



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Amanda Spagolla

**Controle de Sistemas Lineares Positivos
Incertos por meio de Desigualdades Matriciais
Lineares**

Campinas
2023

Amanda Spagolla

Controle de Sistemas Lineares Positivos Incertos por meio de Desigualdades Matriciais Lineares

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Coorientadora: Dr.^a Cecília de Freitas Moraes

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA PELA ALUNA AMANDA SPAGOLLA E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO LUIS DIAS PERES.

Campinas
2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Sp13c Spagolla, Amanda, 1992-
Controle de sistemas lineares positivos incertos por meio de desigualdades matriciais lineares / Amanda Spagolla. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.

Coorientador: Cecília de Freitas Morais.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas lineares invariantes no tempo. 2. Controle robusto. 3. Desigualdades matriciais lineares. I. Peres, Pedro Luis Dias, 1960-. II. Morais, Cecília de Freitas, 1987-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Control of uncertain positive linear systems by means of linear matrix inequalities

Palavras-chave em inglês:

Linear systems

Robust control

Positive systems

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutora em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Pedro Luis Dias Peres [Orientador]

Matheus Souza

Bruno Augusto Angélico

Luís Fernando Costa Alberto

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Data de defesa: 01-06-2023

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-7100-6499>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4250357475786788>

COMISSÃO JULGADORA — TESE DE DOUTORADO

Candidata: Amanda Spagolla

RA: 192721

Data da Defesa: 01 de Junho de 2023

Título da Tese: “Controle de Sistemas Lineares Positivos Incertos por meio de Desigualdades Matriciais Lineares”

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Matheus Souza (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Luís Fernando Costa Alberto (EESC/USP)

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira (FEIS/UNESP)

Prof. Dr. Bruno Augusto Angélico (Poli/USP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no SIGA (Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese) e na Secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

DEDICO ESTA TESE AO MEU PAI ARMANDO (*in memoriam*), MINHA MÃE LEILA,
MINHA IRMÃ JÉSSICA, MINHA SOBRINHA SOPHIA E AO MEU FUTURO ESPOSO DANIEL.

Agradecimentos

Acredito que a frase de Helen Keller “Sozinhos, pouco podemos fazer; juntos, podemos fazer muito” seja válida em diversos (senão em todos) momentos da vida. No decorrer deste doutorado não foi diferente, houve a colaboração de muitas pessoas especiais. Por isso, sou grata a todos que de algum modo contribuíram nesta jornada e, em especial agradeço:

AO MEU ORIENTADOR DR. PEDRO L. D. PERES, pela excelente orientação durante a pós-graduação, por toda a paciência e incrível disponibilidade para orientar, respondendo rapidamente a todos os e-mails e realizando reuniões sempre que necessário para me ajudar. Agradeço imensamente por todos os ensinamentos transmitidos no âmbito profissional e pessoal.

À MINHA COORIENTADORA DRA. CECÍLIA F. MORAIS, pelos ensinamentos, ajudas e contribuições proporcionados ao longo da pós-graduação. Sou profundamente grata e feliz pela nossa amizade, por ter me acolhido como uma irmã.

AO DR. RICARDO C. L. F. OLIVEIRA, por ser meu coorientador informal, sempre fornecendo valorosas sugestões e colaborando de modo fundamental para o progresso desta tese. Agradeço também por todas as conversas e conhecimentos transmitidos durante a pós-graduação.

AO DR. CRISTIANO M. AGULHARI, meu orientador na graduação, por ser uma pessoa sensacional, por me ajudar a decidir onde realizar a pós-graduação (fazendo muita propaganda da Unicamp). Ademais, continuo sendo muito grata por todo aprendizado que me proporcionou.

AO DR. FÁBIO R. DURAND (*in memorian*), meu orientador de iniciação científica, por todo ensinamento, por ter me propiciado a oportunidade de iniciar na área de pesquisa, por ser um ótimo professor, mas principalmente por ser uma excelente pessoa, sempre demonstrando preocupação com o bem estar dos alunos. Foi e permanece sendo muito importante na vida de muitas pessoas, inclusive na minha.

AO DR. GIORGIO VALMORBIDA, por colaborar com o segundo capítulo desta tese, sanando dúvidas e oferecendo sugestões sobre o tópico de saturação. Ademais, agradeço também por me receber em uma visita técnica à *CentraleSupelec*.

AOS FUNCIONÁRIOS DA UNICAMP, em particular, aos professores da FEEC, Prof. Matheus, Prof. Romis, Prof. João Bosco, Prof. Paulo Valente e Prof. Akebo, pelos excelentes cursos ministrados. Agradeço também aos demais funcionários por todo auxílio e ajuda prestados.

À UNICAMP, por fornecer funcionários capacitados, além da estrutura necessária para viabilizar

a realização deste trabalho.

AOS MEMBROS DA BANCA, pelas excelentes sugestões que contribuíram para a elaboração da versão final desta tese.

AOS AMIGOS QUE FAZEM OU FIZERAM PARTE DO LE16, em destaque, à minha grande amiga Izabella, por todo apoio, encorajamento e por ser essa pessoa tão maravilhosa com quem tive a sorte de morar no último ano do doutorado (obrigada por me aguentar!). Agradeço ao Luciano que, embora esteja na UFMG, continua me ajudando e respondendo minhas dúvidas em diversos assuntos. Agradeço ao Jonathan por toda ajuda, inclusive por me auxiliar na minha ida ao congresso no Chile. Agradeço ao Marcos pelas conversas e ajuda em identificação. Agradeço aos meus amigos Andressa, Alejandro e Bruno, pelo bom convívio, amizade e ajudas mútuas na pós-graduação. Por fim, agradeço à Juliane e ao Álvaro, pela amizade e ótimos momentos.

AOS AMIGOS QUE ENCONTREI EM CAMPINAS, em destaque, ao Glauco, esposo da Cecília, que junto com ela praticamente me adotaram (como uma irmã mais nova, são muito jovens para outro papel hehehe), obrigada por todo apoio e bons momentos. Agradeço ao Glauco também, por todas as muitas caronas para a Unicamp e por, assim como sua família, sempre me receber muito bem para comilanças (os churrascos que faziam a minha alegria). Agradeço ao meu amigo Tiago pelo companheirismo e pela gentileza de hospedar a mim e a Izabella em nossa visita técnica na França. Finalmente, agradeço aos amigos Rafael, Monyque, Luciane e Hellen pela torcida e amizade.

AOS MEUS AMIGOS DE GRADUAÇÃO ANDRÉIA, BRUNA, VINÍCIUS, THIAGO, THIAGO MURILO, PEDRO VICTOR E MARCO, obrigada pela amizade e incentivos.

