



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

VICTOR ANTONIO BLANCO VILORIA

**EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE PARA
SOLUÇÕES DE PROBLEMAS CRÍTICOS DE
TIPO KIRCHHOFF**

Campinas

2019

Victor Antonio Blanco Vilorio

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE PARA SOLUÇÕES DE PROBLEMAS CRÍTICOS DE TIPO KIRCHHOFF

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alessio Fiscella

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Victor Antonio Blanco Vilorio e orientada pelo Prof. Dr. Alessio Fiscella.

Campinas

2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

B598e Blanco Viloria, Victor Antonio, 1994-
Existência e multiplicidade para soluções de problemas críticos de tipo Kirchhoff / Victor Antonio Blanco Viloria. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Alessio Fiscella.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Soluções fracas (Matemática). 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Sobolev, Expoente crítico de. I. Fiscella, Alessio, 1985-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Existence and multiplicity for solution of critical problems of the Kirchhoff type

Palavras-chave em inglês:

Weak solution (Mathematics)

Elliptic differential equations

Critical Sobolev exponent

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Alessio Fiscella [Orientador]

Lucas Catão de Freitas Ferreira

Gaetano Siciliano

Data de defesa: 09-08-2019

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-4941-2383>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/9059369602813340>

**Dissertação de Mestrado defendida em 09 de agosto de 2019 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). ALESSIO FISCELLA

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). GAETANO SICILIANO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

A Deus pelo amor incondicional. A minha família pelo amor e apoio na luta.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus porque merece toda a honra, toda a glória e o poder; além disso, me sinto grato com Ele porque tem me permitido estar aqui no Brasil para obter minha formação como mestre em matemáticas.

Agradeço a minha família por todo apoio, seus ânimos e suas orações, em especial aos meus pais Marfa Vilorio e Argido Blanco, a meu irmão José Blanco, a meus avós Estebana Cordero e Víctor Blanco, a Angie Murillo por viverem nos bons e maus momentos a meu lado.

Agradeço ao Professor Dr. Alessio Fiscella pela orientação neste trabalho, pelo conhecimento compartilhado, sua paciência e sua compreensão.

Agradeço a todos os professores que tive na vida, em especial ao Professor Carlos Alberto Banquet na universidade de Córdoba-Colômbia, que fez crescer minha paixão pela matemática e me inspirou como professor.

Agradeço a todos meus amigos e pessoas boas que Deus adicionou no meu caminho, como Alvaro. Vicente, Karen e Rocisela.

Agradeço aos professores membros da Banca Examinadora por terem aceitado o convite para avaliar este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O presente trabalho foi realizado com apoio de FAEPEX/FUNCAMP - Código de Financiamento 2028/18.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência e multiplicidade de soluções fracas para o seguinte problema elíptico de tipo Kirchhoff envolvendo o p -Laplaciano

$$-M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx\right)\Delta_p u = \lambda f(x, u) + |u|^{p^*-2}u \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0, \quad \text{em } \partial\Omega$$

onde Ω é um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^N$, com dimensão $N > p > 1$, $\lambda > 0$, f é um termo subcrítico e M modela o coeficiente de Kirchhoff. Enfrentamos três casos particulares, dependendo do comportamento de f . Por isto, combinamos diferentes métodos variacionais com apropriados argumentos topológicos. Em todos os casos, precisamos do princípio de concentração e compacidade de Pierre–Louis Lions para superar a perda de compacidade na imersão de Sobolev gerada pela presença do termo com expoente crítico $|u|^{p^*-2}u$. A peculiaridade dos nossos resultados é que conseguimos cobrir o caso mais delicado quando $M(0) = 0$, ou seja com M degenerada.

Abstract

In this work, we study the existence and multiplicity of weak solutions for the following Kirchhoff type elliptic problem involving p -Laplacian operator

$$-M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx\right)\Delta_p u = \lambda f(x, u) + |u|^{p^*-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega$$

where Ω is a bounded and smooth domain in $\mathbb{R}^N$, with dimension $N > p > 1$, $\lambda > 0$, f is a subcritical term and M models the Kirchhoff coefficient. We face three particular cases, depending on the behavior of f . For this, we combine different variational methods with appropriate topological arguments. In all cases we need the principle of concentration and compactness of Pierre-Louis Lions to overcome the lack of compactness in the Sobolev immersion generated by the presence of the critical term $|u|^{p^*-2}u$. The peculiarity of our results is that we are able to cover the most delicate case when $M(0) = 0$, that is when M is *degenerate*.

Sumário

	INTRODUÇÃO	10
1	PRELIMINARES	13
1.1	Propriedades das funções M e f do Teorema 2.0.1	13
1.2	Métodos variacionais e o princípio de concentração e compacidade	16
1.3	Imersões de Sobolev e convergências	17
1.4	Índice Cohomológico	20
1.5	Genus de Krasnoselskii	26
2	CASO SOBRELINAR	29
3	CASO LINEAR	39
4	CASO SUBLINAR	55
	REFERÊNCIAS	62

Introdução

O propósito deste trabalho de mestrado é investigar a existência e multiplicidade de soluções fracas em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para o seguinte problema elíptico crítico não-local de tipo Kirchhoff

$$\begin{cases} -M(\|u\|^p)\Delta_p u = \lambda f(x, u) + |u|^{p^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave, com dimensão $N > p > 1$, λ um parâmetro positivo, $\|u\|^p = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$, $p^* = Np/(N-p)$, enquanto $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ são duas funções contínuas satisfazendo algumas propriedades ou condições que daremos em seguida.

O problema (1) é dito não-local porque para estudar a primeira equação em (1) para $x \in \Omega$, não é suficiente conhecer só o valor de $u(x)$. Devemos saber o comportamento de u para qualquer $x \in \Omega$, pois em (1) temos uma integral definido em todo Ω .

Um protótipo típico de M é dado por

$$M(t) = a + b\theta t^{\theta-1}, \quad \text{onde } a, b \geq 0, \quad a + b > 0, \quad \theta \geq 1. \quad (2)$$

Na literatura distinguimos duas situações. Se $M(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$, um problema de Kirchhoff como (1) é chamado *não degenerado*, e isto acontece no caso modelo (2) quando $a > 0$. Se $M(0) = 0$ mas $M(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, um problema de Kirchhoff como (1) é chamado *degenerado*, e isto acontece no caso modelo (2) quando $a = 0$.

Nós estamos interessados em estudar o problema (1) no caso degenerado, sempre assumindo que $M(0) = 0$. Este fato gera algumas dificuldades matemáticas, não permitindo um controle uniforme positivo de baixo para M . Por isto, precisamos estudar diferentes situações, dependendo do comportamento de M perto do zero. Enquanto a presença do termo com expoente crítico p^* ocasiona uma perda de compacidade na imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. Todo torna (1) um problema interessante. Além disso, nós temos a seguinte motivação física. Quando $p = 2$, o operador $M(\|u\|^2)\Delta u$ está presente na equação de Kirchhoff, que surge em vibrações não lineares, a saber

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\|u\|^2)\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x). \end{cases} \quad (3)$$

Tal problema hiperbólico é uma versão geral da equação de Kirchhoff

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

apresentada em [16], com $M(t) = a + bt$ e $a = P_0/h$, $b = E/2L$. Esta equação (4) estende a versão clássica da equação de onda estudada por Jean le Rond d'Alembert no ano 1746, a qual considera os efeitos da mudança no comprimento da corda durante a vibração. Os parâmetros em (4) tem os seguintes significados: L é o comprimento da corda, h é a área do corte transversal, E é o módulo de Young para o material, ρ é a densidade de massa e P_0 é a tensão inicial da corda. Portanto, do ponto de vista físico, o coeficiente de Kirchhoff M mede a mudança da tensão na corda causada pela mudança de seu comprimento durante a vibração. Assumindo o caso degenerado com $M(0) = 0$ em (3) e (4) significa supor que a tensão inicial seja nula, uma situação mais realista. Também podemos encontrar aplicações dos problemas não-locais em outros campos, como por exemplo nos sistemas biológicos onde u descreve um processo que depende em certa medida de si mesmo, por exemplo a densidade de população (veja por exemplo [1]). Matematicamente falando, existem muitos artigos que estudam a equação de Kirchhoff com termos não lineares críticos, abordando dito problema com ferramentas do cálculo variacional, como por exemplo em [1], [2], [9], [12], [13], [23], e as referências neles.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: No Capítulo 1 daremos os instrumentos básicos para estudar o problema (1). Em particular introduziremos os métodos variacionais e topológicos necessários, e os teoremas de imersões de Sobolev para $W_0^{1,p}(\Omega)$.

No Capítulo 2, estudaremos o problema (1) quando f seja subcrítica mas sobrelinear. Ou seja, f satisfaz condições tais que tenha o seguinte crescimento, para todo $\varepsilon > 0$

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon |t|^{\theta p - 1} + C_\varepsilon |t|^{q-1}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, x \in \overline{\Omega},$$

com $q \in (\theta p, p^*)$, onde $\theta \in (1, p^*/p)$ tem mesmo significado em (2), e $C_\varepsilon > 0$ é uma constante apropriada. Para este caso assumiremos hipóteses gerais também para M , que daremos no Capítulo 1 juntas com as hipóteses da f . Provaremos um resultado de existência estabelecido no Teorema 2.0.1, supondo que o parâmetro λ seja suficientemente grande. Por isto, usaremos o clássico Teorema do passo de montanha, como feito na primeira parte do artigo [23]. O nosso Teorema 2.0.1 melhora também o resultado obtido em [13], onde $p = 2$ e M é não-degenerado.

No Capítulo 3, estudaremos o problema (1) quando f seja linear, ou seja, exatamente com $f(x, t) = |t|^{\theta p - 2} t$. Para cobrir esta situação, precisaremos $M(t) = t^{\theta - 1}$ com $\theta \in (1, p^*/p)$, que corresponde ao caso degenerado de (2). Assim, provaremos um resultado de multiplicidade estabelecido no Teorema 3.0.2. Por isto, precisaremos um resultado abstrato do cálculo variacional baseado na teoria de índice cohomológico de Fadell e Rabinowitz, aplicado quando o

parâmetro λ esteja numa vizinhança adequada de algum autovalor do operador $-M(\|u\|^p) \Delta_p$. Argumentaremos como na segunda parte do artigo [23].

Enfim, no Capítulo 4, estudaremos o problema (1) quando f seja soblinear, considerando $f(x, t) = |t|^{q-2} t$ com $q \in (1, \theta p)$. Também neste caso precisaremos que $M(t) = t^{\theta-1}$, para cobrir uma situação soblinear completa com $q \in (1, \theta p)$. Todavia, usaremos um teorema variacional abstrato com suportes na teoria de genus de Krasnoselskii, achando um intervalo ótimo para o parâmetro λ e construindo uma sequência de pontos críticos para o operador de Euler–Lagrange associado a nosso problema (1), mostrando a existência de infinitas soluções. O resultado está estabelecido no *Teorema 4.0.1* e estende o mesmo resultado em [13], onde $p = 2$ e M é não-degenerado.

1 Preliminares

O objetivo deste capítulo é dar as ferramentas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. As referências para um bom entendimento serão dadas em cada seção.

1.1 Propriedades das funções M e f do Teorema 2.0.1

Consideremos $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ uma função contínua com primitiva $\mathcal{M}(t) = \int_0^t M(\tau) d\tau$. No Teorema 2.0.1, assumiremos que M satisfaz as seguintes propriedades:

(M_1) existe um $\theta \in (1, p^*/p)$ tal que $t M(t) \leq \theta \mathcal{M}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$;

(M_2) para qualquer $\tau > 0$ existe um $\kappa = \kappa(\tau) > 0$ tal que $M(t) \geq \kappa$, $\forall t \geq \tau$;

(M_3) existe uma constante $c > 0$ tal que $M(t) \geq c t^{\theta-1}$, $\forall t \in [0, 1]$.

É fácil verificar que o protótipo para M dado em (2) satisfaz (M_1)-(M_3). Agora mostraremos que as propriedades de M implicam umas consequências extras que serão de vital importância na prova do Teorema 2.0.1.

Lema 1.1.1. *Suponha que M verifique as propriedades (M_1)-(M_3) e seja fixado $t_0 > 0$ genérico. Então*

$$t_0^\theta \mathcal{M}(t) \geq \mathcal{M}(t_0) t^\theta, \quad \forall t \in [0, t_0], \quad (1.1)$$

$$t_0^\theta \mathcal{M}(t) \leq \mathcal{M}(t_0) t^\theta, \quad \forall t \in [t_0, \infty). \quad (1.2)$$

Demonstração. Para mostrar (1.1), note que pela propriedade (M_2) segue que $M(t) > 0$ para todo $t > 0$, e consequentemente por (M_1)

$$\frac{M(t)}{\mathcal{M}(t)} \leq \frac{\theta}{t}, \quad \forall t > 0.$$

Assim, para $0 < t \leq t_0$ temos

$$\int_t^{t_0} \frac{M(\tau)}{\mathcal{M}(\tau)} d\tau \leq \int_t^{t_0} \frac{\theta}{\tau} d\tau \implies \ln \left(\frac{\mathcal{M}(t_0)}{\mathcal{M}(t)} \right) \leq \theta \ln \left(\frac{t_0}{t} \right),$$

e segue que (1.1) vale para todo $0 < t \leq t_0$. Como $\mathcal{M}(0) = 0$, (1.1) é válida para todo $0 \leq t \leq t_0$. De forma análoga, para mostrar a desigualdade (1.2), se consideramos $t \geq t_0$ obtemos

$$\int_{t_0}^t \frac{M(\tau)}{\mathcal{M}(\tau)} d\tau \leq \int_{t_0}^t \frac{\theta}{\tau} d\tau \implies \ln \left(\frac{\mathcal{M}(t)}{\mathcal{M}(t_0)} \right) \leq \theta \ln \left(\frac{t}{t_0} \right),$$

e daqui segue (1.2).

□

Seja $F(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau$, que chamaremos de primitiva para f com respeito a t . Para o Teorema 2.0.1, assumiremos que f satisfaz as seguintes hipóteses:

$$(f_1) \quad \lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{|t|^{\theta p - 1}} = 0 \quad \text{uniformemente sobre } x \in \Omega;$$

$$(f_2) \quad \text{existe um } \sigma \in (\theta p, p^*) \text{ tal que } 0 < \sigma F(x, t) \leq t f(x, t) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, t \neq 0;$$

$$(f_3) \quad \text{existe um } q \in (\theta p, p^*) \text{ tal que } \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{|t|^{q-1}} = 0 \quad \text{uniformemente sobre } x \in \overline{\Omega}.$$

O modelo $f(x, t) = \phi(x) \left(|t|^{\sigma' - 1} + |t|^{q' - 1} \right)$ com $\phi \in C_b(\Omega)$, $\phi > 0$ em Ω , e $\theta p < \sigma' < q' < p^*$, verifica todas as propriedades (f_1) – (f_3) . Das propriedades (f_1) e (f_3) obtemos uma quarta propriedade necessária para a prova do Teorema 2.0.1.

Lema 1.1.2. *Suponha que f verifique as propriedades (f_1) e (f_3) . Então para todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon |t|^{\theta p - 1} + C_\varepsilon |t|^{q-1}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, x \in \overline{\Omega}. \quad (1.3)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Pela propriedade (f_1) existe uma constante $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $|t| \leq \delta$ e $x \in \overline{\Omega}$, então

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon |t|^{\theta p - 1}. \quad (1.4)$$

Enquanto, pela propriedade (f_3) existe um $\bar{\delta} = \bar{\delta}(1) > \delta$ tal que, se $|t| \geq \bar{\delta}$ e $x \in \overline{\Omega}$

$$|f(x, t)| \leq |t|^{q-1}.$$

No compacto $\overline{\Omega} \times [\delta, \bar{\delta}]$ obtemos pela continuidade de f a existência de uma nova constante $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(x, t)| \leq R, \quad \text{se } (x, t) \in \overline{\Omega} \times [\delta, \bar{\delta}].$$

Portanto, se $|t| \geq \delta$ e $x \in \overline{\Omega}$, obtemos

$$|f(x, t)| \leq |t|^{q-1} + R = |t|^{q-1} \left(1 + \frac{R}{|t|^{q-1}} \right) \leq |t|^{q-1} \left(1 + \frac{R}{\delta^{q-1}} \right) = C_\varepsilon |t|^{q-1}, \quad (1.5)$$

e por fim, com as desigualdades (1.4) e (1.5), provamos (1.3).

□

Também temos a seguinte propriedade para a primitiva de f .

Lema 1.1.3. *Suponha que f verifique (f_2) . Então existem $c_1, c_2 > 0$ tais que*

$$F(x, t) \geq c_1 t^\sigma - c_2, \quad (1.6)$$

para todo $t > 0$ e $x \in \overline{\Omega}$, onde σ é dado na propriedade (f_2) .

Demonstração. Fixemos um $r > 0$, então para $\tau > r$ e $x \in \overline{\Omega}$ vale por (f_2) a desigualdade

$$\frac{f(x, \tau)}{F(x, \tau)} \geq \frac{\sigma}{\tau}. \quad (1.7)$$

Agora, integrando (1.7) de r a t com $(t > r)$ obtemos

$$\int_r^t \frac{f(x, \tau)}{F(x, \tau)} d\tau \geq \int_r^t \frac{\sigma}{\tau} d\tau \implies \ln \left(\frac{F(x, t)}{F(x, r)} \right) \geq \sigma \ln \left(\frac{t}{r} \right), \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (1.8)$$

Escrevendo $c_1 = \min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{F(x, r)}{r^\sigma}$, que representa um número finito pela continuidade de f , temos por (1.8) que

$$F(x, t) \geq c_1 t^\sigma, \quad \forall t > r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Agora, pela continuidade de f no compacto $\overline{\Omega} \times [0, r]$, existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$f(x, t) \leq c_0, \quad \text{para todo} \quad 0 \leq t \leq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (1.9)$$

e segue por integração em (1.9) que

$$F(x, t) \leq c_0 r, \quad \text{para todo} \quad 0 < t \leq r \quad \text{e} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Fixando $c > c_0 r$, obtemos que para todo $t \geq 0$ e $x \in \overline{\Omega}$ vale (1.6), onde $c_2 = c + c_1 r^\sigma$.

