



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo**

**VITOR CAUÊ GOMES CRUZ**

**ESTUDO DE FLAMBAGEM DE PLACAS SEGUNDO A  
TEORIA DE REISSNER-MINDLIN COM TEORIA DE  
SEGUNDA ORDEM**

**CAMPINAS**

**2021**

**VITOR CAUÊ GOMES CRUZ**

**ESTUDO DE FLAMBAGEM DE PLACAS SEGUNDO A  
TEORIA DE REISSNER-MINDLIN COM TEORIA DE  
SEGUNDA ORDEM**

Dissertação de Mestrado apresentada a Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil na área de Estruturas e Geotécnica.

**Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Junior**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO VITOR CAUÊ GOMES CRUZ ORIENTADO PELO PROF. DR. LEANDRO PALERMO JUNIOR.

ASSINATURA DO ORIENTADOR

---

**CAMPINAS**

**2021**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

C889e Cruz, Vitor Cauê Gomes, 1993-  
Estudo de flambagem de placas segundo a teoria de reissner-mindlin com teoria de segunda ordem / Vitor Cauê Gomes Cruz. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Leandro Palermo Junior.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Placas (Engenharia). 2. Métodos de elementos de contorno. 3. Flambagem (Mecânica). I. Palermo Junior, Leandro, 1960-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** A study on plate buckling using the boundary element method considering the effects of shear deformation and bending curvatures

**Palavras-chave em inglês:**

Plates (Engineering)

Boundary element method

Buckling (Mechanics)

**Área de concentração:** Estruturas e Geotécnica

**Titulação:** Mestre em Engenharia Civil

**Banca examinadora:**

Leandro Palermo Junior [Orientador]

Saulo José de Castro Almeida

Humberto Breves Coda

**Data de defesa:** 13-12-2021

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Civil

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: 0000-0001-6564-9431

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3055873128782810>

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E  
URBANISMO**

**ESTUDO DE FLAMBAGEM DE PLACAS SEGUNDO A  
TEORIA DE REISSNER-MINDLIN COM TEORIA DE  
SEGUNDA ORDEM**

**VITOR CAUÊ GOMES CRUZ**

**Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:**

**Prof. Dr. Leandro Palermo Junior  
Presidente e Orientador(a)/Universidade Estadual de Campinas**

**Prof. Dr. Saulo José Castro de Almeida  
Universidade Estadual de Campinas**

**Prof. Dr. Humberto Breves Coda  
Universidade de São Paulo**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 13 de dezembro de 2021

## **DEDICATÓRIA**

Aos meus pais João e Creusa, aos meus irmãos João Carlos e Kelly, à minha companheira Ysabela e ao meu filho Tom Francisco.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Leandro Palermo Junior por me apresentar ao fabuloso mundo das pesquisas científicas e ao Prof. Dr. Luiz Carlos Wrobel pela colaboração para o desenvolvimento deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 - (88882.435160/2019-01)

## RESUMO

O método dos elementos de contorno é usado no estudo da flambagem de placas isotrópicas homogêneas. O efeito da deformação devido ao esforço cortante é considerado no modelo de flexão e da não linearidade geométrica é introduzido pelo produto entre o tensor das tensões iniciais, contidas no plano da placa, pelo tensor não linearizado de deformações, contendo derivadas das deflexões e rotações da placa.

A modelagem numérica emprega elementos de contorno isoparamétricos quadráticos, contínuos e/ou descontínuos, enquanto o domínio é discretizado com células quadriláteras do tipo constante. A quadratura de Gauss-Legendre é usada nas integrações regulares. O método das transformações das variáveis de Telles é empregado nas integrações fracamente singulares e o método da subtração de singularidades nas integrais do tipo Cauchy.

Foram encontradas as cargas críticas para placas com diversas condições de bordas e os resultados obtidos comparados com a literatura disponível.

Palavras chave: Placas (Engenharia), Método de elementos de contorno, Flambagem (Mecânica)

## **ABSTRACT**

The boundary element method is used in the study of buckling of homogeneous and isotropic plates. The effect of shear deformation is considered in the bending model and the geometrical non-linearity effect is introduced with the product between the in-plane initial stress tensor and non-linearized strain tensor containing the deflection and rotation derivatives.

The numerical modelling employs isoparametric quadratic boundary elements, continuous and/or discontinuous, whereas constant quadrilateral cells are used in the domain discretization. The standard Gauss-Legendre scheme was employed in regular integrations on elements (or side of the cell) not containing the collocation points. Singularity subtraction and the transformation of variable technique were employed for the Cauchy and the weak type of singularity, respectively, when integrations were performed on elements containing the collocation points. Results obtained with different boundary conditions were compared to values in the literature.

Keywords: Plates (Engineering), Boundary element method, Buckling (Mechanics)

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A(z)$  : Função dependente das funções de Bessel modificadas

$B(z)$  : Função dependente das funções de Bessel modificadas

$C_{\alpha\beta}$  : Constantes de integração

$c^\delta, l^\delta$  : Índices auxiliares para montar as matrizes

$D$  : módulo de rigidez à flexão da placa

$DF$  : Vetor de carregamento relacionado com a não linearidade geométrica

$DF_q$  : Componente do vetor  $DF$

$DG$  : Matriz das derivadas das soluções fundamentais dos deslocamentos e das rotações

$DG_{lc}$  : Componente da matriz  $DG$

$DH$  : Matriz das derivadas das soluções fundamentais dos esforços de superfície

$DH_{lc}$  : Componente da matriz  $DH$

$DR$  : Vetor das derivadas das rotações

$DR_c$  : Componente do vetor  $DR$

$du$  : Vetor das derivadas dos deslocamentos e das rotações

$DW$  : Vetor das derivadas dos deslocamentos

$DW_c$  : Componente do vetor  $DW$

$DNL3^q$  : Matriz das derivadas das soluções fundamentais dos deslocamentos com o ponto campo no contorno das células

$DNL3_{lc}^q$  : Componente da matriz  $DNL3^q$

$\overline{DNL3}^q$  : Matriz das derivadas das soluções fundamentais dos deslocamentos com o ponto campo no contorno da placa

$\overline{DNL3}_{lc}^q$  : Componente da matriz  $\overline{DNL3}^q$

$DNLC^q$  : Matriz das derivadas das soluções fundamentais das rotações com o ponto campo no contorno das células

$DNLC_{lc}^q$  : Componente da matriz  $DNLC^q$

$\overline{DNLC}^q$  : Matriz das derivadas das soluções fundamentais das rotações com o ponto campo no contorno da placa

$\overline{DNLC}_{lc}^q$  : Componente da matriz  $\overline{DNLC}^q$

$e$  : Índice do elemento de contorno

$F$  : Vetor de carregamento relacionado com a não linearidade geométrica

$F_q$  : Componente do vetor  $F$

$E$  : Módulo de Young

$f_n$  : Função de forma

$G$  : Matriz das soluções fundamentais dos deslocamentos

$G_{lc}$  : Componente da matriz  $G$

$h$  : Espessura da placa

$H$  : Matriz das soluções fundamentais das forças de superfície

$H_{lc}$  : Componente da matriz  $H$

$J(\xi)$  : Jacobiano referente a transformação de variáveis de integração

$k$  : Índice da célula

$K_0(z), K_1(z)$  : Funções de Bessel modificadas

$l$  : índice do elemento da célula que coincide com o contorno da placa

$m$  : índice do elemento da célula  $k$

$M_{\alpha\beta}$  : Momento fletor

$M_{i\alpha\beta}^*$  : Solução fundamental do o momento fletor  $M_{\alpha\beta}$  referente ao carregamento unitário  $i$

$n_i$  : Cossenos diretores do vetor normal

$N_{\beta\gamma}$  : Resultante da tensão na espessura da placa

$N_{cel}$  : Número total de células

$N_{cr}$  : Carga crítica

$ND$  : Número de nós duplos antes do elemento  $e$ .

$Ne$  : Número total de elementos de contorno usados

$Nl$  : Número total de elementos da célula que coincidem com o contorno da placa

$\overline{NLC}^q$  : Matriz das soluções fundamentais das rotações com o ponto campo no contorno da placa

$\overline{NLC}_{lc}^q$  : Componente da matriz  $\overline{NLC}^q$

$NLC^q$  : Matriz das soluções fundamentais das rotações com o ponto campo no contorno das células

$NLC_{lc}^q$  : Componente da matriz  $NLC^q$

$NL3^q$  : Matriz das soluções fundamentais dos deslocamentos com o ponto campo no contorno da placa

$NL3_{lc}^q$  : Componente da matriz  $NL3^q$

$\overline{NL3}^q$  : Matriz das soluções fundamentais dos deslocamentos com o ponto campo no contorno das células

$\overline{NL3}_{lc}^q$  : Componente da matriz  $\overline{NL3}^q$

$p$  : Índice do ponto fonte

$Q_\alpha$  : Esforço cortante

$Q_{i\alpha}^*$  : Solução fundamental do esforço cortante  $Q_\alpha$  para o carregamento unitário na direção  $i$

$t$  : Vetor dos esforços de superfície

$t_c$  : Componente do vetor  $t$

$T$ : Trabalho das forças externas

$t_j^e(\xi)$  : Função que descreve o esforço de superfície na direção  $j$  no elemento  $e$

$t_{j_n}^e$  : Esforço de superfície na direção  $j$  no nó  $n$  do elemento  $e$

$t_{ij}^*$  : Solução fundamental dos esforços de superfície

$u$  : Vetor dos deslocamentos

$u_c$  : Componente do vetor  $u$

$U$ : Energia de deformação

$u_i$  : Deslocamentos médios

$\bar{u}_i$  : Parâmetros contidos nas funções de deslocamentos, são equivalentes aos deslocamentos médios

$U_i$ : Deslocamentos

$u_{ij}^*$  : Soluções fundamentais dos deslocamentos para o carregamento unitário na direção  $i$

$u_j^e(\xi)$  : Função que descreve o deslocamento na direção  $j$  no elemento  $e$

$u_{j_n}^e$  : Deslocamento na direção  $j$  no nó  $n$  do elemento  $e$

$u_{i,\varphi}^p$  : Derivada do deslocamento  $u_i$  com relação a  $\varphi$  no ponto  $p$

$u_{k\alpha,\gamma}$  : Derivada do deslocamento na direção  $\alpha$  com relação a  $\gamma$  computado no centro da célula  $k$

$x$  : Vetor das coordenadas do ponto campo

$x'$  : Vetor das coordenadas do ponto fonte

$x_\alpha$  : Coordenada na direção  $\alpha$

$x_e(\xi)$  : Função vetorial que descreve o ponto campo no elemento  $e$

$x_\alpha^e(\xi)$  : Função que descreve a coordenada  $x_\alpha$  no elemento  $e$

$x_{\alpha n}^e$  : Coordenada  $x_\alpha$  no nó  $n$  do elemento  $e$

$xc_{kl}(\xi)$  : Função que descreve as coordenadas do ponto campo no elemento  $l$  da célula  $k$

$xc_{km}(\xi)$  : Função que descreve as coordenadas do ponto campo no elemento  $m$  da célula  $k$

$\sigma_{\alpha\beta}$  : Tensões

$\sigma_{\alpha\beta}^0$  : Tensões iniciais constantes na espessura da placa

$\Gamma$  : Contorno da placa

$\Gamma_{ck}$  : Contorno da célula  $k$

$\bar{\Gamma}_{ck}$  : Parte do contorno da célula  $k$  que coincide com o contorno da placa

$\Gamma_e$  : Contorno do elemento  $e$

$\delta_{ij}$  : Delta de Kronecker

$\delta(x - x')$  : Delta de Dirac

$\varepsilon_{ij}$  = Deformações

$\varepsilon_{ij}^0$  : Deformações de segunda ordem

$\lambda$  : Fator de correção de cisalhamento

$\Pi$  : Energia total

$\nu$  : Coeficiente de Poisson

$\Omega$  : Domínio da placa

$\Omega_k$  : Domínio da célula  $k$

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	17
1.1	JUSTIFICATIVA .....	19
1.2	CONTEÚDO DO TRABALHO .....	19
1.3	OBJETIVOS .....	20
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	21
2.1	CONSIDERAÇÕES RELACIONADAS AO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	21
2.2	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE A ANÁLISE DE FLAMBAGEM DE PLACAS.....	25
3	MODELO DE REISSNER PARA A FLEXÃO DE PLACAS .....	28
4	FLAMBAGEM DE PLACAS.....	39
5	EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA A FLAMBAGEM DE PLACAS .....	51
5.1	OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO.....	51
5.2	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS .....	58
6.	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MEC PARA O PROBLEMA DE FLAMBAGEM DE PLACAS COM A TEORIA DE REISSNER-MINDLIN .....	60
7	RESULTADOS .....	77
7.1	INTRODUÇÃO .....	77
7.1.1	INFORMAÇÕES PARA A ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	79
7.2	RESULTADOS .....	80
7.2.1	PLACA AAAA COM CARREGAMENTO UNIAXIAL.....	80
7.2.2	PLACA AA AE COM CARREGAMENTO UNIAXIAL.....	81
7.2.3	PLACA EAAA COM CARREGAMENTO UNIAXIAL.....	82
7.2.4	PLACA AEAE COM CARREGAMENTO UNIAXIAL.....	83
7.2.5	PLACA EAEA COM CARREGAMENTO UNIAXIAL.....	84
7.2.6	PLACA LAAA COM CARREGAMENTO UNIAXIAL .....	85
7.2.7	PLACA LAEA COM CARREGAMENTO UNIAXIAL .....	86
7.2.8	PLACA LALA COM CARREGAMENTO UNIAXIAL.....	87
7.2.9	PLACA AEAL COM CARREGAMENTO UNIAXIAL .....	88
7.2.10	PLACA AAAL COM CARREGAMENTO UNIAXIAL .....	89
7.2.11	PLACA EEEE COM CARREGAMENTO UNIAXIAL.....	90

7.2.12 PLACA ALAL COM CARREGAMENTO UNIAXIAL.....	91
7.2.13 PLACA AAAA COM CARREGAMENTO BIAXIAL.....	92
7.2.14 PLACA AEAL COM CARREGAMENTO BIAXIAL .....	93
7.2.15 PLACA AAAL COM CARREGAMENTO BIAXIAL .....	94
7.2.16 PLACA ALAL COM CARREGAMENTO BIAXIAL .....	95
7.2.17 PLACA EEEE COM CARREGAMENTO BIAXIAL.....	96
7.2.18 PLACA AAAA COM CARREGAMENTO DE CISALHAMENTO .....	97
7.2.19 PLACA EEEE COM CARREGAMENTO DE CISALHAMENTO .....	98
7.2.20 PLACA EAEA COM CARREGAMENTO DE CISALHAMENTO .....	99
7.3 COMENTÁRIOS SOBRE OS RESULTADOS.....	100
8 CONCLUSÃO.....	102
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	103

## 1 INTRODUÇÃO

Devido ao emprego de materiais muito resistentes nos diversos tipos de estruturas presentes nas indústrias da construção civil, naval e aeroespacial, é comum que muitos elementos estruturais apresentem esbeltez elevada e por isso estejam sujeitos ao fenômeno de instabilidade. Sendo assim, a análise de flambagem tem um papel importante para garantir a segurança e funcionalidade das estruturas.

Alguns elementos estruturais podem ser analisados diretamente através das teorias de placas ou como associação de placas, entre estes elementos vale destacar os perfis metálicos, sejam eles de chapas dobradas, laminados a quente ou perfis soldados.

A figura 1.1 mostra o casco de um navio, o qual é composto por placas suscetíveis à flambagem.



**Figura 1.1** – Casco de um navio Maersk Triple E

A teoria mais simples para analisar placas é a teoria clássica, entretanto, esta teoria não considera os efeitos da deformação devida ao esforço cortante. Quando as placas apresentam a relação entre a espessura e o comprimento igual a 0,1% os trabalhos de flambagem de placas baseados em teorias que consideram a deformação devida ao esforço cortante, por exemplo, Kitipornchai, Xiang, Wang e Liew (1993) e Hosseini-Hashemi, Khorshid e Amabili (2008), apresentam os mesmos

valores de parâmetro crítico de flambagem que a teoria clássica, mas a medida que a espessura da placa aumenta, o valor do parâmetro crítico de flambagem é reduzido por conta da consideração do esforço cortante.

Quando o problema de flambagem de placas de Reissner-Mindlin é formulado através do método energético, são obtidas equações diferenciais que contêm os termos de curvatura. No entanto, os trabalhos que abordam este problema através do método dos elementos de contorno, por exemplo, Marczak (1995), Purbolaksono e Aliabadi (2005) e Soares Jr. (2015), não consideram os termos de curvatura em suas formulações.

No passado Sun (1972) estudou as equações para flambagem de vigas considerando o efeito da deformação devido a cortante, assim foi possível perceber que a inclusão dos termos relacionados as derivadas das rotações, aos quais Sun (1972) dá o nome de termos de curvatura, pode resultar em cargas críticas menores. Posteriormente Dawe e Roufaeil (1982) estudaram a flambagem de placas com a teoria de Mindlin (1951), incluindo os termos de curvatura na formulação do problema.

Posteriormente, poucos autores estudaram a flambagem de placas considerando os termos de curvatura, entre estes, Hinton (1978) e Mizusawa (1993). Entretanto, o autor do presente trabalho não tem conhecimento da existência de uma formulação para flambagem de placas em elementos de contorno que considere os termos de curvatura.

Este trabalho apresenta uma aplicação do método dos elementos de contorno ao problema de flambagem de placas retangulares isotrópicas homogêneas considerando o modelo de flexão de placas de Reissner-Mindlin sem descartar os termos de curvatura.

As equações diferenciais do problema de flambagem de placas são obtidas a partir do princípio da energia potencial total estacionária. O funcional que expressa a energia potencial total é composto pela energia de deformação e pelo trabalho das forças externas. O efeito da não linearidade geométrica é inserido considerando o

produto entre o tensor das tensões iniciais, contidas no plano da placa, e o tensor não linearizado de deformações.

As equações integrais para o problema de flambagem de placas são obtidas a partir do teorema de reciprocidade de Betti, são usadas as soluções fundamentais obtidas por (WEEËN, 1982).

Na implementação numérica o problema tem o seu contorno discretizado em elementos quadráticos isoparamétricos e o domínio discretizado em células de geometria retangular e variáveis constantes. As integrais regulares são computadas através da quadratura de Gauss-Legendre. As integrais que apresentam singularidades necessitam de tratamentos adicionais. As integrais fracamente singulares são tratadas usando a transformação de variáveis. Já as integrais que contém singularidade do tipo de Cauchy são tratadas com a técnica de subtração de singularidade. Ambas as técnicas são detalhadas no trabalho de Soares Jr. (2015).

## **1.1 JUSTIFICATIVA**

Levando em conta que na análise de flambagem de placas espessas os trabalhos que consideram os termos de curvatura, por exemplo, (MIZUSAWA, 1993; DAWE e ROUFAEIL, 1982) apresentam parâmetros críticos de flambagem menores do que os valores encontrados quando não se consideram os termos de curvatura, por exemplo, (MARCZAK, 1995; PURBOLAKASONO e ALIABADI, 2005; SOARES Jr., 2015) e diante da ausência de uma formulação em elementos de contorno para analisar o problema de flambagem de placas com a teoria de Reissner-Mindlin considerando os termos de curvatura, este trabalho se insere como uma tentativa de proporcionar uma alternativa para a modelagem numérica de flambagem de placas.

## **1.2 CONTEÚDO DO TRABALHO**

No capítulo 1 são realizadas a introdução e a apresentação do conteúdo do trabalho.

O capítulo 2 traz uma pequena revisão dos trabalhos relacionados aos estudos de flambagem de placas e ao método dos elementos de contorno.

O capítulo 3 apresenta um breve resumo do modelo de flexão de placas de Reissner.

O capítulo 4 demonstra a obtenção das equações diferenciais do problema de flambagem de placas através do princípio da energia potencial total estacionária.

O capítulo 5 apresenta a formulação integral do problema de flambagem de placas através do teorema de reciprocidade de Betti.

O capítulo 6 descreve a implementação numérica desenvolvida neste trabalho.

O capítulo 7 apresenta os resultados obtidos para os parâmetros críticos de flambagem de placas para diversas combinações de vinculações de bordas.

O capítulo 8 traz as conclusões decorrentes do presente trabalho.

### **1.3 OBJETIVOS**

- Apresentação da formulação integral do problema de flambagem de placas considerando o modelo de flexão de Reissner-Mindlin.
- Desenvolvimento do programa computacional que usa o método dos elementos de contorno para analisar a flambagem de placas e considera os termos de curvatura no efeito da não linearidade geométrica.
- Obtenção dos valores dos parâmetros críticos de flambagem para alguns casos particulares e comparação dos resultados do presente trabalho com os resultados disponíveis na literatura.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 CONSIDERAÇÕES RELACIONADAS AO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O método dos elementos de contorno pode ser descrito resumidamente como um método numérico que possibilita computar uma aproximação para as variáveis de uma equação diferencial, para aplicá-lo é necessário conhecer as soluções fundamentais do problema, a equação diferencial é reformulada, se tornando uma equação integral de contorno, a qual é discretizada e transformada em uma equação algébrica.

Para diversos problemas lineares, o método dos elementos de contorno tem como vantagem a redução da dimensão do problema, sendo necessário discretizar apenas o contorno que envolve o domínio, ainda assim mantém a possibilidade de gerar soluções para qualquer ponto no domínio do problema.

Sobre a origem da nomenclatura “boundary element method”, em Cheng e Cheng (2005) atribui-se a criação do termo à um grupo de pesquisadores da Universidade de Southampton, composto por Brebbia, Banerjee e Butterfield.

Nas formulações indiretas do MEC as variáveis são representadas por integrais cujos núcleos são compostos por funções sem significado físico. Foi Kupradze (1965) quem estabeleceu as bases da formulação indireta para os problemas da elasticidade. A primeira formulação direta do MEC para elasticidade bidimensional foi o trabalho de Rizzo (1967), posteriormente Cruse (1969) ampliou a aplicação do método direto para a elasticidade tridimensional.

Com relação à aplicação do MEC ao estudo de placas com a teoria clássica através de métodos indiretos, Jaswon, Maiti, e Symm (1967) estudaram as equações biharmônicas e depois em Jaswon e Maiti (1968) o estudo foi aplicado à análise de placas. Hansen (1976) estudou placas infinitas contendo furos em seu domínio. Altiero e Sikarskie (1978) sugeriram um tratamento no qual o domínio do problema real está inserido em um contorno fictício, Wu e Altiero (1979) aprimoraram a formulação e contornaram as dificuldades anteriores.

Com relação às formulações do MEC através de métodos diretos aplicados à análise de placas com a teoria clássica; Bézine (1978) obteve as equações integrais do problema fazendo uso da segunda identidade de Green. Stern (1979) também tratou o problema com o método direto, os dois trabalhos apresentaram resultados próximos dos resultados obtidos analiticamente e ainda apresentavam mais facilidade para lidar com condições de contorno mais gerais do que os métodos indiretos citados anteriormente. Gospodinov e Ljutskanov (1982) fizeram uso do método das diferenças finitas para gerar uma relação adicional entre as condições de contorno, neste mesmo trabalho são apresentadas formulações indiretas que usam domínios fictícios para lidar com os problemas de análise dinâmica e de flambagem. O primeiro trabalho que tratou o problema de flambagem de placas por meio de equações integrais foi o de Niwa, Kobayachi e Fukui (1974).

Weeën (1982) deduziu as soluções fundamentais e apresentou a formulação integral para o problema de flexão de placas segundo o modelo de Reissner (1945), neste trabalho são analisados os problemas de torsão de placas quadradas e de placas circulares submetidas a carregamento uniforme. Karam e Telles (1988) estenderam a formulação para o estudo de placas infinitas com furos circulares, discutiram os aspectos referentes ao uso de elementos contínuos, descontínuos e semi-contínuos e usaram as equações do movimento de corpo rígido para evitar as integrais singulares .

Diversos autores aplicaram o MEC a flambagem de placas considerando a teoria clássica, entre eles, Bézine, Cimetieri e Gelbert (1985) obtiveram as cargas críticas para alguns casos de flambagem unilateral, neste estudo o domínio da placa foi discretizado em células retangulares. Syngellakis e Kang (1987) estudaram o problema de flambagem discretizando o domínio do problema em células triangulares, mas não trataram problemas que envolvem bordas livres. Liu (1987) através de uma integração por partes reduziu a ordem das derivadas contidas nas integrais de domínio, as quais são referentes a não linearidade geométrica. Tanaka e Miyazaki (1988) estudaram o problema de flambagem de estruturas compostas por placas, computando as derivadas de segunda ordem no domínio do problema.

Manolis, Beskos e Pineros (1986) usaram o teorema de reciprocidade de Betti e obtiveram as formulações integrais para os problemas de flambagem de vigas segundo a teoria de Euler-Bernoulli e de flambagem de placas, para cada um dos problemas foram apresentadas duas formulações, uma que usa a solução fundamental do problema de flexão e necessita da discretização do domínio do problema, e outra na qual são usadas as soluções fundamentais do problema de flambagem, eliminando a necessidade de discretização do domínio, os resultados mostraram que é possível usar a solução fundamental do problema de flexão sem alterar significativamente os resultados contanto que o domínio seja devidamente discretizado.

Syngellakis, Elzein e Walker (1991) apresentaram comparações entre o comportamento previsto para flambagem de placas com o MEC e o comportamento observado em estudos experimentais. Syngellakis e Elzein (1994) usaram o MEC para obter as cargas críticas para placas com diversas geometrias e carregamentos.

Com relação ao estudo de flambagem de placas considerando os modelos de flexão de placas que incluem o efeito da deformação causada pelo esforço cortante; Marczak (1995) formulou o problema a partir do método dos resíduos ponderados e incluiu o efeito da não linearidade geométrica através das derivadas dos deslocamentos no domínio da placa, assim obtendo uma formulação hipersingular, entretanto, como é considerado que as derivadas dos deslocamentos são constantes nas células, as mesmas são computadas apenas no centro da célula e assim não há necessidade de lidar com as integrais hipersingulares, são analisadas placas retangulares e os resultados são comparados com outras formulações.

