



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

VINÍCIUS RITER DE FARIA

Álgebra Geométrica e Matrizes de Distâncias

Campinas

2022

Vinícius Riter de Faria

Álgebra Geométrica e Matrizes de Distâncias

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Carlile Campos Lavor

Coorientador: Rafael Santos de Oliveira Alves

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Vinícius Riter de Faria e orientada pelo Prof. Dr. Carlile Campos Lavor.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F225a Faria, Vinícius Riter de, 1993-
Álgebra geométrica e matrizes de distâncias / Vinícius Riter de Faria. –
Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Carlile Campos Lavor.

Coorientador: Rafael Santos de Oliveira Alves.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Matrizes de distâncias euclidianas. 2. Geometria conforme. 3. Geometria
de distâncias. 4. Álgebra geométrica. 5. Álgebra multilinear. 6. Esfera. I. Lavor,
Carlile Campos, 1968-. II. Alves, Rafael Santos de Oliveira, 1982-. III.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Geometric algebra and distance matrices

Palavras-chave em inglês:

Euclidean distance matrices

Conformal geometry

Distance geometry

Geometric algebra

Multilinear algebra

Sphere

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Carlile Campos Lavor [Orientador]

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Cristiano Torezzan

Emerson Vitor Castelani

Luiz Rafael dos Santos

Data de defesa: 22-06-2022

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-0506-8130>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/0329095148739112>

**Tese de Doutorado defendida em 22 de junho de 2022 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). CARLILE CAMPOS LAVOR

Prof(a). Dr(a). AURELIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). CRISTIANO TOREZZAN

Prof(a). Dr(a). EMERSON VITOR CASTELANI

Prof(a). Dr(a). LUIZ RAFAEL DOS SANTOS

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Carlile, por me dar a oportunidade e ter a paciência para realizarmos este trabalho juntos e ao meu coorientador, Rafael, por ter me ajudado em diversos momentos.

Agradeço aos meus pais Neusa e Deusdeth, pois sem eles nada disso seria possível. Também à minha irmã, Tatá, pela ajuda que deu em vários momentos.

Agradeço à minha amiga Neandra e meus amigos Curto, Álex, Gabriel e Fernando, pela motivação e pelos momentos de descontração durante esse período.

Um agradecimento especial à minha tia, Abadia (Tia Bá), pela dura tarefa de me aguentar em sua casa no primeiro ano do doutorado e sempre ter me dado apoio nesses momentos. Também à sua filha e netas, minhas primas Daniela, Amanda e, principalmente, Alícia.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Matrizes de Distâncias Euclidianas (MDE) são matrizes formadas por quadrados das distâncias entre pontos. O problema de determinar se uma dada matriz é ou não uma MDE é chamado de Problema de Reconhecimento MDE. Temos, também, o problema de "realizar" a MDE, onde devemos encontrar uma sequência de pontos para qual os quadrados das distâncias entre seus pontos, tomados dois a dois, sejam as entradas da matriz. Neste trabalho, apresentaremos dois métodos alternativos para a resolução desse tipo de problema, um para o caso em que a matriz possui apenas distâncias exatas e outro para o caso em que a matriz apresenta distâncias intervalares. A abordagem considerada difere da clássica na medida em que trata de objetos geométricos utilizando a Álgebra Geométrica Conforme, que possibilita a representação visual e computacional simplificada de, no caso deste trabalho, esferas e suas interseções.

Palavras-chave: Matrizes de distâncias, Álgebra Geométrica Conforme, Problema de Reconhecimento MDE, Multivetor, Esferas.

Abstract

Euclidean Distance Matrices (EDM) are matrices formed by squared distances between points. The problem of determining whether or not a given matrix is an EDM is called the EDM Recognition Problem. We also have the problem of "realizing" the EDM, where we must find a sequence of points for which the squared distances between their points, taken two by two, are the entries of the matrix. In this work, we will present two alternative methods for solving this type of problem, one for the case where the matrix has only exact distances and another for the case where the matrix has interval distances. The considered approach differs from the classical one in that it deals with geometric objects using Conformal Geometric Algebra, which allows a simplified visual and computational representation of, in the case of this work, spheres and their intersections.

Keywords: Distance matrices, Conformal Geometric Algebra, EDM Recognition Problem, Multivector, Spheres.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Representações geométricas de k -blades (plano orientado e volume orientado).	43
Figura 2.2 – Exemplos da imersão estereográfica (figuras baseadas em [Perwass et al., 2009])	47
Figura 2.3 – Homogeneização da imersão estereográfica [Perwass et al., 2009]	49
Figura 2.4 – Imersão Conforme utilizando C (figuras baseadas em [Perwass et al., 2009])	50
Figura 3.1 – Esfera de $\mathbb{R}^1$ centrada em c com raio r	62
Figura 3.2 – Esfera de $\mathbb{R}^2$ centrada em c com raio r	63
Figura 3.3 – Circunferência representada pela interseção entre uma esfera e um plano. . .	64
Figura 3.4 – Uma 2-esfera obtida pela interseção entre duas esferas de $\mathbb{R}^3$	65
Figura 3.5 – Interseção de duas circunferências em um par de pontos.	66
Figura 3.6 – Interseção de três esferas de $\mathbb{R}^3$ com centros em $\mathbb{R}^2$	70
Figura 3.7 – Visualização dos triângulos isósceles	71
Figura 4.1 – Interseção das duas esferas de $\mathbb{R}^3$ com a coroa esférica. A circunferência representa a interseção entre as esferas e os pontos na circunferência são as interseções com a coroa esférica, considerando os raios mínimo e máximo. .	85
Figura 4.2 – O círculo representa a interseção das duas esferas, em vermelho o arco correspondente a interseção entre as esferas e a coroa esférica.	85
Figura 4.3 – Interseção das duas esferas de $\mathbb{R}^3$ com a coroa esférica. A circunferência representa a interseção entre as esferas e os pontos na circunferência são as interseções com a coroa esférica, considerando os raios mínimo e máximo. .	86
Figura 4.4 – O círculo representa a interseção das duas esferas, em vermelho o arco correspondente a interseção entre as esferas e a coroa esférica.	88
Figura 4.5 – Interseção entre a esfera e a coroa esférica resultando em um único ponto. .	107
Figura 4.6 – Interseção entre a esfera e a coroa esférica resultando em um par de arcos . .	108
Figura 4.7 – Interseção entre a esfera e a coroa esférica resultando em um único arco. . .	109
Figura 4.8 – Interseção entre a esfera e a coroa esférica resultando no conjunto vazio.. . .	109

Lista de tabelas

Tabela 1.1 – Desempenho do Algoritmo 1 em segundos	33
Tabela 1.2 – Desempenho do Algoritmo 1 em relação ao erro numérico	33
Tabela 3.1 – Desempenho do Algoritmo 2 em segundos	76
Tabela 3.2 – Desempenho Algoritmo 2 em relação ao erro numérico	76

Sumário

	Introdução	13
1	PROBLEMA DE RECONHECIMENTO MDE	15
1.1	Matrizes de Distâncias Euclidianas	15
1.2	Dimensão da Imersão de uma MDE	18
1.3	Submatrizes Principais de uma MDE	20
1.4	Problema de Reconhecimento MDE	24
1.5	Algoritmo <i>edmsph</i>	30
1.6	Testes Computacionais <i>edmsph</i>	32
2	ÁLGEBRA GEOMÉTRICA	35
2.1	Conceitos Básicos	35
2.1.1	Estrutura e Base de $\mathbb{G}_{p,q}$	36
2.1.2	Produto Geométrico	38
2.1.3	Produto Interno e Produto Exterior	39
2.1.4	Inverso dos Elementos Básicos e Dual de um Multivetor	41
2.1.5	Blades	42
2.1.6	Projeção e Afastamento	46
2.2	Espaço Conforme	46
2.2.1	Imersão Estereográfica	47
2.2.2	Homogeneização da Imersão Estereográfica	48
2.2.3	Imersão Conforme	49
2.3	Álgebra Geométrica Conforme	51
2.3.1	Representações Através do GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	52
2.3.1.1	Representação de Pontos pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	52
2.3.1.2	Representação de Esferas pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	53
2.3.1.3	Representação de Planos pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	54
2.3.1.4	Representação de Circunferências pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	55
2.3.1.5	Representação de Retas pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	55
2.3.1.6	Representação de Pares de Pontos pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	56

2.3.2	Representações Através do GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	56
2.3.2.1	Representação de Pontos pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	56
2.3.2.2	Representação de Pares de Pontos pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	56
2.3.2.3	Representação do Ponto Homogêneo pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	57
2.3.2.4	Representação de Retas pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	57
2.3.2.5	Representação de Planos pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	58
2.3.2.6	Representação de Circunferências pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	58
2.3.2.7	Representação de Esferas pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$	58
3	REINTERPRETAÇÃO VIA AGC DO PROBLEMA DE RECONHECI- MENTO MDE	60
3.1	Geometria do Problema	60
3.2	Álgebra Geométrica Conforme	67
3.3	Problema de Reconhecimento MDE e AGC	70
3.4	Algoritmo AGC	73
3.5	Testes Computacionais <i>edmAGC</i>	76
4	CASO INTERVALAR	78
4.1	Abordagem utilizando Álgebra Linear	78
4.2	Abordagem utilizando a Álgebra Geométrica	89
4.3	Matrizes de Distâncias Euclidianas Intervalares	93
4.3.1	Caso Contendo Apenas uma Coroa Esférica	93
4.3.2	Caso Contendo mais de uma Coroa Esférica	103
4.4	Método para o Caso com uma Distância Intervalar	105
4.4.1	Inicialização	105
4.4.2	Interseção	106
4.4.2.1	Um Ponto	107
4.4.2.2	Par de Arcos	107
4.4.2.3	Um Arco	108
4.4.2.4	Conjunto Vazio	109
4.4.3	Discretização do Arco	109
4.4.4	Atualização da Sequência	110
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	113

5.1	Contribuições da Tese	113
5.2	Conclusão e Trabalhos Futuros	114
	REFERÊNCIAS	115

Introdução

O problema de reconhecimento de matrizes de distâncias euclidianas, ou simplesmente, problema de reconhecimento MDE, se concentra em determinar quando uma matriz dada é ou não uma MDE [Alencar et al., 2019]. Desta forma, queremos determinar se as entradas de uma matriz dada correspondem às distâncias entre os pontos de uma sequência qualquer (tal sequência é dita ser uma realização para a matriz). Esse problema tem grande importância na área de geometria de distâncias, com aplicações em robótica, problema de navegação (*navigation problem*), problema de conformação molecular, entre outros [Liberti et al., 2014, Havel and Wüthrich, 1995, Billinge et al., 2016].

Buscar uma realização para uma matriz dada é a forma mais intuitiva de determinar se tal matriz é ou não uma MDE, uma vez que, se não existir uma realização para a matriz, esta não será uma MDE. A busca por uma realização baseada na interseção de esferas, apresentada em [Alencar et al., 2019], nos incentivou a utilizar a Álgebra Geométrica Conforme (AGC) para remodelar o problema.

As principais características da Álgebra Geométrica, que nos motivaram a utilizá-la para a modelagem do problema, são a simplicidade na representação algébrica de objetos geométricos e a interseção entre esses objetos através de um produto, possibilitando uma reinterpretação mais intuitiva do problema. Tal abordagem, faz um melhor proveito de suas características geométricas, permitindo um maior aprofundamento em casos que essas características se tornam imprecisas.

Os métodos que propomos no presente trabalho têm em vista as simetrias do problema, incluindo principalmente o fato de que todas as realizações de uma MDE são isométricas. Assim, podemos focar em encontrar uma solução mais simples com características específicas, onde qualquer outra realização da mesma matriz pode ser obtida por uma isometria.

As contribuições deste trabalho são focadas no âmbito teórico do problema. A forma com que a Álgebra Geométrica pode ser utilizada computacionalmente de maneira eficiente ainda é tema de pesquisa. Assim, os resultados computacionais serão apresentados de forma ilustrativa para uma melhor compreensão do método proposto.

O trabalho está disposto em cinco capítulos, sendo que os dois primeiros servem como introdução, tanto sobre o problema quanto sobre a Álgebra Geométrica. Nos capítulos 3 e 4,

apresentamos, de fato, as contribuições fundamentais da tese. O conteúdo de cada capítulo é sumarizado a seguir:

- No Capítulo 1 é apresentado o problema principal da tese, as definições e resultados necessários para a compreensão do problema, bem como uma abordagem clássica através da Álgebra Linear, juntamente com um algoritmo baseado nessa abordagem.
- O Capítulo 2 apresenta uma introdução à Álgebra Geométrica conforme, expondo conceitos básicos, incluindo as definições necessárias para a reinterpretação do problema.
- No Capítulo 3 é apresentada a reinterpretação do problema clássico através da Álgebra Geométrica conforme, junto com um novo algoritmo para a resolução do problema. Deste capítulo foi originado um artigo, a ser publicado na *International Conference of Advanced Computational Applications of Geometric Algebra (ICAGCA)* [Riter et al., 2022].
- No Capítulo 4, a reinterpretação do problema através da Álgebra Geométrica conforme é estendida para o caso em que a matriz possui distâncias intervalares, comparando com uma abordagem através da Álgebra Linear. Neste capítulo, por mantermos a mesmas abordagem do caso com distâncias exatas, as vantagens de se usar a álgebra geométrica são acentuadas.
- O Capítulo 5 apresenta as conclusões e os trabalhos futuros.

1 Problema de Reconhecimento MDE

O estudo de conjuntos de pontos através das distâncias entre os pares e, por consequência, de Matrizes de Distâncias Euclidianas, podem ser mapeados até os trabalhos de Menger [Menger, 1928] e Schoenberg [Schoenberg, 1935], posteriormente completados por Blumenthal [Haantjes et al., 1954], dando origem a uma área de estudo chamada Geometria de Distâncias, cujo uma abordagem aprofundada pode ser encontrado em [Liberti et al., 2014].

1.1 Matrizes de Distâncias Euclidianas

Antes de definir o problema de interesse, precisamos entender o que é uma matriz de distâncias euclidianas, juntamente com algumas de suas propriedades. Uma matriz em $\mathbb{R}^{n \times n}$ será uma matriz de distâncias se suas entradas puderem ser descritas como quadrados das distâncias $d(x_i, x_j)$ entre pares de pontos tomados em uma lista $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de n pontos em $\mathbb{R}^m$. No caso em que a distância utilizada é a métrica euclidiana, a matriz é chamada de Matriz de Distâncias Euclidianas (MDE).

Os pontos da lista $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ são ordenados naturalmente e indexados pelo conjunto $I = \{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$, de modo que os índices das linhas ou colunas da matriz indicam individualmente cada um dos pontos da lista. Em outras palavras, a entrada $D(i, j)$ de uma MDE representa o quadrado da distância do ponto x_i ao ponto x_j .

Algumas propriedades de uma MDE são consequência direta das propriedades da métrica. Para quaisquer que sejam $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, as distâncias entre x_i , x_j e x_k devem satisfazer os requerimentos da definição imposta sobre qualquer espaço métrico, especificamente para a métrica euclidiana $d(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\|$ em $\mathbb{R}^m$:

1. $d(x_i, x_j) \geq 0$, *não negatividade*
2. $d(x_i, x_i) = 0$, *auto-distância nula*
3. $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$ *simetria*
4. $d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_k) + d(x_k, x_j)$ *desigualdade triangular*

Deste modo, todas as entradas de uma MDE devem estar de acordo com essas quatro propriedades. Assim, as entradas de uma MDE devem ser não negativas, a MDE deve ser oca (diagonal principal nula) e, além disso, toda MDE deve ser simétrica. A quarta propriedade estabelece um limite superior e inferior para as entradas da matriz.

Exemplo 1.1.1. Dada a seguinte lista $X = \{x_1 = (1, 0), x_2 = (3, 0), x_3 = (3, 1)\}$ de pontos de $\mathbb{R}^2$, facilmente podemos calcular as distâncias euclidianas entre os pontos, dois a dois:

$$d(x_1, x_1) = d(x_2, x_2) = d(x_3, x_3) = 0,$$

$$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) = 2,$$

$$d(x_1, x_3) = d(x_3, x_1) = \sqrt{5},$$

$$d(x_2, x_3) = d(x_3, x_2) = 1.$$

Com isso, a matriz de distâncias fica da seguinte forma:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Note que todas as propriedades descritas anteriormente são satisfeitas e que as entradas da matriz D são os quadrados das distâncias $d(x_i, x_j)$, isto é, $D(i, j) = d(x_i, x_j)^2 = \|x_i - x_j\|^2$.

Da forma como foi definida, podemos ter uma ideia de como construir uma MDE a partir de uma lista de pontos em $\mathbb{R}^m$, porém, uma MDE não necessariamente precisa ser gerada a partir de uma lista já conhecida, uma vez que nem sempre temos os pontos de antemão. Formalmente, a definição de matrizes de distâncias euclidianas é dada do seguinte modo:

Definição 1.1.1. [Alencar et al., 2015] Uma matriz D $n \times n$ é dita ser uma Matriz de Distâncias Euclidianas (MDE) se existir uma sequência de pontos $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^K$, tal que

$$D(i, j) = d(x_i, x_j)^2 = \|x_i - x_j\|^2, i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (1.2)$$

para algum K inteiro positivo.

A Definição 1.1.1 deixa mais claro o fato de uma MDE não estar atrelada a uma lista específica de pontos em $\mathbb{R}^m$ para algum m inteiro positivo fixo. Podemos notar esse fato através do seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.2. Suponha que D seja definida da mesma forma que (1.1), isto é,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que, apesar de ser a mesma matriz, se tomarmos a sequência de pontos formada por $x_1 = (0, 0, 0)$, $x_2 = (2, 0, 0)$ e $x_3 = (2, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$, então

$$d(x_1, x_2)^2 = \|(2, 0, 0)\|^2 = 4 = D(1, 2),$$

$$d(x_1, x_3)^2 = \|(2, 0, 1)\|^2 = 5 = D(1, 3),$$

$$d(x_2, x_3)^2 = \|(0, 0, 1)\|^2 = 1 = D(2, 3).$$

Com isso, vemos que a MDE D não é definida a partir de uma única sequência de pontos em um espaço de dimensão fixa, podendo existir outras sequências em espaços de dimensões diferentes que definem a mesma MDE.

As sequências cujas distâncias entre os pontos satisfazem (1.2) serão chamadas de *realizações* de D . Em outras palavras, se D for uma MDE $n \times n$, dizemos que uma sequência $\{x_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^K$ realiza D se

$$D(i, j) = \|x_i - x_j\|^2 \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

O fato observado na matriz (1.1) dos exemplos anteriores se estende para toda MDE. A **Proposição 1.1.1** garante que qualquer MDE admite infinitas realizações.

Proposição 1.1.1. Se D for uma MDE $n \times n$, então existem infinitas realizações de D .

Demonstração. Uma vez que D é uma MDE, existe uma sequência de pontos $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ para algum inteiro positivo m que realiza D . Considere a função

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ T(x) &\mapsto x + a \end{aligned} \tag{1.3}$$

com $a \neq 0$. Temos que T será uma translação em $\mathbb{R}^m$, logo, T é uma isometria, isto é, $\|T(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$. Ou seja,

$$\|T(x_i) - T(x_j)\|^2 = \|T(x_i - x_j)\|^2 = \|x_i - x_j\|^2 = D(i, j).$$

Assim, toda translação de $\{x_i\}_{i=1}^n$ também será uma realização de D . Portanto, como a pode ser qualquer valor real, existirão infinitas realizações de D . $\square$

Note que se D for uma matriz $n \times n$ simétrica, oca, com entradas não negativas e $n > 2$, D não será necessariamente uma MDE. De fato, basta tomar

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

É fácil ver que, se $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^m$, para algum m realizam D , então

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{D(1, 2)} = 3,$$

$$d(x_1, x_3) = \sqrt{D(1, 3)} = 1,$$

$$d(x_2, x_3) = \sqrt{D(2, 3)} = 1.$$

Com isso, temos

$$d(x_1, x_2) = 3 > d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2) = 2,$$

implicando que, x_1, x_2 e x_3 não satisfazem a desigualdade triangular, o que é um absurdo. Logo não existe uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^m$, para qualquer m inteiro positivo, que realize D . Portanto, a matriz D não é uma MDE.

1.2 Dimensão da Imersão de uma MDE

A translação (1.3) utilizada na demonstração da [Proposição 1.1.1](#) nos garante que podemos encontrar, no mesmo espaço, infinitas realizações para uma MDE a partir de uma realização já conhecida. Outra propriedade importante está relacionada às dimensões dos espaços em que existem realizações para uma MDE.

Proposição 1.2.1. Se D for uma MDE $n \times n$ e $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ uma sequência que realiza D , então, para qualquer inteiro $p > m$, existe $\{y_i\}_{i=1}^n$ que também realiza D .

Demonstração. De fato, se $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ realiza D , basta tomar $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ definida por $F(x) = (x, 0, \dots, 0)$. Então F será uma isometria linear, implicando em

$$\|F(x_i) - F(x_j)\|^2 = \|F(x_i - x_j)\|^2 = \|x_i - x_j\|^2,$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Portanto, se definirmos $y_i = F(x_i)$, teremos que $\{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^p$ também realiza D . $\square$

Através da [Proposição 1.2.1](#) podemos concluir que não existe limite superior para a dimensão do espaço em que encontramos realizações para uma MDE. Agora, dada uma realização em $\mathbb{R}^m$ para uma MDE D , não temos uma garantia imediata se existe ou não uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^K$ que realiza D , para algum $K < m$. Porém, como a dimensão do espaço se trata de um inteiro positivo e, sendo D uma MDE, existe uma sequência que a realiza, então deverá existir um menor valor para essa dimensão.

Definição 1.2.1. Seja D uma MDE $n \times n$. O menor K inteiro, onde exista uma realização para D em $\mathbb{R}^K$, é dito ser a Dimensão da Imersão de D , denotado por $\dim(D)$.

Observação: Se D não for uma MDE, definimos $\dim(D) = \infty$.

Saber a dimensão da imersão de uma MDE pode ser de grande utilidade na resolução de determinados problemas. Além de poder definir se uma matriz dada é ou não uma MDE, conhecer a dimensão da imersão de uma MDE, pode ajudar a decidir sobre a viabilidade de sua resolução. Uma dimensão muito alta resultará em tempos de computação longos e uma quantidade excessiva de dados.

Se a matriz D for uma matriz de distâncias de um MDGP [[Lavor and Liberti, 2014](#)], então a solução do problema deverá ser um conjunto de pontos no espaço $\mathbb{R}^3$, já que se trata de um problema de determinar coordenadas reais para os átomos de uma molécula [[Souza et al., 2013](#)]. Se conseguirmos obter de alguma forma que $\dim(D) > 3$, já será possível concluir que a matriz fornecida possui ruído ou até mesmo possui informações incorretas.

Visto essa importância, nosso objeto de interesse é a dimensão da imersão de uma MDE. Primeiramente, veremos alguns resultados sobre a dimensão da imersão e as realizações de uma MDE que servirão de base para um resultado que estabelece uma forma de encontrar a dimensão.

O seguinte resultado determina um limitante superior para a dimensão da imersão de uma determinada MDE, dependendo exclusivamente da ordem de D .

Proposição 1.2.2. [[Alencar et al., 2019](#)] Se D for uma MDE $n \times n$, com $n \geq 2$, então $\dim(D) \leq n - 1$.

Vimos que a partir de uma realização de uma MDE, conseguimos gerar infinitas realiza-

ções no mesmo espaço ou em espaços de dimensões maiores. Em ambos os casos, as realizações geradas foram obtidas a partir de isometrias. Logo, as realizações geradas serão isométricas à inicial. Esse fato se estende para quaisquer realizações de uma MDE, isto é, duas realizações de uma MDE sempre serão isométricas (o [Lema 1.2.1](#) e a [Proposição 1.2.3](#) mostram isso).

Lema 1.2.1. [\[Alencar et al., 2019\]](#) Se D for uma MDE $n \times n$ e $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ sequências de pontos que realizam D , para qualquer $m \geq \dim(D)$, então, para $i, j, k \in I_n$, temos:

$$(x_i - x_j)^t (x_k - x_j) = (y_i - y_j)^t (y_k - y_j).$$

Duas sequências de pontos $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$, para algum $m \geq \dim(D)$, são ditas ortogonalmente similares se existe um operador ortogonal Q em $\mathbb{R}^m$, tal que $Q(x_i - x_j) = y_i - y_j$, para $i, j \in I_n$. Denotamos o subespaço gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_n$ por $[v_i]_{i=1}^n$.

Proposição 1.2.3. [\[Alencar et al., 2019\]](#) Se D for uma MDE $n \times n$ e $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$, para algum $m \geq \dim(D)$, conjuntos de pontos que realizam D , então $\{x_i\}_{i=1}^n$ é ortogonalmente similar a $\{y_i\}_{i=1}^n$.

Obviamente, se todas as realizações de uma MDE são isométricas, a dimensão do espaço gerado por cada uma delas deve ser igual. Deste modo, todas as realizações terão a dimensão do menor espaço em que existe uma realização para a MDE, isto é, $\dim(D)$. O [Corolário 1.2.1](#) declara este fato formalmente.

Corolário 1.2.1. [\[Alencar et al., 2019\]](#) Se D for uma MDE $n \times n$ e $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$, para algum $m \geq \dim(D)$, uma sequência de pontos que realiza D , então a dimensão de $[x_i - x_1]_{i=2}^n$ é igual a $\dim(D)$.

Através do [Corolário 1.2.1](#) também podemos notar que, uma vez obtida uma realização para uma MDE D , conseguimos determinar $\dim(D)$.

1.3 Submatrizes Principais de uma MDE

Os Lemas [1.3.1](#), [1.3.2](#) e [1.3.3](#) estabelecem algumas relações entre uma MDE e suas submatrizes principais. A definição de submatriz principal difere de autor para autor, aqui usaremos a definição encontrada em [\[Tarazaga et al., 2007\]](#).

Definição 1.3.1. Sejam A uma matriz $n \times n$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subseteq I_n$, p inteiros positivos, com $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_p \leq n$. Então, a submatriz B dada por $B(i, j) = A(v_i, v_j)$ é dita ser uma submatriz principal de A .

Do modo como definido acima, temos que uma submatriz principal pode ser obtida a partir da matriz inicial, eliminando linhas e colunas dessa matriz, garantindo sempre que o conjunto de índices das linhas que sobram seja igual ao conjunto de índices das colunas.

Exemplo 1.3.1. Se a matriz A é definida como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então as matrizes

$$\begin{aligned} B_{11} &= \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ eliminando a linha 1 e coluna 1 de } A, \\ B_{22} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ eliminando a linha 2 e coluna 2 de } A, \\ B_{33} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ eliminando a linha 3 e coluna 3 de } A, \end{aligned}$$

são submatrizes principais de ordem 2 de A .

Lema 1.3.1. Se D é uma MDE $n \times n$, então qualquer submatriz principal de D também será uma MDE.

Demonstração. Como D é uma MDE $n \times n$, existe uma sequência $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ que realiza D , para algum $m > 0$. Seja B uma submatriz principal de ordem p de D , onde $p \leq n$ é um inteiro positivo.

Pela definição de submatriz principal, temos que B é gerada a partir de D , removendo $n - p$ linhas e colunas de mesmo índice. Sem perda de generalidade, suponha que as linhas e colunas removidas foram as $n - p$ últimas da matriz A e considere a subsequência $\{x_i\}_{i=1}^p \subseteq \{x_i\}_{i=1}^n$. Note que, para $i, j \in \{1, \dots, p\}$, temos

$$\|x_i - x_j\|^2 = D(i, j) = B(i, j).$$

Logo, $\{x_i\}_{i=1}^p$ realiza B e, portanto, B é uma MDE. $\square$

Sejam $I_n = \{1, \dots, n\}$ e $U, V \subseteq I_n$, tais que $U = \{u_1, \dots, u_p\}$, $V = \{v_1, \dots, v_q\}$ e D uma matriz $n \times n$. Então, $D_{(U,V)}$ é a submatriz de D tal que $D_{(U,V)}(i, j) = D(u_i, v_j)$, com $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$. Note que, deste modo, as submatrizes principais de D serão da forma $D_{(V,V)}$, $V \subseteq I_n$.

Se D for uma MDE de ordem n , existe uma relação entre a dimensão da imersão das submatrizes principais de D e $\dim(D)$. O [Lema 1.3.2](#) estabelece que $\dim(D)$ é maior que a dimensão da imersão de uma de suas submatrizes principais por no máximo uma unidade.

Lema 1.3.2. [[Alencar et al., 2019](#)] Seja D uma MDE $(n+1) \times (n+1)$. Se $\dim(D) = K+1$, então $\dim(D_{(I_n, I_n)}) \in \{K, K+1\}$.

Exemplo 1.3.2. Considere a seguinte MDE

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

com $\dim(D) = 2$. Note que os pontos $\{x_1 = (0, 0), x_2 = (2, 0), x_3 = (2, 1), x_4 = (2, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$, realizam a matriz D . Agora, considere a submatriz principal $D_{(I_3, I_3)}$ de D , isto é,

$$D_{(I_3, I_3)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obviamente, a sequência de pontos $\{x_1 = (0, 0), x_2 = (2, 0), x_3 = (2, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ realiza a matriz $D_{(I_3, I_3)}$. De acordo com o [Lema 1.3.2](#), $\dim(D_{(I_3, I_3)}) \in \{1, 2\}$, porém, se $\dim(D_{(I_3, I_3)}) = 1$ e $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ realizam $D_{(I_3, I_3)}$, considerando $y_1 = 0$ ¹, pelas entradas (1, 2) e (1, 3) de $D_{(I_3, I_3)}$, temos

$$\begin{cases} y_2^2 = 4 \Rightarrow y_2 = \pm 2, \\ y_3^2 = 5 \Rightarrow y_3 = \pm \sqrt{5}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Entretanto, pela entrada (2, 3) de $D_{(I_3, I_3)}$, temos que $(y_3 - y_2)^2 = 1$, o que é impossível para quaisquer valores de y_2, y_3 obtidos em (1.5), logo $\dim(D_{(I_3, I_3)}) = 2$.

¹ Isso é possível utilizando a função definida em (1.3) para transladar a sequência.

Agora, considere $V = \{2, 3, 4\}$ e a submatriz principal $D_{(V,V)}$ de D , isto é

$$D_{(V,V)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil verificar que a sequência $\{0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$ realiza $D_{(V,V)}$, assim $\dim(D_{(V,V)}) = 1$. Observe que, apesar da ordem de $D_{(I_3,I_3)}$ e $D_{(V,V)}$ serem iguais, a dimensão da imersão de $D_{(I_3,I_3)}$ é diferente da de $D_{(V,V)}$.