□

Concluimos esta seção dando a formulação variacional do problema (1). Lembramos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é dita solução (fraca) do problema (1) se verificar

$$M(\|u\|^p) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \lambda f(x, u) v \, dx - \int_{\Omega} |u|^{p^*-2} u v \, dx = 0$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então as soluções do problema (1) são os pontos críticos do funcional de Euler–Lagrange $I_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p} \mathcal{M}(\|u\|^p) - \int_{\Omega} \lambda F(x, u) \, dx - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} \, dx. \quad (1.10)$$

Pelas propriedades (M_1) – (M_3) e (f_1) – (f_3) , é imediato verificar que I_λ seja um funcional de classe C^1 com na verdade

$$\langle I'_\lambda(u), v \rangle = M(\|u\|^p) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \lambda f(x, u) v \, dx - \int_{\Omega} |u|^{p^*-2} uv \, dx$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.2 Métodos variacionais e o princípio de concentração e compacidade

Começamos com algumas notações que serão utilizadas ao longo do trabalho.

Definição 1.2.1. *Seja X um espaço vetorial Banach sobre $\mathbb{R}$ e $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional.*

Fixados $a, b \in \mathbb{R}$, ($a < b$), escrevemos

$$J^b = \{u \in X : J(u) \leq b\}, \quad J_a = \{u \in X : J(u) \geq a\}, \quad J_a^b = J_a \cap J^b.$$

E ainda, se J é diferenciável, escrevemos

$$K_a = \{u \in X : J(u) = a \text{ e } J'(u) = 0\}.$$

A seguinte definição é importante no desenvolvimento do trabalho.

Definição 1.2.2. *Seja X um espaço vetorial Banach sobre $\mathbb{R}$, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que uma sequência $(u_n)_n \subset X$ é de **Palais–Smale** de nível c , ou simplesmente uma sequência $(PS)_c$, se verifica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = c, \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J'(u_n) = 0. \quad (1.11)$$

*Então, Dizemos que J satisfaz a condição de **Palais–Smale** de nível c , ou $(PS)_c$, se toda sequência $(PS)_c$ tem uma subsequência convergente na norma de X . Se J satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$ diremos que J satisfaz (PS) .*

Enunciamos agora o resultado abstrato fundamental para a demonstração do Teorema 2.0.1. Uma proposição clássica que permite encontrar um ponto crítico de funcionais que verificam a geometria chamada de *passo de montanha*.

Proposição 1.2.3. (Passo de montanha) *Seja X um espaço vetorial de Banach sobre $\mathbb{R}$, e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que*

$$(i) \quad J(0) = 0;$$

- (ii) existem $\rho, \alpha \in (0, \infty)$ tais que $\inf_{\|u\|=\rho} J(u) \geq \alpha$;
- (iii) existe um $v \in X$ com $\|v\| > \rho$ tal que $J(v) \leq 0$;
- (iv) J verifica $(PS)_\beta$, com $\beta = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$, onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = v\}.$$

Então β é um valor crítico de J .

Para uma prova veja as referências [3] e [21].

1.3 Imersões de Sobolev e convergências

Lembramos agora os resultados sobre imersão contínua e compacta de Sobolev necessários para este trabalho.

Proposição 1.3.1. *Suponha que Ω seja limitado e suave. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^{p^*}(\Omega), & \text{se } p < N, \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^s(\Omega) \quad \forall s \in [p, \infty), & \text{se } p = N, \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^\infty(\Omega), & \text{se } p > N. \end{aligned} \tag{1.12}$$

E também, temos as seguintes imersões compactas:

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^s(\Omega) \quad \forall s \in [1, p^*), & \text{se } p < N, \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^s(\Omega) \quad \forall s \in [p, \infty), & \text{se } p = N, \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\subset C(\overline{\Omega}), & \text{se } p > N. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Para uma demonstração pode combinar o Corolário 9.14 e o Teorema 9.16 de [8].

Como consequência de (1.12) e (1.13), temos que se $p < N$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ para algum $s \in [1, p^*]$, então existe uma constante $C_s > 0$ tal que

$$\|u\|_s = \left(\int_{\Omega} |u|^s dx \right)^{1/s} \leq C_s \|u\|, \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Surge espontaneamente então a questão de qual seja a melhor constante ou constante mais ótima para a qual a desigualdade acima é verificada.

No caso $s = p^*$ definimos

$$S = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^p}{\|u\|_{p^*}^p}, \tag{1.14}$$

conhecida como a melhor constante de Sobolev para a imersão. Obviamente S é um número positivo e será fundamental no resultado de compacidade, dado na Proposição 1.3.7.

Enunciamos agora um resultado para os espaços $L^s(\Omega)$, com $s \in [1, \infty]$, o qual vai permitir dominar sequências convergentes de $L^s(\Omega)$ com uma função deste mesmo espaço.

Proposição 1.3.2. *Sejam $s \in [1, \infty]$, $(g_n)_n$ e g em $L^s(\Omega)$ tais que $g_n \rightarrow g$ em $L^s(\Omega)$. Então existem uma subsequência $(g_{n_k})_k$ e uma função $h \in L^s(\Omega)$ tais que:*

$$(i) \quad g_{n_k}(x) \rightarrow g(x) \quad q.t.p. \quad x \in \Omega;$$

$$(ii) \quad |g_{n_k}(x)| \leq h(x), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } q.t.p. \quad x \in \Omega.$$

Uma prova pode ser achada no Teorema 4.9 de [8].

continuamos definindo dois tipos de convergências para sequências de medidas na σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$.

Aqui, o espaço das medidas finitas de Radon, denotado por $\mathcal{R}(\mathbb{R}^N)$, é definido como o dual de $(C_0(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$. Assim, para uma sequência de medidas $(\mu_n)_n \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^N)$ temos as seguintes definições.

Definição 1.3.3. *Dizemos que $(\mu_n)_n$ converge **fracamente** para uma medida μ , denotando por $\mu_n \rightharpoonup \mu$, se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu, \quad \text{para toda } g \in C_c(\mathbb{R}^N).$$

*Dizemos que $(\mu_n)_n$ converge **tightly** para uma medida μ , denotando por $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu, \quad \text{para toda } g \in C_b(\mathbb{R}^N).$$

Definição 1.3.4. *Uma medida de Radon μ é dita **tight**, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto $D_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|\mu|(\mathbb{R}^N \setminus D_\varepsilon) < \varepsilon$, onde $|\mu|$ é a variação total de μ .*

Observamos que as definições acima são válidas se trocamos $\mathbb{R}^N$ por qualquer boleano $U \subseteq \mathbb{R}^N$.

Definição 1.3.5. *Consideremos Σ uma família de medidas de Radon em $\mathbb{R}^N$. Dizemos que Σ é **uniformemente tight** se para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto D_ε tal que $|\mu|(\mathbb{R}^N \setminus D_\varepsilon) < \varepsilon$ para todo $\mu \in \Sigma$.*

Enunciaremos agora um resultado chave para as provas dos Teoremas 2.0.1, 3.0.2 e 4.0.1. A seguinte proposição permite dar uma relação entre sequências relativamente sequencialmente compactas e sequências tightly, seguindo a definição dada em 1.3.5, como bem explicado na Seção 2.3 de [18].

Proposição 1.3.6. (Teorema de Prokhorov) *Seja Σ uma família de medidas de Radon em $\mathbb{R}^N$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *toda sequência $(\mu_n)_n \subset \Sigma$ tem uma subsequência convergindo tightly;*
- (ii) *a família Σ é uniformemente tight e uniformemente limitada na norma da variação.*

Para uma demonstração ver Teorema 8.6.2, Corolário 8.6.3 e Teorema 8.6.4 de [7].

Vamos enunciar um resultado fundamental para superar a falta de compacidade da imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, como descrito na Proposição 1.3.1. Precisamos disto para gerir o termo com expoente crítico p^* em (1). A seguinte proposição é um resultado muito clássico e conhecido, provado pelo matemático francês P.L. Lions.

Proposição 1.3.7. (Princípio de concentração e compacidade) *Seja $(u_n)_n$ uma sequência em $W_0^{1,p}(\Omega)$ convergindo fracamente para uma função u tal que $|\nabla u_n|^p dx \rightharpoonup \mu$ e $|u_n|^{p^*} dx \xrightarrow{*} \nu$, onde μ, ν são medidas não negativas e limitadas em $\mathbb{R}^N$. Então temos:*

- (i) *Existe um conjunto $\mathcal{J}$ no máximo enumerável e duas famílias, $(x_j)_{j \in \mathcal{J}} \subset \overline{\Omega}$ de vetores distintos e $(\nu_j)_{j \in \mathcal{J}} \subset [0, \infty)$ tais que*

$$\nu = |u|^{p^*} dx + \sum_{j \in \mathcal{J}} \nu_j \delta_{x_j},$$

onde δ_{x_j} é a medida de concentração de massa de Dirac em x_j .

- (ii) *Além disso, $\sum_{j \in \mathcal{J}} \nu_j^{p/p^*} < \infty$ e existe outra família $(\mu_j)_{j \in \mathcal{J}} \subset (0, \infty)$ com as propriedades*

$$\nu_j^{p/p^*} \leq \mu_j/S \quad \forall j \in \mathcal{J} \quad e \quad \mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j \delta_{x_j},$$

onde S é a melhor constante de Sobolev dada em (1.14).

Para uma demonstração veja o Lema I.1 de [17].

1.4 Índice Cohomológico

Agora falaremos sobre o tópico de índice de cohomologia, o qual vai ser muito importante para a prova do Teorema 3.0.2. A maioria das definições e resultados que daremos estão maiormente baseados no capítulo 2 de [19], mas também precisaremos de outras referências.

Definição 1.4.1. Para um inteiro $n \geq 0$ e um espaço topológico X definimos $Ch^n(X)$ como o espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ de todas as funções $\varphi : X^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}_2$, onde X^{n+1} denota o produto de $(n+1)$ -cópias de X , com adição e multiplicação por escalar dadas de forma natural.

Definimos o operador cobordo $\delta^n : Ch^n(X) \rightarrow Ch^{n+1}(X)$ por

$$(\delta^n(\varphi))(x_0, \dots, x_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \varphi(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_{n+1}),$$

então $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ e os conjuntos $Ch^n(X)$, $Ch(X) = \{Ch^n(X), \delta^n\}_{n \geq 0}$ são chamados n -cocadeia e complexo de cocadeias respectivamente.

Dizemos que $\varphi \in Ch^n(X)$ é identicamente nula se existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X tal que φ é nula em $\mathcal{U}^{n+1} := \bigcup \{U^{n+1} : U \in \mathcal{U}\}$. Seja $Ch_0^n(X)$ o subespaço de $Ch^n(X)$ consistindo de todas as funções localmente nulas, e note que, se φ é nula em $\mathcal{U}^{n+1}$, então $\delta^n(\varphi)$ é nula em $\mathcal{U}^{n+2}$, e dizemos que $Ch_0(X) = \{Ch_0^n(X), \delta^n\}_{n \geq 0}$ é um subcomplexo de $Ch(X)$.

Denotemos por $\overline{Ch}(X)$ o complexo de cocadeias $\{Ch^n(X)/Ch_0^n(X), \bar{\delta}^n\}_{n \geq 0}$, onde $\bar{\delta}^n$ é aplicação entre quocientes induzida de forma natural. Considere os subespaços

$$Z^n(X) = \text{Ker}(\bar{\delta}^n), \quad B^n(X) = \text{Im}(\bar{\delta}^{n-1})$$

chamados de n -cociclo e n -cobordo respectivamente. É claro que $B^n(X) \subseteq Z^n(X)$ e definimos então o n -ésimo grupo de cohomologia de $\overline{Ch}(X)$ por

$$H^n(X) = Z^n(X)/B^n(X).$$

Veja o Capítulo 2–Seção 2.3 de [19].

Definição 1.4.2. Definimos a cohomologia de Alexander-Spanier de X por

$$H^*(X) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X), \tag{1.15}$$

dotado com um produto $\vee$ que dá a (1.15) uma estrutura de anel graduado. Para definir $\vee$ primeiro definimos $\vee : Ch^n(X) \times Ch^m(X) \rightarrow Ch^{n+m}(X)$ por

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2)(x_0, \dots, x_{n+m}) := \varphi_1(x_0, \dots, x_n) \varphi_2(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}).$$

Se φ_1 e φ_2 são localmente nulas, então $\varphi_1 \vee \varphi_2$ é localmente nula, e assim $\vee$ induz um produto $\vee : \overline{Ch}^n(X) \times \overline{Ch}^m(X) \longrightarrow \overline{Ch}^{n+m}(X)$. Não é difícil verificar que

$$\delta^{m+n}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \delta^{m+n}(\varphi_1) \vee \varphi_2 + \varphi_1 \vee \delta^{m+n}(\varphi_2).$$

Segue que, se φ_1 e φ_2 são cociclos, então o mesmo acontece para $\varphi_1 \vee \varphi_2$, e se φ_1 ou φ_2 é um cobordo, então $\varphi_1 \vee \varphi_2$ também é um cobordo. Assim $\vee$ induz um produto

$$\vee : H^n(X) \times H^m(X) \longrightarrow H^{m+n}(X).$$

Para isto, considere o Capítulo 2–Seção 2.3 de [19] ou Capítulo 6–Seção 4 de [22].

Exemplo 1.4.3. $H^*(\mathbb{R}P^\infty) = \mathbb{Z}_2[\omega]$, o anel polinomial com único gerador $\omega \in H^1(\mathbb{R}P^\infty)$.

Veja o Exemplo 2.6 de [19].

Definição 1.4.4. ($\mathbb{Z}_2$ –fibrado principal).

Escrevendo $\mathbb{Z}_2$ na forma multiplicativa $\{-1, 1\}$, um $\mathbb{Z}_2$ –espaço paracompacto é um espaço topológico paracompacto X dotado com uma ação $\odot : \mathbb{Z}_2 \times X \longrightarrow X$ tal que

$$\odot(1, x) = x, \quad -(-x) = x \quad \forall x \in X,$$

onde $-x := \odot(-1, x)$.

Um subconjunto A de X é invariante (ou simétrico) com respeito a $\odot$, se $-A = A$, e dados dois $\mathbb{Z}_2$ –espaços paracompactos X, X' , uma função $h : X \longrightarrow X'$ é equivariante (ou ímpar) se

$$h(-x) = -h(x) \quad \forall x \in X.$$

Dizemos que dois $\mathbb{Z}_2$ –espaços paracompactos X e X' são equivalentes (denotado por $X \simeq X'$), se existe um homeomorfismo equivariante entre eles.

Denotaremos por $\mathcal{F}$ a classe de todos os $\mathbb{Z}_2$ –espaços paracompactos, identificando espaços equivalentes.

Veja o Capítulo 2–Seção 2.4 de [19].

Exemplo 1.4.5. Dado um espaço vetorial normado W , todo subconjunto de W simétrico com respeito ao origem e que não contém o zero está em $\mathcal{F}$. Em particular, se S_r denota a esfera de raio r em W , então $S_r \in \mathcal{F}$.

Definição 1.4.6. Um $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal com base paracompacta é uma terna $\zeta = (E, \rho, B)$ constituída de um $E \in \mathcal{F}$, chamado de espaço total, um espaço paracompacto B , chamado de espaço base, e uma aplicação contínua $\rho : E \longrightarrow B$, chamada a projeção de fibrado, tal que

- (i) Existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ de B ,
- (ii) para todo $i \in \Lambda$, existe um homeomorfismo $\varphi_i : U_i \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \rho^{-1}(U_i)$ satisfazendo

$$\varphi_i(b, -1) = -\varphi_i(b, 1), \quad \rho(\varphi_i)(b, \pm 1) = b \quad \forall b \in B.$$

Uma aplicação entre fibrados $\tilde{h} : \zeta \longrightarrow \zeta'$ consiste de uma aplicação equivariante $h : E \longrightarrow E'$ e uma aplicação contínua $\bar{h} : B \longrightarrow B'$ tal que $\rho' \circ h = \bar{h} \circ \rho$. Dois fibrados ζ e ζ' são equivalentes se existem duas aplicações entre fibrados $\tilde{h}_1 : \zeta \longrightarrow \zeta'$ e $\tilde{h}_2 : \zeta' \longrightarrow \zeta$ tal que $\tilde{h}_1 \circ \tilde{h}_2$ e $\tilde{h}_2 \circ \tilde{h}_1$ são aplicações identidade entre fibrados.

Denotaremos por $\text{Prin}_{\mathbb{Z}_2} B$ o conjunto de todos os $\mathbb{Z}_2$ -fibrados principais com base em B e por $\text{Prin}\mathbb{Z}_2$ o conjunto de todos os $\mathbb{Z}_2$ -fibrados principais com base paracompacta identificando fibrados equivalentes.

Cada $\mathbb{Z}_2$ -espaço paracompacto X pode ser identificado com um $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal com base paracompacta como segue. Seja $\bar{X} = X/\mathbb{Z}_2$ o espaço quociente para $X \in \mathcal{F}$ obtido identificando cada x e $-x$, chamado a órbita de X , e $\pi : X \longrightarrow \bar{X}$ a aplicação quociente. Então

$$\mathcal{P} : \mathcal{F} \longrightarrow \text{Prin}\mathbb{Z}_2, \quad X \mapsto (X, \pi, \bar{X})$$

é uma correspondência 1-1 que identifica $\mathcal{F}$ com $\text{Prin}\mathbb{Z}_2$.

Veja o Capítulo 2–Seção 2.4 de [19].

Exemplo 1.4.7. Se denotamos por S^{n-1} a 1-esfera de $\mathbb{R}^n$, então $\mathcal{P}(S^{n-1}) = (S^{n-1}, \pi, \mathbb{R}P^{n-1})$, onde $\pi : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ identifica pontos antipodais.

