a partir de Aristóteles (Estagira/Grecia 384 a.C.– Eubeia/Grécia 322 a.C.), observa-se a busca incessante pelo que se considera “verdade”, e uma das sendas a considerar é a Lógica Aristotélica, cujos fundamentos baseavam-se nos princípios:

- Da **Identidade**, em que toda proposição será sempre igual a si própria, ou seja, tudo é idêntico a si próprio.
- Da **não contradição**, onde uma proposição não pode ser verdade e falsa ao mesmo tempo.
- Do **terceiro excluído**, uma proposição somente pode ser classificada em verdadeira ou não verdadeira (falsa), ou seja, qualquer proposição que for Verdade ou (exclusivo) não-Verdade será verdade.

Aristóteles foi discípulo de Platão (Atenas/Grécia 427 a.C. – Atenas/Grécia 347 a.C.) que foi discípulo de Sócrates (Alópece/Grécia 470 – Atenas/Grécia 399 a.C.), que antecipadamente refletiam sobre questões como:

- O que é a verdade?
- O que é o bem?
- O que é a justiça?
- O que é o amor?

Esses filósofos expuseram claramente que a incerteza permeava o âmago da natureza humana e ao mesmo tempo incentivavam o desenvolvimento da Ciência, Tecnologia, Religião e diversas crenças. O pensamento Aristotélico e sua Lógica, esboçavam a confiança em um mundo regido por “verdades” pré existentes, e que através das reflexões seriam descobertas, induzindo assim um aspecto determinístico, causa-efeito, para a descrição dos eventos da natureza.

Em outra posição, uma corrente de pensamentos denominada **Sofistas** teve em Protágoras (Abdera/Grécia 481– Mileto/Turquia 411 a.C.) e Górgias (Leontina/Itália 486 – Larissa/Grécia 380 a.C.) como seus grandes defensores e acreditavam que a verdade seria construída através de argumentos, pela oratória, uso da memória, em contraponto de que seria absoluta, sendo possível ser construída e modificada.

A força da linha Aristotélica influenciou o determinismo que transcorreu por longos períodos. Na idade média entre os séculos IV e V, quando ocorreram expansões e consolidações do Cristianismo na Europa Ocidental foi buscada a conexão entre consciência religiosa e razão.

Na idade moderna, entre 1453 e 1789, bases científicas foram ampliadas significativamente através de importantes trabalhos compatíveis com a Lógica Aristotélica ou Clássica, destacando-se nomes como René Descartes (*La Haye en Tourainne*/França 1596 – Estocolmo/Suécia 1650), Isaac Newton (*Woolsthorpe by Colsterworth 1643*- Kensington, Middlesex/ Inglaterra 1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (Lípsia/Alemanha 1646 – Hanôver/Alemanha 1716), Pierre de Fermat (Beaumont de Lomagne/França 1607 – Castres/França 1665), Leonahard Euler (Basiléia/Suíça 1707 – São Petersburgo/Rússia 1783), cujas teorias foram essenciais para o desenvolvimento das áreas da Matemática e Física, ocorrendo desdobramentos e aplicações profundas na Astronomia, Filosofia, Tecnologia.

Posteriormente, no início da era contemporânea, período entre 1789 a 1900, mentes brilhantes como Joseph Louis Lagrange (Turim/Itália 1736 – Paris/França 1813), Carl Friedrich Gauss (Brunsvique/Alemanha 1777 – Gottingen/Alemanha 1855), Bernhard Riemann (Jamein/Alemanha 1826 – Verbania/Itália 1865), Henri Poincaré (Nancy/França 1854 – Paris/França 1912), David Hilbert (Konigsberg/Prussia 1862 – Gottingen/Alemanha 1943), complementando e aprofundando os conhecimentos e as aplicações em diversas áreas da Ciência. Após 1900, Albert Einstein (Ulm/Alemanha 1879 – Princeton/EUA 1955)

conseguiu resultados notáveis, como a Teoria da Relatividade Restrita e da Relatividade Geral, cujos estudos e comprovações práticas são objetos de pesquisa até a atualidade.

Em decorrência das conquistas ao longo desses períodos até o final do século XIX, muitos cientistas acreditavam que através da linha racionalista/determinista a natureza poderia ser descrita de forma ampla e generalizada, e que a margem da “incerteza” estaria em decaimento.

No início do século XX, o físico alemão Max Karl Ludwig Planck (Kiel/Alemanha 1858 – Gottinger/Alemanha 1947), através de experimentos relacionados a radiação de corpo negro, explicou que a transmissão do calor ocorre em porções, não necessariamente por fluxo constante, sendo essas porções denominadas de **quanta**, dando assim uma contribuição para o desenvolvimento da Física Quântica. Em razão desses estudos muitos o consideraram Pai da Física Quântica.

Posteriormente o físico Werner Karl Heisenberg (Wurtzburg/Alemanha 1901 – Munique/Alemanha 1975), em 1927 apresentou seu famoso trabalho, **O princípio da Incerteza**, que trouxe a tona uma revolução na Ciência, retomando de forma abrangente a discussão sobre a incerteza e a Lógica Clássica.

Pelas teorias baseadas na Lógica Clássica haviam obtido descrições minuciosas sobre as trajetórias dos astros em torno do Sol, precisões dos movimentos que relacionavam espaço, tempo e velocidade, e acreditava-se que a natureza, em geral, poderia ser regida similarmente pelos procedimentos da “causa e efeito”, de modo que os instrumentos científicos conhecidos teriam condições de descrevê-la. O trabalho de Heisenberg mostrou que os comportamentos das partículas não são necessariamente iguais para a “matéria” em geral. O princípio da incerteza infere que para partículas, as grandezas que mensuram a posição e o movimento não se relacionam de forma precisa, ou seja, quanto maior for a precisão da posição, menos precisa ou mais incerta será a descrição do movimento.

Nesse contexto, ganhou força a incerteza sobre a descrição da natureza, pois o mundo dos infinitésimos não tem o mesmo comportamento que o do absolutamente visíveis. Uma manifestação de indignação sobre essa concepção deu-se por intermédio de Einstein que não admitia o **indeterminismo**, proferindo a frase: **Deus não joga dados**.

Novamente aprofundaram as discussões sobre as Lógicas existentes, com repercussões não só na Ciência, Filosofia e outras crenças. Jan Lukasiewicz (Lviv/Ucrania 1878 – Dublin/Irlanda 1956) desenvolveu então a chamada **Lógica Multivalorada/difusa**, que consiste em abrir mão do princípio do terceiro excluído da Lógica Aristotélica, podendo ocorrer outras alternativas além das estabelecidas (V ou F). Em seguida o matemático Alfred Tarski (Ivarsovia/Polonia 1901 – California/EUA 1983) trabalhou com a chamada Lógica com  $n$  valores verdade,  $n \geq 2$  (Alfred esteve presente na Unicamp/Brasil, em março de 1975, no evento organizado pelo IMECC pela professora Ayda Ignez Arruda).

Ainda Hans Reichenbach (Hamburgo/Alemanha 1891 – Los Angeles/EUA 1953) em 1932 formulou a **Lógica Multivalorada** onde  $n$  tende ao infinito. Também Kurt Godel (Brun/Tchéquia 1906 – Princeton/EUA 1978) amplia os estudos mostrando que a chamada Lógica Intuicionista não pode ser vista como uma Lógica multivalorada finita. Por Lógica Intuicionista se entende que não somente se consideram as hipóteses, mas também as justificativas das mesmas, ou seja, **se as hipóteses e as justificativas forem verdadeiras então as conclusões serão verdadeiras e justificáveis**.

Nessa trajetória variante do conhecimento humano ficou caracterizada que a incerteza está sempre presente, compatível com o que descreve Pedro Demo em seu livro intitulado **Certeza da Incerteza: Ambivalência do Conhecimento e da Vida**.

Foi nesse contexto que em 1965, Lotfali Askar Zadeh (Baku/Azerbaijão 1921-Berkeley/EUA 2017), matemático, engenheiro e cientista da computação, professor da Universidade da Califórnia em Berkeley, teve a brilhante ideia de desenvolver uma teoria que buscasse com “certa” precisão descrever a incerteza, sendo intitulada de **Teoria Fuzzy**, construindo assim a Lógica *Fuzzy*. Nesse contexto as possibilidades não se restringem a duas (V ou F, ou, 0 e 1), sendo desconsiderado o princípio do terceiro excluído, podendo uma proposição ser **parcialmente verdadeira**, com as incertezas quantificadas através das funções denominadas de pertinências. Essa teoria vem ganhando espaço para o desenvolvimento das atividades humanas por inúmeras aplicações nas áreas e setores: dos Diagnósticos Médicos, Epidemiologia, Biomatemática, Metrovias, Hidroelétricas, Inteligência Artificial entre outras.

Apesar da Teoria *Fuzzy* ter sido criada a pouco mais de meio século, sua utilização vem apresentando grande variedade de aplicações práticas (MATHER; MCGEHEE, 1975), em sólida base matemática. Duas vertentes vem se desenvolvendo com generalizações e aplicações. Uma baseada prioritariamente na teoria intervalar envolvendo derivadas de Hukuhara e o Princípio da Extensão de Zadeh, com importantes resultados nos estudos dos Sistemas Dinâmicos (NGUYEN, 1978) e Controles aplicados a Biomatemática. Com o enfoque em Biomatemática vários são os trabalhos publicados em forma de teses e artigos desenvolvidos no IMECC Unicamp, em Epidemiologia (Souza (2018b), Jafelice, Barros e Bassanezi (2012), Soares (2018), outros), Controles diversos (Souza (2018a), Oliveira (2018), Diniz (2016), LUIZ (2018), Peixoto (2005), outros), Inteligência artificial (Santos et al. (2005), outros). Outra vertente tem seus resultados baseados em funções reais com os domínios sendo subconjuntos das partes de um conjunto, induzindo um cálculo *fuzzy* aplicado em tomadas de decisões nas áreas de Economia, Probabilidades e Possibilidades, entre outras (JIN; MESIAR; YAGER, 2020). Esse segundo enfoque predomina em Sugeno (1974).

## O Desenvolvimento desse trabalho

Nesse trabalho buscamos analisar e estender resultados obtidos por Michio Sugeno em sua tese de doutorado (SUGENO, 1974), através das implementações de outras medidas, como *fuzzy* generalizada (excluindo a condição de continuidade), probabilidade e possibilidade, comparando as integrais *fuzzy* correspondentes e desenvolvendo interpretações e formulações geométricas. Analisamos sequências de funções e convergências para respectivas integrais em casos específicos. Demonstramos a relação existente entre as integrais *fuzzy* e os pontos fixos das funções que medem os  $\alpha$ -níveis. Desenvolvemos estudos sobre diferenciabilidade e integração apresentando um teorema fundamental para o cálculo integral (SUGENO, 1974).

Conceituamos Sistema de Bases de Regras *Fuzzy* (SBRF) através de um problema com dois antecedentes e um conseqüente e utilizamos a integral *fuzzy* como meio para desfuzzificação no método de inferência de Mamdani. Generalizamos o problema para quaisquer números de antecedentes e conseqüentes possibilitando estudar a relação entre sistemas dinâmicos contínuos e discretos e as convergências das soluções por *p-fuzzy* (SILVA, 2005). Comparamos hipóteses para que os funcionais sejam representados pelas integrais Riemann-Stieltjes, monótonas e *fuzzy*, por meio de teoremas similares ao de representação de Riesz (Bartle (1964), Bassanezi e Greco (1988)).

No Capítulo 1 apresentamos tópicos básicos sobre lógica *fuzzy* (Askar-Zadeh (1965), Barros e Bassanezi (2010), Corcoll, Bassanezi e Santos (2007), Jafelice, Barros e Bassanezi (2012), Kandel (1986), Valle (2018)): conjuntos *fuzzy*,  $\alpha$ -níveis, números *fuzzy* (XUECHENG, 1994), Princípio da Extensão de Zadeh (Román-Flores, Barros e Bassanezi (2001), Earman et al. (1986), Barros, Bassanezi e Tonelli (1997)), SBRF (VALLE, 2018), inferência de Mamdani. Em relação ao princípio da extensão de Zadeh interpretamos os conjuntos *fuzzy* em um universo  $\mathcal{U}$  (espaço métrico), na forma  $(A, \varphi_A)$ , sendo  $A$  fechado e limitado e  $\varphi_A$  a respectiva função de pertinência. As métricas utilizadas para os suportes e as pertinências foram distância de Hausdorff e a do supremo, respectivamente. Ao se restringir o espaço  $\mathcal{U}$  aos números reais pode-se definir uma ordem parcial para os números *fuzzy*. Esses procedimentos propiciam pensar em aproximações, sequências e convergências. Quanto ao SBRF procuramos formalizar as bases de regras e a inferência por Mamdani através de aplicações.

No Capítulo 2, iniciamos com a apresentação das  $\sigma$ -álgebras, em seguida a definição de medidas descrevendo alguns de seus tipos: a considerada usual sobre os números reais, externas, de Hausdorff (Asplund e Bungart (1966), Cabral (2010), Federer (1996), Gerônimo (1988), Kreyszig (1991), Sugeno (1974), Waterman (1965), Wikipedia (2020)), de probabilidade, medida *fuzzy* (Sugeno), *fuzzy* generalizada e a de possibilidade (Barros e Bassanezi (2010), Billingsley (2008), Gerônimo (1988)). Justificamos a apresentação de várias medidas em função da relevância em comparar as integrais *fuzzy* relacionadas a

cada tipo de medida. Destacamos a comparação entre as integrais *fuzzy* e de Lebesgue.

No Capítulo 3 apresentamos as definições das integrais: *fuzzy* (Sugeno) (SUGENO, 1974) e *fuzzy* generalizada bem como suas propriedades e teoremas. Construímos exemplos com os cálculos dessas integrais para várias funções, comparando os resultados com as integrais de Riemann-Stieltjes e de Lebesgue (Bartle (1964), Bassanezi e Greco (1984), Bassanezi e Greco (1988), Cabral (2010)). Abordamos casos específicos de convergências para a integral *fuzzy*, a relação entre a integral *fuzzy* e ponto fixo da função medida dos  $\alpha$ -níveis. Estabelecemos e demostramos uma interpretação geométrica para as integrais *fuzzy*. Analisamos o comportamento das integrais considerando as medidas destacadas em organograma: *fuzzy*, *fuzzy* generalizada, possibilidade e de probabilidade. Estudamos medida de possibilidade, estabelecendo e provando teorema e corolário, além de exemplos com interpretações geométricas.

No Capítulo 4 revisamos o conceito da derivação como operação inversa da integração para funções reais com variáveis reais, em seguida apresentamos exemplos de derivação e integração sob o aspecto *fuzzy*, através de funções com domínios definidos nas partes de conjuntos e o contra-domínio em  $[0, 1]$ . Nesse estudo buscamos conceituar derivadas *fuzzy* visando formalizar sua definição no Capítulo 4.1. As integrais *fuzzy* envolvidas foram obtidas através de procedimentos geométricos. Desenvolvemos pré requisitos para os espaços topológicos (LIMA, 1970) para os estudos sobre diferenciabilidade *fuzzy*. Formalizamos a definição de derivadas *fuzzy* (Jin, Mesiar e Yager (2020), Sugeno (1974)), propriedades, corolários que fundamentaram a apresentação e a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo *Fuzzy* (Barros, Pedro e Esmi (2022), Sugeno (1974)), e as condições para existência das derivadas.

No Capítulo 5 revisamos a definição e propriedades das integrais de Riemann-Stieltjes. Apresentamos condições para funcionais, de modo a estabelecer existência de versões de teoremas similares aos de representação de Riesz pelas integrais Riemann-Stieltjes, monótonas e *fuzzy* (Bartle (1964), Bassanezi e Greco (1984), Bassanezi e Greco (1988), Greco (1987)). Desenvolvemos comparações entre o conceito de mensurabilidade segundo as versões de Bassanezi/Greco e de Sugeno, demonstrando a equivalência entre ambas através da Propriedade 5.3. Comparamos as hipóteses para os funcionais e seu domínio para os três tipos de representações.

No Capítulo 6, conceituamos SBRF para um problema com dois antecedentes e um conseqüente (VALLE, 2018) e utilizamos a integral *fuzzy* como meio para desfuzzificação no método de inferência de Mamdani. Generalizamos esses resultados para problemas com quaisquer números de antecedentes e conseqüentes, utilizando os resultados para estudar a relação entre sistemas dinâmicos, contínuos e discretos e as convergências de suas soluções por *p-fuzzy* (Barros e Bassanezi (2010), Cecconello (2010), Leite e Bassanezi (2010), Magnago (2005), Silva (2005)).

---

Estendemos a apresentação desse trabalho demonstrando, exemplificando e compilando resultados conhecidos ou considerados básicos. Para os profissionais que pertencem a área talvez seja prioritário agilizar a leitura que facilite conclusões, porém justificamos esse procedimento pela aspiração em levar a tese também aos leitores que não são necessariamente especialistas, como os graduandos em séries terminais de cursos correlatos. Vários desses estudantes não possuem compreensões dos tópicos envolvidos e dessa forma terão a oportunidade de conhecerem novas teorias e as práticas relacionadas a pesquisa e ensino, aproximando as fronteiras da Ciência com sua base. Para os que atuam na área proceder a leitura intercalando os resultados sem considerar as demonstrações de interesse, chega-se da mesma forma e rapidamente ao que se considere essencial. Talvez para alguns estudantes essa oportunidade não mais ocorra em seu ciclo acadêmico.

# 1 Tópicos Básicos de Lógica *Fuzzy*

O conceito de **incertezas** está presente na realidade, e tratá-la de forma científica esteve presente no trabalho de Lotfali Askar-Zadeh, matemático, engenheiro, cientista da computação que em 1965 introduziu a Lógica *fuzzy* ([ASKAR-ZADEH, 1965](#)).

Nesse capítulo destacamos tópicos introdutórios sobre a Lógica *fuzzy*, que constituem em instrumentos básicos para o que será abordado na sequência desse trabalho. Iniciamos apresentando o conceito de conjuntos *fuzzy*, podendo ser identificados através das funções denominadas de **pertinência**, que aplicadas ao elemento do universo de discurso lhe atribuirá seu grau de pertinência, qual seja, um valor compreendido entre zero e um. Sendo esse número zero o elemento não pertencerá ao conjunto, maior que zero pertencerá. Quanto maior for esse valor mais será considerada sua pertinência, sendo que um o maior valor possível indicará pertinência total no conjunto. Em seguida estabelecemos interações entre esses conjuntos, através das operações de união, intersecção, complementos, bem como algumas de suas propriedades. Definimos números *fuzzy*, suas classificações e operações. Apresentamos os conjuntos *fuzzy* no universo dos espaços métricos, oferecendo uma versão particularizada do Princípio da Extensão de Zadeh com possibilidade de se estabelecer noções de aproximações, sequências, convergências, uma ordem parcial por meio do conceito de inclusão dos conjuntos. Introduzimos o significado de SBRF (Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy*) por intermédio de um exemplo prático ([VALLE, 2018](#)) e utilizamos funções (aplicações) para formalizarmos as bases de regras do sistema.

Finalizamos o capítulo apresentando um organograma abordando os passos do desenvolvimento de um SBRF.

## 1.1 Conceitos básicos da Lógica *fuzzy*.

Na lógica clássica a caracterização de um conjunto ocorre pela pertinência ou não de um elemento em relação ao conjunto, ou seja,

**Definição 1.1.** *Seja  $\mathcal{U}$  o conjunto universo de discurso, um **subconjunto**  $A$  de elementos de  $\mathcal{U}$  é caracterizado por:*

$$A = \{x \in \mathcal{U} : \mathcal{X}_A(x) = 1\}$$

onde

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ está em } A \\ 0 & \text{se } x \text{ não está em } A \end{cases}$$

é a **função característica** de  $A$ .

A família de todos os subconjuntos de  $\mathcal{U}$  é denominada de **partes** de  $\mathcal{U}$  e indicada por

$$2^{\mathcal{U}} \text{ ou } \mathcal{P}(\mathcal{U}).$$

Assim, na teoria clássica, um conjunto pode ser identificado por sua função característica.

Na teoria dos conjuntos *fuzzy* que induz a lógica *fuzzy* se faz uma generalização da teoria dos conjuntos clássicos, identificando um conjunto *fuzzy*  $A$  pela **função grau de pertinência** que passará a ser representada por,

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathcal{U} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \varphi_A(x) \end{aligned}$$

onde:

- $\varphi_A(x) = 0$  significa que  $x$  não pertence a  $A$
- $\varphi_A(x) = 1$  traduz que  $x$  está totalmente em  $A$
- $0 < \varphi_A(x) < 1$  significa que  $x$  está em  $A$ , com grau de pertinência  $\varphi_A(x)$ .

O que generaliza o conceito clássico é a possibilidade de se *quantificar* uma incerteza através da pertinência de  $x$  em  $A$ , adaptando assim as várias situações que realmente vivenciamos.

Note que a função de pertinência caracteriza de forma única um conjunto, porém uma situação da realidade pode ser modelada por diversas funções de pertinências. Considere o exemplo:

*Próximo ao quilômetro  $a = 45$  da rodovia y ocorreu um acidente.*

Essa situação pode ser modelada por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{45 - a_1}, & \text{se } x \in [a_1, 45], \\ \frac{b_1 - x}{b_1 - 45}, & \text{se } [45, b_1], \\ 0, & \text{se } x \notin [a_1, b_1]. \end{cases}$$

Observe que para cada par ordenado  $(a_1, b_1)$  há um conjunto *fuzzy*  $A$  para modelar esse evento, cabendo a um especialista verificar qual a melhor opção para refletir a realidade, em função das condições de tráfego, qualidade da pavimentação ou outras características. Resumidamente, pode-se fazer a escolha de  $a_1$  e  $b_1$  de modo a melhor retratar a incerteza.

Ainda, esse conjunto *fuzzy* “próximo de  $a = 45$ ” pode ser representado por outras formas, cujo aperfeiçoamento para a realidade, reiteramos que dependerá das informações que o modelador possa ter, influenciando em suas funções graus de pertinências. Apresentamos nas Figuras 1 e 2, as famílias de funções com graus de pertinência que podem traduzir o conceito próximo de  $a = 45$ . Os valores  $a$ ,  $h$ ,  $a_1 = a - h$ ,  $b_1 = a + h$  representam, respectivamente, a quilometragem exata do acidente, a incerteza, a quilometragem próxima abaixo de  $a$ , a quilometragem próxima mas superior a  $a$ . Ainda na Figura 2, para cada incerteza  $h$  obtemos um intervalo  $[a_1, b_1]$ . Observe que existem infinitas funções de pertinências, que poderão representar as condições de trânsitos, qualidade do asfalto, outros fatores para análise.

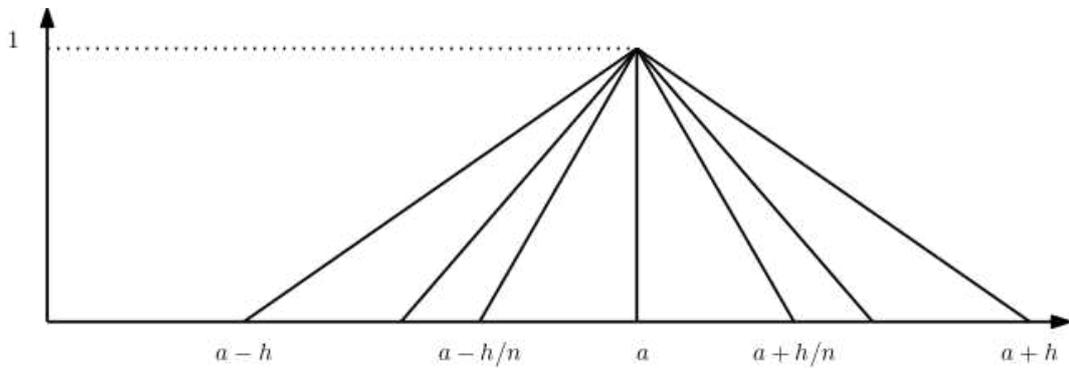


Figura 1 – Família de funções de pertinência triangulares.

$$\text{supp } A_n = \left[ a - \frac{h}{n}, a + \frac{h}{n} \right] \text{ (veja Definição 1.2)}$$

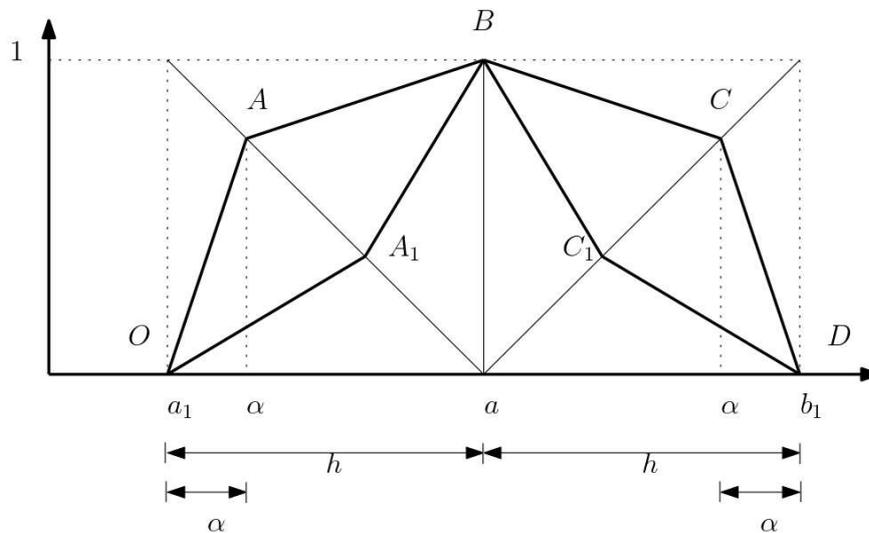


Figura 2 – Família de funções de pertinência.

As equações que representam a Figura 2 são,

$$\begin{cases} a_1 = a - h, h > 0 \\ b_1 = a + h, \alpha \in (0, h) \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\alpha}{h}\right) \frac{x - a_1}{\alpha}, & \text{se } x \in (a_1, a_1 + \alpha) \\ 1 - \frac{\frac{\alpha}{h}(a - x)}{h - \alpha}, & \text{se } x \in [a_1 + \alpha, a] \\ 1 - \frac{(x - a)\frac{\alpha}{h}}{h - \alpha}, & \text{se } x \in (a, b_1 - \alpha] \\ \left(1 - \frac{\alpha}{h}\right) \left(\frac{b_1 - x}{\alpha}\right), & \text{se } x \in (b_1 - \alpha, b_1) \\ 0, & \text{se } x \notin (a_1, b_1). \end{cases}$$

Observamos que quanto menor for a incerteza do avaliador (representada por  $h$ ) mais a função de pertinência se aproximará do valor real. Notamos também pelas Figuras 1 e 2 que as duas famílias de conjuntos *fuzzy* “em torno de  $a$ ” convergem para a função característica do conjunto  $\{a\}$  quando  $h$  tende a zero.

## 1.2 Operações com Conjuntos *Fuzzy*

A intersecção e a união entre conjuntos *fuzzy* são caracterizadas pelos conceitos de mínimo e máximo, respectivamente, ou seja, se  $A$  e  $B$  são conjuntos *fuzzy*, as funções de pertinências que caracterizam  $A \cap B$  e  $A \cup B$  são:

$$\begin{cases} \varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(x) \\ \varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = \varphi_A(x) \vee \varphi_B(x) \end{cases}$$

$\wedge$  : ínfimo ou mínimo

$\vee$  : supremo ou máximo

O conceito de conjunto complementar de  $A$  indicado por  $A^C$  é caracterizado pela função de pertinência

$$\varphi_{A^C}(x) = 1 - \varphi_A(x).$$

Por meio das funções grau de pertinências dos conjuntos, podemos demonstrar de forma simples as seguintes propriedades para os conjuntos *fuzzy*,  $A, B, C$  em um universo  $\mathcal{U}$ :

1.  $A \cap B = B \cap A$ ;
2.  $A \cup B = B \cup A$ ;
3.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ ;
4.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ ;
5.  $A \cup A = A$ ;
6.  $A \cap A = A$ ;
7.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
8.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
9.  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
10.  $A \cup \emptyset = A$ ;
11.  $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ ;
12.  $A \cap \mathcal{U} = A$ ;
13.  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ ;
14.  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ .

**Observação 1.1.** O conjunto vazio no contexto fuzzy pode ser descrito pela função de pertinência  $\varphi_{\emptyset}$  definida por,

$$\begin{aligned} \varphi_{\emptyset} : \mathcal{U} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \varphi_{\emptyset}(x) = 0, \forall x \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

**Definição 1.2.** Seja  $A$  um conjunto fuzzy, definimos **suporte** de  $A$ , indicado por  $\text{supp } A$  como sendo:

$$\text{supp } A = \{x \in \mathcal{U} : \varphi_A(x) > 0\}$$

Sejam  $\mathcal{U}$  **universo de discurso**,  $\mathbb{F}(\mathcal{U})$  indica a família de todos os conjuntos fuzzy de  $\mathcal{U}$ , ou seja, os elementos de  $2^{\mathcal{U}}$ , associados a funções de pertinências.

**Definição 1.3.** Seja  $\mathbb{F}(\mathcal{U})$  a família dos conjuntos fuzzy de  $\mathcal{U}$ . Então  $A \in \mathbb{F}(\mathcal{U})$  é dito **normal** se

$$\sup_{x \in \mathcal{U}} \varphi_A(x) = 1.$$

**Exemplo 1.1.** A Figura 3 representa subconjuntos fuzzy normais

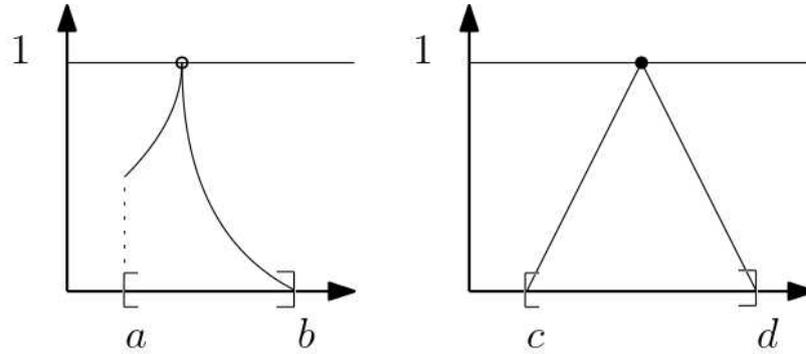


Figura 3 – Exemplos de subconjuntos normais.

**Definição 1.4.** O *cerne* de um conjunto fuzzy  $A$  é dado por:

$$\text{cerne}(A) = \{x \in \mathcal{U} : \varphi_A(x) = 1\}$$

**Definição 1.5.** Um conjunto é chamado de **crisp** se for um conjunto clássico, ou seja, sua função grau de pertinência é a função característica

$$\begin{aligned} \varphi_A(x) : \mathcal{U} &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Um número real  $y$  pode ser identificado por uma função de pertinência,

$$\begin{aligned} \varphi_{\{y\}} : \mathbb{R} &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \varphi_{\{y\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y, \\ 0, & \text{se } x \neq y, \end{cases} \end{aligned}$$

ou seja, um número real pode ser interpretado como conjunto *fuzzy* que é *crisp*.

**Definição 1.6.** Seja  $A \in \mathbb{F}(\mathcal{U})$  e  $\alpha \in (0, 1]$ , indica-se por  $[A]^\alpha$  o  $\alpha$ -nível de  $A$  como sendo o subconjunto clássico de  $\mathcal{U}$  dado por:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} : \varphi_A(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Supondo  $\mathcal{U}$  um espaço métrico, define-se:

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} \text{ (fecho do suporte de } A).$$

**Observação 1.2.**  $\text{supp}(A) \subset [A]^0$  porém, pode-se ter  $\text{supp}(A) \neq [A]^0$ .

A Figura 4 representa o gráfico de função de pertinência onde um conjunto *fuzzy* possui  $\text{supp}(A) \neq [A]^0$

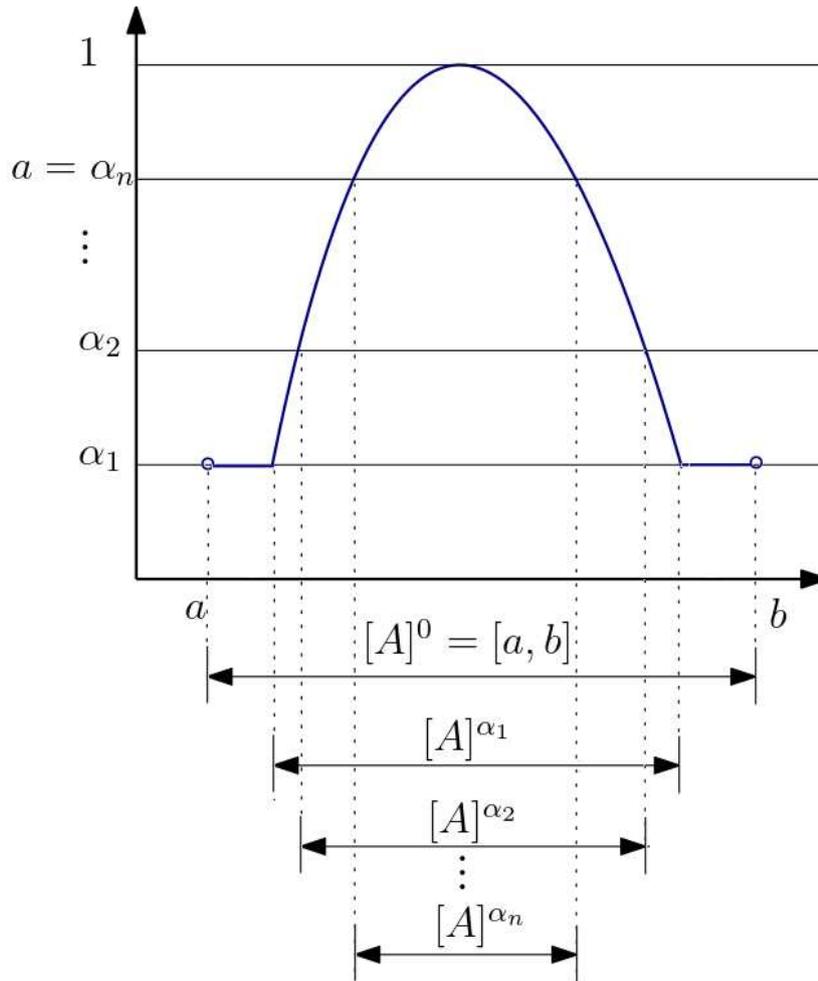


Figura 4 – Gráfico em que  $\text{supp}(A) \neq [A]^0$ .

$$\text{supp}(A) = (a, b) \text{ e } [A]^0 = [a, b]$$

**Teorema 1.1.** *Seja  $A \in \mathbb{F}(U)$  e  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ , então*

$$[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha,$$

*em outras palavras, se  $A \in \mathbb{F}(U)$ , considere  $F$  a função:*

$$\begin{aligned} F : (0, 1] &\rightarrow 2^{\text{supp}(A)} \\ \alpha &\mapsto F(\alpha) = [A]^\alpha, \end{aligned}$$

*então  $F$  é não crescente.*

*Demonstração.* Seja  $x \in [A]^\beta$  então  $\varphi_A(x) \geq \beta \geq \alpha$ , logo  $x \in [A]^\alpha$ . □

**Teorema 1.2.** *Seja  $A \in \mathbb{F}(U)$ , então  $A$  pode ser expresso em termos da função característica de seus  $\alpha$ -níveis, ou seja,*

$$\varphi_A(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha \mathcal{X}_{[A]^\alpha}(x)]$$

*Demonstração.*  $\mathcal{X}_{[A]^\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [A]^\alpha, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Fixado  $x_0$ , seja  $\varphi_A(x_0) = k$ , tem-se:

- a) Se  $\alpha \in (0, k]$  então  $k = \varphi_A(x_0) \geq \alpha$ .
- b) Se  $\alpha \in (k, 1)$  então  $k = \varphi_A(x_0) < \alpha$

De a) e b) tem-se:

$$\varphi_A(x_0) \leq \sup_{\alpha \in (k, 1]} [\alpha \mathcal{X}_{[A]^\alpha}(x)] \quad \text{e} \quad \varphi_A(x_0) \geq \sup_{\alpha \in (0, k]} [\alpha \mathcal{X}_{[A]^\alpha}(x)].$$

Logo,

$$\varphi_A(x_0) = \left[ \sup_{\alpha \in (0, k]} [\alpha \mathcal{X}_{[A]^\alpha}(x)] \right] \vee \left[ \sup_{\alpha \in (k, 1]} [\alpha \mathcal{X}_{[A]^\alpha}(x)] \right] = \sup_{\alpha \in (0, 1]} [\alpha \mathcal{X}_{[A]^\alpha}(x)].$$

Assim,  $A$  é denotado por essa função de pertinência, sendo representado em termos da função característica de seus  $\alpha$ -níveis.  $\square$

**Teorema 1.3.** (*Representação de Negoita e Ralescu (FERREIRA; BASSANEZI; BRANDAO, 2018)*) *Considere  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in [0, 1]}$  uma família de subconjuntos clássicos fechados de um espaço métrico clássico  $\mathcal{U}$ , satisfazendo as condições:*

- (i)  $\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha \subseteq A_0$  e  $\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha$  é denso em  $A_0$
- (ii)  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\alpha$
- (iii) Se  $\{\alpha_k\}_{k > 0}$ ;  $\alpha_k \in [0, 1]$ ,  $\alpha_k \rightarrow \alpha$ , com  $\alpha_k \leq \alpha$  então  $A_\alpha = \bigcap A_{\alpha_k}$ .

Então, existe um único conjunto fuzzy  $A \in \mathbb{F}(\mathcal{U})$  cujos  $\alpha$ -níveis são exatamente os subconjuntos clássicos  $A_\alpha$ ,  $[A]^\alpha = A_\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$ .

*Demonstração.* Considere o conjunto fuzzy  $A$ , identificado por,

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \sup \{\beta : x \in A_\beta\}, & \text{se } x \in A_0, \\ 0, & \text{se } x \in \mathcal{U} - A. \end{cases}$$

Seja  $\alpha \in (0, 1]$  e  $x \in A_\alpha$ , então por (ii) tem-se  $x \in A_0$  e,

$$\sup \{\beta : x \in A_0\} > \alpha,$$

logo

$$\varphi_A(x) > \alpha$$

o que implica que,

$$x \in [A]^\alpha,$$

ou seja,

$$[x \in A_\alpha \Rightarrow x \in [A]^\alpha] \Rightarrow A_\alpha \subseteq [A]^\alpha. \quad (1.1)$$

Por outro lado, seja  $x \in [A]^\alpha$ , temos duas situações a considerar:

- a)  $\sup \{\beta : x \in A_\beta\} > \alpha$ , e
- b)  $\sup \{\beta : x \in A_\beta\} = \alpha$ .

**Supondo a)**  $\sup \{\beta : x \in A_\beta\} > \alpha \Rightarrow \exists \beta, 0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ , onde  $N_\beta \in \{A_{\alpha_k}\}_{k>0}$  e  $x \in N_\beta$ . Assim, por (ii) tem-se a implicação  $x \in N_\beta \Rightarrow x \in A_\alpha$ , logo,

$$[x \in [A]^\alpha \Rightarrow x \in A_\alpha] \Rightarrow [A]^\alpha \subset A_\alpha. \quad (1.2)$$

**Supondo b)**  $\sup \{\beta : x \in A_\beta\} = \alpha$ , nesse caso para cada  $\beta$ , existe  $\beta_0, \beta < \beta_0 \leq \alpha$  tal que  $x \in A_{\beta_0}$ , assim com  $x \in A_\beta$ , por (ii)  $A_\alpha \subseteq A_\beta$ , de onde se conclui  $x \in A_\alpha$ . Logo,

$$[x \in [A]^\alpha \Rightarrow x \in A_\alpha] \Rightarrow [A]^\alpha \subset A_\alpha. \quad (1.3)$$

Por (1.2) e (1.3),

$$[A]^\alpha \subset A_\alpha, \forall \alpha \in (0, 1]. \quad (1.4)$$

Por (1.1) e (1.4), conclui-se

$$[A]^\alpha = A_\alpha, \forall \alpha \in (0, 1].$$

Falta mostrar que:

- $[A]^0 = A_0$
- unicidade de  $A$ .

Utilizando as hipóteses (i) e (iii).

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \overline{A_\alpha} \stackrel{A_\alpha \text{ fechado}}{=} \bigcup_{\alpha \in (0,1]} A_\alpha = A_0.$$

Assim,  $[A]^0 = A_0$ , e provamos que

$$[A]^\alpha = A_\alpha, \forall \alpha \in [0, 1].$$

Sobre a unicidade. Supor  $B \neq A$ ,  $B$  e  $A$  conjuntos *fuzzy*, com

$$[B]^\alpha = B_\alpha = A_\alpha, \alpha \in [0, 1].$$

$\varphi_B$  representa  $B$  e  $\varphi_A$  representa  $A$ ,  $A \neq B \Rightarrow \exists x_0 \in X : \varphi_B(x_0) \neq \varphi_A(x_0)$ .

Como  $\varphi_A(x_0), \varphi_B(x_0) \in [0, 1]$  tem-se

- $\varphi_A(x_0) > \varphi_B(x_0)$ , ou
- $\varphi_B(x_0) > \varphi_A(x_0)$ .

Se  $\varphi_A(x_0) > \varphi_B(x_0)$  então  $\exists \alpha \in [0, 1]$ , tal que  $\varphi_B(x_0) < \alpha < \varphi_A(x_0)$ , logo  $x_0 \in A_\alpha$  e  $x_0 \notin B_\alpha$ , o que é uma contradição pois por hipótese  $A_\alpha = B_\alpha$ . Logo  $B = A$ .

Similarmente prova-se para o caso  $\varphi_B(x_0) > \varphi_A(x_0)$ . Ficando demonstrado a unicidade de  $A$ .  $\square$

### 1.3 Números Fuzzy

**Definição 1.7.** *Seja  $A \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$  um conjunto fuzzy sobre os números reais, diremos que  $A$  é um número fuzzy se:*

- (i) *Todos  $\alpha$ -níveis  $[A]^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  forem intervalos fechados de  $\mathbb{R}$*
- (ii)  *$\text{supp } A$  é limitado.*

Denota-se por  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  a **família dos números fuzzy** sobre o conjunto dos reais.

Com essa definição todos os  $\alpha$ -níveis  $[A]^\alpha$  sendo intervalos fechados que dependem de  $\alpha \in (0, 1]$ , denotamos também o número fuzzy  $A$  por:

$$A = \{[a^\alpha, b^\alpha], \alpha \in (0, 1]\}.$$

Note que, para todo número fuzzy  $A$ ,  $[A]^1 \neq \emptyset$ , logo  $A$  é normal, e existirá ao menos um elemento  $x \in A$  tal que  $\varphi_A(x) = 1$ .

### 1.4 Exemplos de Números Fuzzy

**Exemplo 1.2.** *Os números reais constituem uma subfamília dos números fuzzy. Qualquer  $x \in \mathbb{R}$  pode ser escrito por:*

$$\mathcal{X}_{\{x\}}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x \\ 0 & \text{se } y \neq x \end{cases}$$

o qual é representado na Figura 5.

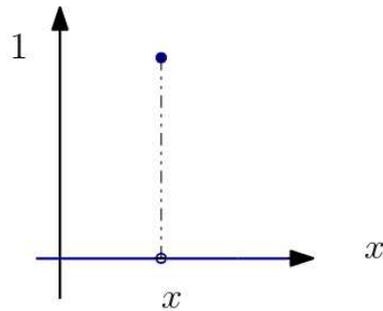


Figura 5 – Número real como um conjunto crisp (número fuzzy).

Note que o número  $x$  pode ser identificado por  $[x, x]$ .

**Exemplo 1.3.** Qualquer intervalo fechado  $[a, b]$ ,  $a < b$ , tem-se

$$\mathcal{X}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [a, b], \\ 0, & \text{se } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

e sua função característica, que é representada na Figura 6.

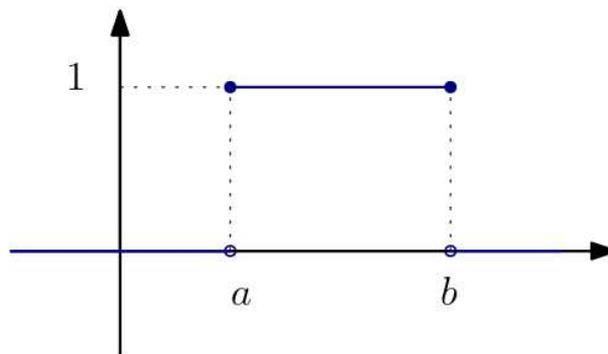


Figura 6 – Número fuzzy.

**Exemplo 1.4.** Formas geométricas dos gráficos de alguns números fuzzy, levam as denominações.

- *Triangulares:*

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{m - a}, & \text{se } x \in (a, m), \\ \frac{b - x}{b - m}, & \text{se } x \in [m, b), \\ 0, & \text{se } x \notin (a, b). \end{cases}$$

A representação geométrica da função  $\varphi(x)$  é apresentada na Figura 7.

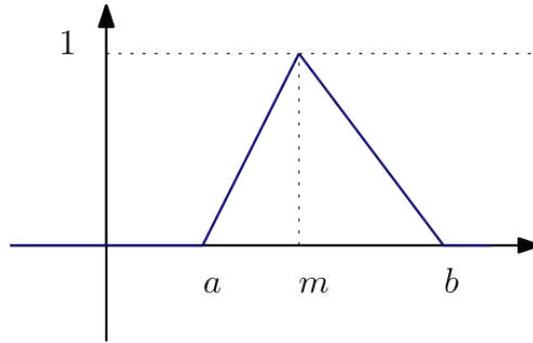


Figura 7 – Número fuzzy triangular.

Notação:  $A = [x, a, m, b]$

- Trapezoidais

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{m - a}, & \text{se } x \in (a, m), \\ 1, & \text{se } x \in (m, n), \\ \frac{b - x}{b - n}, & \text{se } x \in [n, b), \\ 0, & \text{se } x \notin (a, b). \end{cases}$$

A representação geométrica da função  $\varphi(x)$  é apresentada na Figura 8.

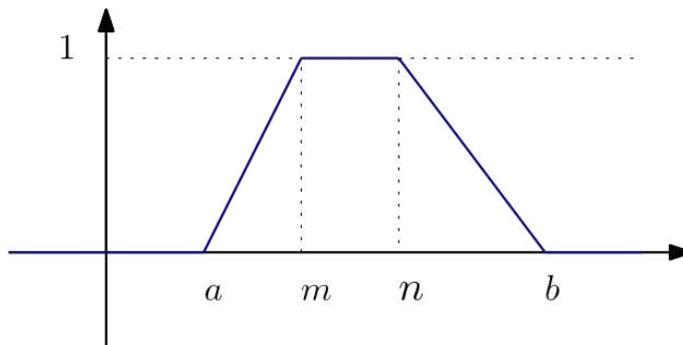


Figura 8 – Número fuzzy trapezoidal.

Notação:  $A = [x, a, m, n, b]$

- Gaussianos

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-m}{a}\right)^2} & \text{se } x \in [m - \delta, m + \delta] \\ 0 & \text{se } x \notin [m - \delta, m + \delta] \end{cases}$$

A representação geométrica da função  $\varphi(x)$  é apresentada na Figura 9.

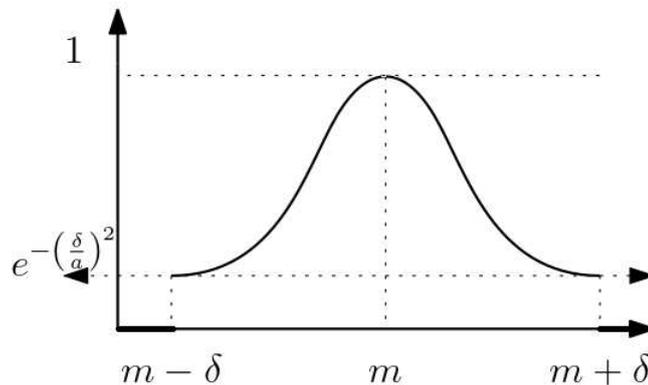


Figura 9 – Número *fuzzy* gaussiano.

Notação:  $A = [x, m, a, \delta]$

## 1.5 Operações com Números *Fuzzy*

Visto que todo número *fuzzy* pode ser identificado por  $\alpha$ -níveis, e que, todo número *fuzzy* tem como suporte intervalos fechados, operar com números *fuzzy* será visto como operar com intervalos fechados, o que leva a considerar a seguinte definição.

**Definição 1.8.** *Considere os intervalos fechados,*

$A = [a_i, a_s]$ :  $a_i, a_s$  limites inferior e superior de  $A$ , respectivamente,  $a_i, a_s \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \leq a_s$

$B = [b_i, b_s]$ :  $b_i, b_s$  limites inferior e superior de  $B$ , respectivamente,  $b_i, b_s \in \mathbb{R}$ ,  $b_i \leq b_s$ .

Então tem-se as operações:

1.  $A + B = [a_i + b_i, a_s + b_s]$
2.  $A - B = [a_i - b_s, a_s - b_i]$
3.  $A \cdot B = [\min P, \max P]$ , com  $P = \{a_i b_i, a_i b_s, a_s b_i, a_s b_s\}$
4.  $\frac{A}{B} = [a_i, a_s] \left[ \frac{1}{b_s}, \frac{1}{b_i} \right]$  se  $0 \notin B$ .
5. Um número real  $k$  pode ser descrito pelo intervalo fechado  $[k, k]$ , assim as operações descritas anteriormente ficam naturalmente estabelecidas entre números reais e intervalos.

Para operar com os números *fuzzy* consideramos os  $\alpha$ -níveis do conjunto, o Teorema 1.3 (Negoiita-Ralescu) e a seguinte definição:

**Definição 1.9.** *Sejam  $A$  e  $B$  números fuzzy identificados por seus intervalos fechados obtidos pelos  $\alpha$ -níveis,  $[A]^\alpha, [B]^\alpha$ , respectivamente. Então*

1.  $[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha$
2.  $[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha$
3.  $[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha$
4.  $\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha}$  desde que  $0 \notin [B]^\alpha$ .

**Exemplo 1.5.** *Sejam  $A = [x, a_1, m_1, a_s]$  e  $B = [x, b_i, m_2, b_s]$  números fuzzy triangulares, vamos calcular a soma  $A + B$  e fazer a representação geométrica desses números. Considere que  $\varphi_A$  é a função de pertinência do número  $A$ , onde*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a_i}{m_1 - a_i}, & \text{se } x \in (a_i, m_1), \\ \frac{a_s - x}{a_s - m_1}, & \text{se } x \in [m_1, a_s), \\ 0, & \text{se } x \notin (a_i, a_s). \end{cases}$$

A Figura 10 representa o número fuzzy  $A$ .

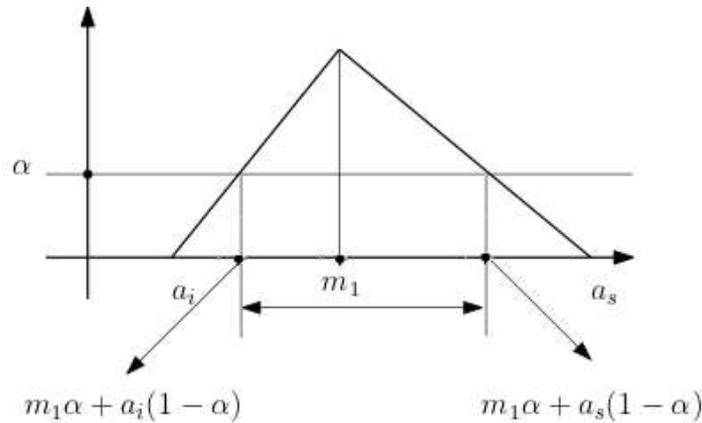


Figura 10 – Número fuzzy triangular  $A$  (Exemplo 1.5).

Note que

$$\frac{x - a_i}{m_1 - a_i} = \alpha \Leftrightarrow x = m_1\alpha + a_i(1 - \alpha) \quad \text{e} \quad \frac{a_s - x}{a_s - m_1} = \alpha \Leftrightarrow x = m_1\alpha + a_s(1 - \alpha).$$

Portanto, tem-se

$$[A]^\alpha = [m_1\alpha + a_i(1 - \alpha), m_1\alpha + a_s(1 - \alpha)] \quad \text{e} \quad [B]^\alpha = [m_2\alpha + b_i(1 - \alpha), m_2\alpha + b_s(1 - \alpha)].$$

Dessa forma,

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [\alpha(m_1 + m_2) + (1 - \alpha)(a_i + b_i), \alpha(m_1 + m_2) + (1 - \alpha)(a_s + b_s)].$$

Por exemplo, se  $A = [x, 1, 2, 3]$  e  $B = [x, 2, 4, 5]$ , então

$$A + B = [x, 3, 6, 8].$$

De fato,

$$\alpha = 0 \Rightarrow [3, 8] \text{ (suporte de } A + B)$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow [6, 6] \Leftrightarrow m_A + m_B = 6 \text{ (valor onde ocorre o máximo de } A + b).$$

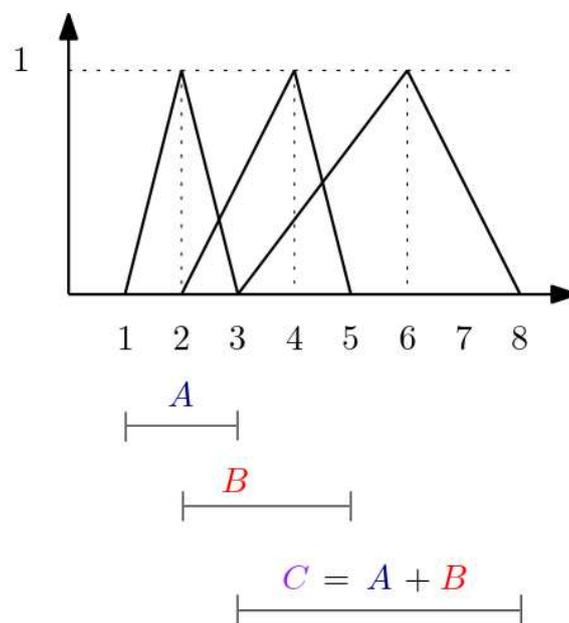


Figura 11 – Soma de números fuzzy.

A Figura 11 representa os números fuzzy  $A$ ,  $B$  e a soma  $A + B$ .

## 1.6 Princípio da Extensão de Zadeh

Apresentaremos o **Princípio da Extensão de Zadeh** baseando-se em uma forma diversificada para representação dos conjuntos fuzzy. Considere as premissas:

- O universo de discurso sendo espaço métrico  $(U, d)$ .
- $\mathcal{U}' = \{A : A \subset U, A \text{ fechado e limitado}\}$
- $T = \{\varphi_A \text{ tal que } \varphi_A : U \rightarrow [0, 1], A \in \mathcal{U}', \text{ função de pertinência para } A\}$
- $\mathbb{F}(\mathcal{U}') = \{(A, \varphi_A) : A \in \mathcal{U}' \text{ e } \varphi_A \in T\}$

**Observação 1.3.** *Estabelecemos:*

- $\mathbb{F}(\mathcal{U}')$  o **espaço dos conjuntos fuzzy** definidos em  $\mathcal{U}'$ ;
- $(A, \varphi_A) \in \mathbb{F}(\mathcal{U}')$  é um **conjunto fuzzy** em  $\mathbb{F}(\mathcal{U}')$ .

**Observação 1.4.** *Se considerarmos para os conjuntos de  $\mathcal{U}'$  a métrica de Hausdorff e em  $T$  a métrica do supremo,  $\mathbb{F}(\mathcal{U}')$  poderá ser visto como um espaço métrico.*

**Definição 1.10. (Métrica de Hausdorff)** *Seja  $(\mathcal{U}, d)$  um espaço métrico e*

$$\mathcal{U}' = \{A : A \subset \mathcal{U}, A \text{ fechado e limitado}\}.$$

*A métrica de Hausdorff sobre  $\mathcal{U}'$  é dada por:*

$$d_1(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \left\{ \inf_{y \in B} d(x, y) \right\}; \sup_{y \in B} \left\{ \inf_{x \in A} d(x, y) \right\} \right\}.$$

**Definição 1.11. (Métrica do supremo)** *Considere  $\mathcal{U}'$  e  $T$  dados anteriormente. Se  $\varphi_A, \varphi_B \in T$ , definimos:*

$$d_2(\varphi_A, \varphi_B) = \sup_{x \in \mathcal{U}} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|$$

Assim  $(\mathbb{F}(\mathcal{U}'), D)$  poderá ser visto como espaço métrico dos conjuntos *fuzzy*, onde

$$\mathcal{D}((A, \varphi_A), (B, \varphi_B)) = d_1(A, B) + d_2(\varphi_A, \varphi_B)$$

Nesse contexto apresentaremos a Definição 1.12 para que o espaço dos conjuntos *fuzzy* seja métrico, possibilitando estudar os conceitos de **aproximações, sequências e convergências**.

No caso particular em que  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$  o conjunto

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) : \text{conjunto dos números fuzzy}, \mathcal{F}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{F}(\mathbb{R}),$$

podrá ser parcialmente ordenado (DINIZ, 2016),

**Definição 1.12.** *Sejam:*

- $(\mathcal{U}, d)$ : espaço métrico
- $\mathbb{F}(\mathcal{U})$ : espaço dos conjuntos fuzzy sobre o universo de discurso  $\mathcal{U}$
- $\mathbb{F}(\mathcal{U}')$  para a família dos conjuntos fuzzy sobre  $\mathcal{U}'$
- $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  uma aplicação
- $(A, \varphi_A) \in \mathbb{F}(\mathcal{U}')$ , um conjunto fuzzy.

Definimos a **extensão de Zadeh** para  $f$ , sendo a aplicação dada por:

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbb{F}(\mathcal{U}') &\rightarrow \mathbb{F}(\mathcal{U}') \\ (A, \varphi_A) &\mapsto \hat{f}(A, \varphi_{\hat{f}(A)}) \end{aligned} ,$$

onde,

- $\hat{f}(A, \varphi_A) = (f(A), \varphi_{\hat{f}(A)})$
- $\varphi_{\hat{f}(A)}(y) = \sup_z \{z : z = \varphi_A(x) \text{ com } f(x) = y\}$ .

Obviamente o princípio de extensão de Zadeh pode ser generalizado considerando  $\mathcal{U}$  um universo de discurso qualquer, não necessariamente sendo espaço métrico.

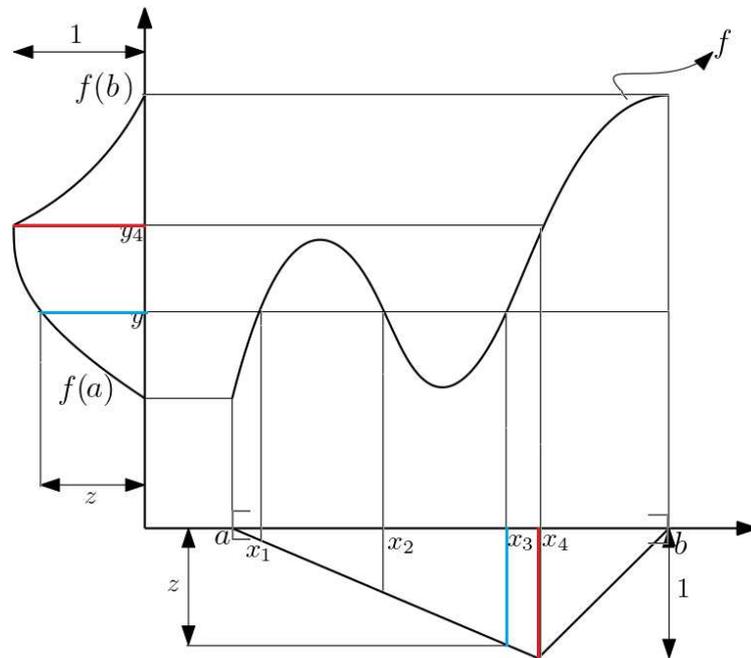


Figura 12 – Extensão de Zadeh.

A Figura 12 representa uma ilustração do princípio da extensão de Zadeh, onde

- $A = [a, b]$
- $f(A) = [f(a), f(b)]$  ou  $f(A) = [m, M]$ , onde  $m$  e  $M$  serão, respectivamente, os valores mínimo e máximo da função.
- $z = \sup \{\varphi_A(x_1), \varphi_A(x_2), \varphi_A(x_3)\} = \varphi_A(x_3)$ .

Note que,

$$\begin{aligned} \varphi_{\hat{f}(A)}(y) &= \sup \{\varphi_A(x_1), \varphi_A(x_2), \varphi_A(x_3)\} = \varphi_A(x_3) = z \\ \varphi_{\hat{f}(A)}(y_4) &= \varphi_A(x_4) = 1 \end{aligned}$$

$$\hat{f}(x, \varphi_A(x)) = (f(x), \varphi_{\hat{f}(A)}(f(x)))$$

A Figura 13 representa um organograma do princípio da extensão de Zadeh.

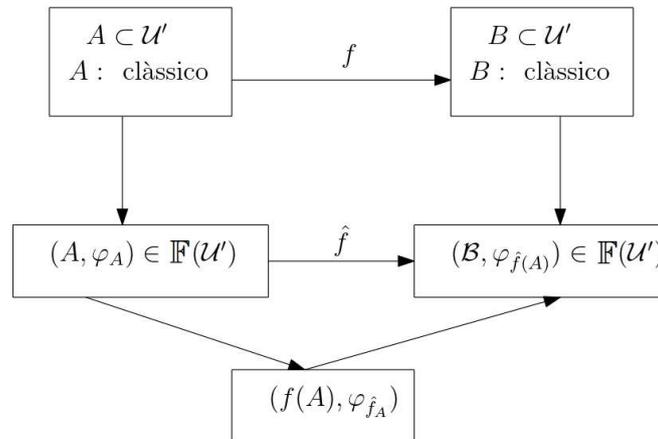


Figura 13 – Diagrama do princípio da Extensão de Zadeh.

## 1.7 Sistemas de Bases de Regras Fuzzy (SBRF)

Um Sistema de Bases de Regras Fuzzy (SBRF) é composto por relações entre conjuntos fuzzy através de regras a serem definidas. A título de exemplo, considere o problema a seguir.

**Exemplo 1.6.** (VALLE, 2018) *Otimizar a quantidade de detergente decorrentes das lavagens de roupas, considerando:*

- peso das roupas
- as quantidades de sujeiras.

Inicialmente suponha que se interprete as classificações dos pesos por: **muito leve**, **leve**, **pesado**, **muito pesado**, sendo essas expressões subjetivas definidas pelos números fuzzy esquematizados na Figura 98.