O [Lema 1.3.3](#) garante que, dado um conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ de n pontos que realizam a n -ésima submatriz principal de uma MDE de ordem $n + 1$ com dimensão de imersão de no máximo m , então S pode ser aumentado em um conjunto que realiza a matriz completa sem nenhuma alteração na dimensão do espaço, adicionando a S apenas mais um ponto.

Lema 1.3.3. [[Alencar et al., 2019](#)] Seja D uma MDE $(n + 1) \times (n + 1)$ com $\dim(D) \leq m$. Se $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto de pontos que realiza $D_{(I_n,I_n)}$, então existe $x_{n+1} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ que realiza D .

Exemplo 1.3.3. A matriz

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

é uma MDE de ordem 4 com $\dim(D) = 2$. Considerando a seguinte submatriz principal de D

$$D_{(I_3,I_3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

temos que a sequência $\{x_1 = (0, 0), x_2 = (1, 0), x_3 = (1, 1)\}$ realiza $D_{(I_3,I_3)}$. Pelo [Lema 1.3.3](#), deve existir um ponto $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{x_1, x_2, x_3, y\}$ realiza D . Deste modo, y deve satisfazer o seguinte sistema

$$\begin{cases} \|y - x_1\|^2 &= D(4,1) = 5, \\ \|y - x_2\|^2 &= D(4,2) = 2, \\ \|y - x_3\|^2 &= D(4,3) = 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Logo, y estará na interseção das esferas centradas em x_1, x_2 e x_3 e raios $\sqrt{D(4, 1)}, \sqrt{D(4, 2)}$ e $\sqrt{D(4, 3)}$, respectivamente. Resolvendo (1.6), obtemos $y = (2, 1)$. Portanto, a sequência $\{x_1 = (0, 0), x_2 = (1, 0), x_3 = (1, 1), x_4 = (2, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ realiza a matriz D .

O Teorema 1.4.1 apresentará uma forma detalhada de como podemos, a partir de uma MDE dada, gerar uma sequência de pontos que a realiza. Contudo, apenas observando o Lema 1.3.3, podemos já ter uma ideia de como é possível fazer isso para uma MDE D cuja dimensão da imersão é conhecida. Considerando x_1 como a origem de $\mathbb{R}^m$, com $m \geq \dim(D)$, e x_2 distando $d = \sqrt{D(2, 1)}$ do ponto x_1 , temos que $\{x_1, x_2\}$ realiza a $D(I_2, I_2)$. Deste modo, existirá um ponto $x_3 \in \mathbb{R}^m$ que realiza $D(I_3, I_3)$, e assim sucessivamente, teremos no final do processo uma sequência que realiza D .

1.4 Problema de Reconhecimento MDE

Estamos interessados no problema de determinar se uma dada matriz D , simétrica, oca, com entradas não negativas é, de fato, uma MDE, tal problema é conhecido como o Problema de Reconhecimento MDE. Para isso, buscamos determinar se $\dim(D)$ é finita ou infinita.

Se a dimensão da imersão da matriz D for finita, isto é, se D for de fato uma MDE, queremos também determinar uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^K$ que realiza D , sendo K inteiro positivo. Neste trabalho, estamos consideraremos o problema com matrizes cheias, ou seja, com todas as entradas fora da diagonal principal estritamente positivas.

Um algoritmo já conhecido é o Multidimensional Scaling (MDS) [Torgerson, 1952, Cox and Cox, 2008]. Dada uma matriz oca, simétrica D , é computado $G = -\frac{1}{2}JDJ$ (onde $J = I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^t$, I é a matriz identidade e $\mathbf{1}$ é o vetor formado por 1 em todas as entradas) e sua decomposição espectral $G = P\Lambda P^t$, onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$ e λ é o vetor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dos autovalores de G em ordem decrescente. Se existe $i \leq n$ com $\lambda_i < 0$, então D não é uma MDE. Caso contrário, D será uma MDE. Nesse caso, uma realização para D é dada por $x = P\sqrt{\Lambda}$ e a dimensão da imersão é dada pelo índice $\bar{K} \leq n$, tal que $\lambda_{\bar{K}}$ é o menor autovalor não-nulo.

Outros métodos [Dattorro, 2010, Sippl and Scheraga, 1985] são variações da ideia por trás do MDS. Em [Dokmanic et al., 2015] são apresentados outros algoritmos com o mesmo propósito, junto com uma comparação entre eles.

O Teorema 1.4.1 apresenta uma importante propriedade inerente a qualquer MDE D , de

modo a caracterizar uma realização de D no espaço de menor dimensão possível e, com isso, tornando possível obter, além de uma realização para D , a dimensão da imersão de D .

Teorema 1.4.1. [Alencar et al., 2019] Seja K um número inteiro positivo e D uma matriz $n \times n$, oca, simétrica, com entradas não negativas e $n \geq 2$. D é uma MDE com $\dim(D) = K$ se, e somente se, existir $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^K$ e um conjunto de índices $I = \{i_1, \dots, i_{K+1}\} \subset I_n$ tal que

$$\begin{cases} x_{i_1} &= 0 \\ x_{i_j}(j-1) &\neq 0, j \in I_{2,K+1} \\ x_{i_j}(i) &= 0, j \in I_{2,K}, i \in I_{j,k}, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde $\{x_i\}_{i=1}^n$ realiza D . Denotamos por $x_h(p)$ a p -ésima componente do h -ésimo ponto.

Antes de apresentar a demonstração para o Teorema 1.4.1, veremos dois exemplos que podem ajudar a compreender o que é exigido em (1.7). Primeiramente, veremos um caso em que a matriz dada é uma MDE.

Exemplo 1.4.1. Considere a matriz,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz D é uma MDE de ordem 4 com $\dim(D) = 2$. Utilizando o resultado Teorema 1.4.1, existe um conjunto de índices $I = \{i_1, i_2, i_3\} \subset I_4$ que gera uma subsequência reordenada $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$ satisfazendo (1.7), isto é,

$$x_{i_1} = (0, 0),$$

$$x_{i_2} = (a_1, 0),$$

$$x_{i_3} = (a_2, b_2),$$

com a_1 e b_2 não-nulos. Supondo $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\} = \{x_1, x_2, x_3\}$, temos

$$\begin{cases} 1 &= \|x_2 - x_1\|^2 = a_1^2 \\ 1 &= \|x_3 - x_1\|^2 = a_2^2 + b_2^2, \\ 2 &= \|x_3 - x_2\|^2 = (a_2 - a_1)^2 + b_2^2. \end{cases} \quad (1.8)$$

Resolvendo (1.8) para $a_1 = 1$, ficamos com $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (1, 0)$ e $x_3 = (0, 1)$. Pelo Lema 1.3.3, temos que existe $x_4 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ realiza D . Desse modo,

$$\begin{cases} 2 &= \|x_4 - x_1\|^2 = a^2 + b^2, \\ 1 &= \|x_4 - x_2\|^2 = (a - 1)^2 + b^2, \\ 1 &= \|x_4 - x_3\|^2 = a^2 + (b - 1)^2. \end{cases} \quad (1.9)$$

Resolvendo (1.9), obtemos $x_4 = (1, 1)$.

Portanto, a sequência formada pelos pontos x_1, x_2, x_3 e x_4 é uma realização para D que satisfaz (1.7).

É possível notar no Exemplo 1.4.1 que os pontos que realizam a matriz D foram gerados de uma forma escalonada. Agora vamos ver um exemplo em que a matriz dada não é uma MDE.

Exemplo 1.4.2. Considere a seguinte matriz,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Claramente, D é uma matriz simétrica, oca e todas suas entradas são não negativas. Mas, como visto em (1.4), D não é uma MDE. Agora, vamos usar o Lema 1.3.3 e o Teorema 1.4.1 para mostrar esse fato.

Tome a a submatriz principal $D_{(I_2, I_2)}$ de ordem 2 de D , isto é,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que os pontos $x_1 = (0, 0)$ e $x_2 = (3, 0)$ realizam $D_{(I_2, I_2)}$. Pelo Lema 1.3.3, se D for uma MDE, existe $x_3 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{x_1, x_2, x_3\}$ realiza D . Então, x_3 deve satisfazer

$$\begin{cases} 1 &= \|x_3 - x_1\|^2 = a^2 + b^2, \\ 1 &= \|x_3 - x_2\|^2 = (a - 3)^2 + b^2, \end{cases}$$

implicando que $a = \frac{3}{2}$ e $b^2 = -\frac{5}{4}$, o que é absurdo, já que $b \in \mathbb{R}$. Deste modo, é impossível encontrar uma sequência $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbb{R}^2$, satisfazendo (1.7). Portanto, pelo Teorema 1.4.1, D não é uma MDE.

De modo geral, dada uma MDE D de ordem n com $\dim(D) = K$, se $\{x_i\}_{i=1}^n$ é uma sequência que realiza D e $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{K+1}$ é a subsequência reordenada satisfazendo (1.7), então

$$\begin{cases} x_{i_1} &= (0, 0, \dots, 0), \\ x_{i_j} &= (a_{(j,1)}, a_{(j,2)}, \dots, a_{(j,j-1)}, 0, \dots, 0), \quad j \in I_{2,K+1} \\ x_{i_{K+1}} &= (a_{(K+1,1)}, a_{(K+1,2)}, \dots, a_{(K+1,K-1)}, a_{(K+1,K)}, \dots, a_{(K+1,n)}). \end{cases}$$

com $a_{(j,j-1)} \neq 0, j \in I_{2,K+1}$.

Entendendo como é exigida a subsequência reordenada em (1.7), podemos partir para a demonstração do Teorema 1.4.1, qual fornecerá de forma direta o algoritmo para a resolução do problema.

Demonstração. Seja K um inteiro positivo e D uma MDE $n \times n$, com $\dim(D) = K > 0$. Queremos mostrar que existe uma realização $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^K$ de D e um conjunto de índices $I = \{i_j\}_{j=1}^{K+1} \subset I_n$ com $K + 1$ elementos tal que (1.7) seja satisfeito.

Observe que, como K é um número inteiro positivo, temos $D \neq 0$. Vamos continuar a demonstração por indução sobre n .

Para $n = 2$, temos

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D(1,2) \\ D(1,2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, pela Proposição 1.2.2, temos que $\dim(D) = 1, \{x_1 = 0, x_2 = \sqrt{D(1,2)}\} \subset \mathbb{R}^1$ realiza D , $I = \{1, 2\}$ e, portanto, vale (1.7) para $n = 2$.

Como hipótese de indução, suponha que a afirmação é verdadeira para algum $n \geq 2$. Isto é, toda matriz D de ordem n possui uma realização que admite uma subsequência reordenada satisfazendo (1.7).

Agora, seja D uma MDE $(n+1) \times (n+1)$ tal que $\dim(D) = K$. Assim, pelos lemas 1.3.1 e 1.3.2, $\bar{D} = D_{(I_n, I_n)}$ é uma MDE com $\dim(\bar{D}) = k$, sendo $k = K$ ou $k = K - 1$.

Usando a hipótese de indução em $\bar{D}$, temos que existe $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^k$ que realiza $\bar{D}$ e um conjunto de índices $I = \{i_j\}_{j=1}^{k+1} \subset I_n$, gerando uma subsequência reordenada que satisfaz (1.7).

Isto é,

$$\begin{cases} x_{i_1} &= 0, \\ x_{i_j}(j-1) &\neq 0, j \in I_{2,K+1}, \\ x_{i_j}(i) &= 0, j \in I_{2,K}, i \in I_{j,k}. \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^{k+1}$, definindo como sendo nula a $(k+1)$ -ésima coordenada de cada ponto da sequência.

Como $\dim(D) \leq (k+1)$, utilizando o [Lema 1.3.3](#), sabemos que existe um ponto $y = (y_1, y_2, \dots, y_{k+1})$ em $\mathbb{R}^{k+1}$, onde a sequência $\{x_i\}_{i=1}^n \cup \{y\}$ realiza D . Deste modo, temos que y pertence à interseção das esferas centradas em $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^{k+1}$, com raios $\{\sqrt{D(i, n+1)}\}_{i=1}^n$, respectivamente. Assim, y é a solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \|x_1 - y\|^2 &= D(1, n+1) \\ \|x_2 - y\|^2 &= D(2, n+1) \\ &\vdots \\ \|x_n - y\|^2 &= D(n, n+1). \end{cases} \quad (1.10)$$

Pela hipótese de indução, existe um conjunto de índices, $I = \{i_1, \dots, i_{K+1}\} \subset I_n$, tal que a subsequencia reordenada $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{k+1}$ satisfaz (1.7).

Reordenando as equações de (1.10) de tal forma que a j -ésima equação seja $\|x_{i_j} - y\|^2 = D(i_j, n+1)$, para $j \in I_{k+1}$, ficamos com

$$\begin{cases} \|x_{i_1} - y\|^2 &= D(i_1, n+1) \\ \|x_{i_2} - y\|^2 &= D(i_2, n+1) \\ &\vdots \\ \|x_{i_{k+1}} - y\|^2 &= D(i_{k+1}, n+1) \\ \|x_{j_1} - y\|^2 &= D(j_1, n+1) \\ \|x_{j_2} - y\|^2 &= D(j_2, n+1) \\ &\vdots \\ \|x_{j_{n-k-1}} - y\|^2 &= D(j_{n-k-1}, n+1), \end{cases}$$

onde $\{j_i\}_{i=1}^{n-k-1} = I_n \setminus I$.

Note que os pontos $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{k+1}$ são conhecidos, com $x_{i_1} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Usando essas informações, subtraímos a primeira equação das demais e obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \|y\|^2 & = & D(i_1, n+1) \\ x_{i_2}^t y & = & b_{i_2} \\ & \vdots & \\ x_{i_{k+1}}^t y & = & b_{i_{k+1}} \\ x_{j_1}^t y & = & b_{j_1} \\ x_{j_2}^t y & = & b_{j_2} \\ & \vdots & \\ x_{j_{n-k-1}}^t y & = & b_{j_{n-k-1}}, \end{array} \right. \quad (1.11)$$

onde

$$b_p = \frac{\|x_p\|^2 - D(p, n+1) + D(i_1, n+1)}{2},$$

para $p \in I_n \setminus \{i_1\}$.

Seja B a matriz $(n-1) \times k$ associada à parte linear de (1.11) e seja b o vetor solução correspondente, isto é,

$$B = \begin{pmatrix} x_{i_2}^t \\ \vdots \\ x_{i_{j_{n-k-1}}}^t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_{i_2} \\ \vdots \\ b_{i_{j_{n-k-1}}} \end{pmatrix}.$$

Com isso, podemos reescrever o sistema (1.11) da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|y\|^2 = \bar{D}(i_1, n+1) \\ By(I_k) = Pb, \end{array} \right.$$

onde P é uma matriz de permutação que define a ordem usada nas equações anteriores.

Por construção, temos que B é uma matriz triangular inferior com a diagonal principal estritamente positiva. Portanto, a parte linear do sistema tem apenas dois resultados possíveis: uma única solução ou nenhuma solução.

Se o sistema não tivesse solução, o conjunto gerado pela interseção das esferas em $\mathbb{R}^{k+1}$ seria vazio e, portanto, D não seria uma MDE, o que é um absurdo. Logo, a parte linear do sistema possui solução única, digamos y^* .

Substituindo y^* em $\|y\|^2 = \|y(I_k)\|^2 + y_{k+1}^2 = D(i_1, n+1)$, obtemos

$$y_{k+1}^2 = D(i_1, n+1) - \|y^*\|^2. \quad (1.12)$$

Se o lado direito da igualdade em (1.12) fosse negativo, então o sistema não teria solução real, isto é, a interseção das esferas em $\mathbb{R}^{k+1}$ seria vazia e, portanto, D não seria uma MDE, caindo assim no mesmo absurdo anterior. Logo, (1.12) devemos ter $D(i_1, n+1) - \|y^*\|^2 \geq 0$.

Se o lado direito da igualdade (1.12) for nulo, então teremos que o ponto y tem a $(k+1)$ -ésima coordenada nula, assim como todos os pontos anteriores da sequência, logo, a última coordenada de cada ponto se torna desnecessária, implicando que $k = K$. Desse modo, teremos

$$x_{n+1} = y^*.$$

No caso em que o lado direito da igualdade (1.12) é estritamente positivo, temos duas soluções possíveis para a parte não linear:

$$y_{k+1} = \pm \sqrt{D(i_1, n+1) - \|y^*\|^2}.$$

Tomando qualquer uma dessas soluções e definindo

$$x_{n+1} = (y^*, \pm \sqrt{D(i_1, n+1) - \|y^*\|^2}),$$

teremos que x_{n+1} estará na interseção das esferas. Assim, basta escolher uma delas e teremos, neste caso, que $k = K - 1$.

De todo modo, o conjunto de índices da hipótese de indução permanece válido e a afirmação é verdadeira. Portanto, existe uma sequência $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^k$ e um conjunto de índices $I = \{i_1, \dots, i_{K+1}\} \subset I_n$ satisfazendo (1.7). $\square$

1.5 Algoritmo *edmsph*

O processo de indução aplicado na demonstração do Teorema 1.4.1 sugere um algoritmo para verificar se uma matriz D é ou não uma MDE, determinando $\dim(D)$. Sendo D uma MDE, o algoritmo também determina uma realização para D no espaço de menor dimensão possível.

Antes de apresentar o algoritmo, vamos visualizar um exemplo onde obtemos uma realização de uma MDE, seguindo o processo descrito na demonstração do Teorema 1.4.1.

Exemplo 1.5.1. Considere a seguinte matriz

$$D \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Partindo da submatriz principal de segunda ordem

$$D_{(I_2, I_2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

obtemos $x_1 = 0$ e $x_2 = \sqrt{D_{(I_2, I_2)}(2, 1)} = 1$.

Agora, vamos olhar para a submatriz principal de ordem 3:

$$D_{(I_3, I_3)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consideramos $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (1, 0)$ e, se $y = (y_1, y_2)$ unido aos pontos x_1 e x_2 realiza $D_{(I_3, I_3)}$, então y é solução de

$$\begin{cases} \|y - x_1\|^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1, \\ \|y - x_2\|^2 = (y_1 - 1)^2 + y_2^2 = 2. \end{cases} \quad (1.13)$$

Resolvendo (1.13), obtemos $y^+ = (0, 1)$ e $y^- = (0, -1)$ e considerando $x_3 = y^+$, temos que os pontos $\{x_1 = (0, 0), x_2 = (1, 0), x_3 = (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ realizam $D_{(I_3, I_3)}$.

Seguindo para o próximo passo, temos $D_{(I_4, I_4)} = D$. Consideramos $x_1 = (0, 0, 0)$, $x_2 = (1, 0, 0)$, $x_3 = (0, 1, 0)$ e, do mesmo modo, se $y = (y_1, y_2, y_3)$ realiza D , então y é solução de

$$\begin{cases} \|y - x_1\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1, \\ \|y - x_2\|^2 = (y_1 - 1)^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2, \\ \|y - x_3\|^2 = y_1^2 + (y_2 - 1)^2 + y_3^2 = 2. \end{cases} \quad (1.14)$$

Por fim, resolvendo (1.14), obtemos $y^+ = (0, 0, 1)$ e $y^- = (0, 0, -1)$. Considerando $x_4 = y^+$, temos que $\{x_1 = (0, 0, 0), x_2 = (1, 0, 0), x_3 = (0, 1, 0), x_4 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ realiza D , finalizando assim o processo. Ou seja, concluímos que $\dim(D) = 3$.

O [Algoritmo 1](#) é baseado no algoritmo apresentado em [\[Alencar et al., 2019\]](#) e generaliza o processo descrito no [Exemplo 1.5.1](#), para uma dada matriz D $n \times n$, simétrica, oca, com entradas não negativas, retornando, no final do processo, a dimensão da imersão de D e, no caso em que D for uma MDE, isto é, $\dim(D) = K < \infty$, uma realização para D em $\mathbb{R}^K$.

Algorithm 1 $K = \text{edmsph}(D)$

```

1:  $I = \{1, 2\}$ 
2:  $K = 1$ 
3:  $(x_1, x_2) = (0, \sqrt{D_{12}})$ 
4: for  $i \in \{3, \dots, n\}$  do
5:    $\Gamma = \bigcap_{j \in I} \mathbb{S}^K(x_j, \sqrt{D_{ij}})$ 
6:   If  $\Gamma = \emptyset$  then
7:     return  $\infty$ 
8:   else if  $\Gamma = \{p_i\}$  then
9:      $x_i = p_i$ 
10:  else  $\Gamma = \{p_i^+, p_i^-\}$  then
11:     $x_i = p_i^+$ 
12:     $x \leftarrow \text{expand}(x)$ 
13:     $I \leftarrow I \cup \{i\}$ 
14:     $K \leftarrow K + 1$ 
15:  end if
16: end for
17: return  $K, x$ 

```

No algoritmo acima, a função $\text{expand}(x)$ adiciona uma coordenada nula a cada ponto da sequência x e $\mathbb{S}^K(p, r)$ denota a esfera centralizada em $p \in \mathbb{R}^{K+1}$ com raio r .

1.6 Testes Computacionais *edmsph*

O [Algoritmo 1](#) foi implementado no software *Wolfram Mathematica* e foram realizados alguns testes com MDEs conhecidas, variando a dimensão da imersão e a quantidade de pontos, isto é, a dimensão da matriz de entrada. Para cada combinação de dimensão e quantidade de pontos, vários testes foram realizados e calculamos a média dos resultados obtidos. Através desses testes podemos analisar a precisão e o tempo de processamento do algoritmo.

A [Tabela 1.1](#) dispõe os resultados desses testes comparando o tempo, em segundos, de processamento do algoritmo, para as dimensões K e quantidades de pontos testadas n e a [Tabela 1.2](#) compara a precisão do algoritmo em termos do erro numérico.

$n \backslash K$	2	3	4	5	10
10	0	0	0	0	-
100	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0312
1000	0,1093	0,1875	0,1875	0,2343	0,4531
5000	0,7500	0,8906	0,9687	1,2343	1,8281

Tabela 1.1 – Desempenho do [Algoritmo 1](#) em segundos

$n \backslash K$	2	3	4	5	10
10	$3,772 \times 10^{-15}$	$1,657 \times 10^{-14}$	$1,806 \times 10^{-14}$	$8,682 \times 10^{-14}$	-
100	$3,278 \times 10^{-14}$	$5,634 \times 10^{-14}$	$2,631 \times 10^{-13}$	$9,731 \times 10^{-14}$	$1,826 \times 10^{-11}$
1000	$3,824 \times 10^{-14}$	$1,751 \times 10^{-12}$	$6,544 \times 10^{-13}$	$3,883 \times 10^{-13}$	$4,227 \times 10^{-12}$
5000	$3,601 \times 10^{-13}$	$9,131 \times 10^{-13}$	$2,097 \times 10^{-12}$	$3,768 \times 10^{-12}$	$2,399 \times 10^{-10}$

Tabela 1.2 – Desempenho do [Algoritmo 1](#) em relação ao erro numérico

Na [Tabela 1.2](#), o erro foi calculado pela norma da diferença entre o resultado obtido e a sequência real de pontos que realiza a matriz. Analisando esses dados, vemos que, em todos os testes realizados, o erro foi suficientemente pequeno. De fato, esse padrão tende a se manter para quantidades maiores de pontos na sequência, porém quando a dimensão é aumentada para valores da ordem de 50, o erro se torna consideravelmente grande.

Alguns testes foram realizados com 100 pontos e dimensão 50, onde o erro mínimo ficou na ordem de 10^{-8} , sendo que em boa parte dos testes a dimensão da imersão retornada foi de $K = 51$, isto é, uma unidade maior que a real.

Mesmo que o erro possa ser relativamente pequeno, se comparado com a dimensão e a quantidade de pontos, um erro de tal ordem pode fazer com que o algoritmo retorne uma dimensão de imersão maior do que a real em uma quantidade muito menor de pontos.

Quanto ao tempo de processamento do algoritmo, é possível notar que o aumento na quantidade de pontos faz o tempo crescer de forma quase linear. Já o aumento da dimensão nem sempre gera um impacto tão grande no tempo.

Note que, para 5000 pontos, quando a dimensão é fixada em 5, o tempo foi de 1.2348 segundos, com a mesma quantidade de pontos. Quando a dimensão foi dobrada para 10, o tempo foi de apenas 1.82813 segundos, isto é, um aumento de aproximadamente 50% no tempo de processamento.

Obviamente, o algoritmo implementado pode ser refinado para melhor processamento. Para isso, seria necessário um foco no próprio algoritmo e na linguagem utilizada para sua implementação. Contudo, como nosso objetivo é uma contribuição teórica para o problema, não nos aprofundaremos nos aspectos computacionais do mesmo.

2 Álgebra Geométrica

A Álgebra de Clifford, ou Álgebra Geométrica (AG), é construída sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, que pode ser o espaço Euclidiano, que dizemos ser de assinatura positiva. Isto é, os vetores da base canônica possuem a seguinte propriedade:

$$e_i * e_i = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde "*" denota o produto escalar usual do espaço. Outra variante do espaço é quando temos

$$e_i * e_i = -1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Neste caso, diz-se que o espaço tem assinatura negativa, algumas vezes chamado de espaço anti-euclidiano. No terceiro caso, temos o espaço $\mathbb{R}^{p,q}$, dito ser de assinatura mista, cuja canônica é dada por

$$\overline{\mathbb{R}}^{p,q} = \{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\},$$

onde os vetores $e_i, i = 1, \dots, n = p + q$ possuem a seguinte propriedade:

$$e_i * e_j = \begin{cases} 1, & 1 \leq i = j \leq p, \\ -1, & p < i = j \leq p + q, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

O último caso será citado posteriormente e pode ser criado a partir de uma mudança de base do espaço $\mathbb{R}^{p,q}$. Por simplicidade, podemos denotar $e_i * e_i$ por e_i^2 .

2.1 Conceitos Básicos

O produto que define a Álgebra Geométrica é chamado de Produto Geométrico ou Produto de Clifford. Além deste, dois outros produtos são importantes nessa álgebra: o produto interno, denotado por "." e o produto denotado por "^", chamado de produto exterior ou externo. Nesta seção esses produtos, juntamente com os elementos da AG, serão explorados. A notação e os resultados apresentados nessa seção são motivados por [\[Perwass, 2000\]](#).

2.1.1 Estrutura e Base de $\mathbb{G}_{p,q}$

A Álgebra Geométrica é uma álgebra associativa definida sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^{p,q}$ e é denotada por $\mathbb{G}_{p,q}$. Assim, recaem sobre seus elementos todas as propriedades de um anel em relação a soma e ao produto e as propriedades de um espaço vetorial em relação as operações com um escalar.

O produto que define a Álgebra Geométrica é denotado por " $\circ$ " e satisfaz as seguintes propriedades do anel:

- Fechado:

$$A \circ B \in \mathbb{G}_{p,q};$$

- Associatividade:

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C);$$

- Distributividade:

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C,$$

além da multiplicação por escalar:

$$\alpha \circ A = A \circ \alpha = \alpha A.$$

Como mencionado anteriormente, o produto " $\circ$ " é chamado *produto geométrico* ou *produto de Clifford*, definindo, com isso, uma álgebra associativa sobre o espaço $\mathbb{R}^{p,q}$. O que diferencia a Álgebra Geométrica de uma álgebra associativa qualquer é a seguinte propriedade sobre produto geométrico:

Se $a \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q}$, então

$$a \circ a = a * a \in \mathbb{R}.$$

Essa propriedade faz uma "ligação" entre os elementos da álgebra com os elementos do corpo $\mathbb{R}$. O produto geométrico, por ser o principal produto dessa álgebra é, na maioria das vezes, denotado apenas pela justaposição dos elementos. Isto é, $A, B \in \mathbb{G}_{p,q}$, então

$$A \circ B = AB.$$

Essa será a notação usada a partir de agora para o produto geométrico.

Uma forma de construir a base canônica de $\mathbb{G}_{p,q}$ é através dos seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{1\} \\ S_1 &= \{e_i : 1 \leq i \leq n\} \\ S_2 &= \{e_i e_j : 1 \leq i < j \leq n\} \\ S_3 &= \{e_i e_j e_k : 1 \leq i < j < k \leq n\} \\ &\vdots \\ S_n &= \{I = e_1 e_2 \dots e_n\}, \end{aligned}$$

onde $n = p + q$.

O primeiro conjunto S_0 gera o espaço unidimensional dos escalares, o conjunto S_1 gera o espaço vetorial n -dimensional $\mathbb{R}^{p,q}$, o conjunto S_2 é formado por elementos que chamamos de bivectores ou 2-vetores e gera o espaço vetorial com dimensão $\frac{n^2-n}{2}$. Essa ideia segue para todos os outros conjuntos $S_i, i = 3, \dots, n-1$ e o conjunto S_n gera um espaço unidimensional, assim como o dos escalares, que é gerado por S_0 . Por conta disso, o elemento $I = e_1 e_2 \dots e_n$ é chamado de pseudo-escalar da Álgebra Geométrica.

No geral, os elementos de $\mathbb{G}_{p,q}$ são chamados multivetores e são gerados pela base formada pela união desses conjuntos, isto é, $\overline{\mathbb{G}}_{p,q} = \cup_{i=0}^n S_i$. Um elemento $A \in [S_k]$ (espaço gerado por S_k) é dito ser um k -vetor, onde $gr(A) = k$ (grau de A). De modo que os multivetores serão combinações de k -vetores, para $k = 0, \dots, n$. Por exemplo,

$$A = 3 + 2e_1 + 4e_1 e_2 \in \mathbb{G}_{p,q},$$

é um multivetor formado pela combinação de um 0-vetor (o escalar 3), um 1-vetor (o vetor $2e_1$) e um 2-vetor (o bivector $4e_1 e_2$).

Definimos o elemento E_i como sendo o i -ésimo elemento da base $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}$, deste modo, um elemento genérico $A \in \mathbb{G}_{p,q}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$A = a_i E_i = \sum a_i E_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}.$$

O elemento de maior grau da base de $\mathbb{G}_{p,q}$, isto é, E_{2^n} , é o pseudo-escalar, denotado por I .