Definição 1.4.8. Dados dois $\mathbb{Z}_2$ -fibrados $\zeta = (E, \rho, B)$ e $\zeta' = (E', \rho', B')$, uma aplicação contínua $g : B \longrightarrow B'$ induz um fibrado $g^*\zeta' = (g^*(E'), \rho^*, B) \in \text{Prin}\mathbb{Z}_2$, chamado de pullback, onde

$$g^*(E') = \{(b, e') \in B \times E' : g(b) = \rho'(e')\}, \quad -(b, e') := (b, -e'), \quad \text{e} \quad \rho^*(b, e') = b.$$

Então $\bar{g} : g^*(E') \longrightarrow E'$, $(b, e') \mapsto e'$ e g constituem uma aplicação entre fibrados $\tilde{g} : g^*\zeta' \longrightarrow \zeta'$. Funções homotopicamente equivalentes induz fibrados equivalentes. Assim, dado um fibrado $\zeta' = (E', \rho', B')$ e um espaço paracompacto B , nós temos uma aplicação

$$\mathcal{T} : [B, B'] \longrightarrow \text{Prin}_{\mathbb{Z}_2} B, \quad [g] \mapsto g^*\zeta'$$

onde $[B, B']$ denota as classes de homotopia de aplicações contínuas de B em B' .

Veja Capítulo 2–Seção 2.4 de [19].

Enunciamos agora um resultado de topologia algébrica que permite obter qualquer $\mathbb{Z}_2$ –fibrado com base paracompacta como pullback do fibrado universal $\zeta' = (S^\infty, \pi, \mathbb{R}P^\infty)$.

Proposição 1.4.9. *Para o fibrado universal $\zeta' = (S^\infty, \pi, \mathbb{R}P^\infty)$, $\mathcal{T}$ é uma correspondência 1-1, dado $X \in \mathcal{F}$, existe uma única aplicação contínua $g : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$, salvo homotopias, chamada de aplicação classificante tal que*

$$\mathcal{T}([g]) = \mathcal{P}(X).$$

Veja a Proposição 2.10 e de [19] e a Proposição 7.5 de [10].

Definição 1.4.10. *Baseados na Proposição 1.4.9 definiremos o índice de cohomologia (denotado por ind) para um $\mathbb{Z}_2$ –espaço paracompacto.*

Seja $X \in \mathcal{F}$, g uma aplicação classificante e

$$g^* : H^*(\mathbb{R}P^\infty) \longrightarrow H^*(\overline{X})$$

o homomorfismo induzido entre anéis de cohomologia. Definimos então

$$\text{ind}(X) := \sup\{k \in \mathbb{N} : g^*(\omega^{k-1}) \neq 0\}.$$

Veja o Capítulo 2–Seção 2.5 de [19].

Enunciamos agora algumas propriedades para o índice cohomológico, as quais serão fundamentais na prova do Teorema 3.0.2.

Proposição 1.4.11. *O índice $\text{ind} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\text{ind}(X) = 0$ se e só se $X = \emptyset$;

(ii) se $h : X \rightarrow Y$ é uma aplicação equivariante (em particular se $X \subseteq Y$), então

$$\text{ind}(X) \leq \text{ind}(Y)$$

e a igualdade é válida se $X \simeq Y$;

(iii) dado um espaço vetorial normado W e um $X \subset W$, simétrico e que não contém o zero, então

$$\text{ind}(X) \leq \text{Dim}(W);$$

(iv) se U é uma vizinhança aberta, limitada e simétrica de zero num espaço vetorial normado W , então

$$\text{ind}(\partial U) = \text{Dim}(W),$$

em particular $\text{ind}(S_r) = \text{Dim}(W)$;

(v) se X é a união disjunta de subconjuntos $U, -U$, então $\text{ind}(X) = 1$. Em particular se X for finito seu índice é 1;

(vi) se X é compacto, então $\text{ind}(X) < \infty$.

Como uma referência para as provas pode olhar Proposições 2.12 e 2.14 de [19].

Continuamos enunciando resultados importantes que mostram a aplicação do índice de cohomologia na pesquisa de pontos críticos para funcionais pares $I \in C^1(W, \mathbb{R})$, onde W é um espaço vetorial Banach sobre $\mathbb{R}$. Denote por $\mathcal{A}$ a classe de todos os subconjuntos de W que não contém o zero e são simétricos com respeito ao origem, identificados por homeomorfismos ímpares.

Definição 1.4.12. *Sejam $0 < r$, $0 < d \leq \infty$ e denote por Γ^* o grupo formado por todos os homeomorfismos ímpares em W que são a identidade fora de $I^{-1}(0, d)$. Definimos o pseudo-índice (denotado por ind_r^*) de $N \in \mathcal{A}$ relativo a S_r , ind e Γ^* como sendo*

$$\text{ind}_r^*(A) := \min_{\gamma \in \Gamma^*} (\text{ind}(\gamma(N) \cap S_r)).$$

Proposição 1.4.13. *Sejam A_0, B_0 subconjuntos simétricos de S_1 tal que A_0 é compacto em W e B_0 é fechado em W , e*

$$\text{ind}(A_0) \geq k + m, \quad \text{ind}(S_1 \setminus B_0) \leq k$$

para alguns inteiros $k \geq 0$ e $m \geq 1$. Suponhamos que existem $b \in \mathbb{R}$ e $R > r > 0$ tais que

$$\sup_{u \in A} I(u) \leq 0 < \inf_{u \in B} I(u), \quad \sup_{u \in X} I(u) < b,$$

onde $A = \{Ru : u \in A_0\}$, $B = \{ru : u \in B_0\}$ e $X = \{tu : u \in A, t \in [0, 1]\}$. Para $j = k + 1, \dots, k + m$ seja

$$\mathcal{A}^* = \{N \in \mathcal{A} : N \text{ é compacto e } \text{ind}_r^*(N) \geq j\}$$

e seja

$$c_j^* := \inf_{N \in \mathcal{A}^*} \sup_{u \in N} I(u).$$

Então

$$\inf_{u \in B} I(u) \leq c_{k+1}^* \leq \dots \leq c_{k+m}^* \leq \sup_{u \in X} I(u),$$

em particular $0 < c_j^ < b$. Se em adição I satisfaz $(PS)_c$ para cada $c \in (0, b)$, então cada c_j^* é um ponto crítico para I e assim I tem distintos pares de pontos críticos associados.*

Veja o Teorema 2.2 de [20].

Definição 1.4.14. *Sejam W, W' espaços vetoriais Banach sobre $\mathbb{R}$, um operador $l : W \longrightarrow W'$ é dito s -homogêneo, onde $s > 0$, se*

$$l(\alpha u) = \alpha^s l(u) \quad \forall u \in W, \alpha \geq 0.$$

Tomando $\alpha = 0$, $L(0) = 0$.

Um operador contínuo e s -homogêneo l é limitado no seguinte sentido.

Proposição 1.4.15. *Se $l \in C(W, W')$ é s -homogêneo, então existe uma constante $C_s > 0$ tal que*

$$\|l(u)\| \leq C_s \|u\|^s \quad \forall u \in W. \quad (1.16)$$

Em particular l é limitado sobre conjuntos limitados.

Veja a Proposição 1.1 de [19].

Definição 1.4.16. *Se denotamos por W^* o dual de W , um operador $l \in C(W, W^*)$ é dito de operador potencial se existe um funcional $L \in C^1(W, \mathbb{R})$, chamado de potencial de l , tal que*

$$L'(u) = l(u) \quad \forall u \in W.$$

Trocando L por $L - L(0)$ se é necessário, podemos assumir que $L(0) = 0$.

Proposição 1.4.17. *Se l é um operador potencial e L é seu potencial, então*

$$L(u) = \int_0^1 \langle l(tu), u \rangle dt \quad u \in W.$$

Em particular, L é par se l é ímpar, e L é ímpar se l é par. Se l é s -homogêneo, então

$$L(u) = \frac{1}{s+1} \langle l(u), u \rangle \quad u \in W.$$

Veja por exemplo Proposição 1.2 de [19].

Orientados a nosso trabalho, consideramos de novo $I \in C^1(W, \mathbb{R})$ um funcional par, assumamos que 1 é um valor regular para I e $I(0) = 0$. Logo

$$\mathcal{N} = \{u \in W : I(u) = 1\}$$

é uma variedade de classe C^1 e completa. Além disso, o plano tangente para $u \in \mathcal{N}$ é

$$T_u \mathcal{N} = \text{Ker}(I'(u)).$$

Denotemos por $\mathcal{F}$ a classe de subconjuntos simétricos de $\mathcal{N}$, seja $\Phi \in C^1(W, \mathbb{R})$ um funcional par, $\tilde{\Phi}$ sua restrição a $\mathcal{N}$. Definamos para $b \in \mathbb{R}$ de acordo a Definição 1.2.1

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_b &= \Phi_b \cap \mathcal{N}, \\ \tilde{\Phi}^b &= \Phi^b \cap \mathcal{N}, \\ \tilde{k}_b &= K_b \cap \mathcal{N},\end{aligned}$$

e para cada inteiro $1 \leq k \leq \dim(W) = d$ defina

$$\mathcal{F}_k := \{N \in \mathcal{F} : \text{ind}(N) \geq k\} \quad e \quad c_k = \inf_{N \in \mathcal{F}_k} \sup_{u \in N} \tilde{\Phi}(u).$$

A sequência $(c_k)_{k \leq d}$ é crescente e é utilizada para achar pontos críticos de funcionais pares restritos a $\mathcal{N}$, e se $d < \infty$ definimos $c_k = \infty \quad \forall k > d$.

A seguinte proposição mostra uma forma de aplicar dita sequência.

Proposição 1.4.18. *Suponhamos que Φ seja par.*

(i) *Se $-\infty < c_k = \dots = c_{k+m-1} = c < \infty$ para algum $m \geq 1$ e $\tilde{\Phi}$ satisfaz $(PS)_c$, então $\text{ind}(\tilde{K}_c) \geq m$. Em particular, se $-\infty < c_k < \dots < c_{k+m-1} < \infty$ e $\tilde{\Phi}$ satisfaz $(PS)_c$ para $c = c_k, \dots, c_{k+m-1}$, então cada c é um valor crítico e $\tilde{\Phi}$ tem m pares distintos de pontos críticos.*

(ii) *Se $\dim(W) = \infty$, $\tilde{\Phi}$ satisfaz (PS) e $-\infty < c_k < \infty$ para todo k suficientemente grande, então $c_k \rightarrow \infty$.*

(iii) *Se c_k é finito e $\tilde{\Phi}$ satisfaz $(PS)_{c_k}$, então*

$$\text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Phi}_{c_k}) < k \leq \text{ind}(\tilde{\Phi}_{c_k}). \quad (1.17)$$

(iv) *Se $c_k < c_{k+1}$ são finitos e Φ satisfaz $(PS)_c$ para $c = c_k, c_{k+1}$, então*

$$\text{ind}(\tilde{\Phi}^{c_k}) = \text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Phi}^a) = \text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Phi}_{c_{k+1}}) = k \quad \forall a \in (c_k, c_{k+1}).$$

Veja Proposições 3.52 e 3.53 de [19].

1.5 Genus de Krasnoselskii

Nesta subseção preliminar daremos uma breve introdução a teoria de genus de Krasnoselskii e resultados necessários para a prova do Teorema 4.0.1.

Definição 1.5.1. *Seja W um espaço vetorial Banach sobre $\mathbb{R}$ e denote por $\mathcal{A}$ a classe de todos os subconjuntos fechados (em W) que não contém o zero e são simétricos com respeito a origem, identificados por homeomorfismos ímpares. Para $A \in \mathcal{A}$ definimos o genus de A (denotado por $\gamma(A) = n$) como o menor inteiro não negativo n tal que existe $\psi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Se não existir dito inteiro definimos $\gamma(A) = \infty$ para A não vazio e $\gamma(\emptyset) = 0$.*

Enunciamos agora algumas propriedades do genus.

Proposição 1.5.2. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}$. Então:*

- (i) *se existe $\phi \in C(A, B)$ com ϕ ímpar, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$. Em particular se $A \subseteq B$, $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;*
- (ii) *se $\gamma(B) < \infty$, então $\gamma(\overline{B \setminus A}) \geq \gamma(B) - \gamma(A)$;*
- (iii) *se A é compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe um $\delta > 0$ tal que, o conjunto*

$$N_\delta(A) = \{w \in W : \|w - A\| \leq \delta\}$$

está em $\mathcal{A}$ e $\gamma(A) = \gamma(N_\delta(A))$;

- (iv) *se A é homeomorfo por aplicação ímpar ao bordo de uma vizinhança simétrica e aberta do zero em $\mathbb{R}^n$, então $\gamma(A) = n$. Em particular $\gamma(S^{n-1}) = n$, onde S^{n-1} é a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$;*
- (v) *se $B \cap (-B) = \emptyset$, então $B \cup (-B) \in \mathcal{A}$ e $\gamma(B \cup (-B)) = 1$. Em particular, se A for finito $\gamma(A) = 1$;*
- (vi) *se $\gamma(A) > 1$, então A tem infinitos pontos.*

Veja o Lema 1.2 e Proposição 7.5 de [3], e Exemplo 7.2 de [21].

Lembrando a notação dada na Seção 1.2 enunciamos agora um resultado muito forte na teoria variacional e fundamental para a prova do Teorema 4.0.1.

Proposição 1.5.3. (Lema de deformação)

Suponha que $J \in C^1(W, \mathbb{R})$ satisfaz (PS), sejam $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e N qualquer vizinhança de K_c . Então existem $\eta \in C([0, 1] \times W, W)$, com $\eta_t(x) = \eta(t, x)$, e constantes $\varepsilon > 0$, $|c| > d_1 > 0$ tais que:

- (i) $\eta_0 = Id_W$;
- (ii) $\eta_t(u) = u$ para todo $u \notin J^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ e $t \in [0, 1]$;

- (iii) η_t é um homeomorfismo para cada $t \in [0, 1]$;
- (iv) $J(\eta_t(u)) \leq J(u)$ para todo $u \in W$ e $t \in [0, 1]$;
- (v) $\eta_1(J^{c+d_1} \setminus N) \subseteq J^{c-d_1}$;
- (vi) se $K_c = \emptyset$, então $\eta_1(J^{c+d_1}) \subseteq J^{c-d_1}$;
- (vii) se J é par, então η_t é ímpar para todo $t \in [0, 1]$.

Veja Lema 3.46 de [19] e Lema 1.3 de [3].

Concluimos o capítulo dando a versão simétrica da Proposição 1.2.3, ou seja, a versão simétrica do lema do passo de montanha.

Proposição 1.5.4. (Passo de montanha simétrico) *Seja E um espaço infinito dimensional, $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Denotemos por Γ_n a família dos subconjuntos simétricos e fechados A de W , com $\gamma(A) \geq n$ e suponha que as seguintes condições sejam verificadas:*

- (J₁) J é par, limitado por baixo, $J(0) = 0$ e J verifica $(PS)_c$, para cada $c < \bar{c}$, com $\bar{c} > 0$ apropriado;
- (J₂) para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $A_n \in \Gamma_n$ tal que $\sup_{u \in A_n} J(u) < 0$.

Então vale ou (i) ou (ii), embaixo:

- (i) existe uma sequência $(u_n)_n$ tal que $J'(u_n) = 0$, $J(u_n) < 0$ e $(u_n)_n$ converge a zero.
- (ii) existem duas sequências $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $J'(u_n) = 0$, $J(u_n) = 0$, $u_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, $J'(v_n) = 0$, $J(v_n) < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = 0$, e $(v_n)_n$ converge a um limite não nulo.

Para uma prova, veja [15].

2 Caso sobrelinear

Neste capítulo vamos estudar nosso problema (1) com M e f gerais, mas satisfazendo as hipóteses dadas na Seção 1.1. Enunciaremos os lemas necessários com suas respectivas provas para dar uma demonstração do Teorema 2.0.1 dado na continuação.

Teorema 2.0.1. *Suponha que M e f verifiquem as propriedades (M_1) – (M_3) e (f_1) – (f_3) respectivamente. Então existe um $\lambda_0 > 0$, tal que o problema (1) tem uma solução u_λ não trivial para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Além disso, o limite*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|u_\lambda\| = 0 \quad (2.1)$$

vale.

A ideia é aplicar a Proposição 1.2.3 ao nosso operador I_λ dado em (1.10) para provar o Teorema 2.0.1. O primeiro passo é mostrar que I_λ satisfaz a geometria do passo de montanha.

Lema 2.0.2. *Suponha que M e f verifiquem as propriedades (M_1) , (M_2) , (f_1) e (f_3) . Então, para cada $\lambda > 0$, existem dois números positivos ρ e α tais que $I_\lambda(u) \geq \alpha$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$.*

Demonstração. Integrando a propriedade (1.3), para todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante positiva C_ε tal que

$$F(x, t) \leq \frac{\varepsilon}{\theta p} |t|^{\theta p} + \frac{C_\varepsilon}{q} |t|^q \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, x \in \Omega. \quad (2.2)$$

Agora, por (M_2) existe um $t_0 > 0$ tal que $\mathcal{M}(t_0^p) > 0$. Fixemos $\lambda > 0$ e tomemos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\|^p \leq t_0$. Logo por (1.1) e (2.2)

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{p} m \|u\|^{\theta p} - \lambda \frac{\varepsilon}{\theta p} \int_\Omega |u|^{\theta p} dx - \frac{C_\varepsilon}{q} \int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx,$$

onde $m = \mathcal{M}(t_0)t_0^{-\theta} > 0$.

