

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

JOSÉ IVELTON SIQUEIRA LUSTOSA

**Cálculo fracionário aplicado à avaliação de
efeitos estruturais na deflexão de vigas
biapoiadas**

Campinas

2022

José Ivelton Siqueira Lustosa

Cálculo fracionário aplicado à avaliação de efeitos estruturais na deflexão de vigas biapoiadas

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Flávio de Campos Bannwart

Coorientador: Edmundo Capelas de Oliveira

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno José Ivelton Siqueira Lustosa e orientada pelo Prof. Dr. Flávio de Campos Bannwart.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Sylvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

L976c Lustosa, José Ivelton Siqueira, 1977-
Cálculo fracionário aplicado à avaliação de efeitos estruturais na deflexão de vigas biapoiadas / José Ivelton Siqueira Lustosa. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Flávio de Campos Bannwart.
Coorientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo fracionário. 2. Derivada fracionária de Caputo. 3. Transformada de Laplace. 4. ANSYS (Programa de computador). I. Bannwart, Flávio de Campos, 1969-. II. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Fractional calculus applied to the evaluation of structural effects in the deflection of simply supported beams

Palavras-chave em inglês:

Fractional calculus

Caputo fractional derivative

Laplace transform

ANSYS (Computer program)

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Flávio de Campos Bannwart [Orientador]

Jaime Vaz Júnior

Renato Pavanello

Rubens de Figueiredo Camargo

Rene Quispe Rodríguez

Data de defesa: 12-12-2022

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-8325-5057>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4408396976984311>

**Tese de Doutorado defendida em 12 de dezembro de 2022 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). FLÁVIO DE CAMPOS BANNWART

Prof(a). Dr(a). JAYME VAZ JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). RENATO PAVANELLO

Prof(a). Dr(a). RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO

Prof(a). Dr(a). RENE QUISPE RODRÍGUEZ

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*À minha esposa e à minha filha, Maria do Socorro e Maria Emília.
Aos meus pais, Maria e José. Aos meus irmãos e irmãs. Dedico!*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, ser maior do Universo, por me dar força, saúde e disposição todos os dias para lutar pelos meus objetivos e me conceder esta importante vitória em mais essa etapa de busca pelo aperfeiçoamento profissional.

Ao Prof. Dr. Flávio de Campos Bannwart, por aceitar orientar-me e pela disposição e apoio na orientação em todos os momentos que precisei durante o desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira, por confiar na minha pessoa e ter me orientado desde que o procurei inicialmente, indicando o Prof. Dr. Flávio e auxiliando na orientação durante todas as etapas do trabalho.

À minha esposa e à minha filha, Maria Socorro e Maria Emília, pela paciência e apoio demonstrado durante todo o curso.

A todos os membros da minha família, em especial à minha mãe Maria, ao meu pai, José e meus irmãos Eliane, Maria, João Batista e Antônio.

A todos os professores que fazem parte do programa de Matemática aplicada - IMECC, pelos ensinamentos e orientação durante todo o desenvolvimento do curso.

Aos meus colegas de turma, em especial a Michele, José Ronaldo, Heron, José Eduardo, André e José Manuel, pela união em longos momentos de estudos, que foram fundamentais para essa vitória.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, pelo suporte dos recursos computacionais necessários para o desenvolvimento da pesquisa.

Finalmente, ao IFPB pela concessão do afastamento.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

Este trabalho propõe o uso do cálculo fracionário, mais especificamente, a derivada fracionária de Caputo para o estudo de efeitos físicos que influenciam na deflexão de uma viga prismática de seção transversal retangular, simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída. A deflexão, nesta configuração, é modelada pelas teorias de Euler-Bernoulli (EB) e Timoshenko-Ehrenfest (TE), os quais são modelos de vigas simples sob restrições lineares. Mesmo mantendo essas restrições, efeitos estruturais específicos em aplicações reais comprometem a precisão dos modelos como concentração de tensões, devido às reações de forças nos contatos de apoio ou instabilidades, por exemplo. Os modelos numéricos usando o método de elementos finitos (MEF) conseguem contemplar bem muitos efeitos estruturais, mesmo em casos complexos, desde que seja trabalhado com refinamento adequado do domínio no qual a estrutura está definida. Apesar da precisão apresentada pelos modelos numéricos, eles contemplam os efeitos estruturais na totalidade, sem apresentar a contribuição em separado de cada efeito individual no resultado fornecido como solução. Com o propósito de detectar e avaliar efeitos físicos influentes no perfil de deflexão que não são contemplados pelos modelos EB e TE e nem explícitos separadamente pela solução de elasticidade tridimensional, obtida via ANSYS, utilizadas como referências, aqui são propostos os modelos Euler-Bernoulli fracionário (EBF) e Timoshenko-Ehrenfest fracionário (TEF) obtidos pela incorporação de um parâmetro fracionário α aos modelos EB e TE, empregando a metodologia da derivada fracionária de Caputo. São obtidas as soluções analíticas dos modelos fracionários propostos, usando a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo. A partir do parâmetro α incorporado nas soluções supracitadas, o trabalho é bem sucedido na detecção dos efeitos de cisalhamento pela solução EBF, a concentração de tensões devido às reações de apoio pela solução TEF, o efeito de grandes deflexões causado pelas forças que surgem no eixo baricêntrico em vigas delgadas com $h \leq b$ (h e b representam, respectivamente a altura e a base da seção transversal da viga), o fenômeno de pré-flambagem em vigas com $h > b$ e os sinais iniciais de plasticidade em vigas delgadas e espessas, em alguns casos, antes mesmo que tais efeitos pudessem ser constatados inequivocamente a partir das curvas de deflexão dos dados originais do ANSYS.

Palavras-chave: cálculo fracionário, derivada fracionária de Caputo, Euler-Bernoulli, Timoshenko-Ehrenfest, Transformada de Laplace, ANSYS

Abstract

This work proposes the use of fractional calculus, more specifically the fractional derivative of Caputo, for the study of physical effects that influence the deflection of a prismatic beam of rectangular cross section, simply supported with a uniformly distributed load. The deflection, in this configuration, is modeled by the theories of Euler-Bernoulli (EB) and Timoshenko-Ehrenfest (TE), which are simple beam models under linear constraints. Even maintaining these restrictions, specific structural effects in real applications compromise the accuracy of the models, such as stress concentration, due to force reactions in the support contacts or instabilities, for example. Numerical models using the finite element method (FEM) can well contemplate many structural effects, even in complex cases, as long as it is worked with adequate refinement of the domain in which the structure is defined. Despite the precision presented by the numerical models, they contemplate the structural effects in their entirety, without presenting the separate contribution of each individual effect in the result provided as a solution. With the purpose of detecting and evaluating influential physical effects on the deflection profile that are not contemplated by the EB and TE models and not separately explicit by the three-dimensional elasticity solution, obtained via ANSYS, used as references, here are proposed the fractional Euler-Bernoulli models (FEB) and fractional Timoshenko-Ehrenfest (FTE) obtained by incorporating a fractional parameter α to the EB and TE models, using Caputo's fractional derivative methodology. The analytical solutions of the proposed fractional models are obtained, using the Laplace transform of Caputo fractional derivative. From the parameter α incorporated in the aforementioned solutions, the work is successful in detecting the shear effects by the FEB solution, the stress concentration due to the support reactions by the FTE solution, the effect of large deflections caused by the forces that arise on the barycentric axis in slender beams with $h \leq b$ (h and b represent, respectively, the height and base of the cross section of the beam), the phenomenon of prebuckling in beams with $h > b$ and the initial signs of plasticity in slender beams and thick, in some cases even before such effects could be unequivocally verified from the deflection curves of the original ANSYS data.

Keywords: fractional calculus, Caputo fractional derivative, Euler-Bernoulli, Timoshenko-Ehrenfest, Laplace transform, ANSYS

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Eixos coordenados cartesianos.	37
Figura 2.2 – Apoio articulado fixo.	38
Figura 2.3 – Apoio articulado móvel.	38
Figura 2.4 – Engastamento.	39
Figura 2.5 – Estrutura hipostática.	39
Figura 2.6 – Estrutura isostática.	40
Figura 2.7 – Estrutura hiperestática.	41
Figura 2.8 – Faixa infinitesimal retangular após a deformação.	43
Figura 2.9 – Representações das tensões a uma certa distância y do eixo neutro.	44
Figura 2.10–Eixos principais da seção transversal.	46
Figura 2.11–Viga com destaque de um elemento diferencial.	48
Figura 2.12–Tensões de cisalhamento na seção transversal da viga.	48
Figura 2.13–Visão frontal da face nq	49
Figura 2.14–Viga simplesmente apoiada com carga distribuída.	52
Figura 2.15–Representação do alongamento do eixo longitudinal.	52
Figura 2.16–Faixa infinitesimal retangular.	53
Figura 2.17–Triângulo retângulo infinitesimal.	54
Figura 2.18–Elemento infinitesimal da viga.	57
Figura 2.19–Gráfico do momento fletor e força cortante.	60
Figura 2.20–Gráfico da solução linear.	63
Figura 2.21–Seção transversal da viga.	64
Figura 2.22–Solução para flexão pura (Euler-Bernoulli) e flexão pura justaposta com os efeitos de cisalhamento.	66
Figura 2.23–Rotação das seções.	67
Figura 2.24–Rotação da seção na teoria de Timoshenko-Ehrenfest.	68
Figura 4.1 – Solução do PVC fracionário para diferentes valores de α	84
Figura 4.2 – Momento fletor para diferentes valores de α	85
Figura 4.3 – Solução da equação fracionária TEF para diferentes valores de α	87
Figura 4.4 – Relação entre R_1 e R_2	89
Figura 5.1 – a) Flecha analítica EBF(EB para $\alpha = 4$) e b) Flecha ANSYS correspondente.	92

Figura 5.2 – Elemento usado na confecção da malha.	94
Figura 5.3 – Viga usada para o teste de convergência da malha.	95
Figura 5.4 – Convergência da malha.	96
Figura 5.5 – Convergência da malha.	97
Figura 5.6 – Erro relativo entre as flechas.	98
Figura 5.7 – Malha constituída por seus respectivos elementos: a) Visão geral e b) Elementos destacados.	99
Figura 5.8 – Erro relativo entre as flechas.	99
Figura 5.9 – Caminho e direção da deflexão.	101
Figura 5.10–Razão de deflexão para as soluções de ordem inteira e fracionária em relação à ANSYS e razão de deflexão para a solução EBF em relação à TE.	103
Figura 5.11–Confronto entre as soluções EBF e TE.	104
Figura 5.12–Erro absoluto entre as soluções EBF e TE.	105
Figura 5.13–Viga de 25 metros, simplesmente apoiada com carga distribuída.	107
Figura 5.14–Diagrama da força cortante e do momento fletor.	107
Figura 5.15–Viga de 25m com destaque para o intervalo de interesse.	109
Figura 5.16–a) Confronto entre EB e ANSYS e b) Erro relativo correspondente.	109
Figura 5.17–Tensões normais de tração ou tensões máximas principais.	110
Figura 5.18–a) Confronto entre EBF e ANSYS e b) Erro relativo correspondente.	112
Figura 5.19–Caminho e direção da deflexão.	113
Figura 5.20–a) Confronto entre TEF e ANSYS e b) Erro relativo correspondente.	114
Figura 5.21–Confronto entre as soluções TEF e ANSYS pelo método dos mínimos quadrados.	115
Figura 5.22–a) Confronto entre EB e ANSYS e b) Erro relativo correspondente.	116
Figura 5.23–Convergência da análise para o problema de grandes deflexões.	118
Figura 5.24–Gráfico deslocamento versus força.	119
Figura 5.25–Variação da rigidez em função das iterações.	120
Figura 5.26–Comparação entre as flechas ANSYS e EB após a filtragem.	121
Figura 5.27–Flechas EBF e ANSYS: a) Confronto e b) Erro relativo.	122
Figura 5.28–Comparação entre as flechas ANSYS e EB após a filtragem.	123
Figura 6.1 – Variação da rigidez: a) $b = 0,01m$ $h = 0,1m$ e b) $b = 0,02m$ e $h = 0,1m$	128
Figura 6.2 – Variação da rigidez: c) $b = 0,03m$ $h = 0,1m$ e d) $b = 0,04m$ e $h = 0,1m$	129
Figura 6.3 – Variação da rigidez: e) $b = 0,05m$ $h = 0,1m$ e f) $b = 0,06m$ e $h = 0,1m$	129
Figura 6.4 – Variação da rigidez: g) $b = 0,07m$ $h = 0,1m$ e h) $b = 0,08m$ e $h = 0,1m$	130
Figura 6.5 – Variação da rigidez: i) $b = 0,09m$ $h = 0,1m$ e j) $b = 0,1m$ e $h = 0,1m$	130
Figura 6.6 – Variação da rigidez: l) $b = 0,2m$ $h = 0,1m$ e m) $b = 0,3m$ e $h = 0,1m$	130
Figura 6.7 – Variação da rigidez: n) $b = 0,4m$ $h = 0,1m$ e o) $b = 0,5m$ e $h = 0,1m$	131
Figura 6.8 – Variação da rigidez: p) $b = 0,6m$ $h = 0,1m$ e q) $b = 0,7m$ e $h = 0,1m$	131

Figura 6.9 – Variação da rigidez: r) $b = 0,8m$ $h = 0,1m$ e s) $b = 0,9m$ e $h = 0,1m$.	132
Figura 6.10–Variação da rigidez: a) $b = 0,1m$ $h = 0,2m$ e b) $b = 0,1m$ e $h = 0,3m$.	132
Figura 6.11–Variação da rigidez: c) $b = 0,1m$ $h = 0,4m$ e d) $b = 0,1m$ e $h = 0,5m$.	133
Figura 6.12–Variação da rigidez: e) $b = 0,1m$ $h = 0,6m$ e f) $b = 0,1m$ e $h = 0,7m$.	133
Figura 6.13–Variação da rigidez: g) $b = 0,1m$ $h = 0,8m$.	134
Figura 6.14–Representação da flambagem lateral com torção.	135
Figura 6.15–Seção transversal da viga.	138
Figura 6.16–Distribuição do carregamento na viga.	139
Figura 6.17–Convergência da análise para o problema de flambagem.	140
Figura 6.18–Gráfico deslocamento versus força.	141
Figura 6.19–Gráfico das tensões normais de compressão.	141
Figura 6.20–Taxa de variação da carga crítica em função dos valores α_{TEF} .	146
Figura 6.21–Convergência da análise.	148
Figura 6.22–Gráfico deslocamento versus força.	148
Figura 6.23–Variação da rigidez geométrica em função das iterações i .	149
Figura 6.24–Flechas TEF e ANSYS: a) Confronto e b) Erro relativo.	150
Figura 6.25–Distribuição do carregamento na viga.	151
Figura 6.26–Gráfico da convergência.	152
Figura 6.27–Gráfico deslocamento versus força.	152
Figura 6.28–Gráfico das tensões normais de compressão.	153
Figura 6.29–Viga após a análise de flambagem.	154
Figura 6.30–Taxa de variação da carga crítica em função dos valores α_{TEF} .	156
Figura 7.1 – Carregamento uniaxial de uma barra metálica.	159
Figura 7.2 – Comportamento plástico dos materiais. Adaptado de (GOMES, 2006).	160
Figura 7.3 – Plasticidade na viga.	163
Figura 7.4 – Confronto entre as soluções EB e ANSYS sem filtro.	163
Figura 7.5 – Flechas EBF e ANSYS: a) Confronto e b) Erro relativo.	164
Figura 7.6 – Plasticidade na viga.	165
Figura 7.7 – Flechas EBF e ANSYS: a) Comparação e b) Erro relativo.	165
Figura 7.8 – Flechas EBF e ANSYS: a) Comparação e b) Erro relativo.	166
Figura 7.9 – Soluções sem e com modo plástico ativado: a) Confronto e b) Erro relativo.	167
Figura 7.10–Simulação plástica.	168
Figura 7.11–Flechas TEF e ANSYS: a) Comparação e b) Erro relativo.	169
Figura 7.12–Soluções sem e com modo plástico ativado: a) Confronto e b) Erro relativo.	170
Figura 7.13–Flechas TEF e ANSYS: a) Comparação e b) Erro relativo	170

Lista de tabelas

Tabela 5.1 – Comparação entre as deflexões máximas.	102
Tabela 6.1 – Evolução dos sinais de flambagem via TEF.	143
Tabela 6.2 – Caracterização evolutiva da flambagem pela solução TEF.	155

Lista de abreviaturas e siglas

UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
IMECC	Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
FEM	Faculdade de Engenharia Mecânica
EB	Euler-Bernoulli
TE	Timoshenko-Ehrenfest
EBF	Euler-Bernoulli Fracionário
TEF	Timoshenko-Ehrenfest Fracionário
PVI	Problema de Valor de Inicial
PVC	Problema de Valor de Contorno
MEC	Método de Elementos de Contorno
MEF	Método de Elementos Finitos
SIR	Suscetível-Infetado-Recuperado

Lista de símbolos

A	Área da seção transversal
\vec{a}	Aceleração
α	Ordem da derivada fracionária
AC^n	Conjunto das funções $n - 1$ vezes diferenciáveis
B	Constante
b	Base da seção transversal da viga
β	Ordem da derivada fracionária
C	Constante
c	Coefficiente de cisalhamento
C_t	Centro de torção
C_{st}	Centroide da seção transversal
Γ	Símbolo que representa a função gama
γ	Distorção da seção transversal
E	Elasticidade de Young
E_r	Erro relativo
r_{E, T_θ}	Fator de redução do módulo de elasticidade
E_{T_θ}	Módulo de elasticidade a uma temperatura T_θ
ϵ	Deformação
ϵ_x	Deformação longitudinal
F	Força
F_A	Carregamento aplicado

F_i	Força determinada pela deformada U_i
F_r	Vetor carregamento ou resíduo
F_x	Força horizontal
F_y	Força vertical
G	Módulo da elasticidade transversal do material
h	Altura da seção transversal da viga
H_A	Reação horizontal no vínculo A
θ	Rotação da seção transversal
I	Momento de inércia
K_G	Matriz de rigidez
k	Curvatura
λ	Ângulo de distorção
L	Comprimento da viga
\mathcal{L}	Operador que representa a transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	Operador que representa a transformada de Laplace inversa
ΔL	Alongamento da viga
M	Momento fletor
m	massa
M_e	Momento de inércia elementar
M_Z	Momento em relação ao eixo z
μ	Módulo de Poisson
N	Força normal
\vec{P}	Quantidade de movimento
ρ	Raio da curvatura
Q	Momento de área da seção transversal
q	Carga distribuída

R_1	Constante
R_2	Constante
R_A	Reação de apoio no vínculo A
R_B	Reação de apoio no vínculo B
r_{σ, T_θ}	Fator de redução da tensão de escoamento
Σ	Desvio padrão
σ	Tensão normal
σ_{vM}	Tensão de von Mises
σ_{T_θ}	Tensão de escoamento a uma temperatura T_θ
∇T	Gradiente de temperatura
T_{f_1}	Temperatura na seção transversal (face 1)
T_{f_2}	Temperatura na seção transversal (face 2)
τ	Tensão de cisalhamento
U	Vetor deslocamento.
U_i	Deformada em uma determinada iteração i
Δu	Alongamento longitudinal
V	Força cortante
\vec{v}	Velocidade
v_{EB}	Flecha transversal Euler-Bernoulli
v_{TE}	Flecha transversal Timoshenko-Ehrenfest
v_{EBF}	Flecha transversal Euler-Bernoulli fracionária
v_{TEF}	Flecha transversal Timoshenko-Ehrenfest fracionária
v_{ANSYS}	Flecha transversal ANSYS
\bar{x}	Média
Ψ	Constante que depende da razão de Poisson de um determinado metal

Sumário

Introdução	20
1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
2 ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS SOBRE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS	35
2.1 Vigas	35
2.1.1 Equilíbrio em estruturas	36
2.1.2 Tipos de apoios	37
2.1.3 Tipos de estruturas.	39
2.1.4 Deformação normal	41
2.2 Tensões	41
2.2.1 Tensões normais	42
2.2.2 Tensões de cisalhamento	47
2.3 Equação diferencial da linha elástica	51
2.4 Relações entre momento fletor, força cortante e carga	57
2.5 Equação de Euler-Bernoulli - EB	59
2.5.1 Determinando o momento fletor e a força cortante	59
2.5.2 Tensões normais de tração e compressão e de cisalhamento máximas	60
2.5.3 Solução da equação diferencial linear da linha elástica - Equação de Euler-Bernoulli	61
2.6 Teoria de Timoshenko-Ehrenfest	63
2.6.1 Modelo para deformação por cisalhamento	63
2.6.2 Equação de Timoshenko-Ehrenfest - TE	67
2.6.3 Solução de Timoshenko-Ehrenfest para uma viga simplesmente apoiada com carga distribuída	71
3 FUNDAMENTOS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO	73
3.1 Integral de Riemann-Liouville	74
3.2 Derivada de Caputo	75
3.3 Transformada de Laplace	76
4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS	78
4.1 Equação de Euler-Bernoulli fracionária	79
4.1.1 Momento fletor fracionário	85
4.2 Equação de Timoshenko-Ehrenfest fracionária	86

4.2.1	Relação entre as soluções EBF e TEF	88
5	DEFLEXÃO DE VIGAS: ESTUDO DE EFEITOS VIA EBF E TEF	90
5.1	Escolha do <i>software</i> computacional	90
5.2	Caracterização do modelo, escolha do material, implementação e simulação no ANSYS	91
5.2.1	Malha de elementos finitos	93
5.2.2	Avaliação e convergência da malha	94
5.3	Análise da precisão dos modelos fracionários EBF e TEF	100
5.4	Identificando os efeitos de cisalhamento	104
5.5	As soluções EBF e TEF e a identificação de resultados via ANSYS	106
5.5.1	O processo de filtragem	106
5.5.2	Análise linear de uma viga delgada simples	108
5.5.3	Análise linear de uma viga espessa com filtragem dos efeitos de apoios	111
5.5.4	Análise linear de uma viga espessa na presença dos efeitos de apoios	112
5.5.5	Análise não linear de uma viga delgada - grande deflexões	115
6	DETECÇÃO E AVALIAÇÃO DE FLAMBAGEM VIA TEF	125
6.1	Flambagem lateral: conceitos e primeiros estudos	125
6.1.1	Vigas sob altas tensões	127
6.1.2	Flambagem lateral com torção FLT	134
6.1.2.1	Estudo de caso 1: viga com $h=10b$	137
6.1.2.2	Estudo de caso 2: viga com $h=2b$	150
7	PLASTICIDADE EM VIGAS E AS SOLUÇÕES FRACIONÁRIAS	158
7.1	Plasticidade: conceitos fundamentais	158
7.2	Plasticidade em vigas: estudo de casos	161
7.2.1	Viga delgada	162
7.2.2	Viga espessa	166
	Conclusões	172
	REFERÊNCIAS	175
APÊNDICE A	DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 4 DA SUB- SEÇÃO 3.3	185

Introdução

O trabalho utiliza conceitos de cálculo fracionário para investigar efeitos físicos na flexão de vigas, quando submetidas a cargas estáticas. A viga, aqui considerada, é prismática de seção transversal retangular, constituída de aço 1020 (por ser um material dúctil), simplesmente apoiada com carga distribuída uniformemente em sua seção retangular superior.

Os objetivos almejados para o desenvolvimento do trabalho são destacados detalhadamente na seção que segue.

Objetivos

- Evidenciar um caminho do uso do cálculo fracionário como ferramenta analítica investigativa de detecção e avaliação de fenômenos físicos usando como base referencial as simulações numéricas via elementos finitos fornecidas pelo modelo de elasticidade tridimensional ANSYS;
- Propor e solucionar modelos fracionários para as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko-Ehrenfest para uma viga simplesmente apoiada com carga transversal uniformemente distribuída;
- Ajustar tais modelos aos resultados obtidos pelo modelo de elasticidade tridimensional ANSYS objetivando identificar a ordem fracionária representativa da detecção e avaliação de diferentes fenômenos físicos, não explícitos separadamente pelo software e nem contemplados pelas soluções analíticas inteiras.

No século XVII, Newton (1643 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716), independentemente, criaram o cálculo de ordem inteira, ou o cálculo, cujos conceitos de integral e derivada se fundem no teorema fundamental do cálculo. Dessa época, também é o cálculo de ordem arbitrária ou cálculo de ordem não-inteira, cunhado popularmente com o nome de cálculo fracionário, talvez por estar relacionado a uma possível derivada com a ordem sendo uma fração (ROSS, 1975).

O cálculo fracionário tem suas raízes, em setembro de 1695, quando l’Hospital e seu amigo Leibniz começam a discutir a ideia de uma derivada de ordem meio. A partir de argumentações mais formais de matemáticos como Abel (1802 – 1829), Leonhard Euler (1707 – 1783), Fourier (1768 – 1830), Heaviside (1850 – 1925), Liouville (1809 – 1882), Lagrange (1736 – 1813), entre outros, nos séculos seguintes, surgiram as primeiras definições de integrais e derivadas de ordem não inteiras [(MILLER; ROSS, 1993) e (DUGOWSON, 1994)].

Apesar de o cálculo fracionário ter surgido na mesma época que o cálculo de ordem inteira, conforme proposto por Leibniz e Newton, seu desenvolvimento analítico ocorreu bem depois e inicialmente bem restrito à matemática pura, sem destaques em aplicações. Ele começa a ganhar destaque em congressos e tratados especializados, a partir de uma conferência realizada no ano de 1974, organizada por B. Ross [(GORENFLO; MAINARDI, 2008) e (ROSS, 1975)]. Desde então, houve expansão de seu uso em diversas áreas da matemática, como também da Física, da Biologia, da Engenharia, da Economia, entre outras. Devido ao bom retrospecto para representar fenômenos naturais, atualmente o seu uso tem grande abrangência, principalmente no campo das equações diferenciais que, quando generalizadas para uma ordem arbitrária em um intervalo definido, são denominadas equações diferenciais fracionárias.

Para o desenvolvimento de trabalhos em áreas como Matemática, Física, Engenharia, Indústria, Economia, entre outras, frequentemente, confronta-se com problemas ou fenômenos que, para serem estudados, precisam ser descritos ou modelados por ferramentas matemáticas. A construção de modelos matemáticos para representar certos problemas reais não é uma tarefa fácil. Por isso, o desenvolvimento, da maioria deles, precisa de uma análise profunda das hipóteses e, além disso, de simplificações para poder apresentar pelo menos resultados que descrevam algo próximo da “realidade” (LUSTOSA, 2017).

As equações diferenciais estão presentes na modelagem de problemas de todas as áreas mencionadas no parágrafo anterior. No estudo da deflexão de vigas, não é diferente. Estas equações são usadas para modelar o problema, cujo objetivo é obter a deflexão do plano neutro.

Os carregamentos ou cargas podem ser classificados nos modelos: concentradas ou distribuídas. A carga concentrada é aquela que atua em uma região suficientemente pequena, quando comparada com a área total da estrutura. Como exemplo, pode-se citar a carga transmitida por um pilar sobre uma viga. Já a carga distribuída é aquela que age ao longo de uma linha ou sobre uma superfície, ou por todo um volume, tais como a advinda de forças de campo (gravitacional, magnético, elétrico). Um exemplo disso seria a carga transmitida por uma parede sobre uma laje (ASSAN, 2010).

A modelagem de fenômenos naturais, usando equações diferenciais ou qualquer outra ferramenta, pode ser desafiadora. Assim, para uma abordagem inicial, os mode-

los desenvolvidos partem de situações simples, nas quais são admitidas hipóteses que caracterizam o modelo como apenas uma aproximação minimamente representativa dos fenômenos.

O cálculo fracionário surge como ferramenta que, em certos casos, auxilia melhor no desenvolvimento de aproximações de um modelo descrito por uma equação diferencial de ordem inteira de um determinado comportamento físico. Aqui são empregados os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko-Ehrenfest, que têm fundamental importância no estudo da deflexão de vigas, pois atendem com considerável precisão aos casos de vigas simples em problemas estáveis e sem efeitos de concentração de tensões.

Muitos trabalhos desenvolvidos nos últimos anos, mostram bons resultados da generalização do modelo descrito por uma equação diferencial de ordem inteira para uma equação diferencial fracionária. Dentre eles, uma aplicação do cálculo fracionário ao modelo de crescimento populacional proposto por Thomas Malthus em 1798 ([ALMEIDA, 2017](#)). Os resultados mostram que no modelo fracionário, para certos valores do parâmetro α , a ordem da derivada consegue aproximar melhor os resultados, ao contrário do modelo clássico. Dentre vários outros trabalhos desenvolvidos na mesma linha de raciocínio, destacam-se [[\(GOMES, 2014\)](#), ([ALMEIDA; BASTOS; MONTEIRO, 2016](#)), ([OLIVEIRA, 2018](#)) e ([SUN et al., 2018](#))].

Já na área da flexão de vigas, estudos mais avançados surgem no século XVIII, quando Jacob Bernoulli (1654 – 1705) mostrou que a curvatura de uma viga elástica, em qualquer ponto, é proporcional ao momento fletor nesse ponto. Mais tarde, Daniel Bernoulli (1700 – 1782), sobrinho de Jacob, formulou a equação do movimento de um feixe vibratório que, alguns anos depois, foi aceita por Leonhard Euler (1707 – 1783) em uma formulação da flexão elástica de vigas sob várias condições de carregamento. Os estudos de Leonhard Euler contribuíram para grandes avanços no entendimento do comportamento das curvas elásticas ([HAN; BENAROYA; WEI, 1999](#)).

A teoria de vigas de Euler-Bernoulli, também conhecida por teoria clássica, é bastante utilizada na literatura, pois é simples e fornece aproximações consideráveis para uma grande variedade de problemas, desde que aplicada respeitando as suas limitações e premissas ([RAMOS et al., 2018](#)). É considerado simples por contemplar apenas a deformação por flexão (inércia rotativa), apresentando bons resultados para vigas delgadas.

Em ([ELISHAKOFF, 2019](#)), outro estudo sobre vigas de grande relevância, desenvolvido no início do século XX por Stephen Timoshenko (1878 – 1972) e Paul Ehrenfest (1880 – 1933), é conhecido hoje como a teoria de vigas de Timoshenko-Ehrenfest. Em tal estudo, os autores desenvolveram um modelo de vigas que incorpora os efeitos da inércia rotacional e de cisalhamentos. ([ELISHAKOFF, 2020](#)) considera que os trabalhos publicados por Stephen Timoshenko e Paul Ehrenfest, na clássica teoria de vibração de vigas, em que os efeitos de cisalhamento e inércia rotacional são considerados e constituem

um dos eventos mais marcantes no desenvolvimento da dinâmica estrutural do século XX.

Na engenharia de estruturas, a teoria de Timoshenko-Ehrenfest é bem aceita em problemas elementares, pois, ao incorporar os efeitos de cisalhamento nas características físicas do problema, aproxima melhor os resultados da flexão (SILVA, 2019).

Neste trabalho, é proposto, inicialmente, incorporar ao modelo de Euler-Bernoulli um parâmetro α , usando, para isso, conceitos de cálculo fracionário, mais especificamente, a derivada fracionária no sentido de Caputo, como também a transformada de Laplace [(LI; DENG, 2007), (JIANG et al., 2017) e (TUAN; MOHAMMADI; REZAPOUR, 2020)]. Apresentado o modelo fracionário (modelo Euler-Bernoulli com o parâmetro α incorporado), é desenvolvida uma solução analítica para a deflexão. Obtida a solução analítica, a investigação volta-se para a busca, através dela, da interpretação de possíveis fenômenos físicos, usando como referência a solução numérica fornecida pelo ANSYS, o qual é um *software* de elementos finitos que descreve, com precisão, a deflexão de vigas, quando submetidas tanto a cargas axiais como transversais. Convém destacar que os métodos numéricos, como o Método de Elementos Finitos (MEF), são ferramentas que alcançam resultados precisos na avaliação de estruturas submetidas a carregamentos, tanto estáticos como dinâmicos.

Ao simular no ANSYS, uma viga espessa simplesmente apoiada, têm-se vários fenômenos influenciando na deflexão, como, por exemplo, os efeitos de cisalhamento, pois a viga é espessa, a concentração de tensão nos apoios e a variação do momento. O ANSYS fornece como saída, a deflexão em sua totalidade, sem explicitar separadamente a contribuição de cada efeito.

Portanto, o principal objetivo do trabalho é evidenciar um caminho do uso do cálculo fracionário como ferramenta investigativa para detectar, identificar e avaliar separadamente efeitos que alteram o perfil da deflexão, mas não são contemplados pelas soluções analíticas clássicas e nem explícito pelos resultados de saída fornecidos em simulações numéricas de elasticidade tridimensional via ANSYS, o qual foi a referência adotada.

Conforme proposto, busca-se, inicialmente, a solução fracionária para a flexão de uma viga prismática, de comprimento L , com seção transversal retangular, simplesmente apoiada com um apoio fixo e outro móvel, submetida a uma carga q distribuída. Para pequenas deformações, o modelo matemático que fornece uma solução inteira para o problema é a equação diferencial linear de quarta ordem (HIBBELER, 2010),

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = -q(x), \quad (1)$$

na qual E é o módulo de Young, e I é o momento de inércia da seção transversal. A equação supracitada representa o modelo de Euler-Bernoulli para viga simples. O sinal

negativo no carregamento, significa que no plano xv , a orientação da flecha v foi adotada para cima.

Incorporando o parâmetro α à Equação (1), obtém-se a equação diferencial fracionária linear não homogênea de ordem α

$$EI \frac{d^\alpha v(x)}{dx^\alpha} = -q(x), \quad (2)$$

com $3 < \alpha \leq 4$ ou $4 < \alpha \leq 5$.

Devido à liberdade do parâmetro α , é notável a possibilidade de analisar, com mais detalhes, a solução analítica e interpretar outros possíveis fenômenos físicos que contribuem para a deflexão da viga, além daqueles contemplados pelo modelo clássico.

Convém destacar que, pela característica do problema, pode-se, de certa forma, intuir que a solução pelo modelo fracionário possa não ser melhor que a solução TE, ou mesmo a de EB. Porém, este fato não interfere no propósito do trabalho que é avaliar o desvio de α , parâmetro revelador de fenômeno físico.

Os vários efeitos físicos, que podem contribuir para a deflexão da viga, podem ser buscados, variando seu carregamento, pois todo esforço submetido à viga é convertido internamente em deslocamentos.

Para a solução do problema, é usada a transformada de Laplace no sentido de Caputo (TEODORO, 2014) e as condições de contorno

$$\begin{cases} v(0) = v(L) = 0, \\ EIv''(0) = EIv''(L) = M(0) = M(L) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

na qual M é o momento fletor.

Para o modelo fracionário, foram mantidas as condições de contorno do problema clássico, objetivando não alterar sua natureza física. A escolha da transformada de Laplace no sentido de Caputo vem justamente desta fato, pois para tal transformada, as condições iniciais são derivadas de ordem inteira.

Corrente na literatura, o modelo descrito pela Equação (1) é conhecido como equação de Euler-Bernoulli e contempla apenas a deflexão por momento fletor.

Por outro lado, (ASSAN, 2010) e (TIMOSHENKO; GERE, 1983) mostram que a deflexão, quando é considerado apenas o cisalhamento puro, pode ser modelada pela equação diferencial linear não homogênea de primeira ordem

$$\frac{dv(x)}{dx} = -c \frac{V(x)}{GA}, \quad (4)$$

na qual v é o deslocamento, V é a força cortante, G é o módulo de elasticidade transversal, A é a área da seção, e c é o coeficiente de cisalhamento relacionado à deformação por flexão, que depende da forma e dimensões geométricas da seção transversal da viga.

Assim, considerando para o problema apenas as deflexões em regime linear, pode-se obter a solução de Timoshenko-Ehrenfest para a flecha, usando o princípio da superposição, isto é,

$$v(x) = v_f(x) + v_c(x), \quad (5)$$

no qual $v_f(x)$ e $v_c(x)$ são as deflexões por momento fletor e cisalhamento, respectivamente.

Portanto, usando o princípio da superposição, foi também proposto o modelo fracionário generalizado, para uma viga simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída, o qual contempla os efeitos de cisalhamento,

$$v(x) = v_{EBF}(x) + v_{CF}(x), \quad (6)$$

no qual $v_{EBF}(x)$ e $v_{CF}(x)$ são as soluções fracionárias para a deflexão por momento fletor e cisalhamento, respectivamente.

A solução $v_{EBF}(x)$ é dada pela solução da Equação (2) e a solução $v_{CF}(x)$ pode ser obtida da Equação (4), usando uma integração direta e deduzindo o momento fletor fracionário, usando a transformada de Laplace (TEODORO, 2014). E, por fim, é determinada a referida solução com a condição de contorno $v(0) = 0$.

Este trabalho é composto pela introdução e sete capítulos. Na introdução, foi apresentado a metodologia utilizada no desenvolvimento do trabalho, destacando, sequencialmente, as etapas para tal desenvolvimento.

No Capítulo 1, é apresentada uma revisão de literatura na qual é feita uma breve descrição cronológica de trabalhos desenvolvidos na área das flexões de vigas, destacando tanto os trabalhos desenvolvidos usando os conceitos clássicos de cálculo diferencial e integral, quanto os que usam os conceitos de cálculo diferencial fracionário.

No Capítulo 2, são apresentados alguns conceitos básicos da teoria estrutural estática, através dos quais são deduzidas as principais equações analíticas que descrevem a flexão e tensão de vigas, destacando os modelos para flexão e tensão de uma viga simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída. É destacada a solução analítica para tensões normais e de cisalhamento e, a partir delas, é apresentada a expressão que fornece a tensão máxima, tração e compressão para o problema. É apresentada também a dedução da equação de Euler-Bernoulli que descreve a deflexão transversal por flexão para problemas lineares e a equação de Timoshenko-Ehrenfest que, além de contemplar a deflexão por momento fletor, contempla também a deflexão por cisalhamento.

O Capítulo 3 apresenta conceitos de cálculo fracionário, destacando as definições integrais e derivadas de Riemann-Liouville e Caputo. São apresentadas também as definições da transformada de Laplace, sua inversa, além de algumas propriedades desta transformada. É também definida a transformada de Laplace da derivada de Caputo, resultado fundamental para a resolução dos modelos fracionários.

No Capítulo 4, são apresentados os chamados modelos fracionários para as equações de Euler-Bernoulli e Timoshenko-Ehrenfest. As respectivas soluções são obtidas usando a transformada de Laplace e a derivada de Caputo, como também o princípio da superposição para solução de equações diferenciais lineares.

No Capítulo 5, as soluções Euler-Bernoulli e Timoshenko-Ehrenfest fracionárias, deduzidas no Capítulo 4, são utilizadas para avaliar e identificar efeitos físicos que influenciam a deflexão de uma viga simplesmente apoiada com carga distribuída, que não são explícitos pelo ANSYS, *software* adotado como referência, e nem contemplados pelas soluções inteiras clássicas (EB) e (TE). Dentre os fenômenos estudados, destacam-se: efeitos de cisalhamento, variação das tensões causadas pelos apoios nas extremidades da viga e seus possíveis efeitos na deflexão e os efeitos de grandes deflexões em vigas delgadas ($h \leq b$), onde h e b representam base e altura da seção transversal da viga.

No Capítulo 6, a solução fracionária Timoshenko-Ehrenfest é utilizada para identificar e avaliar os sinais iniciais do fenômeno de flambagem lateral com torção em uma viga simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.

No Capítulo 7, as soluções Euler-Bernoulli e Timoshenko-Ehrenfest fracionárias são utilizadas para avaliar e identificar efeitos de plasticidade em vigas simplesmente apoiadas com carregamento uniformemente distribuído. Em seguida são apresentadas as conclusões do trabalho com algumas sugestões para estudos futuros.

Por fim, convém destacar o estudo feito sobre avaliação de efeitos térmicos via solução EBF. Nos casos analisados, foram detectados efeitos pela solução EBF, mas surgiram dúvidas sobre a interpretação do tipo de efeito identificado. O propósito inicial seria incluir na tese este estudo em um capítulo adicional, mas não foi incluído devido ao problema de interpretação do referido efeito não apresentar um desfecho até o momento da defesa da tese.

Capítulo 1

Revisão bibliográfica

São destacadas aqui as referências que serviram de suporte para o trabalho desenvolvido. Inicialmente, são destacadas referências que descrevem a dedução da equação da linha elástica focando nos casos de pequenas e grandes deflexões. Em seguida, são apresentados trabalhos desenvolvidos na área de cálculo fracionário que abordam, principalmente, o campo das equações diferenciais, pois é esta área da matemática que serve de alicerce para este estudo. E, por fim, é apresentada uma revisão das pesquisas desenvolvidas na área de flexão de vigas em que o cálculo fracionário é utilizado de alguma forma.

Estudos sobre a forma linearizada da equação da linha elástica, mais conhecida como equação de Euler-Bernoulli, podem ser encontrados em várias referências como, (TIMOSHENKO; GERE, 1983), (AZEVEDO, 2003), (ALMEIDA, 2009), (ASSAN, 2010), (HIBBELER, 2010) e (ALVES, 2012). Estes autores também deduzem a forma não linearizada, que é uma equação diferencial ordinária não homogênea de segunda ordem. A forma linearizada é obtida a partir da forma não linearizada considerando uma pequena variação no ângulo de inclinação da deflexão. Assim, a equação na forma linearizada pode descrever apenas pequenos deslocamentos e inclinações da flecha.

A abordagem da forma não linearizada, a qual permite avaliar grandes deflexões de vigas, é feita de forma bem resumida para um caso de uma viga em balanço em (TIMOSHENKO; GERE, 1983). Também pode-se encontrar a abordagem de alguns casos de deflexões não lineares em (GONÇALVES, 2006), que apresenta, por exemplo, uma solução numérica para uma viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre.

Em (FERTIS, 2006) é apresentado um procedimento para obtenção de soluções não lineares, o qual foi denominado formulação pseudolinear equivalente. Usando tal procedimento, o referido autor escreveu vários artigos, que estão descritos na respectiva referência. Também são encontrados trabalhos que sugerem propostas para determinar soluções não lineares aproximadas, como em (HE; CHEN, 2006). Com a proposta de aproximação apresentada por He Xiao-ting e Chen Shan-lin, pode-se encontrar soluções

aproximadas para alguns casos de deflexão de vigas quando a mesma é considerada puramente elástica.

(ALVES, 2012) comenta a solução da equação diferencial exata da deflexão destacando o fato de que são soluções trabalhosas, pois o seu desenvolvimento recai em integrais elípticas. Segundo ele, as primeiras investigações da linha elástica exata foram feitas por Jacob Bernoulli (1654 – 1705), Leonhard Euler (1707 – 1783) e Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813).

(LI; LEE, 2015) afirma que uma análise precisa de deflexões não lineares ou grandes deflexões é muito complicada e requer a aplicação do conceito de integrais elípticas, além de outros conceitos, devido à não linearidade geométrica. Além disso, a análise de grande deflexão de uma viga é geralmente restrita a vigas de Euler-Bernoulli, as quais não contemplam a deformação por cisalhamento.

As deformações não lineares geralmente ocorrem sob tensões acima da tensão de escoamento. Existem fenômenos não lineares que podem ocorrer sob tensões abaixo dos níveis de escoamento. Um exemplo disso é o fenômeno de flambagem. As deformações plásticas são exemplos de deformações que ocorrem sob tensões acima dos níveis de escoamento. Os materiais sujeitos a sofrer grande plasticidade são denominados materiais dúcteis. Estes materiais, quando submetidos a altas tensões, sofrem deformações irreversíveis, isto é, aquelas que, quando o carregamento é retirado da estrutura, não volta ao seu estado inicial. Nestas categorias de materiais, o limite entre as deformações lineares e plásticas é dado pela tensão máxima de escoamento. As deformações plásticas de materiais, também conhecidas como grandes deformações, são abordadas em diversos trabalhos na literatura, os quais são mencionados como segue.

Para trabalhos mais atuais, são citados (KO; KIM; KIM, 2001), que descrevem um estudo experimental sobre a capacidade de rotação plástica de vigas de concreto armado de alta resistência. Foram realizados experimentos com vigas submetidas a vários esforços de compressão do concreto, à tração e a diversos carregamentos. As curvaturas obtidas para o escoamento dos dados experimentais, são significativas, pois quando comparadas à teoria, as diferenças ficaram em torno de 10%. (DEVLOO; RYLO; SANTOS, 2006) discutem a principal dificuldade na implementação de modelos de plasticidade em um código de elemento finito existente. Segundo eles, o problema é a implementação da matriz tangente consistente, pois, para ela ser implementada, é preciso que se deduza uma fórmula fechada para a tensão tendo como resultados incrementos da deformação. (BECK, 2009) desenvolve um estudo sobre as curvas tensões \times deformação com taxa constante de deformação, nos quais os experimentos são feitos por meio de ensaios axiais de impacto em corpos de prova constituídos de Policloreto de Vinila. (JIAO et al., 2011) abordam a capacidade de energia plástica dissipada por uma viga quando é submetida a carregamentos cíclicos, tais como efeitos sísmicos. Segundo eles, tal fator tem grande influência em estruturas

como edifícios em regiões possíveis de efeitos sísmicos. No estudo, testes de carregamentos cíclicos são realizados e analisados, pois a simulação dos referidos testes assemelha-se a efeitos sísmicos. (CECÍLIO, 2011) faz uma revisão sobre a teoria incremental elastoplástica relacionando-a à teoria de elementos finitos. (VALENTE; RICARDO; MATOS, 2011) analisam numericamente o comportamento estrutural no qual é dada ênfase à deformação de vigas constituídas de aço e betão (concreto). Vigas caracterizadas dessa forma são chamadas vigas mistas. Os modelos numéricos constituídos contemplam as vigas mistas simplesmente apoiadas com carregamento distribuídos e concentrados na parte central do vão. (CARVALHO, 2012) desenvolve uma análise numérica e experimental sobre o comportamento elastoplástico de espumas metálicas quando submetidas à compressão.

A flambagem também é um fenômeno que pode provocar grandes deflexões em vigas e está diretamente relacionado com a não linearidade geométrica das estruturas. Segundo (FRUCHTENGARTEN, 2005), os primeiros estudos sobre este fenômeno físico foram desenvolvidos por Leonhard-Euler (1707 – 1783) por volta de 1759. A flambagem em vigas com seções transversais retangulares foram abordados em pesquisas desenvolvidas por Ludwig Prandtl e Anthony Michell em trabalhos independentes um do outro no ano de 1889.

A partir daí, inúmeros trabalhos visando estudar o fenômeno de flambagem surgem na literatura. Dentre alguns são citados: a flambagem lateral de vigas de aço de paredes finas carregadas horizontalmente apresentado por S.P. Timoshenko em 1905 [(REIS, 1996) e (KALA, 2013)]. (CLARK; HILL, 1960) desenvolvem um resultado geral para a resistência à flambagem elástica de vigas, com coeficientes dependendo principalmente dos modos de carregamento e condições de apoios. (LEE; KIM; HONG, 2002) estudam a flambagem lateral em uma viga mista laminada com seção I, no qual apresentam como resultado um modelo analítico baseado na teoria clássica de Euler-Bernoulli, podendo ser aplicado à flambagem lateral de uma viga mista de seção transversal I submetida a diversos tipos de carregamentos. (SAPKÁS; KOLLÁR, 2002) analisam a estabilidade de vigas mistas ortotrópicas, simplesmente apoiadas e em balanço, de paredes finas, seção aberta tipo I, submetidas a momentos extremos concentrados, além de cargas uniformemente distribuídas. É derivada uma expressão explícita para a carga de flambagem lateral com torção de vigas mistas e uma expressão simples que mostra a redução aproximada da carga de flambagem devido à deformação por cisalhamento. (KALA, 2013) analisa a flambagem lateral com torção de vigas I laminadas a quente simplesmente apoiadas sob flexão de eixo principal. O problema de estabilidade à flexão é estudado considerando as equações de flexão e torção do eixo menor em vigas retas perfeitas, como também apresentando imperfeições iniciais. A estabilidade não linear é considerada como base para a derivação das soluções matemáticas. (KUS, 2015) apresenta um procedimento para o cálculo do momento crítico de flambagem de uma viga cônica com a aplicação de conceitos da minimização da energia potencial, usando o método de Ritz. Os resultados obtidos

permitem obter momentos críticos iniciando a flambagem lateral das vigas I de aço bem afuniladas e simplesmente apoiadas. (ROSSI et al., 2020) investigam numericamente a influência dos efeitos de desestabilização dos carregamentos e a possibilidade da ocorrência de distorção da alma, que caracteriza a flambagem lateral por distorção. O modelo numérico é calibrado considerando testes experimentais, e as vigas utilizadas no estudo são simplesmente apoiadas, com apoios de garfos nas extremidades, sujeitas a efeitos de carregamento neutros e desestabilizadores. As vigas são submetidas à flexão uniforme, carga concentrada no meio do vão e uniformemente distribuídas. Desta busca, percebe-se que existem muitos trabalhos que abordam a flambagem em vigas com seção transversal tipo I, mas com seção transversal retangular não foram encontrados.

(LI; LEE, 2015) apresentam uma análise sobre pequenas deflexões, considerando o efeito da componente horizontal da força de reação, fato que não é considerado nas teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko-Ehrenfest. São analisados os casos de flexão para carregamento distribuído, nos quais são abordadas as flexões de três e quatro pontos, fazendo uma comparação com e sem a presença da força de reação horizontal.

(BATISTA, 2015) apresenta uma solução para a configuração de equilíbrio de uma viga elástica sujeita à flexão de três pontos, em que tal solução é dada como funções elípticas de Jacobi. Um dos primeiros a tratar o problema para grandes deflexões foi J.G. Freeman em 1947, que considerou o momento fletor proporcional à curvatura para determinar duas equações não lineares para o problema modelo. As soluções dessas equações apresentadas por ele foram apenas gráficas.

Hoje, assim como para o cálculo clássico, o cálculo fracionário apresenta-se completamente consolidado, contemplando uma gama de aplicações em várias áreas do conhecimento. A título de exemplo, a clássica equação integral de Abel pode ser considerada a primeira aplicação do cálculo fracionário, pois tal equação pode ser colocada como derivada de ordem fracionária. A partir daí, encontram-se aplicações em viscoelasticidade, teoria de capacitores, sistemas mecânicos, condutância elétrica de sistemas biológicos, relaxação, difusão anômala e sedimentação de eritrócitos, dentre outros (PODLUBNY, 1999), (BALEANU; MACHADO; LUO, 2011), (MATHAI; HAUBOLD, 2017) e (VAZ; OLIVEIRA, 2022).

Aqui são destacados vários trabalhos desenvolvidos sobre a teoria do cálculo fracionário, nos últimos anos, que não só contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa científica, mas também discutem a importância do cálculo fracionário no estudo de diversos problemas, nas mais diversas áreas. Inicia-se apresentando o estudo da relaxação de tensão mecânica, feito por (NONNENMACHER; GLÖCKLE, 1991), que generaliza o modelo de Zener, relacionando a tensão σ à deformação ϵ , aplicando o cálculo fracionário. (CARMARGO, 2009) apresenta um embasamento teórico sobre o cálculo fracionário, mostrando novos resultados sobre a função de Mittag-Leffler. Em seguida, apresenta aplicações do

mesmo na solução de equações diferenciais, nas quais são introduzidas e resolvidas as versões fracionárias do problema do telégrafo, do sistema de Lotka-Volterra e da equação de Langevin. (MAINARDI, 2010) desenvolveu trabalhos nas áreas de cálculo fracionário e ondas em meios viscoelásticos lineares, dos quais podem-se destacar suas contribuições pioneiras nas aplicações das funções especiais dos tipos Mittag-Leffler e Wright. (HERRMANN, 2014) apresenta uma abordagem do cálculo fracionário direcionado para físicos. (CONTHARTEZE, 2014) apresenta os operadores diferenciais e integrais fracionários. Como aplicação, é discutida uma equação diferencial fracionária associada ao processo de desaceleração de nêutrons utilizando as transformadas integrais de Laplace e Fourier. Apresenta também uma versão fracionária do teorema fundamental do cálculo e nela são discutidas novas representações para a função de Mittag-Leffler como integrais impróprias e funções trigonométricas. (OLIVEIRA, 2018) faz um levantamento histórico desde a origem do cálculo fracionário até os dias atuais destacando as pesquisas desenvolvidas e seus respectivos pesquisadores. Apresenta também definições e propriedades importantes do cálculo fracionário e algumas aplicações na física. (SOUSA, 2018) introduz uma nova derivada fracionária, denominada Ψ -Hilfer. Apresenta algumas aplicações das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo. Também propõe um modelo matemático fracionário que descreve a concentração de nutrientes no sangue, fator que influencia a taxa de sedimentação de eritrócitos. Por meio da transformada de Laplace, obtém uma solução para a equação de difusão tempo-fracionária em termos das funções de Mittag-Leffler e Wright.

Dentre as principais definições de integrais, destacam-se: as integrais fracionárias de Liouville, Weyl e Riemann-Liouville. Dentre as definições de derivadas, destacam-se: as derivadas de Riemann-Liouville, Caputo, Liouville, Weyl, Riesz, Grünwald-Letnikov, Marchaud e Hilfer, [(CAMARGO; OLIVEIRA, 2015) e (SAAD; BALEANU; ATANGANA, 2018)]. Uma particularidade na definição da derivada fracionária de Caputo, é que a derivada da constante é nula, fato este que não ocorre na definição da maioria das derivadas fracionárias. Este fato torna a derivada fracionária de Caputo aplicável em uma vasta quantidade de problemas. Outras derivadas fracionárias usadas em larga escala hoje são a de Riemann-Liouville e a de Grünwald-Letnikov. A última é muito utilizada para trabalhar com soluções numéricas de problemas [(PINTO; MACHADO, 2014) e (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015)].

Entre outros trabalhos desenvolvidos em áreas como a Física, pode-se citar os de (HILFER, 2000), que faz uma abordagem do cálculo fracionário em pesquisas na Física. (BONI, 2017), apresenta uma discussão da solução de problemas clássicos normalmente descritos pelo cálculo de ordem inteira como o problema da tautócrona, o sistema de Lotka-Volterra, o decaimento radioativo, usando o cálculo fracionário. Além de um tratamento das equações horárias do movimento usando as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo. (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2017), discutem diversas formas

de definir as derivadas fracionárias e, por fim, apresentam uma aplicação em um problema físico (circuito RL). (VAZ; OLIVEIRA, 2022) apresentam o modelo de oscilador fracionário onde os termos de força inercial e restauradora são mantidas na forma clássica, enquanto o termo de amortecimento envolve uma derivada fracionária do tipo Caputo, denominado oscilador Kelvin-Voigt fracionário.

Na engenharia, além do trabalho de (NONNENMACHER; GLÖCKLE, 1991) já supracitado, destacam-se os trabalhos de (MACHADO, 2008), que discute a aplicação do cálculo fracionário na engenharia de sistemas. Dentro desta área, destacam-se aplicações na robótica, na análise de sistemas mecânicos entre outras. (MACHADO et al., 2011) investigam o uso do cálculo fracionário no ajuste de controladores, robôs com pernas, sistemas elétricos e síntese de circuitos digitais. (JACYNTHO, 2015) propõe novos métodos de identificação de sistemas lineares invariantes no tempo, descritos por funções de transferência e (JIMÉNEZ; DUARTE; GARCÍA, 2021) propõem um modelo fracionário para a curva catenária, usando a derivada de Caputo-Fabrizio.

Em biomatemática encontram-se os trabalhos de (SAEEDIAN et al., 2017), que estudam o modelo SIR (método analítico usado para avaliação da disseminação de doenças), usando como ferramenta, a derivada de Caputo e (BARROS et al., 2021), que atestam, por meio de um método estatístico, como o fenômeno da histerese, que descreve um tipo de efeito de memória presente em sistemas biológicos, pode ser abordado pelo cálculo fracionário. Além disso, apresenta como aplicação do método, o modelo SIR (amplamente utilizado em estudos envolvendo epidemiologia) para avaliar disseminação do COVID-19 em alguns países.

Na economia vários trabalhos usam o cálculo de ordem não inteira para avaliar o crescimento econômico, por exemplo. Dentre eles, destacam-se: (TEJADO; VALÉRIO; VALÉRIO, 2014), que visam, modelar o crescimento das economias nacionais, ou seja, seus produtos internos brutos (PIBs), por meio de uma abordagem de ordem fracionária. (LUO; WANG; FEČKAN, 2018), aplicam o cálculo fracionário, mais precisamente, as derivadas de Grünwald-Letnikov e Caputo para analisar uma classe de modelagem de crescimento econômico da economia espanhola e (TARASOV, 2019), que apresenta uma breve revisão do história das aplicações do cálculo fracionário na economia matemática moderna e na teoria econômica.

Usando o cálculo fracionário como metodologia, [(GOMES, 2014), (ALMEIDA; BASTOS; MONTEIRO, 2016), (ALMEIDA, 2017), (OLIVEIRA, 2018) e (SUN et al., 2018)] mostram ser uma boa ferramenta para a modelagem e avaliação de problemas, pois em muitos casos, apresentam descrição bem mais próximas da realidade, quando comparados a modelos clássicos.

Do exposto percebe-se que, atualmente, existe uma considerável quantidade de pesquisas sendo desenvolvidas usando como ferramenta o cálculo fracionário. Estas visam,

através de sua aplicação, procurar, quando possível, aperfeiçoar modelos já descritos pelo cálculo de ordem inteira, como também apresentar outros novos que possam contribuir na descrição de fenômenos naturais.

Um fato importante que deve ser destacado sobre a teoria do cálculo fracionário é o efeito de memória que está presente nas equações diferenciais fracionárias autônomas, mas que não é característica das equações diferenciais clássicas. Este efeito tem fundamental importância para o desenvolvimento do presente trabalho, pois é usado para generalizar as equações clássicas de Euler-Bernoulli e Timoshenko-Ehrenfest, tornando-as potencialmente capazes de detectar, identificar e avaliar certos efeitos até mesmo em condições não lineares. Tal efeito utiliza de dados do passado para explicar fatos do presente. (PINTO; MACHADO, 2014), (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015), (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2017) e (BARROS et al., 2021) explicam, com detalhes, o efeito de memória presente na integral fracionária e nas derivadas de Liouville e Caputo.

A aplicação do cálculo fracionário em avaliação de deformação e tensão de barras aparece em trabalhos como o de (LAZOPOULOS, 2006), no qual as deformações, usando a teoria de densidade de energia de deformação não local unidimensional, são introduzidas com as ferramentas das derivadas fracionárias. Como contribuição do estudo, destaca-se a obtenção de uma equação de equilíbrio de uma barra sob tração axial, classificada como equação integral de Fredholm do primeiro tipo. Não é apresentada solução analítica ou numérica para a equação obtida.

Já no trabalho de (SUMELKA; BLASZCZYK; LIEBOLD, 2015), a teoria clássica de Euler e Bernoulli é reformulada utilizando como nova abordagem o cálculo fracionário. Tal estudo é feito em micro-vigas constituídas do polímero SU-8, ou seja, é um estudo aplicado a projetos sistemas micro e nano-eletromecânicos. Da análise obtém-se uma equação diferencial fracionária para o modelo, mas não é apresentada uma solução analítica. São analisadas apenas soluções numéricas. Nas conclusões, é destacado que as soluções numéricas analisadas apresentam boa aproximação de resultados experimentais, tanto quantitativamente como qualitativamente.