Sanches (1998) propôs soluções fundamentais alternativas para o problema de flexão de placas moderadamente espessas, também usou as soluções fundamentais obtidas por Weeën (1982) na análise de placas segundo o modelo de Mindlin e realizou comparações entre os resultados obtidos com as diferentes formulações.

Em seguida Palermo Jr. (2000) aprofundou o estudo a respeito das soluções fundamentais para os problemas de flexão de placa de Mindlin, formulando o

problema de um modo que possibilita incluir ou desconsiderar o efeito da deformação pela cortante. Essa formulação foi usada por Andrade (2001) onde foi verificada a influência do parâmetro que multiplica o argumento das soluções fundamentais.

Duarte (1999) obteve as cargas críticas para diversos casos de flambagem de placas finas, para isso usou as equações integrais dos deslocamentos e das rotações, juntamente com aproximações para as curvaturas, que foram obtidas através do método das diferenças finitas.

Lin, Duffield e Shih (1999) aplicaram o MEC ao problema de flambagem de placas finas e usaram o método de reciprocidade dual para evitar a necessidade de computar integrais de domínio, são apresentadas as cargas críticas para placas retangulares com carregamentos lineares e para placas circulares com carregamentos uniformes.

Simões (2001) Aplicou o MEC aos problemas de flexão, flambagem e dinâmica de placas finas, neste trabalho também foi avaliada a influência da variação do parâmetro livre contido na solução fundamental do problema de flexão de placas.

Purbolaksono e Aliabadi (2005) analisaram a flambagem de placas considerando a deformação pela cortante. Neste trabalho as tensões no plano da placa, que estão relacionadas com a não linearidade geométrica, são obtidos através das equações integrais da elasticidade bidimensional. São apresentadas duas formulações para analisar o problema de flambagem. Uma baseada na discretização do domínio em células e outra baseada no método da reciprocidade dual. São resolvidos alguns casos com ambas as formulações e os resultados são comparados entre si e com outros resultados disponíveis na literatura.

Sakanaka (2006) obteve as cargas críticas para flambagem de placas empregando as soluções fundamentais obtidas através da formulação alternativa apresentada em Palermo Jr. (2000). São apresentados resultados com e sem os efeitos da deformação pela cortante, também foram obtidas as frequências naturais de vibração de placas.

Kzam e Coda (2010) usaram o método da subtração de singularidade para o tratamento das integrais com núcleos impróprios, avaliando particularmente os casos contidos na formulação integral para os problemas bidimensionais da elasticidade, são apresentados resultados numéricos para demonstrar a eficiência do tratamento das singularidades.

Palermo Jr. (2013) apresentou uma solução fundamental alternativa para a análise dinâmica de placas considerando o efeito da deformação pela cortante, depois em Palermo Jr. (2014) fez uso destas soluções fundamentais para o mesmo problema acrescentando o efeito da não linearidade geométrica, são apresentados valores para as cargas críticas em função da frequência de vibração.

Palermo Jr. e Soares Jr. (2015) obtiveram as cargas críticas do problema de flambagem de placas considerando a deformação pela cortante, neste trabalho foram usadas as soluções fundamentais apresentadas por Weeën (1982), nesta formulação o efeito da não linearidade geométrica está relacionado com as derivadas de primeira ordem dos deslocamentos. Em seguida Palermo Jr. e Soares Jr. (2017) ampliam o trabalho anterior para estudar a flambagem de placas perfuradas, a formulação é a mesma, entretanto, são usadas as equações integrais do estado plano de tensão para computar os valores das tensões contidas no plano da placa. Soares Jr; Palermo Jr. e Wrobel (2019) usaram o método da reciprocidade dual e eliminaram as integrais de domínio contidas na formulação anterior.

## **2.2 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE A ANÁLISE DE FLAMBAGEM DE PLACAS.**

Com relação ao estudo de vibração de placas inicialmente carregadas Herrmann e Armenakas (1960) obtiveram as equações do problema estabelecendo a expressão para a energia total da placa e então aplicando o princípio de Hamilton, nesta formulação foram consideradas a deformação pela cortante e a inércia rotatória, a formulação também é usada para a análise de flambagem de placas, pois quando as tensões iniciais levam a frequência de vibração ao valor nulo obtém-se o valor da tensão crítica.

Brunelle (1971) analisou a flambagem de placas transversalmente isotrópicas considerando o modelo de Mindlin e apontou o fato de que a restrição de deslocamentos nas bordas das placas aumenta a influência da isotropia transversal no valor da carga crítica.

Sun (1972) obteve duas formulações para as equações do movimento de vigas inicialmente carregadas, uma considerando a formulação de Trefftz e a outra considerando a formulação de Biot. Na análise baseada na formulação de Trefftz foi verificada a influência da derivada da rotação nos valores das cargas críticas, também foi apontado que o trabalho de Herrmann e Armenakas (1960) desconsiderou as derivadas das rotações relacionadas com os carregamentos iniciais, posteriormente Sun (1973) ampliou a formulação baseada no modelo de Trefftz para o estudo de vibração e flambagem de placas de materiais compósitos laminados.

Hinton (1978) aplicou o método das faixas finitas para analisar a flambagem de placas e vigas, a formulação do problema é baseada no trabalho de Sun (1973).

Dawe e Roufaeil (1982) obtiveram as cargas críticas para flambagem de placas considerando a teoria de Mindlin, para isso usaram dois métodos numéricos diferentes, o método das faixas finitas e o método Rayleigh-Hitz, também avaliaram o efeito da isotropia transversal, além disso demonstraram a relação entre a frequência natural de vibração de placas e a carga crítica de flambagem quando considerada a teoria de Mindlin, esta relação só ocorre quando são consideradas as derivadas das rotações.

Mizusawa (1993) estudou a flambagem de placas retangulares com espessuras variáveis usando o método das faixas finitas, neste estudo também foi avaliada a influência dos termos de curvatura, assim como a influência da razão entre as dimensões da placa.

Xiang, Wang, Liew e Kitpornchai (1993) usaram o método de Rayleigh-Hitz para análise de flambagem de placas, neste trabalho foi avaliado o efeito que as deformações iniciais causam no valor da carga crítica, as deformações iniciais são aquelas causadas pelas tensões iniciais no plano da placa.

Liew, Xiang e Kitpornchai (1996) apresentaram a solução analítica para o problema de flambagem de placas retangulares baseado no modelo de Mindlin, são apresentados resultados para diversas condições de bordas envolvendo bordas livres, neste estudo não são considerados os termos de curvatura.

Hosseini-Hashemi, Khorshidi e Amabili (2008) estudaram analiticamente a flambagem de placas retangulares com a teoria de Mindlin, apresentaram resultados para carregamentos uniaxiais e biaxiais e também discutiram como o valor da carga crítica é afetado pelas vinculações das bordas e pela geometria da placa.

### 3 MODELO DE REISSNER PARA A FLEXÃO DE PLACAS

O modelo de flexão de placas de Reissner (1945) considera o efeito da deformação pelo esforço cortante, tal consideração se torna mais importante a medida em que a razão entre a espessura e o comprimento da placa aumenta, ou seja, quando a placa se torna mais espessa.

As hipóteses da teoria de Reissner são:

- Pequenos deslocamentos
- Superfície média indeformável
- Um segmento de reta normal à superfície média da placa permanece reta, mas não necessariamente normal após a deformação da placa
- Material homogêneo, isotrópico e elástico linear

A seguir serão obtidas equações diferenciais que relacionam os esforços e os deslocamentos na teoria de Reissner.

Considerando as hipóteses de Reissner, temos as seguintes expressões para as tensões:

$$\sigma_{11} = C_{11}x_3 \quad (3.1.a)$$

$$\sigma_{22} = C_{22}x_3 \quad (3.1.b)$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} = C_{12}x_3 \quad (3.1.c)$$

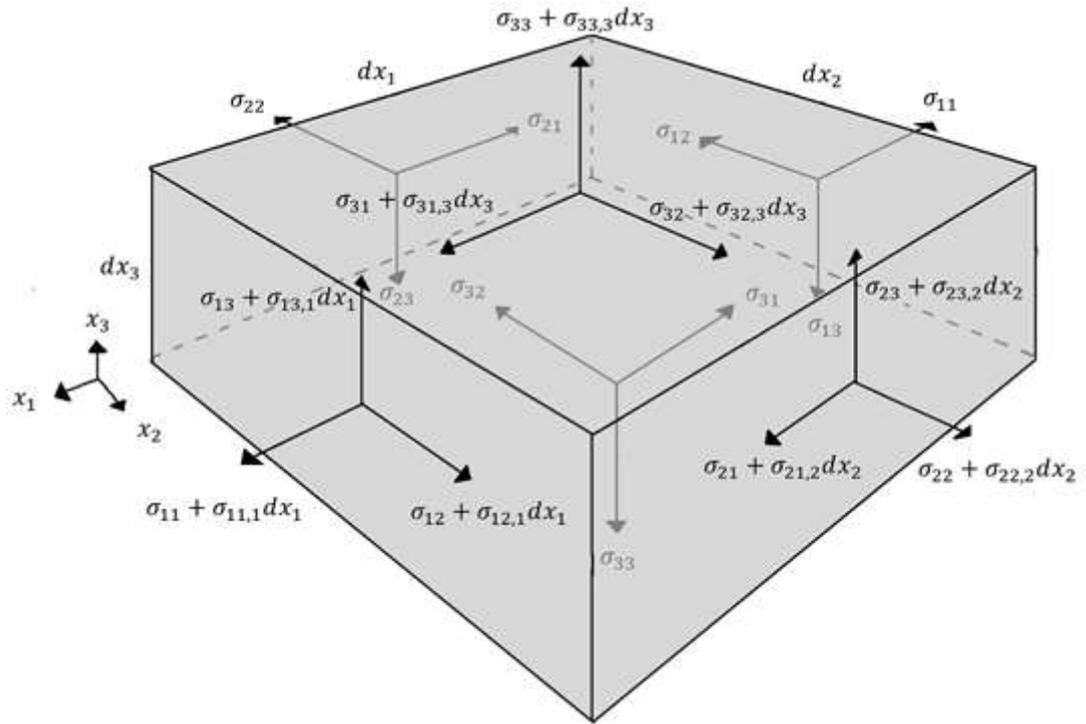
Onde  $C_{ij}$  são funções das coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  e serão estabelecidas a seguir.

Fazendo uso das equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} = 0 \quad (3.2.a)$$

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} = 0 \quad (3.2.b)$$

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} = 0 \quad (3.2.c)$$



**Figura 3.1** – Tensões em um elemento infinitesimal

Lembrando que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Substituindo as expressões para as tensões 3.1 nas duas primeiras equações de equilíbrio 3.2:

$$\sigma_{13,3} = -x_3(C_{11,1} + C_{12,2}) \quad (3.3.a)$$

$$\sigma_{23,3} = -x_3(C_{12,1} + C_{22,2}) \quad (3.3.b)$$

Realizando a integração com relação a  $x_3$ :

$$\sigma_{13} = \frac{-x_3^2}{2}(C_{11,1} + C_{12,2}) + C_{13} \quad (3.4.a)$$

$$\sigma_{23} = \frac{-x_3^2}{2}(C_{12,1} + C_{22,2}) + C_{23} \quad (3.4.b)$$

Substituindo as expressões das tensões 3.4 na última equação de equilíbrio 3.2:

$$\sigma_{33,3} = \frac{x_3^2}{2}(C_{11,11} + C_{12,21} + C_{12,12} + C_{22,22}) - C_{13,1} - C_{23,2} \quad (3.5)$$

Realizando a integração com relação a  $x_3$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & \frac{x_3^3}{6}(C_{11,11} + C_{12,21} + C_{12,12} + C_{22,22}) \\ & -(C_{13,1} + C_{23,2})x_3 + C_{33} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Usando as relações entre as tensões e os esforços nas faces de um elemento infinitesimal de placa temos:

$$M_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} x_3 dx_3 \quad (3.7.a)$$

$$M_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} x_3 dx_3 \quad (3.7.b)$$

$$M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} x_3 dx_3 \quad (3.7.c)$$

Substituindo as expressões das tensões 3.1 nas expressões dos esforços 3.7 e realizando as integrações em  $x_3$  temos:

$$C_{11} = M_{11} \frac{12}{h^3} \quad (3.8.a)$$

$$C_{22} = M_{22} \frac{12}{h^3} \quad (3.8.b)$$

$$C_{12} = M_{12} \frac{12}{h^3} \quad (3.8.c)$$

Substituindo as expressões dos coeficientes 3.8 nas expressões das tensões 3.4 temos:

$$\sigma_{31} = \frac{-6x_3^2}{h^3} (M_{11,1} + M_{12,2}) + C_{31} \quad (3.9.a)$$

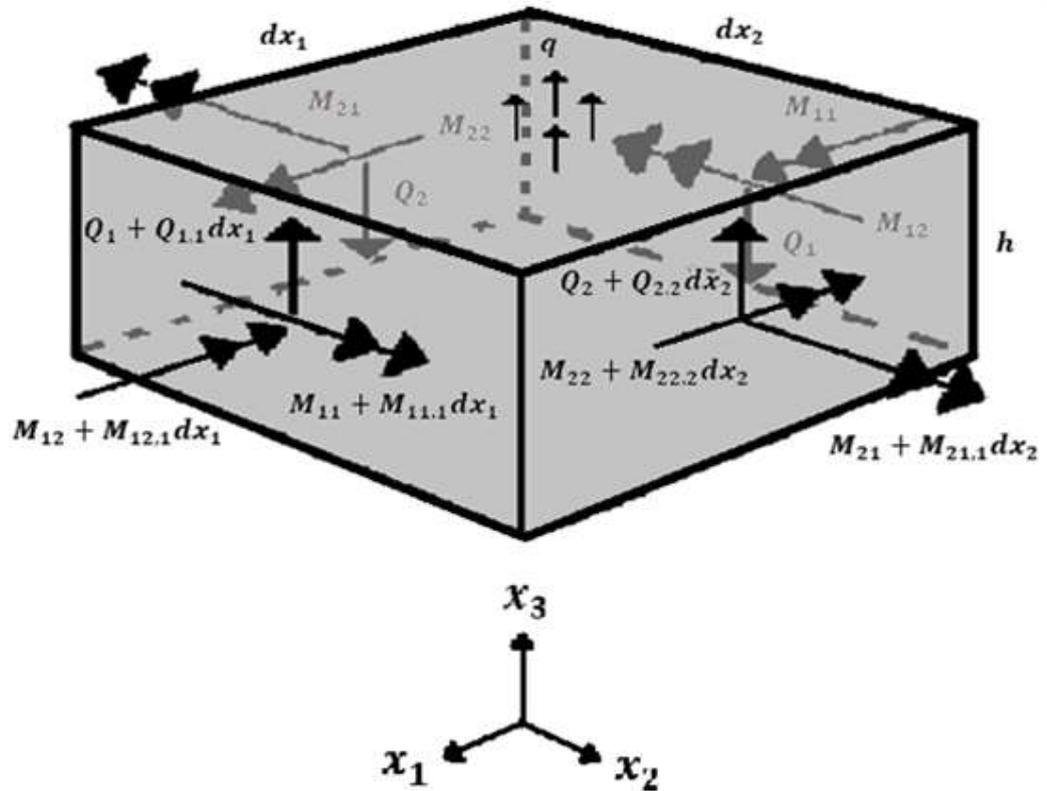
$$\sigma_{32} = \frac{-6x_3^2}{h^3} (M_{12,1} + M_{22,2}) + C_{32} \quad (3.9.b)$$

Usando as equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de uma placa:

$$M_{11,1} + M_{21,2} - Q_1 = 0 \quad (3.10.a)$$

$$M_{12,1} + M_{22,2} - Q_2 = 0 \quad (3.10.b)$$

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} + q = 0 \quad (3.10.c)$$



**Figura 3.2** – Elemento infinitesimal de placa

Usando as duas primeiras equações de equilíbrio 3.10 juntamente com as expressões das tensões 3.9, temos:

$$\sigma_{13} = \frac{-6x_3^2}{h^3} Q_1 + C_{13} \quad (3.11.a)$$

$$\sigma_{23} = \frac{-6x_3^2}{h^3} Q_2 + C_{23} \quad (3.11.b)$$

Usando as relações entre as tensões e os esforços nas faces de um elemento infinitesimal de placa temos:

$$Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} dx_3 \quad (3.12.a)$$

$$Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23} dx_3 \quad (3.12.b)$$

Substituindo as expressões das tensões 3.11 nas expressões dos esforços 3.12 e realizando as integrações em  $x_3$ , podemos obter as seguintes expressões para os coeficientes:

$$C_{13} = \frac{3Q_1}{2h} \quad (3.13.a)$$

$$C_{23} = \frac{3Q_2}{2h} \quad (3.13.b)$$

Substituindo as expressões dos coeficientes 3.8 e 3.13 na expressão da tensão 3.6 temos:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & \frac{2x_3^3}{h^3} (M_{11,11} + M_{12,21} + M_{12,12} + M_{22,22}) + \\ & - \frac{3x_3}{2h} (Q_{1,1} + Q_{2,2}) + C_{33} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Usando as equações de equilíbrio 3.10 juntamente com a expressão da tensão 3.14, temos:

$$\sigma_{33} = \frac{-2x_3^3}{h^3} q + \frac{3x_3}{2h} q + C_{33} \quad (3.15)$$

Impondo as seguintes condições:

$$\sigma_{33} \left( \frac{-h}{2} \right) = -q \quad (3.16.a)$$

$$\sigma_{33} \left( \frac{h}{2} \right) = 0 \quad (3.16.b)$$

Obtemos o valor do coeficiente:

$$C_{33} = \frac{-q}{2} \quad (3.17)$$

Deste modo temos as seguintes expressões para as tensões em função dos esforços:

$$\sigma_{11} = \frac{12M_{11}}{h^3} x_3 \quad (3.18.a)$$

$$\sigma_{22} = \frac{12M_{22}}{h^3} x_3 \quad (3.18.b)$$

$$\sigma_{12} = \frac{12M_{12}}{h^3} x_3 \quad (3.18.c)$$

$$\sigma_{13} = \frac{3Q_1}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (3.18.d)$$

$$\sigma_{23} = \frac{3Q_2}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (3.18.e)$$

$$\sigma_{33} = \frac{-3q}{4} \left[ \frac{2}{3} - \frac{2x_3}{h} + \frac{1}{3} \left( \frac{2x_3}{h} \right)^3 \right] \quad (3.18.f)$$

Usando as relações entre as tensões e as deformações:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \quad (3.19.a)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \quad (3.19.b)$$

$$\gamma_{12} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{12} \quad (3.19.c)$$

$$\gamma_{13} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{13} \quad (3.19.d)$$

$$\gamma_{23} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{23} \quad (3.19.e)$$

Considerando as seguintes relações entre as deformações e os deslocamentos:

$$\varepsilon_{11} = U_{1,1} \quad (3.20.a)$$

$$\varepsilon_{22} = U_{2,2} \quad (3.20.b)$$

$$\gamma_{12} = U_{1,2} + U_{2,1} \quad (3.20.c)$$

$$\gamma_{13} = U_{1,3} + U_{3,1} \quad (3.20.d)$$

$$\gamma_{23} = U_{2,3} + U_{3,2} \quad (3.20.e)$$

Considerando as hipóteses de Reissner, temos as seguintes expressões para os deslocamentos  $U_i$ :

$$U_1 = \bar{u}_1 x_3 \quad (3.21.a)$$

$$U_2 = \bar{u}_2 x_3 \quad (3.21.b)$$

$$U_3 = \bar{u}_3 \quad (3.21.c)$$

É possível estabelecer as seguintes expressões para os valores médios dos deslocamentos e rotações na espessura da placa  $u_i$ :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} \bar{u}_1 x_3 dx_3 = M_{11} u_1 \quad (3.22.a)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} \bar{u}_2 x_3 dx_3 = M_{12} u_2 \quad (3.22.b)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} \bar{u}_3 dx_3 = Q_1 u_3 \quad (3.22.c)$$

Substituindo as expressões das tensões 3.18 nas equações dos deslocamentos médios 3.22, temos:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{12M_{11}}{h^3} x_3^2 \bar{u}_1 dx_3 = M_{11} u_1 \quad (3.23.a)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{12M_{12}}{h^3} x_3^2 \bar{u}_2 dx_3 = M_{12} u_2 \quad (3.23.b)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{3Q_1}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \bar{u}_3 dx_3 = Q_1 u_3 \quad (3.23.c)$$

Realizando as integrações é possível verificar que  $\bar{u}_i = u_i$ , ou seja, os parâmetros contidos nas expressões dos deslocamentos são equivalentes aos valores médios dos deslocamentos e rotações na espessura da placa.

As relações entre os esforços e os deslocamentos são estabelecidas através da igualdade entre duas expressões da energia de deformação, uma na qual as deformações são expressadas em função das tensões, conforme as equações 3.19 e outra na qual as deformações são expressadas através dos deslocamentos, conforme as equações 3.20, as igualdades são dadas a seguir:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] dx_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} u_{1,1} x_3 dx_3 \quad (3.24.a)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] dx_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} u_{2,2} x_3 dx_3 \quad (3.24.b)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{12} dx_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} (u_{1,2} + u_{2,1}) x_3 dx_3 \quad (3.24.c)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{13} dx_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} (u_1 + u_{3,1}) dx_3 \quad (3.24.d)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23} \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{23} dx_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23} (u_2 + u_{3,2}) dx_3 \quad (3.24.e)$$

Substituindo as expressões das tensões 3.18, nas equações 3.24 e realizando as integrações em  $x_3$  temos:

$$u_{1,1} = \frac{12}{Eh^3} \left( M_{11} - \nu M_{22} - \nu \frac{qh^2}{10} \right) \quad (3.25.a)$$

$$u_{2,2} = \frac{12}{Eh^3} \left( M_{22} - \nu M_{11} - \nu \frac{qh^2}{10} \right) \quad (3.25.b)$$

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} (u_{1,2} + u_{2,1}) \quad (3.25.c)$$

$$Q_1 = \frac{5Eh}{12(1+\nu)} (u_1 + u_{3,1}) \quad (3.25.d)$$

$$Q_2 = \frac{5Eh}{12(1+\nu)} (u_2 + u_{3,2}) \quad (3.25.e)$$

Agora usando as equações 3.25.a e 3.25.b, podemos escrever:

$$u_{1,1} + \nu u_{2,2} = \frac{12}{Eh^3} \left[ M_{11}(1-\nu^2) - \nu(1+\nu) \frac{qh^2}{10} \right] \quad (3.26.a)$$

$$u_{2,2} + \nu u_{1,1} = \frac{12}{Eh^3} \left[ M_{22}(1-\nu^2) - \nu(1+\nu) \frac{qh^2}{10} \right] \quad (3.26.b)$$

Organizando convenientemente as equações temos:

$$M_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ u_{1,1} + \nu u_{2,2} + (1+\nu) \frac{6\nu q}{5Eh} \right] \quad (3.27.a)$$

$$M_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ u_{2,2} + \nu u_{1,1} + (1+\nu) \frac{6\nu q}{5Eh} \right] \quad (3.27.b)$$

Adotando as definições:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.28.a)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} \quad (3.28.b)$$

Temos as seguintes equações relacionando os esforços e os deslocamentos:

$$M_{11} = D \left[ (u_{1,1} + \nu u_{2,2}) + \frac{6q\nu}{5hE} (1+\nu) \right] \quad (3.29.a)$$

$$M_{22} = D \left[ (u_{2,2} + \nu u_{1,1}) + \frac{6q\nu}{5hE} (1+\nu) \right] \quad (3.29.b)$$

$$M_{12} = \frac{D(1-\nu)}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) \quad (3.29.c)$$

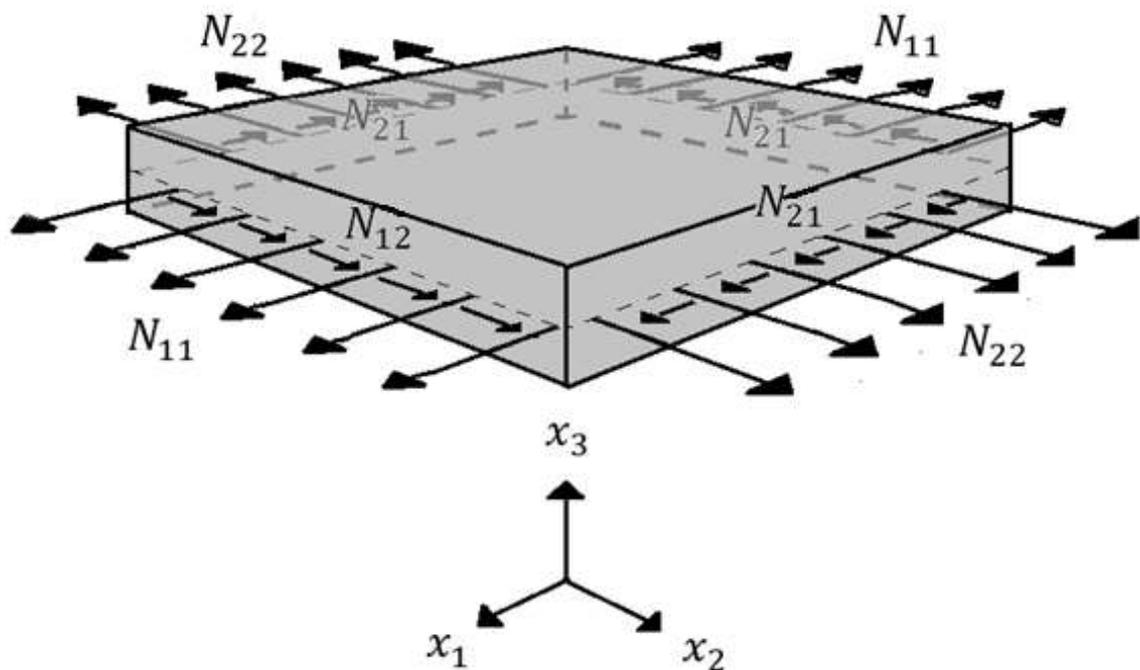
$$Q_1 = \frac{\lambda^2 D(1-\nu)}{2} (u_1 + u_{3,1}) \quad (3.29.d)$$

$$Q_2 = \frac{\lambda^2 D(1-\nu)}{2} (u_2 + u_{3,2}) \quad (3.29.e)$$

#### 4 FLAMBAGEM DE PLACAS

Neste capítulo são obtidas as equações diferenciais para o problema de flambagem de placas, para realizar esta tarefa o problema é formulado a partir do princípio da energia potencial total estacionária, primeiramente é encontrada a expressão da energia potencial total da placa, em seguida é feito uso do cálculo variacional para encontrar as equações que expressam a condição estacionária da energia potencial total.