2.1.2 Produto Geométrico

O produto geométrico é definido entre os vetores da base do seguinte modo:

$$e_i e_j = \begin{cases} 1, & 1 \leq i = j \leq p \\ -1, & p < i = j \leq p + q, \\ -e_j e_i, & i \neq j. \end{cases}$$

Isso se estende para os demais elementos da base de $\mathbb{G}_{p,q}$, utilizando a propriedade associativa do produto geométrico. Por exemplo:

Exemplo 2.1.1. Se $A, B, C \in \mathbb{G}_{2,1}$, com $A = E_3 = e_2$, $B = E_5 = e_1 e_2$ e $C = E_8 = e_1 e_2 e_3$, então o produto geométrico entre A e B pode ser obtido do seguinte modo:

$$\begin{aligned} AB &= e_2(e_1 e_2) \\ &= (e_2 e_1) e_2 \\ &= -(e_1 e_2) e_2 \\ &= -e_1(e_2 e_2) \\ &= -e_1. \end{aligned}$$

Seguindo a mesma ideia, o produto entre os vetores B e C fica sendo

$$\begin{aligned} BC &= (e_1 e_2)(e_1 e_2 e_3) \\ &= (-e_2 e_1)(e_1 e_2 e_3) \\ &= -e_2(e_1 e_1)(e_2 e_3) \\ &= -e_2(e_2 e_3) \\ &= -(e_2 e_2) e_3 \\ &= -e_3. \end{aligned}$$

Agora, das propriedades da álgebra associativa, o produto geométrico é facilmente estendido para quaisquer multivetores de $\mathbb{G}_{p,q}$. Dados dois elementos $A = a_i E_i$ e $B = b_i E_i$ em $\mathbb{G}_{p,q}$, temos

$$A \circ B = AB = (a_i E_i)(b_i E_i) = \sum a_i E_i \sum b_i E_i.$$

Assim, para obter o produto geométrico geral, basta usar a associatividade e a distributividade do produto geométrico em relação à soma.

Exemplo 2.1.2. Se $A = 2e_1 + 3e_{12} + e_{123}$, $B = e_1 + 2e_{23} \in \mathbb{G}_3$, então

$$\begin{aligned}
 AB &= (2e_1 + 3e_{12} + e_{123})(e_1 + 2e_{23}) \\
 &= 2e_1e_1 + 3e_{12}e_1 + e_{123}e_1 + 4e_1e_{23} + 6e_{12}e_{23} + 2e_{123}e_{23} \\
 &= 2 - 3e_2 - e_1e_2e_1e_3 + 4e_{123} + 6e_{13} - 2e_1 \\
 &= 2 - 3e_2 + e_{23} + 4e_{123} + 6e_{13} - 2e_1 \\
 &= 2 - 2e_1 - 3e_2 + 6e_{13} + e_{23} + 4e_{123}.
 \end{aligned}$$

Outra notação utilizada aqui, é obtida a partir da redução da notação de um elemento básico $E_i = e_{i_1} \dots e_{i_k}$ em $E_i = e_{i_1 \dots i_k}$. Por simplicidade, a não ser em casos que seja necessário evitar ambiguidades, será usado essa notação a partir de agora.

2.1.3 Produto Interno e Produto Exterior

Para definir os produtos interno e exterior será necessário entender o conceito de projeção gradual. Dado um elemento básico $E = E_i$, $i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$, a projeção gradual de E_i sobre o grau k é definida por

$$\langle E \rangle_k = \begin{cases} E, & gr(E) = k, \\ 0, & gr(E) \neq k. \end{cases}$$

Para um elemento genérico de $\mathbb{G}_{p,q}$ a projeção segue por associatividade, isto é, se $A = a_i E_i$, então

$$\langle A \rangle_k = a_i \langle E_i \rangle_k.$$

Exemplo 2.1.3. Se tomarmos $A \in \mathbb{G}_{p,q}$ como sendo o resultado do produto geométrico no Exemplo 2.1.2, isto é,

$$A = 2 - 2e_1 - 3e_2 + 6e_{13} + e_{23} + 4e_{123}.$$

Então, a projeção gradual de A sobre o grau 0 será obtida utilizando a associatividade do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle_0 &= \langle (2 - 2e_1 - 3e_2 + 6e_{13} + e_{23} + 4e_{123}) \rangle_0 \\
 &= \langle 2 \rangle_0 + \langle (-2e_1 - 3e_2) \rangle_0 + \langle (6e_{13} + e_{23}) \rangle_0 + \langle 4e_{123} \rangle_0 \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, as projeções graduais de A sobre os graus 1, 2 e 3 ficam

$$\langle A \rangle_1 = -2e_1 - 3e_2,$$

$$\langle A \rangle_2 = 6e_{13} + e_{23},$$

$$\langle A \rangle_3 = 4e_{123}.$$

Usando a projeção gradual, agora podemos definir o produto interno e exterior com base no produto geométrico.

Produto Interno: O produto interno entre dois elementos básicos de $\mathbb{G}_{p,q}$ E_i e E_j , onde $gr(E_i) = k$ e $gr(E_j) = l$ é dado por

$$E_i \cdot E_j = \begin{cases} \langle E_i E_j \rangle_{|k-l|}, & i, j > 0 \\ 0, & i = 0 \text{ ou } j = 0. \end{cases}$$

Produto Exterior: O produto exterior entre dois elementos básicos de $\mathbb{G}_{p,q}$ E_i e E_j , onde $gr(E_i) = k$ e $gr(E_j) = l$ é dado por

$$E_i \wedge E_j = \langle E_i E_j \rangle_{k+l}.$$

Do mesmo modo que para o produto geométrico, a extensão dos produtos interno e exterior para elementos genéricos de $\mathbb{G}_{p,q}$ segue das propriedades da álgebra associativa.

Exemplo 2.1.4. Sejam $A, B \in \mathbb{G}_3$, onde $A = 2e_1 + 3e_{12} + e_{123}$ e $B = e_1 + 2e_{23}$, então

$$A \cdot B = (2e_1 + 3e_{12} + e_{123}) \cdot (e_1 + 2e_{23})$$

$$= 2e_1 \cdot e_1 + 3e_{12} \cdot e_1 + e_{123} \cdot e_1$$

$$+ 2e_1 \cdot 2e_{23} + 3e_{12} \cdot 2e_{23} + e_{123} \cdot 2e_{23}$$

$$= 2 - 3e_2 + e_{23} + 0 + 0 - 2e_1$$

$$= 2 - 2e_1 - 3e_2 + e_{23}.$$

$$A \wedge B = (2e_1 + 3e_{12} + e_{123}) \wedge (e_1 + 2e_{23})$$

$$= 2e_1 \wedge e_1 + 3e_{12} \wedge e_1 + e_{123} \wedge e_1$$

$$+ 2e_1 \wedge 2e_{23} + 3e_{12} \wedge 2e_{23} + e_{123} \wedge 2e_{23}$$

$$= 0 + 0 + 0 + 4e_{123} + 0 + 0$$

$$= 4e_{123}.$$

Note que, comparando os resultados dos produtos interno e exterior no [Exemplo 2.1.4](#) com o do produto geométrico no [Exemplo 2.1.2](#), é fácil de notar que todos os elementos que constituem $A \cdot B$ e $A \wedge B$ estão presentes em AB , mas nem todos que constituem AB estão em $A \cdot B$ e $A \wedge B$.

Para vetores de $\mathbb{G}_{p,q}$, o seguinte resultado é válido:

Proposição 2.1.1. Se $x, y \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q}$, então

$$x \circ y = x \wedge y + x \cdot y.$$

Demonstração. Vamos escrever os vetores x e y como combinações dos vetores básicos, isto é, $x = \sum x_i e_i$ e $y = \sum y_i e_i$. Assim, o produto geométrico entre x e y fica sendo

$$xy = \sum x_i e_i \sum y_i e_i.$$

Como $gr(e_i e_j) = 2$, para $i \neq j$ e $gr(e_i e_i) = 0$, não pode existir algum termo de xy cujo grau seja 1. Logo, podemos escrever o produto como

$$\begin{aligned} xy &= \langle xy \rangle_0 + \langle xy \rangle_2 \\ &= x \cdot y + x \wedge y. \end{aligned}$$

Desse modo, o produto geométrico entre vetores de $\mathbb{R}^{p,q}$, também pode ser definido como a soma dos produtos interno e exterior desses vetores. $\square$

2.1.4 Inverso dos Elementos Básicos e Dual de um Multivetor

Alguns elementos da Álgebra Geométrica possuem inverso em relação ao produto geométrico. Dentre esses estão os elementos básicos. Primeiramente, vamos separar o grau de um elemento no grau positivo gr_+ e no grau negativo gr_- .

O grau positivo de um elemento básico $E_i \in \bar{\mathbb{G}}_{p,q}$ é definido como a quantidade de vetores básicos que o compõem cujo quadrado é 1, isto é, $e_i^2 = e_i e_i = 1$. Por exemplo, se $E_i = e_{123} \in \mathbb{G}_{2,1}$, então $gr_+(E_i) = 2$, uma vez que $e_1 e_1 = e_2 e_2 = 1$ e $e_3 e_3 = -1 \neq 1$.

O grau negativo de um elemento básico $E_i \in \bar{\mathbb{G}}_{p,q}$ é definido como sendo a quantidade de vetores básicos que compõem E_i cujo quadrado é -1 . Por exemplo, tomando o mesmo $E_i = e_{123} \in \mathbb{G}_{2,1}$, temos que $gr_-(E_i) = 1$.

Dado um elemento básico $E_i \in \bar{\mathbb{G}}_{p,q}$, o inverso desse elemento em relação ao produto geométrico é definido da seguinte forma:

$$E_i^{-1} = (-1)^r (-1)^{k(k-1)/2} E_i,$$

onde $k = gr(E_i)$ e $r = gr_-(E_i)$. O mesmo pode ser estendido para qualquer múltiplo de um elemento básico do seguinte modo

$$(\alpha E_i)^{-1} = \frac{1}{\alpha} E_i^{-1}.$$

Outro conceito simples, porém importante, da Álgebra Geométrica, é a dualidade. Seja $E_i \in \bar{\mathbb{G}}_{p,q}$ um elemento básico de $\mathbb{G}_{p,q}$, o dual de E_i , denotado por E_i^* , é definido como

$$E_i^* = E_i I^{-1},$$

onde I é o pseudo-escalar de $\mathbb{G}_{p,q}$, cujo inverso é dado por

$$I^{-1} = (-1)^q (-1)^{n(n-1)/2} I.$$

O dual de um elemento básico E_i é definido por $E_i^* = E_i I^{-1}$. Do mesmo modo que o produto geométrico, o dual pode ser estendido para um elemento genérico de $\mathbb{G}_{p,q}$, onde $A^* = a_i E_i^*$.

2.1.5 Blades

Um tipo de multivetor característico da Álgebra Geométrica são os chamados de blades. Esses elementos serão de grande importância para este trabalho, uma vez que iremos utilizar as blades para representar alguns objetos e operações geométricas através da Álgebra Geométrica.

Uma k -blade é definida do seguinte modo: Dado um conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ de vetores linearmente independentes, o multivetor definido pelo produto exterior entre esses vetores,

$$A = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k,$$

é dito ser uma blade de grau k ou simplesmente k -blade. A seguinte proposição descreve uma propriedade importante do produto exterior entre um vetor e uma blade.

Proposição 2.1.2. Dada uma blade $A = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k \in \mathbb{G}_{p,q}$ e um vetor $x \in \mathbb{R}^{p,q}$. Então $x \wedge A = 0$ se, e somente se, $x \in [a_i]_{i=1}^k = \text{span}\{a_i\}_{i=1}^k$.

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que $x \in [a_i]_{i=1}^k$ e vamos mostrar que $x \wedge A = 0$.

De fato, se $x \in [a_i]_{i=1}^k$, então $x = \sum_{i=1}^k \gamma_i a_i$ e ainda temos que

$$x \wedge A = \left(\sum_{i=1}^k \gamma_i a_i \right) \wedge A,$$

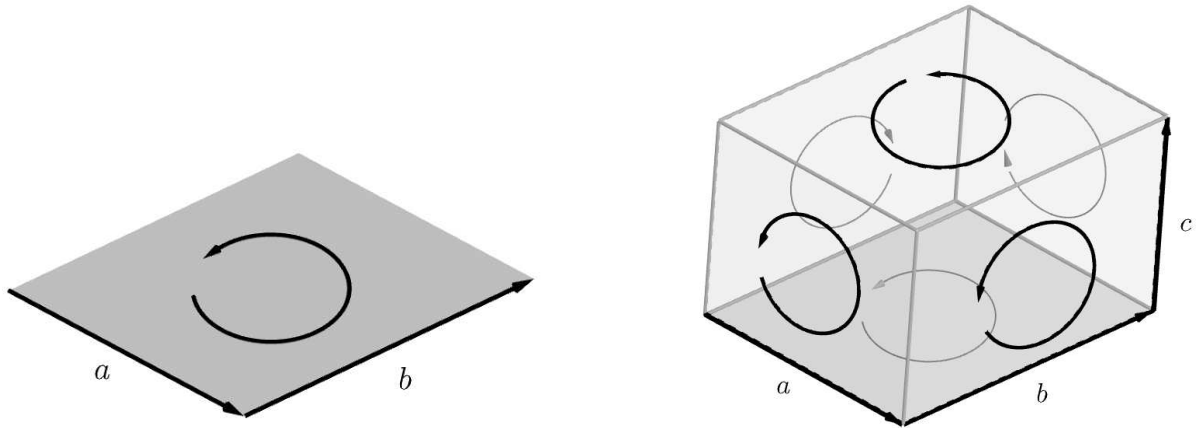
que, pela associatividade e a distributividade do produto exterior, ficamos com

$$\begin{aligned} x \wedge A &= \sum_{i=1}^k (\gamma_i a_i \wedge A) = \sum_{i=1}^k (\gamma_i a_i \wedge a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_i \wedge \cdots \wedge a_k) \\ &= \sum_{i=1}^k ((-1)^{i-1} \gamma_i a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_i \wedge a_i \wedge \cdots \wedge a_k) \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que $a \wedge a = 0$, para qualquer $a \in \mathbb{R}^{p,q}$. Portanto $x \wedge A = 0$.

Por outro lado, se $x \wedge A = 0, x \in \mathbb{R}^{p,q}$, segue, diretamente das propriedades do produto exterior e da definição de blade, que $x \in [a_i]_{i=1}^k$. $\square$

Por conta dessa propriedade, dizemos que uma k -blade $A = \bigwedge_{i=1}^k a_i$ representa o subespaço vetorial k -dimensional gerado pelos vetores $\{a_i\}_{i=1}^k$. Esse subespaço pode ser definido em termos de A .



(a) Representação geométrica de $a \wedge b$

(b) Representação geométrica de $a \wedge b \wedge c$

Figura 2.1 – Representações geométricas de k -blades (plano orientado e volume orientado).

Definição 2.1.1. Dada uma blade $A \in \mathbb{G}_{p,q}$, definimos o espaço nulo do produto exterior (OPNS) e o espaço nulo do produto interno (IPNS) de A como sendo os conjuntos

$$\text{NO}(A) = \{x \in \mathbb{R}^{p,q} : x \wedge A = 0\}, \quad (2.1)$$

$$\text{NI}(A) = \{x \in \mathbb{R}^{p,q} : x \cdot A = 0\}, \quad (2.2)$$

respectivamente.

Note que, sendo $A = \bigwedge_{i=1}^k a_i$, então $x \in [a_i]_{i=1}^k$ se, e somente se, $x \wedge A = 0$, assim $x \in \mathbb{NO}(A)$ se, e somente se, $x \in [a_i]_{i=1}^k$, logo $\mathbb{NO}(A) = [a]_{i=1}^n$. Assim, o espaço nulo do produto exterior de uma blade pode ser usado para definir o espaço gerado pelos vetores $\{a_i\}_{i=1}^n$, em termos da blade A .

Outra observação importante originada dessa interpretação é que dada qualquer blade $A \in \mathbb{G}_{p,q}$, com $A = \bigwedge_{i=1}^k a_i$, vai existir um conjunto ortogonal com k vetores $n_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^{p,q}$. Isto é, $n_i \wedge n_j \neq 0$ e $n_i \cdot n_j = 0$ para $i \neq j$, tal que $A = \bigwedge_{i=1}^k n_i$. Podemos verificar essa afirmação de forma direta, tomando uma base ortogonal de $\mathbb{NO}(A)$, digamos $\{n_i\}_{i=1}^k$. Como essa base gera o mesmo subespaço $\mathbb{NO}(A)$, pela definição do OPNS, a blade $\bigwedge_{i=1}^k n_i$ deve ser igual a blade A , a menos de um escalar. Por conta disso, dada uma blade A , utilizando a [Proposição 2.1.1](#), temos

$$\begin{aligned} A &= \bigwedge_{i=1}^k a_i = \bigwedge_{i=1}^k n_i \\ &= \prod_{i=1}^k n_i, \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $\prod$ representa o produto geométrico.

Dado um elemento $A \in \mathbb{G}_{p,q}$, diferente de quando se trata do produto interno usual do espaço euclidiano, podemos ter $A \cdot A = 0$, mesmo que $A \neq 0$. Uma blade A é dita ser uma blade nula se $A \cdot A = 0$, por exemplo, se $A = e_1 + e_3 \in \mathbb{G}_{2,1}$, então

$$\begin{aligned} A \cdot A &= (e_1 + e_3) \cdot (e_1 + e_3) \\ &= e_1 \cdot e_1 + e_1 \cdot e_3 + e_3 \cdot e_1 + e_3 \cdot e_3 \\ &= e_1 e_1 + e_1 e_3 - e_1 e_3 + e_1 e_3 \\ &= 1 + 0 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

A definição de blade nula nos serve, principalmente, para separar alguns elementos da Álgebra Geométrica que possuem inverso em relação ao produto geométrico. Isso será de grande importância em algumas operações e representações geométricas. Toda blade não-nula possui inverso, dado por

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{A\tilde{A}},$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= a_k \wedge a_{k-1} \wedge \cdots \wedge a_1. \\ &= (-1)^{k(k-1)/2} A.\end{aligned}$$

Essa propriedade é facilmente verificada, uma vez que, se A é uma blade não-nula e tomamos $A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{A\tilde{A}}$, então

$$\begin{aligned}AA^{-1} &= A \frac{\tilde{A}}{A\tilde{A}} \\ &= \frac{A\tilde{A}}{A\tilde{A}}.\end{aligned}$$

Como, por (2.3), $A = \bigwedge_{i=1}^k n_i = \prod_{i=1}^k n_i$, com $\{n_i\}$ sendo vetores ortogonais, segue que

$$\begin{aligned}A\tilde{A} &= (n_1 \cdots n_{k-1} n_k)(n_k n_{k-1} \cdots n_1) \\ &= (n_1 \cdots n_{k-1} (n_k n_k) n_{k-1} \cdots n_1).\end{aligned}$$

Uma vez que $n_i^2 \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, k$, temos $A\tilde{A} \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$AA^{-1} = \frac{A\tilde{A}}{A\tilde{A}} = 1.$$

Outra propriedade importante envolvendo os três produtos da Álgebra Geométrica é a seguinte:

Proposição 2.1.3. [Perwass et al., 2009] Se $x, y \in \mathbb{R}^{p,q}$ e A for uma k -blade de $\mathbb{G}_{p,q}$, então

$$(A \wedge x) \cdot y = A(x \cdot y) - (A \cdot y) \wedge x.$$

A demonstração dessa proposição exige algumas definições e propriedades mais detalhadas, que podem ser encontradas em [Perwass, 2000].

Esse resultado pode ser aplicado recursivamente sobre o produto interno entre um vetor x e uma blade $A = \bigwedge_{i=1}^k a_i$, obtendo a seguinte expressão:

$$x \cdot A = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} (x \cdot a_i) [A \setminus a_i],$$

onde

$$[A \setminus a_i] = \left(\bigwedge_{r=1}^{i-1} a_r \right) \wedge \left(\bigwedge_{r=i+1}^k a_r \right).$$

Para melhor compreender essa equação, considere os vetores $x, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{p,q}$, sendo a_1 e a_2 linearmente independentes, então

$$x \cdot (a_1 \wedge a_2) = (x \cdot a_1) a_2 - (x \cdot a_2) a_1. \quad (2.4)$$

2.1.6 Projeção e Afastamento

Uma vez que uma blade pode ser interpretada como um subespaço vetorial, faz sentido pensarmos na projeção nesse subespaço. De fato, a projeção de uma blade A sobre uma blade não-nula N é denotada por $\mathcal{P}_N(A)$ e definida do seguinte modo:

$$\mathcal{P}_N(A) = (A \cdot N^{-1})N.$$

Exemplo 2.1.5. Sejam $A, N \in \mathbb{G}_3$, onde $A = e_1 + e_3$ e $N = e_{12}$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(A) &= ((e_1 + e_3) \cdot (-e_{12}))e_{12} \\ &= (-e_1 \cdot e_{12} - e_3 \cdot e_{12})e_{12} \\ &= (-e_2 + 0)e_{12} \\ &= e_1. \end{aligned}$$

A sequência do produto interno pelo inverso seguido do produto geométrico, serve para garantir que a blade A seja projetada no subespaço gerado por N sem que sejam alteradas as componentes projetadas que compõem A . Essa ideia generaliza a projeção de vetores em subespaços. Como visto no exemplo acima, a blade A é um vetor que está sendo projetado no plano gerado pelos vetores e_1 e e_2 .

As componentes de uma blade A que não possuem vetores básicos na direção de uma blade não-nula N , será definida por

$$\mathcal{P}_N^\perp(A) = A - \mathcal{P}_N(A), \quad (2.5)$$

dito ser o afastamento de A sobre N .

2.2 Espaço Conforme

Os objetos geométricos são representados na Álgebra Geométrica através de determinados modelos, como por exemplo os modelos projetivo, cônico e conforme. Cada um desses modelos possui particularidades que possibilitam a representação de diferentes tipos de objetos. O nosso foco será no modelo conforme, já que, através desse modelo, conseguimos representar objetos que generalizam as esferas (par de pontos, circunferências, hiperesferas) e as interseções entre esses objetos.

O Espaço Conforme será introduzido em duas etapas, onde em cada etapa adicionamos uma dimensão ao espaço euclidiano através de uma imersão. No primeiro passo, o espaço Euclidiano é imerso de forma não linear através da imersão estereográfica, em seguida, o espaço conforme será uma homogeneização do espaço resultante da primeira imersão. A Álgebra Geométrica sobre esse espaço é chamada Álgebra Geométrica Conforme (AGC).

2.2.1 Imersão Estereográfica

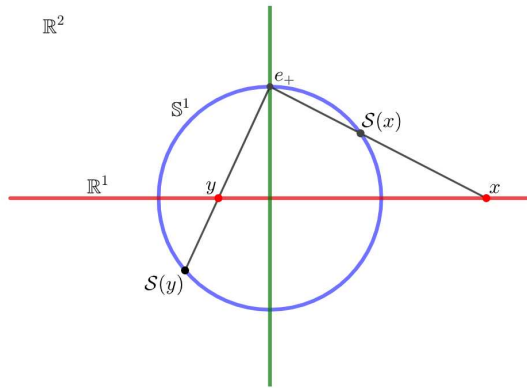
O primeiro passo para a imersão do espaço Euclidiano no espaço conforme é a imersão estereográfica. A imersão estereográfica de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\mapsto \frac{2}{x^2 + 1}x + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}e_+, \end{aligned}$$

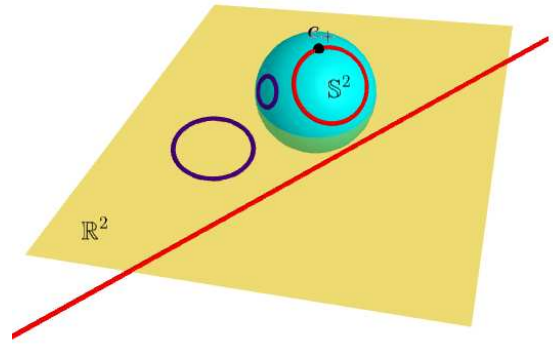
onde e_+ denota a dimensão adicional de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é

$$\|\mathcal{S}(x)\| = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.



(a) Imersão estereográfica dos pontos $x, y \in \mathbb{R}^1$ no círculo unitário $\mathbb{S}^1$



(b) Imersão estereográfica de uma reta e uma circunferência

Figura 2.2 – Exemplos da imersão estereográfica (figuras baseadas em [Perwass et al., 2009])

Note que, o polo superior da circunferência $\mathbb{S}^1$, representado pelo vetor básico e_+ , é a imersão das duas "extremidades" da reta $\mathbb{R}^1$. A imersão de um ponto x será a interseção entre a reta ligando o e_+ a x e a circunferência $\mathbb{S}^1$, como visto na Figura 2.2a. Já em Figura 2.2b, é possível notar que uma reta continua sendo imersa em uma circunferência, assim como uma

circunferência. Do mesmo modo, o vetor básico e_+ representa a imersão de qualquer ponto no infinito em $\mathbb{R}^2$.

A função $\mathcal{S}$, da forma como foi definida, é um isomorfismo e sua inversa $\mathcal{S}^{-1}$ é dada por

$$\mathcal{S}^{-1} : X \mapsto \frac{1}{1 - X \cdot e_+} \mathcal{P}_{e_+}^\perp(X),$$

chamada de projeção estereográfica. Podemos verificar de forma direta, considerando

$$X = \frac{2}{x^2 + 1}x + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}e_+,$$

temos que $\mathcal{P}_{e_+}^\perp(X) = \frac{2}{x^2 + 1}x$. Com isso

$$\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(x)) = \mathcal{S}^{-1}(X) = \frac{\frac{2}{x^2 + 1}x}{1 - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} = \frac{\frac{2}{x^2 + 1}x}{\frac{2}{x^2 + 1}} = x.$$

Como a função é definida somente em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^n$, temos também que $\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(X)) = X$.

2.2.2 Homogeneização da Imersão Estereográfica

Agora, realizamos uma imersão conhecida como homogeneização do espaço. O espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ é imerso em um espaço projetivo representado por $\mathbb{R}^{n+1,1}$ com dimensão $n + 2$. Note que, o espaço $\mathbb{R}^{n+1,1}$ é da forma $\mathbb{R}^{p,q}$, sendo $p = n + 1$ e $q = 1$. Logo, sua base canônica possui $n + 1$ vetores cujo quadrado é 1 e um vetor canônico cujo quadrado é -1 . Esse tipo de espaço é conhecido na física e na matemática como um Espaço de Minkowski.

A Homogeneização do espaço é um passo simples que leva um vetor de $\mathbb{R}^n$ no subespaço de Minkowski $\mathbb{A}_M^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$, é denotada por $\mathcal{H}_M$ e definida como

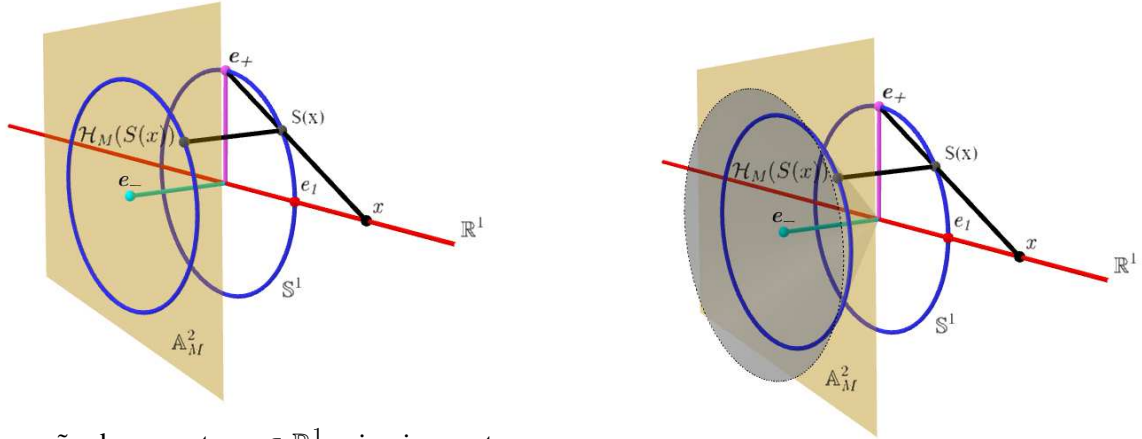
$$\begin{aligned} \mathcal{H}_M : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{A}_M^n \subset \mathbb{R}^{n,1} \\ x &\mapsto x + e_-, \end{aligned}$$

onde a dimensão homogênea $e_- = e_{n+1}$, com $e_- \cdot e_- = -1$.

Um resultado imediato que segue do uso da dimensão homogênea com assinatura negativa é que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\alpha \mathcal{H}_M(\mathcal{S}(x)))^2 &= \alpha^2(\mathcal{S}(x) + e_-)^2 \\ &= \alpha^2((\mathcal{S}(x))^2 + (e_-)^2) \\ &= \alpha^2(1 - 1) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Isto é, o quadrado de todos os vetores de $\mathbb{R}^{n+1,1}$, que resultam da imersão de um vetor do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ através da imersão estereográfica seguida da homogeneização, é nulo. Para $\mathbb{R}^1$, o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^{2,1}$ que satisfazem esta condição pertencem a um cone (Figura 2.3b), por conta disso, todos os vetores nulos de $\mathbb{R}^{n+1,1}$ são ditos pertencerem ao cone-nulo.



(a) Imersão de um vetor $x \in \mathbb{R}^1$ primeiramente em S^1 depois em $\mathbb{R}^{2,1}$

(b) Visualização do cone-nulo na imersão

Figura 2.3 – Homogeneização da imersão estereográfica [Perwass et al., 2009]

O cone-nulo será denotado por $\mathbb{K}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$ e definido com base em (2.6)

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^{n+1} &:= \{X \in \mathbb{R}^{n+1,1} : X^2 = 0\} \\ &= \{\alpha \mathcal{H}_M(S(\mathbb{R}^n)) : \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Se considerarmos o conjunto $\mathbb{S}A_M^n \subset A^{n+1}$ como sendo a imersão de $\mathbb{S}^n$ no espaço afim A_M^{n+1} , isto é, $\mathbb{S}A_M^n = A_M^{n+1} \cap \mathbb{K}^{n+1} = \mathcal{H}_M(S(\mathbb{R}^n))$.