Mais tarde, um estudo de deflexões de vigas, usando a abordagem fracionária, também é desenvolvido na área de materiais isotrópicos, considerando a flexão linear e não linear. (LAZOPOULOS; LAZOPOULOS, 2016) apresentam um modelo matemático fracionário para a deflexão, mas essa formulação é desenvolvida após ser construída uma teoria fracionária com definições de reta tangente fracionária, a qual se chama tangente virtual, comprimento de arcos e raio de curvatura fracionária.

(BLASZCZYK, 2016) apresenta uma nova formulação da equação de Euler-Bernoulli utilizando cálculo variacional fracionário. O operador variacional fracionário é aplicado na expressão do funcional da energia potencial total. Ele apresenta duas soluções: uma analítica com dois parâmetros (o fracionário α e um parâmetro de escala para o

comprimento), e uma solução numérica. Não são evidenciadas, no trabalho, as contribuições do estudo para a deflexão de vigas, pois na análise de exemplos com carga concentrada e assimétrica, respectivamente, destaca apenas que, ao aumentar o desvio do parâmetro α em relação à ordem inteira, considerando o parâmetro de escala para o comprimento fixo, as curvas de flexões também se distanciam da curva-deflexão inteira. Apenas destaca o fato de ser a primeira vez que a abordagem variacional fracionária foi usada para obter um modelo para a equação de Euler-Bernoulli.

([SIDHARDH; PATNAIK; SEMPERLOTTI, 2020](#)), apresentam um modelo geometricamente não linear para vigas Euler-Bernoulli não locais de ordem fracionária. Uma solução numérica foi obtida por um método numérico tendo como base o método de elementos finitos. Não há evidência de contribuição do trabalho no estudo de efeitos físicos que possam influenciar na deflexão de vigas, pois, segundo os autores, a teoria introduzida tem aplicação na captura de efeitos de escala, não localidade e heterogeneidade em sólidos que apresentam complexidades, mas não mostram a contribuição dos resultados em tais aplicações citadas.

O presente trabalho contribui originalmente ao partir dos modelos clássicos das teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko-Ehrenfest para pequenas deflexões e propor, a partir deles, modelos fracionários generalizados usando a derivada fracionária de Caputo. São apresentadas a utilização dos modelos analíticos obtidos para detectar, identificar e avaliar alguns fenômenos presentes na estrutura que influenciam na deflexão das vigas quando submetidas a carregamentos uniformes. Assim, da comparação deste trabalho com os trabalhos de [[BLASZCZYK, 2016](#)] e [[SIDHARDH; PATNAIK; SEMPERLOTTI, 2020](#)], pode-se constatar que as propostas empregadas são bem diferentes entre si tanto na metodologia como também em contribuições para o estudo de estruturas.

Capítulo 2

Alguns conceitos básicos sobre resistência dos materiais

Neste capítulo, são apresentados conceitos fundamentais de resistência dos materiais que servem de alicerce para o desenvolvimento do trabalho. Subsequentemente, disserta-se sobre as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko-Ehrenfest, ponto inicial definido para a proposta dos modelos fracionários generalizados.

2.1 Vigas

Vigas são elementos estruturais de comprimento bem maior que as dimensões de suas seções transversais, projetados para suportar cargas aplicadas perpendicularmente a seus eixos longitudinais (ALVES, 2018).

Devido à presença dos carregamentos, as vigas desenvolvem grandezas caracterizadas como forças normais e de cisalhamento, momentos fletores, torçores, geralmente, variando, ponto a ponto, ao longo de seu eixo. O momento fletor tem ação nos planos principais da seção transversal, assim como a força de cisalhamento. Já o momento torçor tem ação relacionada ao eixo do centro de torção da viga (ALVES, 2018).

De acordo com (ASSAN, 2010), os carregamentos ou cargas podem ser de dois tipos: concentradas ou distribuídas. A carga concentrada é aquela que atua em uma superfície bem pequena, quando comparada com a dimensão total da estrutura. Um exemplo disto é a carga transmitida por um pilar sobre uma viga. Já a carga distribuída é aquela que age ao longo de uma linha, ou sobre uma superfície, ou sobre o volume de um corpo, no caso de forças de campo, como o campo gravitacional. Um exemplo disso seria a carga transmitida por uma parede sobre uma laje. As cargas distribuídas podem ser uniformes ou não. De maneira geral, elas são uniformes, isto é, têm a mesma intensidade em todos os pontos da viga. O peso próprio da viga é um exemplo de carga distribuída em volume.

Quando os elementos de vigas não possuem vínculos quaisquer e são submetidos a carregamentos, eles se movimentam como um corpo rígido, isto é, sofrem deslocamentos, mas sem qualquer deformação da estrutura. Estes movimentos podem ser de translação e rotação (ALVES, 2018). Para se determinar a deformação ocorrida em uma estrutura quando ela é submetida a um determinado carregamento, estes movimentos devem ser eliminados. É para isso que são utilizadas as condições de contornos ou vínculos.

Os vínculos podem ser classificados em apoios e engastes. As vigas apoiadas são aquelas que são vinculadas com apoios simples ou articulação em suas extremidades. Já as vigas em balanço apresentam um engaste em uma de suas extremidades e a outra extremidade livre.

2.1.1 Equilíbrio em estruturas

Para a análise do equilíbrio de estruturas, assim como as vigas, é usada a teoria descrita pelas leis de Newton, na qual é aplicada a segunda lei para se determinar as condições de equilíbrio do corpo em estudo; e a terceira para garantir essa condição de equilíbrio para qualquer ação e reação. Os princípios descritos pelas leis de Newton podem ser aplicados a todo tipo de estrutura submetidas a carregamentos e mantenham o equilíbrio, isto é, sempre será válido para forças verticais, horizontais e inclinadas.

Portanto, para que uma estrutura (viga no caso estudado), se mantenha em equilíbrio estático, a resultante dos carregamentos verticais, horizontais e momentos devem ser nulas. Matematicamente, isso significa que

$$\sum \vec{F}_x = 0, \quad (2.1)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0, \quad (2.2)$$

$$\sum \vec{M}_z = 0, \quad (2.3)$$

em que x , y e z correspondem aos eixos coordenados cartesianos, sendo x o eixo longitudinal da viga, conforme Figura 2.1.

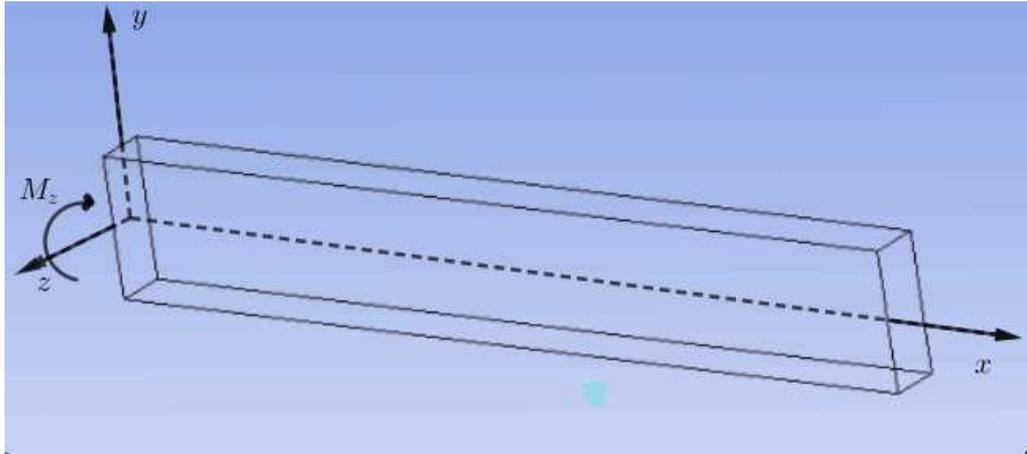


Figura 2.1 – Eixos coordenados cartesianos.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

A justificativa para (2.1) e (2.2) é dada como segue. Tem-se que

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{P}) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}), \quad (2.4)$$

onde \vec{P} representa a quantidade de movimento, m a massa e \vec{v} , a velocidade. Sendo m constante, então

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{0}, \quad (2.5)$$

pois para o caso estático $\vec{a} = \vec{0}$. De forma análoga, mostra-se que o soma dos momentos em (2.3) também é nulo.

Mais adiante, é mostrado que as equações anteriores são fundamentais para o desenvolvimento do modelo que descreve a flexão de vigas.

2.1.2 Tipos de apoios

Os apoios ou vínculos são elementos que restringem os movimentos de translação e de rotação das estruturas e podem ser classificados em: apoios fixos, móveis e engastes (COSTA, 2010).

Os apoios articulados **fixos**, conforme Figura 2.2, impedem os movimentos de translação nas direções normal e paralela ao plano de apoio, mas permitem rotação nos três eixos coordenados.

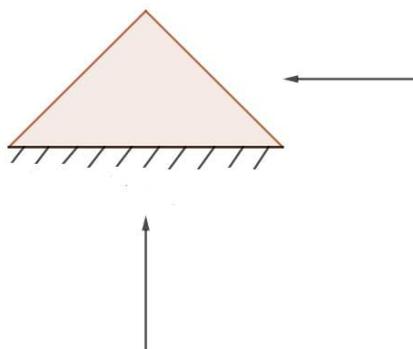


Figura 2.2 – Apoio articulado fixo.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Os apoios articulados **móveis**, conforme Figura 2.3, impedem os movimentos nas duas direções normais ao plano de apoio, mas não impedem movimentos paralelos ao plano de apoio e nem rotação.

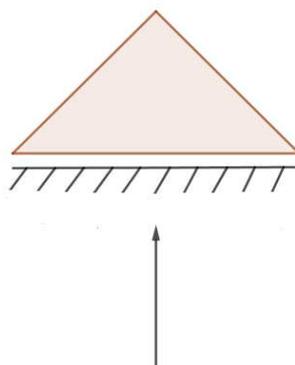


Figura 2.3 – Apoio articulado móvel.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Os engastamentos, conforme Figura 2.4, impedem movimentos normais e paralelos ao plano de apoio, como também rotações.

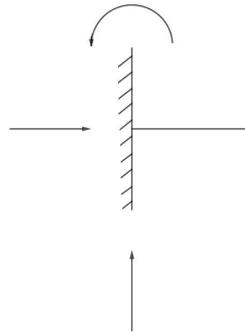


Figura 2.4 – Engastamento.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

2.1.3 Tipos de estruturas.

As estruturas podem ser classificadas, segundo os vínculos que possuem, ou em função do número das reações de apoio. Segundo (COSTA, 2010), podem ser classificadas como hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas. É importante ressaltar que cada reação de apoio remete a uma incógnita a ser determinada e, para determiná-las, são usadas as equações (2.1), (2.2) e (2.3).

As estruturas hipostáticas são aquelas cujo número de reações de apoio são menores que a quantidade de equações fornecida pelas condições de equilíbrio da estática. A Figura 2.5 ilustra a situação, onde H_A , \vec{q} , L , R_A e R_B representam, respectivamente a força horizontal paralela ao plano de apoio, o carregamento, o comprimento da viga e as reações de apoios.

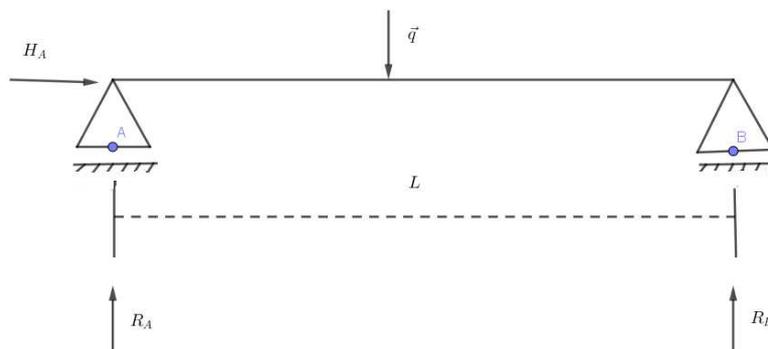


Figura 2.5 – Estrutura hipostática.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Nota-se que, nesta estrutura, as incógnitas são, R_A e R_B , restrições para os movimentos verticais, mas não têm restrições em relação aos movimentos horizontais.

Já nas estruturas isostáticas, tem-se o número de reações de apoio igual ao número de equações apresentadas pelas condições de equilíbrio da estática. É um sistema determinado, portanto. Esta situação é representada pela Figura 2.6, onde as incógnitas têm mesma nomenclaturas do caso anterior.

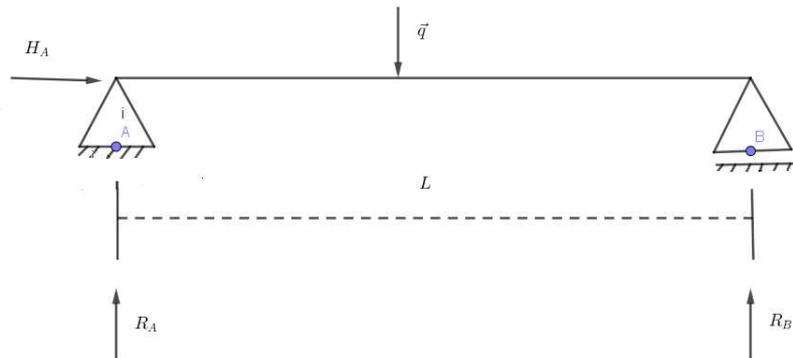


Figura 2.6 – Estrutura isostática.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Neste caso, tem-se três incógnitas a serem determinadas que são H_A , R_A e R_B . Estas reações impedem movimentos verticais e horizontais em A e apenas os movimentos verticais em B.

Por fim, são apresentadas as estruturas hiperestáticas, as quais apresentam reações de apoio superior ao número de equações que regem as condições de equilíbrio na estática. A situação é representada conforme Figura 2.7.

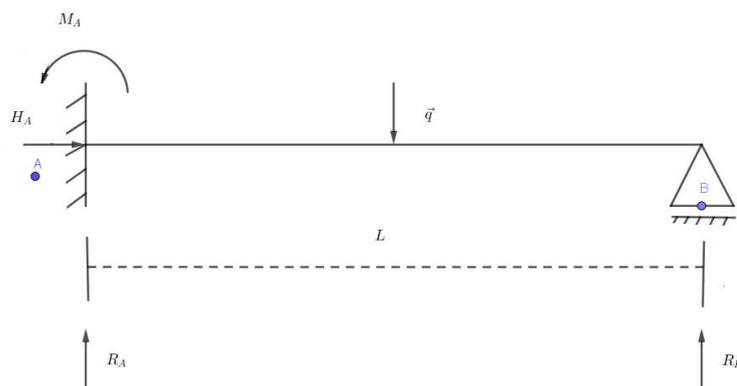


Figura 2.7 – Estrutura hiperestática.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Na Figura 2.7, são observadas quatro incógnitas a serem determinadas, a saber, M_A , H_A , R_A e R_B , em que M_A , representa o momento fletor, e as demais forças têm mesma nomenclaturas do caso anterior. Devido a este número de incógnitas ser maior que a quantidade de equações fornecidas pelas condições de equilíbrio da estática, elas não são suficientes para determinar estas incógnitas. Portanto, é necessário conhecer outras hipóteses do problema para ser possível determiná-las.

2.1.4 Deformação normal

É o alongamento ou contração de um determinado segmento de reta por unidade de comprimento. Em outras palavras, é a relação entre o alongamento ΔL e o comprimento inicial L do segmento. Assim, tem-se que

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}, \quad (2.6)$$

na qual ϵ representa a deformação, sendo uma grandeza adimensional, ΔL a variação de comprimento e L o comprimento inicial. A Equação (2.6) é adequada para estudos de estruturas em regime linear elástico.

Nos projetos de estruturas em regime linear elástico, essas deformações são bem pequenas. Por isso, consideradas quase infinitesimais em comparação com a unidade, isto é, $\epsilon \ll 1$.

2.2 Tensões

Aqui são destacados os tipos de tensões que surgem em uma estrutura quando submetida a carregamentos. A sua classificação depende da forma que atuam na estrutura,

que pode ser na direção normal ou adjacente à seção transversal. Portanto, são denominadas tensões normal e de cisalhamento, respectivamente.

2.2.1 Tensões normais

As tensões normais médias em barras submetidas a forças de tração são fundamentalmente definidas como sendo a razão entre a força (F) e a respectiva área (A) à qual a força é aplicada, isto é

$$\sigma_N = \frac{F}{A}. \quad (2.7)$$

Convém destacar que essa é uma maneira bem trivial de definir a tensão normal. Essa forma de definir é conveniente para aplicar na dedução da equação que descreve as tensões normais de tração e compressão em uma viga, conforme o desenvolvimento a seguir, a qual tem como referência o livro texto de (TIMOSHENKO; GERE, 1983).

Neste trabalho, são tratadas as tensões normais que surgem em uma viga constituída de material elástico, submetidas a carregamentos nos limites do regime linear. Neste caso, o diagrama tensão deformação é linear e obedece à lei de Hooke (1876). Logo, tem-se

$$\sigma_N = E\epsilon, \quad (2.8)$$

em que E é o módulo de elasticidade ou módulo de Young.

Portanto, as tensões normais podem ser dadas por

$$\sigma_N = E\epsilon_x, \quad (2.9)$$

em que ϵ_x é a deformação longitudinal de uma determinada fibra AB , distante y do eixo neutro $\overline{NN'}$, conforme ilustra a Figura 2.8.

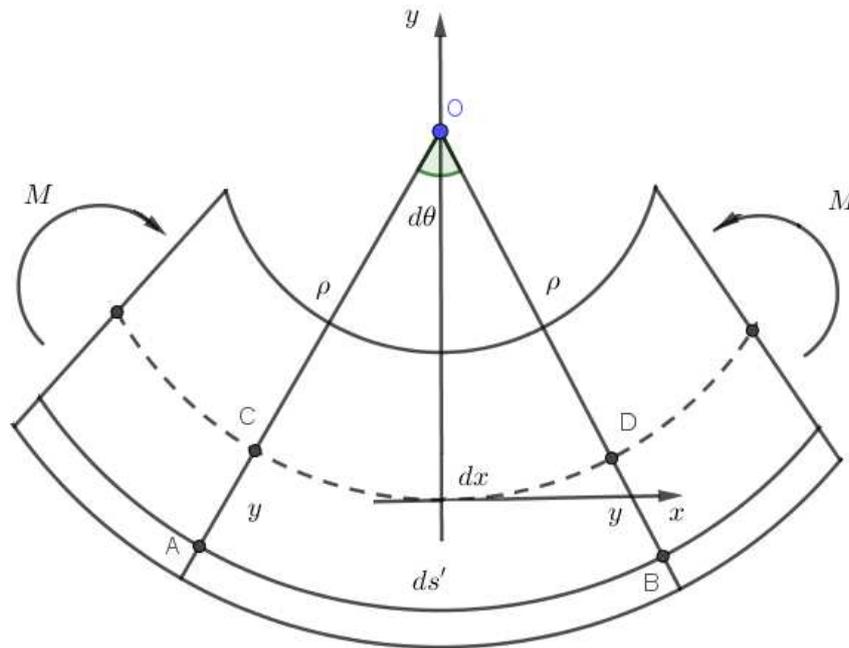


Figura 2.8 – Faixa infinitesimal retangular após a deformação.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

É destacado, na Figura 2.8, que $\overline{OC} = \overline{OD} = \rho$, $\overline{AC} = \overline{BD} = y$, $\overline{NN'}$ o eixo neutro e M o momento fletor. Foi tomada uma ilustração ampliada, visando ao melhor entendimento da ideia por trás da situação real. Na verdade, o eixo neutro $\overline{NN'}$ não sofre deformação após o carregamento da viga.

Da Figura 2.8, tem-se que o comprimento do arco \overline{AB} é

$$S_{AB} = (\rho + y)d\theta = \rho d\theta \left(1 + \frac{y}{\rho}\right). \quad (2.10)$$

Ainda da Figura 2.8, obtém-se $dx = \rho d\theta$. Então, substituindo na equação (2.10), tem-se

$$S_{AB} = (\rho + y)d\theta = dx \left(1 + \frac{y}{\rho}\right) = dx + \frac{y}{\rho}dx. \quad (2.11)$$

Como o comprimento original da fibra é dx , então seu alongamento é $\frac{y}{\rho}dx$.

Usando a equação (2.6), pode-se escrever

$$\epsilon_x = \frac{ydx}{dx} = \frac{y}{\rho}. \quad (2.12)$$

Assim, tem-se

$$\epsilon_x = yk, \quad (2.13)$$

em que $k = \frac{1}{\rho}$ é a curvatura.

A Equação (2.13) mostra que as deformações longitudinais ϵ_x são diretamente proporcionais à curvatura k e à distância y da superfície plana.

É importante destacar que para um momento fletor positivo:

- quando a fibra é considerada abaixo do eixo neutro, tem-se que a distância y da fibra ao eixo neutro e a deformação ϵ_x são positivos (tração);
- quando a fibra é considerada acima do eixo neutro, tem-se que distância y da fibra ao eixo neutro e a deformação ϵ_x são negativos (compressão);
- a Equação (2.13) foi deduzida apenas por considerações geométricas, independente das propriedades dos materiais. Portanto, é válida para qualquer diagrama tensão-deformação do material da viga.

Daí, substituindo (2.13) em (2.9), obtém-se

$$\sigma_N = Eky, \quad (2.14)$$

$$\sigma = E\epsilon, \quad (2.15)$$

em que σ é a tensão e E é elasticidade de Young.

Considerando a hipótese de que as seções planas permanecem planas após a deformação, tem-se que as tensões variam linearmente com a distância y do eixo neutro, como representado na Figura 2.9.

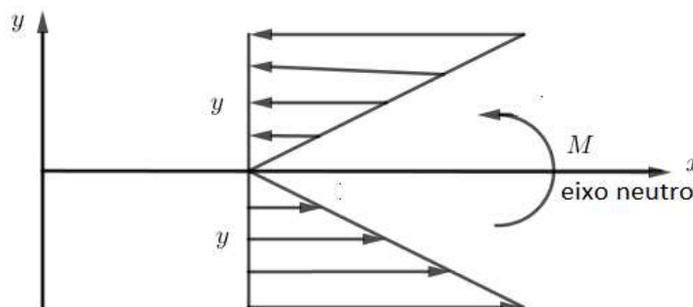


Figura 2.9 – Representações das tensões a uma certa distância y do eixo neutro.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Analisando a Figura 2.9, percebe-se haver tensões de tração abaixo do eixo neutro e de compressão acima do eixo neutro. A resultante dessas tensões deve ser igual ao momento fletor M que age na seção transversal.

Agora, é considerado uma área elementar dA na seção transversal e distante y do eixo neutro. Daí, usando a Equação (2.7), tem-se que a força elementar que age sobre a referida área é

$$F = \sigma_x dA. \quad (2.16)$$

De modo geral, pode-se escrever que

$$N = \int \sigma_x dA. \quad (2.17)$$

Como não há força normal atuando na seção, então $N = 0$. Logo, pode-se escrever

$$N = \int \sigma_x dA = \int kEy dA = 0. \quad (2.18)$$

Como a curvatura k e o módulo da elasticidade E são constantes e diferentes de zero, então, para vigas submetidas a flexão pura, tem-se

$$N = \int y dA = 0. \quad (2.19)$$

Logo, é possível concluir que o eixo x passa pelo centroide da seção transversal. Tal propriedade pode ser usada para achar a localização do eixo da viga com seção transversal qualquer, desde que y seja eixo de simetria (TIMOSHENKO; GERE, 1983).

A Equação (2.19) estabelece que o primeiro momento de área da seção transversal em relação ao eixo neutro x é nulo. Considerando y como eixo de simetria, então também passa pelo centroide da seção transversal. Portanto, y e z têm origem no centroide da seção transversal.

A Figura 2.10 representa a situação em que os eixos y e z passam pelo centroide da seção transversal. No caso, os eixos y e z são chamados eixos principais da seção transversal.

O momento de força elementar em relação ao eixo neutro é dado por

$$M_e = \sigma_x y dA. \quad (2.20)$$

Logo, a soma de todos os momentos elementares sobre a área da seção transversal deve ser igual ao momento fletor M . Assim, pode-se escrever

$$M = \int \sigma_x y dA = \int Ek y^2 dA = Ek \int y^2 dA. \quad (2.21)$$

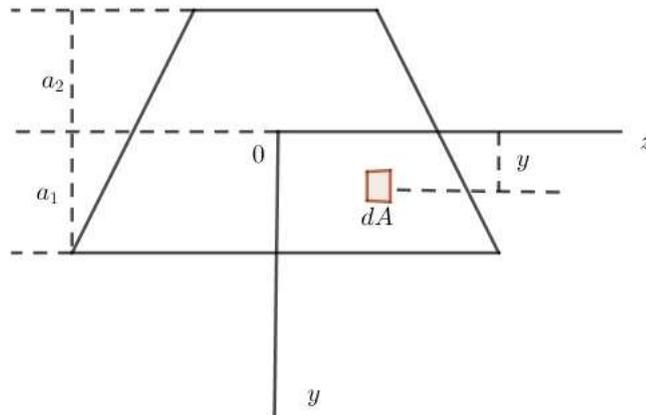


Figura 2.10 – Eixos principais da seção transversal.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Na Equação (2.21) tem-se que

$$I = \int y^2 dA \quad (2.22)$$

é o momento de inércia de área da seção transversal em relação ao eixo z (eixo neutro). Portanto,

$$M = kEI. \quad (2.23)$$

Então, pode-se escrever

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (2.24)$$

Isso diz que a curvatura do eixo longitudinal da viga é diretamente proporcional ao momento fletor e inversamente proporcional ao módulo de rigidez à flexão EI da viga.

Tomando as Equações (2.14) e (2.24), pode-se escrever

$$\sigma_x = \frac{My}{I}, \quad (2.25)$$

a qual é a equação que fornece as tensões normais da viga.

Na Equação (2.25), M é positivo quando produz compressão na parte de cima e y é positivo quando sentido para baixo. As tensões máximas de tração e compressão ocorrem nos pontos mais afastados do eixo neutro. Tomando a_1 e a_2 como sendo os afastamentos das fibras externas de tração e compressão, respectivamente, como destacado na Figura 2.10, tem-se $a_1 = y$ e $a_2 = -y$. Supondo que M seja positivo, então de (2.25),

pode-se escrever

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{Ma_1}{I} = \frac{M}{z_1} \quad e \quad (\sigma_x)_{min} = -\frac{Ma_2}{I} = -\frac{M}{z_2}, \quad (2.26)$$

em que $z_1 = \frac{I}{a_1}$ e $z_2 = \frac{I}{a_2}$ são módulos de resistência à flexão de área da seção transversal. Caso a seção transversal seja simétrica em relação ao eixo neutro z , tem-se $a_1 = a_2 = a$ e as tensões máximas de tração e compressão serão iguais em valor absoluto. Então, pode-se escrever

$$|(\sigma_x)_{max}| = |(\sigma_x)_{min}| = \frac{Ma}{I} = \frac{M}{z}, \quad (2.27)$$

em que $z = \frac{I}{a}$ é o módulo de resistência à flexão da área da seção transversal.

Para o problema de viga estudado, a área da seção transversal é retangular com base b e altura h . Neste caso, obtém-se $z = \frac{bh^2}{6}$. Portanto, tem-se

$$|(\sigma_x)_{max}| = |(\sigma_x)_{min}| = \frac{6M}{bh^2}. \quad (2.28)$$

Na Seção, 2.5 será deduzido o momento fletor para a viga simplesmente apoiada com carga distribuída e, daí, surge as equações explícitas para as tensões máximas e mínimas principais para o problema abordado na pesquisa.

2.2.2 Tensões de cisalhamento

Quando uma viga é submetida a um carregamento transversal, sofre flexão, surgindo um momento fletor M e uma força cortante V nas seções transversais. Na Subseção 2.2.1, foi determinada a distribuição de tensões normais decorrentes do momento fletor. Agora será determinada a distribuição das tensões de cisalhamento, cuja dedução baseia-se no livro texto de (TIMOSHENKO; GERE, 1983).

Para desenvolver este conceito, é considerada uma viga de seção transversal retangular, de base b e altura h , como representada na Figura 2.11.

Para o desenvolvimento que interessa, são assumidas as hipóteses de (TIMOSHENKO; GERE, 1983), como segue:

(1) as tensões de cisalhamento τ sejam paralelas à força cortante, isto é, paralela aos lados verticais da seção transversal;

(2) a distribuição de tensões de cisalhamento sejam uniforme ao longo da largura da viga.

Com as hipóteses (1) e (2), é possível determinar completamente a distribuição de tensões de cisalhamento que atuam na seção transversal da viga. Para isso, foi considerado o corte de um elemento pq através de duas seções transversais adjacentes e dois planos paralelos ao plano neutro, como destacado na Figura 2.11.

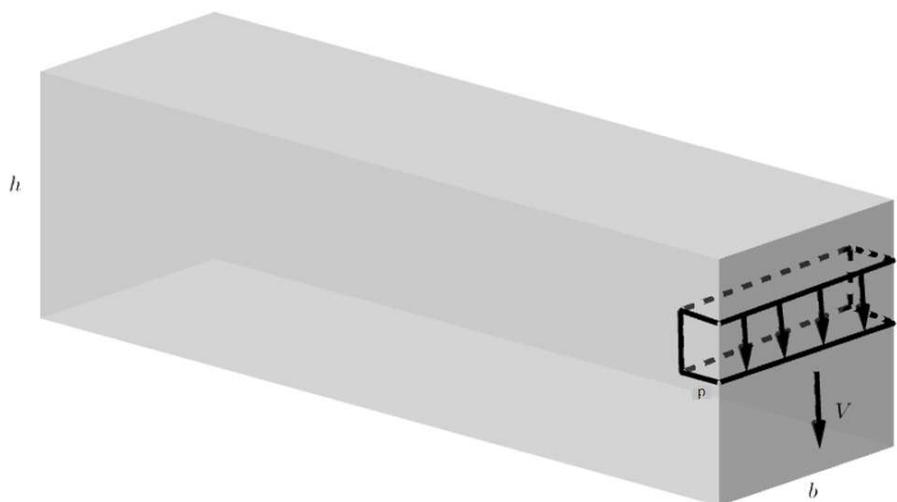


Figura 2.11 – Viga com destaque de um elemento diferencial.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Pela hipótese (1), haverá distribuição uniforme de tensões de cisalhamento verticais τ na face vertical do elemento. As tensões de cisalhamento em um dos lados do elemento, são acompanhadas por tensões iguais na face perpendicular. Assim, haverá tensões de cisalhamento horizontais entre as fibras horizontais da viga, bem como tensões de cisalhamento transversais nas seções transversais. Em qualquer ponto da viga, estas tensões transversais têm o mesmo valor. Logo, admitindo-se que o elemento pq esteja no topo ou na base, fica claro que estas tensões são nulas, pois não há tensões de cisalhamento na superfície externa da viga. Portanto, as tensões de cisalhamento verticais τ também desaparecerão. Tem-se então que as tensões de cisalhamento vertical τ , em qualquer ponto da seção transversal, é numericamente igual à tensão de cisalhamento horizontal no mesmo ponto. É apresentado agora a Figura 2.12.

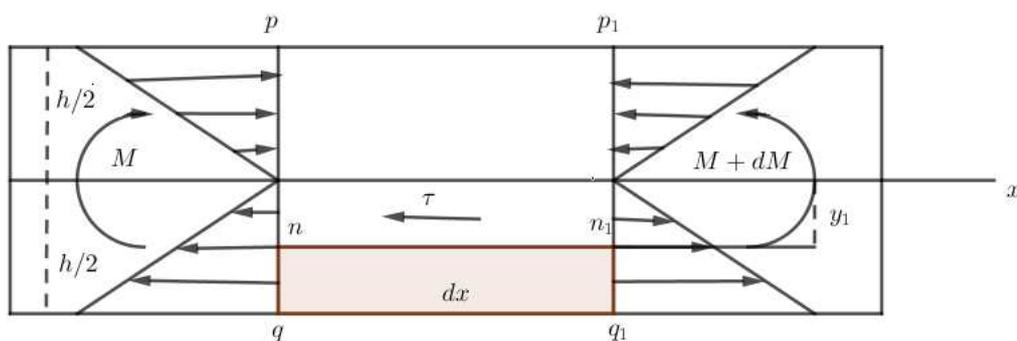


Figura 2.12 – Tensões de cisalhamento na seção transversal da viga.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Na Figura 2.12, é admitida a condição de equilíbrio do elemento diferencial nq_1n_1 cortado da viga por duas seções transversais adjacentes pq e p_1q_1 à distância dx uma da outra. A face da base desse elemento (qq_1) é a superfície inferior da viga e está livre de tensões. Se a face superior (nn_1) é paralela à superfície neutra e afasta-se dela uma distância y_1 arbitrária, então, em tal face, atua tensão de cisalhamento horizontal τ , a qual existe neste nível de viga. Sob as faces pq e p_1q_1 , atuam as tensões normais σ_x produzidas pelos momentos fletores M e $M + dM$, respectivamente. Nestas faces, atuam também tensões de cisalhamento verticais, mas não interferem no equilíbrio do elemento na direção horizontal (direção x) e, por isso, não estão representadas na Figura 2.12.

Se os momentos fletores atuantes nas seções pq e p_1q_1 forem iguais, caso de flexão pura, as tensões σ_x nas seções qn e q_1n_1 também seriam iguais. Isso coloca o elemento em equilíbrio e anula a tensão de cisalhamento τ .

Devido a este fato, os momentos fletores nas seções transversais pq e p_1q_1 são representados por M e $M + dM$, respectivamente.

Aqui é destacada a visão da face esquerda nq vista frontalmente. Tal face pode ser representada conforme a Figura 2.13.

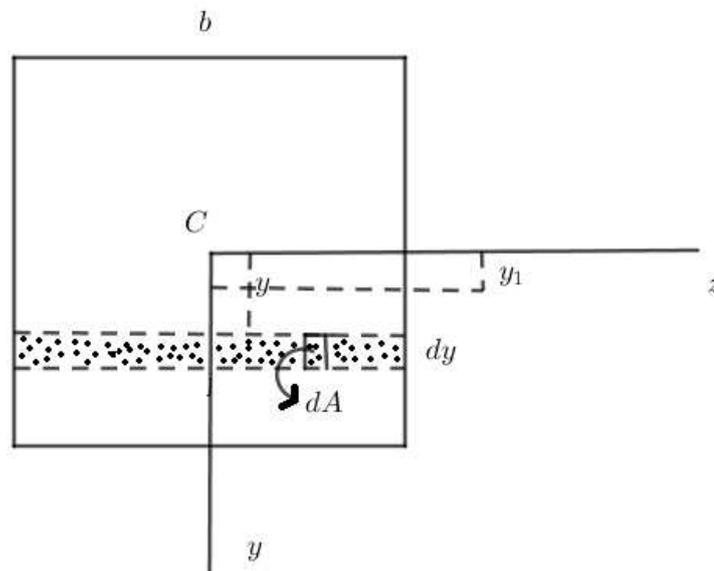


Figura 2.13 – Visão frontal da face nq .

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

A força horizontal, que atua na área elementar dA da Figura 2.13, é dada por

$$F = \sigma_x dA. \tag{2.29}$$

Substituindo a Equação (2.25) na Equação (2.29), obtém-se

$$F = \sigma_x dA = \frac{My}{I} dA. \quad (2.30)$$

A soma de todas as forças distribuídas sobre a face nq será

$$\sum F_{nq} = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{My}{I} dA. \quad (2.31)$$

Da mesma forma, a soma de todas as forças distribuídas, que atuam na face n_1q_1 , é:

$$\sum F_{n_1q_1} = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{(M + dM)y}{I} dA. \quad (2.32)$$

Por outro lado, a força de cisalhamento horizontal, que atua na face superior nn_1 do elemento, é

$$F = \tau b dx. \quad (2.33)$$

As forças dadas pelas Equações (2.31), (2.32) e (2.33) devem estar em equilíbrio, pois, é admitida a condição de equilíbrio do elemento diferencial nqq_1n_1 . Logo, pode-se escrever

$$\tau b dx = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{My}{I} dA. \quad (2.34)$$

Rearranjando os termos, obtém-se

$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{1}{Ib} \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA. \quad (2.35)$$

Por outro lado, tem-se que $\frac{dM}{dx} = V$.

Portanto,

$$\tau = \frac{V}{Ib} \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA = \frac{VQ}{Ib}, \quad (2.36)$$

em que

$$Q = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA \quad (2.37)$$

representa o primeiro momento de área da seção transversal abaixo do nível arbitrário y_1 em que se deseja determinar τ . De forma semelhante, quando y_1 for tomado acima do eixo neutro, a integral será o momento estático de área situado acima do nível em que se pretende calcular a tensão de cisalhamento.

Assim, como V , I e b são constantes, para estudar a variação de τ com a distância y_1 , deve-se analisar a integral (2.37).

Para a seção transversal retangular, representada na Figura 2.13, tem-se que

$$Q = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y b dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (2.38)$$

Substituindo (2.38) em (2.36), vem

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (2.39)$$

Analisando este resultado, percebe-se que a tensão de cisalhamento varia parabolicamente com y_1 .

Nota-se que, quando $y_1 = \pm \frac{h}{2}$, obtém-se $\tau = 0$. Isso mostra que na superfície da viga a tensão de cisalhamento é nula. Por outro lado, tem-se que para $y_1 = 0$ é atingida a tensão de cisalhamento máxima

$$\tau_{max} = \frac{Vh^2}{8I}, \quad (2.40)$$

a qual ocorre no eixo neutro.

Para o problema estudado, obtém-se

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A}, \quad (2.41)$$

em que A é a área da seção transversal da viga.

Na Seção 2.5, é deduzida a equação da força cortante para o problema de viga simplesmente apoiada com carga distribuída e, daí, surge a expressão explícita para a tensão de cisalhamento máxima.

2.3 Equação diferencial da linha elástica

Considera-se uma viga de aço, prismática de comprimento L e simplesmente apoiada, isto é, com um apoio fixo em sua extremidade direita, o qual não permite movimentos verticais e nem horizontais neste ponto, apenas rotação e um apoio móvel na extremidade esquerda, o qual não permite deslocamentos verticais, neste ponto, mas permite movimentos horizontais e rotação. Admite-se também que a área da seção transversal da mesma seja retangular. Seja q a carga distribuída uniformemente sobre sua superfície, conforme ilustra a Figura 2.14.

Agora é admitida a representação da viga, considerando que a mesma tenha sofrido um alongamento de seu eixo longitudinal x devido à presença da carga e destaca-se, neste alongamento, uma faixa infinitesimal de comprimento dx , como representado na Figura 2.15.

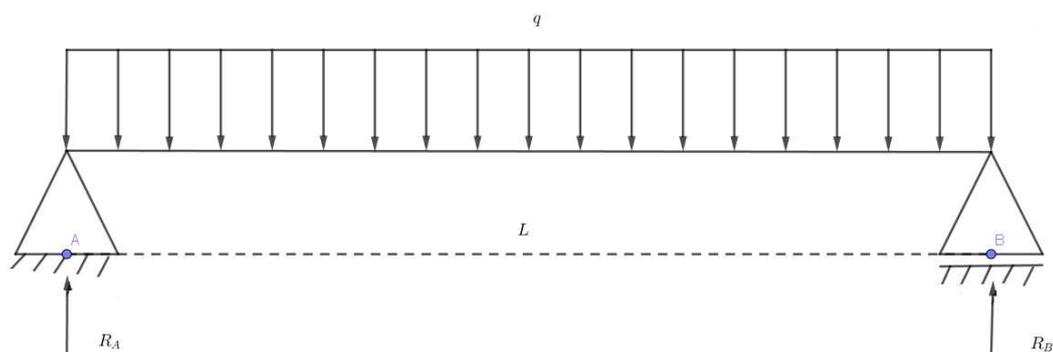


Figura 2.14 – Viga simplesmente apoiada com carga distribuída.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

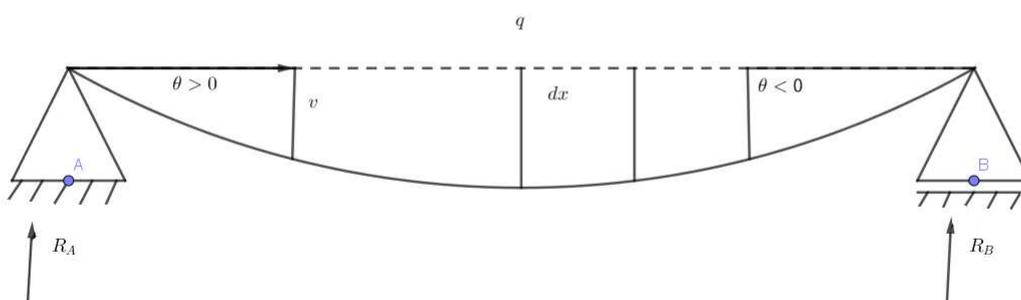


Figura 2.15 – Representação do alongamento do eixo longitudinal.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

O momento fletor M é positivo, pois é admitido que o mesmo está alongando a parte inferior da viga e comprimindo a parte superior, conforme convenção de sinais. O ângulo θ representa a inclinação do eixo longitudinal, que foi considerado positivo, quando o mesmo gira no sentido horário; e negativo, quando gira no sentido anti-horário e v representa o deslocamento transversal de pontos localizados sobre o eixo longitudinal.

Na Figura 2.16, destaca-se uma faixa infinitesimal retangular de largura dx antes da deformação, e considera-se ds um segmento a uma distância y abaixo do segmento dx . Sendo que dx represente o comprimento das fibras longitudinais que não sofrem variação após a deformação, isto é, a superfície neutra. Assim, após a deformação ds , será tracionado para ds' e dx permanecerá constante, conforme a Figura 2.8.

Como $ds' > ds = dx$, então $ds' > dx$. Assim, prologando os segmentos, a

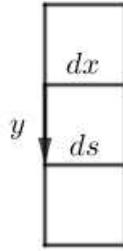


Figura 2.16 – Faixa infinitesimal retangular.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

partir das extremidades C e D do segmento dx da Figura 2.8, eles se intersectarão em O . Tomando $\overline{OC} = \overline{OD} = \rho$, obtém-se um setor circular de raio ρ e ângulo central $d\theta$.

Da Equação (2.6), tem-se que a deformação é dada por

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}. \quad (2.42)$$

Para a faixa infinitesimal considerada, tem-se $\Delta L = ds' - ds$ e $ds = dx = L$.

Logo

$$\epsilon = \frac{ds' - dx}{dx}. \quad (2.43)$$

Mas $dx = \rho d\theta$ e $ds' = (\rho + y)d\theta$. Daí, tem-se que

$$\epsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}. \quad (2.44)$$

Portanto,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon}{y}. \quad (2.45)$$

Considerando que o material da viga seja homogêneo e que se comporte nos limites da região elástica, a lei de hooke é aplicável. Da Equação (2.15) tem-se a lei de Hooke dada por

$$\sigma = E\epsilon. \quad (2.46)$$

Substituindo a Equação (2.46), na Equação(2.45), obtém-se

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{Ey}. \quad (2.47)$$

Para essa dedução, considerou-se o sentido de y para baixo, conforme Figura 2.16. Isso justifica o fato de se obter uma curvatura positiva. Agora, tomando a Equação (2.25) e substituindo na Equação (2.47), obtém-se

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (2.48)$$

O produto EI , nessa equação, é denominado rigidez à flexão que é sempre uma quantidade positiva. Assim, o sinal de ρ depende da direção do momento fletor M que, neste caso, foi considerado positivo.

Como $dx = ds = \rho d\theta$, temos $\rho = \frac{ds}{d\theta}$ e, portanto,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI}. \quad (2.49)$$

Usando a regra da cadeia, pode-se escrever

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds}. \quad (2.50)$$

As variações provocadas pela deformação em faixa infinitesimal podem ser aproximadas ao triângulo retângulo, como ilustrado na Figura 2.17 (SOUSA, 2013).

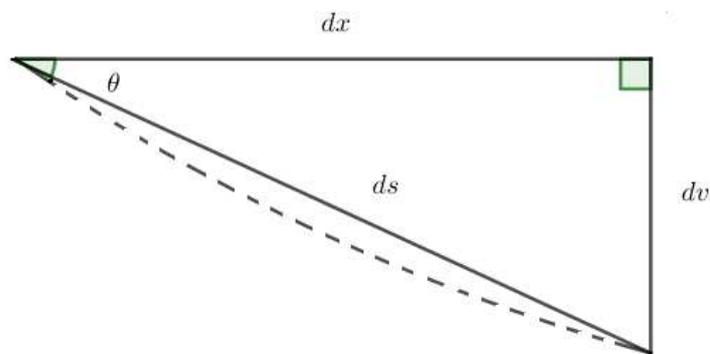


Figura 2.17 – Triângulo retângulo infinitesimal.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Na Figura 2.17, destaca-se θ como sendo o ângulo de rotação do eixo longitudinal devido à deformação, dx o eixo longitudinal antes da deformação, dv deslocamento infinitesimal dos pontos localizado sobre o eixo longitudinal e ds o comprimento da fibra deformada em arco que em faixa infinitesimal pode ser considerada bem próxima de uma reta.

Assim, como θ é o ângulo pelo qual a fibra se inclina, então pode-se escrever

$$\text{sen } \theta = \frac{dv}{ds}, \quad \text{cos } \theta = \frac{dx}{ds} \quad \text{e} \quad \text{tg } \theta = \frac{dv}{dx}. \quad (2.51)$$

Nota-se que a função $f : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbf{IR}$ tal que $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta$ é invertível. Logo, pode-se escrever

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{dv}{dx} \right). \quad (2.52)$$

Derivando θ em relação a x , vem

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)}{1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2}. \quad (2.53)$$

Por outro lado, usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 2.17, obtém-se

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2}. \quad (2.54)$$

Dividindo por dx , tem-se que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2}. \quad (2.55)$$

Logo,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.56)$$

Substituindo as Equações (2.53) e (2.56), na Equação (2.50), obtém-se

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.57)$$

Mas da Equação (2.49), tem-se

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI}. \quad (2.58)$$

Portanto,

$$\frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.59)$$

que é a equação geral da curva elástica. Nota-se que a mesma é uma equação não linear de segunda ordem para o momento fletor M . A Equação (2.59) é conhecida como a equação exata da curva elástica e descreve tanto as pequenas como as grandes deflexões. Logo, sua solução, sem usar simplificações, representa a solução exata para a curva elástica. Os primeiros estudos sobre a forma exata da linha elástica foram desenvolvidos por Jacob Bernoulli (1655 – 1705), Leonhard Euler (1707 – 1783) e Lagrange (1736 – 1813) (ALVES, 2012).

Para o caso de pequenas deflexões, a inclinação $\frac{dv}{dx}$ é bem pequena e, na faixa infinitesimal, será menor ainda. Usando este fato, é possível simplificar a Equação (2.59) para tornar mais simples a solução para problemas sobre deflexão.

Considerando a pequena intensidade dessas deformações ($\theta \ll 1rad$), podem ser feitas aproximações para $\sin \theta$, $\cos \theta$ e $\operatorname{tg} \theta$, de forma que

$$\sin \theta \cong \theta, \quad \cos \theta \cong 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta \cong \theta. \quad (2.60)$$

Assim, $\sin \theta \cong \theta \cong \operatorname{tg} \theta$. Portanto, $\sin \theta \cong \frac{dv(x)}{dx}$.

Como $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, tem-se $\left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2 + 1 \cong 1 \Rightarrow \frac{dv(x)}{dx} \cong 0$.

Usando este fato na Equação (2.59), obtém-se

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2v(x)}{dx^2}, \quad (2.61)$$

do qual pode-se escrever

$$M(x) = EI \frac{d^2v(x)}{dx^2}. \quad (2.62)$$

A Equação (2.62) é a forma linearizada da Equação (2.59) e pode ser classificada como equação linear de segunda ordem não homogênea. A dedução, apesar de ser básica e elementar, faz-se interessante constá-la aqui, pois é conveniente para a discussão do trabalho da tese.

2.4 Relações entre momento fletor, força cortante e carga

Para deduzir as relações entre momento fletor, força cortante e carga, é fixada uma faixa infinitesimal de viga, obtida através de duas seções transversais, de comprimento dx , conforme a Figura 2.18.

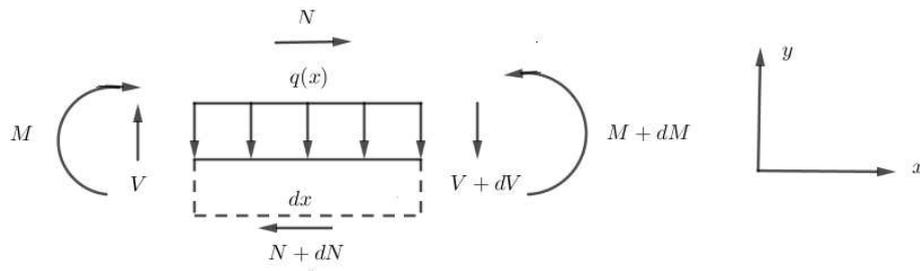


Figura 2.18 – Elemento infinitesimal da viga.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Se a força cortante V e o momento fletor M , que atuam do lado esquerdo do elemento, forem positivos, terão sentido como mostrado na Figura 2.18. Em geral, momento fletor e força cortante variam com a grandeza x , medida ao longo do eixo da viga. Logo, terão valores ligeiramente diferentes na face direita do elemento. Representando essa variação por dV e dM , respectivamente, tem-se na face direita $V + dV$ e $M + dM$. O mesmo ocorre para a força normal N e $N + dN$.

Admitindo o equilíbrio do sistema, o qual é equivalente à estabilidade da estrutura, a soma das cargas horizontais, verticais e momentos fletores são nulos. Então, é permitido realizar a análise, conforme segue.

Na direção horizontal, tem-se

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N(x) - dN - N(x) = 0 \Rightarrow dN = 0. \quad (2.63)$$

Na direção vertical,

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ \Rightarrow V - (V + dV) - q(x)dx &= 0 \\ \Rightarrow dV &= -q(x)dx \\ \Rightarrow \frac{dV}{dx} &= -q(x), \end{aligned} \quad (2.64)$$

com $V = V(x)$.

Assim, quando a carga distribuída q atua, a força cortante varia ao longo da viga com taxa de variação $-q$. Logo, se $q = 0$, a força cortante é constante.

Agora, fazendo o somatório dos momentos em relação ao eixo que passa pela face esquerda do elemento da Figura 2.18, denominado de z , tem-se

$$\begin{aligned} \sum M_z &= 0 \\ \Rightarrow M + V \cdot 0 + q(x) \cdot dx \cdot \frac{q(x)}{2} + (V + dV)dx - (M + dM) &= 0. \end{aligned}$$

Desprezando os produtos diferenciais, obtém-se

$$-dM + V dx = 0. \quad (2.65)$$

Rearranjando os termos, pode-se escrever

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x). \quad (2.66)$$

Tomando a Equação (2.62), considerando que E e I sejam constantes e derivando, obtém-se

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{d^3v(x)}{dx^3} EI. \quad (2.67)$$

Substituindo a Equação (2.66), na Equação (2.67), pode-se escrever

$$V(x) = \frac{d^3v(x)}{dx^3} EI. \quad (2.68)$$

Derivando a Equação (2.68), considerando mais uma vez E e I constantes, obtém-se

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{d^4v(x)}{dx^4} EI. \quad (2.69)$$

Por fim, substituindo a Equação (2.64), na Equação (2.69), pode-se escrever

$$EI \frac{d^4v(x)}{dx^4} = -q(x). \quad (2.70)$$

Assim, resumindo, tem-se que

$$EI \frac{d^4v(x)}{dx^4} = -q(x) \quad (2.71)$$

em que $q(x)$ é a carga distribuída, e $v(x)$ é a deflexão, ambas na posição x .

$$V(x) = \frac{d^3v(x)}{dx^3} EI, \quad (2.72)$$

em que $V(x)$ é a força cortante e

$$M(x) = \frac{d^2v(x)}{dx^2} EI, \quad (2.73)$$

em que $M(x)$ é o momento fletor.

2.5 Equação de Euler-Bernoulli - EB

A Equação (2.71) é conhecida como equação de Euler-Bernoulli, pois as hipóteses utilizadas para obtê-la corresponde à teoria de Euler-Bernoulli para pequenas deflexões em vigas.

As principais hipóteses associadas à teoria de Euler-Bernoulli são as seguintes:

- seções transversais inicialmente planas permanecem planas após a flexão. Este fato é caracterizado pela conservação da planaridade da seção transversal;
- seções transversais inicialmente perpendiculares ao eixo baricêntrico, antes da flexão, permanecem perpendiculares após a flexão. Isto é caracterizado como a conservação da ortogonalidade das seções.

Além disso, para que uma viga seja classificada como viga de Euler-Bernoulli deve apresentar outras propriedades como: possuir comprimento L bem maior que as dimensões da seção transversal, com alta razão de aspecto, $\left(\frac{L}{h}\right)$, isto é, tem que ser longa. Sua constituição deve ser de material homogêneo, isotrópico e elástico linear (MAIA, 2016).

2.5.1 Determinando o momento fletor e a força cortante

Existem vários procedimentos para determinar o momento fletor e a força cortante para o problema estudado. Uma maneira tradicional seria usar o diagrama do corpo livre, mas aqui será determinado partindo das Equações (2.71), (2.72) e (2.73) que, na verdade, foram deduzidas, usando o diagrama do corpo livre em um elemento infinitesimal da viga.

Para obter a força cortante, basta integrar a Equação (2.71), como segue:

$$\begin{aligned} \int EI \frac{d^4 v}{dx^4} dx &= \int -q dx, \\ EI \frac{d^3 v}{dx^3} &= -qx + c_1, \\ V(x) &= -qx + c_1. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Para o momento fletor, tem-se

$$\begin{aligned} \int EI \frac{d^3 v}{dx^3} dx &= \int -qx + c_1, \\ EI \frac{d^2 v}{dx^2} &= -q \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2, \\ M(x) &= -q \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Como para o problema tem-se momento fletor nulo, nas extremidades da viga, isto é, $M(0) = M(L) = 0$, então, obtém-se $c_1 = \frac{qL}{2}$ e $c_2 = 0$. Portanto, tem-se a força cortante

$$V(x) = -qx + \frac{qL}{2} \quad (2.76)$$

e o momento fletor

$$M(x) = \frac{-qx^2}{2} + \frac{qL}{2}x. \quad (2.77)$$

Representando graficamente o momento fletor M e a força cortante V , obtém-se o gráfico da Figura 2.19.

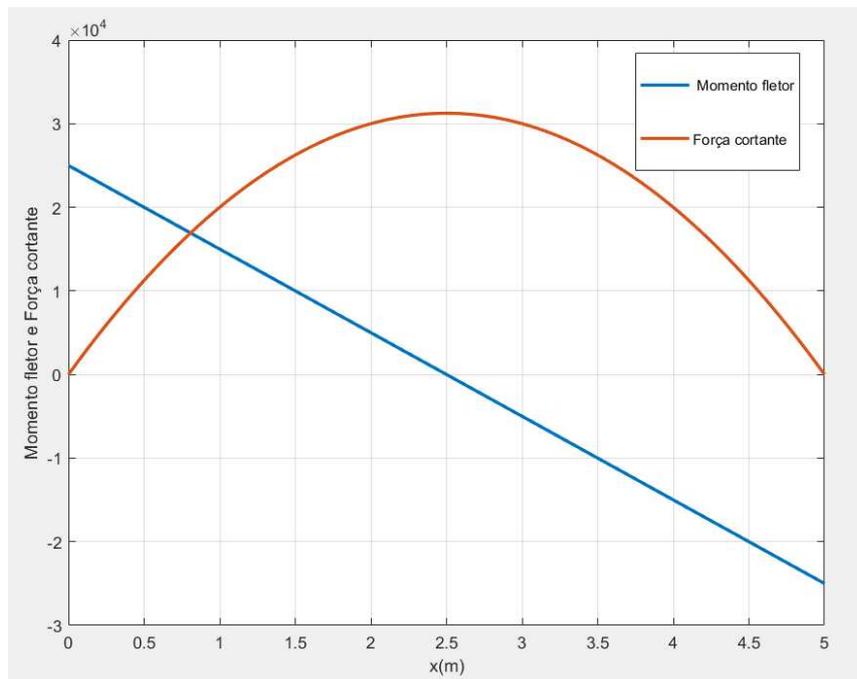


Figura 2.19 – Gráfico do momento fletor e força cortante.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

2.5.2 Tensões normais de tração e compressão e de cisalhamento máximas

Agora é possível explicitar as tensões normais de tração (máximas) e compressão (mínimas) para o problema de uma viga simplesmente apoiada com carga distribuída.

Para obter as tensões normais de tração e compressão, basta substituir a Equação (2.77), na Equação (2.28). Fazendo isso, obtém-se

$$|(\sigma_x(x)_{max})| = |(\sigma_x(x)_{min})| = \frac{3q}{bh^2}(-x^2 + Lx). \quad (2.78)$$

Por outro lado, para obter as tensões de cisalhamento máximas, basta substituir a Equação (2.76) na Equação (2.41). Fazendo isso, obtém-se

$$\tau_{max}(x) = \frac{3q}{2A} \left(-x + \frac{L}{2} \right). \quad (2.79)$$

Como para o problema em estudo a viga tem seção transversal retangular, então $A = bh$. Daí, pode-se escrever

$$\tau_{max}(x) = \frac{3q}{2bh} \left(-x + \frac{L}{2} \right). \quad (2.80)$$

2.5.3 Solução da equação diferencial linear da linha elástica - Equação de Euler-Bernoulli

Usando a transformada de Laplace, é apresentada uma solução para a equação de Euler-Bernoulli associada a uma viga simplesmente apoiada com carga distribuída uniformemente.

A ferramenta da transformada de Laplace que permite solucionar o problema é o teorema conhecido como transformadas de derivadas (ZILL; CULLEN, 2001) e (LUSTOSA, 2017).

Substituindo a Equação (2.77), na Equação (2.73), pode-se escrever

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-qx^2}{2} + \frac{qLx}{2}. \quad (2.81)$$

Logo, aplicando a transformada de Laplace em (2.81), tem-se

$$\mathcal{L} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = \mathcal{L} \left(\frac{-qx^2}{2} + \frac{qLx}{2} \right). \quad (2.82)$$

Disso, obtém-se

$$s^2V(s) - sv(0) - v'(0) = \frac{1}{EI} \left(\frac{-q}{2} \frac{2}{s^3} + \frac{qL}{2} \frac{1}{s^2} \right). \quad (2.83)$$

Substituindo $v(0) = 0$ e $v'(0) = k$, obtém-se

$$\begin{aligned} s^2V(s) - k &= \frac{1}{EI} \left(\frac{-q}{s^3} + \frac{qL}{2} \frac{1}{s^2} \right), \\ s^2V(s) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{-q}{s^3} + \frac{qL}{2} \frac{1}{s^2} \right) + k, \\ V(s) &= \frac{q}{EI} \left(\frac{-1}{s^5} + \frac{L}{2s^4} \right) + \frac{k}{s^2}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Para voltar ao problema na variável x , é aplicada a transformada de Laplace inversa. Fazendo isso, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[V(s)] &= \frac{q}{EI} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^5} \right) + \frac{L}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^4} \right) \right] + k \cdot \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \right) \\ \Rightarrow v(x) &= \frac{q}{EI} \left[\frac{1}{4!} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{4!}{s^5} \right) + \frac{L}{2} \frac{1}{3!} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{3!}{s^4} \right) \right] + k \cdot \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \right), \\ &= \frac{q}{EI} \left(\frac{-x^4}{4!} + \frac{L}{2} \cdot \frac{x^3}{3!} \right) + kx, \\ &= \frac{q}{EI} \left(\frac{-x^4}{24} + \frac{Lx^3}{12} \right) + kx.\end{aligned}\tag{2.85}$$

Como $v(L) = 0$ obtém-se k , usando a equação

$$v(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{-x^4}{24} + \frac{Lx^3}{12} \right) + kx.\tag{2.86}$$

Assim, para $v(L) = 0$, tem-se

$$\frac{q}{EI} \left(\frac{-L^4}{24} + \frac{L^4}{12} \right) + kL = 0.\tag{2.87}$$

Rearranjando os termos, obtém-se

$$k = \frac{-qL^3}{24EI}.$$

Substituindo em (2.86), tem-se

$$v(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{-x^4}{24} + \frac{Lx^3}{12} \right) + \frac{-qL^3}{24EI}x.\tag{2.88}$$

Rearranjando os termos, pode-se escrever

$$v(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{-x^4}{24} + \frac{Lx^3}{12} - \frac{L^3x}{24} \right),\tag{2.89}$$

que é a solução procurada.