É considerada uma placa homogênea e isotrópica em flexão e que está sujeita aos carregamentos uniformes em seu plano médio.



**Figura 4.1** – Placa submetida aos carregamentos na direção do seu plano médio.

A energia potencial total da placa é dada pela expressão:

$$\Pi = U - T \quad (4.1)$$

Onde  $\Pi$  é a energia potencial total,  $U$  é a energia de deformação de flexão e  $T$  é o trabalho das cargas externas. Considerando a teoria de flexão de placas de Reissner-Mindlin a energia de deformação é dada pela equação:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\gamma_{12} + \sigma_{13}\gamma_{13} + \sigma_{23}\gamma_{23}) dV \quad (4.2)$$

Usando as expressões das tensões 3.18, as relações entre deformações e deslocamentos 3.20 e as expressões para os deslocamentos 3.21 é possível expressar a energia de deformação 4.2 da seguinte maneira:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{12}{h^3} x_3^2 [M_{11}u_{1,1} + M_{22}u_{2,2} + M_{12}(u_{1,2} + u_{2,1})] + \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] [Q_1(u_1 + u_{3,1}) + Q_2(u_2 + u_{3,2})] \right\} dV \quad (4.3)$$

Realizando a integração com relação a  $x_3$ :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [M_{11}u_{1,1} + M_{22}u_{2,2} + M_{12}(u_{1,2} + u_{2,1}) + Q_1(u_1 + u_{3,1}) + Q_2(u_2 + u_{3,2})] d\Omega \quad (4.4)$$

Usando as relações entre os esforços e os deslocamentos 3.30 e considerando que o carregamento  $q$  é nulo, temos:

$$U = \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left\{ u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2 + 2\nu u_{1,1}u_{2,2} + \frac{(1-\nu)}{2} (u_{1,2} + u_{2,1})^2 + \frac{\lambda^2}{2} (1-\nu) [(u_1 + u_{3,1})^2 + (u_2 + u_{3,2})^2] \right\} d\Omega \quad (4.5)$$

O trabalho das cargas externas é dado pela expressão:

$$T = \int_V (\sigma_{11}^0 \varepsilon_{11}^0 + \sigma_{22}^0 \varepsilon_{22}^0 + \sigma_{12}^0 \gamma_{12}^0) dV \quad (4.6)$$

Onde  $\sigma_{ij}^0$  são as tensões iniciais aplicadas no plano médio da placa e  $\varepsilon_{ij}^0$  é o tensor não linearizado das deformações e suas respectivas expressões são:

$$\varepsilon_{11}^0 = U_{1,1} + \frac{1}{2}(U_{1,1}^2 + U_{2,1}^2 + U_{3,1}^2) \quad (4.7.a)$$

$$\varepsilon_{22}^0 = U_{2,2} + \frac{1}{2}(U_{1,2}^2 + U_{2,2}^2 + U_{3,2}^2) \quad (4.7.b)$$

$$\gamma_{12}^0 = U_{1,1}U_{1,2} + U_{2,1}U_{2,2} + U_{3,1}U_{3,2} \quad (4.7.c)$$

Usando as expressões para os deslocamentos 3.21, é possível expressar as deformações da seguinte maneira

$$\varepsilon_{11}^0 = x_3 u_{1,1} + \frac{1}{2}[x_3^2(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2) + u_{3,1}^2] \quad (4.8.a)$$

$$\varepsilon_{22}^0 = x_3 u_{2,2} + \frac{1}{2}[x_3^2(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2) + u_{3,2}^2] \quad (4.8.b)$$

$$\gamma_{12}^0 = x_3^2(u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2}) + u_{3,1}u_{3,2} \quad (4.8.c)$$

Substituindo as expressões das deformações 4.8 na expressão do trabalho das cargas externas 4.6, temos:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \int_V \{ & \sigma_{11}^0 [2x_3 u_{1,1} + x_3^2(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2) + u_{3,1}^2] + \\ & \sigma_{22}^0 [2x_3 u_{2,2} + x_3^2(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2) + u_{3,2}^2] + \\ & 2\sigma_{12}^0 [x_3^2(u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2}) + u_{3,1}u_{3,2}] \} dV \end{aligned} \quad (4.9)$$

Realizando a integração com relação a  $x_3$ :

$$\begin{aligned}
T = \int_{\Omega} \left\{ \sigma_{11}^0 \left[ \frac{h^3}{24} (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2) + \frac{h}{2} u_{3,1}^2 \right] + \right. \\
\sigma_{22}^0 \left[ \frac{h^3}{24} (u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2) + \frac{h}{2} u_{3,2}^2 \right] + \\
\left. \left[ \frac{h^3}{12} (u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2}) + hu_{3,1}u_{3,2} \right] \right\} d\Omega
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Substituindo as expressões da energia de deformação 4.5 e do trabalho das cargas externas 4.10 na expressão da energia potencial total 4.1, temos:

$$\begin{aligned}
\Pi = \int_{\Omega} \frac{D}{2} \left\{ u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2 + 2\nu u_{1,1}u_{2,2} + \frac{(1-\nu)}{2} (u_{1,2} + u_{2,1})^2 + \right. \\
\left. \frac{\lambda^2}{2} (1-\nu) [(u_1 + u_{3,1})^2 + (u_2 + u_{3,2})^2] \right\} d\Omega + \\
- \int_{\Omega} \left\{ \sigma_{11}^0 \left[ \frac{h^3}{24} (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2) + \frac{h}{2} u_{3,1}^2 \right] + \right. \\
\sigma_{22}^0 \left[ \frac{h^3}{24} (u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2) + \frac{h}{2} u_{3,2}^2 \right] + \\
\left. \sigma_{12}^0 \left[ \frac{h^3}{12} (u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2}) + hu_{3,1}u_{3,2} \right] \right\} d\Omega
\end{aligned} \tag{4.11}$$

A energia potencial total da placa pode ser expressa através de um funcional da seguinte forma:

$$\Pi = \int_{\Omega} F(x_1; x_2; u_1; u_{1,1}; u_{1,2}; u_2; u_{2,1}; u_{2,2}; u_3; u_{3,1}; u_{3,2}) d\Omega \tag{4.12}$$

Onde  $F$  é o integrando contido em 4.11, a variação de  $\Pi$  é dada por:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = \int_{\Omega} & \left( \frac{\partial F}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} \delta u_{1,1} + \frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} \delta u_{1,2} + \right. \\
& \frac{\partial F}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} \delta u_{2,1} + \frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} \delta u_{2,2} + \\
& \left. \frac{\partial F}{\partial u_3} \delta u_3 + \frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} \delta u_{3,1} + \frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} \delta u_{3,2} \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Usando o teorema da divergência, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} \delta u_{1,1} + \frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} \delta u_{1,2} \right) d\Omega = \\
& \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} n_1 + \frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} n_2 \right) \delta u_1 d\Gamma + \\
& - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} \right) \right] \delta u_1 d\Omega
\end{aligned} \tag{4.14.a}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} \delta u_{2,1} + \frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} \delta u_{2,2} \right) d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} n_1 + \frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} n_2 \right) \delta u_2 d\Gamma + \\
& - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} \right) \right] \delta u_2 d\Omega
\end{aligned} \tag{4.14.b}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} \delta u_{3,1} + \frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} \delta u_{3,2} \right) d\Omega = \\
& \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} n_1 + \frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} n_2 \right) \delta u_3 d\Gamma + \\
& - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} \right) \right] \delta u_3 d\Omega
\end{aligned} \tag{4.14.c}$$

Substituindo as igualdades 4.14 na equação 4.13 temos:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \int_{\Omega} \left\{ \left[ \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} \right) \right] \delta u_1 + \right. \\ \left[ \frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} \right) \right] \delta u_2 + \\ \left. \left[ \frac{\partial F}{\partial u_3} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} \right) \right] \delta u_3 \right\} d\Omega + \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} n_1 + \frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} n_2 \right) \delta u_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} n_1 + \frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} n_2 \right) \delta u_2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} n_1 + \frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} n_2 \right) \delta u_3 \right] d\Gamma \end{aligned}$$

Para que a energia potencial total seja estacionária é necessário que o valor de  $\delta\Pi$  seja nulo, para isso é necessário que as seguintes equações sejam satisfeitas:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} \right) = 0 \quad (4.16.a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} \right) = 0 \quad (4.16.b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_3} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} \right) = 0 \quad (4.16.c)$$

As seguintes condições devem ser atendidas no contorno:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} n_1 + \frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} n_2 \right) \delta u_1 = 0 \quad (4.17.a)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} n_1 + \frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} n_2 \right) \delta u_2 = 0 \quad (4.17.b)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} n_1 + \frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} n_2 \right) \delta u_3 = 0 \quad (4.17.c)$$

Obtendo as derivadas contidas na equação 4.16.a:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\lambda^2}{2} D(1 - \nu)(u_1 + u_{3,1}) \quad (4.18.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} \right) = D(u_{1,11} + \nu u_{2,21}) + \frac{h^3}{12} \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11}^0 u_{1,1} + \sigma_{12}^0 u_{1,2}) \quad (4.18.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} \right) = \frac{D}{2} (1 - \nu)(u_{1,22} + u_{2,12}) + \quad (4.18.c)$$

$$\frac{h^3}{12} \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22}^0 u_{1,2} + \sigma_{12}^0 u_{1,1})$$

Usando as relações entre os esforços e os deslocamentos 3.30.

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = Q_1 \quad (4.19.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} \right) = M_{11,1} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11}^0 u_{1,1} + \sigma_{12}^0 u_{1,2}) \quad (4.19.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} \right) = M_{12,2} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22}^0 u_{1,2} + \sigma_{12}^0 u_{1,1}) \quad (4.19.c)$$

Substituindo as expressões 4.19 na equação 4.16.a:

$$Q_1 - M_{11,1} - M_{12,2} = \frac{h^3}{12} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11}^0 u_{1,1} + \sigma_{12}^0 u_{1,2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22}^0 u_{1,2} + \sigma_{12}^0 u_{1,1}) \right] \quad (4.20)$$

Obtendo as derivadas contidas na equação 4.16.b:

$$\frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\lambda^2}{2} D(1 - \nu)(u_2 + u_{3,2}) \quad (4.21.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} \right) = \frac{D}{2} (1 - \nu) (u_{1,21} + u_{2,11}) + \frac{h^3}{12} \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11}^0 u_{2,1} + \sigma_{12}^0 u_{2,2}) \quad (4.21.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} \right) = D (u_{2,22} + \nu u_{1,12}) + \frac{h^3}{12} \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22}^0 u_{2,2} + \sigma_{12}^0 u_{2,1}) \quad (4.21.c)$$

Usando as relações entre os esforços e os deslocamentos 3.30:

$$\frac{\partial F}{\partial u_2} = Q_2 \quad (4.22.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} \right) = M_{12,1} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11}^0 u_{2,1} + \sigma_{12}^0 u_{2,2}) \quad (4.22.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} \right) = D M_{22,2} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22}^0 u_{2,2} + \sigma_{12}^0 u_{2,1}) \quad (4.22.c)$$

Substituindo as expressões 4.22 na equação 4.20:

$$Q_2 - M_{22,2} - M_{12,1} = \frac{h^3}{12} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11}^0 u_{2,1} + \sigma_{12}^0 u_{2,2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22}^0 u_{2,2} + \sigma_{12}^0 u_{2,1}) \right] \quad (4.23)$$

Obtendo as derivadas contidas na equação 4.16:

$$\frac{\partial F}{\partial u_3} = 0 \quad (4.24.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} \right) = \frac{\lambda^2}{2} D (1 - \nu) (u_{1,1} + u_{3,11}) + h \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11}^0 u_{3,1} + \sigma_{12}^0 u_{3,2}) \quad (4.24.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} \right) = \frac{\lambda^2}{2} D (1 - \nu) (u_{2,2} + u_{3,22}) + h \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22}^0 u_{3,2} + \sigma_{12}^0 u_{3,1}) \quad (4.24.c)$$

Usando as relações entre os esforços e os deslocamentos 3.30 juntamente com as equações 4.24:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} \right) = Q_{1,1} + h \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11}^0 u_{3,1} + \sigma_{12}^0 u_{3,2}) \quad (4.25.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} \right) = Q_{2,2} + h \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22}^0 u_{3,2} + \sigma_{12}^0 u_{3,1}) \quad (4.25.b)$$

Substituindo as expressões 4.25 na equação 4.16.c:

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} = -h \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11}^0 u_{3,1} + \sigma_{12}^0 u_{3,2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22}^0 u_{3,2} + \sigma_{12}^0 u_{3,1}) \right] \quad (4.26)$$

Obtendo as derivadas contidas na equação 4.17.a

$$\frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} = D(u_{1,1} + \nu u_{2,2}) + \frac{h^3}{12} (\sigma_{11}^0 u_{1,1} + \sigma_{12}^0 u_{1,2}) \quad (4.27.a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} = \frac{D}{2} (1 - \nu) (u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{h^3}{12} (\sigma_{22}^0 u_{1,2} + \sigma_{12}^0 u_{1,1}) \quad (4.27.b)$$

Usando as relações entre os esforços e os deslocamentos 3.30

$$\frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} = M_{11} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{11}^0 u_{1,1} + \sigma_{12}^0 u_{1,2}) \quad (4.28.a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{1,2}} = M_{12} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{22}^0 u_{1,2} + \sigma_{12}^0 u_{1,1}) \quad (4.28.b)$$

Substituindo as expressões 4.28 na equação 4.17.a:

$$\left\{ \left[ M_{11} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{11}^0 u_{1,1} + \sigma_{12}^0 u_{1,2}) \right] n_1 + \left[ M_{12} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{22}^0 u_{1,2} + \sigma_{12}^0 u_{1,1}) \right] n_2 \right\} \delta u_1 = 0 \quad (4.29.b)$$

Quando o deslocamento  $u_1$  não é imposto:

$$\begin{aligned} & \left[ M_{11} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{11}^0 u_{1,1} + \sigma_{12}^0 u_{1,2}) \right] n_1 + \\ & \left[ M_{12} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{22}^0 u_{1,2} + \sigma_{12}^0 u_{1,1}) \right] n_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.30.b)$$

Obtendo as derivadas contidas na equação 4.17.b

$$\frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} = \frac{D}{2} (1 - \nu) (u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{h^3}{12} (\sigma_{11}^0 u_{2,1} + \sigma_{12}^0 u_{2,2}) \quad (4.31.a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} = D (u_{2,2} + \nu u_{1,1}) + \frac{h^3}{12} (\sigma_{22}^0 u_{2,2} + \sigma_{12}^0 u_{2,1}) \quad (4.31.b)$$

Usando as relações entre os esforços e os deslocamentos 3.30

$$\frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} = M_{12} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{11}^0 u_{2,1} + \sigma_{12}^0 u_{2,2}) \quad (4.32.a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{2,2}} = M_{22} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{22}^0 u_{2,2} + \sigma_{12}^0 u_{2,1}) \quad (4.32.b)$$

Substituindo as expressões 4.32 na equação 4.17.b:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ M_{12} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{11}^0 u_{2,1} + \sigma_{12}^0 u_{2,2}) \right] n_1 + \right. \\ & \left. \left[ M_{22} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{22}^0 u_{2,2} + \sigma_{12}^0 u_{2,1}) \right] n_2 \right\} \delta u_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.33.a)$$

Quando o deslocamento  $u_2$  não é imposto:

$$\begin{aligned} & \left[ M_{12} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{11}^0 u_{2,1} + \sigma_{12}^0 u_{2,2}) \right] n_1 + \\ & \left[ M_{22} + \frac{h^3}{12} (\sigma_{22}^0 u_{2,2} + \sigma_{12}^0 u_{2,1}) \right] n_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.34.a)$$

Obtendo as derivadas contidas na equação 4.17.c

$$\frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} = \frac{\lambda^2}{2} D(1 - \nu)(u_1 + u_{3,1}) + h(\sigma_{11}^0 u_{3,1} + \sigma_{12}^0 u_{3,2}) \quad (4.35.a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} = \frac{\lambda^2}{2} D(1 - \nu)(u_2 + u_{3,2}) + h(\sigma_{22}^0 u_{3,2} + \sigma_{12}^0 u_{3,1}) \quad (4.35.b)$$

Usando as relações entre os esforços e os deslocamentos 3.30

$$\frac{\partial F}{\partial u_{3,1}} = Q_1 + h(\sigma_{11}^0 u_{3,1} + \sigma_{12}^0 u_{3,2}) \quad (4.36.a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{3,2}} = Q_2 + h(\sigma_{22}^0 u_{3,2} + \sigma_{12}^0 u_{3,1}) \quad (4.36.b)$$

Substituindo as expressões 4.36 na equação 4.17.c:

$$\begin{aligned} & \{ [Q_1 + h(\sigma_{11}^0 u_{3,1} + \sigma_{12}^0 u_{3,2})] n_1 + \\ & [Q_2 + h(\sigma_{22}^0 u_{3,2} + \sigma_{12}^0 u_{3,1})] n_2 \} \delta u_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.37.a)$$

Quando o deslocamento  $u_3$  não é imposto:

$$\begin{aligned} & [Q_1 + h(\sigma_{11}^0 u_{3,1} + \sigma_{12}^0 u_{3,2})] n_1 + \\ & [Q_2 + h(\sigma_{22}^0 u_{3,2} + \sigma_{12}^0 u_{3,1})] n_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.38.a)$$

Adotando as definições:

$$t_1 = M_{11} n_1 + M_{12} n_2 \quad (4.39.a)$$

$$t_2 = M_{12} n_1 + M_{22} n_2 \quad (4.39.b)$$

$$t_3 = Q_1 n_1 + Q_2 n_2 \quad (4.39.c)$$

Considerando as resultantes dos carregamentos na espessura da placa:

$$N_{ij} = h \sigma_{ij} \quad (4.40)$$

As equações diferenciais do problema de flambagem de placas podem ser escritas exclusivamente em função dos deslocamentos médios, entretanto, para reduzir o tamanho das expressões e também simplificar o processo de obtenção das

equações integrais no capítulo 5 é conveniente escrevê-las em função dos esforços e dos deslocamentos médios conforme as expressões a seguir:

$$Q_1 - M_{11,1} - M_{12,2} = \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (N_{11}u_{1,1} + N_{12}u_{1,2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (N_{22}u_{1,2} + N_{12}u_{1,1}) \right] \quad (4.41.a)$$

$$Q_2 - M_{22,2} - M_{12,1} = \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (N_{11}u_{2,1} + N_{12}u_{2,2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (N_{22}u_{2,2} + N_{12}u_{2,1}) \right] \quad (4.41.b)$$

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (N_{22}u_{3,2} + N_{12}u_{3,1}) \right] \quad (4.41.c)$$

As condições de contorno são:

Com relação a  $u_1$ , quando o mesmo não é imposto:

$$t_1 + \frac{h^2}{12} [(N_{11}u_{1,1} + N_{12}u_{1,2})n_1 + (N_{22}u_{1,2} + N_{12}u_{1,1})n_2] = 0 \quad (4.42.a)$$

Com relação a  $u_2$ , quando o mesmo não é imposto:

$$t_2 + \frac{h^2}{12} [(N_{11}u_{2,1} + N_{12}u_{2,2})n_1 + (N_{22}u_{2,2} + N_{12}u_{2,1})n_2] = 0 \quad (4.42.b)$$

Com relação a  $u_3$ , quando o mesmo não é imposto:

$$t_3 + (N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2})n_1 + (N_{22}u_{3,2} + N_{12}u_{3,1})n_2 = 0 \quad (4.42.c)$$

## 5 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA A FLAMBAGEM DE PLACAS

### 5.1 OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

Neste capítulo são obtidas as equações integrais do problema de flambagem de placas, a dedução é realizada com base no teorema de reciprocidade de Betti, o qual permite relacionar os campos de deslocamentos e esforços reais aos respectivos campos das soluções fundamentais, os campos das soluções fundamentais são aqueles que correspondem aos estados de carregamentos concentrados e estão relacionados com a função Delta de Dirac.

A função Delta de Dirac possui as seguintes propriedades:

$$\delta(x - x') = 0; \text{ quando } x \neq x' \quad (5.1.a)$$

$$\delta(x - x') = \infty; \text{ quando } x = x' \quad (5.1.b)$$

$$\int_{\Omega} \delta(x - x') f(x) dx = f(x') \quad (5.1.c)$$

A presente formulação usa as soluções fundamentais obtidas por WEEËN (1982), as quais satisfazem as equações diferenciais:

$$D\{u_{i1,11}^* + \nu u_{i2,21}^* + \frac{(1-\nu)}{2} [(u_{i1,22}^* + u_{i2,12}^*) - \lambda^2(u_{i1}^* + u_{i3,1}^*)]\} = -\delta(x - x') \delta_{i1} \quad (5.2.a)$$

$$D\{u_{i2,22}^* + \nu u_{i1,12}^* + \frac{(1-\nu)}{2} [(u_{i1,21}^* + u_{i2,11}^*) - \lambda^2(u_{i2}^* + u_{i3,2}^*)]\} = -\delta(x - x') \delta_{i2} \quad (5.2.b)$$

$$\frac{\lambda^2 D(1-\nu)}{2} (u_{i1,1}^* + u_{i3,11}^* + u_{i2,2}^* + u_{i3,22}^*) = -\delta(x - x') \delta_{i3} \quad (5.2.c)$$

Onde  $\delta_{ij}$  é o Delta de Kronecker.

Também é possível expressar as equações 5.2 através dos esforços:

$$M_{i11,1}^* + M_{i12,2}^* - Q_{i1}^* = -\delta(x - x')\delta_{i1} \quad (5.3.a)$$

$$M_{i12,1}^* + M_{i22,2}^* - Q_{i2}^* = -\delta(x - x')\delta_{i2} \quad (5.3.b)$$

$$Q_{i1,1}^* + Q_{i2,2}^* = -\delta(x - x')\delta_{i3} \quad (5.3.c)$$

Escrevendo a seguinte integral:

$$S\sigma_i^* = \int_V (\sigma_{i11}^* \varepsilon_{11} + \sigma_{i2}^* \varepsilon_{22} + \sigma_{i12}^* \gamma_{12} + \sigma_{i13}^* \gamma_{13} + \sigma_{i2}^* \gamma_{23}) dV \quad (5.4)$$

Onde  $\sigma_{ijk}^*$  são as tensões relacionadas com a solução fundamental para o carregamento na direção  $i$  e  $\varepsilon_{ij}$  são as deformações relacionadas com os carregamentos reais.