AOS AMIGOS DE LONGA DATA IAGO, ANNA CARLA, BRUNA MACIEL E FIDEL (TAMBÉM PRIMO), por todos os bons momentos compartilhados e conversas, pela amizade de sempre.

AO MEU FUTURO ESPOSO E MELHOR AMIGO DANIEL, pelo contínuo companheirismo, apoio, generosidade e incentivo. Agradeço também à sua família, seus pais, Beta e Luiz, sua irmã Carol e seu avô Abel (*in memorian*), por toda ajuda e por me aceitarem na família de vocês.

À MINHA FAMÍLIA, EM ESPECIAL AOS MEUS PAIS, que sempre me incentivaram a estudar. Agradeço à minha mãe Leila, pessoa muito batalhadora e minha grande motivação, por todo amor, dedicação e cuidado com a nossa família. Agradeço ao meu pai Armando (*in memorian*), por ser sinônimo de amor e de bondade em minha vida, por me ensinar com exemplos o que é o altruísmo e a empatia, por ser a minha maior referência. Agradeço aos meus avós Lila e Léo (*in memorian*) pelos ensinamentos e por, assim como meu primo Bruno, fazerem parte de alegres lembranças da infância. Agradeço à minha irmã Jéssica, por todo seu esforço, apoio e amor. Agradeço à minha sobrinha Sophia pela sua amizade, bondade, por ser uma pessoinha tão consciente que me orgulha muito e por indicar ótimos animes. Agradeço às minhas tias Janda, Laura (*in memorian*), Tina, tio Pedro, meu primo Robson que me ajudaram durante a graduação. Agradeço à minha tia Lucinha, por sua constante presença e ajuda. Por fim, agradeço aos demais familiares (a família é grande!) pelo apoio.

A DEUS, por tudo.

Agradecimentos - Auxílio Financeiro

O presente trabalho foi realizado com o apoio do processo nº 2019/09363-5, da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, por meio do convênio FAPESP/CAPES, propiciando o apoio financeiro concedido durante a maior parte do período de doutorado. A CAPES também financiou os quatro primeiros meses de bolsa, processo nº 88887.355218/2019-00. Assim, agradeço à CAPES e à FAPESP pelo auxílio financeiro.

*“Toda história da vida humana tem sido uma luta
entre o conhecimento e a ignorância.”
(Philip Pullman – A Luneta Âmbar)*

*“Uma criança, um professor, um livro e uma caneta
podem mudar o mundo.”
(Malala Yousafzai)*

Resumo

Esta tese investiga a classe dos sistemas lineares positivos, isto é, sistemas cujas variáveis de estados assumem apenas valores não negativos. As principais contribuições deste trabalho compreendem a elaboração de métodos para análise de estabilidade e para a síntese de controladores e filtros para sistemas lineares positivos. As condições propostas são dadas em termos de desigualdades matriciais lineares desde que, nos procedimentos de síntese, algumas variáveis sejam fixas, o que leva à construção de algoritmos iterativos para a resolução dos problemas. Na análise consideram-se os sistemas precisamente conhecidos (sem incertezas) com saturação nos atuadores, explorando a representação da saturação em termos da função rampa e valendo-se de relaxações de copositividade de formas quadráticas em condições de estabilidade global. O projeto de controle \mathcal{H}_2 é feito para sistemas lineares positivos de tempo contínuo com parâmetros incertos pertencentes a um politopo. No projeto do controlador dinâmico por realimentação de saída de ordem completa são tratados sistemas lineares positivos sujeitos a incertezas intervalares, considerando modelos no tempo contínuo e discreto. O projeto de filtros positivos de ordem reduzida \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ é investigado para sistemas lineares positivos incertos discretos no tempo. A síntese de controladores é feita por algoritmos iterativos cuja principal vantagem é apresentar as condições do problema de otimização com a matriz de Lyapunov e outras variáveis de decisão de forma afim. Essa característica é especialmente vantajosa no contexto de sistemas positivos, pois propicia que as restrições relacionadas à positividade sejam impostas diretamente nas variáveis de projeto (matrizes do filtro ou do controlador). Por fim, a eficácia dos métodos propostos é ilustrada por exemplos numéricos.

Palavras-chaves: Sistemas lineares positivos; saturação; controle robusto; controle por realimentação estática de saída; controle por realimentação dinâmica de saída; controle por realimentação de estados; filtragem; desigualdades matriciais lineares.

Abstract

This thesis investigates the class of positive linear systems, that is, systems whose state variables assume only non-negative values. The main contributions of this study concern the elaboration of methods for stability analysis and for the synthesis of controllers and filters for positive linear systems. The proposed conditions are given in terms of linear matrix inequalities since, in the synthesis procedures, some variables are fixed, which leads to the construction of iterative algorithms to solve the problems. In analysis, precisely known systems (without uncertainties) are considered with saturation in the actuators, exploring the representation of saturation in terms of a ramp function and making use of relaxations of copositivity of quadratic forms in global stability conditions. The \mathcal{H}_2 control design is addressed for continuous-time positive linear systems with uncertain parameters belonging to a polytope. In the full order dynamic output-feedback control design, positive linear systems with interval uncertainties are treated, considering continuous- and discrete-time models. The reduced-order \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ positive filter design is investigated for positive uncertain discrete-time linear systems. The control synthesis is addressed by iterative algorithms whose main advantage is to present the conditions of the optimization problem with the Lyapunov matrix and other decision variables appearing in an affine way. This characteristic is especially advantageous in the context of positive systems, since the restrictions related to positivity can be imposed directly on the design variables (matrices of the filter or controller). Finally, the effectiveness of the proposed methods is illustrated by numerical examples.

Keywords: Linear positive systems; saturation; robust control; static output-feedback control; dynamic output-feedback control; state-feedback control; filtering; linear matrix inequalities.