Dado que $\theta p < q < p^*$ em (f_3) , temos por (1.12) que existem constantes $C_{\theta p}$, C_q , $C_{p^*} > 0$ tais que

$$I_\lambda(u) \geq \|u\|^{\theta p} \left(\frac{m}{p} - \frac{\lambda \varepsilon}{\theta p} C_{\theta p} \right) - \frac{C_\varepsilon C_q}{q} \|u\|^q - \frac{C_{p^*}}{p^*} \|u\|^{p^*}.$$

Tomamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que $\left(\frac{m}{p} - \frac{\lambda \varepsilon}{\theta p} C_{\theta p} \right) > 0$. Como $\theta p < q < p^*$, o resultado segue tomando ρ suficientemente pequeno de modo que, se $\|u\| = \rho$, obtemos

$$\rho^{\theta p} \left(\frac{m}{p} - \frac{\lambda \varepsilon}{\theta p} C_{\theta p} \right) - \frac{C_\varepsilon C_q}{q} \rho^q - \frac{C_{p^*}}{p^*} \rho^{p^*} := \alpha > 0.$$

□

Lema 2.0.3. *Suponha que M e f verifiquem as propriedades (M_1) , (f_1) – (f_3) . Então, para cada $\lambda > 0$, existe $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|e\| > \rho$ tal que $I_\lambda(e) < 0$, onde ρ é dada no Lema 2.0.2.*

Demonstração. Fixemos $\lambda > 0$ e $v_0 \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\|v_0\| = 1$ e $v_0(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Logo, se consideramos t_0 como no Lema 2.0.2, para $t^p \geq t_0$ vale por (1.2) e (1.6) a desigualdade

$$I_\lambda(tv_0) \leq \frac{1}{p}mt^{\theta p} - \lambda t^\sigma \int_\Omega c_1|v_0|^\sigma dx + \lambda c_2|\Omega| - \frac{t^{p^*}}{p^*} \int_\Omega |v_0|^{p^*} dx, \quad (2.3)$$

onde $m = \mathcal{M}(t_0)t_0^{-\theta} > 0$.

Como $p^* > \sigma > \theta p$ em (f_2) , temos $I_\lambda(tv_0) \rightarrow -\infty$, se $t \rightarrow \infty$, logo, basta tomar $t_* > 0$ suficientemente grande e definir $e := t_*v_0$ de forma que $\|e\| > \rho$ e $I_\lambda(e) < 0$. □

Agora discutimos a propriedade de compacidade requerida na parte (iv) da Proposição 1.2.3. Por isto, fixado $\lambda > 0$, definimos o nível crítico

$$c_\lambda := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,p}(\Omega)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Antes de provar a condição de compacidade, no seguinte lema estudamos uma propriedade assintótica para c_λ . Este resultado será fundamental para provar (2.1) e superar a falta de compacidade em (1) devida a presença do termo crítico.

Lema 2.0.4. *Suponha que M e f verifiquem as propriedades (M_1) – (M_3) e (f_1) – (f_3) . Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c_\lambda = 0.$$

Demonstração. Sejam $t_0 > 0$ como no Lema 2.0.2 e $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como no Lema 2.0.3.

Dado que para todo $\lambda > 0$ o funcional I_λ satisfaz a geometria do passo de montanha para 0 e e , temos a existência de um $t_\lambda > 0$ tal que $I_\lambda(t_\lambda e) = \max_{t \geq 0} I_\lambda(te)$. Portanto $\langle I'_\lambda(t_\lambda e), e \rangle = 0$, e segue por (M_1) e (f_2) que

$$\begin{aligned} t_\lambda^{p^*} \int_\Omega e^{p^*} dx &\leq \lambda \int_\Omega f(x, t_\lambda e) t_\lambda e dx + t_\lambda^{p^*} \int_\Omega e^{p^*} dx \\ &= M(t_\lambda^p \|e\|^p) t_\lambda^p \|e\|^p \leq \theta \mathcal{M}(t_\lambda^p \|e\|^p). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Seja $\Lambda = \{\lambda > 0 : t_\lambda^p \|e\|^p \geq t_0\}$, então estudaremos os dois casos quando $\lambda \in \Lambda$ ou quando $\lambda \notin \Lambda$.

Caso (1): $\lambda \in \Lambda$. Aplicando (1.2) obtemos

$$\theta \mathcal{M}(t_\lambda^p \|e\|^p) \leq \theta \frac{\mathcal{M}(t_0)}{t_0^\theta} \|t_\lambda e\|^{\theta p}. \quad (2.5)$$

Segue para (2.4) que

$$t_\lambda^{p^* - \theta p} \leq \theta \frac{\mathcal{M}(t_0)}{t_0^\theta} \left(\int_\Omega e^{p^*} dx \right)^{-1}.$$

Portanto, para $\lambda \in \Lambda$ a família $\{t_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é limitada.

Caso (2): $\lambda \notin \Lambda$. Pela mesma definição do conjunto Λ , obtemos que $t_\lambda^p < t_0/\|e\|^p$ para todo $\lambda \notin \Lambda$, que implica a limitação desejada.

Por isto, juntando os casos (1) e (2) a família completa $\{t_\lambda\}_{\lambda > 0}$ é limitada. Assim, fixada uma sequência $(\lambda_n)_n$ de números positivos tal que $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\{t_{\lambda_n}\}_n$ é uma sequência limitada. Portanto, existe um $\alpha_0 \geq 0$ tal que a menos de subsequência $t_{\lambda_n} \rightarrow \alpha_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Pela continuidade de M , segue que a sequência $(M(t_{\lambda_n}^p \|e\|^p))_n$ é limitada, e assim existe um $D > 0$ tal que

$$\lambda_n \int_\Omega f(x, t_{\lambda_n} e) t_{\lambda_n} e dx + t_{\lambda_n}^{p^*} \int_\Omega e^{p^*} dx \leq D, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Se $\alpha_0 > 0$, utilizamos (1.3) e o Teorema de convergência dominada de Lebesgue para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f(x, t_{\lambda_n} e) t_{\lambda_n} e dx = \int_\Omega f(x, \alpha_0 e) \alpha_0 e dx > 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

com a última desigualdade devida por (f_2) . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda_n \int_\Omega f(x, t_{\lambda_n} e) t_{\lambda_n} e dx + t_{\lambda_n}^{p^*} \int_\Omega e^{p^*} dx \right) = \infty,$$

que contradiz (2.6). Assim, necessariamente $\alpha_0 = 0$. Por isto, dada qualquer sequência de números positivos $\lambda_n \rightarrow \infty$, toda subsequência $(t_{\lambda_{n_k}})_k$ de (t_{λ_n}) admitirá uma subsequência convergente a 0, portanto $t_{\lambda_n} \rightarrow 0$ para toda sequência $\lambda_n \rightarrow \infty$, então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_\lambda = 0$.

Por fim, tomando $\gamma_*(t) = te$, $t \in [0, 1]$, obtemos que $\gamma_* \in \Gamma$ e pelo Lema 2.0.2 segue que

$$0 < c_\lambda \leq \max_{t \in [0, 1]} I_\lambda(\gamma_*(t)) \leq I_\lambda(t_\lambda e) \leq \frac{1}{p} \mathcal{M}(t_\lambda^p \|e\|^p), \quad (2.7)$$

onde a última desigualdade é ainda devida a (f_2) . Pela continuidade de M , a hipótese $M(0) = 0$ e (2.7) concluímos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c_\lambda = 0.$$

□

Lema 2.0.5. *Suponha que M e f verifiquem as propriedades (M_1) – (M_3) e (f_1) – (f_3) . Então existe um $\lambda_0 > 0$ tal que o funcional satisfaz a condição de $(PS)_{c_\lambda}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.0.4, existe um $\lambda_0 > 0$ suficientemente grande tal que, se $\lambda \geq \lambda_0$, então

$$c_\lambda < \min \left\{ \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*} \right) c^{\frac{p^*}{p^*-\theta p}} S^{\frac{\theta p^*}{p^*-\theta p}}, \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*} \right) \kappa^{\frac{p^*}{p^*-p}} S^{\frac{p^*}{p^*-p}} \right\}, \quad (2.8)$$

onde $\sigma \in (\theta p, p^*)$ é dado em (f_2) , S está definida em (1.14), c vem da propriedade (M_3) e κ é obtido pela propriedade (M_2) tomando $\tau = 1$.

Fixemos $\lambda \geq \lambda_0$. Seja $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma $(PS)_{c_\lambda}$ sequência para I_λ , ou seja satisfaz (1.11) da Definição 1.2.2.

Agora, dado $d = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|$, pois M é degenerado então pode ocorrer que $d > 0$ ou $d = 0$. Estudamos primeiro o caso.

Caso (1): $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| = d > 0$.

Nosso primeiro objetivo é mostrar que $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por (M_1) e (f_2) obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\sigma} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle &\geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{\sigma} \right) \|u_n\|^p M(\|u_n\|^p) + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*} \right) \int_\Omega |u_n|^{p^*} dx \\ &\geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{\sigma} \right) \|u_n\|^p M(\|u_n\|^p). \end{aligned}$$

Aplicando (M_2) com $\tau = d^p$, temos que existe um $K = K(d) > 0$ tal que $M(\|u_n\|^p) \geq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\sigma} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle \geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{\sigma} \right) \|u_n\|^p K. \quad (2.9)$$

Por (1.11) existe um $\sigma_0 > 0$ tal que, quando $n \rightarrow \infty$

$$c_\lambda + \sigma_0 \|u_n\| + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{\sigma} \right) \|u_n\|^p K.$$

Isto implica que $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim, aplicando (1.12), (1.13) e a Proposição 1.3.2 a menos de subsequência existem um $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e um $\alpha \geq 0$ tais que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), & \|u_n\| &\rightarrow \alpha, \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ em } L^{p^*}(\Omega), \\ u_n &\rightarrow u \text{ em } L^s(\Omega), \quad s \in [1, p^*) \quad , \quad u_n \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Claramente $\alpha > 0$ pois $d > 0$. Além disso, como $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\bar{\Omega}$ compacto e como podemos assumir $\nabla u_n \equiv 0$, $u_n \equiv 0$ em $\partial\Omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $(|\nabla u_n|^p dx)_n$ e $(|u_n|^{p^*} dx)_n$ são uniformemente tight, seguindo a Definição 1.3.4. Assim, pela Proposição 1.3.6, existem duas medidas não negativas e limitadas μ, ν tais que

$$|\nabla u_n(x)|^p dx \xrightarrow{*} \mu \quad \text{e} \quad |u_n(x)|^{p^*} dx \xrightarrow{*} \nu \quad \text{em } \mathcal{R}(\bar{\Omega}),$$

ou seja, pela Definição 1.3.3 sabemos que, quando $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\Omega} \psi |\nabla u_n|^p dx \rightarrow \int_{\Omega} \psi d\mu \quad \text{para toda } \psi \in C_b(\Omega), \quad (2.11)$$

e

$$\int_{\Omega} \psi |u_n|^{p^*} dx \rightarrow \int_{\Omega} \psi d\nu \quad \text{para toda } \psi \in C_b(\Omega). \quad (2.12)$$

Assim, aplicando a Proposição 1.3.7, existe um conjunto $\mathcal{J}$ no máximo enumerável e três famílias, $(x_j)_{j \in \mathcal{J}} \subset \bar{\Omega}$ de vetores distintos e $(\nu_j)_{j \in \mathcal{J}}, (\mu_j)_{j \in \mathcal{J}} \subset [0, \infty)$ de números, tais que

$$\nu = |u(x)|^{p^*} dx + \sum_{j \in \mathcal{J}} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \mu \geq |\nabla u(x)|^p dx + \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j \delta_{x_j}, \quad (2.13)$$

com

$$\nu_j \leq S^{-p^*/p} \mu_j^{p^*/p}, \quad (2.14)$$

onde S é a melhor constante de Sobolev dada em (1.14).

Fixemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ tal que $\varphi \equiv 1$ em $B(0, 1)$ e $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B(0, 2)$. Para $\varepsilon > 0$ e $j_0 \in \mathcal{J}$ definamos $\varphi_{\varepsilon, j_0}(x) = \varphi((x - x_{j_0})/\varepsilon)$. Claramente $(\varphi_{\varepsilon, j_0} u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\text{Supp}(\varphi_{\varepsilon, j_0}) \subset B(x_{j_0}, 2\varepsilon)$. Logo, por (1.11) segue que $\langle I'_\lambda(u_n), \varphi_{\varepsilon, j_0} u_n \rangle \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} M(\|u_n\|^p) \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |\nabla u_n|^p dx &= -M(\|u_n\|^p) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} f(x, u_n) \varphi_{\varepsilon, j_0} u_n dx + \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |u_n|^{p^*} dx + o_n(1), \end{aligned} \quad (2.15)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, lembrando que $\text{Supp}(\varphi_{\varepsilon, j_0}) \subset B(x_{j_0}, 2\varepsilon)$, pela desigualdade de Hölder e por uma mudança de variável

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \right| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B(x_{j_0}, 2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-1} |u_n| \cdot |\nabla \varphi_{\varepsilon, j_0}| dx \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n\|_p^{p-1} \left(\int_{B(x_{j_0}, 2\varepsilon)} |u_n \nabla \varphi_{\varepsilon, j_0}|^p dx \right)^{1/p} \leq C_0 \left(\int_{B(x_{j_0}, 2\varepsilon)} |u \nabla \varphi_{\varepsilon, j_0}|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq C_\varphi C_0 \left(\int_{B(x_{j_0}, 2\varepsilon)} |u|^{p^*} dx \right)^{1/p^*}, \end{aligned}$$

onde consideramos $C_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\nabla u_n\|_p^{p-1}$ e $C_\varphi = \left(\int_{B_2} |\nabla \varphi(y)|^N dy \right)^{1/N}$.

Portanto segue imediatamente que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \right| = 0. \quad (2.16)$$

Além disso, por (2.10) obtemos $M(\|u_n\|^p) \rightarrow M(\alpha^p) > 0$, pois $\alpha > 0$ combinado com (M_2) , e também

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} M(\|u_n\|^p) \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \right| = 0. \quad (2.17)$$

Por (1.3) com $\varepsilon = 1$, existe um $C_1 > 0$ tal que

$$|f(x, t)| \leq |t|^{\theta p-1} + C_1 |t|^{q-1}, \quad \text{para todo } x \in \bar{\Omega} \text{ e } t \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Logo, pelas propriedades de $\varphi_{\varepsilon, j_0}$, (2.10) e (2.18), quando $n \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{\Omega} f(x, u_n) \varphi_{\varepsilon, j_0} u_n dx \right| \leq \int_{B(x_{j_0}, 2\varepsilon)} (|u_n|^{\theta p} + C_1 |u_n|^q) dx \rightarrow \int_{B(x_{j_0}, 2\varepsilon)} (|u|^{\theta p} + C_1 |u|^q) dx,$$

que implica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} f(x, u_n) \varphi_{\varepsilon, j_0} u_n dx \right| = 0. \quad (2.19)$$

A partir daqui dividimos a prova do **Caso (1)** em dois subcasos, quando $\alpha \geq 1$ ou quando $0 < \alpha < 1$, para provar que $\nu_{j_0} = 0$.

Subcaso (1.1): $\alpha < 1$.

Neste caso, por (2.10) a menos de subsequência temos $\|u_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, aplicando a propriedade (M_3) e considerando $\varphi_{\varepsilon, j_0} \leq 1$ obtemos

$$\left(\int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |\nabla u_n|^p dx \right)^{\theta} \leq \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |\nabla u_n|^p dx \leq \frac{1}{c} M(\|u_n\|^p) \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |\nabla u_n|^p dx. \quad (2.20)$$

Combinando (2.11), (2.12), (2.15), (2.17), (2.19), (2.20) e a continuidade de M , deduzimos que

$$\left(\int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} d\mu \right)^{\theta} \leq \frac{1}{c} \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} d\nu + o_{\varepsilon}(1), \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (2.21)$$

Enviando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ em (2.21) e usando (2.13), obtemos

$$\mu_{j_0}^{\theta} \leq \frac{1}{c} \nu_{j_0} \quad (2.22)$$

Utilizando (2.14) e (2.22), temos que

Então, de (2.14) segue que

$$\nu_{j_0} = 0 \quad \text{ou} \quad \nu_{j_0} \geq c^{\frac{p^*}{p^*-\theta p}} S^{\frac{\theta p^*}{p^*-\theta p}}. \quad (2.23)$$

Como $(u_n)_n$ é uma $(PS)_{c_\lambda}$ sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\sigma} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle \right) = c_\lambda. \quad (2.24)$$

Mas lembremos que por (M_1) e (f_2)

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\sigma} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle &\geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{\sigma} \right) \|u_n\|^p M(\|u_n\|^p) + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*} \right) \int_\Omega |u_n|^{p^*} dx \\ &\geq \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*} \right) \|u_n\|_{p^*}^{p^*}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Combinando (2.24) e (2.25), utilizando (2.12) com $\psi \equiv 1$ junto a Proposição 1.3.7, nós obtemos que se $\nu_{j_0} \neq 0$, então por (2.23)

$$\begin{aligned} c_\lambda &\geq \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*} \right) \|u\|_{p^*}^{p^*} + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*} \right) \sum_{j \in J} \nu_j \\ &\geq \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_{j_0} \\ &\geq \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*} \right) c^{\frac{p^*}{p^*-\theta p}} S^{\frac{\theta p^*}{p^*-\theta p}} > 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

o qual contradiz (2.8). Portanto devemos ter $\nu_{j_0} = 0$.

Estudamos agora o segundo subcaso para α .

Subcaso (1.2): $\alpha \geq 1$.

Lembremos que por (M_2) com $\tau = 1$, existe um $\kappa = \kappa(1) > 0$ tal que $M(\alpha^p) \geq \kappa$. Logo, por (2.11), (2.12), (2.15), (2.17), (2.19), (2.20) e a continuidade de M , vale

$$\kappa \int_\Omega \varphi_{\varepsilon, j_0} d\mu \leq M(\alpha^p) \int_\Omega \varphi_{\varepsilon, j_0} d\mu = \int_\Omega \varphi_{\varepsilon, j_0} d\nu + o_\varepsilon(1), \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (2.27)$$

Enviando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ em (2.27) e junto com (2.13), temos

$$\kappa \mu_{j_0} \leq \nu_{j_0}. \quad (2.28)$$

Utilizando (2.14) e (2.28), esta vez obtemos imediatamente que

$$\nu_{j_0} = 0 \quad \text{ou} \quad \nu_{j_0} \geq \kappa^{\frac{p^*}{p^*-p}} S^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \quad (2.29)$$

Então, análogo ao **Subcaso (1.1)**, para $\nu_{j_0} \neq 0$, obtemos a seguinte estimativa para c_λ

$$\begin{aligned} c_\lambda &\geq \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*}\right) \|u\|_{p^*}^{p^*} + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*}\right) \sum_{j \in J} \nu_j \\ &\geq \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*}\right) \nu_{j_0} \\ &\geq \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{p^*}\right) \kappa^{\frac{p^*}{p^*-p}} S^{\frac{p^*}{p^*-p}} > 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

o qual também contradiz (2.8), provando que $\nu_{j_0} = 0$.