Usando as relações dadas em 3.18, 3.20 e 3.21, é possível reescrever a equação 5.2 da seguinte maneira:

$$S\sigma_i^* = \int_V \left\{ \frac{12}{h^3} x_3^2 [M_{i11}^* u_{1,1} + M_{i22}^* u_{2,2} + M_{i12}^* (u_{1,2} + u_{2,1})] + \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] [Q_{i1}^* (u_1 + u_{3,1}) + Q_{i2}^* (u_2 + u_{3,2})] \right\} dV \quad (5.5)$$

Realizando a integração com relação a  $x_3$  de  $\frac{-h}{2}$  até  $\frac{h}{2}$ :

$$S\sigma_i^* = \int_{\Omega} [M_{i11}^* u_{1,1} + M_{i22}^* u_{2,2} + M_{i12}^* (u_{1,2} + u_{2,1}) + Q_{i1}^* (u_1 + u_{3,1}) + Q_{i2}^* (u_2 + u_{3,2})] d\Omega \quad (5.6)$$

Usando as relações entre os esforços e os deslocamentos 3.30

$$\begin{aligned}
S\sigma_i^* = & \int_{\Omega} D \{ (u_{i1,1}^* + \nu u_{i2,2}^*) u_{1,1} + (u_{i2,2}^* + \nu u_{i1,1}^*) u_{2,2} + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} (u_{i1,2}^* + u_{i2,1}^*) (u_{1,2} + u_{2,1}) + \\
& + \frac{\lambda^2}{2} (1-\nu) [(u_{i1}^* + u_{i3,1}^*) (u_1 + u_{3,1}) \\
& + (u_{i2}^* + u_{i3,2}^*) (u_2 + u_{3,2})] \} d\Omega
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Usando novamente as equações 3.30, é possível escrever:

$$\begin{aligned}
S\sigma_i^* = & \int_{\Omega} [M_{11} u_{i1,1}^* + M_{22} u_{i2,2}^* + M_{12} (u_{i1,2}^* + u_{i2,1}^*) + \\
& Q_1 (u_{i1}^* + u_{i3,1}^*) + Q_2 (u_{i2}^* + u_{i3,2}^*)] d\Omega
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Através das equações 5.4 e 5.6 encontramos a igualdade:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [M_{i1}^* u_{1,1} + M_{i22}^* u_{2,2} + M_{i12}^* (u_{1,2} + u_{2,1}) + \\
& Q_{i1}^* (u_1 + u_{3,1}) + Q_{i2}^* (u_2 + u_{3,2})] d\Omega = \\
& \int_{\Omega} [M_{11} u_{i1,1}^* + M_{22} u_{i2,2}^* + M_{12} (u_{i1,2}^* + u_{i2,1}^*) + \\
& Q_1 (u_{i1}^* + u_{i3,1}^*) + Q_2 (u_{i2}^* + u_{i3,2}^*)] d\Omega
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Fazendo uso do teorema da divergência, podemos reescrever a equação 5.7 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} [(M_{i11}^* u_1 + M_{i12}^* u_2 + Q_{i1}^* u_3) n_1 + \\
& (M_{i11}^* u_1 + M_{i22}^* u_2 + Q_{i2}^* u_3) n_2] d\Gamma + \\
& - \int_{\Omega} [u_1 (M_{i11,1}^* + M_{i12,2}^* - Q_{i1}^*) + \\
& u_2 (M_{i12,1}^* + M_{i22,2}^* - Q_{i2}^*) + \\
& u_3 (Q_{i1,1}^* + Q_{i2,2}^*)] d\Omega = \tag{5.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} [(M_{111} u_{i1}^* + M_{112} u_{i2}^* + Q_1 u_{i3}^*) n_1 + \\
& (M_{121} u_{i1}^* + M_{222} u_{i2}^* + Q_2 u_{i3}^*) n_2] d\Gamma + \\
& - \int_{\Omega} [u_{i1}^* (M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) + \\
& u_{i2}^* (M_{12,1} + M_{22,2} - Q_2) + u_{i3}^* (Q_{1,1} + Q_{2,2})] d\Omega
\end{aligned}$$

Usando as definições dadas em 4.39

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} (t_{i1}^* u_1 + t_{i2}^* u_2 + t_{i3}^* u_3) d\Gamma + \\
& - \int_{\Omega} [u_1 (M_{i11,1}^* + M_{i12,2}^* - Q_{i1}^*) + \\
& u_2 (M_{i12,1}^* + M_{i22,2}^* - Q_{i2}^*) + \\
& u_3 (Q_{i1,1}^* + Q_{i2,2}^*)] d\Omega = \int_{\Gamma} (t_1 u_{i1}^* + t_2 u_{i2}^* + t_3 u_{i3}^*) d\Gamma + \\
& - \int_{\Omega} [u_{i1}^* (M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) + \\
& + u_{i2}^* (M_{12,1} + M_{22,2} - Q_2) + u_{i3}^* (Q_{1,1} + Q_{2,2})] d\Omega \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Através das equações diferenciais 4.41 e 5.3 podemos reformular a equação

5.9:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} (t_{i1}^* u_1 + t_{i2}^* u_2 + t_{i3}^* u_3) d\Gamma + \int_{\Omega} u_i \delta(x - x') d\Omega = \\
& \int_{\Gamma} (t_1 u_{i1}^* + t_2 u_{i2}^* + t_3 u_{i3}^*) d\Gamma + \\
& \int_{\Omega} \left\{ u_{i1}^* \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (N_{11} u_{1,1} + N_{12} u_{1,2}) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\partial}{\partial x_2} (N_{22} u_{1,2} + N_{12} u_{1,1}) \right] \right. \\
& + u_{i2}^* \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (N_{11} u_{2,1} + N_{12} u_{2,2}) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (N_{22} u_{2,2} + N_{12} u_{2,1}) \right] \\
& \left. + u_{i3}^* \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (N_{11} u_{3,1} + N_{12} u_{3,2}) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\partial}{\partial x_2} (N_{22} u_{3,2} + N_{12} u_{3,1}) \right] \right\} d\Omega
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Reescrevendo a equação 5.10 usando a notação indicial:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_i \delta(x - x') d\Omega = \int_{\Gamma} t_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij}^* u_j d\Gamma + \\
& \int_{\Omega} \left[ u_{i\alpha}^* \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (N_{\beta\gamma} u_{\alpha,\gamma}) + u_{i3}^* \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (N_{\beta\gamma} u_{3,\gamma}) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{5.11}$$

De acordo com as propriedades da função Delta de Dirac, temos:

$$\begin{aligned}
u_i(x') &= \int_{\Gamma} t_j(x) u_{ij}^*(x'; x) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x'; x) u_j(x) d\Gamma + \\
&\int_{\Omega} \left[ u_{i\alpha}^*(x'; x) \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (N_{\beta\gamma}(x) u_{\alpha,\gamma}(x)) + \right. \\
&\left. u_{i3}^*(x'; x) \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (N_{\beta\gamma}(x) u_{3,\gamma}(x)) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Onde  $x'$  é o ponto fonte e  $x$  é o ponto campo, esta equação não é válida quando o ponto fonte está no contorno.

É possível aplicar o teorema da divergência nas integrais que contém os termos  $N_{\beta\gamma}$  e reescrever a equação 5.11 do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
u_i(x') &= \int_{\Gamma} t_j(x) u_{ij}^*(x', x) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma + \\
&+ \frac{h^2}{12} \int_{\Gamma} u_{i\alpha}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{\alpha,\gamma}(x) n_{\beta}(x) d\Gamma + \\
&- \frac{h^2}{12} \int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{\alpha,\gamma}(x) d\Omega + \\
&\int_{\Gamma} u_{i3}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{3,\gamma}(x) n_{\beta}(x) d\Gamma + \\
&- \int_{\Omega} u_{i3,\beta}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{3,\gamma}(x) d\Omega
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Quando o ponto fonte está no contorno é necessário avaliar adequadamente as integrais cujo comportamento é singular, conforme mostrado em SOARES Jr. (2015) a equação passa a ser a seguinte:

$$\begin{aligned}
C_{ij}u_i(x') &= \int_{\Gamma} t_j(x)u_{ij}^*(x',x)d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x',x)u_j(x)d\Gamma \\
&+ \frac{h^2}{12} \int_{\Gamma} u_{i\alpha}^*(x',x)N_{\beta\gamma}(x)u_{\alpha,\gamma}(x)n_{\beta}(x) d\Gamma + \\
&- \frac{h^2}{12} \int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta}^*(x',x)N_{\beta\gamma}(x)u_{\alpha,\gamma}(x) d\Omega +
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} u_{i3}^*(x',x)N_{\beta\gamma}(x)u_{3,\gamma}(x)n_{\beta}(x) d\Gamma + \\
&- \int_{\Omega} u_{i3,\beta}^*(x',x)N_{\beta\gamma}(x)u_{3,\gamma}(x) d\Omega
\end{aligned}$$

Onde:

$C_{ij} = 0$ ; quando o ponto fonte está fora do contorno

$C_{ij} = 1$ ; quando o ponto fonte está dentro do contorno

(5.15)

$C_{ij} = 0,5$ ; quando o ponto fonte está numa parte suave do contorno

Na presente formulação também é necessário computar as derivadas dos deslocamentos no domínio da placa, sendo necessário usar as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
u_{i,\varphi}(x') &= \int_{\Gamma} t_j(x) u_{ij,\varphi}^*(x', x) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij,\varphi}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma + \\
&\frac{h^2}{12} \int_{\Gamma} u_{i\alpha,\varphi}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{\alpha,\gamma}(x) n_{\beta}(x) d\Gamma + \\
&-\frac{h^2}{12} \int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta\varphi}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{\alpha,\gamma}(x) d\Omega + \\
&\int_{\Gamma} u_{i3,\varphi}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{3,\gamma}(x) n_{\beta}(x) d\Gamma + \\
&-\int_{\Omega} u_{i3,\beta\varphi}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{3,\gamma}(x) d\Omega
\end{aligned} \tag{5.16}$$

## 5.2 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

A seguir são apresentadas as soluções fundamentais usadas na presente formulação, as quais foram obtidas por Weeën (1982).

$$\begin{aligned}
u_{\alpha\beta}^* &= \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \{ [8B(z) - (1-\nu)(2\ln z - 1)] \delta_{\alpha\beta} \\
&- [8A(z) + 2(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} \}
\end{aligned} \tag{5.17.a}$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln z - 1) r r_{,\alpha} \tag{5.17.b}$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [z^2(1-\nu)(\ln z - 1) - 8\ln z] \tag{5.17.c}$$

Onde:

Considerando a teoria de Reissner  $\rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$

Considerando a teoria de Mindlin  $\rightarrow \lambda = \frac{\pi}{h}$

$$z = \lambda r \tag{5.18.a}$$

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[ K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (5.18.b)$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[ K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (5.18.c)$$

$K_0$  e  $K_1$  são as funções de Bessel modificadas.

As soluções fundamentais referentes as forças de superfície, são encontradas a partir das equações:

$$t_{i\alpha}^* = M_{i\alpha\beta}^* n_\beta \quad (5.19.a)$$

$$t_{i3}^* = Q_{i\alpha}^* n_\alpha \quad (5.19.b)$$

Onde as soluções fundamentais referentes aos momentos e cortantes são dadas por:

$$M_{i\alpha\beta}^* = \frac{D(1+\nu)}{2} \left( u_{i\alpha,\beta}^* + u_{i\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{i\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (5.20.a)$$

$$Q_{i\alpha}^* = \frac{\lambda^2 D(1-\nu)}{2} (u_{i\alpha}^* + u_{i3,\alpha}^*) \quad (5.20.b)$$

Neste trabalho todas as derivadas foram calculadas com relação ao ponto fonte.

## 6. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MEC PARA O PROBLEMA DE FLAMBAGEM DE PLACAS COM A TEORIA DE REISSNER-MINDLIN

Este capítulo descreve o processo de resolução das equações integrais 6.1.a e 6.1.b, as quais foram apresentadas no capítulo anterior e descrevem as variáveis do problema de flambagem de placas considerando a teoria de Reissner-Mindlin. A resolução das equações citadas possibilita a formulação do problema de autovalor, o qual fornece o parâmetro de carga crítica.

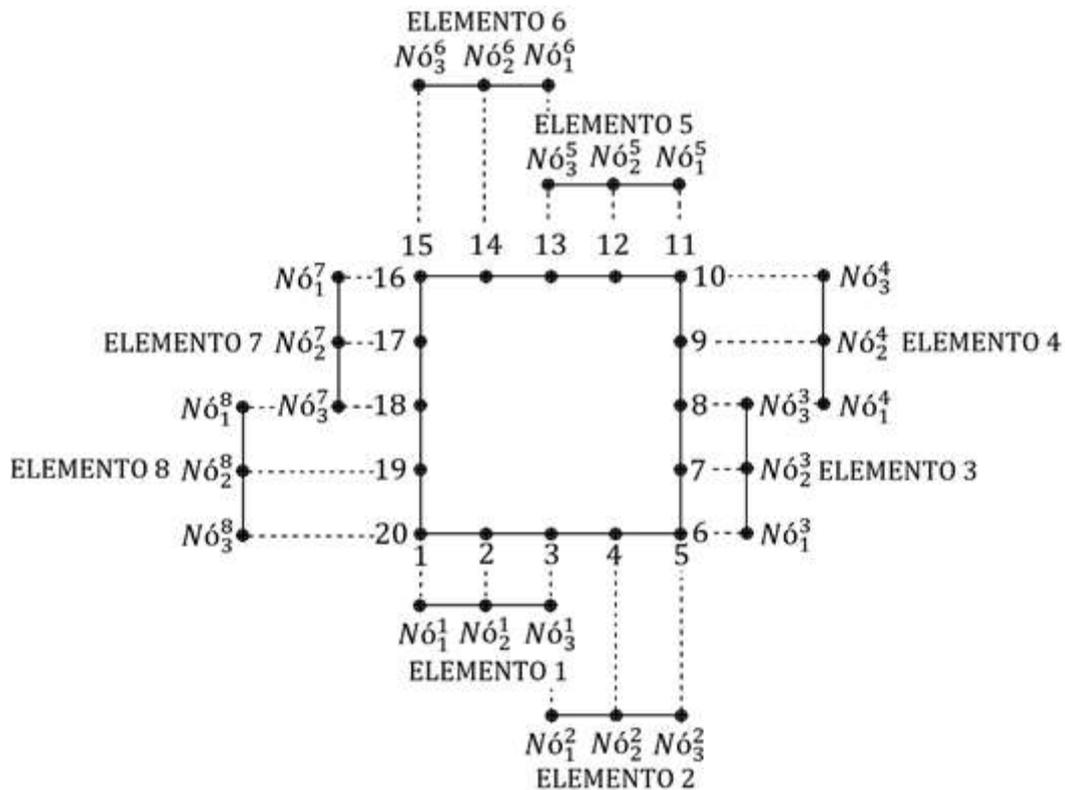
Relembrando as equações dos deslocamentos e das respectivas derivadas:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}u_i(x') &= \int_{\Gamma} t_j(x)u_{ij}^*(x', x)d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x', x)u_j(x)d\Gamma \\
 &+ \frac{h^2}{12} \int_{\Gamma} u_{i\alpha}^*(x', x)N_{\beta\gamma}(x)u_{\alpha,\gamma}(x)n_{\beta}(x) d\Gamma + \\
 &- \frac{h^2}{12} \int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta}^*(x', x)N_{\beta\gamma}(x)u_{\alpha,\gamma}(x) d\Omega + \tag{6.1.a} \\
 &\int_{\Gamma} u_{i3}^*(x', x)N_{\beta\gamma}(x)u_{3,\gamma}(x)n_{\beta}(x) d\Gamma + \\
 &- \int_{\Omega} u_{i3,\beta}^*(x', x)N_{\beta\gamma}(x)u_{3,\gamma}(x) d\Omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{i,\varphi}(x') &= \int_{\Gamma} t_j(x)u_{ij,\varphi}^*(x', x)d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij,\varphi}^*(x', x)u_j(x)d\Gamma + \\
 &\frac{h^2}{12} \int_{\Gamma} u_{i\alpha,\varphi}^*(x', x)N_{\beta\gamma}(x)u_{\alpha,\gamma}(x)n_{\beta}(x) d\Gamma + \\
 &- \frac{h^2}{12} \int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta\varphi}^*(x', x)N_{\beta\gamma}(x)u_{\alpha,\gamma}(x) d\Omega + \tag{6.1.b} \\
 &\int_{\Gamma} u_{i3,\varphi}^*(x', x)N_{\beta\gamma}(x)u_{3,\gamma}(x)n_{\beta}(x) d\Gamma + \\
 &- \int_{\Omega} u_{i3,\beta\varphi}^*(x', x)N_{\beta\gamma}(x)u_{3,\gamma}(x) d\Omega
 \end{aligned}$$

Será assumido que  $N_{\beta\gamma}$  é constante em toda a placa, no caso de placas não retangulares, ou placas que contenham furos, essa simplificação pode resultar em erros significativos.

Em primeiro lugar são tratadas as duas primeiras integrais de contorno da equação 6.1.a. Para este fim, o contorno do problema é dividido em elementos.



**Figura 6.1** – Placa dividida em 8 elementos quadráticos

$$\int_{\Gamma} t_j(x) u_{ij}^*(x', x) d\Gamma = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} t_j(x) u_{ij}^*(x', x) d\Gamma_e \quad (6.2.a)$$

$$\int_{\Gamma} t_{ij}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma_e \quad (6.2.b)$$

$e \rightarrow$  Índice do elemento de contorno

$Ne \rightarrow$  Número total de elementos de contorno usados

$\Gamma_e \rightarrow$  Contorno do elemento  $e$

Em cada elemento as coordenadas  $x_\alpha$  e as variáveis  $u_j$  e  $t_j$  são interpoladas por funções quadráticas, as quais são parametrizadas por  $\xi$  de modo que  $\xi = -1$  seja equivalente ao primeiro nó do elemento,  $\xi = 0$  seja equivalente ao segundo nó do elemento e  $\xi = 1$  seja equivalente ao terceiro nó do elemento.

$$u_j^e(\xi) = f_n(\xi)u_{j_n}^e \quad (6.3.a)$$

$$t_j^e(\xi) = f_n(\xi)t_{j_n}^e \quad (6.3.b)$$

$$x_\alpha^e(\xi) = f_n(\xi)x_{\alpha_n}^e \quad (6.3.c)$$

$u_j^e(\xi) \rightarrow$  Função que descreve o deslocamento na direção  $j$  no elemento  $e$ .

$u_{j_n}^e \rightarrow$  Deslocamento na direção  $j$  no nó  $n$  do elemento  $e$ .

$t_j^e(\xi) \rightarrow$  Função que descreve o esforço de superfície na direção  $j$  no elemento  $e$ .

$t_{j_n}^e \rightarrow$  Esforço de superfície na direção  $j$  no nó  $n$  do elemento  $e$ .

$x_\alpha^e(\xi) \rightarrow$  Função que descreve a coordenada  $x_\alpha$  no elemento  $e$ .

$x_{\alpha_n}^e \rightarrow$  Coordenada  $x_\alpha$  no nó  $n$  do elemento  $e$ .

O índice  $n$  se refere a posição do nó com relação ao elemento, por exemplo, quando  $n = 1$ , a variável se refere ao primeiro nó do elemento, conforme a figura 6.1 ilustra.

$f_n$  são as funções de forma e são dadas pelas expressões:

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (6.4.a)$$

$$f_2(\xi) = (\xi + 1)(\xi - 1) \quad (6.4.b)$$

$$f_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (6.4.c)$$

Com estas considerações podemos reescrever as integrais de contorno da seguinte maneira:

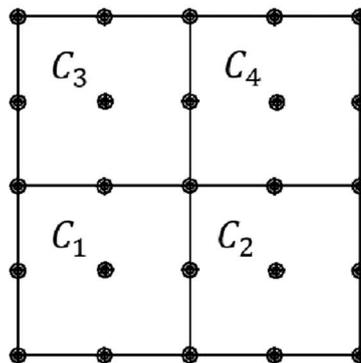
$$\sum_{e=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} t_j(x) u_{ij}^*(x', x) d\Gamma_e = \sum_{e=1}^{Ne} t_{j_n}^e \int_{-1}^1 u_{ij}^*(x', x_e(\xi)) f_n(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.5.a)$$

$$\sum_{e=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma_e = \sum_{e=1}^{Ne} u_j^e \int_{-1}^1 t_{ij}^*(x', x_e(\xi)) f_n(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.5.b)$$

$x_e(\xi) \rightarrow$  É a função vetorial que descreve o ponto campo no elemento  $e$ .

$J(\xi) \rightarrow$  É o jacobiano referente a transformação de variáveis de integração.

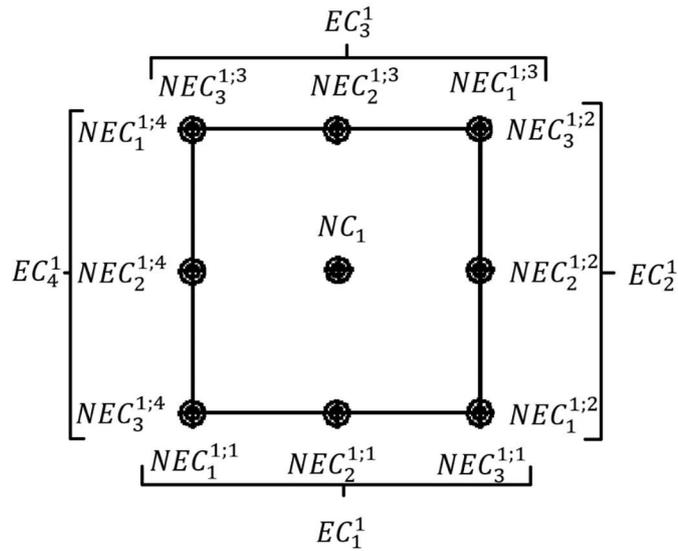
Em seguida são tratadas as integrais referentes a não linearidade geométrica, as quais dependem das derivadas das variáveis  $u_j$ . Para isso dividimos o domínio da placa em células conforme a ilustração.



Legenda:

$C_i \rightarrow$  Célula  $i$

**Figura 6.2** – Placa dividida em 4 células



Legenda:

$EC_j^i \rightarrow$  Elemento  $j$  da célula  $i$

$NC_i \rightarrow$  Nó central da célula  $i$

$NEC_k^{i-j} \rightarrow$  Nó  $k$  do elemento  $j$  da célula  $i$

**Figura 6.3** – Detalhes da célula 1

Neste trabalho as integrais mencionadas são computadas considerando que as derivadas das variáveis  $u_j$  são constantes no domínio de cada célula. Deste modo podemos reescrever as integrais de contorno referentes a não linearidade geométrica da seguinte maneira:

$$\frac{h^2}{12} \int_{\Gamma} u_{i\alpha}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{\alpha,\gamma}(x) n_{\beta}(x) d\Gamma = \sum_{k=1}^{N_{cel}} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \int_{\bar{\Gamma}ck} u_{i\alpha}^*(x', x) n_{\beta}(x) d\bar{\Gamma}ck \quad (6.6.a)$$

$$\int_{\Gamma} u_{i3}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{3,\gamma}(x) n_{\beta}(x) d\Gamma = \sum_{k=1}^{N_{cel}} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \int_{\bar{\Gamma}ck} u_{i3}^*(x', x) n_{\beta}(x) d\bar{\Gamma}ck \quad (6.6.b)$$

$k \rightarrow$  Índice da célula.

$N_{cel}$  → Número total de células.

$u_{k\alpha,\gamma}$  → Derivada do deslocamento na direção  $\alpha$  com relação a  $\gamma$  computado no centro da célula  $k$ .

$\bar{\Gamma}ck$  → Parte do contorno da célula  $k$  que coincide com o contorno da placa.

Parametrizando a geometria da célula por  $\xi$  e usando as mesmas funções de forma que foram usadas nos elementos de contorno, reescrevemos as integrais 6.6 da seguinte maneira:

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \int_{\bar{\Gamma}ck} u_{i\alpha}^*(x', x) n_{\beta}(x) d\bar{\Gamma}ck = \quad (6.7.a)$$

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \sum_{b=1}^{Nb} \int_{-1}^1 u_{i\alpha}^*(x', xc_{kb}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi$$

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \int_{\bar{\Gamma}ck} u_{i3}^*(x', x) n_{\beta}(x) d\bar{\Gamma}ck =$$

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \sum_{b=1}^{Nb} \int_{-1}^1 u_{i3}^*(x', xc_{kb}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.7.b)$$

$b$  → índice do elemento da célula que coincide com o contorno da placa

$Nb$  → Número total de elementos da célula que coincidem com o contorno da placa.

$xc_{kb}(\xi)$  → Função que descreve as coordenadas do ponto campo no elemento  $b$  da célula  $k$ .

As integrais de domínio são reescritas do seguinte modo:

$$\frac{h^2}{12} \int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{\alpha,\gamma}(x) d\Omega =$$

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \int_{\Omega_k} u_{i\alpha,\beta}^*(x', x) d\Omega_k \quad (6.8.a)$$

$$\int_{\Omega} u_{i3,\beta}^*(x', x) N_{\beta\gamma}(x) u_{3,\gamma}(x) d\Omega =$$

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \int_{\Omega_k} u_{i3,\beta}^*(x', x) d\Omega_k \quad (6.8.b)$$

$\Omega \rightarrow$  Domínio da placa

$\Omega_k \rightarrow$  Domínio da célula  $k$

Usando o teorema da divergência é possível reescrever as integrais de domínio:

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \int_{\Omega_k} u_{i\alpha,\beta}^*(x', x) d\Omega_k =$$

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \int_{\Gamma_{ck}} u_{i\alpha}^*(x', x) n_{\beta}(x) d\Gamma_{ck} \quad (6.9.a)$$

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \int_{\Omega_k} u_{i3,\beta}^*(x', x) d\Omega_k =$$

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \int_{\Gamma_{ck}} u_{i3}^*(x', x) n_{\beta}(x) d\Gamma_{ck} \quad (6.9.b)$$

$\Gamma_{ck} \rightarrow$  Contorno da célula  $k$

Considerando que no presente trabalho a geometria das células é composta por 4 elementos de contorno quadráticos, temos as seguintes igualdades:

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \int_{\Gamma_{ck}} u_{i\alpha}^*(x', x) n_{\beta}(x) d\Gamma_{ck} =$$

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 u_{i\alpha}^*(x', xc_{km}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi$$
(6.10.a)

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \int_{\Gamma_{ck}} u_{i3}^*(x', x) n_{\beta}(x) d\Gamma_{ck} =$$

$$\sum_{k=1}^{N_{cel}} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 u_{i3}^*(x', xc_{km}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi$$
(6.10.b)

$m \rightarrow$  índice do elemento da célula  $k$

$xc_{km}(\xi) \rightarrow$  Função que descreve as coordenadas do ponto campo no elemento  $m$  da célula  $k$ .

Por fim podemos reescrever a equação 6.1.a como:

$$\frac{1}{2} u_i(x') = \sum_{e=1}^{N_e} t_{j_n}^e \int_{-1}^1 u_{ij}^*(x', x_e(\xi)) f_n(\xi) J(\xi) d\xi$$

$$- \sum_{e=1}^{N_e} u_{j_n}^e \int_{-1}^1 t_{ij}^*(x', x_e(\xi)) f_n(\xi) J(\xi) d\xi$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_{cel}} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \sum_{b=1}^{N_b} \int_{-1}^1 u_{i\alpha}^*(x', xc_{kb}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_{cel}} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \sum_{b=1}^{N_b} \int_{-1}^1 u_{i3}^*(x', xc_{kb}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi$$

$$- \sum_{k=1}^{N_{cel}} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 u_{i\alpha}^*(x', xc_{km}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi$$

$$- \sum_{k=1}^{N_{cel}} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 u_{i3}^*(x', xc_{km}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi$$
(6.11)

Inicialmente a equação 6.11.a é resolvida considerando que as derivadas dos deslocamentos possuem valor unitário em todas as células, assim a equação apresenta 6 incógnitas por nó, 3 delas são obtidas das seguintes condições de contorno do problema:

Quando a borda é engastada:

$$u_1 = 0 \quad (6.12.a)$$

$$u_2 = 0 \quad (6.12.b)$$

$$u_3 = 0 \quad (6.12.c)$$

Quando a borda é apoiada:

$$t_1 = -\frac{h^2}{12} [(N_{11}u_{1,1} + N_{12}u_{1,2})n_1 + (N_{22}u_{1,2} + N_{12}u_{1,1})n_2] \quad (6.13.a)$$

$$u_2 = 0 \quad (6.13.b)$$

$$u_3 = 0 \quad (6.13.c)$$

\*Considerando que a direção 1 é normal ao contorno da borda e a direção 2 é tangencial.

Quando a borda é livre:

$$t_1 = -\frac{h^2}{12} [(N_{11}u_{1,1} + N_{12}u_{1,2})n_1 + (N_{22}u_{1,2} + N_{12}u_{1,1})n_2] \quad (6.14.a)$$

$$t_2 = -\frac{h^2}{12} [(N_{11}u_{2,1} + N_{12}u_{2,2})n_1 + (N_{22}u_{2,2} + N_{12}u_{2,1})n_2] \quad (6.14.b)$$

$$t_3 = -(N_{11}u_{3,1} + N_{12}u_{3,2})n_1 - (N_{22}u_{3,2} + N_{12}u_{3,1})n_2 \quad (6.14.c)$$

Ainda restam 3 incógnitas por nó, isso indica que para gerar um sistema de equações com solução única precisamos gerar 3 equações em cada nó. Para isso escrevemos as equações dos 3 deslocamentos posicionando o ponto fonte em cada um dos nós do contorno.