Lista de Ilustrações

Figura 1 – Polítopo de matrizes composto por cinco vértices, baseado em Oliveira (2006).	23
Figura 2 – Função rampa $r(u)$.	31
Figura 3 – Função saturação $\text{sat}[-1, 1](u)$.	32
Figura 4 – Função zona morta $\text{dz}[-1, 1](u)$.	32
Figura 5 – Norma \mathcal{H}_2 em malha fechada (ρ^*) e custo \mathcal{H}_2 garantido (ρ) computados pelo Algoritmo 1 com condição inicial $\mathcal{B}_0 = [I \ \xi I \ 0 \ -I]$ versus ξ , utilizando $i_{\text{max}} = 100$, Exemplo 3.1.	57
Figura 6 – Envelopes das trajetórias de $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 3.3 com condição inicial $x(0) = [300 \ 250 \ 230]'$ e $x_c(0) = [0 \ 0 \ 0]'$.	69
Figura 7 – Diagrama esquemático do processo de tanque sêxtuplo.	82

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Resultados da estabilidade global de sistemas positivos contínuos no tempo com ordem n_x e entradas n_u comparando o método do Lema 1.8 (designado por S_1), com os propostos no Teorema 2.1 ($T1$) e no Corolário 2.1 ($C1$). São mostrados os números de sistemas certificados como estáveis em um total de 200 para cada combinação (n_x, n_u) . As abordagens propostas utilizam as relaxações de copositividade apresentadas nos lemas 1.19 ($L2$) e 1.21 ($L4$). O tempo de simulação é definido por t , em segundos. Além disso, adotam-se os seguintes parâmetros: $u_{max_i} = 1$, $u_{min_i} = -1$, $i = 1, \dots, n_u$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $tol = 10^{-7}$	46
Tabela 2 – Resultados da estabilidade global de sistemas positivos discretos no tempo com ordem n_x e entradas n_u comparando o método do Lema 1.9 (designado por S_2), com os propostos no Teorema 2.2 ($T2$) e no Corolário 2.2 ($C2$). São mostrados os números de sistemas certificados como estáveis em um total de 200 para cada combinação (n_x, n_u) . As abordagens propostas utilizam as relaxações de copositividade apresentadas nos lemas 1.19 ($L2$) e 1.21 ($L4$). O tempo de simulação é definido por t , em segundos. Além disso, adotam-se os seguintes parâmetros: $u_{max_i} = 1$, $u_{min_i} = -1$, $i = 1, \dots, n_u$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $tol = 10^{-7}$	47
Tabela 3 – Custos garantidos $\mathcal{H}_2(\rho)$ computados pelo Algoritmo 1 (A1), por Deaecto e Geromel (2017) (DG) e pelos métodos de Ebihara <i>et al.</i> (2019) (E-(12), E-(13) e E-(14)) usando realimentação de estados sem restrição de estrutura.	57
Tabela 4 – Custos garantidos $\mathcal{H}_2(\rho)$ calculados pelo Algoritmo 1 (A1), por Deaecto e Geromel (2017) (DG) e pelas técnicas de Ebihara <i>et al.</i> (2019) (E-(12), E-(13) e E-(14)), considerando um ganho de realimentação de estados com estrutura definida em (3.8).	58
Tabela 5 – Custos garantidos \mathcal{H}_∞ e $\mathcal{H}_2(\gamma$ e $\rho)$ obtidos pelo Algoritmo 3 (m iterações) e Lacerda <i>et al.</i> (2011) (estendido, denotado por L^*), \mathcal{V} e \mathcal{L} (respectivamente, variáveis escalares e linhas LMIs para cada teste das condições LMIs) e as normas de pior caso ($\ \mathcal{G}_e\ _\infty$ e $\ \mathcal{G}_e\ _2$ computadas por meio de uma grade fina em α) para o Exemplo 4.2.	83

Lista de Símbolos e Abreviações

LMI	Linear Matrix Inequality.
LPV	Linear Parameter-Varying.
*	Indica bloco simétrico.
A'	Transposta da matriz A .
A^{-1}	Inversa da matriz A .
A^\perp	Base para o espaço nulo de A ($AA^\perp = 0$).
$\text{He}(A)$	Soma $A + A'$.
$\text{Tr}(A)$	Traço da matriz A (soma dos elementos da diagonal principal da matriz).
$A \geq 0$	A é não negativa (elemento a elemento).
$A \succ 0$	A é definida positiva.
$A \succeq 0$	A é semidefinida positiva.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$.
\mathbb{D}	Conjunto das matrizes diagonais.
\mathbb{M}	Conjunto das matrizes <i>Metzler</i> , isto é, matrizes quadradas com elementos não negativos fora da diagonal principal.
$r(u)$	Função rampa.
$\text{sat}(\cdot)$	Função saturação.
$\text{sat}[u_{\min}, u_{\max}](u)$	Indica que cada componente do sinal de controle u_i está restrita ao intervalo $[u_{\min_i}, u_{\max_i}]$ com $u_{\min_i} < 0$ e $u_{\max_i} > 0$.

$dz(\cdot)$	Função zona-morta.
$\delta[\cdot]$	Representa o operador derivada para sistemas a tempo contínuo e o operador avanço unitário para sistemas discretos no tempo.
α	Parâmetro incerto.
N	Número de vértices de um politopo.
Λ	Simplex unitário.

Sumário

Introdução	18
1 Conceitos Preliminares e Definições	22
1.1 Sistemas lineares invariantes no tempo incertos	22
1.1.1 Sistemas intervalares	23
1.2 Desigualdades matriciais lineares para estabilidade	24
1.2.1 Resolução Numérica de LMIs robustas	29
1.3 Sistemas com saturação nos atuadores	29
1.3.1 Condição de setor	29
1.3.2 Usando rampas para definir saturação	30
1.4 Fundamentos de sistemas positivos	32
1.4.1 Sistemas contínuos	33
1.4.1.1 Controle	34
1.4.2 Sistemas discretos	36
1.4.2.1 Controle	37
1.5 Testes de copositividade	38
1.6 Lemas auxiliares	39
2 Análise de Sistemas Positivos Saturados	41
2.1 Introdução	41
2.2 Saturação nos atuadores	42
2.2.1 Definição do problema	42
2.2.2 Caso contínuo no tempo	43
2.2.3 Caso discreto no tempo	45
2.2.4 Exemplos numéricos	45
2.2.5 Conclusões	48
3 Controle de Sistemas Positivos	49
3.1 Introdução	49
3.2 Controle por realimentação estática de saída	51
3.2.1 Definição do problema	51
3.2.2 Caso contínuo no tempo	52
3.2.3 Método iterativo	54
3.2.4 Exemplos numéricos	56
3.3 Controle por realimentação dinâmica de saída	60
3.3.1 Definição do problema	60
3.3.2 Caso contínuo no tempo	61
3.3.3 Caso discreto no tempo	63

3.3.4	Método iterativo	65
3.3.5	Exemplos numéricos	67
3.4	Conclusões	70
4	Filtragem de Sistemas Positivos	71
4.1	Introdução	71
4.2	Filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	72
4.2.1	Definição do problema	72
4.2.2	Caso discreto no tempo	73
4.2.3	Método iterativo	77
4.2.4	Exemplos numéricos	80
4.2.5	Conclusões	83
5	Considerações Finais	84
	Referências	87