Para representar graficamente a solução linear obtida, é selecionada a viga com dimensões $(b, h, L) = (0, 3m, 0, 5m, 5m)$. Usando o *software* Matlab, versão 2018, foi implementada a solução analítica obtida e determinada a flecha para as cargas $q_1 = 1 \times 10^4 N/m$, $q_2 = 2 \times 10^4 N/m$ e $q_3 = 3 \times 10^4 N/m$. A solução obtida é apresentada no gráfico da Figura 2.20.

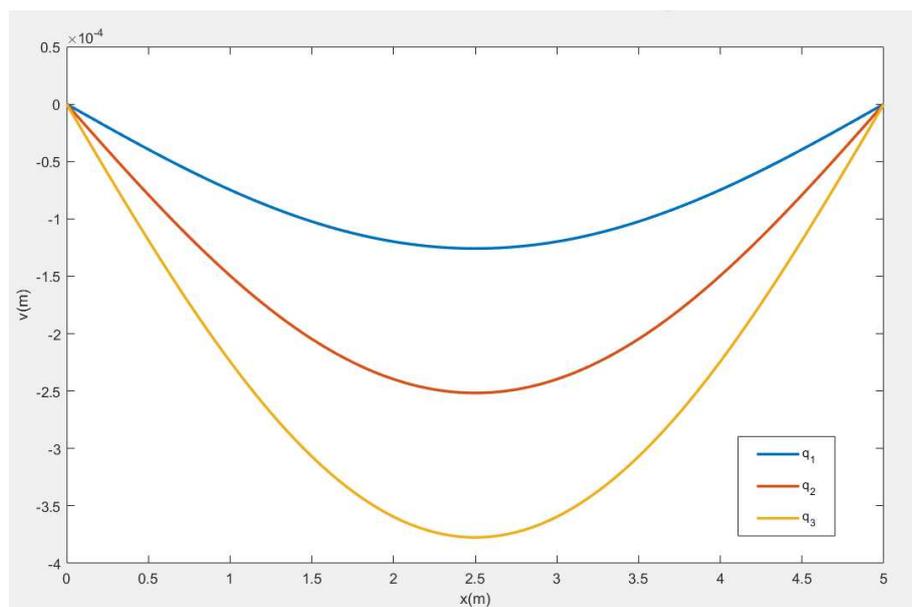


Figura 2.20 – Gráfico da solução linear.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Extraindo do Matlab, versão 2018, as flechas máximas referentes às respectivas cargas, obtém-se $v_1 = 1,2581 \times 10^{-4}m$, $v_2 = 2,5162 \times 10^{-4}m$ e $v_3 = 3,7743 \times 10^{-4}m$. Analisando os resultados, percebe-se dois fatores que garantem a linearidade do problema: o primeiro é que existe uma relação de proporcionalidade direta entre as flechas obtidas e as respectivas cargas usadas. O segundo é que os valores das flechas são bem menores que a unidade.

2.6 Teoria de Timoshenko-Ehrenfest

A equação de Euler-Bernoulli descreve a flexão da viga considerando apenas a ação dos momentos. Ela não contempla um efeito físico importante, que é o cisalhamento. Aqui é apresentada uma equação diferencial linear, obtida através da teoria de Timoshenko-Ehrenfest, que contempla tanto os efeitos relacionados à flexão como ao cisalhamento.

2.6.1 Modelo para deformação por cisalhamento

Para vigas curtas e com alturas elevadas, a deformação da linha elástica depende essencialmente do cisalhamento (ASSAN, 2010). Quando são considerados tais efeitos, as seções transversais sofrem distorção, em maior correspondência com a realidade. Este efeito é representado pelo ângulo γ , o qual consiste na medida da distorção do elemento, devido ao cisalhamento, denominado deformação de cisalhamento (TIMOSHENKO; GERE, 1983). A representação ilustrativa de tal situação é mostrada na Figura 2.21.

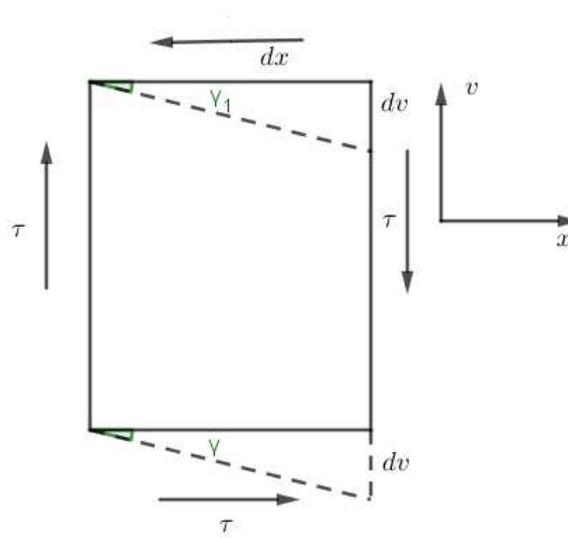


Figura 2.21 – Seção transversal da viga.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Para pequenas deformações, tem-se que

$$\gamma \cong \operatorname{tg} \gamma = -\frac{dv}{dx}. \quad (2.90)$$

O sinal negativo vem do fato de ter considerado o sentido da flecha v para cima.

Por outro lado, considerando valores de tensões tangenciais que não excedem o limite de proporcionalidade, a lei de Hooke para o cisalhamento fornece

$$\tau = G\gamma, \quad (2.91)$$

em que G é o módulo da elasticidade transversal do material dado por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.92)$$

em que ν é o módulo de Poisson.

Substituindo a Equação (2.90), na Equação (2.91), obtém-se

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\tau}{G}. \quad (2.93)$$

A distribuição das tensões tangenciais τ percorrendo a altura da seção transversal é variável. Para simplificar o problema, é admitido que

$$\tau_m = \frac{V}{A}, \quad (2.94)$$

do qual τ_m é o valor médio para as tensões tangenciais, V é a força cortante na seção e A é a área da seção transversal. Tomando $\tau = \tau_m$ e substituindo a Equação (2.94), na Equação (2.93), obtém-se

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{V}{GA}. \quad (2.95)$$

Esta equação diferencial de primeira ordem não homogênea afirma que γ não varia ao longo da altura da seção, isto é, que após a deformação, as seções sofrem distorções constantes. Na realidade, é evidente que existe a deformação por flexão, logo, a distorção γ é variável. Assim, a Equação (2.95) não representa a situação em que há variação por flexão na altura da seção. Para contornar isso, sem complicações na solução, o lado direito da Equação (2.95) é multiplicado por uma constante c , conhecida como coeficiente de correção de cisalhamento, visando relaxar a condição de superfície livre de tração, no caso, a altura, devido ser suposto ter a deformação por cisalhamento uniforme. Tal constante depende da forma geométrica da seção transversal. Existem inúmeros estudos que visam melhorar o valor de c . Dentre eles, pode-se citar (FAGHIDIAN, 2017), o qual apresenta diversas expressões para o valor do coeficiente de cisalhamento para diferentes seções. (DONG; ÇARBAŞ; TACIROGLU, 2013) desenvolvem algumas correções do coeficiente de cisalhamento baseado nos eixos principais de inércia para seções não simétricas e (CHAN et al., 2011) mostraram uma nova abordagem para a determinação do efeito do coeficiente de cisalhamento abordando métodos energéticos.

Adicionando c à Equação (2.95), obtém-se

$$\frac{dv}{dx} = -c \frac{V}{GA}. \quad (2.96)$$

Para seções retangulares,

$$c = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)}. \quad (2.97)$$

A solução da Equação (2.96) fornece a parcela da deflexão transversal da linha elástica devida à deformação por cisalhamento.

Considerando as deflexões por flexão e cisalhamento tem-se, pelo princípio da superposição, que

$$v(x) = v_f(x) + v_c(x), \quad (2.98)$$

em que $v_f(x)$ e $v_c(x)$ são as deflexões transversais por flexão e cisalhamento, respectivamente.

Levando estas considerações para o problema em estudo, tem-se, pela Equação (2.89), que a deflexão por flexão é dada por

$$v_f(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{-x^4}{24} + \frac{Lx^3}{12} - \frac{L^3x}{24} \right). \quad (2.99)$$

Por outro lado, a força cortante é dada pela Equação (2.76). Então,

Substituindo a Equação (2.76), na Equação (2.96), obtém-se

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{c}{GA} \left(-qx + \frac{qL}{2} \right). \quad (2.100)$$

Integrando (2.100) e rearranjando os termos, obtém-se

$$v_c(x) = -\frac{qc}{GA} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{Lx}{2} \right) + C. \quad (2.101)$$

Usando a condição de contorno $v_c(0) = 0$, conclui-se que $C = 0$. Portanto

$$v_c(x) = -\frac{qc}{GA} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{Lx}{2} \right). \quad (2.102)$$

Finalmente, substituindo as Equações (2.99) e (2.102), na Equação (2.98), tem-se a deflexão transversal total

$$v(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{-x^4}{24} + \frac{Lx^3}{12} - \frac{L^3x}{24} \right) + \frac{qc}{GA} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{Lx}{2} \right). \quad (2.103)$$

A deflexão transversal máxima ocorre em $x = \frac{L}{2}$. Da Equação (2.103), é possível obter

$$v_{max} = -\frac{qL^2}{8} \left(\frac{5L^2}{48EI} + \frac{c}{GA} \right). \quad (2.104)$$

Comparando a flecha máxima obtida na Equação (2.89) com a flecha máxima obtida na Equação (2.103), percebe-se que a última solução tem valor maior. A justificativa disso é justamente porque a Equação (2.103) contempla os efeitos da deflexão por flexão e cisalhamento.

Tomando as flechas dadas pelas Equações (2.89) e (2.103) para a viga cujas dimensões são $(b, h, L) = (0, 3m, 0, 8m, 5m)$, submetida à carga $q = 1 \times 10^4 N/m$ são obtidas as curvas representadas pelo gráfico da Figura 2.22.

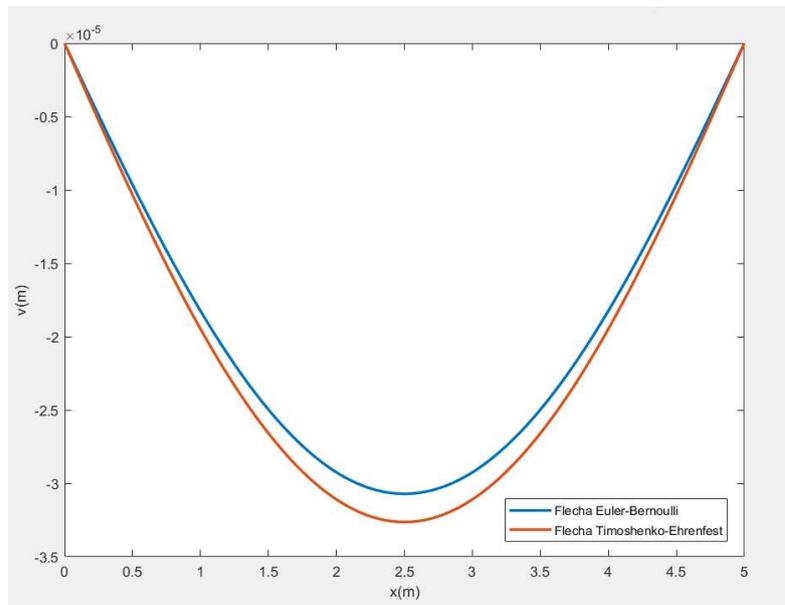


Figura 2.22 – Solução para flexão pura (Euler-Bernoulli) e flexão pura justaposta com os efeitos de cisalhamento.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Analisando o gráfico da Figura 2.22, percebe-se que a solução que contempla os efeitos cisalhantes apresenta-se maior que a solução Euler-Bernoulli em praticamente todo o intervalo no qual a viga está definida.

2.6.2 Equação de Timoshenko-Ehrenfest - TE

A teoria clássica de Euler-Bernoulli avalia a flexão considerando apenas os efeitos causados pelo momento fletor gerado pelas cargas às quais a viga está sendo submetida. Já a teoria de Timoshenko-Ehrenfest é usada para a avaliação da flexão da viga quando, além do momento fletor, os efeitos de cisalhamento são relevantes. No desenvolvimento desta teoria, conserva-se a primeira hipótese da teoria de Euler-Bernoulli, isto é, que as seções transversais permanecem planas após a deflexão, mas não se considera a segunda, ou seja, o eixo baricêntrico não permanece mais perpendicular à seção transversal após a deflexão. Portanto, na teoria de Timoshenko-Ehrenfest, a seção transversal flete e rotaciona. O gráfico da Figura 2.23 ilustra as hipóteses consideradas.

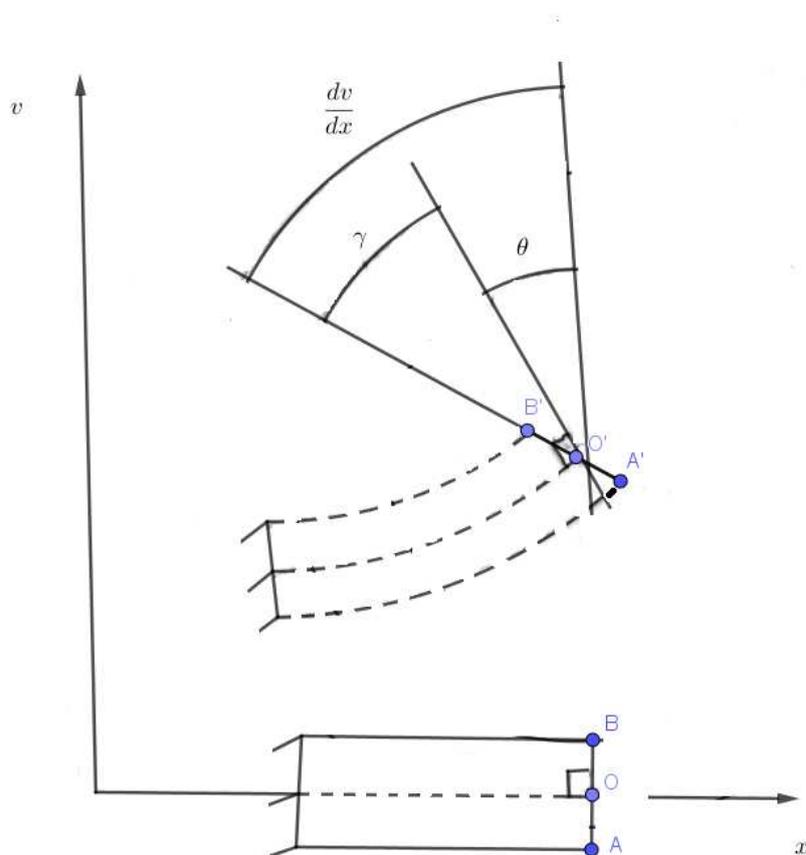


Figura 2.23 – Rotação das seções.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Nota-se que, inicialmente, tem-se um elemento de viga na posição indeformada

no qual é destacado o ponto A na fibra inferior; o ponto O no eixo baricêntrico e o ponto B na fibra superior. A forma deformada do elemento de viga permite escrever

$$\frac{dv}{dx} = \theta + \gamma, \quad (2.105)$$

em que θ é a rotação por flexão, γ é a rotação por distorção e $\frac{dv}{dx}$ é a rotação da seção transversal. Observe que, quando $\gamma = 0$, tem-se apenas a deflexão por flexão, pois a seção que representa a deflexão por cisalhamento coincide com a seção referente à deflexão por flexão pura, tornando-se perpendicular ao eixo baricêntrico.

Convém destacar que essa abordagem da teoria de Timoshenko-Ehrenfest é denominada modelo clássico da teoria de vigas que considera a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional da seção transversal. Entretanto, o próprio Timoshenko e Gere, na publicação do livro “Theory of Elastic Stability” em (1961), apresentam uma alternativa (a qual é um fato negligenciado na literatura atual, por geralmente ser compatível com a teoria clássica) à formulação clássica para considerar a deflexão por cisalhamento não como uma rotação adicional da seção transversal, mas como a distorção cisalhante do elemento infinitesimal de viga (MARTHA; BURGOS, 2014).

Para iniciar a dedução do modelo, é considerado na Figura 2.24, um ponto M da seção situado a uma distância y do eixo baricêntrico x . Após a deflexão, este ponto passa para a posição M' .

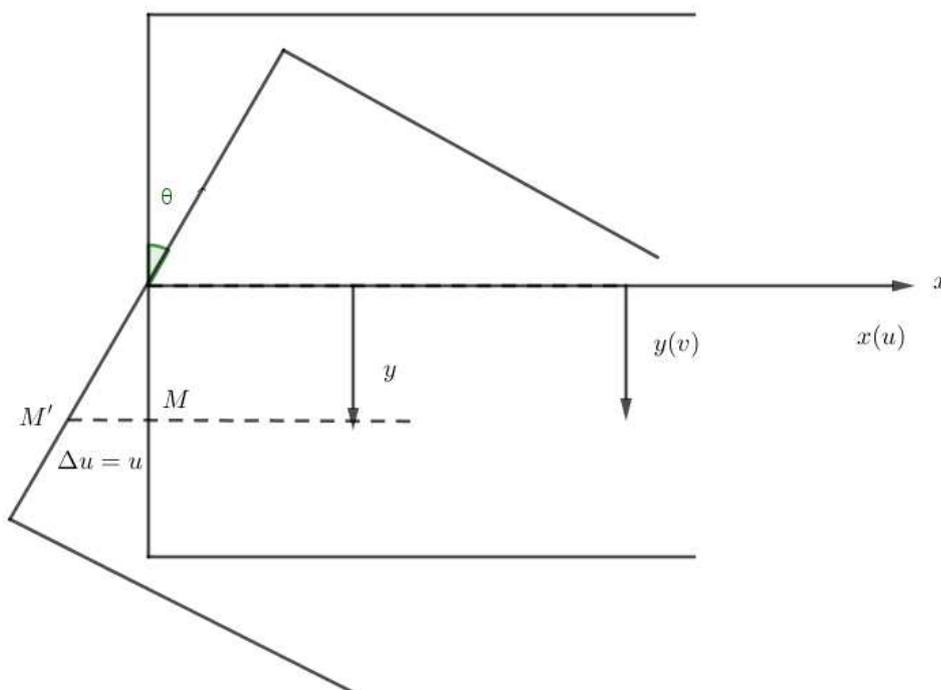


Figura 2.24 – Rotação da seção na teoria de Timoshenko-Ehrenfest.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Na Figura 2.24, u representa o deslocamento do ponto M na direção de x e v a componente na direção do eixo y . A deformação específica, ao longo do eixo baricêntrico x , é definida por

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (2.106)$$

Da Figura 2.24, tem-se que $-y \tan \theta = u$ e como as deformações são lineares, tem-se $u \cong -y\theta$. Logo, o alongamento MM' é dado por

$$\Delta u = u \cong -y\theta. \quad (2.107)$$

Sabendo que a rotação θ também depende de x , então a deformação longitudinal específica pode ser escrita como

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(-y\theta) = -y \frac{d\theta}{dx}. \quad (2.108)$$

Por outro lado, para pequenas deformações, a tensão normal decorre da lei de Hooke dada, neste caso, por

$$\sigma_x = E\epsilon_x = -Ey \frac{d\theta}{dx}. \quad (2.109)$$

Vale também destacar que o momento fletor tem direção do eixo z e sentido para fora da seção transversal dado, neste caso, por

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA. \quad (2.110)$$

Substituindo (2.109) em (2.110), tem-se

$$M_z = \int_A -Ey \frac{d\theta}{dx} y dA = -E \frac{d\theta}{dx} \int_A y^2 dA = -EI_z \frac{d\theta}{dx}. \quad (2.111)$$

Para facilitar a notação, uma vez que a rotação pode ocorrer em torno de uma linha neutra genérica qualquer, a expressão (2.111) pode ser escrita sem índices, isto é,

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx}. \quad (2.112)$$

Agora, do desenvolvimento da equação de Euler-Bernoulli, tem-se de (2.61) que

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (2.113)$$

Então,

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{d\theta}{dx}. \quad (2.114)$$

Devido ao regime ser linear, valem as seguintes equações diferenciais

$$\frac{dV}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = V \text{ e } \frac{d^2 M}{dx^2} = -q. \quad (2.115)$$

Assim, a segunda Equação de (2.115) e a Equação (2.112) permitem escrever

$$V = \frac{dM}{dx} = -EI \frac{d^2\theta}{dx^2}. \quad (2.116)$$

Por outro lado, a força cortante é a resultante das tensões tangenciais τ e da Equação (2.94), tem-se que

$$V = \int \tau dA = \tau_{med} A, \quad (2.117)$$

em que A é área da seção transversal da viga.

A tensão tangencial τ depende da deformação por distorção γ , que varia ao longo da altura da seção transversal da viga. Considerando esta variação, a distorção foi dividida pelo coeficiente de cisalhamento c , que depende da forma geométrica da seção. Para seções retangulares, tem-se

$$c = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)}. \quad (2.118)$$

Assim, da Equação (2.91), pode-se escrever

$$\tau = \frac{G\gamma}{c}, \quad (2.119)$$

em que G é o módulo de elasticidade transversal do material dado na Equação (2.92).

Substituindo (2.119), em (2.117), obtém-se

$$V = \frac{G\gamma}{c} A. \quad (2.120)$$

Agora de (2.105), tem-se que

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta. \quad (2.121)$$

Substituindo, em (2.120), tem-se

$$V = \frac{GA}{c} \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right). \quad (2.122)$$

Igualando as expressões (2.116) e (2.122), obtém-se

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{GA}{c} \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right), \quad (2.123)$$

em que, rearranjando os termos, pode-se escrever

$$\frac{dv}{dx} = \theta - \frac{EIc}{GA} \frac{d^2\theta}{dx^2}. \quad (2.124)$$

Por outro lado, da primeira Equação de (2.115), tem-se que

$$\frac{dV}{dx} = -q. \quad (2.125)$$

Agora, derivando (2.116), obtém-se

$$\frac{dV}{dx} = -EI \frac{d^3\theta}{dx^3}. \quad (2.126)$$

Logo, de (2.125) e (2.126), pode-se escrever

$$EI \frac{d^3\theta}{dx^3} = q, \quad (2.127)$$

em que θ é a rotação por flexão.

Assim, o modelo de Timoshenko-Ehrenfest, que considera a deflexão transversal por flexão e cisalhamento no caso em que a rigidez EI e o carregamento q são constantes, é dado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias, formado por (2.124) e (2.127), conforme segue

$$\begin{cases} \frac{d^3\theta}{dx^3} = \frac{q}{EI}, \\ \frac{dv}{dx} = \theta - \frac{EIc}{GA} \frac{d^2\theta}{dx^2}, \end{cases} \quad (2.128)$$

em que $\theta = \theta(x)$ é a rotação por flexão e $v = v(x)$ é a deflexão.

2.6.3 Solução de Timoshenko-Ehrenfest para uma viga simplesmente apoiada com carga distribuída

O objeto de estudo deste trabalho é o problema de uma viga simplesmente apoiada com carga distribuída. Neste caso, a carga é constante e a solução para a deflexão pode ser obtida como segue.

Integrando três vezes a primeira Equação de (2.128), obtém-se

$$\theta(x) = \frac{qx^3}{6EI} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3. \quad (2.129)$$

Como $\theta\left(\frac{L}{2}\right) = 0$, então, de (2.129), obtém-se

$$\frac{qL^3}{48EI} + \frac{c_1}{8}L^2 + c_2\frac{L}{2} + c_3 = 0, \quad (2.130)$$

em que se tem

$$c_3 = -\frac{qL^3}{48EI} - \frac{c_1}{8}L^2 - c_2\frac{L}{2}. \quad (2.131)$$

Por outro lado, de (2.112), tem-se

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx}. \quad (2.132)$$

Como

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{qx^2}{2EI} + c_1x + c_2, \quad (2.133)$$

pode-se escrever

$$M(x) = EI \left(-\frac{qx^2}{2EI} - c_1x - c_2 \right). \quad (2.134)$$

Usando as condições de contorno $M(0) = M(L) = 0$, tem-se $c_2 = 0$ e

$$EI \left(-\frac{qL^2}{2EI} - c_1L \right) = 0, \quad (2.135)$$

em que $c_1 = -\frac{qL}{2EI}$.

Levando c_1 e c_2 em (2.131), tem-se que $c_3 = \frac{qL^3}{24EI}$.

Substituindo c_1 , c_2 e c_3 em (2.129), tem-se que a rotação por flexão é dada por

$$\theta(x) = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qL}{4EI}x^2 + \frac{qL^3}{24EI}. \quad (2.136)$$

Agora, da segunda equação de (2.128), tem-se que

$$\frac{dv}{dx} = \theta - \frac{EIc}{GA} \frac{d^2\theta}{dx^2}. \quad (2.137)$$

Substituindo (2.136) em (2.137), pode-se escrever

$$\frac{dv}{dx} = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qL}{4EI}x^2 + \frac{qL^3}{24EI} - \frac{EIc}{GA} \left(\frac{qx}{EI} - \frac{qL}{2EI} \right). \quad (2.138)$$

Integrando (2.138), obtém-se

$$v(x) = \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{qLx^3}{12EI} + \frac{qL^3x}{24EI} + \frac{cq}{GA} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{Lx}{2} \right) + C. \quad (2.139)$$

Como das condições de contorno, $v(0) = 0$ tem-se $C = 0$, portanto

$$v(x) = \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{qLx^3}{12EI} + \frac{qL^3x}{24EI} + \frac{cq}{GA} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{Lx}{2} \right). \quad (2.140)$$

Como na modelagem inicial do problema em estudo, para se obter a equação para a deflexão foi considerada a orientação da flecha para cima. Então, para obter a solução equivalente, inverte-se o sinal de $v(x)$ na equação (2.140), obtendo

$$v(x) = \frac{q}{EI} \left(-\frac{x^4}{24} + \frac{Lx^3}{12} - \frac{L^3x}{24} \right) + \frac{cq}{GA} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{Lx}{2} \right), \quad (2.141)$$

a qual é a solução de Timoshenko-Ehrenfest para a deflexão.

Percebe-se que a solução (2.141) coincide com a solução (2.103), obtida para calcular a deflexão total, considerando as deflexões por flexão e cisalhamento e usando o princípio da superposição, o que valida este desenvolvimento.

Capítulo 3

Fundamentos de cálculo fracionário

O cálculo de ordem arbitrária ou cálculo de ordem não inteira, popularizado com o nome de cálculo fracionário, CF, teve seu início na mesma época do cálculo de ordem inteira, como introduzido, independentemente, por Newton e Leibniz no século *XVII*. Para uma linha do tempo relativa ao CF, é sugerido o livro (OLIVEIRA, 2019) e as referências ali mencionadas, além de vários artigos; para a tecnicidade, mencionam-se os livros [(MILLER; ROSS, 1993) e (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993)].

Aqui, neste capítulo, é apresentado apenas o necessário relativo ao estudo de uma equação diferencial ordinária fracionária. São introduzidos os conceitos de integral fracionária e de derivada fracionária focado na derivada como proposta por Caputo, em 1969. Assim, inicia-se definindo a função gama, pois ela surge nas definições de integral e derivadas fracionárias.

Definição 1. Seja $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(z) > 0$. A definição de Euler para a função gama, denotada por $\Gamma(z)$, é dada por meio da integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Segue diretamente da **Definição 1** que $\Gamma(1) = 1$ e a relação $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, obtida da integração por partes. Ainda mais, para $z = n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\Gamma(n + 1) = n!,$$

que permite afirmar que a função gama generaliza o conceito de fatorial.

Convém ressaltar que, diferentemente de como estudado na maioria dos cursos de cálculo, a integral fracionária é apresentada primeiro, para depois introduzir a derivada fracionária, pois esta requer o conhecimento da integral fracionária.

3.1 Integral de Riemann-Liouville

Existem maneiras distintas de introduzir o conceito de integral fracionária. Aqui, optou-se por introduzi-la a partir de um teorema envolvendo uma particular generalização da integral de ordem inteira.

Teorema 1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}_+$. Se $f(x)$ é uma função integrável, então a integral de ordem inteira n é dada por

$$\begin{aligned} J^n f(x) = \phi_n(x) \star f(x) &= \int_0^x \phi_n(x - \xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_0^x \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

em que \star denota o produto de convolução de Laplace e $\phi_n(x)$ a função de Gel'fand-Shilov, definida conforme (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015) por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Ver (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). □

Definição 2. Seja $f(x)$ uma função integrável. Define-se a integral de ordem $\nu \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(\nu) > 0$ da função $f(x)$, denotada por $J^\nu f(x)$, por meio da expressão

$$J^\nu f(x) = \phi_\nu(x) \star f(x) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x - \xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ uma função gama.

Note que, quando o parâmetro associado à ordem ν , é tal que $\nu = n + 1$ com $n \in \mathbb{N}$ recupera-se o resultado da integral de ordem inteira, conforme **Teorema 1**. Por fim, é introduzido o conceito de integral de Riemann-Liouville.

Definição 3. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\nu \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(\nu) > 0$. A integral de Riemann-Liouville de ordem ν , atuando numa função $f \in \mathbb{L}^p[a, b]$, $1 \leq p < +\infty$, $-\infty < a < b < +\infty$, para $x \in [a, b]$ é definida por

$$J^\nu f(x) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x - \xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi$$

com $x > a$, $\Gamma(\cdot)$ uma função gama e $J^0 f(x) = f(x)$.

É importante notar que a integral de Riemann-Liouville é caracterizada pela classe de funções nas quais o operador atua, bem como pelo respectivo intervalo de integração [(MILLER; ROSS, 1993), (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993) e (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015)].

3.2 Derivada de Caputo

Como já mencionado, a derivada fracionária é dada em termos da integral fracionária. Convém mencionar que existe um número grande de formulações para a derivada fracionária [(OLIVEIRA; MACHADO, 2014) e (TEODORO; MACHADO; OLIVEIRA, 2019)]. O interesse deste texto é apenas na formulação da derivada como introduzida por Caputo. A justificativa para esta formulação reside no fato de que a derivada de Caputo de uma constante é zero, bem como a expressão para a derivada de ordem inteira é recuperada de forma natural.

Definição 4. Sejam $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(\nu) > 0$, $n = 1 + [\operatorname{Re}(\nu)]$ com $[\operatorname{Re}(\nu)]$ a parte inteira de $\operatorname{Re}(\nu)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\nu \notin \mathbb{N}$. Seja $f(x) \in AC^n[a, b]$. A derivada fracionária de Caputo de ordem ν , atuando na função $f(x)$ com $-\infty < a < b < +\infty$ para $x \in [a, b]$ é definida por

$$\begin{aligned} D^\nu f(x) &:= J^{n-\nu} D^n f(x), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^x (x-\xi)^{n-\nu-1} D^n f(\xi) d\xi, \quad n \notin \nu, \\ &= D^n f(x), \quad n = \nu. \end{aligned}$$

Note que a derivada fracionária de Caputo é dada como a integral de ordem fracionária de uma derivada de ordem inteira, diferentemente da chamada derivada fracionária de Riemann-Liouville que é definida por uma derivada de ordem inteira de uma integral fracionária (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Ainda mais, a formulação de Caputo é mais restritiva que a formulação de Riemann-Liouville, pois requer que a derivada de ordem inteira da função esteja bem definida. Assim, na definição, admite-se que a função seja absolutamente contínua. Para diversas outras formulações da derivada fracionária, menciona-se [(OLIVEIRA; MACHADO, 2014) e (TEODORO; MACHADO; OLIVEIRA, 2019)].

Como o propósito é trabalhar apenas com a derivada fracionária de Caputo, utiliza-se a notação para o respectivo operador $D^\nu \equiv \frac{d^\nu}{dx^\nu}$, diferentemente da notação usual ${}^C D^\nu$ ou alternativamente $*D^\nu$ as quais explicitam a letra C ou o caracter $*$, pois a notação D^ν costuma ser reservada para a formulação de Riemann-Liouville.

Por fim, de modo a atingir o objetivo principal que é abordar uma equação diferencial ordinária fracionária com a derivada de Caputo, discorre-se sobre a transformada de Laplace, utilizada como metodologia para a resolução da respectiva equação diferencial fracionária.

3.3 Transformada de Laplace

A fim de introduzir a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo, é preferível começar por definir a transformada de Laplace e a respectiva transformada de Laplace inversa, que desempenha papel fundamental na recuperação da solução da equação diferencial ordinária fracionária, bem como algumas propriedades.

Definição 5. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ uma função real. Se $f(x)$ é de ordem exponencial no infinito e contínua por partes no intervalo fechado $[0, A]$, com $A > 0$, então $f(x)$ é chamada função admissível.

Definição 6. Sejam $x \in \mathbb{R}_+$ e $f(x)$ uma função admissível. Define-se a transformada de Laplace, denotada por $\mathcal{L}[f(x)] \equiv F(s)$, da função $f(x)$, por meio da integral

$$\mathcal{L}[f(x)] \equiv F(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

em que $s = \sigma + i\tau$, com $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, é o chamado parâmetro da transformada.

Antes de introduzir a transformada de Laplace inversa, são apresentadas algumas propriedades da transformada de Laplace, apenas aquelas que serão utilizadas no texto e cujas demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, na referência (DEBNATH; BHATTA, 2007).

Propriedade 1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. A transformada de Laplace é linear

$$\mathcal{L}[af_1(x) \pm bf_2(x)] = a\mathcal{L}[f_1(x)] \pm b\mathcal{L}[f_2(x)]$$

desde que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ admitam a respectiva transformada de Laplace.

Propriedade 2. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e uma função $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas de ordem até $(n - 1)$ sejam contínuas no intervalo fechado $[0, c] \subset \mathbb{R}$ e a derivada de ordem n é contínua por partes no intervalo $[0, c] \subset \mathbb{R}$ de modo que existam constantes $M > 0$ e $x_0 > 0$ tal que tem-se

$$|f(x)| \leq M e^{bx}, \quad |Df(x)| \leq M e^{bx}, \quad \dots, \quad |D^{n-1}f(x)| \leq M e^{bx}$$

para todo $x > x_0$. Então, para $\text{Re}(s) > b$ tem-se a expressão para a transformada de Laplace da derivada de ordem n

$$\mathcal{L}[D^n f(x)] = s^n \mathcal{L}[f(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{n-1-k} f(x)]_{x=0}$$

em que s é o parâmetro da transformada de Laplace.

Propriedade 3. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções admissíveis, cujas transformadas de Laplace são denotadas por $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ e $\mathcal{L}[g(x)] = G(s)$, respectivamente. A

transformada de Laplace do produto de convolução, denotado por $\mathcal{L}[f(x) \star g(x)]$ é igual ao produto das transformadas de Laplace das funções $f(x)$ e $g(x)$

$$\mathcal{L}[f(x) \star g(x)] = \mathcal{L}[f(x)]\mathcal{L}[g(x)] = F(s)G(s)$$

em que o produto de convolução de Laplace é definido por

$$f(x) \star g(x) = \int_0^x f(x - \xi)g(\xi) d\xi = \int_0^x g(x - \xi)f(\xi) d\xi.$$

Teorema 2. Seja $s = \sigma + i\tau$ com $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, o parâmetro da transformada de Laplace. A representação integral para a transformada de Laplace inversa, denotada por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, no plano complexo, é dada por

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} e^{sx} F(s) ds$$

em que $\text{Re}(s) = \sigma > 0$ e todas as singularidades da função $F(s)$ estão à esquerda da linha reta $\text{Re}(s) = \sigma$ no plano complexo.

Demonstração. Ver (DEBNATH; BHATTA, 2007). □

É apresentada aqui uma propriedade relacionada à transformada de Laplace e sua respectiva inversa, a qual será utilizada em resultados futuros.

Propriedade 4. Se $x \in \mathbb{R}$ e $\nu > -1$, então

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{\nu+1}} \right] = \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}.$$

Demonstração. Ver Apêndice A. □

Definição 7. Sejam $\text{Re}(\mu) > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \text{Re}(\mu) \leq n$. A transformada de Laplace da derivada de Caputo é dada por

$$\mathcal{L}[D^\mu f(x)] = s^\mu \mathcal{L}[f(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\mu-1-k} f^{(k)}(0)$$

em que s é o parâmetro da transformada de Laplace e $f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} D^k f(x)$.

Por fim, conclui-se o capítulo de tal forma que: conhecida a derivada fracionária de Caputo e a metodologia da transformada de Laplace, têm-se as ferramentas necessárias para resolver um problema de valor inicial fracionário, composto por uma equação diferencial ordinária fracionária e as convenientes condições iniciais, o que será abordado no Capítulo 4. Ainda mais, o caso de ordem inteira será recuperado para ν , ordem não inteira, igual a n , ordem inteira, isto é, $\nu = n$. Note que, também, o intervalo que delimita a ordem não inteira, $n - 1 < \nu \leq n$ desempenha papel fundamental, conforme **Definição 7**, ou seja, um intervalo aberto à esquerda e fechado à direita.

Capítulo 4

Equações diferenciais fracionárias

Diferentemente do cálculo que teve seu desenvolvimento de modo linear, culminando com os trabalhos de Cauchy e Weierstrass, no século XIX, que formalizaram, de maneira rigorosa os conceitos de derivada e integral, o cálculo fracionário, apesar de vários trabalhos esparsos, teve um desenvolvimento como área de pesquisa, apenas a partir do século XX, após o primeiro simpósio internacional dedicado exclusivamente ao tema (MILLER; ROSS, 1993).

Nas últimas décadas, o desenvolvimento da teoria tem avançado consideravelmente. Várias definições surgiram e importantes resultados foram demonstrados, [(SOUSA; OLIVEIRA, 2018) e (TEODORO; MACHADO; OLIVEIRA, 2019)]. Graças a tais feitos, conceitos de cálculo fracionário podem ser aplicados em diversificadas áreas do conhecimento, objetivando desenvolver métodos precisos para a caracterização de fenômenos naturais.

O propósito aqui é trabalhar com a derivada fracionária de Caputo, que considera a derivada fracionária como sendo uma integral fracionária de uma derivada de ordem inteira. Nos últimos anos, são encontrados, na literatura, diversos trabalhos que usam a referida derivada para modelar certos fenômenos naturais os quais, maioria dos casos, apresentam melhor precisão que os modelos clássicos. Dentre eles, como apresentado na revisão bibliográfica, destacam-se: [(TEJADO; VALÉRIO; VALÉRIO, 2014), (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2017), (BONI, 2017), (SAEEDIAN et al., 2017), (LUO; WANG; FEČKAN, 2018), (BARROS et al., 2021) e (VAZ; OLIVEIRA, 2022)]. O propósito principal deste capítulo é usar tal derivada junto à metodologia da transformada de Laplace para desenvolver modelos fracionários para as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko-Ehrenfest que descrevam a variação da flecha para uma viga simples apoiada, prismática, de seção transversal retangular, constituída de material isotrópico e elástico linear, quando submetida a um carregamento distribuído uniforme alinhado com o eixo principal de inércia vertical.

4.1 Equação de Euler-Bernoulli fracionária

Aqui é apresentado um problema de valor inicial fracionário, cujo propósito é permitir a identificação de certos efeitos que possam estar influenciando a deflexão da viga em questão, os quais não são contemplados pela solução do modelo clássico. O modelo, correspondente ao PVC, será denominado equação de Euler-Bernoulli fracionária (EBF).

Como deduzido no Capítulo 2, o modelo de Euler-Bernoulli clássico pode ser representado por

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) = -q(x), \quad (4.1)$$

em que $q(x)$ é a carga distribuída, $v(x)$ é a deflexão, E é módulo de Young e I é o momento de inércia da seção transversal.

Como neste estudo E e I são constantes, tem-se que

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = -q(x). \quad (4.2)$$

Com a pretensão de avaliar resultados relacionados à deflexão para valores à esquerda de 4, como também, em sua vizinhança à direita, são propostas as seguintes equações diferenciais fracionárias para o modelo de Euler-Bernoulli fracionário.

I) No intervalo $3 < \alpha \leq 4$

$$\frac{d^\alpha v(x)}{dx^\alpha} = -A, \quad (4.3)$$

com $A = \frac{q}{EI}$ e as condições de contorno $v(0) = v(L) = 0$, $EIv''(0) = M(0) = 0$ e $EIv''(L) = M(L) = 0$, sendo L o comprimento da viga e M o momento fletor.

II) No intervalo $4 < \beta \leq 5$

$$\frac{d^\beta u(x)}{dx^\beta} = -B, \quad (4.4)$$

com B , uma constante positiva e as condições de contorno $u(0) = u(L) = 0$, $EIu''(0) = M(0) = 0$, $EIu''(L) = M(L) = 0$ e mais uma quinta condição, discutida mais à frente, conforme a solução do respectivo PVC que interessa.

A seguir, são analisadas as soluções dos modelos fracionários para os dois casos. Convém destacar que em tal desenvolvimento, as grandezas foram consideradas adimensionais. Para trabalhos futuros pretende-se abordar tal solução, considerando a dimensão das grandezas, visando observar o comportamento na solução, nestas condições.

I) O parâmetro α encontra-se no intervalo $3 < \alpha \leq 4$.

Aqui é discutida a Equação (4.3). Da Definição 7, tem-se que, para $m - 1 < \alpha \leq m$ com α não inteiro e m inteiro, a transformada de Laplace da derivada de Caputo é

dada por

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(x)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} [s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0)], \quad (4.5)$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(x)$ com parâmetro s e $f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} D^k f(x)$.

Aplicando a transformada de Laplace na Equação (4.3), vem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{d^\alpha v}{dx^\alpha}\right) &= -A\mathcal{L}(1), \\ s^\alpha V(s) - s^{\alpha-1}v(0) - s^{\alpha-2}v'(0) - s^{\alpha-3}v''(0) - s^{\alpha-4}v'''(0) &= -A\frac{1}{s}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Das condições de contorno para o problema, tem-se que $v(0) = 0$. Então, tomando $v'(0) = k_1$, $v''(0) = k_2$ e $v'''(0) = k_3$ com k_1 , k_2 e k_3 constantes, substituindo na Equação (4.6) e rearranjando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned} s^\alpha V(s) - s^{\alpha-2}k_1 - s^{\alpha-3}k_2 - s^{\alpha-4}k_3 &= -A\frac{1}{s}, \\ s^\alpha V(s) &= -A\frac{1}{s} + s^{\alpha-2}k_1 + s^{\alpha-3}k_2 + s^{\alpha-4}k_3, \\ V(s) &= -A\frac{1}{s^{\alpha+1}} + \frac{1}{s^2}k_1 + \frac{1}{s^3}k_2 + \frac{1}{s^4}k_3. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para voltar ao problema na variável x , aplica-se a transformada de Laplace inversa na Equação (4.7) e obtém-se,

$$\begin{aligned} v(x) &= -\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right) + k_1 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + k_2 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) + k_3 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right), \\ v(x) &= -\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha + k_1 x + \frac{k_2}{2} x^2 + \frac{k_3}{6} x^3, \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que usamos a Propriedade 4 do Capítulo 3.

Para determinar as constantes k_1 , k_2 e k_3 , utiliza-se as outras condições de contorno $v(L) = 0$, $EIv''(0) = M(0) = 0$ e $EIv''(L) = M(L) = 0$. Substituindo $v(L) = 0$, na Equação (4.8), obtém-se

$$\frac{-A}{\Gamma(\alpha+1)} L^\alpha + k_1 L + \frac{k_2}{2} L^2 + \frac{k_3}{6} L^3 = 0. \quad (4.9)$$

Derivando a Equação (4.8) duas vezes e multiplicando por EI , obtém-se

$$M(x) = \frac{-q(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-2} + k_2 EI + k_3 EIx. \quad (4.10)$$

Daí, usando $EIv''(0) = M(0) = 0$ e $EIv''(L) = M(L) = 0$ na Equação (4.10), obtém-se $k_2 = 0$ e $k_3 = A \frac{L^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-1)}$.

Substituindo k_2 e k_3 na Equação (4.9) e rearranjando os termos, obtém-se

$$k_1 = AL^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{6\Gamma(\alpha-1)} \right].$$

Daí, é obtida a solução da equação fracionária dada por

$$v(x) = -\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha + k_1 x + \frac{k_3}{6} x^3. \quad (4.11)$$

com

$$k_1 = AL^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{6\Gamma(\alpha-1)} \right]$$

e

$$k_3 = A \frac{L^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-1)}.$$

Nota-se que, tomando $\alpha = 4$ na Equação (4.11), e sabendo que para $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\Gamma(n+1) = n!$, é recuperada a solução da equação de ordem inteira

$$v(x) = A \left(\frac{-x^4}{24} + \frac{Lx^3}{12} - \frac{L^3x}{24} \right), \quad (4.12)$$

solução esta de acordo com a Equação (2.89).

II) O parâmetro β encontra-se no intervalo $4 < \beta \leq 5$

Agora, é discutida a solução da Equação (4.4). Neste caso, são necessárias cinco condições de contorno. Serão utilizadas, inicialmente, as quatro condições $u(0) = u(L) = 0$ e $M(0) = M(L) = 0$. O interesse é na solução $u(x)$, apenas para vizinhanças de 4, isto é, $\beta \rightarrow 4$ excluído o 4. A quinta condição de contorno emerge a partir deste fato.

Análogo ao caso anterior, tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da Equação (4.4), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\frac{d^\beta u}{dx^\beta} \right) &= -B \mathcal{L}(1), \\ s^\beta U(s) - s^{\beta-1} u(0) - s^{\beta-2} u'(0) - s^{\beta-3} u''(0) - s^{\beta-4} u'''(0) - s^{\beta-5} u^{iv}(0) &= -\frac{B}{s}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

em que $u(s) = \mathcal{L}[u(x)]$, sendo s o parâmetro da transformada.

Multiplicando a Equação (4.13) por $s^{-\beta}$ e introduzindo a notação $u(0) = k_1$, $u'(0) = k_2$, $u''(0) = k_3$, $u'''(0) = k_4$ e $u(0)'''' = k_5$, sendo k_i com $i = 1, \dots, 5$ constantes, tem-se

$$U(s) = -\frac{B}{s^{\beta+1}} + \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s^2} + \frac{k_3}{s^3} + \frac{k_4}{s^4} + \frac{k_5}{s^5}. \quad (4.14)$$

A fim de calcular a transformada de Laplace inversa, utilizou-se a Propriedade 4, do Capítulo 3, a qual segue

$$u(x) = \frac{-Bx^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + k_1 + k_2x + \frac{k_3x^2}{2} + \frac{k_4x^3}{6} + \frac{k_5x^4}{24}. \quad (4.15)$$

De início, são utilizadas as quatro condições, conforme caso anterior.

Tem-se que $u(0) = 0$ implica $k_1 = 0$. Agora, derivando a Equação (4.15) duas vezes, tem-se, a menos de uma constante, a equação para o momento, como segue

$$u''(x) = \frac{-B\beta(\beta-1)x^{\beta-2}}{\Gamma(\beta+1)} + k_3 + k_4x + \frac{k_5x^2}{2}. \quad (4.16)$$

Usando a condição dada na derivada segunda, segue

$$EIu''(0) = EIk_3 = 0 \implies k_3 = 0. \quad (4.17)$$

Substituindo $k_1 = k_3 = 0$, na Equação (4.15), pode-se escrever

$$u(x) = \frac{-Bx^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + k_2x + \frac{k_4x^3}{6} + \frac{k_5x^4}{24}. \quad (4.18)$$

Em resumo, até aqui, $u(x)$ satisfaz as duas condições no extremo $x = 0$. Agora, são utilizadas as outras duas condições no extremo $x = L$, isto é, $u(L) = M(L) = 0$.

Substituindo $u(L) = 0$, na Equação (4.18), tem-se

$$u(L) = \frac{-BL^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + k_2L + \frac{k_4L^3}{6} + \frac{k_5L^4}{24} = 0. \quad (4.19)$$

Por outro lado, derivando a Equação (4.18) duas vezes, obtém-se

$$u''(x) = \frac{-B\beta(\beta-1)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\beta+1)} + k_4x + \frac{k_5x^2}{2}. \quad (4.20)$$

Impondo a condição, $u''(L) = 0$

$$EIu''(L) = EI \left[\frac{-B\beta(\beta-1)L^{\alpha-2}}{\Gamma(\beta+1)} + k_4L + \frac{k_5L^2}{2} \right] = 0, \quad (4.21)$$

o que implica em

$$\frac{-B\beta(\beta-1)L^{\beta-2}}{\Gamma(\beta+1)} + k_4L + \frac{k_5L^2}{2} = 0. \quad (4.22)$$

Das Equações (4.19) e (4.22), resulta o sistema linear nas variáveis k_2 , k_4 e k_5 , como segue

$$\begin{cases} +k_2 + \frac{k_4L^2}{6} + \frac{k_5L^3}{24} = \frac{BL^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)}, \\ k_4 + \frac{k_5L}{2} = \frac{B\beta(\beta-1)L^{\beta-3}}{\Gamma(\beta+1)}. \end{cases} \quad (4.23)$$

Como $\Gamma(\beta+1) = \beta\Gamma(\beta) = \beta(\beta-1)\Gamma(\beta-1)$, é permitido reescrever o sistema da forma

$$\begin{cases} +k_2 + \frac{k_4L^2}{6} + \frac{k_5L^3}{24} = \frac{BL^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)}, \\ k_4 + \frac{k_5L}{2} = \frac{BL^{\beta-3}}{\Gamma(\beta-1)}. \end{cases} \quad (4.24)$$

O sistema (4.24) é composto por duas equações e três incógnitas. Como o sistema é indeterminado, é possível introduzir um parâmetro ϕ , tal que $\phi = k_5$ e expressar k_2 e k_4 em função de ϕ .

Primeiro para k_4

$$k_4 = \frac{BL^{\beta-3}}{\Gamma(\beta-1)} - \frac{\phi L}{2}. \quad (4.25)$$

Agora, substituindo a Equação (4.25), na primeira Equação (4.24) e simplificando, obtém-se

$$k_2 = BL^{\beta-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{1}{6\Gamma(\beta-1)} \right) + \frac{\phi L^3}{24}, \quad (4.26)$$

bem como $k_1 = 0$, k_2 , $k_3 = 0$, k_4 e k_5 , na Equação (4.15), e rearranjando os termos, pode-se escrever

$$u(x) = \frac{-Bx^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \left[BL^{\beta-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{1}{6\Gamma(\beta-1)} \right) + \frac{\phi L^3}{24} \right] x + \frac{1}{6} \left[\frac{BL^{\beta-3}}{\Gamma(\beta-1)} - \frac{\phi L}{2} \right] x^3 + \frac{\phi x^4}{24}, \quad (4.27)$$

que é a solução desejada, ainda em termos da constante ϕ .

Em resumo, os dois casos analisados permitem concluir que:

(I) Para $3 < \alpha \leq 4$. A Equação (4.3) e as condições de contorno

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 && \text{(flecha),} \\ v'(0) &= AL^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1/6}{\Gamma(\alpha-1)} \right) && \text{(rotação ou inclinação),} \\ v''(0) &= 0 && \text{(momento fletor),} \\ v'''(0) &= A \frac{L^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-1)} && \text{(força cortante),} \end{aligned}$$

cuja solução do PVC é dada pela Equação (4.11).

(II) Para $4 < \beta \leq 5$. A Equação (4.4) e as condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ u'(0) &= BL^{\beta-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{1}{6\Gamma(\beta-1)} \right) + \frac{\phi L^3}{24}, \\ u''(0) &= 0, \\ u'''(0) &= \frac{BL^{\beta-3}}{\Gamma(\beta-1)} - \frac{\phi L}{2}, \\ u''''(0) &= \phi, \end{aligned}$$

com solução do PVC dada pela Equação (4.27).

Como enfatizado anteriormente, as soluções $u(x)$ que interessam são apenas aquelas para β próximo de 4, isto é, $\beta \rightarrow 4$. Nestas condições, as Equações (4.3) e (4.4)

tendem para mesma ordem quatro e, conseqüentemente, mesmas condições de contorno. Logo tem-se $B \rightarrow A$ e $\phi \rightarrow 0$, implicando em $u(x) \rightarrow v(x)$. Portanto, no contexto geral, as Equações (4.3) e (4.4) são distintas, mas considerando o caso em que $\beta \rightarrow 4$ excluído o 4, admitem a mesma solução $u(x) = v(x)$. Assim, é permitido concluir que, para uma vizinhança de 4 a solução das Equações (4.3) e (4.4) satisfazendo as referidas condições de contorno, é dada por

$$z(x) = -C \frac{x^\gamma}{\Gamma(\gamma + 1)} + CL^{\gamma-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\gamma + 1)} - \frac{1/6}{\Gamma(\gamma - 1)} \right) x + C \frac{L^{\gamma-3}}{6\Gamma(\gamma - 1)} x^3, \quad (4.28)$$

sendo $z(x) = u(x) = v(x)$, $\gamma = \beta = \alpha$ e $C = B = A$.

Para representar graficamente a solução fracionária obtida, adotou-se a viga do nosso problema, cujo material é o aço AISI 1020, sendo submetida a uma carga de $1 \times 10^4 N/m$ e com dimensões $(b, h, L) = (0, 3m, 0, 5m, 5m)$. Fixando os valores $\alpha = 3,85$, $\alpha = 3,90$, $\alpha = 3,95$, $\alpha = 4,00$, $\alpha = 4,05$ e $\alpha = 4,10$, na vizinhança de 4, tanto pela esquerda como pela direita, obtém-se as curvas conforme o gráfico da Figura 4.1.

Convém destacar que, no presente contexto, não foi adotado um critério específico para escolha dos valores de α . Tais valores foram selecionados objetivando apenas visualizar o comportamento das curvas-deflexões para uma vizinhança da ordem inteira, coerente com a dedução da solução fracionária EBF. O propósito da escolha será o mesmo para os demais gráficos presentes neste capítulo.

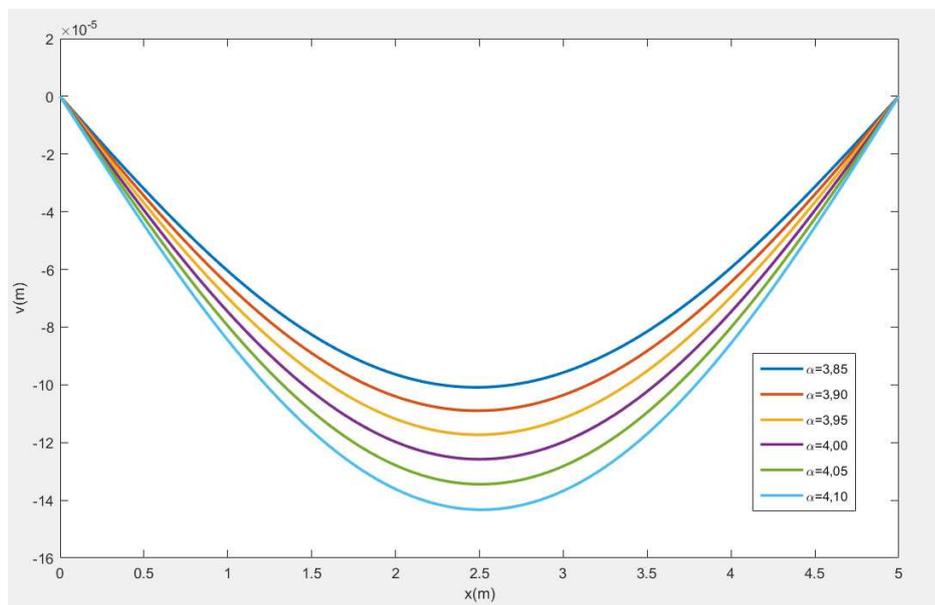


Figura 4.1 – Solução do PVC fracionário para diferentes valores de α .

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Pelo gráfico da Figura 4.1, é notável que ao aproximar o parâmetro α do valor 4, tanto pela esquerda como pela direita, a solução realmente converge exatamente para a

solução clássica. Daí, percebe-se que um dos pontos importantes da solução fracionária é permitir analisar o comportamento da deflexão para valores próximos da solução clássica, fato que pode permitir a constatação de efeitos que não sejam contemplados pelo perfil de deflexão da clássica solução de Euler-Bernoulli. A exploração da importância dessa solução para identificação e avaliação de tais efeitos, é feita no próximo capítulo.

4.1.1 Momento fletor fracionário

Agora é apresentada uma versão fracionária para o momento fletor no caso de uma viga simplesmente apoiada com carga distribuída.

O momento fletor é determinado pela derivada segunda da flecha. Para isso, basta tomar $k_2 = 0$ e $k_3 = \frac{AL^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-1)}$, com $A = \frac{q}{EI}$ na Equação (4.10), logo

$$M(x) = \frac{q}{\Gamma(\alpha-1)} (-x^{\alpha-2} + L^{\alpha-3}x). \quad (4.29)$$

Nota-se que, para $\alpha = 4$, recupera-se a expressão para o momento fletor

$$M(x) = \frac{-qx^2}{2} + \frac{qL}{2}x, \quad (4.30)$$

conforme Equação (2.77).

A representação gráfica do momento fletor fracionário, para uma viga de comprimento 5 metros submetida a uma carga $q = 1 \times 10^4 N/m$, é dada pelo gráfico da Figura 4.2. Aqui, os valores de α são os mesmos usados para se obter o gráfico da Figura 4.1.

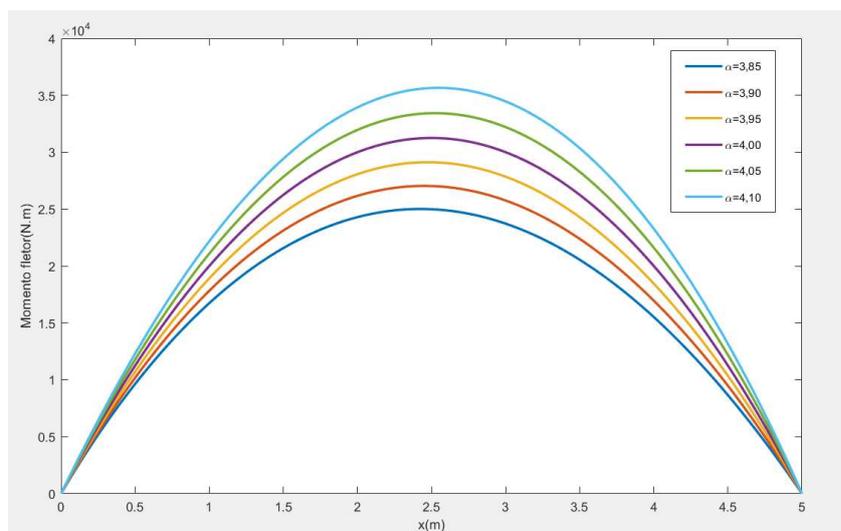


Figura 4.2 – Momento fletor para diferentes valores de α .