São usados elementos descontínuos para tratar a descontinuidade do contorno nos cantos da placa. Quando o primeiro nó do elemento coincide com o canto da placa, o posicionamento do ponto fonte neste nó é dado pelas funções 6.3.c na coordenada  $\xi = -2/3$ , quando o último nó do elemento coincide com o canto da placa, o posicionamento do ponto fonte referente as equações deste nó é dado pelas funções 6.3.c com  $\xi = 2/3$ .

Diante do exposto, é gerado o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} u_i(x'_p) &= \sum_{e=1}^{Ne} t_{j_n}^e \int_{-1}^1 u_{ij}^*(x'_p, x_e(\xi)) f_n(\xi) J(\xi) d\xi + \\
&- \sum_{e=1}^{Ne} u_{j_n}^e \int_{-1}^1 t_{ij}^*(x'_p, x_e(\xi)) f_n(\xi) J(\xi) d\xi + \\
&+ \sum_{k=1}^{Ncel} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \sum_{b=1}^{Nb} \int_{-1}^1 u_{i\alpha}^*(x'_p, x_{c_{kl}}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi + \\
&+ \sum_{k=1}^{Ncel} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \sum_{b=1}^{Nb} \int_{-1}^1 u_{i3}^*(x'_p, x_{c_{kl}}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi + \\
&- \sum_{k=1}^{Ncel} \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} u_{k\alpha,\gamma} \sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 u_{i\alpha}^*(x'_p, x_{c_{km}}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi + \\
&- \sum_{k=1}^{Ncel} N_{\beta\gamma} u_{k3,\gamma} \sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 u_{i3}^*(x'_p, x_{c_{km}}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$p \rightarrow$  Índice do ponto fonte

O sistema de equações 6.15, pode ser escrito na forma matricial:

$$G \cdot t - H \cdot u + F = 0 \tag{6.16}$$

$t \rightarrow$  Vetor dos esforços de superfície, seus elementos são dados por:

$$t_c = t_{j_n}^e \tag{6.17}$$

$u \rightarrow$  Vetor dos deslocamentos, seus elementos são dados por:

$$u_c = u_j^e \quad (6.18)$$

Nas equações 6.17 e 6.18:

$$c = 6.(e - 1) + 3(n - 1) + j + 3ND \quad (6.19)$$

$ND \rightarrow$  Número de nós duplos antes do elemento  $e$ .

Os elementos da matriz  $H$  são dados por:

$$H_{lc} = \frac{1}{2} \delta_{lc} + \sum_{p=1}^{2Ne+ND} \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 \delta_{cc^\delta} \delta_{ll^\delta} \int_{-1}^1 t_{ij}^*(x'_p, x_e(\xi)) f_n(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.20)$$

Os elementos da matriz  $G$  são:

$$G_{lc} = \sum_{p=1}^{2Ne+ND} \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 \delta_{cc^\delta} \delta_{ll^\delta} \int_{-1}^1 u_{ij}^*(x'_p, x_e(\xi)) f_n(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.21)$$

Para as equações 6.20 e 6.21

$l \rightarrow$  indica a linha da matriz e varia de 1 até  $3(2Ne + ND)$

$c \rightarrow$  indica a coluna da matriz e varia de 1 até  $3(2Ne + ND)$

$$l^\delta = 3.(p - 1) + i \quad (6.22.a)$$

$$c^\delta = 6.(e - 1) + 3(n - 1) + j + 3ND \quad (6.22.b)$$

Os elementos do vetor  $F$  podem ser escritos como:

$$F_q = \overline{NLC}^q . DR + \overline{NL3}^q . DW + NLC^q . DR + NL3^q . DW \quad (6.23)$$

Os elementos das matrizes  $\overline{NLC}^q$  são dados por:

$$\overline{NLC}_{lc}^q = \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} \sum_{b=1}^{Nb} \int_{-1}^1 u_{i\alpha}^*(x'_p, x_{c_{kb}}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.24)$$

São computadas apenas as partes do contorno das células que coincidem com o contorno da placa.

Os elementos do vetor  $DR$  são dados por:

$$DR_C = u_{k\alpha,\gamma} \quad (6.25)$$

Para as equações 6.24 e 6.25:

$$l = \beta \quad (6.26.a)$$

$$c = 4(k - 1) + 2(\alpha - 1) + \gamma \quad (6.26.b)$$

$$q = 3(p - 1) + i \quad (6.26.c)$$

Os elementos das matrizes  $\overline{NL3}^q$  são dados por:

$$\overline{NL3}_{lc}^q = N_{\beta\gamma} \sum_{b=1}^{Nb} \int_{-1}^1 u_{i3}^*(x'_p, xc_{kb}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.27)$$

Os elementos do vetor  $DW$  são dados por:

$$DW_C = u_{k3,\gamma} \quad (6.28)$$

Para as equações 6.27 e 6.28:

$$l = \beta \quad (6.29.a)$$

$$c = 2(k - 1) + \gamma \quad (6.29.b)$$

$$q = 3(p - 1) + i \quad (6.29.c)$$

Os elementos das matrizes  $NLC^q$  são dados por:

$$NLC_{lc}^q = -\frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} \sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 u_{i\alpha}^*(x'_p, xc_{km}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.30)$$

Para a equação 6.30:

$$l = \beta \quad (6.31.a)$$

$$c = 4(k - 1) + 2(\alpha - 1) + \gamma \quad (6.31.b)$$

$$q = 3(p - 1) + i \quad (6.31.c)$$

Os elementos das matrizes  $NL3^q$  são dados por:

$$NL3_{lc}^q = -N_{\beta\gamma} \sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 u_{i3}^*(x'_p, xc_{km}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.32)$$

Para a equação 6.32:

$$l = \beta \quad (6.33.a)$$

$$c = 2(k - 1) + \gamma \quad (6.33.b)$$

$$q = 3(p - 1) + i \quad (6.33.c)$$

Quando o ponto fonte não está contido do elemento a ser integrado, as integrais apresentam comportamento regular e são computadas usando a quadratura de Gauss-Legendre.

Quando o ponto fonte coincide com o elemento a ser integrado, as integrais cujo núcleo contem a função do tipo  $\ln(r)$ , apresentam comportamento singular e são computadas usando a técnica de transformação de variáveis conhecida como transformação de Telles. Já as integrais cujo núcleo contém funções do tipo  $\frac{1}{r}$  são computadas usando a técnica de subtração de singularidade.

A resolução do sistema de equações 6.15 fornece os valores dos deslocamentos e esforços de superfície no contorno da placa e é realizada através do processo de Eliminação Gaussiana.

Após a resolução do sistema de equações 6.15, são computadas as derivadas dos deslocamentos no centro de cada célula usando a equação 6.1.b. Para isso, assim como na resolução da equação 6.1.a, assumimos o valor unitário para as derivadas dos deslocamentos contidos nas integrais.

As integrais contidas nas equações 6.1.b são discretizadas e computadas da mesma maneira que as integrais das equações 6.1.a. Diante disso temos o seguinte sistema de equações escrito na forma matricial:

$$du = DG.t - DH.u + DF \quad (6.34)$$

Os elementos do vetor  $du$  são dados por:

$$du_l = u_{i,\varphi}^p \quad (6.35)$$

Para a equação 6.35:

$$l = 6.(p - 1) + 2(i - 1) + \varphi \quad (6.36)$$

Os elementos da matriz  $DH$  são dados por:

$$DH_{lc} = \sum_{p=1}^{Ncel} \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{\varphi=1}^2 \delta_{cc\delta} \delta_{ll\delta} \int_{-1}^1 t_{ij,\varphi}^*(x'_p, x_e(\xi)) f_n(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.37)$$

Os elementos da matriz  $G$  são:

$$DG_{lc} = \sum_{p=1}^{Ncel} \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{\varphi=1}^2 \delta_{cc\delta} \delta_{ll\delta} \int_{-1}^1 u_{ij,\varphi}^*(x'_p, x_e(\xi)) f_n(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.38)$$

Para as equações 6.37 e 6.38:

$l \rightarrow$  indica a linha da matriz e varia de 1 até  $6Ncel$

$c \rightarrow$  indica a coluna da matriz e varia de 1 até  $3(2Ne + ND)$

$$l^\delta = 6.(p - 1) + 2(i - 1) + \varphi \quad (6.39.a)$$

$$c^\delta = 6.(e - 1) + 3(n - 1) + j + 3ND \quad (6.39.b)$$

Os vetores  $t$  e  $u$  são os vetores obtidos da equação 6.16

Os elementos do vetor  $DF$  podem ser escritos como:

$$DF_q = \overline{DNLC}^q . DR + \overline{DNL3}^q . DW + DNLC^q . DR + DNL3^q . DW \quad (6.40)$$

Os elementos das matrizes  $\overline{DNLC}^q$  são dados por:

$$\overline{DNLC}_{lc}^q = \frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} \sum_{b=1}^{Nb} \int_{-1}^1 u_{i\alpha,\varphi}^*(x'_p, xc_{kb}(\xi)) n_\beta(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.41)$$

São computados apenas as partes do contorno das células que coincidem com o contorno da placa.

Para a equação 6.40:

$$l = \beta \quad (6.42.a)$$

$$c = 4(k - 1) + 2(\alpha - 1) + \gamma \quad (6.42.b)$$

$$q = 6.(p - 1) + 2(i - 1) + \varphi \quad (6.42.c)$$

Os elementos das matrizes  $\overline{DNL3}^q$  são dados por:

$$\overline{DNL3}_{lc}^q = N_{\beta\gamma} \sum_{b=1}^{Nb} \int_{-1}^1 u_{i3,\varphi}^*(x'_p, xc_{kb}(\xi)) n_\beta(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.43)$$

Para a equação 6.42:

$$l = \beta \quad (6.44.a)$$

$$c = 2(k - 1) + \gamma \quad (6.44.b)$$

$$q = 6.(p - 1) + 2(i - 1) + \varphi \quad (6.44.c)$$

Os elementos das matrizes  $DNLC^q$  são dados por:

$$DNLC_{lc}^q = -\frac{h^2}{12} N_{\beta\gamma} \sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 u_{i\alpha,\varphi}^*(x'_p, xc_{km}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.45)$$

Para a equação 6.40:

$$l = \beta \quad (6.46.a)$$

$$c = 4(k - 1) + 2(\alpha - 1) + \gamma \quad (6.46.b)$$

$$q = 6.(p - 1) + 2(i - 1) + \varphi \quad (6.46.c)$$

Os elementos das matrizes  $DNL3^q$  são dados por:

$$DNL3_{lc}^q = -N_{\beta\gamma} \sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 u_{i3,\varphi}^*(x'_p, xc_{km}(\xi)) n_{\beta}(\xi) J(\xi) d\xi \quad (6.47)$$

Para a equação 6.47:

$$l = \beta \quad (6.48.a)$$

$$c = 2(k - 1) + \gamma \quad (6.48.b)$$

$$q = 6.(p - 1) + 2(i - 1) + \varphi \quad (6.48.c)$$

Em resumo, a resolução da equação 6.16 forneceu os valores dos vetores  $t$  e  $u$  a partir de um valor arbitrário do vetor  $du$ .

$$G.t - H.u + F = 0 \quad (6.16)$$

Os valores de  $t$  e  $u$  obtidos foram substituídos na equação 6.34 de modo que as incógnitas desta passaram a ser somente as derivadas dos deslocamentos, ou seja, o vetor  $du$ .

$$du = DG.t - DH.u + DF \quad (6.34)$$

O valor de  $N_{\alpha\beta}$  que faz com que o sistema de equações 6.34 deixe de possuir solução única é a carga crítica  $N_{cr}$  do problema. Este é um problema de autovalores e autovetores, cuja solução é obtida através do Quociente de Rayleigh neste trabalho.

$$N_{cr} = \frac{du \cdot DU}{du \cdot du} \quad (6.49)$$

O vetor  $du$  é transformado em um versor.

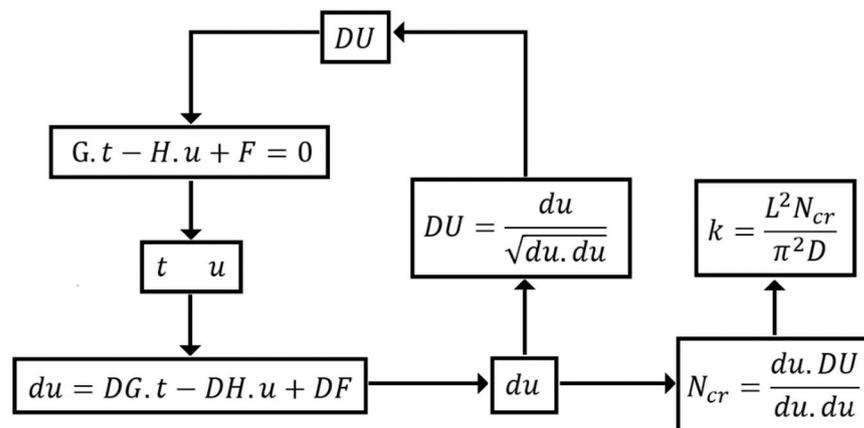
$$DU = \frac{du}{\sqrt{du \cdot du}} \quad (6.50)$$

Então o versor  $DU$  é substituído na equação 6.16, gerando novos vetores  $t$  e  $u$ , os quais são substituídos novamente na equação 6.34 gerando outro vetor  $du$ . Assim é encontrado outro autovalor com a expressão 6.48. O processo se repete até que a diferença entre dois valores consecutivos de  $N_{cr}$  seja menor que 0,001% do penúltimo  $N_{cr}$ .

Finalmente o parâmetro crítico de flambagem da placa é dado por:

$$k = \frac{L^2 N_{cr}}{\pi^2 D} \quad (6.50)$$

O processo iterativo é ilustrado graficamente abaixo:



**Figura 6.4** – Fluxograma do processo iterativo

## 7 RESULTADOS

### 7.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta os parâmetros críticos de flambagem de placas considerando o modelo de flexão de placas de Reissner-Mindlin com os termos de curvatura relacionados à não linearidade geométrica.

São apresentados os resultados, juntamente com as respectivas análises de convergência, para diversas combinações de vinculações das bordas, para cada combinação de vinculações são analisados cinco valores de relações entre a espessura  $h$  e o comprimento  $L$  da placa.

As seguintes características são fixas para todos os casos apresentados:

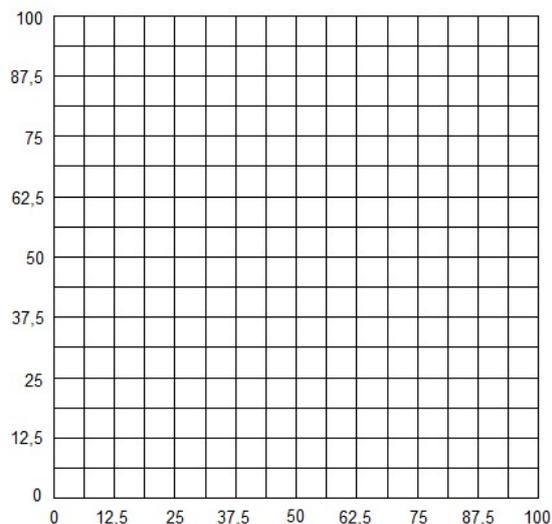
*Módulo de Young*  $\rightarrow E = 206,9 \text{ GPa}$

*Coefficiente de Poisson*  $\rightarrow \nu = 0,3$

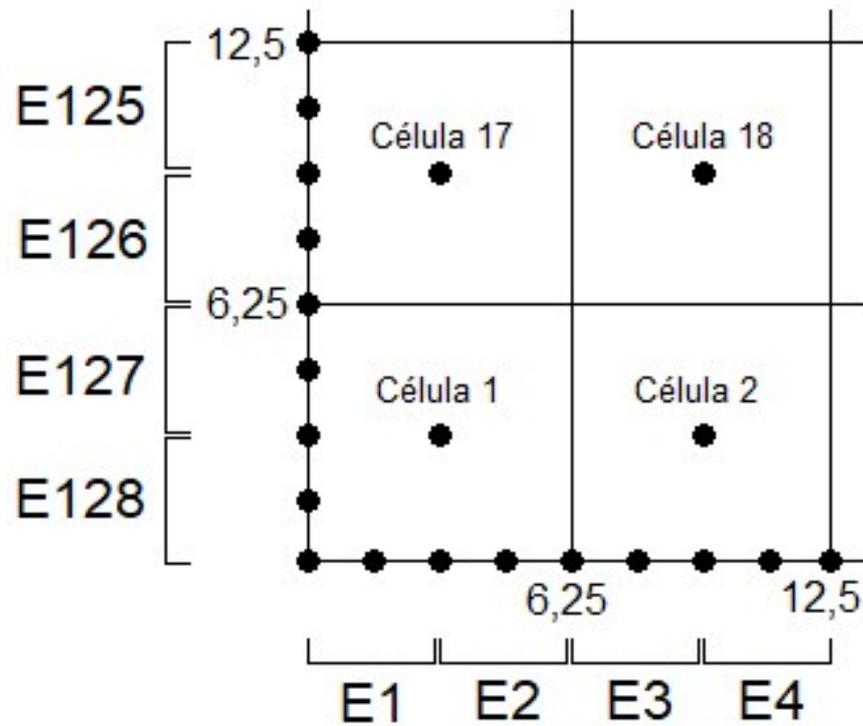
*Dimensões da placa*  $\rightarrow L = 1 \text{ m}$

*Fator de correção de cisalhamento da teoria de Mindlin*  $\rightarrow \lambda = \frac{\pi}{h}$

O contorno do problema foi discretizado em 128 elementos quadráticos e o domínio em 256 células.



**Figura 7.1** – Placa quadrada (100cm x 100cm) discretizada com uma malha contendo 128 elementos de contorno e 256 células



**Figura 7.2** – Detalhe da malha

Quando a placa não possui nenhuma borda livre são usados 16 pontos de Gauss para as integrações regulares e 32 para as singulares. Quando existe uma ou mais bordas livres ambas as quantidades de pontos de Gauss são dobradas.

A simbologia adotada para as condições de borda é:

Condições de borda	
Livre	L
Apoiada	A
Engastada	E

**Figura 7.3** - Simbologia para as condições de borda

Para as bordas apoiadas é considerada a restrição da rotação tangencial.

O parâmetro crítico de flambagem  $k$  é dado por:

$$k = \frac{L^2 N_{cr}}{\pi^2 D} \quad (7.1)$$

### 7.1.1 INFORMAÇÕES PARA A ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados do presente trabalho são comparados aos dos trabalhos de Soares Jr. (2015), Mizusawa (1993) e Dawe e Roufaeil (1982).

Quando os resultados são comparados aos de Soares Jr. (2015) é importante ressaltar que embora as formulações sejam quase idênticas, os trabalhos diferem no fato de que o presente estudo considera os termos de curvatura. Deste modo é natural que os parâmetros críticos obtidos nesta pesquisa sejam menores. Com relação a discretização, ambos os trabalhos usam malhas idênticas, as quais são compostas por 128 elementos de contorno e 256 células no domínio. Para realizar as integrações numéricas Soares Jr. (2015) usou entre 16 e 22 pontos de Gauss.

Com relação as comparações com os trabalhos de Mizusawa (1993) e Dawe e Roufaeil (1982), considerando que os trabalhos estão embasados nas mesmas teorias. Partindo do princípio de que os parâmetros apresentados nos trabalhos citados são exatos, dentro da precisão possível com o número de algarismos que foram apresentados, a expectativa é de que os resultados sejam idênticos se a discretização for suficientemente refinada. Vale ressaltar que estes trabalhos usam o método das faixas finitas enquanto esta pesquisa usa o método dos elementos de contorno.

## 7.2 RESULTADOS

### 7.2.1 PLACA AAAA COM CARREGAMENTO UNIAXIAL

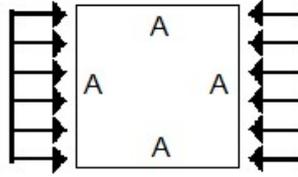


Figura 7.4 – Placa AAAA com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	4,0128	4,0128	4,000	0,3200	0,3200
0,01	4,0100	4,0105	3,997	0,3378	0,3252
0,05	3,9419	3,9561	3,928	0,7154	0,3539
0,1	3,7453	3,7953	3,729	1,7780	0,4371
0,2	3,1381	3,2643	3,119	4,6585	0,6124

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.1 – Parâmetro crítico de flambagem para placa AAAA com carregamento uniaxial

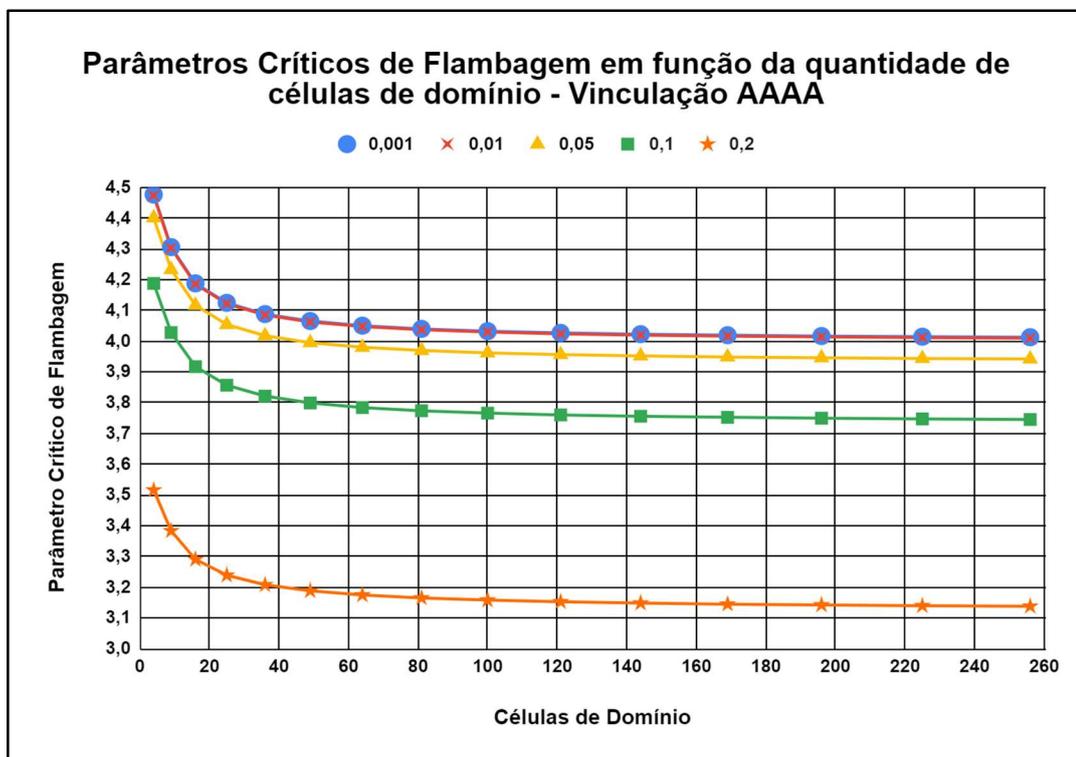


Figura 7.5 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação AAAA

## 7.2.2 PLACA AAAE COM CARREGAMENTO UNIAIXIAL

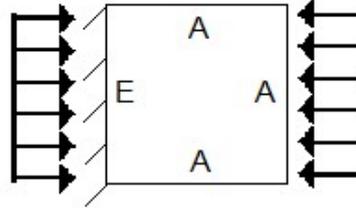


Figura 7.6 – Placa AAAE com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	4,8707	4,8707	4,847	0,4890	0,4890
0,01	4,8654	4,8665	4,842	0,5060	0,4833
0,05	4,7416	4,7681	4,717	1,0833	0,5215
0,1	4,3987	4,4858	4,372	2,6029	0,6107
0,2	3,4446	3,6250	3,418	6,0562	0,7782

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.2 – Parâmetro crítico de flambagem para placa AAAE com carregamento uniaxial

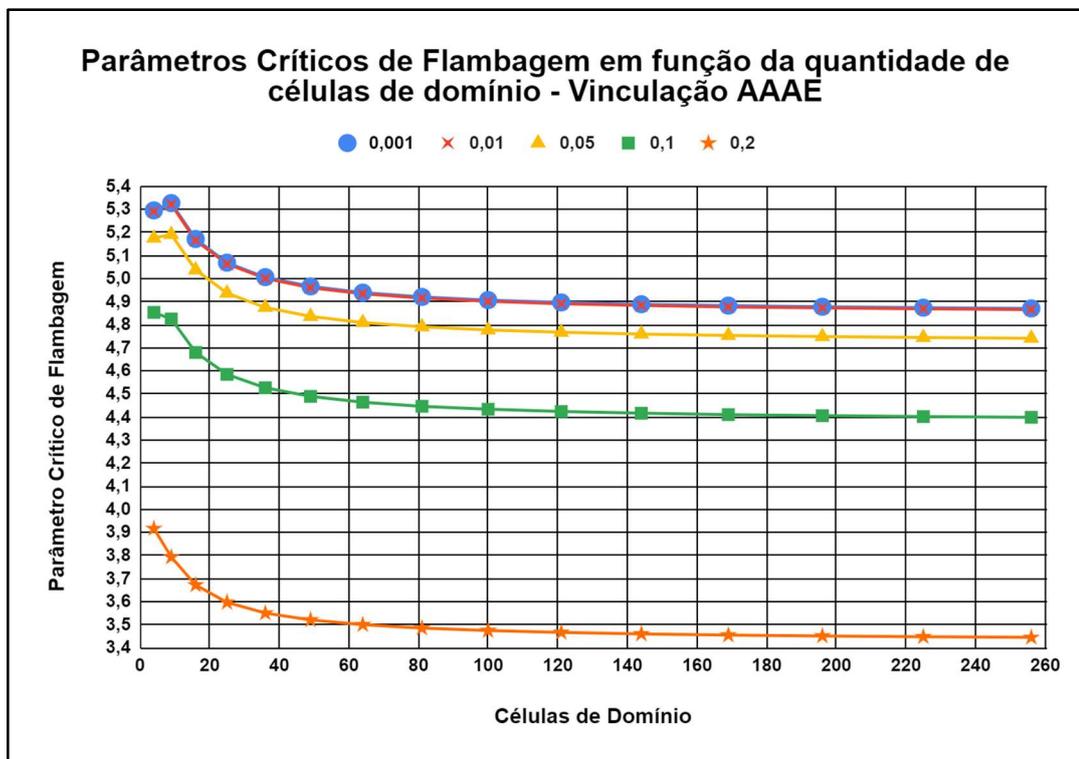


Figura 7.7 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação AAAE

### 7.2.3 PLACA EAAA COM CARREGAMENTO UNIAXIAL

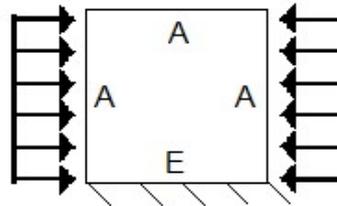


Figura 7.8 – Placa EAAA com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	5,7598	5,7598	5,740	0,3450	0,3450
0,01	5,7530	5,7539	5,733	0,3646	0,3489
0,05	5,5952	5,6164	5,574	0,7607	0,3803
0,1	5,1634	5,2335	5,140	1,8191	0,4553
0,2	3,9317	4,1473	3,876	6,9995	1,4370