Introdução

Em virtude das crescentes e rigorosas exigências em relação ao desempenho e precisão em sistemas de controle, tem-se o aumento da complexidade dos modelos, dificultando o tratamento de tais sistemas por procedimentos analíticos. Nesse cenário, as desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — *LMIs*) emergem como uma poderosa ferramenta para tratar problemas de controle que apresentam dificuldade, ou até mesmo impossibilidade, de resolução analítica (SCHERER; WEILAND, 2015). Embora a história das LMIs remonte às décadas de 1940-1960 com os trabalhos desenvolvidos por Kalman, Yakubovich, Popov e Willems, descrevendo problemas de controle em termos de LMIs (SCHERER; WEILAND, 2015; PALHARES; GONÇALVES, 2007), apenas no final do século XX surgiram técnicas eficientes para a resolução das LMIs, como o algoritmo de pontos interiores (GAHINET; NEMIROVSKII, 1997). Esta disponibilidade de resolvedores rápidos e eficientes para problemas de programação semidefinida ocasionou uma mudança de paradigma na área de controle robusto, fomentando as reformulações dos problemas de controle de modo a verificar a existência de soluções em termos de LMIs ou, alternativamente, a otimização de funcionais sob restrições LMIs (SCHERER; WEILAND, 2015).

Na teoria de controle, a primeira formulação direta em termos de LMIs decorreu do Teorema de Lyapunov (PALHARES; GONÇALVES, 2007). Primeiramente, a função de Lyapunov quadrática nos estados, com matriz constante, foi utilizada para o desenvolvimento de condições suficientes para a estabilidade (chamada de estabilidade quadrática) de sistemas com incertezas, com extensões para controle e filtragem. Posteriormente, funções de Lyapunov mais complexas, como as funções polinomiais homogêneas em termos dos parâmetros incertos, proveram uma gama de novos resultados, para as mais variadas classes de sistemas dinâmicos (contínuos, discretos, híbridos) sujeitos a diversas perturbações e não linearidades. Nesse contexto, podem ser citados trabalhos com síntese de realimentação de estados baseada na estabilidade quadrática (BERNUSSOU *et al.*, 1989; GEROMEL *et al.*, 1991), com formas afins da matriz de Lyapunov, como em de Oliveira *et al.* (1999), Leite e Peres (2003), Peaucelle *et al.* (2000) (utilizando variáveis extras introduzidas pelo lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001)) e a caracterização completa de estabilidade robusta por meio de funções de Lyapunov polinomiais, de grau genérico, construídas a partir de relaxações LMIs conver-

gentes (BLIMAN, 2004; CHESI, 2010; CHESI *et al.*, 2005; CHESI *et al.*, 2009; OLIVEIRA; PERES, 2007; OLIVEIRA *et al.*, 2008; SCHERER; HOL, 2006).

No estudo de sistemas dinâmicos, além das especificações oriundas dos critérios de desempenho ou das incertezas, pode ser necessário incorporar restrições que são intrínsecas ao próprio sistema, como no caso dos sistemas positivos, abordados nesta tese, cujas variáveis de estados assumem apenas valores não negativos. Para manter o significado do ponto de vista de modelagem desta classe de sistemas, é necessário, por exemplo, ao sintetizar uma lei de controle por realimentação, estender a propriedade de positividade, característica do sistema em malha aberta, para o sistema projetado em malha fechada (BRU; ROMERO-VIVO, 2009), inserindo assim mais restrições ao projeto de controle.

Os sistemas positivos estão presentes em inúmeros problemas práticos de engenharia. De fato, a restrição de não negatividade está contida em qualquer variável que represente recursos mensuráveis por quantidades como tempo, dinheiro, pacotes de dados, populações, etc. (FARINA; RINALDI, 2000). Desse modo, é comum encontrar sistemas positivos em modelos de fluxo em redes (transporte, tráfego, comunicações), populacionais, econômicos, epidemiológicos, etc. (RANTZER; VALCHER, 2018; AIT RAMI *et al.*, 2014; BLANCHINI; GIORDANO, 2014; HERNANDEZ-VARGAS; MIDDLETON, 2013; FARINA; RINALDI, 2000; BERMAN; PLEMMONS, 1979; LUENBERGER, 1979).

De acordo com Luenberger (1979), o conceito dos sistemas positivos está fundamentado na teoria das matrizes positivas que tem como alicerce o célebre Teorema de Perron-Frobenius (HORN; JOHNSON, 1991), sendo uma temática ainda aberta para pesquisas. Inclusive, de acordo com Ebihara *et al.* (2018), embora existam resultados significativos em análise válidos especificamente para os sistemas positivos, o mesmo não ocorre em problemas de síntese nos quais, conforme mencionado anteriormente, há a restrição natural para que o sistema em malha fechada seja positivo, dificultando o projeto. Entretanto, ainda segundo Ebihara *et al.* (2018), em alguns casos, este desafio pode ser contornado pelo uso de estruturas diagonais para algumas matrizes envolvidas no projeto do controlador ou filtro. Essa estratégia baseia-se no resultado bem estabelecido em que uma matriz de Lyapunov diagonal é utilizada para certificar a estabilidade assintótica do sistema positivo (FARINA; RINALDI, 2000). Na mesma linha, dentre outros resultados, destaca-se o trabalho de Tanaka e Langbort (2011) que projeta um ganho de controle ótimo \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados a partir do *bounded real lemma* com uma matriz de Lyapunov diagonal sem qualquer conservadorismo para sistemas lineares positivos precisamente conhecidos. Uma prova alternativa referente a este resultado é dada em Ebihara *et al.* (2014). Além disso, ainda em Ebihara *et al.* (2014) é apresentada uma nova LMI para a análise de desempenho \mathcal{H}_∞ em que a variável correspondente à matriz de Lyapunov pode ser não-simétrica. Em Li *et al.* (2010) a norma \mathcal{H}_∞ é adotada como critério de desempenho no projeto de um filtro positivo de ordem reduzida para sistemas positivos precisamente conhecidos no tempo discreto.

No âmbito de sistemas positivos é preciso ressaltar que, embora seja possível obter

condições necessárias e suficientes ao tratar do controle por realimentação de estados considerando norma \mathcal{H}_∞ no caso de sistemas precisamente conhecidos. Isto não ocorre ao lidar com a norma \mathcal{H}_2 , sendo que até o presente momento, existem apenas condições suficientes. De acordo com Ebihara *et al.* (2018) é possível que para sistemas positivos o projeto de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estados seja não convexo. Em relação aos trabalhos que abordam a norma \mathcal{H}_2 como critério de desempenho para análise ou síntese no contexto de sistemas positivos pode-se citar Deaecto e Geromel (2017), Ebihara (2018), Ebihara *et al.* (2018), Ebihara *et al.* (2019).