Assim, combinando os **Subcasos (1.1) (1.2)**, para $\lambda \geq \lambda_0$ a desigualdade (2.8) força que $\nu_{j_0} = 0$ independentemente de α .

Como j_0 foi arbitrário, deduzimos que $\nu_j = 0$ para qualquer $j \in \mathcal{J}$. Como consequência de (2.12) com $\psi \equiv 1$ e (2.13), segue que $u_n \rightarrow u$ em $L^{p^*}(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, mostraremos que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$. Dado que $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, por (1.11) obtemos que $\langle I'_\lambda(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, isto é

$$\begin{aligned} M(\|u_n\|^p) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx - \lambda \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) dx \\ + \int_{\Omega} |u_n|^{p^*-2} u_n(u_n - u) dx = o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por (2.10), (2.18) e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue nós temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) dx \right| = 0, \quad (2.32)$$

enquanto considerando a desigualdade de Hölder e o fato que $u_n \rightarrow u$ in $L^{p^*}(\Omega)$ segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} |u_n|^{p^*-2} u_n(u_n - u) dx \right| = 0. \quad (2.33)$$

Então, por (2.31)–(2.33), deduzimos que

$$M(\|u_n\|^p) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx = o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

o qual implica que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx = o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.34)$$

pois $M(\|u_n\|^p) \rightarrow M(\alpha^p) > 0$ por (2.10), sendo também $\alpha > 0$.

Dado que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, vale a igualdade

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx + o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Agora, escrevemos a bem conhecida desigualdade de Simon, a qual estabelece que

$$|\xi - \eta|^p \leq \begin{cases} C_p (|\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta) \cdot (\xi - \eta), & \text{se } p \geq 2, \\ \widetilde{C}_p [(|\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta) \cdot (\xi - \eta)]^{\frac{p}{2}} (|\xi|^p + |\eta|^p)^{\frac{2-p}{2}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases} \quad (2.36)$$

para qualquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, com C_p e $\widetilde{C}_p$ constantes positivas adequadas. Por isto, se $p \geq 2$ nós temos

$$\|u_n - u\|^p \leq C_p \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx. \quad (2.37)$$

Enquanto se $p \in (1, 2)$, pela desigualdade de Hölder aplicada com expoentes $2/p$ e $2/(2-p)$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \|u_n - u\|^p \\ & \leq \widetilde{C}_p \left[\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx \right]^{\frac{p}{2}} (\|u_n\|^p + \|u\|^p)^{\frac{2-p}{2}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Combinando (2.34)–(2.38), nós provamos que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$, concluindo a prova no **Caso (1)**.

Caso (2): $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| = 0$.

Assim, ou 0 é um ponto de acumulação para a sequência real $(\|u_n\|)_n$ e então há uma subsequência de $(u_n)_n$ convergindo fortemente para $u \equiv 0$, ou 0 é um ponto isolado de $(\|u_n\|)_n$. A primeira situação não pode ocorrer, pois implica que a solução trivial é um ponto crítico no nível c_λ . Isso é impossível, sendo $0 = I_\lambda(0) = c_\lambda > 0$. Daí só a última situação pode ocorrer, de modo que há uma subsequência, denotada por $(\|u_{n_k}\|)_k$, tal que $\inf_{k \in \mathbb{N}} \|u_{n_k}\| = d > 0$ e podemos prosseguir como no **Caso (1)**. Isto completa a prova do **Caso (2)** e do lema. □

Concluimos este capítulo com a prova do Teorema 2.0.1.

Demonstração do Teorema 2.0.1. Pelos Lemas 2.0.2, 2.0.3 e 2.0.5 obtemos que, para qualquer $\lambda \geq \lambda_0$ o funcional I_λ satisfaz todas as hipóteses necessárias para aplicar a Proposição 1.2.3. Assim, para todo $\lambda \geq \lambda_0$ existe um ponto crítico u_λ de I_λ ao nível c_λ . Dado que $I_\lambda(u_\lambda) = c_\lambda > 0$ necessariamente $u_\lambda \neq 0$. Para concluir, basta provar (2.1).

Sendo u_λ ponto crítico de I_λ ao nível c_λ , segue

$$c_\lambda = I_\lambda(u_\lambda) - \frac{1}{\sigma} \langle I'_\lambda(u_\lambda), u_\lambda \rangle \geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{\sigma} \right) \|u_\lambda\|^p M(\|u_\lambda\|^p) \quad \text{para todo } \lambda \geq \lambda_0, \quad (2.39)$$

onde a última desigualdade é consequência de (M_1) e (f_2) . Seja $\beta = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \|u_\lambda\|$ e assumamos por contradição que $\beta > 0$. Logo, existe uma sequência crescente $(\lambda_n)_n$ com $\lambda_n \rightarrow \infty$ tal que $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{\lambda_n}\|$. Assim, por (2.39) e pelo Lema 2.0.4 obtemos que

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{\lambda_j} \geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{\sigma} \right) \beta^p M(\beta^p) > 0,$$

por (M_2) . Dita contradição força que $\beta = 0$ e portanto (2.1) é válida.

□

3 Caso linear

Neste capítulo vamos resolver o problema (1) no caso linear, ou seja, exatamente com $f(x, t) = |t|^{\theta p-2} t$. Por isto, precisamos $M(t) = t^{\theta-1}$, assim que o (1) se torna como

$$\begin{cases} -\|u\|^{(\theta-1)p} \Delta_p u = \lambda |u|^{\theta p-2} u + |u|^{p^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

A partir de agora, no capítulo inteiro suponhamos que $N > p$ e $\theta \in (1, p^*/p)$, sem repeti-los.

A ideia para estudar (3.1) é aplicar a teoria de índice cohomológico dada na Seção 1.4. Esta teoria permite definir os autovalores do operador não-linear $-\|u\|^{(\theta-1)p} \Delta_p u$, como mostrado no Lema 3.0.8. Por isto, lembramos a definição de autovalor.

Definição 3.0.1. Um número real λ se diz autovalor de $-\|u\|^{(\theta-1)p} \Delta_p u$ se existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $v \neq 0$, solução do problema

$$\begin{cases} -\|u\|^{(\theta-1)p} \Delta_p u = \lambda |u|^{\theta p-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

A $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se chama autovetor relativo a λ .

No Lema 3.0.8 conseguiremos construir uma sequência $(\lambda_k)_k$ de autovalores para (3.2), que permite assim dar o resultado principal do capítulo.

Teorema 3.0.2. Seja $\lambda^{**} = S^\theta / |\Omega|^{(p^*-\theta p)/p^*}$. Então se $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+m} < \lambda_{k+m+1}$ para alguns $k, m \in \mathbb{N}$ e $\lambda > \lambda_{k+1} - \lambda^{**}$, o problema (3.1) tem m pares distintos de soluções não triviais $\pm u_j$ ($j=1, \dots, m$) tal que $u_j \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_{k+1}$.

Para provar Teorema 3.0.2, precisamos construir os nossos autovalores $(\lambda_k)_k$. Por isto, a ideia é argumentar similarmente como no Capítulo 4 de [19]. Definamos os operadores $A_p, B_p \in C(W_0^{1,p}(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*)$ como sendo

$$\langle A_p(u), v \rangle = \theta p \|u\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (3.3)$$

e

$$\langle B_p(u), v \rangle = \theta p \int_{\Omega} |u|^{\theta p-2} u v \, dx \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (3.4)$$

que verificam algumas propriedades, requeridas em [19].

Lema 3.0.3. O operador A_p satisfaz as seguintes propriedades:

(A₁) $(\theta p - 1)$ -homogêneo e ímpar;

(A₂) uniformemente positivo: existe um $a_0 > 0$ tal que

$$\langle A_p(u), u \rangle \geq a_0 \|u\|^{\theta p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega);$$

(A₃) é um operador potencial;

(A₄) é do tipo (S): verifica que toda sequência $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad e \quad \langle A_p(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

tem uma subsequência fortemente convergente para u .

Demonstração. As propriedades (A₁)–(A₃) seguem imediatamente pela definição em (3.3). Para mostrar que A_p cumpre (A₄) consideremos uma sequência $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e um $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega), \quad e \quad \langle A_p(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Logo, $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e portanto a menos de subsequência existe um $c_* > 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = c_*.$$

Note que, se $c_* = 0$, imediatamente $u_n \rightarrow 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Assumamos que $c_* > 0$, então pela segunda parte de (3.5)

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta p \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx,$$

o qual implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx = 0,$$

e também, pela primeira parte de (3.5), vale a igualdade

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx + o_n(1), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Assim, aplicando (2.36) de forma análoga ao discurso feito no Lema 2.0.5 obtemos a existência de uma subsequência de $(u_n)_n$ convergindo fortemente para u em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

Lema 3.0.4. O operador B_p satisfaz as seguintes propriedades:

(B₁) $(\theta p - 1)$ -homogêneo e ímpar;

(B_2) estritamente positivo:

$$\langle B_p(u), u \rangle > 0 \quad \forall u \neq 0;$$

(B_3) é um operador potencial compacto.

Demonstração. Por (3.4) temos imediatamente (B_1) – (B_2) . Para mostrar que B_p satisfaz (B_3) , basta tomar $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W_0^{1,p}(\Omega),$$

vejamos que $B_p(u_n) \rightarrow B_p(u)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, quando $n \rightarrow \infty$. Denotemos por $\|\cdot\|_*$ a norma de $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, então

$$\begin{aligned} \|B_p(u_n) - B_p(u)\|_* &= \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| \leq 1} |(B_p(u_n)(v) - B_p(u)(v))| \\ &= \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| \leq 1} \theta p \left| \int_{\Omega} (|u_n|^{\theta p-2} u_n - |u|^{\theta p-2} u) v \, dx \right|. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e a Proposição 1.3.1 obtemos a existência de uma constante $c_{\theta p}$ tal que

$$\begin{aligned} \|B_p(u_n) - B_p(u)\|_* &\leq \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| \leq 1} \theta p \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{\theta p-2} u_n - |u|^{\theta p-2} u|^{\frac{\theta p}{\theta p-1}} \, dx \right)^{\frac{\theta p-1}{\theta p}} \left(\int_{\Omega} |v|^{\theta p} \, dx \right)^{1/\theta p} \\ &\leq c_{\theta p} \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{\theta p-2} u_n - |u|^{\theta p-2} u|^{\frac{\theta p}{\theta p-1}} \, dx \right)^{\frac{\theta p-1}{\theta p}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pela Proposição 1.3.1 também obtemos que $u_n \rightarrow u$ em $L^{\theta p}(\Omega)$ e pela Proposição 1.3.2 existe uma função $h \in L^{\theta p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência

$$|u_n(x)| \leq h(x) \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto

$$||u_n|^{\theta p-2} u_n| \leq (h(x))^{\theta p-1} \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

mas $(h(x))^{\theta p-1} \in L^{\frac{\theta p}{\theta p-1}}(\Omega)$, assim pelo teorema de convergência dominada de Lebesgue, a expressão em (3.6) converge a zero, quando $n \rightarrow \infty$, concluindo que $B_p(u_n) \rightarrow B_p(u)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, quando $n \rightarrow \infty$. $\square$

Note que por (A_1) – (A_3) e (B_1) – (B_2) , podemos aplicar a Proposição 1.4.17, encontrando os potenciais de A_p e B_p dados por

$$\mathcal{I}_{\theta,p}(u) = \|u\|^{\theta p} \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_{\theta,p}(u) = \|u\|_{\theta p}^{\theta p},$$

respectivamente. Definamos para $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ o funcional $\Psi(u) = \frac{1}{\mathcal{I}_{\theta,p}(u)}$, e seja $\tilde{\Psi}$ a restrição de Ψ

$$\tilde{\Psi} = \Psi|_{\mathcal{N}}, \quad \text{onde } \mathcal{N} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \mathcal{I}_{\theta,p}(u) = 1\}. \quad (3.7)$$

Claramente $\mathcal{N}$ é uma variedade completa de classe C^1 . Nosso objetivo é mostrar que os valores e pontos críticos de $\tilde{\Psi}$ são autovalores e autovetores de (3.2), respectivamente. Em particular, os três seguintes lemas serão fundamentais para achar a sequência $(\lambda_k)_k$ de autovalores, aplicando a Proposição 1.4.18.

Lema 3.0.5. *Se W é um espaço vetorial Banach sobre $\mathbb{R}$ e $L, L_0 \in W^*$, então*

$$\|L|_{\text{Ker}(L_0)}\|_* = \min_{\mu \in \mathbb{R}} \|L - \mu L_0\|_*,$$

onde $\|\cdot\|_*$ denota a norma de W^* .

Demonstração. Para cada $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\|L|_{\text{Ker}(L_0)}\|_* = \sup_{\substack{v \in \text{Ker}(L_0) \\ \|v\|=1}} \langle L, v \rangle \leq \sup_{\|v\|=1} \langle L - \mu L_0, v \rangle = \|L - \mu L_0\|_*.$$

Por outro lado, aplicando o teorema de extensão de Hahn–Banach, existe um $\tilde{L} \in W^*$ tal que

$$\tilde{L}|_{\text{Ker}(L_0)} = L \quad \text{e} \quad \|\tilde{L}\| = \|L|_{\text{Ker}(L_0)}\|_*.$$

Dado que $\text{Ker}(L_0) \subseteq \text{Ker}(L - \tilde{L})$, existe um $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tal que $L - \tilde{L} = \mu_0 L_0$. Segue então $\|L - \mu_0 L_0\|_* = \|\tilde{L}\|_*$, mostrando assim a igualdade. $\square$

Lema 3.0.6. Temos que $u \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico de $\tilde{\Psi}$ se e só se $\lambda = \tilde{\Psi}(u)$ é um autovetor de (3.2).

Demonstração. Note que, para $u \in \mathcal{N}$

$$\tilde{\Psi}'(u) = -\frac{J'_{\theta,p}(u)}{\mathcal{I}_{\theta,p}(u)} = -\tilde{\Psi}(u)^2 B_p(u) \quad \text{e} \quad I'_{\theta,p}(u) = A_p(u).$$

Então pelo Lema 3.0.5, $\tilde{\Psi}'(u) = 0$ se e só se

$$\mu A_p(u) + \tilde{\Psi}(u)^2 B_p(u) = 0 \quad \text{para algum } \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Suponha que $u \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico de $\tilde{\Psi}$, então por (3.8)

$$\mu = -\tilde{\Psi}(u)^2 \frac{\langle B_p(u), u \rangle}{\langle A_p(u), u \rangle} = -\tilde{\Psi}(u)^2 \frac{\mathcal{I}_{\theta,p}(u)}{\mathcal{J}_{\theta,p}(u)} = -\tilde{\Psi}(u) < 0.$$

aplicando novamente (3.8) obtemos

$$A_p(u) = \tilde{\Psi}(u)B_p(u),$$

ou seja $\lambda = \tilde{\Psi}(u)$ é um autovalor de (3.2).

Reciprocamente suponha que $\lambda = \tilde{\Psi}(u)$ seja um autovalor de (3.2), então

$$\lambda = \frac{\mathcal{I}_{\theta,p}(u)}{\mathcal{J}_{\theta,p}(u)} \quad \text{e} \quad A_p(u) = \lambda B_p(u).$$

Logo, tomando $\mu = -\tilde{\Psi}(u)$ obtemos (3.8) e portanto $\tilde{\Psi}'(u) = 0$.

□

Lema 3.0.7. *O funcional $\tilde{\Psi}$ dado em (3.7) satisfaz a condição (PS), restrita em $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_n \subset \mathcal{N}$ tais que

$$\tilde{\Psi}(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \tilde{\Psi}'(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Claramente $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, portanto existe um $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por (B_3) , temos $B_p(u_n) \rightarrow B_p(u)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, então

$$\tilde{\Psi}(u_n) = \frac{\theta p}{\langle B_p(u_n), u_n \rangle} \longrightarrow \frac{\theta p}{\langle B_p(u), u \rangle} \neq 0,$$

que implica $c \neq 0$.

Pelo Lema 3.0.5 existe uma sequência $(\mu_n)_n \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\mu_n A_p(u_n) + \tilde{\Psi}(u_n)^2 B_p(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Aplicando (3.9) a u_n , obtemos que $\mu_n + \tilde{\Psi}(u_n) \rightarrow 0$ que implica $\mu_n \rightarrow -c \neq 0$. Aplicando (3.9) a $u_n - u$, obtemos $\langle A_p(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$ dado que $\langle B_p(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$, logo por (A_4) , a menos de subsequência, temos que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e como $\mathcal{N}$ é fechado concluímos $u_n \rightarrow u \in \mathcal{N}$. □

Agora podemos construir em particular nossa sequência $(\lambda_k)_k$ de autovalores de (3.2), aplicando a Proposição 1.4.18. A ideia é argumentar similarmente ao Teorema 4.6 de [19].