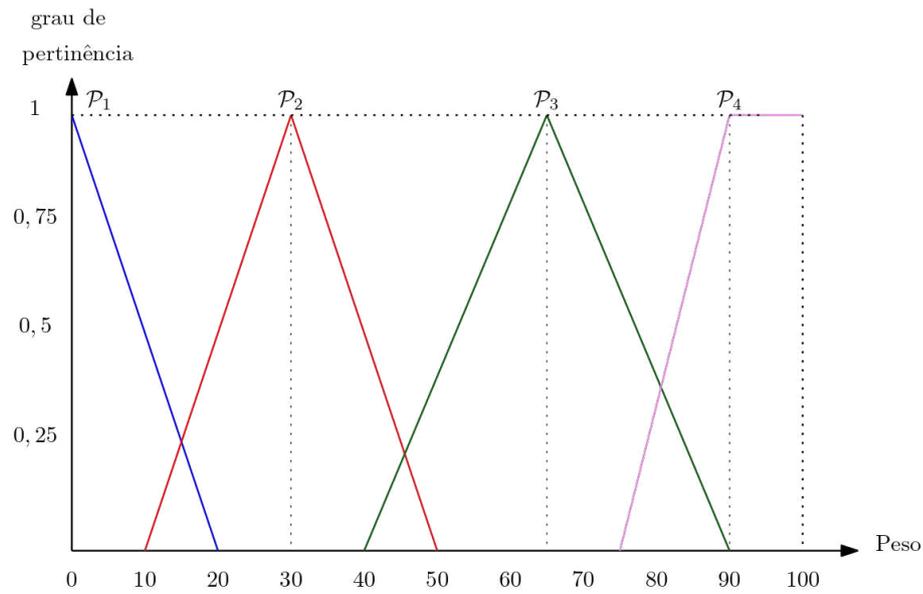


Figura 14 – Números fuzzy - peso de roupa.

Assim, os pesos  $p \in [0, 100]$  caracterizados por muito leve, leve, pesado e muito pesado ficarão expressos por quatro números fuzzy:

$$\mathcal{P}_1 = [p, -20, -10, 0, 20]: \text{muito leve (trapezoidal)}$$

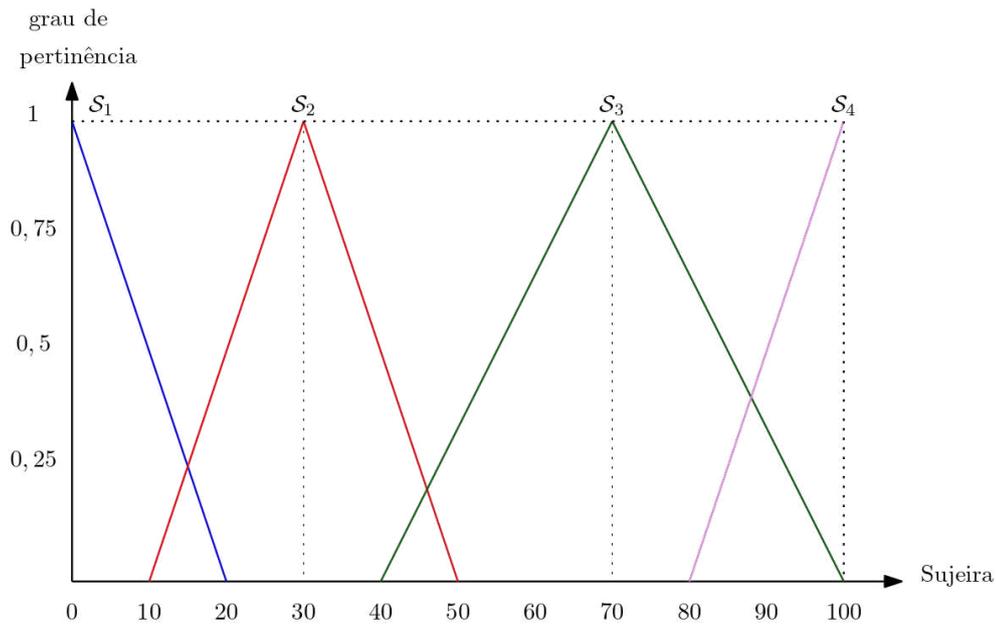
$$\mathcal{P}_2 = [p, 10, 30, 50]: \text{leve (triangular)}$$

$$\mathcal{P}_3 = [p, 40, 65, 90]: \text{pesado (triangular)}$$

$$\mathcal{P}_4 = [p, 75, 90, 100, 120]: \text{muito pesado (trapezoidal)}$$

sendo  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4\}$  o conjunto dos possíveis pesos no intervalo  $[0, 100]$ .

Similarmente, pode-se associar a sujeira através de números fuzzy na Figura 15, a seguir

Figura 15 – Números *fuzzy* - sujeira.

$\mathcal{S}_1 = [s, -20, -10, 0, 20]$ : quase limpo (*trapezoidal*)

$\mathcal{S}_2 = [s, 10, 30, 50]$ : sujo (*triangular*)

$\mathcal{S}_3 = [s, 40, 70, 100]$ : muito sujo (*triangular*)

$\mathcal{S}_4 = [s, 80, 100, 110]$ : exageradamente sujo (*triangular*)

assim, a sujeira fica estabelecida pelo conjunto  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4\}$  no intervalo  $[0, 100]$ .

A classificação das quantias de detergentes  $q \in [0, 100]$  a serem usadas, podem ser fuzzificadas como na Figura 100

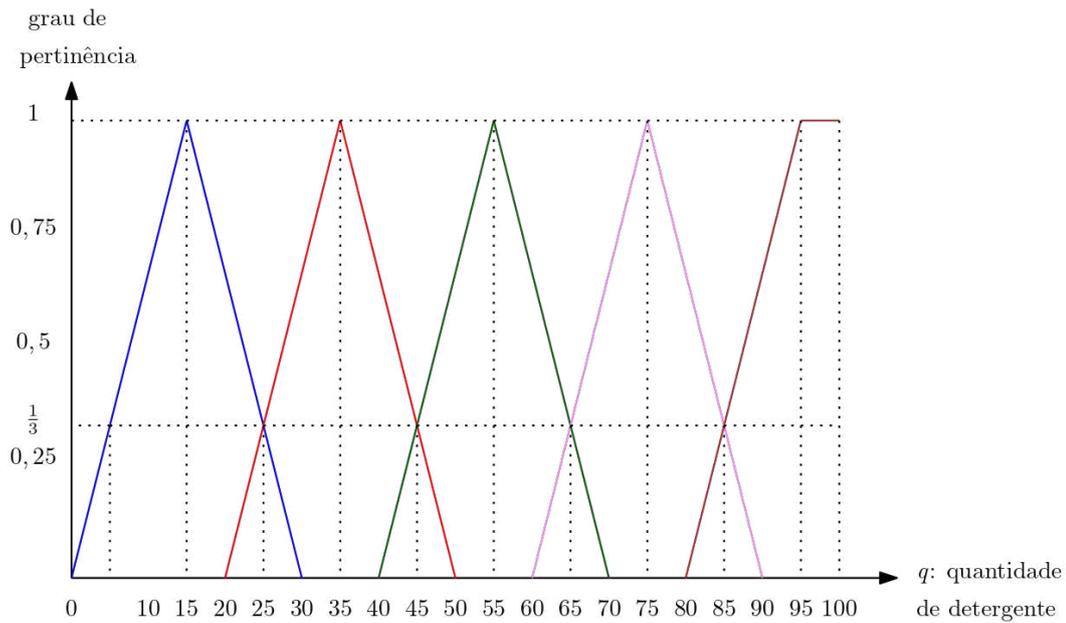


Figura 16 – Conjunto dos números *fuzzy* representando as quantidades de detergentes.

com,

$$Q_1 = [x, 0, 15, 30]: \text{muito pouco (triangular)}$$

$$Q_2 = [q, 20, 35, 50]: \text{pouco (triangular)}$$

$$Q_3 = [q, 40, 55, 70]: \text{moderado (triangular)}$$

$$Q_4 = [q, 60, 75, 90]: \text{exagerado (triangular)}$$

$$Q_5 = [q, 80, 95, 100, 120]: \text{máximo (trapezoidal)}.$$

A fuzzificação das quantias de detergentes ficam caracterizadas pelo conjunto

$$Q = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$$

no intervalo  $[0, 100]$ .

Nesse exemplo, a base de regras será representada pela função que associa os números fuzzy  $(P_i, S_j)$  e  $Q_k$  indicada por

$$(P_i, S_j) \rightarrow Q_k, \quad \begin{cases} 1 \leq i, j \leq 4 \\ 1 \leq k \leq 5 \end{cases},$$

ou seja, a cada peso  $P_i$  e sujeira  $S_j$ , fuzzy, será associada uma certa “quantia/número” fuzzy de detergentes. A responsabilidade pela definição dessa relação será pelas **regras** definidas pelos modeladores, como decorrências das experiências práticas, que comporão as

chamadas **bases regras do sistema**. As variáveis fuzzy de entrada  $\mathcal{P}_i$  e  $\mathcal{S}_j$  são chamadas de **antecedentes**.

As quantidades fuzzy de detergentes de  $\mathcal{Q}$ , denominadas de **consequentes**, associadas aos antecedentes são determinadas pelas regras representadas na Figura 17.

$\mathcal{S} \backslash \mathcal{P}$	$\mathcal{P}_1$ muito leve	$\mathcal{P}_2$ leve	$\mathcal{P}_3$ pesado	$\mathcal{P}_4$ muito pesado
$\mathcal{S}_1$ quase sujo	$\mathcal{Q}_1$ muito pouco	$\mathcal{Q}_2$ pouco	$\mathcal{Q}_3$ moderado	$\mathcal{Q}_3$ moderado
$\mathcal{S}_2$ sujo	$\mathcal{Q}_1$ pouco	$\mathcal{Q}_1$ pouco	$\mathcal{Q}_3$ moderado	$\mathcal{Q}_4$ exagerado
$\mathcal{S}_3$ muito sujo	$\mathcal{Q}_3$ moderado	$\mathcal{Q}_3$ moderado	$\mathcal{Q}_4$ exagerado	$\mathcal{Q}_4$ exagerado
$\mathcal{S}_4$ extremo sujo	$\mathcal{Q}_3$ moderado	$\mathcal{Q}_4$ exagerado	$\mathcal{Q}_5$ maximo	$\mathcal{Q}_5$ maximo

Figura 17 – Representação das regras.

A Figura 17 representa a definição de 16 regras que definem a aplicação,

$$f : \mathcal{P} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Q}$$

$$(\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_j) \mapsto f(\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_j) = \mathcal{Q}_k$$

com  $1 \leq i, j \leq 4$ ,  $1 \leq k \leq 5$ , ou seja,

$R_1 : f(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_1) = \mathcal{Q}_1$ , ou seja, Se o peso é  $\mathcal{P}_1$  e a sujeira é  $\mathcal{S}_1$  então a quantidade de detergente será  $\mathcal{Q}_1$ .

E assim sucessivamente,

$$R_2 : f(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_2) = \mathcal{Q}_1$$

$$R_3 : f(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_3) = \mathcal{Q}_3$$

$$R_4 : f(\mathcal{P}_1, \mathcal{S}_4) = \mathcal{Q}_3$$

⋮

$$R_{16} : f(\mathcal{P}_4, \mathcal{S}_4) = \mathcal{Q}_5.$$

A definição das regras  $R_i$ , traduzem expressões linguísticas geralmente subjetivas do tipo “Se... Então...” caracterizando nesse caso a aplicação que associa a um par de números fuzzy, um outro número fuzzy. Ou ainda, associando a um par que representa aproximações de peso e sujeira uma certa quantia aproximada de detergentes. Isso significa fuzificação das variáveis. Note que se o número de regras aumentar de forma ilimitada, e os suportes dos números fuzzy se tornarem cada vez “menores”, as aplicações correspondentes irão se tornando “quase que” uma aplicação ponto a ponto, traduzindo uma situação “determinística”.

Ao se considerar um valor real como um número fuzzy, pode-se imaginar uma aplicação determinística como um caso particular de um SBRF.

### 1.7.1 Inferência sobre SBRF

Os métodos de inferências sobre um SBRF, consistem em:

- Fixar valores reais nos antecedentes, no presente caso (Exemplo 1.6), aos pesos e sujeiras
- Definir no correspondente conseqüente, um valor real associado aos valores fixados nos antecedentes.

Esses procedimentos serão obtidos pelo que chamamos de inferência, a nós particularmente, através dos métodos de:

- Mamdani
- Takagi-Sugeno.

No Capítulo 6 será apresentado o método de Mamdani, resolvendo o exemplo aqui especificado de lavagem de roupas (Exemplo 1.6). Será também apresentada uma generalização da teoria para SBRF com a inferência de Mamdani. Como SBRF é parte integrante do método *p-fuzzy*, o objetivo será por seu intermédio, analisar estabilidades em sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) autômatos, utilizando integrais fuzzy para desfuzificação.

#### 1.7.1.1 Resumo Passo a Passo das Ações de um SBRF (Mamdani) para o Exemplo 1.6

Conhecidas as variáveis de entrada do problema:

1. Efetivar a fuzificação das mesmas através das definições dos números fuzzy que as representam, caracterizando os antecedentes

2. Da mesma forma fuzzificar as variáveis de saída por números *fuzzy*. Dessa forma, ficam caracterizados os consequentes.
3. Estabelecer regras que associem os conjuntos *fuzzy* (antecedentes com os consequentes)
4. Escolher um método de inferência (no caso Mamdani) que através da associação:

$$(\mathcal{P}_i, \mathcal{S}_j) \rightarrow \mathcal{Q}_k \quad (\text{no Exemplo 1.6, } 1 \leq i, j \leq 4, 1 \leq k \leq 5)$$

se determina um subconjunto de  $\mathcal{Q}_k$ , identificado por  $\overline{\mathcal{Q}}_k$  (a forma de obter  $\overline{\mathcal{Q}}_k$  será apresentada no item 7).

5. Toma-se a união de todos os conjuntos *fuzzy*  $\overline{\mathcal{Q}}_k$  obtidos em 4., determinando o conjunto *fuzzy* identificado por  $R = \cup \overline{\mathcal{Q}}_k$
6. Calcula-se o centro de massa ou a integral *fuzzy* de  $R$ , obtendo um valor real  $q$ .
7. No Exemplo 1.6 tem-se  $(p, s)$ ,  $p \in \mathcal{P}_i$  e  $s \in \mathcal{S}_j$  peso e sujeira, respectivamente, e os valores atribuídos serão  $p = x_i$ ,  $s = y_j$  sendo  $q = z_k$  o valor a ser encontrado para a quantidade de detergente. Para determinar  $q$ , será calculado:

$$m(p, s) = \varphi_{\mathcal{P}_i}(p) \wedge \varphi_{\mathcal{S}_j}(s)$$

e com esse valor será definido o conjunto *fuzzy*  $\overline{\mathcal{Q}}_k \subset \mathcal{Q}_k$ , por:

$$\overline{\mathcal{Q}}_k = m(p, s) \wedge \mathcal{Q}_k.$$

A união

$$\bigcup \left\{ \begin{array}{l} p \in \text{supp } \mathcal{P}_i \\ s \in \text{supp } \mathcal{S}_j \end{array} \right. \overline{\mathcal{Q}}_k = R$$

é um conjunto *fuzzy*, e ao se determinar o centro de massa de  $R$ , ou a integral *fuzzy* sobre  $R$ , obtém-se o valor  $z_k = q$ , que é a desfuzzificação de  $R$  associada aos valores atribuídos às variáveis  $x_i : p$ , e  $y_j : s$ .

Ao se desenvolver esses cálculos computacionalmente para os possíveis valores de  $x_i, y_j$ , temos definida a relação entre variáveis  $x_i$  e  $y_j$  associadas a  $z_k \in \mathcal{Q}$  (quantidade de detergente), ou seja,

$$(p, s) \rightarrow q$$

8. Um possível organograma para um SBRF é representado na Figura 18

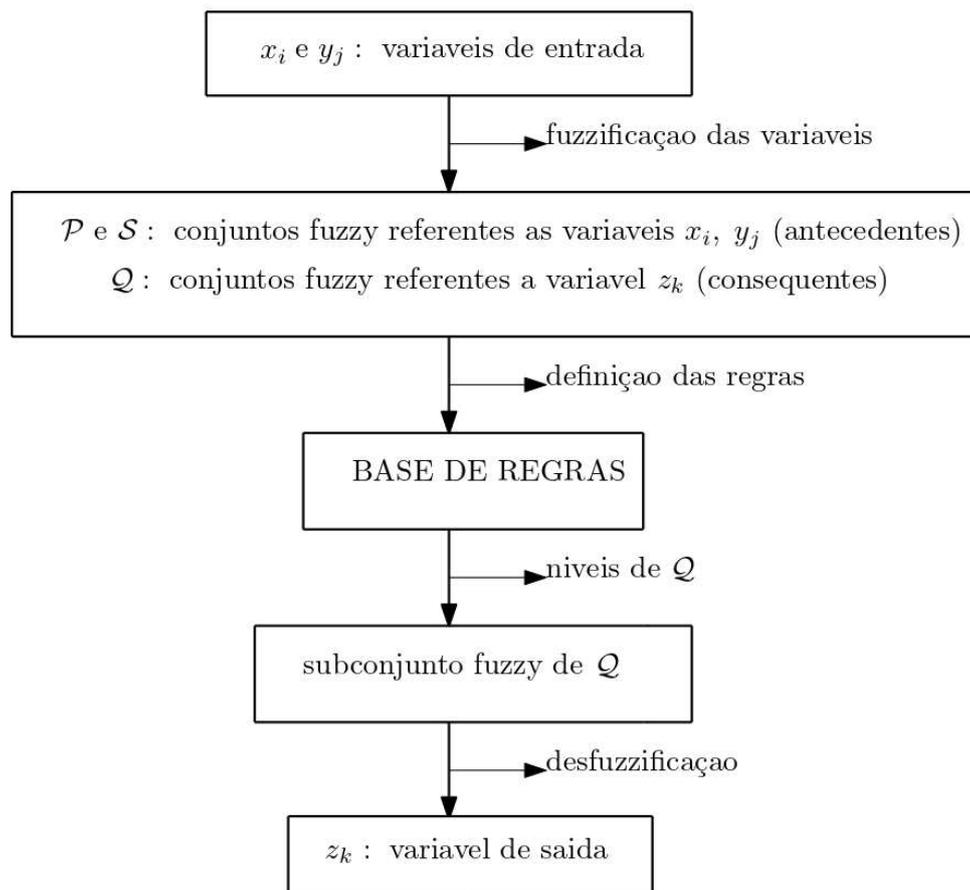


Figura 18 – Organograma SBRF.

O valor  $m$  especificado anteriormente, poderia ser visto como resultado de uma aplicação

$$m : \mathcal{P}_i \times \mathcal{S}_j \rightarrow [0, 1]$$

$$(p, s) \mapsto m(p, s) = \varphi_{\mathcal{P}_i}(p) \wedge \varphi_{\mathcal{S}_j}(s) ,$$

com  $\mathcal{P}_i$  e  $\mathcal{S}_j$  conjuntos *fuzzy*.

Os cálculos e os resultados serão detalhados no Capítulo 6, como pré requisitos da utilização em sistemas *p-fuzzy*. Explícita ou implicitamente os conceitos desenvolvidos nesse Capítulo permearão todo trabalho desenvolvido. No Capítulo 2, **conjuntos e números fuzzy**, serão instrumentalizações básicas para o estudo das medidas *fuzzy* e de Possibilidade. O início do Capítulo 4 e a Seção 4.1 são requisitos para desenvolver o Cálculo Diferencial Integral *Fuzzy*, onde as funções envolvidas em sua maioria são de pertinências, no Capítulo 6 serão indispensáveis para desenvolver e compreender SBRF (Sistemas de Bases de Regras *Fuzzy*) que por sua vez serão utilizadas para definir e aplicar em sistemas *p-fuzzy*.

## 2 Introdução à teoria da Medida

Nesse capítulo iniciamos o estudo sobre as  $\sigma$ -álgebras como pré requisito para definir medidas, apresentando exemplos, propriedades, corolários e uma forma de gerá-las. Definimos medidas, *fuzzy* e *fuzzy* generalizada, Probabilidade e Possibilidade. Apresentamos a medida usual para espaços métricos mostrando que para ocorrer a compatibilidade de uma  $\sigma$ -álgebra em um espaço topológico, é necessário ser ele separável, fato que Sugeno em sua tese estabeleceu de forma axiomática. Esse resultado é considerado importante por ser uma das condições a serem estabelecidas ao espaço topológico na Seção 4.1 para definir derivadas *fuzzy*.

Demonstramos as propriedades das medidas *fuzzy* e de probabilidade. Mostramos que se uma medida de Possibilidade for *fuzzy* (Sugeno), sua distribuição de possibilidade será obrigatoriamente nula em todos os valores em que ela for contínua. Porém, toda medida de possibilidade será *fuzzy* generalizada. Esses resultados serão utilizados no Capítulo 3 ao se proceder a generalização da integral de Sugeno por intermédio de uma medida *fuzzy* geral, bem como para a compreensão dos exemplos e as comparações entre as respectivas integrais.

Utilizamos como referências os textos (Cabral (2010), Federer (1996), Gerônimo (1988), Kreyszig (1991), Sugeno (1974), Waterman (1965), Wikipedia (2020)).

### 2.1 Conceito de medir

Uma ideia preliminar sobre “medir” uma grandeza, pode ser pensada em fixar um padrão de representação, em seguida buscar comparações. Ainda ter como objetivo avaliar essas grandezas, estabelecendo propriedades relacionadas aos objetos a serem mensurados. Por exemplo, pode-se avaliar um subconjunto de números pela quantidade de elementos que possui ou pelo maior valor entre eles, dependendo do interesse a ser previamente fixado. Nesse contexto é necessário ajustar conceitos, ou mais precisamente, definir medida de modo que configure a comparação entre elementos distintos. As definições e propriedades seguintes serão aplicadas nos estudos das Integrais *Fuzzy* e *Fuzzy* Generalizada, temas abrangentes para fundamentar a construção de um Cálculo Diferencial e Integral *Fuzzy*.

**Definição 2.1.** *Seja  $X \neq \emptyset$  um conjunto qualquer e  $\mathcal{F} \subset 2^X$ ,  $\mathcal{F}$  é chamada de  $\sigma$ -álgebra sobre o conjunto  $X$ , ou simplesmente  $\sigma$ -álgebra em  $X$ , se forem verificadas as condições:*

(a.1)  $X \in \mathcal{F}$ .

(a.2)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ , em que  $A^C$  é o complemento de  $A$ .

(a.3)  $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

O par  $(X, \mathcal{F})$  é chamado de espaço  $\mathcal{F}$ -mensurável. Um elemento qualquer  $A \in \mathcal{F}$  é chamado de conjunto  $\mathcal{F}$ -mensurável.

**Exemplo 2.1.** Sejam  $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, X\}$ ,  $\mathcal{F}_2 = 2^X$ .  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  são chamadas de  $\sigma$ -álgebra *canônicas*, sendo a menor e a maior, respectivamente.

**Exemplo 2.2.** Considere o conjunto  $X = \{a, b, c\}$ . Temos que  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{a\}, \{b, c\}\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ .

**Proposição 2.1.** Seja  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ , então:

(i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii)  $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$

(iii)  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A - B) \in \mathcal{F}$ .

*Demonstração.* (i) Como  $X \in \mathcal{F}$  e  $X^C \in \mathcal{F}$ , sendo (a.2) verificada  $\emptyset \in \mathcal{F}$ .

(ii) Se  $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F}$ , então  $\{A_n^C\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \left( \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n)^C \right)^C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

(iii) Se  $A, B \in \mathcal{F}$ , então  $A, B^C \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B^C \in \mathcal{F} \Rightarrow (A - B) \in \mathcal{F}$ .

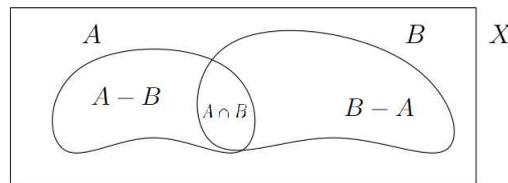


Figura 19 – Representação de conjuntos não disjuntos.

□

**Exemplo 2.3.** Seja  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ . Suponha  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\{B_q\}_{q \in \mathbb{Q}}$ ,  $\{C_r\}_{r \in \mathbb{R}}$  sequências contidas em  $\mathcal{F}$ . Então

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n, \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n, \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} B_q, \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} B_q$$

pertencem a  $\mathcal{F}$ ,

$$\bigcup_{r \in \mathbb{R}} C_r, \bigcap_{r \in \mathbb{R}} C_r$$

não necessariamente pertencem.

### 2.1.1 Gerando $\sigma$ -álgebras

Uma família de  $\sigma$ -álgebras poderá gerar uma  $\sigma$ -álgebra.

**Lema 2.1.** *Seja  $F = \{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ , uma família de  $\sigma$ -álgebras em  $X$ , onde  $I$  é um conjunto de índices quaisquer. Então*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra em } X.$$

*Demonstração.* Note que se  $\mathcal{F}_i$  são  $\sigma$ -álgebras em  $X$ , então  $\emptyset, X$  pertencem a  $\mathcal{F}_i$  para todo  $i$  em  $I$ . Logo,

$$\emptyset, X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i.$$

Com raciocínio análogo, conclui-se que a.2) e a.3) da Definição 2.1 são condições verificadas.

Logo,

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra}$$

e será a menor  $\sigma$ -álgebra que pertence a  $F$ . □

**Corolário 2.1.** *Seja  $\mathcal{A} \subset 2^X, X \neq \emptyset$ , então existe a menor  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$  em  $X$ , contendo  $\mathcal{A}$ , isto é, se  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$  que contém  $\mathcal{A}$ , então*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{F}.$$

*Demonstração.* Seja  $F = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra que contém } \mathcal{A}\}$ . Vimos pelo Lema 2.1 que

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\mathcal{F} \in F} \mathcal{F} \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra}$$

sendo a menor  $\sigma$ -álgebra que contém  $\mathcal{A}$ . □

Os estudos sobre medidas tiveram início na segunda metade do século XIX, onde se destacaram os matemáticos:

- Émile Borel  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Saint-Affrique 07/01/1871} \\ \text{Paris 03/02/1956} \end{array} \right.$
- Henri Lebesgue  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Beauvais 28/06/1875} \\ \text{Paris 26/06/1941} \end{array} \right.$

- Constantin Carathéodory  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Berlim 13/09/1873} \\ \text{Munique 02/02/1950} \end{array} \right.$
- Johann Radon  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Decin 16/12/1887} \\ \text{Viena 25/05/1956} \end{array} \right.$
- Maurice Fréchet  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maligny-França 02/09/1878} \\ \text{Paris 04/06/1973} \end{array} \right.$

**Definição 2.2.** (*Medida*) Seja  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ , uma medida sobre  $\mathcal{F}$  é definida por uma aplicação  $g$ , satisfazendo as condições:

$$(m_1) \quad \begin{array}{l} g : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty] \\ A \mapsto y = g(A) \end{array}$$

$$(m_2) \quad g(\emptyset) = 0$$

( $m_3$ ) Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , então

$$g\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} g(A_n).$$

**Observação 2.1.** A propriedade ( $m_3$ ) é denominada de  $\sigma$ -**aditividade**. Uma aplicação que satisfaça essas condições será denominada de medida  $\sigma$ -**aditiva**.

**Observação 2.2.** O espaço  $(X, \mathcal{F}, g)$  é denominado espaço  $\mathcal{F}$ -**mensurável** ou **medível**.

**Exemplo 2.4.** Sejam  $X = \mathbb{Z}$  (conjuntos dos números inteiros),  $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{Z}}$ , definimos:

$$\begin{array}{l} g : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty] \\ A \mapsto g(A) = \text{números de elementos de } A, \end{array}$$

então  $(\mathbb{Z}, \mathcal{F}, g)$  é um espaço medível.

### 2.1.1.1 Medida usual definida em uma $\sigma$ -álgebra sobre um Espaço Métrico

Seja  $(M, d)$  um espaço métrico, com  $x_0 \in M$  e  $d$  a métrica em  $M$ , então:

$$B(x_0, r) = \{x \in M : d(x, x_0) < r, r > 0\}$$

é chamada de **bola aberta** em  $M$ , de centro em  $x_0 \in M$  e raio  $r, r > 0$ . Um conjunto  $A \subset M$  é chamado de **aberto** em  $M$  se para qualquer  $x \in A$ , existe  $r(x), r(x) > 0$  tal que  $B(x, r(x)) \subset A$ . Para um conjunto qualquer não vazio  $X$ , uma família  $\mathcal{T}, \mathcal{T} \subset 2^X$  é uma **topologia** em  $X$  se:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

- $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
- $\lambda \in I$  (conjunto qualquer de índices),  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \in \mathcal{T}$ .

$(X, \mathcal{T})$  é chamado, espaço topológico. Considere agora a topologia  $\mathcal{T}_M$  definida em  $M$  constituída pelos abertos de  $M$

$$\mathcal{T}_M = \{A : A \subset M, A \text{ aberto de } M\}$$

A menos da condição da interseção ser finita,  $\mathcal{T}_M$  satisfaz as propriedades de uma  $\sigma$ -álgebra.

Seja

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}_M} : \text{menor } \sigma\text{-álgebra que contém } \mathcal{T}_M,$$

A medida a ser definida será sobre  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}_M}$ .

A condição da interseção ser finita para  $\mathcal{T}_M$  não satisfaz a segunda exigência de uma  $\sigma$ -álgebra, quanto a união, a indexação não é necessariamente enumerável para  $\mathcal{T}_M$ . Há necessidade de compatibilizar as indexações, caso contrário a  $\sigma$ -álgebra não terá necessariamente condições para conter a topologia, não sendo possível incluí-la em  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}_M}$  impedindo em definir medida. Entretanto se o espaço topológico for separável terá então uma base enumerável para  $\mathcal{T}_M$ , e a questão decorrente da união será resolvida, quanto a interseção não haverá problema pois a exigência sobre a topologia é restrita em relação a  $\sigma$ -álgebra.

Ao considerar em  $M = (\bar{\mathbb{R}}, d)$  com a topologia dos intervalos abertos, a menor  $\sigma$ -álgebra decorrente dessa topologia contém os intervalos reais. A distância  $d$  e os intervalos reais são identificados por:

- $d(x, y) = |x - y|; x, y \in \mathbb{R}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, a < b; a, b \in \mathbb{R}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

as operações em  $\bar{\mathbb{R}}$  (reais estendido), com  $a \in \mathbb{R}$  sendo:

- $\infty + a = a + \infty = \infty + \infty = \infty$
- $\infty - a = \infty$

- $\infty - \infty$  não se define
- $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \cdot \infty = \infty$ ,  $a \neq 0$ .

A medida  $g$  definida em um intervalo real  $I$  de extremidades  $a$  e  $b$ ,  $a \leq b$ , dada por

$$g(I) = b - a,$$

é denominada **medida usual** em  $\bar{\mathbb{R}}$  (reais estendido).

Para um espaço métrico qualquer localmente compacto, similarmente ao caso  $M = (\mathbb{R}, d)$ , poderá ser obtida sobre

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}_M} : \text{menor } \sigma\text{-álgebra que contém } \mathcal{T}_M,$$

uma medida usual para  $M$ .

**Propriedade 2.1.** *Seja  $(X, \mathcal{F}, g)$  um espaço  $\mathcal{F}$ -mensurável com medida  $g$ , então valem as asserções:*

- (i) *Se  $A, B \in \mathcal{F}$  e  $A \cap B = \emptyset$ , então  $g(A \cup B) = g(A) + g(B)$*
- (ii) *Se  $A, B \in \mathcal{F}$  e  $A \subset B$ , então  $g(A) \leq g(B)$*
- (iii) *Para todo  $A, B \in \mathcal{F}$ , temos  $g(A \cup B) \leq g(A) + g(B)$*
- (iv) *Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ , então  $g\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g(A_n)$*
- (v) *Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma SMC (Sequência Monótona não decrescente), ou seja,  $A_n \subset A_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$ , então*

$$g\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{g(A_n)\}$$

- (vi) *Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  é SMD (Sequência Monótona não crescente), ou seja,  $A_n \supset A_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  e para algum  $n$ ,  $g(A_n) < +\infty$ , então*

$$g\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{g(A_n)\}.$$

*Demonstração.* (i) Decorre da definição de medida  $g$ .

- (ii) Se  $A, B \in \mathcal{F}$  e  $A \subset B$ , então

$$A \cup (B - A) = B \text{ e } A \cap (B - A) = \emptyset.$$

Logo

$$g(B) = g[A \cup (B - A)] = g(A) + g(B - A)$$

e como  $g(B - A) \in [0, +\infty)$  conclui-se que  $g(A) \leq g(B)$ .

(iii) Sendo

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset \text{ e } A \cup B = [(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)],$$

então

$$\begin{aligned} g(A \cup B) &= g(A - B) + g(A \cap B) + g(B - A) \\ &\leq [g(A - B) + g(A \cap B)] + [g(B - A) + g(A \cap B)] \\ &= g(A) + g(B) \end{aligned}$$

(iv) Por indução sobre  $n$ .  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ .

Mostramos que vale para  $n = 2$ . Suponha que

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Logo por (iii)

$$g(A \cup A_{n+1}) \leq g(A) + g(A_{n+1}) \stackrel{\substack{\text{hipótese de} \\ \text{indução}}}{\leq} \sum_{k=1}^n g(A_k) + g(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} g(A_k)$$

de onde se conclui que

$$g\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g(A_n).$$

(v) Seja  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma SMC, de acordo com a Figura 20. Defina,

$$B_0 = A_0, B_1 = (A_1 - A_0), \dots, B_n = (A_n - A_{n-1})$$

então

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset.$$

Mas,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ , então

$$g\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = g\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(B_n). \tag{2.1}$$

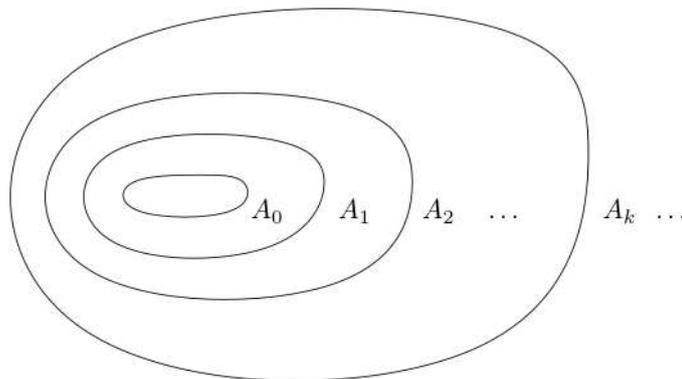


Figura 20 – Sequência não crescente de conjuntos.

Note que para  $n = 1$

$$A_1 = B_0 \cup B_1 \text{ e } B_1 \cap B_0 = \emptyset \Rightarrow g(A_1) = g(B_0) + g(B_1)$$

por indução, suponha valer para  $n = k - 1$ , ou seja,

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= \left[ \bigcup_{n=0}^{k-2} B_n \right] \cup B_{k-1} \text{ e } \left[ \bigcup_{n=0}^{k-2} B_n \right] \cap B_{k-1} = \emptyset \\ \Rightarrow g(A_{k-1}) &= g \left[ \left( \bigcup_{n=0}^{k-2} B_n \right) \right] + g(B_{k-1}) = \sum_{n=0}^{k-1} g(B_n). \end{aligned}$$

Assim, para  $n = k$

$$A_k = \left( \bigcup_{n=0}^{k-1} B_n \right) \cup B_k \Rightarrow g(A_k) = \sum_{n=0}^k g(B_n).$$

Dessa forma, a igualdade vale para todo  $k \in \mathbb{N}$ , o que implica que,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} B_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} g(A_k)$$

e por (2.1)

$$g \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g(A_k)$$

e por (ii)  $g$  é não decrescente, logo

$$g \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{g(A_k)\}.$$

(vi) Por hipótese,  $\exists k \in \mathbb{N}$  tal que  $g(A_k) < +\infty$ . Fixe esse  $k$  e defina,

$$F_n = A_k - A_{k+n}$$

$$\text{para } n = 1, \quad F_1 = A_k - A_{k+1}$$

$$\text{para } n = 2, \quad F_2 = A_k - A_{k+2}$$

⋮

$$\text{para } n = p, \quad F_p = A_k - A_{k+p}$$

$\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é SMC, e seja  $F = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} F_p$ , então por (v) tem-se

$$g(F) = \lim_{p \rightarrow +\infty} g(F_p). \tag{2.2}$$

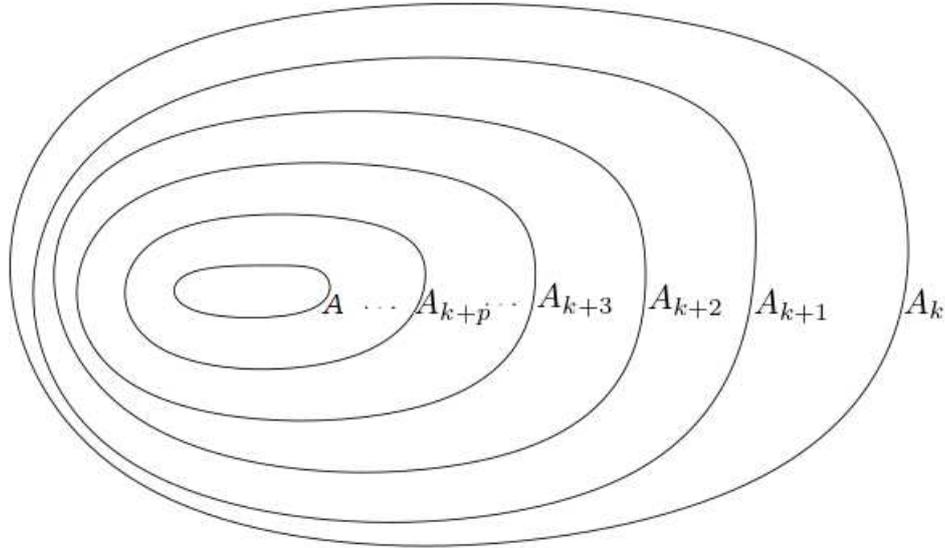


Figura 21 – Sequência não crescente convergente de conjuntos.

Mas,  $g(F_p) + g(A_{k+p}) = g(A_k)$  (veja Figura 21) e sendo  $g(A_k) < +\infty$ , tem-se

$$g(F_p) = g(A_k) - g(A_{k+p}).$$

Logo, pela Equação (2.2)

$$g(F) = \lim_{p \rightarrow +\infty} g(F_p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} [g(A_k) - g(A_{k+p})] \Rightarrow$$

$$g(F) = g(A_k) - \lim_{p \rightarrow +\infty} g(A_{k+p}). \tag{2.3}$$

Tem-se que  $F \subset A_k \Rightarrow g(A_k) = g(F) + g(A_k - F) \Rightarrow$

$$g(F) = g(A_k) - g(A_k - F). \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) obtém-se

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} g(A_{k+p}) = g(A_k - F).$$

Porém,

$$A_k - F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$$

concluindo então que

$$g\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{g(A_n)\}$$

pois  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é SMD.

□

## 2.1.2 Definições e exemplos de Medidas

### 2.1.2.1 Medida Exterior

A medida exterior introduzida por Caratheodory (CABRAL, 2010) consiste em se flexibilizar o axioma da aditividade onde primeiramente se define uma pré-medida (monótona mas não aditiva) com domínio em  $2^X$ , em seguida busca-se uma  $\sigma$ -álgebra onde a pré-medida restrita a ela seja uma medida.

Por exemplo, em  $\mathbb{R}$  se considerar a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  gerada pela topologia dos intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ , a medida:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{F} &\rightarrow [0, +\infty] \\ I &\mapsto \alpha(I) = |b - a| \end{aligned} ,$$

se for estendida através de coberturas para qualquer  $A \subset \mathbb{R}$ , perderá a  $\sigma$ -aditividade, sendo necessário que se flexibilize a definição de medida, pois a união enumerável de conjuntos disjuntos, não será necessariamente igual a soma das medidas dos conjuntos (veja conjunto Vitali, mencionado na Observação 2.3 adiante).

**Definição 2.3.** *Uma medida exterior em  $X \neq \emptyset$  é uma função  $\alpha : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  que satisfaça:*

$$(m_1) \quad \alpha(\emptyset) = 0$$

$$(m_2) \quad A, B \in 2^X, A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B) \text{ monótona}$$

$$(m_3) \quad \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset 2^X \Rightarrow \alpha \left( \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(A_n)$$

Segue o importante Teorema da Extensão de Caratheodory, que consiste em afirmar que, oferecida uma medida exterior  $\alpha$  em  $X$ , é possível determinar uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  em  $X$ , onde  $\alpha$  restrita a  $\mathcal{F}$  será uma medida, ou seja,

$$\left( \left\{ \begin{array}{l} \alpha : 2^X \rightarrow [0, +\infty] \\ \alpha \text{ medida exterior} \end{array} \right. \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{l} \exists \mathcal{F} \text{ uma } \sigma\text{-álgebra em } X \text{ tal que} \\ g : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty] \\ A \mapsto g(A) = \alpha(A) \\ \text{é uma medida} \end{array} \right) \quad (2.5)$$

além disso  $\mathcal{F}$  é maximal, dada por

$$\mathcal{F} = \{A : A \subset X; \alpha(E) = \alpha(E \cap A) + \alpha(E - A), \forall E \subset X\}.$$

Os conjuntos  $A \in \mathcal{F}$  são chamados de  $\mathcal{F}$ -mensuráveis.

### 2.1.2.2 Medida Exterior de Lebesgue

Foi desenvolvida antes da medida exterior, e posteriormente trabalhada por Caratheodory (CABRAL, 2010). A ideia é, partindo da definição de medida para intervalos abertos, construir uma medida exterior para  $2^{\mathbb{R}}$ .

Seja  $I = (a, b)$ ,  $a < b$ , e defina  $\alpha[(a, b)] = |b - a|$  e a extensão para  $\alpha$  dada pela seguinte definição.

**Definição 2.4.** *Seja*

$$\begin{aligned} \alpha : 2^{\mathbb{R}} &\rightarrow [0, +\infty] \\ A &\mapsto \alpha(A) \end{aligned},$$

onde

- $\alpha(A) = 0$  se  $A = \emptyset$
- $\alpha(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha(I_j) : \{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}, I_j \text{ intervalo aberto e } A \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j \right\}$ .

Então  $\alpha$  é chamada de medida exterior de Lebesgue.

**Observação 2.3.** *Mostra-se que  $\alpha$  é uma medida exterior, ou seja não aditiva, sobre os reais usando o chamado conjunto de **Vitali** [Giuseppe Vitali, 1875-1932, Bolanga/Itália].*

Quem seria  $\alpha([a, b])$ ?

$$\begin{aligned} [a, b] \subset I_n &= \left( a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right) \\ \alpha([a, b]) &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \alpha \left( a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left| (b - a) + \frac{2}{n} \right| \\ &= b - a. \end{aligned}$$

### 2.1.2.3 Medida Exterior de Hausdorf

A medida exterior de Hausdorf generaliza a medida de Lebesgue para o espaço  $\mathbb{R}^n$  e também para espaços métricos em geral.

Para o espaço  $\mathbb{R}^n$  deve-se generalizar a definição dada para intervalos em  $\mathbb{R}$ , ou seja, as coberturas por abertos em  $\mathbb{R}^2$  serão dadas por quadrados abertos  $I^2$ ,  $I = (a, b)$ , e em  $\mathbb{R}^n$  por  $B_j = (a_j, b_j)^n$ ,  $a_j < b_j$ ,  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

A definição de  $\alpha_H$  a ser generalizada deverá ter:

$$\alpha_H(B_j) = |b_j - a_j|^n, \quad j \in \mathbb{N}.$$

**Definição 2.5.** (*Medida Exterior de Hausdorff*) Seja  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $A \subset 2^X$ ,

$$\alpha_H : 2^X \rightarrow [0, +\infty],$$

onde

- $\alpha_H(\emptyset) = 0$
- $\alpha_H(A) = \inf \left\{ \alpha_H(B_j) : \{B_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ é uma sequência de abertos tal que } A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \right\}.$

A medida externa  $\alpha_H$  é chamada de Hausdorff e

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : \alpha_H(E \cap A) + \alpha_H(E - A) = \alpha_H(E), \forall E \subset X\}$$

é chamada de  $\sigma$ -álgebra dos conjuntos Hausdorff-mensuráveis, e  $A$  é chamado de Hausdorff-mensurável.

#### 2.1.2.4 Conjuntos de Medidas Nulas

**Definição 2.6.** Diremos que  $A \subset \mathbb{R}$  tem medida nula, se dado qualquer  $\epsilon > 0$  existe uma sequência  $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de intervalos abertos em  $\mathbb{R}$ , onde

- $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$
- $\sum_{j=1}^{+\infty} \alpha(I_j) < \epsilon$ , com  $I_j = (a_j, b_j)$  e  $\alpha(I_j) = b_j - a_j$ .

#### 2.1.2.5 Medida Exterior de Lebesgue-Stieltjes

Esse conceito será utilizado no Capítulo 5, para representações de Funcionais.

**Definição 2.7.** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente,  $I = (a, b)$ ,  $a < b$  um intervalo aberto em  $\mathbb{R}$ , e  $\alpha_g$  a medida satisfazendo:

- $\alpha_g(\emptyset) = 0$
- $\alpha_g(I) = g(b) - g(a)$
- $A \subset \mathbb{R}$

$$\alpha_g(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_g(I_j) : \{I_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ é uma sequência de intervalos onde } A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \right\},$$

então  $\alpha_g$ , será denominada de medida de Lebesgue-Stieltjes.

## 2.2 Medidas de Probabilidade

**Definição 2.8.** Uma medida de probabilidade  $\mathcal{P}$  em um conjunto não vazio  $X$ , denominado de **espaço amostral**, é definida em uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ , denominada de **espaço dos eventos**, ou seja,

$$\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

que satisfaz:

(i)  $\mathcal{P}(X) = 1$

(ii)  $[\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j] \Rightarrow \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(E_i)$  ( $\sigma$ -aditividade)

**Proposição 2.2.** Se  $\mathcal{P}$  é uma medida de probabilidade em  $X$  então tem-se:

[P<sub>1</sub>]  $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$

[P<sub>2</sub>]  $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$  (monótona)

[P<sub>3</sub>]  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A)$

$A^c$ : complemento de  $A$  em relação a  $X$ .

[P<sub>4</sub>]  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$

[P<sub>5</sub>]  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  é S.M.C.  $\Rightarrow \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_n)$ , (continuidade)

[P<sub>6</sub>]  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  é S.M.D.  $\Rightarrow \mathcal{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_n)$  (continuidade)

*Demonstração.* [P<sub>1</sub>] ( $\mathcal{F}$   $\sigma$ -álgebra)  $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset^c = X \in \mathcal{F}$

$$\emptyset \cap X = \emptyset \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \mathcal{P}(\emptyset \cup X) = \mathcal{P}(X) + \mathcal{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X) + \mathcal{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathcal{P}(\emptyset) = 0$$

[P<sub>2</sub>]  $A \subset B \Rightarrow A \cap (B - A) = \emptyset$  (veja Figura 22)

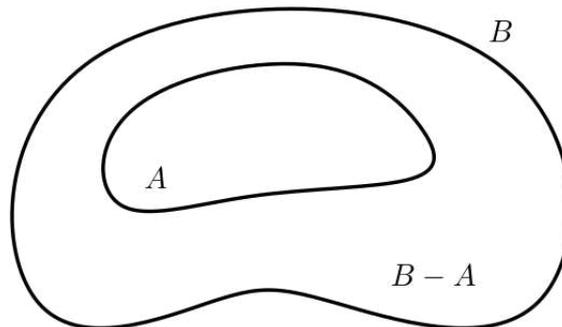


Figura 22 – Representação da operação diferença entre conjuntos.

Logo  $\mathcal{P}(A \cup (B - A)) = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B - A)$ . Como  $\mathcal{P}(B - A) \in [0, 1]$ , então  $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$

[P<sub>3</sub>]  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

$$A \cap A^c = \emptyset \text{ e } A \cup A^c = X.$$

$$\text{Portanto } 1 = \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(A \cup A^c) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(A^c) \Rightarrow \mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A)$$

[P<sub>4</sub>]  $A, B \in \mathcal{F}$

- $A \cup B = A \cup (B - A)$  e  $A \cap (B - A) = \emptyset$
- $B = (B - A) \cup (A \cap B)$  e  $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$ . Logo,

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A \cup (B - A)) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B - A)$$

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}[(B - A) \cup (A \cap B)] = \mathcal{P}(B - A) + \mathcal{P}(A \cap B)$$

$$\text{Portanto, } \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B).$$

[P<sub>5</sub>]  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  SMC  $\Rightarrow E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$

$$E_1 \cap (E_2 - E_1) \cap (E_3 - E_2) \cap \dots \cap (E_n - E_{n-1}) \cap \dots = \emptyset \text{ pelo axioma (iii)}$$

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(E_i) = \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(E_2 - E_1) + \dots + \mathcal{P}(E_n - E_{n-1}) =$$

$$= \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(E_2) - \mathcal{P}(E_1) + \dots + \mathcal{P}(E_n) - \mathcal{P}(E_{n-1}) = \mathcal{P}(E_n). \text{ Passando ao limite}$$

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_n).$$

Note que:  $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(B - A) = \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A)$ . De fato,

$$B = A \cup (B - A) \text{ e } A \cap (B - A) = \emptyset.$$

Logo,

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup (B - A)) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B - A).$$

Portanto,

$$\mathcal{P}(B - A) = \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A).$$

[P<sub>6</sub>]  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  é SMD,  $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots \supset E_{n-1} \supset E_n \supset \dots$  (veja Figura 23)

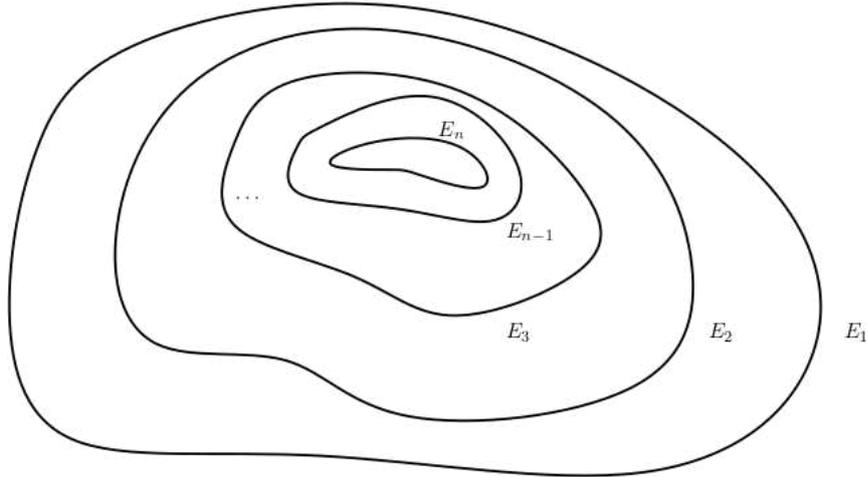


Figura 23 – Representação de seqüência de conjuntos.

Mostraremos inicialmente que se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = \emptyset$  então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_n) = 0$ . De fato:

$$E_1 = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_3) \cup (E_3 - E_4) \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i - E_{i+1}).$$

Como  $E_1 - E_2 \cap (E_2 - E_3) \cap (E_3 - E_4) \cap \dots = \emptyset$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E_1) &= \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i - E_{i+1})\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(E_i - E_{i+1}) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathcal{P}(E_i) - \mathcal{P}(E_{i+1})) = \\ &= \mathcal{P}(E_1) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_{n+1}). \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_{n+1}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_n) = 0.$$

Suponhamos agora que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = E \neq \emptyset$ . Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (E_n - E) = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_n - E) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(E_n) = \mathcal{P}(E).$$

□

## 2.3 Medidas Fuzzy/Fuzzy geral

**Definição 2.9.** Seja  $X \neq \emptyset$  um conjunto qualquer e  $F_i \subset X$ , para  $1 \leq i < +\infty$ , subconjuntos de  $X$  tais que:

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \dots \subset F_n \subset \dots \quad \text{ou} \quad F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$$

Denominamos  $\{F_i : 1 \leq i < +\infty\}$  ou  $\{F_n\}, n \in \mathbb{N}^*$ , respectivamente, de **Seqüência Monótona não Decrescente (SMC)**, e **Seqüência Monótona não Crescente (SMD)**.

**Definição 2.10.** Seja  $\{F_n\}$  uma SMC, diremos que  $L$  será o limite de  $F_n$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , ou

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = L$$

se, e somente se,  $F_n \subset L, \forall n \in \mathbb{N}^*$  e se existir um conjunto  $A$  tal que  $F_n \subset A, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , então  $L \subset A$ .

Seja  $\{F_n\}$  uma SMD, diremos que  $M$  será o limite de  $F_n$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , ou

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = M$$

se, e somente se,  $M \subset F_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$  e se existir um conjunto  $B$  tal que  $B \subset F_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , então  $M \supset B$ .

Em outras palavras:

**Caso1:**  $L$  é o “menor” conjunto que contém todos os  $F_n$ , ou ainda, a união desses conjuntos.

**Caso2:**  $M$  é o “maior” conjunto que está contido em todos os  $F_n$ , ou ainda, a intersecção desses conjuntos.

**Definição 2.11.** Seja  $\mathcal{F}$  uma família de sub-conjuntos de  $X \neq \emptyset$ . Diremos que,  $\mathcal{F}$  é **monótona** se, e somente se,

(i)  $\emptyset, X \in \mathcal{F}$

(ii) Se  $\{F_n\}$  for SMC ou SMD e  $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ , então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n \in \mathcal{F}$ .

A definição de medida *fuzzy* tem sido usualmente apresentada sob os aspectos:

- De Sugeno, os axiomas são: o conjunto vazio e o espaço todo tenham medidas zero e um respectivamente, que seja monótona e satisfazendo uma condição de continuidade para essa medida.
- Outro, com as mesmas exigências, a menos da **continuidade**.

Ressaltamos que Sugeno definiu sua medida sobre o espaço das "famílias monótonas  $\mathcal{F}$ ", e facilmente pode ser provado que  $\mathcal{F}$  equivale a uma  $\sigma$ -álgebra.

Seguem as formalizações.

**Definição 2.12.** (**Medida Fuzzy Geral - MFG**) Seja  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$  e  $g$  uma aplicação

$$g : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

com as propriedades:

(a)  $g(\emptyset) = 0, g(X) = 1$

(b) Se  $A, B \in \mathcal{F}$  e  $A \subset B$ , então  $g(A) \leq g(B)$

$g$  será chamada de **medida fuzzy geral (MFG)** sobre  $X$ .

**Definição 2.13. (Medida Fuzzy (ou de Sugeno) - MF)** Seja  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$  e seja  $g$  uma aplicação

$$g : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

satisfazendo as propriedades:

(a)  $g(\emptyset) = 0, g(X) = 1$

(b) Se  $A, B \in \mathcal{F}$  e  $A \subset B$ , então  $g(A) \leq g(B)$

(c) (referida continuidade) Se  $F_n \in \mathcal{F}$  e  $\{F_n\}$  é monótona, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(F_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n\right).$$

A aplicação  $g$  será chamada de **medida fuzzy (MF)** ou de (**Sugeno**) sobre  $X$ .

Quando o domínio de  $g$  for evidente,  $g$  será simplesmente chamada de medida sobre  $X$ . Uma conclusão **importante** decorre da condição (c) referente a continuidade. Ela não garante que  $g$  seja contínua em um nível  $\alpha$  mas que seja contínua à esquerda para  $g$  em  $\alpha$ , ou seja, se

$$g : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$$

se consideramos a sequência de  $\alpha$ -níveis do tipo,  $F_n = F_{(\alpha - \frac{1}{n})}$ , então

$$\lim_{t \rightarrow \alpha^-} g(F_t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(F_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n\right) = g(F_\alpha).$$

pois

$$F_\alpha \subset F_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

**Definição 2.14.** A terna  $(X, \mathcal{F}, g)$  com as condições descritas pelas definições anteriores será chamada de **espaço com medida fuzzy**.

**Definição 2.15. (Campo de Borel)** Seja  $X \neq \emptyset$  um **espaço métrico** e  $\mathcal{B}$  uma família de sub-conjuntos de  $X$  com as propriedades:

- $\emptyset \in \mathcal{B}$
- Se  $E \in \mathcal{B}$ , então  $E^C \in \mathcal{B}$  ( $E^C$ : complemento de  $E$  em relação a  $X$ )

- Se  $E_n \in \mathcal{B}$ ,  $1 \leq n < +\infty$  então  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{B}$ .

Então  $\mathcal{B}$  será denominado de campo de Borel sobre  $X$ .

Em outras palavras, será considerado um campo de Borel uma  $\sigma$ -álgebra em um espaço métrico.

**Proposição 2.3.** *Seja  $X \neq \emptyset$  e  $\mathcal{B}$  um campo de Borel sobre  $X$ , então  $\mathcal{B}$  será uma família monótona sobre  $X$ .*

*Demonstração.* Devemos mostrar que:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{B}$
- (ii) Se  $\{F_n\}$  for SMC ou SMD qualquer em  $\mathcal{B}$ , então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n \in \mathcal{B}$ .

De fato:  $\mathcal{B}$  campo de Borel sobre  $X \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}$ , logo  $\emptyset^C = X \in \mathcal{B}$ , portanto  $\emptyset, X \in \mathcal{B}$ .

Por outro lado se  $\{F_n\}$  é monótona e estando em  $\mathcal{B}$ , sendo  $\mathcal{B}$  Borel temos:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \in \mathcal{B}.$$

Seja  $L = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ , então se  $A$  é um conjunto qualquer tal que  $F_n \subset A, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , então

$L = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \subset A$ , logo:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = L$  e  $L \in \mathcal{B}$  pois  $\mathcal{B}$  é Borel, assim  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n \in \mathcal{B}$ .

Analogamente prova-se que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n \in \mathcal{B}$  caso  $\{F_n\}$  seja SMD.

Concluimos então que: todo campo de Borel sobre  $X$  é uma família monótona sobre  $X$ . □

**Proposição 2.4.** *Seja  $g$  uma medida fuzzy sobre  $(X, \mathcal{B})$ ,  $\mathcal{B}$  (campo de Borel). Então, valem as afirmações: Para quaisquer  $A, B \in \mathcal{B}$ ,*

1.  $g(A \cup B) \geq g(A) \vee g(B)$
  2.  $g(A \cap B) \leq g(A) \wedge g(B)$
- $\vee$  : sup e  $\wedge$  : inf.

*Demonstração.* Como  $g$  é uma medida fuzzy sobre  $X$ , temos

$$A \subset A \cup B \Rightarrow g(A \cup B) \geq g(A)$$

$$B \subset A \cup B \Rightarrow g(A \cup B) \geq g(B)$$

logo,

$$g(A \cup B) \geq g(A) \vee g(B).$$

Por outro lado:  $A \cap B \subset A$  e  $A \cap B \subset B$ , logo  $g(A \cap B) \leq g(A)$  e  $g(A \cap B) \leq g(B)$  onde se conclui que:

$$g(A \cap B) \leq g(A) \wedge g(B).$$

□

**Definição 2.16.** *Seja  $X \neq \emptyset$  e  $\mathcal{B}$  um campo de Borel sobre  $X$ ,  $g$  uma medida fuzzy em  $X$ . Se para todo  $A, B \in \mathcal{B}$ , tivermos que:*

$$g(A \cup B) = g(A) \vee g(B)$$

*diremos que  $g$  é uma medida fuzzy  $F$ (fuzzy)-aditiva sobre  $X$ .*

## 2.4 Construção de Medida Fuzzy

**Definição 2.17.** (*Funções  $g_\lambda$* ) *Seja  $(X, \mathcal{B})$  um campo de Borel, por  $g_\lambda$  definimos uma aplicação que satisfaz as seguintes condições:*

$$g_\lambda : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]; \lambda \in (-1, +\infty)$$

1.  $g_\lambda(X) = 1$
2. Se  $E, E' \in \mathcal{B}$  e  $E \cap E' = \emptyset$ , então  $g_\lambda(E \cup E') = g_\lambda(E) + g_\lambda(E') + \lambda.g_\lambda(E).g_\lambda(E')$
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_\lambda(F_n) = g_\lambda\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n\right)$

**Proposição 2.5.** *Para cada  $\lambda \in (-1, +\infty)$  a aplicação:  $g_\lambda : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  da Definição 2.17, é uma medida fuzzy sobre  $X$ , e  $(X, \mathcal{B}, g_\lambda)$  será um espaço com medida fuzzy, para cada  $\lambda \in (-1, +\infty)$*

*Demonstração.* Provar que  $g_\lambda$  é uma medida fuzzy significa mostrar que se  $\lambda \in (-1, +\infty)$  tem-se:

- (.)  $g_\lambda(\emptyset) = 0$  e  $g_\lambda(X) = 1$
- (..) Se  $A, B \in \mathcal{B}$  e  $A \subset B$  então  $g_\lambda(A) \leq g_\lambda(B)$
- (...) Se  $F_n \in \mathcal{B}$  é monótona, então:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_\lambda(F_n) = g_\lambda\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n\right)$$

Mas, pela definição de  $g_\lambda$  tem-se:  $g_\lambda(X) = 1$  e como  $X \cap \emptyset = \emptyset$

$$\begin{aligned} g_\lambda(X \cup \emptyset) &= g_\lambda(X) + g_\lambda(\emptyset) + \lambda \cdot g_\lambda(X) \cdot g_\lambda(\emptyset) \\ 1 &= 1 + g_\lambda(\emptyset) + \lambda \cdot g_\lambda(\emptyset) \Rightarrow g_\lambda(\emptyset) \cdot (1 + \lambda) = 0 \end{aligned}$$

e como  $\lambda \in (-1, +\infty)$  tem-se  $g_\lambda(\emptyset) = 0$ .

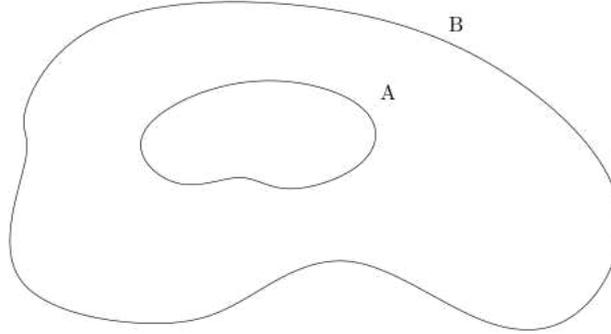


Figura 24 – Representação do conjunto  $B = A \cup (A^c \cap B)$ .

$$A \subset B$$

$$B = A \cup (A^c \cap B) \text{ (veja Figura 24)}$$

$$A \cap (A^c \cap B) = \emptyset \Rightarrow g_\lambda[A \cup (A^c \cap B)] = g_\lambda(A) + g_\lambda(A^c \cap B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(A^c \cap B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(A^c \cap B)[1 + \lambda g_\lambda(A)]. \text{ Então,}$$

$$g_\lambda[A \cup (A^c \cap B)] = g_\lambda(A) + g_\lambda(A^c \cap B)[1 + \lambda g_\lambda(A)]. \quad (2.6)$$

Mas  $g_\lambda(A^c \cap B) \geq 0$ ,  $\lambda \in (-1, +\infty)$ ,  $g_\lambda(A) \in [0, 1]$ .

Se  $\lambda \in (-1, 0] \Rightarrow \lambda g_\lambda(A) \in (-1, 0]$ , logo

$$1 + \lambda g_\lambda(A) \geq 0.$$

Se  $\lambda \in (0, +\infty) \Rightarrow \lambda g_\lambda(A) > 0$ , logo

$$1 + \lambda g_\lambda(A) > 0.$$

Assim

$$g_\lambda(A^c \cap B)[1 + \lambda g_\lambda(A)] \geq 0.$$

Logo, de (2.6) temos:

$$g_\lambda(B) = g_\lambda[A \cup (A^c \cap B)] \geq g_\lambda(A) \Rightarrow g_\lambda(A) \leq g_\lambda(B).$$

Logo  $g_\lambda$  é monótona.