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.3 – Parâmetro crítico de flambagem para placa EAAA com carregamento uniaxial

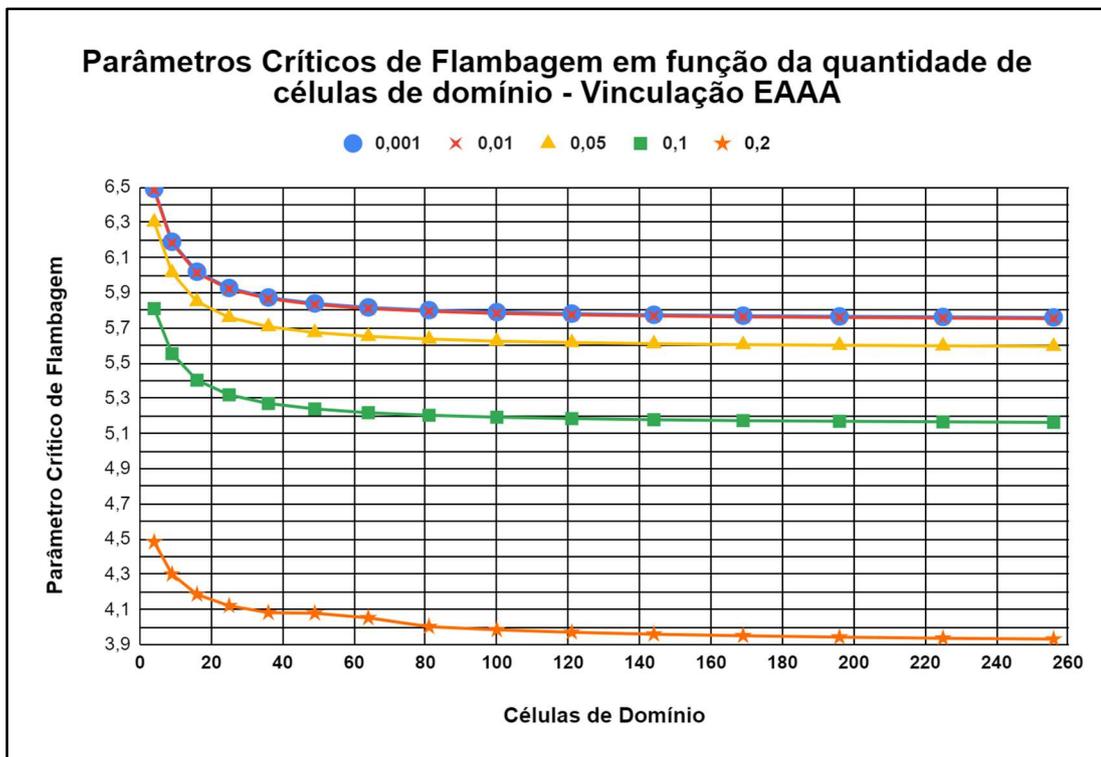


Figura 7.9 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação EAAA

## 7.2.4 PLACA AEAE COM CARREGAMENTO UNIAIXIAL

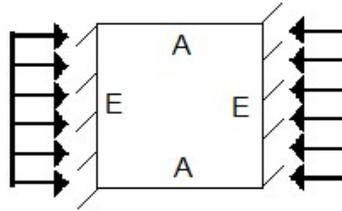


Figura 7.10 – Placa AEAE com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	6,7967	6,7967	6,743	0,786	0,7964
0,01	6,7848	6,7875	6,731	0,8394	0,7993
0,05	6,5127	6,5742	6,462	1,7363	0,7846
0,1	5,8093	5,9910	5,765	3,9202	0,7684
0,2	4,1381	4,4260	4,109	7,7148	0,7082

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.4 – Parâmetro crítico de flambagem para placa AEAE com carregamento uniaxial

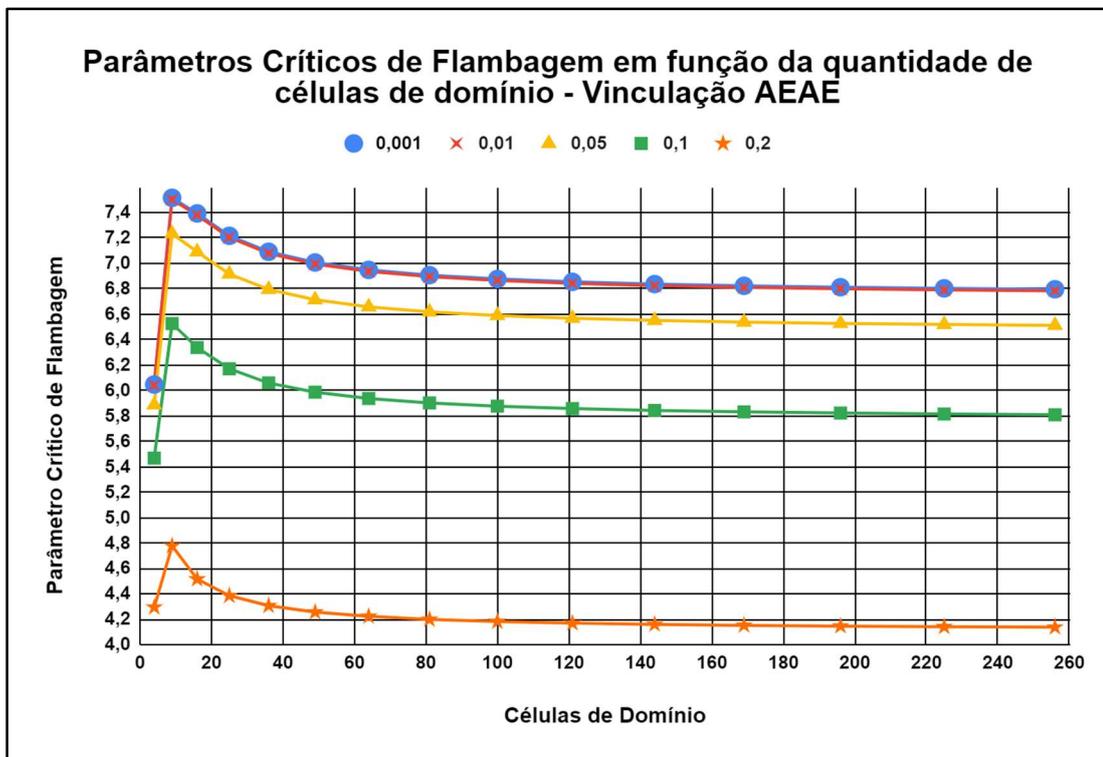


Figura 7.11 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação AEAE

## 7.2.5 PLACA EAEA COM CARREGAMENTO UNIAIXIAL

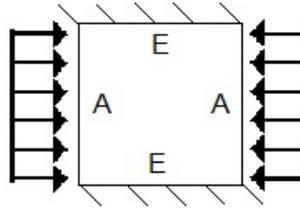


Figura 7.12 – Placa EAEA com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	7,7543	7,7543	7,691	0,8230	0,8230
0,01	7,7345	7,7373	7,671	0,8643	0,8278
0,05	7,2965	7,3561	7,228	1,7723	0,9477
0,1	6,2508	6,4140	6,178	3,8200	1,1784
0,2	4,1154	4,3413	4,056	7,034	1,4645

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.5 – Parâmetro crítico de flambagem para placa EAEA com carregamento uniaxial

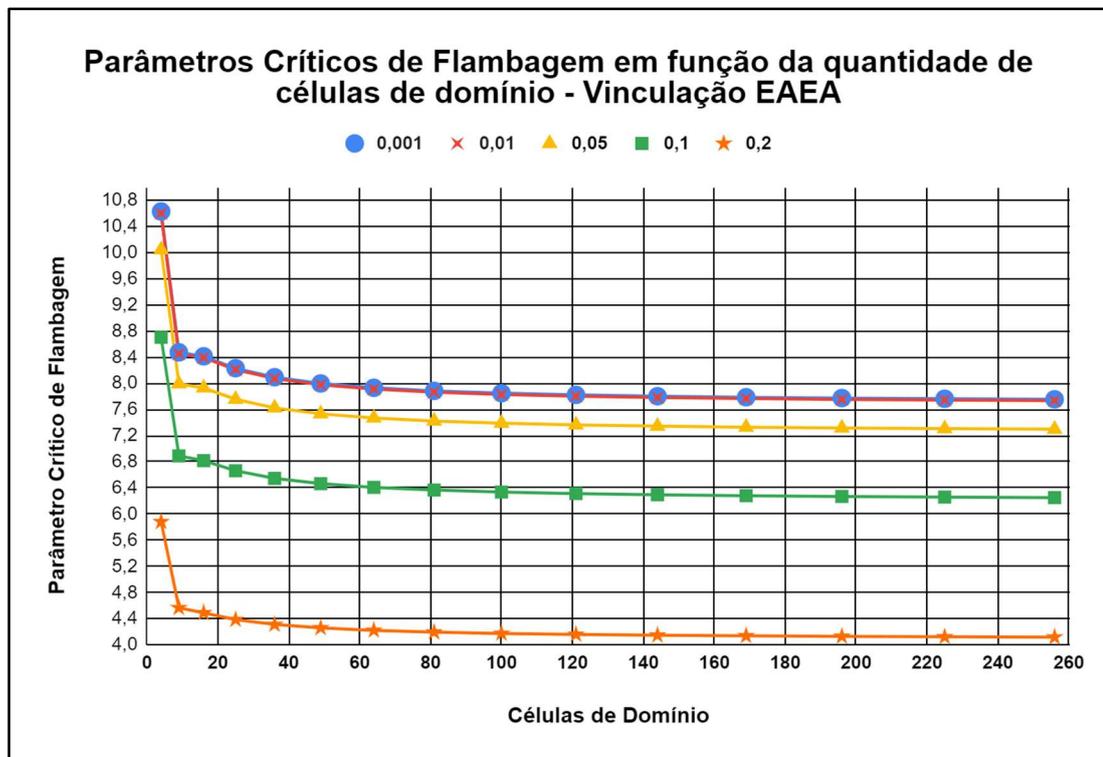


Figura 7.13 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação EAEA

## 7.2.6 PLACA LAAA COM CARREGAMENTO UNIAXIAL

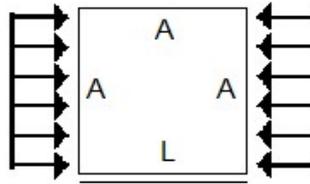


Figura 7.14 – Placa LAAA com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	1,4048	1,4038	1,402	0,1284	0,1997
0,01	1,4028	1,4029	1,400	0,2071	0,2
0,05	1,3818	1,3850	1,378	0,5080	0,2758
0,1	1,3327	1,3442	1,327	1,2962	0,4295
0,2	1,1814	1,2168	1,173	3,7340	0,7161

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.6 – Parâmetro crítico de flambagem para placa LAAA com carregamento uniaxial

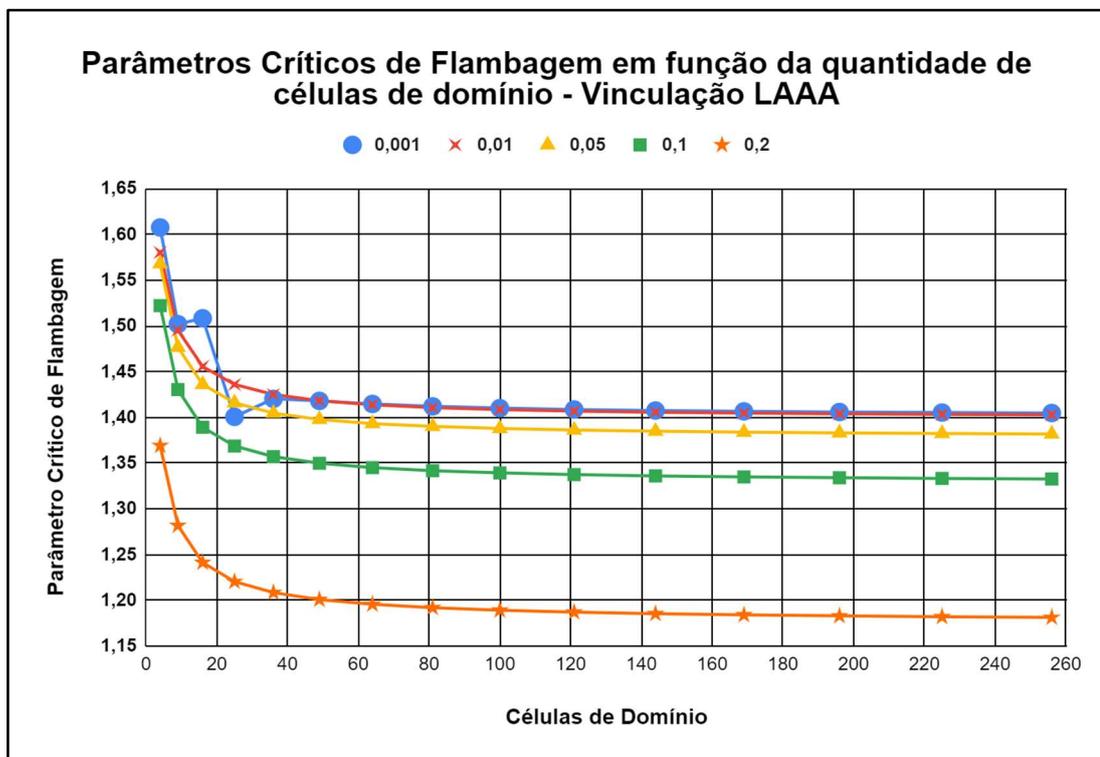


Figura 7.15 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação LAAA

## 7.2.7 PLACA LAEA COM CARREGAMENTO UNIAIXIAL

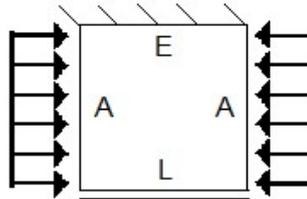


Figura 7.16 – Placa LAEA com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	1,6567	1,6555	1,653	0,1512	0,2238
0,01	1,6535	1,6536	1,650	0,2182	0,2121
0,05	1,6207	1,6246	1,615	0,5944	0,3529
0,1	1,5462	1,5605	1,539	1,3970	0,4678
0,2	1,3324	1,3738	1,323	3,8398	0,7105

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.7 – Parâmetro crítico de flambagem para placa LAEA com carregamento uniaxial

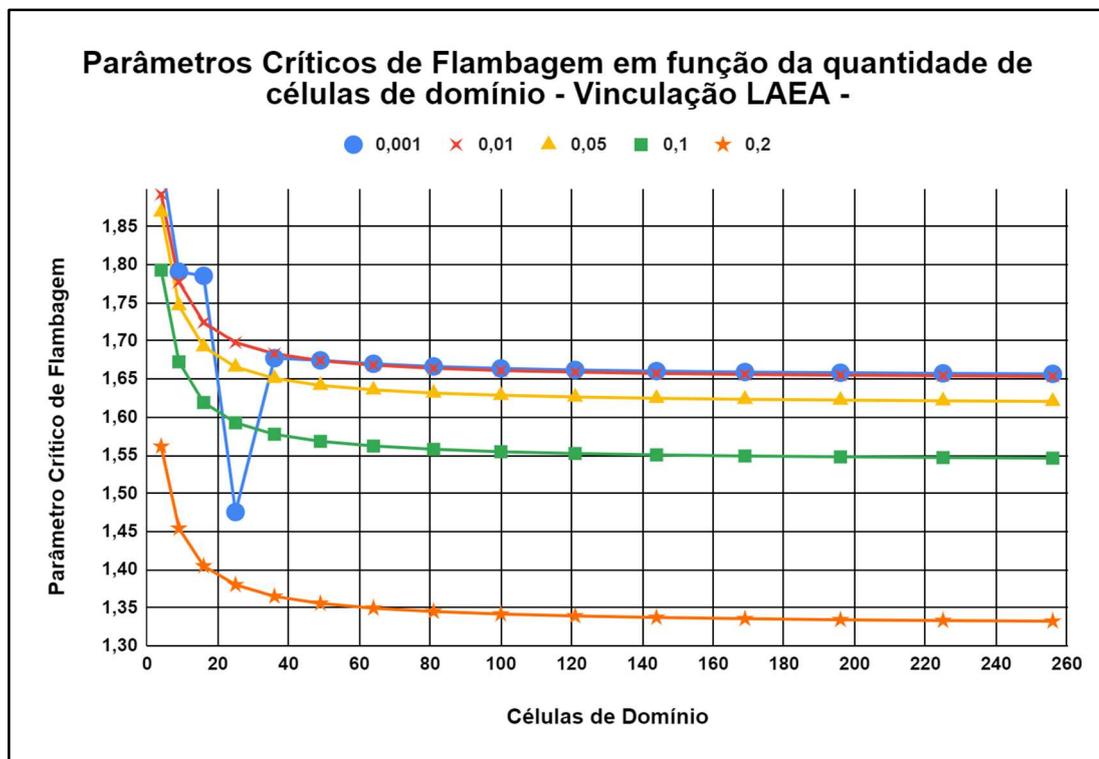


Figura 7.17 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação LAEA

## 7.2.8 PLACA LALA COM CARREGAMENTO UNIAIXIAL

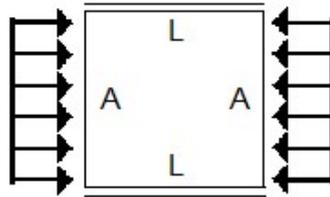


Figura 7.18 – Placa LALA com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	0,9538	0,9537	0,9523	0,1470	0,1575
0,01	0,9532	0,9533	0,9516	0,1787	0,1681
0,05	0,9434	0,9450	0,9412	0,4037	0,2337
0,1	0,9177	0,9236	0,9146	0,9840	0,3389
0,2	0,8328	0,8516	0,8274	2,9248	0,6526

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.8 – Parâmetro crítico de flambagem para placa LALA com carregamento uniaxial

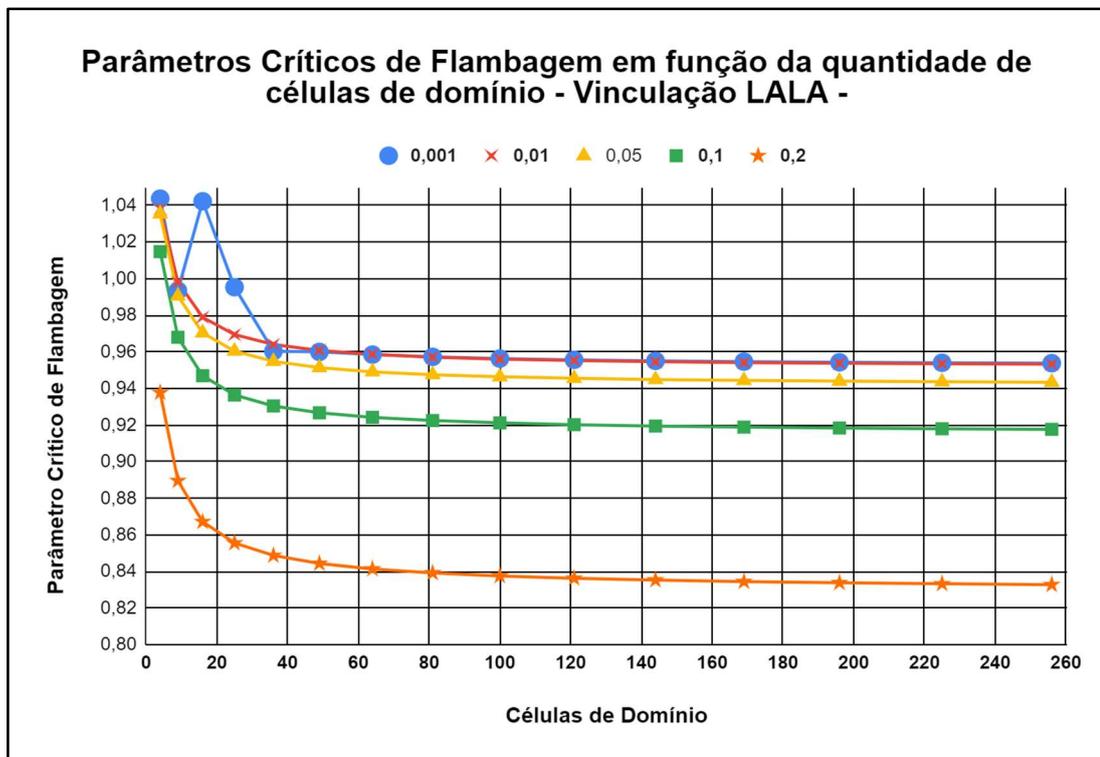


Figura 7.19 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação LALA

## 7.2.9 PLACA AEAL COM CARREGAMENTO UNIAIXIAL

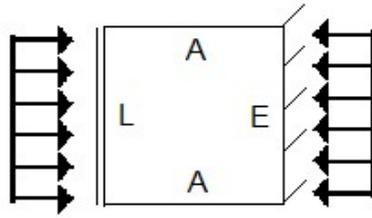


Figura 7.20 – Placa AEAL com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	2,3974	2,3952	2,392	0,1338	0,2258
0,01	2,3785	2,3788	2,378	0,0364	0,0210
0,05	2,2678	2,2747	2,260	0,6504	0,3451
0,1	2,0869	2,1090	2,078	1,4918	0,4283
0,2	1,6751	1,7274	1,666	3,6855	0,5462

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.9 – Parâmetro crítico de flambagem para placa AEAL com carregamento uniaxial

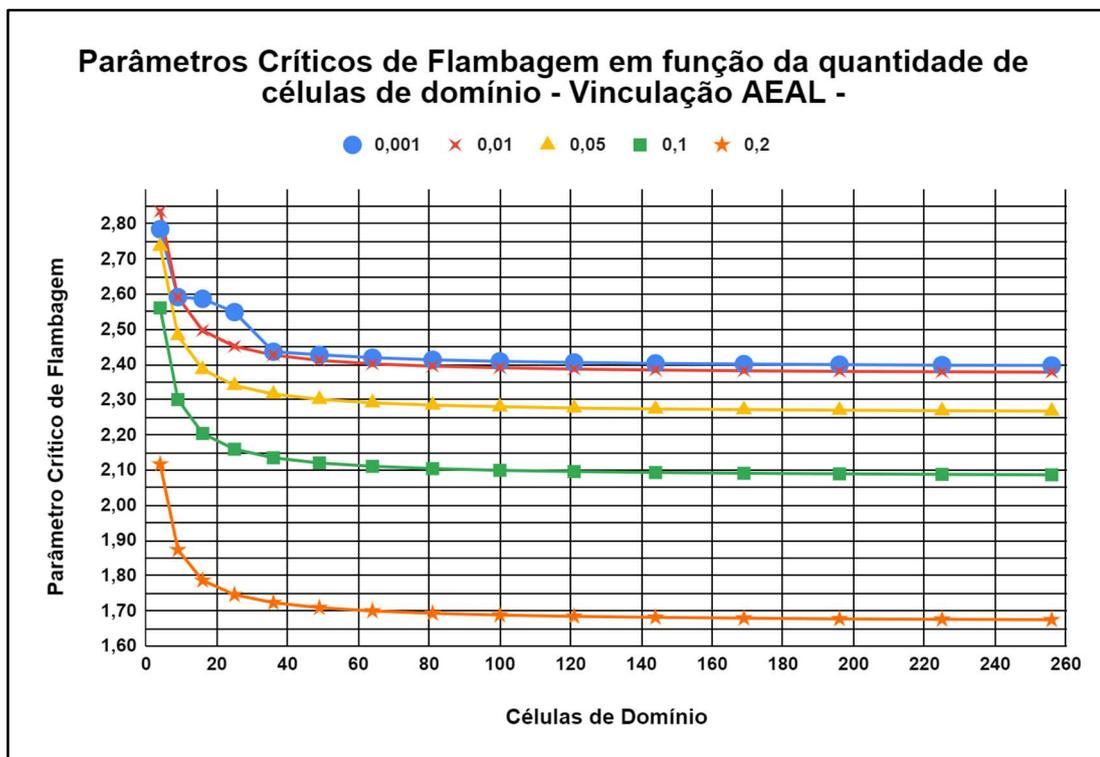


Figura 7.21 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação AEAL

### 7.2.10 PLACA AAAL COM CARREGAMENTO UNIAIXIAL

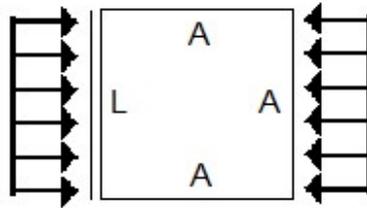


Figura 7.22 – Placa AAAL com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	2,3710	2,3690	2,366	0,1268	0,2113
0,01	2,3527	2,3530	2,353	0,0000	0,0128
0,05	2,2452	2,2520	2,237	0,6705	0,3666
0,1	2,0689	2,0908	2,060	1,4952	0,4320
0,2	1,6657	1,7178	1,657	3,6693	0,5250