Lema 3.0.8. *Denotemos por $\mathcal{F}$ a classe de subconjuntos simétricos de $\mathcal{N}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina*

$$\mathcal{F}_k = \{N \in \mathcal{F} : \text{ind}(N) \geq k\} \quad \text{e} \quad \lambda_k = \inf_{N \in \mathcal{F}_k} \sup_{u \in N} \tilde{\Psi}(u). \quad (3.10)$$

Então $(\lambda_k)_k$ é uma sequência não decrescente de autovalores para (3.2), que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) se $\lambda_k = \dots = \lambda_{k+m-1} = \lambda$, então $\text{ind}(\tilde{K}_\lambda) \geq m$;

(ii) o mínimo autovalor, chamado primeiro autovalor, é dado por

$$\lambda_1 = \min_{u \in \mathcal{N}} \tilde{\Psi}(u) = \min_{u \neq 0} \frac{\mathcal{I}_{\theta,p}(u)}{\mathcal{J}_{\theta,p}(u)};$$

(iii) temos $\text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Psi}_{\lambda_k}) < k \leq \text{ind}(\tilde{\Psi}^{\lambda_k})$. Se $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, então

$$\text{ind}(\tilde{\Psi}^{\lambda_k}) = \text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Psi}_{\lambda_k}) = \text{ind}(\tilde{\Psi}^\lambda) = \text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Psi}_{\lambda_{k+1}}) = k;$$

(iv) $\lambda_k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$.

Demonstração. Pelos Lemas 3.0.6 e 3.0.7 segue que $(\lambda_k)_k$ em (3.10) é uma sequência de autovalores para (3.2). Pela definição em (3.10) é imediato que $(\lambda_k)_k$ seja não decrescente. Usando Lemas 3.0.3 e 3.0.4 podemos aplicar a Proposição 1.4.18 e concluir os itens (i), (iii) e (iv). Para (ii) basta mostrar que $\lambda_1 = \min_{u \in \mathcal{N}} \tilde{\Psi}(u)$, pois $\mathcal{I}_{\theta,p}$, $\mathcal{J}_{\theta,p}$ são θp -homogêneos. Como λ_1 é um valor crítico para $\tilde{\Psi}$, existe um $u_1 \in \mathcal{N}$ tal que $\lambda_1 = \tilde{\Psi}(u_1)$, então $\lambda_1 \geq \inf_{u \in \mathcal{N}} \tilde{\Psi}(u)$. Por outro lado, pela Proposição 1.4.11 dado um $u \in \mathcal{N}$ temos $\{-u, u\} \in \mathcal{F}_1$, assim

$$\lambda_1 \leq \sup_{v \in \{-u, u\}} \tilde{\Psi}(v) = \tilde{\Psi}(u),$$

ou seja, $\lambda_1 \leq \tilde{\Psi}(u)$ para todo $u \in \mathcal{N}$, e portanto $\lambda_1 \leq \inf_{u \in \mathcal{N}} \tilde{\Psi}(u)$ concluindo a prova do lema. $\square$

Observamos que $\lambda_1 > \lambda^{**}$, com λ^{**} introduzido no Teorema 3.0.2. Na verdade, denotando com $u_1 \in \mathcal{N}$ o autovalor de λ_1 , dado na prova do Lema 3.0.8, note que pela desigualdade de Hölder

$$\lambda_1 = \frac{\|u_1\|^{\theta p}}{\|u_1\|_{\theta p}^{\theta p}} \geq \frac{S^\theta \|u_1\|_{p^*}^{\theta p/p^*}}{\|u_1\|_{\theta p}^{\theta p}} > \frac{S^\theta}{|\Omega|^{1-\theta p/p^*}} = \lambda^{**}, \quad (3.11)$$

com desigualdade estrita, pois é bem sabido que S não é atingido em u_1 . Portanto, graças a (3.11) o Teorema 3.0.2 é bem configurado. Para provar o Teorema 3.0.2, lembremos que o funcional associado ao problema (3.1) e sua derivada são

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda}{\theta p} \int_\Omega |u|^{\theta p} dx - \frac{1}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx, \quad \text{e para cada } v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\langle I'_\lambda(u), v \rangle = \|u\|^{(\theta-1)p} \int_\Omega \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{\theta p-2} uv dx - \int_\Omega |u|^{p^*-2} uv dx.$$

O seguinte resultado mostra que I_λ satisfaz $(PS)_c$ com c num certo intervalo, independentemente do valor de λ . A prova é similar a aquela do Lema 2.0.5, todavia com a presença do termo linear no novo funcional I_λ , precisamos argumentar diferentemente. Por uma questão de completude do capítulo, vamos dar a prova inteira.

Lema 3.0.9. Para cada $\lambda > 0$, o funcional I_λ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in (0, c^*)$, onde $c^* := \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*}\right) S^{\frac{\theta}{1-\theta p/p^*}}$.

Demonstração. Fixemos $\lambda > 0$ e $c \in (0, c^*)$. Seja $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência tal que

$$I_\lambda(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

A ideia é aplicar o princípio de concentração-compacidade dado na Proposição 1.3.7 para achar uma subsequência fortemente convergente de $(u_n)_n$.

Primeiro, vamos mostrar que $(u_n)_n$ é limitada $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por isto, suponhamos por contradição que a menos de subsequência $\|u_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, e $u_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, a sequência $(u_n \|u_n\|^{-1})_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então por (3.12)

$$\begin{aligned} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \|u_n\|^{-1} \rangle &= \frac{\|u_n\|^{\theta p} - \lambda \|u_n\|_{\theta p}^{\theta p} - \|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|} \\ &= \frac{\theta p I_\lambda(u_n) + \left(\frac{\theta p}{p^*} - 1\right) \|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dado que $\theta p < p^*$, segue da estimativa acima combinada com (3.12) que

$$\frac{\|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.13)$$

e portanto, como $\|u_n\| \rightarrow \infty$ se $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\frac{\|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|^{\theta p}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.14)$$

e similarmente

$$\frac{\|u_n\|_{p^*}^{\theta p}}{\|u_n\|^{\theta p}} = \frac{\|u_n\|_{p^*}^{\theta p}}{\|u_n\|^{\theta p/p^*} \|u_n\|_{\theta p(p^*-1)/p^*}^{\theta p}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

Agora, vamos mostrar também que

$$\frac{\|u_n\|_{\theta p}^{\theta p}}{\|u_n\|^{\theta p}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{\theta p}^{\theta p} &= \int_{\Omega} |u_n|^{\theta p} dx \leq \left(\int_{\Omega} |u_n|^{p^*} dx \right)^{\theta p/p^*} |\Omega|^{1-\theta p/p^*} \\ &= \|u_n\|_{p^*}^{\theta p} |\Omega|^{1-\theta p/p^*}, \end{aligned}$$

e assim

$$0 \leq \frac{\|u_n\|_{\theta p}^{\theta p}}{\|u_n\|^{\theta p}} \leq \frac{\|u_n\|_{p^*}^{\theta p}}{\|u_n\|^{\theta p}} |\Omega|^{1-\theta p/p^*}, \quad (3.17)$$

que prova (3.16), graças a (3.15). Por (3.12) e do fato que $\|u_n\| \rightarrow \infty$, obtemos que

$$\langle I'_\lambda(u_n), u_n \|u_n\|^{-\theta p} \rangle \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, usando (3.14) e (3.16)

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \|u_n\|^{-\theta p} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|^{\theta p} - \lambda \|u_n\|_{\theta p}^{\theta p} - \|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|^{\theta p}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lambda \frac{\|u_n\|_{\theta p}^{\theta p}}{\|u_n\|^{\theta p}} - \frac{\|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|^{\theta p}} \right) = 1, \end{aligned}$$

que dá a contradição desejada.

Assim, segue que $(u_n)_n$ tem que ser limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, aplicando (1.12), (1.13) e a Proposição 1.3.2 a menos de subsequência existem um $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e um $\alpha \geq 0$ tais que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), & \|u_n\| &\rightarrow \alpha, \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ em } L^{p^*}(\Omega), \\ u_n &\rightarrow u \text{ em } L^s(\Omega), \quad s \in [1, p^*) \quad , \quad u_n \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Note que, se $\alpha = 0$ a conclusão do lema segue. Portanto assumiremos que $\alpha > 0$. Então, aplicando um discurso semelhante a aquele feito na demonstração do Lema 2.0.5 obtemos a existência de duas medidas não negativas μ, ν tais que

$$|\nabla u_n(x)|^p dx \xrightarrow{*} \mu \quad \text{e} \quad |u_n(x)|^{p^*} dx \xrightarrow{*} \nu \quad \text{em } \mathcal{M}(\overline{\Omega}),$$

$$\int_{\Omega} \psi |\nabla u_n|^p dx \rightarrow \int_{\Omega} \psi d\mu \quad \text{para todo } \psi \in C_b(\Omega), \quad (3.19)$$

e

$$\int_{\Omega} \psi |u_n|^{p^*} dx \rightarrow \int_{\Omega} \psi d\nu \quad \text{para todo } \psi \in C_b(\Omega). \quad (3.20)$$

Assim, aplicando a Proposição 1.3.7, existe um conjunto $\mathcal{J}$ no máximo enumerável e três famílias, $(x_j)_{j \in \mathcal{J}} \subset \overline{\Omega}$ de vetores distintos e $(\nu_j)_{j \in \mathcal{J}}, (\mu_j)_{j \in \mathcal{J}} \subset [0, \infty)$ de números tais que

$$\nu = |u(x)|^{p^*} dx + \sum_{j \in \mathcal{J}} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \mu \geq |\nabla u(x)|^p dx + \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j \delta_{x_j}, \quad (3.21)$$

com

$$\nu_j \leq S^{-p^*/p} \mu_j^{p^*/p}. \quad (3.22)$$

Como na prova do Lema 2.0.5, fixemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ tal que $\varphi \equiv 1$ em $B(0, 1)$ e $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B(0, 2)$. Para $\varepsilon > 0$ e $j_0 \in \mathcal{J}$ definamos $\varphi_{\varepsilon, j_0}(x) = \varphi((x - x_{j_0})/\varepsilon)$. A sequência $(\varphi_{\varepsilon, j_0} u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\text{Supp}(\varphi_{\varepsilon, j_0}) \subset B(x_{j_0}, 2\varepsilon)$, assim, por (3.12) temos $\langle I'_\lambda(u_n), \varphi_{\varepsilon, j_0} u_n \rangle \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, então

$$\begin{aligned} \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |\nabla u_n|^p dx &= - \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \\ &+ \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{\theta p} \varphi_{\varepsilon, j_0} dx + \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |u_n|^{p^*} dx + o_n(1), \end{aligned} \quad (3.23)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Argumentando como no Lema 2.0.5, obtemos imediatamente (2.16) que junto com (3.18) prova

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^{(\theta-1)p} \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \right| = 0. \quad (3.24)$$

Enquanto, sendo $\varphi_{\varepsilon, j_0} \leq 1$ com $\text{Supp}(\varphi_{\varepsilon, j_0}) \subset B(x_{j_0}, 2\varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |u_n|^{\theta p} \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \right| &= \left| \int_{B(x_{j_0}, 2\varepsilon)} |u_n|^{\theta p} \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \right| \\ &\leq \int_{B(x_{j_0}, 2\varepsilon)} |u_n|^{\theta p} dx, \end{aligned}$$

que junto com (3.18) prova

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} |u_n|^{\theta p} \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \right| = 0. \quad (3.25)$$

Segue de (3.23)–(3.25) que

$$\|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |\nabla u_n|^p dx = \int_{\Omega} |u_n|^{p^*} \varphi_{\varepsilon, j_0} dx + o_n(1), \quad (3.26)$$

mas por outro lado, como $\varphi_{\varepsilon, j_0} \leq 1$ podemos concluir que

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \right)^{\theta} \leq \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |\nabla u_n|^p dx + o_n(1). \quad (3.27)$$

Logo por (3.19), (3.20), (3.26) e (3.27), enviando $n \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0^+$ obtemos que

$$\mu_{j_0}^{\theta} \leq v_{j_0},$$

portanto, com (2.14) segue que

$$\nu_{j_0} = 0 \quad \text{ou} \quad \nu_{j_0} \geq S_{p^* - \theta p}^{\frac{\theta p^*}{p^* - \theta p}}. \quad (3.28)$$

Suponhamos por absurdo que $\nu_{j_0} \geq S^{\frac{\theta p^*}{p^* - \theta p}}$, então por (3.12)

$$\begin{aligned} c &= I_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta p} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle + o_n(1) \\ &= \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_\Omega |u_n|^{p^*} dx + o_n(1) \\ &\geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_\Omega \varphi_{\varepsilon, j_0} |u_n|^{p^*} dx + o_n(1), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência de $\varphi_{\varepsilon, j_0} \leq 1$. Enviando $n \rightarrow 0$ e $\varepsilon \rightarrow 0^+$ obtemos a contradição

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) S^{\frac{\theta}{1 - \theta p/p^*}} = c^*$$

Logo, como j_0 foi arbitrário, tem que ser $\nu_j = 0$ para todo $j \in \mathcal{J}$. Assim aplicando (3.20) com $\psi \equiv 1$ concluímos que $u_n \rightarrow u$ em $L^{p^*}(\Omega)$.

Como $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, por (3.12) obtemos que $\langle I'_\lambda(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, ou seja

$$\begin{aligned} \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^{\theta p-2} u_n (u_n - u) dx \\ + \int_\Omega |u_n|^{p^*-2} u_n (u_n - u) dx = o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por (3.18) e pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_\Omega |u_n|^{\theta p-2} u_n (u_n - u) dx \right| = 0, \quad (3.30)$$

utilizando a desigualdade de Hölder e o fato que $u_n \rightarrow u$ in $L^{p^*}(\Omega)$ segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_\Omega |u_n|^{p^*-2} u_n (u_n - u) dx \right| = 0. \quad (3.31)$$

Então, por (3.29)–(3.31), deduzimos que

$$\|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx = o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

o qual implica que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx = o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.32)$$

pois $\alpha > 0$ em (3.18).

A partir disto, argumentando como na parte final do Lema 2.0.5 nós ainda obtemos (2.35)–(2.38) que permite provar que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$, concluindo a prova do lema.

□

Observamos que pelo Lema 3.0.8 se $\lambda_{k+m} < \lambda_{k+m+1}$ então $\text{ind}(\tilde{\Psi}^{k+m}) = k+m$. Com a ideia de aplicar a Proposição 1.4.13, vamos construir um subconjunto simétrico e compacto A_0 de $\tilde{\Psi}^{k+m}$ com índice semelhante.

Por isto, definamos para $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ o operador

$$\langle \mathcal{L}(u), v \rangle := \|u\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \quad (3.33)$$

Vamos provar que $\mathcal{L}(u)$ verifica a seguinte propriedade.

Definição 3.0.10. *Dado um espaço vetorial Banach W , dizemos que um operador*

$T : W \longrightarrow W^$ é estritamente monótono se*

$$\langle T(u) - T(v), u - v \rangle > 0 \quad \forall u, v \in W, \quad \text{com } u \neq v,$$

e vale a igualdade se e somente se $u = v$.

Lema 3.0.11. *O operador $\mathcal{L}(u)$ em (3.33) é estritamente monótono, seguindo a Definição 3.0.10.*

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder

$$\langle \mathcal{L}(u), v \rangle = \|u\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \leq \|u\|^{\theta p-1} \|v\|. \quad (3.34)$$

Por isto, segue que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(v), u - v \rangle &= \|u\|^{\theta p} - \langle \mathcal{L}(u), v \rangle - \langle \mathcal{L}(v), u \rangle + \|v\|^{\theta p} \\ &\geq \|u\|^{\theta p} - \|u\|^{\theta p-1} \|v\| - \|v\|^{\theta p-1} \|u\| + \|v\|^{\theta p} \\ &= (\|u\|^{\theta p-1} - \|v\|^{\theta p-1})(\|u\| - \|v\|) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Logo, se $\langle \mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(v), u - v \rangle = 0$, então $\|u\| = \|v\|$, e por (3.34)

$$\langle \mathcal{L}(u), u \rangle = \|u\|^{\theta p} = \|u\|^{(\theta p-1)} \|u\| \geq \langle \mathcal{L}(u), v \rangle \implies \langle \mathcal{L}(u), u - v \rangle \geq 0, \quad (3.36)$$

$$\langle \mathcal{L}(v), v \rangle = \|v\|^{\theta p} = \|v\|^{(\theta p-1)} \|v\| \geq \langle \mathcal{L}(v), u \rangle \implies \langle \mathcal{L}(v), v - u \rangle \geq 0, \quad (3.37)$$

segue de (3.35) que

$$\langle \mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(v), u - v \rangle = \langle \mathcal{L}(u), u - v \rangle - \langle \mathcal{L}(v), u - v \rangle = 0,$$

então por (3.36) e (3.37) $\langle \mathcal{L}(u), u - v \rangle = 0$ e $\langle \mathcal{L}(v), v - u \rangle = 0$, em particular valem as igualdades

$$\langle \mathcal{L}(u), v \rangle = \|u\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \|u\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx = \|u\|^{\theta p-1} \|v\|,$$

$$\langle \mathcal{L}(v), u \rangle = \|v\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = \|v\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla v|^{p-1} |\nabla u| \, dx = \|v\|^{\theta p-1} \|u\|.$$

A igualdade na desigualdade de Hölder implica que existem duas constantes não negativas α e β (não nulas simultaneamente), tais que

$$\alpha |\nabla u(x)| = \beta |\nabla v(x)| \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega,$$

e pela igualdade na desigualdade de Schwarz concluímos

$$\alpha \nabla u(x) = \beta \nabla v(x) \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega,$$

pelo qual $\alpha u = \beta v$, e assim $\|\alpha u\| = \|\beta v\|$, mas $\|u\| = \|v\|$ e α, β são não negativos, portanto obtemos que $u = v$.

□

Lema 3.0.12. Para cada $w \in L^{\theta p}(\Omega)$, o problema

$$\begin{cases} \|u\|^{(\theta-1)p} \Delta_p u = \lambda |w|^{\theta p-2} w & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.38)$$

tem única solução fraca $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Mais ainda, o operador $J : L^{\theta p}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$, definido pela lei $w \mapsto J(w) = u$, com u solução de (3.38), é contínuo.