Seja  $F_n$  SM, então pela definição de  $g_\lambda$  temos que a terceira condição (...) para medida fuzzy é verificada. Logo:

$$g_\lambda : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1], \lambda \in (-1, +\infty)$$

é uma medida fuzzy para  $X$ , e  $(X, \mathcal{B}, g_\lambda)$  é espaço com medida fuzzy. □

**Proposição 2.6.** *Seja  $(X, \mathcal{B}, g_\lambda)$ ,  $\lambda \in (-1, +\infty)$  um espaço com medida fuzzy, e  $E_i, F, F'$ ,  $(1 \leq i < +\infty)$  elementos de  $\mathcal{B}$  com  $F \subset F'$ ,  $E_i \cap E_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Então:*

1.  $g_\lambda(F' - F) = \frac{g_\lambda(F') - g_\lambda(F)}{1 + \lambda g_\lambda(F)}$
2.  $g_\lambda(F^c) = \frac{1 - g_\lambda(F)}{1 + \lambda g_\lambda(F)}$
3.  $g_\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \frac{1}{\lambda} \left[ \prod_{i=1}^{+\infty} (1 + \lambda g_\lambda(E_i)) - 1 \right]$

*Demonstração.* 1.  $F \subset F' \Rightarrow F' - F = F' \cap F^c$

$$\begin{aligned} (F' \cap F^c) \cap F &= \emptyset \Rightarrow \\ g_\lambda[(F' \cap F^c) \cup F] &= g_\lambda(F' \cap F^c) + g_\lambda(F) + \lambda g_\lambda(F' \cap F^c) \cdot g_\lambda(F) \Rightarrow \\ g_\lambda(F') &= g_\lambda(F' \cap F^c)(1 + \lambda g_\lambda(F)) + g_\lambda(F) \Rightarrow \\ g_\lambda(F') - g_\lambda(F) &= g_\lambda(F' - F)(1 + \lambda g_\lambda(F)). \end{aligned}$$

Logo

$$g_\lambda(F' - F) = \frac{g_\lambda(F') - g_\lambda(F)}{1 + \lambda g_\lambda(F)}$$

2.  $F^c = X \cap F^c$  e  $(X \cap F^c) \cap F = \emptyset$  (veja Figura 25)

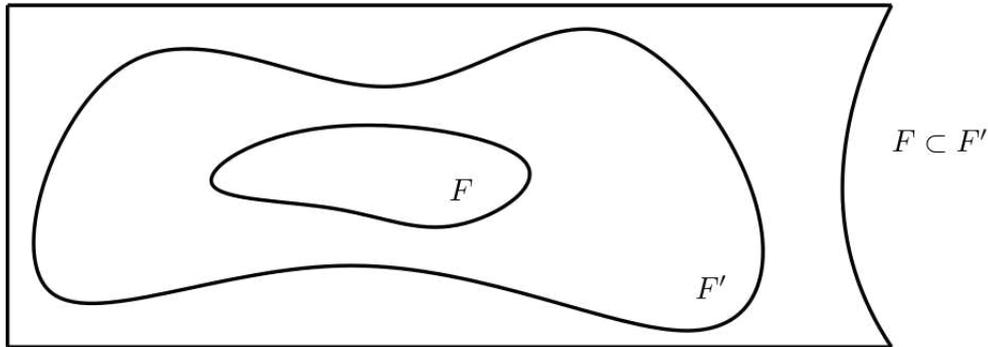


Figura 25 – Representação dos conjuntos  $F^c = X \cap F^c$  e  $(X \cap F^c) \cap F = \emptyset$ .

$$g_\lambda[(X \cap F^c) \cup F] = g_\lambda(X \cap F^c) + g_\lambda(F) + \lambda g_\lambda(X \cap F^c) \cdot g_\lambda(F)$$

Mas,

$$X = (X \cap F^c) \cup F, X \cap F^c = F^c,$$

logo

$$\begin{aligned} g_\lambda(X) &= g_\lambda(F^c) + g_\lambda(F) + \lambda g_\lambda(F^c) \cdot g_\lambda(F) \\ 1 &= g_\lambda(F^c)(1 + \lambda g_\lambda(F)) + g_\lambda(F). \end{aligned}$$

Portanto

$$g_\lambda(F^c) = \frac{1 - g_\lambda(F)}{1 + \lambda g_\lambda(F)}.$$

3. Devemos mostrar que

$$g_\lambda \left( \prod_{i=1}^{+\infty} E_i \right) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ \prod_{i=1}^{+\infty} (1 + \lambda g_\lambda(E_i)) \right] - 1 \right\}$$

para  $E_i \cap E_j = \emptyset$   $i \neq j$ . Mostraremos por indução finita.

Seja  $n = 2$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , logo

$$\begin{aligned} g_\lambda(E_1 \cup E_2) &= g_\lambda(E_1) + g_\lambda(E_2) + \lambda g_\lambda(E_1)g_\lambda(E_2) \Rightarrow \\ g_\lambda \left( \bigcup_{i=1}^2 E_i \right) &= g_\lambda(E_1) + g_\lambda(E_2)[1 + \lambda g_\lambda(E_1)]. \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda} \{ [(1 + \lambda g_\lambda(E_1)) \cdot (1 + \lambda g_\lambda(E_2))] - 1 \} \\ &= \frac{1}{\lambda} \{ [1 + \lambda g_\lambda(E_2) + \lambda g_\lambda(E_1) + \lambda^2 g_\lambda(E_1)g_\lambda(E_2)] - 1 \} \\ &= g_\lambda(E_1) + g_\lambda(E_2) + \lambda g_\lambda(E_1)g_\lambda(E_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$g_\lambda \left( \bigcup_{i=1}^2 E_i \right) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ \prod_{i=1}^2 (1 + \lambda g_\lambda(E_i)) \right] - 1 \right\}.$$

Logo, a igualdade vale para  $n = 2$ ,

Temos  $E_1 \cap E_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , assim,

$$\left( \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right) \cap E_n = \emptyset.$$

Logo,

$$\begin{aligned} g_\lambda \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) &= g_\lambda \left[ \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right) \cup E_n \right] \\ &= g_\lambda \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right) + g_\lambda(E_n) + \lambda g_\lambda \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right) g_\lambda(E_n) \\ &= \left[ g_\lambda \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right) \right] \cdot (1 + \lambda g_\lambda(E_n)) + g_\lambda(E_n) \\ \text{H. Indução} &\stackrel{=}{=} \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \lambda g_\lambda(E_i)) \right] - 1 \right\} \cdot (1 + \lambda g_\lambda(E_n)) + g_\lambda(E_n) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \lambda g_\lambda(E_i)) \cdot (1 + \lambda g_\lambda(E_n)) \right] - (1 + \lambda g_\lambda(E_n)) \right\} + g_\lambda(E_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ \prod_{i=1}^n (1 + \lambda g_\lambda(E_i)) \right] - 1 - \lambda g_\lambda(E_n) \right\} + g_\lambda(E_n) \\
 &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ \prod_{i=1}^n (1 + \lambda g_\lambda(E_i)) \right] - 1 \right\} - g_\lambda(E_n) + g_\lambda(E_n) \\
 &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ \prod_{i=1}^n (1 + \lambda g_\lambda(E_i)) \right] - 1 \right\}.
 \end{aligned}$$

Agora considere  $F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$  com  $E_i \cap E_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Note que  $\{F_n\}$  SMC e por  $g_\lambda$  ser medida fuzzy  $g_\lambda \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_\lambda(F_n)$ , de onde concluímos **(3)**, ou seja,

$$g_\lambda \left( \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \right) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ \prod_{i=1}^{+\infty} (1 + g_\lambda(E_i)) \right] - 1 \right\}$$

□

**Proposição 2.7.** *Seja  $\mathcal{B}$  um campo de Borel.*

- a) Se  $g_\lambda(E) = 0$  então  $g_\lambda(A) = g_\lambda(A \cup E)$ ,  $\forall A \in \mathcal{B}$
- b) Se  $A \subset B$  e  $g_\lambda(A) = g_\lambda(B)$  então  $g_\lambda(B - A) = 0$
- c) Se  $g_\lambda(E_n) = 0$ ,  $1 \leq n < +\infty$  então  $g_\lambda \left( \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right) = 0$

*Demonstração.* a)  $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \begin{cases} A \cap E = \emptyset \\ \text{ou} \\ A \cap E \neq \emptyset \end{cases}$

(.) Se  $A \cap E = \emptyset$  então  $g_\lambda(A \cup E) = g_\lambda(A) + g_\lambda(E) + \lambda g_\lambda(A).g_\lambda(E) \Rightarrow g_\lambda(A \cup E) = g_\lambda(A)$

(..) Se  $A \cap E \neq \emptyset$  (veja Figura 26)

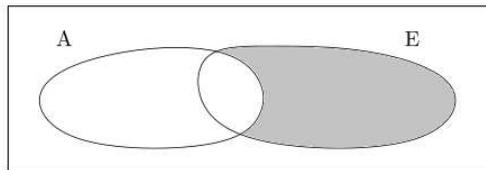


Figura 26 – Representação do conjunto  $E \cap A^c \subset E$

$$\begin{aligned} E \cap A^c &\subset E \\ \Rightarrow 0 &\leq g_\lambda(E \cap A^c) \leq g_\lambda(E) = 0 \\ \Rightarrow g_\lambda(E \cap A^c) &= 0 \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} A \cap (E \cap A^c) &= \emptyset \\ \Rightarrow g_\lambda[A \cup (E \cap A^c)] &= g_\lambda(A) + g_\lambda(E \cap A^c) + \lambda g_\lambda(A)g_\lambda(E \cap A^c) \\ \Rightarrow g_\lambda[A \cup (E \cap A^c)] &= g_\lambda(A), \end{aligned}$$

porém

$$A \cup (E \cap A^c) = A \cup E,$$

logo

$$g_\lambda(A \cup E) = g_\lambda(A).$$

b) Se  $A \subset B$  e  $g_\lambda(A) = g_\lambda(B)$  então por **(1)** da Proposição (2.6) temos

$$g_\lambda(B - A) = \frac{g_\lambda(B) - g_\lambda(A)}{1 + g_\lambda(A)} = 0.$$

c) Se  $g_\lambda(E_n) = 0$ ,  $1 \leq n < +\infty$  então por **(3)** da Proposição 2.6 temos

$$g_\lambda \left( \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ \prod_{i=1}^{+\infty} (1 + g_\lambda(E_i)) \right] - 1 \right\} = 0$$

□

**Definição 2.18.** *Seja  $H$  uma aplicação,  $H : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz:*

1. Se  $x \leq y$  então  $H(x) \leq H(y)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a^+} H(x) = H(a)$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = 0$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 1$

então  $H(x)$  é denominada de **função F-distribuição**.

Seja um campo de Borel sobre  $X = \mathbb{R}$  (reais) onde todos os intervalos semi-abertos do tipo  $(a, b]$  pertencem a  $\mathcal{B}$ . Consideremos uma medida  $g_\lambda : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  usando  $H(x)$  (distribuição *fuzzy*) para para defini-la.

**Definição 2.19.** *Considere uma aplicação  $\Psi$ ,  $\Psi : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  onde:*

1.  $(a, b] \in \mathcal{B}$
2.  $\Psi[(a, b]] = \frac{H(b) - H(a)}{1 + \lambda H(a)}$ ,  $-1 < \lambda < +\infty$  com  $\Psi(\mathbb{R}) = 1$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(F_n) = \Psi \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n \right] \text{ onde } F_n \in \mathcal{B}, \{F_n\} \text{ S.M.}$$

**Proposição 2.8.** A aplicação  $\Psi$  como definida é uma “medida  $g_\lambda$ ” sobre  $\mathbb{R}$ , ou ainda,  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \Psi = g_\lambda)$  é um espaço fuzzy.

*Demonstração.* Devemos provar que:

1.  $\Psi(\mathbb{R}) = 1$
2. Se  $E, E' \in \mathcal{B}$  e  $E \cap E' = \emptyset$  então  $\Psi(E \cup E') = \Psi(E) + \Psi(E') + \lambda\Psi(E)\Psi(E')$
3.  $\Psi \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\Psi(F_n)]$  para  $F_n \in \mathcal{B}$  e  $\{F_n\}$  S.M.

Mas pela Definição 2.19 para provar a proposição, é suficiente mostrar a condição (2) acima para os intervalos, ou seja, para

$$E = (a, b] \text{ e } E' = (b, c] \quad a < b < c$$

deve-se ter,

$$\Psi(E, \cup E') = \Psi(E) + \Psi(E') + \lambda\Psi(E)\Psi(E') \quad -1 < \lambda < +\infty$$

Seja

$$\begin{aligned} & \Psi(E) + \Psi(E') + \lambda\Psi(E)\Psi(E') \\ &= \frac{H(b) - H(a)}{1 + \lambda H(a)} + \frac{H(c) - H(b)}{1 + \lambda H(b)} + \lambda \frac{H(b) - H(a)}{1 + \lambda H(a)} \cdot \frac{H(c) - H(b)}{1 + \lambda H(b)}. \end{aligned}$$

Considere

$$A = \frac{H(c) - H(b)}{1 + \lambda H(b)} + \lambda \frac{H(b) - H(a)}{1 + \lambda H(a)} \cdot \frac{H(c) - H(b)}{1 + \lambda H(b)}.$$

Assim

$$\Psi(E) + \Psi(E') + \lambda\Psi(E)\Psi(E') = \Psi(E) + A. \quad (2.7)$$

Porém

$$\begin{aligned}
A &= \frac{[H(c) - H(b)][1 + \lambda H(a)] + \lambda[H(c) - H(b)][H(b) - H(a)]}{(1 + \lambda H(b))(1 + \lambda H(a))} \\
&= \frac{H(c) - H(b) + \lambda H(c)H(a) - \lambda H(b)H(a)}{(1 + \lambda H(b))(1 + \lambda H(a))} \\
&+ \lambda \frac{[H(c)H(b) - H(c)H(a) - H^2(b) + H(b)H(a)]}{(1 + \lambda H(b))(1 + \lambda H(a))} \\
&= \frac{H(c) - H(b) + \lambda H(b)[H(c) - H(b)]}{(1 + \lambda H(b))(1 + \lambda H(a))} \\
&= \frac{[H(c) - H(b)] \cdot [1 + \lambda H(a)]}{(1 + \lambda H(b))(1 + \lambda H(a))} \\
&= \frac{H(c) - H(b)}{1 + \lambda H(a)}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A = \frac{H(c) - H(b)}{1 + \lambda H(a)}.$$

Por (2.7) temos

$$\begin{aligned}
\Psi(E) + \Psi(E') + \lambda \Psi(E)\Psi(E') &= \Psi(E) + A \\
&= \frac{H(b) - H(a)}{1 + \lambda H(a)} + \frac{H(c) - H(b)}{1 + \lambda H(a)} \\
&= \frac{H(b) - H(a) + H(c) - H(b)}{1 + \lambda H(a)} \\
&= \frac{H(c) - H(a)}{1 + \lambda H(a)} = \Psi(E \cup E')
\end{aligned}$$

□

**Proposição 2.9.** *Se  $g_\lambda$  é uma medida fuzzy em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , então para todo  $A \in \mathcal{B}$  existe um aberto  $\mathcal{A}$  tal que  $A \subset \mathcal{A}$  e  $g_\lambda(\mathcal{A} - A) < \epsilon$ ,  $\forall \epsilon > 0$ .*

*Demonstração.* É suficiente provar para  $A = (a, b]$ . Seja  $\mathcal{A}_n = \left( a, b \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n-1} \subset \dots \subset A$$

$\{\mathcal{A}_n\}$  S.M.D

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = A$$

e pela “continuidade” de  $g_\lambda$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_\lambda(\mathcal{A}_n - A) = g_\lambda \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{A}_n - A) \right] = 0$$

onde  $\mathcal{A}_n$  são abertos para  $n \in \mathbb{N}^*$ . □

## 2.5 Medida de Possibilidade

**Definição 2.20.** *Seja  $X \neq \emptyset$  com:*

- $\mathcal{A} \subset 2^X$ ,  $\mathcal{A}$  uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ .
- $\mathbb{F}(\sigma) = \{(A, \varphi_A) : A \in \mathcal{A}, \varphi_A \text{ função de pertinência para elementos de } \mathcal{A}\}$ : espaço dos conjuntos fuzzy associados a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ .

Uma aplicação,

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{F}(\sigma) &\rightarrow [0, 1] \\ (A, \varphi_A) &\mapsto \Pi(A, \varphi_A) = \sup_{x \in A} \{\varphi_A(x)\} \end{aligned}$$

que satisfaça,

- ★  $\Pi(\emptyset) = 0$  e  $\Pi(X, \varphi_X) = 1$ ,
- ★  $\Pi \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i, \varphi_{A_i}) \right) = \sup \{ \Pi(A_i, \varphi_{A_i}), i \in \mathbb{N} \}$  com  $A_i \in \mathcal{A}$ ,
- ★  $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B, \varphi_A \leq \varphi_B \Rightarrow \Pi(A, \varphi_A) \leq \Pi(B, \varphi_B)$  (ou seja,  $\Pi$  monótona),

será denominada **medida de possibilidade**.

### 2.5.1 Forma equivalente para descrever Medida de Possibilidade

. Uma aplicação qualquer  $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ ,  $X \neq \emptyset$ , com

$$\sup_{x \in X} \{\varphi(x)\} = 1.$$

será denominada de **distribuição de possibilidade**.

Seja  $\varphi$  uma distribuição de possibilidade, para cada  $A \in 2^X$  considere a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_A : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \varphi_A(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim dada uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  sobre  $X$  e uma distribuição de possibilidade  $\varphi(x)$ , para cada  $A \in \mathcal{A}$  estará naturalmente associada uma função de pertinência  $\varphi_A$ , estabelecendo o conjunto fuzzy  $(A, \varphi_A)$ , ou seja, se  $\varphi(x)$  for uma distribuição, uma

medida de possibilidade ficará perfeitamente caracterizada ao considerar seu domínio uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ , sendo gerada pela distribuição  $\varphi(x)$ , indicada por  $\Pi_\varphi$  e definida por,

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi : \mathcal{A} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \Pi_\varphi(A) = \sup_{x \in A} \{\varphi_A(x)\} \end{aligned} .$$

**Proposição 2.10.**  $\Pi_\varphi$  é uma medida de possibilidade sobre  $\mathcal{A}$ .

*Demonstração.*

$$\Pi_\varphi(\emptyset) = \sup\{\varphi_\emptyset(x)\} = 0$$

$$\Pi_\varphi(X) = \sup\{\varphi(x)\} = 1.$$

Se  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  então,

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi(\cup A_i) &= \Pi_\varphi(A) = \sup_{x \in A} \{\varphi_A(x)\} = \\ &= \sup_{x \in A} \{\varphi_{A_1}(x), \varphi_{A_2}(x), \dots, \varphi_{A_n}(x), \dots\} = \\ &= \sup_{x \in A} \{\Pi_\varphi(A_i), i \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

A monotocidade de  $\Pi_\varphi$  é facilmente verificada. □

**Proposição 2.11.** Dada uma medida de possibilidade

$$\Pi : 2^X \rightarrow [0, 1],$$

$X \neq \emptyset$ , então  $\Pi$  gera uma distribuição de possibilidade  $\varphi_\Pi$  em  $X$ , ou seja,

$$\varphi_\Pi : X \rightarrow [0, 1] \text{ com } \sup_{x \in X} \{\varphi_\Pi(x)\} = 1.$$

*Demonstração.* Seja  $x \in X$ , defina:

$$\begin{aligned} \varphi_\Pi : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \varphi_\Pi(x) = \Pi(\{x\}) \end{aligned} .$$

Como  $\Pi(A) \in [0, 1]$ , tem-se

$$\varphi_\Pi(x) = \Pi(\{x\}) \in [0, 1]$$

e sendo  $\Pi$  medida de possibilidade  $\Pi(X) = 1$ , logo

$$\sup_{x \in X} \{\varphi_\Pi(x)\} = 1.$$

□

**Proposição 2.12.** Uma medida de possibilidade não é necessariamente uma medida fuzzy.

*Demonstração.* Seja

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \varphi(x) = 1 \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi : 2^{\mathbb{R}} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \Pi_\varphi(A) = 1 \text{ (constante)}. \end{aligned}$$

Considere  $A_i = \left(0, \frac{1}{i}\right)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$   $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  é SMD e  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ , logo  $\Pi_\varphi(\lim_{i \rightarrow +\infty} (A_i)) = \Pi_\varphi(\emptyset) = 0$  e  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \Pi_\varphi(A_i) = 1$ .

Portanto para  $\Pi_\varphi$  não vale a condição da continuidade, logo não é medida *fuzzy*.

Entretanto mostra-se facilmente que uma medida de possibilidade é uma medida fuzzy geral e que uma medida de probabilidade  $\mathcal{P}$  é uma medida fuzzy.  $\square$

**Proposição 2.13.** *Seja  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A}$  uma  $\sigma$ -álgebra finita, então toda medida de possibilidade definida em  $\mathcal{A}$  é uma medida fuzzy.*

*Demonstração.* Seja  $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  uma medida de possibilidade, logo  $\Pi(\emptyset) = 0$  e  $\Pi(X) = 1$  pela definição de  $\Pi$ . Sendo  $\mathcal{A}$  finita, para sequências SMC ou SMD,

$$\begin{aligned} \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{A_i\}_{i=1}^k, \quad k \in \mathbb{N} &\Rightarrow \\ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^k A_i &= \begin{cases} A_k \text{ se } \{A_i\} \text{ SMC} \\ A_1 \text{ se } \{A_i\} \text{ SMD} \end{cases} \end{aligned}$$

logo

$$\Pi \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \begin{cases} \Pi(A_k) = \sup\{\Pi(A_i), i \in \mathbb{N}\} \\ \text{ou} \\ \Pi(A_1) = \sup\{\Pi(A_i), i \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Pi$  é medida *fuzzy*  $\square$

**Proposição 2.14.** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Considere:*

- $\varphi : M \rightarrow [0, 1]$  uma distribuição de possibilidade
- $\Pi : 2^M \rightarrow [0, 1]$ 

$$A \mapsto \Pi(A) = \sup_{x \in A} \{\varphi(x)\}$$

*uma medida de possibilidade associada a  $\varphi$  que seja fuzzy.*

*Então  $\varphi(x)$  será nula em todos os pontos em que for contínua.*

*Demonstração.* Seja  $\bar{x} \in M$  e suponha que  $\varphi$  seja contínua em  $\bar{x}$ . Considerando a topologia usual em  $M$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $r(\bar{x}) > 0$  tal que:

$$x \in B(\bar{x}, r(\bar{x})) \Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(\bar{x})) < \epsilon.$$

Tome a sequência  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$A_n = \left\{ x \in M : x \in B\left(\bar{x}, \frac{1}{n}\right), x \neq \bar{x}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\{A_n\}$  é SMD e como  $\Pi$  é fuzzy,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi(A_n) = \Pi\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = \Pi(\{\emptyset\}) = 0.$$

Mas, por definição de  $\Pi$ ,

$$\Pi(A_n) = \sup_{x \in A_n} \varphi(x)$$

assim

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A_n} \{\varphi(x)\} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \varphi(x) \stackrel{\varphi \text{ contínua em } \bar{x}}{=} \varphi(\bar{x}).$$

□

**Corolário 2.2.** *Seja  $\varphi$  uma distribuição de possibilidade contínua, e  $\Pi_\varphi$  a medida de possibilidade associada a  $\varphi$  que seja fuzzy. Então, para uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  qualquer em  $X$ ,  $\Pi_\varphi$  é nula ou seja,*

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi : \mathcal{A} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \Pi_\varphi(A) = 0, \forall A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* (Imediata.)

□

**Observação 2.4.** *A diferença entre as medidas de probabilidade e possibilidade poderá ser notada através do seguinte problema (BARROS; BASSANEZI, 2010): Depois de alguns dias perdido num deserto, uma pessoa encontra um oásis com duas fontes de água. Na primeira há uma tabuleta com os dizeres:*

“a probabilidade da água estar contaminada é 0,02.”

*Isto é,  $P(A) = 0,02$ . Na outra fonte, a inscrição na tabuleta diz:*

“a possibilidade de contaminação dessa fonte é 0,02”

*Ou seja,  $\Pi(A) = 0,02$ .*

*A questão consiste em escolher qual a fonte mais adequada para tomar água. A resposta a essa pergunta consiste em interpretar os conceitos das medidas de probabilidade e possibilidade.*

*Dizer que a primeira fonte tem probabilidade de 2% de estar contaminada indica não ser grande a chance de contaminação, entretanto, caso esteja pode ser alto o grau de envenenamento, ocasionando risco de vida, em outras palavras, se conhece a chance porém não o grau de contaminação. Por outro lado, em relação a segunda fonte, dizer que a possibilidade da água estar contaminada é de 0,02, significa afirmar que o grau de contaminação é 0,02 e assim caso haja seu consumo, poderá causar alguma reação, porém com baixo risco, ou simplesmente um leve desconforto.*

## 3 Integrais: *Fuzzy(Sugeno)* e *Fuzzy* Generalizada

Nesse capítulo mostramos que a integral *fuzzy* ou de Sugeno teve como motivação inicial estabelecer um processo de desfuzificação de um número *fuzzy* a partir de medidas que não fossem necessariamente  $\sigma$ -aditiva. A ideia inicial sobre essa integral foi estabelecer um número que representasse uma espécie de média ponderada comparando os valores dos níveis e as respectivas medidas dos  $\alpha$ -níveis, utilizando a função grau de pertinência de um conjunto *fuzzy*. Essa motivação é mostrada por intermédio de uma breve introdução sobre a Integral *Fuzzy*. Em seguida apresentamos a definição dada por Sugeno em sua tese de doutorado, e por intermédio do Teorema 3.1 (SUGENO, 1974) estabelecemos uma comparação entre a definição de Sugeno e a concepção inicial que descrevemos. Apresentamos as propriedades e teoremas relacionados a Integral *Fuzzy*, em especial o que compara as integrais *fuzzy* e a de Lebesgue (SUGENO, 1974). Demonstramos o teorema que vincula o valor da integral *fuzzy* com o ponto fixo da função que mede os  $\alpha$ -níveis. Desenvolvemos o teorema que explicita uma interpretação geométrica para integral *fuzzy* e um teorema da convergência para integral em casos específicos. Generalizamos a definição da Integral *fuzzy* (Sugeno), a partir da medida *fuzzy* generalizada, ou seja, desconsiderando a hipótese da continuidade para medida de Sugeno. Desenvolvemos cálculos de várias Integrais utilizando interpretações geométricas, como o quadrado de maior lado subscrito na função medida dos  $\alpha$ -níveis. Estabelecemos a comparação entre Integrais considerando medidas diferentes como *fuzzy*, *fuzzy* generalizada, probabilidade, possibilidade, Riemann-Stieltjes e de Lebesgue. Desenvolvemos o Teorema que explicita o valor da integral com medida de possibilidade para aplicações e distribuições quaisquer. Mostramos convergências das integrais com medidas de possibilidades, com ilustrações geométricas.

### 3.1 Integral *Fuzzy*

Para uma breve explanação sobre a concepção inicial da integral *fuzzy*, considere o triângulo isósceles de altura  $h = 1$  u.m. (unidade de medida) e base  $b = 1$  u.m., de acordo com Figura 27.

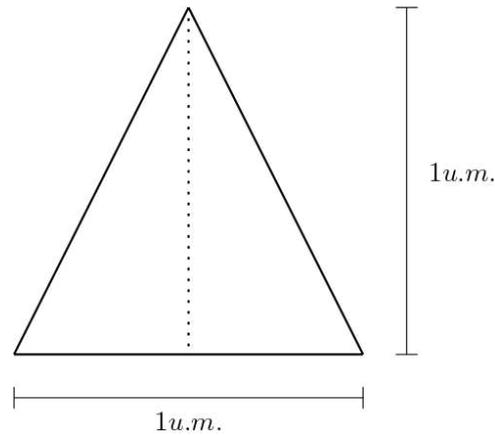


Figura 27 – Triângulo Isósceles com base e altura unitárias.

Construa sessões horizontais paralelas a base  $b$  do triângulo (veja Figura 28) e compare a altura  $\alpha$  com a medida da sessão (medida do segmento  $\overline{AB}$ ) correspondente para  $0 \leq \alpha \leq 1$

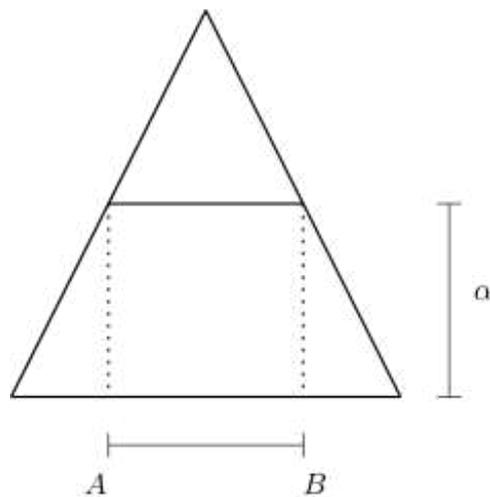


Figura 28 – Representação de um  $\alpha$ -nível em um triângulo isósceles

Identificando:

$F_\alpha$  pelo segmento  $\overline{AB}$

$g(F_\alpha)$  pela medida usual do segmento  $\overline{AB}$

Uma forma de comparar os valores de  $\alpha$  (altura da sessão) e  $g(F_\alpha)$  (medida da sessão correspondente) será calculando

$\alpha \wedge g(F_\alpha)$  : mínimo ou ínfimo entre eles.

Note:

- para  $\alpha = 0$ ,  $g(F_\alpha) = 1$
- para  $\alpha = 1$ ,  $g(F_\alpha) = 0$ .

Como  $\alpha$  varia continuamente entre 0 e 1 existe um único valor  $\alpha$  tal que  $\alpha = g(F_\alpha)$ , sendo  $g(F_\alpha)$  não crescente com  $\alpha$ ,

- $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ ,  $\alpha < g(F_\alpha)$
- $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ ,  $\alpha > g(F_\alpha)$ .

Assim para  $\alpha = \frac{1}{2}$ , tem-se  $\alpha = g(F_\alpha)$ , que será uma média entre a altura e a medida da sessão, ou seja,

$$\alpha \wedge g(F_\alpha) = \frac{1}{2},$$

é o valor intermediário entre a altura e a medida da sessão. Esse valor pode ser obtido, simplesmente tomando:

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha \wedge g(F_\alpha)\}$$

Concluindo, reiteramos que o valor,

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha \wedge g(F_\alpha)\}$$

representa uma média das comparações entre as medidas, das sessões e das alturas correspondentes no triângulo isósceles. Esse conceito de média pode ser estendido mesmo que o triângulo não seja isósceles, ou ainda que a figura seja qualquer, não necessariamente um triângulo. A esse conceito de média denominamos de integral *fuzzy* indicada por

$$\int h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha \wedge g(F_\alpha)\},$$

onde  $h$  pode ser dada por uma função de pertinência,  $g$  uma medida *fuzzy*,

$$h : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

,  $F_\alpha = \{x \in [0, 1] : h(x) \geq \alpha\}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\alpha$ -nível de  $h$ .

A função  $h$  pode representar um número *fuzzy* e a integral sendo sua desfuzificação.

Assim, o conceito de integral *fuzzy* representa uma alternativa de desfuzificação de um número *fuzzy*, completando a inferência de Mamdani.

Sugeno, em sua tese de doutorado, apresenta a conceituação da Integral *Fuzzy* através da definição.

**Definição 3.1.** *Sejam  $X \neq \emptyset$ , uma aplicação*

$$h : X \rightarrow [0, 1],$$

*e uma medida fuzzy*

$$g : 2^X \rightarrow [0, 1].$$

*Indica-se por*

$$\int_A$$

*a integral fuzzy sobre  $A \subset X$  aplicada em  $h(x)$  com medida fuzzy  $g$ , sendo definida por:*

$$\int_A h(x) \cdot g(\cdot) = \sup_{F \in 2^X} \left\{ \left[ \inf_{x \in F} \{h(x)\} \right] \wedge g(A \cap F) \right\}.$$

**Exemplo 3.1.** *Considere a medida usual  $g$  em  $X = \mathbb{R}$ , logo fuzzy. Faremos uma interpretação para  $\sup_{F \in 2^X} \left\{ \left[ \inf_{x \in F} \{h(x)\} \right] \wedge g(A \cap F) \right\}$  como uma média, ou seja,  $\int_A h \cdot g$  sendo uma média (para o caso específico da Figura 29).*

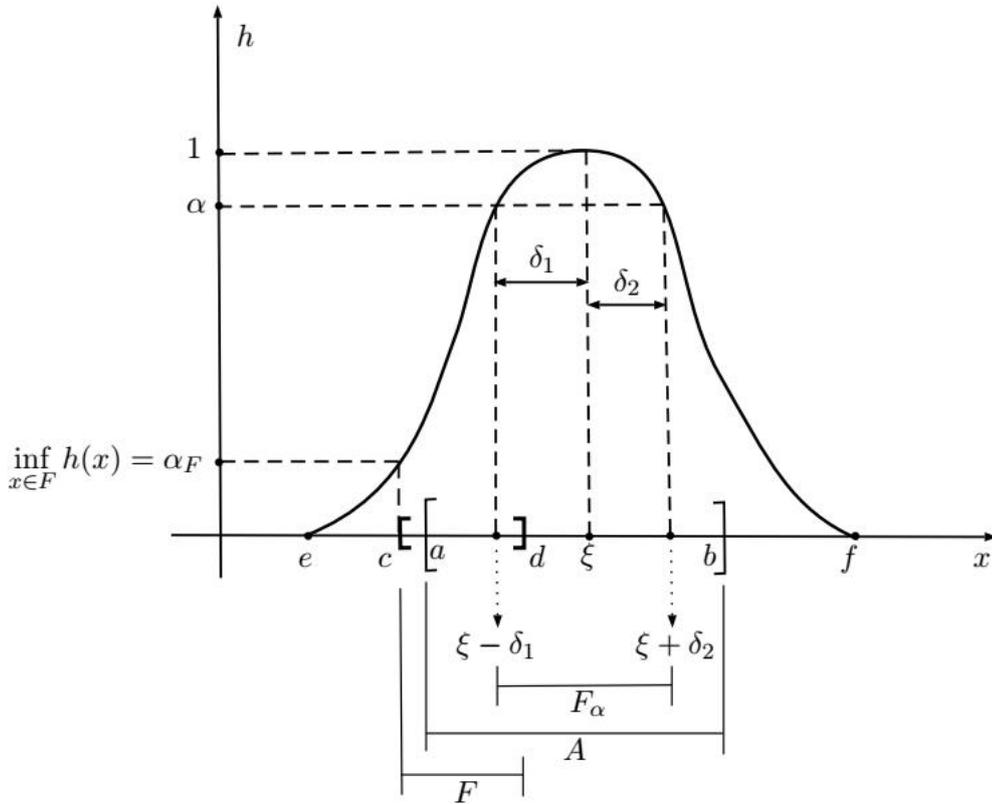


Figura 29 – Interpretação do valor da integral fuzzy como média.

*Supondo:*

$$A = [a, b], a < b; F = [c, d]; \alpha_F = \left[ \inf_{x \in F} h(x) \right]$$

$h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  contínua e nula para  $\mathbb{R} - [e, f]$

$$F_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0, 1], \alpha\text{-nível}$$

$$F_\alpha = [\xi - \delta_1, \xi + \delta_2], \alpha\text{-nível.}$$

Note na Figura 29:

- $\left[ \inf_{x \in F} h(x) \right] \wedge g(A \cap F) = \alpha_F \wedge g(A \cap F) = \alpha_F \wedge |d - a| = \alpha_F$

- para  $\delta_1 = \xi - e, \delta_2 = f - \xi$ , ou seja,  $\alpha = 0$ , teremos:

$$\left[ \inf_{x \in F_\alpha} h(x) \right] \wedge g(A \cap F_\alpha) = 0$$

- para  $\delta_1 = 0$  e  $\delta_2 = 0$ , ou seja,  $\alpha = 1$ , teremos:

$$\left[ \inf_{x \in F_\alpha} h(x) \right] \wedge g(A \cap F_\alpha) = 0$$

- para  $\alpha \in (0, 1)$

$$\left[ \inf_{x \in F_\alpha} h(x) \right] \wedge g(A \cap F_\alpha) \neq 0$$

- $F \subseteq F_{\alpha_F}$  para  $\alpha_F = \inf_{x \in F} h(x)$

- $g(A \cap F) \leq g(A \cap F_{\alpha_F})$   
 $\Rightarrow \alpha_F \wedge g(A \cap F) \leq \alpha_F \wedge g(A \cap F_{\alpha_F})$

$$\Rightarrow \sup_{F \in 2^X} [\alpha_F \wedge g(A \cap F)] \leq \sup_{F \in 2^X} [\alpha_F \wedge g(A \cap F_{\alpha_F})] \leq \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \quad (3.1)$$

Observe que se,

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ \alpha &\mapsto \varphi(\alpha) = [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \end{aligned}$$

então  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  e no presente caso  $\varphi(\alpha) \neq 0$ , para  $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ , supondo  $\varphi$  contínua, existirá  $\bar{\alpha} \in [0, 1]$  onde

$$\varphi(\bar{\alpha}) = \max_{\alpha \in [0, 1]} \varphi(\alpha)$$

ou seja,

$$\varphi(\bar{\alpha}) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)].$$

Mostraremos no próximo teorema que

$$\sup_{F \in 2^X} \left[ \inf_{x \in F} h(x) \wedge g(A \cap F) \right] \geq \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \quad (3.2)$$

de onde concluiremos por (3.1) e (3.2) que  $\int_A h \cdot g = \varphi(\bar{\alpha}), \bar{\alpha} \in [0, 1]$ . ou seja, a integral será representada por um "valor médio" do intervalo  $[0, 1]$ .

**Observação 3.1.** As integrais fuzzy podem ser definidas com a mesma expressão, ao reduzirmos as operações para:

$$(X, 2^X, g) \rightarrow (X, \mathcal{F}, g) \rightarrow (X, \mathcal{B}, g)$$

onde a medida  $g$  ficará restrita aos espaços reduzidos de:

$$2^X \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B},$$

onde

$\mathcal{F}$  : família monótona em  $X$

$\mathcal{B}$  : campo de Borel.

**Observação 3.2.** O teorema seguinte relaciona a definição da Integral Fuzzy dada por Sugeno, com as considerações iniciais que fizemos.

**Teorema 3.1.** (SUGENO, 1974) A integral fuzzy pode ser expressa da seguinte forma:

$$\int_A h(x) \cdot g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)]$$

onde  $F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$  ( $\alpha$ -nível de  $h$ ).

*Demonstração.* Seja  $\alpha_F = \inf_{x \in F} h(x)$ ,  $F \subset \{x : h(x) \geq \alpha_F\}$

$$A \cap F \subset A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\}$$

$$\stackrel{g \text{ monótona}}{\Rightarrow} g(A \cap F) \leq g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\})$$

$$\Rightarrow \left[ \inf_{X \in F} h(x) \right] \wedge g(A \cap F) \leq \left[ \inf_{X \in F} h(x) \right] \wedge g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\})$$

$$\Rightarrow \sup_{F \in 2^{\mathbb{R}}} \left\{ \left[ \inf_{X \in F} h(x) \right] \wedge g(A \cap F) \right\} \leq \sup_{F \in 2^{\mathbb{R}}} [\alpha_F \wedge g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\})] \quad (3.3)$$

Mas  $\{\alpha_F\} \subset [0, 1]$  e

$$\sup_{F \in 2^{\mathbb{R}}} [\alpha_F \wedge g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\})]$$

$$\leq \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha\})]$$

$$= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)]$$

Então,

$$\sup_{F \in 2^{\mathbb{R}}} [\alpha_F \wedge g(A \cap \{x : h(x) \geq \alpha_F\})] \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4) tem-se

$$\int h \cdot g(\cdot) \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \quad (3.5)$$

Por outro lado, sendo  $F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$ , temos

$$\alpha \leq \inf_{x \in F_\alpha} h(x),$$

logo

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} \left[ \left( \inf_{x \in F_\alpha} h(x) \right) \wedge g(A \cap F_\alpha) \right]. \quad (3.6)$$

Mas  $2^X \supset F_\alpha : \alpha \in [0, 1]$ , logo

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \left[ \left( \inf_{x \in F_\alpha} h(x) \right) \wedge g(A \cap F) \right] \leq \sup_{F \in 2^X} \left[ \left( \inf_{x \in F} h(x) \right) \wedge g(A \cap F) \right] = \int h \cdot g(\cdot).$$

Então

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \left[ \left( \inf_{x \in F_\alpha} h(x) \right) \wedge g(A \cap F) \right] \leq \int h \cdot g(\cdot). \quad (3.7)$$

De (3.6) e (3.7) tem-se

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \leq \int h \cdot g(\cdot). \quad (3.8)$$

De (3.5) e (3.8) obtemos que

$$\int h \cdot g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)]. \quad (3.9)$$

□

De acordo com o resultado do Teorema 3.1 não é necessário definir o domínio de  $g$  sendo  $2^X$ , basta considerar uma família monótona de conjuntos  $\{F_\alpha\} : \alpha \in [0, 1]$  (3.9). Essa é a razão por ter sido definido o domínio de  $g$  no Capítulo 2, sobre  $\mathcal{F}$ , onde  $\mathcal{F}$  é uma família monótona.

A seguir será apresentado o conceito de mensurabilidade.

**Definição 3.2.** *Seja  $X \neq \emptyset$  e  $\mathcal{F}$  uma família monótona. Um subconjunto  $E$  de  $X$  é chamado  $\mathcal{F}$ -mensurável se, e somente se,  $E \in \mathcal{F}$ .*

**Definição 3.3.** *Seja  $X \neq \emptyset$  e  $h : X \rightarrow [0, 1]$ . A função  $h$  é dita “ $\mathcal{F}$ -mensurável” ou simplesmente “mensurável” se:*

$$\{x : h(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{F}, \forall \alpha \in [0, 1].$$

Em outras palavras, todo  $\alpha$ -nível de  $h$  é “medível” por  $g$ , no espaço  $(X, \mathcal{F}, g)$ .

A integral fuzzy de  $h$  sobre  $X$ , poderá ser definida de acordo com o Teorema 3.1 desde que  $F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$  seja  $\mathcal{F}$ -mensurável,

$$\int_A h \cdot g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \left[ \left( \inf_{x \in F_\alpha} h(x) \right) \wedge g(A \cap F_\alpha) \right].$$

Se considerarmos a sequência monótona crescente

$$F_n = \left\{ x : h(x) > \alpha \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right\} \in \mathcal{F}$$

sendo  $\mathcal{F}$  monótona,

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n \right) \in \mathcal{F}, \quad \text{e} \quad \{x : h(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{F}$$

assim pode ser usada como condição para que  $h$  seja mensurável,

$$\{x : h(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Pode-se ainda “enfraquecer” a condição para definir mensurabilidade de  $h$ , sobre  $\mathcal{F}$ , exigindo apenas que:

$$\{x : h(x) > q, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\} \in \mathcal{F}$$

isso pode ser facilmente provado usando:

- a densidade de  $\mathbb{Q}$  em  $[0, 1]$
- o fato de  $\mathcal{F}$  satisfazer a condição de ser monótona.

Para definir medida *fuzzy* sobre os reais utilizamos:

$$g : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

onde  $\mathcal{F}$  é apenas uma família monótona, não necessariamente todo conjunto das partes.

E ao definir a integral *fuzzy* sobre  $A$ , é necessário que

$$A \cap \{x : h(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

o que não é garantido para todo  $A \subset X$ .

Nesse trabalho consideraremos  $\mathcal{F}$  em um campo de Borel  $\mathcal{B}$ , assim, se  $A \in \mathcal{B}$  e  $h$  for  $\mathcal{B}$ -mensurável então,

$$A \cap \{x : h(x) > \alpha\} \in \mathcal{B},$$

e sendo  $g$  definida sobre  $\mathcal{B}$ , há a garantia de existência de  $\int_A h \cdot g(\cdot)$ .

Serão usadas as notações:

- ★  $\int_A h \cdot g$  para  $A \in \mathcal{B}$  e
- ★  $\int h \cdot g$  se  $A = X$ .

**Proposição 3.1.** *Se  $h$  e  $h'$  são  $\mathcal{B}$ -mensuráveis, então  $h \vee h'$  e  $h \wedge h'$  são  $\mathcal{B}$ -mensuráveis.*

*Demonstração.* De fato: se  $\alpha \in [0, 1]$

$$h \text{ } \mathcal{B}\text{-mensurável} \Rightarrow \{x : h(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$$

$$h' \text{ } \mathcal{B}\text{-mensurável} \Rightarrow \{x : h'(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$$

Como  $\mathcal{B}$  é campo de Borel:

$$\{x : (h \vee h')(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}, \quad \text{e}$$

$$\{x : (h \wedge h')(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$$

pois,

$$\{x : h(x) > \alpha\} \cup \{x : h'(x) > \alpha\} = \{x : (h \vee h')(x) > \alpha\}$$

e o mesmo vale para a intersecção pelo fato da intersecção finita estar em  $\mathcal{B}$ . □

**Observação 3.3.**  $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A^C \cup B^C \in \mathcal{B} \Rightarrow (A^C \cup B^C)^C = A \cap B \in \mathcal{B}$ .

**Proposição 3.2.** *Se utilizarmos a notação*

$$h^C(x) = 1 - h(x),$$

*ou simplesmente*

$$h^C = 1 - h,$$

*se  $h$  for mensurável, então  $h^C$  será mensurável.*

*Demonstração.*  $h$  mensurável  $\Rightarrow \{x : h(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$ , logo  $\{x : h(x) > \alpha\}^C \in \mathcal{B}$ , assim,

$$\{x : h(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{B} \Rightarrow \{x : -h(x) \geq -\alpha\} \in \mathcal{B} \Rightarrow \{x : 1 - h(x) \geq 1 - \alpha\} \in \mathcal{B} \Rightarrow h^C \in \mathcal{B}.$$

□

**Proposição 3.3.** *Se  $\{h_n\}$  é uma sequência monótona de funções  $\mathcal{B}$ -mensuráveis, então:*

$$h = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$$

*é  $\mathcal{B}$ -mensurável.*

*Demonstração.*  $\{h_n\}$  SM de funções  $\mathcal{B}$ -mensuráveis implica que

$$F_n = \{x : h_n(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{B}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Se  $h_n$  for SMC então  $\{F_n\}$  é uma SMC para cada  $\alpha$  fixado, pois

$$h_n(x) \leq h_{n+1}(x) \Rightarrow$$

$x \in F_n$ , então  $x \in F_{n+1}$ , ou seja,  $F_n \subset F_{n+1}$ .

Como  $\mathcal{B}$  é Borel e  $F_n$  será uma família monótona, logo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = F \in \mathcal{B}.$$

Mas,

$$F = \{x : \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n > \alpha\} = \{x : h(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}.$$

Portanto,  $h$  é mensurável □

**Proposição 3.4.** *Se  $a \in [0, 1]$  e  $h(x) = a, \forall x \in X$ , então  $\int a \cdot g = a$ .*

*Demonstração.*  $\int a \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)].$

Se  $a < \alpha$  então  $F_\alpha = \emptyset \Rightarrow g(F_\alpha) = 0 \Rightarrow [\alpha \wedge 0] = 0$ .

Se  $a \geq \alpha$  então  $F_\alpha = X \Rightarrow g(F_\alpha) = 1 \Rightarrow [\alpha \wedge 1] = [\alpha]$ .

Portanto,

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0,a]} [\alpha] = a$$

□

**Teorema 3.2.** *Se  $h$  e  $h'$  são mensuráveis, então:*

$$h \leq h' \Rightarrow \int h \cdot g \leq \int h' \cdot g.$$

*Ou seja, a integral fuzzy é monótona.*

*Demonstração.* Seja  $F_\alpha = \{x : h(x) > \alpha\}$  e  $F'_\alpha = \{x : h'(x) > \alpha\}$ . Se  $z \in F_\alpha$  então  $h(z) > \alpha$  e como  $h < h'$  temos  $h'(z) > h(z) > \alpha$ , logo  $z \in F'_\alpha$  e assim  $F_\alpha \subset F'_\alpha$ . Mas,

$$F_\alpha \subset F'_\alpha \Rightarrow g(A \cap F_\alpha) \leq g(A \cap F'_\alpha)$$

pela monotocidade de  $g$ , assim

$$\int h \cdot g = \sup_{[0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \leq \sup_{[0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F'_\alpha)] = \int h' \cdot g \Rightarrow \int h \cdot g \leq \int h' \cdot g.$$

□

**Lema 3.1.** *Se  $h_1$  e  $h_2$  são mensuráveis, então:*

$$1. \int (h_1 \vee h_2) \cdot g \geq \left( \int h_1 \cdot g \right) \vee \left( \int h_2 \cdot g \right)$$

$$2. \int (h_1 \wedge h_2) \cdot g \leq \left( \int h_1 \cdot g \right) \wedge \left( \int h_2 \cdot g \right)$$

**Observação 3.4.** Na desigualdade 1 do Lema 3.1 ocorre a igualdade quando  $g$  for  $F$ -aditiva.

*Demonstração.* Seja  $h = h_1 \vee h_2$ ,  $F_\alpha = \{x : h(x) > \alpha\}$ . Assim,

$$\int (h_1 \vee h_2) \cdot g = \int h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

$$\{x : h_1(x) > \alpha\} \subset \{x : (h_1 \vee h_2)(x) > \alpha\}$$

$$\{x : h_2(x) > \alpha\} \subset \{x : (h_1 \vee h_2)(x) > \alpha\}.$$

Logo,

$$\{x : h_1(x) > \alpha\} \cup \{x : h_2(x) > \alpha\} \subset \{x : h(x) > \alpha\} \Rightarrow$$

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(\{x : h_1(x) > \alpha\} \cup \{x : h_2(x) > \alpha\})] \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g\{x : h(x) > \alpha\}] \Rightarrow$$

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g\{x : h_1(x) > \alpha\}] \vee \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g\{x : h_2(x) > \alpha\}] \leq$$

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g\{x : h(x) > \alpha\}]$$

ou seja,

$$\int (h_1 \vee h_2) \cdot g \geq \left( \int h_1 \cdot g \right) \vee \left( \int h_2 \cdot g \right).$$

Provando 2. Sendo

$$h = h_1 \wedge h_2, \{x : h(x) > \alpha\} \subset \{x : h_1(x) > \alpha\} \cup \{x : h_2(x) > \alpha\}.$$

Logo,

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \{x : h(x) > \alpha\}] \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g\{x : h_1(x) > \alpha\}] \wedge \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g\{x : h_2(x) > \alpha\}]$$

$$\Rightarrow \int (h_1 \wedge h_2) \cdot g \leq \left( \int h_1 \cdot g \right) \wedge \left( \int h_2 \cdot g \right)$$

□

**Proposição 3.5.** Seja  $(X, \mathcal{B}, g)$  um espaço de Borel com  $A \in \mathcal{B}$ , então:

$$g(A) = \int \mathcal{X}_A \cdot g$$

onde  $\mathcal{X}_A$  é a função característica de  $A$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A(x) &= \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin A, \\ 1, & \text{se } x \in A, \end{cases} \\ F_\alpha &= \{x : \mathcal{X}_A(x) > \alpha\} = A \\ \int \mathcal{X}_A \cdot g &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A)]. \end{aligned}$$

Note que

$$\alpha \in [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in [0, g(A)] \\ \text{ou} \\ \alpha \in (g(A), 1] \end{cases}$$

Se  $\alpha \in [0, g(A)]$ , então

$$\alpha \wedge g(A) = \alpha \text{ e } \sup_{\alpha \in [0, g(A)]} [\alpha \wedge g(A)] = g(A).$$

Se  $\alpha \in (g(A), 1]$ , então

$$\alpha \wedge g(A) = g(A) \text{ e } \sup_{\alpha \in (g(A), 1]} [\alpha \wedge g(A)] = g(A)$$

Logo,

$$\int \mathcal{X}_A \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A)] = g(A).$$

□

**Teorema 3.3.** (*SUGENO, 1974*) *Seja  $(X, \mathcal{B}, g)$  um espaço de Borel com medida fuzzy  $g$ ,  $A \in \mathcal{B}$ , então*

$$\int_A h \cdot g = \int (\mathcal{X}_A \wedge h) \cdot g$$

com  $h$   $\mathcal{B}$ -mensurável

*Demonstração.* Definimos para  $\alpha \in [0, 1]$

$$F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$$

$$E_\alpha = \{x : (\mathcal{X}_A(x) \wedge h(x)) \geq \alpha\}.$$

Se provarmos que  $A \cap F_\alpha = E_\alpha = A \cap E_\alpha$ , então

$$\begin{aligned} \int_A h \cdot g &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(E_\alpha)] \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap E_\alpha)] \\ &= \int (\mathcal{X}_A \wedge h) \cdot g \end{aligned}$$

Mostremos então que:  $A \cap F_\alpha = E_\alpha = A \cap E_\alpha$ .

Se  $x \in A \cap F_\alpha$  então  $x \in A$  e  $x \in F_\alpha$ , logo  $(\mathcal{X}_A \wedge h)(x) \geq \alpha$  e assim  $x \in E_\alpha$ , portanto,

$$A \cap F_\alpha \subset E_\alpha \quad (3.10)$$

se  $x \in E_\alpha$ , então  $(\mathcal{X}_A \wedge h)(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in A$  e  $h(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in A$  e  $x \in F_\alpha$ , logo,

$$E_\alpha \subset A \cap F_\alpha. \quad (3.11)$$

De (3.10) e (3.11) temos que

$$A \cap F_\alpha = E_\alpha.$$

$$E_\alpha = A \cap E_\alpha,$$

pois  $E_\alpha \subset A$ . De fato, caso contrário para  $\alpha \neq 0$ , existiria  $x \in E_\alpha$  com  $x \notin A$  e, assim  $(\mathcal{X}_A \wedge h)(x) = 0$ , e teríamos  $x \notin E_\alpha$  (contradição!).

Concluindo então,

$$\int_A h \cdot g = \int_A (\mathcal{X}_A \wedge h) \cdot g.$$

□

**Teorema 3.4.** (SUGENO, 1974) *Seja  $(X, \mathcal{B}, g)$  um espaço de Borel onde  $g$  é uma medida fuzzy  $A, B \in \mathcal{B}$  com  $A \subset B$ ,  $h$  mensurável. Então:*

$$\int_A h \cdot g \leq \int_B h \cdot g$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \int_A h \cdot g &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \\ \int_B h \cdot g &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(B \cap F_\alpha)] \end{aligned}$$

$$A \subset B \Rightarrow (A \cap F_\alpha) \subset (B \cap F_\alpha)$$

$$\stackrel{g \text{ monótona}}{\Rightarrow} g(A \cap F_\alpha) \leq g(B \cap F_\alpha)$$

$$\Rightarrow \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(B \cap F_\alpha)]$$

$$\Rightarrow \int_A h \cdot g \leq \int_B h \cdot g.$$

□

**Lema 3.2.** Se  $(X, \mathcal{B}, g)$  é um espaço de Borel com medida fuzzy  $g$ ,  $A, B \in \mathcal{B}$ ,  $h$ -mensurável, então:

$$\begin{aligned} \int_{A \cup B} h \cdot g &\geq \left( \int_A h \cdot g \right) \vee \left( \int_B h \cdot g \right) \\ \int_{A \cap B} h \cdot g &\leq \left( \int_A h \cdot g \right) \wedge \left( \int_B h \cdot g \right). \end{aligned}$$

*Demonstração.*  $g$  é  $F$ -aditiva (monótona)

$$g[(A \cup B) \cap F_\alpha] \geq g(A \cap F_\alpha)$$

$$g[(A \cup B) \cap F_\alpha] \geq g(B \cap F_\alpha)$$

logo,

$$g[(A \cup B) \cap F_\alpha] \geq g(A \cap F_\alpha) \vee g(B \cap F_\alpha)$$

assim,

$$\int_{A \cup B} h \cdot g \geq \left( \int_A h \cdot g \right) \vee \left( \int_B h \cdot g \right).$$

Analogamente:

$$g[(A \cap B) \cap F_\alpha] \leq g(A \cap F_\alpha)$$

$$g[(A \cap B) \cap F_\alpha] \leq g(B \cap F_\alpha)$$

$$\int_{A \cap B} h \cdot g \leq \left( \int_A h \cdot g \right) \wedge \left( \int_B h \cdot g \right).$$

□

**Corolário 3.1.** Se  $a \in [0, 1]$  e  $\sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] < \sup_{\alpha \in (a, 1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$ , então

$$\sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] = a$$

*Demonstração.* É claro que  $\sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \leq a$ .

Vamos negar a tese e mostrar contradição.

Se

$$\sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \neq a$$

então

$$\sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] < a$$

assim,

$$a \wedge g(F_a) < a$$

logo,

$$a > g(F_a). \quad (3.12)$$

$g$  é fuzzy  $\Rightarrow g(F_\alpha)$  é monótona não crescente, e por (3.12) tem-se

$$[a \wedge g(F_a)] = g(F_a) \geq \sup_{\alpha \in (a,1]} [g(F_\alpha)] \geq \sup_{\alpha \in (a,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)].$$

Mas

$$\sup_{\alpha \in [0,a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \geq [a \wedge g(F_a)]$$

e

$$[a \wedge g(F_a)] \geq \sup_{\alpha \in (a,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

e concluímos que,

$$\sup_{\alpha \in [0,a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \geq \sup_{\alpha \in (a,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

absurdo!

Portanto,

$$\sup_{\alpha \in [0,a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] = a.$$

□

**Teorema 3.5.** (SUGENO, 1974) Se  $a \in [0, 1]$ , então:

1.  $\int (a \vee h) \cdot g = a \vee \int h \cdot g$
2.  $\int (a \wedge h) \cdot g = a \wedge \int h \cdot g$

*Demonstração.* Sejam:

$$F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$$

$$G_\alpha = \{x : (a \vee h(x)) \geq \alpha\}$$

$$H_\alpha = \{x : (a \wedge h(x)) \geq \alpha\}$$

$$\int (a \vee h) \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,a]} [\alpha \wedge g(G_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in (a,1]} [\alpha \wedge g(G_\alpha)]. \quad (3.13)$$

Se  $\sup_{\alpha \in [0,a]} [\alpha \wedge g(G_\alpha)] \geq \sup_{\alpha \in (a,1]} [\alpha \wedge g(G_\alpha)]$ , então

$$\int (a \vee h) \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,a]} [\alpha \wedge g(G_\alpha)]. \quad (3.14)$$

Mas,

$$\sup_{\alpha \in [0,a]} [\alpha \wedge g(G_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0,a]} [\alpha \wedge g(\{x : (a \vee h) > \alpha\})] = \sup_{\alpha \in [0,a]} [\alpha \wedge g(X)] = a \quad (3.15)$$

e

$$\sup_{\alpha \in (a,1]} [\alpha \wedge g(G_\alpha)] = \sup_{\alpha \in (a,1]} [\alpha \wedge g(\{x : a \vee h(x) \geq \alpha\})] \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(\{x : h(x) \geq \alpha\})] = \int h \cdot g.$$

Logo,

$$\sup_{\alpha \in (a,1]} [\alpha \wedge g(G_\alpha)] \leq \int h \cdot g. \quad (3.16)$$

Por (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16) concluímos que

$$\int (a \vee h) \cdot g \leq a \vee \left( \int h \cdot g \right).$$

Mas, pelo Lema 3.1

$$\int (a \vee h) \cdot g \geq \left( \int a \cdot g \right) \vee \int h \cdot g = a \vee \int h \cdot g \quad (3.17)$$

portanto,

$$\int (a \vee h) \cdot g \geq a \vee \int h \cdot g \quad (3.18)$$

assim,

$$\int (a \vee h) \cdot g = a \vee \left( \int h \cdot g \right),$$

provado o item (1) do teorema.

Para provar (2) observamos inicialmente que:  $H_\alpha = \emptyset$  para  $\alpha > a$  pois  $H_\alpha = \{x : (a \wedge h(x) \geq \alpha)\}$  e  $H_\alpha = F_\alpha$  para  $\alpha \leq a$ . Assim,

$$\begin{aligned} & \int (a \wedge h) \cdot g \\ &= \sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(H_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in (a, 1]} [\alpha \wedge g(H_\alpha)] \\ &= \sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \vee 0 \\ &= \sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \leq a \end{aligned}$$

portanto,

$$\int (a \wedge h) \cdot g = \sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \vee 0 \quad (3.19)$$

o que implica em

$$\int (a \wedge h) \cdot g = a \wedge \sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]. \quad (3.20)$$

Mas,

$$\int h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in (a, 1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

e se,

$$\sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \geq \sup_{\alpha \in (a, 1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

então,

$$\int h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \quad (3.21)$$

e por (3.20) e (3.21)

$$\int (a \wedge h) \cdot g = a \wedge \int h \cdot g$$

e se,

$$\sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] < \sup_{\alpha \in (a, 1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

pelo Corolário 3.1

$$\sup_{\alpha \in [0, a]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] = a.$$

Logo, por (3.19)  $\int (a \wedge h) \cdot g = a$  e como  $\int h \cdot g \geq a$  concluímos,

$$\int (a \wedge h) \cdot g = a \wedge \left( \int h \cdot g \right).$$

□

**Teorema 3.6.** Se  $\{h_n\}$  é uma SM de funções  $\mathcal{B}$ -mensuráveis, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n \cdot g = \int \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n \right) \cdot g.$$

*Demonstração.*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n \cdot g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha^n)] \right]$$

onde

- $F_\alpha^n = \{x : h_n(x) \geq \alpha\}$
- $\{h_n\}$  é SM, limitada e  $g$  é medida fuzzy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g[\{x : h_n(x) \geq \alpha\}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(F_\alpha^n) \stackrel{\text{continuidade de } g}{=} g \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} F_\alpha^n \right].$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n \cdot g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha^n)] \right] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(\lim(F_\alpha^n))] = \int \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n \right) \cdot g.$$

□

**Teorema 3.7.** (SUGENO, 1974) Se  $\{h_i\}$  é uma sequência monótona decrescente (crescente) de funções mensuráveis e  $\{a_i\}$  é uma sequência de números reais crescente (decrescente), então:

- $\bigvee_{i=1}^{+\infty} [a_i \wedge h_i]$  é mensurável
- $\int \left[ \bigvee_{i=1}^{+\infty} (a_i \wedge h_i) \right] \cdot g = \bigvee_{i=1}^{+\infty} \left[ a_i \wedge \int h_i \cdot g \right].$

*Demonstração.* Para  $n = 1$  o resultado é verificado pelo Teorema 3.5. Mostraremos que vale para  $n = 2$ , em seguida para  $n \in \mathbb{N}^*$ . Sejam

$$E_\alpha = \{x : (a_1 \wedge h_1) \geq \alpha\}$$

$$F_\alpha = \{x : (a_2 \wedge h_2) \geq \alpha\}$$

$$G_\alpha = \{x : \bigvee_{i=1}^2 (a_i \wedge h_i) \geq \alpha\}.$$

Note que:

1. Se  $\alpha > a_2$  então  $E_\alpha = F_\alpha = \emptyset$
2. Se  $a_2 \geq \alpha > a_1$  então  $E_\alpha = \emptyset$
3. Se  $a_1 > \alpha$ , sabemos que

$$\begin{cases} a_2 > a_1 \\ h_1 > h_2 \end{cases}.$$

Assim se  $x \in F_\alpha = \{x : [a_2 \wedge h_2(x)] \geq \alpha\}$ , então

$$a_1 \wedge h_2(x) \geq \alpha \Rightarrow a_1 \wedge h_1(x) \geq a_1 \wedge h_2(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in E_\alpha.$$

Portanto  $a_1 > \alpha \Rightarrow F_\alpha \subset E_\alpha$ .