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.10 – Parâmetro crítico de flambagem para placa AAAL com carregamento uniaxial

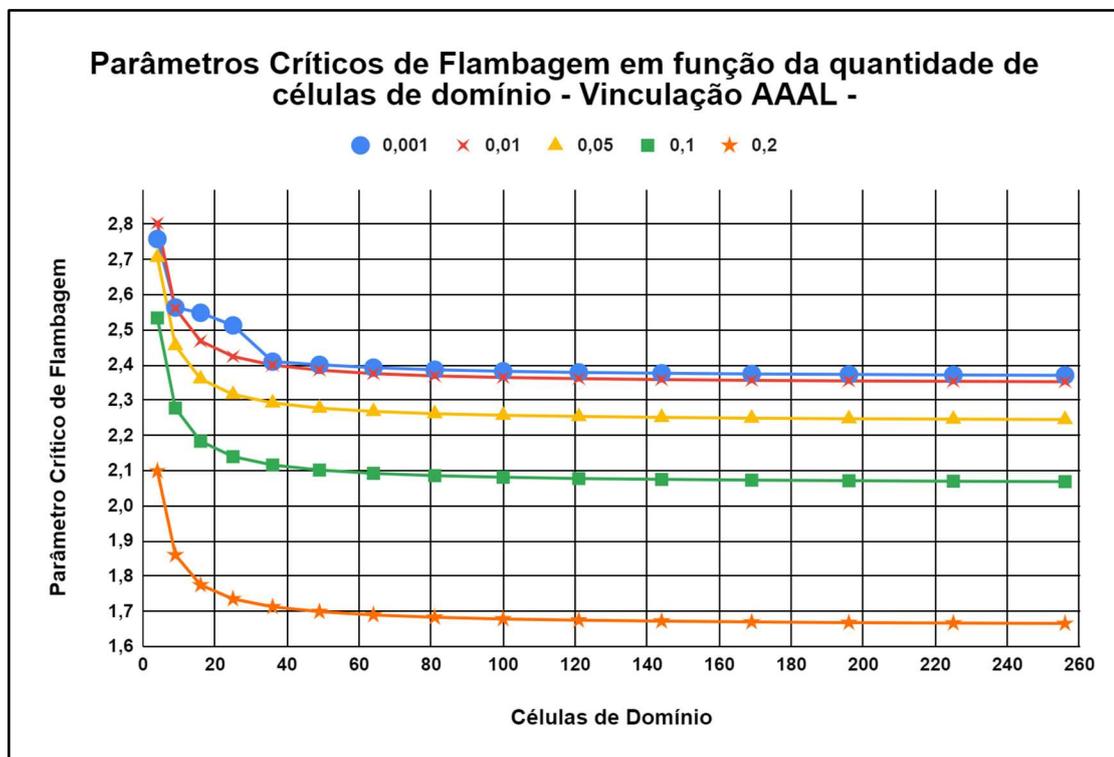


Figura 7.23 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação AAAL

7.2.11 PLACA EEEE COM CARREGAMENTO UNIAIXIAL

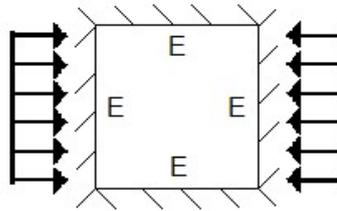


Figura 7.24 – Placa EEEE com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Dawe e Roufaeil (1982)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	10,1607	10,1605	-	-	-
0,01	10,1340	10,1382	10,080	0,5774	0,5357
0,05	9,5370	9,6326	9,515	1,2359	0,2312
0,1	8,077	8,3411	8,084	3,1803	0,0866
0,2	4,9944	5,3175	5,002	6,3075	0,1519

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Dawe e Roufaeil (1982)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Dawe e Roufaeil (1982)

Tabela 7.11 – Parâmetro crítico de flambagem para placa EEEE com carregamento uniaxial

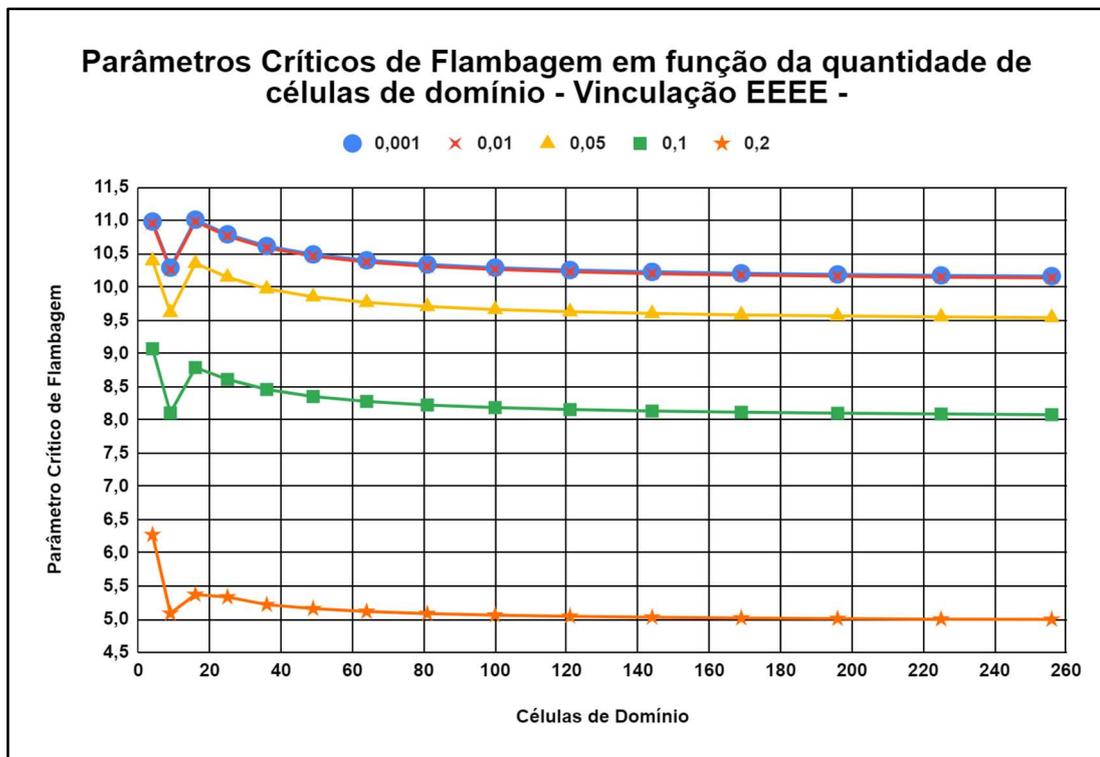


Figura 7.25 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação EEEE

7.2.12 PLACA ALAL COM CARREGAMENTO UNIAIXIAL

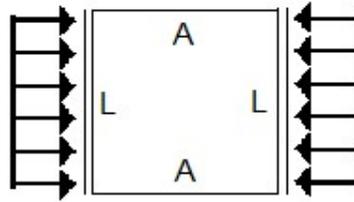


Figura 7.26 – Placa ALAL com carregamento uniaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Mizusawa (1993)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)
0,001	2,0457	2,0456	2,043	0,1273	0,1322
0,01	2,0306	2,0308	2,032	0,05906	0,0689
0,05	1,9467	1,9508	1,942	0,4531	0,2420
0,1	1,8134	1,8271	1,807	1,1123	0,3542
0,2	1,5039	1,5389	1,497	2,7989	0,4609

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Mizusawa (1993)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Mizusawa (1993)

Tabela 7.12 – Parâmetro crítico de flambagem para placa ALAL com carregamento uniaxial

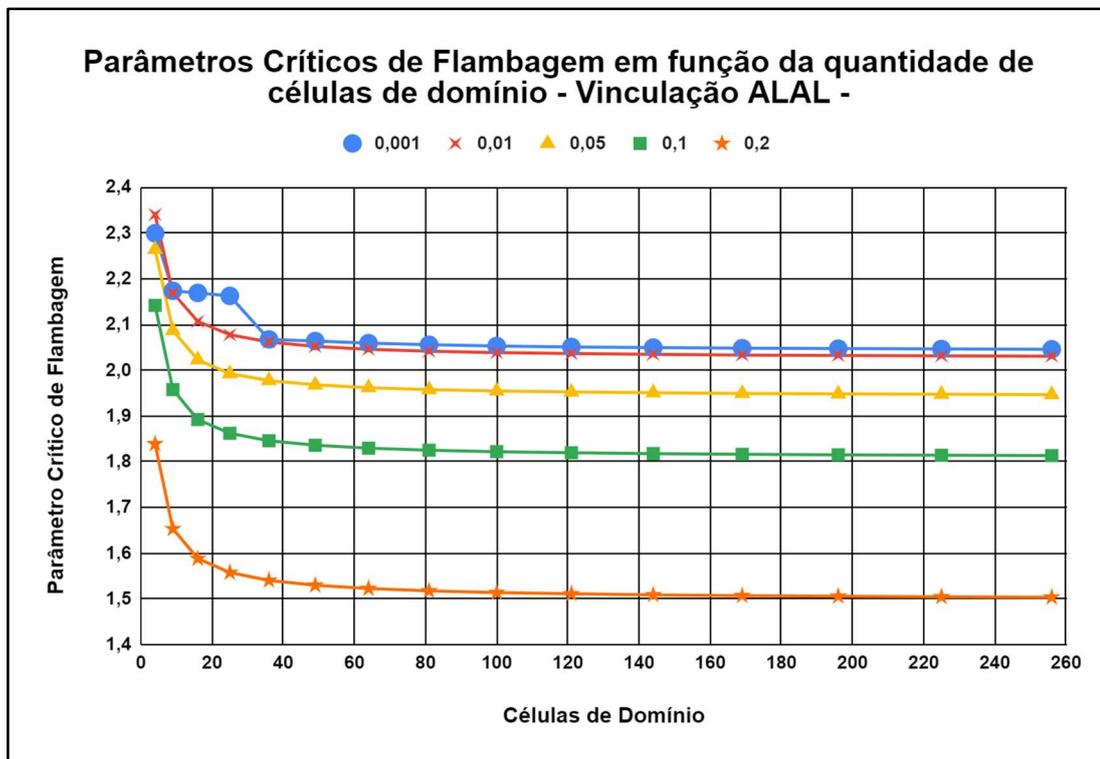


Figura 7.27 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação ALAL

7.2.13 PLACA AAAA COM CARREGAMENTO BIAxIAL

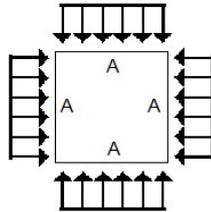


Figura 7.28 – Placa AAAA com carregamento biaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Diferença relativa 1 (%)
0,001	2,0064	2,0064	0,0000
0,005	2,0061	2,0061	0,0000
0,05	1,9709	1,9782	0,3690
0,1	1,8726	1,8980	1,3383
0,15	1,7314	1,7780	2,6209

Diferença relativa 1 é entre o presente trabalho e Soares Jr. (2015)

Tabela 7.13 – Parâmetro crítico de flambagem para placa AAAA com carregamento biaxial

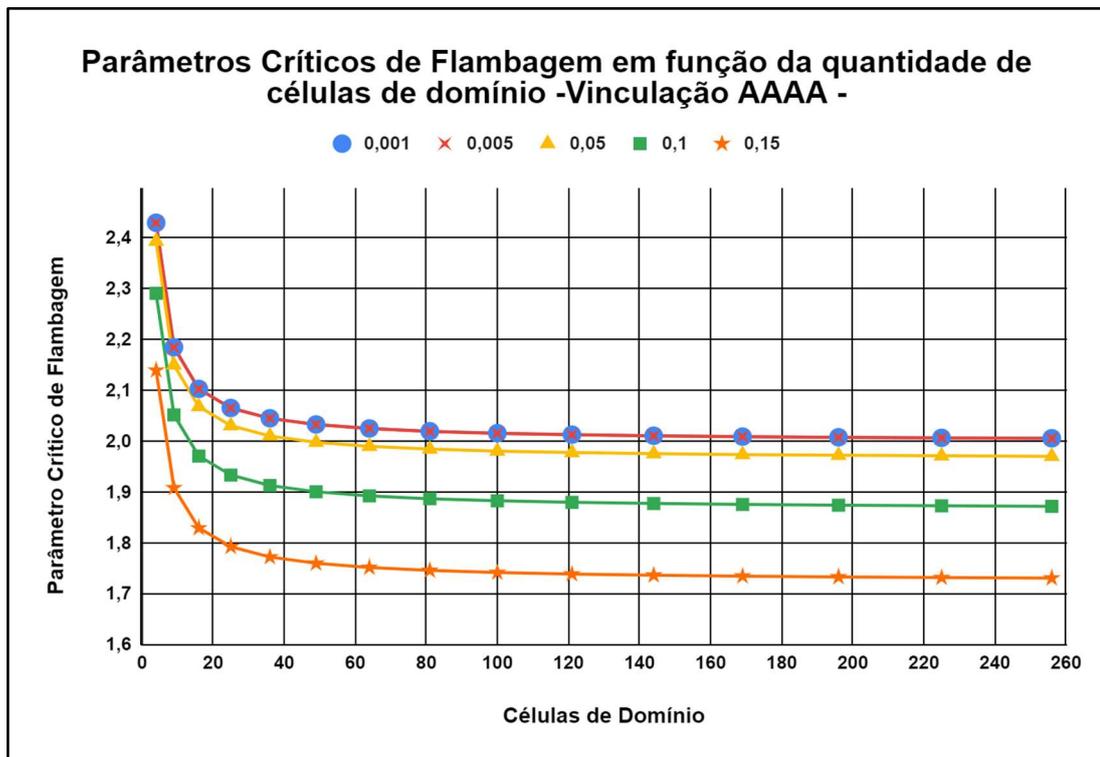


Figura 7.29 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação AAAA

7.2.14 PLACA AEAL COM CARREGAMENTO BIAIXIAL

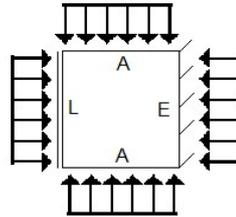


Figura 7.30 – Placa AEAL com carregamento biaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Diferença relativa 1 (%)
0,001	1,1467	1,1456	0,0960
0,005	1,1451	1,1451	0,0000
0,05	1,1126	1,1157	0,2779
0,1	1,0563	1,0674	1,0399
0,15	0,9859	1,0075	2,1439

Diferença relativa 1 é entre o presente trabalho e Soares Jr. (2015)

Tabela 7.14 – Parâmetro crítico de flambagem para placa AEAL com carregamento biaxial

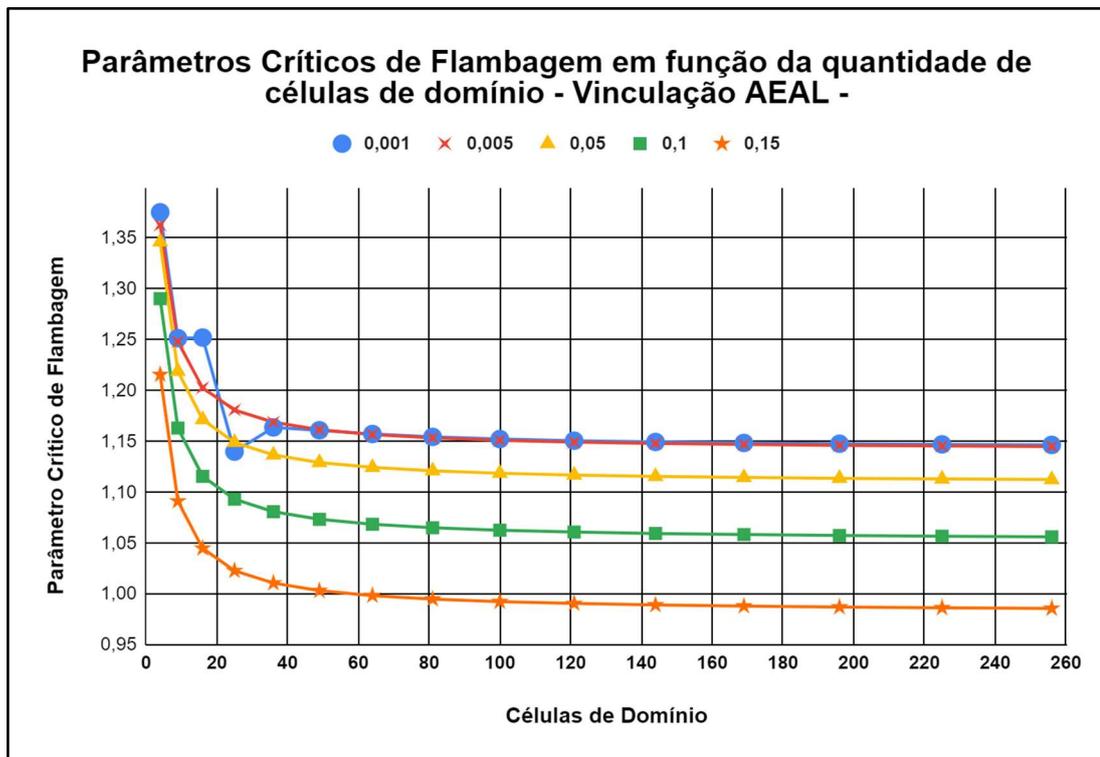


Figura 7.31 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação AEAL

### 7.2.15 PLACA AAAL COM CARREGAMENTO BIAXIAL

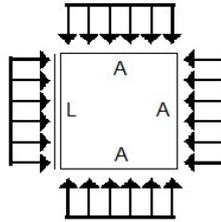


Figura 7.32 – Placa AAAL com carregamento biaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Diferença relativa 1 (%)
0,001	1,0577	1,0567	0,0946
0,005	1,0566	1,0566	0,0000
0,05	1,0327	1,0353	0,2511
0,1	0,9887	0,9981	0,9418
0,15	0,9311	0,9497	1,9585

Diferença relativa 1 é entre o presente trabalho e Soares Jr. (2015)

Tabela 7.15 – Parâmetro crítico de flambagem para placa AAAL com carregamento biaxial

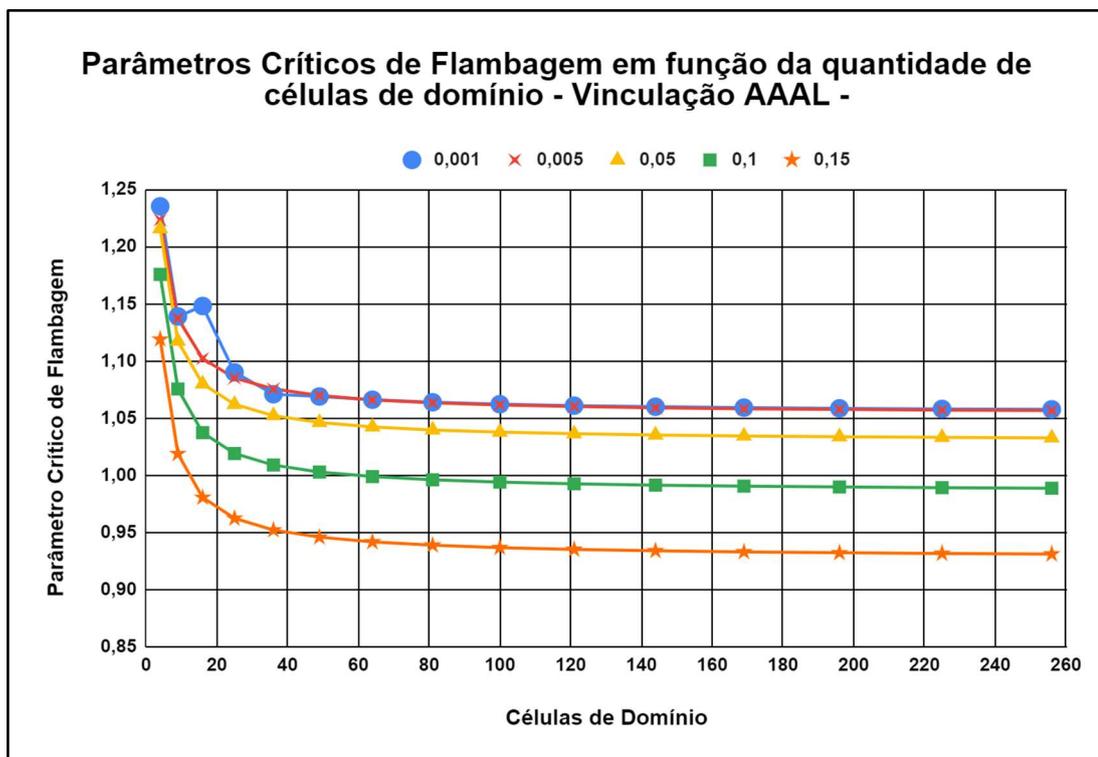


Figura 7.33 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação AAAL

## 7.2.16 PLACA ALAL COM CARREGAMENTO BIAIXIAL

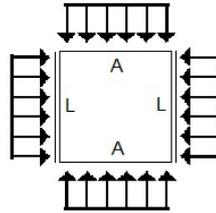


Figura 7.34 – Placa ALAL com carregamento biaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Diferença relativa 1 (%)
0,001	1,1935	1,1937	0,01676
0,005	1,1907	1,1907	0,0000
0,05	1,1458	1,1492	0,2959
0,1	1,0767	1,0889	1,1204
0,15	0,9953	1,0186	2,2875

Diferença relativa 1 é entre o presente trabalho e Soares Jr. (2015)

Tabela 7.16 – Parâmetro crítico de flambagem para placa ALAL com carregamento biaxial

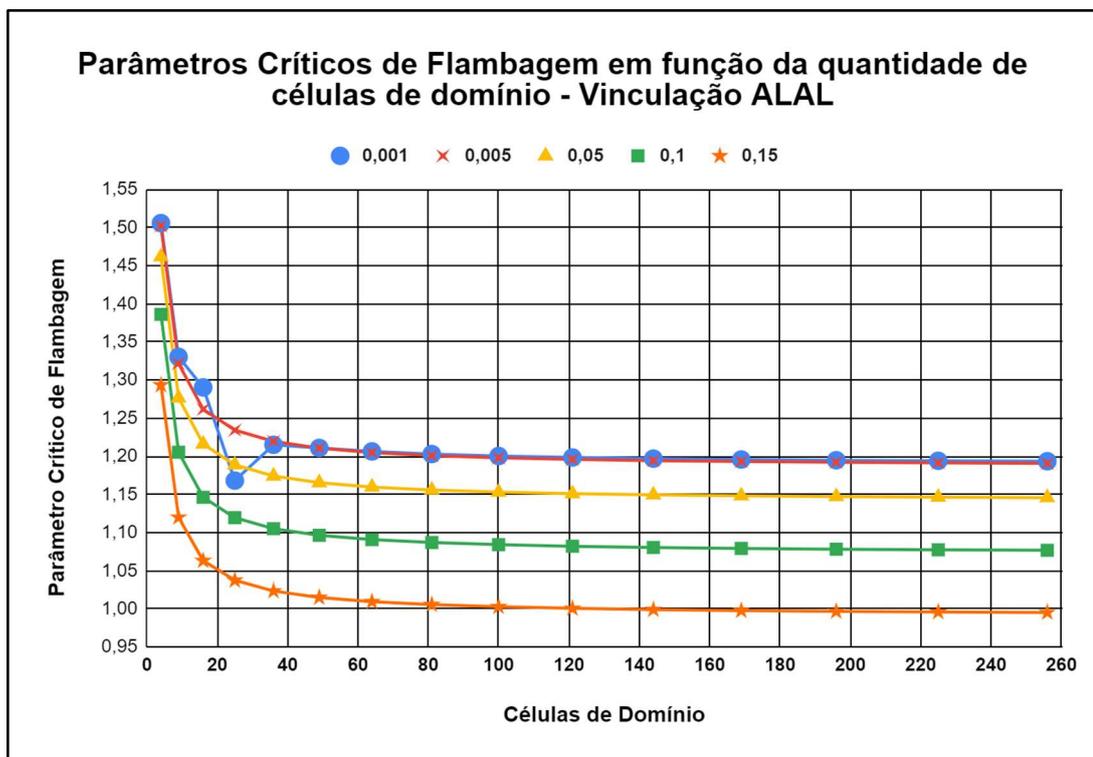


Figura 7.35 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação ALAL

### 7.2.17 PLACA EEEE COM CARREGAMENTO BIAIXIAL

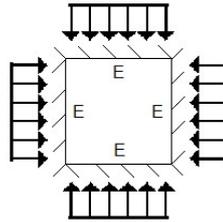


Figura 7.36 – Placa EEEE com carregamento biaxial

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Dawe e Roufaeil (1982)	Diferença relativa 1 (%)	Diferença relativa 2 (%)	Diferença relativa 3 (%)
0,001	5,3482	5,3483	-	-	-	0,0019
0,005	5,3454	5,3460	-	-	-	0,0112
0,01	5,3366	-	5,294	-	0,8047	-
0,05	5,0753	5,1254	-	-	-	0,9775
0,1	4,4328	4,5741	4,419	3,5098	0,3123	3,0891
0,15	3,7011	3,8992	-	-	-	5,0805

Diferença relativa 1 é entre Soares Jr. (2015) e Dawe e Roufaeil (1982)

Diferença relativa 2 é entre o presente trabalho e Dawe e Roufaeil (1982)

Diferença relativa 3 é entre o presente trabalho e Soares Jr. (2015)

Tabela 7.17 – Parâmetro crítico de flambagem para placa EEEE com carregamento biaxial