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

4.2 Equação de Timoshenko-Ehrenfest fracionária

Aqui, é apresentada uma solução fracionária para o sistema de equações de Timoshenko-Ehrenfest, considerando o caso de uma viga simplesmente apoiada com seções transversais retangulares submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

Nota-se que a solução do sistema (2.128) coincide com a solução obtida para a deflexão por flexão pura, justaposta à referente aos efeitos de cisalhamento, pelo princípio da superposição.

Tendo como base este fato, é proposta uma solução fracionária para a equação de Timoshenko-Ehrenfest, dada por.

$$v(x) = v_{EBF}(x) + v_{CF}(x), \quad (4.31)$$

em que $v_{EBF}(x)$ e $v_{CF}(x)$ são as soluções fracionárias para a deflexão por flexão e cisalhamento, respectivamente.

Da Equação (4.11), a solução fracionária referente à deflexão por flexão numa vizinhança de quatro, ordem inteira, é dada por

$$v(x) = -\frac{q}{EI\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha + k_1x + \frac{k_3}{6}x^3, \quad (4.32)$$

com

$$k_1 = \frac{qL^{\alpha-1}}{EI} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{6\Gamma(\alpha-1)} \right]$$

e

$$k_3 = \frac{qL^{\alpha-3}}{EI\Gamma(\alpha-1)}.$$

Por outro lado, tem-se que a Equação (2.96) fornece a deflexão, devido aos efeitos de cisalhamento. Portanto, integrando ambos os membros da referida equação, obtém-se

$$v(x) = \int c \frac{V(x)}{GA} dx = \frac{c}{GA} \int V(x) dx = \frac{c}{GA} M(x) + C, \quad (4.33)$$

em que c é o coeficiente de cisalhamento, G é o módulo de elasticidade transversal, A é a área da seção transversal, $M(x)$ é o momento fletor e C é a constante de integração.

Como $v(0) = 0$ e $M(0) = 0$, tem-se que $C = 0$. Daí, pode-se escrever

$$v(x) = \frac{c}{GA} M(x). \quad (4.34)$$

Logo, percebe-se que, para obter $v_{CF}(x)$, é necessário apenas o momento fletor fracionário, o qual é dado pela Equação (4.29) com o sinal invertido devido à orientação da flecha, isto é,

$$M_F(x) = \frac{q}{\Gamma(\alpha-1)} (x^{\alpha-2} - L^{\alpha-3}x). \quad (4.35)$$

Portanto,

$$v_{CF}(x) = \frac{c}{GA} M_F(x) = \frac{c}{GA} \frac{q}{\Gamma(\alpha - 1)} [x^{\alpha-2} - L^{\alpha-3}x]. \quad (4.36)$$

Finalmente, levando as Equações (4.32) e (4.36), na Equação (4.31), obtém-se

$$v(x) = -\frac{q}{EI\Gamma(\alpha + 1)}x^\alpha + k_1x + \frac{k_3}{6}x^3 + C[x^{\alpha-2} - L^{\alpha-3}x], \quad (4.37)$$

com

$$k_1 = \frac{qL^{\alpha-1}}{EI} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{1}{6\Gamma(\alpha - 1)} \right], \quad k_3 = \frac{qL^{\alpha-3}}{EI\Gamma(\alpha - 1)}$$

e

$$C = \frac{cq}{GA\Gamma(\alpha - 1)}.$$

A Equação (4.37) é a solução de Timoshenko-Ehrenfest fracionária que fornece a deflexão sofrida por uma viga simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída.

Nota-se que, para $\alpha = 4$, a Equação (4.37) coincide com a Equação (2.141), a qual é a solução de Timoshenko-Ehrenfest para o problema de viga simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída.

O gráfico da Figura 4.3 representa as curvas da solução fracionária TEF para uma viga com dimensões $(b, h, L) = (0, 3m, 0, 5m, 5m)$, submetida a uma carga $q = 1 \times 10^4 N/m$. Neste caso, foram tomados os valores de $\alpha = 3,85$, $\alpha = 3,90$, $\alpha = 3,95$, $\alpha = 4,00$, $\alpha = 4,05$ e $\alpha = 4,10$.

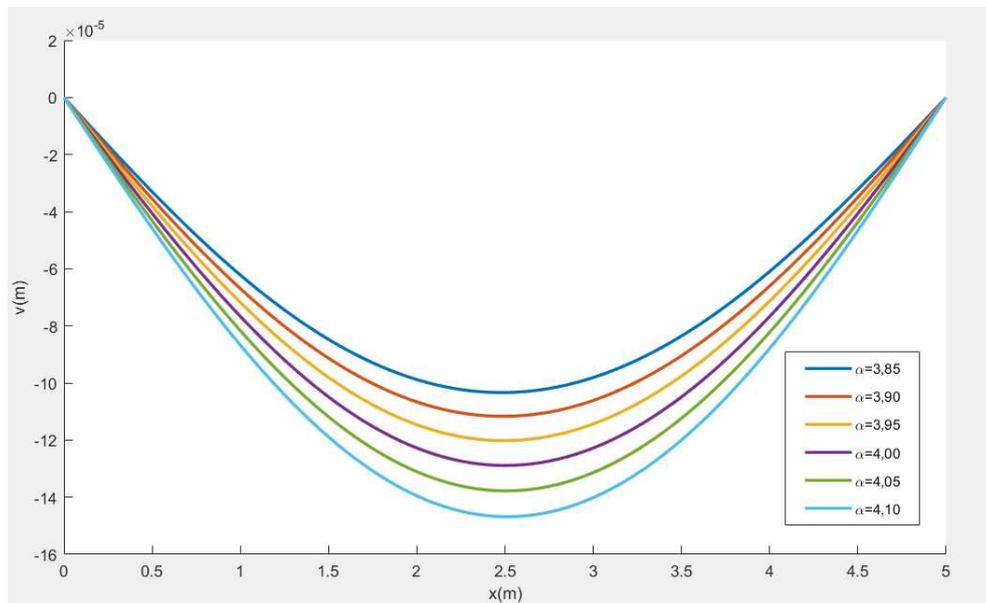


Figura 4.3 – Solução da equação fracionária TEF para diferentes valores de α .

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Analisando o gráfico da Figura 4.3, pode-se observar que, quando α é tomado próximo da ordem inteira, tanto pela esquerda como pela direita, as curvas tendem a

convergir para a solução inteira. Como estas curvas representam a deflexão sofrida pela viga, tanto na vizinhança da ordem inteira, como na própria ordem inteira, possivelmente, elas podem ser utilizadas para avaliar efeitos no perfil da deflexão, além do cisalhamento, o qual é o efeito caracterizado pela solução TEF para $\alpha = 4$. A interpretação dessas curvas será estudada detalhadamente no Capítulo 5.

4.2.1 Relação entre as soluções EBF e TEF

Analisando a relação entre as flechas máximas das referidas soluções, pode-se mostrar que o valor máximo de flecha, referente à solução TEF, é maior ou no mínimo igual ao respectivo valor máximo da EBF para um α fixo no intervalo em que está definido. Para garantir essa afirmação, tomou-se a deflexão máxima nas Equações (4.37) e (4.32), fixando $\alpha = 4$ (casos EB e TE clássicos). Pela condição de simetria do problema, a deflexão máxima, nas respectivas equações, fixando $\alpha = 4$, ocorre em $x = \frac{L}{2}$. Logo, a deflexão máxima para a solução TEF é dada por

$$v_{TEF} = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{cqL^2}{8GA}, \quad (4.38)$$

enquanto para EBF, a deflexão máxima é

$$v_{EBF} = \frac{5qL^4}{384EI}. \quad (4.39)$$

Considerando a razão entre as respectivas flexões, pode-se escrever

$$\frac{v_{TEF}}{v_{EBF}} = 1 + \frac{48EIc}{5GAL^2}. \quad (4.40)$$

Para simplificar a Equação (4.40), considerou-se o coeficiente de Poisson para o aço AISI 1020 (segundo (ATAN, 2005), $\nu = 0,3$). Deste fato e das Equações (2.97) e (2.92), segue que $c = \frac{153}{130}$ e $G = \frac{5E}{13}$. Logo, substituindo, na Equação (4.40), e fazendo as devidas simplificações, obtém-se

$$v_{TEF} = v_{EBF} + v_{EBF} \frac{306}{125} \left(\frac{h}{L} \right)^2, \quad (4.41)$$

em que h e L representam a altura da seção transversal e o comprimento da viga, respectivamente.

Portanto, para os metais em geral, pode-se escrever

$$v_{TEF} = v_{EBF} + v_{EBF} \Psi \left(\frac{h}{L} \right)^2, \quad (4.42)$$

em que Ψ é uma constante, dependente do coeficiente de Poisson do determinado metal.

Agora, para o aço AISI 1020, a Equação (4.41) pode ser escrita da forma

$$R_2 = 1 + \frac{306}{125R_1^2}, \quad (4.43)$$

em que $R_1 = \frac{L}{h}$ é a razão de aspecto e $R_2 = \frac{v_{TEF}}{v_{EBF}}$ é a razão entre as flechas máximas EBF e TEF no caso $\alpha = 4$.

A relação entre as razões R_1 e R_2 apresenta comportamento descrito pela curva, conforme o gráfico da Figura 4.4.

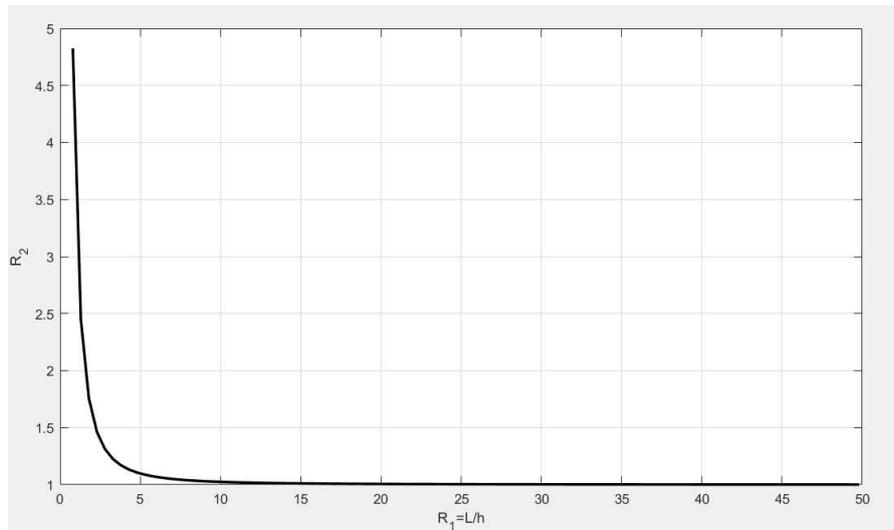


Figura 4.4 – Relação entre R_1 e R_2 .

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

No gráfico da Figura 4.4, a razão $R_1 = \frac{L}{h}$ foi tomada no intervalo $\left[\frac{4}{5}, 50\right]$. Analisando a curva obtida, percebe-se que, para $R_1 \geq 10$, os efeitos de cisalhamento não contribuem significativamente para a deflexão, pois a razão $R_2 = \frac{v_{TEF}}{v_{EBF}}$ tende a 1, isto é, a flecha máxima TE converge para a flecha máxima EB. Deste fato, é permitido concluir que as vigas longas ou com baixa altura da seção transversal têm sua deflexão máxima contemplada pela solução de EB.

Por outro lado, tem-se que, para a razão $R_1 < 10$, os valores de $R_2 = \frac{v_{TEF}}{v_{EBF}}$ divergem bastante de 1, conseqüentemente, a flecha máxima TE afasta-se da flecha máxima EB. Isso significa que, para vigas curtas e altas, os efeitos de cisalhamento sobre a deflexão são expressivamente relevantes, chegando a apresentar uma diferença igual ou maior que 100% em relação à flecha máxima EB.

Parâmetros para tomada de decisão sobre o uso de vigas de Euler-Bernoulli ou Timoshenko-Ehrenfest em estruturas são avaliados por diversos trabalhos. Dentre os quais, mencionam-se: (SORIANO, 2005), (MARTHA, 2010), (SILVA, 2010), (SOUZA, 2016) e (SILVA, 2019).

Capítulo 5

Deflexão de vigas: estudo de efeitos via EBF e TEF

No Capítulo 4 foram deduzidas as soluções fracionárias (EBF) e (TEF). O presente capítulo tem como propósito usar o parâmetro α , presente nestas soluções, para avaliar certos efeitos físicos que influenciam na flecha de uma viga simples apoiada com carregamento distribuído uniforme estático. As referentes flechas são extraídas das simulações de elasticidade tridimensional implementadas no *software* ANSYS, o qual adotou-se como referência. Como o ANSYS fornece os dados referentes a simulações de modelos específicos sem explicitar efeitos físicos participantes destes resultados, as soluções fracionárias são aqui empregadas com a finalidade de identificar e quantificar tais efeitos separadamente. Neste capítulo, é apresentada a investigação da influência no perfil de deflexão da viga decorrente da concentração de tensão nos seus apoios, assim como no cisalhamento e nos sinais iniciais de grandes deflexões em regime não linear no caso de vigas baixas (vigas com altura menor ou igual à base).

5.1 Escolha do *software* computacional

Como base referencial, foram usadas as soluções numéricas obtidas com o uso do *software* ANSYS, o qual é um sistema comercial desenvolvido utilizando o método dos elementos finitos (MEF) para análises de modelos numéricos em diversas áreas científicas (ABREU, 2016). Tal escolha teve como critério a alta confiabilidade do ANSYS, reconhecida há décadas em diferentes campos de pesquisa.

As simulações, almejadas neste trabalho, são contempladas pela análise estática que é usada para determinar deslocamentos, tensões, deformações para superfícies submetidas a cargas estáticas. Esse tipo de análise é dividido em linear e não linear, sendo que a não linearidade contempla: flambagem, plasticidade, tensão, rigidez, grandes deformações e tensões, hiperelasticidade e fissuração.

Para realizar as simulações, utilizou-se a interface *workbench* (19.0), correspondente a versão (ANSYS, 2017). A interface supracitada é de simples manuseio e contempla as análises desejadas. Além disso, a referente versão foi a acessível no departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica - FEM.

5.2 Caracterização do modelo, escolha do material, implementação e simulação no ANSYS

O modelo adotado consiste em uma viga prismática, cuja seção transversal é retangular, simplesmente apoiada com um apoio fixo e outro móvel, submetida a um carregamento distribuído.

Devido à simplicidade do modelo, foi possível incorporar às soluções analíticas EB e TE o parâmetro fracionário α , tornando-as ferramentas capazes de identificar certos efeitos que influenciam na deflexão de vigas, incorporados na flecha transversal extraída da solução numérica de elasticidade tridimensional ANSYS, efeitos estes não explícitos pelo referido *software*.

A convergência entre as soluções analíticas EBF e TEF e a solução numérica de elasticidade tridimensional ANSYS é desenvolvida do seguinte modo: é inicialmente obtida, da solução ANSYS, a deflexão transversal com caminho definido pelo eixo baricêntrico na direção do eixo y no plano zy , a qual corresponde à deflexão transversal no plano xv das referidas soluções analíticas.

Para representar a situação descrita anteriormente, considerou-se uma viga com dimensões $(b, h, L) = (0, 3m, 0, 1m, 5m)$, submetida a um carregamento $q = 3 \times 10^2 N/m$. No gráfico da Figura 5.1 são apresentados em (a), a deflexão transversal, obtida para solução analítica EBF (EB para $\alpha = 4$) e em (b), a deflexão transversal obtida da correspondente solução ANSYS, onde nesta implementação, o módulo do carregamento considerado foi $q = 3 \times 10^2 N/m : 0, 3 = 1 \times 10^3 N/m$, que corresponde ao carregamento implementado no modelo analítico EBF (EB para $\alpha = 4$).

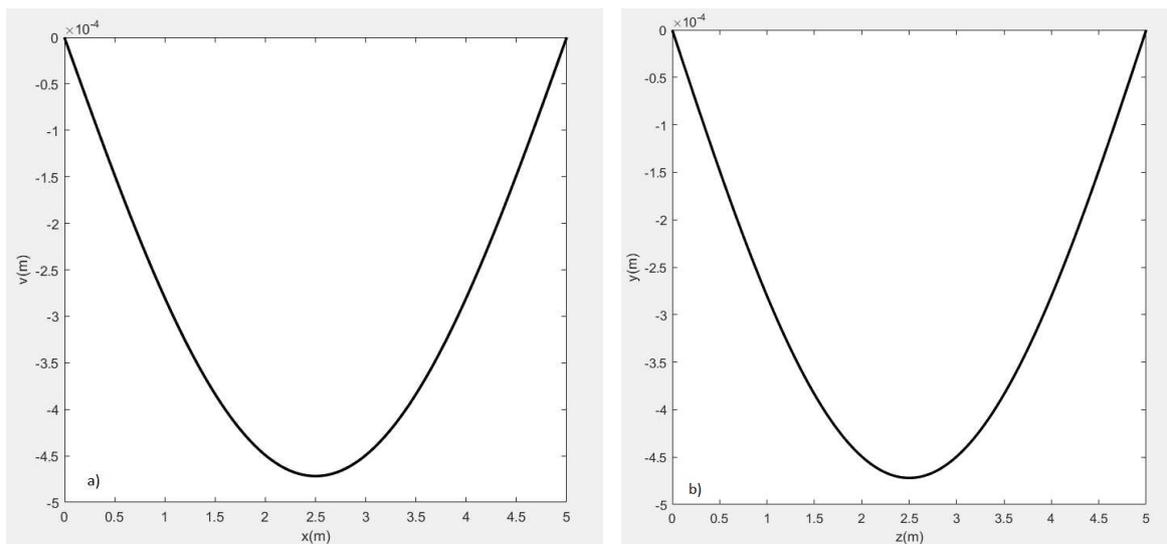


Figura 5.1 – a) Flecha analítica EBF(EB para $\alpha = 4$) e b) Flecha ANSYS correspondente.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

O passo seguinte é variar o parâmetro α presente nas soluções analíticas de forma a aproximar as flexões máximas de ambas as soluções com menor erro possível considerando o critério de convergência adotado. Para a equivalência do carregamento, em ambas as soluções, foi feito o seguinte: para uma carga distribuída q , implementada na viga da solução analítica, implementa-se uma carga distribuída $\frac{q}{b}$ na viga construída no ANSYS, em que b é a base de tal viga, conforme procedimento realizado para obtenção dos gráficos da Figura 5.1. Como enfatizado anteriormente, a deflexão transversal, obtida das simulações realizadas no ANSYS, não revela discriminadamente efeitos implícitos que contribuem para resultados de saída. No caso de vigas simplesmente apoiadas com carga distribuída, por exemplo, pode-se revelar a presença dos efeitos de momentos, cisalhamento, concentração de tensão nos apoios, flambagem, plasticidade, entre outros que, dependendo das dimensões da viga e do carregamento, podem contribuir na deflexão transversal. Os resultados de saída fornecidos pelo ANSYS, relacionados à deflexão transversal, não explicita a contribuição de cada um dos efeitos separadamente. É justamente neste ponto que as soluções fracionárias são exploradas com o intuito de detectar, identificar e quantificar na variação da ordem fracionária cada um destes efeitos separadamente.

O material escolhido para a construção da viga foi o aço AISI 1020, o qual é dúctil, isto é, apresenta capacidade para sofrer grandes deformações plásticas sem atingir o rompimento, quando submetido a altas tensões.

De acordo com (LEITE et al., 2017), apesar do aço 1020 apresentar baixo teor de carbono, os valores para tensões de tração e compressão, módulo de elasticidade e ductilidade são consideráveis devido a esta composição apresentar, em sua estrutura, o material na forma de cementita, composto conhecido como carboneto de ferro Fe_3C ,

caracterizado por ser dura, resistente e suportar altas temperaturas. Por isso, é muito utilizado na fabricação de chapas automobilísticas, perfis estruturais, placas para produção de tubos e em estrutura de pontes, na construção civil.

As implementações foram desenvolvidas na interface *workbench* usando análise estática, as quais são identificadas no *software* como static-structural.

5.2.1 Malha de elementos finitos

Na fase de pré-processamento, merece destaque um dos fatos mais relevantes para obter resultados coerentes em determinadas análises, que é a qualidade da malha (forma como o domínio contínuo é discretizado) e a escolha dos elementos geométricos que constituirão a malha (YAMASSAKI, 2014). Esta escolha deve ser bem criteriosa, pois influencia diretamente nos resultados obtidos. A escolha de uma malha inadequada pode levar a resultados incorretos sobre a análise que se pretende realizar. Logo, deve-se buscar elementos mais adequados possíveis para sua constituição, além disso, ser criterioso no refinamento, pois a malha pouco refinada mostra dados incoerentes relacionados ao que pretende-se analisar, como também, o excessivo refinamento exige maior processamento computacional e, conseqüentemente, maior esforço para a interpretação e validação dos resultados.

Os elementos finitos podem apresentar formas diversas, como exemplo, pode-se citar as unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais com números distintos de nós em suas faces e lados, acarretando diferentes graus de liberdade por nó. Dentre as principais formas, pode-se destacar os segmentos para as formas unidimensionais, triangulares e retangulares para as bidimensionais, tetraédricas e hexaédricas para as tridimensionais. Na escolha da forma do elemento, deve-se avaliar sua adequação à forma geométrica da estrutura física que se deseja analisar, isto é, estas formas são escolhidas conforme o domínio a ser discretizado (SORIANO, 2009).

O ANSYS versão 19.0, (ANSYS, 2017) apresenta duas opções para a geração da malha de elementos finitos, classificadas como livre ou mapeada. A malha livre é gerada automaticamente pelo programa, enquanto a mapeada é definida pelo usuário, que estabelece a forma e o tamanho dos elementos (OLIVEIRA, 2018). A malha mapeada é bem adequada para modelos que apresentam geometrias simples. Devido o modelo adotado possuir geometria simples, optou-se pela malha mapeada objetivando melhorar a qualidade dos resultados, pois, as simulações tridimensionais de elasticidade realizadas no ANSYS são as referências para o desenvolvimento da pesquisa.

Em relação à geometria da malha, adotou-se como elemento o hexaedro regular de 8 nós com aresta a , conhecido, na literatura, por sólido contínuo ou sólido 186 (LAJARIN, 2012) e (CARVALHO, 2012). Sua representação é dada pela Figura 5.2.

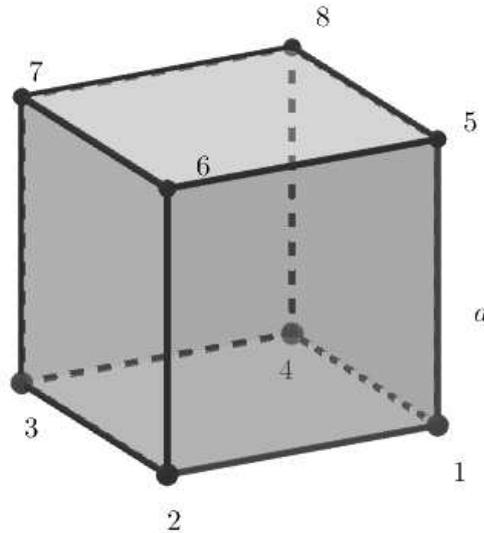


Figura 5.2 – Elemento usado na confecção da malha.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

A escolha da malha adequada depende da geometria e do tipo de material. Para as vigas reticuladas, caso que contempla o problema, uma boa malha é justamente constituída por pequenos hexaedros regulares de 8 nós (ALVES, 2018).

5.2.2 Avaliação e convergência da malha

Ao iniciar o desenvolvimento de uma determinada malha para uma certa estrutura, deve-se considerar dois parâmetros fundamentais: o primeiro é como avaliar a qualidade da malha; e o segundo é determinar um critério para convergência. O *software* ANSYS possui mecanismos tanto para a avaliação da malha como para a convergência.

A avaliação da qualidade da malha pode ser feita por mecanismos denominados métricas da malha. Para isso, no ambiente “Mesh” do *software*, basta ir ao tópico “Statistics”, no qual o *software* apresenta várias métricas para a avaliação da qualidade. Uma das métricas mais indicada pelo manual ANSYS é a “Element quality”. Estas métricas têm como função medir o quanto o elemento está deformado comparando-o com a geometria original. Para a malha adotada, o elemento perfeito é o hexaedro e, neste caso, o “Element quality” tem relevância 1. Para quantificar essa relevância, os parâmetros utilizados pelo *software* são a média e o desvio padrão. Para uma malha de boa qualidade, o *software* indica que ela apresente um “Element quality” com média \bar{x} maior ou igual a 0,8 e desvio padrão Σ com ordem menor ou igual que 10^{-2} .

O segundo parâmetro a ser avaliado é a convergência da malha. Uma maneira de avaliar tal convergência é realizar diversas simulações ou iterações objetivando refinar

a malha. Geralmente, faz-se este procedimento comparando os resultados das tensões obtidas para o refinamento de malha escolhido. A malha pode ser considerada de boa qualidade quando o erro na variação das tensões entre a malha atual e a malha do passo imediatamente anterior forem irrelevantes, isto é, convenientemente próximo de zero. Quando isso ocorre, pode-se considerar que a malha convergiu. Outra maneira de avaliar esta convergência é comparando a solução numérica com a malha escolhida a soluções analíticas existentes na literatura. Se as referidas soluções convergirem, isto significa que a malha convergiu.

Aqui é descrito o procedimento utilizado para determinar o critério de convergência da malha. Inicialmente, foram realizadas as iterações com refinamento da malha, além de usar também o dispositivo de avaliação existente no *software* ANSYS. Em ambos os casos, foram tomadas as tensões normais máximas de tração objetivando determinar o tamanho máximo possível da aresta do elemento, para que se tenha uma boa convergência. Em seguida, usou-se o confronto entre as solução analítica EB e a solução numérica extraída do ANSYS visando fixar o critério de erro entre as flechas transversais para a malha convergida. A partir dos resultados obtidos, nos procedimentos supracitados, foi determinado o critério de convergência.

Para a realização dos procedimentos descritos anteriormente, implementou-se no ANSYS uma viga simplesmente apoiada com dimensões $(b, h, L) = (0, 3m, 0, 1m, 5m)$, submetida a uma carga de $1 \times 10^3 N/m$. A viga implementada com os respectivos apoios e carregamento tem representação dada pela Figura 5.3.

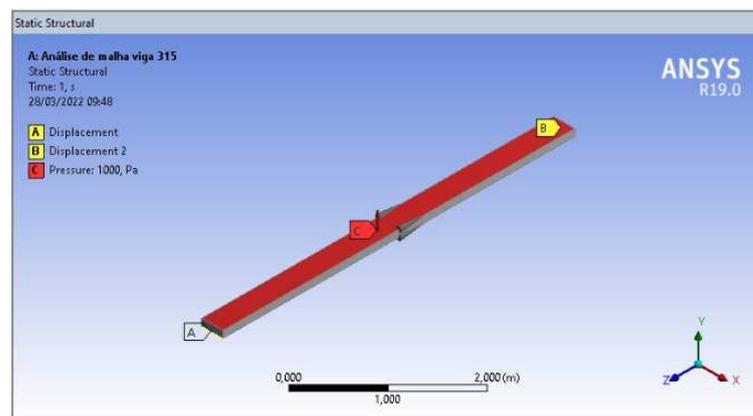


Figura 5.3 – Viga usada para o teste de convergência da malha.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

O procedimento iterativo foi iniciado com elementos cujas arestas medem $0,29m$. Daí, a malha foi refinada, obtendo, em cada teste, as tensões normais máximas de tração. Os resultados obtidos estão discriminados no gráfico da Figura 5.4.

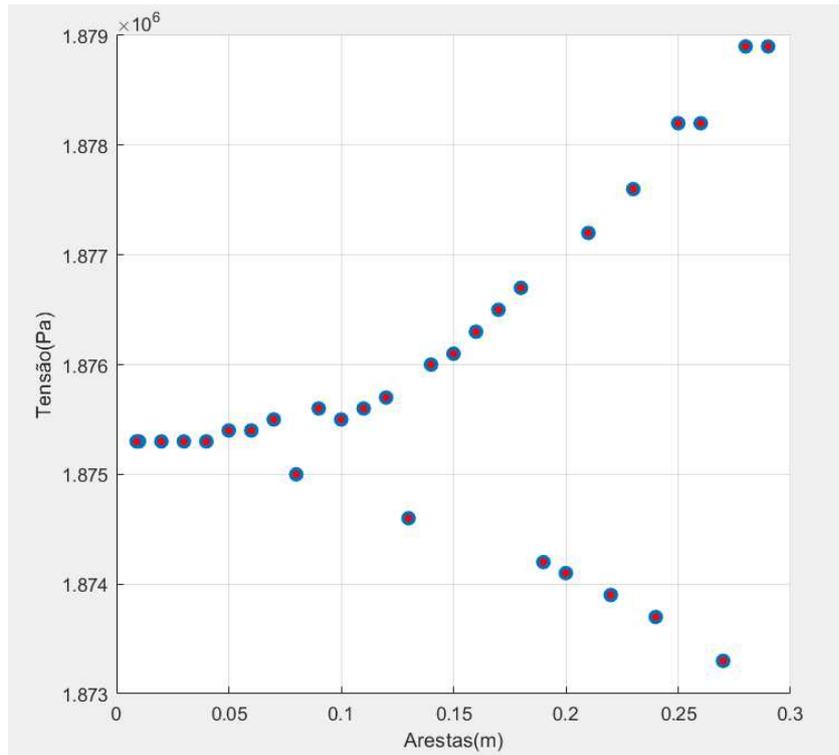


Figura 5.4 – Convergência da malha.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

No gráfico da Figura 5.4 fica claro que as tensões normais máximas de tração se tornam constantes para elementos com arestas menor ou igual que 0,04m ocorrendo, assim, a convergência da malha.

Por outro lado, realizou-se também o processo de convergência usando o mecanismo disponibilizado no *software*. O processo também é feito analisando a convergência das tensões normais principais máximas, mas o tipo de malha quem determina é o *software*. Para isso, no ambiente da tensão escolhida para avaliar a malha, selecionou-se a opção “Convergence”. Feito isso, bastou apenas estimar uma porcentagem de erro que se deseja permitir entre uma iteração e outra, fator determinante para fixar o erro aceitável entre as flechas. Isto é feito no comando “Allowable charge”. No manual do *software* ANSYS se afirma que uma porcentagem de 1% já é de boa qualidade. Adotou-se uma porcentagem 100 vezes menor, isto é, 0,01%, equivalente a um erro da ordem de 10^{-4} entre uma iteração e a seguinte. Realizada a simulação, obteve-se como resposta os dados representados na Figura 5.5.

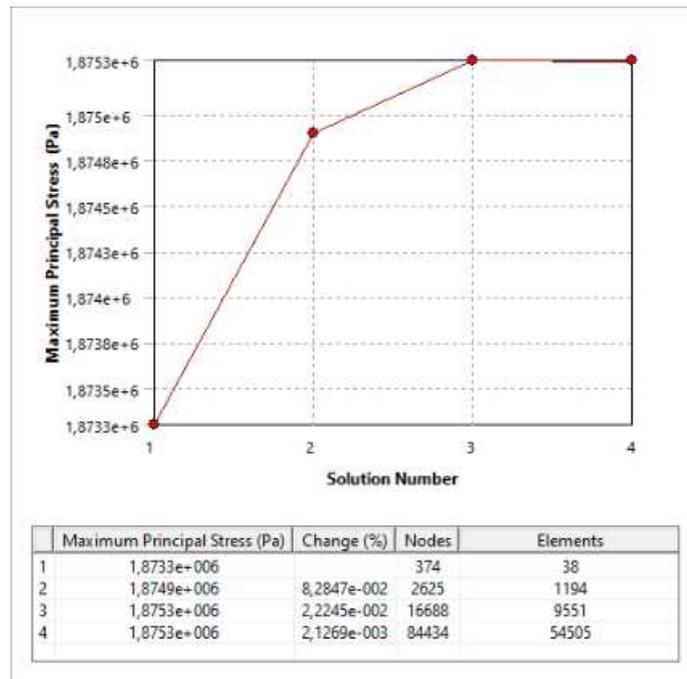


Figura 5.5 – Convergência da malha.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Analisando a Figura 5.5, percebe-se que, quando o erro permitido entre as iterações realizadas pelo *software* atingem a ordem de 0,02%, as tensões normais principais máximas de tração se tornam constantes. Além disso, tal valor coincide com as tensões obtidas no gráfico da Figura 5.4, quando o refinamento da aresta do hexaedro de 8 nós é menor ou igual 0,04m. Logo, pode-se concluir que o procedimento utilizado para testar a convergência da malha, constituída por hexaedros de 8 nós, é aceitável.

Visando testar o erro entre as deflexões com a malha convergida, foram escolhidas as flechas transversais correspondentes às malhas constituídas por hexaedros com arestas 0,04m e 0,03m, que são os dois primeiros casos em que as tensões convergem. Calculando o erro relativo entre estas flechas, obteve-se o gráfico da Figura 5.6.

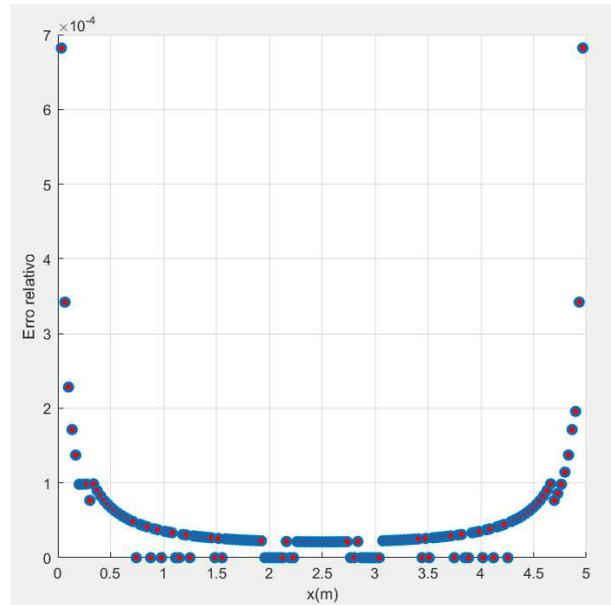


Figura 5.6 – Erro relativo entre as flechas.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Da análise do gráfico da Figura 5.6, pode-se notar que o erro relativo máximo entre as flechas é da ordem de 10^{-4} , equivalente à porcentagem de erro estimada para a convergência das tensões entre duas simulações consecutivas. Assim, conclui-se que as flechas transversais também convergem para malha constituída por hexaedros, cujas arestas sejam menores ou iguais a $0,04m$.

Por fim, implementou-se, no ANSYS, a viga, conforme Figura 5.3. A malha adotada é constituída por tetraedros de 8 nós e arestas medindo $0,02m$, malha esta com convergência comprovada. Na Figura 5.7, tem-se a representação da viga e a referida malha. No item (a), é apresentado um panorama total e, em (b), são destacados os elementos da malha, a partir dos quais fica visível que a viga possui 15 elementos na largura e 5 elementos na altura.

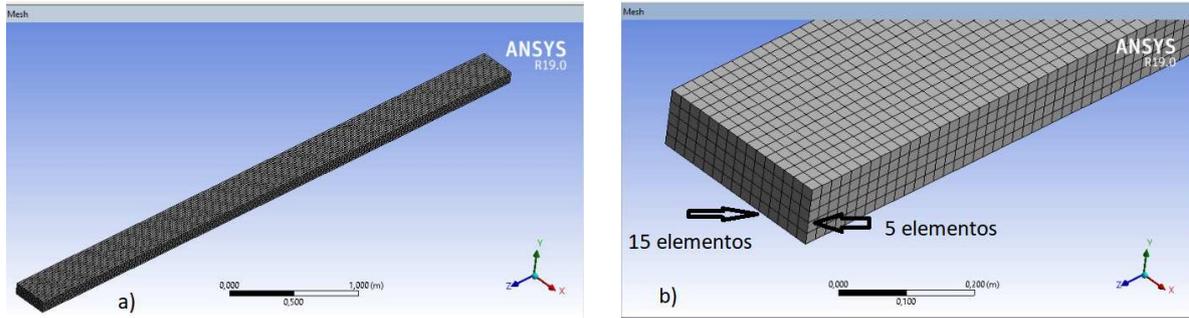


Figura 5.7 – Malha constituída por seus respectivos elementos: a) Visão geral e b) Elementos destacados.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Da referida viga foi extraída a flecha transversal, fixando como o caminho o eixo baricêntrico. Em seguida, foram filtrados os efeitos causados pela concentração de tensão nos apoios, conforme procedimento apresentado na Subseção 5.5.1. Por fim, confrontou-se com a solução EB. O erro relativo entre as referidas flechas, após o confronto, é dado conforme o gráfico da Figura 5.8.

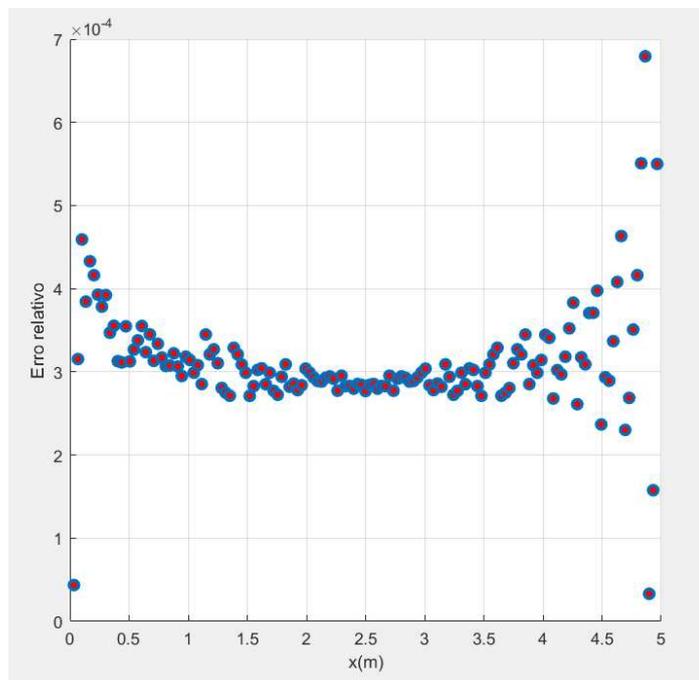


Figura 5.8 – Erro relativo entre as flechas.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

É perceptível do gráfico da Figura 5.8 que o erro relativo máximo é da ordem de 10^{-4} , equivalente ao erro considerado entre as tensões em iterações consecutivas usando o dispositivo para análise de convergência da malha, disponível no *software*, conforme

dados do gráfico da Figura 5.5. Tal fato confirma que as soluções ANSYS e EB convergem. Portanto, para a malha convergida, o erro máximo entre as flechas analíticas e numéricas é da ordem de 10^{-4} .

É importante destacar que, mesmo para a malha convergida, a diferença entre as flechas apresentam resíduos que, mensurado pelo erro relativo, apresentam ordem máxima de 10^{-4} . Isso vem do fato de trabalhar com um modelo numérico, conseqüentemente, a validação e convergência de resultados via tais modelos, dificilmente apresentam erros nulos.

A partir dos resultados obtidos nas análises de convergência da malha, considerou-se a convergência das soluções nas simulações, quando as arestas dos elementos forem menores ou guais a $0,04m$ e o erro relativo entre as flechas apresentar ordem menor ou igual a 10^{-4} .

Para testar a qualidade, foi selecionada, para a malha representada na viga da Figura 5.7, a métrica “Element quality”. Tomando a média e o desvio padrão, apresentados pela respectiva métrica, obtém-se $\bar{x} = 1$ e $\Sigma = 9,7971 \times 10^{-7}$, respectivamente. Logo, pode-se concluir que a malha apresenta excelente qualidade, pois tem-se uma média com 100% de qualidade e um desvio padrão na ordem de 10^{-7} , em que a ordem para o desvio padrão estimulada para uma boa malha é 10^{-2} .

5.3 Análise da precisão dos modelos fracionários EBF e TEF

Concluído o processo de escolha do material e a determinação dos elementos da malha, realizou-se uma simulação inicial no ANSYS, na qual foi determinada a flecha transversal e comparada com as soluções fracionárias EBF e TEF objetivando analisar o comportamento desses modelos na avaliação e identificação dos resultados via ANSYS.

Esta aplicação inicial teve como propósito mostrar que a liberdade do parâmetro α , incorporado às soluções EB e TE pelo uso de conceitos de cálculo fracionário, torna-a capaz de avaliar e identificar certos efeitos contemplados na deflexão fornecida pelos resultados do ANSYS.

Para isso, optou-se por um exemplo simples de estrutura carregada nos limites elásticos lineares. Dessa forma, implementou-se, no ANSYS, uma viga de aço AISI 1020 simplesmente apoiada, isotrópica, prismática, com dimensões $(b, h, L) = (0,3m; 0,8m; 5m)$ e sujeito a uma carga transversal uniformemente distribuída $q = 1 \times 10^4 N/m$.

A garantia do regime linear geométrico pode ser obtida comparando $\frac{v_{max}}{L}$ com a razão $\frac{1}{300}$, em que v_{max} é a flecha máxima obtida na simulação linear ANSYS e L é o comprimento da viga. Se $\frac{v_{max}}{L} \leq \frac{1}{300}$, o regime da simulação no *software* computacional

é linear, pois, nessa faixa, a estrutura comporta-se de forma linear. Caso contrário, o comportamento da estrutura é não linear (ALVES, 2012).

Convém deixar claro que esta comparação foi feita, apenas para garantir que a viga implementada não apresenta efeitos não lineares, pois a simulação linear ANSYS só detecta efeitos lineares, mesmo que o carregamento submetido seja suficiente para que a estrutura apresente efeitos não lineares.

Realizou-se uma simulação linear tridimensional de elasticidade no ANSYS e dele extraiu-se a deflexão transversal da viga no plano zy na direção do eixo y , definindo como caminho, o eixo baricêntrico. Nas soluções analíticas fracionárias EBF e TEF, esta deflexão é equivalente à flecha do plano xv com deflexão na direção do eixo v . A Figura 5.9 mostra a respectiva viga implementada, destacando o caminho definido e a direção da deflexão tomada.

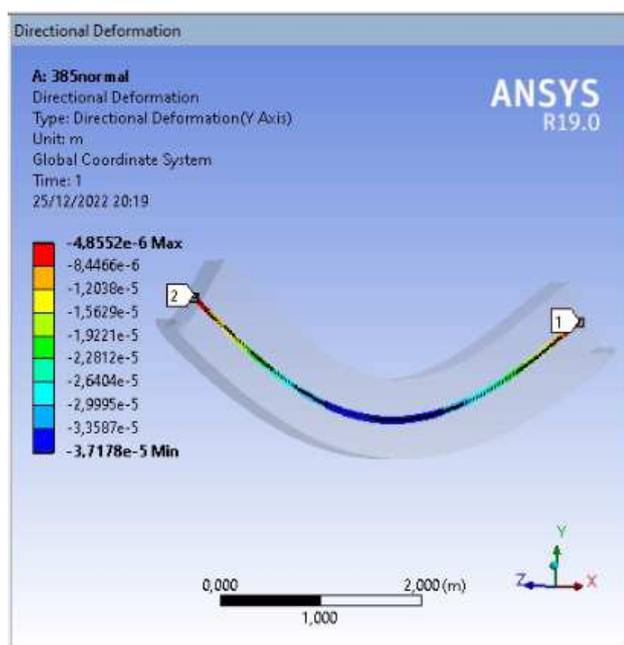


Figura 5.9 – Caminho e direção da deflexão.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Da Figura 5.9, nota-se que a deflexão máxima em valor absoluto é $3,7178 \times 10^{-5} m$. Tal resultado foi obtido com uma malha constituída por hexaedros com arestas medindo $0,01 m$. Dividindo o valor máximo obtido para a deflexão pelo comprimento da viga, obtém-se $7,4356 \times 10^{-6} m$, o qual é menor que $\frac{1}{300}$. Portanto, o regime da simulação é linear.

Como a variável em questão é a deflexão transversal, da simetria, a deflexão máxima localiza-se no meio da viga, ou seja, $z = 2,5 m$. Escolheu-se esta posição para obter a ordem fracionária α devido a sua relevância para evitar falhas, ou seja, devido ser

o ponto com maior sensibilidade da viga, é esperado que a maioria dos efeitos físicos sejam detectados com bem mais significância em tal ponto. Do ANSYS, a deflexão máxima é $3,7178 \times 10^{-5}m$. Então, o resultado é $\alpha = 4,1500$ para EBF e $\alpha = 4,0999$ para TEF, como esperado, quanto mais próximo α está de 4, menos influente é a ordem fracionária “necessária” para a convergência em relação ao problema sob investigação (modelado com precisão em ANSYS). Isso significa que o modelo TE, de ordem inteira original, é confirmado mais próximo do comportamento da referência, uma vez que o parâmetro α , que determina a convergência entre a flecha máxima do modelo fracionário TEF e o ANSYS, é menor que para o caso do modelo EB de ordem inteira original. Isso é coerente com o fato de que o modelo TE engloba os efeitos de cisalhamento, ao contrário de EB, e representa melhor o comportamento da estrutura real.

Empregando esses valores α de volta nas Equações (4.32) e (4.37), as soluções fracionárias particulares são obtidas. Deste ponto em diante, as equações finais para deflexões podem ser comparadas com a resposta ANSYS ao longo de toda a viga. A Tabela 5.1 mostra as respectivas deflexões máximas com seus correspondentes valores de α . Note também que a solução EBF incorpora a solução TE para $\alpha = 4,0455$.

Tabela 5.1 – Comparação entre as deflexões máximas.

$v_{AN} \times 10^{-5}m$	$v_{TE} \times 10^{-5}m$	α	$v_{EBF} \times 10^{-5}m$	$v_{TEF} \times 10^{-5}m$
3,7178	3,2639	4	3,0714	3,2639
	3,2639	4,0455	3,2639	
3,7178		4,1500	3,7178	
3,7178		4,0999		3,7178

O gráfico da Figura 5.10 revela o comportamento de deflexão das soluções EB, EBF, TE e TEF em relação ao ANSYS. Além disso, incluiu-se a razão de deflexão entre as soluções EBF e TE (neste caso, $\alpha = 4,0455$).

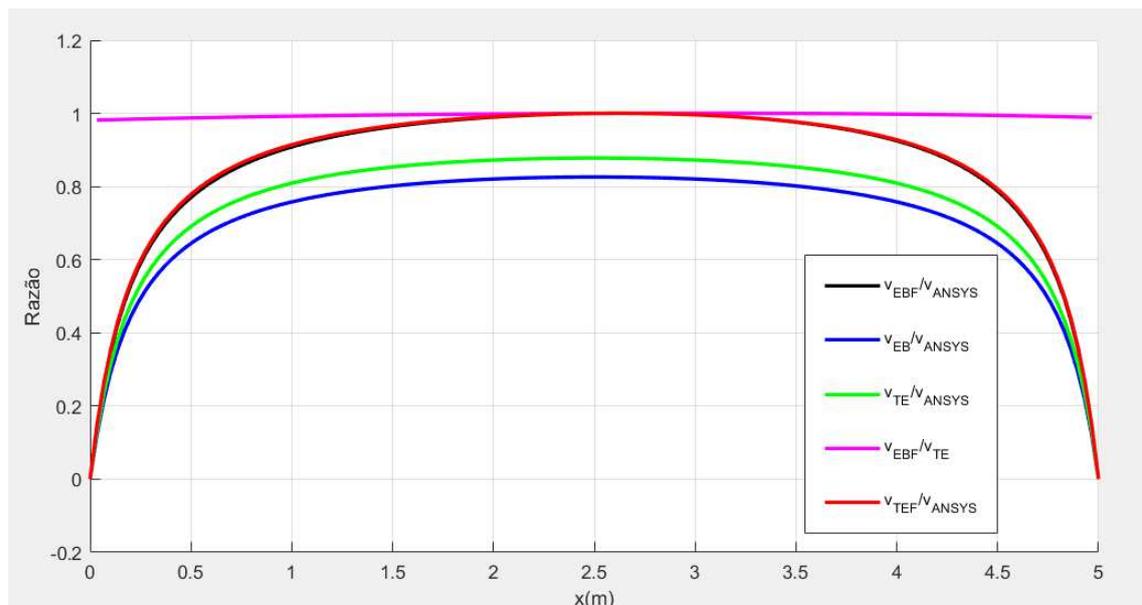


Figura 5.10 – Razão de deflexão para as soluções de ordem inteira e fracionária em relação à ANSYS e razão de deflexão para a solução EBF em relação à TE.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Todos os cinco gráficos apresentam diferenças progressivamente maiores do meio para cada extremidade, o que concorda com os efeitos de cisalhamento que levam a estrutura a uma maior deflexão transversal para acomodar essas deformações de cisalhamento. Por isso, no modelo ANSYS, quanto mais próximo da realidade, o desvio é maior; quase tanto quanto seria em um experimento, todas as relaxações estruturais tendem a ser contempladas no modelo numérico. Ainda no que diz respeito ao ANSYS, do pior para o melhor, estão os gráficos EB, TE, EBF e TEF, comportando-se conforme o esperado. EB carece de efeitos de cisalhamento e é por isso que é significativamente pior (longe de ANSYS) do que TE; por outro lado, ao comparar EBF e TEF, a consideração dos efeitos de cisalhamento original em TE ainda faz com que TEF prevaleça sobre EBF, mas muito ligeiramente. A aplicação mostra que a abordagem do cálculo fracionário pode alcançar um bom ajuste do modelo, não dependendo de maneira importante da precisão do modelo de ordem inteira original (pelo menos para esta aplicação). Além disso, da comparação entre EBF e TE, por ser o primeiro mais próximo do ANSYS, o EBF certamente detecta efeitos de cisalhamento originalmente ausentes na EB e, como os resultados sugerem, possivelmente outros efeitos físicos. Portanto, pode-se concluir que o propósito inicial foi atendido. A princípio, não se sabe quais efeitos possam ser identificados e avaliados, mas isso será o objeto de estudo a partir de agora.

Na próxima seção, é apresentado, com maior clareza, o primeiro fato relevante observado que é a identificação dos efeitos de cisalhamento pela solução EBF.

5.4 Identificando os efeitos de cisalhamento

Analisando as soluções fracionárias obtidas, o primeiro fato relevante a ser destacado é que a solução EBF identifica efeitos de cisalhamento, contemplados pela equação de Timoshenko-Ehrenfest (TE). Para caracterizar tal fato, foi implementada uma viga espessa, constituída de aço 1020 com dimensões $(b, h, L) = (0,3m; 1m; 5m)$, submetida a um carregamento distribuído com módulo dado por $q = 5 \times 10^4 N/m$. Determinando sua razão de aspecto, obtém-se $\left(\frac{L}{h} = 5\right)$. Portanto, os efeitos de cisalhamento influenciam significativamente na flexão, pois, em testes apresentados por [(SILVA, 2010) e (SILVA, 2019)], além das considerações, apresentadas na Subseção 4.2.1, é evidente que estes efeitos são consideráveis para a razão de aspecto menor que 10, o que é equivalente a um deslocamento máximo maior ou igual 2% em relação ao deslocamento máximo da flecha EB. Neste caso, tem-se que a diferença entre as deflexões máximas TE e EB é igual a 9,7916%. Portanto, os efeitos de cisalhamento são bem acentuados.

Confrontando os valores máximos das soluções analíticas EBF e TE, obtém-se que a flecha máxima EBF converge para a flecha máxima TE para $\alpha = 4,0708$ com erro relativo de ordem 10^{-4} . Levando tal α , na equação EBF generalizada, obtém-se a solução particular EBF para todo o intervalo que a viga está definida.

O gráfico da Figura 5.11 confronta a solução EBF para $\alpha = 4,0708$ com a TE.

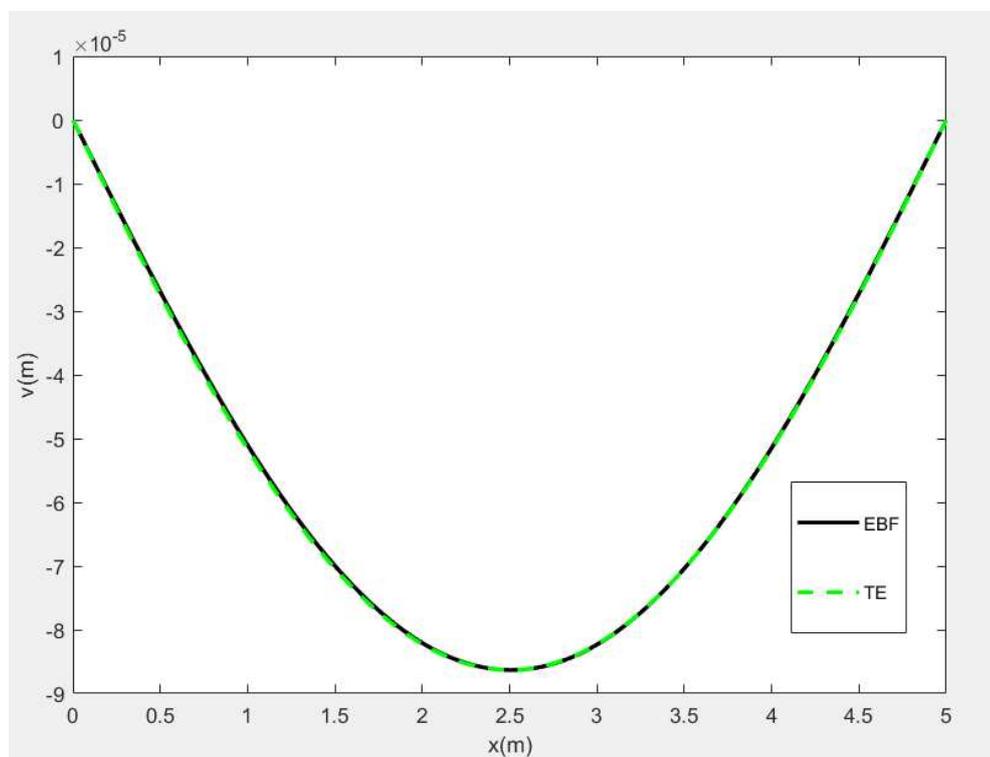


Figura 5.11 – Confronto entre as soluções EBF e TE.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Para evidenciar melhor este fato, determinou-se o erro relativo E_r entre as soluções EBF com $\alpha = 4,0708$ e TE definindo E_r como sendo

$$E_r = \frac{|v_{TE} - v_{EBF}|}{|v_{TE}|}, \quad (5.1)$$

em que v_{TE} é flecha correspondente à solução TE e v_{EBF} é a flecha EBF para $\alpha = 4,0708$.

No gráfico da Figura 5.12, é plotado o vetor erro relativo ao longo do domínio em que a viga está definida.

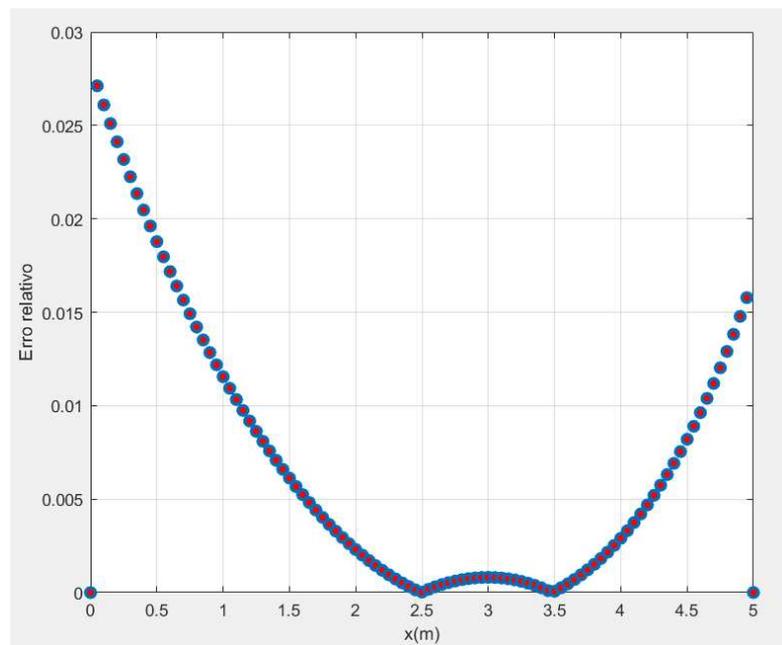


Figura 5.12 – Erro absoluto entre as soluções EBF e TE.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Analisando o gráfico da Figura 5.12, é evidente que o erro relativo máximo, apresentado no confronto entre as soluções EBF e TE, apresenta ordem menor ou igual que 10^{-2} , podendo destacar ainda que 20,13% dos pontos vizinhos a flecha máxima convergem, pois apresentam erro da ordem de 10^{-4} , compatível com o critério de convergência. Portanto, é notório que a solução EBF detecta os efeitos de cisalhamento, apresentando melhor qualidade na parte central da viga e quantificando tais efeitos pelo parâmetro $\alpha = 4,0708$. É importante destacar também que da análise do gráfico da Figura 5.12 é perceptível que a solução EBF apresenta assimetria.

Como já discutido na Seção 5.3, as soluções fracionárias EBF e TEF, através da liberdade do parâmetro α , conseguem melhor aproximação da deflexão transversal, extraída, da solução tridimensional ANSYS, quando comparadas às soluções inteiras EB e TE. Isto sugere que tais soluções podem detectar, como também avaliar, além do cisalhamento, como mostrado na Seção 5.4, outros efeitos que possam surgir quando é

considerada a variação das dimensões da viga ou o carregamento. O propósito da próxima seção é a investigação destes efeitos apresentando possível identificação e avaliação através da variação do parâmetro α presente nas referidas soluções.

5.5 As soluções EBF e TEF e a identificação de resultados via ANSYS

Em análise estática, as soluções tridimensionais de elasticidade via ANSYS, fornecem como saída deflexões, tensões, forças de reação e deformação para estruturas implementadas no *software* e submetidas a cargas estáticas. Em condições mais complexas, vários fenômenos físicos podem influenciar nestes resultados. Em uma viga simplesmente apoiada, espessa, submetida a um carregamento distribuído, restringindo-se apenas o regime linear, tem-se, por exemplo, a contribuição dos efeitos adicionais de momentos, cisalhamento e concentração de tensão nos apoios, nos resultados de saída, relacionados à deflexão. Tais efeitos não são discriminados separadamente pelo *software*. Portanto, o objetivo das próximas seções é usar as soluções fracionárias EBF e TEF para detectar, identificar, como também, caracterizar individualmente vários efeitos físicos que afetam a curva de deflexão em simulações tridimensionais via ANSYS. A detecção, identificação e avaliação são representadas, tanto pela convergência, como pelo desvio do parâmetro α em relação à ordem inteira.

A análise foi desenvolvida da seguinte forma: inicialmente, foi feita uma análise linear de uma viga delgada simples, empregando um procedimento, aqui proposto, para o isolamento dos efeitos de concentração de tensões, nas regiões da viga, próximas aos apoios, aqui denominado de “filtragem”. Em seguida, para tornar o modelo um pouco mais complexo, foi implementada uma viga espessa, considerando, ainda, a filtragem supracitada. No passo seguinte, analisou-se a viga espessa e com a presença dos efeitos de apoios. Finalmente, foi feita uma análise não linear de uma viga delgada submetida a um carregamento que ultrapassa muito ligeiramente os limites de elasticidade lineares, para os quais considerou-se a não linearidade geométrica, ativando na simulação de elasticidade tridimensional ANSYS o comando “Large deflection”.