Demonstração. De fato, a existência segue de um argumento de minimização padrão (veja o Corolário 3.23 de [5]) e a unicidade segue do Lema 3.0.11. Para mostrar a continuidade do operador J , tomemos $(w_n)_n$ em $L^{\theta p}(\Omega)$ tal que $w_n \rightarrow w$ em $L^{\theta p}(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$ e seja $u_n = J(w_n)$. Então, considerando

$$\langle \mathcal{L}(u_n), v \rangle = \int_{\Omega} |w_n|^{\theta p-2} w_n v \, dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

e testando com $v = u_n$, obtemos pela desigualdade de Hölder

$$\|u_n\|^{\theta p} = \langle \mathcal{L}(u_n), u_n \rangle = \int_{\Omega} |w_n|^{\theta p-2} w_n u_n \, dx \leq \left(\int_{\Omega} |w_n|^{\theta p} \, dx \right)^{\frac{\theta p-1}{\theta p}} \left(\int_{\Omega} |u_n|^{\theta p} \, dx \right)^{\frac{1}{\theta p}},$$

e assim, aplicando a Proposição 1.3.1 mostramos que $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, a menos de subsequência, pela Proposição 1.3.1 existem um $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e um $\alpha \geq 0$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u_n\| \rightarrow \alpha, \quad (3.39)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^s(\Omega), \quad 1 \leq s < p^*, \quad u_n \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Mostraremos que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por isto procederemos similarmente à parte final da prova do Lema 3.0.9. Se $\alpha = 0$, então $u_n \rightarrow 0$ e $u = 0$. Se assumimos que $\alpha > 0$, por (3.38) segue que

$$\langle \mathcal{L}(u_n), u_n - u \rangle = \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx = \int_{\Omega} |w_n|^{\theta p-2} w_n (u_n - u), \quad (3.40)$$

enquanto pelo teorema de convergência dominada de Lebesgue junto com (3.39) obtemos

$$\int_{\Omega} |w_n|^{\theta p-2} w_n (u_n - u) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Como $\alpha > 0$, segue de (3.40) a convergência

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

assim, temos as ferramentas necessárias para aplicar (2.36) e obter a convergência forte $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e em particular $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ q.t.p. Ω . Por outro lado, dada $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pelo teorema de convergência dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(u_n), \varphi \rangle &= \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} |w_n|^{\theta p-2} w_n \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} |w|^{\theta p-2} w \varphi dx, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

enquanto

$$\|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi dx \rightarrow \|u\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \quad n \rightarrow \infty.$$

Portanto, sendo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ arbitrária, temos $J(w) = u$ e $J(w_n) \rightarrow J(w) = u$ quando $n \rightarrow \infty$, mostrando a continuidade de J .

□

Lema 3.0.13. *Se $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, então $\tilde{\Psi}^{\lambda_k}$ tem um subconjunto A_0 simétrico e compacto em $W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\text{ind}(A_0) = k$.*

Demonstração. Seja

$$\pi_{\theta p}(u) = \frac{u}{\|u\|_{\theta p}}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$$

chamada de projeção radial sobre $\mathcal{N}_{\theta p} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{\theta p} = 1\}$, e definamos

$$A = \pi_{\theta p}(\tilde{\Psi}^{\lambda_k}) = \{w \in \mathcal{N}_{\theta p} : \|w\|^{\theta p} \leq \lambda_k\}.$$

Então pela Proposição 1.4.11 e pelo Lema 3.0.8 segue que $\text{ind}(A) = \text{ind}(\tilde{\Psi}^{\lambda_k}) = k$.

Seja $u = J(v)$ com $v \in A$ e J o operador do Lema 3.0.12. Então se $\mathcal{L}$ é o operador definido em (3.33) temos as desigualdades

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(u), u \rangle &= \|u\|^{\theta p} = \int_{\Omega} |v|^{\theta p-2} uv \, dx \leq \left(\int_{\Omega} |v|^{\theta p} \, dx \right)^{\frac{\theta p-1}{\theta p}} \left(\int_{\Omega} |u|^{\theta p} \, dx \right)^{\frac{1}{\theta p}}, \\ 1 = \langle \mathcal{L}(u), v \rangle &\leq \|u\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \leq \|u\|^{\theta p-1} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|^{\theta p-1} \|v\|. \end{aligned}$$

Destas duas desigualdades nós obtemos

$$\frac{\|u\|^{\theta p}}{\|u\|_{\theta p}} \leq 1 \leq \|u\|^{\theta p-1} \|v\| \implies \|\pi_{\theta p}(u)\| = \frac{\|u\|}{\|u\|_{\theta p}} \leq \|v\|$$

e assim $\pi_{\theta p}(J(A)) \subseteq A$. Defina $\bar{J} = \pi_{\theta p} \circ J$, seja $\bar{A} = \bar{J}(A)$ e considere $(\varphi_n)_n \subset \bar{A}$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $v_n \in A$ tal que $\bar{J}(v_n) = \varphi_n$. Como $(v_n)_n \subset A$ obtemos $\|v_n\|^{\theta p} \leq \lambda_k$, e portanto existe um $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então pela Proposição 1.3.1 e semicontinuidade inferior da norma

$$v_n \rightarrow v, \quad \text{em } L^{\theta p}(\Omega), \quad e \quad \|v\|^{\theta p} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^{\theta p} \leq \lambda_k,$$

de onde $v \in A$. Segue pela continuidade de J em Lema 3.0.12 que $J(v_n) \rightarrow J(v)$, e assim $\varphi_n = \bar{J}(v_n) \rightarrow \bar{J}(v) \in \bar{A}$, quando $n \rightarrow \infty$. Isto mostra que $\bar{A}$ é compacto em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por outro lado, dado que $\bar{A} \subset A$ e $\bar{J}$ é uma aplicação contínua e ímpar de A para $\bar{A}$, obtemos pela Proposição 1.4.11 a igualdade $\text{ind}(A) = \text{ind}(\bar{A}) = k$. Finalmente, seja

$$\pi(u) = \frac{u}{\|u\|}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$$

chamada de projeção radial sobre $\mathcal{N}$. Definamos $A_0 = \pi(\bar{A})$, então $A_0 \subseteq \tilde{\Psi}^{\lambda_k}$ é compacto em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e satisfaz $\text{ind}(\bar{A}) = \text{ind}(A_0) = k$.

□

Concluimos o capítulo dando a demonstração do Teorema 3.0.2, baseada principalmente na Proposição 1.4.13.

Demonstração do Teorema 3.0.2. Pelo Lema 3.0.9 o operador I_{λ} satisfaz $(PS)_c$ para qualquer

$$0 < c < \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) S^{\frac{\theta}{1-\theta p/p^*}}.$$

Assim nossa ideia é aplicar a Proposição 1.4.13 com $b = \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) S^{\frac{\theta}{1-\theta p/p^*}}$.

Pelo Lema 3.0.13, temos que $\tilde{\Psi}^{\lambda_{k+m}}$ tem um subconjunto compacto e simétrico A_0 com $\text{ind}(A_0) =$

$k + m$. Pela Proposição 1.4.13, denotamos $B_0 = \tilde{\Psi}_{\lambda_{k+m}}$. Segue então pelo Lema 3.0.8 que $\text{ind}(\mathcal{N} \setminus B_0) = k + m$.

Sejam $R > r > 0$ e A , B e X como na Proposição 1.4.13. Para $u \in B_0$ e usando (1.14) nós temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(ru) &= \frac{r^{\theta p}}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda r^{\theta p}}{\theta p} \int_{\Omega} |u|^{\theta p} dx - \frac{r^{p^*}}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \\ &\geq \frac{r^{\theta p}}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda r^{\theta p}}{\theta p} \frac{\|u\|^{\theta p}}{\lambda_{k+m}} - \frac{r^{p^*}}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \\ &\geq \frac{r^{\theta p}}{\theta p} \|u\|^{\theta p} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) - \frac{r^{p^*}}{p^*} \|u\|^{p^*} S^{-p^*/p} = \frac{r^{\theta p}}{\theta p} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) - \frac{r^{p^*}}{p^*} S^{-p^*/p}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dado que $\lambda < \lambda_{k+m}$ e $\theta p < p^*$, segue de (3.41) que $\inf_{u \in B} I_\lambda(u) > 0$ para r suficientemente pequeno. Agora, para $u \in A_0 \subset \tilde{\Psi}^{\lambda_{k+m}}$ e pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} I_\lambda(Ru) &= \frac{R^{\theta p}}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda R^{\theta p}}{\theta p} \int_{\Omega} |u|^{\theta p} dx - \frac{R^{p^*}}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \\ &\leq \frac{R^{\theta p}}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda R^{\theta p}}{\theta p} \frac{\|u\|^{\theta p}}{\lambda_{k+m}} - \frac{R^{p^*}}{p^*} \left(\frac{\int_{\Omega} |u|^{\theta p} dx}{\lambda_{k+m} |\Omega|^{1 - \frac{\theta p}{p^*}}} \right)^{p^*/\theta p} \\ &\leq \frac{R^{\theta p}}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda R^{\theta p}}{\theta p} \frac{\|u\|^{\theta p}}{\lambda_{k+m}} - \frac{R^{p^*}}{p^*} \left(\frac{\|u\|^{\theta p}}{\lambda_{k+m} |\Omega|^{1 - \frac{\theta p}{p^*}}} \right)^{p^*/\theta p} \\ &= \frac{R^{\theta p}}{\theta p} \|u\|^{\theta p} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+m}}\right) - \frac{R^{p^*}}{p^*} \frac{1}{\left(\lambda_{k+m} |\Omega|^{1 - \frac{\theta p}{p^*}}\right)^{p^*/\theta p}}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Dado que $\lambda < \lambda_{k+m}$ e $\theta p < p^*$, por (3.42) podemos escolher $R > r$ suficientemente grande tal que $I_\lambda(u) \leq 0$, para cada $u \in A$. Para $u \in X$, pela desigualdade de Hölder segue

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda}{\theta p} \int_{\Omega} |u|^{\theta p} dx - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \\ &\leq \frac{\lambda_{k+m} - \lambda}{\theta p} \int_{\Omega} |u|^{\theta p} dx - \frac{1}{p^*} \left(\frac{\int_{\Omega} |u|^{\theta p} dx}{|\Omega|^{1 - \frac{\theta p}{p^*}}} \right)^{p^*/\theta p} \\ &= \frac{\lambda_{k+m} - \lambda}{\theta p} \int_{\Omega} |u|^{\theta p} dx - \frac{1}{p^*} \left(\frac{\|u\|^{\theta p}}{|\Omega|^{1 - \frac{\theta p}{p^*}}} \right)^{p^*/\theta p}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Defina $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ com

$$g(\tau) = \left(\frac{\lambda_{k+m} - \lambda}{\theta p} \right) \tau - \frac{1}{p^*} \left(\frac{\tau}{|\Omega|^{1 - \frac{\theta p}{p^*}}} \right)^{p^*/\theta p}.$$

Então, como $\theta p < p^*$ e $\lambda_{k+m} > \lambda$, a g atinge um máximo no seu único ponto crítico $\tau = (\lambda_{k+m} - \lambda)^{\theta p/(p^* - \theta p)} |\Omega|$, com valor

$$\max g(\tau) = \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) (\lambda_{k+m} - \lambda)^{\frac{p^*}{p^* - \theta p}} |\Omega|,$$

pelo qual

$$\sup_{u \in X} I_\lambda(u) \leq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) (\lambda_{k+m} - \lambda)^{\frac{p^*}{p^* - \theta p}} |\Omega| \leq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) S^{\frac{\theta p^*}{p^* - \theta p}}$$

já que $\lambda_{k+m} - \lambda^{**} < \lambda$. Agora, pela Proposição 1.4.13 obtemos a existência de m pares distintos de pontos críticos $\pm u_j$, com $j = 1, \dots, m$, de I_λ tais que

$$0 < I(u_j) \leq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) (\lambda_{k+m} - \lambda)^{\frac{p^*}{p^* - \theta p}} |\Omega| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \lambda \rightarrow \lambda_{k+m},$$

que implica

$$\left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \|u\|_{p^*}^{p^*} = I_\lambda(u_j) - \frac{1}{\theta p} \langle I'_\lambda(u_j), u_j \rangle = I_\lambda(u_j) \rightarrow 0,$$

quando $\lambda \rightarrow \lambda_{k+m}$. Além disso, pela desigualdade de Hölder $u_j \rightarrow 0$ em $L^p(\Omega)$, quando $\lambda \rightarrow \lambda_{k+m}$, e assim concluímos

$$\|u_j\|^{\theta p} = \left(\theta p I_\lambda(u_j) + \lambda \|u_j\|_{\theta p}^{\theta p} + \frac{\theta p}{p^*} \|u_j\|_{p^*}^{p^*} \right) \rightarrow 0,$$

quando $\lambda \rightarrow \lambda_{k+m}$.

□

4 Caso sublinear

Neste último capítulo vamos estudar o problema (1) no caso sublinear. Ou seja, consideramos

$$\begin{cases} -\|u\|^{(\theta-1)p} \Delta_p u = \lambda |u|^{q-2} u + |u|^{p^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

com $1 < q < \theta p < p^*$, que será assumido no capítulo inteiro, sem repeti-lo. Neste caso o funcional associado ao problema (4.1) vem dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx. \quad (4.2)$$

Assim, podemos estabelecer o resultado principal do capítulo.

Teorema 4.0.1. *Existe um $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ o problema (4.1) tem uma sequência de soluções $(u_n)_n$ com $I_\lambda(u_n) \leq 0$ e $(u_n)_n$ converge a zero quando $n \rightarrow \infty$.*

A ideia para provar o Teorema 4.0.1 é aplicar a Proposição 1.5.4. Por isto, precisamos provar a condição $(PS)_c$ com c suficientemente pequeno. Argumentaremos similarmente ao Lema 3.0.9, porém devemos estudar diferentemente o termo sublinear do novo I_λ . Em particular, consideremos já que a sequência de $(PS)_c$ seja limitada.

Lema 4.0.2. *Fixado $\lambda > 0$, seja $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma $(PS)_c$ sequência para I_λ , com $(u_n)_n$ limitada e*

$$c < \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) S_{\frac{\theta p^*}{p^* - \theta p}} - \left[\frac{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p} \right) |\Omega|^{\frac{p^* - q}{p^*}}}{\left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right)} \right]^{\frac{1}{p^* - q}} \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \left(\frac{p^*}{q} - 1 \right) \lambda^{\frac{p^*}{p^* - q}}. \quad (4.3)$$

Então $(u_n)_n$ admite uma subsequência fortemente convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Fixemos $\lambda > 0$ e c que verifica (4.3). Seja $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada tal que

$$I_\lambda(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

Sendo $(u_n)_n$ limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, aplicando (1.12), (1.13) e a Proposição 1.3.2, temos que, a menos de subsequência, existem um $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e um $\alpha \geq 0$ tais que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), & \|u_n\| &\rightarrow \alpha, \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ em } L^{p^*}(\Omega), \\ u_n &\rightarrow u \text{ em } L^s(\Omega), \quad s \in [1, p^*) \quad , \quad u_n \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Note que, se $\alpha = 0$ a conclusão do lema segue. Portanto assumiremos que $\alpha > 0$. Agora podemos argumentar exatamente como na demonstração do Lema 2.0.5, usando (4.5) e provando (3.19)–(3.28), com

$$\begin{aligned} \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |\nabla u_n|^p dx &= - \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} |u_n|^q \varphi_{\varepsilon, j_0} dx + \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon, j_0} |u_n|^{p^*} dx + o_n(1), \end{aligned}$$

em vez de (3.23) e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} |u_n|^q \varphi_{\varepsilon, j_0} dx \right| = 0,$$

em vez de (3.25). Assim, sobretudo concluímos que

$$\nu_{j_0} = 0 \quad \text{ou} \quad \nu_{j_0} \geq S^{\frac{\theta p^*}{p^* - \theta p}}.$$

Suponhamos por absurdo que $\nu_{j_0} \geq S^{\frac{\theta p^*}{p^* - \theta p}}$, então por (4.4)

$$c = I_{\lambda}(u_n) - \frac{1}{\theta p} \langle I'_{\lambda}(u_n), u_n \rangle + o_n(1) = -\lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p} \right) \int_{\Omega} |u_n|^q dx + \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\Omega} |u_n|^{p^*} dx,$$

enviando $n \rightarrow \infty$ junto com (3.21) nós obtemos

$$\begin{aligned} c &\geq -\lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p} \right) \int_{\Omega} |u|^q dx + \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx + \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \sum_{j \in \mathcal{J}} v_j \\ &\geq -\lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p} \right) \int_{\Omega} |u|^q dx + \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx + \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) S^{\frac{\theta p^*}{p^* - \theta p}}, \end{aligned}$$

e pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} c &\geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) S^{\frac{\theta p^*}{p^* - \theta p}} - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p} \right) |\Omega|^{\frac{p^* - q}{p^*}} \left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{q/p^*} + \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \\ &= \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) S^{\frac{\theta p^*}{p^* - \theta p}} - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p} \right) |\Omega|^{\frac{p^* - q}{p^*}} \|u\|_{p^*}^q + \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \|u\|_{p^*}^{p^*}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Consideremos a função

$$h(t) = -\lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p} \right) |\Omega|^{\frac{p^* - q}{p^*}} t^q + \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) t^{p^*}, \quad t \geq 0.$$

Como $p^* > \theta p > q$, a função h atinge um mínimo num $t_0 > 0$, mais especificamente no ponto

$$t_0 = \left[\frac{\lambda q \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p} \right) |\Omega|^{\frac{p^* - q}{p^*}}}{p^* \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right)} \right]^{\frac{1}{p^* - q}},$$

com valor

$$h(t_0) = \left[\frac{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p}\right) |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*}}}{\left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*}\right)} \right]^{\frac{1}{p^*-q}} \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*}\right) \left(1 - \frac{p^*}{q}\right) \lambda^{\frac{p^*}{p^*-q}}. \quad (4.7)$$

Logo, por (4.6) e (4.7) segue que

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*}\right) S_{\frac{\theta p^*}{p^*-\theta p}} - \left[\frac{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p}\right) |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*}}}{\left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*}\right)} \right]^{\frac{1}{p^*-q}} \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*}\right) \left(\frac{p^*}{q} - 1\right) \lambda^{\frac{p^*}{p^*-q}},$$

que contradiz (4.3). Portanto, como j_0 foi arbitrário, $\nu_j = 0$ para todo $j \in \mathcal{J}$. Assim aplicando (3.20) com $\psi \equiv 1$ concluímos que $(u_n)_n$ converge fortemente para u em $L^{p^*}(\Omega)$.