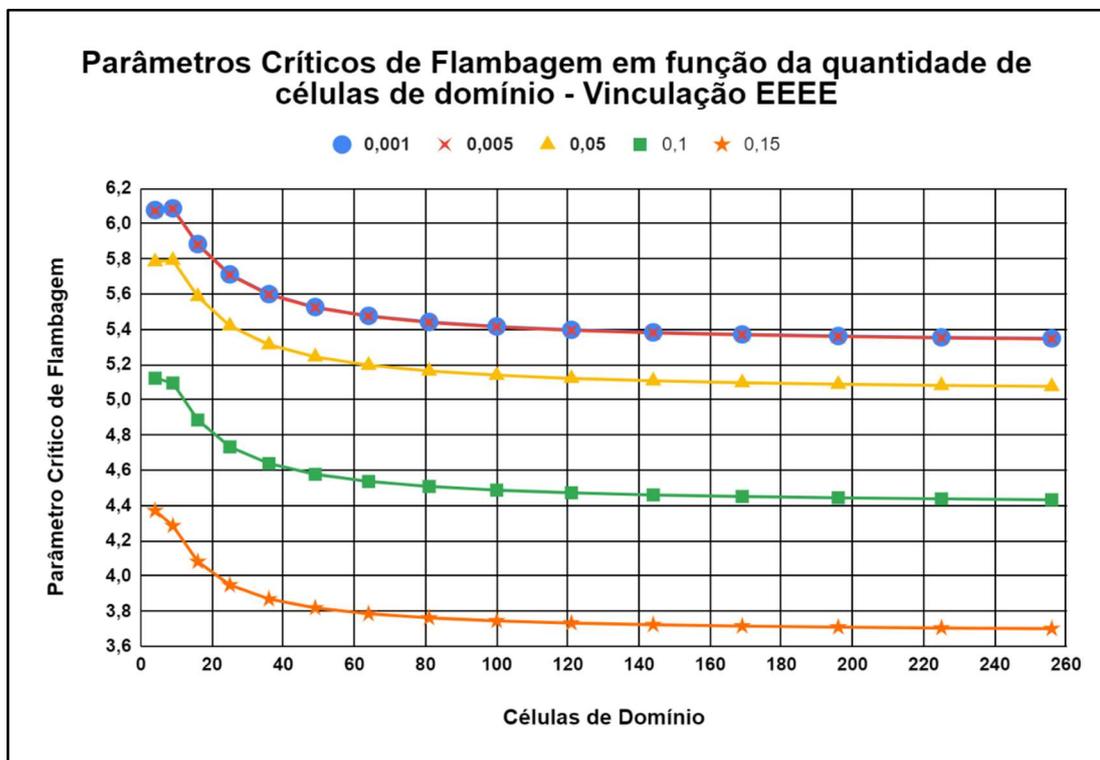


Figura 7.37 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação EEEE

7.2.18 PLACA AAAA COM CARREGAMENTO DE CISALHAMENTO

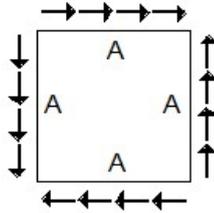


Figura 7.38 – Placa AAAA com carregamento de cisalhamento

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Diferença relativa 1 (%)
0,001	9,4262	9,4260	0,0021
0,01	9,4035	9,4083	0,0510
0,05	8,8898	8,9979	1,2014
0,1	7,6313	7,9201	3,6464
0,2	4,9749	5,3269	6,6080

Diferença relativa 1 é entre o presente trabalho e Soares Jr. (2015)

Tabela 7.18 – Parâmetro crítico de flambagem para placa AAAA com carregamento de cisalhamento

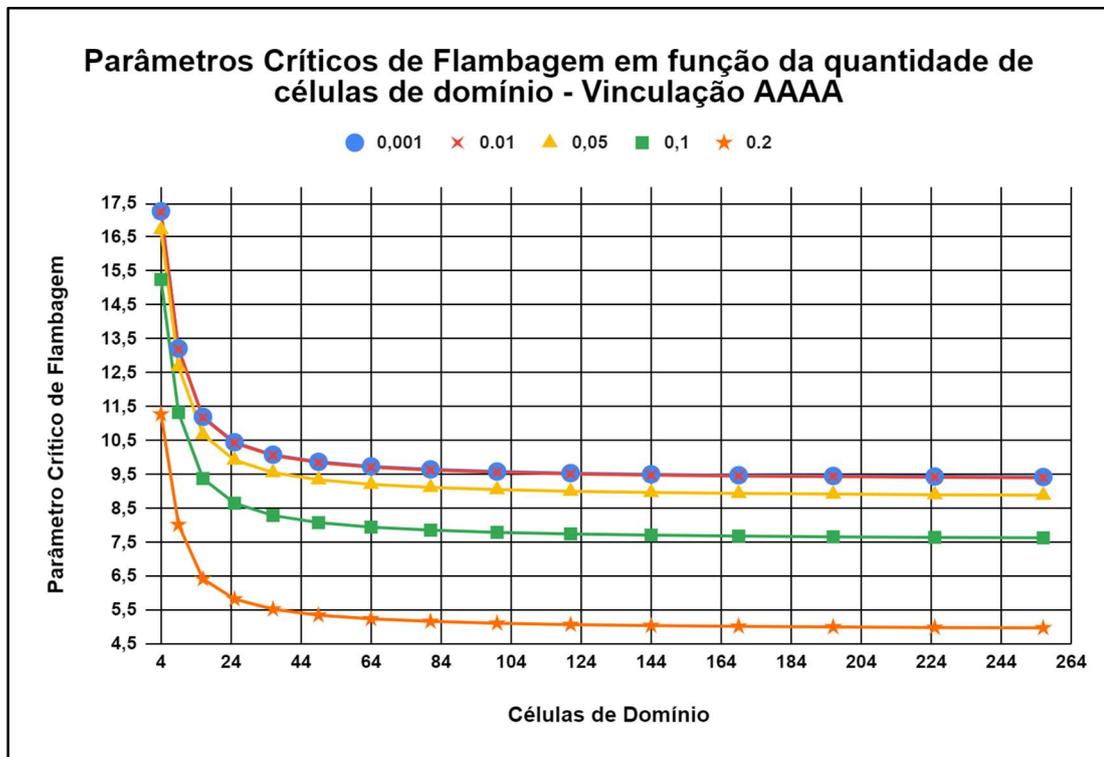


Figura 7.39 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação AAAA

## 7.2.19 PLACA EEEE COM CARREGAMENTO DE CISCALHAMENTO

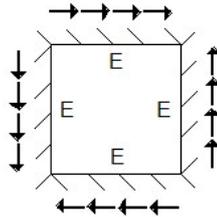


Figura 7.40 – Placa EEEE com carregamento de cisalhamento

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Diferença relativa 1 (%)
0,001	14,8735	14,8702	0,0221
0,01	14,7997	14,8109	0,0756
0,05	13,3306	13,5493	1,6141
0,1	10,3838	10,8454	4,2562
0,2	5,7836	6,1663	6,206

Diferença relativa 1 é entre o presente trabalho e Soares Jr. (2015)

Tabela 7.19 – Parâmetro crítico de flambagem para placa EEEE com carregamento de cisalhamento

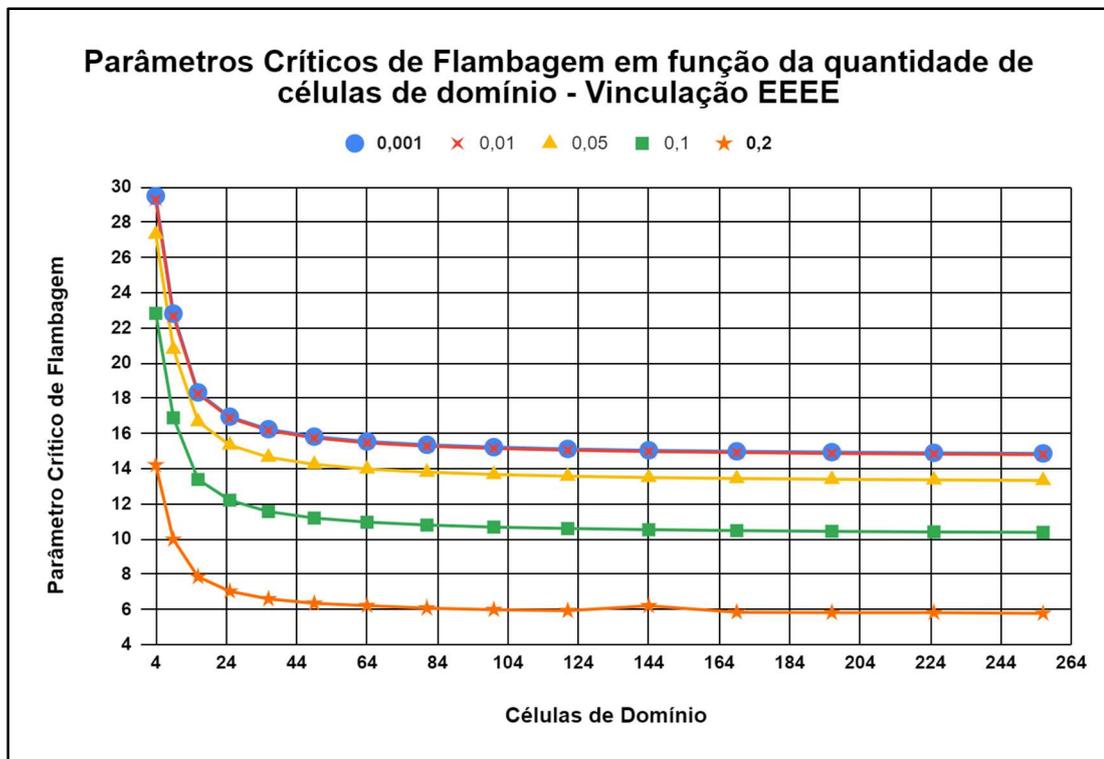


Figura 7.41 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação EEEE

## 7.2.20 PLACA EAEA COM CARREGAMENTO DE CISALHAMENTO

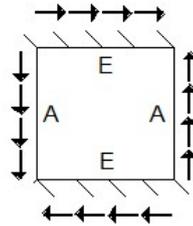


Figura 7.42 – Placa EAEA com carregamento de cisalhamento

h/L	Presente trabalho	Soares Jr. (2015)	Diferença relativa 1 (%)
0,001	12,7363	12,7360	0,0023
0,01	12,6866	12,6947	0,06381
0,05	11,6215	11,7923	1,4484
0,1	9,3433	9,7344	4,0177
0,2	5,4709	5,8443	6,3891

Diferença relativa 1 é entre o presente trabalho e Soares Jr. (2015)

Tabela 7.20 – Parâmetro crítico de flambagem para placa EAEA com carregamento de cisalhamento

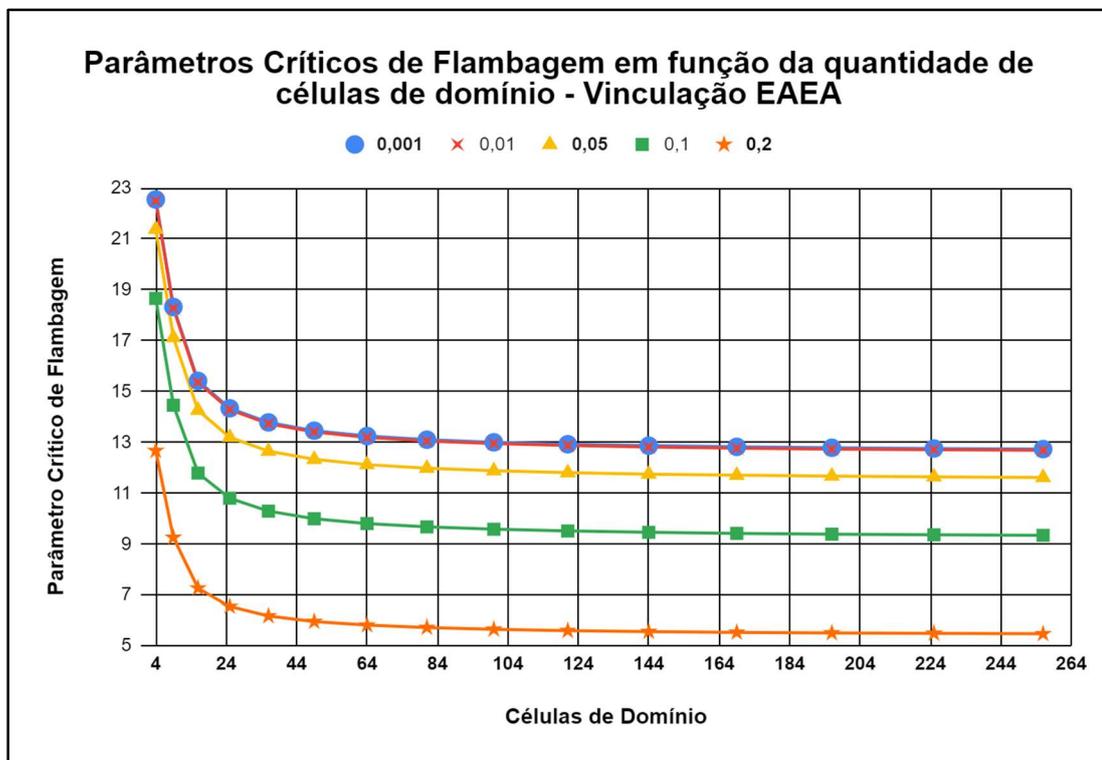


Figura 7.43 – Parâmetros críticos de flambagem em função da quantidade de células de domínio – Vinculação EAEA

### 7.3 COMENTÁRIOS SOBRE OS RESULTADOS

Com relação aos resultados obtidos para placas finas ( $h/L=0,001$ ), os valores dos parâmetros críticos ficaram muito próximos aos dos valores apresentados em Soares Jr. (2015). Sendo que para as placas finas sem bordas livres as diferenças relativas foram nulas, com a exceção do caso com as quatro bordas engastadas, onde a diferença relativa foi de 0,00197%. Considerando as placas finas que possuem bordas livres, surgiram pequenas diferenças relativas, as quais foram sempre menores que 0,1%.

Os resultados para placas que contém bordas livres se mostraram mais sensíveis a quantidade de pontos de Gauss, indicando que esse tipo de vinculação é mais sensível ao método de integração usado. Diante disso é possível concluir que, se tratando de placas finas, as diferenças entre os resultados do presente trabalho e os de Soares Jr. (2015) estão relacionadas com a implementação numérica e que a influência do termo de curvatura é nula.

Ainda considerando placas finas, as diferenças relativas entre os resultados obtidos neste trabalho e os de Mizusawa (1993) foram sempre menores que 1% e podem ser atribuídas a discretização usada no presente trabalho.

Com relação aos resultados obtidos para placas espessas ( $h/L=0,2$ ), os valores dos parâmetros críticos se distanciaram daqueles que foram apresentados em Soares Jr. (2015). Sendo que as maiores diferenças relativas foram de 6,61% (AAAA cisalhamento) e 6,50% (AEAE uniaxial) e as menores diferenças relativas foram 2,21% (LALA uniaxial) e 2,27% (ALAL uniaxial). Estas diferenças se devem a inclusão do termo de curvatura na formulação do presente trabalho.

Os resultados para as placas espessas se mostraram coerentes com o trabalho de Mizusawa (1993), de modo que as duas maiores diferenças relativas foram de 1,46% (EAEA uniaxial) e 1,44% (EAAA uniaxial), e assim como no caso das placas finas, essas diferenças podem ser atribuídas a discretização usada no presente trabalho.

As análises dos valores de parâmetros críticos obtidos para placas com espessuras intermediárias (1%, 5% e 10% do comprimento da placa) tendem a

mostrar que, quanto mais espessa a placa, maior é a influência dos termos de curvatura.

## 8 CONCLUSÃO

Foi possível desenvolver uma formulação em elementos de contorno para tratar o problema de flambagem de placas considerando a deformação devida ao esforço cortante e também os termos de curvatura. O programa desenvolvido possibilitou a obtenção dos valores dos parâmetros de carga crítica para placas com diversas condições de bordas e submetidas a carregamentos uniaxiais, biaxiais e de cisalhamento.

Os casos analisados indicaram que a influência dos termos de curvatura nos parâmetros críticos de flambagem de placas aumenta a medida em que a relação  $h/L$  aumenta. Além disso, de modo geral, as placas com condições de bordas com mais restrições de deslocamentos se mostraram mais sensíveis a inclusão dos termos de curvatura.

Ainda é necessário realizar um estudo mais aprofundado a cerca da precisão das integrações numéricas, avaliando a influência da discretização e dos métodos de integração. As placas com bordas livres se mostraram muito mais sensíveis a quantidade de pontos de Gauss usados para a integração do que as bordas com outras vinculações. Por este motivo as integrações para estes casos foram computadas com mais pontos de Gauss.

Diante da redução do parâmetro crítico das placas mais espessas, causada pela inclusão dos termos de curvatura, surge o questionamento a respeito da influência dos mesmos termos na análise de flambagem de placas com outras geometrias, incluindo placas perfuradas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALTIERO, N. J.; SIKARSKIE, D. L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. *Computers & Structures*, v. 9, n. 2, p. 163-168, 1978.

ANDRADE, R. C. , Uma análise das soluções fundamentais aplicáveis as placas espessas pelas teorias de Reissner e Mindlin e suas relações com a teoria clássica para uso no método dos elementos de contorno. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Campinas, 2001.

BEZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mechanics Research Communications*, v. 5, n. 4, p. 197-206, 1978.

BEZINE, G.; CIMETIERE, A.; GELBERT, J. P. Unilateral buckling of thin elastic plates by the boundary integral equation method. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 21, n. 12, p. 2189-2199, 1985.

BRUNELLE, E. J. Buckling of transversely isotropic Mindlin plates. *AIAA J.* 9, p. 1018–1022 (1971)

CHENG, A. H. D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol. 29. 268–302, 2005.

CRESCCE, S. H. Análise não-linear de pavimentos de concreto armado pelo método dos elementos de contorno. 2003. Tese (Doutorado). Universidade de São Paulo.

CRUSE, T. A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *International journal of solids and structures*, v. 5, n. 12, p. 1259-1274, 1969.

DAWE, D. J.; ROUFAEIL, O. L. Buckling of rectangular Mindlin plates. *Computers & Structures*, v. 15, n. 4, p. 461-471, 1982.

DUARTE, J. , Análise de Instabilidade em Placas Finas pelo Método dos Elementos Finitos de Contorno. 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Campinas

GOSPODINOV, G.; LJUTSKANOV, D. The boundary element method applied to plates. *Applied Mathematical Modelling*, v. 6, n. 4, p. 237-244, 1982.

HANSEN, E. B. Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. *Journal of elasticity*, v. 6, n. 1, p. 39-56, 1976.

HERRMANN, G; ARMENAKAS, A. E. Vibrations and stability of plates under initial stress. *Journal of Engineering Mechanics Division*, v. 86, p. 65-94, 1960

HINTON, E. Buckling of initially stressed Mindlin plates using a finite strip method. *Computers & Structures*, v. 8, n. 1, p. 99-105, 1978.

HOSSEINI-HASHEMI, S.; KHORSHIDI, K.; AMABILI, M. Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates. *Journal of Sound and Vibration*, v. 315, n. 1, p. 318-342, 2008.

JASWON, M. A.; MAITI, M. An integral formulation of plate bending problems. *Journal of Engineering Mathematics*, v.2, p. 83-93, 1968.

JASWON, M. A.; MAITI, M.; SYMM, G. T. Numerical biharmonic analysis and some applications. *International Journal of Solids and Structures*, v. 3, n. 3, p. 309-332, 1967.

KARAM, V. J. Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para flexão de placas. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1986

KARAM, V. J.; TELLES, J. C. F. On boundary elements for Reissner's plate theory. *Engineering Analysis*, v. 5, n. 1, p. 21-27, 1988.

KATSIKADELIS, J. T.; YOTIS, A. J. A new boundary element solution of thick plates modelled by Reissner's theory. *Engineering analysis with boundary elements*, v. 12, n. 1, p. 65-74, 1993.

KITIPORNCHAI, S.; XIANG, Y.; WANG, C. M.; LIEW, K. M. Buckling of thick skew plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36, p. 1299-1310, 1993.

KUPRADZE, V. D. Potential methods in the theory of elasticity. Israel program for scientific translations, 1965.

KZAM, A. K. L.; CODA, H. B. Tratamento das integrais singulares do método dos elementos de contorno. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, v. 12, n. 54, p. 17-30, 2010.

LACHAT, J. C. A further development of the boundary integral technique for Elastostatics. PhD Thesis, Southampton, University of Southampton, US, 1975.

LIEW K.M.; XIANG Y.; KITIPORNCHAI S., Analytical buckling solutions for mindlin plates involving free edges, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 38, n. 10, p. 1127-1138, 1996.

LIN, J.; DUFFIELD, R. C.; SHIH, H. Buckling analysis of elastic plates by boundary element method. *Engineering analysis with boundary elements*, v. 23, n. 2, p. 131-137, 1999.

LIU, Y. Elastic stability analysis of thin plate by the boundary element method—a new formulation. *Engineering analysis*, v. 4, n. 3, p. 160-164, 1987.

MANOLIS, G. D.; BESKOS, D. E.; PINEROS, M. F. Beam and plate stability by boundary elements. *Computers & structures*, v. 22, n. 6, p. 917-923, 1986.

MARCZAK, R. J. Análise de estabilidade linear elástica de placas finas e semi-espessas através do método dos elementos de contorno. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, v. 11, n. 4, p. 625-636, 1995.

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, v. 18, p. 31-38, 1951.

MIZUSAWA, T. Buckling of rectangular Mindlin plates with tapered thickness by the spline strip method, *International Journal of Solids and Structures*, v. 30, p. 1663–1677, 1993.

NIWA, Y.; KOBAYACHI, S.; FUKUI, T. An application of the integral equation method of plate bending. *Faculty of Engineering, Tokyo*, v. 36, p. 140-158, 1974.

PALERMO JR., L. A análise de placas e o Método dos Elementos de contorno. *Livre docência. Universidade Estadual de Campinas*, 2000.

PALERMO JR., L., An alternative dynamic fundamental solution for plate bending including the shear deformation effect. *Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods XXXV*, p.241-250, 2013.

PALERMO JR., L. On the harmonic solution for plate bending considering effects of the shear deformation and the forces in the middle plane. *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXVII*, p. 241-251, 2014.

PALERMO JR., L.; SOARES JR., R. A. On the boundary element formulation to compute critical loads considering the effect of shear deformation in the plate bending. *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXVIII*, v. 38, 2015.

PURBOLAKSONO, J.; ALIABADI, M. H. Buckling analysis of shear deformable plates by boundary element method. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 62, n. 4, p. 537-563, 2005.

RASHED, Y. F. A relative quantity integral equation formulation for evaluation of boundary stress resultants in shear deformable plate bending problems. *Engineering analysis with boundary elements*, v. 32, n. 2, p. 152-161, 2008.

RASHED, Y. F.; ALIABADI, M. H.; BREBBIA, C. A. Hypersingular boundary element formulation for Reissner plates. *International journal of solids and structures*, v. 35, n. 18, p. 2229-2249, 1998.

RASHED, Y. F.; ALIABADI, M. H.; BREBBIA, C. A. On the evaluation of the stresses in the BEM for Reissner plate-bending problems. *Applied Mathematical Modelling*, v. 21, n. 3, p. 155-163, 1997.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of applied Mechanics*, v. 12, p. 69-77, 1945.

RIZZO, F. J. An integral approach to boundary value problems of classical Elastostatics. *Quarterly Applied Mathematics*. Vol.25, n.1, p.83-95, 1967.

SAKANAKA, S. H., Determinação de frequências naturais e cargas críticas em placas incluindo o efeito da deformação por cortante com o método dos elementos de contorno. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Estadual de Campinas, 2006.

SAKIYAMA, T.; MATSUDA, H. Elastic buckling of rectangular Mindlin plate with mixed boundary conditions. *Computers & Structures*, v. 25, n.5, p. 801-808, 1987

SANCHES, L. C. F., Uma resolução de placas com a teoria de Mindlin através do Método dos Elementos de Contorno. Campinas, SP: Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, 1998. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, 1998.

SHI, G. Flexural vibration and buckling analysis of orthotropic plates by the boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*, v. 26, n. 12, p. 1351-1370, 1990.

SIMÕES, R. Um estudo de placas sob cargas dinâmicas estacionárias e com o efeito da não linearidade geométrica sob cargas estáticas usando o método dos elementos de contorno. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Estadual de Campinas, 2001.

SOARES JR., R. A.; PALERMO JR., L. Effect of shear deformation on the buckling parameter of perforated and non-perforated plates studied using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2017;85:57–69 .

SOARES JR, R. A.; PALERMO JR, L.; WROBEL, L. C. Application of the dual reciprocity method for the buckling analysis of plates with shear deformation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 106, p. 427-439, 2019

SOARES JR., R.A. Aplicação do método dos elementos de contorno na análise de instabilidade de placas perfuradas. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Estadual de Campinas, 2015.

STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *International journal of solids and structures*, v. 15, n. 10, p. 769-782, 1979.

SUN, C. T. Incremental deformations in orthotropic laminated plates under initial stress. *Journal of Applied Mechanics* v. 40, p. 193-200, 1973.

SUN, C. T. On the equations for a Timoshenko beam under initial stress. *Journal of Applied Mechanics*, v. 39, p. 282-285, 1972.

SYNGELLAKIS, S.; ELZEIN, A. Plate buckling loads by the boundary element method. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 37, n. 10, p. 1763-1778, 1994.

SYNGELLAKIS, S.; ELZEIN, A.; WALKER, A. C. Comparison between experimental and boundary element predictions of plate buckling behaviour. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 8, n. 2, p. 103-108, 1991.

SYNGELLAKIS, S.; KANG, M. A Boundary Element Solution of the Plate Buckling Problem. *Engineering Analysis*, v.4, n.2, p. 75-81, 1987.

TANAKA, M.; MIYAZAKI, K. A boundary element method for elastic buckling analysis of assembled plate structures. *Computational mechanics*, v. 3, n. 1, p. 49-57, 1988.

THAM, L.; SZETO, H. Buckling analysis of arbitrarily shaped plates by spline finite strip method, *Computers & structures*, v. 36, n. 4, p. 729-735, 1990.

VENTURINI, W. S.; PAIVA, J. B. Boundary element for plate bending analysis. *Engineering analysis with boundary elements*, v. 11, n. 1, p. 1-8, 1993.

WEEËN, F. V. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 18, n. 1, p. 1-10, 1982.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. *Computers & Structures*, v. 10, n. 4, p. 703-707, 1979.

XIANG, Y. et al. Mindlin Plate Buckling with Prebuckling In-Plane Deformation. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 119, n. 1, p. 1-18, 1993.