Nessas condições teremos:  $G_\alpha = F_\alpha \cup E_\alpha$ ,

$$\text{Se ocorrer (1)} \quad G_\alpha = \emptyset \tag{3.22}$$

$$\text{Se ocorrer (2)} \quad G_\alpha = F_\alpha \tag{3.23}$$

$$\text{Se ocorrer (3)} \quad G_\alpha = E_\alpha \tag{3.24}$$

Como  $h_i$  são mensuráveis,  $F_\alpha$ ,  $E_\alpha$  são mensuráveis e assim  $G_\alpha$  é mensurável.

Agora,

$$\int \left( \bigvee_{i=1}^2 (a_i \wedge h_i) \right) \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(G_\alpha)]$$

$$\stackrel{(3.23)}{=} \sup_{\alpha \in [0,a_1]} [\alpha \wedge g(E_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in (a_1,a_2]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

Portanto

$$\int \left( \bigvee_{i=1}^2 (a_i \wedge h_i) \right) \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,a_1]} [\alpha \wedge g(E_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in (a_1,a_2]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \tag{3.25}$$

por outro lado

$$\left[ \int (a_1 \wedge h_1) \cdot g \right] \vee \left[ \int (a_2 \wedge h_2) \cdot g \right]$$

$$= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(E_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

$$\stackrel{(3.22)}{=} \sup_{\alpha \in [0,a_2]} [\alpha \wedge g(E_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in [0,a_2]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

$$= \sup_{\alpha \in [0,a_1]} [\alpha \wedge g(E_\alpha)] \vee \overbrace{\sup_{\alpha \in (a_1,a_2]} [\alpha \wedge g(E_\alpha)]}^{=0} \vee \sup_{\alpha \in [0,a_1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in (a_1,a_2]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

mas,

$$\sup_{\alpha \in [0, a_1]} [\alpha \wedge g(E_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in [0, a_1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0, a_1]} [\alpha \wedge g(E_\alpha)]$$

pois  $F_\alpha \subset E_\alpha$ . Portanto

$$\left[ \int (a_1 \wedge h_1) \cdot g \right] \vee \left[ \int (a_2 \wedge h_2) \cdot g \right] = \sup_{\alpha \in [0, a_1]} [\alpha \wedge g(E_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in (a_1, a_2]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]. \quad (3.26)$$

De (3.25) e (3.26)

$$\int \left( \bigvee_{i=1}^2 (a_i \wedge h_i) \right) \cdot g = \left[ \int (a_1 \wedge h_1) \cdot g \right] \vee \left[ \int (a_2 \wedge h_2) \cdot g \right].$$

Seja agora:

$$k_n = \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge h_i),$$

então  $\{k_n\}$  é SM e usando o Teorema 3.6 obtém-se o resultado desejado.  $\square$

**Lema 3.3.** *Se  $\{h_\alpha\}$  é uma SM com respeito a  $\alpha \in [0, 1]$ , então:*

$$\int \sup_{\alpha} [\alpha \wedge h_\alpha] \cdot g = \sup_{\alpha} \left[ \alpha \wedge \int h_\alpha \cdot g \right].$$

*Demonstração.*  $\{h_\alpha\}_\alpha$  monótona em  $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int [\alpha \wedge h_\alpha] \cdot g &= \alpha \wedge \int h_\alpha \cdot g \Rightarrow \\ \sup_{\alpha} \int [\alpha \wedge h_\alpha] \cdot g &= \sup_{\alpha} \left[ \alpha \wedge \int h_\alpha \cdot g \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

por outro lado pelo Teorema 3.6, sendo  $\{h_\alpha\}_\alpha$  SM temos

$$\sup_{\alpha} \int [\alpha \wedge h_\alpha] \cdot g = \int \sup_{\alpha} [\alpha \wedge h_\alpha] \cdot g. \quad (3.28)$$

De (3.27) e (3.28) conclui-se a demonstração do Lema.  $\square$

**Proposição 3.6.** *Seja  $F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$ , então:*

$$h(x) = \sup_{\alpha} [\alpha \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)]$$

onde  $\mathcal{X}_{F_\alpha}$  é a função característica de  $F_\alpha$ .

*Demonstração.*

$$\int \sup_{\alpha} [\alpha \wedge \mathcal{X}_{F_{\alpha}}] \cdot g \stackrel{\text{Lem. 3.3}}{=} \sup_{\alpha} \left[ \alpha \wedge \int \mathcal{X}_{F_{\alpha}} \cdot g \right] \stackrel{\text{Prop. 3.5}}{=} \sup_{\alpha} [\alpha \wedge g(F_{\alpha})] = \int h \cdot g.$$

Portanto,

$$h(x) = \sup_{\alpha} [\alpha \wedge \mathcal{X}_{F_{\alpha}}(x)]$$

□

**Teorema 3.8.** (SUGENO, 1974) *Seja  $(X, \mathcal{B}, g)$  espaço fuzzy,  $A \subset \mathbb{R}$  e considere:*

$$\begin{aligned} h : X \times A &\rightarrow [0, 1] \\ (x, a) &\mapsto h(x, a) \end{aligned}$$

com  $h$   $\mathcal{B}$ -mensurável em relação a  $x$  para cada  $a \in A$ . Então:

1.  $\sup_{a \in A} \int h(x, a) \cdot g \leq \int \left[ \sup_{a \in A} h(x, a) \right] \cdot g$
2.  $\inf_{a \in A} \int h(x, a) \cdot g \geq \int \left[ \inf_{a \in A} h(x, a) \right] \cdot g$

*Demonstração.* Defina:  $F_{\alpha}(a) = \{x : h(x, a) \geq \alpha\}$  e  $\bar{F}_{\alpha} = \{x : \left[ \sup_{a \in A} h(x, a) \right] \geq \alpha\}$ . Se  $x \in F_{\alpha}$ , então  $h(x, a) \geq \alpha$  para certo  $a \in A$ , logo  $\left[ \sup_{a \in A} h(x, a) \right] \geq h(x, a) \geq \alpha \Rightarrow x \in \bar{F}_{\alpha}$ . Assim,

$$F_{\alpha}(a) \subset \bar{F}_{\alpha},$$

$g$  monótona,  $\sup_{\alpha} [\alpha \wedge g(F_{\alpha}(a))] \leq \sup_{\alpha} [\alpha \wedge g(\bar{F}_{\alpha})]$ . Portanto,

$$\int h(x, a) \cdot g \leq \int \left[ \sup_{a \in A} h(x, a) \right] \cdot g.$$

Tomando o supremo sobre  $a$  do lado esquerdo obtemos (1).

Analogamente, se

$$F_{\alpha}(a) = \{x : h(x, a) \geq \alpha\} \text{ e } \bar{F}_{\alpha} = \{x : \left[ \inf_{a \in A} h(x, a) \right] \geq \alpha\}$$

$$\bar{F}_{\alpha} \subset F_{\alpha}(a),$$

o que resultará em

$$\int h(x, a) \cdot g \geq \int \left[ \inf_{a \in A} h(x, a) \right] \cdot g.$$

Logo ocorre (2). □

O Teorema 3.8 generaliza o Lema 3.1.

**Corolário 3.2.** Se  $F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$  com  $0 < \alpha \leq 1$ , então

$$\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} g(F_{\alpha'}) = g(F_\alpha)$$

onde  $\alpha' = \alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ .

*Demonstração.* Se  $\alpha' = \alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ,  $F_n = \left\{x : h(x) \geq \alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , então  $\{F_n\}$  é SMD. Como o espaço é Borel e  $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = F_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$  e pela condição (iii) do campo de Borel, teremos

$$\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} g(F_{\alpha'}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(F_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n\right) = g(F_\alpha). \quad \square$$

Para o teorema seguinte usamos as seguintes notações para limites laterais:

- $\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha^-} F_{\alpha'}$ , será denotado por  $F_{\alpha^-}$ , e
- $\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha^+} F_{\alpha'} = F_{\alpha^+}$

**Teorema 3.9.** (SUGENO, 1974) Seja  $(X, \mathcal{B}, g)$  um espaço fuzzy com  $A \subset X, M \in [0, 1]$

$$\left(\int_A h \cdot g = M\right) \iff (g(A \cap F_M) \geq M \geq g(A \cap F_{M+})).$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese,

$$M = \int_A h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0, M]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in (M, 1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)].$$

Se

$$\sup_{\alpha \in [0, M]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] < \sup_{\alpha \in (M, 1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)],$$

pelo Corolário 3.1

$$\sup_{\alpha \in [0, M]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] = M,$$

logo

$$\int h \cdot g = \sup_{\alpha \in (M, 1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] > M$$

contradiz a hipótese!

Logo  $\sup_{\alpha \in [0, M]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \geq \sup_{\alpha \in (M, 1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)]$ . Usando novamente a hipótese:

$$\sup_{\alpha \in [0, M]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] = M = M \wedge g(A \cap F_M) \Rightarrow g(A \cap F_M) \geq M.$$

A hipótese garante que

$$M \geq g(A \cap F_{M+})$$

A Figura 30 mostra uma possível representação geométrica para a medida  $g$ , considerando uma descontinuidade para o nível  $\alpha = M$ . Para o caso em que  $g$  é contínua em  $\alpha = M$  o resultado é imediato.

( $\Leftarrow$ )  $g(A \cap F_M) \geq M$ , por hipótese.

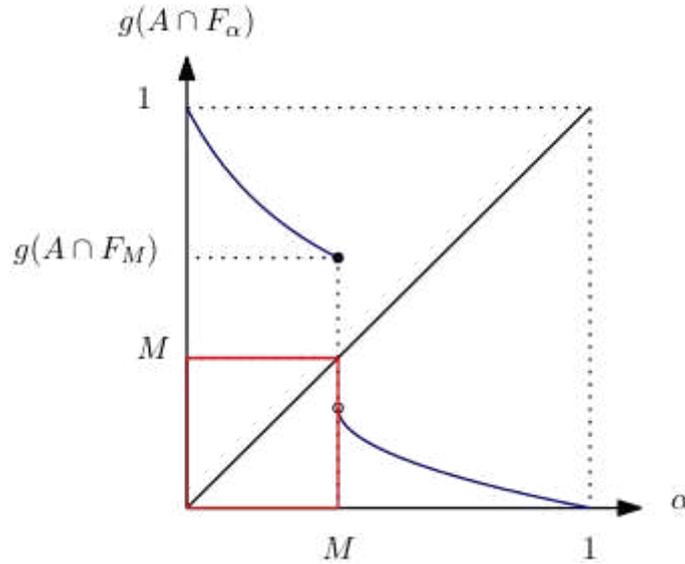


Figura 30 – Representação da função medida.

O fato de  $g(A \cap F_\alpha)$  ser não crescente leva a concluir que, para  $\alpha \in [0, M]$ ,

$$g(A \cap F_\alpha) \geq g(A \cap F_M) \geq M \Rightarrow \begin{cases} \alpha \wedge g(A \cap F_\alpha) = \alpha \\ \alpha \in [0, M] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sup_{\alpha \in [0, M]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] = M. \tag{3.29}$$

Por hipótese  $M \geq g(A \cap F_{M+})$ .

$$\begin{cases} \alpha \wedge g(A \cap F_\alpha) \\ \alpha \in (M, 1] \end{cases} \Rightarrow \alpha \wedge g(A \cap F_\alpha) \leq g(A \cap F_{M+}) \Rightarrow$$

$$\sup_{\alpha \in (M, 1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] \leq g(A \cap F_{M+}) \leq M. \tag{3.30}$$

De (3.29) e (3.30) conclui-se que

$$\int_A h \cdot g = M.$$

□

**Lema 3.4.** *Seja  $E_\alpha = \{x : h(x) > \alpha\}$ , então*

$$\int_A h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap E_\alpha)] = M.$$

*Demonstração.* Temos que:

$$g(A \cap F_{M_-}) \geq g(A \cap F_M) \geq M \geq g(A \cap F_{M_+})$$

$$F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}; E_\alpha = \{x : h(x) > \alpha\}$$

Mas,

$$g(A \cap E_{M_-}) = g(A \cap F_M)$$

e

$$g(A \cap E_{M_+}) = g(A \cap F_{M_+})$$

logo,

$$g(A \cap E_M) \geq M \geq g(A \cap E_{M_+})$$

Pelo Teorema 3.9

$$\int_A h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap E_\alpha)] = M.$$

□

## 3.2 Comparação entre Integral Fuzzy e de Lebesgue

Nessa sessão apresentamos um importante resultado, a comparação em valor absoluto entre as integrais *fuzzy* e de Lebesgue. A seguir introduzimos conceitos básicos sobre funções simples a serem utilizados no contexto das integrais.

**Definição 3.4. (*Funções simples*)** *Seja  $(X, \mathcal{B}, g)$  um espaço de Borel onde:*

$$X = \bigcup_{i=1}^n E_i$$

$E_i \in \mathcal{B}$ ,  $E_i \cap E_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Uma função  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de *simples* se for expressa na forma:

$$h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{E_i},$$

onde  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  e  $\mathcal{X}_{E_i}$  é a função característica em  $E_i$ .

**Definição 3.5.** Dada uma função simples

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{E_i}(x) \end{aligned}$$

definimos a integral de Lebesgue de  $h$  sobre um subconjunto  $A \in \mathcal{B}$  por:

$$\int h \cdot dg = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot g(A \cap E_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

**Observação 3.5.** Ao assumirmos que:

- $\alpha_i \in [0, 1], \quad 1 \leq i \leq n$
- $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1$

teremos o corolário

**Corolário 3.3.** Seja  $\{E_i\}_{i=1}^n, E_i \cap E_j \neq \emptyset, i \neq j$  e  $\{F_i\}_{i=1}^n$ , dada por:

$$F_i = E_i \cup E_{i+1} \cup \dots \cup E_n, \quad 1 \leq i \leq n-1. \text{ Então:}$$

$$h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{E_i} = \bigvee_{i=1}^n [\alpha_i \wedge \mathcal{X}_{F_i}(x)].$$

*Demonstração.* Sejam

$$h_1(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{E_i}; \quad h_2(x) = \bigvee_{i=1}^n [\alpha_i \wedge \mathcal{X}_{F_i}].$$

Mostraremos que  $h_1(x) = h_2(x)$ .

Se  $x \in E_j$  então  $h_1(x) = \alpha_j$ , e pela definição de  $F_j$  temos que  $x \in F_j$  mas  $x \notin F_{j+1}$  pois  $E_j = F_j - F_{j+1}$ . Assim  $x \in F_i$  para  $i \leq j$  e  $x \notin F_i$  para  $i > j$ , de onde conclui-se que  $\{F_j\}$  é SMD.

Assumimos que:

- $\alpha_i \in [0, 1]$
- $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$

para  $1 \leq i \leq n-1$ , portanto temos que:

$$h_2(x) = \bigvee_{i=1}^j [\alpha_i \wedge \mathcal{X}_{F_i}(x)] = \alpha_j$$

Como  $x$  é qualquer em  $X$ , concluímos

$$h_1(x) = h_2(x)$$

ou

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{E_i} = \bigvee_{i=1}^n [\alpha_i \wedge \mathcal{X}_{F_i}(\alpha)].$$

□

Analogamente para integral fuzzy temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.10.** (*SUGENO, 1974*) *Sejam  $h$  uma função simples e  $g$  uma medida, sobre  $X$ , então:*

$$\int_A h \cdot g = \bigvee_{i=1}^n [\alpha_i \wedge g(A \cap F_i)]$$

desde que,

- $F_1 = X$
- $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$
- $\alpha_i \in [0, 1]$
- $E_i \cap E_j = \emptyset$  se  $i \neq j$
- $F_i = E_i \cup E_{i+1} \cup \dots \cup E_n$
- $F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$

*Demonstração.* Ilustrações:

**(Caso 1)**  $0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_i \leq \alpha_{i+1} \leq \dots \leq \alpha_n \leq 1$ . Neste caso supor  $\alpha_i = \alpha_{i-1}$  (veja Figura 31)

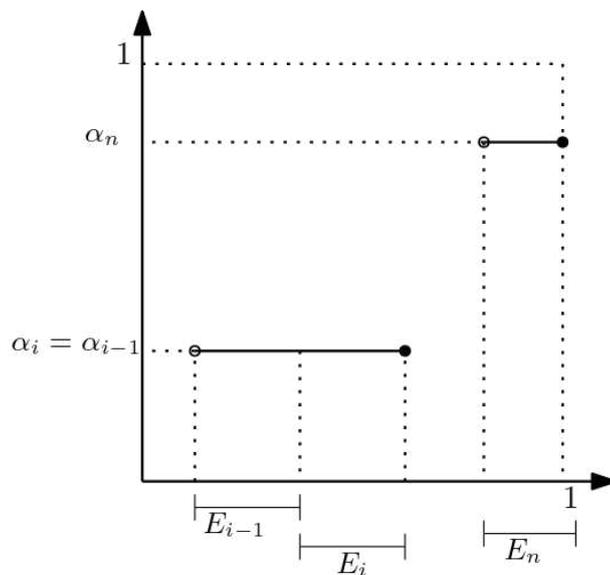


Figura 31 – Representação de função simples, com  $a_k = a_{k-1}$ .

$F_i \subset \{x : h \geq \alpha_i\}$  pois  $\alpha_i$  é não decrescente e  $F_i$  é monótona decrescente com  $i$ .

(Caso 2) Supor um reordenamento dos índices  $i$ , onde

$$i' = \min_j \{j : \alpha_i = \alpha_j\}$$

obtendo

$$0 < \alpha_{1'} < \alpha_{2'} < \dots < \alpha_{i'} < \dots < \alpha_m < 1$$

onde  $0 \leq i' \leq m \leq n$  (veja Figura 32).

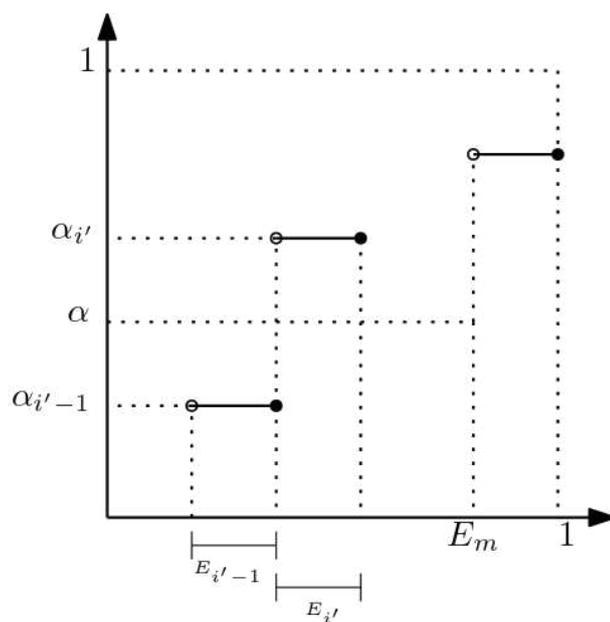


Figura 32 – Representação de função simples.

$$\alpha \in [\alpha_{i'-1}, \alpha_{i'}] \Rightarrow F_{i'} = (E_{i'} \cup E_{i'+1} \cup \dots \cup E_m) = \{x : h \geq \alpha\} \Rightarrow F_{i'} = F_\alpha.$$

Assim

$$g(A \cap F_{i'}) = g(A \cap F_\alpha) \Rightarrow$$

$$\bigvee_{i'=1}^m [\alpha_{i'} \wedge g(A \cap F_{i'})] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)] = \int_A h \cdot g \quad (3.31)$$

**Retomando o Caso 1** . Desde que  $\alpha_{i'} = \alpha_i$  e  $g(A \cap F_{i'}) \geq g(A \cap F_i)$

obtem-se

$$\bigvee_{i'=1}^m [\alpha_{i'} \wedge g(A \cap F_{i'})] \geq \bigvee_{i=1}^n [\alpha_i \wedge g(A \cap F_i)] \quad (3.32)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \{i'\}_{1 \leq i' \leq m} &\subset \{i\}_{1 \leq i \leq n} \\ \text{logo} \\ \{\alpha_{i'}\} &\subset \{\alpha_i\}. \end{aligned}$$

concluindo que

$$\bigvee_{i'=1}^m [\alpha_{i'} \wedge g(A \cap F_{i'})] \leq \bigvee_{i=1}^n [\alpha_i \wedge g(A \cap F_i)]. \quad (3.33)$$

Por (3.32) e (3.33) conclui-se que

$$\bigvee_{i'=1}^m [\alpha_{i'} \wedge g(A \cap F_{i'})] = \bigvee_{i=1}^n [\alpha_i \wedge g(A \cap F_i)]. \quad (3.34)$$

Finalmente por (3.31) e (3.34) tem-se

$$\int_A h \cdot g = \bigvee_{i=1}^n [\alpha_i \wedge g(A \cap F_i)].$$

□

No Teorema 3.10 poderíamos assumir:

- $\{\alpha_i\}$  não crescente ( $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ ),
- $\{F_i\}$  SMC,
- $h$  sendo uma função não necessariamente simples, pois sendo  $\{h_n\}$  uma SM tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = h$$

obtemos,

$$\int h \cdot g = \lim \int h_n \cdot g$$

pelo Teorema 3.6.

É possível provar também que para a integral de Lebesgue há similaridade, ou seja:  $h_n \rightarrow h$  tem-se

$$\int h \cdot dg = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n \cdot dg$$

**Teorema 3.11.** (SUGENO, 1974) *Seja  $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P})$  um espaço probabilístico e*

$$h : X \rightarrow [0, 1]$$

*uma função  $\mathcal{B}$  mensurável. Então:*

$$\left| \int_X h(x) d\mathcal{P} - \int_X h \cdot \mathcal{P} \right| \leq \frac{1}{4}.$$

*Demonstração.* Serão utilizados as notações:

- $\sup h = \sup_{x \in X} h(x)$
- $\inf h = \inf_{x \in X} h(x)$
- $F_\alpha = \{x : h(x) \geq \alpha\}$

$\int_X h d\mathcal{P} = \int_{X-F_\alpha} h d\mathcal{P} + \int_{F_\alpha} h d\mathcal{P}$ . Note que se  $x \in X - F_\alpha$  então  $h(x) < \alpha$ ,

- $\int_{X-F_\alpha} h d\mathcal{P} \leq \int_{X-F_\alpha} \alpha d\mathcal{P} = \alpha \mathcal{P}(X - F_\alpha)$
- $\int_{F_\alpha} h d\mathcal{P} \leq \int_{F_\alpha} \sup h d\mathcal{P} = (\sup h) \cdot \mathcal{P}(F_\alpha)$ .

Logo

$$\int_X h d\mathcal{P} \leq \alpha \mathcal{P}(X - F_\alpha) + (\sup h) \mathcal{P}(F_\alpha) \tag{3.35}$$

para  $\alpha \in [0, 1]$ .

Assumindo que:

- $\int_X h \cdot \mathcal{P} = M$
- $\alpha \rightarrow M^+$  ( $\alpha$  tende a  $M$  por valores a direita de  $M$ ).

Pelo Teorema 3.9 temos

$$\left( \int_A h \cdot \mathcal{P} = M \right) \Leftrightarrow [\mathcal{P}(A \cap F_M) \geq M \geq \mathcal{P}(A \cap F_{M^+})].$$

Logo

$$\int_X h \cdot \mathcal{P} = M \Leftrightarrow \mathcal{P}(F_M) \geq M \geq \mathcal{P}(F_{M^+}). \quad (3.36)$$

Assim,

$$\int_X h d\mathcal{P} \leq \alpha \mathcal{P}(X - F_\alpha) + (\sup h) \mathcal{P}(F_\alpha) = \alpha[1 - \mathcal{P}(F_\alpha)] + (\sup h) \mathcal{P}(F_\alpha)$$

$$\int_X h \cdot \mathcal{P} \leq \mathcal{P}(F_M)$$

$$\int_X h d\mathcal{P} - \int_X h \cdot \mathcal{P} \leq \alpha[1 - \mathcal{P}(F_\alpha)] + (\sup h) \mathcal{P}(F_\alpha) - \mathcal{P}(F_M)$$

temos  $\alpha \rightarrow M^+$  e  $\int_X h \cdot \mathcal{P} = M$

$$\int_X h d\mathcal{P} - \int_X h \cdot \mathcal{P} \leq M[1 - \mathcal{P}(F_{M^+})] + (\sup h) \mathcal{P}(F_{M^+}) - M = [\sup h - M] \mathcal{P}(F_{M^+}).$$

Portanto,

$$\int_X h d\mathcal{P} - \int_X h \cdot \mathcal{P} \leq [\sup h - \mathcal{P}(F_{M^+})] \mathcal{P}(F_{M^+}). \quad (3.37)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_X h d\mathcal{P} &= \int_{X-F_\alpha} h d\mathcal{P} + \int_{F_\alpha} h d\mathcal{P} \geq \int_{X-F_\alpha} (\inf h) d\mathcal{P} + \int_{F_\alpha} \alpha d\mathcal{P} = \\ &= (\inf h) \mathcal{P}(X - F_\alpha) + \alpha \mathcal{P}(F_\alpha) = (\inf h) [1 - \mathcal{P}(F_\alpha)] + \alpha \mathcal{P}(F_\alpha). \end{aligned}$$

Novamente supondo:

- $\int_X h \cdot g = M$
- $\alpha \rightarrow M^-$  ( $\alpha$  tendendo a  $M$  por valores a esquerda de  $M$ , temos  $\mathcal{P}(F_\alpha) \geq \mathcal{P}(F_M)$ )

Assim:

$$\begin{aligned} \int_X h d\mathcal{P} - \int_X h \cdot g &\geq (\inf h) [1 - \mathcal{P}(F_M)] + M \mathcal{P}(F_M) - M \\ &= (\inf h) [1 - \mathcal{P}(F_M)] - M [1 - \mathcal{P}(F_M)] \\ &= -[M - \inf h] [1 - \mathcal{P}(F_M)]. \end{aligned}$$

Como  $\alpha \rightarrow M^-$  pelo Teorema 3.9,  $\mathcal{P}(F_M) \geq M$ , e assim

$$\int_X h d\mathcal{P} - \int_X h \cdot g \geq -[\mathcal{P}(F_M) - \inf h] [1 - \mathcal{P}(F_M)]. \quad (3.38)$$

Por (3.37) e (3.38) concluimos que:

$$-[\mathcal{P}(F_M) - \inf h] [1 - \mathcal{P}(F_M)] \leq \int_X h d\mathcal{P} - \int_X h \cdot g \leq [\sup h - \mathcal{P}(F_{M+})] \mathcal{P}(F_{M+}),$$

portanto,

$$-[\mathcal{P}(F_M) - \inf h] [1 - \mathcal{P}(F_M)] \leq [\sup h - \mathcal{P}(F_{M+})] \mathcal{P}(F_{M+}). \quad (3.39)$$

Mostraremos agora que:

- $[\sup h - \mathcal{P}(F_{M+})] \mathcal{P}(F_{M+}) \leq \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2$ .
- $-[\mathcal{P}(F_M) - \inf h][1 - \mathcal{P}(F_M)] \geq -\left(\frac{1 - \inf h}{2}\right)^2$ .

De fato:

$$\begin{aligned} [\sup h - \mathcal{P}(F_{M+})] \mathcal{P}(F_{M+}) &= (\sup h)\mathcal{P}(F_{M+}) - [\mathcal{P}(F_{M+})]^2 \\ &= -\left[ (\mathcal{P}(F_{M+}))^2 - (\sup h)\mathcal{P}(F_{M+}) + \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2 \right] \\ &= -\left[ \left(\mathcal{P}(F_{M+}) - \frac{\sup h}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2 \right] \\ &= -\left(\mathcal{P}(F_{M+}) - \frac{\sup h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[\sup h - \mathcal{P}(F_{M+})] \mathcal{P}(F_{M+}) \leq \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2. \quad (3.40)$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
& -[\mathcal{P}(F_M) - \inf h] [1 - \mathcal{P}(F_M)] \\
&= -\mathcal{P}(F_M) + [\mathcal{P}(F_M)]^2 - (\inf h)\mathcal{P}(F_M) + \inf h \\
&= [\mathcal{P}(F_M)^2] - (\inf h)\mathcal{P}(F_M) + \left(\frac{\inf h}{2}\right)^2 - \left(\frac{\inf h}{2}\right)^2 + \inf h - \mathcal{P}(F_M) \\
&= (\mathcal{P}(F_M))^2 - (\inf h)\mathcal{P}(F_M) + \left(\frac{\inf h}{2}\right)^2 - \left(\frac{\inf h}{2}\right)^2 + \inf h - \mathcal{P}(F_M) \\
&= \left[\mathcal{P}(F_M) - \frac{\inf h}{2}\right]^2 - \left[\frac{1}{4} - \frac{\inf h}{2} + \left(\frac{\inf h}{2}\right)^2 - \frac{\inf h}{2} - \frac{1}{4}\right] - \mathcal{P}(F_M) \\
&= \left[\mathcal{P}(F_M) - \frac{\inf h}{2}\right]^2 - \left[\frac{1 - 2\inf h + (\inf h)^2}{4}\right] + \frac{\inf h}{2} + \frac{1}{4} - \mathcal{P}(F_M) \\
&= \left[\mathcal{P}(F_M) - \frac{\inf h}{2}\right]^2 - \left(\frac{1 - \inf h}{2}\right)^2 - \left(\mathcal{P}(F_M) - \frac{\inf h}{2}\right) + \frac{1}{4} \\
&= \left[\mathcal{P}(F_M) - \frac{\inf h}{2}\right] \left[\mathcal{P}(F_M) - \frac{\inf h}{2} - 1\right] + \frac{1}{4} - \left(1 - \frac{\inf h}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Como  $\mathcal{P}(F_M) \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
&\geq \left[-\frac{\inf h}{2}\right] \left[-\frac{\inf h}{2} - 1\right] + \frac{1}{4} - \left(\frac{1 - \inf h}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\inf h}{2}\right) \left(\frac{\inf h}{2} + 1\right) + \frac{1}{4} - \left(\frac{1 - \inf h}{2}\right)^2 \\
&\geq -\left(\frac{1 - \inf h}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$-[\mathcal{P}(F_M) - \inf h][1 - \mathcal{P}(F_M)] \geq -\left(\frac{1 - \inf h}{2}\right)^2. \quad (3.41)$$

Por (3.39), (3.40) e (3.41) concluimos

$$-\left(\frac{1 - \inf h}{2}\right)^2 \leq \int_X h \, d\mathcal{P} - \int_X h \cdot g \leq \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2 \Rightarrow \left| \int_X h \, d\mathcal{P} - \int_X h \cdot g \right| \leq \frac{1}{4}.$$

□

**Observação 3.6.** *Devida a importância desse teorema, bem como a complexidade de sua demonstração, buscamos contribuir explicitando as implicações de forma clara, passo a passo os conceitos e os resultados utilizados.*

### 3.3 Exemplos e Extensões dos Resultados

**Exemplo 3.2.** Considere a função  $f$ , cujo gráfico está representado na Figura 33:

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto f(x) = 4(x - x^2) \end{aligned}$$

Calcularemos os  $\alpha$ -níveis e o valor da integral fuzzy de  $f$  em relação a medida usual  $g$ , compararemos o valor absoluto da diferença entre as integrais fuzzy e de Lebesgue dessa função.

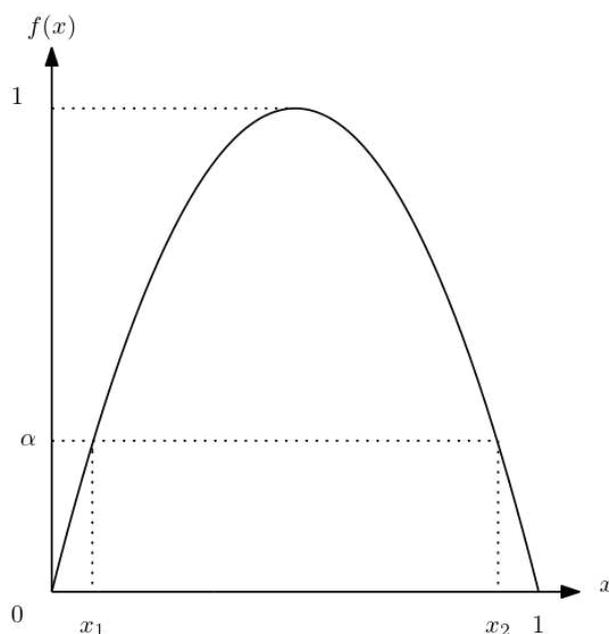


Figura 33 – Gráfico da função  $f(x) = 4(x - x^2)$ .

$$\alpha\text{-níveis} \Rightarrow 4x - 4x^2 = \alpha, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2}, x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2}$$

$$F_\alpha = \{x \in [0, 1] : f(x) \geq \alpha\} = [x_1, x_2]$$

$$g(F_\alpha) = x_2 - x_1 = \sqrt{1-\alpha} \quad (g \text{ medida usual em } \mathbb{R})$$

$$\int f \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$$

$$\alpha \wedge g(F_\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \leq g(F_\alpha) = \sqrt{1-\alpha} \\ g(F_\alpha) & \text{se } \alpha > g(F_\alpha) = \sqrt{1-\alpha} \end{cases}$$

$$\alpha = g(F_\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{1-\alpha} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\alpha \wedge g(F_\alpha)$  assume valor máximo se somente se  $\alpha = g(F_\alpha)$ , temos

$$\int f \cdot g = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Facilmente encontramos que a integral de Lebesgue para essa função é  $\frac{2}{3}$ , e a diferença em valor absoluto entre as integrais verificamos que não supera  $\frac{1}{4}$ .

**Exemplo 3.3.** Seja  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com

- $a < 0$
- $f'(x) = 2ax + b$  e  $f'(x) = 0$  para  $\frac{-b}{2a}$
- $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = 1 \Rightarrow a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 1 \Rightarrow b^2 - 2b^2 + 4ac = 4a \Rightarrow$   

$$4a = 4ac - b^2 \tag{3.42}$$

- $\alpha$  -níveis

$$ax^2 + bx + c = \alpha \Rightarrow ax^2 + bx + (c - \alpha) = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \Delta = b^2 - 4a(c - \alpha)$$

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{-a}$$

Temos  $\alpha = |x_1 - x_2|$ , logo

$$\alpha = -\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\Delta}{a^2} \Rightarrow a^2\alpha^2 = \Delta \Rightarrow a^2\alpha^2 = b^2 - 4a(c - \alpha)$$

$$\Rightarrow a^2\alpha^2 + 4a(c - \alpha) - b^2 = 0 \Rightarrow a^2\alpha^2 - 4a\alpha + \underbrace{4ac - b^2}_{\text{por (3.42)}} = 0$$

$$\Rightarrow a^2\alpha^2 - 4a\alpha + 4a = 0 \Rightarrow a\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16a}}{2a}$$

$$= \frac{4 \pm 4\sqrt{1 - a}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - a}}{a}$$

Como  $\alpha \in [0, 1]$  temos  $\alpha = \frac{2}{a} - \frac{2\sqrt{1 - a}}{a}$ . No exemplo anterior  $a = -4$ , logo

$\alpha = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ , resultado da integral fuzzy do exemplo anterior.

A integral fuzzy de  $f$  independe dos valores  $b$  e  $c$ , ou seja,

$$\int f \cdot g = \frac{2 - 2\sqrt{1 - a}}{a}.$$

**Teorema 3.12. (Ponto Fixo)** Seja  $h : X \rightarrow [0, 1]$  uma função grau de pertinência de um conjunto fuzzy e  $g$  uma medida fuzzy sobre  $X$ . Se,

$$F_\alpha = \{x \in X : h(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

e

$$\begin{aligned} H : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ \alpha &\mapsto H(\alpha) = g(F_\alpha) \end{aligned}$$

tiver um ponto fixo  $\bar{\alpha} \in [0, 1]$ , ou seja,

$$H(\bar{\alpha}) = g(F_{\bar{\alpha}}) = \bar{\alpha},$$

então,

$$\int h \cdot g = \bar{\alpha}.$$

*Demonstração.*

$$\int h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0, \bar{\alpha}]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \vee \sup_{\alpha \in (\bar{\alpha}, 1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \quad (3.43)$$

$g(F_\alpha)$  é não crescente

- se  $\sup_{(\bar{\alpha}, 1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] > \sup_{[0, \bar{\alpha}]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)]$ , então pelo Corolário 3.1, temos

$$\int h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0, \bar{\alpha}]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] = \bar{\alpha}$$

- caso contrário

$$\int h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0, \bar{\alpha}]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \geq \bar{\alpha} \wedge g(F_{\bar{\alpha}}). \quad (3.44)$$

Mas

$$\alpha \in [0, \bar{\alpha}] \Rightarrow \alpha \wedge g(F_\alpha) \leq \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha \wedge g(F_\alpha) \leq \bar{\alpha} \wedge \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \wedge g(F_{\bar{\alpha}}) \Rightarrow$$

$$\sup_{\alpha \in [0, \bar{\alpha}]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \leq \bar{\alpha} \wedge g(F_{\bar{\alpha}})$$

o que resulta em

$$\int h \cdot g \leq \bar{\alpha} \wedge g(F_{\bar{\alpha}}). \quad (3.45)$$

De (3.44) e (3.45) conclui-se

$$\int h \cdot g = \bar{\alpha}.$$

□

**Teorema 3.13.** *Seja  $(X, \mathcal{B}, g)$  um espaço fuzzy,*

$$h : X \rightarrow [0, 1], \quad F_\alpha = \{x \in X : h(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Se

$$\int_X h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] = M.$$

Então,  $M$  é o lado do maior quadrado sob o gráfico:

$$G = \{(\alpha, g(F_\alpha)) : \alpha \in [0, 1]\}.$$

*Demonstração.* Pela condição **c)** da Definição 2.13, se  $F_n \in \mathcal{F}$  (família monótona) e  $\{F_n\}$  é uma sequência monótona, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(F_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n\right),$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{M-\frac{1}{n}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{M-\frac{1}{n}} = F_M,$$

concluindo que

$$g(F_{M-}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(F_{M-\frac{1}{n}}\right) = g(F_M).$$

Note que

$$g(F_{M+}) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{M+\frac{1}{n}}\right) \neq g(F_M),$$

pois  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{M+\frac{1}{n}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{M+\frac{1}{n}} \neq F_M$ . Mostraremos que  $M \in [g(F_{M+}), g(F_M)]$ . De fato,

$$M = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)],$$

e se  $M > g(F_M)$ , existirá  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $g(F_M) < k$ , o que é absurdo pelo fato de  $M$  ser supremo de  $\alpha \wedge g(F_\alpha)$ . Logo  $g(F_M) \geq M$  e conseqüentemente  $M$  é o lado de maior quadrado subscrito ao gráfico de  $g(F)$ .

Supondo que a condição **c)** da Definição 2.13 não fosse verificada, então

$$M < \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(F_{M-\frac{1}{n}}\right) = g(F_{M-}).$$

Nesse caso diremos que  $M$  é o lado de maior quadrado subscrito no fecho do gráfico de  $g(F)$ .

□

**Exemplo 3.4.** Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x - 1 & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

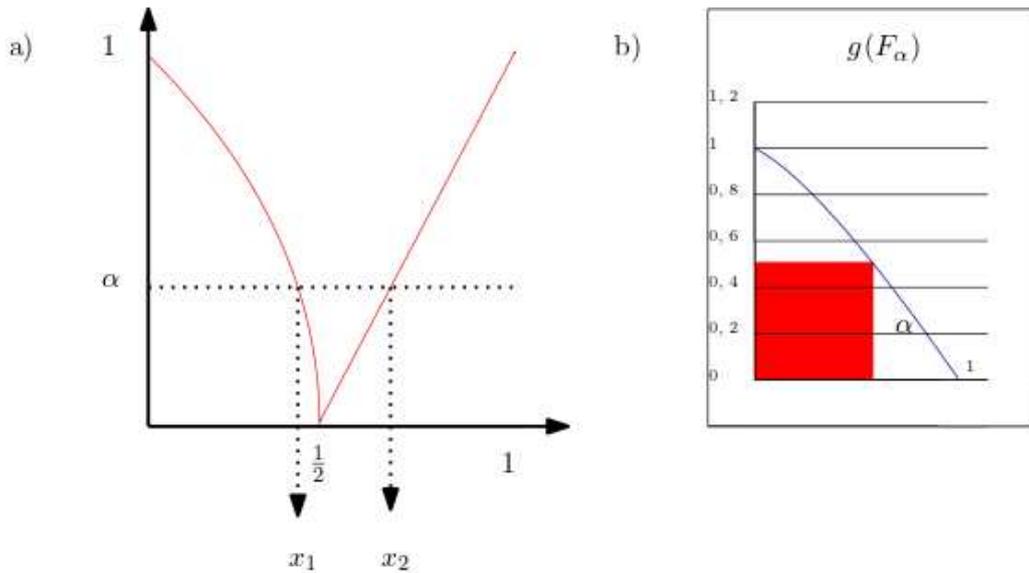


Figura 34 – Representações das funções  $f$  e  $g$ .

Note que

$$x_1 = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2}, \quad x_2 = \frac{\alpha+1}{2}.$$

Logo,

$$g(F_\alpha) = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2} + \left(1 - \frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Assim,

$$g(F_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{9}.$$

Daí,

$$\int f(x)dx = \frac{7}{12} \quad \int f(x)dx = \frac{5}{9}$$

$$\left| \int f(x)dx - \int f(x)dx \right| \leq \frac{1}{4}$$

O valor absoluto da diferença entre as integrais é menor que  $\frac{1}{4}$ , e a integral representa o lado do maior quadrado subscrito no gráfico da medida (veja Figura 34).

**Exemplo 3.5.** Considere o conjunto fuzzy e o  $\alpha$ -nível, representados na Figura 35.

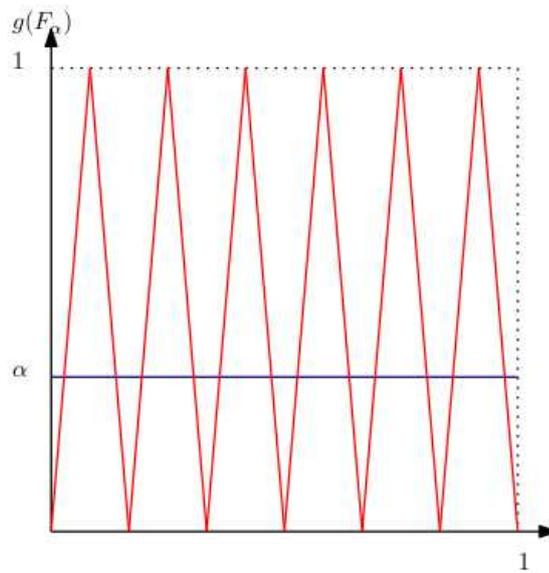


Figura 35 – Representação de conjuntos fuzzy e  $\alpha$ -nível.

Na Figura 36 está representada um número fuzzy triangular cujo suporte mede  $\frac{1}{6}$ , relacionando a medida da altura  $\alpha$  com a respectiva medida da seção  $x$ .

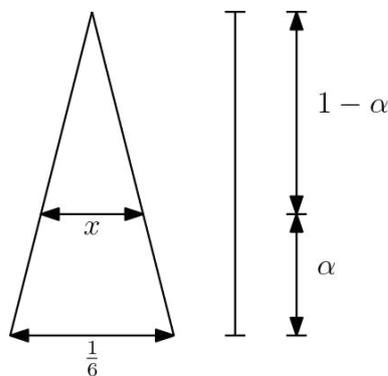


Figura 36 – Representação de um subconjunto fuzzy.

$$\frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{1 - \alpha}{1} \Rightarrow g(F_\alpha) = (1 - \alpha) \Rightarrow \alpha(\text{ponto fixo}) = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\int h \cdot g = \frac{1}{2}$$

O gráfico da função  $g(F)$  dada por:  $g(F) = \{(\alpha, g(F_\alpha)), \alpha \in [0, 1]\}$ ,

$$\begin{aligned} g(F) : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ \alpha &\mapsto g(F_\alpha) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

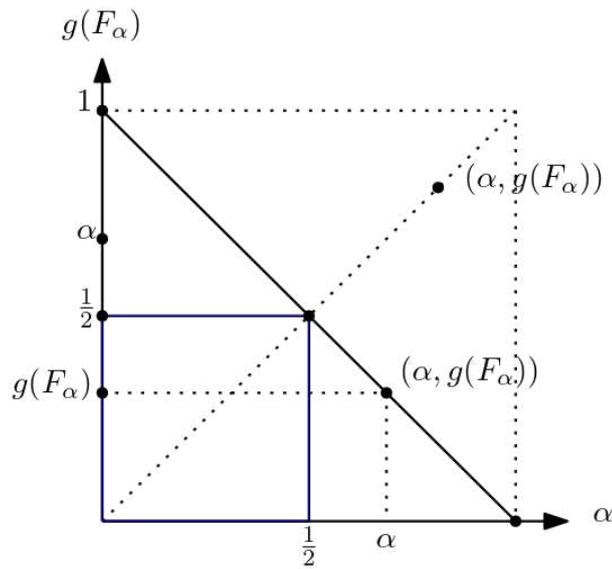


Figura 37 – Quadrado inserido no sub-gráfico de  $g(F_\alpha)$ .

Observe na Figura 37 que a integral fuzzy representa o lado do maior quadrado inserido no sub-gráfico de  $g(F)$ , e que o valor da integral de Lebesgue coincide com o da fuzzy.

**Exemplo 3.6.** Considere a função:

$$h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Na Figura 38 representamos os gráficos das funções  $h$  e da medida  $g$ .

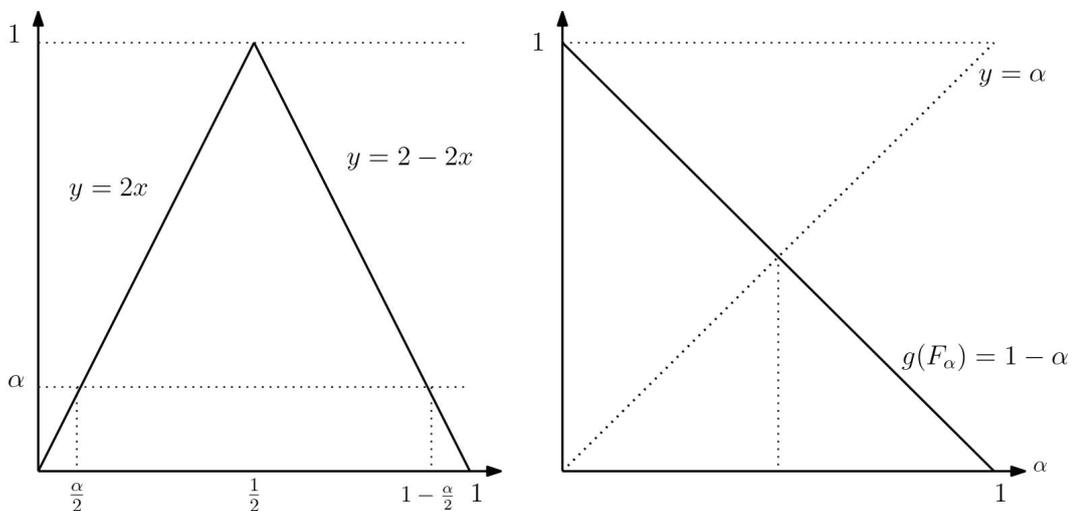


Figura 38 – Representações das funções  $h$  e  $g(F_\alpha)$ .

$$g(F_\alpha) = (1 - \alpha)$$

$$\int h \cdot g = \frac{1}{2}$$

As integrais fuzzy e de Lebesgue possuem o mesmo valor.

**Exemplo 3.7.** Consideremos as funções  $h(x)$  definidas em (i), (ii) e (iii): construiremos os gráficos de  $h(x)$  e  $g(F_\alpha)$ , representaremos o quadrado de maior lado subscrito em  $g(F_\alpha)$ , calcularemos as integrais fuzzy e de Lebesgue para  $h(x)$ , e estabeleceremos as comparações entre seus valores.

i)  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

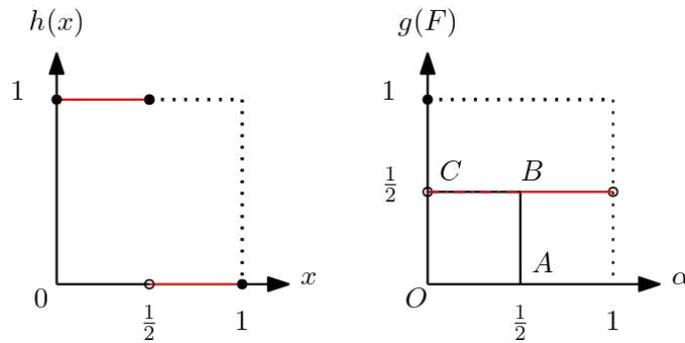


Figura 39 – Função  $h$  e função medida dos  $\alpha$ -níveis  $g(F_\alpha)$ , para (i).

$$\int_{fuzzy} h \cdot g = \frac{1}{2} \quad \int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{2} \quad \int_{[0,1]} h dg = \frac{1}{2}$$

*Riemann* *Lebesgue*

Na Figura 39 temos a representação da função  $h$  e o lado do maior quadrado subscrito cuja medida é  $\frac{1}{2}$ , e tem vértices em  $OABC$ .

O valor absoluto da diferença entre as integrais é zero.

ii) Para  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

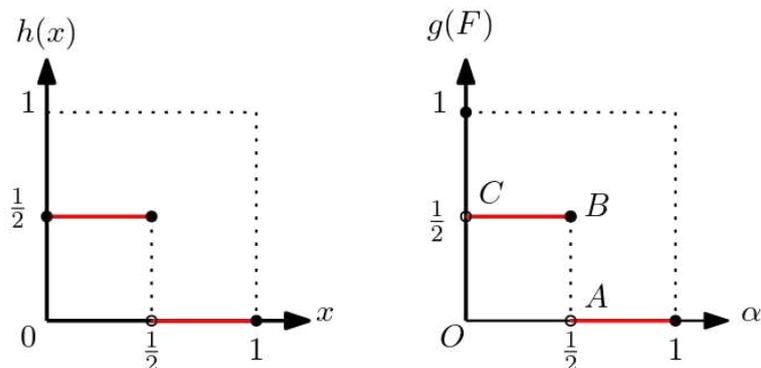


Figura 40 – Função  $h$  e função medida dos  $\alpha$ -níveis  $g(F_\alpha)$ , para (ii).

$$\int_{fuzzy} h \cdot g = \frac{1}{2} \quad \int_o^1 h(x)dx = \frac{1}{4} \quad \int h dg = \frac{1}{4}$$

*Riemann*                      *Lebesgue*

Na Figura 40 temos a representação da função  $h$  e o lado do maior quadrado subscrito cuja medida é  $\frac{1}{2}$  com vértices em  $OABC$

O valor absoluto da diferença entre as integrais é  $\frac{1}{4}$

iii) Para  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{se } x \in \left[0; \frac{3}{5}\right] \\ 1 & \text{se } x \in \left(\frac{3}{5}; 1\right] \end{cases}$$

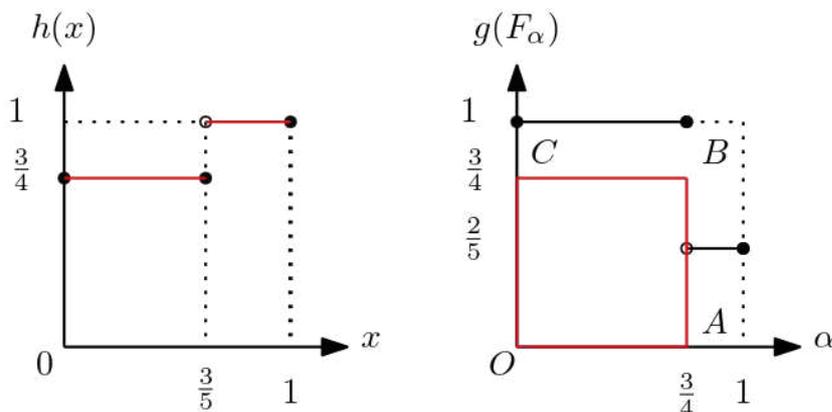


Figura 41 – Função  $h$  e função medida dos  $\alpha$ -níveis  $g(F_\alpha)$ , para (iii).

$$\int_{\text{fuzzy}} h \cdot g = \frac{3}{4} \quad \int_o^1 h(x)dx = \frac{17}{20} \quad \int_{[0,1]} h dg = \frac{17}{20}$$

*Riemann* *Lebesgue*

Na Figura 41 está representado o gráfico da função  $h$  em que o lado do maior quadrado subscrito mede  $\frac{3}{4}$ , com vértices em  $OABC$

O valor absoluto da diferença entre as integrais é  $\frac{1}{10}$

**Teorema 3.14. (Convergência da Integral Fuzzy sobre os Reais)**

Consideremos

- $h : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  for contínua e sobrejetora
- $g$  a medida usual sobre  $\mathcal{F}$  (família monótona sobre  $\mathbb{R}$ )
- $F_\alpha = \{x \in [a, b] : h(x) \geq \alpha\}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$
- $\gamma_n$ , partições de  $[a, b]$  com

$$\gamma_n : a = a_1^{(n)} \leq a_2^{(n)} \leq a_3^{(n)} \dots \leq a_{k-1}^{(n)} \leq a_k^{(n)} \dots \leq a_{n-1}^{(n)} \leq a_n^{(n)} = b,$$

onde

$$\Delta_k^{(n)} = |a_{k+1}^{(n)} - a_k^{(n)}|, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \|\gamma_n\| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta_k^{(n)}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n\| = 0$$

•

$$f_n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto f_n(x) = h(\xi_k^{(n)}) \quad \text{função escada}$$

onde para  $x \in [a_{k-1}^{(n)}, a_k^{(n)}]$  escolhemos  $\xi_k^{(n)} \in (a_{k-1}^{(n)}, a_k^{(n)})$ ,  $\xi_k^{(n)}$  qualquer valor fixado.

Então,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \cdot g = \int h \cdot g$$

*Demonstração.* Suponha que

$$\int h \cdot g = M = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)],$$

$$\int f_n \cdot g = M_n = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha^{(n)})], \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$F_\alpha^{(n)} = \{x \in [a, b] : f_n(x) \geq \alpha\}.$$

Mostraremos que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \cdot g = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = M = \int h \cdot g.$$

Sejam,  $\alpha \in [0, 1]$  e  $\xi = \frac{1}{n}$  valores arbitrário, tais que  $(\alpha - \xi) \in [0, 1]$  ou  $(\alpha + \xi) \in [0, 1]$ ,  $h$  é contínua e sobrejetora, logo para cada valor de  $\xi > 0$  existem  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_k^{(n)}$ ,  $\xi_k^{(n)}$ , tal que para  $n > n_0$

$$\alpha_k^{(n)} = f_n \left( \xi_k^{(n)} \right) \in (\alpha - \xi, \alpha)$$

com

$$\xi_k^{(n)} \in \left( a_k^{(n)}, a_{k+1}^{(n)} \right).$$

Sendo  $\alpha_k^{(n)} < \alpha$  teremos

$$F_\alpha \subset F_{\alpha_k}^{(n)} \Rightarrow \{F_{\alpha_k}^{(n)}\}$$

é uma sequência monótona não crescente de conjuntos em relação a  $n$ , com  $F_\alpha$  contido em cada elemento da sequência.

Por hipótese  $\mathcal{F}$  é uma família monótona e  $f_n$  converge para  $f$  assim,

$$F_{\alpha_k}^{(n)} \rightarrow F_\alpha, \quad \text{para } n \rightarrow +\infty$$

$g$  é uma medida fuzzy e  $\alpha_k^{(n)}$  converge para  $\alpha$ , quando  $n$  tende ao infinito, logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g \left( F_{\alpha_k}^{(n)} \right) = g \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\alpha_k}^{(n)} \right) = g \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} F_\alpha \right) = g(F_\alpha). \quad (3.46)$$

Concluindo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \cdot g &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha^{(n)})] \right\} \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} [\alpha \wedge g(F_\alpha^{(n)})] \right\} \\ &\stackrel{(3.46)}{=} \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha)] \\ &= \int h \cdot g \end{aligned}$$

□

A hipótese  $(\alpha + \epsilon) \in [0, 1]$ , foi considerada para não excluir a possibilidade de  $\alpha$  ser zero. Nesse caso a demonstração será similar, considerando a sequência  $F_k^{(n)}$  sendo monótona não decrescente.

### 3.4 Integral Fuzzy geral ou generalizada, com medidas diversas

Justificamos a importância em proceder uma classificação entre integrais fuzzy e fuzzy generalizada pela exigência da continuidade lateral para a medida fuzzy. É fato que diante da referida exigência alguns resultados obtidos para a primeira integral não

necessariamente se confirmem para o segunda. Por exemplo, para demonstrar que na comparação entre o valor absoluto da diferença entre as Integral de Lebesgue e a *fuzzy* valor não supera a  $\frac{1}{4}$ , foi utilizado o Teorema 3.9 que por sua vez depende da condição complementar estabelecida na medida *fuzzy*, também ao se interpretar geometricamente a integral generalizada foi necessário uma pequena adaptação (tomar o fecho do gráfico) para concluir a devida interpretação. Ressaltamos ainda que embora não faça parte do contexto desse trabalho, na continuidade dos estudos realizados por Sugeno foi utilizada medida *fuzzy* (com uso da hipótese complementar) para subsidiar a construção de medida condicional *fuzzy* com desdobramentos em conceitos vinculados a probabilidades e aplicações. Por outro lado, Bassanesi e Greco Bassanezi e Greco (1988) obtiveram importantes e destacados resultados somente considerando as hipóteses da medida *fuzzy geral*, como os teoremas do tipo da representação de Riesz para funcionais *fuzzy*. Todos os conteúdos dos capítulos 5 e 6, desse trabalho, necessitam somente da medida generalizada.

Nesse contexto definimos a integral *fuzzy* sobre medida *fuzzy* (Sugeno), e obviamente seu cálculo fará sentido ao se considerar medidas *fuzzy*. No entanto estendemos a definição anterior ao utilizar na definição da Integral de Sugeno a Medida Fuzzy Geral (MFG) gerando a integral *fuzzy* Geral. Por exemplo a medida de possibilidade é MFG, podendo então ser calculada sua integral generalizada, mas não a de Sugeno. Vimos pela Proposição 2.13 que se a  $\sigma$ -álgebra for finita a medida de possibilidade será também *fuzzy*, podendo nesse caso calcular sua integral *fuzzy*. Toda medida de probabilidade é *fuzzy*.

Essa extensão se faz simplesmente ao se destacar o tipo de medida a ser considerada, as notações permanecem, porém as propriedades não serão necessariamente as mesmas.

Resultados sobre medidas foram obtidos no Capítulo 2 e permitem elaborar o seguinte diagrama:

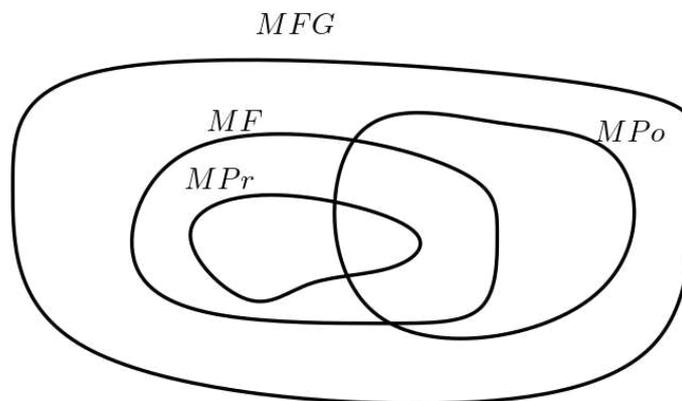


Figura 42 – Diagrama de representação de medidas.

As simbologias no diagrama da Figura 42 representam:

**MFG:** Medida *Fuzzy* Geral.

**MF:** Medida *Fuzzy*.

**MPo:** Medida de Possibilidade (inclusas as definidas sobre as  $\sigma$ -álgebras finitas).

**MPr:** Medida de Probabilidade.

e para as esperanças clássica e *fuzzy* da variável aleatória  $X$  são, respectivamente, representadas por:

**E(X):** Esperança clássica da variável aleatória  $X$ .

**EF(X):** Esperança *Fuzzy* da variável aleatória  $X$ .

Consideramos como objetivo desenvolver através de exemplos, estudos das integrais com várias medidas estabelecendo comparações para os casos:

- a) Integral *fuzzy* com medidas de possibilidades que sejam *fuzzy* (MF).
- b) Integral *fuzzy* geral para qualquer medida de possibilidade.
- c) Integrais *fuzzy* com medidas de probabilidade obtendo as esperanças clássicas e *fuzzy*.
- d) Em que medida de possibilidade é definida sobre uma  $\sigma$ -álgebra não finita, mostrando que a integral *fuzzy* generalizada não satisfaz necessariamente o Teorema 3.13, qual seja, o valor da Integral não será necessariamente a medida do lado do maior quadrado inserido no sub-gráfico de  $\Pi(F_\alpha)$ , embora como já explicitamos um pequeno ajuste seja suficiente para uma interpretação geométrica.
- e) Integrais com diversas medidas.

Considerando:

**Caso a)** A integral *fuzzy* com medida de possibilidade, assim  $\sigma$ -álgebra sobre o espaço deverá ser finita.

- $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A} \subset 2^X$ , uma  $\sigma$ -álgebra finita.
- $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ , distribuição de possibilidade
- $\Pi_\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  medida de possibilidade *fuzzy*
- $h : X \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação,  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$F_\alpha = \{x \in X : h(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Desejamos calcular:

$$\int h \cdot \Pi_\varphi.$$

Assim,

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{x \in F_\alpha} [\varphi(x)]]$$

Assumiremos que  $h$ , representada graficamente pela Figura 43 possui valor máximo em  $x_0$  e que a distribuição  $\varphi(x)$  seja constante e igual a 1, obtendo

$$F_\alpha = \emptyset \text{ e } \Pi_\varphi(F_\alpha) = 0$$

para  $\alpha \geq h(x_0)$ .

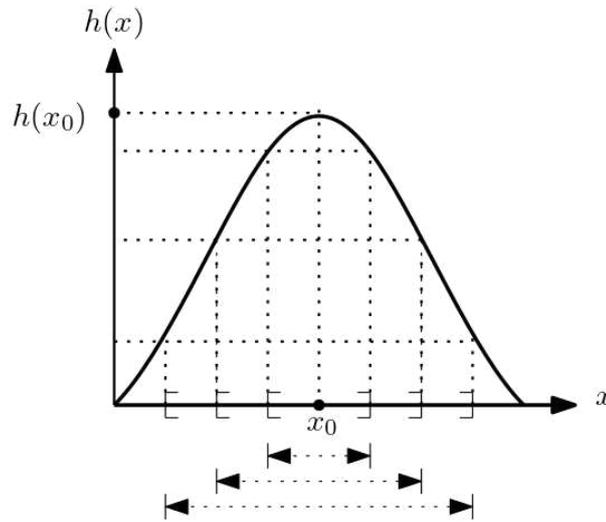


Figura 43 – Sequência de  $\alpha$ -níveis para a função  $\Pi_\varphi$  de possibilidade.