Com relação ao projeto de controle por realimentação de saída para sistemas positivos, novamente, têm-se unicamente soluções subótimas, veja Blondel e Tsitsiklis (2000) no qual esse problema é tratado com o uso de algoritmos iterativos baseados em LMIs.

Não obstante, quando incertezas afetam a planta, apenas condições suficientes podem ser obtidas e uma estrutura diagonal fixa para a matriz de Lyapunov, ou qualquer outra variável envolvida nas condições, pode produzir resultados ruins em termos de custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , especialmente se a matriz restrita a ser diagonal estiver envolvida no cálculo do ganho projetado.

Diante do exposto, nesta tese objetiva-se desenvolver técnicas de análise e síntese de controladores e filtros para sistemas positivos, considerando as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ como índices de desempenho. Para solucionar as condições elaboradas para síntese, utilizam-se algoritmos iterativos baseados no método de Felipe (2017). Os procedimentos iterativos propostos caracterizam-se por apresentar o ganho e a matriz de Lyapunov como variáveis independentes nas condições. Portanto, no problema de filtragem, por exemplo, é possível impor diretamente nas matrizes dos filtros as restrições relacionadas à positividade. No projeto de controle estático em que o sistema em malha fechada tem que satisfazer a não negatividade no caso discreto (ou ser Metzler, isto é, ter elementos não negativos fora da diagonal, para sistemas contínuos no tempo), elimina-se a necessidade de impor estrutura diagonal às variáveis de decisão empregadas nas LMIs, pois o ganho não é recuperado por mudanças de variáveis e sim tratado diretamente como uma variável do problema de otimização.

As contribuições desta tese são apresentadas nos capítulos 2, 3 e 4. As condições de síntese propostas nos capítulos 3 e 4 são descritas em termos de LMIs dependentes de parâmetros pertencentes ao simplex unitário, o procedimento de resolução numérica desse tipo de condição é discutido na Seção 1.2.1.

Na sequência, os capítulos que compõem esta tese são brevemente descritos.

Capítulo 1: Introduce os conceitos e as definições empregados no decorrer desta tese.

Capítulo 2: Contém a primeira contribuição desta tese, a qual consiste em uma técnica para análise de sistemas lineares positivos com saturação nos atuadores explorando a representação da saturação em termos da função rampa, nos casos contínuo e discreto no tempo. A eficácia das abordagens propostas é averiguada recorrendo a exemplos numéricos en-

volvendo sistemas positivos com diferentes ordens e número de entradas.

Capítulo 3: Aborda os problemas de síntese de um ganho estático por realimentação de saída que assegure um custo garantido \mathcal{H}_2 para sistemas lineares positivos em tempo contínuo com parâmetros incertos pertencentes a um politopo e o projeto de um controlador dinâmico por realimentação de saída de ordem completa para sistemas lineares positivos sujeitos a incertezas intervalares em tempo contínuo e discreto. As condições propostas são solucionadas por meio de procedimentos iterativos. Exemplos numéricos criados ou retirados da literatura explicitam as vantagens das técnicas elaboradas.

Capítulo 4: Discorre sobre o projeto de filtros positivos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida para sistemas lineares incertos positivos em tempo discreto. Novamente utiliza-se um procedimento iterativo para a resolução das condições propostas. A validação dos procedimentos propostos é feita por meio de exemplos baseados em aplicações práticas cujos modelos matemáticos podem ser encontrados na literatura.

Capítulo 5: Apresenta as considerações finais desta tese, retratando as contribuições, as perspectivas para trabalhos futuros e os artigos produzidos.

Conceitos Preliminares e Definições

1.1 Sistemas lineares invariantes no tempo incertos

A maioria dos projetos de controle é baseada no uso de um modelo matemático, cuja finalidade é caracterizar um sistema real. As diferenças ou erros entre o modelo e a realidade são denotados pelo termo *incerteza*, e qualquer mecanismo usado para expressar esses erros é dito *representação da incerteza* (ZHOU; DOYLE, 1998). De fato, o modelo é meramente uma aproximação matemática da planta, podendo conter diferentes tipos de incerteza como, por exemplo, as decorrentes de linearizações, ruídos, dinâmicas não modeladas, erros de identificação, entre outras. Na maioria dos sistemas práticos, pelo menos dois tipos estão presentes: a dinâmica não modelada, associada a incertezas de alta frequência, e a incerteza paramétrica, devido à falta do conhecimento preciso dos parâmetros. Estas incertezas causam a deterioração do desempenho e podem até tornar o sistema controlado instável (DATTA; PATEL, 1996). Deste modo, é essencial admitir incertezas no modelo, obtendo assim uma representação mais fidedigna do sistema físico.

Nesta tese, uma das representações utilizadas para expressar os modelos de sistemas lineares com a presença de incertezas paramétricas é a politópica, conforme denotado pelo sistema

$$\begin{cases} \delta[x] = A(\alpha)x + B(\alpha)u + E(\alpha)w, \\ z = C_z(\alpha)x + D_z(\alpha)u + E_z(\alpha)w, \\ y = C_y(\alpha)x + E_y(\alpha)w, \end{cases} \quad (1.1)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, respectivamente, os vetores de estados, da entrada de controle, da entrada exógena, da saída controlada e da saída medida. O operador $\delta[\cdot]$ equivale à derivada, dx/dt , para sistemas contínuos e ao operador avanço, $x(k+1)$, para sistemas discretos no tempo. As matrizes do espaço de estados possuem dimensões apropriadas, são incertas e pertencem a um politopo¹, ou seja, qualquer matriz pode ser escrita como uma

¹ Em Palhares e Gonçalves (2007) um politopo é definido como um conjunto poliedral limitado (convexo e fechado), ou ainda, como a casca convexa de um conjunto finito de vértices.

combinação convexa de N vértices conhecidos na forma

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i, \quad \alpha \in \Lambda, \quad (1.2)$$

em que $M(\alpha)$ caracteriza cada uma das matrizes de (1.1), M_i , $i = 1, \dots, N$, descreve os vértices do politopo e $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_N]'$ é um vetor de parâmetros invariantes no tempo que corresponde às incertezas paramétricas e pertence ao simplex unitário

$$\Lambda = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (1.3)$$

A fim de ilustrar o conceito apresentado, considere o politopo com cinco vértices apresentado na Figura 1. Qualquer combinação de α que satisfaça (1.3) corresponderá a uma combinação de vértices M_i e produzirá um ponto no interior, em uma aresta ou em um vértice do conjunto poliedral representado em azul.