5.5.1 O processo de filtragem

Dentre muitas simulações realizadas no ANSYS, comprovou-se que a concentração de tensão nos apoios influencia na deflexão transversal, apresentando bem mais intensidade em vigas espessas. Como o objetivo é identificar, separadamente, fenômenos usando para isso, o parâmetro α , incorporado nas soluções fracionárias EBF e TEF, adotando, como referência, simulações tridimensionais de elasticidade, via ANSYS, foram traçados modos de realizar estas simulações sem a influência dos efeitos dos apoios. Uma

das estratégias adotadas foi implementar uma viga de 25m, conforme representada na Figura 5.13.

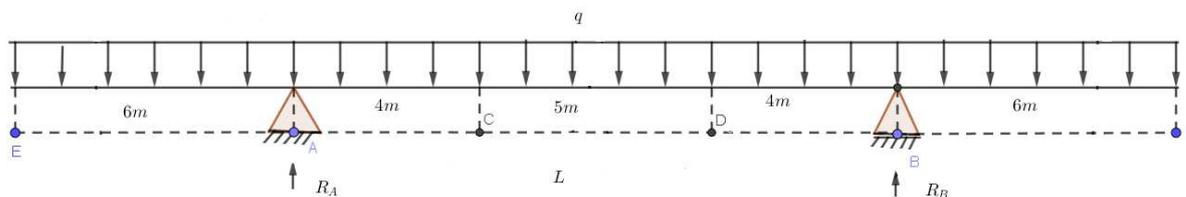


Figura 5.13 – Viga de 25 metros, simplesmente apoiada com carga distribuída.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

O diagrama do corpo livre, do processo de filtragem, é mostrado na Figura 5.14.

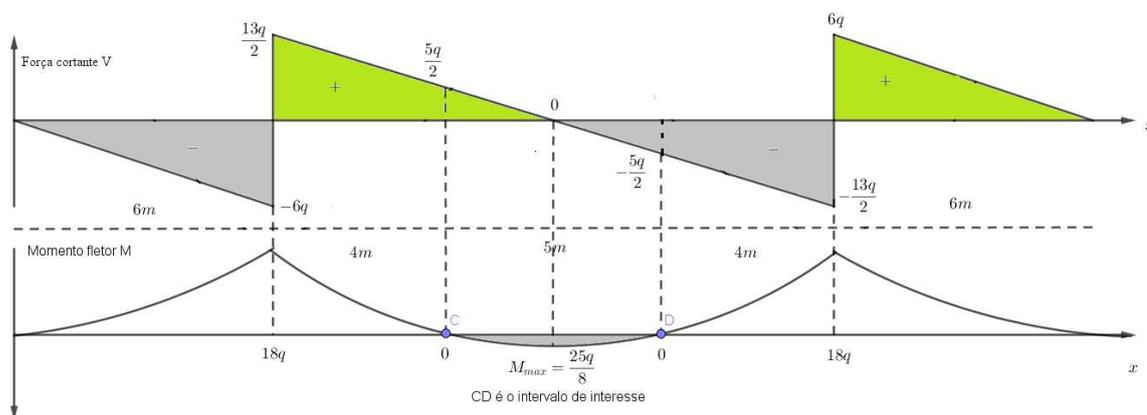


Figura 5.14 – Diagrama da força cortante e do momento fletor.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

A viga da Figura 5.13 é simplesmente apoiada com carga distribuída q em todo seu vão, apoios nos pontos A e B, cujas coordenadas são $6m$ e $19m$, respectivamente.

O objetivo é usar tal viga para realizar as simulações tridimensionais, via ANSYS, relacionadas à deflexão, sem a presença dos efeitos de apoios. A solução de interesse é a deflexão obtida nos 5 metros centrais, isto é, entre os pontos C e D da implementação do problema no ANSYS. Os pontos supracitados estão a $4m$ dos apoios (fixados nas arestas inferiores das seções extremas da viga), objetivando filtrar da deflexão, efeitos da concentração de tensão nos apoios. Este intervalo de interesse é usado para confrontar com as soluções analíticas fracionárias EBF e TEF, objetivando identificar

alguns efeitos analisados nas próximas discussões. Convém destacar que os intervalos, correspondentes aos segmentos $\overline{EA} = \overline{BF} = 6m$, são necessários para se obter momento fletor nulo nos pontos C e D e, daí, ser possível comparar a solução obtida da implementação do ANSYS com as soluções analíticas fracionárias.

Percebe-se facilmente que, tomando na Figura 5.13, $\overline{EA} = \overline{BF} = x$, obtém-se

$$R_A = R_B = \frac{q(13 + 2x)}{2}. \quad (5.2)$$

Considerando o momento fletor nulo no ponto C , tem-se

$$-4R_A + \frac{q(4 + x)^2}{2} = 0,$$

donde $x = 6$.

Vale destacar que o filtro apresenta bons resultados para filtragem dos efeitos de apoios em simulações lineares. Assim, para as simulações não lineares, os resíduos relacionados aos efeitos de apoios na flecha podem ser determinados, como segue,

$$v_r = v_{linear} - v_{lf}, \quad (5.3)$$

em que v_{lf} é a flecha obtida da simulação linear ANSYS com filtro.

5.5.2 Análise linear de uma viga delgada simples

Neste caso, implementou-se, no ANSYS, uma viga bem simples, isto é, delgada, em que os efeitos de cisalhamento e concentração de tensão nos apoios pouco interferem na deflexão. Nestas condições, optou-se pela viga delgada com dimensões $(b, h, L) = (0, 3m, 0, 1m, 5m)$. Como a razão de aspecto $\left(\frac{L}{h} = 50\right)$ é maior que 10, a influência dos efeitos de cisalhamento na deflexão é pouco relevante.

Visando filtrar da deflexão, os efeitos causados pela concentração de tensão nos apoios, implementou-se, no ANSYS, a viga com dimensões $(b, h, L) = (0, 3m, 0, 1m, 25m)$, submetendo-a à carga $q = 3 \times 10^2 N/m$. O gráfico da Figura 5.15 mostra a viga implementada destacando a carga distribuída, os apoios e o intervalo de solução que interessa.

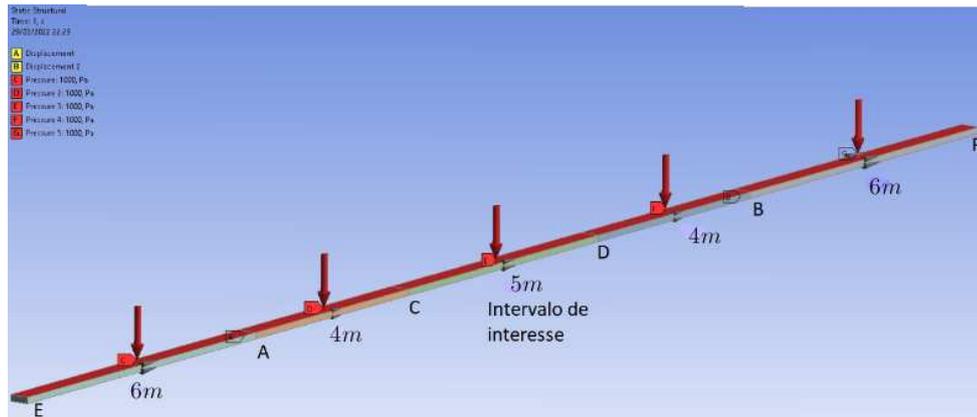


Figura 5.15 – Viga de 25m com destaque para o intervalo de interesse.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Realizada a simulação, extraiu-se a deflexão máxima no plano zy , considerando apenas o intervalo central de 5m e tomando caminho pelo eixo baricêntrico. A flecha máxima, obtida para a viga constituída por hexaedros de 0,01m de aresta, foi $v_{max} = 4,7190 \times 10^{-4}m$. Tomando a razão $\frac{v_{max}}{L} = 9,4380 \times 10^{-5}m$ e comparando com $\frac{1}{300}$, conclui-se que o regime da simulação é linear, pois $\frac{v_{max}}{L} = 9,4380 \times 10^{-5}m < \frac{1}{300}$.

Confrontando a solução analítica EB com a flecha transversal na direção y do plano zy , extraída apenas dos 5m centrais da implementação do ANSYS, conforme Figura 5.15, obtém-se o gráfico da Figura 5.16, em que: em (a), tem-se a comparação entre as referidas flechas; em (b), o erro relativo entre elas.

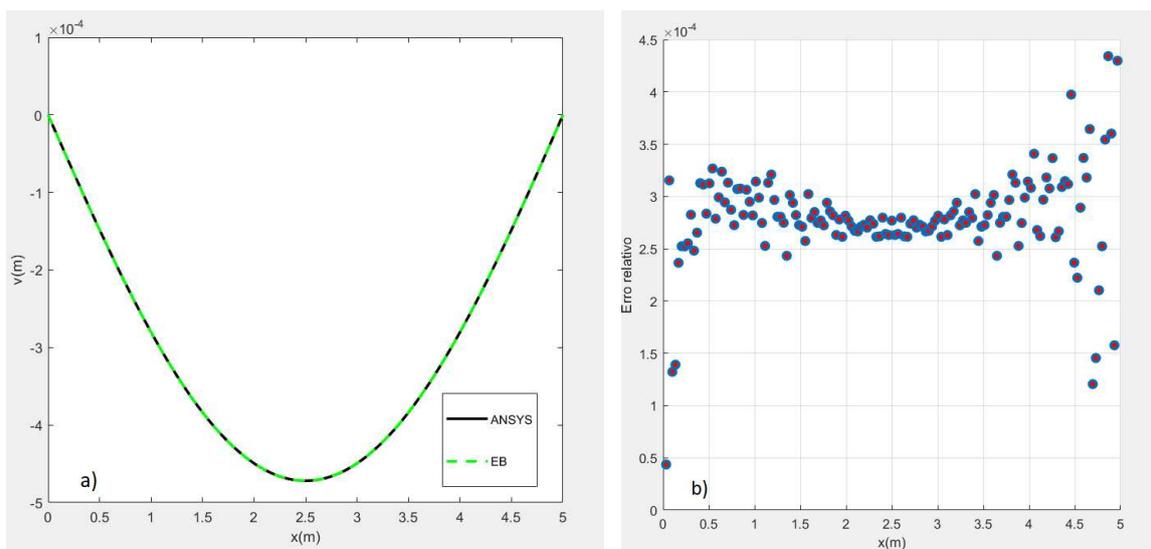


Figura 5.16 – a) Confronto entre EB e ANSYS e b) Erro relativo correspondente.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

O erro relativo destacado no gráfico da Figura 5.16 item (b) é definido por

$$E_r = \frac{|v_{EB} - v_{AN}|}{|v_{AN}|}, \quad (5.4)$$

em que v_{EB} é a flecha correspondente à solução EB e v_{AN} é a flecha ANSYS.

Analisando tal erro, percebe-se que o erro relativo máximo entre as curvas é da ordem de 10^{-4} , equivalente ao erro relativo, obtido entre as flechas para a malha convergida no gráfico da Figura 5.8. Portanto, considerando o critério de convergência, conclui-se que a solução ANSYS converge para a solução EB, isto é, a solução EBF com $\alpha = 4$.

É importante destacar que a deflexão ANSYS nos extremos $z = 0$ e $z = 5m$ foram nulas, pois tal solução foi obtida usando a filtragem. O problema é que estes pontos não são identificados pelo gráfico do erro relativo, pois neste caso tem-se a razão $\frac{0}{0}$.

Desta análise, pode-se destacar dois fatores relevantes: o primeiro é que a concentração de tensão nos apoios para o caso de viga delgada simples é bem menos intenso que no caso de viga espessa. Logo, sua contribuição para a variação da deflexão de vigas delgadas é menos relevante que nas vigas espessas. Este fato pode ser evidenciado tomando a viga com a representação das tensões principais máximas de tração, conforme Figura 5.17.

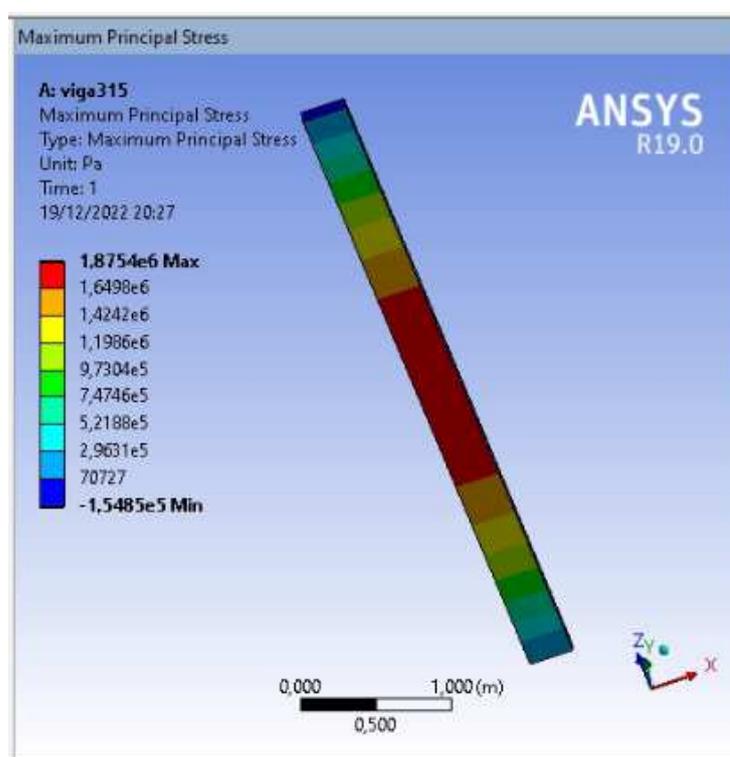


Figura 5.17 – Tensões normais de tração ou tensões máximas principais.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Observando o gráfico da Figura 5.17, percebe-se que as tensões apresentam maior variação na parte central da viga, e não nos apoios.

E, por fim, o segundo fator a ser destacado é que a referida análise deixou explícita a correspondência entre a deflexão transversal no plano zy na direção do eixo y , obtida do modelo de elasticidade tridimensional ANSYS e a deflexão transversal do modelo analítico EB (EBF para $\alpha = 4$). Portanto, nas próximas seções, a referida correspondência será usada para detectar, identificar e avaliar, separadamente, alguns efeitos presentes na deflexão das simulações tridimensionais, via ANSYS, através do parâmetro α , incorporado nos modelos analíticos EB e TE.

5.5.3 Análise linear de uma viga espessa com filtragem dos efeitos de apoios

Nesta seção, optou-se por um modelo mais complexo no ANSYS tomando a viga ainda com a presença do filtro, mas aumentando sua altura de forma a torná-la espessa. A viga selecionada foi a mesma da Subseção 5.5.2, mas variando a altura, de $h = 0,1m$ para $h = 0,8m$. Nestas condições, implementou-se, no ANSYS, a viga $(b, h, L) = (0,3m, 0,8m, 25m)$ submetida a um carregamento de módulo $q = 3 \times 10^4 N/m$.

Nota-se que, no intervalo de interesse, a viga considerada é espessa, pois sua razão de aspecto é $\left(\frac{L}{h} = 6,25\right)$, portanto, menor que 10. Neste caso, os efeitos de cisalhamento sobre a deflexão transversal da viga são bem mais significativos que no caso delgado.

A deflexão transversal do modelo de elasticidade tridimensional ANSYS foi tomada conforme feito na Subseção 5.5.2. Tal deflexão é equivalente à deflexão transversal no plano xv na direção de v do modelo analítico fracionário EBF.

A flecha máxima, obtida para a viga constituída por hexaedros de $0,01m$ de aresta, foi $v_{max} = 9,7483 \times 10^{-5}m$. Tomando a razão $\frac{v_{max}}{L} = 1,9497 \times 10^{-5}m$ e comparando com $\frac{1}{300}$, conclui-se que o regime da simulação é linear, pois $\frac{v_{max}}{L} = 1,9497 \times 10^{-5}m < \frac{1}{300}$.

Variando o valor de α , de forma a aproximar as flechas máximas EBF e ANSYS, obtém-se que as referidas flechas convergem para $\alpha = 4,0421$ com erro relativo da ordem de 10^{-6} . Levando o respectivo α na solução EBF generalizada e confrontando as respectivas curvas, obtém-se o gráfico da Figura 5.18, no qual, em (a), tem-se a comparação entre as flechas e, em (b), o erro relativo entre elas.

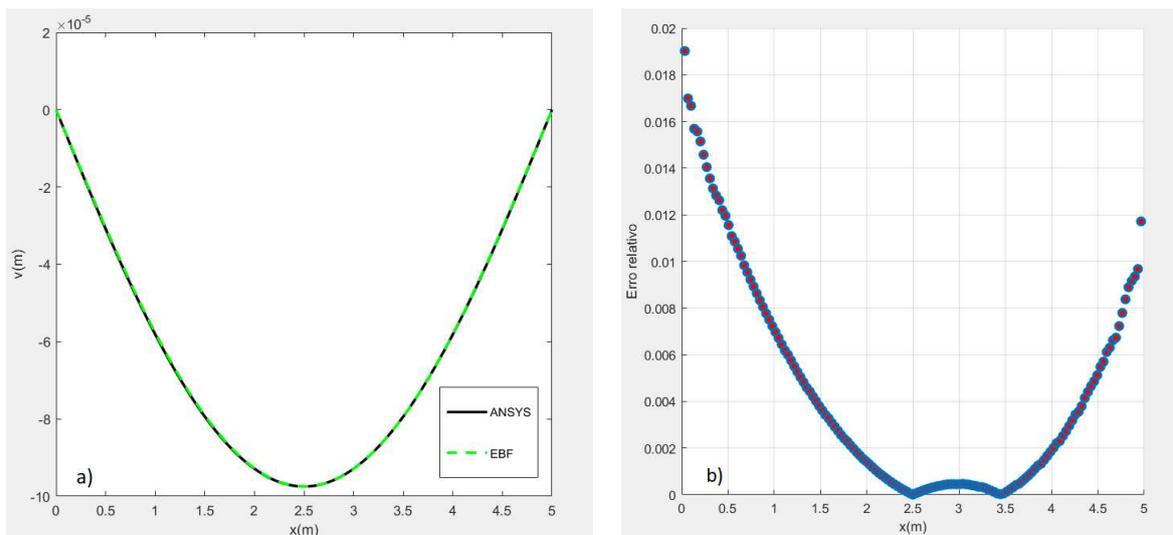


Figura 5.18 – a) Confronto entre EBF e ANSYS e b) Erro relativo correspondente.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

O erro relativo apresentado pelo gráfico Figura 5.18, item (b), é semelhante ao respectivo erro descrito pelo gráfico da Figura 5.12, no qual se representou o erro relativo entre a solução analítica EBF e a solução (TE). Nota-se que até a ordem de grandeza máxima do erro em ambos os casos é a mesma, isto é, 10^{-2} . Tal equivalência comprova que a flecha transversal extraída da simulação tridimensional ANSYS contém efeitos de cisalhamento. Agora, considerando o critério de convergência, pode-se afirmar, neste caso, que as referidas flechas convergem além do ponto de máximo em 32,88% dos pontos de sua vizinhança. Portanto, os efeitos de cisalhamento são detectados pelo parâmetro $\alpha = 4,0421$ da solução EBF em uma considerável quantidade de pontos na parte central da viga e avaliados pelo desvio apresentado por α em relação à ordem inteira.

5.5.4 Análise linear de uma viga espessa na presença dos efeitos de apoios

Nesta seção, foi escolhido um modelo bem mais complexo. Para isso, considerou-se uma viga espessa sem o processo de filtragem da concentração de tensão nos apoios. Nesta configuração de viga, as tensões presentes nos apoios são bem mais intensas que as tensões produzidas por momento fletores ou cisalhamento (TIMOSHENKO; GERE, 1983). Estas concentrações de tensões podem causar variação na flexão, mesmo quando a viga é submetida a baixas tensões (pequenas deflexões) (LI; LEE, 2015). O propósito da investigação, é justamente a variação da deflexão transversal causada pela concentração de tensão nos apoios, em uma simulação linear com conseqüente identificação, usando a variação do parâmetro α incorporado na solução TEF.

Neste caso, definiu-se uma viga espessa constituída de aço 1020, com dimensões $(b, h, L) = (0,3m, 0,8m, 5m)$, submetida a um carregamento $q = 6 \times 10^3 N/m$. Nota-se

que a viga é espessa, pois sua razão de aspecto é $\left(\frac{L}{h} = 6,25\right)$, portanto, menor que 10. Neste caso, a deflexão transversal, obtida da simulação linear tridimensional ANSYS, terá contribuição dos efeitos de momento, cisalhamento e da concentração de tensão nos apoios. Da viga implementada no ANSYS, selecionou-se a deflexão transversal, conforme feito nos casos anteriores. A Figura 5.19 mostra a representação da viga no ANSYS, destacando a direção e o caminho tomado para extrair a deflexão transversal.

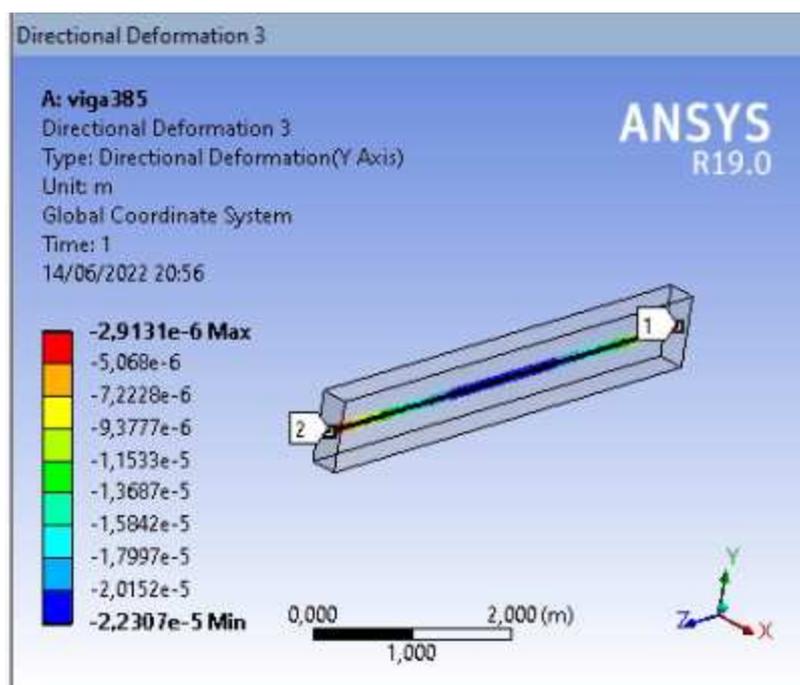


Figura 5.19 – Caminho e direção da deflexão.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

A deflexão tomada do modelo tridimensional, implementado no ANSYS, conforme destacado na Figura 5.19, é equivalente à deflexão no plano xv na direção de v do modelo analítico fracionário TEF. O valor absoluto da flecha máxima, obtida nesta simulação, cujos elementos escolhidos para a malha foram hexaedros com arestas medindo $0,01m$, é dada por $v_{max} = 2,2307 \times 10^{-5}m$.

Em seguida, obteve-se a razão $\frac{v_{max}}{L} = 4,4614 \times 10^{-6}$ e comparou-se com $\frac{1}{300}$. Desta comparação, concluiu-se que o regime da simulação é linear, pois $\frac{v_{max}}{L} = 4,4614 \times 10^{-6} < \frac{1}{300}$.

No passo seguinte das análises, variou-se o parâmetro α da solução analítica TEF visando aproximar sua flecha máxima à de flexão máxima extraída da implementação desenvolvida no ANSYS. Daí, concluiu-se que as referidas flechas convergem para $\alpha = 4,0999$ com erro relativo da ordem de 10^{-5} . Fazendo analogia destes resultados com as

análises da Subsecção 5.5.3, tem-se a comprovação de que há efeito, além do cisalhamento, contemplado na deflexão transversal da simulação tridimensional ANSYS. Tal efeito é a concentração de tensão nos apoios incorporados à deflexão, devido à ausência do filtro que não é explícito pela solução ANSYS, mas é identificado pelo parâmetro α da solução fracionária TEF e quantificado pelo desvio apresentado por α em relação à ordem inteira.

Levando o respectivo valor de α , na solução analítica TEF, obtém-se a solução generalizada para todo o intervalo em que a viga está definida. No gráfico da Figura 5.20, tem-se, em (a), o confronto entre as flechas TEF e ANSYS para $\alpha = 4,0999$ e, em (b), o erro relativo entre as referidas flechas.

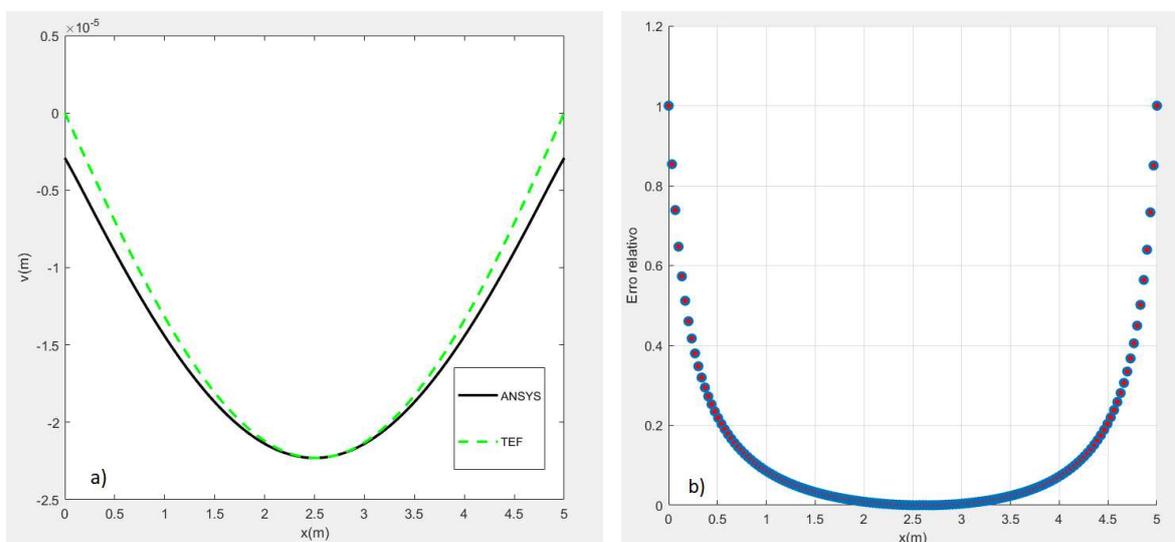


Figura 5.20 – a) Confronto entre TEF e ANSYS e b) Erro relativo correspondente.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

O erro relativo destacado no gráfico da Figura 5.20 item (b) é definido como segue

$$E_r = \frac{|v_{TEF} - v_{AN}|}{|v_{AN}|}, \quad (5.5)$$

em que v_{TEF} é flecha correspondente à solução TEF para $\alpha = 4,0999$ e v_{AN} é a flecha ANSYS.

Da análise de tal erro percebe-se que a solução TEF para $\alpha = 4,0999$ converge para a solução ANSYS em 8,0536% dos pontos, na parte central da viga, incluindo o ponto de flecha máxima. Como a aproximação foi induzida pelo máximo das deflexões, resolveu-se analisar este ajuste, usando a aproximação das curvas pelo método dos mínimos quadrados, onde todos os pontos da flecha obtida da simulação ANSYS, foram ajustados à solução TEF. O objetivo deste ajuste foi verificar se por tal método, a solução TEF consegue identificar mais pontos da solução ANSYS.

O melhor ajuste, pelo método dos mínimos quadrados entre as solução TEF e todos os 149 pontos, adotados como domínio da deflexão transversal via ANSYS é obtida para $\alpha = 4,1269$, e a representação gráfica corresponde à Figura 5.21.

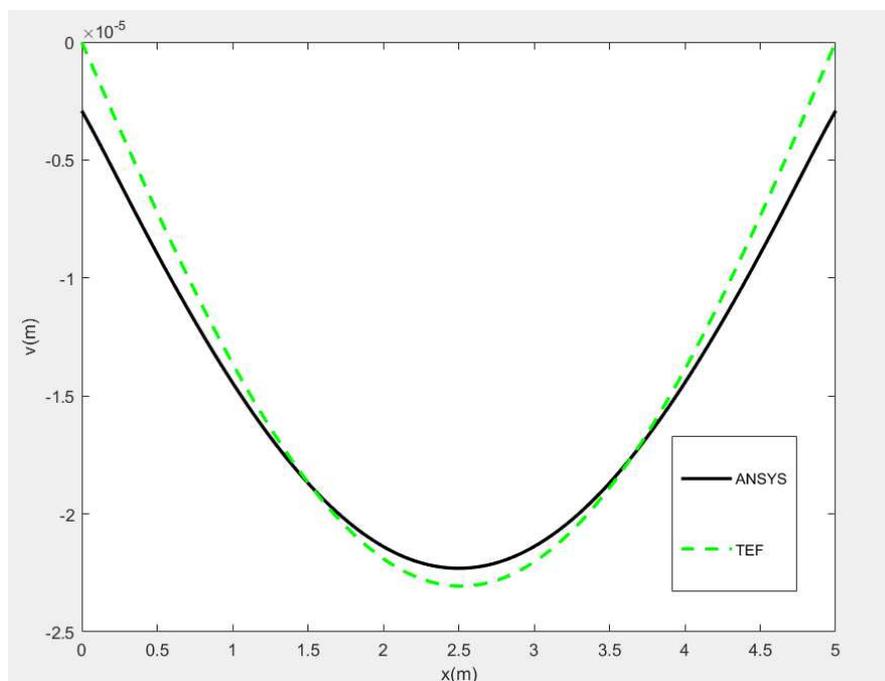


Figura 5.21 – Confronto entre as soluções TEF e ANSYS pelo método dos mínimos quadrados.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

É evidente do gráfico da Figura 5.21 que a solução TEF converge para a solução ANSYS em dois pontos. Assim, comparando os dois métodos usados, conclui-se que, para este caso, a aproximação pelo máximo é mais vantajosa, pois a convergência entre as soluções TEF e ANSYS, correspondente à identificação do efeito, ocorre em uma maior quantidade de pontos e, além disso, tal convergência ocorre na parte central da viga em que é observada a maior deflexão.

5.5.5 Análise não linear de uma viga delgada - grande deflexões

Quando uma determinada viga é submetida a grandes deflexões, é necessário ser bem criterioso no tipo de análise a ser realizada, pois, principalmente em vigas delgadas com a base b menor ou igual à altura h (conforme as análises apresentadas no Capítulo 6), aparecem forças no eixo baricêntrico que limitam a grande deflexão. Neste caso, as análises lineares não são convenientes, pois exageram na deflexão e, por isso, deve-se usar a análise não linear. O objetivo, nesta seção, é detectar, identificar e avaliar este fato usando a solução fracionária EBF.

Para análise do referido caso, optou-se pela mesma viga usada na Subseção 5.5.2, isto é, com dimensões $(b, h, L) = (0, 3m, 0, 1m, 5m)$, entretanto, submetido a um carregamento distribuído $q = 3 \times 10^5 N/m$. Foi realizada, inicialmente, a simulação linear para comprovar que tal carregamento causa grande deflexão.

Para isso, implementou-se a viga com filtro, realizou-se a simulação linear tridimensional no ANSYS e extraiu-se a deflexão máxima, como nas seções anteriores. A flecha máxima, obtida em valor absoluto para a viga constituída por hexaedros de $0,02m$ de aresta, foi $v_{max} = 0,4719m$. Tomando a razão $\frac{v_{max}}{L} = 0,0944$ e comparando com $\frac{1}{300}$, conclui-se que a análise linear não se aplica, ou seja, tem-se um problema de grandes deflexões, pois $\frac{v_{max}}{L} = 0,0944 > \frac{1}{300}$.

Nota-se que, comparando a deflexão transversal extraída da simulação tridimensional ANSYS com a solução EB, tais soluções irão convergir. Os gráficos (a) e (b), da Figura 5.22, mostram, respectivamente, o confronto entre a deflexão ANSYS e a deflexão EBF para $\alpha = 4$ e o respectivo erro relativo entre tais soluções.

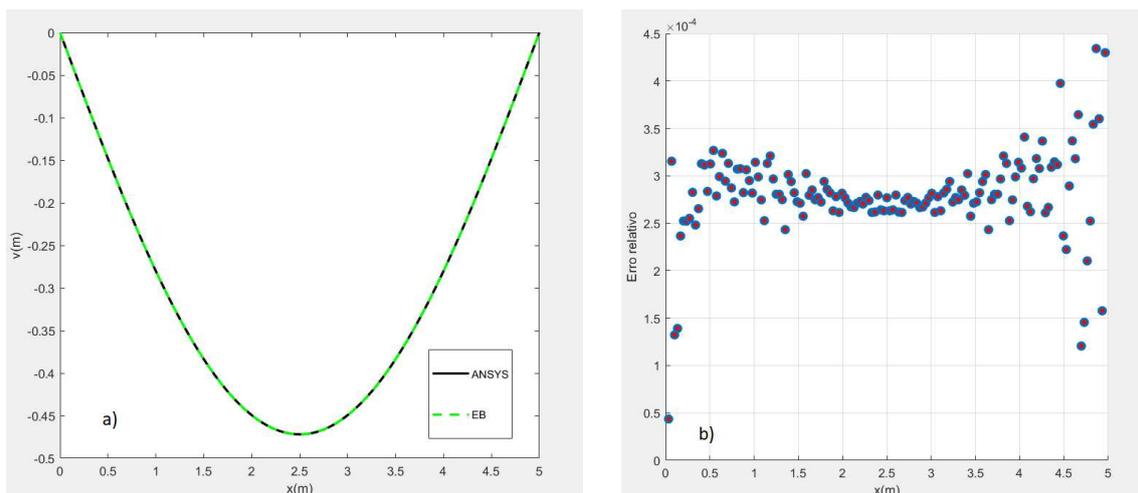


Figura 5.22 – a) Confronto entre EB e ANSYS e b) Erro relativo correspondente.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

O erro relativo, apresentado pelo gráfico da Figura 5.22 item (b) é determinado usando a Equação (5.4). Analisando tal erro é notável que ele apresenta mesma ordem do erro relativo apresentado no gráfico da Figura 5.8, comprovando, assim, a convergência entre as soluções ANSYS e EB (EBF para $\alpha = 4$).

É comprovado que os modelos lineares (EB e TE, neste caso) traduzem o comportamento dado pela teoria linear. E, como visto no gráfico da Figura 5.22 item (a), considerando vigas simples sem a influência dos efeitos de apoios, o modelo numérico e a previsão analítica convergem. Vale salientar que este resultado não representa a situação em análise, pois o problema é de grandes deflexões (não linear).

O fato é que foi feita uma análise linear de um problema não linear, confrontou-se com a solução existente na literatura e as soluções convergiram. Isso induz a concluir que os resultados obtidos são compatíveis, na verdade, o que não são, pois optou-se pela escolha do tipo de análise que não contempla a situação problema. Portanto, deve-se ter cuidado, sabendo sempre diferenciar problemas lineares dos não lineares e, conseqüentemente, selecionar o tipo de análise coerente com a situação problema que se deseja analisar. Em muitos casos como este, em que a viga está sendo submetida a um esforço elevado, existem circunstâncias ou fenômenos que podem exigir uma solução não linear para uma descrição coerente do fenômeno. Um comportamento estrutural não linear pode surgir devido à não linearidade geométrica (situação que é o objeto de análise), bem como mudanças nas condições de contornos da estrutura.

Para obter-se resultados coerentes para deflexão transversal, realizou-se a simulação não linear iterativa para o mesmo problema de viga estudado na análise linear. Neste caso, analisou-se a não linearidade geométrica que, segundo (LACERDA, 2014), é quando a estrutura sofre grandes variações na geometria inicial, causando a perda de validade das equações de equilíbrio, surgindo a necessidade de serem reformadas para cada mudança da geometria, fato que leva à perda da não linearidade entre as grandezas força e deslocamento.

Para soluções não lineares, o *software* ANSYS usa o método iterativo, denominado Newton-Raphson. O método inicia propondo uma deformada U_i para determinar o vetor carregamento F_r (resíduo) fora de equilíbrio, correspondente à diferença entre o carregamento aplicado F_a e o carregamento F_i , determinado pela deformada proposta U_i , isto é, $F_r = F_a - F_i$. Para que todas as condições de equilíbrio sejam satisfeitas, F_r tem que ser necessariamente nulo. Entretanto, é difícil conseguir $F_r = 0$, principalmente em problemas não lineares. Logo, é preciso definir um limite do quanto é aceitável para o vetor F_r . Como o método Newton-Raphson para soluções não lineares usa como metodologia as aproximações lineares, o *software* determina uma tolerância para o vetor carregamento F_r , satisfazendo condições que o favoreçam continuar o desenvolvimento da solução. A tolerância definida pelo *software* é F_r igual a 0,5% da força aplicada F_a , a qual é uma suposição boa o suficiente para o resíduo na maioria das soluções não lineares. Vale destacar que o usuário pode controlar este valor no *software* [(MADENCI; GUVEN, 2015) e (ARAUJO; FERREIRA; SCHUMANN, 2017)].

No ANSYS, existem quatro critérios de convergência no *solver*: força, deslocamento, momento e rotação. Já no *solver* ANSYS *Workbench*, que contempla o problema, são identificados dois critérios: a força e deslocamento. Optou-se, nesta análise, pelo método iterativo do *software* (método Newton-Raphson), escolhendo a força como critério de convergência.

Para a realização da análise, deve-se selecionar o ícone “Analysis settings”.

Neste ambiente, objetivando obter os resultados coerentes, foram colocados 100 passos iniciais, fixando um mínimo de 100 passos e um máximo de 1000. Esta configuração de passos visa determinar o número de pontos correspondentes que possibilita a construção gráfica adequada das curvas do tipo força versus deslocamento, por exemplo, uma vez que cada passo significa um ponto do gráfico. Além disso, a quantidade de passos fixada indica a quantidade de iterações mínimas para a convergência. Neste mesmo ambiente, acionou-se a opção “on” para o “Large deflection”, pois, fazendo isso, o *software* passa a resolver problemas não lineares de grandes deslocamentos, no qual a matriz de rigidez é recalculada ao decorrer da análise. Este fato evidencia o que se almeja na referida simulação, que é analisar grandes deflexões, visando à variação da rigidez geométrica.

Realizada a simulação não linear, extraiu-se o gráfico da convergência destacando o critério usado. No gráfico da Figura 5.23, tem-se a representação do processo iterativo convergido.

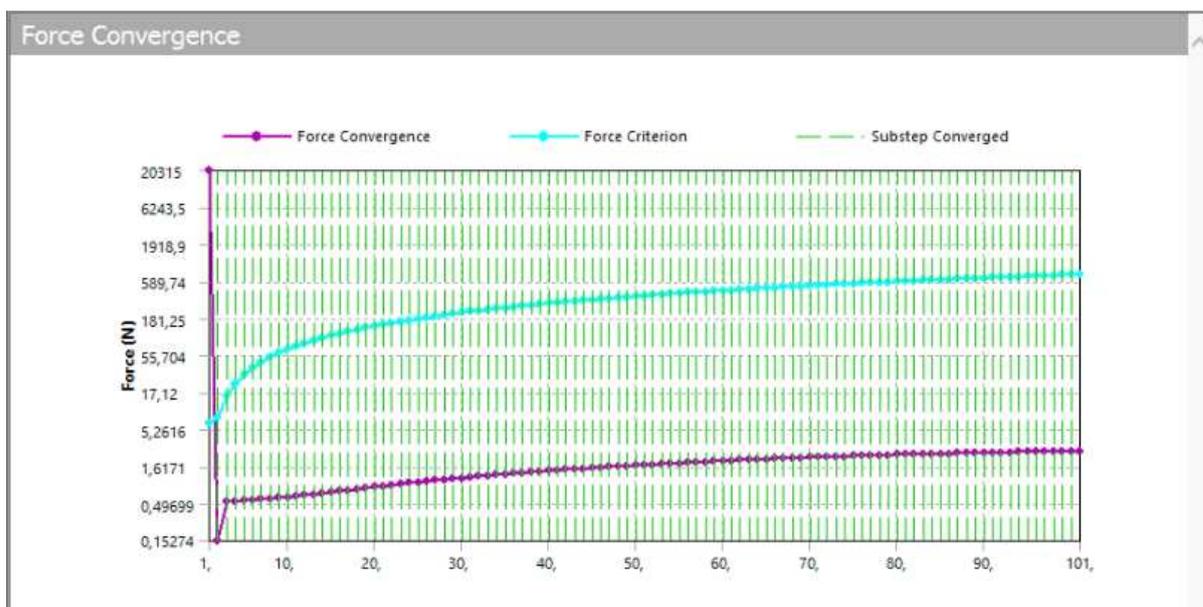


Figura 5.23 – Convergência da análise para o problema de grandes deflexões.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Os dados apresentados pelo gráfico da Figura 5.23 permitem concluir que a análise convergiu, pois o gráfico da “Force convergence” mantém-se abaixo da “Force criterion” (F_r), exceto no primeiro dos 101 passos do processo iterativo. Os dados relacionados a “Force convergence” são determinados por $F_a - K_G U_i$, em que $K_G U_i = F_i$ é a força calculada, usando a deformada U_i proposta pelo *software* na i -ésima iteração. Além disso, a convergência ocorreu com 101 iterações, bem próximo da quantidade mínima de iterações fixadas no *solver*.

A identificação da presença de não linearidade, na simulação não linear, pode ser feita analisando gráfico deslocamento versus força. O deslocamento que a componente analisada sofre durante a aplicação do carregamento é medido através da opção “Deformation Probe” do ANSYS, onde a superfície selecionada para medir este deslocamento é a mesma onde é aplicada o carregamento, isto é, a seção superior da viga. Por outro lado, para possibilitar a leitura da força, a opção disponibilizada pelo *software* ANSYS é a “Force Reaction”, que deve ser colocada no suporte fixo. Extraindo os dados relacionados, a força e o deslocamento da simulação tridimensional, via ANSYS, conforme supracitado e plotando, obtém-se o gráfico da Figura 5.24.

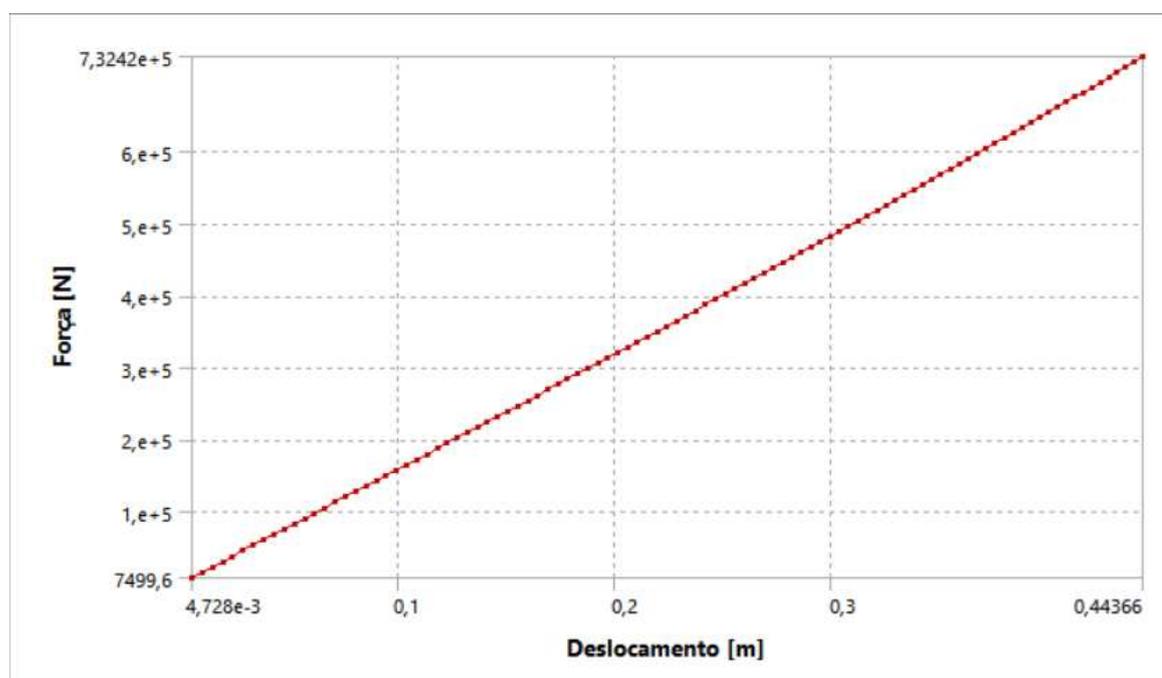


Figura 5.24 – Gráfico deslocamento versus força.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Visualmente, o gráfico da Figura 5.24 não deixa explícita a presença de não linearidades entre a força e o deslocamento, mas, como comprovado na análise da flecha máxima, o problema apresenta sinais iniciais de não linearidades. Para tentar evidenciar a não linearidade, optou-se por construir o gráfico da variação da rigidez $K_i = \frac{F_i}{U_i}$ em função do número mínimo de iterações i ($i = 1, 2, 3, \dots, 100$), exigidos ao *software* para realização da simulação, em que K_i , F_i e U_i representam, respectivamente, a rigidez, a força de reação no apoio fixo e o deslocamento em cada iteração i , onde os dados relacionados a F_i e U_i em cada iteração i são os mesmos usados na construção do gráfico da Figura 5.24. Fazendo isso, obtém-se o gráfico Figura 5.25.

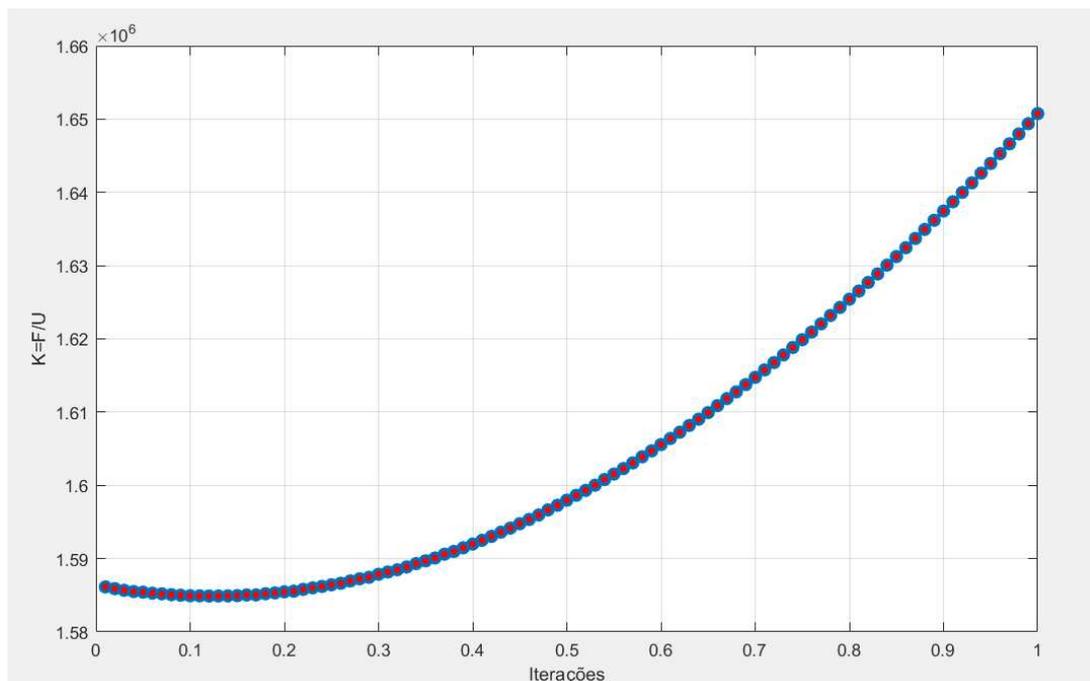


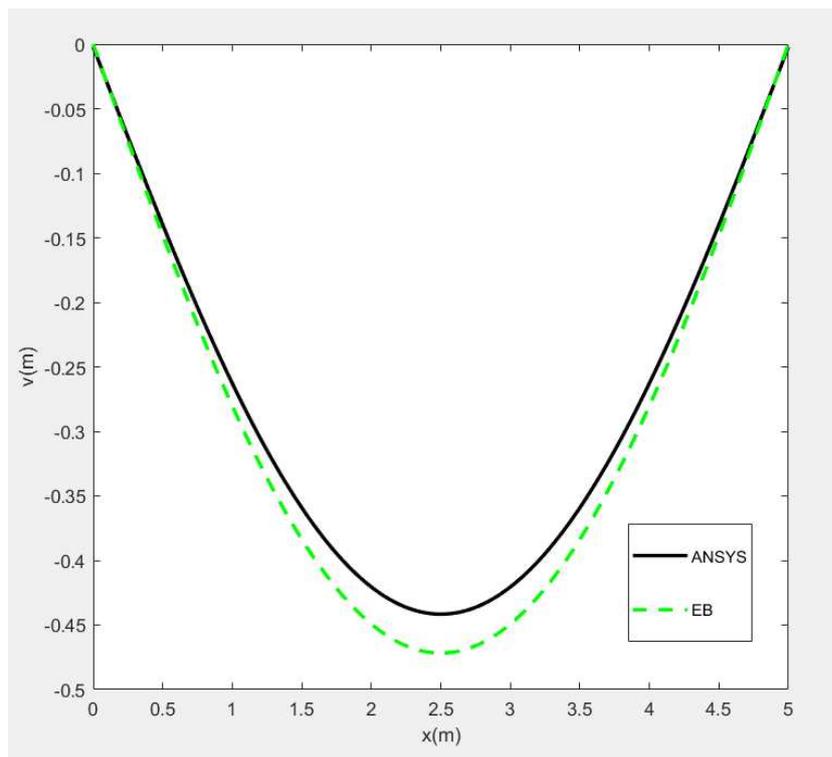
Figura 5.25 – Variação da rigidez em função das iterações.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Observando os dados do gráfico da Figura 5.25, percebe-se um ligeiro aumento na rigidez geométrica, pois foram avaliados grandes deslocamentos na simulação não linear. Tal fato comprova a não linearidade, mas não deixa explícito qual(is) fator(es) contribuem para o respectivo efeito.

Devido ao ligeiro aumento da rigidez geométrica, pode-se descartar que este efeito não é causado por flambagem, pois, caso fosse, a rigidez diminuiria. Por outro lado, não é por sinais iniciais de plasticidade, pois a simulação não foi alimentada com dados para a avaliação de efeitos plásticos. Descartada a possibilidade da ocorrência de flambagem, plasticidade, visando explicitar tal efeito separadamente e identificá-lo usando a solução analítica EBF, extraiu-se, da simulação não linear ANSYS, a deflexão transversal, conforme feito nas seções anteriores. Em seguida, foram filtrados, de tal flecha, os efeitos causados pela concentração de tensão nos apoios, neste caso, determinados, conforme Equação (5.3).

Feito isso, comparou-se a deflexão resultante com a solução EB, por a viga ser delgada. No gráfico da Figura 5.26, tem-se a comparação entre as respectivas flechas.



Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Figura 5.26 – Comparação entre as flechas ANSYS e EB após a filtragem.

Analisando o gráfico da Figura 5.26, percebe-se que a flecha ANSYS é menor que a flecha EB em praticamente todo intervalo em que a viga está definida. Logo, o efeito não linear continua presente, mesmo após ser filtrada a contribuição da concentração de tensão nos apoios da flecha ANSYS. Logo, tal efeito também não é devido à concentração de tensão nos apoios.

Pesquisando sobre tal fenômeno contabilizado na respectiva simulação não linear, foram encontradas em (ALVES, 2012) simulações numéricas semelhantes e, segundo a referência, este efeito é consequência das forças que surgem no eixo baricêntrico, decorrentes da tendência de aproximação das extremidades da viga por estar sendo submetida a cargas que provocam grandes deflexões. Devido a não linearidade do fenômeno, as forças axiais que surgem não são proporcionais aos deslocamentos, logo há uma variação na rigidez. Neste caso, a variação é na rigidez geométrica que está aumentando, pois estas forças axiais causam o enrijecimento com maior intensidade na parte central da viga, conforme explicita (SORIANO, 2009). Esse efeito é contabilizado pela rigidez geométrica na simulação não linear, pelo método dos elementos finitos, consequentemente, tem-se uma deflexão menor que a apresentada pela teoria linear.

Finalmente, tem-se que a simulação não linear contabiliza o efeito de forças axiais que surgem no eixo baricêntrico das vigas submetidas a elevados carregamentos.

Como foi frisado nos resultados estudados nas subseções anteriores, o *software* não explicita este efeito. Portanto, usou-se a liberdade do parâmetro α , presente na solução fracionária EBF, para identificá-lo e avaliá-lo separadamente, como feito nas subseções anteriores. Para isso, variou-se o parâmetro α da solução EBF, de modo a atingir a melhor aproximação possível entre as flechas máximas EBF e ANSYS filtrada. De tal procedimento, obtém-se que as flechas máximas EBF e ANSYS convergem para $\alpha = 3,9527$ com erro relativo apresentando ordem 10^{-4} .

Levando o referido valor de α , na solução generalizada EBF, encontrou-se a solução fracionária com a respectiva flecha máxima, incorporando o efeito de forças axiais que surgem no eixo baricêntrico sobre a deflexão ANSYS. Por fim, comparou-se tal solução com a solução ANSYS em todo o intervalo em que a viga está definida. O gráfico da Figura 5.27 representa a comparação e o erro relativo entre as soluções EBF e ANSYS em (a) e (b), respectivamente.

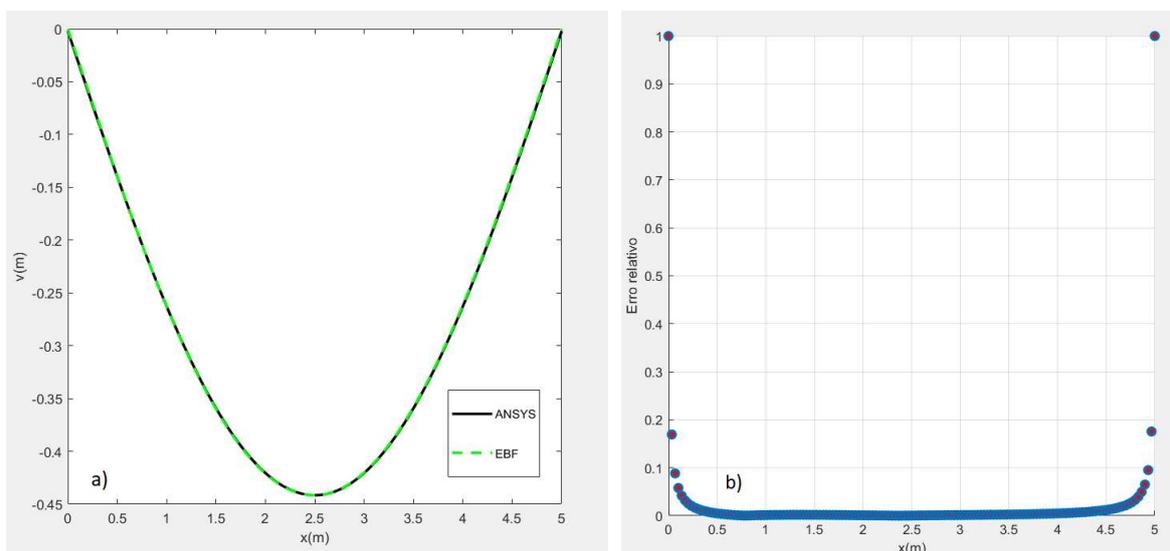


Figura 5.27 – Flechas EBF e ANSYS: a) Confronto e b) Erro relativo.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

O erro relativo destacado no gráfico da Figura 5.27 item (b) é definido por

$$E_r = \frac{|v_{EBF} - v_{AN}|}{|v_{AN}|}, \quad (5.6)$$

em que v_{EBF} é flecha correspondente à solução EBF para $\alpha = 3,9527$ e v_{AN} é a flecha ANSYS.

Analisando tal erro e considerando o critério de convergência entre as flechas para a malha convergida, percebe-se que a flecha EBF converge para a flecha ANSYS em 22,81% dos pontos do domínio, sendo que 18,12% estão concentrados na vizinhança da flecha máxima, enquanto 4,69% concentram-se próximo à extremidade $x = 0$ da

flecha máxima. Tal fato não fica explícito no gráfico do erro relativo, pois $v_{AN}(0) \neq 0$ e $v_{AN}(5) \neq 0$. Isso ocorreu porque a flecha ANSYS foi obtida tomando como caminho o eixo baricêntrico, enquanto os apoios foram fixos nas arestas inferiores das seções extremas. Além disso, a filtragem da concentração de tensão nos apoios foi feita usando a Equação (5.3). Se forem desconsiderados o erro relativo nos pontos extremos, a assimetria fica visível, como pode ser observado no gráfico da Figura 5.28.

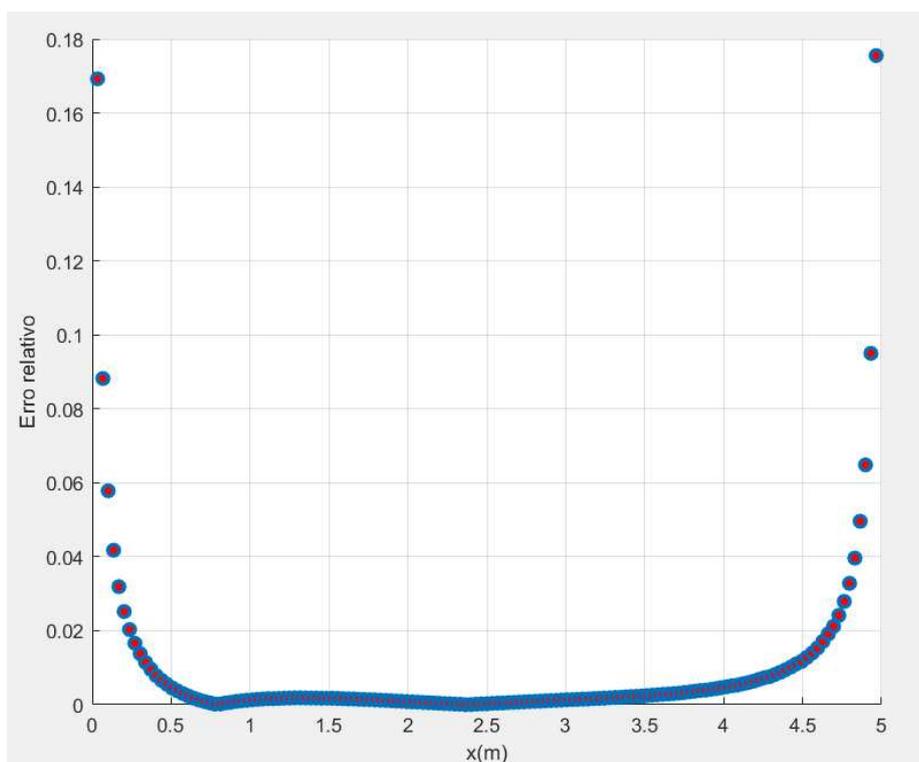


Figura 5.28 – Comparação entre as flechas ANSYS e EB após a filtragem.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Portanto, para $\alpha = 3,9527$, a flecha EBF detecta efeito de forças axiais que surgem no eixo baricêntrico, em dois intervalos do domínio a saber: na vizinhança da flecha máxima e próximo à extremidade $x = 0$. Além disso, tal efeito é avaliado pelo desvio apresentado por α em relação à ordem inteira.