A partir disto, podemos argumentar exatamente como na parte final do Lema 3.0.9, com

$$\begin{aligned} & \|u_n\|^{(\theta-1)p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx - \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u) dx \\ & + \int_{\Omega} |u_n|^{p^*-2} u_n (u_n - u) dx = o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

em vez de (3.29) e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u) dx \right| = 0,$$

em vez de (3.30), provando que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$ e concluindo a prova do lema. □

Para aplicar a Proposição 1.5.4 precisamos um funcional limitado por baixo. Todavia o nosso I_λ em (4.2) não é limitado por baixo. Na verdade dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$I_\lambda(tu) = \frac{t^\theta}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{t^q \lambda}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx - \frac{t^{p^*}}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \rightarrow -\infty \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

pois $q < \theta p < p^*$.

Por isto, vamos usar um argumento de truncamento, com inspiração no artigo [4]. Pela Proposição 1.3.1 existem constantes $C_{1,q}, C_{1,p^*} > 0$ tais que

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda C_{1,q}}{q} \|u\|^q - \frac{C_{1,p^*}}{p^*} \|u\|^{p^*} \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

segue então que $I_\lambda(u) \geq g_\lambda(\|u\|)$, onde

$$g_\lambda(t) = \frac{1}{\theta p} t^{\theta p} - \frac{\lambda C_{1,q}}{q} t^q - \frac{C_{1,p^*}}{p^*} t^{p^*}, \quad t \in [0, \infty).$$

Agora, pegamos $R_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{1}{\theta p} R_1^{\theta p} - \frac{C_{1,p^*}}{p^*} R_1^{p^*} > 0,$$

e definimos

$$\lambda_1^* = \frac{q}{2C_{1,q}R_1^q} \left(\frac{1}{\theta p} R_1^{\theta p} - \frac{C_{1,p^*}}{p^*} R_1^{p^*} \right) > 0, \quad (4.8)$$

tal que $g_{\lambda_1^*}(R_1) > 0$. Consideramos

$$R_0 = \max \left\{ t \in (0, R_1) : g_{\lambda_1^*}(t) \leq 0 \right\}.$$

Dado que $q < \theta p$, temos que $g_{\lambda_1^*}(t) \leq 0$ quando t está perto do 0 e como $g_{\lambda_1^*}(R_1) > 0$, segue imediatamente que $g_{\lambda_1^*}(R_0) = 0$.

Assim, podemos construir uma função $\phi \in C_c^\infty([0, \infty), [0, 1])$ tal que $\phi(t) = 1$ se $t \in [0, R_0]$ e $\phi(t) = 0$ se $t \in [R_1, \infty)$. Definimos um truncamento para I_λ por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |u|^q dx - \frac{\phi(\|u\|^{\theta p})}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Então segue que $J_\lambda(u) \rightarrow \infty$ se $\|u\| \rightarrow \infty$. Portanto J_λ é coercivo e limitado por baixo.

Lema 4.0.3. *Para cada $\lambda \in (0, \lambda_1^*)$, se $J_\lambda(u) \leq 0$ então $\|u\| < R_0$ e $J_\lambda(v) = I_\lambda(v)$ para todo v em alguma vizinhança aberta de u .*

Além disso, J_λ satisfaz $(PS)_c$ para todo c que satisfaz (4.3).

Demonstração. Fixemos $\lambda \in (0, \lambda_1^*)$. Suponhamos que $I_\lambda(u) < 0$. Quando $\|u\| \geq R_1$, pois $\lambda < \lambda_1^*$ e pela Proposição 1.3.1, temos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda_1^* C_{1,q}}{q} \|u\|^q > 0$$

com a última desigualdade consequência do fato que $q < \theta p$. Considerando que $g_{\lambda_1^*}(R_1) > 0$ temos

$$\frac{1}{\theta p} R_1^{\theta p} - \frac{\lambda_1^* C_{1,q}}{q} R_1^q > 0$$

daí obtemos a contradição $0 \geq J_\lambda(u) > 0$.

Quando $\|u\| < R_1$ dado que $\phi(t) \leq 1$ para cada $t \in [0, \infty)$ e considerando $\lambda < \lambda_1^*$, segue que

$$0 > I_\lambda(u) \geq g_\lambda(\|u\|) \geq g_{\lambda_1^*}(\|u\|),$$

que implica $\|u\| < R_0$, pela definição de R_0 . Além disso, pela continuidade de J_λ existe uma vizinhança aberta U de u tal que $J_\lambda(v) < 0$ para todo $v \in U$ e assim $\|v\| < R_0$ para todo $v \in U$, portanto $J_\lambda(v) = I_\lambda(v)$ e $J'_\lambda(v) = I'_\lambda(v)$ para todo $v \in U$.

Logo, se c satisfaz (4.3) e $(u_n)_n$ é uma $(PS)_c$ sequência para J_λ , segue então que

$$I_\lambda(u_n) = J_\lambda(u_n) \rightarrow c < 0 \quad \text{e} \quad I'_\lambda(u_n) = J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Como J_λ é coercivo, a sequência $(u_n)_n$ tem que ser limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e assim pelo Lema 4.0.2 obtemos a existência de uma subsequência de $(u_n)_n$ fortemente convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ou seja vale a condição $(PS)_c$ para J_λ . $\square$

Agora damos alguns resultados técnicos, onde precisamos o genus de Krasnoselskii γ definido na Definição 1.5.1.

Lema 4.0.4. *Para cada $\lambda > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, existe um $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\lambda, k) > 0$ tal que $\gamma(J_\lambda^{-\varepsilon_0}) \geq k$, onde $J_\lambda^{-\varepsilon_0} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : J_\lambda(u) \leq -\varepsilon\}$ é definido seguindo a Definição 1.2.1.*

Demonstração. Fixemos $\lambda > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. Seja X_k um subespaço de $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\dim(X_k) = k$. Logo em X_k as normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_q$ são equivalentes e portanto existe uma constante $C(k) > 0$ tal que

$$-C(k)\|u\|^q \geq -\int_\Omega |u|^q dx \quad \text{para todo} \quad u \in X_k. \quad (4.9)$$

Para cada $u \in X_k$ com $\|u\| \leq R_0$, por (4.9)

$$J_\lambda(u) = I_\lambda(u) \leq \frac{1}{\theta p} \|u\|^{\theta p} - \frac{\lambda C(k)}{q} \|u\|^q. \quad (4.10)$$

Seja ρ uma constante positiva tal que

$$\rho < \min \left\{ R_0, \left[\frac{\lambda C(k) \theta p}{q} \right]^{\frac{1}{\theta p - q}} \right\} \quad (4.11)$$

e seja $S_\rho = \{u \in X_k : \|u\| = \rho\}$. Obviamente, S_ρ é homeomorfo à esfera $(k-1)$ -dimensional S^{k-1} .

Além disso, para cada $u \in S_\rho$ por (4.10)

$$J_\lambda(u) \leq \rho^q \left(\frac{1}{\theta p} \rho^{\theta p - q} - \frac{\lambda C(k)}{q} \right) < 0$$

onde a última desigualdade segue por (4.11). Assim, encontramos uma constante $\varepsilon_0 > 0$ tal que $J_\lambda(u) < -\varepsilon_0$ para cada $u \in S_\rho$. Lembrando a Definição 1.5.1, segue então que $S_\rho \subset J_\lambda^{-\varepsilon_0}$, com $J_\lambda^{-\varepsilon_0} \in \mathcal{A}$ pois J_λ é contínua, par e $J_\lambda(0) = 0$. Logo, pela Proposição 1.5.2 concluímos que $\gamma(J_\lambda^{-\varepsilon_0}) \geq \gamma(S_\rho) \geq k$, lembrando que S_ρ é homeomorfo à esfera S^{k-1} . $\square$

Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_k := \{A \subseteq W_0^{1,p}(\Omega) : A \text{ é fechado, } 0 \notin A, A \text{ é simétrico e } \gamma(A) \geq k\},$$

e definimos também o nível crítico

$$c_k = \inf_{A \in \Gamma_k} \sup_{u \in A} J_\lambda(u).$$

Provamos algumas propriedades da sequência $(c_k)_k$.

Lema 4.0.5. *Para cada $\lambda > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, o número c_k é negativo.*

Demonstração. Seja $\lambda > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 4.0.4, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\gamma(J_\lambda^{-\varepsilon_0}) \geq k$. Pois J_λ é contínuo e par, $J_\lambda^{-\varepsilon_0} \in \Gamma_k$. Como $J_\lambda(0) = 0$ temos que $0 \notin J_\lambda^{-\varepsilon_0}$. Além disso $\sup_{u \in J_\lambda^{-\varepsilon_0}} J_\lambda(u) \leq -\varepsilon_0$.

Em conclusão, lembrando também que J_λ é limitado por baixo, obtemos

$$-\infty < c_k = \inf_{A \in \Gamma_k} \sup_{u \in A} J_\lambda(u) \leq \sup_{u \in J_\lambda^{-\varepsilon_0}} J_\lambda(u) \leq -\varepsilon_0 < 0,$$

concluindo a prova. $\square$

Agora vamos provar um resultado de interesse independente para $(c_k)_k$. Isto mostra que cada c_k é um valor crítico para J_λ . Como é explicado no Remark 1.2 no artigo [15], a sequência $(u_n)_n$ do Teorema 4.0.1 não necessariamente é associada aos valores críticos $(c_k)_k$.

Lema 4.0.6. *Para cada $\lambda \in (0, \lambda_1^*)$, com λ_1^* dado em (4.8), $(c_k)_k$ é uma sequência não decrescente de valores críticos para J_λ com $c_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Fixemos $\lambda \in (0, \lambda_1^*)$. É claro que $c_k \leq c_{k+1}$, pelo Lema 4.0.5 obtemos $c_k < 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto $c_k \rightarrow \bar{c} \leq 0$. Além disso, pelo Lema 4.0.3 o funcional J_λ verifica $(PS)_{c_k}$. Então, segue por argumentos padrão, como no artigo [21], que todos c_k são valores críticos para J_λ . Afirmamos que $\bar{c} = 0$. Se $\bar{c} < 0$, usando ainda o Lema 4.0.3 temos que

$$K_{\bar{c}} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : J'_\lambda(u) = 0 \text{ e } J_\lambda(u) = \bar{c}\},$$

definido seguindo a Definição 1.2.1, é compacto. Pela Proposição 1.5.2 segue que $\gamma(K_{\bar{c}}) = k_0 < \infty$ e existe um $\delta > 0$ tal que $\gamma(K_{\bar{c}}) = \gamma(N_\delta(K_{\bar{c}})) = k_0$.

Pela Proposição 1.5.3 existe um $\varepsilon \in (0, \bar{c})$ e um homeomorfismo ímpar $\eta : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\eta(J_\lambda^{\bar{c}+\varepsilon} \setminus N_\delta(K_{\bar{c}})) \subset J_\lambda^{\bar{c}-\varepsilon}. \quad (4.12)$$

Dado que $(c_k)_k$ é não decrescente e converge a $\bar{c}$, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $c_k > \bar{c} - \varepsilon$ e $c_{k+k_0} \leq \bar{c}$. Pegamos $A \in \Gamma_{k+k_0}$ tal que $\sup_{u \in A} J_\lambda(u) < \bar{c} + \varepsilon$. Pela Proposição 1.5.2, temos

$$\gamma(\overline{A \setminus N_\delta(K_{\bar{c}})}) \geq \gamma(A) - \gamma(N_\delta(K_{\bar{c}})), \quad \gamma(\eta(\overline{A \setminus N_\delta(K_{\bar{c}})})) \geq k. \quad (4.13)$$

Portanto, obtemos

$$\eta(\overline{A \setminus N_\delta(K_{\bar{c}})}) \in \Gamma_k,$$

e assim

$$\sup_{u \in \eta(\overline{A \setminus N_\delta(K_{\bar{c}})})} J_\lambda(u) \geq c_k > \bar{c} - \varepsilon. \quad (4.14)$$

Por outro lado, por (4.12) e (4.13), segue que

$$\eta(\overline{A \setminus N_\delta(K_{\bar{c}})}) \subset \overline{\eta(A \setminus N_\delta(K_{\bar{c}}))} \subset \overline{\eta(J_\lambda^{\bar{c}+\varepsilon} \setminus N_\delta(K_{\bar{c}}))} \subset J_\lambda^{\bar{c}-\varepsilon}, \quad (4.15)$$

que contradiz (4.14). Portanto concluímos que $c_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. $\square$

Finalmente damos uma prova para o Teorema 4.0.1.

Demonstração do Teorema 4.0.1. Consideramos $\lambda_2^* > 0$ suficientemente pequeno tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_2^*)$

$$\bar{c} := \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) S^{\frac{\theta p^*}{p^* - \theta p}} - \left[\frac{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta p} \right) |\Omega|^{\frac{p^* - q}{p^*}}}{\left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right)} \right]^{\frac{1}{p^* - q}} \left(\frac{1}{\theta p} - \frac{1}{p^*} \right) \left(\frac{p^*}{q} - 1 \right) \lambda^{\frac{p^*}{p^* - q}} > 0. \quad (4.16)$$

Assim, denotamos $\lambda^* = \min\{\lambda_1^*, \lambda_2^*\}$ com λ_1^* dado em (4.8). Agora, pelo Lema 4.0.3, temos $J_\lambda(u) = I_\lambda(u)$ numa vizinhança aberta de u , se $J_\lambda(u) < 0$. Portanto, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$ pelos Lemas 4.0.3 e 4.0.5 podemos aplicar a Proposição 1.5.4 a I_λ com $\bar{c}$ dado em (4.16), concluindo que existe uma sequência $(u_k)_k$ de pontos críticos para I_λ que satisfaz (i) ou (ii) da Proposição 1.5.4. Em qualquer caso obtemos o resultado desejado, concluindo a prova do teorema. $\square$

Terminamos o trabalho observando que ao contrário do Teorema 3.0.2, no Teorema 4.0.1 não precisamos a homogeneidade derivada pelo operador $-\|u\|^{(\theta-1)p} \Delta_p u$. Portanto, podemos estudar (4.1) com um coeficiente de Kirchhoff mais geral, ou seja o problema

$$\begin{cases} -M(\|u\|^p) \Delta_p u = \lambda |u|^{q-2} u + |u|^{p^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.17)$$

com M que verifique (M_1) – (M_3) dadas na Seção 1.1. Todavia, por causa de (M_2) consegue-se resolver o problema (4.17) somente quando $q \in (1, p)$. Ou seja, não se pode cobrir o caso sublinear completo $q \in (1, \theta p)$ dado no Teorema 4.0.1, como bem explicado no artigo [6].

Referências

- [1] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa, and T.F. Ma. Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of kirchhoff type. *Comput. Math. Appl.*, 49(1):85–93, 2005.
- [2] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa, and T.F. Ma. On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth. *Differ. Equ. Appl.*, 2(3):409–417, 2010.
- [3] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal.*, 14(4):349–381, 1973.
- [4] J.G. Azozero and I.P. Alonso. Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 323:877–895, 1991.
- [5] V. Benci. On critical point theory for indefinite functionals in the presence of symmetries. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2):533–572, 1982.
- [6] Z. Binlin, A. Fiscella, and S. Liang. Infinitely many solutions for critical degenerate kirchhoff type equations involving the fractional p -laplacian. *Appl. Math. Optim.*, 80(1):63–80, 2019. ["https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00245-017-9458-5"](https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00245-017-9458-5).
- [7] V.I. Bogachev. *Measure Theory, vol. II*. Springer, 2007.
- [8] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [9] F.J.S.A. Corrêa and G.M. Figueiredo. On an elliptic equation of p -kirchhoff-type via variational methods,. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 77:263–277, 2006.
- [10] A. Dold. Partitions of unity in the theory of fibrations. *Ann. of Math. (2)*, 78(2):223–255, 1963.
- [11] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1st edition, 1997.
- [12] G.M. Figueiredo. Existence of a positive solution for a kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument. *J. Math. Anal. Appl.*, 401(2):706–713, 2013.
- [13] G.M. Figueiredo and J.R. Santos Junior. Multiplicity of solutions for a kirchhoff equation with subcritical or critical growth. *Differential and Integral Equations*, 25(9–10):853–868, 2012.

-
- [14] Gerald Folland. *Real Analysis*. JOHN WILEY, 2 edition, 1999.
 - [15] R. Kajikiya. A critical-point theorem related to the symmetric mountain-pass lemma and its applications to elliptic equations. *J. Funct. Analysis*, 225:352–370, 2005.
 - [16] G. Kirchhoff. *Mechanik*. Teubner, Leipzig, 1883.
 - [17] P.L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the limit case, part 1. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(1):145–201, 1985.
 - [18] S. Mosconi and M. Squassina. Nonlocal problems at nearly critical growth. *Nonlinear Anal.*, 136:Nonlinear Anal., 2016.
 - [19] K. Perera, R.P Agarwal, and D. O’Regan. *Morse Theoretic Aspects of p -Laplacian Type Operators*. American Mathematical Society, 2010.
 - [20] K. Perera, M. Squassina, and Y. Yang. Bifurcation and multiplicity results for critical p -laplacian problems. *Topol. Meth. Nonlinear Anal.*, 47(1):187–194, 2016.
 - [21] P.H. Rabinowitz. *Minimax methods in critical-point theory with applications to differential equations*. American Mathematical Society, 1986.
 - [22] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1st edition, 1981.
 - [23] L. Wang, K. Xie, and B. Zhang. Existence and multiplicity of solutions for critical kirchhoff-type p -laplacian problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 458:361–378, 2018.