A transformação $\mathcal{H}_M$ terá inversa definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_M^{-1} : \mathbb{S}A_M^n &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ X &\mapsto X - e_-, \end{aligned}$$

2.2.3 Imersão Conforme

Juntando as duas imersões anteriores obtemos a imersão de um vetor euclidiano $x \in \mathbb{R}^n$ no espaço conforme $\mathbb{R}^{n+1,1}$, isto é,

$$\mathcal{H}_M(S(x)) = \frac{2}{x^2 + 1}x + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}e_+ + e_-.$$

Como esse é um elemento de um espaço projetivo, um escalar qualquer não interfere na representação no espaço euclidiano correspondente. O vetor pode então ser multiplicado por um escalar

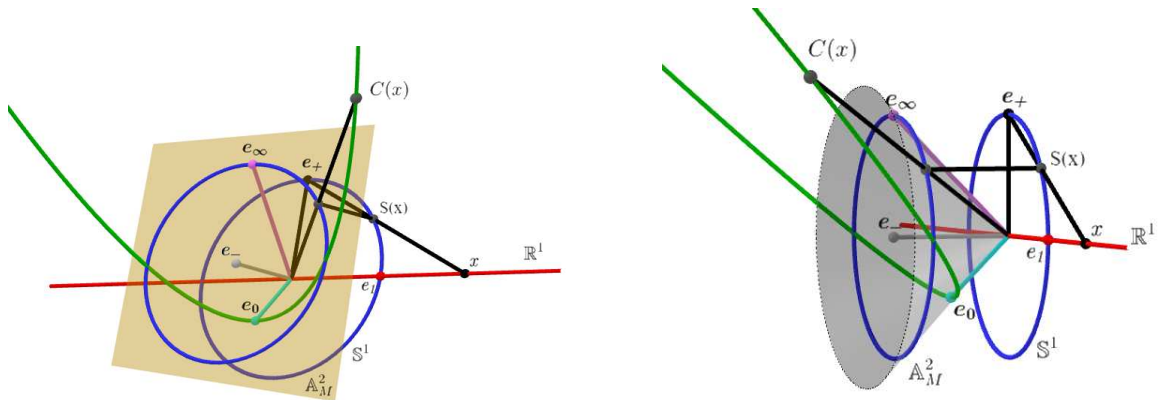
sem mudar sua representação no espaço euclidiano. Uma multiplicação por escalar conveniente é usando $\alpha = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$, que nunca será zero, assim ficamos com a seguinte imersão:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x^2 + 1)\mathcal{H}_M(\mathcal{S}(x)) &= x + \frac{1}{2}(x^2 - 1)e_+ + \frac{1}{2}(x^2 + 1)e_- \\ &= x + \frac{1}{2}x^2(e_- + e_+) + \frac{1}{2}(e_- - e_+) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_\circ, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} e_\infty &= e_- + e_+, \\ e_\circ &= \frac{1}{2}(e_- - e_+). \end{aligned} \tag{2.7}$$

As propriedades de e_∞ e $e_\circ$ são facilmente obtidas das propriedades de e_+ e e_- , onde $e_\infty^2 = e_\circ^2 = 0$ e $e_\infty \cdot e_\circ = -1$.



(a) Imersão de um vetor $x \in \mathbb{R}^1$ como $C(x)$

(b) Mesma imersão vista com o cone-nulo

Figura 2.4 – Imersão Conforme utilizando C (figuras baseadas em [Perwass et al., 2009])

Assim, definimos a Imersão Conforme como sendo

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1,1} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}(x^2 + 1)\mathcal{H}_M(\mathcal{S}(x)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$C(x) = x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_\circ.$$

A Figura 2.4 ilustra essa imersão. O vetor $x \in \mathbb{R}^1$ é imerso em $\mathbb{R}^{2,1}$ de modo que sua componente na direção e_0 seja unitária, pertencendo assim a uma parábola com vértice em e_0 . O vetor $X = C(x)$ é dito ser o *representante conforme* de x em $\mathbb{R}^{n+1,1}$.

O operador inverso C^{-1} é definido apenas para os vetores do cone-nulo $\mathbb{K}^{n+1}$, isto é,

$$C^{-1} : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto \mathcal{P}_{e_\infty \wedge e_0}^\perp \left(\frac{X}{-X \cdot e_\infty} \right).$$

Note que a operação $-X \cdot e_\infty$ revela a componente na direção e_∞ , assim, ao dividir X por $-X \cdot e_\infty$, estamos projetando X ortogonalmente na direção e_∞ na parábola que passa por e_∞ . Por fim, o afastamento, como definido em (2.5), retira as componentes que não estão no plano gerado por e_∞ e e_0 , isto é, apenas as componentes do espaço euclidiano são obtidas.

2.3 Álgebra Geométrica Conforme

A Álgebra Geométrica construída sobre o espaço conforme $\mathbb{R}^{n+1,1}$ é chamada de Álgebra Geométrica Conforme (AGC). Através dela representaremos objetos geométricos com base em esferas e suas interseções.

Para fazer essas representações usaremos os conceitos de espaços nulos (2.1) e (2.2), porém, com uma pequena diferença. Se usássemos os espaços como foram definidos em (2.1) e (2.2), as representações geométricas também seriam subespaços lineares de $\mathbb{R}^n$, por isso definimos os seguintes espaços:

Definição 2.3.1. Dada uma blade $A \in \mathbb{G}_{n+1,1}^k$, os seguintes espaços

$$\text{NO}_G(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : C(x) \wedge A = 0\},$$

$$\text{NI}_G(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : C(x) \cdot A = 0\},$$

são chamados de Espaço Nulo Geométrico do Produto Exterior (GOPNS) e interno (GIPNS), respectivamente.

Como a transformação inversa, C^{-1} , é definida para todos os vetores do cone-nulo, os espaços nulos geométricos podem ser escritos como

$$\text{NO}_G(A) = C^{-1}(\{X \in \mathbb{K}^{n+1} : X \wedge A = 0\}),$$

$$\text{NI}_G(A) = C^{-1}(\{X \in \mathbb{K}^{n+1} : X \cdot A = 0\}).$$

Note que, $\mathbb{K}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$, logo, como $\text{NO}(A), \text{NI}(A) \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$, podemos reescrever os espaços como

$$\text{NO}_G(A) = C^{-1}(\{\text{NO}(A) \cap \mathbb{K}^{n+1}\}), \quad (2.8)$$

$$\text{NI}_G(A) = C^{-1}(\{\text{NI}(A) \cap \mathbb{K}^{n+1}\}). \quad (2.9)$$

2.3.1 Representações Através do GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Todas as representações através do espaço conforme $\mathbb{R}^{n+1,1}$ são baseadas em hiper-esferas e suas interseções, por exemplo, quando consideramos o espaço conforme de $\mathbb{R}^3$, temos esferas, circunferências, par de pontos, pontos, planos(esferas de raio infinito), retas(circunferências de raio infinito) e uma representação específica chamada ponto homogêneo. Portanto, quando trabalhamos com interseções de esferas utilizando a AGC, devemos conhecer todas as possibilidades para essas interseções.

Dados os vetores $a, b \in \mathbb{R}^3$, com imersões conforme $A = C(a)$ e $B = C(b)$, isto é,

$$A = a + \frac{1}{2}a^2 e_\infty + e_o \text{ e } B = b + \frac{1}{2}b^2 e_\infty + e_o,$$

da definição dos vetores básicos e_∞ e e_o , segue que

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a + \frac{1}{2}a^2 e_\infty + e_o) \cdot (b + \frac{1}{2}b^2 e_\infty + e_o) \\ &= a \cdot b - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 \\ &= -\frac{1}{2}(a - b)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\|a - b\|^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Consequentemente, através do produto interno entre dois representantes conforme de vetores de $\mathbb{R}^n$, podemos obter a distância entres esses vetores, a menos de um escalar.

2.3.1.1 Representação de Pontos pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Considere um vetor qualquer A no cone-nulo $\mathbb{K}^4 \subset \mathbb{G}_{4,1}^1$. Assim, utilizando (2.9), o GIPNS deste vetor pode ser representado por

$$\text{NI}_G(A) = C^{-1}(\text{NI}(A)).$$

Como A é um vetor no cone-nulo, temos que $A^2 = 0$, logo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $(\alpha A)^2 = \alpha^2 A^2 = 0$. Com isso

$$\text{NI}(A) = \{\alpha A : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

consequentemente,

$$\mathbb{N}\mathbb{I}_G(A) = C^{-1}(A).$$

Portanto, o espaço nulo geométrico do produto interno de um vetor do cone-nulo $\mathbb{K}^4$ é um ponto de $\mathbb{R}^3$.

2.3.1.2 Representação de Esferas pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Considere o vetor $a \in \mathbb{R}^3$, com $A = C(a) \in \mathbb{K}^4$ e defina o vetor $S \in \mathbb{G}_{4,1}^1$ por

$$S = A - \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty,$$

onde $\rho \in \mathbb{R}$. Para encontrar o GIPNS de S , considere um vetor $X \in \mathbb{K}^4$, logo $X = \alpha C(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \neq 0$. Assim, o produto interno entre X e S fica sendo

$$\begin{aligned} S \cdot X &= A \cdot X - \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty \cdot X, \\ &= \alpha A \cdot C(x) - \alpha \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty \cdot C(x). \end{aligned}$$

Por (2.10), temos que $A \cdot C(x) = -\frac{1}{2}(a-x)^2$ e $e_\infty \cdot C(x) = -1$. Com isso

$$S \cdot X = \alpha \left(-\frac{1}{2}(a-x)^2 + \frac{1}{2}\rho^2 \right).$$

Consequentemente,

$$S \cdot X = 0 \iff (a-x)^2 = \rho^2.$$

Em resumo, o produto interno entre S e X é zero se, e somente se, $x = C^{-1}(X)$ pertence a uma esfera centrada em $a = C^{-1}(A)$ com raio ρ . Portanto, o GIPNS de S é uma esfera:

$$\mathbb{N}\mathbb{I}_G(S) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - a\|^2 = \rho^2\}.$$

O raio da esfera pode ser obtido por

$$S^2 = A^2 - \rho^2 A \cdot e_\infty = \rho^2$$

e, como qualquer múltiplo de S representa a mesma esfera no espaço euclidiano, o raio de $M = \alpha S$, com $\alpha \neq 0$, pode ser obtido por

$$\left(\frac{M}{-M \cdot e_\infty} \right)^2 = \rho^2,$$

uma vez que $-S \cdot e_\infty$ será a componente de M na direção e_0 .

Considere agora um vetor $S \in \mathbb{G}^{1,4}$ definido por

$$S = A + \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty.$$

O produto interno de S com $X = C(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, resulta em

$$S \cdot X = -\frac{1}{2}(a - x)^2 - \frac{1}{2}\rho^2,$$

onde

$$S \cdot X = 0 \iff (a - x)^2 = -\rho^2.$$

O que é impossível se $x \in \mathbb{R}^3$, porém no caso de $x \in \mathbb{C}^3$ teremos,

$$\|a - x\| = i\rho,$$

onde i é a unidade imaginária. Assim, resultando em uma esfera de raio imaginário.

2.3.1.3 Representação de Planos pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Seja $P \in \mathbb{G}_{4,1}^1$ definido por

$$P = A - e_o - \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty = a + \frac{1}{2}a^2 e_\infty - \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty,$$

de modo que a componente de P na direção e_o seja nula. O produto interno entre P e um vetor $X = C(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, resulta em

$$\begin{aligned} P \cdot X &= a \cdot x - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \\ &= \|a\| \|x^\parallel\| - \frac{1}{2}(a^2 - \rho^2), \end{aligned}$$

onde $x^\parallel = \mathcal{P}_a(x)$ é a componente de x paralela ao vetor a . Portanto,

$$P \cdot X = 0 \iff \|x^\parallel\| = \frac{a^2 - \rho^2}{2\|a\|}.$$

Consequentemente, os vetores x que pertencem ao GIPNS de P são aqueles cuja componente paralela a a tem um comprimento fixo, isto é, um plano com vetor normal a distando $(a^2 - \rho^2)/(2\|a\|)$ da origem.

Em resumo, um plano com vetor normal $\hat{n} = n/\|n\|$ e distância α da origem será representado por

$$P = \hat{n} + \alpha e_\infty.$$

Note que, se P representa um plano, como descrito acima, a distância entre um ponto $A = C(a)$ e o plano P pode ser obtida por

$$d(a, P) = \frac{a \cdot \hat{n} - \alpha}{\|\hat{n}\|} = a \cdot \hat{n} - \alpha = A \cdot P.$$

2.3.1.4 Representação de Circunferências pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Sejam $S_1, S_2 \in \mathbb{G}_{4,1}^1$ representantes de duas esferas, como descritas em (2.3.1.2) e $C = S_1 \wedge S_2$, então, para $x = C(x)$, temos

$$X \cdot C = X \cdot (S_1 \wedge S_2) = (X \cdot S_1)S_2 - (X \cdot S_2)S_1,$$

Se S_1 e S_2 representam esferas com centros distintos, então S_1 e S_2 serão linearmente independentes, assim

$$X \cdot (S_1 \wedge S_2) = 0 \Leftrightarrow X \cdot S_1 = X \cdot S_2 = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{N}\mathbb{I}_G(C) &= \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \cdot C = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \cdot (S_1 \wedge S_2) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \cdot S_1 = C(x) \cdot S_2 = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \cdot S_1 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \cdot S_2 = 0\} \\ &= \mathbb{N}\mathbb{I}_G(S_1) \cap \mathbb{N}\mathbb{I}_G(S_2). \end{aligned}$$

Isto é, o GIPNS de C será a interseção entre o GIPNS das duas esferas S_1 e S_2 , podendo resultar em um conjunto vazio, em um ponto ou em uma circunferência.

Note que se S_1 e S_2 representam esferas imaginárias, então C representará uma circunferência imaginária.

2.3.1.5 Representação de Retas pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Assim como as circunferências foram construídas a partir da interseção de duas esferas, podemos representar uma reta como a interseção de dois planos. Sejam $P_1, P_2 \in \mathbb{G}_{4,1}^1$ representantes de planos pelo produto interno, então $R = P_1 \wedge P_2$ representará a reta de interseção dos dois planos, uma vez que

$$\mathbb{N}\mathbb{I}_G = \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \cdot R = 0\}$$

e

$$X \cdot (P_1 \wedge P_2) = (X \cdot P_1)P_2 - (X \cdot P_2)P_1,$$

onde $x = C(x)$. Se P_1 e P_2 representam planos diferentes, sendo assim vetores linearmente independentes, teremos que $X \cdot (P_1 \wedge P_2)$ será zero se, e somente se, $X \cdot P_1$ e $X \cdot P_2$ forem zero. Logo, $\mathbb{N}\mathbb{I}_G(R)$ é a interseção dos dois planos.

No caso dos planos serem paralelos, a interseção é interpretada como uma reta no infinito.

2.3.1.6 Representação de Pares de Pontos pelo GIPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Seguindo o mesmo princípio da representação de circunferências, podemos obter uma representação para um par de pontos através da interseção de três esferas. Como a interseção de três esferas resulta, no conjunto vazio, em um ponto ou em um par de pontos, se definirmos $A = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$, onde $S_1, S_2, S_3 \in \mathbb{G}_{4,1}^1$ são representantes de esferas pelo produto interno, então $\text{NI}_G(A)$ representará um desses três conjuntos.

2.3.2 Representações Através do GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Também podemos fazer as representações pelo espaço nulo geométrico do produto exterior. Uma propriedade importante que relaciona os dois espaços é relativa a dualidade. Se A for uma blade não-nula e x um vetor de $\mathbb{R}^n$, então

$$(x \wedge A)^* = (x \wedge A) \cdot I^{-1} = x \cdot A^*.$$

Consequentemente,

$$x \wedge A = 0 \Leftrightarrow x \cdot A^* = 0.$$

Logo,

$$\text{NO}(A) = \text{NI}(A^*).$$

O mesmo vale para os espaços nulos geométricos.

2.3.2.1 Representação de Pontos pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Note que, se $A = C(a)$, com $a \in \mathbb{R}^3$, então $A \wedge A = 0$, assim

$$X \wedge A = 0 \Leftrightarrow X = \alpha A, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Logo, como $C^{-1}(A) = \mathbb{C}^{-1}(\alpha A)$, para qualquer $\alpha \neq 0$, temos que

$$\text{NO}_G(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \wedge A = 0\} = \{a\}.$$

2.3.2.2 Representação de Pares de Pontos pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Se $A = C(a), B = C(b) \in \mathbb{R}^{4,1}$, então, como visto anteriormente, temos que

$$\text{NO}(A \wedge B) = \{X \in \mathbb{G}_{4,1}^1 : X \wedge A \wedge B = 0\} = \{\alpha A + \beta B : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Isto é, o OPNS de $A \wedge B$ representa o plano gerado pelos vetores A e B .

Por (2.8), o GOPNS de $A \wedge B$ será a interseção entre $\mathbb{NO}(A \wedge B)$ com o cone-nulo, ou seja, os elementos de $\mathbb{NO}(A \wedge B)$ cujo quadrado é nulo.

Seja $X = \alpha A + \beta B$, então

$$X^2 = 2\alpha\beta A \cdot B,$$

uma vez que $A^2 = B^2 = 0$. Logo, as soluções da equação $X^2 = 0$ vão ter, necessariamente, $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Portanto, o GOPNS de $A \wedge B$ será dado por

$$\mathbb{NO}_G(A \wedge B) = \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \wedge A \wedge B = 0\} = \{a, b\}.$$

2.3.2.3 Representação do Ponto Homogêneo pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Um ponto homogêneo é um par de pontos constituído por um ponto euclidiano e o ponto no infinito. Se $a \in \mathbb{R}^3$, $A = C(a)$ e $H = A \wedge e_\infty$, então

$$\mathbb{NO}_G(H) = \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \wedge H = 0\} = \{a\},$$

uma vez que o ponto no infinito não tem representante em $\mathbb{R}^3$, isto é, H e A são ambas representações de a pelo produto exterior.

2.3.2.4 Representação de Retas pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^3$ com $A = C(a)$, $B = C(b)$ e defina $R = A \wedge B \wedge e_\infty$, então

$$\mathbb{NO}_G(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \wedge R = 0\}.$$

Definindo $X = C(x)$, teremos

$$X \wedge R = 0 \iff x \wedge a \wedge b \wedge e_\infty + (x \wedge (b - a) - a \wedge b) \wedge e_\infty \wedge e_o = 0.$$

Como as duas parcelas da soma acima são linearmente independentes, ambas devem ser zero. Do primeiro termo obtemos, $x \wedge a \wedge b \wedge e_\infty = 0 \Rightarrow x = \alpha a + \beta b$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Do segundo termo temos que, $(x \wedge (b - a) - a \wedge b) \wedge e_\infty \wedge e_o = 0 \Leftrightarrow (x \wedge (b - a) - a \wedge b) = 0$ e

$$\begin{aligned} (x \wedge (b - a) - a \wedge b) = 0 &\iff x \wedge (b - a) = a \wedge b \\ &\iff (\alpha a + \beta b) \wedge (b - a) = a \wedge b \\ &\iff (\alpha + \beta)a \wedge b = a \wedge b \\ &\iff \alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$x = \alpha a + \beta b + \alpha b - \alpha b = \alpha(a - b) + b,$$

que é a representação paramétrica da reta passando por a e b . Portanto,

$$\text{NO}_G(A \wedge B \wedge e_\infty) = \{\alpha(a - b) + b : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

2.3.2.5 Representação de Planos pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

A representação de planos pelo produto exterior segue um princípio similar ao de retas. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, com $A = C(a)$, $B = C(b)$ e $C = C(c)$ e defina $P = A \wedge B \wedge C \wedge e_\infty$. Da mesma forma que para as retas, pode ser mostrado que

$$\begin{aligned} \text{NO}_G(P) &= \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \wedge P = 0\} \\ &= \{\alpha(a - c) + \beta(b - c) + c : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

2.3.2.6 Representação de Circunferências pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

A representação pelo produto exterior de uma circunferência que passa pelos pontos $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ é dada por $S = A \wedge B \wedge C$, onde $A = C(a)$, $B = C(b)$ e $C = C(c)$. Primeiramente, sendo

$$\text{NO}_G(S) = \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \wedge S = 0\},$$

os pontos a, b e c devem pertencer a entidade geométrica representada por S . Uma vez que $\text{NO}_G(S) = \text{NI}_G(S^*)$ e, como S é uma 3-blade, segue que S^* é uma 2-blade.

Como foi mostrado anteriormente, o GIPNS de uma 2-blade pode ser uma reta, uma reta no infinito, uma circunferência ou uma circunferência imaginária. Uma vez que a, b e c estão nessa entidade geométrica, a mesma não pode estar no infinito, logo sobram apenas as retas e circunferências. Portanto, S representará a circunferência que contém os três pontos ou, no caso dos pontos serem colineares, a reta que os contém.

2.3.2.7 Representação de Esferas pelo GOPNS em $\mathbb{G}_{4,1}$

Similar ao caso da circunferência, se tomarmos quatro vetores a, b, c , e d em $\mathbb{R}^3$, com $A = C(a)$, $B = C(b)$, $C = C(c)$ e $D = C(d)$ e definirmos $S = A \wedge B \wedge C \wedge D$, então

$$\text{NO}_G(S) = \{x \in \mathbb{R}^3 : C(x) \wedge S = 0\}.$$

Os pontos a, b, c e d pertencem ao objeto geométrico representado por S e $\mathbb{NO}_G(S) = \mathbb{NL}_G(S^*)$, onde $S^* \in \mathbb{R}^{4,1}$ é uma 1-blade. A representação de uma 1-blade pelo produto interno pode ser uma esfera ou uma esfera imaginária. Segue do fato de a, b, c e d serem vetores euclidianos que S representa uma esfera.

A base teórica apresentada nesse capítulo será usada no próximo capítulo para a reinterpretação do problema de reconhecimento MDE através da Álgebra Geométrica Conforme.

3 Reinterpretação via AGC do Problema de Reconhecimento MDE

A capacidade da Álgebra Geométrica em descrever de forma simplificada objetos e operações geométricas proporciona inúmeras aplicações em diversas áreas, como na medicina com o problema de segmentação de imagens médicas [Orozco-Aguirre et al., 2005], diversos problemas da engenharia [Perwass et al., 2009], além de diversas outras áreas de estudos, como robótica [Bayro-Corrochano et al., 2006], física [Hestenes, 2003] e visão computacional [Wareham et al., 2004].

Inspirados por essa particularidade dessa estrutura, elaboramos este capítulo, que descreve uma reinterpretação do problema de reconhecimento MDE através da Álgebra Geométrica Conforme.

3.1 Geometria do Problema

Antes de introduzir a reinterpretação do problema através da Álgebra Geométrica, vamos apresentar uma visualização geométrica por trás de alguns conceitos envolvendo as matrizes de distâncias e o problema de reconhecimento MDE.

Como visto anteriormente, as entradas de uma MDE $n \times n$ representam as distâncias par-a-par em um conjunto de n pontos. Uma propriedade bem conhecida na geometria é a de que qualquer conjunto formado por n pontos sempre poderá ser descrito em um espaço de dimensão $n - 1$, por exemplo, dois pontos em uma reta e três pontos em um plano.

Obviamente, nem sempre é necessário um espaço $(n - 1)$ -dimensional para descrever um conjunto de n pontos. Por exemplo, podemos ter 3 pontos colineares, logo, os mesmos podem ser descritos em um espaço unidimensional (uma reta). Contudo, no caso em que não temos nenhuma informação prévia sobre o conjunto, além de sua quantidade de pontos, essa é a única garantia que temos.

Lema 3.1.1. Seja A um conjunto contendo n pontos que geram um espaço de dimensão K . Se x for um elemento qualquer de A , então o espaço gerado pelos pontos do conjunto $A \setminus \{x\}$ terá

dimensão k , com $k \in \{K - 1, K\}$.

Demonstração. Considere $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ e, sem perda de generalidade, como A gera um espaço de dimensão K , considere $B = \{x_1, \dots, x_K\}$ como sendo uma base para esse espaço, isto é, $[A] = [B]$.

Sendo $x \in A$, teremos dois casos: No primeiro caso $x \in A \setminus B$, com isso, a dimensão do espaço gerado por $A \setminus \{x\}$ não se alterará, já que $x \notin B$.

No segundo caso $x \in B$, o conjunto $B \setminus \{x\}$ gera um conjunto de dimensão $K - 1$, daí, se $A \setminus B \subset [B \setminus \{x\}]$, então todos os pontos do conjunto $A \setminus B$ serão linearmente dependentes aos pontos de $B \setminus \{x\}$. Isto é, o espaço gerado por $B \setminus \{x\}$ será o mesmo espaço gerado por $(A \setminus B) \cup (B \setminus \{x\}) = A \setminus \{x\}$. Logo, $[A \setminus \{x\}]$ terá dimensão $K - 1$. Agora, se $A \setminus B \not\subset [B \setminus \{x\}]$, então existirá um ponto y em A tal que $y \notin [B \setminus \{x\}]$. Desse modo, o ponto y será linearmente independente aos pontos de $B \setminus \{x\}$. Com isso, o conjunto $(B \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ gerará um espaço de dimensão K . Consequentemente, como $(B \setminus \{x\}) \cup \{y\} \subset A \setminus \{x\}$, teremos que $A \setminus \{x\}$ gerará um espaço de dimensão K . $\square$

A **Definição 3.1.1** é importante para destacar a diferença entre esferas usuais, que são objetos tridimensionais, cuja visualização é natural, das esferas de $\mathbb{R}^n$, que são objetos multidimensionais variando de acordo com a dimensão do espaço, tornando impossível de visualizar para dimensões maiores que três. Além disso, esta definição abrange as definições de circunferências de $\mathbb{R}^2$ e pares de pontos de $\mathbb{R}^1$.

Definição 3.1.1. O subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por todos os pontos que distam $r > 0$ de um ponto c é dito ser uma esfera de $\mathbb{R}^n$ centrada em c com raio r .

De acordo com a **Definição 3.1.1**, um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ estará na esfera de $\mathbb{R}^n$ centrada c com raio r se, e somente se,

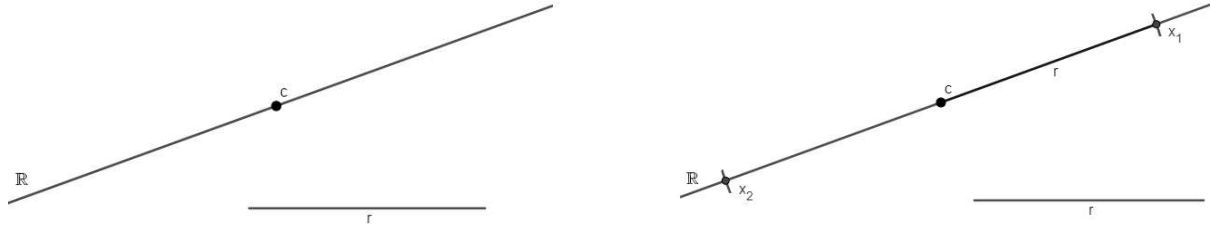
$$\|c - x\| = r. \quad (3.1)$$

Deste modo, se S representa a esfera de $\mathbb{R}^n$ centrada em c com raio r , então

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|c - x\| = r\}. \quad (3.2)$$

Os seguintes exemplos mostram que os conjuntos formados por pares de pontos em $\mathbb{R}^1$ e circunferências em $\mathbb{R}^2$ são esferas de $\mathbb{R}^1$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Exemplo 3.1.1. Primeiramente, vamos considerar o ponto $a \in \mathbb{R}^1$ e $r > 0$ (Figura 3.1a).



(a) Ponto c na reta $\mathbb{R}$ e distância r .

(b) Pontos de $\mathbb{R}$ distando r do ponto c .

Figura 3.1 – Esfera de $\mathbb{R}^1$ centrada em c com raio r .

A esfera de $\mathbb{R}^1$ centrada em c com raio r será definida pelo conjunto descrito em (3.2) do seguinte modo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|c - x\| = r\}.$$

Como $c, x \in \mathbb{R}^1$, a norma $\|y\|$ de um ponto $y \in \mathbb{R}^1$ é o módulo de y . Assim,

$$\|c - x\| = |c - x|.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \|c - x\| &= r \\ \Rightarrow |c - x| &= r \\ \Rightarrow c - x &= \pm r \\ \Rightarrow x &= c \pm r. \end{aligned}$$

Deste modo, teremos duas soluções para (3.1) em $\mathbb{R}^1$, $x_1 = c + r$ e $x_2 = c - r$, onde o conjunto $S = \{x_1, x_2\}$ é formado por um par de pontos de $\mathbb{R}^1$ (Figura 3.1b).

Agora, considere o caso onde $c \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ (Figura 3.2a).

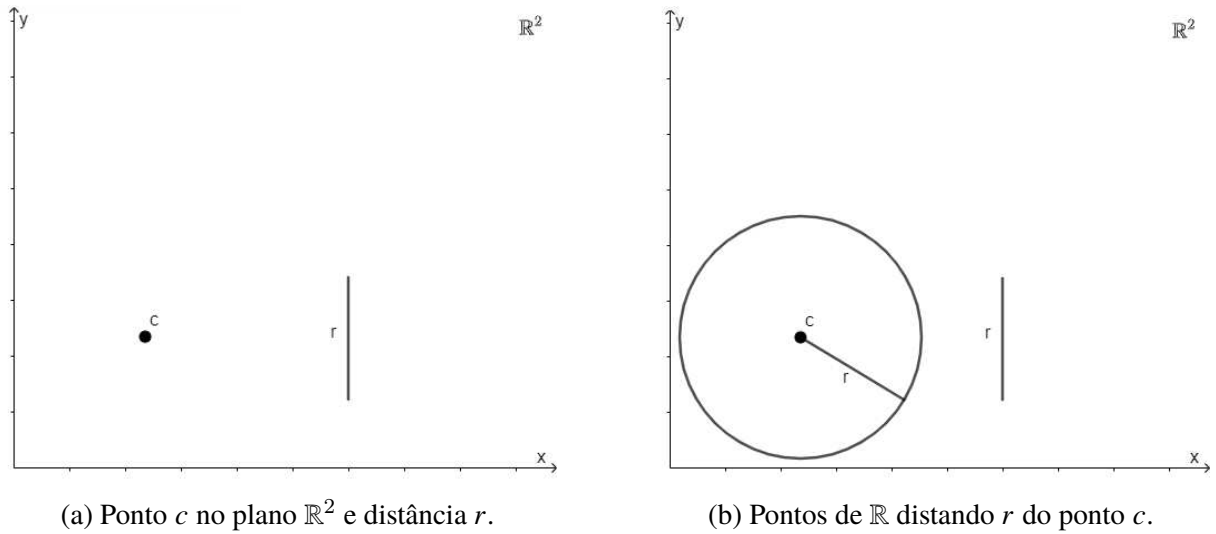


Figura 3.2 – Esfera de $\mathbb{R}^2$ centrada em c com raio r .