Logo,

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0, h(x_0)]} [\alpha \wedge \Pi_\alpha(F_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0, h(x_0)]} [\alpha \wedge 1] = h(x_0) = \sup_{x \in X} \{h(x)\}.$$

**Caso b)** Assumindo que  $\varphi$  seja uma distribuição qualquer, porém o máximo de  $h(x)$  e o supremo de  $\varphi(x)$  ocorrem em  $x_0$ , novamente

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{x \in F_\alpha} [\varphi(x)]]$$

$$F_\alpha = \emptyset \text{ e } \Pi_\varphi(F_\alpha) = 0$$

para  $\alpha \geq h(x_0)$ . Logo,

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0, h(x_0)]} [\alpha \wedge 1] = h(x_0) = \sup_{x \in X} \{h(x)\}.$$

**Caso c)** Integral *fuzzy* com medida de probabilidade e as esperanças clássicas e *fuzzy*.

Pretendemos estabelecer a comparação entre as esperanças clássica e *fuzzy*. Consideremos,

- $\Omega \neq \emptyset$  um espaço qualquer (amostral)

- $\mathcal{P} : \mathcal{F} \subset 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$   
 $A \mapsto \mathcal{P}(A)$

onde  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra (espaço de eventos).

Considere uma distribuição de probabilidade dada por  $X : \Omega \rightarrow [0, 1]$  (variável aleatória) então

$$\int X \cdot \mathcal{P} = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mathcal{P}(F_\alpha)],$$

onde  $F_\alpha = \{x \in \Omega : X(x) \geq \alpha\}$ . Assim,

$$\mathcal{P}(F_\alpha) = \mathcal{P}(\{x \in \Omega : X(x) \geq \alpha\}) = \mathcal{P}(X \geq \alpha).$$

Consequentemente

$$\int X \cdot \mathcal{P} = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mathcal{P}(X \geq \alpha)]$$

Essa é a esperança *fuzzy* para a variável aleatória considerada.

A esperança clássica da variável aleatória  $X$  é dada pela integral de Lebesgue:

$$E(X) = \int X d\mathcal{P},$$

enquanto a esperança *fuzzy* sobre essa mesma variável  $X$ , é:

$$E_F(X) = \int X \cdot \mathcal{P}.$$

Pelo Teorema 3.11 tem-se

$$|E(X) - E_F(X)| \leq \frac{1}{4}.$$

**Caso d)** Em geral medida de possibilidade é utilizada no cálculo da integral *fuzzy* generalizada, e não necessariamente irá satisfazer o Teorema 3.13, ou seja, o valor da integral *fuzzy* geral não será sempre a medida do lado do maior quadrado inserido no sub-gráfico de  $\Pi_\varphi(F_\alpha)$ , porém essa questão é resolvida facilmente considerando apenas uma observação.

Seja

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)]$$

onde

- $\varphi : X \rightarrow [0, 1], X \neq \emptyset$  (distribuição de possibilidade)
- $\Pi_\varphi : 2^X \rightarrow [0, 1]$  : medida de possibilidade  
 $A \mapsto \Pi_\varphi(A) = \sup_{x \in A} \{\varphi(x)\}.$

Consideraremos  $X = [0, 1]$ ,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -2x + 2, & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{e } h(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

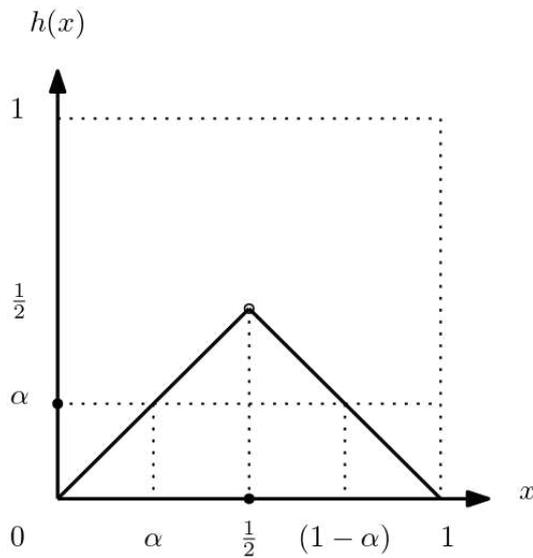


Figura 44 – Representação da função  $h(x)$  (caso d)

A partir da Figura 44, note que:

- para  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $F_\alpha = \left[\alpha, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1 - \alpha\right]$
  - para  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $F_\alpha = \emptyset$
- Logo,
- para  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$   $\Rightarrow \Pi_\varphi(F_\alpha) = \Pi_\varphi\left(\left[\alpha, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1 - \alpha\right]\right) = 1$   
 $\Rightarrow \alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha) = \alpha$
  - para  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $\Pi_\varphi(F_\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha) = 0$ . É claro que  $\Pi_\varphi\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = 0$ ,

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \frac{1}{2}$$

pela definição de integral *fuzzy*

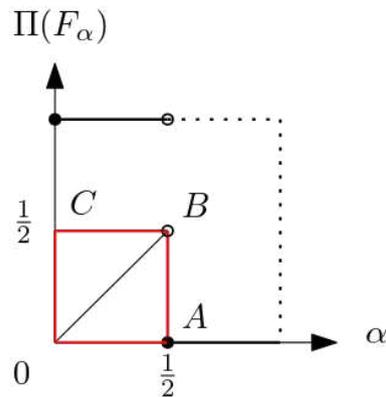


Figura 45 – Função medida de possibilidade  $\Pi_{\varphi}(F_{\alpha})$  (caso d).

**Observação 3.7.** *Esse resultado não é contemplado pelo Teorema 3.13 onde se afirma que a integral fuzzy representa a medida do quadrado de maior lado sob o gráfico de  $\Pi(F_{\alpha})$  pois, observando a Figura 45, o segmento  $\overline{AB}$  não está subscrito no gráfico  $\Pi(F_{\alpha})$ . Porém essa é uma situação construída, não usual, que poderá ser facilmente contornada se simplesmente afirmarmos que a integral fuzzy generalizada representa a medida do lado do maior quadrado inserido no **fecho** do gráfico de  $\Pi(F_{\alpha})$ .*

(Caso e) Integrais com diversas medidas. Seja  $X = [0, 1]$  e considere:

- $g : 2^{[0,1]} \rightarrow [0, 1]$  medida usual
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação.
- $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  (distribuição de possibilidade) com  $\varphi(x) = f(x) \forall x \in [0, 1]$ .
- $\Pi_{\varphi} : 2^{[0,1]} \rightarrow [0, 1]$  a medida de possibilidade (MFG).

As figuras 46, 47 e 48 representam os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , respectivamente, para os casos **i)**, **ii)** e **iii)**. Se

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} : \text{ racionais} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{I} : \text{ irracionais} \end{cases}$$

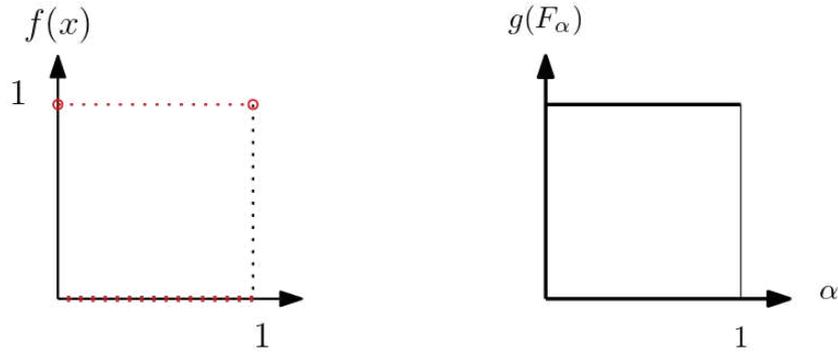


Figura 46 – Representação de  $f(x)$  e  $g(F_\alpha)$  (caso e).

Para  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$F_\alpha = \{x \in [0, 1] : f(x) \geq \alpha\},$$

temos

$$g(F_\alpha) = \Pi(F_\alpha) = 1,$$

logo

$$\int f \cdot g = \int f \cdot \Pi_\varphi = 1$$

ii)  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x, & \text{se } x \in \mathbb{I} \end{cases}$

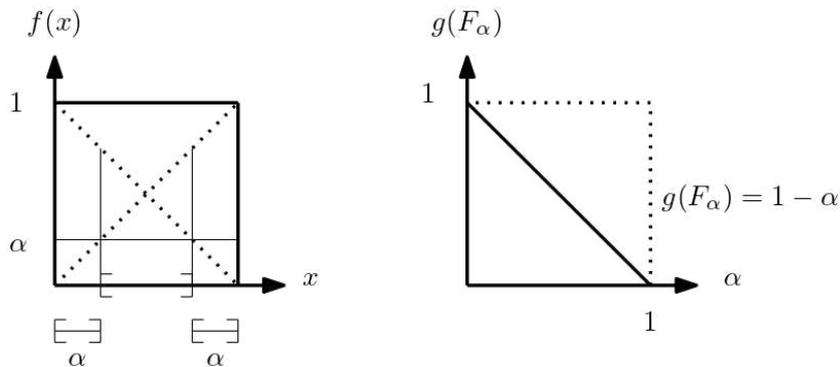


Figura 47 – Representação de  $f(x)$  (item ii).

logo,

$$\int f \cdot g = \frac{1}{2}.$$

Porém,  $\Pi(F_\alpha) = 1$ , qualquer  $\alpha \in [0, 1]$  e então,

$$\int f \cdot \Pi_\varphi = 1$$

iii)  $f(x) = \begin{cases} (2x) \wedge 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2(1 - x) \wedge 1, & \text{se } x \in \mathbb{I} \end{cases}$

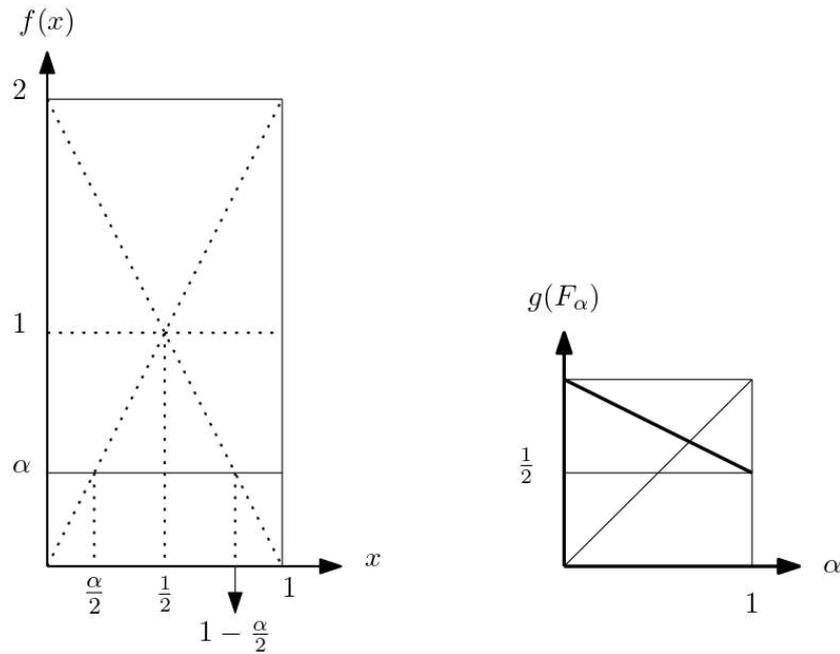


Figura 48 – Representação de  $f(x)$  (item iii).

$$g(F_\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\alpha$$

$$g(F_\alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$\int f \cdot g = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \int f \cdot \Pi_\varphi = 1.$$

Observe que para todas as funções em **i)**, **ii)** e **iii)** definidas, não existem as integrais usuais com a medida usual  $g$ , visto que são descontínuas em um conjunto não enumerável de pontos em  $[0, 1]$ .

### 3.5 Integrais com medida de Possibilidade.

**Teorema 3.15.** (*Integral fuzzy geral com medida de possibilidade*) Considere  $X = [0, 1]$

- $\mathcal{A} \subset 2^{[0,1]}$ , uma  $\sigma$ -álgebra.
- $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , distribuição de possibilidade
- $\Pi_\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  medida de possibilidade fuzzy

- $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação,  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $F_\alpha = \{x \in [0, 1] : h(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ .

então

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{x \in \text{supp } h} [h(x) \wedge \varphi(x)].$$

*Demonstração.* A definição de integral fuzzy é expressa em função dos  $\alpha$ -níveis,  $h(x)$  e da medida, sendo suficiente restringir a análise para  $x \in \text{supp } h$ .

Considere  $z_0 = \varphi(x_0) = \sup_{x \in \text{supp } h} [\varphi(x)]$  e  $y_0 = \sup_{x \in \text{supp } h} [h(x)]$ , podendo ter,

- $y_0 \geq z_0$ , ou
- $y_0 < z_0$

Se  $y_0 \geq z_0$  e  $\alpha \in [0, z_0]$  então  $\Pi_\varphi(F_\alpha) = z_0$  obtendo  $[\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = \alpha$

Se  $y_0 \geq z_0$  e  $\alpha \in (z_0, y_0]$  então  $\Pi_\varphi(F_\alpha) \leq z_0$  obtendo  $[\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = z_0$ .

Obtendo,

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \wedge \Pi_\alpha(F_\alpha)] = \sup_{[0, z_0]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] \vee \sup_{(z_0, y_0]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = z_0 \vee z_0 = z_0. \quad (3.47)$$

Se  $y_0 < z_0$  e  $\alpha \in [0, y_0]$  então  $\Pi_\varphi(F_\alpha) = z_0$  obtendo  $[\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = \alpha$

Se  $y_0 < z_0$  e  $\alpha \in (y_0, z_0]$  então  $\Pi_\varphi(F_\alpha) = 0$  logo  $[\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = 0$ .

Obtendo,

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \wedge \Pi_\alpha(F_\alpha)] = \sup_{[0, y_0]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] \vee \sup_{(y_0, z_0]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = y_0 \vee 0 = y_0. \quad (3.48)$$

Por (3.47) e (3.48), concluímos

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{x \in \text{supp } h} [h(x) \wedge \varphi(x)].$$

A seguir apresentamos as figuras 49, 50 e 51 que ilustram geometricamente os resultados obtidos algebricamente, ou seja, a região destacada representa a área sob a intersecção entre as curvas  $h(x)$ ,  $\varphi(x)$  no suporte  $A$ , e o supremo da função que representa essa intersecção.

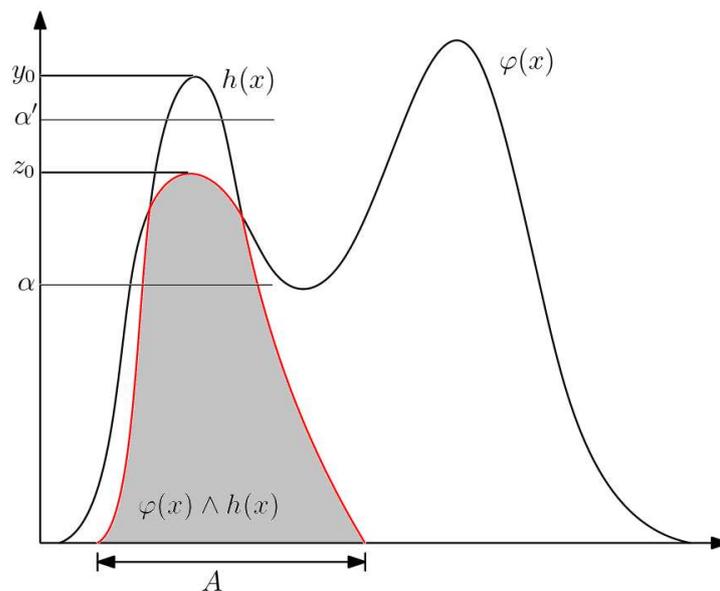


Figura 49 – Representação de  $h(x)$  e  $\varphi(x)$  com  $y_0 \geq z_0, A = \text{supp} [h(x) \wedge \varphi(x)]$

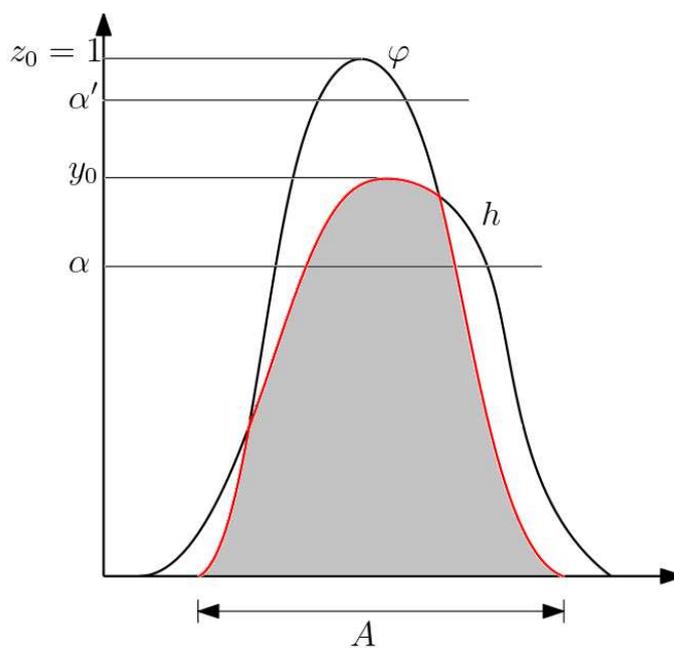


Figura 50 – Representações de  $h(x)$  e  $\varphi(x)$  com  $y_0 < z_0, A = \text{supp} [h(x) \wedge \varphi(x)]$

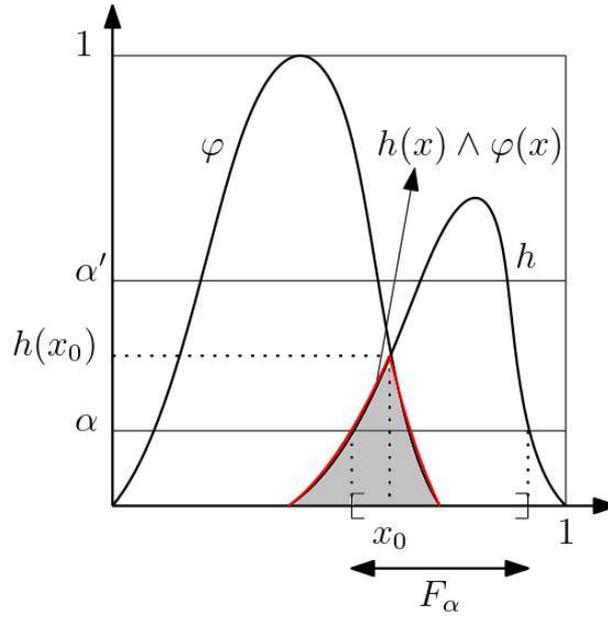


Figura 51 – Representações de  $h(x)$ ,  $\varphi(x)$  com  $y_0 > z_0$  e  $h(x_0) = \varphi(x_0)$

□

**Corolário 3.4.** *Nas condições do Teorema 3.15, temos*

- Se  $h(x) \leq \varphi(x)$ , para  $x \in \text{supp } h$ , então

$$\int h \cdot \Pi_{\varphi} = y_0,$$

onde,

$$y_0 = \sup_{x \in \text{supp } h} [h(x)]$$

- Se  $h(x) \geq \varphi(x)$ , para  $x \in \text{supp } h$ , então

$$\int h \cdot \Pi_{\varphi} = z_0,$$

com

$$z_0 = \sup_{x \in \text{supp } h} [\varphi(x)]$$

- Se  $\text{supp } h(x) \cap \text{supp } \varphi(x) = \emptyset$ , então

$$\int h \cdot \Pi_{\varphi} = 0.$$

*Demonstração.* • Supor  $h(x) \leq \varphi(x)$  (Figura 52), para  $x \in \text{supp } h$ ,

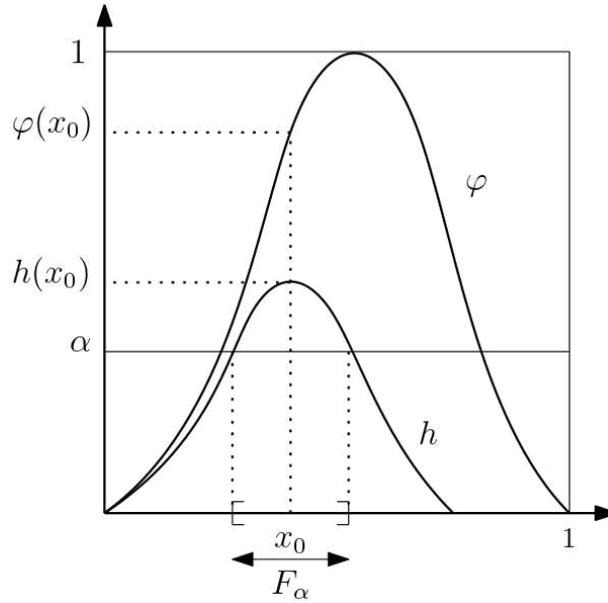


Figura 52 – Representações de  $h, \varphi$  com  $y_0 \leq z_0$ .

Sejam  $z_0 = \varphi(x_0) = \sup_{x \in \text{supp } h} [\varphi(x)]$ ,  $y_0 = \sup_{x \in \text{supp } h} [h(x)]$ .

temos,

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0, h(x_0)]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)]$$

e para  $\alpha \in [0, h(x_0)]$ ,  $\Pi_\sigma(F_\alpha) = \varphi(x_0) \geq \alpha$ , que implica que  $\alpha \wedge \Pi_\varphi = \alpha$ , concluindo que,

$$\sup_{\alpha \in [0, h(x_0)]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = \sup_{\alpha \in [0, h(x_0)]} [\alpha] = h(x_0) = y_0.$$

- Se  $h(x) \geq \varphi(x)$  (Figura 53), para  $x \in \text{supp } h$ ,

$$z_0 = \sup_{x \in \text{supp } h} [\varphi(x)], y_0 = \sup_{x \in \text{supp } h} [h(x)]$$

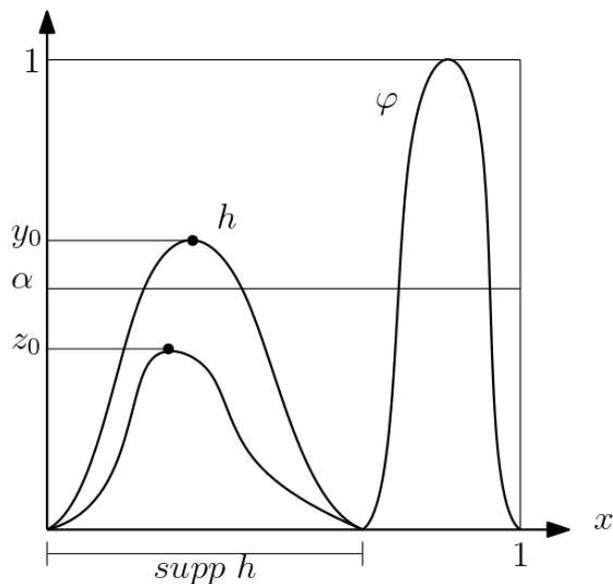


Figura 53 – Representações de  $h$  e  $\varphi$

temos que,

$$\int h \cdot \Pi_\varphi = \sup_{\alpha \in [0, h(x_0)]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)]$$

Para  $\alpha \in [z_0, y_0]$ ,  $\Pi_\sigma(F_\alpha) = z_0 \leq \alpha$ , que implica  $\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha) = z_0$ , e para  $\alpha \in [0, z_0]$ ,  $\Pi_\sigma(F_\alpha) = z_0 \geq \alpha$ , que implica  $\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha) = z_0$  concluindo que,

$$\sup_{\alpha \in [0, h(x_0)]} [\alpha \wedge \Pi_\varphi(F_\alpha)] = z_0.$$

- Se  $\text{supp } h(x) \cap \text{supp } \varphi(x) = \emptyset$  (Figura 54)

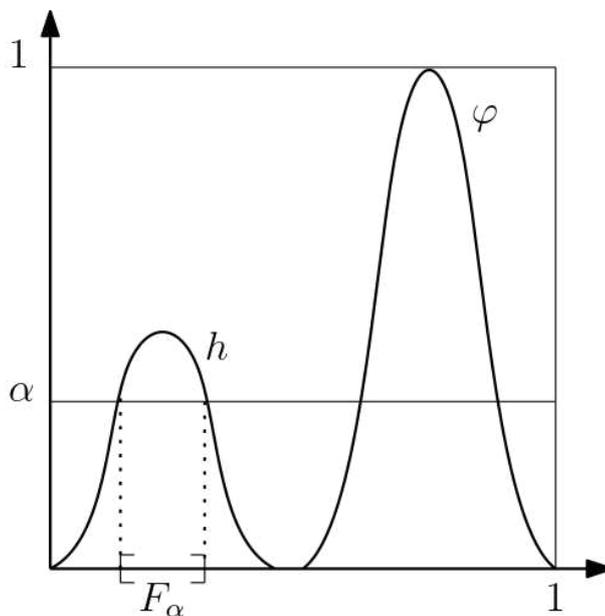


Figura 54 – Gráficos de  $h$  e  $\varphi$ .

para  $\alpha \in [0, h(x_0)]$ ,  $\Pi_\sigma(F_\alpha) = 0$ , de onde se conclui a tese.

□

**Exemplo 3.8.** Considere os triângulos isósceles de base 1u.m. e as alturas  $\alpha_n = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , e  $\{h_n\}$  suas representações através das funções de pertinências,  $\{h_n\}$  sequência monótona crescente (Figura 56). Estabeleceremos comparações entre

- $\int h_n \cdot g$  ( $g$ : medida usual), e
- $\int h_n \cdot \Pi_\varphi$  ( $\Pi_\varphi$ : medida de possibilidade).

A distribuição  $\varphi$  a ser considerada para a medida  $\Pi_\varphi$  será descrita pelo triângulo isósceles de base e altura com medida 1u.m.. Vimos que para qualquer  $n \geq 2$ ,

$$\int h_1 \Pi_\varphi = \frac{1}{2} \text{ (Figura 55), } \int h_2 \Pi_\varphi = \frac{2}{3}, \int h_3 \Pi_\varphi = \frac{3}{4}, \dots, \int h_n \Pi_\varphi = \frac{n-1}{n}$$

pois

$$\sup_{x \in X} \{h_1(x)\} = \frac{1}{2}, \sup_{x \in X} \{h_2(x)\} = \frac{2}{3}, \dots, \sup_{x \in X} \{h_n(x)\} = \frac{n-1}{n}.$$

- $\Pi_\varphi(h_1)$ : gráfico da medida  $\Pi_\varphi$  com o triângulo  $h_1$
- $\Pi_\varphi(h_2)$ : gráfico da medida  $\Pi_\varphi$  com o triângulo  $h_2$
- ⋮
- $\Pi_\varphi(h_n)$ : gráfico da medida  $\Pi_\varphi$  com o triângulo  $h_n$

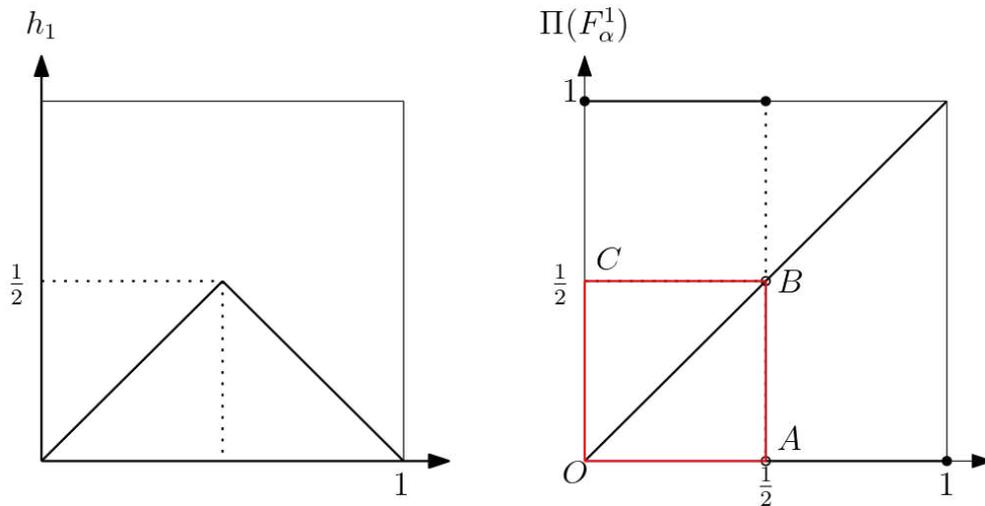


Figura 55 – Gráficos de  $h_1$  e  $\Pi(F_\alpha^1)$ .

$$\int h_1 \Pi_\varphi = \frac{1}{2}$$

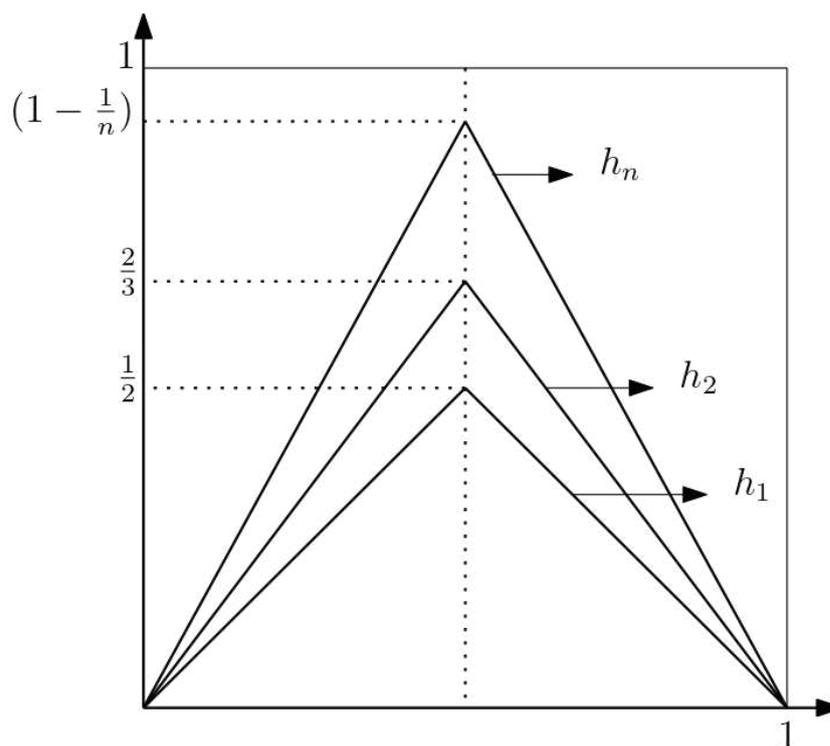


Figura 56 – Representação da sequência de funções  $\{h_n\}$

$$\int h_2 \Pi_\varphi = \frac{2}{3}$$

⋮

A Figura 57 representa os gráficos das medidas de  $\Pi_\varphi$  para  $h_1, h_2, \dots, h_n$ .

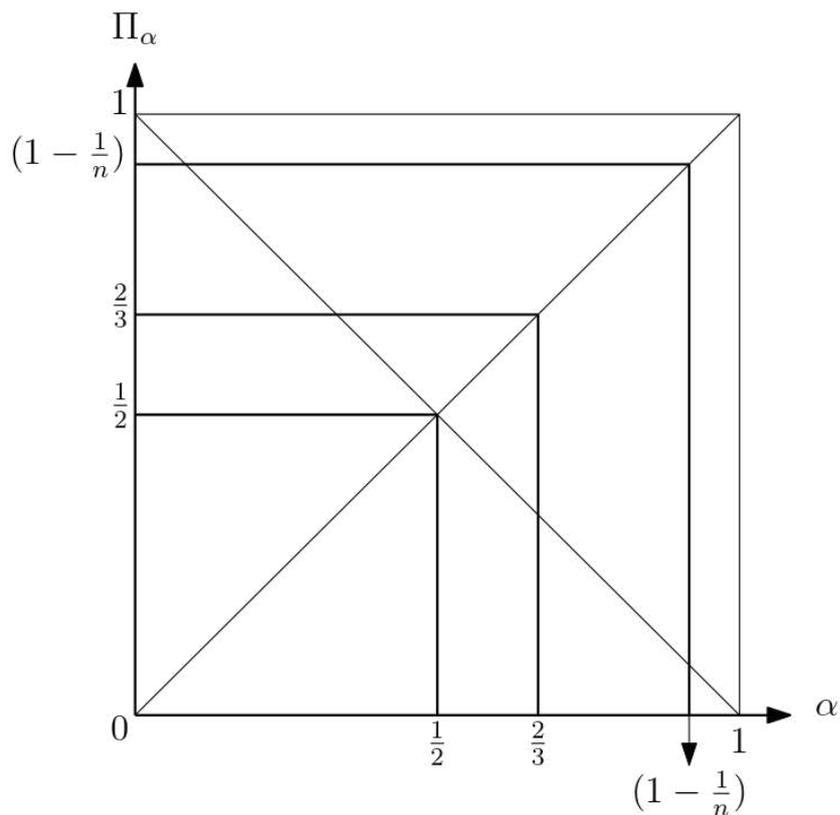


Figura 57 – Gráficos identificando a convergência das integrais com a medida  $\Pi_\varphi$ .

$$\int h_n \Pi_\varphi = \frac{n-1}{n}$$

Obviamente  $h_n \rightarrow h$  (triângulo isósceles de base 1u.m. e altura 1u.m)

$$\int h \Pi_\varphi = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n \Pi_\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1 = \int h \Pi_\varphi.$$

Em relação a medida usual  $g$  teremos:

$$\int h_1 g = \frac{1}{3}$$

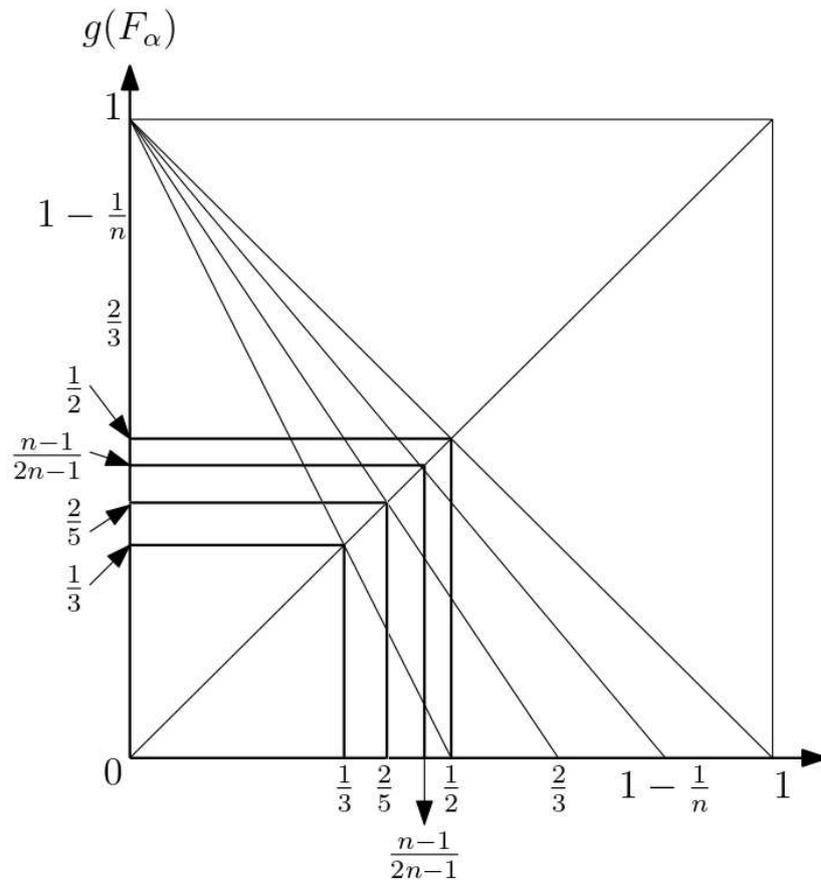


Figura 58 – Gráficos identificando a convergência das integrais com a medida  $g$ .

$$\int h_2 g = \frac{2}{5}$$

⋮

$$\int h_n g = \frac{n-1}{2n-1}$$

Note que  $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$  ( $h$  representa o triângulo isósceles de base  $1u.m$  e altura  $1u.m$ .)

$$\int h g = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n-1} = \frac{1}{2} = \int h g \text{ (Figura 58).}$$

### 3.5.1 Aplicação Sobre Números Fuzzy e Integral Fuzzy Geral com Medida de Possibilidade.

Considere o problema.

Um ônibus desloca-se da cidade de Campinas para São Paulo, a distância total é aproximadamente  $D = 100km$ , a velocidade máxima permitida é  $V = 120km/hora$ . O atraso na partida é no máximo 30 minutos. Qual o tempo  $T$  necessário para a viagem?

Uma intuição inicial é modelar o problema pela equação:

$$S = S_0 + V \cdot t \quad (3.49)$$

onde,  $S$  e  $S_0$  representam, respectivamente, as posições de um objeto nos instantes  $t > 0$  e  $t = 0$ , e  $V$  a velocidade. No entanto essa equação foi deduzida para o Movimento Retilíneo Uniforme (MRU), e considera:

- a trajetória sendo uma reta.
- a aceleração  $a(t) = 0$  em qualquer instante  $t > 0$ .
- a velocidade  $V$  constante.

É importante observar que para o presente caso a equação (3.49) não tem nenhum dos parâmetros necessários bem definidos:

- a velocidade não será constante, pois no trajeto haverá momentos de paradas nos pedágios e diminuirá nas proximidades da cidade de São Paulo onde o tráfego é lento
- a aceleração não poderá ser nula no percurso
- a trajetória não é retilínea.

Assim, para saber o tempo total  $T$  da viagem estamos considerando valores e situações subjetivas.

A teoria fuzzy se ajusta para modelar situações semelhantes, fuzificando as variáveis  $D$ ,  $V$  e o tempo do atraso  $A$ . Eventual consideração determinística, será uma das hipóteses possíveis para o tempo total  $T$  do percurso.

Considerando números fuzzy triangulares para as variáveis  $D$ ,  $V$  e  $A$  definidos por:

$$D = [s, 90, 100, 110], \quad V = [v, 30, 100, 120] \text{ e } A = [t, 0, 0, 1/2],$$

Temos:

$$T = D/V + A = B + A, \text{ com } B = D/V.$$

As funções “grau de pertinência”, e os respectivos gráficos são apresentadas nas figuras 59, 60 e 61.

$$\varphi_D = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 90 \\ \frac{x}{10} - 9 & \text{se } 90 < x \leq 100 \\ 11 - \frac{x}{10} & \text{se } 100 < x \leq 110 \\ 0 & \text{se } x > 110 \end{cases}$$

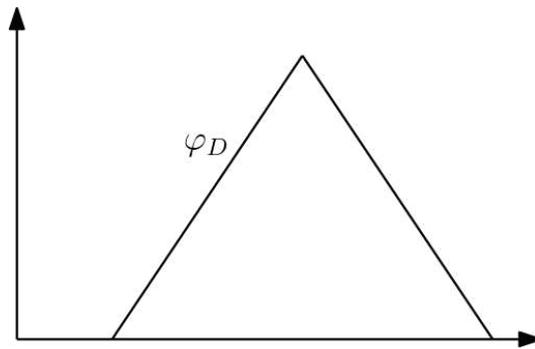


Figura 59 – Função de pertinência da distância.

$$\varphi_V = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 30 \\ \frac{1}{70}(x - 30) & \text{se } 30 < x \leq 100 \\ \frac{1}{20}(120 - x) & \text{se } 100 < x \leq 120 \\ 0 & \text{se } x > 120 \end{cases}$$

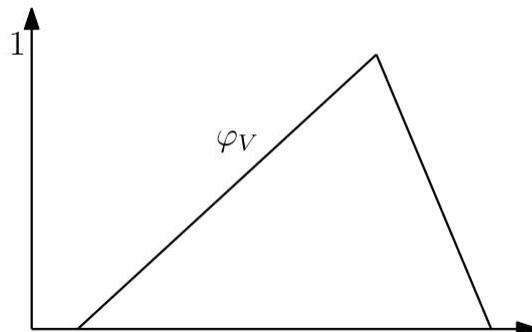


Figura 60 – Função de pertinência da velocidade.

$$\varphi_A = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 < x \leq 0,5 \\ 0 & \text{se } x > 0,5 \end{cases}$$

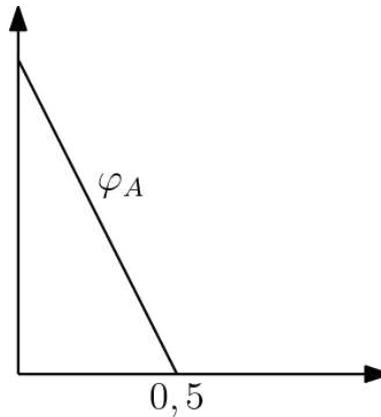


Figura 61 – Função de pertinência do atraso.

O tempo gasto é  $T = A + B$  onde  $A$  é o atraso de partida e  $B$  o tempo de viagem após a partida. Determinaremos o número *fuzzy*  $T$  que representará o tempo do percurso.

1.  $[A]^\alpha = [0, -(0,5)\alpha + 0,5] = \left[0, \frac{1 - \alpha}{2}\right]$
2.  $[B]^\alpha = \frac{[D]^\alpha}{[V]^\alpha} = [10\alpha + 90, 110 - 10\alpha] \left[\frac{1}{120 - 20\alpha}, \frac{1}{70\alpha + 30}\right]$
3.  $[T]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = \left[0, \frac{1 - \alpha}{2}\right] + \left[\frac{10\alpha + 90}{120 - 20\alpha}, \frac{110 - 10\alpha}{70\alpha + 30}\right]$   
 $= \left[\frac{10\alpha + 90}{120 - 20\alpha}, \frac{1 - \alpha}{2} + \frac{110 - 10\alpha}{70\alpha + 30}\right]$

Para  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$  obtemos respectivamente o suporte e o valor máximo de  $T$ .

$$\text{supp } \varphi_T = \left[\frac{3}{4}, \frac{25}{6}\right]$$

A Figura 62 representa o gráfico do número *fuzzy*  $T$ , que evidencia os tempos possíveis para a viagem e seus respectivos graus de pertinência.

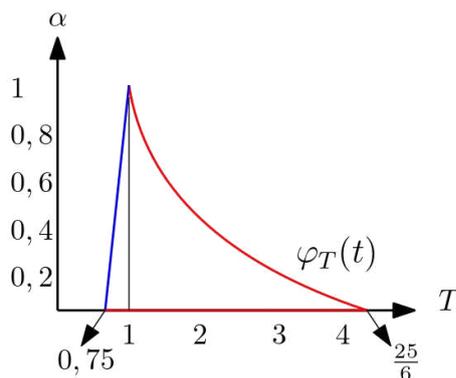


Figura 62 – Função de pertinência do tempo total da viagem  $T$ .

Observe que o tempo da viagem está compreendido entre  $0,75h$  e  $\frac{25}{6}h$ , e que dentro da normalidade o percurso durará aproximadamente uma hora, ainda, que ao variar o tempo no intervalo  $\left[0,75; \frac{25}{6}\right]$  os graus de pertinência irão variando conforme as condições do tráfego e do atraso da saída.

### Integral com medida de possibilidade

Considerando:

- Que a função de pertinência  $\varphi_T$  é a distribuição de possibilidades para o problema da viagem.
- E a afirmação de que a viagem levará em torno de duas horas, traduzida pelo número *fuzzy*  $h$  centrado em 2, dado por  $[t, 2 - \epsilon, 2, 2 + \epsilon]$  com  $\epsilon \in [0, 1]$ .

A pergunta a ser feita:

- Qual a possibilidade da viagem durar 2 horas?

A Figura 63 representa respectivamente os gráficos de  $T$ , e de  $h$  que considera que a viagem dure aproximadamente duas horas.

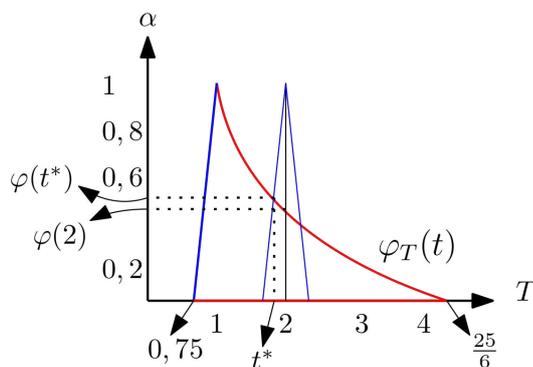


Figura 63 – Função de pertinência do tempo  $T$  e do número *fuzzy*  $h(t)$ .

O Teorema 3.15 mostra que a possibilidade da viagem ser aproximadamente duas horas é dada por  $\int h \cdot \Pi_{\varphi_T}$ , valor esse representado na Figura 63 por  $t^*$ , abcissa do ponto de intersecção entre os gráficos da distribuição  $\varphi_T$  e da função  $h$ . A tradução em linguagem matemática de que o tempo da viagem dure em torno de 2 horas pode ser feita por diversos números *fuzzy*, para o presente caso a escolha foi através da função  $h$  com suporte em  $(2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$ ,  $\epsilon \in [0, 1]$ .

## 4 Derivação e Integração no Cálculo *Fuzzy*

O propósito inicial desse capítulo é apresentar conceitos que subsidiem a construção de um Cálculo Diferencial e Integral *Fuzzy*. Iniciamos procedendo a revisão da relação entre Derivadas e Integrais clássicas para funções reais com uma variável real, através do Teorema Fundamental do Cálculo (clássico). Para trazer esses conceitos e implementar derivação *fuzzy*, as aplicações  $F$  a serem derivadas, estarão definidas nas partes de um conjunto não vazio, com contradomínio no intervalo fechado  $[0, 1]$ . Nesse contexto, dada  $F$ , busca-se uma aplicação  $h$ , de modo que a integral *fuzzy* de  $h$  restrita a  $A$  sob uma medida  $g$ , tenha o valor de  $F(A)$ . Devido as dificuldades em estabelecer esses cálculos a partir da  $F$ , apresentaremos dois exemplos, fazendo o processo inverso ao proposto, partiremos das integrais e estabeleceremos as funções de conjuntos. Esses exemplos serão aproveitados futuramente, após definir derivadas *fuzzy*. As integrais tiveram os cálculos obtidos por meio de argumentos geométricos baseados no Teorema 3.13. Em seguida serão evidenciados os espaços envolvidos, a definição formal de Derivadas *Fuzzy* bem como as condições necessárias e suficientes sobre as funções para obter um Teorema Fundamental do Cálculo *Fuzzy*.

**Teorema 4.1. (Teorema Fundamental do Cálculo)** *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  e  $x \in [a, b]$ ,*

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

*Se  $F$  é a função definida por:*

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt, \end{aligned} \tag{4.1}$$

*então*

$$\frac{dF}{dx} = f(x),$$

*onde*

- *para  $x = a$ ,  $F'_+(a) = f(a)$ ,*
- *para  $x = b$ ,  $F'_-(b) = f(b)$ .*

O teorema poderá ser enunciado reescrevendo  $F$  em (4.1) por

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \int_a^x \frac{dF}{dt}(t)dt. \end{aligned}$$

Assim, a integral é vista como operador inverso da derivada, ou seja, no contexto clássico sendo  $F(x)$  conhecida, calcular sua derivada consistirá em determinar  $h(t)$  tal que,

$$F(x) = \int_a^x h(t)dt.$$

Na teoria *fuzzy* o raciocínio será análogo, a derivada *fuzzy* de uma função deverá ser obtida pela operação inversa da integral *fuzzy*.

Formalizando o conceito de derivada *fuzzy*:

- Dada uma medida *fuzzy*  $g : 2^X \rightarrow [0, 1]$ ,
- Consideremos uma função de conjuntos

$$\begin{aligned} F : \mathbb{B} \subset 2^X &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto y = F(A). \end{aligned}$$

ao determinar uma função

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto h(x) \end{aligned}$$

tal que

$$\forall A \in \mathbb{B} \Rightarrow F(A) = \int_A h \cdot g, \quad (4.2)$$

diremos que  $h$  é a derivada de  $F$  em relação a  $g$  em  $\mathbb{B}$ , passando a ser escrita por,

$$\begin{aligned} h &= \frac{dF}{dg} : X \rightarrow [0, 1], \text{ ou} \\ h &= D_g F : X \rightarrow [0, 1]. \end{aligned}$$

Por (4.2) concluímos que  $F$  deverá ser uma função monótona não decrescente pois:

$$A \subset B \Rightarrow \int_A h \cdot g \leq \int_B h \cdot g \Rightarrow F(A) \leq F(B).$$

A seguir serão apresentados exemplos calculando  $F$  a partir de  $h$ .

**Exemplo 4.1.** *Seja  $(X, \mathcal{B}, g)$  onde:*

- $X = [0, 1]$
- $\mathcal{B} \subset 2^X$
- $g$  a medida usual de  $\mathbb{R}$ ,  $g([a, b]) = b - a$ .

Considere  $B \subset \mathcal{B}$  tal que:

$$B = \{I = [a, b] \text{ intervalo fechado, } a, b \in [0, 1], a \leq b\}$$

$$F : B \rightarrow [0, 1]$$

$$[a, b] \mapsto F([a, b]) = \int_{[a,b]} h \cdot g$$

e

$$\begin{aligned} h : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto h(x) = x. \end{aligned} \quad (\text{Figura 64})$$

Determinaremos  $F$  visando posteriormente exemplificar a definição de derivada fuzzy de modo que  $D_g F = h$

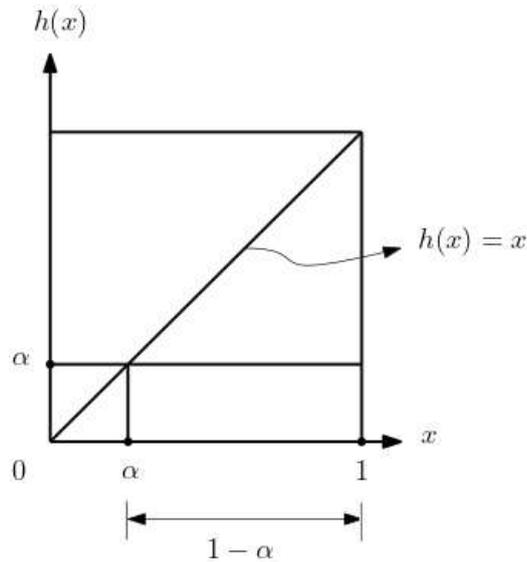


Figura 64 – Representação da função  $h(x)$  (Exemplo 4.1).

Seja  $F_\alpha = \{x : h \geq \alpha\} = [\alpha, 1]$ , logo  $g(F_\alpha) = 1 - \alpha$  (Figura 65).

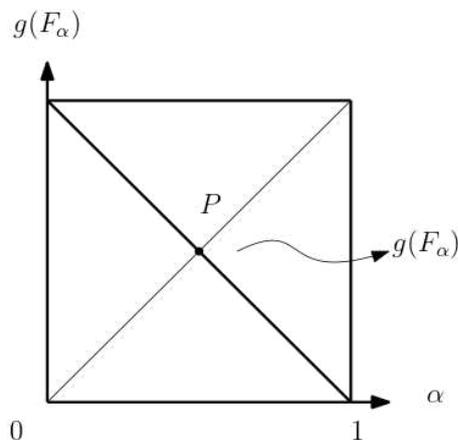


Figura 65 – Representação da função  $g(F_\alpha)$  (Exemplo 4.1).

$P$  é ponto fixo de  $g(F_\alpha)$ , logo

$$\int_{[0,1]} h \cdot g = \frac{1}{2} \Rightarrow F([0, 1]) = \frac{1}{2}.$$

Seja  $[a, b] \in B$  um intervalo qualquer contido em  $[0, 1]$ . Calculando

$$\int_{[a,b]} h \cdot g$$

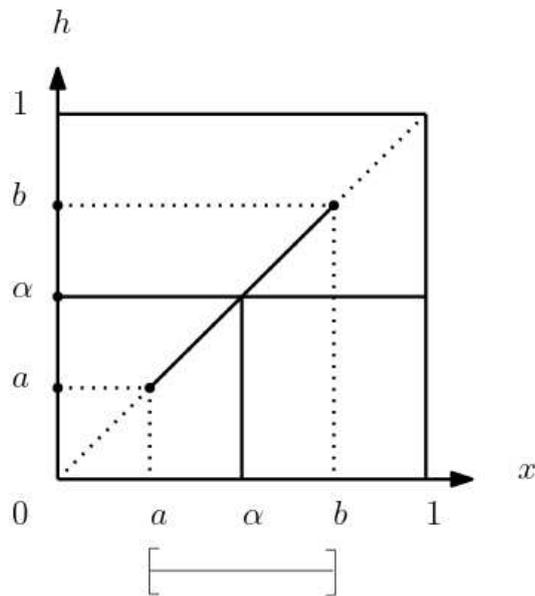


Figura 66 – Função  $g(F_\alpha)$  restrita em  $[a,b]$ .

A Figura 66 mostra a função  $h(x) = x$  restrita ao intervalo  $[a, b]$ , onde:

- se  $\alpha \in [0, a)$ , então  $g(F_\alpha \cap [a, b]) = g([a, b]) = b - a$
- se  $\alpha \in [a, b)$ , então  $g(F_\alpha \cap [a, b]) = g([1 - \alpha, b]) = b - (1 - \alpha) = (b + \alpha) - 1$
- se  $\alpha \in [b, 1)$ , então  $g(F_\alpha \cap [a, b]) = g(\emptyset) = 0$

podemos ter:

- (i)  $b - a < a$

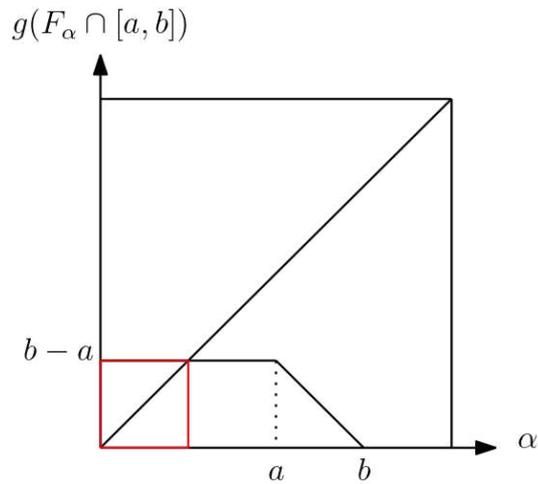


Figura 67 – Gráfico de  $g(F_\alpha \cap [a, b])$ .

A Figura 67 mostra o quadrado de maior lado subscrito ao gráfico de  $g$ . Logo,

$$\int_{[a,b]} h \cdot g = b - a \Rightarrow F([a, b]) = b - a$$

(ii)  $b - a = a$ , ou seja,  $\frac{b}{2} = a$

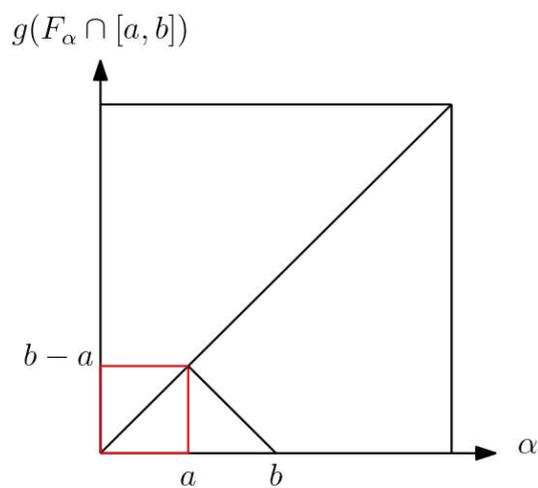


Figura 68 – Gráfico da função  $g$

A Figura 68 mostra o quadrado de maior lado subscrito ao gráfico de  $g$ . Logo,

$$\int_{[a,b]} h \cdot g = \frac{b}{2} \Rightarrow F([a, b]) = \frac{b}{2}$$

(iii)  $b - a > a$ ,  $b - \alpha = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{b}{2} \Rightarrow F([a, b]) = \frac{b}{2}$ .

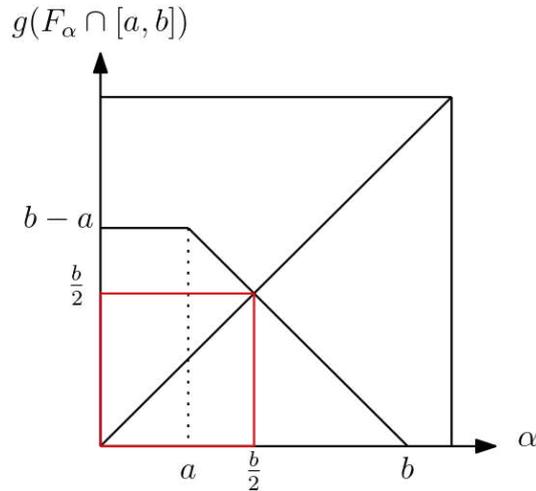


Figura 69 – Gráfico da função  $g(F_\alpha \cap [a, b])$ .

A Figura 69 mostra o quadrado de maior lado subscrito ao gráfico de  $g$ . Logo,

$$\int_{[a,b]} h \cdot g = \frac{b}{2} \Rightarrow F([a, b]) = \frac{b}{2}.$$

Concluindo:

$$F : \quad \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$$

$$[a, b] \mapsto F([a, b]) = \begin{cases} b - a, & \text{se } a > \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2}, & \text{se } a \leq \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto h(x) = x.$$

Obtivemos  $F : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  a partir de  $h$ . Para que o conceito estabelecido anteriormente relacione  $F$  e  $h$  por uma conceituação de derivada, é necessário:

- Definir a aplicação  $D_g F$
- Apresentar teoria que possibilite expressar

$$D_g F = h,$$

a partir de  $F$ .

Na Seção 4.1 serão desenvolvidos esses resultados.

**Exemplo 4.2.** Sejam,

- $X = \{1, 2, 3\}$

- $g : 2^X \rightarrow [0, 1]$   
 $A \mapsto g(A) = \frac{n(A)}{3}$   
 $n(A)$ : número de elementos do conjunto  $A$ .
- $B = 2^X$

Desenvolveremos de modo análogo, a obtenção de  $F$  a partir de  $h$  dada. Assim, se:

$$g(\emptyset) = 0, \quad g(X) = 1.$$

$$g(\{1\}) = g(\{2\}) = g(\{3\}) = \frac{1}{3},$$

$$g(\{1, 2\}) = g(\{1, 3\}) = g(\{2, 3\}) = \frac{2}{3}.$$

- Buscaremos  $F : B \rightarrow [0, 1]$
- A partir de  $h : X \rightarrow [0, 1]$ .

Seja

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } x = 1 \\ \frac{2}{3} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad (\text{Figura 70})$$

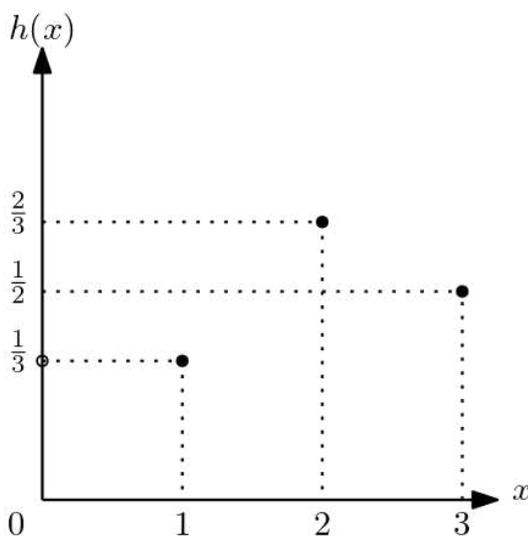


Figura 70 – Gráfico da função  $h(x)$  (Exemplo 4.2).

Para

$$\alpha \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow F_\alpha = X \Rightarrow g(F_\alpha) = 1$$

$$\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow F_\alpha = \{2, 3\}$$

$$\alpha \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow F_\alpha = \{3\}$$

$$\alpha \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \Rightarrow F_\alpha = \emptyset,$$

considere:

- $A = X \Rightarrow F_\alpha \cap A = F_\alpha$

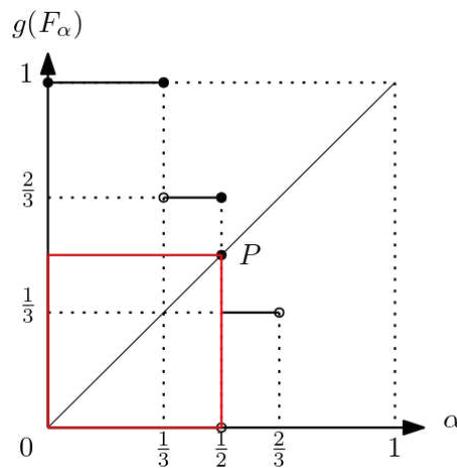


Figura 71 – Gráfico da função  $g(F_\alpha)$  (Exemplo 4.2).