Desta análise, pode-se concluir que as soluções EBF e TEF, através da variação do parâmetro α , tornam-se boas ferramentas para identificar, com precisão, efeitos não lineares na fronteira entre os regimes lineares e não lineares. Vale destacar que a continuidade do parâmetro α , em seu intervalo de liberdade, tem fundamental importância para a obtenção da referida precisão dos resultados.

Este capítulo é finalizado com algumas ponderações relacionadas às soluções fracionárias. Tais soluções para o parâmetro α , diferente da ordem inteira, apresentam certas características que diferem da realidade, como a assimetria, por exemplo. A assimetria

surge por ser adotado no modelo as mesmas condições de contornos do caso clássico, fato que não pode ser alterado, pois muda completamente a natureza do problema analisado. Diante disso, pode-se concluir que tais modelos não apresentam vantagens em relação aos modelos clássicos EB e TE no quesito interpretação (contemplação) de fenômenos físicos. Um fato fundamental a ser destacado é que os modelos fracionários propostos a partir de modelo clássico EB não apresentam perdas em relação ao referido modelo, pois são uma generalização do mesmo. Então, quais seriam os ganhos apresentados pelos modelos fracionários quando comparados aos modelos clássicos EB e TE? A resposta para tal questionamento surge naturalmente das conclusões obtidas nas análises feitas neste capítulo. As referidas análises permitiram destacar dois fatores relevantes, que são a identificação e a possibilidade de avaliação da magnitude de fenômenos físicos não contemplados pelos modelos EB e TE e, além disso, não explícitos pela referência adotada (modelo de elasticidade tridimensional via ANSYS). A avaliação vem da quantificação de proporcionalidade direta pelo α do desvio que determinado efeito apresenta em relação à ordem inteira. Por outro lado, a liberdade do parâmetro α permite obter a convergência entre ponto(s) da solução obtida pela referência e as soluções fracionárias. Nas análises realizadas até agora induziu-se tal convergência através da aproximação entre as flechas máximas, acarretando, conseqüentemente, na convergência em pontos da vizinhança destas flechas, podendo assim, serem determinados intervalos de convergência entre as referidas flechas. Esta convergência representa o segundo fator a ser destacado, que é a detecção de cada efeito pelo parâmetro fracionário incorporado às soluções EB e TE.

De forma geral, pode-se destacar que, das análises feitas até agora, ficou evidenciado a possível contribuição das soluções fracionárias na identificação e quantificação de efeitos não explícitos pelo ANSYS em seus resultados de saída (deflexão transversal) e nem contemplados pelas soluções EB e TE.

Capítulo 6

Detecção e avaliação de flambagem via TEF

Neste capítulo, são apresentados conceitos gerais sobre flambagem lateral, destacando alguns dos primeiros trabalhos desenvolvidos sobre o tema. Em seguida, é feito um estudo abordando vigas de diversas dimensões com o propósito de identificar, dentro deste conjunto de vigas analisadas, aquelas que são suscetíveis à flambagem, pois como visto na Subseção 5.5.5 do Capítulo 5, quando considera não linearidade como sendo a variação da rigidez geométrica do material, existem vigas que são suscetíveis apenas ao fenômeno de grandes deflexões. Por fim, é enfatizado o estudo de flambagem lateral com torção em uma viga prismática, de seção retangular, simplesmente apoiada, submetida a uma carga compressiva distribuída sobre a área da região retangular superior da viga.

6.1 Flambagem lateral: conceitos e primeiros estudos

Os primeiros estudos relacionados ao fenômeno físico de flambagem foram desenvolvidos por Leonhard Euler (1707 – 1783) por volta de 1759. Neste estudo, ele analisou a flambagem elástica linear em colunas submetidas a forças axiais, no qual propôs o primeiro modelo analítico que relacionava o comprimento da estrutura a sua capacidade portante ([FRUCHTENGARTEN, 2005](#)). Já as pesquisas iniciais do problema de instabilidade, relacionado à flambagem de viga com seções transversais retangulares, foram publicadas pela primeira vez, em 1889, por Ludwig Prandtl e Anthony Michell, em trabalhos independentes um do outro. É importante destacar também que a primeira análise da flambagem lateral de vigas de aço de paredes finas carregadas horizontalmente, o qual é semelhante à estrutura utilizada neste estudo, foi apresentada por S.P. Timoshenko em 1905 [[REIS, 1996](#)] e [[KALA, 2013](#)].

Estruturas tais como vigas ou colunas podem ter a sua função comprometida devida ao escoamento ou ruptura, falhas estas que podem ocorrer de forma gradual, em

condições de estabilidade, ou repentina, no caso de flambagem. Para ocorrer falha por escoamento em uma viga, por exemplo, os efeitos de cisalhamento devem ser relevantes, pois são os efeitos responsáveis por este tipo de falha. Quando os efeitos de cisalhamento não são expressivos, a viga possui maior probabilidade de falhar por flambagem. Logo, a flambagem ocorre com mais facilidade em vigas longas, pois, neste tipo de estrutura, os efeitos de cisalhamento não apresentam expressividade e, conseqüentemente, é menos previsível a ocorrência de falha por escoamento.

Em análise de estruturas, as pesquisas relacionadas à estabilidade se aplicam aos casos em que a estrutura é submetida a tensões de compressão. Conseqüentemente, os fenômenos relacionados a conceitos de estabilidade são classificados por instabilidade estrutural e denominados flambagem estrutural, devido à perda da configuração inicial pela deformação (SILVA, 2006). Logo, pode-se afirmar que a flambagem estrutural é um fenômeno de deflexão transversal em uma viga ou coluna, causado por um carregamento compressivo, uniaxial, tal que esta deflexão é perpendicular à direção do carregamento, ou seja, é uma deflexão lateral que caracteriza uma falha súbita na estrutura [(ALVES, 2012), (MAIA, 2016) e (SILVA, 2017)].

Como destacado anteriormente, as vigas longas são susceptíveis a este fenômeno. Para classificar a viga como longa ou curta, pode-se utilizar o fator denominado índice de esbeltez.

O índice de esbeltez de uma viga é definido como sendo

$$S_r = \frac{L}{r}, \quad (6.1)$$

em que L é o comprimento da viga e r é o raio de giração. Tem-se que o raio de giração é dado por

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad (6.2)$$

em que I é o menor momento de inércia da seção transversal de área A .

Neste estudo, a seção transversal da viga é retangular, então $I = \frac{bh^3}{12}$ e $A = bh$. Logo, de (6.2) e (6.1), obtém-se seu índice de esbeltez, como segue

$$S_r = 2\sqrt{3}\frac{L}{h}, \quad (6.3)$$

em que $\left(\frac{L}{h}\right)$ é a razão de aspecto da viga.

As vigas são consideradas esbeltas quando seu índice de esbeltez é maior ou igual a 10. Nestes casos, a estrutura pode ser caracterizada como suscetível à flambagem [(NORTON, 2013) e (HAUBERT, 2017)]. As vigas com índice de esbeltez menor que 10 podem ser classificadas como vigas curtas, conseqüentemente, a presença de cisalhamento é considerável, portanto, a tendência deste tipo de viga é falhar por escoamento.

O fenômeno de flambagem pode ser classificado de dois modos: a flambagem com bifurcação e a flambagem por carga limite [(CHEN; LUI, 1987), (GALAMBOS, 1998) e (PASSOS, 2014)]. No primeiro caso, há uma mudança na direção da deflexão, por exemplo, da direção vertical para uma direção lateral. A carga que provoca tal fenômeno é denominada carga crítica. No segundo caso, a estrutura atinge o ponto de carga máxima sem sofrer uma bifurcação anterior. Estes efeitos são característicos dos arcos abatidos (PASSOS, 2014).

Pode-se encontrar, na literatura, outras classificações: pela magnitude do campo de deslocamento, que é classificada como flambagem geometricamente linear ou geometricamente não linear; pela natureza da ação, como estática ou dinâmica; e, pelo comportamento do material, como elástica, ou inelástica [(NASCHIE; STRESS, 1990) e (PASSOS, 2014)].

Muitos critérios adotados para a garantia da segurança em estruturas são baseados na resistência e rigidez do material. Devido à instabilidade por flambagem, a estrutura pode ser caracterizada como insegura mesmo antes de atingir seu limite de resistência e rigidez. Logo, é importante caracterizar a instabilidade por flambagem estática e dinâmica da estrutura. A forma mais simples de instabilidade de uma estrutura é a flambagem linear elástica por bifurcação. É conveniente destacar a importância de desenvolver estudos sobre tal fenômeno, pois, é partindo de fatos simples, que pode-se entender o comportamento mais complexo das estruturas.

6.1.1 Vigas sob altas tensões

Com o propósito de analisar a flambagem lateral com torção (FLT) em viga com seção transversal retangular, simplesmente apoiada com carga distribuída ao longo de seu eixo longitudinal, usando o modelo de elasticidade tridimensional ANSYS, é preciso avaliar, no *software*, apenas a não linearidade geométrica a qual é responsável por ocasionar o fenômeno de flambagem. Para isso, deve-se ativar, no *software*, o ambiente “Large deflection”.

Como neste caso, as seções da viga são simétricas em relação ao plano neutro, o centro de flexão coincide com o centro de torção, fator que dificulta a ocorrência da FLT. Logo, para que o *software* detecte o fenômeno de flambagem deve-se considerar na implementação algo que simule uma imperfeição geométrica na viga. Neste caso, foi considerada uma assimetria na distribuição do carregamento, isto é, uma excentricidade da linha de ação das cargas em relação ao centro de torção, fazendo com que o mesmo não coincida com o centroide da seção transversal. Portanto, em todas as vigas analisadas aqui, a carga foi distribuída na aresta da seção superior da viga ao longo do seu comprimento longitudinal.

Mesmo implementando a viga no ANSYS, considerando a assimetria no carregamento em relação ao centro de torção, foram diagnosticados, para os tipos de vigas analisadas no trabalho, dois fenômenos físicos causados pela não linearidade geométrica que foram: a flambagem lateral por torção e o fenômeno causado pelas forças que surgem no eixo baricêntrico, decorrentes da tendência de aproximação das extremidades da viga, por estar sendo submetida a cargas que provocam grandes deflexões. Das análises feitas, concluiu-se que as vigas altas ($h > b$) são suscetíveis a FLT, enquanto as vigas baixas ($h \leq b$) sofrem apenas o fenômeno de grandes deflexões supracitado.

A diferença entre os dois fenômenos pode ser caracterizada na simulação não linear ANSYS pela variação da rigidez ou pelas tensões máximas de compressão. Aqui, a análise foi feita usando a variação da rigidez em função das iterações realizadas pelo *software* durante o desenvolvimento da simulação não linear. No fenômeno de flambagem, a rigidez decresce durante o desenvolvimento da simulação não linear, enquanto no fenômeno de grandes deflexões, a rigidez cresce. A seguir, é apresentada análise da variação da rigidez em uma série de vigas, a qual foi realizada objetivando determinar as dimensões adequadas da viga favorável a cada um dos fenômenos citados. Um importante fato diagnosticado é que a medida que decresce a altura da viga, o fenômeno de flambagem vai convergindo para o fenômeno de grandes deflexões e vice e versa.

A análise foi dividida em dois casos: no primeiro, fixou-se a altura e variou-se a base e, no segundo, fixou-se a base e variou-se a altura. Em todos os casos, a carga de flambagem foi estimada pelo método do autovalor.

- 1º) Fixando a altura $h = 0,1m$ e aumentando a base a partir de $b = 0,01m$.

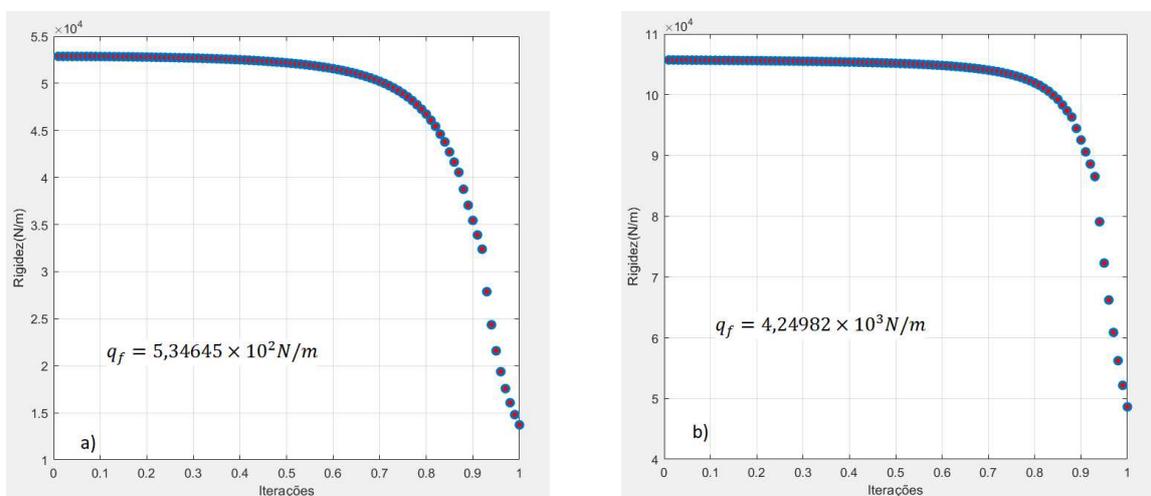


Figura 6.1 – Variação da rigidez: a) $b = 0,01m$ $h = 0,1m$ e b) $b = 0,02m$ e $h = 0,1m$.

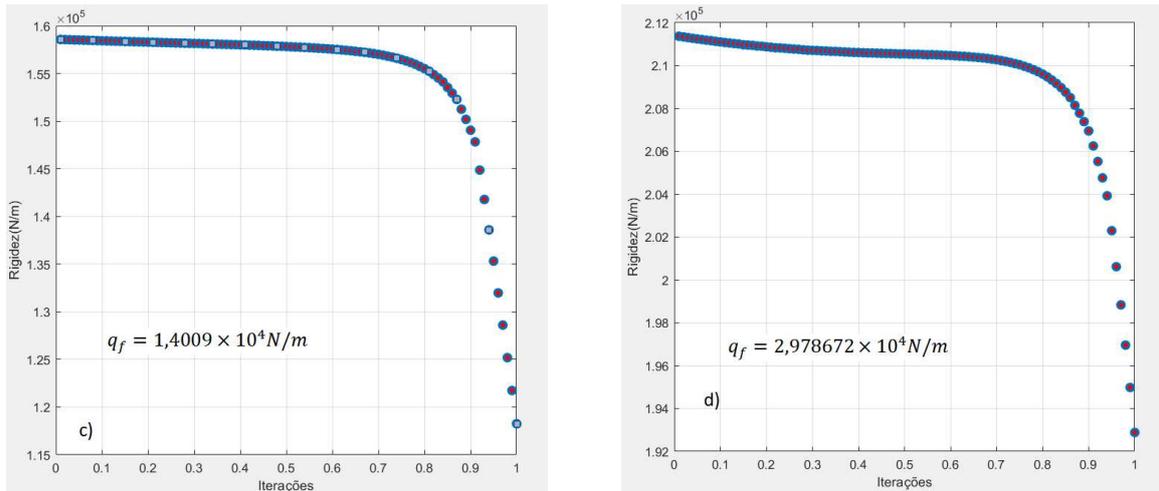


Figura 6.2 – Variação da rigidez: c) $b = 0,03\text{m}$ $h = 0,1\text{m}$ e d) $b = 0,04\text{m}$ e $h = 0,1\text{m}$.

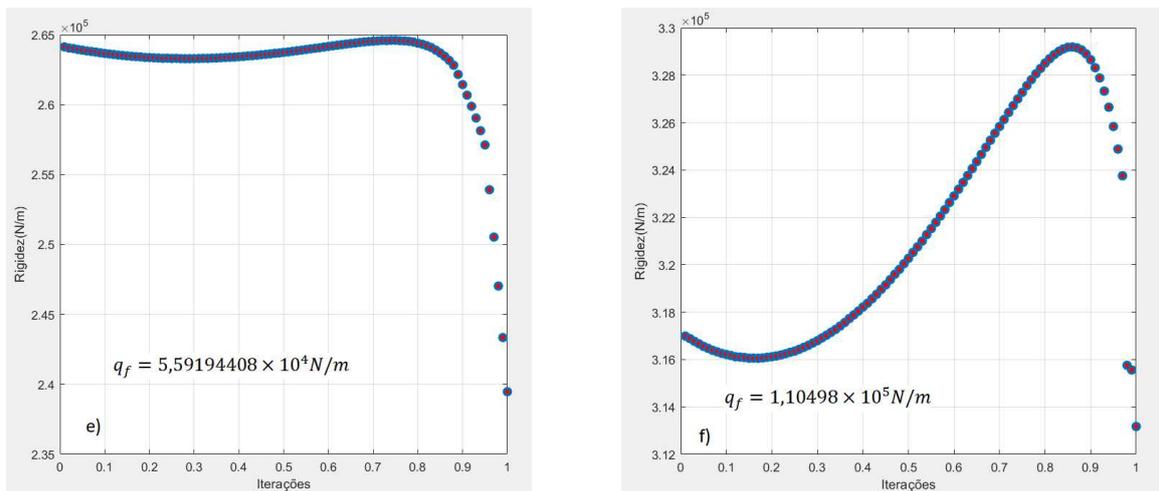


Figura 6.3 – Variação da rigidez: e) $b = 0,05\text{m}$ $h = 0,1\text{m}$ e f) $b = 0,06\text{m}$ e $h = 0,1\text{m}$.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Nestes seis primeiros casos, tem-se a rigidez em queda durante o desenvolvimento da análise não linear, mostrando assim que as vigas entraram em processo de flambagem.

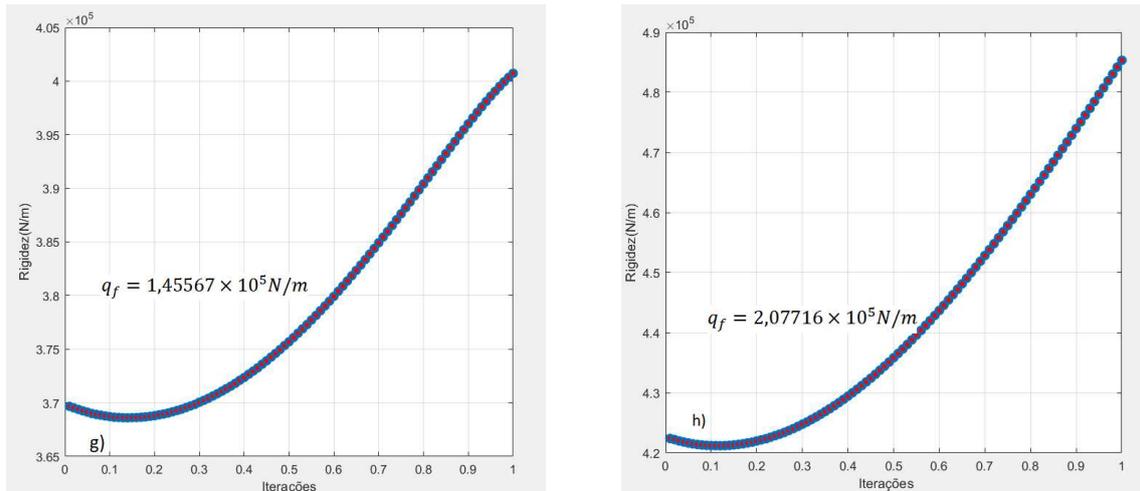


Figura 6.4 – Variação da rigidez: g) $b = 0,07\text{m}$ $h = 0,1\text{m}$ e h) $b = 0,08\text{m}$ e $h = 0,1\text{m}$.

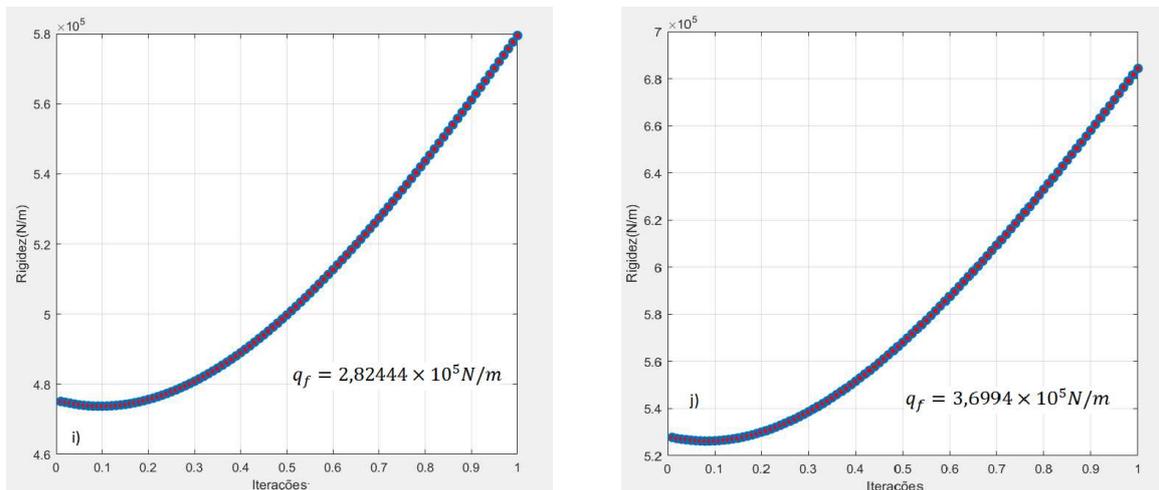


Figura 6.5 – Variação da rigidez: i) $b = 0,09\text{m}$ $h = 0,1\text{m}$ e j) $b = 0,1\text{m}$ e $h = 0,1\text{m}$.

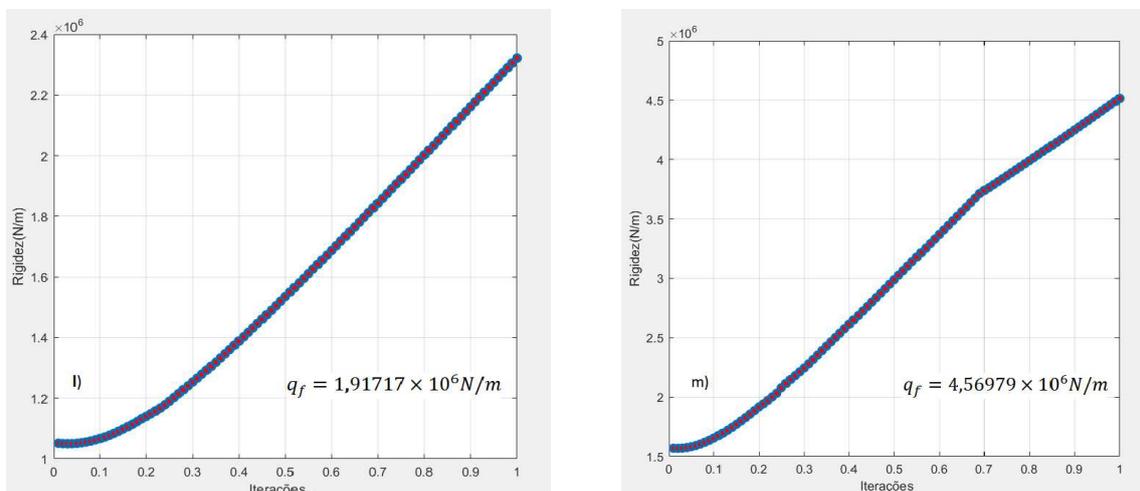


Figura 6.6 – Variação da rigidez: l) $b = 0,2\text{m}$ $h = 0,1\text{m}$ e m) $b = 0,3\text{m}$ e $h = 0,1\text{m}$.

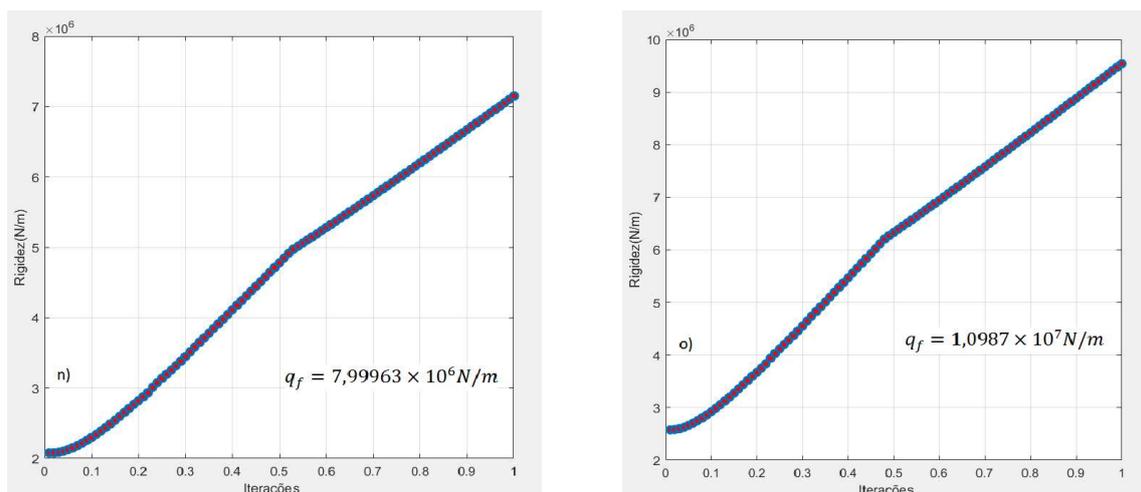


Figura 6.7 – Variação da rigidez: n) $b = 0,4m, h = 0,1m$ e o) $b = 0,5m, h = 0,1m$.

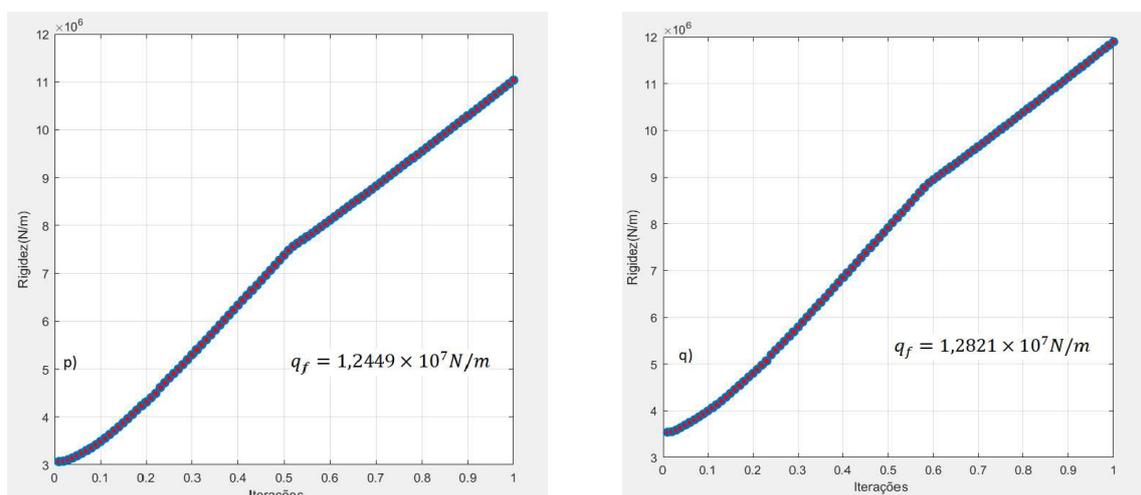


Figura 6.8 – Variação da rigidez: p) $b = 0,6m, h = 0,1m$ e q) $b = 0,7m, h = 0,1m$.

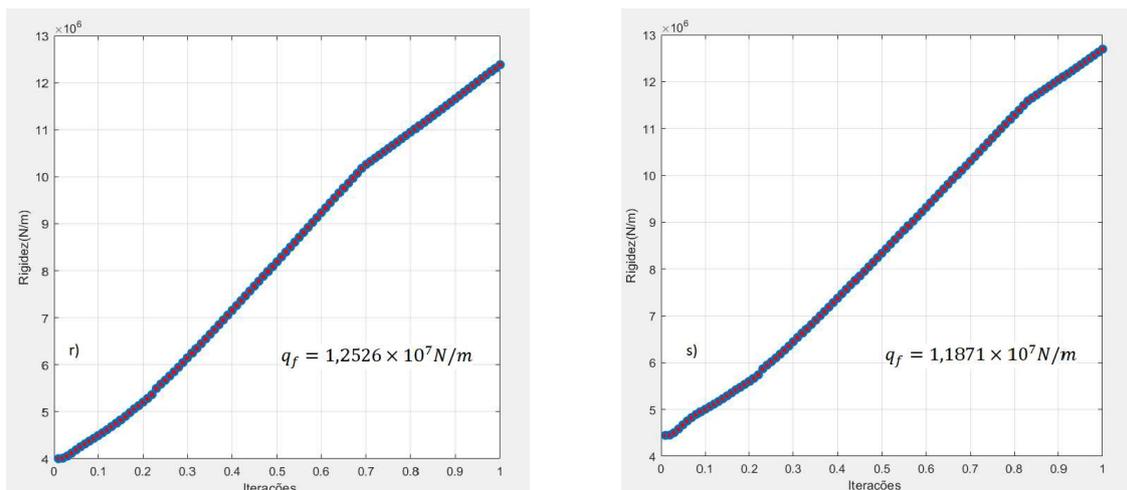


Figura 6.9 – Variação da rigidez: r) $b = 0,8m$ $h = 0,1m$ e s) $b = 0,9m$ e $h = 0,1m$.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Nos gráficos correspondentes às Figuras 6.4 até 6.9, percebe-se um crescimento na rigidez, o qual aumenta com maior velocidade à medida que a base da viga vai crescendo com a altura h fixa. Estes casos mostram que a viga não apresenta sinais de flambagem, mas apenas do efeito de grandes deflexões devido às forças axiais que passam a agir no eixo baricêntrico.

- 2º) Fixando a base $b = 0,1m$ e aumentando a altura a partir de $h = 0,1m$.

O caso $b = 0,1m$ e $h = 0,1m$ já foi representado na Figura 6.5 item (j). Aqui são representados os casos a partir de $h = 0,2m$.

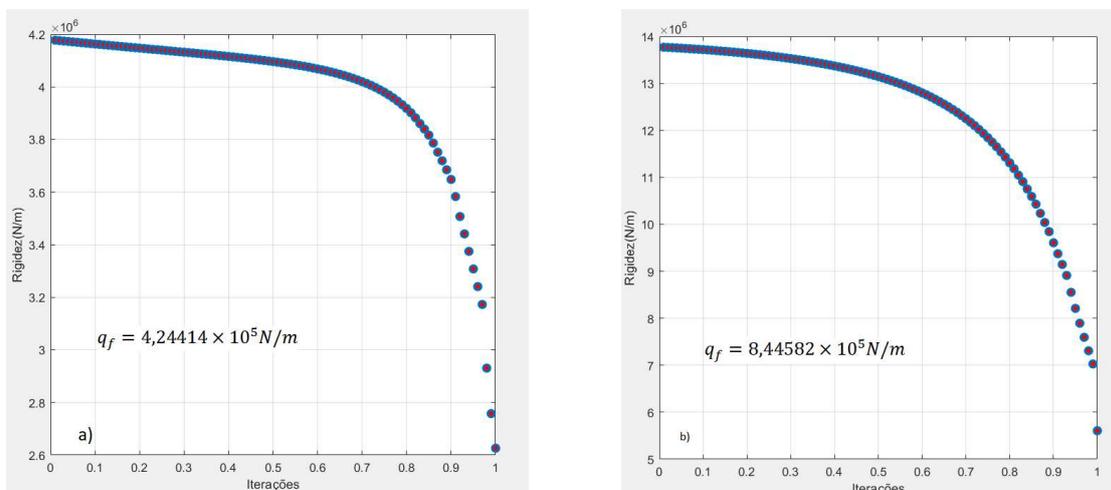


Figura 6.10 – Variação da rigidez: a) $b = 0,1m$ $h = 0,2m$ e b) $b = 0,1m$ e $h = 0,3m$.

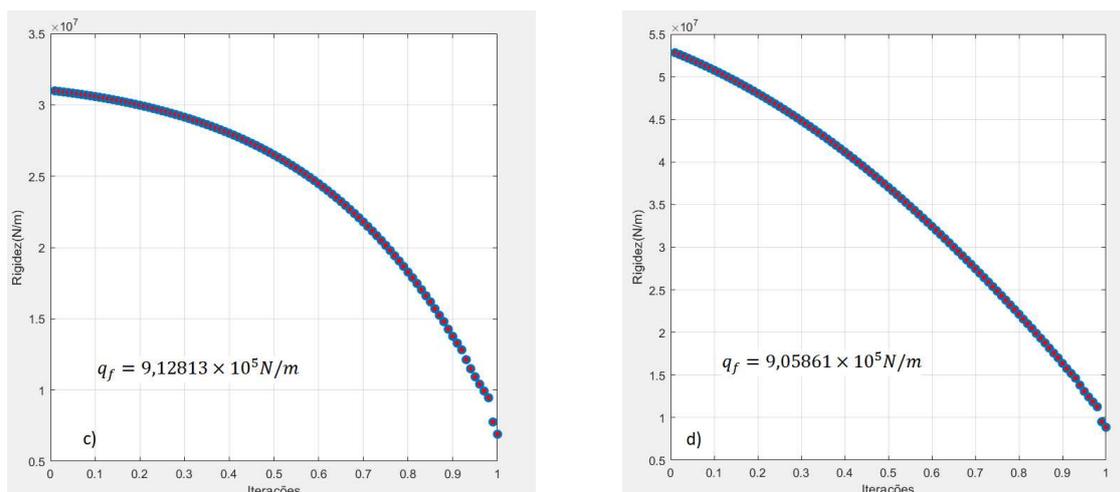


Figura 6.11 – Variação da rigidez: c) $b = 0,1m$ $h = 0,4m$ e d) $b = 0,1m$ e $h = 0,5m$.

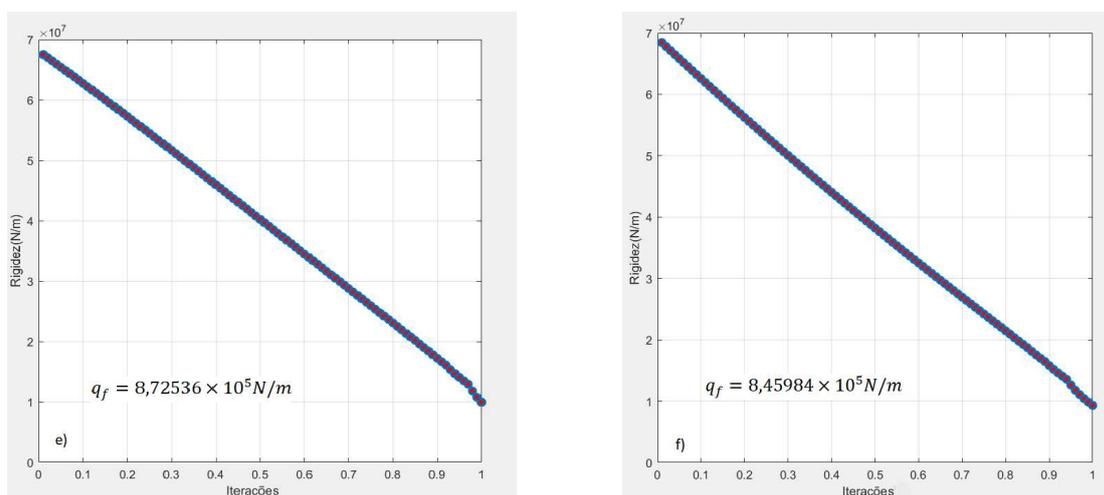


Figura 6.12 – Variação da rigidez: e) $b = 0,1m$ $h = 0,6m$ e f) $b = 0,1m$ e $h = 0,7m$.

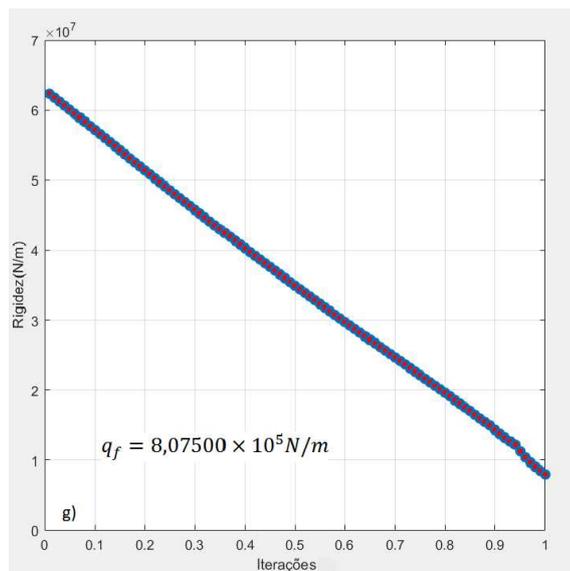


Figura 6.13 – Variação da rigidez: g) $b = 0,1\text{m}$ $h = 0,8\text{m}$.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

De todos os casos analisados, considerando base fixa $b = 0,1\text{m}$ e altura h crescendo, percebe-se uma redução da rigidez durante todo o processo iterativo da simulação não linear. Além disso, a redução da rigidez torna-se cada vez mais intensa à medida que a altura vai crescendo. Isso mostra que todas as vigas analisadas, neste caso, apresentam sinais de flambagem.

Por fim, de todas as vigas analisadas aqui, conclui-se que, considerando a não linearidade geométrica, as vigas altas tendem a sofrer flambagem enquanto as baixas sofrem apenas grandes deflexões.

6.1.2 Flambagem lateral com torção FLT

O objetivo desta seção é utilizar a solução analítica fracionária TEF para identificar e avaliar efeitos iniciais do processo de flambagem lateral com torção, utilizando, como referência, a deflexão transversal obtida do modelo de elasticidade tridimensional via ANSYS, no caso de uma viga com seção transversal retangular, simplesmente apoiada com carga distribuída ao longo de seu eixo longitudinal, fletida em relação ao eixo de maior momento de inércia conforme descreve a (ABNT, 2008). Estas categorias de vigas, denominadas vigas de alma cheia, geralmente são suscetíveis ao tipo de flambagem classificada como flambagem lateral com torção, que é um processo de instabilidade composto por uma flexão lateral, perpendicular ao plano de carregamento, caracterizada pelo deslocamento $\mu(x)$ do centro de torção, seguido por uma torção $\phi(x)$, causada por uma rotação em torno do eixo longitudinal [(JÚNIOR, 2006) e (CASTRO; SILVA; FAKURY, 2016)].

Na Figura 6.14, é ilustrada a flexão lateral e a torção sofrida por uma determinada seção na viga, durante o processo da flambagem lateral com torção.

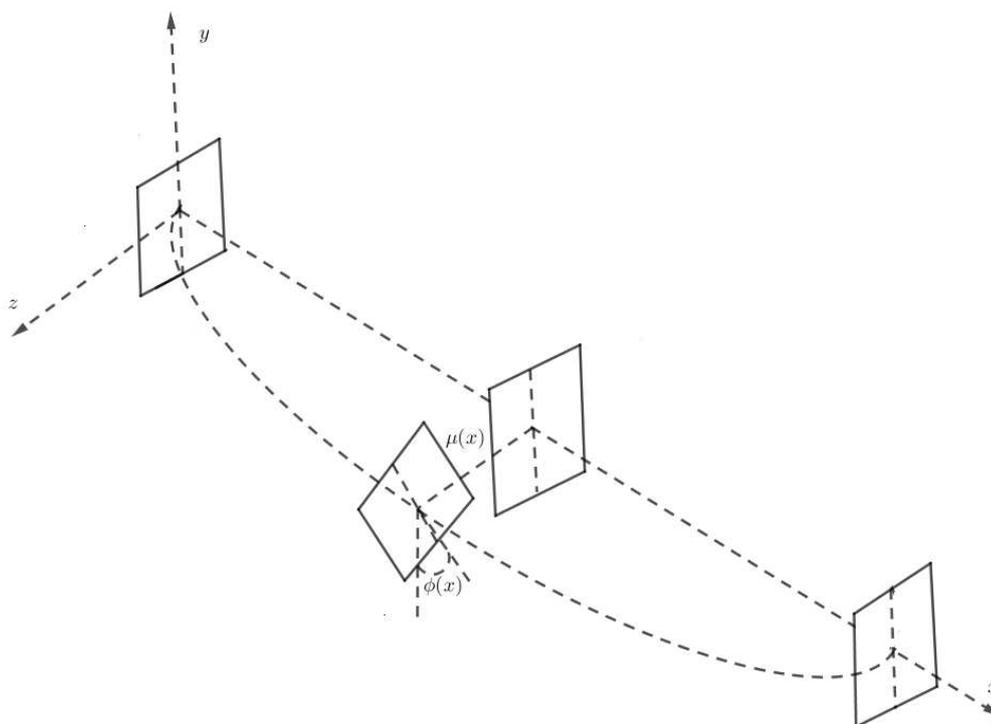


Figura 6.14 – Representação da flambagem lateral com torção.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

Diversos fatores podem contribuir para a ocorrência da flambagem lateral com torção. Dentre eles, pode-se destacar o comprimento destravado da viga, a variação do momento fletor, as seções transversais, as imperfeições dos materiais e geométricas e a variação da temperatura. Tais fatores fazem com que o centroide da seção transversal não coincida com o centro de torção, fator determinante para a ocorrência do referido efeito (NUNES, 2005).

O comprimento destravado da viga é inversamente proporcional à resistência nominal, ou seja, quanto mais longa for a viga entre seus apoios, apresentará menor resistência nominal e, conseqüentemente, será mais suscetível à flambagem.

Com relação ao momento fletor, a situação mais desfavorável à FLT é quando ele é constante em toda a viga, pois, neste caso, é responsável pela compressão de mesma magnitude em uma mesma parte de toda seção transversal determinada ao longo do comprimento da viga. Já nos casos em que varia ao longo do comprimento da viga, contribuem consideravelmente para o decréscimo da resistência nominal.

Dependendo da forma, as seções transversais da viga podem contribuir ou

não para a FLT. Existem seções, por exemplo, que não são suscetíveis a este tipo de instabilidade. Entre estes casos, pode-se citar os perfis I fletidos apenas em torno do eixo de menor inércia ou perfis tubulares de seção circular.

As imperfeições dos materiais estão relacionadas às tensões residuais. A distribuição das tensões residuais, por exemplo, podem influenciar na antecipação ou retardamento da passagem da flambagem lateral com torção do regime elástico para o inelástico. Estas concentrações de tensões podem aparecer, no perfil, já quando o mesmo é confeccionado ou quando é intercalada a estrutura por determinados suportes como conectores, apoios, entre outros tipos de vínculos.

Convém destacar também as imperfeições geométricas. Incluídos nesta categoria, estão a excentricidade da linha de ação das cargas em relação ao centro de torção, as rotações iniciais, como também a curvatura inicial da viga (REIS, 1996).

Por fim, vale salientar que a variação da temperatura do ambiente em que se encontra a estrutura contribui para o processo de flambagem, pois o aumento da temperatura, por exemplo, pode ocasionar o decréscimo no módulo da elasticidade de Young, causando uma redução na rigidez da estrutura.

A categoria mais simples de instabilidade por flambagem é denominada bifurcação. Este tipo de instabilidade, geralmente, pode ser separado em duas fases, que vão surgindo a partir de carregamentos crescentes compressivos. A configuração inicial de deformação é denominada pré-flambagem. Quando o carregamento compressivo atinge a carga crítica, a viga instabiliza. Este fato é geralmente acompanhado por uma súbita mudança instantânea na deformação, ocorrendo uma bifurcação na curva carga versus deslocamento. Este ponto de bifurcação corresponde à transição entre o equilíbrio estável (pré-flambagem) e o equilíbrio instável (pós-flambagem) [(GALAMBOS, 1998) e (SILVA, 2006)].

Como explicitado sucintamente no início da seção, o principal objetivo deste capítulo é usar o parâmetro α incorporado à solução TE (através da derivada fracionária de Caputo) para identificar e avaliar, necessariamente, a pré-flambagem, detectando os primeiros sinais do referido efeito na viga, pois é um fato com manifestação iniciada bem antes da viga instabilizar, que a solução ANSYS não explicita em seus dados de saída. A identificação dos sinais iniciais da pré-flambagem é de fundamental importância na avaliação das estruturas, pois representa um sinal de alerta para mensuração do carregamento adequado ou do uso de ferramentas de contenção que possam garantir a segurança da estrutura.

Nas próximas seções, são analisados os efeitos de flambagem lateral com torção em algumas vigas longas e altas, considerando, na implementação, outros fatores que também contribuem significativamente para a ocorrência da flambagem como imperfeições

geométricas do material, por exemplo.

Para determinar uma estimativa para a carga crítica de flambagem, foi usado o conhecido método do autovalor [(ALVES, 2012) e (RUST, 2015)]. Tal método, inicialmente, consiste em determinar os fatores multiplicadores de carga, os quais são chamados de autovalores. Este método é disponível no ANSYS, no qual é denominado de “Linear buckling ou “Eigenvalue buckling”. O nome vem do fato de que o modo de solução utilizado pelo sistema vem da metodologia dos autovalores e autovetores, nos quais se utiliza como entrada uma carga qualquer “carga de chute” e, a partir dela, o *software* fornece como saída, os fatores multiplicadores de carga (autovalores) e os modos de flambagem (autovetores). Assim, a carga de flambagem será $q = \lambda q_0$, em que q_0 é a carga chutada inicialmente e λ é o fator multiplicador (autovalor) de carga. Convém destacar que, para cada modo de flambagem, o *software* apresenta como saída um fator multiplicador de carga λ , os quais podem ser positivos ou negativos. Este fato depende da variação da matriz de rigidez. Assim, se a mesma for definida positiva, os autovalores são positivos, caso ela seja indefinida, podem aparecer autovalores negativos (BATHE, 2006). Para o nosso caso, escolheu-se o menor autovalor positivo λ_0 , que fornece a carga de instabilidade elástica $q_{crt} = q_0 \lambda_0$, correspondente ao primeiro modo de flambagem caracterizado pelo autovetor v_0 (SORIANO, 2009). Todo o procedimento para determinar os autovalores e autovetores pode ser feito no ANSYS por uma simulação linear simples.

6.1.2.1 Estudo de caso 1: viga com $h=10b$

Nesta subseção, foi estudado detalhadamente o desenvolvimento do processo de flambagem lateral com torção considerando desde os primeiros sinais (pré-flambagem) até a ocorrência da flambagem. A solução fracionária TEF foi usada para identificar e avaliar os primeiros sinais do processo de flambagem, pois como já abordado anteriormente, é importante apresentar ferramentas capazes de identificar a eminência deste fenômeno de instabilidade.

Inicialmente, foi implementada, no ANSYS, a viga selecionada para o estudo, cujas dimensões são $(b, h, L) = (0,01m, 0,1m, 5m)$. Nota-se, inicialmente, que a viga escolhida é alta ($h = 10b$) e longa, pois seu índice de esbelteza é dado por

$$S_r = 2\sqrt{3} \frac{L}{h} = 100\sqrt{3}. \quad (6.4)$$

Como neste caso, o perfil é simétrico, o centroide da seção transversal (C_{st}) coincide com o centro de torção (C_t), conforme ilustrado na Figura 6.15.

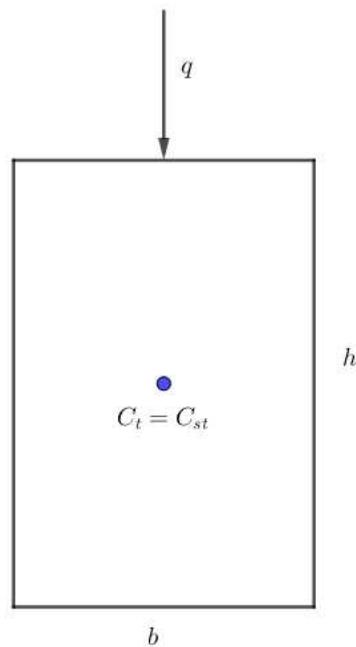


Figura 6.15 – Seção transversal da viga.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

A situação representada, na Figura 6.15, dificulta a ocorrência da flambagem lateral com torção. Com o propósito de tornar a viga mais suscetível ao efeito de flambagem, devemos considerar alguma imperfeição na estrutura. Uma maneira de simular uma imperfeição geométrica, no modelo implementado no ANSYS, é considerar uma assimetria na distribuição do carregamento, isto é, uma excentricidade da linha de ação das cargas em relação ao centro de torção, fazendo com que o mesmo não coincida com o centroide da seção transversal. Para isso, ao invés de distribuir a carga simetricamente, na seção superior da viga, considerou-se sua distribuição na aresta superior, ao longo do comprimento longitudinal (conforme realizado nas análises desenvolvidas na Subseção 6.1.1), tornando assim sua distribuição assimétrica com respeito ao centro de torção. A Figura 6.16 mostra a viga com a respectiva distribuição de carga.

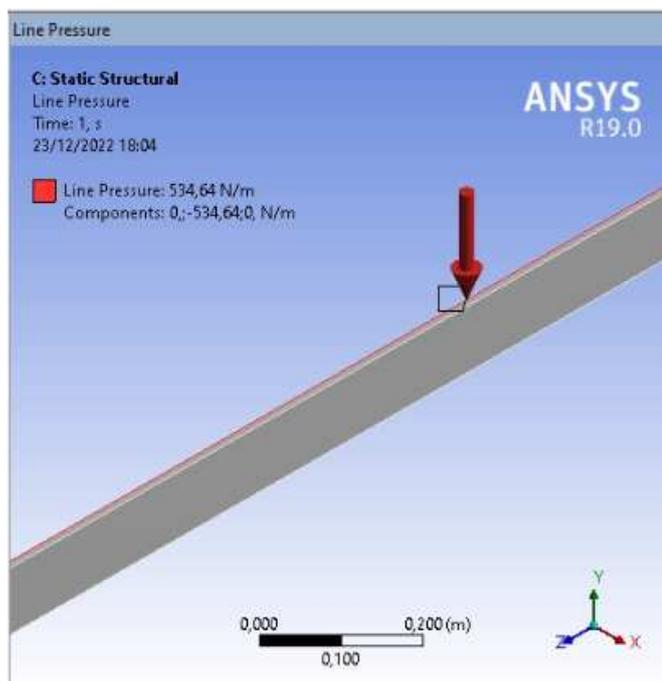


Figura 6.16 – Distribuição do carregamento na viga.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

É importante destacar que não foi possível mostrar toda a viga na Figura 6.16, pois o objetivo é mostrar a distribuição da carga. Caso fosse mostrada a viga inteira, tal distribuição não ficaria visível devido ao seu dimensionamento.

Inicialmente, foi realizada a simulação linear, utilizando o método do autovalor, objetivando determinar uma estimativa para a carga crítica de flambagem. Daí, concluiu-se que a carga estimada, para o primeiro modo de flambagem, é $q = 5,34645 \times 10^2 \text{ N/m}$.

Dando procedimento ao processo, realizou-se a simulação não linear, no ANSYS, usando o método Newton-Raphson, objetivando constatar a ocorrência do fenômeno de flambagem. Para obter os resultados coerentes, foram colocados 100 passos iniciais, visando determinar o número de pontos correspondentes que permitem a construção gráfica evidente das curvas almeçadas, pois cada passo representa um ponto do gráfico. Para os passos mínimos e máximos, foram fixados 100 e 1000, respectivamente. Escolheu-se a força como critério de convergência.

Realizada a simulação, extraiu-se o gráfico da convergência dos passos iterativos destacando o critério usado para a convergência. No gráfico da Figura 6.17, tem-se a representação do processo iterativo convergido.

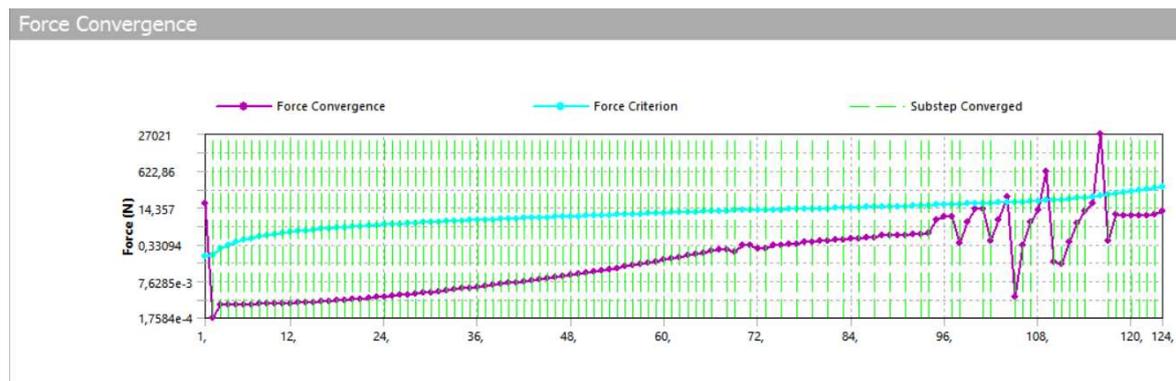


Figura 6.17 – Convergência da análise para o problema de flambagem.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Nota-se, do gráfico da Figura 6.17, que a solução convergiu após 124 iterações. Como é perceptível, a convergência ocorreu sem apresentar nenhum tipo de erro, fator determinante para a credibilidade dos resultados obtidos.

O diagrama que permite identificar a ocorrência de instabilidade da estrutura é o gráfico deslocamento versus força, pois, através dele, pode-se analisar a variação da rigidez em todo o processo de análise. Para isso, é necessário obter dados de saída correspondentes ao deslocamento e à força.

O deslocamento que a componente selecionada para a análise sofre, durante a aplicação da carga, é medido através da opção “Deformation probe” do ANSYS, na qual a superfície selecionada para medir o deslocamento da viga é a mesma em que é aplicada a carga.

Por outro lado, tem-se que a carga exercida, em cada passo da análise, é outro parâmetro importante para se estudar o comportamento da deflexão da viga, pois possibilita analisar o comportamento da força e, conseqüentemente, permite determinar o gráfico da curva deslocamento versus força da estrutura durante todo o processo da análise. Para possibilitar a leitura da força, é preciso habilitar, no ANSYS, a opção “Force reaction”, que deve ser colocada no suporte fixo. É necessário selecionar o eixo para a avaliação da medida dos referidos parâmetros. Este eixo deve ser o mesmo da aplicação do carregamento por ser no que ocorre máximo deslocamento e maior intensidade de força, respectivamente.

Após obtidos os dados interativos referentes à força e ao deslocamento, construiu-se o diagrama deslocamento versus força, o qual é representado pela Figura 6.18. Este gráfico é um dos mais importantes da análise estrutural, pois caracteriza diversos fenômenos apresentados pela estrutura, quando submetida a um carregamento, dentre eles, a flambagem.

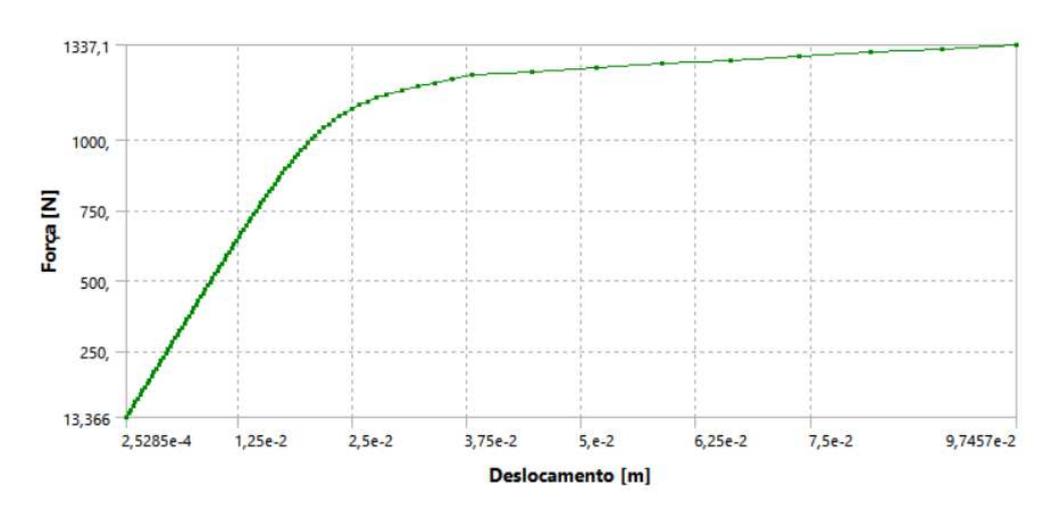


Figura 6.18 – Gráfico deslocamento versus força.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Fazendo uma leitura visual do gráfico da Figura 6.18, pode-se induzir que, no início da análise, tem-se um comportamento ligeiramente próximo da linearidade. Logo em seguida, aproximadamente no ponto médio entre deslocamentos $1,25 \times 10^{-2}m$ e $2,5 \times 10^{-2}m$, a curva começa a divergir significativamente da previsão linear do sistema. É notável que a rigidez está diminuindo, pois ela é representada pela inclinação do respectivo gráfico, caracterizando assim a presença da não linearidade. A partir daí, percebe-se que, para pequenos incrementos de força, as deformações são bem maiores, significando que o processo de instabilidade tornou-se bem mais intenso.

Outro diagrama que se pode utilizar para evidenciar a ocorrência da instabilidade é o gráfico das tensões normais. Tal gráfico é dado pela Figura 6.19.

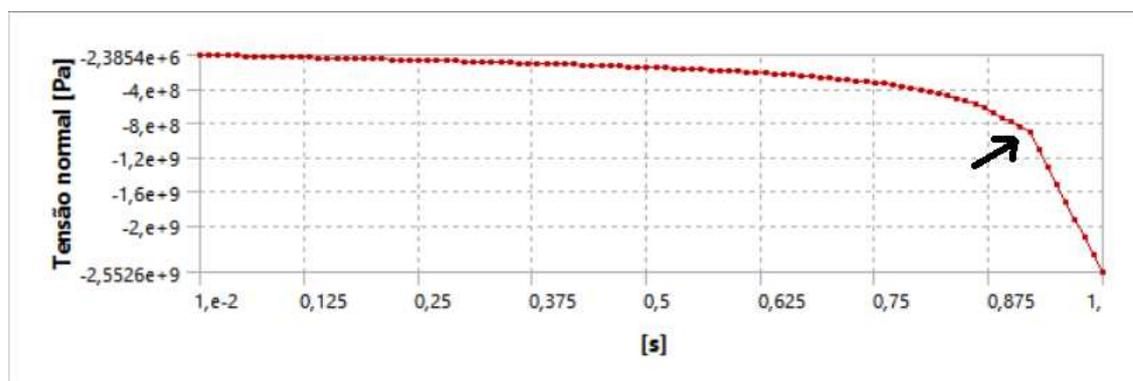


Figura 6.19 – Gráfico das tensões normais de compressão.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

O gráfico da Figura 6.19 representa as tensões normais de compressão ou

tensões mínimas principais. Tais tensões indicam onde a estrutura está comprimindo e que pode sofrer instabilidade por flambagem. Sua visualização revela a instabilidade presente na viga e, além disso, identifica o ponto correspondente à iteração em que a viga pode ter atingido o primeiro modo de flambagem. Percebe-se que, neste ponto, ocorre uma mudança significativa no processo iterativo das tensões. O ponto corresponde a 92% do carregamento estimado pelo método do autovalor.