Análogo ao caso de $\mathbb{R}^1$, usamos o conjunto descrito em (3.2) para caracterizar os pontos da esfera de $\mathbb{R}^2$ centrada em c com raio r . Isto é,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|c - x\| = r\}.$$

Utilizando a definição da norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$ e considerando $c = (c_1, c_2)$ e $x = (x_1, x_2)$, temos que

$$\begin{aligned} \|c - x\| &= r \\ \Rightarrow \|c - x\|^2 &= r^2 \\ \Rightarrow (c_1 - x_1)^2 + (c_2 - x_2)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

resultando na equação da circunferência em $\mathbb{R}^2$. Portanto, uma esfera de $\mathbb{R}^2$ será uma circunferência [Figura 3.2b](#).

Obviamente, podemos ter esferas de dimensões menores em $\mathbb{R}^n$. Para caracterizar essas esferas precisamos da seguinte definição:

Definição 3.1.2. Uma k -esfera em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto formado pela interseção entre uma esfera de $\mathbb{R}^n$ e um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ com dimensão k , para $0 \leq k \leq n$.

Exemplo 3.1.2. Em $\mathbb{R}^3$, uma 2-esfera será a interseção entre uma esfera de $\mathbb{R}^3$ com um subespaço afim de dimensão 2, isto é, um plano ([Figura 3.3](#)).

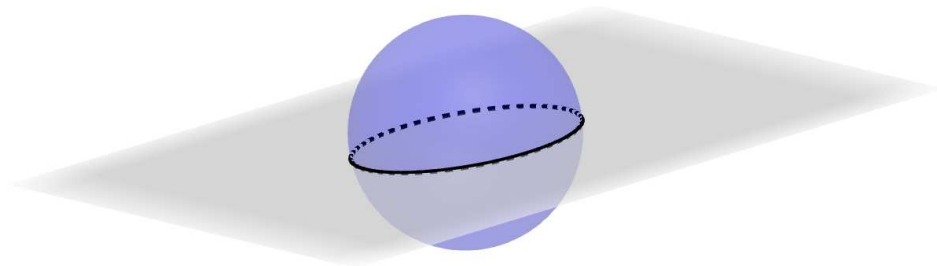


Figura 3.3 – Circunferência representada pela interseção entre uma esfera e um plano.

Inicialmente, para simplificar a visualização, consideramos o caso em que o conjunto interseção não seja vazio nem um único ponto.

Assim como na abordagem clássica do problema de reconhecimento MDE, utilizaremos a interseção de esferas para gerar a sequência que realiza a matriz dada. Porém, através da Álgebra Geométrica poderemos fazer a associação direta com as esferas e suas interseções, tornando a visualização do problema simplificada. Para isso, é interessante analisar essas interseções de uma forma mais geométrica e visual.

Proposição 3.1.1. A interseção de k esferas de $\mathbb{R}^n$, $0 < k \leq n$, resulta em um conjunto vazio, em um ponto ou em uma $(n - k + 1)$ -esfera.

Exemplo 3.1.3. Considerando $n = 3$ e $k = 2$, temos que $n - k + 1 = 2$. Deste modo, a interseção de duas esferas de $\mathbb{R}^3$ será o conjunto vazio, um ponto, ou uma 2-esfera (Figura 3.4). Para fim de ilustração vamos tomar o caso em que o resultado é uma 2-esfera, isto é, uma circunferência:

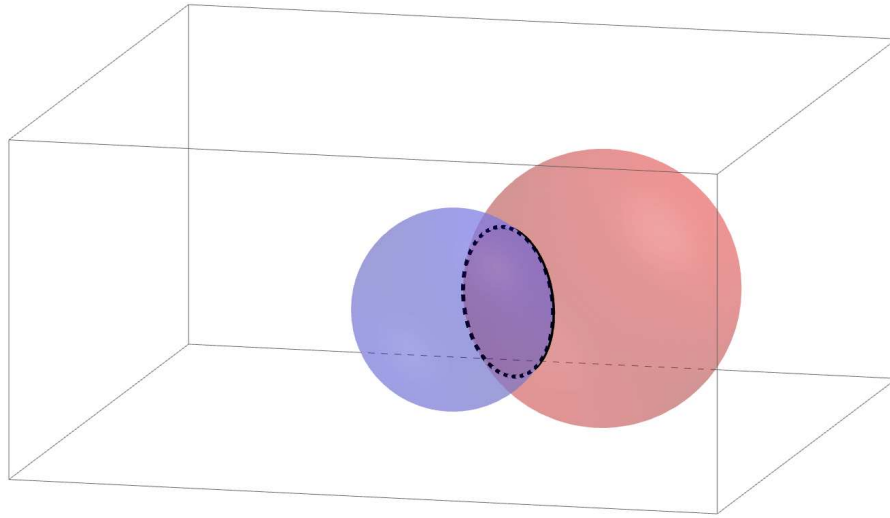


Figura 3.4 – Uma 2-esfera obtida pela interseção entre duas esferas de $\mathbb{R}^3$.

Agora, suponha que seja adicionada mais uma esfera à interseção, isto é, $k = 3$, com isso, temos que $n - k + 1 = 1$, logo, a interseção entre três esferas de $\mathbb{R}^3$ resulta em uma 1-esfera, que é um par de pontos.

Queremos garantir que a geração da sequência que realiza determinada MDE seja, no máximo, através da escolha entre um par de pontos. Assim, pela [Proposição 3.1.1](#), quando os pontos estiverem em $\mathbb{R}^n$, precisaremos de n esferas para poder garantir essa propriedade.

Vamos analisar o caso em que $k = n$, isto é, calcularemos a interseção P de n esferas de $\mathbb{R}^n$. Para $n > 3$, a visualização dessas interseções se torna complicada, para isso vamos usar de um artifício que possibilita a visualização.

Inicialmente, a partir do conjunto S contendo as n esferas de $\mathbb{R}^n$, tomamos as combinações com $n - 1$ elementos,

$$C(n, n - 1) = \frac{n!}{(n - 1)!(n - (n - 1))!} = \frac{n(n - 1)!}{(n - 1)!} = n,$$

resultando em n combinações possíveis, $S_1, \dots, S_n$, onde cada $S_i, i = 1, \dots, n$, contém $n - 1$ esferas de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$S_i = \{S_{i_1}, \dots, S_{i_{n-1}}\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Agora, pela [Proposição 3.1.1](#), a interseção entre $n - 1$ esferas de $\mathbb{R}^n$ resulta em um conjunto vazio, em um ponto ou em uma 2-esfera, isto é, uma circunferência. Com isso, a interseção,

$$P_i = \bigcap_{j=1}^{n-1} S_{i_j},$$

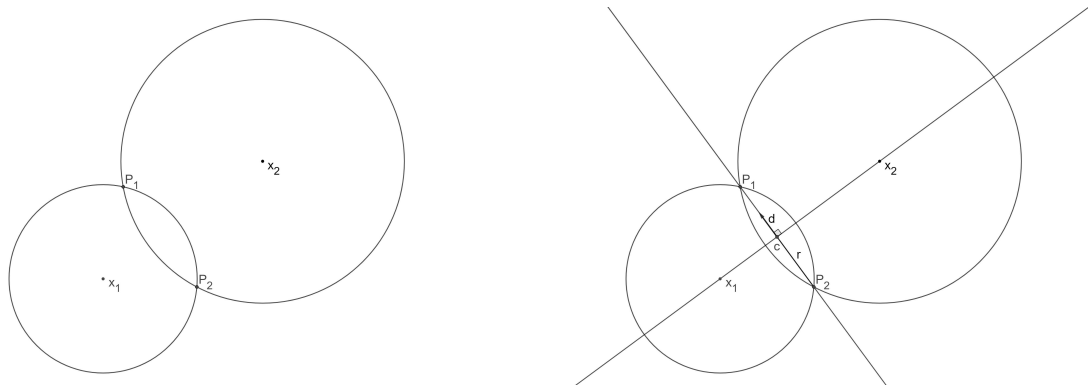
entre os elementos contidos em cada dos conjuntos S_i resultará em um desses três casos, onde o conjunto interseção P poderá ser obtido por

$$P = \bigcap_{i=1}^n P_i.$$

Assim, podemos reduzir visualmente a interseção entre n esferas de $\mathbb{R}^n$ à interseção entre n circunferências. Temos três situações possíveis, a primeira delas é quando uma das interseções P_i resulta no conjunto vazio, deste modo, P também será vazio.

Na segunda situação, todas as interseções P_i são não vazias, porém, ao menos uma é um único ponto, resultando em P vazio ou um único ponto. Na terceira situação, todas as interseções P_i são pares de pontos, com isso, P será um conjunto vazio, um ponto ou um par de pontos.

Utilizando o processo descrito acima, vamos analisar a interseção par-a-par das circunferências. Considere duas dessas circunferências centradas em x_1 e x_2 , cuja interseção resulta em um par de pontos P_1 e P_2 [Figura 3.5a](#).



(a) Interseção das circunferências nos pontos P_1 e P_2 .

(b) Par de pontos descritos em termos do raio, centro e direção.

Figura 3.5 – Interseção de duas circunferências em um par de pontos.

Definindo um centro c como sendo o ponto médio entre P_1 e P_2 , um raio r como sendo a metade da distância entre o par de pontos e d como sendo a direção da reta que passa por P_1 e P_2 ([Figura 3.5b](#)), podemos descrever esse par de pontos da seguinte forma:

$$P_1 = c + r \frac{d}{\|d\|},$$

$$P_2 = c - r \frac{d}{\|d\|}.$$

Isto é, o par de pontos, que é uma 1-esfera, pode ser definido a partir de um raio, um centro e uma direção. O conjunto interseção também poderá ser descrito pelos mesmos três parâmetros.

De fato, quando $r = 0$, teremos que $P_1 = P_2$, logo a interseção é um único ponto e, quando o valor de r não for um número real, a interseção será vazia.

3.2 Álgebra Geométrica Conforme

Vamos relembrar, de forma resumida, alguns conceitos da Álgebra Geométrica Conforme apresentados no [Capítulo 2](#). O espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ é representado no modelo conforme com duas dimensões adicionais. Neste caso, os vetores adicionais são denotados por e_∞ e e_0 e são definidos pelas equações em (2.7). Deste modo, o produto interno fica definido como

$$\begin{cases} e_i \cdot e_\infty = e_i \cdot e_0 & = 0 & i \in \{1, \dots, n\} \\ e_\infty \cdot e_\infty = e_0 \cdot e_0 & = 0 \\ e_\infty \cdot e_0 = e_0 \cdot e_\infty & = -1 \end{cases}.$$

A imersão conforme leva um vetor x do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ em seu representante X no espaço conforme $\mathbb{R}^{m+2}$ e é definida por

$$C : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+2}$$

$$x \mapsto X = x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0,$$

onde $x^2 = x \cdot x = \|x\|^2$. Assim, se tomarmos os vetores $X = C(x)$ e $Y = C(y)$, teremos a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= (x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0) \cdot (y + \frac{1}{2}y^2 e_\infty + e_0) \\ &= x \cdot y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ &= -\frac{1}{2}(x - y)^2 = -\frac{1}{2}\|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Isto é, o produto interno entre os representantes conforme X e Y estão associados à distância euclidiana entre os pontos x e y do espaço euclidiano, a menos de um escalar.

Se tomarmos um vetor S no espaço conforme definido como

$$S = A - \frac{1}{2}r^2 e_\infty,$$

onde $A = C(a)$, $a \in \mathbb{R}^m$ e $r > 0$, teremos

$$\begin{aligned}
 S \cdot X &= 0 \\
 \Leftrightarrow (A - \frac{1}{2}r^2 e_\infty) \cdot X &= 0 \\
 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\|a - x\|^2 + \frac{1}{2}r^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \|a - x\|^2 &= r^2.
 \end{aligned}$$

Isto é, o produto interno entre S e representante conforme X será zero se, e somente se, o vetor euclidiano x estiver na esfera de $\mathbb{R}^m$ centrada em a com raio r . Por esse motivo, dizemos que a representação conforme da esfera de $\mathbb{R}^m$ centrada em a com raio r é dada por

$$S = A - \frac{1}{2}r^2 e_\infty, \quad (3.3)$$

onde $A = C(a)$.

A representação conforme da interseção entre m esferas de $\mathbb{R}^m$ é dada pelo [Teorema 3.2.1](#) a partir das representações de esferas dadas em (3.3).

Teorema 3.2.1. Se $S_1, \dots, S_m$ forem representações conforme de m esferas de $\mathbb{R}^m$ com centros distintos, então o produto exterior

$$P = \bigwedge_{i=1}^m S_i,$$

será a representação conforme da interseção entre as esferas representadas por $S_1, \dots, S_m$.

Demonstração. Para facilitar a demonstração vamos analisar primeiramente o caso em que $m = 2$, isto é, $P = S_1 \wedge S_2$.

Neste caso, teremos que o representante geométrico da interseção P é dado pelo espaço nulo geométrico do produto interno de P ,

$$\mathcal{P}(P) = \mathbb{N}_G(P) = \mathbb{N}_G(S_1 \wedge S_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : C(x) \cdot (S_1 \wedge S_2) = 0\}.$$

Note que, como os centros das esferas são distintos, os vetores S_1 e S_2 são linearmente independentes. Agora, analisando a equação $C(x) \cdot (S_1 \wedge S_2) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
 C(x) \cdot (S_1 \wedge S_2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (C(x) \cdot S_2)S_1 - (C(x) \cdot S_1)S_2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow C(x) \cdot S_1 = C(x) \cdot S_2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}_G(S_1) \cap \mathbb{N}_G(S_2).
 \end{aligned}$$

Com isso, o ponto x pertence ao espaço representado pelo produto exterior entre S_1 e S_2 se, e somente se, x pertence à interseção das esferas representadas por S_1 e S_2 . Usando a equação (2.4), esse processo é facilmente generalizado para um m qualquer, de modo que

$$\begin{aligned}
 x \in \mathbb{N}_G(P) &= \mathbb{N}_G\left(\bigwedge_{i=1}^m S_i\right) \\
 &\Leftrightarrow C(x) \cdot \bigwedge_{i=1}^m S_i = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} (C(x) \cdot S_i) [P \setminus S_i] = 0 \\
 &\Leftrightarrow C(x) \cdot S_1 = \cdots = C(x) \cdot S_m = 0 \\
 &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^m \mathbb{N}_G(S_i).
 \end{aligned}$$

Portanto, x está no espaço representado por $P = \bigwedge_{i=1}^m S_i$ se, e somente se, x está na interseção das esferas representadas por S_i , para $i = 1, \dots, m$. $\square$

O conjunto interseção em $\mathbb{R}^m$, denotado por $\mathcal{P}(P)$, será vazio, um ponto ou um par de pontos, determinado por um raio, um centro e uma direção. Utilizando as propriedades do espaço nulo geométrico, obtemos esses parâmetros através das seguintes equações:

- Raio

$$r^2 = \frac{(-1)^{m+1} P^2}{(P \cdot e_\infty)^2}. \quad (3.4)$$

- Centro

$$c = -\frac{\mathcal{P}(P \cdot e_\infty \cdot P)}{(P \cdot e_\infty)^2}.$$

- Direção

$$d = (P^* \wedge e_\infty) \cdot (e_\infty \wedge e_0).$$

Apenas calculando o valor do raio é possível determinar o tipo de conjunto que será a interseção $\mathcal{P}(P)$. Se $r < 0$, o conjunto interseção será vazio,

$$\mathcal{P}(P) = \emptyset,$$

não sendo necessário o cálculo do centro nem da direção. Se $r = 0$, o conjunto interseção será um único ponto,

$$\mathcal{P}(P) = c,$$

sendo necessário apenas o cálculo do centro. Por fim, se $r > 0$, então o conjunto interseção será um par de pontos, obtidos pelo raio, centro e direção,

$$\mathcal{P}(P) = \left\{ \mathcal{P}(P)^+ = c + r \frac{d}{\|d\|}, \mathcal{P}(P)^- = c - r \frac{d}{\|d\|} \right\}.$$

3.3 Problema de Reconhecimento MDE e AGC

Através dos conceitos apresentados na seção anterior, já conseguimos representar objetos (esferas de $\mathbb{R}^m$) e operações (interseções) geométricas através da Álgebra Geométrica conforme.

Lema 3.3.1. Sejam $S_1, \dots, S_{k+1}$ representações conforme de $k + 1$ esferas de $\mathbb{R}^{k+1}$, com centros distintos, sendo nula a última coordenada de cada centro. Se a interseção entre essas esferas for um par de pontos, então

$$\frac{d}{\|d\|} = \pm e_{k+1}.$$

Demonstração. Suponha que estamos obtendo a interseção entre $k + 1$ esferas de $\mathbb{R}^{k+1}$ com centros de última coordenada nulas e sabemos que o resultado dessa interseção é um par de pontos, digamos P_1 e P_2 , e seja M o ponto médio entre P_1 e P_2 . A Figura 3.6 ilustra a interseção no caso em que $k = 2$. Podemos considerar que os centros estão em $\mathbb{R}^k$.

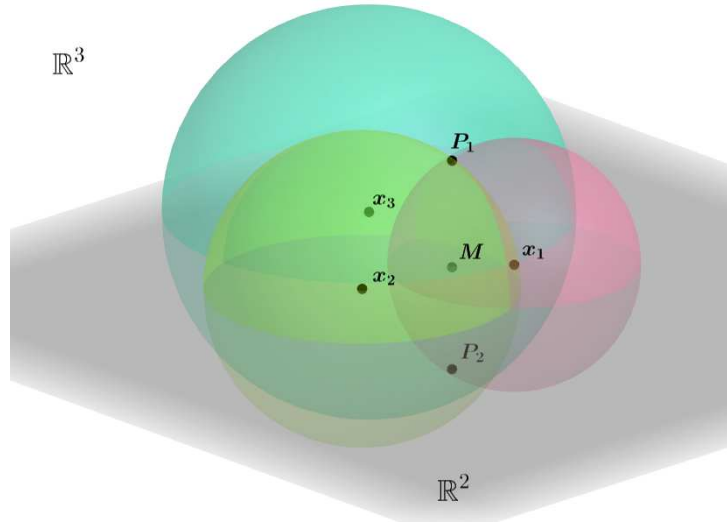


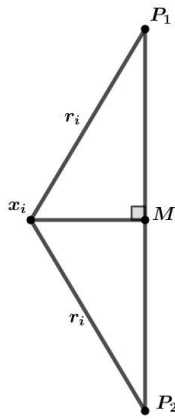
Figura 3.6 – Interseção de três esferas de $\mathbb{R}^3$ com centros em $\mathbb{R}^2$

Primeiramente, fixamos o centro x_i de uma das esferas S_i , como P_1 e P_2 pertencem a interseção de todas as esferas, os mesmos devem pertencer a cada uma das esferas, incluindo S_i . Logo

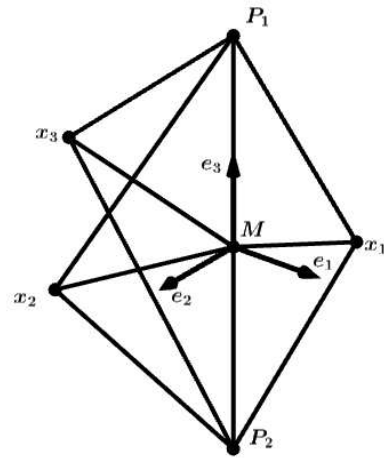
$$\|P_1 - x_i\| = \|P_2 - x_i\|.$$

Desse modo, o triângulo cujos vértices são x_i , P_1 e P_2 será um triângulo isósceles. Assim, o segmento de reta que liga x_i ao ponto médio M será a altura desse triângulo, e, conseqüentemente, será perpendicular a reta que liga os pontos P_1 e P_2 (Figura 3.7a).

Note que, o ponto M , deve necessariamente pertencer ao hiper-plano de $\mathbb{R}^{k+1}$ gerado pelos centros das esferas S_i , $i = 1, \dots, k + 1$. Como a interseção entre essas esferas é, por hipótese, um par de pontos, esses centros não podem ser linearmente dependentes em $\mathbb{R}^k$. Assim, o hiper-plano gerado pelos centros é exatamente o espaço $\mathbb{R}^k$.



(a) Triângulo isósceles, fixado um centro x_i



(b) Direção obtida no caso em que $k = 2$

Figura 3.7 – Visualização dos triângulos isósceles

Como o centro x_i foi fixado arbitrariamente, a mesma afirmação vai valer para qualquer outro centro, ou seja, a reta que liga os pontos P_1 e P_2 é perpendicular a reta ligando qualquer centro ao ponto médio M . Dessa forma, a reta ligando P_1 a P_2 será normal ao hiper-plano $\mathbb{R}^k$ gerado pelos centros das esferas. Portanto, a direção da reta ligando o par de pontos será e_{k+1} . A Figura 3.7b ilustra isso para o caso em que $k = 2$.

Como $P_1 - P_2 = d$, concluímos que $\frac{d}{\|d\|} = \pm e_{k+1}$. $\square$

O Teorema 3.3.1 é uma reinterpretação do Teorema 1.4.1 utilizando os conceitos da Álgebra Geométrica Conforme apresentados anteriormente.

Teorema 3.3.1. Seja K um número inteiro positivo e D uma matriz $n \times n$ oca, simétrica, com entradas não negativas e $n \geq 2$. D é uma MDE com $\dim(D) = K$ se, e somente se, existir uma

realização $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^K$ para D e um conjunto de índices $I = \{i_1, \dots, i_{K+1}\} \subset I_n$ tal que

$$\begin{cases} x_{i_1} &= 0, \\ x_{i_j} &= \mathcal{P}(\bigwedge_{p=1}^{j-1} S_{j_p})^+, \quad j \in I_{2,K+1}, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $S_{j_p} = C(x_{i_p}) - \frac{1}{2}D(i_p, i_j)e_\infty$ representam esferas de $\mathbb{R}^{j-1}$.

Demonstração. Assim como no [Teorema 1.4.1](#), vamos demonstrar por indução sobre a ordem da matriz D .

Começando com $n = 2$, a matriz D fica sendo

$$D = \begin{bmatrix} 0 & D(1, 2) \\ D(1, 2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Supondo que D seja uma matriz cheia, isto é, as entradas fora da diagonal principal são todas não-nulas. Deste modo, sabendo que a entrada $(1, 2)$ de D é estritamente positiva e usando a [Proposição 1.2.2](#), a sequência que realiza D será formada por dois pontos distintos. Logo, $\dim(D) = 1$, onde os pontos $x_1 = 0$ e $x_2 = \sqrt{D(1, 2)}e_1$ realizam D e satisfazem as condições do teorema.

Agora, suponha por indução que isso vale para toda MDE de ordem n para algum $n \geq 2$, isto é, se D for uma MDE de ordem n com $\dim(D) = K$, então existe uma realização $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^K$ para D e um conjunto de índices $I = \{i_1, \dots, i_{K+1}\} \subset I_n$ satisfazendo (3.5).

Vamos considerar D uma MDE $(n+1) \times (n+1)$ com $\dim(D) = K$ e $\bar{D} = D(I_n, I_n)$. Pelo [Lema 1.3.2](#), $\bar{D}$ é uma MDE com $\dim(\bar{D}) = k$, onde $k \in \{K-1, K\}$. Assim, usando a hipótese de indução, como $\bar{D}$ tem ordem n , temos que existe $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^k$ que realiza $\bar{D}$ e um conjunto de índices $I = \{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subset I_n$, tal que

$$\begin{cases} x_{i_1} &= 0, \\ x_{i_j} &= \mathcal{P}(\bigwedge_{p=1}^{j-1} S_{j_p})^+, \quad j \in I_{2,k+1}. \end{cases}$$

Agora definimos $y = \mathcal{P}(P)$, onde

$$P = \bigwedge_{j=1}^{k+1} S_{(n+1)_j}$$

e $S_{(n+1)_j} = C(x_{i_j}) - \frac{1}{2}D(i_j, n+1)e_\infty$. Como visto no [Teorema 3.2.1](#), P é a representação conforme da interseção entre $k+1$ esferas de $\mathbb{R}^{k+1}$ e ainda temos que os pontos x_{i_j} , que representam os

centros dessas esferas, são todos pontos de $\mathbb{R}^k$. Assim, pelo [Lema 3.3.1](#), se P representar um par de pontos, então

$$\bar{d} = \frac{d}{\|d\|} = e_{k+1},$$

ainda temos que, como os centros dessas esferas são os pontos da realização para $\bar{D}$ já conhecidos e os raios são tomados das entradas de D , o conjunto y não pode ser vazio, senão D não seria uma MDE.

Através da equação (3.4) para obtenção do raio, conseguimos saber o tipo de conjunto representado por P , isto é,

$$r^2 = \frac{(-1)^{n+1} P^2}{(P \cdot e_\infty)^2}.$$

Se $r^2 < 0$, então a interseção y é vazia, o que, como visto anteriormente, é um absurdo, logo, $r^2 \geq 0$. Se $r^2 = 0$, então o conjunto y contém um único ponto c obtido pela equação

$$c = -\frac{\mathcal{P}(P \cdot e_\infty \cdot P)}{(P \cdot e_\infty)^2}.$$

Neste caso, basta tomar $x_{n+1} = c$. Por outro lado, se $r^2 > 0$, então o conjunto y é formado por um par de pontos, onde a direção já é conhecida,

$$y = \left\{ y^+ = c + r e_{k+1}, y^- = c - r e_{k+1} \right\}.$$

Assim, basta tomar $x_{n+1} = y^+$. Em ambos os casos, sendo $x_{n+1} = c$ ou $x_{n+1} = y^+$, a sequência $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ realiza a matriz D e satisfaz as condições do teorema para $n + 1$. Portanto, o teorema está demonstrado. $\square$

Na próxima seção usaremos a demonstração desse teorema para elaborar um novo algoritmo para o problema de reconhecimento MDE utilizando a AGC.

3.4 Algoritmo AGC

Do mesmo modo que o [Teorema 1.4.1](#), o [Teorema 3.3.1](#) também sugere um algoritmo para identificar quando uma matriz dada é ou não uma MDE, determinando sua dimensão da imersão e, além disso, quando essa dimensão é finita, uma realização para a matriz.

O seguinte exemplo nos dá a ideia do funcionamento do algoritmo baseado no [Teorema 3.3.1](#).

Exemplo 3.4.1. Considere a matriz do Exemplo 1.5.1, isto é,

$$D \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Partindo da submatriz principal de segunda ordem

$$D_{(I_2, I_2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

obtemos os dois primeiros pontos da sequência que realiza D , $x_1 = 0$ e $x_2 = \sqrt{D_{(I_2, I_2)}(2, 1)}e_1 = e_1$. Agora, vamos olhar para a submatriz principal de ordem 3:

$$D_{(I_3, I_3)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nesta abordagem, não precisamos alterar a dimensão de x_1 e x_2 para a próxima etapa. Definimos agora $P = S_{2_1} \wedge S_{2_2}$, onde $S_{2_1} = e_0 - \frac{1}{2}e_\infty$ e $S_{2_2} = e_1 - \frac{1}{2}e_\infty + e_0$. Assim calculamos r^2 utilizando a seguinte equação:

$$r^2 = \frac{(-1)^{n+1}P^2}{(P \cdot e_\infty)^2} = 1.$$

Como $r^2 > 0$ o resultado da interseção é um par de pontos, cujo centro é

$$c = -\frac{\mathcal{P}(P \cdot e_\infty \cdot P)}{(P \cdot e_\infty)^2} = 0,$$

com isso, como a direção é dada pelo Lema 3.3.1, sendo $d = e_2$, o par de pontos da interseção fica como

$$y = \{y^+ = e_2, y^- = -e_2\},$$

O ponto x_3 é definido como sendo $y^+ = e_2$ e seguimos para o próximo passo, onde temos $D_{(I_4, I_4)} = D$. Agora, os centros são $x_1 = 0, x_2 = e_1$ e $x_3 = e_2$ e os quadrados dos raios são a última coluna da matriz D , isto é, $\{1, 2, 2\}$. Obtemos o valor da interseção $P = S_{3_1} \wedge S_{3_2} \wedge S_{3_3}$, onde $S_{3_1} = e_0 - \frac{1}{2}e_\infty, S_{3_2} = e_1 - \frac{1}{2}e_\infty + e_0$ e $S_{3_3} = e_2 - \frac{1}{2}e_\infty + e_0$. Com isso, obtemos

$$r^2 = \frac{(-1)^{n+1}P^2}{(P \cdot e_\infty)^2} = 1,$$

sendo $r^2 > 0$, o resultado da interseção também é um par de pontos, cujo centro é

$$c = -\frac{\mathcal{P}(P \cdot e_\infty \cdot P)}{(P \cdot e_\infty)^2} = 0,$$

com a direção dada pelo [Lema 3.3.1](#), sendo $d = e_3$. O novo par de pontos fica sendo

$$y = \{y^+ = e_3, y^- = -e_3\}$$

e o ponto x_4 é definido como sendo $y^+ = e_3$. Portanto, a sequência $\{0, e_1, e_2, e_3\}$ realiza a matriz D e, como a última direção utilizada foi $d = e_3$, $\dim(D) = 3$.

Algorithm 2 $K = \text{edmAGC}(D)$

```

1:  $I = \{1, 2\}$ 
2:  $K = 1$ 
3:  $(x_1, x_2) = (0, \sqrt{D_{12}}e_1)$ 
4: for  $i \in \{3, \dots, n\}$  do
5:    $P = \bigwedge_{j \in I} (C(x_j) - \frac{1}{2}D_{ij}e_\infty)$ 
6:    $r^2 = \frac{(-1)^{n+1}P^2}{(P \cdot e_\infty)^2}$ 
7:   If  $r^2 < 0$  then
8:     return  $\infty$ 
9:   else if  $r^2 = 0$  then
10:     $x_i = -\frac{\mathcal{P}(P \cdot e_\infty \cdot P)}{(P \cdot e_\infty)^2}$ 
11:   else  $r^2 > 0$  then
12:     $x_i = -\frac{\mathcal{P}(P \cdot e_\infty \cdot P)}{(P \cdot e_\infty)^2} + r e_{K+1}$ 
13:     $I \leftarrow I \cup \{i\}$ 
14:     $K \leftarrow K + 1$ 
15:   end if
16: end for
17:  $\text{verify}(x)$ 
18: return  $K, x$ 

```

O [Algoritmo 2](#) é uma modificação do [Algoritmo 1](#) generalizando o processo descrito no [Exemplo 3.4.1](#), para uma dada matriz D $n \times n$, simétrica, oca, com entradas não negativas, retornando, no final do processo, a dimensão da imersão de D e, no caso em que D for uma MDE, isto é, $\dim(D) = K < \infty$, uma realização para D em $\mathbb{R}^K$.