A Figura 71 mostra o quadrado de maior lado subscrito ao gráfico de  $g$ . Logo,

$$\int_X h \cdot g = \frac{1}{2} \Rightarrow F(X) = \frac{1}{2}$$

- $A = \emptyset \Rightarrow \int_{\emptyset} h \cdot g = 0 \Rightarrow F(\emptyset) = 0$

$$\bullet A = \{1\} \Rightarrow \begin{cases} (F_\alpha \cap A) = \{1\} \text{ para } \alpha \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ (F_\alpha \cap A) = \emptyset \text{ para } \alpha \in \left(\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} g(F_\alpha \cap A) &= \frac{1}{3} \text{ se } \alpha \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ g(F_\alpha \cap A) &= 0 \text{ se } \alpha \in \left(\frac{1}{3}, 1\right] \end{aligned} \right\} \text{(Figura 72)}$$

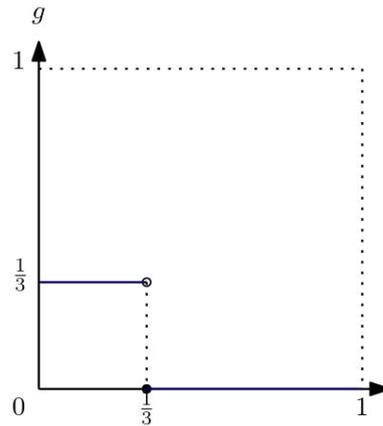


Figura 72 – Gráfico da função  $g(F_\alpha \cap A)$ .

$$\int_{\{1\}} h \cdot g = \frac{1}{3} \Rightarrow F(\{1\}) = \frac{1}{3}$$

- $A = \{2\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_\alpha \cap A = \{2\} \text{ se } \alpha \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \\ F_\alpha \cap A = \emptyset \text{ se } \alpha \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \end{array} \right.$$

portanto,

$$\int_{\{2\}} h \cdot g = \frac{1}{3} \Rightarrow F(\{2\}) = \frac{1}{3}$$

- *Idem para*  $A = \{3\}$

$$\int_{\{3\}} h \cdot g = \frac{1}{3} \Rightarrow F(\{3\}) = \frac{1}{3}$$

- $A = \{1, 3\}$

$$\left. \begin{array}{l} F_\alpha \cap A = \{1, 3\} \text{ se } \alpha \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ F_\alpha \cap A = \{3\} \text{ se } \alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \\ F_\alpha \cap A = \emptyset \text{ se } \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{array} \right\} \text{ (Figura 73)}$$

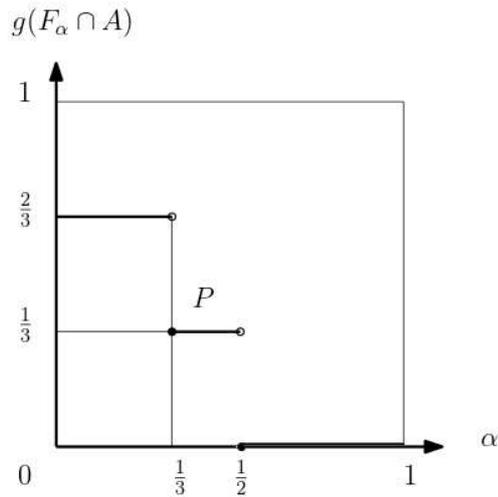


Figura 73 – Gráfico da função  $g(F_\alpha \cap A)$  (Exemplo 4.2).

$$\int_{\{1,3\}} h \cdot g = \frac{1}{3} \Rightarrow F(\{1, 3\}) = \frac{1}{3}$$

- Se  $A = \{1, 2\}$  então,

$$\int_{\{1,2\}} h \cdot g = \frac{1}{3} \Rightarrow F(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$$

- Se  $A = \{2, 3\}$  então,

$$\int_{\{2,3\}} h \cdot g = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\{2, 3\}) = \frac{1}{2}$$

- Concluindo:

$$F : B \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto F(A) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } A = X \text{ ou } A = \{2, 3\} \\ \frac{1}{3} & \text{se } \begin{cases} A = \{1\} \\ A = \{2\} \\ A = \{3\} \\ A = \{1, 3\} \\ A = \{1, 2\} \end{cases} \\ 0 & \text{se } A = \emptyset \end{cases}$$

$$h : \{1, 2, 3\} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } x = 1 \\ \frac{2}{3} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Retomaremos os Exemplos 4.1 e 4.2 na Seção 4.1 após definir  $D_g F$ . Serão interessantes para justificar a teoria a ser desenvolvida para obter um Teorema Fundamental do Cálculo Fuzzy.

## 4.1 Teorema Fundamental do Cálculo Fuzzy

Iniciamos essa seção estabelecendo condições aos espaços topológicos, que venham propiciar uma definição adequada para derivadas *fuzzy*, lembrando que ela deverá ser base para construção do Teorema Fundamental do Cálculo Fuzzy (SUGENO, 1974). A compreensão e a demonstração desse teorema possuem certo grau de complexidade, exigindo pré requisitos, propriedades, lemas, corolários cujas provas são difíceis, porém relevantes. Esses fatos despertaram de minha parte motivações para desenvolver estratégias que facilitassem assimilar esses conhecimentos. Assim, nossa colaboração foi apresentar as definições com notações diferenciadas e específicas, com objetivo de preservar os conceitos, porém buscando oferecer maior clareza e precisão dos assuntos. As demonstrações foram detalhadas, utilizando argumentações geométricas e diagramas, mas vale ressaltar que os resultados foram obtidos por Michio Sugeno em sua tese de doutorado.

Finalizamos o capítulo com a apresentação dos dois importantes teoremas: o Fundamental do Cálculo Fuzzy, e as condições para aplicação  $F$  que garantam a existência da derivada  $h$ .

## 4.2 Espaço Topológico de Hausdorff

Para desenvolver a teoria sobre derivadas *fuzzy*, e o teorema fundamental do cálculo *fuzzy* será considerado  $(X, \mathcal{B}, g)$  um espaço *fuzzy*,  $\mathcal{T}$  uma topologia em  $X$ , e  $\mathcal{B}$  a menor  $\sigma$ -álgebra que contém  $\mathcal{T}$  satisfazendo as condições seguintes:

1.  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico de Hausdorff,

$$\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists V(x), V(y) \text{ onde } V(x) \cap V(y) = \emptyset$$

$V(x)$ : vizinhança de  $x$

$V(y)$ : vizinhança de  $y$

2.  $(X, \mathcal{T})$  localmente compacto,

$$x \in X \Rightarrow \exists V(x) : \text{vizinhança compacta de } x.$$

Observe que um subconjunto  $K \subset X$  é compacto se para qualquer cobertura por abertos de  $K$ , existirá uma subcobertura finita para  $K$ . Uma cobertura para  $K$  é uma coleção de abertos cuja união contém  $K$ .

3.  $(X, \mathcal{T})$  deve verificar o segundo axioma da enumerabilidade, isto é, ter uma base enumerável. Para isso, é importante relembrar conceitos de:

- *Base de espaço topológico.*

Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico,  $\mathcal{T}$  topologia em  $X$ , então  $\mathbb{B} \subset \mathcal{T}$  é uma base de  $\mathcal{T}$  se:

- ★ todo elemento de  $\mathbb{B}$  é um aberto de  $\mathcal{T}$
- ★ qualquer aberto de  $\mathcal{T}$  pode ser escrito como união de abertos de  $\mathbb{B}$ .

Em símbolos,  $\mathbb{B}$  é base de  $\mathcal{T}$ :

$$[\mathbb{B} = \{A_i : A_i \in \mathcal{T}, A_i \text{ abertos}\} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{T}, A \text{ aberto}, A = \cup A_i, A_i \in \mathbb{B}].$$

4. Se  $E \subset X$  e  $g(E) = 0$ , então:

$$g(A \cup E) = g(A), \forall A \subset X,$$

valendo também a recíproca, ou seja,

$$\forall A \subset X, g(A \cup E) = g(A) \Rightarrow g(E) = 0.$$

Os conjuntos  $E$  que satisfazem essa condição são chamados de conjuntos de medida nula. Será considerado que se  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{T}$  for uma sequência de conjuntos de medida nula então,  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$  seja conjunto de medida nula, ou seja,

$$g(E_n) = 0 \Rightarrow g\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 0.$$

5.  $\forall A \in \mathcal{B}$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe aberto  $\mathcal{A}_A$ , tal que  $\mathcal{A}_A \subset A$ :

$$g(\mathcal{A}_A - A) < \epsilon$$

### 4.2.1 Resultados decorrentes da Sessão 4.2

**Proposição 4.1.** *Seja  $x \in X$ ,  $x \in \mathcal{A}_x$ : aberto, então existe um aberto  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{T}$ ,  $x \in \mathcal{A}$  com  $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}_x$  (Figura 74).*

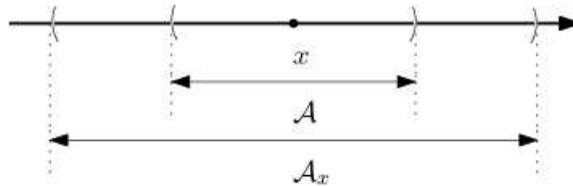


Figura 74 – Representação dos abertos na reta.

*Demonstração.* Considere a Figura 75

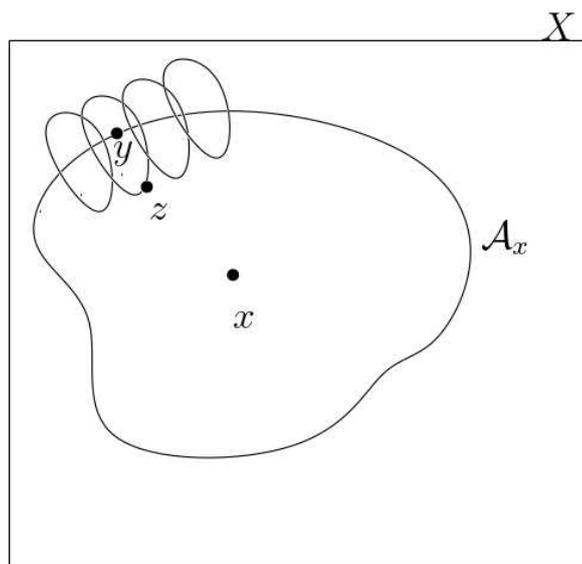


Figura 75 – Representação de: aberto, ponto interior e fronteira.

Sejam,

$y \in F_r(\mathcal{A}_x)$ : fronteira de  $\mathcal{A}_x$

$x \in \mathcal{A}_x$ : aberto

$x \in \mathcal{A}_x \Rightarrow x$  é ponto interior de  $\mathcal{A}_x \Rightarrow x \notin F_r(\mathcal{A}_x)$ . Como  $X$  é Hausdorff para cada  $y \in F_r(\mathcal{A}_x)$  existe um aberto  $B_y$  que não contém  $x$ . Seja,

$$B = \bigcup_{y \in F_r(\mathcal{A}_x)} B_y.$$

Definindo  $\mathcal{A} = [B^c]^o \cap \mathcal{A}_x$ ,  $\mathcal{A}$  será aberto (vide Figura 75).

Será mostrado que  $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}_x$ . Seja  $z \in F_r(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A} \subset [B^c]^o \Rightarrow \bar{\mathcal{A}} \subset B^c$ , como  $z \in \bar{\mathcal{A}}$ , então  $z \in B^c$ , logo  $z \notin B_y$  para qualquer  $y \in F_r(\mathcal{A}_x)$ , onde decorre que,

$$z \neq y, \forall y \in F_r(\mathcal{A}_x) \Rightarrow z \notin F_r(\mathcal{A}_x).$$

Assim,

$$z \in \mathcal{A}_x \text{ ou } z \in \bar{\mathcal{A}}_x^c.$$

Porém,

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_x \Rightarrow \bar{\mathcal{A}} \subset \bar{\mathcal{A}}_x$$

e como  $x \in \bar{\mathcal{A}}$  temos  $z \in \bar{\mathcal{A}}_x$ . No entanto mostramos que  $z \notin F_r(\mathcal{A}_x)$  o que implica que  $z \in \mathcal{A}_x$ . Assim,

$$z \in F_r(\mathcal{A}) \Rightarrow z \in \mathcal{A}_x,$$

ou seja,

$$\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}_x.$$

□

**Proposição 4.2.** *Seja  $A$  fechado,  $\mathcal{A}$  aberto com  $A \subset \mathcal{A}$ , então existe um aberto  $\mathcal{A}_1$  onde:*

$$A \subset \mathcal{A}_1 \text{ e } \bar{\mathcal{A}}_1 \subset \mathcal{A}$$

(Vide Figuras 76 e 77)

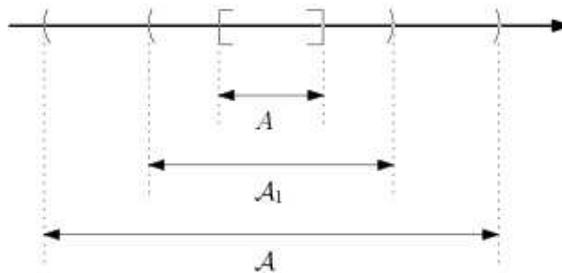


Figura 76 – Representação de abertos e fechados.

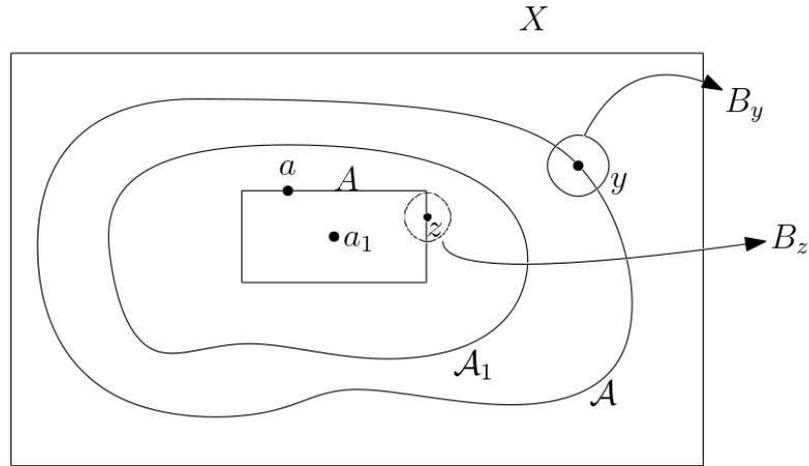


Figura 77 – Representações de abertos, fechado, pontos interior e fronteira.

*Demonstração.* Sejam  $y \in F_r(\mathcal{A})$ ,  $z \in A$ .  $A$  é fechado (Figura 77), logo cada  $z \in A$  será ponto interior de  $\mathcal{A}$ , o que implica que para cada  $z$ , existirá um aberto  $B_z \ni z$ , totalmente contido em  $\mathcal{A}$ .

Seja,

$$\mathcal{A}_1 = A \cup \left[ \bigcup_{z \in A} B_z \right]$$

$\mathcal{A}_1$  é aberto e  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ . Mostraremos que  $\bar{\mathcal{A}}_1 \subset \mathcal{A}$ .

De fato, seja  $x \in \mathcal{A}_1$  um elemento qualquer de  $\mathcal{A}_1$ , logo  $x \in B_z$ ,  $z \in A$  e por  $B_z$  estar totalmente contido em  $\mathcal{A}$ , sendo  $X$  Hausdorff, para cada  $y \in F_r(\mathcal{A})$ , existirá  $B_y \ni y$  com  $x \notin B_y$ , e novamente como em (i) concluímos  $y \notin F_r(\mathcal{A}_1)$ , ou seja,

$$F_r(\mathcal{A}) \cap F_r(\mathcal{A}_1) = \emptyset. \tag{4.3}$$

Como  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$  tem-se  $\bar{\mathcal{A}}_1 \subset \bar{\mathcal{A}}$ , porém por (4.3) conclui-se

$$\bar{\mathcal{A}}_1 \subset \mathcal{A},$$

pois  $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup F_r(\mathcal{A})$  □

**Proposição 4.3.** Para cada  $x \in X$  a intersecção de todas suas vizinhanças fechadas é  $\{x\}$  (Figura 78).

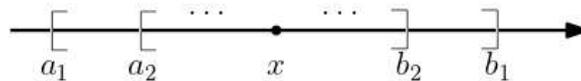


Figura 78 – Representação de vizinhas de ponto na reta.

*Demonstração.* Se mostrarmos que  $\{x\}$  é fechado, obviamente será o menor fechado que contém  $x$ , ou seja,

$$\{x\} = \cap \{F : F \text{ é fechado e } x \in F\}.$$

De fato, como  $X$  é Hausdorff, sejam  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , então existe um aberto  $B_y$ ,  $y \in B_y$  com  $x \notin B_y$ . Logo,  $B_y$  é um aberto em  $\{x\}^c$ , e como  $y$  é genérico, mostramos que é um ponto interior de  $\{x\}^c$  se todo ponto  $y \in \{x\}^c$  é um interior, então ele é aberto de onde se conclui que  $\{x\}$  é fechado.  $\square$

**Proposição 4.4.** *Seja  $A = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ , onde  $I$  é um conjunto qualquer de índices, e  $\mathcal{A}_i$  são abertos. Então, existe uma sequência*

$$\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$$

tal que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n.$$

*Demonstração.* De fato:

$X$  satisfaz o segundo axioma de contabilidade, logo possui uma base enumerável de abertos

$$\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Como cada  $\mathcal{A}_i$ ,  $i \in I$  é aberto,

$$\mathcal{A}_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{i_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como a união qualquer de conjuntos enumeráveis será enumerável, temos

$$A = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcup_{i \in I} \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{i_n} \right] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$$

$\square$

Apresentaremos uma definição para o operador derivada *fuzzy*, para uma função  $G$  monótona em  $\mathcal{B}$

### 4.3 Operador de Derivação

No início do Capítulo 4 (pag. 142-143) ao enunciar o teorema fundamental do cálculo clássico ocorreram restrições para a função  $f$  considerando-a contínua e definida em um intervalo fechado. De forma semelhante, dada uma aplicação  $F$  ao se buscar  $h(x)$  tal que,

$$\begin{aligned} F : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto F(A) = \int_A h \cdot g \end{aligned}$$

★  $F$  deverá ser não decrescente, pois:

$$A \subset B \Rightarrow \int_A h \cdot g \leq \int_B h \cdot g \Rightarrow F(A) \leq F(B)$$

★  $F \leq g$ ,  $\forall A \in \mathcal{B}$ , pois

$$F(A) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha \cap A)] \leq g(F_\alpha \cap A) \leq g(A).$$

**Definição 4.1.** Sejam  $F : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ ,  $\mathbb{B}_x = \{V_x, \text{ vizinhança fechada de } x \in A : F(V_x) = g(V_x)\}$ , indica-se o operador derivada de  $F$  em relação a  $g$  por:

$$D_g F : X \rightarrow [0, 1],$$

(a) Se  $B_x \neq \emptyset$ ,

$$D_g F(x) = \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \{F(V_x)\}$$

(b) Se  $B_x = \emptyset$

$$D_g F(x) = \inf \{F(V_x)\}.$$

**Exemplo 4.3.** Considere  $X = [0, 1]$ , o Exemplo 4.1 com,

★  $B \subset 2^X$ ,  $B = \{[a, b] : 0 \leq a < b\}$

★  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$   
 $x \mapsto h(x) = x$

★  $F : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$   
 $[a, b] \mapsto F([a, b]) = \begin{cases} b - a & \text{se } a > \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & \text{se } a \leq \frac{b}{2} \end{cases}$

★  $g$ : medida usual.

Mostraremos através da Definição 4.1 que,

$$D_g F(x) = h(x), x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

e

$$D_g F(x) = \frac{1}{2}, \text{ para } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

De fato, sendo,

$$D_g F(x) = \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \{F(V_x)\},$$

se  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ , então  $V_x = [x, 2x] \in \mathbb{B}_x$ , pois,

$$g([x, 2x]) = x$$

$$F([x, 2x]) = \int_{[x, 2x]} h \cdot g = x$$

pois  $x < 2x$  e para  $a \leq \frac{b}{2}$ ,  $F([a, b]) = \frac{b}{2}$ . Mostraremos também que  $[x, 2x]$  é o intervalo de maior amplitude ao qual  $x \in [a, b]$  e  $F([a, b]) = g([a, b])$ , para concluir. De fato, seja  $x \in [0, 1]$  e suponha que  $V_x = [a, b] \in \mathbb{B}_x$ , onde

$$[x, 2x] \subset [a, b].$$

Logo,

$$a \leq x \text{ e } b \geq x \Rightarrow a \leq x \leq \frac{b}{2}.$$

Sendo  $a \leq \frac{b}{2}$ , temos,

$$g([a, b]) = b - a \text{ e } F([a, b]) = \frac{b}{2}$$

como,

$$[a, b] \in \mathbb{B}_x \Rightarrow a = \frac{b}{2}$$

portanto, para  $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$D_g F(x) = \sup_{[a, b] \in \mathbb{B}_x} F([a, b]) = \sup_{[\frac{b}{2}, b] \in \mathbb{B}_x} F\left(\left[\frac{b}{2}, b\right]\right) = F[x, 2x] = x = h(x)$$

e

$$D_g F(x) = \frac{1}{2} \text{ para } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

**Exemplo 4.4.** Retomando o Exemplo 4.2, mostraremos que a definição de derivada fuzzy não garante a existência de  $h$  nas condições propostas, sendo necessário estabelecer condições para  $F$ .

De fato, sejam,

★  $X = \{1, 2, 3\}$

★  $g : 2^X \rightarrow [0, 1]$

$$A \mapsto g(A) = \frac{n(A)}{3}$$

$n(A)$ : número de elementos de  $A$

★  $B = 2^X$ , com a topologia discreta.

★ Pelo Exemplo 4.1,

$$h : X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } x = 1 \\ \frac{2}{3} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

$D_g F(x) \neq h(x)$  pois pelo Exemplo 4.2,

$$F : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto F(A) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } A = X \text{ ou } A = \{2, 3\} \\ \frac{1}{3} & \text{se } \begin{cases} A = \{1\} \\ A = \{2\} \\ A = \{3\} \\ A = \{1, 3\} \\ A = \{1, 2\} \end{cases} \\ 0 & \text{se } A = \emptyset \end{cases}$$

Assim  $g(A) = F(A)$  somente para  $A = \{1\}$ ,  $A = \{2\}$  ou  $A = \{3\}$  e pela Definição 4.1 teríamos,

$$D_g F(x) \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } x = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

com,

$$h : \{1, 2, 3\} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } x = 1 \\ \frac{2}{3} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Concluindo que

$$D_g F(x) \neq h(x).$$

Isso ocorre porque a Definição 4.1 e as condições estabelecidas aos espaços topológicos no início desse capítulo, não são suficientes para garantir a existência de  $h$  tal que,

$$D_g F(x) = h(x).$$

Partindo dessas considerações o propósito será desenvolver a teoria necessária (condições para  $F$ ), para obtermos um Teorema Fundamental do Cálculo Fuzzy, e a garantia da existência de  $h$ , de modo que derivada fuzzy,

$$D_g F = h.$$

**Observação 4.1.** A notação  $D_g F(x)$  será considerada equivalente a  $(D_g F)(x)$ .

**Observação 4.2.** Quando uma proposição for verdadeira, a menos para pontos pertencentes a conjuntos de “medida zero”, diremos que a proposição é válida em “quase todos os pontos, ou, em quase toda parte”.

**Corolário 4.1.** Seja  $\{F_n\}$  uma sequência de funções monótonas em  $n$ :

$$F_n : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1],$$

satisfazendo a Definição 4.1.

Então,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_g F_n(x) = D_g \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) \right).$$

*Demonstração.* Para cada  $A \in \mathcal{B}$ , a sequência  $\{F_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é monótona, real e limitada, logo converge para um número real que será identificado por  $F(A)$ . Seja

$$\begin{aligned} F : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto F(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(A). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Vamos mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_g F_n(x) = D_g \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) \right).$$

Se  $x \in X$ , e existir  $V_x$  tal que  $F_n(V_x) = g(V_x)$ ,

$$D_g F_n(x) = \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \{F_n(V_x)\},$$

então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} D_g F_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \{F_n(V_x)\} \right] \\ &\stackrel{\substack{F_n \\ \text{monótona}}}{=} \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} \{F_n(V_x)\} \right] \\ &\stackrel{\text{por (4.4)}}{=} \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \{F(V_x)\} \\ &= D_g F. \end{aligned}$$

□

**Corolário 4.2.** *Sejam,  $(X, \mathcal{B}, g)$  espaço topológico fuzzy,  $\mathcal{A}$  um aberto da topologia em  $\mathcal{B}$ , se*

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{A}} : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1] \\ \mathcal{A} &\mapsto F_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}) \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} D_g F_{\mathcal{A}} : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto D_g F_{\mathcal{A}}(x) = g(\mathcal{A}) \wedge \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(x) \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(x)$  é a função característica de  $\mathcal{A}$ .

*Demonstração.* Se  $x \in \mathcal{A}$ , sendo  $\mathcal{A}$  aberto, pela condição (i) (Proposição 4.1) existirá um aberto  $\mathcal{O}$  de  $X$ ,  $x \in \mathcal{O}$ , com  $\bar{\mathcal{O}} \subset \mathcal{A}$ . Desta forma  $\bar{\mathcal{O}} = V_x$ , será uma vizinhança fechada de  $x$ , com

$$\mathcal{O} \subset V_x = \bar{\mathcal{O}} \subset \mathcal{A},$$

pela definição de  $F_{\mathcal{A}}$ ,

$$F_{\mathcal{A}}(V_x) = g(V_x)$$

Sendo  $V_x = \bar{\mathcal{O}}$  uma vizinhança fechada  $V_x \subset \mathcal{A}$ , pela Proposição 4.2 existirá um aberto  $\mathcal{O}_1$  em  $X$  com,

$$\mathcal{V}_x \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{A} \text{ e } V_1 = \bar{\mathcal{O}}_1 \subset \mathcal{A}.$$

sendo  $V_1$ , uma vizinhança fechada de  $x$ , ampliada,

$$\mathcal{V}_x \subset V_1 = \bar{\mathcal{O}}_1 \subset \mathcal{A}.$$

Da mesma forma pode-se construir uma sequência de vizinhanças fechadas de  $x$ , convergindo para  $\mathcal{A}$ .

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \mathcal{A},$$

com

$$F_{\mathcal{A}}(V_i) = g(V_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

$$D_g F_{\mathcal{A}}(x) = \sup\{F_{\mathcal{A}}(V_n)\} = \sup\{g(\mathcal{A} \cap V_n)\} = g(\mathcal{A})$$

como  $x \in \mathcal{A}$

$$g(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A}) \wedge \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(x).$$

concluimos que,

$$D_g F_{\mathcal{A}} = g(\mathcal{A}) \wedge \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(x)$$

Supor agora  $x \notin \mathcal{A}$ . Existem duas possibilidades:

- \*  $\mathcal{B}_x = \emptyset$
- \*  $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$

Se  $B_x = \emptyset$ , então

$$g(\mathcal{A} \cap V_x) < g(V_x),$$

e considerando que a menor vizinhança  $V_x$  contendo  $x$  é  $\{x\}$ , teremos

$$D_g F_{\mathcal{A}}(x) = \inf\{F_{\mathcal{A}}(V_x)\} = \inf\{g(\mathcal{A} \cap V_x)\} < g(\cap V_x) = g(\{x\}) = 0.$$

Logo

$$D_g F_{\mathcal{A}}(x) = 0$$

e

$$g(\mathcal{A}) \wedge \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(x) = 0 \text{ pois } x \notin \mathcal{A}.$$

Assim

$$D_g F_{\mathcal{A}}(x) = g(\mathcal{A}) \wedge \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(x).$$

Caso  $\mathbb{B}_x \neq \emptyset$  existirá uma vizinhança fechada de  $x$ ,  $V_x$  com,

$$g(\mathcal{A} \cap V_x) = g(V_x).$$

Mas pela condição 4 (pág. 153)

$$g[(V_x - \mathcal{A}) \cup (V_x \cap \mathcal{A})] = g(V_x) = g(V_x \cap \mathcal{A}) \stackrel{\text{por (4)}}{\Rightarrow} g(V_x - \mathcal{A}) = 0.$$

Por outro lado, utilizando a recíproca da condição 4

$$g(\mathcal{A} \cup V_x) = g[\mathcal{A} \cup (V_x - \mathcal{A})] \stackrel{g(V_x - \mathcal{A})=0}{\text{por(4)}} g(\mathcal{A}), \forall \mathcal{A} \in \mathcal{B}.$$

Assim,

$$g(\mathcal{A} \cup V_x) = g(\mathcal{A}), \forall \mathcal{A} \in \mathcal{B}.$$

novamente usando a condição 4,

$$g(V_x) = 0$$

e como

$$g(V_x) = g(\mathcal{A} \cap V_x)$$

tem-se

$$g(\mathcal{A} \cap V_x) = 0 \Rightarrow D_g F_{\mathcal{A}} = \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \{F_{\mathcal{A}}(V_x)\} = 0$$

Assim,

$$D_g F_{\mathcal{A}}(x) = g(\mathcal{A}) \wedge \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(x)$$

pois  $x \notin \mathcal{A}$ .

□

## 4.4 Teorema Fundamental do Cálculo de Sugeno.

A seguir será apresentado o Teorema que relaciona os conceitos da Integral *Fuzzy* ou de Sugeno, com Derivada *Fuzzy*, com propriedade semelhante ao Teorema Fundamental do Calculo Integral usual, motivo pelo qual o designamos de Teorema Fundamental do Cálculo de Sugeno.

**Teorema 4.2.** (*Teorema Fundamental do Cálculo Fuzzy (SUGENO, 1974)*) *Sejam,*

- $(X, \mathcal{B}, g)$  espaço topológico fuzzy
- $h : X \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação.

$$\bullet \quad \begin{aligned} F : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto F(A) = \int_A h \cdot g. \end{aligned}$$

Então,

$$\text{a) } D_g F(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha) \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)]$$

$$F_\alpha = \{x \in X : h(x) \geq \alpha\}$$

$$\text{b) } F(A) = \int_A (D_g F(x)) \cdot g$$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$  um conjunto qualquer e considere uma sequência de abertos  $\mathcal{O}_n \in \mathcal{B}$ ,  $\{\mathcal{O}_n\}$  SMD.

$$\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2 \dots \supset \mathcal{O}_n \supset \dots \supset \mathcal{A}.$$

Tome

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$$

e considere a sequência de funções,

$$\begin{aligned} F_n : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto F_n(A) = g(\mathcal{O}_n \cap A) \end{aligned} .$$

Definindo

$$\begin{aligned} F_E : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto F_E(A) = g(E \cap A) \end{aligned} .$$

Caso exista uma sequência de abertos  $\mathcal{O}_n$  onde  $\mathcal{A} = E$  decorre dos Corolários 4.1 e 4.2 que

$$D_g F_E(x) \stackrel{\text{Cor. 4.1}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} [D_g F_n(x)] \stackrel{\text{Cor. 4.2}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} [g(\mathcal{O}_n) \wedge \mathcal{X}_{\mathcal{O}_n}(x)] = g(E) \wedge \mathcal{X}_E(x). \quad (4.5)$$

Consideremos  $\int h \cdot g = M$ ,  $F_{F_\alpha}(A) = g(F_\alpha \cap A)$ .

Logo

$$F(A) = \int_A h \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha \cap A)] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge F_{F_\alpha}(A)] \Rightarrow F(V_x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge F_{F_\alpha}(V_x)].$$

Mas,

$$\begin{aligned} D_g F(x) &= \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \{F(V_x)\} \\ &= \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \left\{ \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge F_{F_\alpha}(V_x)] \right\} \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} [\alpha \wedge F_{F_\alpha}(V_x)] \right\} \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge D_g F_{F_\alpha}(V_x)] \\ &\stackrel{(4.5)}{=} \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha) \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)] \\ &= \sup_{\alpha \in [0,M]} [\alpha \wedge g(F_\alpha) \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)] \vee \sup_{\alpha \in (M,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha) \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)] \\ &\stackrel{\text{monótona}}{=} \sup_{\alpha \in [0,M]} [\alpha \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)] \vee \sup_{\alpha \in (M,1]} [g(F_\alpha) \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)] \\ &= \sup_{\alpha \in [0,M]} [\alpha \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)]. \end{aligned}$$

As duas últimas igualdades podem ser justificadas pelo Teorema 3.9, ou seja,

$$\int h \cdot g = M \iff g(F_M) \geq M \geq g(F_{M+}).$$

Concluindo,

$$D_g F(x) = \sup_{\alpha \in [0,M]} [\alpha \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)] \stackrel{\text{pela prop. 3.6}}{=} \begin{cases} M & \text{se } x \in F_M \\ h(x) & \text{se } x \notin F_M \end{cases}.$$

Assim,

$$F(A) = \int_A h \cdot g = \int_A D_g F(x) \cdot g.$$

□

Na sequência serão estudadas as condições para  $F$  de modo a garantir a existência da aplicação  $h$  que satisfaça:

$$D_g F(x) = h(x).$$

Mais precisamente, considerando uma função de conjuntos,

$$\begin{aligned} F : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto y = F(A) \end{aligned}$$

quais serão as condições sobre  $F$  de modo a garantir a existência de:

$$h : X \rightarrow [0, 1],$$

tal que

$$F(A) = \int_A h \cdot g = \int_A D_g F(x) \cdot g?$$

#### 4.4.1 Interpretação geométrica de $D_g F$

Sejam,

- $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$
- $g$  : medida *fuzzy*
- $F : \mathcal{B} \subset 2^{[0,1]} \rightarrow [0, 1]$   
 $A \mapsto F(A) = \int_A h \cdot g$
- $\int_{[0,1]} h \cdot g = M$
- $D_g F(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha) \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)]$

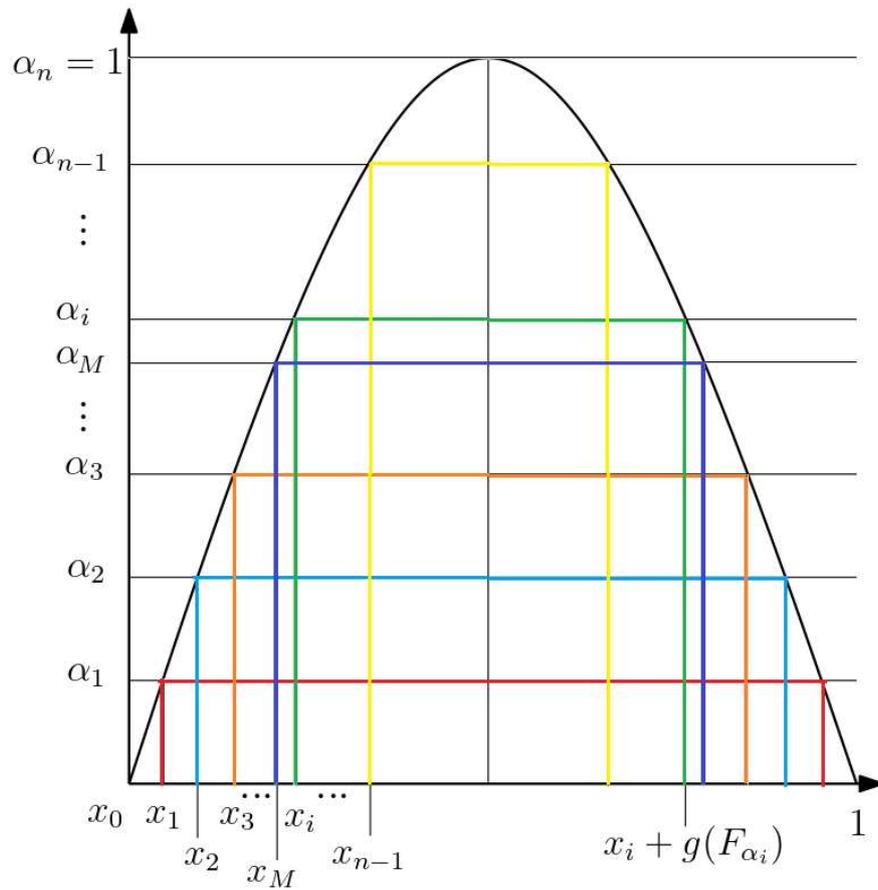


Figura 79 – Representação da família de funções  $\Phi_{\alpha_i}(x)$ .

Seja  $\Delta$  uma partição em  $[0, 1]$  (Figura 79) com,

- $\Delta : \alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_M < \dots < \alpha_n = 1$
- $\|\Delta\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n-1} |\alpha_i - \alpha_{i-1}|$
- $F_{\alpha_i} = \{x : h(x) > \alpha_i\}$ .

Definimos, para  $1 \leq j \leq n$ , com  $x \in I_j = [F_{\alpha_{j-1}} - F_{\alpha_j}]$

$$\Phi_j(x) = \sup_{0 \leq i \leq j \leq n} [\alpha_i \wedge g(F_{\alpha_i}) \wedge \mathcal{X}_{F_{\alpha_{j-1}}}(x)] = \begin{cases} \sup_{0 \leq i \leq j \leq M} \{\alpha_i\} \\ \sup_{M < i \leq j \leq 1} g(F_{\alpha_i}) = M \end{cases}$$

Assim,

- Se  $j = 1$  então,

$$\Phi_1(x) = \sup_{0 \leq i \leq 1 \leq n} [\alpha_i \wedge g(F_{\alpha_i}) \wedge \mathcal{X}_{F_{\alpha_0}}(x)] = \sup_{0 \leq i \leq 1 \leq M} \{\alpha_0, \alpha_1\}, \forall x \in I_1$$

- para  $j = 2$ , então teremos,

$$\Phi_2(x) = \sup_{0 \leq i \leq 2 \leq n} [\alpha_i \wedge g(F_{\alpha_i}) \wedge \mathcal{X}_{F_{\alpha_1}}(x)] = \sup_{0 \leq i \leq 2 \leq M} \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}, \forall x \in I_2$$

sucessivamente,

- para  $j = M$ , então teremos,

$$\Phi_M(x) = \sup_{0 \leq i \leq 2 \leq n} [\alpha_i \wedge g(F_{\alpha_i}) \wedge \mathcal{X}_{F_{\alpha_{M-1}}}(x)] = \sup_{0 \leq i \leq M} \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}, \forall x \in I_M$$

- para  $j$  tal que,  $M < j \leq n$  teremos,

$$\Phi_j(x) = \sup_{0 \leq i \leq 1 \leq n} [\alpha_i \wedge g(F_{\alpha_i}) \wedge \mathcal{X}_{F_{\alpha_{j-1}}}(x)] = \sup_{M < i \leq j \leq 1} g(F_{\alpha_i}) = M$$

Para  $\alpha \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$

$$D_g F(x) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \Phi_j(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha) \wedge \mathcal{X}_{F_\alpha}(x)] = \begin{cases} \alpha = h(x) & \text{se } 0 \leq \alpha \leq M. \\ M & \text{se } M < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Assim interpretamos a  $D_g F(x)$ , para  $x \in [0, M]$ , sendo o maior nível  $\alpha$  de  $h$  para  $x$ , ou seja,  $\alpha = h(x)$ , e  $D_g F(x) = M$ , para  $x \in (M, 1]$ , pois  $x \in F_M$ .

Note que essa interpretação é coerente com o resultado do Exemplo 4.3

Se considerarmos a operação max-min, onde  $\wedge$  é visto como multiplicação e  $\vee$  como adição poderemos interpretar  $D_g F(x)$ ,  $x \in F_\alpha$ , sendo a área do retângulo de lados  $\alpha = h(x)$  e  $g(F_\alpha)$  situados no sub-gráfico de  $g(F_\alpha)$ , para  $\alpha \in (0, M]$  (Figura 80).

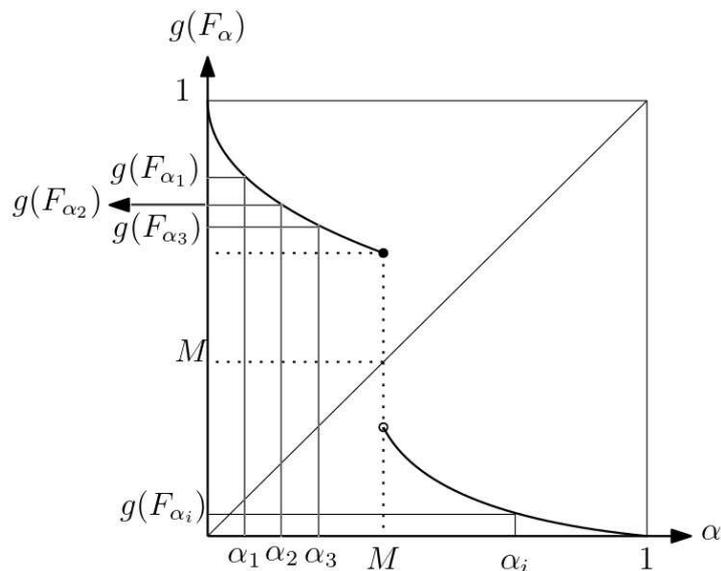


Figura 80 – Retângulos do sub-gráfico de  $g(F_\alpha)$  associados a  $D_g F$ .

**Observação 4.3.** Considere  $F : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  satisfazendo as condições,

1.  $\forall A, B \in \mathcal{B}, B \subset A \Rightarrow F(B) \leq F(A)$ , ou seja,  $F$  é monótona não decrescente
2. Existe um aberto  $\mathcal{O}$  em  $X$  tal que:  $g(\mathcal{O}) = F(\mathcal{O}) = F(X)$
3. Se  $\mathbb{B}_{F(A)} = \cup\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é aberto, } F(\mathcal{O}) = g(\mathcal{O}) \geq F(A)\}$  então  $F(A) = g(A \cap \mathbb{B}_{F(A)})$

**Propriedade 4.1. a)**  $\forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow F(A) \leq g(A)$  e  $F(\emptyset) = 0$

**b)**  $F(B) \leq F(A) \Rightarrow \mathbb{B}_{F(B)} \supset \mathbb{B}_{F(A)}$

*Demonstração.* **a)** Pela condição 3 (observação 4.3), sendo  $g$  monótona não decrescente tem-se

$$\forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow F(A) = g(A \cap \mathbb{B}_{F(A)}) \leq g(A).$$

Obviamente  $F(\emptyset) = 0$

**(b)** Supor que:

$$F(B) \leq F(A).$$

Se  $\mathcal{O} \subset \mathbb{B}_{F(A)}$  então

$$g(\mathcal{O}) = F(\mathcal{O}) \geq F(A) \geq F(B),$$

logo,

$$\mathcal{O} \subset \mathbb{B}_{F(B)},$$

e assim,

$$\mathbb{B}_{F(B)} \supset \mathbb{B}_{F(A)}.$$

□

**Corolário 4.3.** Se  $F(A) = g(A)$ , então  $F(B) = g(B)$  para  $B \subset A, \forall A, B \in \mathcal{B}$ .

*Demonstração.* Provaremos inicialmente que para  $\forall A, B \in \mathcal{B}$ :

$$g(A) = g(A \cap B) \iff g(A - A \cap B) = 0.$$

( $\Rightarrow$ ) De fato,

$$g[(A \cap B) \cup (A - A \cap B)] = g(A) = g(A \cap B). \quad (4.6)$$

Então pela condição 4 (pág. 153),

$$g(A - A \cap B) = 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Por hipótese  $g(A - A \cap B) = 0$ , e

$$g[(A \cap B) \cup (A - A \cap B)] = g(A).$$

Pela recíproca da condição 4 (pág. 153)

$$g(A) = g(A \cap B).$$

Vamos agora provar o corolário.

Pela condição 3 (observação 4.3) e a hipótese do corolário,

$$\begin{cases} B \subset A \\ F(A) = g(A \cap \mathbb{B}_F(A)) = g(A) \end{cases}$$

demonstramos inicialmente

$$g(A - A \cap \mathbb{B}_{F(A)}) = 0 \iff g(A) = g(A \cap B)$$

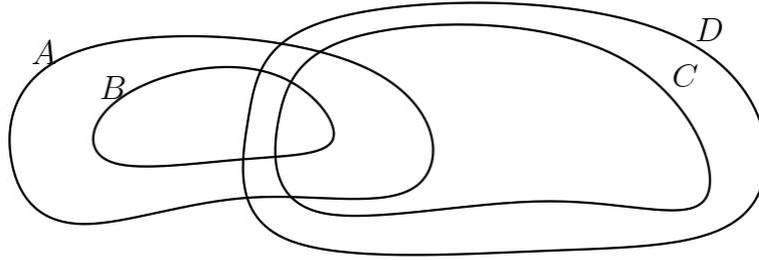


Figura 81 – Representações de  $C = \mathbb{B}_{F(A)}$  e  $D = \mathbb{B}_{F(B)}$ .

sendo  $C = \mathbb{B}_{F(A)}$  e  $D = \mathbb{B}_{F(B)}$

$$\begin{aligned} B \subset A &\Rightarrow F(B) \leq F(A) \\ &\Rightarrow \mathbb{B}_{F(B)} \supset \mathbb{B}_{F(A)} \text{ (vide Figura 81)} \\ &\Rightarrow (B - B \cap \mathbb{B}_{F(B)}) \subset (A - A \cap \mathbb{B}_{F(A)}) \text{ (vide Figura 81)} \\ &\Rightarrow g(B - B \cap \mathbb{B}_{F(B)}) \leq g(A - A \cap \mathbb{B}_{F(A)}) = 0 \end{aligned}$$

Logo

$$g(B - B \cap \mathbb{B}_{F(B)}) = 0 \Rightarrow g(B) = g(B \cap \mathbb{B}_{F(B)}) = F(B).$$

□

**Corolário 4.4.** Se  $D_g F(x) > 0$  existirá uma vizinhança aberta de  $x$  indicada por  $\tilde{V}_x$  de modo que

$$F(\tilde{V}_x) = g(\tilde{V}_x) \text{ e } D_g F(x) = g(\tilde{V}_x)$$

*Demonstração.* (i) Suponha existir para  $x$ , uma vizinhança fechada  $V_x$ , tal que

$$F(V_x) = g(V_x),$$

logo

$$F(V_x) = g(V_x \cap \mathbb{B}_{F(V_x)}) = g(V_x).$$

Supor  $x \notin \mathbb{B}_{F(V_x)}$  (Figura 82), logo

$$x \in [V_x - (V_x \cap B_{F(V_x)})]$$

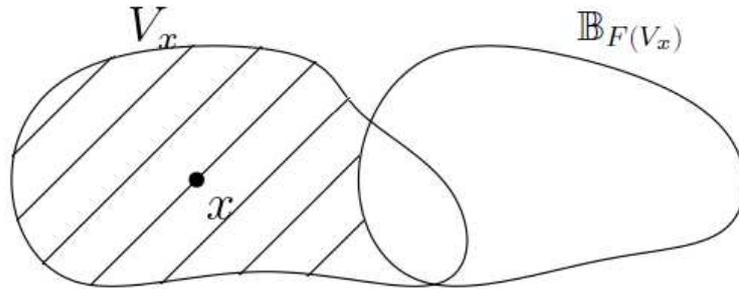


Figura 82 – Vizinhança do ponto menos a intersecção.

e sendo  $g(V_x) = g(V_x \cap \mathbb{B}_{F(V_x)})$  então  $g[V_x - (V_x \cap \mathbb{B}_{F(V_x)})] = 0$ .

Caso  $x \in B_{F(V_x)}$  existirá uma vizinhança aberta  $\mathcal{O}_x$  de  $x$ , tal que

$$F(\mathcal{O}_x) = g(\mathcal{O}_x) \geq F(V_x).$$

E pela condição (2) da Observação 4.3 estabelecida a  $F$ , existirá um aberto  $\mathcal{O}_x^*$  tal que:

$$D_g F(x) = \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \{F(V_x)\} \leq F(\mathcal{O}_x^*) = g(\mathcal{O}_x^*) = F(X).$$

Usando o Corolário 4.3 pode-se afirmar que para qualquer outra vizinhança fechada  $V_x^1 \subset \mathcal{O}_x^*$ , tem-se

$$g(V_x^1) = F(V_x^1).$$

Note que  $\bar{\mathcal{O}}_x^*$  é fechado e

$$g(\bar{\mathcal{O}}_x^*) = g(\mathcal{O}_x^*) = F(\mathcal{O}_x^*)$$

podendo escrever que

$$D_g(F(x)) = \sup_{V_x \in \mathbb{B}_x} \{F(V_x)\} = g(\mathcal{O}_x^*)$$

e como por hipótese  $D_g F(x) > 0$ ,  $g(\mathcal{O}_x^*) > 0$ . Logo denominando  $\tilde{V}_x$  por  $\tilde{V}_x = \mathcal{O}_x^*$  vizinhança aberta de  $x$  obtemos,

$$\begin{aligned} F(\tilde{V}_x) &= g(\tilde{V}_x), \\ D_g(F(x)) &= g(\tilde{V}_x) \end{aligned}$$

concluindo a prova para esse caso.

(ii) Suponha agora, nunca existir para  $x$ , uma vizinhança fechada  $V_x$  tal que:

$$F(V_x) = g(V_x),$$

logo tem-se

$$g(V_x) > F(V_x)$$

para toda vizinhança fechada de  $x$ .

Porém pela condição 2 da Observação 4.3 existe uma vizinhança aberta  $\mathcal{O}_x$  de  $x$  com

$$F(\mathcal{O}_x) = g(\mathcal{O}_x)$$

usando o Corolário 4.3 pode-se afirmar que para qualquer  $V_x$ , vizinhança de  $x$  com  $V_x \subset \mathcal{O}_x$  tem-se

$$g(V_x) = F(V_x),$$

o que contradiz a hipótese inicial em (ii).

Concluimos então somente ser possível a hipótese (i), ou seja, existirá sempre uma vizinhança fechada  $V_x$  para  $x$  com  $F(V_x) = g(V_x)$

Em (i) a suposição de que  $x \notin B_{F(A)}$  leva a conclusão de que, não existe para  $x$ , aberto  $\mathcal{O}_x$  tal que,  $g(\mathcal{O}_x) = F(\mathcal{O}_x)$ , ou seja,  $\mathbb{B}_{F(A)} = \emptyset$  e pela definição de derivada tem-se

$$\begin{aligned} D_g F(x) &= \inf_{V_x} \{F(V_x)\} \\ &= \inf \{g(V_x \cap B_{F(A)})\} \\ &= g\{[\cap V_x] \cap B_{F(A)}\} \\ &= g\{\{x\} \cap B_{F(A)}\} \\ &= g(\emptyset) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decorre também do fato de  $x \notin B_{F(A)}$  e  $\mathbb{B}_{F(A)} = \emptyset$  que

$$g[V_x - (V_x \cap \mathbb{B}_{F(V_x)})] = g(V_x) = 0,$$

concluindo que vale a tese, a menos de um conjunto de medida zero.

□

**Teorema 4.3.** (SUGENO, 1974) *Seja  $F : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  com as tres condições estabelecidas para  $F$  na Observação 4.3. Então existirá uma função:*

$$h : X \rightarrow [0, 1],$$

tal que,

$$F(A) = \int_A h \cdot g$$

*Demonstração.* Mostraremos que para

$$\begin{aligned} F : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto F(A) \end{aligned} ,$$

satisfazendo as condições 1, 2 e 3 da Observação 4.3 a existência de ao menos uma aplicação,

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto h(x) \end{aligned}$$

tal que,

$$F(A) = \int_A h \cdot g \quad (4.7)$$

A condição 2 da Observação 4.3 para  $F$  indica que existe um aberto  $\mathcal{O} \in \mathcal{B} : F(\mathcal{O}) = g(\mathcal{O}) = F(X) > 0$ , logo  $\mathbb{B}_{F(A)} \neq \emptyset$  e pela definição de derivada há a garantia de existência de  $D_g F(x) > 0$ .

Seja  $A \in \mathcal{B}$  um elemento qualquer, então:

a)  $F(A) > 0$ ,

ou

b)  $F(A) = 0$

Supondo  $F(A) > 0$ , defina o  $\alpha$ -nível de  $F(A)$  por:

$$F_{F(A)} = \{x \in X : D_g F(x) \geq F(A)\} \text{ (vide Figura 83)}$$

Se  $x \in F_{F(A)}$ , como  $F(A) > 0$  tem-se  $D_g F(x) > 0$  e pelo Corolário 4.4, existirá um aberto  $\mathcal{O}_x^*$  tal que:

$$F(\mathcal{O}_x^*) = g(\mathcal{O}_x^*) \geq F(A),$$

ou seja,  $\mathcal{O}_x^* \subset B_{F(A)}$  e assim  $x \in B_{F(A)}$ . Portanto,

$$F_{F(A)} \subset B_{F(A)} \quad (4.8)$$

Por outro lado, se  $x \in B_{F(A)}$  existe um aberto  $\mathcal{O}$ , tal que  $x \in \mathcal{O} \subset B_{F(A)}$ , com  $F(\mathcal{O}) = g(\mathcal{O}) \geq F(A) > 0$ , e pela definição de derivada de  $F$  tem-se que  $D_g F(x) > F(A)$ , portanto,  $x \in F_{F(A)}$ . Dessa forma,

$$B_{F(A)} \subset F_{F(A)} \quad (4.9)$$

De (4.8) e (4.9) conclui-se que

$$B_{F(A)} = F_{F(A)} \quad (4.10)$$

Sabe-se que  $\forall A \in \mathcal{B}, g(A \cap B_{F(A)}) = F(A)$ , logo

$$g(A \cap B_{F(A)}) = g(A \cap F_{F(A)}) = F(A).$$

Assim,

$$\int_A D_g F \cdot g = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : D_g F(x) > \alpha\})]$$

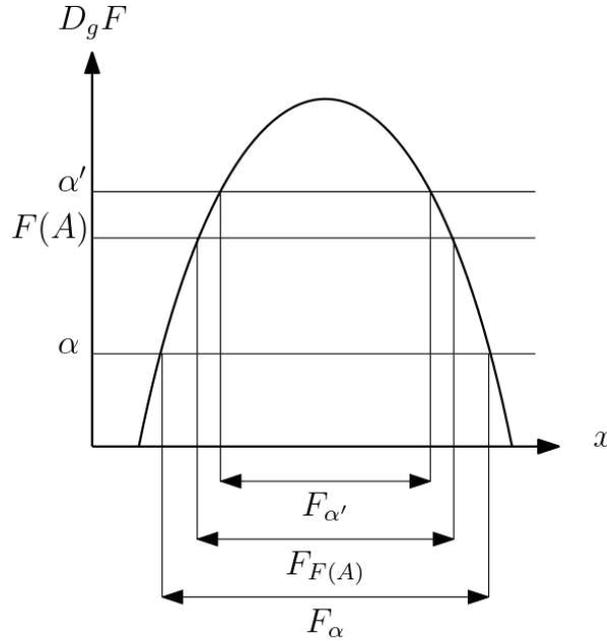


Figura 83 – Representações de  $\alpha$ -níveis de  $D_g F$ .

Como  $F_{F(A)} = \{x : D_g F(x) \geq F(A)\}$ , então

$$\int_A D_g F \cdot g = \sup_{\alpha \in [0, F(A)]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : D_g F \geq \alpha\})] \vee \sup_{\alpha \in (F(A), 1]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : D_g F \geq \alpha\})].$$

Para  $\alpha \in (F(A), 1]$

$$\{x : D_g F(x) \geq F(A)\} \supset \{x : D_g F(x) \geq \alpha\} \Rightarrow$$

$$[\alpha \wedge g(A \cap F_{F(A)})] \geq [\alpha \wedge g(A \cap \{x : D_g F(x) \geq \alpha\})] \Rightarrow$$

$$\sup_{\alpha \in (F(A), 1]} [\alpha \wedge g(A \cap F_{F(A)})] \geq \sup_{\alpha \in (F(A), 1]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : D_g F(x) \geq \alpha\})] \Rightarrow$$

$$\sup_{\alpha \in (F(A), 1]} [\alpha \wedge g(A \cap \mathbb{B}_{F(A)})] \geq \sup_{\alpha \in (F(A), 1]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : D_g F(x) \geq \alpha\})] \Rightarrow$$

$$\sup_{\alpha \in (F(A), 1]} [\alpha \wedge F(A)] \geq \sup_{\alpha \in (F(A), 1]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : D_g F(x) \geq \alpha\})] \Rightarrow$$

$$F(A) \geq \sup_{\alpha \in (F(A), 1]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : D_g F(x) \geq \alpha\})]. \quad (4.11)$$

Para  $\alpha \in [0, F(A)]$

$$\{x : D_g F(x) \geq F(A)\} \subset \{x : D_g F(x) \geq \alpha\} \Rightarrow$$

$$\sup_{\alpha \in [0, F(A)]} [\alpha \wedge g(A \cap F_{F(A)})] \leq \sup_{\alpha \in [0, F(A)]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : D_g f(x) \geq \alpha\})] \Rightarrow$$

$$F(A) \leq \sup_{\alpha \in [0, F(A)]} [\alpha \wedge g(A \cap \{x : D_g f(x) \geq \alpha\})]. \quad (4.12)$$

Por (4.11) e (4.12)

$$\int_A D_g F \cdot g = F(A).$$

Obviamente se  $F(A) = 0$

$$\int_A D_g F \cdot g = 0.$$

Concluimos que

$$\int_A D_g F(x) \cdot g = F(A)$$

mostrando a existência de  $h$ , sendo  $h = D_g F$ .  $\square$

O trabalho desenvolvido por Michio Sugeno em sua tese de doutorado é complementado por outros assuntos relevantes, tais como:

- Medidas *fuzzy* definidas em produto cartesiano de espaços de Borel,
- Integrais *fuzzy* em conjuntos finitos,
- Integração dupla *fuzzy*,
- Extensão de medidas *fuzzy*,
- Medidas condicionais *fuzzy*,
- Aplicações diversas, como similaridade facial, problemas de tomadas de decisões, representação de sistemas para problemas com dados incertos inseridos em problemas probabilísticos.

## 5 Teorema da Representação de Riesz

O teorema da representação de Riesz é considerado um importante resultado na área de Análise, e ao estudar os diversos tipos de integrais é natural perguntar se existem funcionais, quais e como serão de modo a serem representados por essas integrais. Apresentamos teoremas que possuem semelhanças ao de Riesz, como em [Martins \(1980\)](#) para os funcionais denominados de Integral Monótona representados por intermédio da integral de Lebesgue, em [Bartle \(1964\)](#) os resultados são concernentes a integral de Riemann-Stieltjes, em [Bassanezi e Greco \(1984\)](#) e [Bassanezi e Greco \(1988\)](#) os estudos foram relacionados a integral *fuzzy* geral. Nesse capítulo nossa colaboração foi explicitar e comparar as diferentes hipóteses e os domínios dos funcionais de modo a garantir as representações com a:

- (a) Integral de Riemann-Stieltjes.
- (b) Integral de Lebesgue.
- (c) Integral *Fuzzy* Generalizada.

Para os itens (a) e (c) as demonstrações foram detalhadas, em (b) pela semelhança com (c) e evitando extensão demasiada do assunto, resumimos.

### 5.1 Sobre a Integral de Riemann-Stieltjes.

Inicialmente faremos uma breve revisão das definições e resultados preliminares sobre a Integral de Riemann-Stieltjes que serão utilizados posteriormente.

**Definição 5.1.** *Seja  $[a, b]$ ,  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , um intervalo fechado. Chamaremos de partição  $\mathcal{P}$  com  $(n + 1)$  elementos em  $[a, b]$ , a  $n$ -úpla:*

$$\mathcal{P} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

onde

$$x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$$

**Definição 5.2.** *Nos termos da Definição 5.1, diremos que  $Q$  é um refinamento de  $\mathcal{P}$  se:*

$$Q = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$$

onde:

- $m > n$

- $\bar{x}_0 = a \leq \bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_m = b$
- $[\bar{x}_j, \bar{x}_{j+1}] \subset [x_i, x_{i+1}]$  para  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq i \leq n$ , onde para cada  $j$  existe ao menos um valor  $i$  correspondente, ainda:

$$\{\bar{x}_0 = a, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m = b\} \supset \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

**Definição 5.3.** (*Soma de Riemann-Stieltjes*) *Sejam,*

- $[a, b]$  um intervalo fechado;
- $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções limitadas;
- $\mathcal{P} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$  uma partição de  $[a, b]$ .

Chamaremos de **soma de Riemann-Stieltjes** de  $f$  em relação a  $g$  com a partição  $\mathcal{P}$ , indicada por  $S(\mathcal{P}, f, g)$ , ao valor obtido pelo somatório

$$S(\mathcal{P}, f, g) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

onde  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ;  $1 \leq i \leq n$ .

**Observação 5.1.** Se  $g$  for a função identidade,  $g(x) = x$ , então o somatório será denominado, soma de Riemann

**Observação 5.2.** Por meio dos gráficos das funções, pode-se observar facilmente que para valores suficientemente “grandes” de  $n$ , desde que a amplitude do maior sub-intervalo  $[x_i, x_{i-1}]$  seja “pequena”, sendo  $f$  contínua e não negativa,  $g(x) = x$ , a soma  $S(\mathcal{P}, f, g)$ , se aproximará da área sob o gráfico de  $f$ .

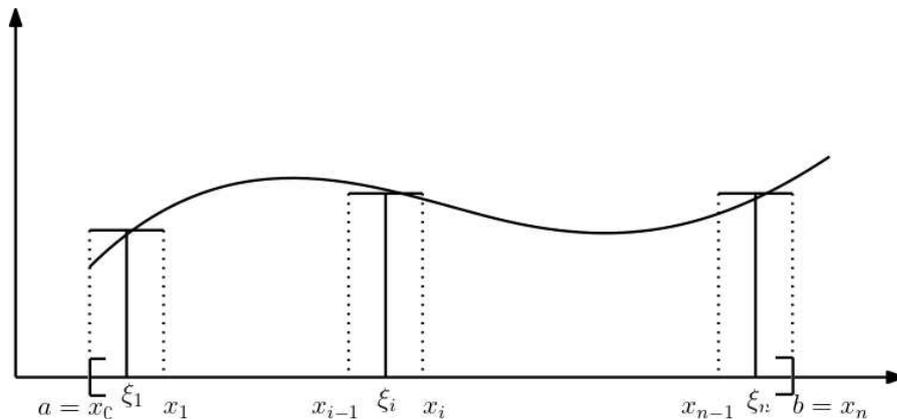


Figura 84 – Função escada de aproximação a  $f(x)$  (Definição 5.3).

$$S(\mathcal{P}, f, g) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[x_i - x_{i-1}] \text{ (Figura 84)}$$

**Definição 5.4.** (*Integral de Riemann-Stieltjes*) Sejam

- $[a, b]$ , intervalo fechado
- $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , limitadas
- $Q = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ .

Diremos que  $f$  é integrável em  $[a, b]$  em relação a  $g$ , se dado um número qualquer  $\epsilon > 0$  existe uma partição  $Q$  em  $[a, b]$  e um número real  $I$ , de modo que se  $\mathcal{P}$  for um refinamento de  $Q$ , então

$$|S(\mathcal{P}, f, g) - I| < \epsilon.$$

O número real  $I$  é denominado de integral Riemann-Stieltjes de  $f$  em relação a  $g$ , no intervalo  $[a, b]$ , sendo denotado por:

$$I = \int_a^b f dg.$$

**Teorema 5.1.** (*Critério de Integração de Cauchy*) Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em relação a  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  e  $g$  limitadas se, e somente se, dado  $\epsilon > 0$  existe uma partição  $R$ , onde para quaisquer refinamentos  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  de  $R$  tem-se

$$|S(\mathcal{P}, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| < \epsilon$$

*Demonstração.* De fato:

( $\Rightarrow$ ) Se  $f$  é integrável em relação a  $g$ , existe uma partição  $R$  e um número real  $I$ , onde, para  $\frac{\epsilon}{2} > 0$ ,  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ , refinamentos de  $R$ , tem-se:

$$\begin{aligned} |S(\mathcal{P}, f, g) - I| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |S(\mathcal{Q}, f, g) - I| < \frac{\epsilon}{2} &\Rightarrow \\ \Rightarrow |S(\mathcal{P}, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| \leq |S(\mathcal{P}, f, g) - I| + |S(\mathcal{Q}, f, g) - I| &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|S(\mathcal{P}, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| < \epsilon,$$

para qualquer  $\epsilon > 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Por hipótese dado  $\epsilon = 1$ , existe uma partição  $R_1$  de  $[a, b]$ , onde quaisquer refinamentos  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  de  $R_1$  tem-se:

$$|S(\mathcal{P}, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| < 1.$$

Definimos  $R_2$  novamente usando a hipótese, dado  $\epsilon = \frac{1}{2}$  existem refinamentos da partição  $R_2$ ,  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  tais que

$$|S(\mathcal{P}, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| < \frac{1}{2}.$$

Após  $n$  passos, definimos a partição  $R_n$  de modo que dado  $\epsilon = \frac{1}{n}$ , quaisquer refinamentos  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  de  $R_n$  teremos

$$|S(\mathcal{P}, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| < \frac{1}{n}.$$

Consideremos agora a sequência de números reais:

$$(S(R_n, f, g))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Mostraremos que para  $m \geq n$ ,  $\mathcal{R}_m$  será um refinamento da partição  $\mathcal{R}_n$ . De fato, se  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  são refinamentos de  $\mathcal{R}_m$ , serão também de  $\mathcal{R}_n$ , pois  $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ , e pela hipótese:

$$|S(R_n, f, g) - S(R_m, f, g)| < \frac{1}{n}$$

o que significa que a sequência  $(S(R_n, f, g))$  é Cauchy em  $\mathbb{R}$ , e sendo  $\mathbb{R}$  completo, convergirá para um limite  $I \in \mathbb{R}$ . Logo, dado  $\frac{\epsilon}{2} > 0$  existirá  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > n_0$ ,

$$|S(R_n, f, g) - I| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, dado  $\frac{\epsilon}{2}$ , existe  $n$  tal que para qualquer refinamento  $\mathcal{P}$  de  $R_n$ , temos,

$$\begin{aligned} |S(\mathcal{P}, f, g) - I| - |S(R_n, f, g) - I| &\leq |S(\mathcal{P}, f, g) - S(R_n, f, g)| < \frac{\epsilon}{2} \\ \Rightarrow |S(\mathcal{P}, f, g) - I| &< \epsilon \end{aligned}$$

logo,  $f$  é integrável em  $g$ .