Esta análise inicial teve como propósito mostrar que o modelo de viga implementado realmente chega a flambar, garantindo assim que a não linearidade observada esteja realmente relacionada ao fenômeno de flambagem. Como já foi destacado, o propósito não é investigar o fim do processo, mas os sinais iniciais da instabilidade, pois, se a estrutura for submetida a um carregamento que provoque, apenas sinais iniciais de fadiga, com o passar do tempo, ela pode sofrer instabilidade por flambagem, pois a flambagem é um exemplo de falha. Portanto, é importante a identificação na estrutura dos primeiros sinais deste tipo de instabilidade.

Do gráfico da Figura 6.18, pode-se obter uma estimativa para o valor da carga, responsável pelos primeiros sinais de instabilidade. Da análise do gráfico, inferiu-se que o processo de instabilidade poderia ter iniciado para o módulo da força de reação de apoio $F = 750N$, correspondente a uma carga $q = 3 \times 10^2 N/m$, representando aproximadamente 56% do carregamento total estimulado pelo método do autovalor.

Feito isso, realizou-se a simulação não linear, no ANSYS, usando a respectiva carga. Em seguida, é extraído da simulação ANSYS, a deflexão transversal no plano zy , na direção do eixo y , considerando como caminho o eixo baricêntrico, o qual é equivalente à deflexão no plano xv , das soluções analíticas EBF e TEF, como discutido na Seção 5.2.

Para garantir que a deflexão extraída do ANSYS, caso apresente não linearidade, seja apenas relacionada ao processo de flambagem, foi subtraída, do valor de tal flecha, a concentração de tensão devido à presença dos apoios, processo este aqui chamado de “filtragem”. Devido a não linearidade da simulação, os resíduos foram obtidos usando a Equação (5.3). Finalmente, estes resíduos foram subtraídos da flecha extraída da simulação não linear.

Após concretizada a filtragem, visando obter a convergência entre as flechas máximas das soluções TEF e ANSYS, os referidos pontos foram aproximados utilizando, para isso, a variação do parâmetro α . Neste caso, a convergência ocorreu para $\alpha = 4,0009$ com erro mínimo entre estes pontos da ordem de 10^{-6} . Pelo parâmetro α obtido, percebe-se a flecha ANSYS ligeiramente maior que a TE, detectando a presença de não linearidades que, neste caso, devem ser sinais de instabilidade.

Visando avaliar a evolução do processo de flambagem, desde os primeiros sinais detectados na viga, variou-se a carga estimada pelo processo do autovalor a uma taxa de

1%, conforme mostra a Tabela 6.1.2.1. A escolha dessa taxa padrão, para avaliação do processo de flambagem, foi feita conforme as iterações de carregamento realizadas pelo *software* no desenvolvimento da análise não linear. Para cada novo valor estimado para a taxa de carregamento, foi realizada a simulação não linear no ANSYS e tomada a deflexão transversal (deflexão no plano zy na direção do eixo y tomando como caminho o eixo baricêntrico).

Objetivando determinar, em cada caso, o parâmetro α correspondente à convergência entre as flechas máximas ANSYS e TEF, foram seguidos os mesmos procedimentos descritos anteriormente. Desta construção, é possível identificar a ordem α da solução analítica TEF, que representa a flecha máxima para os primeiros sinais do processo de flambagem, além de mostrar a evolução da instabilidade com o aumento da taxa de carregamento.

A caracterização dos resultados obtidos, em todas as simulações realizadas, é apresentada na Tabela 6.1.2.1.

Tabela 6.1 – Evolução dos sinais de flambagem via TEF.

Carga crítica (%)	$\alpha_{TEF \rightarrow ANSYS}$	E_r (Flechas máximas)	Pontos convergidos (%)
1	4,0000	10^{-5}	98,65
2	4,0000	10^{-5}	98,65
3	4,0000	10^{-5}	98,65
4	4,0000	10^{-5}	98,65
5	4,0000	10^{-5}	98,65
6	4,0000	10^{-5}	98,65
7	4,0000	10^{-5}	98,65
8	4,0000	10^{-6}	98,65
9	4,0000	10^{-6}	98,65
10	4,0000	10^{-5}	97,31
11	4,0000	10^{-5}	97,31
12	4,0000	10^{-5}	97,98
13	4,0001	10^{-5}	97,31
14	4,0001	10^{-5}	97,98
15	4,0001	10^{-5}	98,65
16	4,0001	10^{-5}	97,98
17	4,0001	10^{-5}	96,64
18	4,0001	10^{-6}	96,64
19	4,0001	10^{-8}	96,64
20	4,0001	10^{-5}	98,65
21	4,0002	10^{-5}	94,63

continua...

Carga crítica (%)	$\alpha_{TEF \rightarrow ANSYS}$	E_r (Flechas máximas)	Pontos convergidos (%)
22	4,0002	10^{-5}	94,63
23	4,0002	10^{-5}	94,63
24	4,0001	10^{-5}	94,63
25	4,0001	10^{-5}	96,64
26	4,0002	10^{-5}	89,93
27	4,0003	10^{-5}	93,28
28	4,0002	10^{-5}	93,28
29	4,0002	10^{-5}	97,31
30	4,0002	10^{-6}	96,64
31	4,0003	10^{-6}	91,27
32	4,0003	10^{-5}	93,28
33	4,0003	10^{-5}	93,95
34	4,0003	10^{-5}	97,31
35	4,0004	10^{-5}	91,94
36	4,0004	10^{-5}	93,28
37	4,0004	10^{-5}	92,61
38	4,0004	10^{-5}	93,95
39	4,0003	10^{-5}	96,64
40	4,0005	10^{-6}	91,94
41	4,0005	10^{-5}	92,61
42	4,0004	10^{-5}	92,61
43	4,0004	10^{-5}	95,97
44	4,0005	10^{-5}	94,63
45	4,0005	10^{-5}	89,26
46	4,0006	10^{-5}	93,95
47	4,0005	10^{-5}	91,94
48	4,0006	10^{-5}	95,30
49	4,0006	10^{-5}	91,94
50	4,0006	10^{-5}	90,60
51	4,0006	10^{-5}	91,27
52	4,0007	10^{-5}	93,95
53	4,0007	10^{-5}	80,53
54	4,0008	10^{-5}	90,60
55	4,0008	10^{-5}	91,27
56	4,0009	10^{-6}	92,61
57	4,0009	10^{-5}	92,61
58	4,0009	10^{-5}	93,95

continua...

Carga crítica (%)	$\alpha_{TEF \rightarrow ANSYS}$	E_r (Flechas máximas)	Pontos convergidos (%)
59	4,0010	10^{-5}	90,60
60	4,0010	10^{-5}	91,94
61	4,0011	10^{-5}	91,94
62	4,0011	10^{-6}	92,61
63	4,0012	10^{-6}	90,60
64	4,0013	10^{-5}	91,27
65	4,0013	10^{-5}	91,94
66	4,0014	10^{-5}	91,94
67	4,0015	10^{-5}	92,61
68	4,0016	10^{-6}	90,60
69	4,0017	10^{-5}	91,27
70	4,0018	10^{-5}	92,61
71	4,0019	10^{-5}	91,27
72	4,0021	10^{-5}	90,60
73	4,0023	10^{-5}	90,60
74	4,0024	10^{-5}	90,60
75	4,0026	10^{-5}	91,94

A Tabela 6.1.2.1 descreve a evolução dos sinais de instabilidades relacionados ao processo de flambagem, identificado pela solução TEF, através do intervalo de convergência entre as referidas flechas e quantificado pelo desvio apresentado pelo parâmetro α em relação à ordem inteira. Na primeira coluna, tem-se a porcentagem da carga crítica de flambagem considerada em cada simulação. Na segunda, destaca-se o valor de α correspondente à convergência entre as flechas máximas TEF e ANSYS. A terceira coluna mostra a ordem máxima do erro relativo entre as flechas máximas TEF e ANSYS. E, na última coluna, tem-se a porcentagem dos pontos do domínio em que as soluções TEF e ANSYS convergem com erro relativo menor ou igual à ordem 10^{-4} . Lembrando que, para a constituição do domínio pelo caminho escolhido (eixo baricêntrico) da simulação tridimensional ANSYS, foram escolhidos 147 pontos entre os extremos 0 e $5m$.

No gráfico da Figura 6.20, tem-se a representação visual da variação da porcentagem da carga crítica em função dos correspondentes valores α_{TEF} que identificam a flecha máxima da solução ANSYS. Nele fica bem evidente o comportamento da variação do parâmetro α em função do aumento da taxa de carregamento.

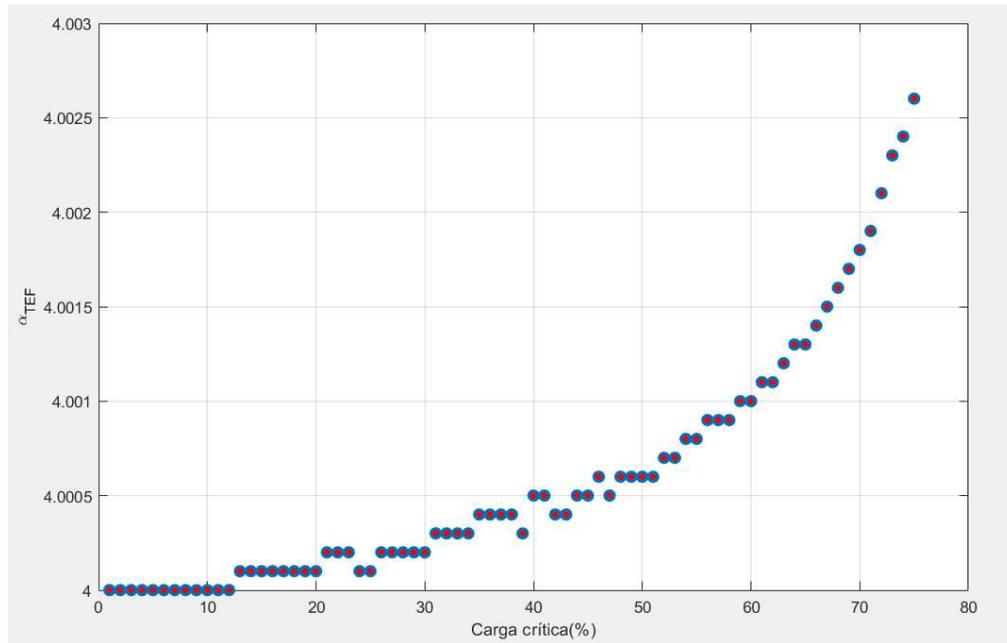


Figura 6.20 – Taxa de variação da carga crítica em função dos valores α_{TEF} .

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Da análise do gráfico da Figura 6.20, são perceptíveis três intervalos: inicialmente, para carregamentos com taxa variando de 1% a 12% da carga crítica de flambagem, as flechas máximas TEF e ANSYS convergem para $\alpha = 4$, significando que os únicos efeitos incorporados na flecha ANSYS são aqueles contemplados pela teoria de Timoshenko-Ehrenfest. Em seguida, para a taxa de carregamento variando de 13% a 64%, os valores do parâmetro α , correspondentes à convergência entre as flechas máximas TEF e ANSYS, oscilam ligeiramente, apresentando valores maiores que 4. Para a carga crítica variando com taxa partir de 64%, os valores do parâmetro α crescem à medida que aumentamos a taxa de carregamento.

Isto significa que, a partir de 13% da taxa de carregamento, a flecha máxima da deflexão transversal extraída da solução ANSYS está tornando-se ligeiramente maior que a flecha máxima TE, representando uma queda inicial na rigidez da estrutura. Como não há efeitos de concentração de tensão nos apoios nem de plasticidade, pode-se concluir que a redução ascendente da rigidez, quantificada pela variação crescente do parâmetro α , descrevem como os sinais iniciais de flambagem estão evoluindo à medida que a taxa de carregamento aproxima-se da carga crítica de flambagem. Portanto, torna-se evidente, do desenvolvimento deste processo, que se pode identificar os sinais iniciais de flambagem e, além disso, quantificá-los através do parâmetro α incorporado à solução TE.

Pelo critério de convergência determinado, tem-se que as flechas ANSYS e TE convergem quando o erro entre elas apresenta ordem menor ou igual que 10^{-4} . Consequentemente, o mesmo ocorre para as flechas máximas, ponto adotado para identificar e

quantificar as análises através do parâmetro α . Devido os valores iniciais do parâmetro α serem ligeiramente maiores que 4, eles indicam uma pequena queda de rigidez que, certamente, não é significativa para a ocorrência de instabilidade na estrutura. Por outro lado, é evidente, no desenvolvimento da análise, que o fator α quantifica o histórico de crescimento da flecha máxima pelo efeito de memória do modelo fracionário, o que, conseqüentemente, representa também o histórico da queda de rigidez, na estrutura, com o aumento da taxa de carregamento. Portanto, a partir deste fato, é possível determinar o quantificador α , correspondente à determinada flecha máxima TEF que represente uma expressiva queda de rigidez da estrutura, capaz de contribuir para a evolução do processo de flambagem.

Portanto, considerando o critério de convergência e continuidade do parâmetro α , no intervalo em que está definido, ele pode ser determinado por menor que seja o erro relativo entre as flechas ANSYS e TEF. A partir deste fato, foi estimado que a instabilidade, neste estudo de caso, seria significativa quando o erro entre as flechas TEF e ANSYS apresentasse ordem de 10^{-3} , ou seja, dez vezes maior que o erro considerado para o critério de convergência. Daí, analisando as simulações, conforme descritas pela Tabela 6.1.2.1 e o gráfico da Figura 6.20, obtém-se o parâmetro $\alpha = 4,0013$ como sendo o representante da flecha máxima TEF. A justificativa da escolha vem do fato de que, a partir de tal ponto, os quantificadores crescem sem apresentar oscilação, significando aumento das flechas máximas e, conseqüentemente, decréscimo da rigidez para aumentos na taxa de carregamento. Esta redução significativa da rigidez certamente deve ser considerada, pois são sinais inequívocos do processo de pré-flambagem na estrutura.

Visando mostrar o procedimento usado nas simulações não lineares, em cada um dos casos descritos na Tabela 6.1.2.1, reproduziu-se o caso no qual é obtido $\alpha = 4,0013$, que corresponde a 65% da carga crítica para flambagem, isto é, $q = 3,4751925 \times 10^2 N/m$.

As simulações foram desenvolvidas usando a mesma metodologia empregada no caso da carga total estimada para flambagem da viga pelo método do autovalor, realizado no início desta seção. Feito isso e extraíndo o gráfico da convergência, obtém-se sua representação, conforme Figura 6.21.

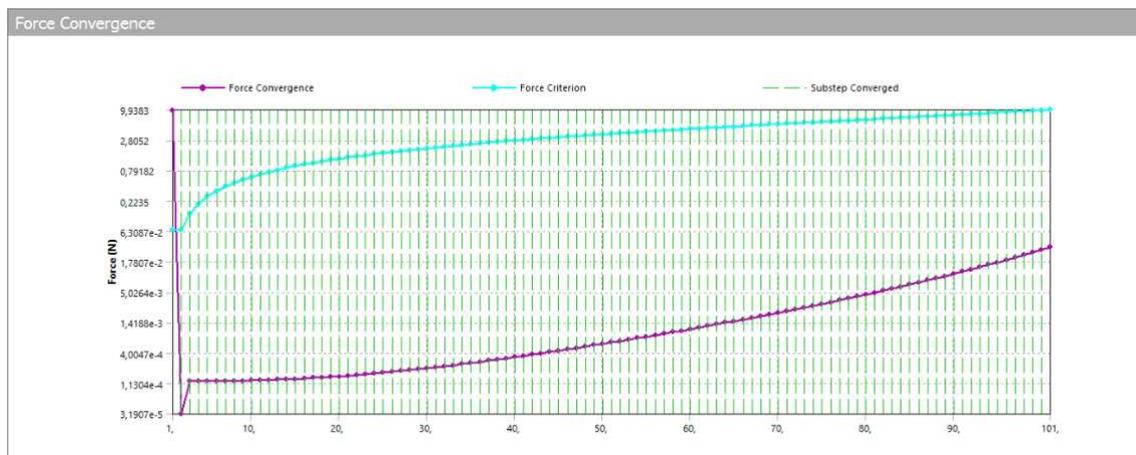


Figura 6.21 – Convergência da análise.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Percebe-se, do gráfico da Figura 6.21, que a análise convergiu com 101 iterações, sem apresentar nenhum problema.

Em seguida, foi plotado o gráfico do deslocamento versus a força, objetivando analisar a presença de não linearidade na simulação. O referente gráfico é dado pela Figura 6.22.

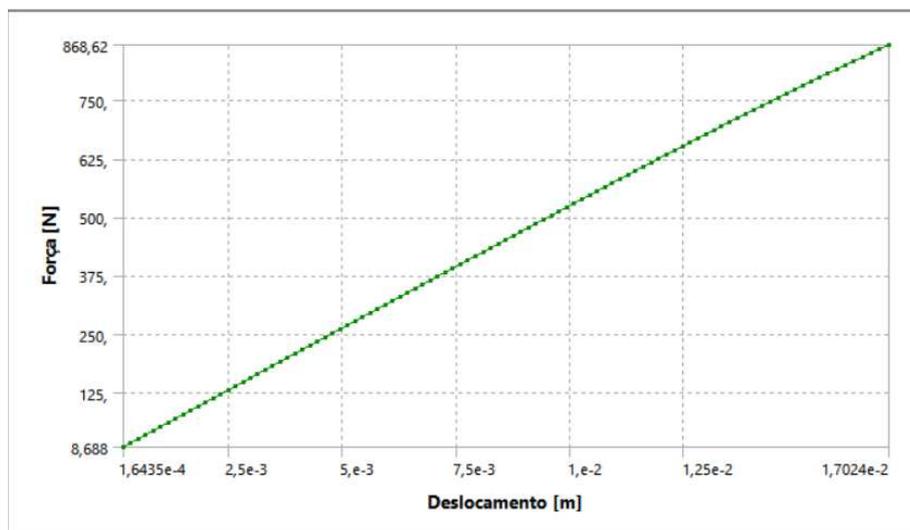


Figura 6.22 – Gráfico deslocamento versus força.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Visualmente, o gráfico da Figura 6.22 apresenta uma relação aparentemente linear entre deslocamento e força. Para evidenciar melhor tal fato, plotou-se o gráfico da evolução da rigidez geométrica em função das iterações realizadas na simulação não linear no qual, em cada iteração i com $i = 1, 2, 3, \dots, 100$, a rigidez pode ser obtida por

$k_i = \frac{F_i}{U_i}$, em que F_i e U_i representam, respectivamente, a força de reação dos apoios e o deslocamento na iteração i . Os valores da força F e do deslocamento U em cada iteração, foram obtidos, conforme descrito na Subsecção 5.5.5. Obtendo os valores da rigidez k_i em cada iteração e plotando o diagrama iterações versus rigidez, obtém-se o gráfico, conforme Figura 6.23.

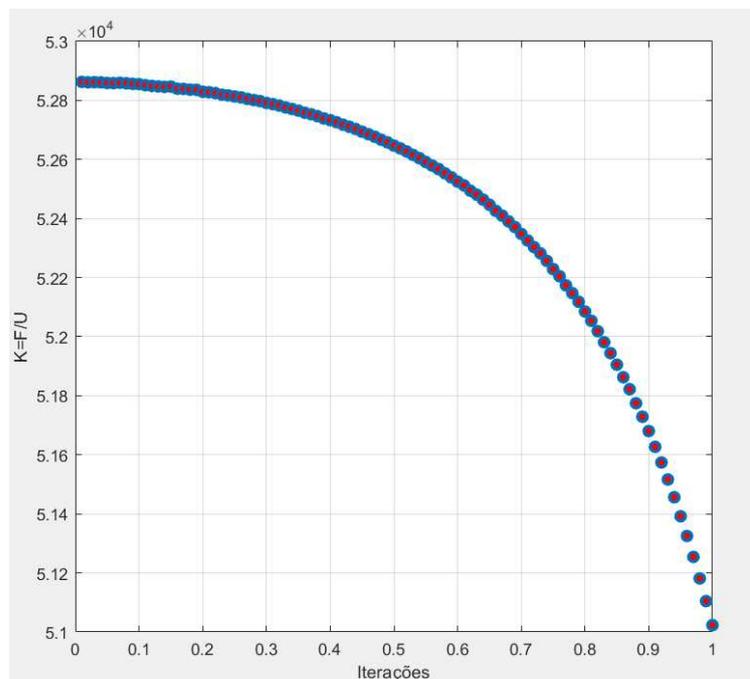


Figura 6.23 – Variação da rigidez geométrica em função das iterações i .

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Analisando o gráfico da Figura 6.23, percebe-se que, durante a simulação, a rigidez geométrica sofreu uma redução de aproximadamente $5,3 \times 10^4 N/m$ para $5,1 \times 10^4 N/m$, comprovando, assim, a presença de não linearidades na simulação. Mesmo confirmada a presença de não linearidades, não é garantido que sejam efeitos relacionados aos sinais de flambagem apenas pela possibilidade de existirem implicitamente outros efeitos, como a concentração de tensão nos apoios, deformação plástica ou o efeito de grandes deflexões, como analisado na Subsecção 5.5.5.

De antemão, pode-se afirmar que a não linearidade detectada não é devido à presença de plasticidade, pois os dados inseridos no *software*, para a realização das referidas simulações, não detectam tal efeito. Devido à redução da rigidez, pode-se garantir não haver influência dos efeitos relacionados a grandes deflexões, pois, neste caso, a rigidez aumentaria, como comprovado na Subsecção 5.5.5 e nas análises da Subsecção 6.1.1. Por fim, foi realizado o processo de filtragem, obtendo os resíduos presentes na deflexão transversal (deflexão no plano zy na direção do eixo y tomando o eixo baricêntrico como caminho),

relacionados à concentração de tensão nos apoios nos quais, neste caso utilizou-se a Equação (5.3). Subtraindo os resíduos v_r da deflexão transversal obtida na simulação não linear via ANSYS e obtendo a forma convergida entre as flechas máximas TEF e ANSYS, concluiu-se que tais flechas convergem para $\alpha = 4,0013$ com erro relativo apresentando ordem de 10^{-5} . Olhando para todo intervalo em que as referidas flechas estão definidas, pode-se concluir que elas convergem para 91,94% dos pontos do domínio, conforme Tabela 6.1.2.1.

No gráfico da Figura 6.24, são destacadas as deflexões ANSYS e TEF para $\alpha = 4,0013$ e o erro relativo entre tais flechas nos itens a) e b), respectivamente.

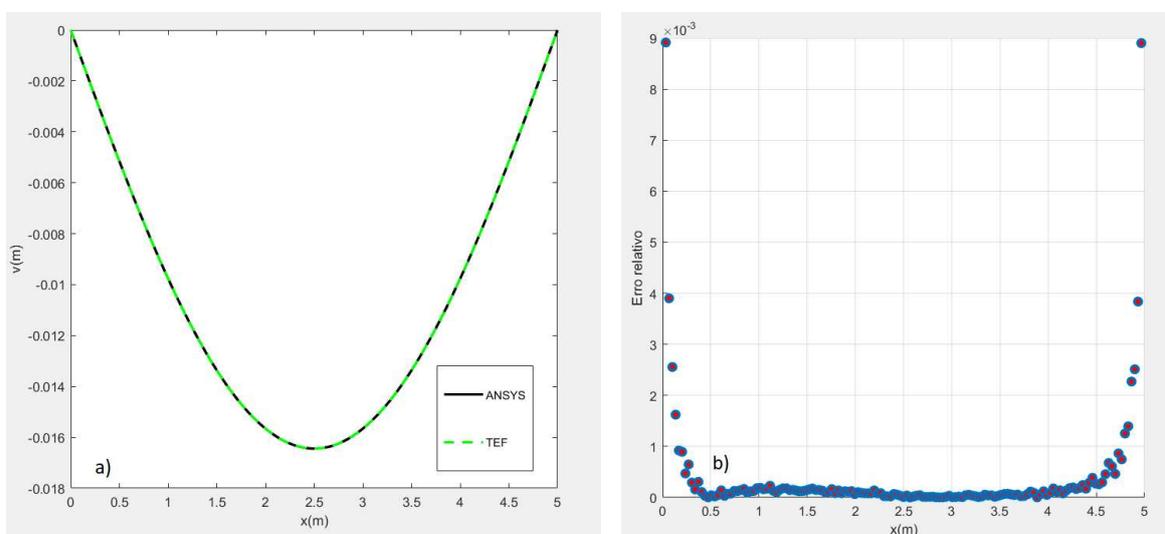


Figura 6.24 – Flechas TEF e ANSYS: a) Confronto e b) Erro relativo.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

No gráfico da Figura 6.24, item (b), foram excluídos apenas os dois pontos extremos referentes aos valores das flechas nas condições de contorno, pois tais pontos são fixos para todo α . Então, ao excluí-los, obtém-se melhor visualização para o erro relativo referente aos 147 pontos restantes determinados neste caso pela Equação (5.5). Nota-se que, dos 149 pontos considerados na constituição do domínio, apenas 12 não convergem, pois apresentam erro entre suas respectivas imagens maior que 10^{-4} . Portanto, é evidente que 91,94% dos pontos convergem para o referido $\alpha = 4,0013$, conforme comprova os dados da Tabela 6.1.2.1.

6.1.2.2 Estudo de caso 2: viga com $h=2b$

Para este caso, foi escolhida a viga com dimensões $(b, h, L) = (0, 1m, 0, 2m, 5m)$. Pode-se perceber, da análise do referido caso, que após realizada a simulação não linear, fica bem nítido, na viga, a deflexão lateral e a torção, como será abordado posteriormente.

Da análise de suas dimensões, tem-se $h = 2b$ e o índice de esbeltez

$$S_r = 2\sqrt{3}\frac{L}{h} = 50\sqrt{3}. \quad (6.5)$$

Portanto, a viga é alta e longa, características que a torna suscetível à flambagem.

Objetivando obter-se o centroide da seção transversal não coincidindo com centro de flexão, tornando a viga mais vulnerável a sofrer flambagem, distribuiu-se a carga na aresta da face superior da viga, conforme representado na Figura 6.25.

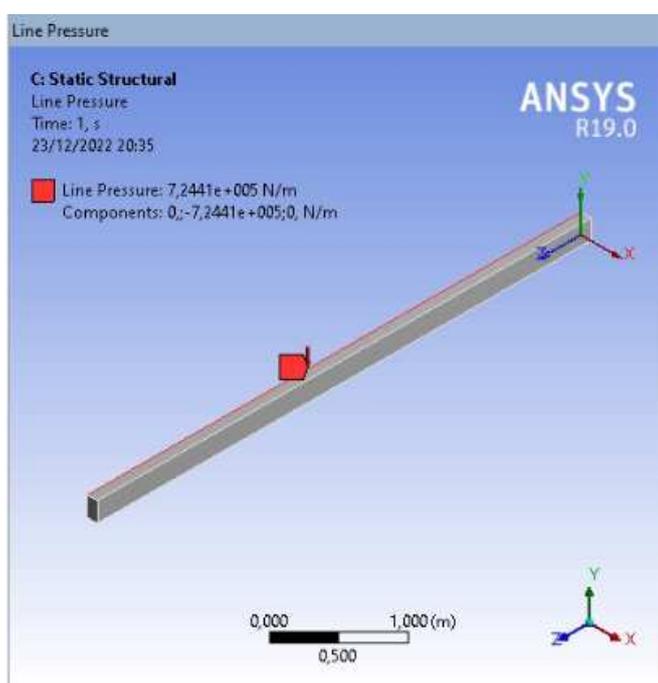


Figura 6.25 – Distribuição do carregamento na viga.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Visando obter uma estimativa para a carga de flambagem, realizou-se a simulação linear, usando o método do autovalor, obtendo $q = 7,5243 \times 10^5 N/m$. Em seguida, realizando a simulação não linear com tal carga, a solução não convergiu. Mas, analisando o resultado da simulação, percebe-se que ela convergiu até um incremento de carga correspondente a 96,27% da carga estimada pelo método do autovalor, isto é, $q = 7,24414 \times 10^5 N/m$. Assim, realizando a simulação não linear com a referida carga, seguindo os mesmos passos utilizados para a realização desta mesma simulação, no caso ($b = 10h$), e extraíndo os dados relacionados ao gráfico da convergência, é obtida a representação dada na Figura 6.26.



Figura 6.26 – Gráfico da convergência.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Da Figura 6.26, é notável que a simulação convergiu após 126 iterações, mas apresentou maior dificuldade para convergência se comparado ao caso $h = 10b$, necessitando, conseqüentemente, de um maior número de iterações do que o estimado para a convergência.

Visando observar o processo de instabilidade da viga, certamente por flambagem, construiu-se o gráfico do deslocamento versus força. Tal gráfico é dado pela Figura 6.27.

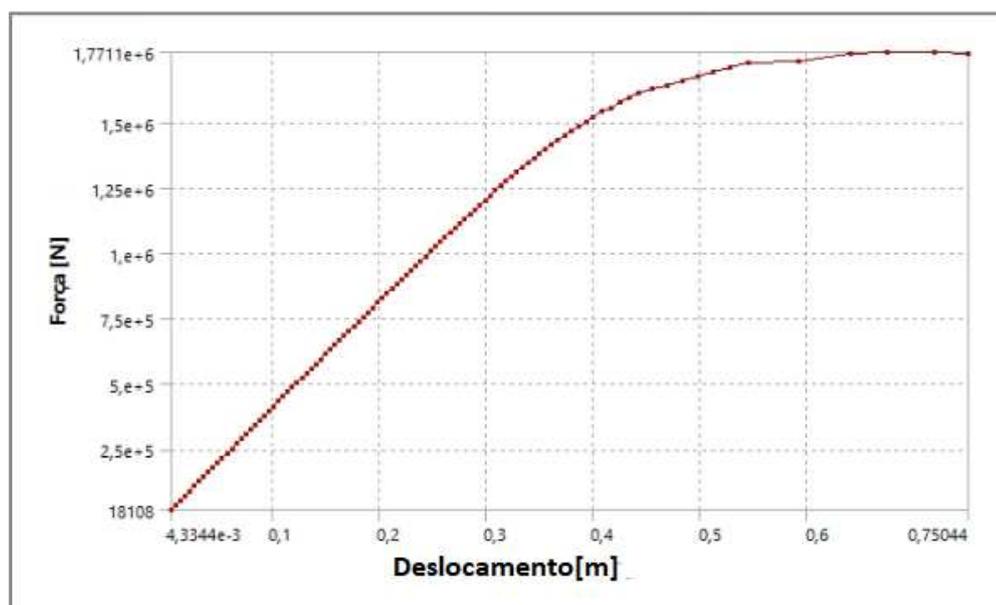


Figura 6.27 – Gráfico deslocamento versus força.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Da análise do gráfico da Figura 6.27, percebe-se uma nítida redução da rigidez a partir da força de reação de apoio $F = 1,25 \times 10^6 N$, correspondente a taxa de carregamento $q = 5 \times 10^5 N/m$. Tal conclusão vem do fato que a inclinação da reta tangente à respectiva curva, durante o processo de simulação, diminui visivelmente a partir do valor da força de reação destacada. A variação da rigidez, deste caso analisado, é notável no gráfico da Figura 6.10 item (a), no qual se percebe, no desenvolvimento da simulação não linear, uma redução de $4,2 \times 10^6 N/m$ para $2,6 \times 10^6 N/m$. A redução é significativa, pois representa, aproximadamente, 40% da rigidez total.

Analisando o gráfico das tensões normais de compressão, pode-se perceber o ponto da simulação em que a viga certamente sofre o primeiro modo de flambagem. Tal gráfico é apresentado na Figura 6.28.

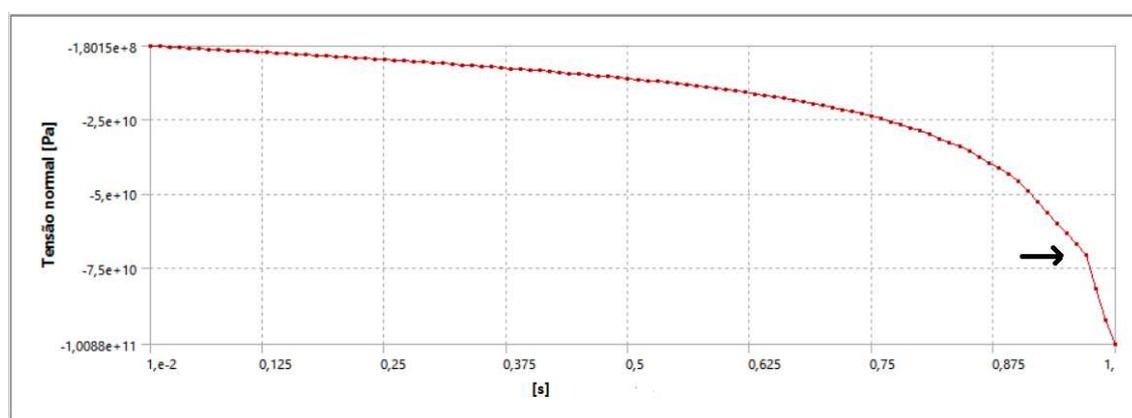


Figura 6.28 – Gráfico das tensões normais de compressão.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Do gráfico da Figura 6.28, pode-se visualizar em qual iteração a viga sofreu o primeiro modo de flambagem. O ponto destacado pela seta corresponde à referida iteração na qual ocorreu o fenômeno. O carregamento, neste ponto, representa 97% da carga crítica estimada para a flambagem.

Como destacado, no início desta seção, neste caso, fica bem visível, na imagem da viga, o deslocamento lateral e a torção. No gráfico da Figura 6.29, é apresentada a imagem da viga, após realizada a simulação não linear.

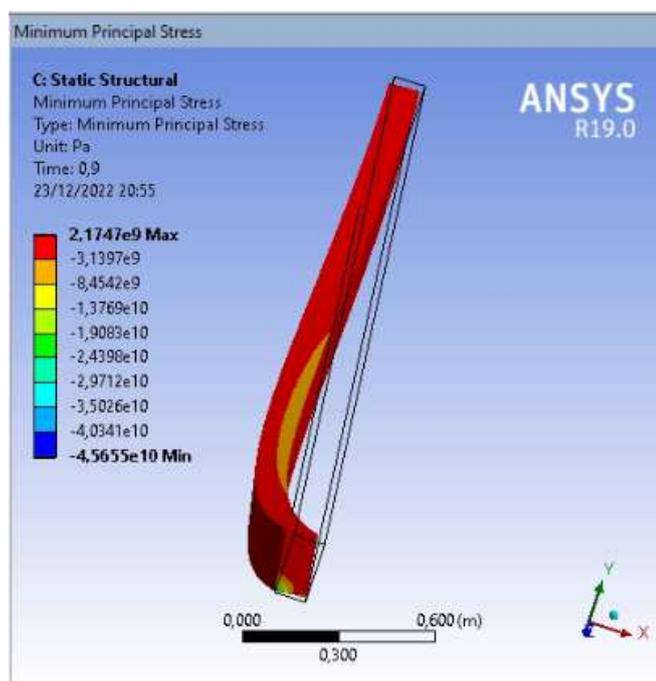


Figura 6.29 – Viga após a análise de flambagem.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Na Figura 6.29, em que estão representadas as tensões normais de compressão, após a realização da simulação não linear, fica perceptível o deslocamento lateral da viga, além da torção. Vale ressaltar que tanto neste caso, como no anterior, os apoios foram mantidos nas arestas inferiores das seções extremas, mantendo a configuração do problema (isto é, um fixo e outro móvel). O deslocamento utilizado para o ajuste e obtenção do parâmetro α que identifica e avalia o efeito em cada iteração é a deflexão transversal no plano zy na direção de y .

Como argumentado anteriormente, o objetivo do trabalho não é analisar o fim do processo, pois vislumbra-se como algo a apresentar métodos para detectar os primeiros sinais do processo de instabilidade. Esta análise inicial visou apenas mostrar que a viga realmente entrou em processo de flambagem.

Da análise do gráfico da Figura 6.27, tomou-se como estimativa que o processo iniciou-se para a força de reação de apoio $F = 1,25 \times 10^6 N$, correspondente à taxa de carregamento $q = 5 \times 10^5 N/m$, que representa, aproximadamente, 70% do carregamento responsável pela ocorrência da flambagem. A partir disto, realizou-se a simulação não linear, obtendo que a flecha máxima TEF converge para a flecha máxima ANSYS para $\alpha = 4,0130$ com erro da ordem de 10^{-5} . Pelo valor obtido para o parâmetro α , percebeu-se que os primeiros sinais da pré-flambagem surgem bem antes deste valor estimado para o carregamento. Daí, iniciou-se a análise com 0,1% da taxa do carregamento.

A evolução do processo é apresentado na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Caracterização evolutiva da flambagem pela solução TEF.

Carga crítica (%)	$\alpha_{TEF \rightarrow ANSYS}$	E_r (Flechas máximas)	Pontos convergidos (%)
0,1	4,0000	10^{-5}	98,65
0,2	4,0000	10^{-5}	97,98
0,3	4,0000	10^{-5}	97,31
0,4	4,0000	10^{-5}	97,98
0,5	4,0000	10^{-5}	96,64
0,6	4,0000	10^{-6}	95,97
0,7	4,0000	10^{-6}	95,97
0,8	4,0001	10^{-5}	97,31
0,9	4,0001	10^{-5}	95,30
1	4,0001	10^{-5}	93,95
2	4,0004	10^{-5}	88,59
3	4,0006	10^{-5}	83,22
4	4,0009	10^{-5}	83,22
5	4,0011	10^{-5}	77,85
6	4,0013	10^{-5}	73,15
7	4,0015	10^{-5}	70,46
8	4,0018	10^{-6}	67,11
9	4,0020	10^{-5}	66,44
10	4,0022	10^{-5}	63,75
20	4,0042	10^{-5}	50,33
30	4,0059	10^{-5}	45,63
40	4,0073	10^{-5}	36,24
50	4,0086	10^{-5}	40,93
60	4,0103	10^{-5}	39,59
70	4,0130	10^{-6}	40,26

Na Tabela 6.2, destaca-se nas respectivas colunas da esquerda para direita, a taxa de carregamento, os valores de α que ajustam o valor máximo das flechas entre as soluções TEF e ANSYS, o erro relativo entre as flechas máximas e a porcentagem de pontos convergidos na vizinhança da flecha máxima, considerando o critério de convergência. Percebe-se que, a partir de 2% do carregamento, são detectados pela solução TEF, através do parâmetro α , os primeiros sinais de instabilidade que certamente correspondem ao processo de pré-flambagem, pois na construção dos dados, foram excluídos outros efeitos incorporados na flecha ANSYS. É evidente que o referido parâmetro começa a desviar da ordem 4 e cresce sem apresentar oscilação à medida que a taxa de carregamento vai crescendo.

Para evidenciar melhor a variação do parâmetro α , com o correspondente aumento da taxa de carregamento, construiu-se o gráfico da Figura 6.30, no qual se destaca a representação visual da variação da porcentagem da carga crítica em função dos correspondentes α_{TEF} , responsáveis pela convergência entre as flechas máximas TEF e ANSYS.

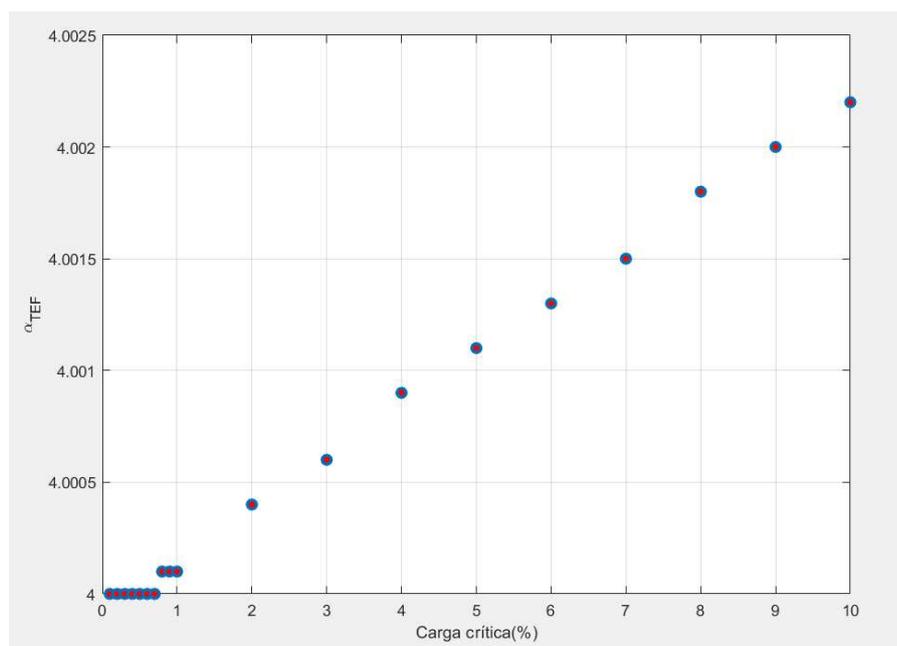


Figura 6.30 – Taxa de variação da carga crítica em função dos valores α_{TEF} .

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

No gráfico da Figura 6.30, considerou-se a taxa de carregamento, variando de 0,1% a 10% da carga crítica de flambagem. É perceptível que, a partir de 0,8% deste valor, o parâmetro α começa a desviar da ordem 4 e cresce com o aumento da taxa de carregamento. Da mesma forma que no caso anterior, considerando que o erro representativo de instabilidade significativa seja da ordem de 10^{-3} , obtém-se $\alpha = 4,0009$ como fator quantificador dos primeiros sinais do processo de pré-flambagem, que corresponde a taxa

de 4% do carregamento e evoluem com o aumento da referida taxa, como constatado no gráfico da Figura 6.30. Além disso, observando a Tabela 6.2, percebe-se que, para o parâmetro $\alpha = 4,0009$, as flechas TEF e ANSYS convergem em 83,22% dos pontos do domínio.

Por fim, dos casos analisados, neste capítulo, é inequívoco que o parâmetro α , incorporado à solução TEF, quantifica a variação da flecha máxima transversal extraída da simulação de elasticidade tridimensional ANSYS, quando é aumentada iterativamente a taxa de carregamento na viga e são filtrados certos efeitos incorporados na referida flecha, visando avaliar apenas os efeitos que contribuem para o processo de flambagem. Além disso, nos dois casos analisados, é notável a convergência entre as flechas da referência e TEF para o valor de α fixado, na vizinhança da flecha máxima. Portanto, além de quantificar, identifica a flecha da referência através da flecha TEF. Destes resultados, pode-se avaliar a variação da rigidez e, conseqüentemente, determinar o parâmetro α que representa um alerta para os primeiros sinais inequívocos de pré-flambagem na estrutura, antes mesmo de qualquer manifestação não explícita no ANSYS.

Capítulo 7

Plasticidade em vigas e as soluções fracionárias

Neste capítulo, é apresentado um estudo sobre a deflexão de vigas considerando os efeitos relacionados ao modo de deformação na condição de plasticidade. Inicialmente, são apresentados alguns conceitos e propriedades da teoria elastoplástica. Em seguida, o parâmetro α , incorporado às soluções fracionárias EBF e TEF, é usado para detecção e avaliação da deflexão em vigas de aço simplesmente apoiada, submetida a carregamentos uniformemente distribuídos com módulo suficiente para provocar, na estrutura, sinais iniciais de plasticidade.

7.1 Plasticidade: conceitos fundamentais

A análise de problemas estruturais relacionados à plasticidade é complexa. Devido a isso, até meados do século *XX*, poucos problemas podiam ser resolvidos e a metodologia empregada tinha como pressupostos a realização de um grande número de experimentos, de onde eram deduzidas algumas reformulações empíricas, apresentando hipóteses que tornavam os preceitos desta ciência bem simplificados (GOMES, 2006).

Com o avanço da tecnologia computacional a partir da década de 1950 as técnicas numéricas permitiram um avanço usando métodos de aproximação de funções, mas não podendo ser descartadas as hipóteses de simplificação. Como exemplos dessas técnicas, menciona-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Atualmente, na maioria dos projetos de estruturas essas técnicas são necessárias, pois permitem representar o comportamento das estruturas com bom realismo, se comparados a resultados desenvolvidos antes do uso do computador (GOMES, 2006).

A imposição de forças externas nas estruturas modificam seu comportamento de várias maneiras. Dependendo da intensidade das forças e da forma da estrutura, as respostas podem ser elásticas ou plásticas. As respostas são elásticas quando as tensões

não ultrapassam a tensão do escoamento do material, caso contrário, estas respostas são plásticas. No caso das deformações elásticas, ao descarregar a estrutura, ela volta ao estado inicial sem sofrer danos. Já no caso das deformações plásticas, pode-se observar deslizamentos no plano cristalino do material, processo irreversível que causa alteração na estrutura cristalina. Logo, ao ser descarregada, ela não volta ao estado inicial apresentando, nestes casos, deformações residuais que contribuirão significativamente para a deformação final da estrutura (BECK, 2009).

Assim, a elastoplasticidade é definida como sendo um estudo comportamental das estruturas constituídas por determinados materiais que depois de um ciclo de carregamento, deformam permanentemente. Além disso, são fenômenos instantâneos, isto é, independem da taxa de carregamento [(NETO; PERIC; OWEN, 2008) e (CECÍLIO, 2011)].

Para uma ilustração visual do fenômeno plástico, é apresentado um exemplo mostrando o que ocorre no caso de um carregamento uniaxial, no qual as tensões na estrutura ultrapassam o limite de escoamento. Tal representação é dada, conforme o gráfico da Figura 7.1.

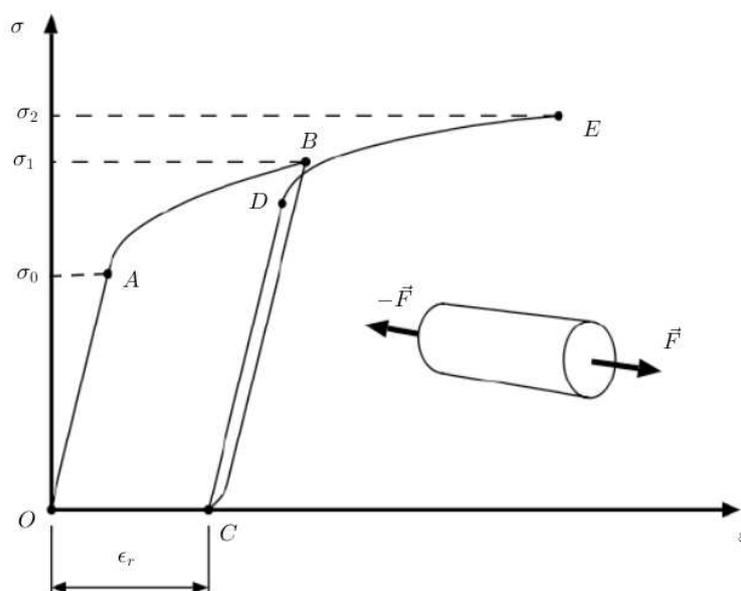


Figura 7.1 – Carregamento uniaxial de uma barra metálica.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

No gráfico da Figura 7.1, tem-se, em um primeiro estágio de carregamento as tensões atingindo σ_1 , com $\sigma_1 > \sigma_0$, em que σ_0 é a tensão de escoamento. Assim, a barra metálica ultrapassou o limite elástico representada pela trajetória OA . Descarregando a barra, ela não volta ao estado inicial, ou seja, não percorre a trajetória BAO e sim a trajetória BC . Durante este primeiro ciclo, observa-se que a barra apresenta deformações

residuais ϵ_r permanentes que representam a deformação plástica do material. Aplicando um segundo ciclo de carregamento, a trajetória da variação das tensões pode ser representada por *CDE*. Daí, continuando os ciclos de carregamento e descarregamento, pode-se inferir que a deformação total no final do processo, depende das deformações residuais dos históricos dos carregamentos anteriores. Logo, a deformação total pode ser dada por

$$\epsilon_{total} = \epsilon_e + \epsilon_p, \quad (7.1)$$

em que ϵ_{total} , ϵ_e e ϵ_p correspondem, respectivamente, às deformações total, elástica e plástica do material. Lembrando que ϵ_p é constituída pelas deformações residuais ϵ_r em cada ciclo de carregamento.

De forma detalhada, pode-se afirmar que o comportamento plástico dos materiais utilizados nas estruturas podem ser analisados, segundo os gráficos da Figura 7.2, representantes de ensaios de tração uniaxiais.

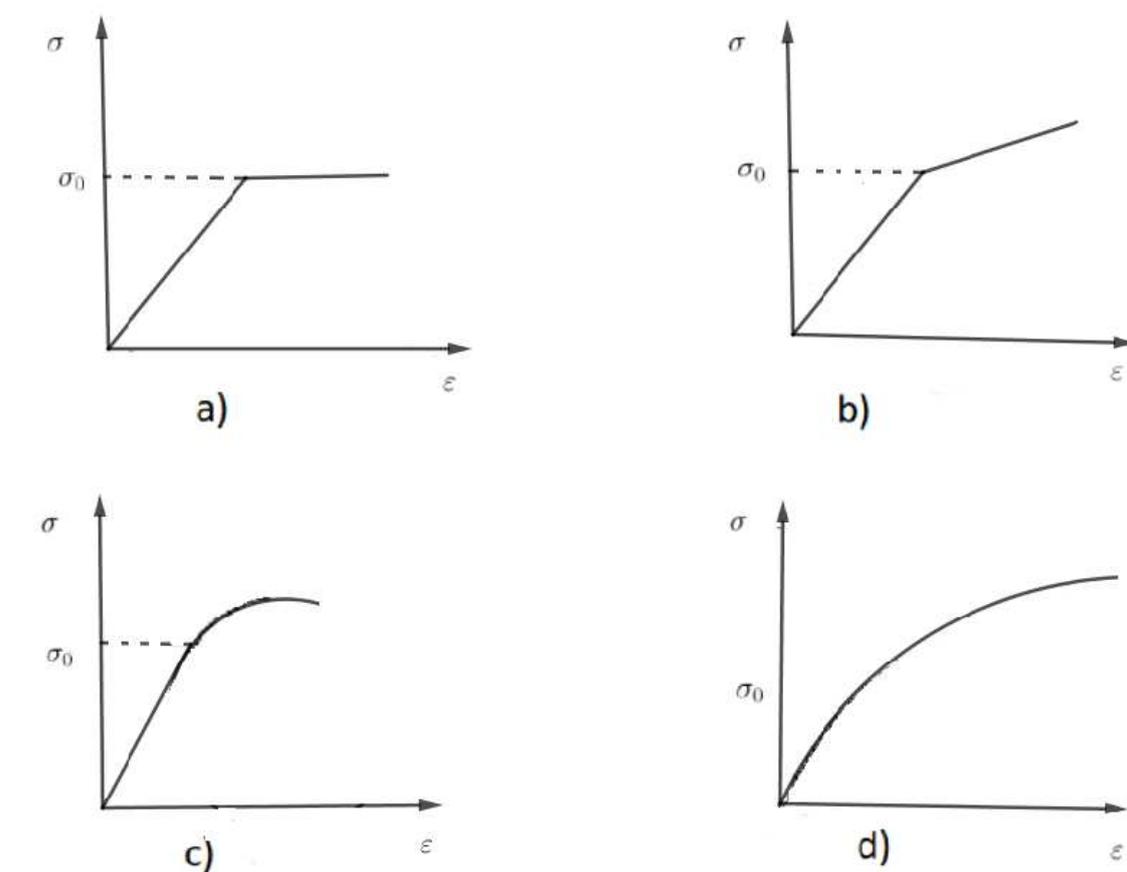


Figura 7.2 – Comportamento plástico dos materiais. Adaptado de (GOMES, 2006).

Fonte: Produzido pelo autor via *software* GeoGebra.

O gráfico da Figura 7.2 (a) representa o caso estudado neste capítulo, pois apresenta a caracterização da tensão deformação em materiais como o aço. Tal gráfico

destaca uma zona elástica linear seguida de uma considerável zona de escoamento. Neste caso, supõem-se que o material obedece à lei de Hooke até σ_0 , depois escoam com tensão constante. Materiais que escoam dessa forma são perfeitamente plásticos. Naturalmente, o diagrama tensão deformação do aço ultrapassa a tensão de escoamento, porém, neste momento, a deformação torna-se tão grande que a estrutura perde sua utilidade. Logo, é comum analisar as estruturas de aço na zona plástica com base no referido gráfico (TIMOSHENKO; GERE, 1983). Para o aço, pode-se usar o mesmo diagrama, tanto na tração quanto na compressão. Materiais com zona elástica linear, seguidas por outra perfeitamente plástica, são denominados elastoplásticos.

No caso (b), tem-se o modelo de plasticidade com encruamento linear. Neste caso, após atingir o escoamento, o módulo tangente é constante e não nulo significando que o material apresenta uma certa resistência, após σ_0 ser atingido havendo conseqüentemente, um aumento de tensões acompanhando de um aumento de deformação. Alguns metais como o alumínio, por exemplo, apresenta este comportamento.

Nos casos (c) e (d), são representados o comportamento não linear dos materiais. Não foram apresentados comentários detalhados sobre eles, pois são casos que não serão abordados neste estudo. Convém destacar apenas que tais modelos podem ser usados para o estudo de materiais como o concreto, por exemplo.

7.2 Plasticidade em vigas: estudo de casos

Na projeção de estruturas a solicitação de carregamentos devem ser criteriosamente analisadas objetivando evitar falhas como flambagem ou deformações plásticas, efeitos estes que podem levar as estruturas ao colapso.

Estruturas como vigas são projetadas na maioria das vezes, para a sustentação de carregamentos cíclicos, como as pontes em vias terrestres e marítimas e a plataforma de um ônibus, por exemplo. Estruturas como estas devem ser desenvolvidas sempre avaliando as falhas por flambagem ou por plasticidade do material que as constituem.

A plataforma do ônibus pode ser solicitada por cargas de pico, cargas extremas causadas pela pressão do choque com buracos em vias, por exemplo. Neste caso, deve ser avaliada, principalmente, a ocorrência de plasticidade e são para casos como este que a tensão de Von Mises apresenta grande utilidade. Já as irregularidades presentes na via são responsáveis pela presença de fadiga na plataforma, processo bem delicado, que pode ocorrer com as tensões bem abaixo das tensões de escoamento, nas quais a propagação na estrutura pode causar a perda da seção resistente, um dos fatores responsáveis pela ocorrência de flambagem. A avaliação para estes casos, devem ser feitas usando as tensões de tração ou compressão.

Alguns dos trabalhos mais recentes que abordam estudo de plasticidade em vigas, encontrados na Literatura, são: [(AVERY; MAHENDRAN, 2000), (KO; KIM; KIM, 2001) (JIANG; CHEN; LIEW, 2002), (DEVLOO; RYLO; SANTOS, 2006), (BECK, 2009), (JIAO et al., 2011) e (MARTINS et al., 2021)].

São abordados aqui sob a visão do cálculo fracionário dois estudo de casos de modelos elastoplástico perfeito, como descrito no gráfico da Figura 7.2, caso (a). Neste modelo, quando o material atinge a tensão de escoamento sofre uma deformação plástica e a partir deste ponto, ocorrem deformações a tensão constante. Nos casos abordados foram considerados uma viga delgada e outra espessa, como descrito a seguir.

7.2.1 Viga delgada

Neste caso, implementou-se no modelo de elasticidade tridimensional ANSYS, a viga simplesmente apoiada, cujo material é o aço AISI 1020, com dimensões $(b, h, L) = (0,3m, 0,1m, 5m)$, malha constituída por hexaedros cujas arestas medem $0,02m$, submetida a um carregamento uniformemente distribuído. O ensaio de tração uniaxial para o respectivo material apresenta tensão de escoamento $\sigma_0 = 4,7055 \times 10^8 Pa$ (LEITE et al., 2017).

Como já analisado na Subseção 5.5.2, quando é tomada a deflexão transversal desta viga, obtida da simulação tridimensional linear ANSYS tomando como caminho o eixo baricêntrico e filtrando os efeitos dos apoios, ela converge para solução EB, isto é, $EBF(\alpha = 4)$. Então, realizou-se a simulação da referida viga no ANSYS considerando os efeitos plásticos. Existem vários modos de ativar os efeitos de plasticidade na simulação ANSYS. Estes modos de ativação estão no ícone “Engineering data” na opção “Plasticity”. Na referida opção, ativou-se o comando “Bilinear Isotropic Hardening”. Daí, o *software* pede para inserir a tensão de escoamento do material e o módulo tangente. Para o modelo elastoplástico perfeito, o módulo tangente é nulo. Adicionando tais dados, realizou-se a simulação com a viga submetida ao carregamento uniformemente distribuído $q = 8,82 \times 10^4 N/m$.

Para avaliar se houve plasticidade em alguma parte da dimensão da viga, foi usado o comando “Equivalent Plastic”. Daí, foram observados no material que constitui a viga, sinais de plastificação na parte central da viga, conforme destacado na Figura 7.3.

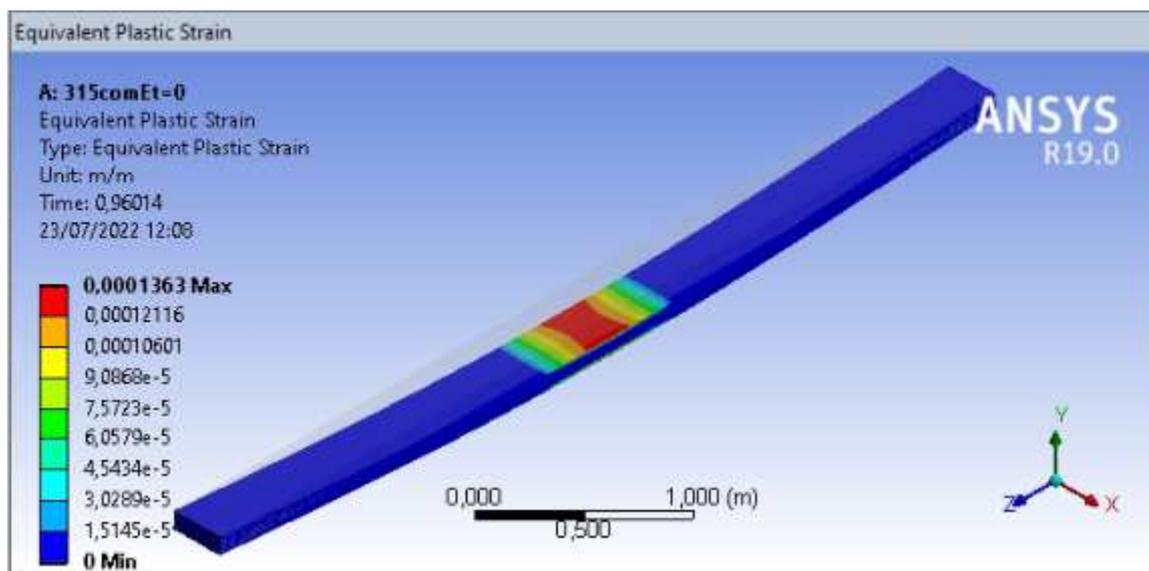


Figura 7.3 – Plasticidade na viga.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

No passo seguinte, foi extraída a deflexão transversal, obtida da solução ANSYS no plano zy tomando o caminho pelo eixo baricêntrico e confrontada com a solução EB. Disto, obtém-se o gráfico da Figura 7.4.