Note que a dimensão do espaço trabalhado não precisa ser alterada durante o processo, uma vez que, quando trabalhamos com a Álgebra Geométrica, podemos considerar a dimensão máxima possível desde o início.

Na linha 17 do algoritmo, a função $\text{verify}(x)$ serve para verificar se as distâncias dos pontos obtidos estão de acordo com todas as entradas da matriz D , uma vez que, quando utilizamos a

interseção pela Álgebra Geométrica, só tomamos K esferas de $\mathbb{R}^K$, fazendo com que algumas entradas da matriz D possam ser deixadas de lado durante o cálculo. Contudo, sendo D uma MDE, a sequência x e a dimensão K obtidas são de fato uma realização para D e sua dimensão da imersão.

3.5 Testes Computacionais *edmAGC*

Assim como para o [Algoritmo 1](#), o [Algoritmo 2](#) foi implementado no software *Wolfram Mathematica*, e foram realizados os mesmos testes com MDEs conhecidas, variando dimensão da imersão K e a dimensão n da matriz de entrada. Assim como para o caso clássico, para cada combinação de dimensão e quantidade de pontos, vários testes foram realizados e calculamos a média dos resultados obtidos. Através desses testes podemos analisar a precisão e o tempo de processamento do algoritmo.

$n \backslash K$	2	3	4	5	10
10	0.0937	0.1406	0.2187	0.3125	-
100	1.3906	1.3281	3.6562	5.8281	8.7625
1000	14.1563	24.7188	41.0469	61.2813	305.672

Tabela 3.1 – Desempenho do [Algoritmo 2](#) em segundos

Em geral, o [Algoritmo 2](#) obteve resultados satisfatórios, com erro numérico pequeno. Quando comparando com o [Algoritmo 1](#), o [Algoritmo 2](#) tem uma vantagem em relação a simplicidade com que as interseções são calculadas, porém, a desvantagem em relação ao tempo de processamento do método é muito grande.

$n \backslash K$	2	3	4	5	10
10	7.131×10^{-15}	3.319×10^{-14}	1.868×10^{-14}	7.386×10^{-14}	-
100	1.053×10^{-13}	4.985×10^{-14}	2.608×10^{-13}	1.418×10^{-13}	2.586×10^{-11}
1000	5.151×10^{-14}	9.941×10^{-14}	5.818×10^{-13}	2.016×10^{-12}	5.899×10^{-12}

Tabela 3.2 – Desempenho [Algoritmo 2](#) em relação ao erro numérico

A [Tabela 3.1](#) dispõe os tempos de processamento de cada combinação em segundos. Note que o tempo de processamento foi influenciado mais pela quantidade de pontos, isto é, a dimensão da matriz de entrada, do que pela dimensão do espaço contendo os pontos. Porém, mesmo com 100 pontos, o tempo de processamento já foi maior do que o tempo do algoritmo

clássico contendo Dez Mil pontos. Por conta do tempo de processamento ser alto, fizemos testes apenas até mil pontos na sequência.

Contudo, através da [Tabela 3.2](#), vemos que o erro numérico continuou baixo, não apresentando desvantagens em relação ao algoritmo clássico.

Um grande peso desse algoritmo está na parte onde calculamos o produto exterior entre as esferas. Uma possibilidade para trabalhos futuros é focar em diminuir esse custo através de uma melhor implementação ou utilização de propriedades da Álgebra Geométrica que nos garanta uma forma menos custosa de obter esses produtos.

Lembramos que, uma implementação eficiente da Álgebra Geométrica ainda é tema de estudo, por conta disso, não nos aprofundamos nos aspectos computacionais do problema.

4 Caso Intervalar

Neste capítulo vamos analisar o caso em que a matriz de distâncias possui entradas intervalares. Primeiramente vamos ver a interseção de esferas com uma coroa esférica através de uma abordagem pela Álgebra Linear, em seguida pela Álgebra Geométrica e, por fim, alguns exemplos para ilustrar como sugerimos a abordagem do problema de reconhecimento MDE intervalar através da Álgebra Geométrica Conforme.

4.1 Abordagem utilizando Álgebra Linear

Antes de tudo, vamos definir o principal objeto que estamos lidando neste capítulo, denominado coroa esférica.

Definição 4.1.1. Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{r} > \underline{r} > 0$. A coroa esférica de $\mathbb{R}^n$ com centro em a , menor raio $\underline{r}$ e maior raio $\bar{r}$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $\underline{r} \leq d(x, a) \leq \bar{r}$. Em outras palavras, são os pontos de $\mathbb{R}^n$ que estão entre a esfera de menor raio e a esfera de maior raio.

Sabendo que $\underline{r} < \bar{r}$, podemos simplesmente dizer que a coroa esférica centrada em a tem raios $\underline{r}$ e $\bar{r}$.

O Teorema 4.1.1 é uma versão do teorema encontrado em [Lavor et al., 2022], restrita ao caso onde queremos obter a interseção de $n - 1$ esferas de $\mathbb{R}^n$ com uma coroa esférica, assim totalizando n objetos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.1.1. Sejam $a_1, \dots, a_{k-1}$ centros distintos de $k - 1$ esferas de $\mathbb{R}^k$, cujos raios são, respectivamente, $d_1, \dots, d_{k-1}$, onde o espaço gerado por $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ tem dimensão $k - 2$ e seja $a_k \in \mathbb{R}^k$ o centro de uma coroa esférica com raios $\underline{d}_k$ e $\bar{d}_k$. Então, a interseção entre as esferas e a coroa esférica será o conjunto vazio, um ponto, uma circunferência ou uma união de arcos de circunferência.

Demonstração. A interseção entre as esferas e a coroa esférica pode ser obtida através da solução do seguinte sistema

$$\begin{aligned} \|x - a_i\|^2 &= d_i^2, \quad i = 1, \dots, k - 1, \\ \underline{d}_k^2 &\leq \|x - a_k\|^2 \leq \bar{d}_k^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se $x \in \mathbb{R}^k$ satisfaz o sistema (4.1), então

$$\bar{x} = x - a_{k-1} \quad (4.2)$$

é solução de

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - (a_i - a_{k-1})\|^2 &= d_i^2, \quad i = 1, \dots, k-1, \\ \underline{d}_k^2 &\leq \|\bar{x} - (a_k - a_{k-1})\|^2 \leq \bar{d}_k^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|^2 - 2\bar{x}^T(a_i - a_{k-1}) + \|a_i - a_{k-1}\|^2 &= d_i^2, \quad i = 1, \dots, k-1, \\ \underline{d}_k^2 &\leq \|\bar{x}\|^2 - 2\bar{x}^T(a_k - a_{k-1}) + \|a_k - a_{k-1}\|^2 \leq \bar{d}_k^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para $i = k-1$ em (4.3), temos

$$\|\bar{x}\|^2 = d_{k-1}^2,$$

que implica que (4.4) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} (a_i - a_{k-1})^T \bar{x} &= -\frac{1}{2}(d_i^2 - d_{k-1}^2 - \|a_i - a_{k-1}\|^2), \quad i = 1, \dots, k-2, \\ -\frac{1}{2}(\bar{d}_k^2 - d_{k-1}^2 - \|a_k - a_{k-1}\|^2) &\leq (a_k - a_{k-1})^T \bar{x} \leq -\frac{1}{2}(\underline{d}_k^2 - d_{k-1}^2 - \|a_k - a_{k-1}\|^2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Se reescrevermos os elementos de (4.5) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= a_i - a_{k-1}, \quad i = 1, \dots, k-2, \\ c_i &= -\frac{1}{2}(d_i^2 - d_{k-1}^2 - \|a_i - a_{k-1}\|^2), \quad i = 1, \dots, k-2, \\ \bar{a}_{k-1} &= a_k - a_{k-1}, \\ \bar{c}_{k-1} &= -\frac{1}{2}(\bar{d}_k^2 - d_{k-1}^2 - \|a_k - a_{k-1}\|^2), \\ \underline{c}_{k-1} &= -\frac{1}{2}(\underline{d}_k^2 - d_{k-1}^2 - \|a_k - a_{k-1}\|^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Então o sistema (4.5) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \bar{a}_i \bar{x} &= c_i, \quad i = 1, \dots, k-2, \\ \underline{c}_i &\leq \bar{a}_{k-1} \bar{x} \leq \bar{c}_i. \end{aligned}$$

Existem duas opções para a dimensão do espaço gerado pelo conjunto $\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$: a primeira é $k-2$, quando o ponto a_k está no espaço gerado pelos pontos anteriores, a segunda é $k-1$, quando a_k não está no espaço gerado pelo pontos anteriores. Primeiramente, vamos

analisar o caso em que a dimensão seja $k - 2$ e vamos tomar a matriz A , definida pelos elementos $\bar{a}_i$ e $\bar{a}_{k-1}$ de (4.6), isto é,

$$A = [\bar{a}_1 \ \dots \ \bar{a}_{k-1}], \quad (4.7)$$

com posto $k - 2$.

Calculando a decomposição QR de A , temos

$$A = Q \begin{bmatrix} R & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é uma matriz ortogonal, $R \in \mathbb{R}^{(k-2) \times (k-2)}$ com posto completo e $r \in \mathbb{R}^{k-2}$. Logo

$$A^T \bar{x} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ r^T & 0 \end{bmatrix} Q^T \bar{x}. \quad (4.8)$$

Escrevendo $Q^T \bar{x}$ como

$$Q^T \bar{x} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

com $y \in \mathbb{R}^{k-2}$ e $z \in \mathbb{R}^2$, de (4.2), obtemos

$$x = Q \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + a_{k-1}.$$

De (4.8) e (4.9), o vetor y deve ser solução de

$$\begin{aligned} R^T y &= c, \\ \underline{c}_{k-1} &\leq r^T y \leq \bar{c}_{k-1}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $c = (c_1, \dots, c_{k-2})$.

Se $R^T y = c$ não tiver solução, então a solução para (4.1) é vazia. Contudo, como R tem posto completo, se y for uma solução para (4.10), y é único.

De (4.1), para $i = k - 1$, temos

$$\|x - a_{k-1}\|^2 = \left\| Q \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \right\|^2 = d_{k-1}^2,$$

assim, como $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$z_1^2 + z_2^2 = d_{k-1}^2 - \|y\|^2.$$

Desse modo, obtemos três possibilidades para a solução de (4.1): um conjunto vazio, se $d_{k-1}^2 - \|y\|^2 < 0$, um único ponto, caso $d_{k-1}^2 - \|y\|^2 = 0$ ou uma circunferência, caso $d_{k-1}^2 - \|y\|^2 > 0$.

Agora vamos analisar o caso em que a dimensão do espaço gerado pelo conjunto $\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$ é igual a $k - 1$, sendo a matriz A a mesma matriz definida em (4.7), isto é,

$$A = [\bar{a}_1 \ \dots \ \bar{a}_{k-1}],$$

agora com posto $k - 1$. Calculando a decomposição QR de A , obtemos

$$A = Q \begin{bmatrix} R & r \\ 0 & r_{k-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é ortogonal, $R \in \mathbb{R}^{(k-2) \times (k-2)}$ tem posto completo e $r_{k-1} \in \mathbb{R}$. Deste modo,

$$A^T \bar{x} = \begin{bmatrix} R^T & 0 & 0 \\ r^T & r_{k-1} & 0 \end{bmatrix} Q^T \bar{x}. \quad (4.11)$$

Escrevendo $Q^T \bar{x}$ como

$$Q^T \bar{x} = \begin{bmatrix} y \\ y_{k-1} \\ z \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

onde $y \in \mathbb{R}^{k-2}$, $y_{k-1}, z \in \mathbb{R}$, de (4.8) e (4.11), y e y_{k-1} devem satisfazer

$$\begin{aligned} R^T y &= c \\ \underline{c}_{k-1} &\leq \begin{bmatrix} r^T & r_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y_{k-1} \end{bmatrix} \leq \bar{c}_{k-1}, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} R^T y &= c \\ \underline{c}_{k-1} - r^T y &\leq r_{k-1} y_{k-1} \leq \bar{c}_{k-1} - r^T y. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Se não existir solução para $R^T y = c$, a solução para (4.1) será vazia. Contudo, como R tem posto completo, se existir uma solução y satisfazendo $R^T y = c$, esta será única.

De (4.13), obtemos

$$\underline{\alpha} \leq y_{k-1} \leq \bar{\alpha}, \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} &= \frac{c_{k-1} - r^T y}{r_{k-1}} \quad \text{e} \quad \bar{\alpha} = \frac{\bar{c}_{k-1} - r^T y}{r_{k-1}}, \quad \text{se } r_{k-1} > 0, \\ \underline{\alpha} &= \frac{\bar{c}_{k-1} - r^T y}{r_{k-1}} \quad \text{e} \quad \bar{\alpha} = \frac{c_{k-1} - r^T y}{r_{k-1}}, \quad \text{se } r_{k-1} < 0. \end{aligned}$$

De (4.2) e (4.12), temos

$$x = Q \begin{bmatrix} y \\ y_{k-1} \\ z \end{bmatrix} + a_{k-1} \quad (4.15)$$

substituindo (4.15) em (4.1), para $i = k - 1$, obtemos

$$\left\| Q \begin{bmatrix} y \\ y_{k-1} \\ z \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} y \\ y_{k-1} \\ z \end{bmatrix} \right\|^2 = d_{k-1}^2,$$

que é equivalente a

$$z^2 = d_{k-1}^2 - \|y\|^2 - y_{k-1}^2, \quad (4.16)$$

que possui solução real se, e somente se,

$$d_{k-1}^2 - \|y\|^2 - y_{k-1}^2 \geq 0.$$

Se $d_{k-1}^2 - \|y\|^2 \geq 0$, a inequação pode ser escrita como

$$-\beta \leq y_{k-1} \leq \beta, \quad (4.17)$$

onde $\beta = \sqrt{d_{k-1}^2 - \|y\|^2}$. De (4.14) e (4.17),

$$y_{k-1} \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}] \cap [-\beta, \beta].$$

Isto é,

$$\max\{\underline{\alpha}, -\beta\} \leq y_{k-1} \leq \min\{\bar{\alpha}, \beta\}. \quad (4.18)$$

Portanto, pela unicidade da solução de $R^T y = c$, para cada y_{k-1} no intervalo (4.2) e z satisfazendo (4.16), a equação (4.15) nos retorna um ponto ou um par de pontos. Considerando todos os valores de y_{k+1} satisfazendo (4.18), o resultado é um conjunto de pontos num arco. $\square$

A utilização da decomposição QR para obter a interseção de esferas de $\mathbb{R}^n$ é apresentada em [Maioli et al., 2017]. Em [Lavor et al., 2022] o teorema acima é apresentado com o cálculo

da interseção de m esferas de $\mathbb{R}^n$ com uma coroa esférica, sendo $m \geq 2$ e $n \geq 2$. Dessa forma, a quantidade de esferas pode ser maior que a dimensão do espaço.

No caso em que queremos obter realizações de MDEs, conseguimos restringir a quantidade de elementos na interseção à dimensão do espaço. Assim, podemos limitar o valor de m para $m = n - 1$. De todo modo, através dessa abordagem, apenas uma coroa esférica pode ser tomada por interseção, sendo necessária uma abordagem nova para o caso onde haja mais coroas esféricas.

Os seguintes exemplos ajudam a visualizar alguns possíveis casos para essa interseção.

Exemplo 4.1.1. No primeiro exemplo, considere $n = 3$ e $k = 1$, onde as esferas de raios exatos são definidas pelos centros e raios

$$a_1 = (0, 0, 0), \quad d_1 = 2,$$

$$a_2 = (3, 0, 0), \quad d_2 = \sqrt{2}$$

e a coroa esférica é definida por

$$a_3 = (2.5, -1.5, 0), \quad d_3 \in [d_3, \bar{d}_3] = [1.8, 2].$$

Primeiramente, vamos definir os vetores $\bar{a}_1$ e $\bar{a}_2$ para podermos montar a matriz A .

$$\bar{a}_1 = a_1 - a_2 = (-3, 0, 0),$$

$$\bar{a}_2 = a_3 - a_2 = (-0.5, -1.5, 0).$$

Assim, a matriz A será definida por

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -0.5 \\ 0 & -1.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cujas decomposição QR é

$$Q \begin{bmatrix} R & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0.5 \\ 0 & -1.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, sendo $c_1 = -\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2 - \|\bar{a}_1\|^2) = 3.5$, o sistema $R^T y = c_1$ fica sendo

$$3y = 3.5 \Rightarrow y = 1.1667.$$

Como $r_2 = -1.5 < 0$ e $d_2^2 - \|y\|^2 = 0.6389 > 0$, obtemos

$$\underline{\alpha} = -0.0311, \quad \bar{\alpha} = 0.2222,$$

$$\beta = 0.7993.$$

Consequentemente,

$$-0.0311 \leq y_2 \leq 0.2222.$$

Assim, as soluções de (4.1) são dadas por

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1667 \\ y_2 \\ \pm\sqrt{0.6389 - y_2^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $y_2 \in [-0.0311, 0.2222]$.

Para $y_2 = -0.0311$, obtemos

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1667 \\ -0.0311 \\ \pm 0.7987 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8333 \\ -0.0311 \\ \pm 0.7987 \end{bmatrix},$$

onde, tomando x sendo qualquer um dos dois valores, $x_1 = [1.8333, -0.0311, 0.7987]$ e $x'_1 = [1.8333, -0.0311, -0.7987]$, temos

$$\|x - a_1\| = 2,$$

$$\|x - a_2\| = \sqrt{2},$$

$$\|x - a_3\| = 1.8 \in [1.8, 2].$$

Para $y_2 = 0.2222$, obtemos o par de pontos

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1667 \\ 0.2222 \\ 0.7678 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8333 \\ 0.2222 \\ \pm 0.7678 \end{bmatrix}.$$

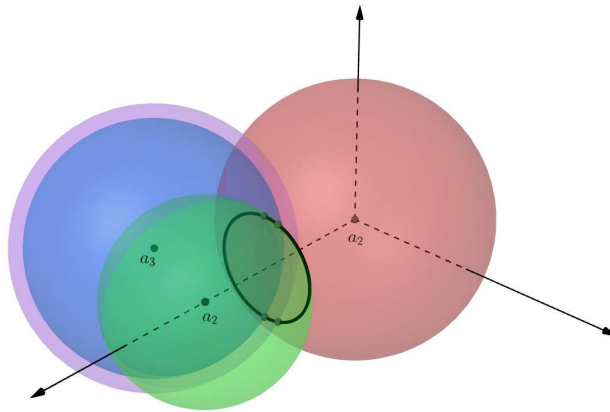


Figura 4.1 – Interseção das duas esferas de $\mathbb{R}^3$ com a coroa esférica. A circunferência representa a interseção entre as esferas e os pontos na circunferência são as interseções com a coroa esférica, considerando os raios mínimo e máximo.

Agora, sendo x qualquer um dos dois valores, $x_2 = [1.8333, 0.2222, 0.7678]$ e $x'_2 = [1.8333, 0.2222, -0.7678]$, temos

$$\|x - a_1\| = 2,$$

$$\|x - a_2\| = \sqrt{2},$$

$$\|x - a_3\| = 2 \in [1.8, 2].$$

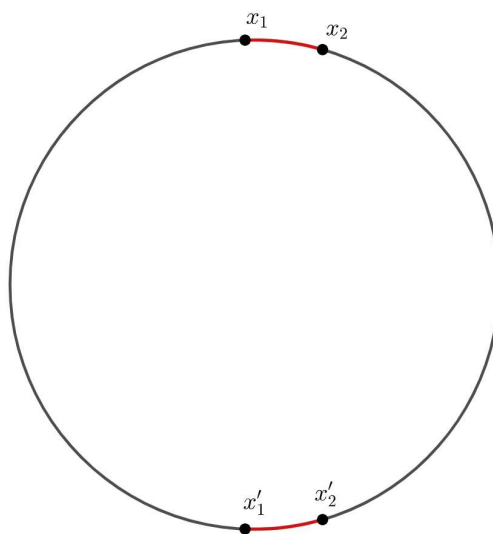


Figura 4.2 – O círculo representa a interseção das duas esferas, em vermelho o arco correspondente a interseção entre as esferas e a coroa esférica.

Tomando qualquer valor para y_2 no intervalo $[-0.0311, 0.2222]$, obteremos um novo par de pontos x_i pertencentes a um par de arcos da mesma circunferência (Figura 4.2).

No Exemplo 4.1.1, vimos um caso onde o resultado da interseção é um par de arcos, de modo que os extremos do intervalo obtido para y_2 retornam um par de pontos. Além desse caso, podemos ter que apenas um dos extremos do intervalo retornam pontos reais ou até mesmo nenhum dos extremos retorne pontos reais.

O próximo exemplo ilustra o caso em que um dos extremos do intervalo retorna um único ponto e o outro extremo retorna um par de pontos.

Exemplo 4.1.2. Agora, considere novamente $n = 3$ e $k = 1$, e tome as esferas de raios exatos definidas pelos centros e raios

$$a_1 = (0, 0, 0), d_1 = 2,$$

$$a_2 = (4, 0, 0), d_2 = 3,$$

e a coroa esférica é definida por

$$a_3 = (\sqrt{2}, 4, 0), d_3 \in [\underline{d}_3, \bar{d}_3] = \left[\frac{32 - 3\sqrt{15}}{8}, 3 \right].$$

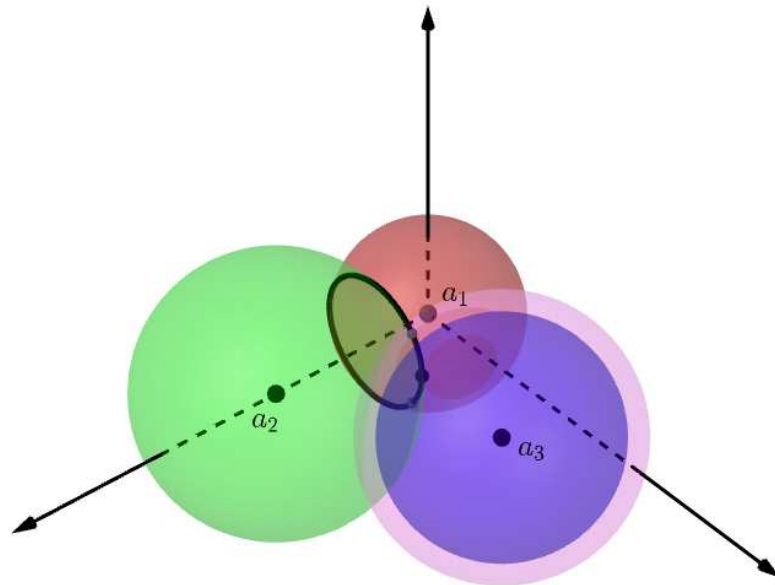


Figura 4.3 – Interseção das duas esferas de $\mathbb{R}^3$ com a coroa esférica. A circunferência representa a interseção entre as esferas e os pontos na circunferência são as interseções com a coroa esférica, considerando os raios mínimo e máximo.

Definimos os vetores $\bar{a}_1$ e $\bar{a}_2$ para podermos montar a matriz A .

$$\bar{a}_1 = a_1 - a_2 = (-4, 0, 0),$$

$$\bar{a}_2 = a_3 - a_2 = (\sqrt{2} - 4, 4, 0) = (-2.5858, 4, 0).$$

Assim, a matriz A será definida por

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2.5858 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cuja decomposição QR é

$$Q \begin{bmatrix} R & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2.5858 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sendo $c_1 = -\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2 - \|\bar{a}_1\|^2) = 10.5$, o sistema $R^T y = c_1$ fica sendo

$$4y = 10.5 \Rightarrow y = 2.625.$$

Como $r_2 = 4 > 0$ e $d_2^2 - \|y\|^2 = 2.1093 > 0$, obtemos

$$\underline{\alpha} = 1.1389, \quad \bar{\alpha} = 1.9454,$$

$$\beta = 1.4524.$$

Consequentemente,

$$1.1389 \leq y_2 \leq 1.4524.$$

Assim, as soluções de (4.1) são dadas por

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.625 \\ y_2 \\ \pm \sqrt{2.1093 - y_2^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $y_2 \in [1.1389, 1.4524]$.

Para $y_2 = 1.1389$, obtemos

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.625 \\ 1.1389 \\ \pm 0.9013 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.375 \\ 1.1389 \\ \pm 0.9013 \end{bmatrix},$$

onde, tomando x sendo qualquer um dos dois valores, $x_1 = [1.375, 1.1389, 0.9013]$ e $x'_1 = [1.375, 1.1389, -0.9013]$, temos

$$\|x - a_1\| = 2,$$

$$\|x - a_2\| = 3,$$

$$\|x - a_3\| = 3 \in \left[\frac{32 - 3\sqrt{15}}{8}, 3 \right].$$

Para $y_2 = 1.4524$, um único ponto, sendo

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.625 \\ 1.4524 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.375 \\ 1.4524 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Sendo $x = [1.375, 1.4524, 0]$, temos

$$\|x - a_1\| = 2,$$

$$\|x - a_2\| = 3,$$

$$\|x - a_3\| = 2.5479 \in \left[\frac{32 - 3\sqrt{15}}{8}, 3 \right].$$

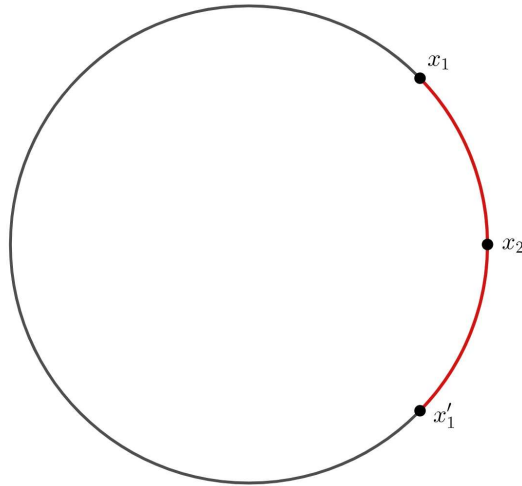


Figura 4.4 – O círculo representa a interseção das duas esferas, em vermelho o arco correspondente a interseção entre as esferas e a coroa esférica.

Tomando qualquer valor para y_2 no intervalo $[1.1389, 1.4524]$, obteremos um novo par de pontos x_i pertencentes ao arco da mesma circunferência (Figura 4.4), somente no caso em que $y_2 = 1.4524$, obtemos um único ponto, pertencente ao mesmo plano dos centros.

Através desse exemplo, podemos ilustrar o quão diferente é o processo de calcular a interseção de esferas com uma coroa esférica se comparado ao cálculo da interseção de apenas esferas. Principalmente no caso em que, como nos exemplos acima, os centros estão todos no hiper-plano gerado apenas pelos $n - 1$ primeiros vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$, onde, no caso contendo apenas esferas, resolveríamos um sistema linear.

4.2 Abordagem utilizando a Álgebra Geométrica

Utilizando os conceitos apresentados no [Capítulo 2](#) e no [Capítulo 3](#), podemos calcular a interseção entre as esferas e uma coroa esférica através da Álgebra Geométrica Conforme.

O primeiro passo para obter a interseção das esferas com a coroa esférica é o cálculo da interseção entre as $k - 1$ esferas, isto é,

$$C = \bigwedge_{i=1}^{k-1} S_i,$$

onde $S_i = C(a_i) - \frac{d_i^2}{2}e_\infty$, obtendo uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio. No caso em que a interseção entre as $k - 1$ esferas é vazia, não há necessidade de seguir com o processo, uma vez que é evidente que a interseção com a coroa esférica também será vazia.

Definimos outras duas esferas através dos limitantes inferior e superior do intervalo ao qual d_k pertence, isto é,

$$\underline{s} = C(a_k) - \frac{\underline{d}_k^2}{2}e_\infty \quad \text{e} \quad \bar{s} = C(a_k) - \frac{\bar{d}_k^2}{2}e_\infty.$$

Agora devemos analisar as interseções, $P_L = C \wedge \underline{s}$ e $P_U = C \wedge \bar{s}$, entre C e as duas esferas, que, pelo [Teorema 3.2.1](#), será um par de pontos, um ponto ou o conjunto vazio. Caso o resultado da interseção tenha raio imaginário, isto é, $r^2 < 0$, para P_L ou P_U , devemos verificar se precisamos atualizar os valores de $\underline{d}_k$ e $\bar{d}_k$, calculando as distâncias máxima e mínima entre o vetor $A_k = C(a_k)$ e C .

Para isso, precisamos projetar A_k no hiper-plano $C_P = e_\infty \cdot C$ contendo C através da [Equação 2.1.6](#), ou seja,

$$PA_k = (A_k \cdot C_P^{-1})C_P$$

e calcular a distância α , entre os vetores A_k e PA_k . Como PA_k representa um plano, essa distância pode ser obtida pela [Equação 2.3.1.3](#), isto é,

$$\alpha = A_k \cdot PA_k.$$

De α e a distância entre A_k e o centro X_C de C , dado por

$$\beta = \sqrt{-2(A_k \cdot X_C)},$$

conseguimos obter a distância entre X_C e PA_k , dada por

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}.$$

Considerando o raio r_C de C , temos

$$d_{\min} = \sqrt{\alpha^2 - (\gamma - r_C)^2} \quad \text{e} \quad d_{\max} = \sqrt{\alpha^2 + (\gamma + r_C)^2}.$$

Assim, o intervalo $[\underline{d}_k, \bar{d}_k]$ deve ser atualizado de acordo com as seguintes condições:

- Se $\underline{r}^2 < 0$ e $\underline{d}_k < d_{\min}$, então $\underline{d}_k = d_{\min}$,
- Se $\bar{r}^2 < 0$ e $\bar{d}_k > d_{\max}$, então $\bar{d}_k = d_{\max}$.

Com isso, a interseção pode ser feita como no [Teorema 3.2.1](#) e o resultado será uma união de pares de pontos, dados por

$$P_A = \{x \in \mathbb{R}^k : x = \mathcal{P}\left(C \wedge \left(A_k - \frac{d^2}{2}e_\infty\right)\right), d \in [\underline{d}_k, \bar{d}_k]\} \quad (4.19)$$

Mais adiante, veremos o caso em que temos mais de uma coroa esférica por interseção, que é possibilitada pela abordagem através da AGC. Primeiramente, vamos ver como as interseções dos exemplos anteriores podem ser obtidas com essa abordagem.