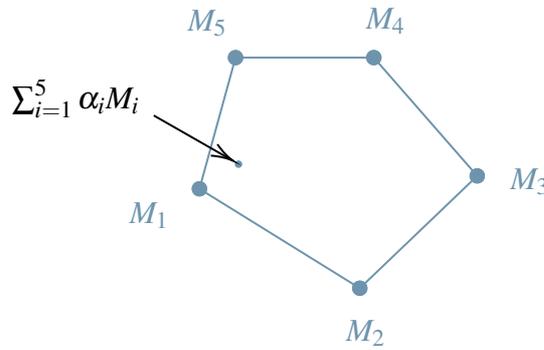


Figura 1 – Politopo de matrizes composto por cinco vértices, baseado em Oliveira (2006).

1.1.1 Sistemas intervalares

De acordo com Ma *et al.* (2018), além de existirem incertezas intervalares em muitos sistemas reais, a maioria dos sistemas de controle com parâmetros incertos pode ser aproximada por sistemas com incertezas intervalares. Denota-se por *sistema intervalar* um sistema dinâmico linear regido por uma matriz intervalar, isto é, uma matriz cujos elementos variam entre determinados limites (GAROFALO *et al.*, 1993). Uma família de matrizes intervalares é definida como

$$\mathcal{A}(A_m, A_M) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A_m \leq A \leq A_M\}, \quad (1.4)$$

sendo $A_m = [a_{mij}]$ e $A_M = [a_{Mij}]$ matrizes precisamente conhecidas. A família \mathcal{A} é descrita geometricamente como um hiperretângulo no espaço $\mathbb{R}^{n \times n}$ dos coeficientes a_{ij} . Assim, é um caso especial do politopo de matrizes quando os elementos das matrizes variam de maneira linearmente dependente em relação aos parâmetros incertos (YEDAVALLI, 2002). Em relação à estabilidade (Schur ou Hurwitz), diz-se que \mathcal{A} é estável se todo $A \in \mathcal{A}$ for estável (SU; SHYR, 1994).

1.2 Desigualdades matriciais lineares para estabilidade

Em [Boyd et al. \(1994\)](#) uma LMI é definida matematicamente como

$$F(v) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m v_i F_i \succ 0, \quad (1.5)$$

em que $v \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis e $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ são matrizes dadas. Em (1.5), $F(v)$ é definida positiva, mas poderia ser definida negativa ou com desigualdade não-estrita. Perceba que $F(v)$ tem estrutura simétrica, característica intrínseca às LMIs ([PALHARES; GONÇALVES, 2007](#)). Note ainda que a LMI (1.5) é uma restrição convexa em v , ou seja, o conjunto solução $\{v | F(v) \succ 0\}$ é convexo. A convexidade no conjunto solução é uma característica relevante das LMIs, uma vez que simplifica a resolução de problemas complexos como, por exemplo, os referentes aos sistemas incertos. De acordo com [Boyd et al. \(1994\)](#), é possível representar uma ampla variedade de restrições convexas em v utilizando (1.5), como: desigualdades lineares, desigualdades quadráticas (convexas) e desigualdades de normas matriciais. Diversos problemas de controle, filtragem e análise de estabilidade podem ser descritos por meio de tais restrições, tal qual a desigualdade de Lyapunov. Inclusive, conforme discutido em [Palhares e Gonçalves \(2007\)](#), na teoria de controle, a primeira formulação direta em termos de LMIs decorreu do teorema de Lyapunov, apresentado na tese de doutorado de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov em 1892 ([LYAPUNOV, 1992](#)).

Com base na teoria de estabilidade de Lyapunov, o sistema incerto

$$\delta[x] = A(\alpha)x, \quad (1.6)$$

em que $A(\alpha)$ é descrita por (1.2), pode ter sua estabilidade certificada por meio do lema a seguir. Ressaltando que o Teorema de Lyapunov certifica a estabilidade da origem do sistema. Entretanto, com um certo abuso de linguagem, é dito que Lyapunov certifica a estabilidade Hurwitz do sistema linear, pelo fato do sistema linear com um único ponto de equilíbrio na origem que é assintoticamente estável necessariamente ser descrito por uma matriz A Hurwitz (ou Schur).

Lema 1.1. ([BOYD et al., 1994](#)) *O sistema contínuo (1.6) é Hurwitz estável se, e somente se, existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tal que*

$$A'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \prec 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda. \quad (1.7)$$

A estabilidade para o caso discreto no tempo pode ser verificada de modo análogo pelo próximo teorema.

Lema 1.2. ([BOYD et al., 1994](#)) *O sistema discreto (1.6) é Schur estável se, e somente se, existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tal que*

$$A'(\alpha)P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) \prec 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda. \quad (1.8)$$

Para a resolução numérica dos lemas 1.1 e 1.2 é necessário estabelecer *a priori* a forma que a matriz de Lyapunov depende do parâmetro incerto α , ou seja, a estrutura da matriz $P(\alpha)$. Desta maneira, ao fixar uma estrutura para $P(\alpha)$, é possível construir um conjunto finito de LMIs programáveis que, se satisfeitas, asseguram a validade da desigualdade em todo o domínio Λ dado por (1.3), composto por infinitos pontos. Em suma, para obter um conjunto finito de restrições LMIs, é preciso definir estruturas para as variáveis do problema. Deste modo, impor, por exemplo, a matriz de Lyapunov como independente de parâmetros (constante), $P(\alpha) = P$, é suficiente para certificar as condições dos teoremas 1.1 e 1.2 a partir da verificação nos vértices do politopo ao qual pertence a matriz $A(\alpha)$, lembrando que a matriz $A(\alpha)$ possui estrutura afim no parâmetro incerto, como em (1.2). Esta metodologia é referida na literatura como *estabilidade quadrática* (BARMISH, 1985) e no âmbito de sistemas precisamente conhecidos é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade. Entretanto, no caso de sistemas incertos, tal abordagem gera resultados que podem ser conservadores, visto que a mesma função de Lyapunov (quadrática nos estados), $V(x) = x'Px$, deve assegurar a estabilidade do sistema em todo o domínio de incertezas. Para exemplificar, veja o próximo lema, baseado na estabilidade quadrática. As condições são descritas para os N vértices pertencentes ao politopo que descreve $A(\alpha)$, porém, P é única. Por uma questão de brevidade, a partir deste ponto os próximos lemas desta seção abordam apenas o tempo contínuo.