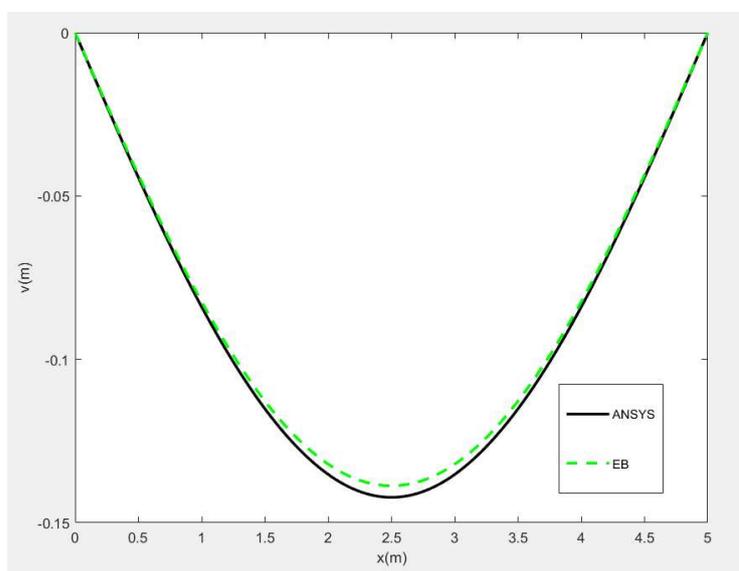


Figura 7.4 – Confronto entre as soluções EB e ANSYS sem filtro.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

No gráfico da Figura 7.4, foi constatado que a solução do ANSYS resulta em flechas maiores que a solução EB, principalmente na parte central, na qual foi constatada presença de plasticidade, como é notável no gráfico da Figura 7.3. Vale lembrar que esta

diferença representa a contribuição de dois efeitos, a saber: a concentração de tensões nos apoios e os efeitos plásticos. Não há efeitos de grandes deflexões, pois o comando “Large deflection” foi desativado na simulação.

Como o propósito é identificar e avaliar os efeitos plásticos na flecha ANSYS através do parâmetro α incorporado à solução EBF, os efeitos de apoios foram filtrados usando a Equação (5.3) e, em seguida, determinou-se o parâmetro α da solução EBF responsável pela convergência entre as flechas máximas ANSYS e EBF.

Desenvolvendo os procedimentos descritos no parágrafo anterior, obtém-se que a flecha máxima da solução EBF converge para a flecha máxima ANSYS para $\alpha = 4,0185$ com erro relativo da ordem de 10^{-5} . O gráfico da Figura 7.5 apresenta para o α supracitado a comparação entre as referidas flechas e o erro relativo entre elas em (a) e (b), respectivamente.

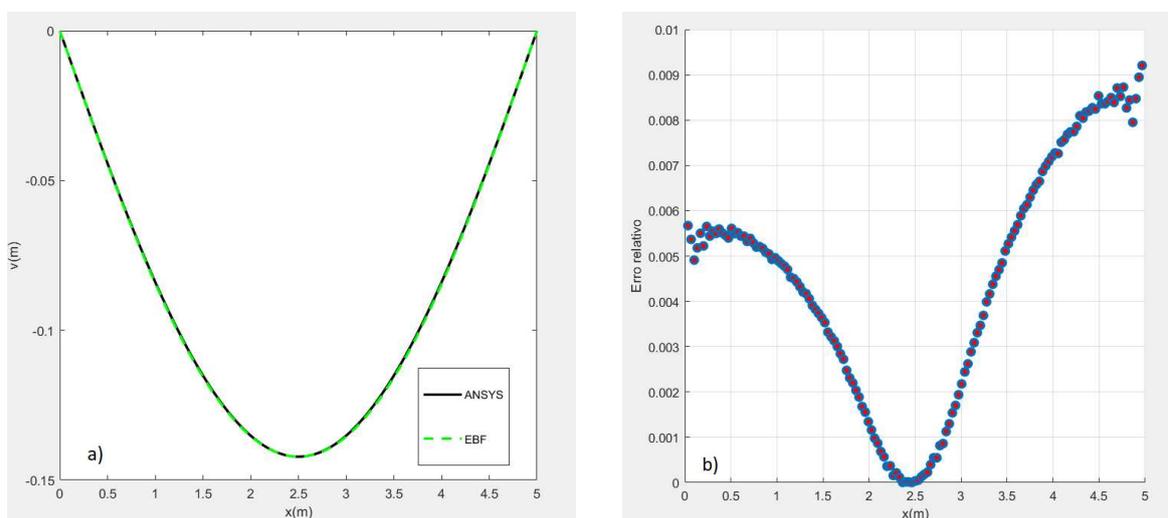


Figura 7.5 – Flechas EBF e ANSYS: a) Confronto e b) Erro relativo.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Considerando o critério de convergência da malha e analisando o erro relativo apresentado pelo gráfico da Figura 7.5, item (b) e determinado pela Equação (5.6), conclui-se que as flechas EBF e ANSYS convergem além da posição de flecha máxima, em mais 22 pontos de sua vizinhança, correspondendo a 14,76% dos pontos selecionados para a constituição do domínio (149 pontos).

Um fato interessante a ser destacado é que ao diminuir o carregamento dessa mesma viga, chega-se a um ponto em que o comando “Equivalent Plastic” não identifica formação plástica na viga. Por outro lado, tomando a flecha máxima ANSYS em tal ponto, filtrando os efeitos de apoios e confrontando com a flecha máxima EBF, obtém-se α maior que 4.

Usando esta viga, submetida a carga $q = 8,46 \times 10^4 N/m$ e realizando a simulação não linear, o comando “Equivalent Plastic” não identifica formação plástica, conforme indica a Figura 7.6.

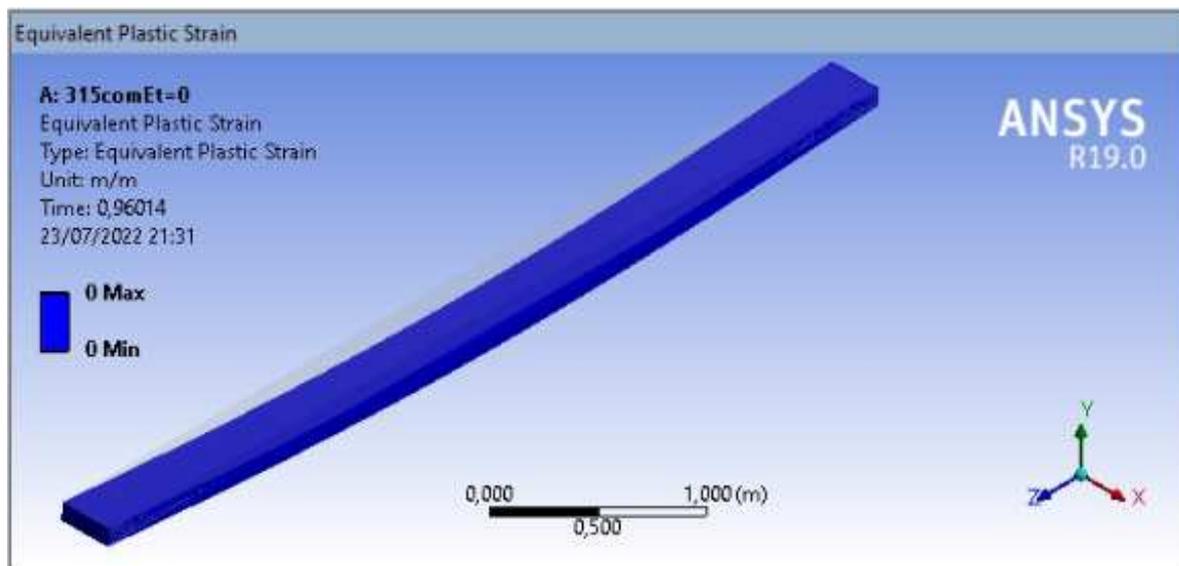


Figura 7.6 – Plasticidade na viga.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Por outro lado, o valor máximo da flecha EBF converge para o máximo da flecha ANSYS para o parâmetro $\alpha = 4,0051$ com erro relativo da ordem de 10^{-5} . No gráfico da Figura 7.7, tem-se a representação em (a), das flechas para o α supracitado e, em (b), do erro relativo.

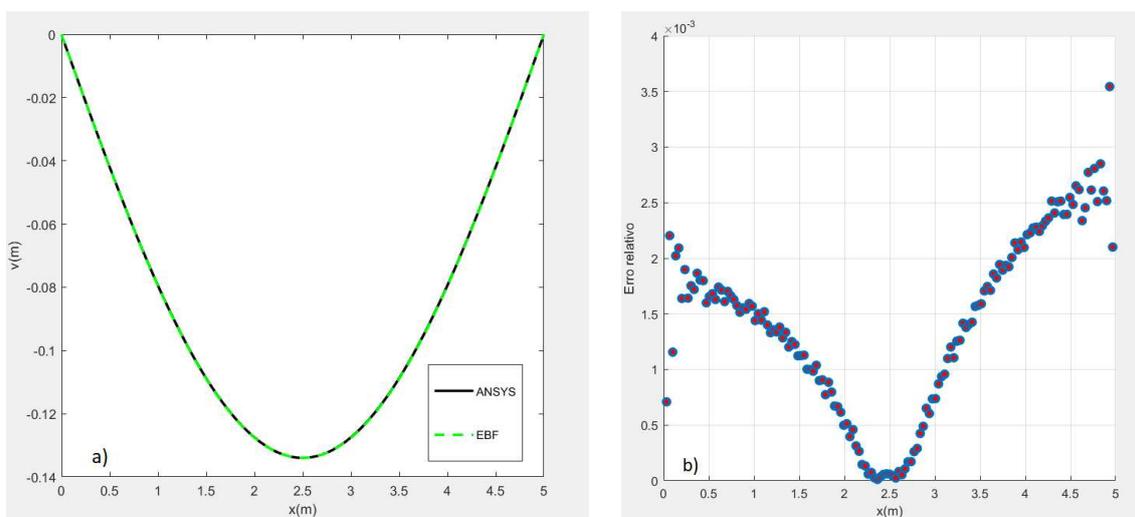


Figura 7.7 – Flechas EBF e ANSYS: a) Comparação e b) Erro relativo.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Para este caso, conclui-se que, mesmo antes do comando “Equivalent Plastic” identificar efeitos de plasticidade, já são detectadas as contribuições destes efeitos na deflexão ANSYS através do parâmetro α incorporado à solução EBF.

Com base na evidência de que os efeitos detectados, na flecha ANSYS pelo parâmetro α da solução EBF já são contribuição da plasticidade, foi tomada a flecha ANSYS considerando a implementação, sem avaliação da plasticidade, filtrado os efeitos relacionados aos apoios e confrontado a solução com a flecha EB (EBF para $\alpha = 4$). Os resultados obtidos são revelados no gráfico da Figura 7.8, no qual, em (a), tem-se o confronto entre as referidas flechas e, em (b), o erro relativo entre elas.

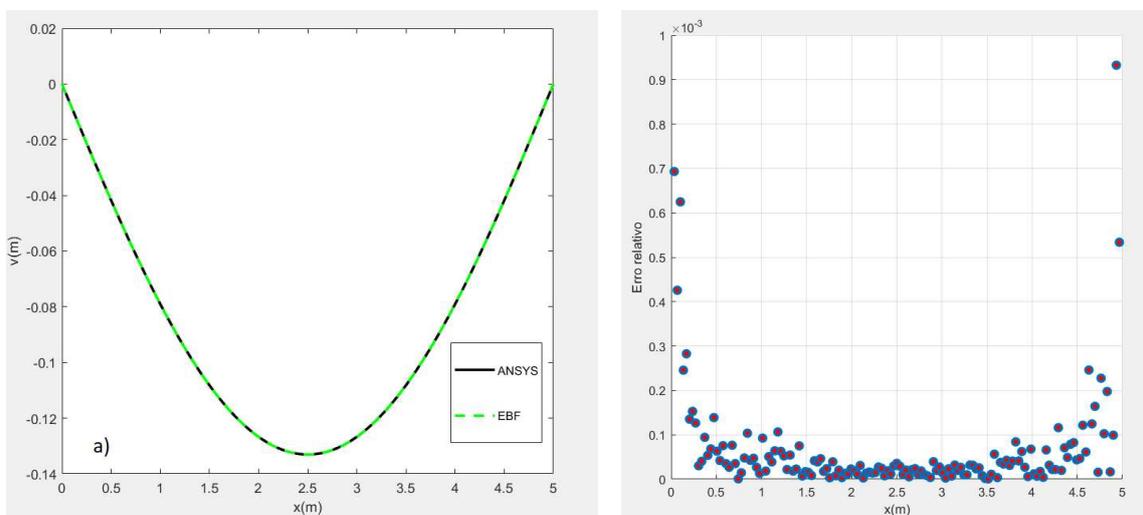


Figura 7.8 – Flechas EBF e ANSYS: a) Comparação e b) Erro relativo.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

É notável, do gráfico da Figura 7.8, que as flechas convergem, pois o erro relativo entre elas apresenta ordem menor ou igual a 10^{-4} , coerente com o critério de convergência adotado.

7.2.2 Viga espessa

Para este caso, foi tomada a viga com dimensões $(b, h, L) = (0, 3m, 0, 5m, 5m)$ e implementada com a mesma malha usada no caso anterior. A referida viga é espessa, pois sua razão de aspecto é $\frac{L}{h} = 10$. Neste caso, os efeitos de cisalhamento contribuem significativamente na deflexão. De acordo com [(SILVA, 2010), (SOUZA, 2016) e (SILVA, 2019)], além da análise feita na Subseção 4.2.1, o modelo TE é o mais adequado para avaliação da deflexão. Conseqüentemente, utilizou-se a solução TEF para estudar os efeitos plásticos neste caso.

Inicialmente, foram implementados dois modelos no ANSYS, um com o ambiente plástico ativado e outro sem a ativação do mesmo. Daí, submetendo os referidos modelos a carregamentos de mesmo módulo, tais que não fosse detectada presença de plasticidade no modelo em que o comando “Equivalent Plastic” foi ativado e comparando às respectivas flechas, obtém-se o gráfico, conforme a Figura 7.9, no qual, em (a), tem-se o confronto entre as flechas dos referidos casos e, em (b), o erro relativo entre elas.

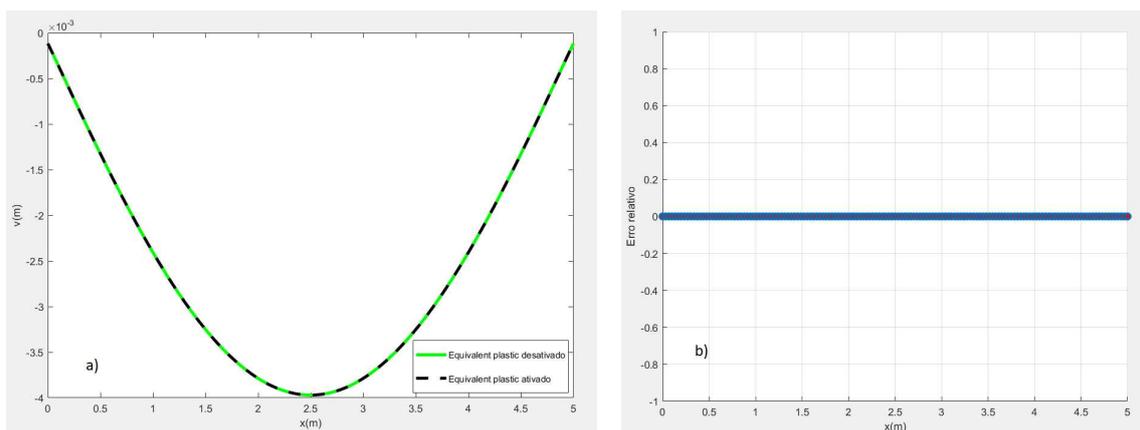


Figura 7.9 – Soluções sem e com modo plástico ativado: a) Confronto e b) Erro relativo.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

A carga utilizada para obtenção das flechas, representadas no gráfico da Figura 7.9 (a), tem módulo $q = 3 \times 10^5 \text{ N/m}$. De tal gráfico, percebe-se que, quando a simulação não linear não identifica plasticidade, as flechas de ambas as simulações coincidem, pois o erro relativo (determinado pela Equação (5.4)) entre as referidas flechas é nulo, como mostra o referido gráfico no item (b). Para identificar os efeitos de plasticidade através do parâmetro α incorporado na solução TEF, basta tomar um caso no qual a simulação não linear identifique plasticidade, filtrar os efeitos dos apoios e determinar o parâmetro α , correspondente à convergência entre as respectivas flechas máximas.

Seguindo a metodologia descrita anteriormente, observa-se que, tomando $q = 3,9 \times 10^5 \text{ N/m}$, a simulação não linear ANSYS identifica plasticidade, conforme mostra a Figura 7.10.

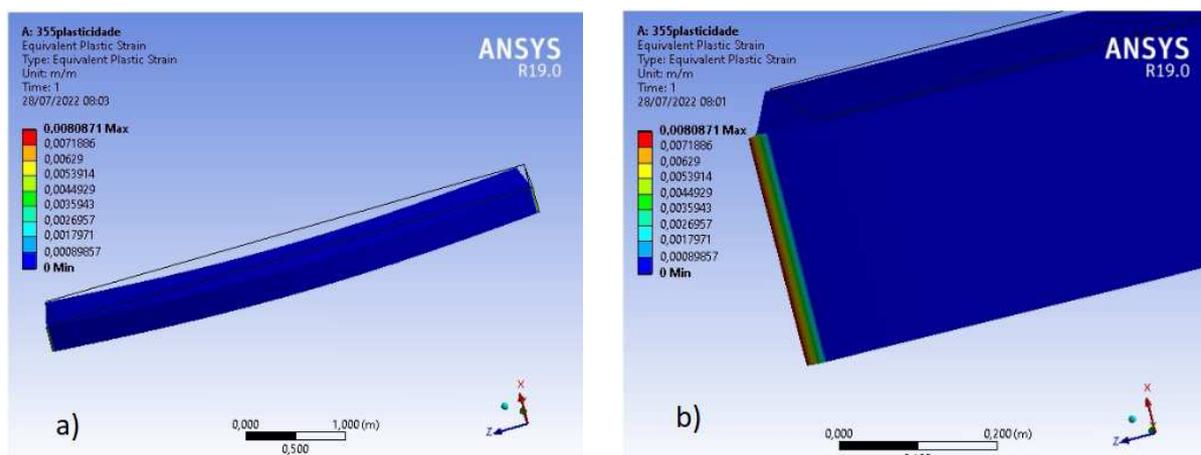


Figura 7.10 – Simulação plástica.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* ANSYS.

Na Figura 7.10, é destacada a simulação não linear com o modo “Equivalent Plastic” ativado. Em (a), foi representada a viga completa e, em (b), a região da viga na qual são detectados os efeitos plásticos. Como é evidente, tais efeitos são detectados justamente onde foram implementados os apoios.

Tomando a deflexão transversal no plano zy e pelo eixo baricêntrico da referida simulação não linear ANSYS, a qual detectou os efeitos plásticos, filtrando os efeitos causados pela concentração de tensão nos apoios usando, neste caso, a Equação (5.3) e fazendo o ajuste entre as flechas máximas TEF e ANSYS, obtém-se que a flecha máxima TEF converge para a flecha máxima ANSYS para $\alpha = 4,0175$ com erro relativo da ordem de 10^{-5} . Além disso, considerando o critério de convergência, percebe-se que as flechas convergem, além do ponto de flecha máxima, em mais 25 pontos de sua vizinhança.

Na Figura 7.11, são representados, em (a), o gráfico das respectivas flechas para o referido α e, em (b), o gráfico do erro relativo entre elas.

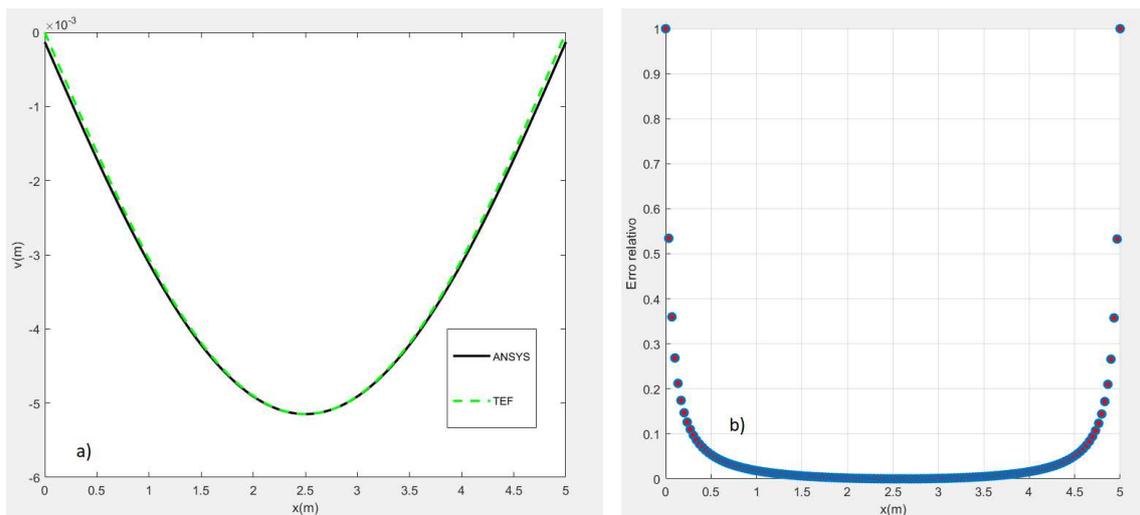


Figura 7.11 – Flechas TEF e ANSYS: a) Comparação e b) Erro relativo.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

No gráfico da Figura 7.11, fica evidente a convergência da flecha na parte central da viga, tanto pelas curvas das deflexões, no item (a), como pelo erro relativo no item (b). Portanto, para $\alpha = 4,0175$, a solução TEF detecta e avalia, separadamente, a contribuição da deformação plástica na deflexão ANSYS que não é explícita pelo *software* ANSYS.

Um fato observado, neste caso, é que, diminuindo a taxa de carregamento até $q = 3,3 \times 10^5 N/m$, tem-se ainda que o ambiente “Equivalent Plastic” detecta efeitos plásticos.

Por outro lado, quando são comparadas as deflexões dos modelos com mesmo carregamento $q = 3,3 \times 10^5 N/m$, mas com o dispositivo plástico ativado e desativado, respectivamente, percebe-se que as flechas convergem. No gráfico da Figura 7.12, tem-se, em (a), o confronto das flechas entre o modelo com módulo plástico ativado e desativado e, em (b), o erro relativo entre elas.

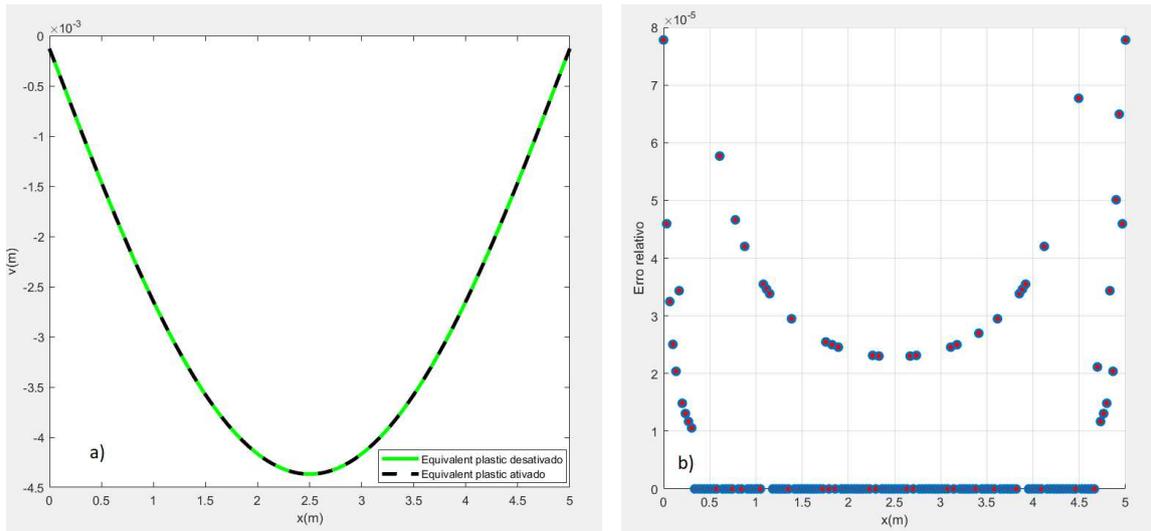


Figura 7.12 – Soluções sem e com modo plástico ativado: a) Confronto e b) Erro relativo.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

É visível, do gráfico da Figura 7.12, que o erro relativo entre as referidas flechas apresenta ordem menor ou igual a 10^{-5} que, neste caso, convergem pelo critério de convergência adotado.

Isso garante que a flecha ANSYS do modelo, com o dispositivo plástico ativado, não contempla a contribuição dos efeitos plásticos. Neste caso, estão sendo contemplados os efeitos de momentos, cisalhamento e da concentração de tensão nos apoios. Portanto, tomando tal flecha, filtrando os efeitos de apoios e confrontando a flecha máxima obtida com a flecha máxima TEF, conclui-se que elas convergem para $\alpha = 4$, conforme gráfico da Figura 7.13.

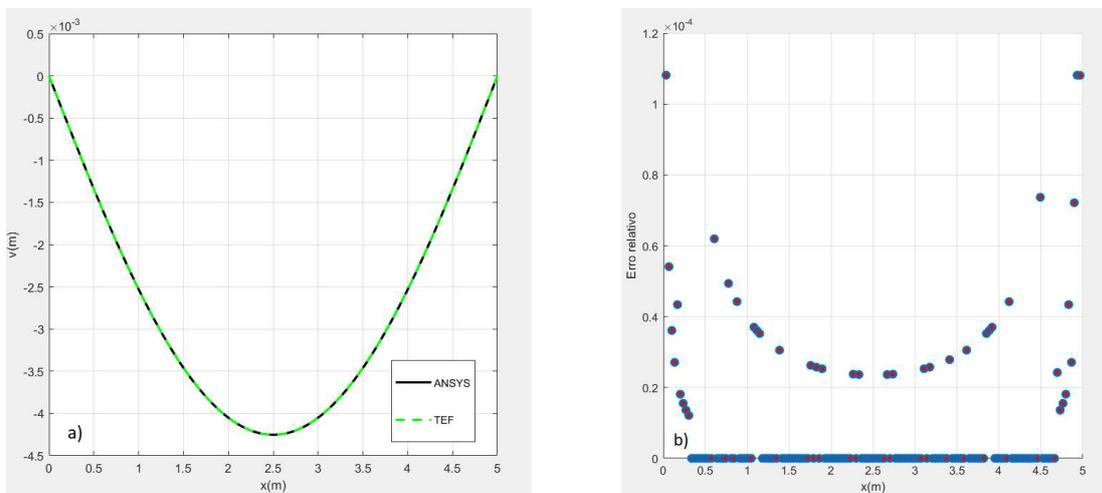


Figura 7.13 – Flechas TEF e ANSYS: a) Comparação e b) Erro relativo

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

No gráfico da Figura 7.13, item (b), é evidente que o erro relativo entre as flechas apresenta ordem menor ou igual a 10^{-4} , logo, convergem. Como esperado, a solução TEF não identifica efeitos plásticos para o referido caso. Neste caso, a filtragem foi realizada usando a equação

$$v_r = v_{linear} - v_{TE}, \quad (7.2)$$

onde v_{linear} e v_{TE} são as flechas da simulação linear ANSYS e da solução analítica TE, respectivamente. Para casos de vigas espessas, a filtragem usando a Equação (7.2) apresenta resultados eficientes.

Da análise feita neste capítulo ficou evidente que as soluções fracionárias EBF e TEF podem se apresentar como recursos para se detectar, identificar e avaliar, separadamente, os primeiros sinais de efeitos plásticos, tanto em vigas delgadas como nas vigas espessas, antes mesmo que se tornem inequivocamente explícitos a partir da resposta do ANSYS. Convém destacar que a identificação dos referidos efeitos é dada pelos pontos convergentes entre as flechas ANSYS e fracionárias. A convergência é obtida devido à liberdade do parâmetro α no intervalo em que está definido, enquanto a avaliação é dada pelo desvio do referido parâmetro em relação à ordem inteira.

De modo geral, além dos efeitos plásticos, as soluções supracitadas apresentam-se como boas ferramentas para identificar e avaliar diversos outros fenômenos físicos, como o cisalhamento, a concentração de tensão nos apoios, os efeitos de grandes deflexões causados pelas forças axiais que agem no eixo baricêntrico, quando determinadas categorias de vigas são submetidas a altas tensões e aos efeitos de pré-flambagem. A confirmação destes fatos foram constatadas nos diversos problemas analisados, durante o desenvolvimento deste trabalho, especificamente nos capítulos 5, 6 e 7. Alguns destes resultados analisados pelas soluções supracitadas, já foram publicados sob forma de artigos em congressos e revistas. Os trabalhos publicados foram: [(LUSTOSA; BANNWART; OLIVEIRA, 2021), (LUSTOSA; BANNWART; OLIVEIRA, 2022b) e (LUSTOSA; BANNWART; OLIVEIRA, 2022a)].

Conclusões

Neste trabalho foi proposto um novo procedimento para detecção e avaliação de efeitos estruturais que diferem do perfil de deflexão fornecido pelos modelos (EB) e (TE) para vigas simplesmente apoiadas submetidas a cargas estáticas uniformemente distribuídas. Como é conhecido da literatura, mesmo sendo restringidas a condições lineares, aplicações reais impactam em efeitos não contemplados por esses modelos simples, como concentração de tensões, devido às reações de apoio, distribuição não homogênea de temperatura ou instabilidades estruturais como flambagem, por exemplo.

Os modelos (EBF) e (TEF) foram obtidos incorporando aos modelos clássicos EB e TE um parâmetro fracionário α , usando como metodologia a derivada fracionária de Caputo. Para obter as soluções analíticas dos modelos supracitados, utilizou-se a transformada de Laplace da derivada de Caputo. Com as soluções analíticas em mãos, buscou-se uma referência que pudesse contemplar efeitos, além dos contemplados pelos modelos clássicos EB e TE. A referência selecionada para esta medida foi o *software* ANSYS, uma fonte precisa e confiável de informações realistas sobre o comportamento estrutural, que engloba diversos efeitos não contemplados pelos modelos EB e TE, mas de forma implícita, isto é, sem explicitá-los, fornecendo apenas totalidade da contribuição de tais efeitos. A simplicidade do sistema aumenta o potencial de precisão e análise.

Selecionada a referência, foi feita uma análise de precisão dos modelos fracionários, implementando no modelo de elasticidade tridimensional ANSYS uma viga simplesmente apoiada, isotrópica, prismática, espessa e sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída. Do ajuste inicial entre a deflexão obtida nos modelos analíticos e numéricos, concluiu-se que o modelo analítico EBF permitiu detecção e avaliação dos efeitos de cisalhamento, através do desvio do valor de α em relação ao da ordem inteira de referência, neste caso 4. Além disso, percebeu-se que tais soluções poderiam ser empregadas para o estudo de outros efeitos até neste momento não modelados analiticamente. Essa constatação advém do fato das soluções identificarem a solução do ANSYS, referência bem próxima da realidade física. A apresentação e a solução dos modelos, em conjunto com estas análises iniciais, deram origem ao trabalho de congresso publicado no CNMAC 2021, intitulado “On the Euler-Bernoulli and Timoshenko-Ehrenfest beam theories under fractional calculus approach” (LUSTOSA; BANNWART; OLIVEIRA, 2021).

Os passos seguintes do trabalho foram investigar que outros efeitos poderiam ser avaliados, em separado, pelas soluções fracionárias. Um dos primeiros fenômenos obtidos na análise de referência e, conseqüentemente, detectados e avaliados separadamente pela solução TEF, foi a concentração de tensões devido às reações de apoio. Usando o processo aqui chamado de filtragem dos efeitos de apoios na deflexão transversal, obtida do modelo de elasticidade tridimensional ANSYS, foi detectado e avaliado pela solução EBF, o efeito físico das forças axiais que surgem no eixo baricêntrico de vigas delgadas com $b \leq h$ quando a viga é submetida a grandes carregamentos. Estas análises, incorporadas à análise de precisão inicial, foram conteúdos para a produção do artigo publicado na revista TCAM (Trends in Computational and Applied Mathematics), intitulado “On the separate assessment of structural effects on the simple beam deflection in the light on fractional calculus”, (LUSTOSA; BANNWART; OLIVEIRA, 2022b) e do artigo apresentado no Brazilian Symposium on Fractional Calculus 2022, intitulado “Fractional calculus applied to evaluate stress concentration and shear effects in simply supported beams” e publicado na revista CQD (Revista Eletrônica Paulista de Matemática) (LUSTOSA; BANNWART; OLIVEIRA, 2022a).

Para estudar o fenômeno de flambagem lateral com torção, foi necessário implementar no ANSYS, diversas vigas delgadas e desenvolver simulações não lineares em cada caso implementado, considerando a variação da rigidez geométrica para diferenciar o tipo de viga que sofre apenas grandes deflexões sem apresentar sinais de flambagem das vigas que apresentam sinais de flambagem. Feito isso, foram detectados e avaliados, separadamente, os sinais iniciais de flambagem lateral com torção, em duas vigas, selecionadas entre aquelas que apresentaram flambagem no estudo supracitado.

Na última etapa do trabalho foram apresentados alguns conceitos básicos sobre a teoria da plasticidade e, em seguida, detectados e avaliados, separadamente, os efeitos iniciais de formação plástica em dois casos; no primeiro, foi selecionada uma viga delgada e, no segundo, uma viga espessa.

O ajuste do parâmetro α foi explorado de dois modos diferentes: pela flecha máxima e pelo método de mínimos quadrados. Dos resultados obtidos foi constatado que no geral, o método de ajuste pela flecha máxima apresentou-se melhor pelo fato de contemplar a flecha máxima em todos os casos estudados (ponto que apresenta maior sensibilidade na detecção de efeitos físicos), fato que não ocorreu ajustando pelo método de mínimos quadrados. Desta análise, ficou inequívoco que o melhor valor de α para avaliação e detecção dos efeitos é obtida ajustando pela flecha máxima.

Por fim, de todas as análises realizadas, concluiu-se que esta abordagem inédita do cálculo fracionário no estudo da deflexão de vigas simplesmente apoiadas, apresentou a qualidade esperada como propósito do trabalho, pois o método aplicado foi bem sucedido na detecção e avaliação da magnitude dos efeitos estruturais analisados. O desvio apresentado

pelo parâmetro fracionário, incorporado aos modelos clássicos EB e TE, ocorre em situações em que, apesar de a detecção ter sido feita pelo ANSYS, não é explícito, ou seja, o ANSYS fornece todas as informações, mas não apresenta uma exploração de cada efeito individualmente. Já o cálculo fracionário consegue explorar estes efeitos não na questão de contemplá-los, mas no sentido da detecção e avaliação.

Portanto, os resultados obtidos abrem perspectivas para trabalhos futuros, pois é uma ferramenta que pode ser utilizada, por exemplo, para detectar e avaliar efeitos em estudos experimentais. No trabalho não foi feito isso; mas, a partir da referência utilizada, a comprovação de tal fato é inequívoca.

Para perspectivas de trabalhos futuros várias situações podem ser estudadas visando ao propósito deste trabalho, dos quais, são destacados: a avaliação de efeitos térmicos em que no caso de uma viga simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída, tem-se resultados bem avançados neste sentido; a avaliação de efeitos em uma viga em balanço, considerando o carregamento distribuído ou concentrado na extremidade livre; a potencialização da avaliação da carga crítica de Euler em colunas submetidas a carregamentos axiais, as quais, neste caso, já se tem algo desenvolvido; o efeito de cargas concentradas ou distribuídas em intervalos de uma viga simplesmente apoiada, pois os modelos fracionários podem ser ajustados aos valores de referências, não só nos pontos de flecha máxima, mas em qualquer posição da referida flecha; considerar os modelos fracionários deduzidos neste trabalho incluindo as dimensões das grandezas, pois como destacado na Seção 4.1, tais modelos foram desenvolvidos considerando as grandezas adimensionais.

Referências

- ABNT. *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. Rio de Janeiro: NBR - 8800, 2008. Citado na página 134.
- ABREU, J. F. A. C. Estudo computacional via ANSYS de vigas, arcos e anéis com restrições de contato impostas por bases elásticas. Dissertação (Mestrado). Ouro Preto - MG, 2016. Citado na página 90.
- ALMEIDA, M. C. F. de. *Estruturas isostáticas*. Rio de Janeiro: Oficina de Textos, 2009. Citado na página 27.
- ALMEIDA, R. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 44, p. 460–481, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 32.
- ALMEIDA, R.; BASTOS, N. R.; MONTEIRO, M. T. T. Modeling some real phenomena by fractional differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 39, n. 16, p. 4846–4855, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 32.
- ALVES, A. F. *Elementos Finitos: a Base da Tecnologia CAE. Análise Não Linear*. São Paulo, SP: Érica, 2012. Citado 7 vezes nas páginas 27, 28, 56, 101, 121, 126 e 137.
- _____. *Elementos Finitos A Base da Tecnologia CAE*. São Paulo: Saraiva Educação SA, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 94.
- ANSYS, I. R. *17.0 documentation for Ansys*. USA: Canonsburg, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 93.
- ARAÚJO, R. R.; FERREIRA, G. M.; SCHUMANN, R. Revisão simplificada de análise não linear e a sua aplicação em programa computacional ansys®. *Projectus*, v. 1, n. 2, p. 88–97, 2017. Citado na página 117.
- ASSAN, A. E. *Resistência dos Materiais*. Campinas - SP: Editora Unicamp, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 21, 24, 27, 35 e 63.
- ATAN, E. On the prediction of the design criteria for modification of contact stresses due to thermal stresses in the gear mesh. *Tribology International*, Elsevier, v. 38, n. 3, p. 227–233, 2005. Citado na página 88.
- AVERY, P.; MAHENDRAN, M. Distributed plasticity analysis of steel frame structures comprising non-compact sections. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 22, n. 8, p. 901–919, 2000. Citado na página 162.
- AZEVEDO, Á. F. Método dos elementos finitos. *Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*, v. 1, n. 7, 2003. Citado na página 27.

- BALEANU, D.; MACHADO, J. A. T.; LUO, A. C. *Fractional dynamics and control*. New York: Springer Science & Business Media, 2011. Citado na página 30.
- BARROS, L. C.; LOPES, M. M.; PEDRO, F. S.; ESMI, E.; SANTOS, J. P. C. dos; SÁNCHEZ, D. E. The memory effect on fractional calculus: an application in the spread of covid-19. *Computational and Applied Mathematics*, Springer, v. 40, n. 3, p. 1–21, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 78.
- BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. USA: Klaus-Jurgen Bathe, 2006. Citado na página 137.
- BATISTA, M. Large deflections of a beam subject to three-point bending. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Elsevier, v. 69, p. 84–92, 2015. Citado na página 30.
- BECK, R. Identificação experimental de curvas tensão-deformação a taxa constante por ensaios axiais de impacto em corpos de prova de PVC e PP. Dissertação (Mestrado). Florianópolis - SC, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 28, 159 e 162.
- BLASZCZYK, T. Analytical and numerical solution of the fractional Euler–Bernoulli beam equation. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Mathematical Sciences Publishers, v. 12, n. 1, p. 23–34, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- BONI, M. D. T. M. Cálculo fracionário aplicado às equações horárias do movimento e outras aplicações. Dissertação (Mestrado). Instituto Federal de São Paulo, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 78.
- CAMARGO, R. F. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Citado na página 30.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. *Cálculo Fracionário*. São Paulo: Livraria da Física, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 31, 33, 74 e 75.
- CARVALHO, C. D. F. Simulação numérica e verificação experimental do comportamento elástoplástico de espumas metálicas. Dissertação (Mestrado). Minho - Portugal, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 93.
- CASTRO, A. L. R.; SILVA, C. C.; FAKURY, R. H. Influência da distorção da alma na flambagem lateral com torção de perfis I submetidos a momento constante e carga uniformemente distribuída. Congresso latino americano de construção metálica, São Paulo, 2016. Citado na página 134.
- CECÍLIO, D. L. Modelagem e simulação elastoplástica em elementos finitos. Dissertação (Mestrado). Campinas - SP, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 159.
- CHAN, K.; LAI, K.; STEPHEN, N.; YOUNG, K. A new method to determine the shear coefficient of Timoshenko beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 330, n. 14, p. 3488–3497, 2011. Citado na página 65.
- CHEN, W. F.; LUI, E. M. *Structural Stability: Theory and Implementation*. New York, 1987. Citado na página 127.
- CLARK, J.; HILL, H. Lateral buckling of beams. *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers, v. 86, n. 7, p. 175–196, 1960. Citado na página 29.

- CONTHARTEZE, E. G. *Equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014. Citado na página 31.
- COSTA, R. S. Um estudo de equações diferenciais aplicado à flexão de vigas. Dissertação (Mestrado). Unicamp, Campinas - SP, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.
- DEBNATH, L.; BHATTA, D. *Integral Transforms and Their Applications*. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 77.
- DEVLOO, P. R.; RYLO, E. C.; SANTOS, E. S. On an object oriented implementation of plasticity models. *Journal Communications in Numerical Methods in Engineering*, Campinas, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 162.
- DONG, S.; ÇARBAŞ, S.; TACIROGLU, E. On principal shear axes for correction factors in Timoshenko beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 50, n. 10, p. 1681–1688, 2013. Citado na página 65.
- DUGOWSON, S. *Les différentielles métaphysiques: histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de la dérivation*. Tese (Doutorado) — Paris 13, 1994. Citado na página 21.
- ELISHAKOFF, I. Who developed the so-called Timoshenko beam theory? *Mathematics and Mechanics of Solids*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 25, n. 1, p. 97–116, 2020. Citado na página 22.
- ELISHAKOFF, I. E. Handbook on Timoshenko-Ehrenfest beam and Uflyand-Mindlin Plate Theories. World Scientific, Florida Atlantic University, USA, 2019. Citado na página 22.
- FAGHIDIAN, S. A. Unified formulations of the shear coefficients in Timoshenko beam theory. *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 143, n. 9, p. 06017013, 2017. Citado na página 65.
- FERTIS, D. G. *Nonlinear Structural Engineering*. Berlin: Springer Editora, 2006. Citado na página 27.
- FRUCHTENGARTEN, J. *Sobre o estudo da flambagem lateral de vigas de aço por meio da utilização de uma teoria não-linear geometricamente exata*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 125.
- GALAMBOS, T. V. *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*. Canada: John Wiley & Sons, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 127 e 136.
- GOMES, A. V. Transformadas integrais, modelagem fracionária e o sistema de Lotka-Volterra. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista (UNESP) - SP, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 32.
- GOMES, G. *Aplicação dos métodos de elementos de contorno e reciprocidade dual em problemas de plasticidade 2D orientada a objeto*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 12, 158 e 160.

- GONÇALVES, I. H. Análise de deformações em vigas com comportamento geometricamente não linear. *Dissertação (Mestrado)*. Universidade Federal de Itajubá - MG, 2006. Citado na página 27.
- GORENFLO, R.; MAINARDI, F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. *doi.org/10.48550/arXiv.0805.3823*, 2008. Citado na página 21.
- HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and vibration*, Elsevier, v. 225, n. 5, p. 935–988, 1999. Citado na página 22.
- HAUBERT, G. G. Estudo de análises linear e não linear aplicado a flambagem. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco - PR, 2017. Citado na página 126.
- HE, X. T.; CHEN, S. L. Biparametric perturbation solutions of large deflection problem of cantilever beams. *Applied Mathematics and Mechanics*, Springer, v. 27, n. 4, p. 453–460, 2006. Citado na página 27.
- HERRMANN, R. *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*. GigaHedron, Germany: World Scientific, 2014. Citado na página 31.
- HIBBELER, R. C. *Resistência dos Materiais*. São Paulo - SP: Pearson Educación, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 27.
- HILFER, R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Germany: World scientific, 2000. Citado na página 31.
- JACYNTHO, L. A. Identificação de funções de transferência de ordem fracionária utilizando como entrada um degrau. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Paulista (UNESP) - SP, 2015. Citado na página 32.
- JIANG, S.; ZHANG, J.; ZHANG, Q.; ZHANG, Z. Fast evaluation of the caputo fractional derivative and its applications to fractional diffusion equations. *Communications in Computational Physics*, Cambridge University Press, v. 21, n. 3, p. 650–678, 2017. Citado na página 23.
- JIANG, X.-M.; CHEN, H.; LIEW, J. R. Spread-of-plasticity analysis of three-dimensional steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 58, n. 2, p. 193–212, 2002. Citado na página 162.
- JIAO, Y.; YAMADA, S.; KISHIKI, S.; SHIMADA, Y. Evaluation of plastic energy dissipation capacity of steel beams suffering ductile fracture under various loading histories. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Wiley Online Library, v. 40, n. 14, p. 1553–1570, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 162.
- JIMÉNEZ, M. L.; DUARTE, J. C.; GARCÍA, J. R. Fractional solution of the catenary curve. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 44, n. 10, p. 7969–7978, 2021. Citado na página 32.
- JÚNIOR, H. H. Estudo da flambagem lateral com torção de vigas de aço de alma senoidal. *Dissertação (Mestrado)*. Universidade Federal de Minas Gerais, 2006. Citado na página 134.

- KALA, Z. Elastic lateral-torsional buckling of simply supported hot-rolled steel I-beams with random imperfections. *Procedia Engineering*, Elsevier, v. 57, p. 504–514, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 125.
- KO, M.; KIM, S.; KIM, J. Experimental study on the plastic rotation capacity of reinforced high strength concrete beams. *Materials and Structures*, Springer, Suwon, Korea, v. 34, n. 5, p. 302–311, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 162.
- KUŠ, J. Lateral-torsional buckling steel beams with simultaneously tapered flanges and web. *Steel and Composite Structures*, Techno-Press, v. 19, n. 4, p. 897–916, 2015. Citado na página 29.
- LACERDA, E. G. M. Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014. Citado na página 117.
- LAJARIN, S. F. Influência da variação do módulo de elasticidade na previsão computacional do retorno elástico em aços de alta resistência. Tese (Doutorado). Universidade Federal do Paraná (UFPR) - Curitiba, 2012. Citado na página 93.
- LAZOPOULOS, K. Non-local continuum mechanics and fractional calculus. *Mechanics Research Communications*, Elsevier, Athens, v. 33, n. 6, p. 753–757, 2006. Citado na página 33.
- LAZOPOULOS, K.; LAZOPOULOS, A. On fractional bending of beams. *Archive of Applied Mechanics*, Springer, Berlin, v. 86, n. 6, p. 1133–1145, 2016. Citado na página 33.
- LEE, J.; KIM, S.-E.; HONG, K. Lateral buckling of I-section composite beams. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 24, n. 7, p. 955–964, 2002. Citado na página 29.
- LEITE, S. S.; DATRES, K. D. L.; FERNANDES, L. L.; JUNIOR, J. C. M.; DAMIAN, J. S. M.; PIRES, G. B.; SCARPIN, L. M.; SANTOS, P. S. B. Ensaio de tração e metalografia do aço SAE 1020. *Revista Engenharia em Ação UniToledo*, v. 2, n. 1, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 162.
- LI, C.; DENG, W. Remarks on fractional derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 187, n. 2, p. 777–784, 2007. Citado na página 23.
- LI, X. F.; LEE, K. Y. Effect of horizontal reaction force on the deflection of short simply supported beams under transverse loadings. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 99, p. 121–129, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 28, 30 e 112.
- LUO, D.; WANG, J.; FEČKAN, M. Applying fractional calculus to analyze economic growth modelling. *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, v. 14, n. 1, p. 25–36, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 78.
- LUSTOSA, J. I. S. L. A transformada de Laplace e algumas aplicações. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal da Paraíba, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 61.
- LUSTOSA, J. I. S. L.; BANNWART, F. C.; OLIVEIRA, E. C. On the Euler-Bernoulli and Timoshenko-Ehrenfest beam theories under fractional calculus approach. *CNMAC*, v. 8, n. 1, p. 1–7, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 171 e 172.

- _____. Fractional calculus applied to evaluate stress concentration and shear effects in simply supported beams. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 22, n. 2, p. 89–101, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 171 e 173.
- _____. On the separate assessment of structural effects on the simple beam deflection in the light of fractional calculus. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, accepted in August, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 171 e 173.
- MACHADO, J. T. Application of fractional calculus in engineering sciences. In: IEEE. *2008 IEEE International Conference on Computational Cybernetics*. Porto, Portugal, 2008. p. 11–14. Citado na página 32.
- MACHADO, J. T.; JESUS, I. S.; BARBOSA, R.; SILVA, M.; REIS, C. Application of fractional calculus in engineering. In: *Dynamics, games and science I*. Porto, Portugal: Springer, 2011. p. 619–629. Citado na página 32.
- MADENCI, E.; GUVEN, I. *The Finite Element Method and Applications in Engineering using ANSYS®*. Arizona-USA: Springer, 2015. Citado na página 117.
- MAIA, C. D. C. D. Flexão e estabilidade de barras usando o modelo de Bickford-Reddy: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal da Paraíba, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 126.
- MAINARDI, F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. London: Imperial College Press, World Scientific Publishint Co. Pte. Ltd., London, 2010. Citado na página 31.
- MARTHA, L. *Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos*. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2010. Citado na página 89.
- MARTHA, L. F.; BURGOS, R. Diferenças na consideração da distorção no modelo de Timoshenko de uma viga submetida a carregamento axial. *Jornada Sul Americana de Engenharia Estrutural, Uruguai*, 2014. Citado na página 68.
- MARTINS, M. P.; LIMA, P. R. L.; LIMA, J. M. F.; SANTOS, G. J. B. Análise numérica de vigas de concreto armado com diferentes taxas de armadura usando modelo de plasticidade. *Journal of Research and Innovation in Civil Engineering*, v. 1, n. 1, p. 1–8, 2021. Citado na página 162.
- MATHAI, A. M.; HAUBOLD, H. J. *Matrix Methods and Fractional Calculus*. New York: World Scientific, 2017. Citado na página 30.
- MILLER, K. S.; ROSS, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: Wiley, 1993. Citado 4 vezes nas páginas 21, 73, 74 e 78.
- NASCHIE, M. E.; STRESS, S. *Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach*. London: McGraw Hil, 1990. Citado na página 127.
- NETO, E. A. S.; PERIC, D.; OWEN, D. R. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2008. Citado na página 159.
- NONNENMACHER, T.; GLÖCKLE, W. A fractional model for mechanical stress relaxation. *Philosophical Magazine Letters*, Taylor & Francis, v. 64, n. 2, p. 89–93, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.

- NORTON, R. Projeto de Máquinas: Uma Abordagem Integrada—4 edição. *Worcester, Massachusetts: Bookman Editora Ltda*, 2013. Citado na página 126.
- NUNES, J. *Uma Abordagem Numérica e Analítica para Determinação da Temperatura e do Momento Fletor Crítico em Vigas de Aço em Situação de Incêndio*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, 2005. Citado na página 135.
- OLIVEIRA, A. S. C. Cálculo fracionário: contribuições históricas e aplicações físicas. Dissertação (Mestrado). Campinas - SP, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 22, 31 e 32.
- OLIVEIRA, E. C. *Solved Exercises in Fractional Calculus, Studies in Systems, Decision and Control 240*. Switzerland AG: Springer Nature, 2019. Citado na página 73.
- OLIVEIRA, E. C.; MACHADO, T. A review of definitions for fractional derivatives and integral. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, v. 2014, 2014. Citado na página 75.
- OLIVEIRA, J. P. S. Nova proposição para verificação do estado-limite de flambagem lateral com distorção de vigas mistas de aço e concreto. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. Citado na página 93.
- PASSOS, J. J. S. Análise da estabilidade estática e dinâmica de vigas pelo método dos elementos de contorno. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal da Paraíba, 2014. Citado na página 127.
- PINTO, C.; MACHADO, J. T. Fractional dynamics of computer virus propagation. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, v. 2014, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.
- PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press*. San Diego: volume, 1999. Citado na página 30.
- RAMOS, A. M. R. S.; AMARAL, L. A.; SOUZA, P. R.; PINHEIRO, V. P.; NEVES, N. S.; CANDIDO, D. C. M. Análise dinâmica do modelo de viga de Euler-Bernoulli via método das diferenças finitas. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, v. 4, n. 1, p. 21–39, 2018. Citado na página 22.
- REIS, A. L. F. O método da energia aplicado à flambagem lateral com torção de vigas de aço. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 29, 125 e 136.
- ROSS, B. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. In: *Fractional Calculus and its Applications*. New York: Springer, 1975. p. 1–36. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- ROSSI, A.; MARTINS, C. H.; NICOLETTI, R. S.; SOUZA, A. S. C. de. Reassessment of lateral torsional buckling in hot-hollowed I-beams. In: *Structures*. London: Elsevier, 2020. v. 26, p. 524–536. Citado na página 30.
- RUST, W. *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Hannover: Springer, 2015. Citado na página 137.

- SAAD, K. M.; BALEANU, D.; ATANGANA, A. New fractional derivatives applied to the Korteweg–de Vries and Korteweg–de Vries–Burger’s equations. *Computational and Applied Mathematics*, Springer, v. 37, n. 4, p. 5203–5216, 2018. Citado na página 31.
- SAEEDIAN, M.; KHALIGHI, M.; AZIMI-TAFRESHI, N.; JAFARI, G.; AUSLOOS, M. Memory effects on epidemic evolution: The susceptible-infected-recovered epidemic model. *Physical Review E*, APS, v. 95, n. 2, p. 022409, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 78.
- SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. E. *Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications*. Switzerland: Gordon and Breach science publishers, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 74.
- SAPKÁS, Á.; KOLLÁR, L. P. Lateral-torsional buckling of composite beams. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 39, n. 11, p. 2939–2963, 2002. Citado na página 29.
- SIDHARDH, S.; PATNAIK, S.; SEMPERLOTTI, F. Geometrically nonlinear response of a fractional-order nonlocal model of elasticity. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Elsevier, v. 125, p. 103529, 2020. Citado na página 34.
- SILVA, A. L. R. C. Análise numérica não linear da flambagem local de perfis de aço estrutural submetidos à compressão uniaxial. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 126 e 136.
- SILVA, C. C. Estudo da influência da distorção da alma no momento crítico elástico de flambagem lateral com torção de vigas de aço de alma não esbelta com seção I. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, 2017. Citado na página 126.
- SILVA, R. Análise inelástica avançada de pórticos planos de aço considerando as influências do cisalhamento e de ligações semirrígidas. *Belo Horizonte. Tese de Doutorado—Universidade Federal de Minas Gerais*, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 89, 104 e 166.
- SILVA, T. C. da. Estudo analítico das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para condições de contorno variadas. *Revista de Engenharia Civil IMED*, v. 6, n. 1, p. 57–70, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 23, 89, 104 e 166.
- SORIANO, H. L. *Análise de Estruturas: Formulação Matricial e implementação Computacional*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005. Citado na página 89.
- _____. *Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 93, 121 e 137.
- SOUSA, C. M. P. Uma aplicação das equações diferenciais à deflexão de vigas. UFERSA, Mossoró - RN, 2013. Citado na página 54.
- SOUSA, J. V. C. *Equação de difusão tempo-fractionária:(Taxa de Sedimentação de Eritrócitos)*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2018. Citado na página 31.
- SOUSA, J. V. C.; OLIVEIRA, E. C. On the ψ -Hilfer fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 60, p. 72–91, 2018. Citado na página 78.

- SOUZA, L. D. P. Análise do comportamento estrutural de vigas de concreto armado submetidas às altas temperaturas utilizando a metodologia do planejamento fatorial. Dissertação (mestrado). Universidade Federal da Paraíba, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 166.
- SUMELKA, W.; BLASZCZYK, T.; LIEBOLD, C. Fractional Euler-Bernoulli beams: Theory, numerical study and experimental validation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Elsevier, v. 54, p. 243–251, 2015. Citado na página 33.
- SUN, H.; ZHANG, Y.; BALEANU, D.; CHEN, W.; CHEN, Y. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 64, p. 213–231, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 32.
- TARASOV, V. E. On history of mathematical economics: Application of fractional calculus. *Mathematics*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 7, n. 6, p. 509, 2019. Citado na página 32.
- TEJADO, I.; VALÉRIO, D.; VALÉRIO, N. Fractional calculus in economic growth modeling. The Portuguese case. In: IEEE. *ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014*. Catânia, Itália, 2014. p. 1–6. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 78.
- TEODORO, G.; OLIVEIRA, D.; OLIVEIRA, E. C. Sobre derivadas fracionárias. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, 2017. Citado na página 33.
- TEODORO, G. S. Cálculo fracionário e as funções de Mittag-Leffler. Dissertação (Mestrado). Campinas - SP, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- TEODORO, G. S.; MACHADO, J. T.; OLIVEIRA, E. C. D. A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 388, p. 195–208, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 78.
- TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, D.; OLIVEIRA, E. C. de. Sobre derivadas fracionárias. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 40, n. 2, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 78.
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. *Mecânica dos Sólidos; vol. 1*. Rio de Janeiro - RJ: LTC editora, 1983. Citado 8 vezes nas páginas 24, 27, 42, 45, 47, 63, 112 e 161.
- TUAN, N. H.; MOHAMMADI, H.; REZAPOUR, S. A mathematical model for covid-19 transmission by using the Caputo fractional derivative. *Chaos, Solitons and Fractals*, Elsevier, v. 140, p. 110107, 2020. Citado na página 23.
- VALENTE, I.; RICARDO, L.; MATOS, J. C. Modelação não linear de vigas mistas em aço e betão. VIII Congresso de Construção Metálica e Mista. Guimarães, Portugal, 2011. Citado na página 29.
- VAZ, J. J.; OLIVEIRA, E. C. On the fractional Kelvin-Voigt oscillator. *Mathematics in Engineering*, v. 4, n. 1, p. 1–23, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 30, 32 e 78.
- YAMASSAKI, R. T. *Um programa de elementos finitos em GPU e orientado a objetos para análise dinâmica não linear de estruturas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014. Citado na página 93.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais. Volume 1. 3ª Edição*. São Paulo-SP: Pearson Education, 2001. Citado na página 61.

APÊNDICE A

Demonstração da propriedade 4 da subseção 3.3

Demonstração. Para demonstrar este resultado, inicia-se mostrando que a igualdade

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{\nu+1}} \right] = \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{L} [x^\nu] = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{s^{\nu+1}}, \quad (\text{A.2})$$

isto é, a transformada de Laplace de uma função polinomial.

Usando a **Definição 6**, pode-se escrever

$$\mathcal{L} [x^\nu] = \int_0^\infty e^{-sx} x^\nu dx. \quad (\text{A.3})$$

Tomando $u = sx$ e substituindo na Eq.(A.3), obtém-se

$$\mathcal{L} [x^\nu] = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^\nu \frac{du}{s}. \quad (\text{A.4})$$

Rearranjando os termos, pode-se escrever

$$\mathcal{L} [x^\nu] = \frac{1}{s^{\nu+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\nu du, \quad (\text{A.5})$$

que, a partir da **Definição 1**, permite escrever

$$\Gamma(\nu + 1) = \int_0^\infty e^{-u} u^\nu du. \quad (\text{A.6})$$

Assim, segue que

$$\mathcal{L} [x^\nu] = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{s^{\nu+1}}, \quad (\text{A.7})$$

cuja transformada inversa conclui a demonstração. \square