Exemplo 4.2.1. Tomando os mesmos parâmetros do [Exemplo 4.1.1](#), isto é, consideramos $n = 3$ e $k = 1$, onde as esferas de raios exatos são definidas pelos centros e raios

$$a_1 = (0, 0, 0), \quad d_1 = 2,$$

$$a_2 = (3, 0, 0), \quad d_2 = \sqrt{2},$$

e a coroa esférica é definida por

$$a_3 = (2.5, -1.5, 0), \quad d_3 \in [\underline{d}_3, \bar{d}_3] = [1.8, 2].$$

Para essa abordagem, primeiramente calculamos

$$C = S_1 \wedge S_2 = \left(C(a_1) - \frac{d_1^2}{2} \right) \wedge \left(C(a_2) - \frac{d_2^2}{2} \right),$$

obtendo o centro c , o raio r e a direção h , sendo

$$c = (1.8333, 0, 0),$$

$$r = 0.7993,$$

$$h = e_2 e_3,$$

onde h representa a direção do plano de $\mathbb{R}^3$ que contém a circunferência C .

Agora, através da equação (3.4), obtemos os quadrados dos raios das interseções entre C e as esferas de centro em a_3 e raios $\underline{d}_3$ e $\bar{d}_3$, sendo

$$\underline{r}^2 = 0.6379 > 0,$$

$$\bar{r}^2 = 0.5895 > 0.$$

Logo, ambas as interseções são pares de pontos, assim, a interseção entre as esferas e a coroa esférica vai ser dada por

$$P_A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = C \wedge \mathcal{P}(C \wedge (C(a_3) - \frac{d^2}{2} e_\infty)), d \in [1.8, 2]\}.$$

Resolvendo a projeção da interseção, obtemos

$$P_A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = 1.8333e_1 + \alpha_1(d)e_2 \pm \alpha_2(2)e_3, d \in [1.8, 2]\},$$

onde $\alpha_1(d) = 0.3333d^2$ e $\alpha_2(d) = 0.2222\sqrt{-12.0625 + 15d^2 - 2.25d^4}$.

Para $d = 1.8$, obtemos

$$x = 1.8333e_1 - 0.0311e_2 \pm 0.7987e_3$$

e, para $d = 2$, obtemos

$$x = 1.8333e_1 + 0.2222e_2 \pm 0.7678e_3.$$

Exemplo 4.2.2. Agora, tomamos os mesmos parâmetros do Exemplo 4.1.2, isto é, consideramos $n = 3$ e $k = 1$, onde as esferas de raios exatos são definidas pelos centros e raios

$$a_1 = (0, 0, 0), d_1 = 2,$$

$$a_2 = (4, 0, 0), d_2 = 3,$$

e a coroa esférica é definida por

$$a_3 = (\sqrt{2}, 4, 0), \quad d_3 \in [\underline{d}_3, \bar{d}_3] = \left[\frac{32 - 3\sqrt{15}}{8}, 3 \right].$$

Primeiramente, calculamos

$$C = S_1 \wedge S_2 = \left(C(a_1) - \frac{d_1^2}{2} \right) \wedge \left(C(a_2) - \frac{d_2^2}{2} \right),$$

obtendo o centro c , o raio r e a direção h , sendo

$$c = (1.375, 0, 0),$$

$$r = 1.4524,$$

$$h = e_2 e_3,$$

onde h representa a direção do plano de $\mathbb{R}^3$ que contém a circunferência C .

De (3.4), obtemos os quadrados dos raios das interseções entre C e as esferas de centro em a_3 e raios $\underline{d}_3$ e $\bar{d}_3$, sendo

$$\underline{r}^2 = 0.8124 > 0,$$

$$\bar{r}^2 = 0.$$

Logo, uma das interseções resulta em um par de pontos e outra em um único ponto, o conjunto interseção pode ser representado por:

$$P_A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \mathcal{P}(C \wedge (C(a_3) - \frac{d^2}{2} e_\infty)), \quad d \in [\underline{d}_3, \bar{d}_3] = \left[\frac{32 - 3\sqrt{15}}{8}, 3 \right]\}.$$

Resolvendo a projeção da interseção, obtemos

$$P_A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = 1.375e_1 + \alpha_1(d)e_2 \pm \alpha_2(2)e_3, \quad d \in \left[\frac{32 - 3\sqrt{15}}{8}, 3 \right]\},$$

onde $\alpha_1(d) = 2.2649 - 0.125d^2$ e $\alpha_2(d) = 0.0625\sqrt{-772.021 + 144.887d^2 - 4d^4}$

Para $d = \frac{32-3\sqrt{15}}{8}$, temos que

$$x = 1.375e_1 + 1.4525e_2$$

e, para $d = 3$, temos que

$$x = 1.375e_1 + 1.1389e_2 \pm 0.9013e_3.$$

Note que, como era de se esperar, em ambos os exemplos acima, os pontos obtidos foram exatamente os mesmos obtidos pela abordagem através da Álgebra Linear.

4.3 Matrizes de Distâncias Euclidianas Intervalares

Uma matriz de distâncias euclidianas intervalares (MDEI) diferenciará de uma MDE pelo fato de ao menos uma de suas entradas ser intervalar. Uma MDEI não precisa ter necessariamente todas as suas entradas intervalares. Evidentemente, as entradas da diagonal principal de uma MDEI continuarão sendo nulas, logo serão exatas.

Definição 4.3.1. Uma matriz D $n \times n$ é dita ser uma Matriz de Distâncias Euclidianas Intervalares (MDEI) se, para algum K inteiro positivo, existir uma sequência de pontos $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^K$, tal que

$$D(i, j) = [\underline{d}_{ij}, \bar{d}_{ij}], \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

onde $d(x_i, x_j)^2 = \|x_i - x_j\|^2 \in [\underline{d}_{ij}, \bar{d}_{ij}]$ e $\underline{d}_{ij}$ e $\bar{d}_{ij}$ são não negativos.

Note que, na definição acima, se $\underline{d}_{ij} = \bar{d}_{ij}$ para algum par $i, j \in \{1, \dots, n\}$, então a entrada (i, j) da matriz D será um intervalo degenerado, isto é, $D(i, j)$ representará uma distância exata.

Exemplo 4.3.1. A matriz

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & [1, 4] & [4.5, 5.1] \\ 1 & 0 & 1 & [1, 2] \\ [1, 4] & 1 & 0 & 1 \\ [4.5, 5.1] & [1, 2] & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma MDEI de ordem 4, com três distâncias intervalares, $D(1, 3) = D(3, 1)$, $D(1, 4) = D(4, 1)$ e $D(2, 4) = D(4, 2)$.

4.3.1 Caso Contendo Apenas uma Coroa Esférica

Dada uma MDEI D qualquer, de ordem n , pode acontecer de que numa determinada coluna j de D existam duas ou mais distâncias intervalares acima da diagonal principal.

Pelas características de uma MDE, apenas as entradas de D que estão acima da diagonal principal já contêm todas as informações necessárias para a resolução do problema de reconhecimento MDE. Além disso, sabemos que fixada uma coluna j de D , a linha k representa a distância entre o ponto x_j e o k -ésimo ponto da sequência $\{x_i\}_{i=1}^n$ que realiza D .

Levando essas características de uma MDE em consideração, suponhamos que conheçamos os pontos $x_1, \dots, x_{j-1}$ que realizam a submatriz principal de D de ordem $j - 1$ e queremos

determinar um ponto x_j que, junto com os pontos $\{x_i\}_{i=1}^{j-1}$, realiza a submatriz principal de D de ordem j . Utilizando a ideia que vimos até aqui, precisamos realizar a interseção entre as esferas e coroas esféricas, com centros em $x_1, \dots, x_j$ e raios $D(1, j), \dots, D(j-1, j)$, respectivamente.

Note que a quantidade de distâncias intervalares acima da diagonal principal na coluna j de D , representa a quantidade de coroas esféricas nessa interseção. Com isso, no caso geral, para obter o j -ésimo ponto, realizamos a interseção entre p esferas e q coroas esféricas, onde $p + q = j - 1$.

Inicialmente, pretendemos analisar o caso onde cada ponto é obtido pela interseção entre, no máximo, uma coroa esférica com $n - 1$ esferas de $\mathbb{R}^n$, de modo que consigamos utilizar o processo descrito na [Seção 4.2](#).

Exemplo 4.3.2. A seguinte matriz satisfaz essas condições:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & [1, 4] & 5 \\ 1 & 0 & 1 & [1, 2] \\ [1, 4] & 1 & 0 & 1 \\ 5 & [1, 2] & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que, no exemplo acima, a terceira coluna da matriz D nos fornece duas distâncias precisas e uma distância intervalar, então, quando realizarmos a interseção entre as esferas centradas nos pontos anteriores com raios referentes a essa coluna, teremos a interseção de duas esferas com uma coroa esférica.

O modelo ideal de MDEI que satisfaça essas condições, é a que possui, no máximo, uma distância intervalar por coluna acima da diagonal principal, mas nem sempre é necessário que isso seja satisfeito. Uma vez que, pelo método através da AGC, para obter o i -ésimo ponto, utilizamos apenas K esferas de $\mathbb{R}^K$, onde o valor de K é uma unidade maior do que a dimensão do espaço que contém os pontos que já conhecemos.

Os dois exemplos a seguir serão apresentados apenas com a abordagem através da AGC, em seguida, apresentaremos um exemplo maior, onde as duas abordagens serão comparadas.

Exemplo 4.3.3. Primeiramente, vamos utilizar a matriz do [Exemplo 4.3.2](#), isto é,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & [1, 4] & 5 \\ 1 & 0 & 1 & [1, 2] \\ [1, 4] & 1 & 0 & 1 \\ 5 & [1, 2] & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, os dois primeiros pontos são dados, assim como no caso não intervalar, sendo $x_1 = 0$ e $x_2 = \sqrt{D(1, 2)}e_1 = e_1$.

Calculando a interseção entre a circunferência centrada em x_2 , com raio 1 e a coroa centrada em x_1 com raios $\{1, 2\}$, como descrita na [Seção 4.2](#), obtemos o seguinte conjunto

$$P_{A_1} = \{x_3 = 0.5d^2e_1 \pm \sqrt{(d^2 - 0.25d^4)}e_2 \in \mathbb{R}^2, d \in [1, 2]\},$$

Agora, poderíamos seguir com duas abordagens. A primeira seria carregar o ponto x_3 em função de d para a próxima interseção e seguir adicionando pontos em função dos intervalos anteriores daí em diante. Porém, essa abordagem pode se tornar muito custosa quando o problema contém uma quantidade grande de pontos. Por conta disso, escolhemos discretizar o conjunto tomando $p \in \mathbb{N}^*$ pontos espaçados de maneira uniforme no conjunto PA . Desse modo, sendo D uma MDE, quanto maior o valor de p , maior será a possibilidade de encontrarmos uma realização para D , porém, esse processo se tornará mais custoso.

Vamos adotar para esse exemplo $p = 3$, isto é, tomamos os d no conjunto $\{1, 1.5, 2\}$. Sendo assim, o conjunto PA_1 pode ser representado na forma discretizada por

$$T_1 = \{0.5e_1 + 0.866e_2; 1.125e_1 + 0.9922e_2; 2e_1\}.$$

Para escolher o ponto x_3 , podemos tomar qualquer ponto de T_1 e verificar se a próxima interseção (para obter o ponto x_4) é não vazia. Caso seja vazia, devemos voltar em T_1 e escolher um novo ponto. Se isso se repetir para todos os pontos, podemos aumentar o valor de p ou, se o valor de p já for suficientemente grande, declarar que a matriz D não é MDE.

Dos três pontos de T_1 , o único que não retorna uma interseção não vazia para a obtenção do próximo ponto é $T_1(3) = 2e_1$. Logo, assumimos $x_3 = 2e_1$ e vamos para o próximo ponto da sequência.

Como o espaço foi mantido em $\mathbb{R}^1$, a interseção será apenas entre a circunferência de centro x_2 e raio $\sqrt{5}$ e a coroa de centro x_3 e raios $\{1, \sqrt{2}\}$, resultando no seguinte conjunto

$$P_{A_2} = \{x_4 = (1 + 0.5d^2)e_1 \pm \sqrt{d^2 - 0.25d^4}e_2 \in \mathbb{R}^2, d \in [1, \sqrt{2}]\}.$$

Representado, por sua discretização com $p = 3$ pontos, por

$$T_2 = \{1.5e_1 + 0.866e_2; 1.0214e_1 + 0.206e_2; 2e_1 + e_2\}.$$

Por fim, basta verificar para quais elementos de T_2 temos $d(x_1, x_4)^2 = 5$, concluindo que, para $d = \sqrt{2}$, os pontos $x_1 = 0, x_2 = e_1, x_3 = 2e_1$ e $x_4 = 2e_1 + e_2$ realizam a matriz D .

O próximo exemplo ilustra o caso em que, mesmo que tenhamos mais de uma distância intervalar em uma coluna da matriz, a realização pode ser obtida pela interseção com apenas uma coroa esférica.

Exemplo 4.3.4. Considere a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & [7, 9] & 13 \\ 1 & 0 & 4 & [9, 11] \\ [7, 9] & 4 & 0 & [8, 11] \\ 13 & [9, 11] & [8, 11] & 0 \end{bmatrix}.$$

Novamente, a primeira distância não é intervalar, com isso, os dois primeiros pontos são $x_1 = 0$ e $x_2 = \sqrt{D(1, 2)}e_1 = e_1$.

Calculando a interseção entre a coroa centrada em x_1 com raios $\{3, 2\sqrt{3}\}$ e a circunferência centrada em x_2 com raio 2, obtemos o conjunto

$$P_{A_1} = \{x_3 = (-1.5 + 0.5d^2)e_1 \pm \sqrt{(-2.25 + 2.5d^2 - 0.25d^4)}e_2 \in \mathbb{R}^2, d \in [\sqrt{7}, 3]\}.$$

Sendo $p = 3$, d é tomado no conjunto $\{\sqrt{7}, \sqrt{8}, 3\}$, gerando o conjunto

$$T_1 = \{2e_1 + 1.7321e_2; 2.5e_1 + 1.3229e_2; 3e_1\}.$$

Note que em T_1 existe um ponto que pertence a $\mathbb{R}^1$, mas nem sempre isso acontecerá. No caso em que a interseção entre as esferas e coroa esférica for um par de arcos, o conjunto interseção só conterá pontos no espaço com uma dimensão maior que a dimensão da imersão

atual. Contudo, se esse ponto existir, sabemos que a interseção resultou em um único ponto ou em um único arco.

No caso em que a interseção resulta em um par de arcos ou em um único arco, a expressão para a dimensão adicional sempre será da forma $\pm\sqrt{\alpha(d)}e_{K+1}$, onde $\alpha(d)$ é uma função polinomial. Assim, para verificar se existe um ponto $y \in PA$ com $y \in \mathbb{R}^K$, basta descobrir se para o intervalo dado para d , existe um valor d_0 , tal que $\alpha(d_0) = 0$.

Caso exista, sempre daremos preferência ao ponto que não aumenta a dimensão da imersão. Deste modo, garantimos que, se obtida uma realização para D , esta estará no espaço de menor dimensão da imersão possível. Neste caso, o valor procurado está em um dos extremos do intervalo $d = 3$, logo, tomamos $x_3 = 3e_1$.

Os pontos x_1 , x_2 e x_3 estão em $\mathbb{R}^1$, desse modo, para obter o próximo ponto, precisamos de apenas duas circunferências ou uma circunferência e uma coroa. Com isso, mesmo que a quarta linha da matriz D tenha duas entradas intervalares, só precisaremos usar uma delas, garantindo assim que cairemos no caso abordado aqui.

Como $D(1, 2) = 13$ e as entradas $D(2, 4)$ e $D(3, 4)$ são intervalares, vamos escolher x_1 como sendo um dos centros e tomamos qualquer um dos outros pontos para ser o centro da coroa com raios referentes a respectiva entrada da matriz D .

Calculando a interseção da circunferência de centro $x_1 = 0$ e raio $\sqrt{13}$ com a coroa de centro $x_2 = e_1$ e raios $\{3, \sqrt{11}\}$, obtemos o conjunto

$$P_{A_2} = \{x_4 = (7 - d^2)e_1 \pm \sqrt{(-36 + 7d^2 - 0.25d^4)}e_2 \in \mathbb{R}^2, d \in [3, \sqrt{11}]\}.$$

Sendo $p = 3$, d é tomado no conjunto $\{3, \sqrt{10}, \sqrt{11}\}$, PA_2 é discretizado em

$$T_2 = \{2.5e_1 + 2.5981e_2; 2e_1 + 3e_2; 1.5e_1 + 3.2787e_2\}.$$

O único ponto $y \in T_2$ tal que $d(y, x_3) \in [8, 11]$ é $y = 2e_1 + 3e_2$, logo, tomamos $x_4 = 2e_1 + 3e_2$, com isso, a sequência $\{0; e_1; 3e_1; 2e_1 + e_2\}$ realiza a matriz D . Portanto D é MDE com $\dim(D) = 2$.

Para que possamos comparar as duas abordagens para a resolução do problema, a resolução do próximo exemplo será apresentada em duas partes: primeiramente através da Álgebra Linear e, em seguida, Álgebra Geométrica Conforme.

Exemplo 4.3.5. Seja D dada por

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 0 & [7, 10] & 2 & 5 & 13 \\ 5 & [7, 10] & 0 & [1, 4] & [1, 4] & [9, 12] \\ 5 & 2 & [1, 4] & 0 & [1, 4] & [8, 11] \\ 8 & 5 & [1, 4] & [1, 4] & 0 & [10, 13] \\ 4 & 13 & [9, 12] & [8, 11] & [10, 13] & 0 \end{bmatrix}.$$

Abordagem através da Álgebra Linear

Os dois primeiros pontos são dados $x_1 = 0$ e $x_2 = \sqrt{D(1, 2)} = 3$. Para o terceiro ponto, realizamos a interseção entre a circunferência de centro x_1 e raio $\sqrt{5}$ com a coroa de centro x_2 e raios $\{\sqrt{7}, \sqrt{10}\}$. Como estamos em $\mathbb{R}^2$, fazemos de forma direta, obtendo o conjunto

$$\{x_3 = (y, \pm\sqrt{5 - y^2}), y \in [\frac{2}{3}, \frac{7}{6}]\}$$

Por simplicidade, neste exemplo, sempre vamos optar por um ponto que sabemos estar contido numa realização da matriz D . Escolhendo $y = 1 \in [\frac{2}{3}, \frac{7}{6}]$, desse modo $x_3 = (1, 2)$.

Para o quarto ponto, temos as esferas cujos centros e raios são dados por

$$a_1 = (0, 0, 0), d_1 = \sqrt{5},$$

$$a_2 = (3, 0, 0), d_2 = \sqrt{2}$$

e a coroa esférica cujo centro e raios são dados por

$$a_3 = (1, 2, 0), d_3 \in [1, 2].$$

Com isso,

$$\bar{a}_1 = a_1 - a_2 = (-3, 0, 0),$$

$$\bar{a}_2 = a_3 - a_2 = (-2, 2, 0),$$

formando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cujas decomposição QR é dada por

$$Q \begin{bmatrix} R & r \\ 0 & r_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sendo $c_1 = -\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2 - \|\bar{a}_1\|^2) = 3$, de $R^T y = c_1$ obtemos $y = 1$. Como $r_2 = 2 > 0$, calculamos $\underline{\alpha} = 0.5$, $\bar{\alpha} = 1.25$ e $\beta = 1$, obtemos y_2 no intervalo

$$0.5 = \max\{\underline{\alpha}, -\beta\} \leq y_2 \leq \min\{\bar{\alpha}, \beta\} = 1.$$

Com isso, as soluções x são dadas por

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y_2 \\ \pm\sqrt{1 - y_2^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $y_2 \in [0.5, 1]$.

Nesse ponto, devemos discretizar o intervalo de y_2 e tomar os pontos x para o próximo centro. Do mesmo modo que para a abordagem através da AGC, caso a próxima interseção seja vazia, devemos voltar nesse intervalo e atualizar o ponto.

Por conveniência, tomamos $y_2 = 1$, sendo

$$x_4 = (2, 1, 0),$$

repetimos o processo para a obtenção do quinto ponto da sequência.

Note que na quinta coluna da matriz D temos duas distâncias intervalares. Como o [Teorema 4.1.1](#) nos fornece uma forma de calcular a interseção apenas quando existe uma coroa esférica, aqui usaremos o fato de que, uma vez que x_1 , x_2 , x_3 e x_4 são pontos de $\mathbb{R}^2$, podemos tomar apenas duas distâncias exatas e uma intervalar e, depois de obter o quinto ponto, verificar se a distância entre esse ponto e o que ficou faltando é compatível com o intervalo.

Repetindo o mesmo processo, onde, a partir de

$$a_1 = (0, 0, 0), d_1 = \sqrt{8},$$

$$a_2 = (3.0, 0), d_2 = \sqrt{5},$$

$$a_3 = (2, 1, 0), d_3 \in [1, 2],$$

obtemos $\bar{a}_1 = a_1 - a_2$, $\bar{a}_2 = a_3 - a_2$ e geramos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde a decomposição QR de A é dada por

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

calculamos $y = 1$, $\alpha = 1.25$, $\bar{\alpha} = 2$ e $\beta = 2$ com base nas entradas de R e dos valores do intervalo de d_3 . Assim, chegamos nos pontos

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ y_2 \\ \pm \sqrt{4 - y_2^2} \end{bmatrix},$$

onde $y_2 \in [1.25, 2]$.

Para $y_2 = 2$, temos $x_5 = (2, 2, 0)$, cuja distância ao quarto ponto $d(x_4, x_5)^2 = 1 \in [1, 4] = D(4, 5)$, verificando assim que a sequência obtida até aqui realiza a submatriz principal com ordem 5 de D . Agora, vamos para o último ponto da sequência.

Novamente, temos os centros e raios

$$a_1 = (0, 0, 0), d_1 = 2,$$

$$a_2 = (3, 0, 0), d_2 = \sqrt{13},$$

$$a_3 = (2, 1, 0), d_3 \in [3, \sqrt{12}],$$

de $\bar{a}_1 = a_1 - a_2$, $\bar{a}_2 = a_3 - a_2$, criamos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cujas decomposição QR

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo $y = 3$, $\alpha = -0.75$, $\bar{\alpha} = 0$ e $\beta = 2$, sendo as soluções obtidas dadas por

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ \pm\sqrt{4 - y_2^2} \end{bmatrix},$$

onde $y_2 \in [-0.75, 0]$.

Tomando $y_2 = 0$, temos que $x_6 = (0, 0, 2)$, onde as distâncias $d(x_4, x_6)^2 = 9 \in [8, 11] = D(4, 6)$ e $d(x_5, x_6)^2 = 12 \in [10, 13] = D(5, 6)$.

Portanto, a sequência formada pelos pontos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 , obtidos acima, realiza a matriz D .

Abordagem através da AGC

Tomando os mesmos pontos de partida $x_1 = 0$, $x_2 = 3e_1$ e $x_3 = e_1 + 2e_2$, cujos raios são dados por $r_1 = \sqrt{5}$, $r_2 = \sqrt{2}$ e $r_3 = d \in [1, 2]$, respectivamente. Calculamos

$$P = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3,$$

onde $S_i = x_i + \frac{1}{2}(x_i^2 - r_i^2)e_\infty + e_0, i = 1, 2, 3$. Obtemos por $\mathcal{P}(P)$, o seguinte conjunto

$$P_{A_1} = \left\{ 2e_1 + \frac{1}{4}(6 - d^2)e_2 \pm \frac{1}{4}(\sqrt{-20 + 12d^2 - d^4})e_3, d \in [1, 2] \right\}.$$

Para $d = \sqrt{2} \in [1, 2]$, obtemos o ponto $x_4 = 2e_1 + e_2$.

Note que, diferente da abordagem clássica, os valores dos extremos de r_3 não precisam ser usados em nenhum momento durante o cálculo de PA_1 . Desse modo, podemos alterar o intervalo mesmo depois de realizar a interseção. Isso pode ser de grande utilidade quando lidamos com problemas reais.

Agora, usamos novamente os centros $x_1 = 0$, $x_2 = 3e_1$ e $x_3 = e_1 + 2e_2$, com novos raios dados por $r_1 = \sqrt{8}$, $r_2 = \sqrt{5}$ e $r_3 = d \in [1, 2]$, respectivamente. Calculamos

$$P = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3,$$

onde $S_i = x_i + \frac{1}{2}(x_i^2 - r_i^2)e_\infty + e_0, i = 1, 2, 3$ e obtemos

$$P_{A_2} = \left\{ 2e_1 + \frac{1}{4}(9 - d^2)e_2 \pm \frac{1}{4}(\sqrt{-17 + 18d^2 - d^4})e_3, d \in [1, 2] \right\}.$$

Para $d = 1 \in [1, 2]$, obtemos o ponto $x_5 = 2e_1 + e_2$, cuja distância $d(x_5, x_4)^1 = 1 \in [1, 4] = D(5, 4)$.

Por fim, para obtenção do último ponto, usamos novamente os centros $x_1 = 0$, $x_2 = 3e_1$ e $x_3 = e_1 + 2e_2$, com raios agora dados por $r_1 = 2$, $r_2 = \sqrt{13}$ e $r_3 = d \in [3, \sqrt{12}]$, respectivamente. Sendo

$$P = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3,$$

com $S_i = x_i + \frac{1}{2}(x_i^2 - r_i^2)e_\infty + e_0$, $i = 1, 2, 3$, obtemos

$$P_{A_3} = \left\{ \frac{1}{4}(9 - d^2)e_2 \pm \frac{1}{4}(\sqrt{-17 + 18d^2 - d^4})e_3, d \in [3, \sqrt{12}] \right\}.$$

Para $d = 3 \in [3, \sqrt{12}]$, obtemos $x_6 = 2e_3$, cujas distâncias $d(x_4, x_6)^2 = 9 \in [8, 11] = D(4, 6)$ e $d(x_5, x_6)^2 = 12 \in [10, 13] = D(5, 6)$, sendo a mesma sequência obtida no caso clássico.

No exemplo acima, é fácil notar a diferença das duas abordagens. Na abordagem clássica, fixamos os centros e raios, "deslocamos" os pontos para gerar uma matriz A , qual será computada a decomposição QR e, dependendo das entradas da matriz R e dos valores dos extremos do raio intervalar, calculamos um limitante inferior e superior para um valor y_2 , ao qual determinará as duas últimas coordenadas do novo ponto da sequência.

Já na abordagem através da AGC, apenas calculamos a interseção entre as esferas e a coroa esférica, através do produto exterior, sem a necessidade de especificar os raios ou nos atentarmos com parâmetros específicos, obtemos o conjunto projeção e temos o novo ponto em função do raio intervalar que já conhecemos, possibilitando que, através da AGC, nunca seja perdido o caráter geométrico do problema.

Como visto no último exemplo, a dimensão da imersão da i -ésima submatriz principal e os elementos acima da diagonal principal da coluna $i + 1$ de D determinam diretamente se é possível obter o $(i + 1)$ -ésimo ponto da sequência por meio da interseção de esferas com, no máximo, uma coroa esférica. O Teorema 4.3.1 generaliza essa ideia.

Teorema 4.3.1. Dada uma MDEI D , de ordem n , com $n \geq 2$ e sejam $\bar{D}$ a submatriz principal de D de ordem $n - 1$, com $\dim(\bar{D}) = K$, e $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ uma realização para $\bar{D}$ em $\mathbb{R}^K$. Se, na n -ésima coluna de D , a quantidade de distâncias não intervalares for maior ou igual a K , então é possível, utilizando a interseção de esferas com, no máximo, uma coroa esférica, obter x_n que, unido a sequência $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$, realiza a matriz D .

Demonstração. Suponha D uma MDEI, de ordem n , com $n \geq 2$ e $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ uma realização para $\bar{D}$ em $\mathbb{R}^K$.

Primeiramente, vamos considerar o caso em que, na coluna n de D , existam mais de K distâncias não intervalares. Fixando $\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq I_n$ como sendo o conjunto de índices onde $D(i_j, n)$, $j = 1, \dots, p$ seja uma distância não intervalar. Temos que, $p > K$, com isso, $J = \{i_1, \dots, i_{K+1}\} \subseteq \{i_1, \dots, i_p\}$.

Basta tomarmos os pontos $\{x_{i_j}\}_{j \in J} \subseteq \{x_i\}_{i=1}^n$ como sendo os centros e $D(i_j, n)$, $j \in J$ como os quadrados dos raios, respectivamente, de modo que, como J contém $K + 1$ índices distintos. Todos esses pares de centros e raios representam esferas de $\mathbb{R}^{K+1}$, com centros em $\mathbb{R}^K$. Logo, sendo D uma MDE, a interseção entre elas resulta em um ponto $x_n \in \mathbb{R}^K$, caso $\dim(D) = K$ ou um par de pontos $x_n^+, x_n^- \in \mathbb{R}^{K+1}$, caso $\dim(D) = K + 1$.

De todo modo, considerando $x_n = x_n^+$ no segundo caso, temos que a sequência $\{x_i\}_{i=1}^n$ realiza D .

Agora, considerando o caso em que, na coluna n de D , existam exatamente K distâncias não intervalares, digamos $D(i_j, n)$, $j = 1, \dots, K$, basta tomarmos as esferas como sendo de centros em $\{x_{i_j}\}_{j=1}^K \subseteq \{x_i\}_{i=1}^n$ e raios $D(i_j, n)$, $j = 1, \dots, K$, respectivamente.

Tomando qualquer ponto $x_r \in \{x_i\}_{i=1}^n \setminus \{x_{i_j}\}_{j=1}^K$, sendo $D(r, n) = [d_r, \bar{d}_r]$ e considerando a coroa esférica de centro em x_r com menor raio $\sqrt{d_r}$ e maior raio $\sqrt{\bar{d}_r}$. Desse modo, por D ser uma MDE e pelo Teorema 4.1.1, obtemos um ponto, uma união de arcos (um arco cortando o hiper-plano $\mathbb{R}^K$ ou um par de arcos) ou uma circunferência.

Por fim, tomando qualquer ponto x_n em um desses conjuntos, teremos que a sequência $\{x_i\}_{i=1}^n$ realiza a matriz D . $\square$

4.3.2 Caso Contendo mais de uma Coroa Esférica

Observe que, se na quinta coluna da matriz D do Exemplo 4.3.5 tivéssemos mais uma distância intervalar, o problema não poderia ser resolvido pela Álgebra Linear com o que já temos. Dessa forma, deveríamos buscar por uma generalização ou até mesmo um abordagem totalmente diferente da apresentada em [Lavor et al., 2022]. Contudo, se usarmos a abordagem através da Álgebra Geométrica Conforme, basta trabalharmos com duas esferas com raios desconhecidos e obteríamos uma interseção da mesma forma.