Lema 1.3 (BARMISH, 1985; BOYD *et al.*, 1994). *O sistema contínuo (1.6) é estável se existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tal que*

$$A_i'P + PA_i \prec 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.9)$$

Na literatura, além do uso da estrutura constante, $P(\alpha)$ pode ter outras estruturas, como por exemplo $P(\alpha)$ dependente de forma afim nos parâmetros, ou seja, com estrutura igual à de $A(\alpha)$, definida em (1.2). Observe na sequência condições em que $P(\alpha)$ tem estrutura afim nos parâmetros que certificam a estabilidade do sistema.

Lema 1.4 (RAMOS; PERES, 2002). *Se existirem matrizes de Lyapunov $0 \prec P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i = 1, \dots, N$ tais que*

$$\begin{aligned} A_i'P_i + P_iA_i &\prec -I, \quad i = 1, \dots, N, \\ A_i'P_j + P_jA_i + A_j'P_i + P_iA_j &\prec \frac{2}{N-1}I, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = i+1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.10)$$

então

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad (1.11)$$

é uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que assegura a estabilidade do sistema contínuo (1.6) para $A(\alpha)$ dado em (1.2), ou seja, que verifica a condição (1.7) do Lema 1.1.

Perceba que as condições fornecidas pelo Lema 1.4 são menos conservadoras que as apresentadas no Lema 1.3, visto que a matriz de Lyapunov não é única e as condições em (1.9)

podem ser recuperadas fazendo $P_i = P$, isto é, estão contidas no Lema 1.4. Entretanto, ambas estratégias são conservadoras ou, em outros termos, é possível que existam sistemas para os quais não há P constante ou $P(\alpha)$ afim que prove a estabilidade, mesmo que o sistema seja estável.

O desafio de encontrar uma estrutura particular para $P(\alpha)$ sem perda de generalidade foi solucionado em 2004 por Pierre-Alexandre Bliman utilizando um teorema de existência (BLIMAN, 2004). Neste teorema, se há uma solução com estrutura arbitrária para uma LMI robusta, então existe uma função polinomial que também resolve essa LMI. Particularizando o resultado de Bliman (2004) de modo que o domínio incerto seja o simplex unitário (1.3), a solução pode ser restrita à classe de polinômios homogêneos² de grau arbitrário. Deste modo, é possível caracterizar a estabilidade robusta do sistema (1.6) pelo seguinte lema.

Lema 1.5 (OLIVEIRA; PERES, 2007). *O sistema contínuo (1.6) é Hurwitz estável se, e somente se, existir uma matriz polinomial homogênea $0 \prec P_g(\alpha) = P_g(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ de grau suficientemente grande g tal que*

$$A'(\alpha)P_g(\alpha) + P_g(\alpha)A(\alpha) \prec 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda. \quad (1.12)$$

Note que o Lema 1.5 possui desigualdades polinomiais matriciais. Deste modo, surge um novo problema desafiador que consiste em testar sem conservadorismo a positividade ou negatividade de polinômios matriciais com parâmetros no simplex. Um resultado significativo para este teste é o teorema de Pólya, mostrado a seguir, que inclusive lida exclusivamente com polinômios homogêneos com variáveis no simplex unitário (1.3).

Lema 1.6 Pólya (HARDY et al., 1952). *Seja um polinômio homogêneo escalar e positivo $F(\alpha) \triangleq F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, $\forall \alpha \in \Lambda$. Então para um grau d suficientemente grande, o polinômio resultante de*

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d F(\alpha)$$

possui todos os coeficientes estritamente positivos.

Para um melhor entendimento do uso do Lema 1.6, considere o seguinte exemplo, baseado nas notas de aula de Oliveira (2023).

Exemplo 1.1. *Admita $f(\alpha) = \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2$, $\alpha \in \Lambda$. Utilizando a relaxação de Pólya, obtêm-se*

$$d = 1$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2) = \alpha_1^3 + \alpha_2^3,$$

embora o resultado contenha apenas termos positivos os coeficientes $\alpha_1^2 \alpha_2$ e $\alpha_1 \alpha_2^2$ são nulos,

² Polinômios em que os monômios com coeficientes não-nulos têm o mesmo grau total. Exemplo: $x^5 + 3x^2y^3 + 7xy^2z^2 + z^5$ é um polinômio homogêneo de grau 5, com três variáveis.

$$d = 2$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^2(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) = \alpha_1^4 + \alpha_1^3\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^3 + \alpha_2^4,$$

o coeficiente $\alpha_1^2\alpha_2^2$ é nulo,

$$d = 3$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^3(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) = \alpha_1^5 + 2\alpha_1^4\alpha_2 + \alpha_1^3\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2^3 + 2\alpha_1\alpha_2^4 + \alpha_2^5.$$

Neste exemplo, a relaxação de Pólya para o grau $d = 3$ resulta em todos os coeficientes estritamente positivos.

Embora o teorema de Pólya trate de polinômios escalares, Carsten W. Scherer mostrou que é possível estender os resultados para o caso matricial de modo direto (SCHERER, 2003; SCHERER, 2005), inserindo assim, o teorema de Pólya no contexto de análise de sistemas lineares. Diante desse resultado, os requisitos para obter condições necessárias e suficientes para certificar a estabilidade de (1.6) são alcançados (na verdade, as condições são assintoticamente necessárias, pois não é possível computar *a priori* um valor de d para o qual a condição seja conclusiva). Em suma, recorrendo ao uso de funções de Lyapunov quadráticas no estado com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros, juntamente com as relaxações de Pólya, é possível obter condições LMIs finitas que tendem à necessidade para um grau suficientemente grande de g ou d , conforme abordado em Oliveira e Peres (2007).

Lema 1.7 (OLIVEIRA; PERES, 2007). *O sistema (1.6) é Hurwitz estável se, e somente se, existir uma matriz polinomial homogênea $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, um grau g e um d suficientemente grandes tais que*

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d P_g(\alpha) &\succ 0, \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d (A'(\alpha)P_g(\alpha) + P_g(\alpha)A(\alpha)) &\prec 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

são verificadas para todo $\alpha \in \Lambda$.