□

**Teorema 5.2.** (BARTLE, 1964) *Seja  $c \in [a, b]$ , se  $f$  é integrável em  $[a, c]$  e  $[c, b]$  então será integrável em  $[a, b]$ . Por outro lado se  $f$  for integrável em  $[a, b]$ , então  $f$  será integrável em relação a  $[a, c]$  e  $[c, b]$ , com:*

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$$

**Proposição 5.1.** *Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f$  e  $h$ , integráveis em relação a  $g$ , no intervalo  $[a, b]$ , então:*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta h) dg = \alpha \int_a^b f dg + \beta \int_a^b h dg.$$

### 5.1.1 Integração de Funções Contínuas

**Teorema 5.3.** (*BARTLE, 1964*) Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e  $g$  é monótona crescente ( $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$ ) então  $f$  é integrável em relação a  $g$ .

*Demonstração.*  $f$  contínua no intervalo fechado  $[a, b] \Rightarrow f$  é uniformemente contínua, logo dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x, y \in [a, b]$

$$|x - y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Seja  $R = (x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b)$  uma partição de  $[a, b]$  tal que,

$$\max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}| < \delta_\epsilon \quad \text{e} \quad \mathcal{Q} = (\bar{x}_0 = a, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m = b)$$

um refinamento de  $R$ . Para cada intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  consideremos um valor  $\xi_k$ , ( $1 \leq k \leq n$ ), assim  $S(R, f, g) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$ . Sendo  $\mathcal{Q}$  refinamento de  $R$  sabemos que  $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j] \subset [x_{k-1}, x_k]$  e elejamos  $\bar{\xi}_j \in [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$  e teremos,

$$S(\mathcal{Q}, f, g) = \sum_{j=1}^m f(\bar{\xi}_j)[g(\bar{x}_j) - g(\bar{x}_{j-1})]$$

logo,

$$|S(R, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| = \left| \sum_{j=1}^m [f(\xi_j) - f(\bar{\xi}_j)][g(\bar{x}_j) - g(\bar{x}_{j-1})] \right|.$$

Observe que  $\xi_j$  repetirá o valor caso esteja no mesmo intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  e como  $g$  é monótona crescente e limitada em  $[a, b]$ ,

$$\sum_{j=1}^m [g(\bar{x}_j) - g(\bar{x}_{j-1})] = [g(b) - g(a)] = M$$

Sendo  $f$  uniformemente contínua, como  $\max_{1 \leq j \leq m} |\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}| < \delta_\epsilon$  teremos  $|[f(\xi_j) - f(\bar{\xi}_j)]| < \epsilon$

$$\begin{aligned} |S(R, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| &\leq \sum_{j=1}^m |[f(\xi_j) - f(\bar{\xi}_j)]| |[g(\bar{x}_j) - g(\bar{x}_{j-1})]| \\ &\leq \epsilon \sum_{j=1}^m |[g(\bar{x}_j) - g(\bar{x}_{j-1})]| = M\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto

$$|S(R, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| \leq M\epsilon. \quad (5.1)$$

Considere  $\mathcal{P}$  sendo um outro refinamento qualquer de  $R$ , então

$$\begin{aligned} |S(\mathcal{P}, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| &= |S(\mathcal{P}, f, g) - S(R, f, g) + S(R, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| \\ &\leq |S(R, f, g) - S(\mathcal{P}, f, g)| + |S(R, f, g) - S(\mathcal{Q}, f, g)| \\ &\leq 2M\epsilon \end{aligned}$$

e pelo critério de Cauchy,  $f$  é integrável em  $[a, b]$  em relação a  $g$ .  $\square$

### 5.1.2 Teorema Clássico da Representação de Riesz.

Esse teorema é considerado importante pelas aplicações na área de Análise. Consideramos as representações geométricas essenciais para sua interpretação e compreensão. Nelas percebe-se certa similaridade com o cálculo da área de uma região limitada por uma função contínua  $f$  em um intervalo fechado. Enquanto esse cálculo é feito por aproximações sucessivas por áreas de retângulos infinitesimais por meio das funções escadas, para provar o teorema de Riesz busca-se aproximação de  $f$  por uma sequência de funções, cujos gráficos representam linhas poligonais contínuas que se “aproxima” do gráfico de  $f$ . Essa aproximação ocorre por convergência uniforme, e a sutileza da construção evidencia a inteligência e a bela imaginação humana.

Considerações preliminares:

- Indicamos por:

- ★  $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ contínua}\}$

- ★  $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$  norma de  $f$ .

- ★  $f \in C[a, b]$  será:

Crescente ou Decrescente, se preservar estritamente a ordem.

Monótona Crescente ou Monótona Decrescente se mantiver a ordem porém admitir a igualdade, ou seja,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

então  $f$  e crescente.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

então  $f$  será monótona crescente.

Análogo para decrescente e monótona decrescente.

**Defini o 5.5.** Um funcional  $G : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é denominado de,

- *Linear*, se  $\forall f, g \in C[a, b], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tem-se,

$$G[\alpha f + \beta g] = \alpha G(f) + \beta G(g)$$

- *Não negativo* se para  $\forall f \in C[a, b], f(x) \geq 0 \Rightarrow G(f) \geq 0$

- *Limitado* se existir  $M > 0$ , tal que

$$G(f) \leq M\|f\|.$$

**Teorema 5.4. (Representação de Riesz (BARTLE, 1964))** Considere um funcional linear  $G : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , não negativo e limitado. Então, existe uma função monótona crescente  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que, para cada  $f \in C[a, b]$  tem-se a representação

$$G(f) = \int_a^b f dg.$$

*Demonstração.* A demonstração será apresentada por passos:

1. Definiremos a função  $g$  monótona crescente.
2. Construiremos uma sequência de funções que convergirão uniformemente para função  $f$  considerada.
3. A conclusão do teorema.

Passo 1:

1. Fixados  $n$  e  $t$  considere a sequência de aplicações dadas por  $\{h_n(t)\}$ ,  $h_n(t) \in C[a, b]$

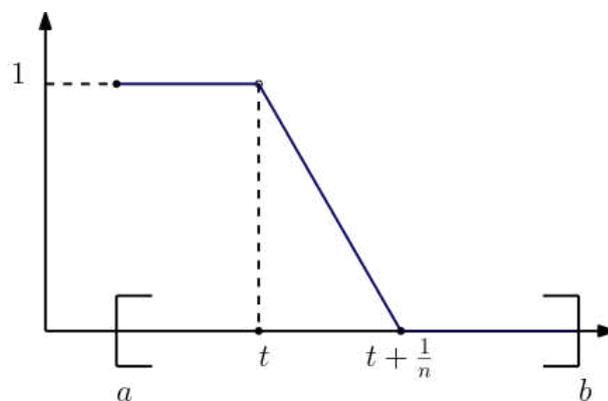


Figura 85 – Gráfico de  $h_n(t)$

Como as aplicações dependem dos parâmetros  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $t \in [a, b]$ , sendo  $x \in [a, b]$  a variável temos:

$$(Figura 85) \quad h_n(t)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, t] \\ 1 - n \left[ x - \left( t + \frac{1}{n} \right) \right] & \text{se } x \in \left[ t, t + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{se } x \in \left[ t + \frac{1}{n}, b \right] \end{cases} .$$

Observe que fixados os parâmetros  $n, s, t$ , se  $s \geq t$  então a função  $h_n(s)(x) \geq h_n(t)(x)$ , ou seja, a sequência  $h_n(t)$  cresce com  $t$ ,  $0 \leq h_n(t)(x) \leq 1$ , (vide Figura 86)

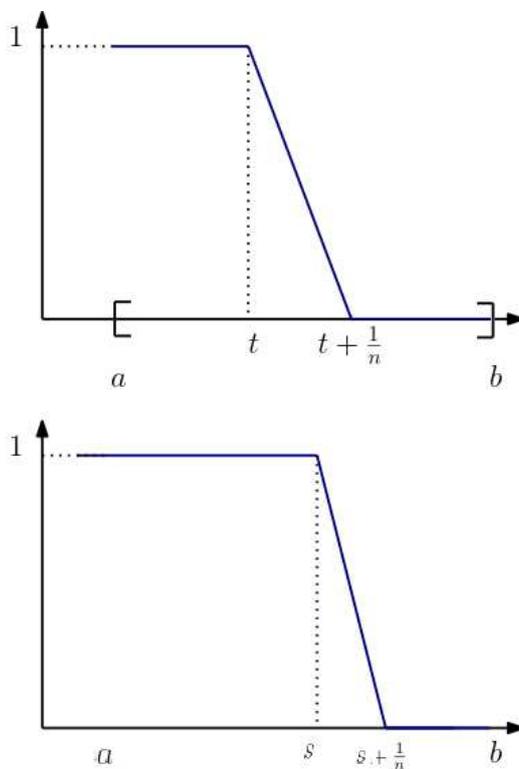


Figura 86 – Variações de  $h_n(t)$  com os parâmetros  $n$  e  $t$ .

Por outro lado, fixado  $t \in [a, b]$  aumentando  $n$ , obteremos uma sequência de funções  $\{h_n(t)\}$  uma sequência monótona decrescente, ou seja, para  $m \geq n$ ,

$$0 \leq h_m(t)(x) \leq h_n(t)(x) \leq 1, x \in [a, b].$$

Sabemos que  $G$  é monótona crescente e limitada, logo

$$0 \leq G(h_m(t)) \leq G(h_n(t)) \leq M\|h_n(t)\| \leq M.$$

A sequência,  $\{G(h_n(t))\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  é real, limitada, monótona crescente, e variando  $n$  converge para cada  $t$  fixo em  $(a, b)$  a um número real que indicaremos por  $g(t)$ , ou ainda,  $g(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G(h_n(t))$ . Dessa forma obtém-se  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = a \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} G(h_n(t)) & \text{se } t \in (a, b) \\ G(h_n(b) = 0 & \text{se } t = b. \end{cases}$$

Logo fixado  $n$  desde que  $t \leq s$  teremos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G(h_n(t)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} G(h_n(s))$  e assim  $G(h_n(t))$  é uma sequência monótona crescente, obtendo  $g(t) \leq g(s)$ , concluindo o passo 1, a construção de  $g$  monótona crescente.

2. No passo (2) construiremos  $\bar{f}(x)$  de modo que convirja uniformemente para a aplicação  $f$  dada. Seja  $f \in C[a, b]$ , como  $g$  é monótona crescente, pelo Teorema 5.3  $f$  é integrável em relação a  $g$ , logo dado  $\epsilon > 0$  existe uma partição  $P$ , onde para qualquer refinamento  $\mathcal{Q}$  de  $P$ ,

$$\left| \int_a^b f dg - S(\mathcal{Q}, f, g) \right| < \epsilon$$

considere  $\mathcal{Q} = (t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_m = b)$ , com:

- $t_i \neq t_j$  para  $i \neq j$
- $\inf_{1 \leq k \leq m} |t_k - t_{k-1}| \geq \frac{2}{n}$

e os intervalos (Figura 87).

$$\left[ t_0 = a, t_1 + \frac{1}{n} \right]; \left[ t_1, t_2 + \frac{1}{n} \right], \dots, \left[ t_{k-1}, t_k + \frac{1}{n} \right], \dots, [t_{m-1}, t_m = b]$$

que possui pontos em comum em

$$\left[ t_{k-1}, t_k + \frac{1}{n} \right] \cap \left[ t_k, t_{k+1} + \frac{1}{n} \right] = \left[ t_k, t_k + \frac{1}{n} \right] \tag{5.2}$$

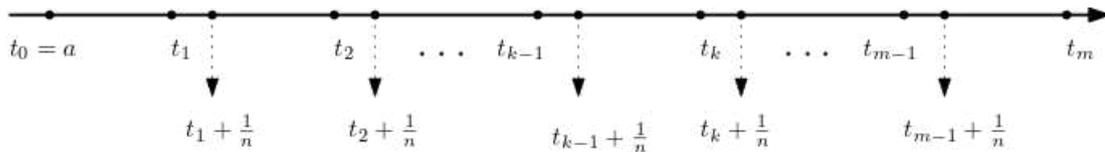


Figura 87 – Representação de pontos em intervalos.

Definimos  $\bar{f}(x)$  através das funções  $f$  e  $h_n(t)$  por:

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = f(t_1)h_n(t_1)(x) + \sum_{k=2}^m f(t_k)[h_n(t_k) - h_n(t_{k-1})](x) \\ x \in \left[ t_{k-1}, t_k + \frac{1}{n} \right]; 1 \leq k \leq m - 1. \end{cases}$$

Duas observações são importantes,

a)  $x \in \left[ t_k, t_k + \frac{1}{n} \right]$  por (5.2) pertencerá a dois intervalos,

$$\left[ t_{k-1}, t_k + \frac{1}{n} \right] \quad \text{e} \quad \left[ t_k, t_{k+1} + \frac{1}{n} \right],$$

assim na determinação de  $\bar{f}(x)$ , para  $k$  e  $k + 1$ , dará origem na soma a duas parcelas,

$$f(t_k)[h_n(t_k) - h_n(t_{k-1})](x) \text{ e } f(t_{k+1})[h_n(t_{k+1}) - h(t_k)](x). \quad (5.3)$$

b) A interpretação gráfica da diferença:  $h_n(t_k) - h_n(t_{k-1})$  para os intervalos  $\left[ t_{k-2}, t_{(k-1)} + \frac{1}{n} \right]$  e  $\left[ t_{k-1}, t_{(k)} + \frac{1}{n} \right]$   $2 \leq k \leq m$  (Figura 88).

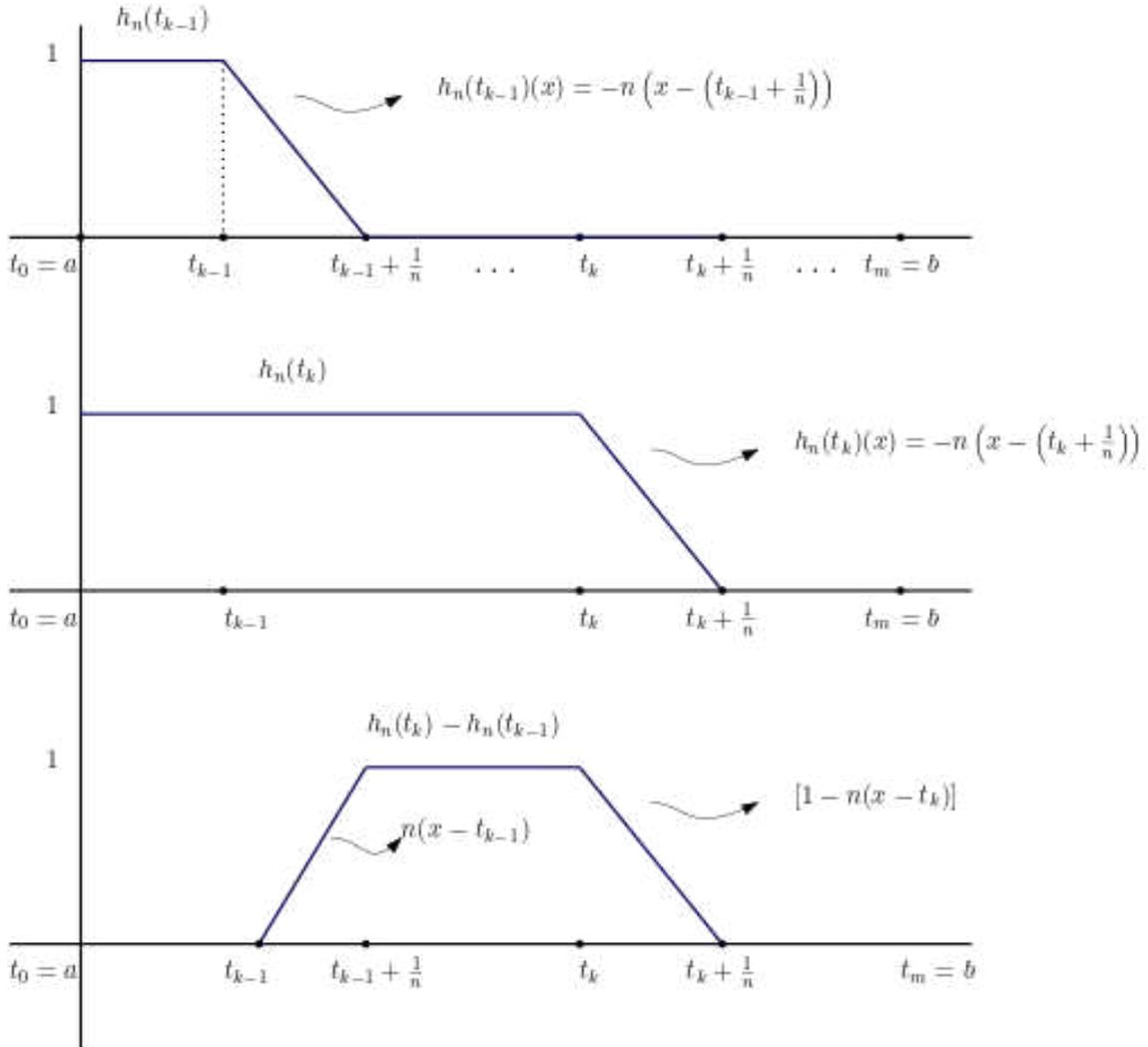


Figura 88 – Interpretação de  $h_n(t_k) - h_n(t_{k-1})$

Ao desenvolver o somatório, ocorrerão duas parcelas no intervalo

$$\left[ t_k, t_{k+\frac{1}{n}} \right] \text{ (vide Figura 88) ,}$$

sendo  $f(t_k)[1 - n(x - t_k)]$  referente a  $h_n(t_k)$  e  $f(t_{k+1})n(x - t_k)$  relativa a  $h_n(t_{k+1})$ , levando a :

$$h_n(t_{k+1}) - h_n(t_k) = f(t_{k+1})n(x - t_k) + f(t_k)[1 - n(x - t_k)]$$

Assim, para  $1 \leq k \leq m - 1$  (vide Figura 89) obtemos o gráfico

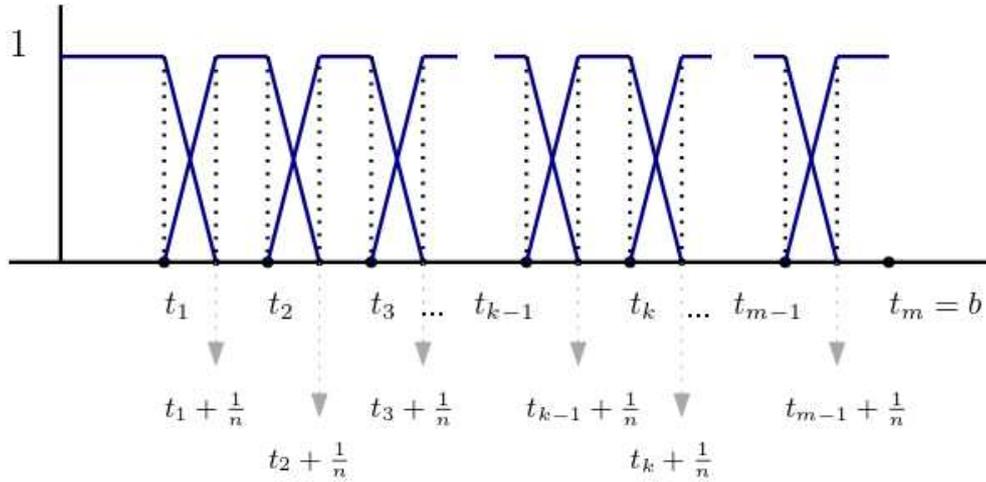


Figura 89 – Interpretação da diferença:  $h_n(t_{k+1}) - h_n(t_k)$ , para  $1 \leq k \leq m - 1$ .

Por (5.3) e pela Figura 89 concluímos que,

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ se } x \in [t_0, t_1] \text{ então } \bar{f}(x) = f(t_1) \\ b) \text{ se } x \in \left[ t_{k-1} + \frac{1}{n}, t_k \right] \text{ então } \bar{f}(x) = f(t_k) \text{ (constante)} \\ c) \text{ se } x \in \left[ t_k, t_k + \frac{1}{n} \right] \text{ então } \bar{f}(x) = f(t_{k+1})n(x - t_k) + f(t_k)[1 - n(x - t_k)] \end{array} \right. \quad (5.4)$$

para  $2 \leq k \leq m - 1$ .

- É óbvio que  $\bar{f}(x)$  é contínua em  $[a, b]$
- Construção do gráfico de  $\bar{f}(x)$ .

Temos  $\bar{f}(x) = f(t_k)$  em  $\left[ t_{k-1} + \frac{1}{n}, t_k \right]$  constante, e em  $\left[ t_k, t_k + \frac{1}{n} \right]$ ,

$$\bar{f}(x) = (1 - \alpha)f(t_{k+1}) + \alpha f(t_k),$$

sendo  $\alpha = n(x - t_k)$ . Assim se  $x \in \left[ t_{k-1} + \frac{1}{n}, t_k \right]$  os pontos  $(x, \bar{f}(x))$  estarão sobre um segmento de reta horizontal, se  $x \in \left[ t_k, t_k + \frac{1}{n} \right]$ , estarão sobre um segmento de reta oblíquo (desde  $f$  não seja constante nesse intervalo) (5.4c) (vide Figura 90).

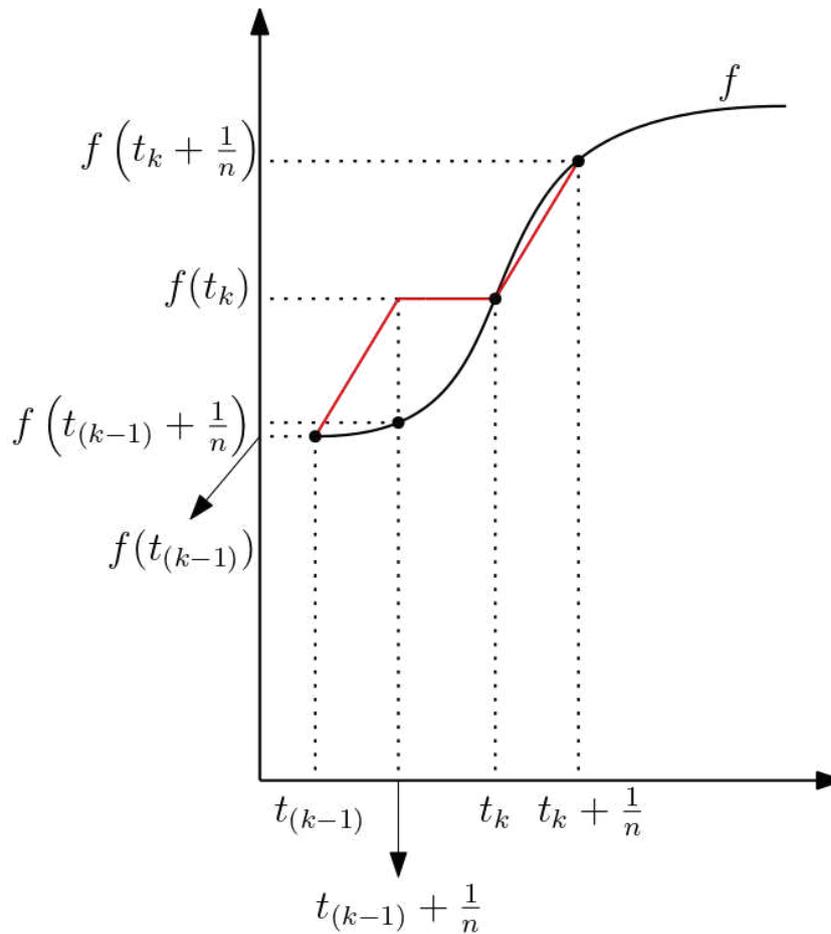


Figura 90 – Aproximação entre os gráficos das funções  $\bar{f}(t)$  e  $f(t)$ .

Provaremos que  $\bar{f}$  converge uniformemente para  $f$ .

Sabemos que  $f$  é uniformemente contínua, pois é contínua em intervalo fechado, logo dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\epsilon > 0 : |x - y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

Considerando  $|x - t_{k-1}| < \delta_\epsilon$  e  $|x - t_k| < \delta_\epsilon$  para  $x \in [t_{k-1}, t_k]$ ,

- a) para  $x \in \left[ t_{k-1} + \frac{1}{n}, t_k \right]$ ,  $\bar{f}(x) = f(t_k)$  constante, e pela continuidade  $f$   $|f(x) - \bar{f}(x)| < \epsilon$ .
- b) para  $x \in \left[ t_k, t_k + \frac{1}{n} \right]$  temos  $\bar{f}(x) = f(t_{k+1})n(x - t_k) + f(t_k)[1 - n(x - t_k)]$

$$\begin{aligned}
|f(x) - \bar{f}(x)| &= |f(x) - [f(t_{k+1})n(x - t_k) + f(t_k)[1 - n(x - t_k)]]| \\
&\text{subtraímos e somamos a expressão: } f(x)n(x - t_k) \\
&= |[f(x)n(x - t_k) - f(t_{k+1})n(x - t_k)] + [f(x) - f(x)n(x - t_k) \\
&\quad - f(t_k)[1 - n(x - t_k)]]| \\
&= |[f(x) - f(t_{k+1})]n(x - t_k) + [f(x)[1 - n(x - t_k)] \\
&\quad - f(t_k)[1 - n(x - t_k)]| \\
&= |[f(x) - f(t_k)]n(x - t_k) + [f(x) - f(t_k)][1 - n(x - t_k)]| \\
&< \epsilon n(x - t_k) + \epsilon[1 - n(x - t_k)] \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

De 2a) e 2b), tomando  $1 \leq k \leq m - 1$ , temos que

$$|f(x) - \bar{f}(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Concluimos o passo (2) mostrando que  $\bar{f}$  converge uniformemente para  $f$

3. (A conclusão do teorema) No passo (3) devemos mostrar que,

$$\forall f \in C[a, b], G(f) = \int_a^b f dg.$$

pela convergência,

$$|f(x) - \bar{f}(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

logo,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \bar{f}(x)| = \|f - \bar{f}\| < \epsilon$$

sendo  $G$  limitado,

$$|G(f - \bar{f})| \leq M\|f - \bar{f}\| \Rightarrow |G(f) - G(\bar{f})| \leq M\|f - \bar{f}\| < M\epsilon.$$

assim,

$$|G(f - \bar{f})| < M\epsilon. \tag{5.5}$$

Se,

$$g(t_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G(h_n(t_k)) \text{ e } g(t_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G(h_n(t_{k-1}))$$

então,

$$|[G(h_n(t_k)) - G(h_n(t_{k-1}))] - [g(t_k) - g(t_{k-1})]| < R\epsilon, \tag{5.6}$$

consideraremos  $R = \frac{1}{m\|f\|}$ .

Aplicando  $G$  em  $\bar{f}$  obtém-se

$$\begin{aligned} G(\bar{f}) &= G(f(t_1)h_n(t_1)) + G\left(\sum_{k=2}^m f(t_k)[h_n(t_k) - h_n(t_{k-1})]\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} G\left(\sum_{k=1}^m f(t_k)[h_n(t_k) - h_n(t_{k-1})]\right) \\ &= \sum_{k=1}^m f(t_k)[G(h_n(t_k)) - G(h_n(t_{k-1}))] \\ &\quad (*) \text{ pela linearidade de } G. \end{aligned}$$

Portanto

$$G(\bar{f}) = \sum_{k=1}^m f(t_k)[G(h_n(t_k)) - G(h_n(t_{k-1}))]. \quad (5.7)$$

Por (5.6) e (5.7),

$$\left|G(\bar{f}) - \sum_{k=1}^m f(t_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]\right| < \epsilon. \quad (5.8)$$

De fato,

$$\begin{aligned} &\left|G(\bar{f}) - \sum_{k=1}^m f(t_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^m f(t_k)[G(h_n(t_k)) - G(h_n(t_{k-1}))] - \sum_{k=1}^m f(t_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^m f(t_k)[G(h_n(t_k)) - G(h_n(t_{k-1}))] - f(t_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^m f(t_k) \{ [G(h_n(t_k)) - G(h_n(t_{k-1}))] - [g(t_k) - g(t_{k-1})] \}\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m |f(t_k)| R\epsilon \leq R\epsilon \sum_{k=1}^m |f(t_k)| \leq R\epsilon \sum_{k=1}^m \|f\| = R\epsilon m \|f\| = \epsilon. \end{aligned}$$

Mas,

$\sum_{k=1}^m f(t_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})] = S(\mathcal{P}, f, g)$ : soma de Riemann-Stieltjes,

$$|G(\bar{f}) - S(\mathcal{P}, f, g)| < \epsilon \Rightarrow \left| \int_a^b f dg - G(\bar{f}) \right| < 2\epsilon, \text{ pois}$$

$$\left| \int_a^b f dg - G(\bar{f}) \right| \leq \left| \int_a^b f dg - S(\mathcal{P}, f, g) \right| + |G(\bar{f}) - S(\mathcal{P}, f, g)| < 2\epsilon.$$

Assim,

$$\left| \int_a^b f dg - G(\bar{f}) \right| < 2\epsilon. \quad (5.9)$$

Concluindo a demonstração, por (5.5) e (5.9)

$$\left| \int_a^b f dg - G(f) \right| \leq \left| \int_a^b f dg - G(\bar{f}) \right| + |G(f) - G(\bar{f})| < 2\epsilon + M\epsilon = (M + 2)\epsilon.$$

Finalmente,

$$G(f) = \int_a^b f dg.$$

□

## 5.2 Teorema de representação de Riesz para Integrais Monótonas.

Em continuidade ao que propomos no início do Capítulo 5, apresentamos a definição dos funcionais *fuzzy* em  $[0, +\infty]^X$ , aqui denominados de integrais monótonas, as suas propriedades e condições sobre as medidas para garantir sua representação do tipo Riesz.

**Definição 5.6.** *Seja  $X \neq \emptyset$ ,  $B \subset [0, +\infty]^X$ , onde:*

$$\forall a \in [0, +\infty), f \in B \Rightarrow \{af, a \wedge f, f - f \wedge a\} \subset B \text{ (vide Figura 91).}$$

O funcional  $T$ ,

$$T : B \subset [0, +\infty]^X \rightarrow [0, +\infty],$$

é chamado de funcional *fuzzy* sobre  $[0, +\infty]$  ou de integral monótona, se as seguintes condições forem verificadas.

$$(T_1) \quad T(\bar{0}) = 0, \bar{0}: \text{função nula}$$

$$(T_2) \quad f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g)$$

$$(T_3) \quad T(f) = T(f \wedge a) + G(f - f \wedge a)$$

$$(T_4) \quad T(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(f \wedge n)$$

$$(T_5) \quad G(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T\left(f - f \wedge \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*$$

**Exemplo 5.1.** *Seja  $X \neq \emptyset$ , e  $\alpha : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  uma função monótona crescente,*

$$(i) \quad \alpha(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \quad A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B).$$

$$T : [0, +\infty]^X \rightarrow [0, +\infty]$$

$$h \rightarrow T(h) = \int_0^{+\infty} \alpha\{x \in X : h(x) > t\} dt$$

Esse funcional é uma integral monótona. De fato,

$$(T_1) \quad T(\bar{0}) = \int_0^{+\infty} \alpha\{x \in X : \bar{0}(x) > t\} dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$$

(T<sub>2</sub>)  $f \leq g, f, g \in [0, +\infty]^X \Rightarrow \{x : f(x) > t\} \subset \{x : g(x) > t\}$  sendo  $\alpha$  monótona,  $\alpha\{x : f(x) > t\} \leq \alpha\{x : g(x) > t\}$ , para  $t \in [0, +\infty)$ , logo,

$$\int_0^{+\infty} \alpha\{x : f(x) > t\} dt \leq \int_0^{+\infty} \alpha\{x : g(x) > t\} dt \Rightarrow T(f) \leq T(g)$$

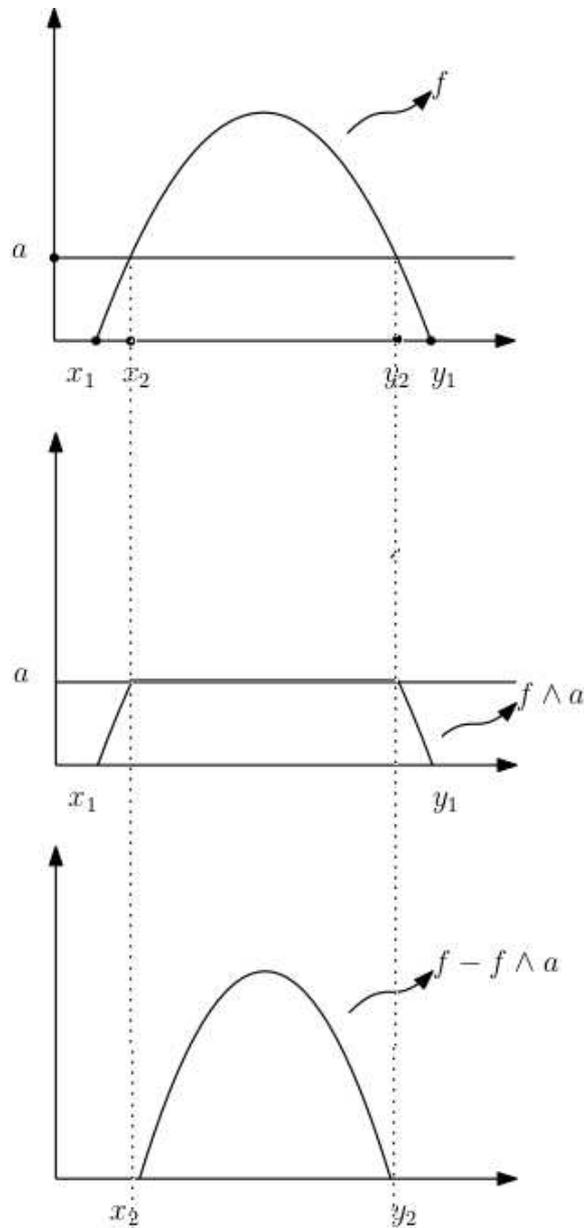


Figura 91 – Gráficos respectivos de  $f, f \wedge a, f - f \wedge a$  ( $f \in B$  da Definição 5.6).

$$(T_3) \quad T(f \wedge a) = \int_0^{+\infty} \alpha\{x : (f \wedge a) > t\} dt. \text{ Mas,}$$

$$\{x : (f \wedge a) > t\} = \emptyset \text{ para } t \geq a.$$

Logo,

$$T(f \wedge a) = \int_0^a \alpha\{x : f > t\} dt$$

$$T(f - f \wedge a) = \int_0^{+\infty} \alpha\{x : (f - f \wedge a) > t\} dt$$

$$= \int_a^{+\infty} \alpha\{x : f > t\} dt.$$

Logo,

$$T(f \wedge a) + T(f - f \wedge a) = \int_0^a \alpha\{x : f > t\} dt + \int_a^{+\infty} \alpha\{x : f > t\} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \alpha\{x : f > t\} dt$$

$$= T(f).$$

$$(T_4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T(f \wedge n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \alpha\{x : (f \wedge n) > t\} dt \right] \stackrel{(*)}{=}$$

$$\text{fixado } t \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 > t, f \wedge n = f$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_0^{+\infty} \alpha\{x : f > t\} dt = T(f)$$

(T<sub>5</sub>) Analogamente, fixado  $t$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < t, \text{ e para } n > n_0, \frac{1}{n} < f \Rightarrow \sup_n \left( f - f \wedge \frac{1}{n} \right) > f \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \alpha \left\{ x : \left( f - f \wedge \frac{1}{n} \right) > t \right\} = T(f)$$

logo o funcional

$$T(f) = \int_0^{+\infty} \alpha\{x : f > t\} dt$$

é uma integral monótona.

Passaremos a denotar,

$$\int_0^{+\infty} \alpha\{x : f > t\} dt,$$

por

$$\int_X f d\alpha,$$

que denominaremos de integral monótona de  $f$  sobre  $X$  em relação a medida  $\alpha$ .

**Definição 5.7.** Dada uma integral monótona qualquer,

$$T : B \subset [0, +\infty]^X \rightarrow [0, +\infty]$$

podemos associar a  $T$ , duas medidas indicadas por  $\alpha_T, \beta_T$ , obtidas a partir de  $T$ , por:

$$\alpha_T, \beta_T : 2^X \rightarrow [0, +\infty],$$

com

$$\alpha_T(A) = \sup_{f \in B} \{T(f), f \leq \mathcal{X}_A\} \text{ e } \beta_T(A) = \sup_{f \in B} \{T(f), f \geq \mathcal{X}_A\}$$

$\mathcal{X}_A$ : função característica de  $A$ . Obviamente  $\alpha_T \leq \beta_T$  e prova-se que são medidas em  $X$ .

**Definição 5.8.** Diremos que uma medida fuzzy geral  $\gamma : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  representa o funcional fuzzy

$$T : B \subset [0, +\infty]^X \rightarrow [0, +\infty]$$

se,

$$T(f) = \int_X f d\gamma, \forall f \in B.$$

**Teorema 5.5.** (BASSANEZI; GRECO, 1984) Seja

$$T : B \subset [0, +\infty]^X \rightarrow [0, +\infty]$$

um funcional fuzzy (integral monótona). A medida

$$\gamma : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$$

representa o funcional  $T$  se, e somente se,  $\gamma \in [\alpha_T, \beta_T]$ , ou seja,  $\alpha_T \leq \gamma \leq \beta_T$ .

### 5.3 Teorema da Representação de Funcionais pela Integral Fuzzy Geral

Nessa seção serão apresentadas a definição, as propriedades dos funcionais que poderão ser representados pela integral *fuzzy geral*. Os desenvolvimentos e argumentos utilizados são baseados na demonstração do teorema para integrais monótonas por Bassanezi e Greco (1984) e Bassanezi e Greco (1988). Teoremas do tipo representações de Riesz, levam em consideração:

- A especificidade da definição do funcional, e as condições estabelecidas ao seu domínio;
- A compatibilidade entre as propriedades do funcional e da integral que poderá representá-lo;

- As construções das medidas. Como, por exemplo, a  $g$  para a integral de Riemann Stieltjes, e na Seção 5.2 as medidas  $\gamma \in [\alpha_T, \beta_T]$ .

Estabeleceremos os funcionais  $T : B \subset [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$  que poderão ser representados por uma integral *fuzzy geral* com respeito a uma medida  $\gamma$ . Segue definição para funcional *fuzzy*  $T$  e seu domínio  $B$ . Espera-se que

$$(T.1) \quad f, g \in B, f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g)$$

$$(T.2) \quad T(f \vee a) = T(f) \vee a \text{ e } T(f \wedge a) = T(f) \wedge a$$

A definição de  $T$  e  $B$  é dada por,

**Definição 5.9.** *Um funcional  $T$  com domínio  $B$ ,*

$$T : B \subset [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$$

*é denominado de funcional fuzzy sobre  $[0, 1]^X$ , se satisfazer as condições para  $B$*

$$B_1) \quad \mathbb{1} \in [0, 1]^X, \mathbb{1}(x) = 1, \forall x \in X \Rightarrow \mathbb{1} \in B$$

$$B_2) \quad a \in [0, 1], f \in B \Rightarrow \{af, f \vee a, (f - f \wedge a)\} \subset B$$

$$B_3) \quad g \in [0, 1]^X, a \in [0, 1], \{g \wedge a, (g - g \wedge a)\} \subset B \Rightarrow g \in B$$

para  $T$ ,

$$(T_1) \quad f, g \in B, f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g)$$

$$(T_2) \quad a \in [0, 1]; \{f, f \wedge a, f \vee a\} \subset B \Rightarrow \begin{cases} T(f \vee a) = T(f) \vee a; \text{ e} \\ T(f \wedge a) = T(f) \wedge a \end{cases}$$

**Propriedade 5.1.** *Se  $B$  é um domínio fuzzy de um funcional fuzzy  $T$  então valem:*

$$(B_4) \quad a \in [0, 1], f, g \in B, f \leq g \Rightarrow f \vee (g \wedge a) \in B;$$

$$(B_5) \quad a \in [0, 1], f \in B \Rightarrow (f \vee a) \in B. T_1, T_2 \text{ são equivalentes a } T_3 \text{ e } T_4, \text{ onde,}$$

$$(T_3) \quad T(\mathbb{1}) = 1 \text{ e } T(\bar{0}) = 0 \text{ onde } \mathbb{1}(x) = 1, \bar{0}(x) = 0, \forall x \in X;$$

$$(T_4) \quad a \in [0, 1], f, g \in B, f \leq g \Rightarrow T[f \vee (g \wedge a)] = T(f) \vee [T(g) \wedge a].$$

*Demonstração.* Usando  $(B_3)$  mostra-se  $(B_4)$ . De fato:

Seja  $G = f \vee (g \wedge a)$  (vide Figura 92), então

$$G = \begin{cases} f \vee a = a & \text{se } f \leq g \leq a \\ f \vee g = g & \text{se } f \leq a \leq g \\ f \vee g = g & \text{se } a \leq f \leq g \end{cases}$$

$$G \wedge a = \begin{cases} a \wedge a = a & \text{se } f \leq g \leq a \\ g \wedge a = g & \text{se } f \leq a \leq g \\ g \wedge a = g & \text{se } a \leq f \leq g \end{cases}$$

$$G - G \wedge a = \begin{cases} g - g \wedge a = 0 & \text{se } f \leq g \leq a \\ a - a = 0 & \text{se } f \leq a \leq g \\ 0 & \text{se } a \leq f \leq g \end{cases}$$

Logo se vale  $B_3$  então,  $G \wedge a \in B$  e  $G - G \wedge a \in B \Rightarrow G \in B$ , concluindo a demonstração. Para provar  $(B_5)$  basta considerar  $g = 1$  em  $(B_4)$ .

$T_1$  e  $T_2$  são equivalentes a  $T_3$  e  $T_4$ . De fato:

Supor válidos  $T_1$  e  $T_2$ , então

$$T(\mathbb{1} \vee a) = T(\mathbb{1}) \vee a, \forall a \in [0, 1] \Rightarrow T(\mathbb{1}) = T(\mathbb{1}) \vee 1 = 1.$$

$$T(\bar{0} \wedge a) = T(\bar{0}) \wedge a \forall a \in [0, 1] \Leftrightarrow T(\bar{0}) = T(\bar{0}) \wedge 0 = 0.$$

Provando  $(T_4)$

Sejam  $f, g \in B$  e  $f \leq g, a \in [0, 1]$ . Assim, por  $(B_4)$   $f \vee (g \wedge a) \in B$

$$a \wedge [f \vee (g \wedge a)] = g \wedge a$$

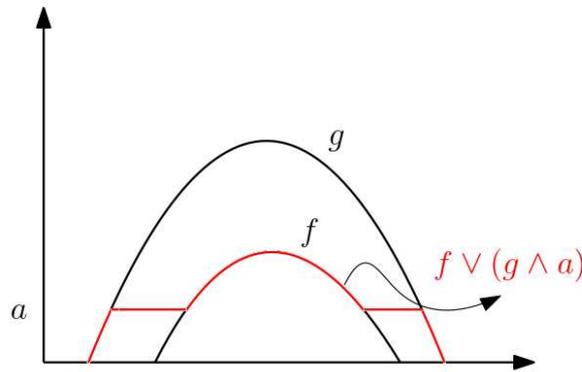


Figura 92 – Representação de  $f \vee (g \wedge a)$ .

logo,

$$T[f \vee (g \wedge a)] \wedge a = T(g \wedge a) \leq a \Rightarrow T[f \vee (g \wedge a)] = T(g \wedge a) \quad (5.10)$$

Mas,

$$[T(f) \vee T(g \wedge a)] = [T(f) \vee T(g) \wedge a] = T(g) \wedge a = T(g \wedge a). \quad (5.11)$$

Por (5.10) e (5.11)

$$T[f \vee (g \wedge a)] = T(f) \vee [T(g) \wedge a].$$

De modo análogo a recíproca pode ser demonstrada. □

**Propriedade 5.2.** *Seja  $\alpha : 2^X \rightarrow [0, 1]$  uma medida fuzzy geral e  $f \in [0, 1]^X$ , então:*

$$\int_X f d\alpha = \sup_{t \in [0,1]} [t \wedge \alpha(F_t)] = \inf_{t \in [0,1]} [t \vee \alpha(F_t)]$$

onde  $F_t = \{x \in X : f(x) \geq t\}$ .

*Demonstração.* Tem-se

- $\alpha(F_t)$  é decrescente em  $t, t \in [0, 1]$
- $t$  é crescente,  $t \in [0, 1]$

Assim,

para  $t = 0, \alpha(F_t) = 1 \Rightarrow t \vee \alpha(F_t) = 1,$

para  $t = 1, \alpha(F_t) \vee t = 1,$

logo existe  $t \in [0, 1]$  com  $t \vee \alpha(F_t) < 1$ , pois caso contrário  $f(t) = 1$  para qualquer  $t \in [0, 1]$ .

Considere,  $M = \inf_{t \in [0,1]} [t \vee \alpha(F_t)].$

Geometricamente,

- para  $\alpha(F_t)$  contínua (Figura 93)

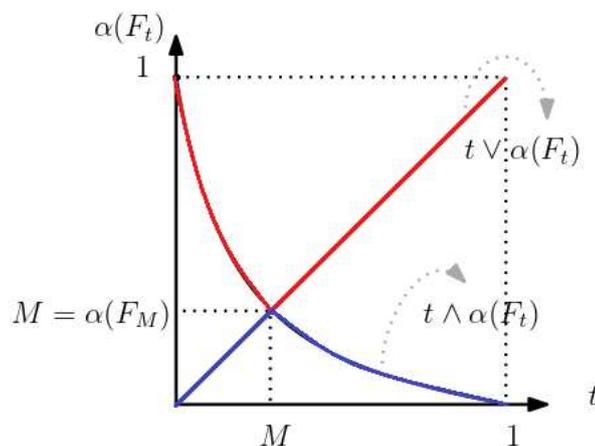


Figura 93 – Exemplo para  $\alpha(F_t)$  contínua.

- para  $\alpha(F_t)$  descontínua e sem ponto fixo (existe M) (Figura 94).

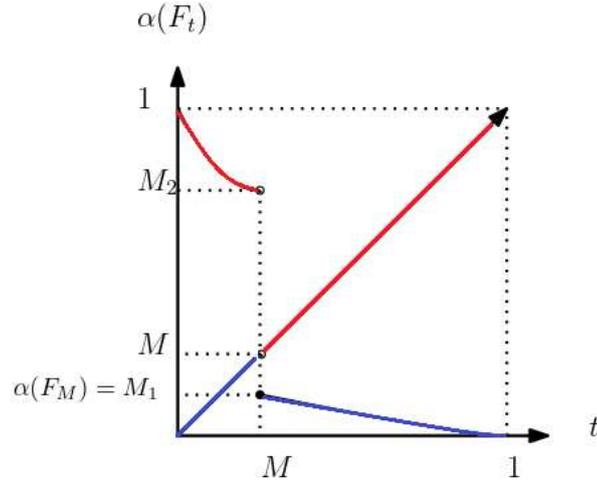


Figura 94 – Exemplo para  $\alpha(F_t)$  descontínua, sem ponto fixo.

$$t \in [0, M) \Rightarrow \alpha(F_t) > t \Rightarrow \begin{cases} t \vee \alpha(F_t) = \alpha(F_t) \\ t \wedge \alpha(F_t) = t \end{cases}$$

$$t \in [M, 1] \Rightarrow \alpha(F_t) \leq t \Rightarrow \begin{cases} t \vee \alpha(F_t) = t \\ t \wedge \alpha(F_t) = \alpha(F_t) \end{cases} .$$

Logo,

$$\sup_{t \in [0,1]} [t \wedge \alpha(F_t)] = \inf_{t \in [0,1]} [t \vee \alpha(F_t)] = M.$$

Caso a medida seja descontínua recai na Figura 94

□

**Definição 5.10.** Seja  $X \neq \emptyset$ , indicamos por  $M_F$  o conjunto de todas as medidas fuzzy geral sobre  $X$ , ou seja,

$$M_F = \{\alpha : 2^X \rightarrow [0, 1] : \alpha \text{ é medida fuzzy geral}\}.$$

**Definição 5.11.** Seja  $T : B \subset [0, +1]^X \rightarrow [0, 1]$  um funcional fuzzy e  $\gamma : 2^X \rightarrow [0, 1]$  uma medida fuzzy geral. Diremos que  $\gamma$  representa  $T$  se, e somente se,  $\forall f \in B \Rightarrow T(f) = \int_X f d\gamma$ .

**Observação 5.3.**  $M_T = \{\gamma, \gamma : 2^X \rightarrow [0, 1]$  medida fuzzy geral que representa  $T\}$ .

**Teorema 5.6.** (GRECO, 1987) Se um funcional fuzzy  $T$  for representável por alguma medida, então o conjunto  $M_T$  possuirá um elemento minimal  $\alpha_T$  e um elemento maximal  $\beta_T$ .

*Demonstração.* Seja  $\{\alpha_i\}$  uma família qualquer não vazia  $\alpha_i \in M_T$ . Logo

$$\begin{aligned}
 \int_X f \cdot (\alpha_1 \vee \alpha_2) &= \sup_{t \in [0,1]} [t \wedge (\alpha_1 \vee \alpha_2)(F_t)] \\
 &= \sup_{t \in [0,1]} [t \wedge \alpha_1(F_t)] \vee \sup_{t \in [0,1]} [t \wedge \alpha_2(F_t)] \\
 &= \left( \int_X f \cdot \alpha_1 \right) \vee \left( \int_X f \cdot \alpha_2 \right)
 \end{aligned}$$

analogamente podemos concluir

$$\int_X f \cdot (\alpha_1 \wedge \alpha_2) = \left( \int_X f \cdot \alpha_1 \right) \wedge \left( \int_X f \cdot \alpha_2 \right)$$

de onde pode se generalizado para

$$\int_X f \cdot \left( \bigwedge_{i \in I} \alpha_i \right) = \bigwedge_{i \in I} \int_X f \cdot \alpha_i \quad \text{ou} \quad \int_X f \cdot \left( \bigvee_{i \in I} \alpha_i \right) = \bigvee_{i \in I} \int_X f \cdot \alpha_i.$$

Toma-se

$$\alpha_T \in MT : \int_X f \cdot \left( \bigwedge_{i \in I} \alpha_i \right) = \int_X f \cdot \alpha_T \quad \text{e} \quad \beta_T \in MT : \int_X f \cdot \left( \bigvee_{i \in I} \alpha_i \right) = \int_X f \cdot \beta_T$$

então  $M_T$  possui um elemento minimal  $\alpha_T$  e um elemento maximal  $\beta_T$ .  $\square$

## 5.4 O Teorema de Representação de Riesz para Funcionais *Fuzzy*

**Teorema 5.7.** *Um funcional fuzzy  $T$  é representado por uma medida fuzzy geral  $\gamma$  se, e somente se,  $\gamma \in [\alpha', \beta']$  onde*

$$\alpha'(A) = \sup_{f \in B} \{T(f) : f \leq \mathcal{X}_A\} \quad \text{e} \quad \beta'(A) = \inf_{f \in B} \{T(f) : f \geq \mathcal{X}_A\} \quad (\text{vide Figura 95})$$

com  $A \in 2^X$  e  $\mathcal{X}_A$  é a função característica de  $A$ .

*Demonstração.* Inicialmente será mostrado que,

$$\alpha', \beta' \in M_F \quad \text{e} \quad \alpha' \leq \beta'$$

de fato,

- $\alpha'(\emptyset) = 0$ ,  $\beta'(\emptyset) = 0$  e  $\alpha'$ ,  $\beta'$  são monótonas,

$$\begin{aligned}
 A \subset B &\Rightarrow \sup_{f \in B} \{T(f) : f \leq \mathcal{X}_A\} \leq \sup_{f \in B} \{T(f) : f \leq \mathcal{X}_B\} \\
 &\Rightarrow \alpha'(A) \leq \alpha'(B) \\
 &\Rightarrow \alpha' \in M_F.
 \end{aligned}$$

Demonstração semelhante para  $\beta'$  logo  $\beta' \in M_F$ .

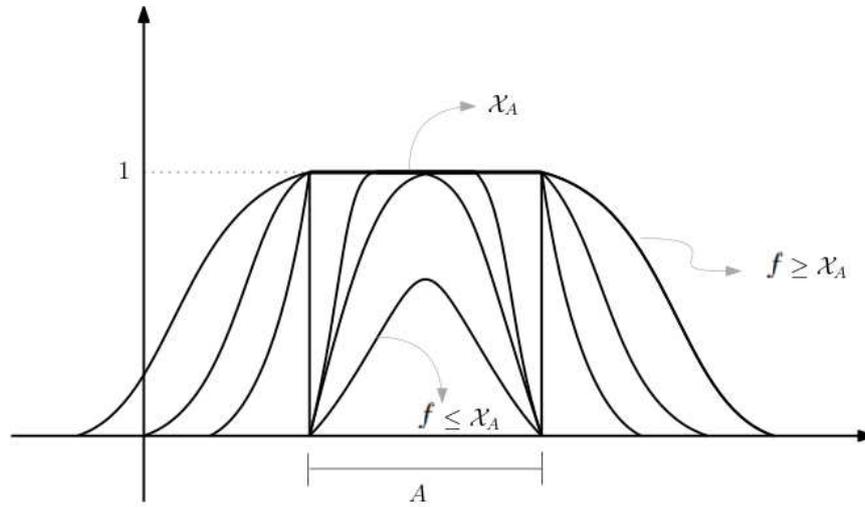


Figura 95 – Gráficos, da função característica  $\mathcal{X}_A$  e das funções  $f \geq \mathcal{X}_A, f \leq \mathcal{X}_A$ .

Sejam  $f_1, f_2 \in B$  com  $A \in 2^X$ ,

$$(f_1 \leq \mathcal{X}_A) \leq f_2 \Rightarrow T(f_1) \leq T(f_2)$$

pois  $T$  é monótono, logo

$$\sup_{f \in B} \{T(f) : f \leq \mathcal{X}_A\} \leq \inf_{f \in B} \{T(f) : f \geq \mathcal{X}_B\} \Rightarrow \alpha' \leq \beta'.$$

- provaremos que, se  $\gamma$  representa  $T$  então

$$\gamma \in M_T = [\alpha', \beta'].$$

Seja  $\gamma$  uma medida fuzzy geral qualquer que representa  $T, \forall f \in B$

$$T(f) = \int_X f \cdot \gamma.$$

Para qualquer  $A \in 2^X$ , considere  $f_1, f_2 \in B$  com,

$$f_1 \leq \mathcal{X}_A \leq f_2,$$

como a integral fuzzy é monótona,

$$T(f_1) = \int_X f_1 \cdot \gamma \leq \int_X \mathcal{X}_A \cdot \gamma \leq \int_X f_2 \cdot \gamma = T(f_2)$$

$$\Rightarrow T(f_1) \leq \gamma(A) \leq T(f_2)$$

$$\Rightarrow \sup_{f \in B} \{T(f) : f \leq \mathcal{X}_A\} \leq \gamma(A) \leq \inf_{f \in B} \{T(f) : f \geq \mathcal{X}_A\}$$

$$\Rightarrow \alpha'(A) \leq \gamma(A) \leq \beta'(A)$$

$$\Rightarrow \gamma \in [\alpha', \beta'] = MT.$$

Será agora mostrado a recíproca, se  $\gamma \in [\alpha', \beta']$  então  $\gamma \in M_T$ , ou seja, para

$$\forall \gamma, \alpha' \leq \gamma \leq \beta', \gamma \text{ representará } T.$$

Fato importante será mostrar que:

$$T(f) \leq t \Rightarrow T(f) \leq [t \vee \alpha' \{f \geq t\}],$$

a ser feita em duas etapas:

(i)  $T(f) \leq t \Rightarrow T(f) \leq [t \vee \alpha' \{f \geq t\}]$ ,  $t \in [0, 1]$  (óbvia)

(ii)  $T(f) > t \Rightarrow T(f) \leq \alpha' \{f \geq t\}$

Se  $T(f) > t$ , tome  $a \in (0, 1)$  tal que:

1.  $T(f) > a > t$ , e considere a função  $g_1$  dada por:
2.  $g_1 \leq \mathcal{X}_{\{f \geq t\}}$
3.  $g_1 = a \frac{f \wedge a - f \wedge t}{a - t} + (f - f \wedge a)$  (Figura 96).

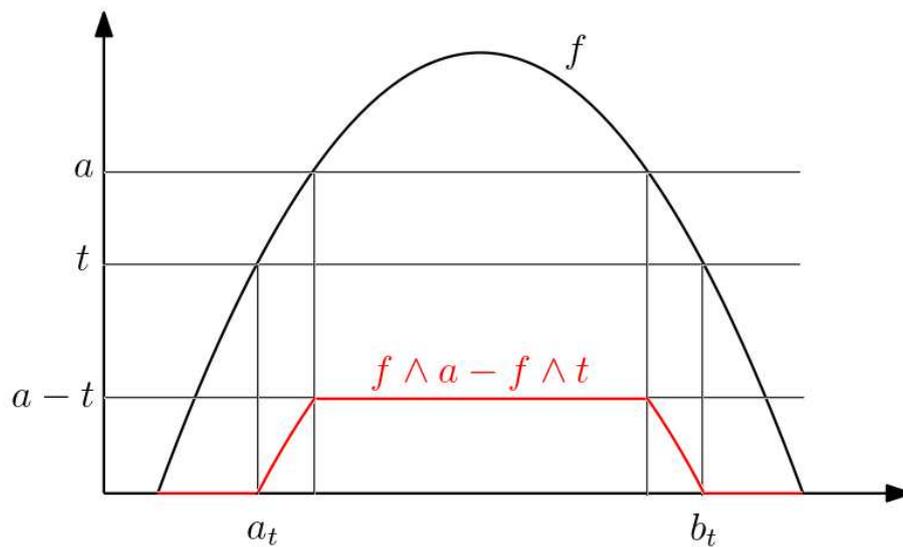


Figura 96 – Representação da aplicação  $[f \wedge a - f \wedge t]$

Considerando,

$$g_1 \wedge a \in B \tag{5.12}$$

$$g_1 - g_1 \wedge a = (f - f \wedge a) \in B$$

pela condição 3 para o domínio  $B$ ,  $g_1 \in B$

$$T(g_1) \leq \alpha'\{f \geq t\}, \text{ pois } g_1 \leq \mathcal{X}_{\{f \geq t\}}. \quad (5.13)$$

$g_1 \in B$ ,  $(g_1 \vee a) \in B$  e  $g_1 \vee a \geq f$ , logo

$$T(g_1 \vee a) \geq T(f) \Rightarrow T(g_1) \vee a \geq T(f)$$

sendo  $T(f) \geq a$ , concluímos,

$$T(g_1) \geq T(f). \quad (5.14)$$

De (5.13) e (5.14) tem-se  $T(f) \leq T(g_1) \leq \alpha'\{f \wedge t\}$ , sendo provado (ii).

Portanto,

$$\forall f \in B, \forall t \in [0, 1], T(f) \leq [t \vee \alpha'\{f \geq t\}] \Rightarrow$$

$$T(f) \leq \bigwedge_{t \in [0,1]} [t \vee \alpha'\{f \geq t\}] = \int_X f \cdot \alpha'. \quad (5.15)$$

Em relação a  $\beta'$  tem-se:

**a)**  $T(f) \geq t \Rightarrow T(f) \geq [t \wedge \beta'\{f \geq t\}]$

analogamente mostraremos

**b)**  $T(f) < t \Rightarrow T(f) \geq \beta'\{f \geq t\} \geq [t \wedge \beta'\{f \geq t\}]$

considere:

- $a \in (0, 1)$
- $T(f) < a < t$
- $g_2 \geq \mathcal{X}_{\{f \geq t\}}$ , onde  $g_2 = (1 - a) \frac{f \wedge t - f \wedge a}{t - a} + f \wedge a$ .

Considerando:

$$g_2 \wedge a \in B \text{ e } g_2 - g_2 \wedge a \in B.$$

Novamente por  $(B_3)$ ,  $g_2 \in B$ .

- Sendo  $g_2 \geq \mathcal{X}_{\{f \geq t\}}$  então

$$T(g_2) \geq \beta'\{f \geq t\} \quad (5.16)$$

- $f \geq g_2 \wedge a \Rightarrow T(f) \geq T(g_2) \wedge a$

e como  $T(f) < a$ , concluímos que

$$T(f) \geq T(g_2). \quad (5.17)$$

Por (5.16) e (5.17),

$$\beta'\{f \geq t\} \leq T(g_2) \leq T(f)$$

Assim,

$$[t \wedge \beta'\{f \geq t\}] \leq T(f),$$

Portanto,

$$[t \wedge \beta'\{f \geq t\}] \leq T(f) \Rightarrow \bigvee_{t \in [0,1]} [t \wedge \beta'\{f \geq t\}] = \int_X f \cdot \beta' \leq T(f). \quad (5.18)$$

De (5.15) e (5.18)

$$T(f) \leq \int f \cdot \alpha' \leq \int f d\gamma \leq \int f \cdot \beta' \leq T(f) \Rightarrow \gamma \in [\alpha_T, \beta_T] = M_T.$$

Ficando provado o teorema. □

#### 5.4.1 Comparações entre os conceitos e resultados obtidos a partir das medidas *fuzzy* e *fuzzy* geral.

1. Uma família monótona de conjuntos  $\mathcal{F}$  contida em  $2^X$  satisfaz as condições,

- $\emptyset, X \in \mathcal{F}$
- $[\{F_n\}, \text{SM (sequência monótona)} \text{ com } \{F_n\} \subset \mathcal{F}] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n \in \mathcal{F}$

Se sobre  $\mathcal{F}$  a aplicação,

$$\alpha : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$$

verificar as condições:

- $\alpha(\emptyset) = 0, \alpha(X) = 1$
- $[A, B \in \mathcal{F}, A \subset B] \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$
- $[\{F_n\} \text{ SM}, \{F_n\} \subset \mathcal{F}] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(F_n) = \alpha\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n\right).$

A aplicação  $\alpha$  segundo a Definição 2.9 ( Sugeno), é denominada de medida *fuzzy*.

2. A medida *fuzzy* geral considerada nesse capítulo, flexibiliza a medida de Sugeno sendo definida pela aplicação  $\alpha : 2^X \rightarrow [0, 1]$  satisfazendo as condições:

- $\alpha(\emptyset) = 0, \alpha(X) = 1$
- $A, B \in 2^X, A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$

Os resultados obtidos nesse capítulo são consistentes também na teoria desenvolvida por Sugeno, pois não exigem a condição de continuidade, não valendo necessariamente a recíproca.