Exemplo 4.3.6. Considere os centros $x_1 = 0$, $x_2 = 3e_1$ e $x_3 = e_1 + 2e_2$ com raios, $r_1 = \sqrt{8}$, $r_2 = d_1 \in [1, 3]$, e $r_3 = d_2 \in [1, 2]$.

Para obter a interseção entre a esfera centrada em x_1 e as coroas esféricas centradas em x_2 e x_3 , basta calcularmos

$$P = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3,$$

onde $S_i = x_i + \frac{1}{2}(x_i^2 - r_i^2)e_\infty + e_0$. Assim, obter o conjunto projeção, dado por

$$PA = \{\alpha_1(d_1)e_1 + \alpha_2(d_1, d_2)e_2 + \alpha_3(d_1, d_2)e_3, d_1 \in [1, 3], d_2 \in [1, 2]\},$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha_1(d_1) &= \frac{17}{6} - \frac{1}{6}d_1^2, \\ \alpha_2(d_1, d_2) &= \frac{11}{6} + \frac{1}{12}d_1^2 - \frac{1}{4}d_2^2, \\ \alpha_3(d_1, d_2) &= \frac{1}{6}\sqrt{-122 + 23d_1^2 - \frac{5}{4}d_1^4 + 33d_2^2 + \frac{3}{2}d_1^2d_2^2 - \frac{9}{4}d_2^4}.\end{aligned}$$

Sendo $d_1 = \sqrt{5}$ e $d_2 = 1$, obtemos exatamente o ponto $x_5 = 2e_1 + 2e_2$.

Em geral, o método que propomos para realizar a interseção de $n - p$ esferas de $\mathbb{R}^n$ com p coroas esféricas pode ser obtido diretamente pelo produto já utilizado em todos os casos anteriores, destacando mais uma vez a simplicidade da generalização quando se trabalha com a Álgebra Geométrica.

Sejam $\{x_1, \dots, x_{n-p}\}$, $p \geq 0$, os centros das esferas de $\mathbb{R}^n$ com raios $r_1, \dots, r_{n-p}$, respectivamente e sejam $y_1, \dots, y_p$, os centros das coroas esféricas de $\mathbb{R}^n$ com raios intervalares $d_i \in [\underline{d}_i, \bar{d}_i]$, $i = 1, \dots, p$, respectivamente. A representação conforme da interseção entre $n - p$ esferas e as p coroas esféricas pode ser obtida por

$$P = S_1 \wedge \dots \wedge S_{n-p} \wedge S_{n-p+1} \wedge \dots \wedge S_n.$$

onde $S_i = x_i - \frac{1}{2}(x_i^2 - r_i^2)e_\infty + e_0$, para $i = 1, \dots, n - p$ e $S_i = x_i - \frac{1}{2}(x_i^2 - d_i^2)e_\infty + e_0$

Desse modo, o conjunto P_A dos pontos na interseção em $\mathbb{R}^n$ podem ser obtidos pela projeção de P , isto é,

$$P_A = \{x \in \mathbb{R}^n, x = \mathcal{P}(P)\},$$

onde

$$\mathcal{P}(P) = \alpha_1(d_1, \dots, d_p)e_1 + \dots + \alpha_n(d_1, \dots, d_p)e_n, d_i \in [\underline{d}_i, \bar{d}_i].$$

Note que quanto maior for a quantidade de coroas esféricas, maior será a quantidade de variáveis que cada função α_i e, desse modo, a complexidade do problema aumentará significativamente.

Como descrito acima, se $p = 1$, temos apenas uma coroa esférica na interseção e, assim, caímos no caso apresentado anteriormente e ainda, se $p = 0$, caímos no caso apresentado no terceiro capítulo. Dessa forma, todos os casos podem ser resumidos apenas nesse último, ao contrário da abordagem pela Álgebra Linear, em que cada caso deve ser trabalhado de forma totalmente diferente.

4.4 Método para o Caso com uma Distância Intervalar

Nessa seção, vamos descrever de uma maneira mais formal, como ficaria a abordagem, para a realização de uma MDEI que satisfaça as condições do [Teorema 4.3.1](#).

Assim como o método descrito nos capítulos anteriores para resolver o problema de reconhecimento MDE detecta se a matriz dada D é, de fato, uma MDE, ao longo do processo de obter uma realização para D , o método para distâncias intervalares que iremos descrever aqui, detecta, ao longo de um processo, se é possível obter uma realização por meio da interseção contendo no máximo uma coroa esférica.

4.4.1 Inicialização

O método é iniciado tomando como parâmetro de entrada apenas uma matriz D de ordem n , com $n \geq 2$, oca, simétrica, com entradas não negativas, podendo conter intervalos positivos nas entradas de D .

Supomos que D é uma MDE com dimensão da imersão $K = 1$ e fixamos o primeiro ponto x_1 sendo a origem de $\mathbb{R}^1$, isto é $x_1 = 0$ que realiza a submatriz principal de D de ordem 1. Note que, se $D(1, 2)$ for um intervalo $[\underline{d}_1, \bar{d}_1]$, tomando qualquer ponto x_2 definido como

$$x_2 = \alpha e_1, \alpha \in [\sqrt{\underline{d}_1}, \sqrt{\bar{d}_1}],$$

realiza a submatriz principal de ordem 2 de D . Porém, nada nos garante que esse ponto pertence a uma sequência que realiza D , portanto, precisamos discretizar o intervalo $[\underline{d}_1, \bar{d}_1]$, para que possamos percorrer a maior quantidade de pontos possíveis nesse intervalo, caso não encontremos uma realização para o primeiro α tomado.

Tomando $p > 1$ como sendo a quantidade de pontos que queremos no intervalo $[\underline{d}_1, \bar{d}_1]$ discretizado, basta definirmos a precisão h como sendo

$$h = \frac{\bar{d}_1 - \underline{d}_1}{p - 1}.$$

Com isso, definimos $\alpha_i = \underline{d}_1 + h(i - 1)$, $i = 1, \dots, p$. Portanto, o conjunto dos pontos x_2 que realizam a submatriz principal de ordem 2 de D pode ser definido a partir do intervalo $[\underline{d}_1, \bar{d}_1]$ discretizado, com precisão h , por

$$\mathcal{T}_0 = \{\sqrt{\alpha_i}e_1, i = 1, \dots, p\}.$$

Um processo de discretização parecido será feito na etapa de discretização do arco. A diferença está no fato de que, aqui o intervalo discretizado nos dá o ponto de forma direta, lá queremos obter um arco discretizado, então usamos o intervalo discretizado para obter os pontos desse arco.

A sequência inicial x , contendo os dois primeiros pontos é definida como, $x = \{0, \sqrt{\alpha_i}e_1\} \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{G}_1$. O segundo ponto da sequência poderá ser atualizado futuramente, caso não obtenhamos uma sequência que realiza D ao qual $x_2 = \sqrt{\alpha_i}e_1$ é o segundo ponto.

Caso $D(1, 2)$ seja uma distância não intervalar, definimos $x = \{0, \sqrt{D(1, 2)}e_1\}$ e continuamos com o método. Nesse caso, o segundo ponto não será atualizado, uma vez que, sendo D uma MDE, dada qualquer sequência $\{x_i\}_{i=1}^n$ que realiza D , existirá uma isometria S onde $S(x_2) = \sqrt{D(1, 2)}e_1$. Isto é, a partir dos pontos $x = \{0, \sqrt{D(1, 2)}e_1\}$, sendo D uma MDE, conseguimos encontrar uma realização para D .

Em seguida entramos no processo iterativo do método, onde será realizada a interseção das esferas com a coroa esférica para gerar os novos possíveis pontos da sequência que realiza D . Esse processo pode ser dividido em três etapas: a interseção entre as esferas e a coroa esférica, a discretização do intervalo e a atualização da sequência.

4.4.2 Interseção

A interseção entre as esferas e a coroa esférica pode resultar em quatro casos diferentes. Dentre esses, dois resultam em arcos de circunferência, em um caso, o resultado é um único ponto e, no último caso, a interseção é vazia. No geral, a interseção das esferas resulta em uma circunferência C a qual será calculada a interseção com a coroa esférica para obter um dos quatro casos mencionados.

Suponhamos que estamos na i -ésima iteração, isto é, temos gerados os $i - 1$ primeiros pontos que realizam a submatriz principal de D com ordem $i - 1$, com dimensão da imersão K . Partimos então para a etapa de interseção, obtendo um dos seguintes casos:

4.4.2.1 Um Ponto

O resultado da interseção entre a circunferência C e a coroa esférica é um único ponto quando apenas a esfera de maior raio, que compõe a coroa esférica, intercepta a circunferência em um único ponto. Neste caso, basta adicionar esse à sequência e seguir com o método, como no caso com distâncias exatas.

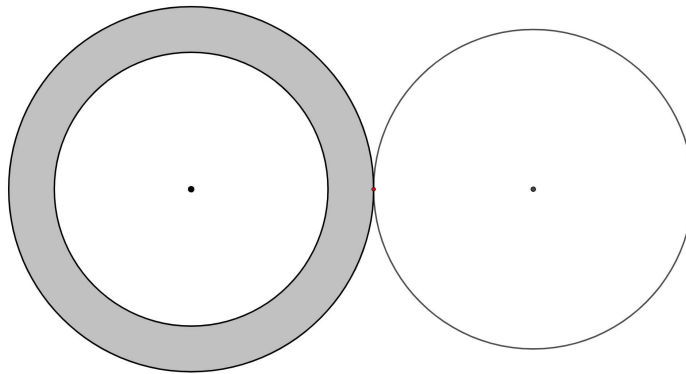


Figura 4.5 – Interseção entre a esfera e a coroa esférica resultando em um único ponto.

Na [Figura 4.5](#), vemos o primeiro caso no plano. Note que, como C é sempre uma circunferência, independente da dimensão do problema, a visualização no plano representa de forma satisfatória qualquer que seja a dimensão do espaço, uma vez que poderíamos sempre tomar como o plano que contém a C como nosso plano de visualização.

Note que, nesse caso, como o resultado da interseção é um único ponto x_i , este está no mesmo espaço de dimensão K que contém os $i - 1$ pontos anteriores, logo, não precisamos aumentar a dimensão da imersão para a próxima iteração.

4.4.2.2 Par de Arcos

O caso em que a interseção é um par de arcos acontece quando ambas as esferas de menor e maior raio que compõem a coroa esférica, interceptam a circunferência C em um par de pontos. Nesse caso, ambos os arcos estão num espaço de dimensão uma unidade maior do que K , logo,

será necessário atualizar o valor de K para a próxima iteração e, pela simetria do problema, podemos escolher apenas um desses intervalos para a etapa de discretização.

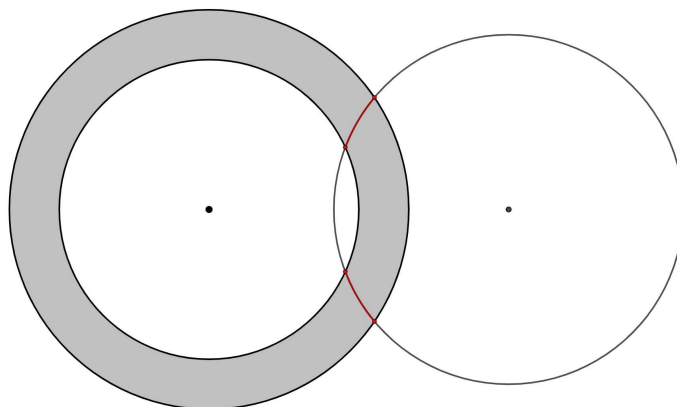


Figura 4.6 – Interseção entre a esfera e a coroa esférica resultando em um par de arcos

Na Figura 4.6, é possível notar os pares de pontos onde as esferas que compõe a coroa esférica de centro em x_2 interceptam a circunferência de centro em x_1 . Os pontos x_0 e x_f são os limites desse arco, que são obtidos substituindo o limite inferior e superior do intervalo de d na função que gera os pontos do arco definida em (4.19).

4.4.2.3 Um Arco

Esse caso ocorre em três ocasiões: quando a esfera de maior raio, que compõe a coroa esférica, intercepta a circunferência C em um par de pontos e, a de menor raio, não intercepta em nenhum ponto; Quando a de maior raio intercepta C em um par de pontos e a de menor raio em um único ponto; Quando nenhuma das esferas que compõem a coroa esférica intercepta a circunferência, porém a circunferência está contida na coroa esférica, tornando C o resultado da interseção.

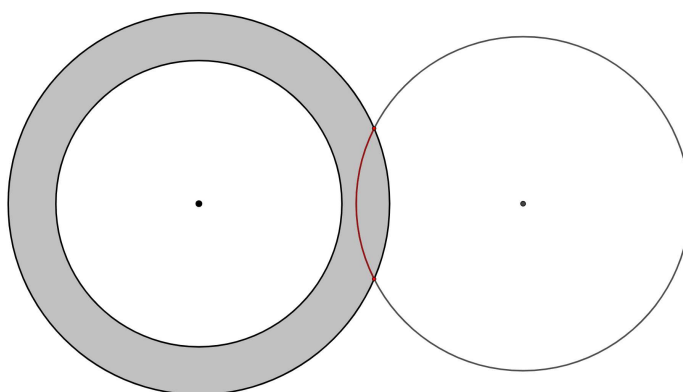


Figura 4.7 – Interseção entre a esfera e a coroa esférica resultando em um único arco.

Em qualquer uma das três ocasiões, assim como no segundo caso, onde a interseção é um par de arcos, por conta da simetria do problema, podemos considerar apenas a metade do arco obtido, sempre considerando os pontos de interseção com o hiper-plano de dimensão K contidos no arco.

4.4.2.4 Conjunto Vazio

Esse caso ocorre quando a circunferência C está totalmente dentro da esfera que compõe a coroa esférica de menor raio ou totalmente fora da de maior raio. Nesse caso, vamos para a etapa de atualização do ponto.

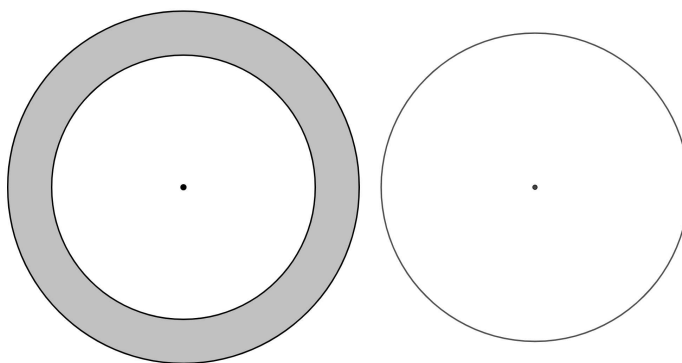


Figura 4.8 – Interseção entre a esfera e a coroa esférica resultando no conjunto vazio..

4.4.3 Discretização do Arco

Se obtido um arco na etapa de interseção, este precisa ser discretizado. Para isso, primeiramente, precisamos definir uma precisão h para essa discretização, que definirá o espaçamento entre os pontos que serão tomados.

O valor de h é definido com base na quantidade de pontos em que queremos dividir o arco. Essa divisão é feita a partir do intervalo de d definido em (4.19), tomando valores de d entre os extremos $\underline{d}_i$ e $\bar{d}_i$. Desse modo, para cada valor de d , obtemos um ponto no arco, que será armazenado num conjunto $\mathcal{T}_i$ que representa o arco discretizado.

Sendo p a quantidade de pontos em $\mathcal{T}_i$, definimos h como sendo

$$h = \frac{\bar{d}_i - \underline{d}_i}{p - 1}.$$

Desse modo, o j -ésimo elemento de $\mathcal{T}_i$ é definido a partir do valor de $t_j = \underline{d}_i + hj$, onde $j = 1, \dots, p$. Note que o primeiro ponto de $\mathcal{T}_i$ é definido por $\underline{d}_i$ e o último valor de $\mathcal{T}_i$ é definido por $\bar{d}_i$, com isso, garantimos que os "extremos" do arco sempre estarão contidos em $\mathcal{T}_i$.

É fácil observar que quanto maior o valor de p , tornando menor o valor de h , maior será a precisão do método e, conseqüentemente, maior será a chance de, sendo D uma MDE, encontrarmos uma realização para D . Contudo, o custo do método também pode aumentar significativamente.

Conhecer o tipo de problema que estamos trabalhando pode nos ajudar a definir um valor para h que não seja tão pequeno a ponto de tornar o método muito custoso ou tão grande a ponto de acarretar numa perda significativa na precisão do método.

Observe que, da forma como é calculado o arco através da Álgebra Geométrica Conforme, a coordenada $K + 1$ dos do arco, sempre será resultado de uma função do tipo

$$\alpha_{K+1} = \sqrt{p(d_i)}, d_i \in [\underline{d}_i, \bar{d}_i],$$

onde $p(d_i)$ é um polinômio. Desse modo, se existir $d_0 \in [\underline{d}_i, \bar{d}_i]$ tal que $p(d_0) = 0$, este será adicionado na primeira entrada do conjunto $\mathcal{T}_i$.

4.4.4 Atualização da Sequência

Após a etapa de discretização do arco, entramos na etapa de atualização do ponto da sequência. Nessa etapa, suponhamos que estamos na i -ésima iteração, com r arcos previamente discretizados nos conjuntos $\mathcal{T}_{i_1}, \mathcal{T}_{i_2}, \dots, \mathcal{T}_{i_r}$, sendo $\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq I_n$, com $i_1 < i_2 < \dots < i_r$.

Dizemos que z_{j_q} é o ponto ativo do intervalo $\mathcal{T}_{i_j}$, se z_{j_q} pertence a atual sequência $x = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ que realiza a submatriz principal de D com ordem i . Cada conjunto $\mathcal{T}_{i_j} = \{z_{j_0}, z_{j_1}, \dots, z_{j_p}\}$, $j = 1, \dots, p - 1$, é acompanhado de um valor t_j que representa o ponto z_{j_t} , sendo o ponto ativo do intervalo $\mathcal{T}_{i_j}$.

Em $\mathcal{T}_{i_r}$, escolhemos, como ponto de partida, o ponto z_{r_0} , que será o $(i-1)$ -ésimo centro da esfera, ou coroa esférica, para a iteração atual, a qual queremos extrair o i -ésimo ponto através da interseção das esferas, se existir, com a coroa esférica. Caso a interseção seja vazia, atualizamos o valor de z_{r_0} para z_{r_1} , esse processo se repete até que obtenhamos uma interseção não vazia ou, até z_{r_p} , todas as interseções sejam vazias.

Se, para um ponto z_{r_q} , obtivermos uma interseção não vazia, armazenamos o valor $q_r = q$ atrelado ao conjunto $\mathcal{T}_{i_r}$ e seguimos para a próxima iteração, para obter o próximo ponto da sequência. Neste caso, se z_{r_q} estiver num espaço de dimensão uma unidade maior que os pontos da sequência atual, o valor de K deve ser aumentado em uma unidade.

No caso em que todos os pontos de $\mathcal{T}_{i_r}$ são percorridos sem que se retorne uma interseção não vazia, então $\mathcal{T}_{i_r}$ é tido como infactível. Assim eliminamos o conjunto $\mathcal{T}_{i_r}$ e voltamos para $\mathcal{T}_{i_{r-1}}$. Note que ao conjunto $\mathcal{T}_{i_{r-1}}$ está atrelado um valor $0 \leq q_{r-1} \leq p$, que representa o ponto ativo de $\mathcal{T}_{i_{r-1}}$, esse será o ponto que atualizaremos agora. Lembrando que, como voltamos para um conjunto anterior, agora temos um ponto a menos na sequência atual e, caso K foi aumentado para definir x_i , devemos reduzi-lo para o valor anterior. Repetimos isso até que obtenhamos uma interseção não vazia ou esse conjunto seja eliminado e precisemos voltar para o conjunto anterior.

Esse processo se repete, gerando novos conjuntos de arcos discretizados e eliminando os conjuntos infactíveis até que obtenhamos uma realização para D ou não sobre $\mathcal{T}_{i_j}$ factível.

Se não sobrar $\mathcal{T}_{i_j}$ factível, concluímos que D não é uma MDE ou a precisão de h não foi suficiente para encontrar uma realização para D .

Observações:

1. Como estamos trabalhando com distâncias intervalares, podemos ter infinitas realizações, não necessariamente isométricas, para D . O caso mais simples de se notar isso é, sendo D de ordem 2, com $D(1, 2)$ intervalar. Neste caso, tomando $x_1 = 0$, qualquer ponto x_2 que tomarmos, com $d(x_1, x_2)^2 \in D(1, 2)$, realizará a matriz D .
2. No caso em que, na etapa de interseção, obtivemos um único arco, na etapa de discretização, como foi definida, garantimos que o ponto que mantém a dimensão da imersão. Isto é, está no mesmo espaço dos pontos anteriores, sempre está contido no conjunto que representa o arco discretizado e, da maneira que cada $\mathcal{T}_i$ foi definido, este será o primeiro elemento de $\mathcal{T}_i$. Dessa forma, o método como descrito acima, prioriza a realização de D com menor

dimensão possível. Isso nos garante que o K obtido no final do método, quando finito, é, de fato a dimensão da imersão de D .

3. Durante o processo de tentar encontrar uma realização para D , discretizamos conjuntos contínuos, isto é, por menor que seja o valor de h , uma quantidade infinita de pontos é perdida. Logo, se não encontrarmos uma realização para D , nem sempre significa que D não seja uma MDE, pode acontecer de "pularmos" um ponto num determinado arco que, a partir dele, encontraríamos uma realização para D .
4. O método como descrito acima pode ser generalizado para o caso com mais distâncias intervalares, porém, cada conjunto $\mathcal{T}_i$ será obtido pela discretização de quantos intervalos houverem.

5 Considerações Finais

5.1 Contribuições da Tese

A principal contribuição deste trabalho foi apresentar uma alternativa para a resolução do problema de reconhecimento MDE, tanto para o caso contendo apenas distâncias exatas quanto para o caso compreendendo distâncias intervalares. Com base nessa nova abordagem e inspirados num algoritmo clássico já existente, para o caso com distâncias exatas, propusemos e implementamos um novo algoritmo, utilizando mecanismos da Álgebra Geométrica Conforme. A principal característica dessa abordagem é a simplicidade com a qual pôde ser descrita e trabalhada e que, diferentemente da abordagem clássica, onde a interseção das esferas é "convertida" numa resolução de sistemas lineares, permite que a ideia de interseções se mantenha durante todo o processo. Devido a isso, conseguimos estender essa abordagem para o caso intervalar, realizando a interseção de esferas com uma ou mais coroas esféricas.

Primeiramente, apresentamos o problema com base em uma abordagem clássica. Em seguida, após uma introdução à Álgebra Geométrica e o modelo conforme, modelamos o problema por intermédio da AGC. Ao longo do processo, alguns resultados teóricos relativos a essa abordagem surgiram e foram demonstrados ao longo dos capítulos 3 e 4, onde apresentamos o método de resolução implementado.

Os experimentos computacionais mostram que para o caso com distâncias exatas, a abordagem clássica, por ser já bem consolidada e utilizar resolução de sistemas lineares, possui uma vantagem considerável em relação ao desempenho do método. Apesar disso, o método proposto serviu de base para o caso intervalar, que foi trabalhado no capítulo seguinte. Nesse caso, as vantagens foram acentuadas de maneira considerável, uma vez que as interseções contendo coroas esféricas, através da Álgebra Linear, dependem de uma abordagem totalmente diferente do caso exato, enquanto a abordagem através da AGC permanece quase que inalterada em seu núcleo.

O terceiro capítulo desta tese, focado no caso com todas as distâncias exatas, originou um artigo, a ser publicado na *International Conference of Advanced Computational Applications of Geometric Algebra (ICAGCA)* [Riter et al., 2022], uma conferência internacional específica da

área de Álgebra Geométrica computacional.

Por fim, também foi proposta uma generalização para a quantidade de coroas esféricas existentes nas interseções, possível graças à capacidade que a Álgebra Geométrica tem de simplificar a descrição algébrica de objetos geométricos.

5.2 Conclusão e Trabalhos Futuros

Como era esperado, em razão da representação algébrica dos objetos que envolvem o problema de reconhecimento MDE, na Álgebra Geométrica Conforme, o método implementado se mostrou promissor. Evidentemente, o método precisa ser refinado, visto que, para tal, é necessário um maior aprofundamento nos aspectos computacionais da AGC.

Um estudo focado nas matrizes com entradas intervalares pode possibilitar um refinamento do teorema apresentado no Capítulo 4. Até onde sabemos, não existem pesquisas aprofundadas que caracterizem de forma prévia quando o problema de reconhecimento MDE pode ser resolvido para uma matriz, com entradas intervalares, através da interseção contendo no máximo uma coroa esférica.

Um outro caminho que pode ser tomado é o aprofundamento no caso em que existem mais de uma coroa esférica em cada interseção, visando propriedades geométricas que possam ser aproveitadas através da Álgebra Geométrica conforme.

Outra possibilidade é o estudo de propriedades da Álgebra Geométrica que otimizem o cálculo do produto exterior entre os representantes das esferas ou coroas esféricas.

Referências

- [Alencar et al., 2015] Alencar, J., Bonates, T., Lavor, C., and Liberti, L. (2015). An algorithm for realizing euclidean distance matrices. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 50:397–402.
- [Alencar et al., 2019] Alencar, J., Lavor, C., and Liberti, L. (2019). Realizing euclidean distance matrices by sphere intersection. *Discrete Applied Mathematics*, 256:5–10.
- [Bayro-Corrochano et al., 2006] Bayro-Corrochano, E., Reyes-Lozano, L., and Zamora-Esquivel, J. (2006). Conformal geometric algebra for robotic vision. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24(1):55–81.
- [Billinge et al., 2016] Billinge, S. J., Duxbury, P. M., Gonçalves, D. S., Lavor, C., and Mucherino, A. (2016). Assigned and unassigned distance geometry: applications to biological molecules and nanostructures. *4OR*, 14(4):337–376.
- [Cox and Cox, 2008] Cox, M. A. and Cox, T. F. (2008). Multidimensional scaling. In *Handbook of data visualization*, pages 315–347. Springer.
- [Dattorro, 2010] Dattorro, J. (2010). *Convex optimization & Euclidean distance geometry*. Lulu.com.
- [Dokmanic et al., 2015] Dokmanic, I., Parhizkar, R., Ranieri, J., and Vetterli, M. (2015). Euclidean distance matrices: essential theory, algorithms, and applications. *IEEE Signal Processing Magazine*, 32(6):12–30.
- [Haantjes et al., 1954] Haantjes, J. et al. (1954). Lm blumenthal, theory and applications of distance geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 60(3):272–274.
- [Havel and Wüthrich, 1995] Havel, T. F. and Wüthrich, K. (1995). An evaluation of the combined use of nuclear magnetic resonance and distance geometry for the determination of protein conformations in solution. In *Nmr In Structural Biology: A Collection of Papers by Kurt Wüthrich*, pages 305–318. World Scientific.
- [Hestenes, 2003] Hestenes, D. (2003). Spacetime physics with geometric algebra. *American Journal of Physics*, 71(7):691–714.

- [Lavor et al., 2022] Lavor, C., Alves, R., and Fernandes, L. A. (2022). Linear and geometric algebra approaches for sphere and spherical shell intersections in $\mathbb{R}^n$. *Expert Systems with Applications*, 187:115993.
- [Lavor and Liberti, 2014] Lavor, C. and Liberti, L. (2014). Um convite á geometria de distâncias. *Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, São Carlos, SP*, 71:16.
- [Liberti et al., 2014] Liberti, L., Lavor, C., Maculan, N., and Mucherino, A. (2014). Euclidean distance geometry and applications. *SIAM review*, 56(1):3–69.
- [Maioli et al., 2017] Maioli, D. S., Lavor, C., and Gonçalves, D. S. (2017). A note on computing the intersection of spheres in. *The ANZIAM Journal*, 59(2):271–279.
- [Menger, 1928] Menger, K. (1928). Untersuchungen über allgemeine metrik. *Mathematische Annalen*, 100(1):75–163.
- [Orozco-Aguirre et al., 2005] Orozco-Aguirre, R., Rivera-Rovelo, J., and Bayro-Corrochano, E. (2005). Medical image segmentation and the use of geometric algebras in medical applications. In *Iberoamerican Congress on Pattern Recognition*, pages 729–740. Springer.
- [Perwass et al., 2009] Perwass, C., Edelsbrunner, H., Kobbelt, L., and Polthier, K. (2009). *Geometric algebra with applications in engineering*, volume 20. Springer.
- [Perwass, 2000] Perwass, C. B. U. (2000). *Applications of geometric algebra in computer vision*. PhD thesis, University of Cambridge.
- [Riter et al., 2022] Riter, V., Alves, R., and Lavor, C. (2022). Geometric algebra and distance matrices. *Proceedings of the International Conference of Advanced Computational Applications of Geometric Algebra*.
- [Schoenberg, 1935] Schoenberg, I. J. (1935). Remarks to maurice frechet’s article“sur la definition axiomatique d’une classe d’espace distances vectoriellement applicable sur l’espace de hilbert. *Annals of Mathematics*, pages 724–732.
- [Sippl and Scheraga, 1985] Sippl, M. J. and Scheraga, H. A. (1985). Solution of the embedding problem and decomposition of symmetric matrices. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 82(8):2197–2201.

- [Souza et al., 2013] Souza, M., Lavor, C., Muritiba, A., and Maculan, N. (2013). Solving the molecular distance geometry problem with inaccurate distance data. *BMC bioinformatics*, 14(9):1–6.
- [Tarazaga et al., 2007] Tarazaga, P., Sterba-Boatwright, B., and Wijewardena, K. (2007). Euclidean distance matrices: special subsets, systems of coordinates and multibalanced matrices. *Computational & Applied Mathematics*, 26(3):415–438.
- [Torgerson, 1952] Torgerson, W. S. (1952). Multidimensional scaling: I. theory and method. *Psychometrika*, 17(4):401–419.
- [Wareham et al., 2004] Wareham, R., Cameron, J., and Lasenby, J. (2004). Applications of conformal geometric algebra in computer vision and graphics. In *Computer algebra and geometric algebra with applications*, pages 329–349. Springer.