3. No Capítulo 3, integrais *fuzzy* (Sugeno) a definição de mensurabilidade para  $f \in B, B \subset [0, 1]^X$  é dada por:

- $f$  é  $B$ -mensurável  $\Leftrightarrow \{f \geq t\} = \{x \in X : f(x) \geq t\} \in B, t \in [0, 1]$

4. No presente tópico (sobre representatividade de um funcional *fuzzy*  $T$ ), segundo Bassanezi e Greco (1988):

$$f \in B, B \subset [0, 1]^X$$

- $f$  é  $B$ -mensurável se para qualquer  $a, b \in [0, 1], b > a, \exists H \in B : \{f \geq b\} \subset H \subset \{f \geq a\}$
- Mostraremos através da Propriedade 5.3, que os conceitos sobre mensurabilidade destacadas em (3) e (4), são equivalentes.

5. Seja  $T$  um funcional, compararemos as hipóteses para  $T$ , do domínio  $B$ , para que sejam representáveis por cada tipo de integral.

- Para que  $T$  seja representado pela Integral de Riemann Stieltjes:  
Se  $T : B = C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for linear, não negativo ( $f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$ ), e limitado. Então existirá uma função monótona crescente  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que para cada  $f \in C[a, b]$  tem-se a representação

$$T(f) = \int_a^b f dg.$$

- Um funcional  $T$  é *fuzzy* (Integral Monótona) se,

$$T : B \subset [0, +\infty]^X \rightarrow [0, +\infty]$$

para  $\mathcal{B}$ ,

$$\forall a \in [0, +\infty), f \in B \Rightarrow \{af, a \wedge f, f - f \wedge a\} \subset B.$$

para  $T$ ,

$$(T_1) T(\bar{0}) = 0, \bar{0}: \text{função nula}$$

$$(T_2) f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g)$$

$$(T_3) T(f) = T(f \wedge a) + G(f - f \wedge a)$$

$$(T_4) T(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(f \wedge n)$$

$$(T_5) G(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T\left(f - f \wedge \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*$$

$T$  será representado por intermédio de uma medida,  
 $\gamma : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  se, e somente se,  $\gamma \in [\alpha_T, \beta_T]$ , ou seja,

$$T(f) = \int_0^{+\infty} \gamma\{x : f > t\} dt, \text{ (integral de Lebesgue)}$$

onde,

$$\alpha_T, \beta_T : 2^X \rightarrow [0, +\infty],$$

com

$$\alpha_T(A) = \sup_{f \in B} \{T(f), f \leq \mathcal{X}_A\} \text{ e } \beta_T(A) = \sup_{f \in B} \{T(f), f \geq \mathcal{X}_A\}$$

- Um funcional  $T$  é chamado *fuzzy* sobre  $[0, 1]^X$  se,

$$T : B \subset [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$$

$B$  satisfazendo,

$$B_1) \mathbb{1} \in [0, 1]^X, \mathbb{1}(x) = 1, \forall x \in X \Rightarrow \mathbb{1} \in B$$

$$B_2) a \in [0, 1], f \in B \Rightarrow \{af, f \vee a, (f - f \wedge a)\} \subset B$$

$$B_3) g \in [0, 1]^X, a \in [0, 1], \{g \wedge a, (g - g \wedge a)\} \subset B \Rightarrow g \in B$$

e  $T$  verificando,

$$(T_1) f, g \in B, f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g)$$

$$(T_2) a \in [0, 1]; \{f, f \wedge a, f \vee a\} \subset B \Rightarrow \begin{cases} T(f \vee a) = T(f) \vee a; \text{ e} \\ T(f \wedge a) = T(f) \wedge a \end{cases}$$

$T$  será representado por uma medida fuzzy geral  $\gamma$ , se e somente se,  $\gamma \in [\alpha', \beta']$  onde

$$\alpha'(A) = \sup_{f \in B} \{T(f) : f \leq \mathcal{X}_A\} \text{ e } \beta'(A) = \inf_{f \in B} \{T(f) : f \geq \mathcal{X}_A\}$$

com  $A \in 2^X$  e  $\mathcal{X}_A$  a função característica de  $A$ , ou seja,

$$T(f) = \int_X f \cdot \gamma, \forall f \in B$$

**Propriedade 5.3.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família monótona de conjuntos sobre  $X \neq \emptyset$ :*

$$[\forall a, b \in [0, 1], b > a \Rightarrow \exists H \in \mathcal{F} : \{f \geq b\} \subset H \subset \{f \geq a\}]$$

se, e somente se,

$$[\forall t, t \in [0, 1], \{f \geq t\} \in \mathcal{F}].$$

*Demonstração.* De fato:

( $\Rightarrow$ ) Supor que  $\forall a, b \in [0, 1], b > a$  se tenha  $\{f \geq b\} \subset H \subset \{f \geq a\}$ , com  $H \in \mathcal{F}$ , tome  $b = a + \frac{1}{n}$ , logo para  $n \in \mathbb{N}^*$  temos por hipótese que

$$\left\{ f \geq \left( a + \frac{1}{n} \right) \right\} \subset H_n \subset \{f \geq (a)\},$$

com  $H_n \in \mathcal{F}$ , e como  $\mathcal{F}$  é uma família monótona,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = \{f \geq a\} \in \mathcal{F}, \forall a \in [0, 1],$$

ou ainda,

$$\{f \geq t\} \in \mathcal{F}, \forall t \in [0, 1].$$

( $\Leftarrow$ ) Supor que,  $\{f \geq t\} \in \mathcal{F}, \forall t \in [0, 1]$ , assim, para quaisquer  $a, b \in [0, 1]$ ,  $b > a$ , então:

$$\{f \geq b\} \subset \left\{f \geq \frac{a+b}{2}\right\} \subset \{f \geq a\}.$$

Seja  $H = \left\{f \geq \frac{a+b}{2}\right\}$ , concluímos que:

$$\{f \geq b\} \subset H \subset \{f \geq a\} \text{ com } H \text{ pertencente a } \mathcal{F}.$$

□

## 6 Sistemas Dinâmicos: Contínuos e $p$ -Fuzzy.

No trabalho realizado por [Silva \(2005\)](#) foram obtidas condições necessárias e suficientes para a existência de pontos de equilíbrio e estabilidades em SDp-*Fuzzy* (Sistemas Dinâmicos  $p$ -*Fuzzy*) unidimensionais e bidimensionais. Os SDp-*Fuzzy* utilizam-se dos SBRF, que por sua vez possui relação com a integral *fuzzy* (desfuzificação de um conjunto *fuzzy*). Estabelecemos como objetivo, construir a partir dos SBRF com número **qualquer** de variáveis uma interligação **teórica** com os Sistemas Dinâmicos  $p$ -*fuzzy*. Para isso, mostramos como obter a solução de um SBRF com duas variáveis em seguida generalizamos o processo. Com esse resultado, teoricamente estabelecemos meios para explicitar o desenvolvimento de um Sistema  $p$ -*fuzzy* para um número qualquer de variáveis. Mostramos em seguida que para cada S-EDO (Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias), haverá um (SDp-*Fuzzy*) associado, cujas soluções podem ser tão próximas quanto desejarmos. Finalizando tomamos como exemplo o modelo logístico clássico desenvolvido em [Silva \(2005\)](#) para exibir a comparação entre as soluções determinística do S-EDO com a obtida por  $p$ -*fuzzy* (SDp-*Fuzzy*).

### 6.1 Sistemas de Inferências com Bases de Regras *Fuzzy* (SBRF), utilizando o Fluxo da Máquina de Lavar.

Na Ciência, ao se proceder investigações relacionadas a um objeto de estudo é importante observar relações entre suas variáveis, e os resultados observados compará-los com os das experiências humanas. Esse procedimento possibilitará estabelecer regras para modelar uma prática. Essas relações geralmente possuem formatos de causas e efeitos sobre as questões estudadas, estabelecendo controles sobre as variáveis envolvidas. Nesse contexto uma metodologia utilizada para alcançar resultados satisfatórios para resolução dos problemas é por meio dos Sistemas de Inferência com Bases de Regras *Fuzzy*, fundamentada na Lógica *Fuzzy* que, resumidamente, foi descrita no Capítulo 1. Esse Sistema consiste em fuzzificar as variáveis de entrada do problema, denominadas de linguísticas ou subjetivas, e que são traduzidas através de funções de pertinências ou números *fuzzy*. As experiências e conhecimentos adquiridos estabelecem as chamadas regras de inferências que associam essas variáveis através de asserções do tipo “Se...então...”. As que caracterizam hipóteses compõe o conjunto dos Antecedentes e as outras formam o conjunto dos Consequentes. Estabelecidas as regras de inferências formamos o Sistema de Base de Regras *Fuzzy* (SBRF) que terá o propósito de representar da melhor forma possível a relação entre as entradas e saídas das variáveis. Ressaltamos que as relações não são necessariamente configuradas por frequências estatísticas, sendo a situação probabilística

uma particularidade. Para acionar o funcionamento desse Sistema serão ativadas as regras por Métodos alternativos, de Mamdani, Takashi-Sugeno ou outros que conduzirão a um único conjunto ou número *fuzzy*, sendo sua desfuzzificação, por Integral *Fuzzy*, pelo cálculo do Centro de Massa ou outros, traduzindo a um valor crisp (número real) que tenha significância para representar a saída da variável, configurando-se em uma alternativa de resolução para o problema inicial.

Resumidamente o Sistema é descrito pelo seguinte diagrama (Figura 97):

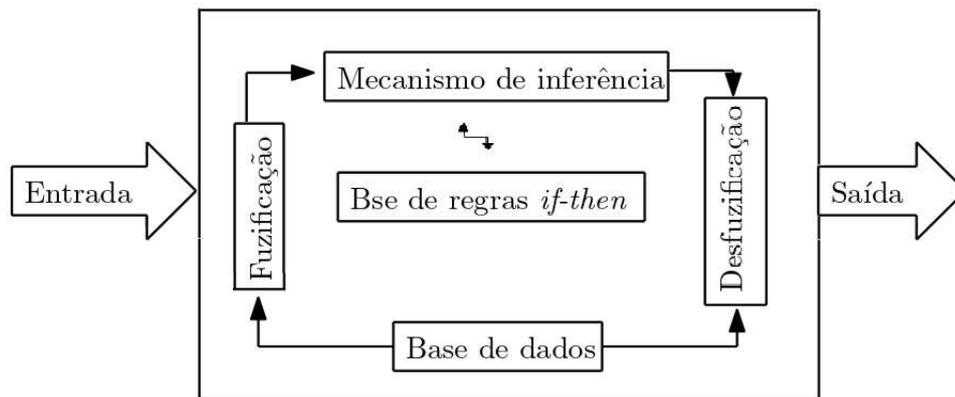


Figura 97 – Estrutura do sistema de inferência

As ações do SBRF (com a desfuzzificação por inferência de Mamdani), serão aqui descritas através do exemplo do fluxo da máquina de lavar roupas (VALLE, 2018). As etapas desde o início até o final, serão representadas por relações matemáticas entre espaços diversos, para que posteriormente sejam feitas composições que resultem em uma única relação, vinculando a entrada e a saída de variáveis. O propósito em seguida será proceder a generalização para um número qualquer de variáveis de modo a viabilizar uma fundamentação teórica para o desenvolvimento do sistema  $p$ -fuzzy.

Para o exemplo seguinte será mostrado que a relação matemática  $B_r$

$$B_r : [0, 100] \times [0, 100] \rightarrow [0, 100]$$

obtida por uma base de regras, será traduzida pela composição de quatro relações

$$B_r = \mathcal{R}_4 \circ \mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1,$$

onde cada uma representará uma ação que compõe o SBRF.

**Exemplo 6.1. (Máquina de Lavar Roupas (Valle (2018)))**

*Objetivo: Automatizar o funcionamento de uma máquina de lavar roupas de modo a economizar água, eletricidade, detergente, etc.*

*Formulação e Variáveis do Problema:*

Conhecido o peso aproximado das roupas e quão sujas elas estão, determinaremos a quantidade de detergente a ser aplicada.

- Variáveis independentes: Peso e sujeira.
- Variável dependente: Quantidade de detergente.

Primeiramente definiremos conjuntos fuzzy para as variáveis independentes. A Figura 98 representa a fuzzificação da variável peso,

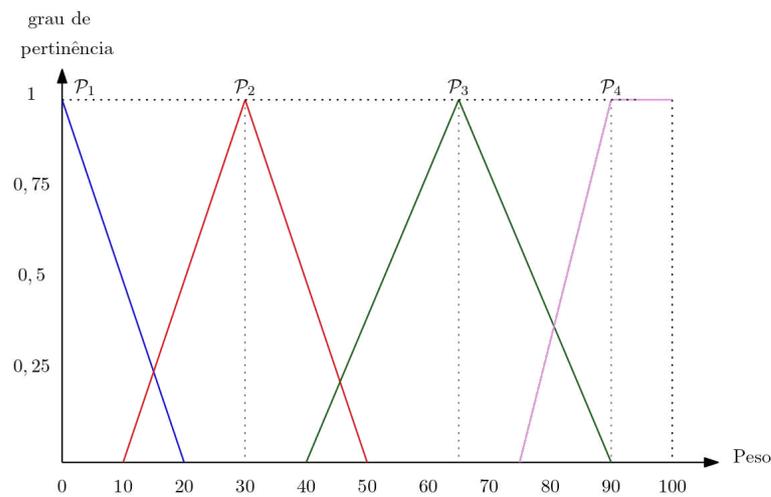


Figura 98 – Fuzificação - Peso.

Em termos matemáticos para o peso  $p \in [0, 100]$  tem-se:

$$P_1 = \varphi_{\text{Muito Leve}}(p) = [p; -20, -10, 0, 20]$$

$$P_2 = \varphi_{\text{Leve}}(p) = [p; 10, 30, 50]$$

$$P_3 = \varphi_{\text{Pesado}}(p) = [p; 40, 65, 90]$$

$$P_4 = \varphi_{\text{Muito Pesado}}(p) = [p; 75, 90, 100, 120],$$

em que

$$\text{Trap}(x; a, m, n, b) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \left( \frac{x - a}{m - a} \right), \left( \frac{b - x}{b - n} \right) \right\} \right\}$$

A Figura 99 representa a fuzzificação da variável sujeira,

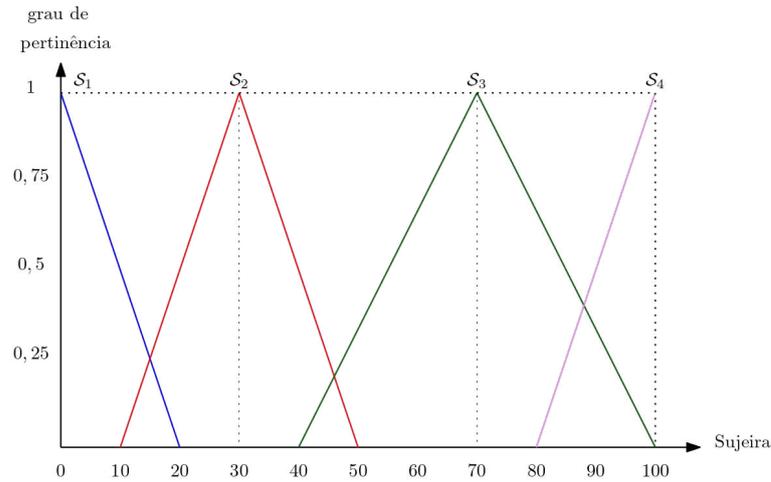


Figura 99 – Fuzificação - Sujeira.

Para a sujeira  $s \in [0, 100]$  tem-se:

$$S_1 = \varphi_{Quase\ Limp} (s) = [s; -20, 0, 20],$$

$$S_2 = \varphi_{Sujo} (s) = [s; 10, 30, 50]$$

$$S_3 = \varphi_{Muito\ Sujo} (s) = [s; 40, 70, 100]$$

$$S_4 = \varphi_{Extr.\ Sujo} (s) = [s; 80, 100, 120]$$

em que

$$\text{Tri}(x; a, m, b) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \left( \frac{x - a}{m - a} \right), \left( \frac{b - x}{b - m} \right) \right\} \right\}$$

Para a quantia de detergente  $q \in [0, 100]$ , a Figura 100 representa a fuzificação da variável detergente,

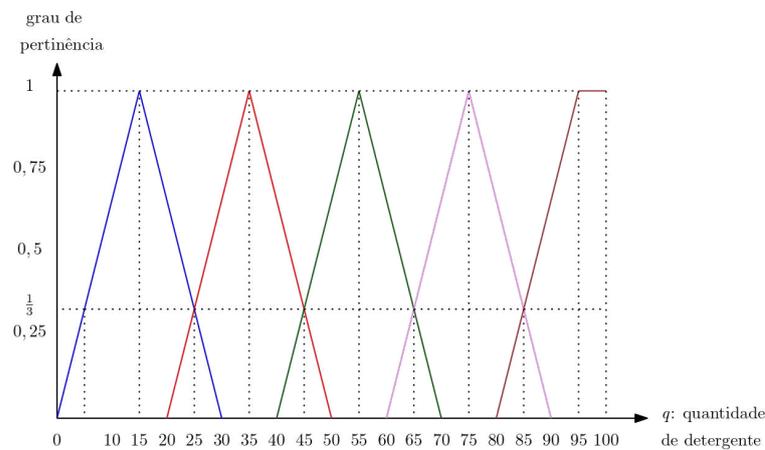


Figura 100 – Consequente: Quantidade de detergente.

$$Q_1 = \varphi_{\text{Muito Pouco}}(q) = [q; 0, 15, 15, 30],$$

$$Q_2 = \varphi_{\text{Pouco}}(q) = [q; 20, 35, 35, 50]$$

$$Q_3 = \varphi_{\text{Moderado}}(q) = [q; 40, 55, 55, 70],$$

$$Q_4 = \varphi_{\text{Exagerado}}(q) = [q; 60, 75, 75, 90],$$

$$Q_5 = \varphi_{\text{Máximo}}(q) = [q; 80, 95, 100, 120]$$

Base de Regras *Fuzzy* (16 regras):

$r_1$ : Se o peso é muito leve e a sujeira é quase limpo, então a quantidade de detergente é muito pouco.

$r_2$ : Se o peso é muito leve e a sujeira é sujo, então a quantidade de detergente é pouco.  
 $\vdots$

$r_i$ : Se o peso é pesado e a sujeira é muito sujo, então a quantidade de detergente é exagerado.  
 $\vdots$

$r_{16}$ : Se o peso é muito pesado e a sujeira é extremamente sujo, então a quantidade de detergente é máximo.

A figura representada pela Tabela 1 apresenta as regras,

$A_2$	$A_1$	Quase limpo	Sujo	Muito Sujo	Extr. Sujo
Muito leve		$(A_{11}; A_{21})$ $Q_1$ Muito pouco	$(A_{12}; A_{22})$ $Q_2$ Pouco	$(A_{13}; A_{23})$ $Q_3$ Moderado	$(A_{14}; A_{24})$ $Q_3$ Moderado
Leve		$Q_2$ Pouco	$Q_2$ Pouco	$Q_3$ Moderado	$Q_4$ Exagerado
Pesado		$Q_3$ Moderado	$Q_3$ Moderado	$Q_4$ Exagerado	$Q_4$ Exagerado
Muito pesado		$Q_3$ Moderado	$Q_4$ Exagerado	$(A_{1,15}; A_{2,15})$ $Q_5$ Máximo	$(A_{1,16}; A_{2,16})$ $Q_5$ Máximo

Tabela 1 – Tabela de representação das 16 regras.

**Observação 6.1.** Temos 16 regras no total, associando os antecedentes  $A_1$  e  $A_2$  a  $Q$  conforme a Tabela 1 expressa pelas regras estabelecidas pelos antecedentes  $A_{1i} \in A_1$  e  $A_{2i} \in A_2$  com o conseqüente  $Q_k \in Q$ , indicada por  $r_i(A_{1i}, A_{2i}) = Q_k$

A base de regras fica caracterizada por:

$$\begin{aligned}
 r_1 &: \text{ Se } (P_1, S_1) \text{ então } Q_1 \\
 r_2 &: \text{ Se } (P_1, S_2) \text{ então } Q_2 \\
 r_3 &: \text{ Se } (P_1, S_3) \text{ então } Q_3 \\
 r_4 &: \text{ Se } (P_1, S_4) \text{ então } Q_2 \\
 &\quad \vdots \\
 r_{15} &: \text{ Se } (P_4, S_3) \text{ então } Q_5 \\
 r_{16} &: \text{ Se } (P_4, S_4) \text{ então } Q_5.
 \end{aligned}$$

As regras associam:

$$(P_i, S_j) \rightarrow Q_k, \quad 1 \leq i, j \leq 4, \quad Q_k \in \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$$

### Método de Inferência

Apresentaremos a seguir o método de inferência de Mamdani, que consiste em quantificar as associações efetuadas através das 16 regras apresentadas. O processo inicia estabelecendo valores ao peso  $p \in P_i$  e sujeira  $s \in S_j$  visando relacionar  $(P_i, S_j) \rightarrow Q_k$ ,  $1 \leq i, j \leq 4$ ,  $1 \leq k \leq 5$ . Para ativar as regras toma-se o menor dos valores das funções de pertinência de  $P_i$  e  $S_j$  aplicados respectivamente ao peso  $p$  e a sujeira  $s$  determinando  $q = \varphi_{P_i}(p) \wedge \varphi_{S_j}(s)$  que posteriormente nivelará o conjunto *fuzzy* associado  $Q_k$ , definido por  $\bar{Q}_k = q \wedge \varphi_{Q_k}$ ,

Para o presente exemplo a ativação de cada regra será:

$$w_i = \varphi_{A_{1i}}(p) \wedge \varphi_{A_{2i}}, \quad \forall i, = 1, \dots, 16$$

Se considerarmos que o peso é  $p = 10$  e o nível de sujeira é  $s = 15$ , teremos para a primeira regra,

$$w_1 = \varphi_{\text{Muito Leve}}(p) \wedge \varphi_{\text{Quase Limpo}}(s) = 0.5 \wedge 0.25 = 0.25$$

Analogamente, para a segunda regra,

$$w_2 = \varphi_{\text{Muito Leve}}(p) \wedge \varphi_{\text{Sujo}}(s) = 0.5 \wedge 0.25 = 0.25$$

Todas as outras regras tem ativação nula, visto que  $(10, 15)$  somente pertence a  $P_1XS_2$  e  $P_2XS_2$ .

A quantidade de detergente é determinada através da união dos conjuntos *fuzzy*  $\bar{Q}_K$ , obtidos tomando o mínimo entre  $w_i$  e a função de pertinência dos consequentes associados  $Q_k$ , ou seja,

$$\varphi_{\text{Qtd. Deter.}} = \bigcup_{i=1}^{16} (w_i \wedge \varphi_{Q_k}), \quad Q_k = r_i(A_{1i}, A_{2i}),$$

$$Q_k \in \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}.$$

Para o caso presente,  $(P_1, S_2) \rightarrow Q_1$  e  $(P_2, S_2) \rightarrow Q_2$

$$\varphi_{\text{Qtd. Deter.}} = (w_1 \wedge Q_1) \cup (w_2 \wedge Q_2) = (0,25 \wedge \varphi_{\text{Muito Pouco}}) \cup (0,25 \wedge \varphi_{\text{Pouco}}),$$

A Figura 101, apresenta o conjunto *fuzzy* resultante, sem o nivelamento de 0,25.

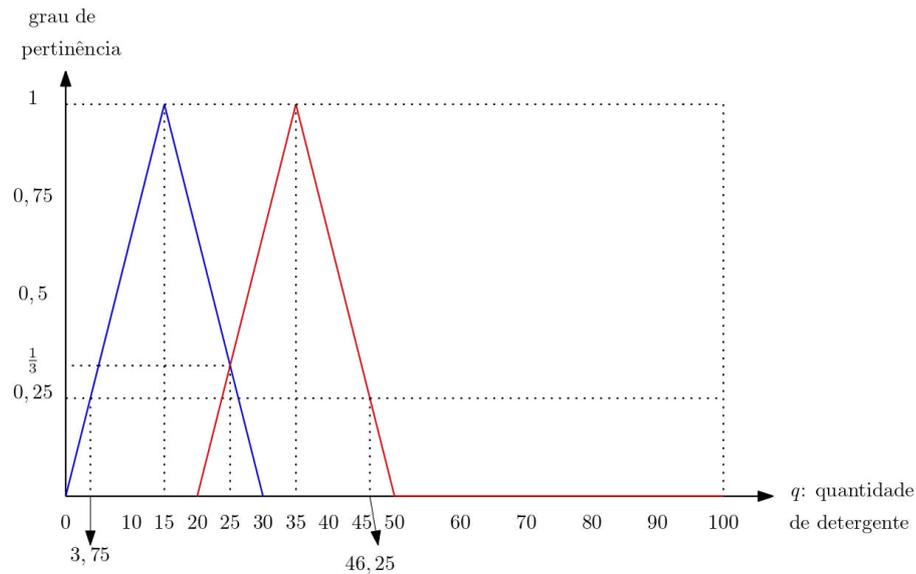


Figura 101 – Conjunto *fuzzy* resultante da Inferência de Mamdani, sem o nivelamento 0,25.

A seguir na Figura 102 apresentamos o conjunto *fuzzy* final, com os nivelamentos, resultante do Método de Inferência de Mandani.

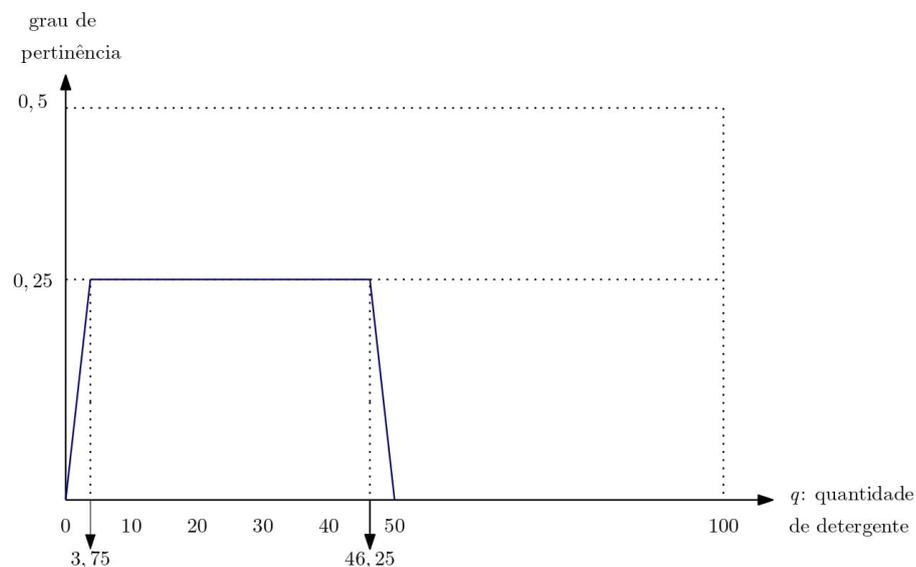


Figura 102 – Conjunto *fuzzy* final resultante do Método de Inferência de Mandani.

O conjunto *fuzzy* que indica a quantidade de detergente será representado por um número real, sendo esse processo chamado de desfuzificação, obtido pela integral *fuzzy* ou centroide.

**Definição 6.1.** *Definimos a desfuzificação de um conjunto fuzzy ao associá-lo a um número real obtido por intermédio da Integral fuzzy ou pelo centroide, referentes ao conjunto.*

Considerando o peso  $p = 10$ , e a sujeira  $s = 15$  encontramos,

$$q^* = \int_{[0,50]} h \cdot g = 0,25$$

que equivale a 25 na escala em uso.

O cálculo por meio do centroide é obtido por,

$$q^* = \frac{\int q \varphi_{\text{Qtd. Deter.}}(q) dq}{\int \varphi_{\text{Qtd. Deter.}}(q) dq} = 0,25 .$$

no caso discreto,

$$q^* = \frac{\sum_{j=1}^n q_j \varphi_{\text{Qtd. Deter.}}(q_j)}{\sum_{j=1}^n \varphi_{\text{Qtd. Deter.}}(q_j)} = 0,25 .$$

Propusemos no início do capítulo generalizar o processo de desenvolvimento do SBRF para um número qualquer de variáveis. Faremos através da análise do exemplo apresentado. Observamos que  $x_1 = 10$  representa o peso das roupas,  $x_2 = 15$  o nível de sujeira, e o acionamento da base de regras, consistiu em determinar os valores:

$$w_i = \varphi_{A_{1i}}(p) \wedge \varphi_{A_{2i}}(s), \quad \forall i = 1, \dots, 16$$

podendo essa ação ser expressa por uma primeira relação  $\mathcal{R}_1$  dada por:

$$\mathcal{R}_1 : [0, 100] \times [0, 100] \rightarrow [0, 1]^{16}.$$

As ativações das regras,

$$w_1 = \varphi_{\text{muito leve}}(10) \wedge \varphi_{\text{quase limpo}}(15) = 0,5 \wedge 0,25 = 0,25.$$

$$w_2 = \varphi_{\text{muito leve}}(10) \wedge \varphi_{\text{sujo}}(15) = 0,5 \wedge 0,25 = 0,25,$$

sendo as outras nulas, para  $w_i=0, i \geq 3$

Assim

$$\mathcal{R}_1(10, 15) = (0,25; 0,25; 0; \dots; 0).$$

A segunda relação  $\mathcal{R}_2$ .

Os consequentes (quantidades de detergentes) são

- $Q_1$  : Muito pouco
- $Q_2$  : Pouco
- $Q_3$  : Moderado
- $Q_4$  : Exagerado
- $Q_5$  : Máximo

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \cup Q_5$$

Teremos,

$$\mathcal{R}_2 : [0, 1]^{16} \rightarrow \mathcal{F}^{16}(\mathbb{R})$$

onde

$$\mathcal{R}_2(0, 25 : 0, 25; 0 : \dots; 0) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)$$

$$\hat{y}_1 = 0, 25 \wedge \varphi(Q_1) = 0, 25 \wedge Trap(q, 0, 10, 10, 20)$$

$$\hat{y}_2 = 0, 25 \wedge \varphi(Q_2) = 0, 25 \wedge Trap(q, 20, 30, 30, 40) .$$

$$\hat{y}_i = w_i \wedge \varphi_{Q_k} = \emptyset \text{ para } i = 3, \dots, 16 \text{ pois } w_i = 0$$

$$\text{Assim, } \mathcal{R}_2(w_1, w_2, \dots, w_{16}) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{16}).$$

A terceira relação será:

$$\mathcal{R}_3 : \mathcal{F}^{16}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

$$\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \emptyset, \dots, \emptyset) \rightarrow \mathcal{R}_3(\hat{y}) = \bigcup_{i=1}^{16} \hat{y}_i = \hat{y}_1 \vee \hat{y}_2 .$$

ou ainda, a relação  $\mathcal{R}_3$  une os conjuntos *fuzzy* obtidos pelas imagens de  $\mathcal{R}_2$ ,

$$\mathcal{R}_3(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{16}) = Y, \text{ onde } Y = \bigcup_{i=1}^{16} \hat{y}_i = \bigvee_{i=1}^{16} \hat{y}_i .$$

A quarta e última relação *desfuzifica*  $Y$ , calculando,

$$z = \int_Y h \cdot q$$

ou o centro de massa de  $\bigcup_{n=1}^{16} \hat{y}_i$ :

$$\mathcal{R}_4 : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$Y \mapsto \mathcal{R}_4(Y) = \mathcal{R}_4\left(\bigcup_{i=1}^{16} \hat{y}_i\right) = z$$

Conforme expusemos no início do capítulo:  $B_r$

$$B_r : [0, 100] \times [0, 100] \rightarrow [0, 100]$$

$$B_r = \mathcal{R}_4 \circ \mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1.$$

Nesse exemplo,  $z = 25$ , ou seja,  $B_r(10, 15) = 25$

## 6.2 Uma Generalização para o Sistema de Base de Regras Fuzzy

Generalizaremos o processo de desenvolvimento de um SBRF para um número qualquer de variáveis.

Sejam,

1. Antecedentes: conjuntos *fuzzy*  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$
2. Cada antecedente  $A_i$  composto pelos números *fuzzy*

$$A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in_i}, \quad n_i \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq i \leq n$$

3. Consequentes: conjuntos *fuzzy*  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$
4. Cada conseqüente  $Q_j$ , composto pelos números *fuzzy*,

$$Q_{j1}, Q_{j2}, \dots, Q_{jm_j}, \quad m_j \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq j \leq m$$

Desejamos definir uma relação  $B_r : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que represente um SBRF com  $n$  variáveis de entrada e  $m$  variáveis de saída.

O total de números *fuzzy* envolvidos nos antecedentes será obtido por:

$$p = \prod_{i=1}^n n_i. \quad (6.1)$$

O total de números *fuzzy* envolvidos nos consequentes será obtido por:

$$s = \prod_{j=1}^m m_j.$$

Seja  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ , a relação  $B_r$  ficará perfeitamente caracterizada se ao definirmos:

$$B_r(x) = (B_1(x), B_2(x), \dots, B_m(x))$$

obtivermos para cada  $j$  a descrição de  $B_j : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq m$ .

Por (6.1) temos que para cada  $j$ , a quantidade de regras a serem definidas associando um elemento de  $\mathcal{F}(R^n)$  a um número *fuzzy*  $Q_{jk}$  é  $p$ . Ainda para cada  $j$  fixado, a

análise feita no exemplo dado mostrou que a relação  $B_j$  final será a composição de quatro relações, qual seja,

$$B_j = \mathcal{R}_4^j \circ \mathcal{R}_3^j \circ \mathcal{R}_2^j \circ \mathcal{R}_1^j$$

Fixaremos o valor de  $j$  para determinar  $B_j$ , posteriormente faremos a variação,  $1 \leq j \leq m$ .

Definindo as relações:

- $\mathcal{R}_1^j : \prod_{i=1}^n \overline{\text{supp } A_i} \rightarrow [0, 1]^p$

$$\mathcal{R}_1^j(x) = (w_1, w_2, \dots, w_p)$$

onde

$$w_i = \varphi_{A_{1i}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{2i}}(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_{ni}}(x_n) \quad 1 \leq i \leq p..$$

- 

$$\mathcal{R}_2^j : [0, 1]^p \rightarrow \mathcal{F}^p(\mathbb{R})$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_p) \mapsto \mathcal{R}_2(w) = (\hat{y}_1^j, \hat{y}_2^j, \dots, \hat{y}_p^j) = \hat{y}^j$$

onde  $\hat{y}_i^j = w_i \wedge \varphi_{Q_{jk}}$ , com  $Q_{jk} = r_i(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in_i})$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j, k \leq m_j$ , com  $r_i$  sendo uma das  $p$  regras que associa  $A_{ij}$  a  $Q_{jk}$ . Ou seja,

$$\hat{y}_1^j = w_1 \wedge \varphi_{(Q_{1k})}$$

$$\hat{y}_2^j = w_2 \wedge \varphi_{(Q_{2k})}$$

$$\vdots$$

$$\hat{y}_i^j = w_i \wedge \varphi_{(Q_{jk})} \quad (1 \leq i \leq p)$$

e  $Q_{jk} \in Q_j$

- 

$$\mathcal{R}_3^j : \mathcal{F}^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

$$\hat{y}^{(j)} \rightarrow \mathcal{R}_3 \hat{y}^{(j)} = \hat{y}_1^j \vee \hat{y}_2^j \vee \dots \vee \hat{y}_p^j = \bigcup_{k=1}^p \hat{y}_k^j = Y_j$$

- 

$$\mathcal{R}_4^j : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Mamdani}) \text{ centro de massa ou}$$

$$Y_j \rightarrow \mathcal{R}_4(Y_j) = z_j \quad \text{integral fuzzy}$$

$$\mathcal{R}_4^j(Y_j) = z_j \text{ centro de massa de } Y_j \text{ ou integral fuzzy}$$

Assim  $B_j$  está bem definida para cada  $j$  por,

$$B_j = \mathcal{R}_4^j \circ \mathcal{R}_3^j \circ \mathcal{R}_2^j \circ \mathcal{R}_1^j \quad 1 \leq j \leq m$$

e consequentemente  $B_r : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  está perfeitamente definida por

$$B_r(x) = (B_1(x), B_2(x), \dots, B_m(x))$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$   $D = \prod_{i=1}^n \overline{\text{supp } A_i}$ .

## 6.3 Sistemas $p$ -fuzzy com Aplicações: em Sistemas Dinâmicos e Discretos. Convergências

### 6.3.1 Sistemas $p$ -fuzzy

**Definição 6.2.** Um sistema  $p$ -fuzzy no espaço  $\mathbb{R}^n$  é uma sequência discreta na forma:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta(x_k)$$

onde  $x_k, \Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ , com condição inicial dada por  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

A Figura 103 representa o diagrama do sistema  $p$ -fuzzy,

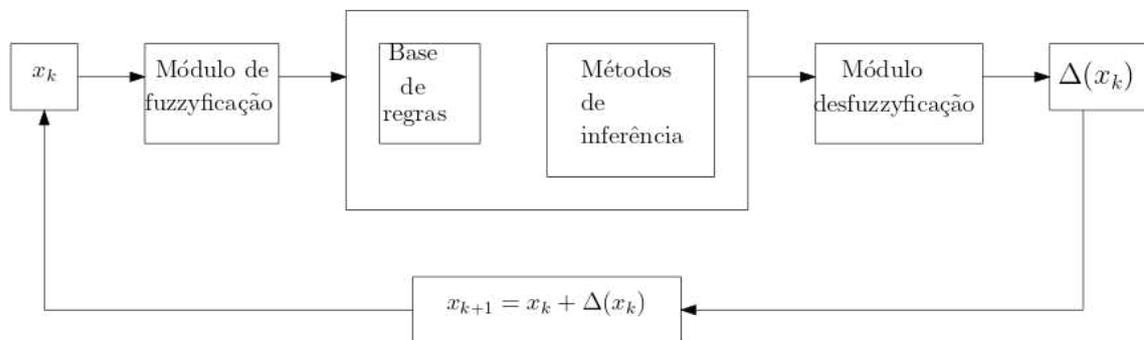


Figura 103 – Diagrama do sistema  $p$ -fuzzy (Definição 6.2).

Observe que o processamento do sistema  $p$ -fuzzy inicia com a fuzzificação da variável de entrada e através do SBRF serão estabelecidos os conjuntos *fuzzy* antecedentes e consequentes que pela definição da base de regras se estabelecerá a associação entre os mesmos. O resultado será um conjunto *fuzzy* que desfuzificado representará uma variação  $\Delta(x_k)$  referente a  $x_k$ , que somada a  $x_k$ , irá gerar nova entrada inicial  $x_{k+1} = x_k + \Delta(x_k)$ , definindo um ciclo ou sequência de elementos em  $\mathbb{R}^n$ . A aplicação da integral *fuzzy* se dará ao considerá-la como processo de *desfuzzyficação* na base de regras.

### 6.3.2 Sistema Dinâmicos com uso de $p$ -fuzzy

Consideremos uma partição do tempo conforme Figura 104, e um sistema autônomo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) (Equações (6.2)). Há muitas aplicações na área da biomatemática ao se estudar a estabilidade das soluções desse sistema.

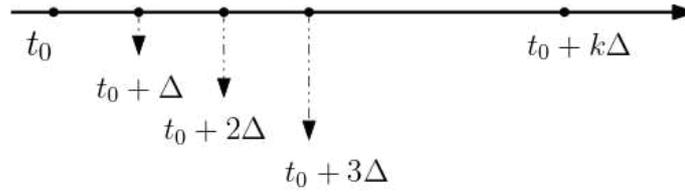


Figura 104 – Variações discretas do tempo (Equações (6.2)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = f_1(N_1, N_2, \dots, N_n) \\ \frac{dN_2}{dt} = f_2(N_1, N_2, \dots, N_n) \\ \vdots \\ \frac{dN_n}{dt} = f_n(N_1, N_2, \dots, N_n) \end{array} \right. \quad (6.2)$$

com  $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^*$  e,

- $N_i = N_i(t)$  funções reais do tempo
- $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- $N_i(t)$  e  $f_i$  funções diferenciáveis
- $N(t_0) = N_0$  (condição inicial) .

Encontrar soluções determinísticas para esse Sistema é importante, porém poderá ter certo grau de complexidade dependendo das funções  $f_i$ . Associar um Sistema numérico discreto cujas soluções se aproximem do sistema (6.2) será uma alternativa para o objetivo citado.

Seja  $t_0$  o instante inicial, fixemos valores para  $\Delta$  fazendo variar o parâmetro  $k$ , onde:

$$M_k^i = N_i(t_0 + k\Delta), \text{ com } \Delta > 0, k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq n.$$

Assim,

$$\left. \frac{dN_i(t)}{dt} \right|_{t=t_0+k\Delta} = f_i(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n).$$

Mas,

$$\left. \frac{dN_i(t)}{dt} \right|_{t=t_0+k\Delta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_i(t_0 + k\Delta + \Delta t) - N_i(t_0 + k\Delta)}{\Delta t}.$$

Para populações consideradas grandes, e com “ $\Delta$  pequeno”, faremos,

$$\Delta t = \Delta$$

e o limite poderá ser aproximado por:

$$\frac{1}{\Delta} [N_i(t_0 + (k + 1)\Delta) - N_i(t_0 + k\Delta)] = \frac{1}{\Delta} [M_{k+1}^i - M_k^i],$$

ou seja,

$$\begin{aligned} M_{k+1}^i - M_k^i &\approx f_i(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n)\Delta \\ M_{k+1}^i &\approx \underbrace{M_k^i + f_i(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n)\Delta}_{=F_i(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n)}, \end{aligned}$$

ou,

$$M_{k+1}^i \cong F_i(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n),$$

gerando o modelo discreto recursivo, definido por:

$$\begin{cases} M_{k+1}^1 = F_1(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n) \\ M_{k+1}^2 = F_2(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n) \\ \vdots \\ M_{k+1}^n = F_n(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n) \end{cases} \quad (6.3)$$

sendo  $f_i$  diferenciável  $F_i$  também será. Quanto maior a população,  $\Delta = 1$  poderá considerado pequeno em relação as grandezas envolvidas e assim os sistemas (6.2) e (6.3) se aproximam. Definimos a sequência  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , por

$$x_{k+1} = (M_k^i + \Delta_i(x_k))_{1 \leq i \leq n}$$

com

$$\Delta_i(x_k) = f_i(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n)\Delta.$$

Assim, se para  $k \rightarrow +\infty$  tivermos  $\lim_{k \rightarrow +\infty} [M_k^i + \Delta_i(x_k)] = M_i^*$  para cada  $i, 1 \leq i \leq n$ , obteremos

$$(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n) \rightarrow M^* = (M_1^*, M_2^*, \dots, M_n^*),$$

ou seja,  $x_k \rightarrow M^*$ . Ao aplicar  $p$ -fuzzy em (6.3), as equações  $F_i$  serão substituídas por regras, no Sistema de Base de Regras Fuzzy (SBRF), mais precisamente, cada

$$F_i(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n)$$

será substituída de modo que:

1. As variáveis independentes ou antecedentes  $x_k = (M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n)$  sejam fuzificadas
2. As expressões  $F_i(M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^n)$  serão substituídas pelas regras que relacionam os antecedentes e os consequentes. Após se utilizara a inferência de Mamdani para obtenção dos conjuntos fuzzy que desfuzificados para cada  $1 \leq i \leq n$ , determinará

$$\Delta(x_k) = (\Delta_1(x_k), \Delta_2(x_k), \dots, \Delta_n(x_k))$$

e então  $x_{k+1} = x_k + \Delta(x_k)$  passará a ser a nova entrada no sistema  $p$ -fuzzy.

### 6.3.3 Aplicações em convergências

**Observação 6.2.** O exemplo seguinte foi retirado de (Silva (2005)), para o caso de um sistema de EDO com uma equação.

Para fazer uma análise comparativa entre a equação diferencial e o sistema discreto aplicando  $p$ -fuzzy vamos considerar, em detalhes, o modelo logístico clássico,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (6.4)$$

o qual tem por solução única, a curva

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0) e^{-\alpha t}}$$

Para obter o sistema  $p$ -fuzzy utilizaremos as variáveis linguísticas: população e variação. A variável população será a de entrada (Figura 105), definida pelos termos linguísticos: Baixa(B), Média Baixa(MB), Média(M), Média Alta(MA), Alta(A) e Altíssima(AL) e a variável de saída, variação (Figura 106) será definida pelos termos linguísticos: Baixa Negativa(BN), Baixa Positiva(BP), Média Positiva(MP) e Alta Positiva(AP).

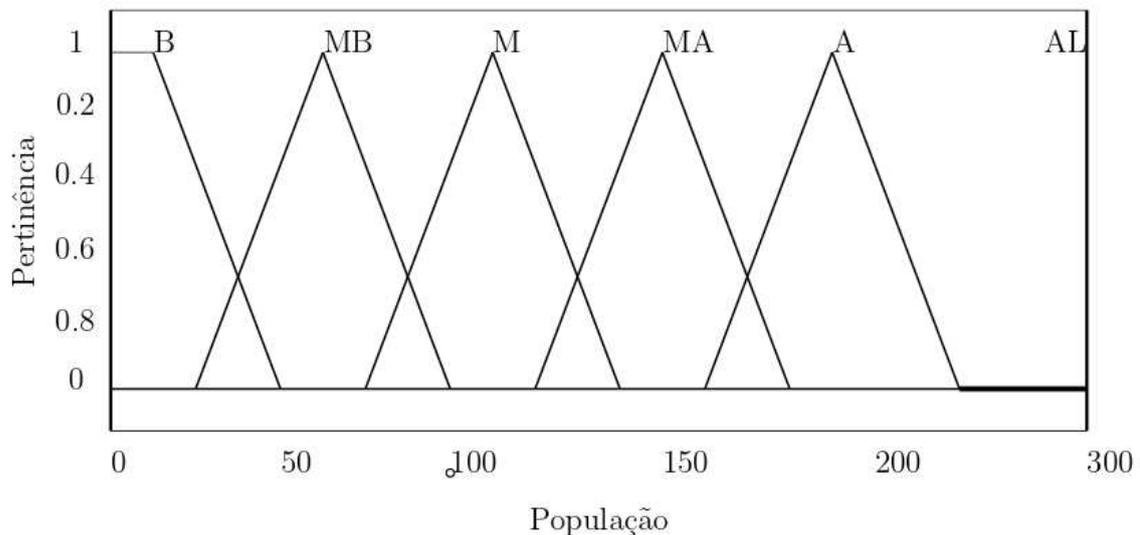


Figura 105 – Variável de entrada: População.

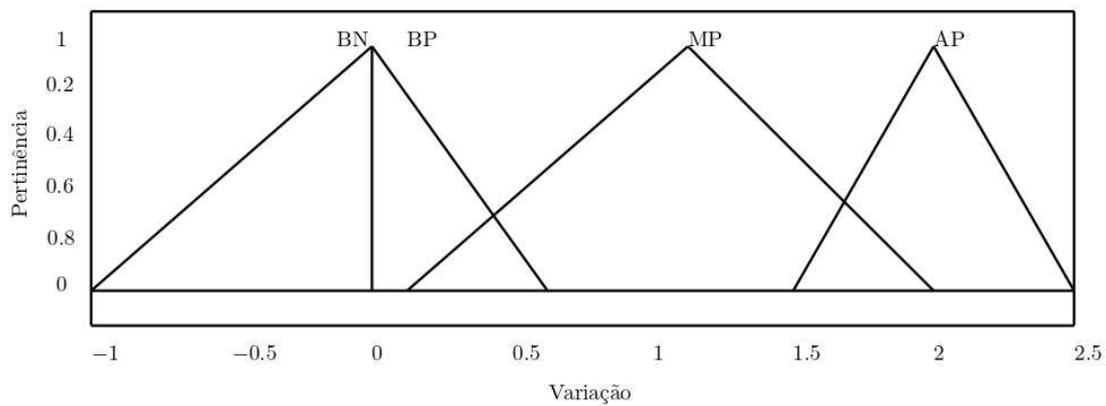


Figura 106 – Variável de saída: Variação.

A base de regras depende do fenômeno estudado. Para este caso propomos a seguinte base de regras:

1. Se população é baixa então variação é baixa positiva;
2. Se população é média baixa então variação é média positiva;
3. Se população é média então variação é alta positiva;
4. Se população é média alta então variação é média positiva;
5. Se população é alta então variação é baixa positiva;
6. Se população é altíssima então variação é baixa negativa.

As soluções: clássica e  $p$ -fuzzy podem ser vistas na Figura 107. Para solução clássica utilizamos  $K = 234.714951$ ,  $x_0 = 12.7945$  e  $\alpha = 0.02232$ , em (6.4). Observe que as soluções são muito “parecidas”. Isto é, com um sistema  $p$ -fuzzy simples podemos simular algo que na literatura é descrito por um modelo determinístico de equações diferenciais.

Uma observação interessante é que o método  $p$ -fuzzy pode auxiliar no cálculo dos parâmetros de um modelo clássico associado. Podemos utilizar o método  $p$ -fuzzy para obter os parâmetros para o modelo clássico, por exemplo, através de um ajuste de curva.

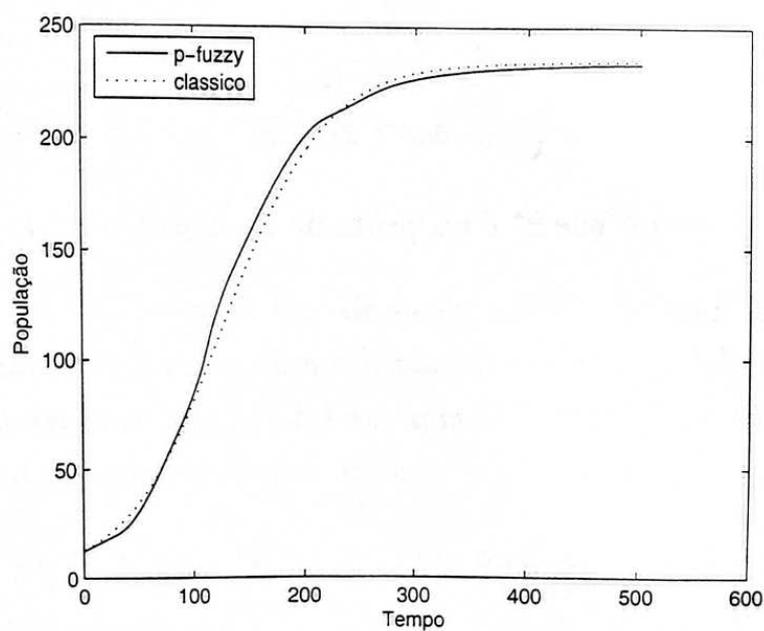


Figura 107 – Gráficos: modelo logístico com  $K = 234.71$  e  $a = 0.022$  e modelo  $p$ -fuzzy.

Uma importante aplicação do modelo  $p$ -fuzzy ocorre quando há dificuldades para avaliar os parâmetros do modelo ou quando as variáveis estão com muitas subjetividades.

## 7 Considerações Finais

Os tópicos considerados básicos geralmente não são demonstrados, sendo explicitadas suas fontes, e aos que pertencem a área esse procedimento agiliza e facilita a leitura e as conclusões. Nossa proposta estendeu a apresentação desse trabalho demonstrando e exemplificando todos os resultados, independentemente de serem considerados básicos ou novos. Esse procedimento pretende levar a tese também aos leitores que não são especialistas. Vários estudantes não possuem compreensões dos tópicos envolvidos e ao relacioná-los somente com citações das fontes pode ser um fator desestimulante para conhecerem novas teorias e práticas relacionadas a pesquisa. Outro fator que consideramos importante foi a aproximação entre as fronteiras da Ciência com sua base. Profissionais da área, por já conhecerem, podem proceder a leitura desprezando as demonstrações sem interesse e rapidamente chegar ao que julgar essencial. Nesse contexto segue a apresentação dos assuntos desenvolvidos relacionando-os ao que consideramos nossa colaboração:

- Na introdução colaboramos com breve relato histórico propondo uma conexão entre as motivações de Zadeh para descrever a teoria *Fuzzy* e os conceitos filosóficos sobre incertezas a partir dos pensamentos de Aristóteles ao período contemporâneo.
- No Capítulo 1 apresentamos uma revisão dos tópicos de Lógica *fuzzy*. Como colaboração, representamos conjuntos *fuzzy* inseridos em espaços métricos, utilizando-os para exibir o Princípio da extensão de Zadeh. Essa proposta visa que futuramente possa se estudar os resultados obtidos nos espaços métricos e se possível inserí-los nos conjuntos *fuzzy*. Os conceitos de distância, aproximação, sequências e as interpretações geométricas podem conduzir a aplicações e pontes entre teoria e prática.
- No Capítulo 2 revisamos os conceitos de medidas, propriedades e exemplos. Como colaboração, definimos medidas *fuzzy* (Sugeno) e *fuzzy* geral, relacionando-as, respectivamente, com medidas de probabilidade e de possibilidade. O destaque para essa classificação possibilitou no Capítulo 3 separar as integrais *fuzzy* e *fuzzy* geral, de acordo com a medida considerada. Essa organização teve como objetivo não usar de modo indevido a definição da integral de Sugeno para medidas que não são *fuzzy*. Acreditamos que, dessa forma, oferecemos uma descrição adequada para resultados considerados distintos, tal como a interpretação geométrica para as integrais de Sugeno e a *fuzzy* geral.
- No Capítulo 3 revisamos as propriedades e teoremas sobre a integral *fuzzy*, apresentando com detalhes as demonstrações, os argumentos geométricos e os cálculos

pertinentes. Como colaboração, introduzimos o conceito a referida integral como um procedimento de desfuzificação de um número *fuzzy*. Como novos resultados obtivemos o Teorema 3.13 que oferece uma interpretação geométrica para as integrais e o Teorema 3.14 que especifica convergências para integrais. Além disso, estabelecemos comparações entre os tipos de integrais, procedendo uma diversidade de exemplos. Desenvolvemos o Teorema 3.15 que oferece resultados para integral com medida de possibilidade, várias interpretações geométricas e o Corolário 3.4.

- No Capítulo 4 desenvolvemos uma breve revisão do Teorema Fundamental do Cálculo Diferencial e Integral usual, visando definir derivação *fuzzy* e uma versão para o Teorema Fundamental do Cálculo *Fuzzy*. Como colaboração, apresentamos os exemplos 4.1 e 4.2, que na Seção 4.1 irão exemplificar a definição de derivada *fuzzy* bem como a necessidade da construção de propriedades para garantia de sua existência. Apresentamos as condições para que um espaço topológico se constitua em um espaço medível (métrico) que viabilize desenvolver um Teorema Fundamental do Cálculo *Fuzzy*. Nossa colaboração foi desenvolver de forma detalhada as demonstrações das propriedades decorrentes dessas condições, utilizando conceitos topológicos e argumentos geométricos. Apresentamos a definição e o significado de derivada *fuzzy* que propiciou demonstrar várias propriedades básicas para enunciar e provar o Teorema Fundamental do Cálculo *Fuzzy* elaborado por Sugeno. Colaboramos também criando uma interpretação geométrica para derivação *fuzzy*.
- No Capítulo 5 revisamos os conceitos e propriedades da integral Riemann-Stieltjes visando compreender a demonstração do Teorema da representação de Riesz para funcionais  $T : C[a, b] \rightarrow [0, 1]$  lineares, não negativos e limitados. Apresentamos de forma detalhada e com ilustrações geométricas as demonstrações dos Teoremas tipo Riesz para funcionais denominados de integral monótona por meio da integral de Lebesgue, e para os funcionais *fuzzy* através das integrais *fuzzy*. Contribuímos elaborando as comparações entre os conceitos de mensurabilidades segundo as versões de Greco (1987) e de Sugeno (1974), demonstrando a equivalência entre ambas através da Propriedade 5.3. Comparamos as hipóteses para os funcionais e seu domínio, para os três tipos de representações.
- No Capítulo 6, como complemento, contribuímos mostrando a amplitude decorrente da aplicação da integral *fuzzy* como desfuzificação, relacionando esse instrumento com SBRF generalizado para qualquer número de variáveis, que por sua vez integra o método *p-fuzzy* para estudos de Sistemas Dinâmicos *p-fuzzy*.

Finalizando seguem algumas possibilidades de continuidade desse trabalho. Pesquisar e agregar aplicações em cada capítulo, que estabeleçam conexões estreitas entre teoria e prática. Complementar a tese, formulando novos exemplos e propondo questões

sob a forma de exercícios visando compor um livro/texto a ser publicado. Desenvolver conjuntamente ambas alternativas.

## Referências

- ASKAR-ZADEH, L. Fuzzy sets, information and control. *University of California*, v. 8, n. 47, p. 26, 1965.
- ASPLUND, E.; BUNGART, L. *A first course in integration*. [S.l.]: Holt, Rinehart and Winston, 1966.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. [S.l.: s.n.], 2010.
- BARROS, L. C. d. Sobre sistemas dinâmicos fuzzy-teoria e aplicações. *Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP-Tese de Doutorado*, 1997.
- BARROS, L. C. D.; BASSANEZI, R. C.; TONELLI, P. A. On the continuity of the zadeh's extension. In: CITESEER. *Proc. Seventh IFSA World Congress*. [S.l.], 1997. v. 2, p. 3–8.
- BARROS, L. C. de; PEDRO, F. S.; ESMI, E. Differential and integral calculus for fuzzy number-valued functions with interactivity. In: *Advances in Fuzzy Integral and Differential Equations*. [S.l.]: Springer, 2022. p. 3–47.
- BARTLE, R. G. *The elements of real analysis*. [S.l.]: Wiley New York, 1964. v. 2.
- BASSANEZI, R. C.; GRECO, G. H. Sull'additività dell'integrale. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, v. 72, p. 249–275, 1984.
- \_\_\_\_\_. On functionals representable by fuzzy measures. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 133, n. 1, p. 44–56, 1988.
- BILLINGSLEY, P. *Probability and measure*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- BURTON, R. A. *Sobre ter certeza: como a neurociência explica a convicção*. [S.l.]: Editora Blucher, 2017.
- CABRAL, M. A. Introdução a teoria da medida e integral de lebesgue. *Rio de Janeiro-RJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro*, 2010.
- CECCONELLO, M. d. S. Sistemas dinâmicos em espaços métricos fuzzy-aplicações em biomatemática. *IMECC-Unicamp, Campinas*, 2010.
- CORCOLL, C.; BASSANEZI, R.; SANTOS, M. Uma abordagem da lógica fuzzy no ensino médio. Edebé, 2007.
- DEMO, P. *Certeza da incerteza: ambivalência do conhecimento e da vida*. [S.l.]: Plano, 2000.
- DINIZ, M. M. Otimização de funções, funcionais e controle fuzzy. [sn], 2016.
- EARMAN, J. et al. *A primer on determinism*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1986. v. 37.

- FEDERER, H. *Geometric Measure Theory, Classics in Math., Vol. XVI*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 1996.
- FERREIRA, J. C. da M.; BASSANEZI, R. C.; BRANDAO, A. V. On the nguyen theorem for topological spaces. 2018.
- GERÔNIMO, J. R. *Medidas Fuzzy*. 47-82 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1988.
- GRECO, G. H. On l-fuzzy integrals of measurable functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 128, n. 2, p. 581–585, 1987.
- JAFELICE, R.; BARROS, L. d.; BASSANEZI, R. C. Teoria dos conjuntos fuzzy com aplicações. *Notas em Matemática Aplicada*, v. 17, p. 119, 2012.
- JIN, L.; MESIAR, R.; YAGER, R. R. Derived fuzzy measures and derived choquet integrals with some properties. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 29, n. 5, p. 1320–1324, 2020.
- KANDEL, A. *Fuzzy mathematical techniques with applications*. [S.l.]: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1986.
- KHALILI, J. M. J. A. *Como o Mundo Quântico se Comporta Quando Ninguém Esta Observando*. [S.l.]: Blucher, 2014.
- KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 17.
- LEITE, J.; BASSANEZI, R. C. Sistemas dinâmicos fuzzy aplicados a processos difusivos. *Biomatemática*, v. 20, p. 157–166, 2010.
- LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. [S.l.]: Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970.
- LUIZ, M. H. R. *Dinâmica e Controle de Doenças de Citros*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.
- MAGNAGO, K. *Abordagem fuzzy em modelos populacionais discretos. metapopulação de moscas varejeiras. 2005. 189 p.* Tese (Doutorado) — Tese (Doutorado em Matemática Aplicada)–Universidade Estadual de Campinas . . . , 2005.
- MARTINS, A. *Integrais Monótonas*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1980.
- MATHER, J.; MCGEHEE, R. Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time. In: *Dynamical systems, theory and applications*. [S.l.]: Springer, 1975. p. 573–597.
- MLODINOW, L. *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas*. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2009.
- MORAES, R. de. *Evoluções e Revoluções da Ciência*. [S.l.]: Alínea, 2007.
- NEGOIȚĂ, C. V.; RALESCU, D. A. *Applications of fuzzy sets to systems analysis*. [S.l.]: Springer, 1975.

- NGUYEN, H. T. A note on the extension principle for fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 64, n. 2, p. 369–380, 1978.
- OLIVEIRA, J. D. S. de. *Sobre Cálculo Variacional e Controle Ótimo Fuzzy com Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.
- PEIXOTO, M. d. S. Sistemas dinâmicos e controladores fuzzy: um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em São Paulo. *pinas/SP*, 2005.
- PORFÍRIO, F. *Aristóteles: resumo, biografia, obras, ideias e frases*. 2022. <https://mundoeducacao.uol.com.br/filosofia/aristoteles.htm>. [Online; accessed 12-Julho-2022].
- ROMÁN-FLORES, H.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. A note on zadeh's extensions. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 117, n. 3, p. 327–331, 2001.
- SANTOS, R. de J.; BORGES, G. A.; MELO, G. A. F. de; BAUCHSPIESS, A. Controle fuzzy para racionalização de energia em protótipo de processo térmico predial. 2005.
- SANTOS, W. J. P. dos. *Sofistas. Sofistas e a arte da retórica*. 2022. <https://mundoeducacao.uol.com.br/filosofia/sofistas.htm>. [Online; accessed 12-Julho-2022].
- SILVA, J. de Deus Mendes da. *Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em Biomatemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- SILVA, R. B. *As doze mentes mais brilhantes da história da matemática*. 2022. <https://universoracionalista.org/as-doze-mentes-mais-brilhantes-da-historia-da-matematica/>. [Online; accessed 12-Julho-2022].
- SOARES, A. L. O. *Estabilidade de sistemas epidemiológicos gerais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.
- SOUZA, S. D. de. *Estoque e controle de pesca na Amazônia*. 2018.
- SOUZA, T. R. de. *Dinâmica tumoral e a noética*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.
- SUGENO, M. Theory of fuzzy integrals and its applications. *Doct. Thesis, Tokyo Institute of technology*, 1974.
- VALLE, M. E. *Notas de aula: Introdução à Teoria Fuzzy*. 2018. <https://www.ime.unicamp.br/valle/Teaching/MS580/>. [Online; accessed 09-Agosto-2019].
- WATERMAN, D. Real analysis (H. Royden). *SIAM Review*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 7, n. 3, p. 436, 1965.
- WIKIPEDIA. *diversas página: Measure, Lebesgue Measure e Sigma-Algebra*. 2020. <http://en.wikipedia.org/wiki/Measure>. [Online; accessed Setembro-2020].
- XUECHENG, L. On the continuity of fuzzy number valued function. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 68, n. 2, p. 245–247, 1994.