A fim de recapitular e reforçar as estruturas mencionadas para a matriz de Lyapunov, assim como o uso da relaxação de Pólya para o caso matricial, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 1.2. *Admita o sistema contínuo (1.6) com $N = 2$, ou seja, $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$. Condições de estabilidade suficientes para $A(\alpha)$, considerando as relaxações em relação à estrutura da matriz de Lyapunov, $P(\alpha)$, e ao Teorema de Pólya, são dadas a seguir:*

(a) *Estrutura constante ($g = d = 0$, $P(\alpha) = P$)*

$$\begin{aligned} P &\succ 0, \\ A_1'P + PA_1 &\prec 0, \quad A_2'P + PA_2 &\prec 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

(b) Estrutura afim ($g = 1, d = 0, P(\alpha) = P_1(\alpha) = \alpha_1 P_{10} + \alpha_2 P_{01}$)

$$\begin{aligned} P_{10} > 0, \quad P_{01} > 0, \\ A'_1 P_{10} + P_{10} A_1 < 0, \quad A'_2 P_{01} + P_{01} A_2 < 0, \\ A'_1 P_{01} + P_{01} A_1 + A'_2 P_{10} + P_{10} A_2 < 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Observe que a notação empregada nas matrizes de Lyapunov com dependência afim e, a seguir, polinomial utiliza subíndices que indicam a potência dos parâmetros que formam o monômio.

(c) Estrutura polinomial ($g = 2, d = 0, P(\alpha) = P_2(\alpha) = \alpha_1^2 P_{20} + \alpha_1 \alpha_2 P_{11} + \alpha_2^2 P_{02}$)

$$\begin{aligned} P_{20} > 0, \quad P_{11} > 0, \quad P_{02} > 0, \\ A'_1 P_{20} + P_{20} A_1 < 0, \quad A'_2 P_{02} + P_{02} A_2 < 0, \\ A'_1 P_{02} + P_{02} A_1 + A'_2 P_{11} + P_{11} A_2 < 0, \\ A'_1 P_{11} + P_{11} A_1 + A'_2 P_{20} + P_{20} A_2 < 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

(d) Estrutura afim e com uma relaxação de Pólya ($g = 1, d = 1: P(\alpha) = P_1(\alpha) = \alpha_1 P_{10} + \alpha_2 P_{01}$)

$$P_{10} > 0, \quad P_{01} > 0, \quad (1.17)$$

$$\alpha_1 P_{10} + \alpha_2 P_{01} > 0, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 \underbrace{(A'_1 P_{10} + P_{10} A_1)}_{R_1} + \alpha_2^2 \underbrace{(A'_2 P_{01} + P_{01} A_2)}_{R_2} + \\ \alpha_1 \alpha_2 \underbrace{(A'_1 P_{01} + P_{01} A_1 + A'_2 P_{10} + P_{10} A_2)}_{R_3} < 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

A desigualdade (1.18) testa se a matriz de Lyapunov é definida positiva, porém, como trata-se de um polinômio de grau unitário basta impor que os coeficientes sejam positivos, ou seja, é necessário e suficiente impor as condições dadas em (1.17). Porém, na segunda desigualdade (1.19), os graus do polinômio são maiores do que um, assim é apenas suficiente impor $R_1 < 0, R_2 < 0$ e $R_3 < 0$. Entretanto, percebe-se que as restrições envolvendo R_1 e R_2 são necessárias, pois garantem a estabilidade nos vértices, atendendo os casos em que $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 0$, bem como a situação contrária. Por outro lado, a condição $R_3 < 0$ é apenas suficiente, tornando vantajoso o uso do teorema de Pólya. Assim, aplicando a relaxação de Pólya para $d = 1$, tem-se

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^1 (\alpha_1^2 R_1 + \alpha_2^2 R_2 + \alpha_1 \alpha_2 R_3) < 0,$$

$$R_1 < 0, \quad R_1 + R_3 < 0, \quad R_2 + R_3 < 0, \quad R_2 < 0. \quad (1.20)$$

Em (1.20) as restrições $R_1 < 0$ e $R_2 < 0$ novamente aparecem, pois, como mencionado anteriormente, são necessárias. Entretanto, após aplicar o Teorema de Pólya a desigualdade $R_3 < 0$ é combinada com as demais, produzindo outras duas restrições mais relaxadas que $R_3 < 0$.

1.2.1 Resolução Numérica de LMIs robustas

A maior parte das condições apresentadas nesta tese está na forma de LMIs robustas, ou seja, dependentes do parâmetro incerto $\alpha \in \Lambda$. Porém, conforme mencionado anteriormente, condições escritas em termos do parâmetro incerto α devem ser satisfeitas para todo o domínio de Λ (1.3). Portanto, caracterizam um problema que a princípio não é numericamente tratável. Uma forma de contornar esse obstáculo é arbitrar estruturas particulares para as variáveis de otimização como, consoante às apresentadas previamente na Seção 1.2 para a matriz de Lyapunov, a afim e a polinomial. Assim, a positividade (ou negatividade) das desigualdades polinomiais resultantes pode ser verificada em termos de um conjunto finito de LMIs (OLIVEIRA; PERES, 2007), que pode ser gerado automaticamente pelo Robust LMI Parser (ROLMIP) (AGULHARI *et al.*, 2012).

Nos exemplos apresentados ao longo da tese que tratam sistemas incertos, o uso da estrutura afim para a matriz Lyapunov (ou variáveis de folga) é suficiente para promover resultados que apresentam um bom compromisso entre precisão e esforço computacional. Estruturas polinomiais de graus maiores poderiam ser utilizadas, potencialmente fornecendo resultados ainda melhores (menos conservadores), mas ao preço de um significativo aumento no esforço computacional, especialmente nas técnicas iterativas que possuem muitas variáveis de folga.

1.3 Sistemas com saturação nos atuadores

1.3.1 Condição de setor

A condição de setor é uma técnica de modelagem em que a saturação do atuador é tratada como uma não-linearidade pertencente a um setor. Deste modo, o problema de análise de estabilidade para sistemas de controle lineares com saturação na entrada pode ser tratado usando o modelo de não linearidade setorial para representar o sistema de malha fechada saturado

$$\delta[x] = Ax + B\text{sat}[u_{min}, u_{max}](u), \quad (1.21)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados e $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle. A notação $\text{sat}[u_{min}, u_{max}](u)$ indica que cada componente do sinal de controle u_i está restrita ao intervalo $[u_{min_i}, u_{max_i}]$ com $u_{min_i} < 0$ e $u_{max_i} > 0$ conhecidos, $i = 1, \dots, n_u$.

Na sequência, são apresentados lemas para a estabilidade global do sistema em malha fechada (1.21), considerando realimentação de estados $u = Kx$, para os casos de tempo contínuo e discreto, respectivamente.

Lema 1.8. (TARBOURIECH *et al.*, 2011) *Se existirem uma matriz $0 \prec W = W' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e uma*

matriz $0 \prec S \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $S \in \mathbb{D}$, que satisfaçam³

$$\begin{bmatrix} W(A+BK)' + (A+BK)W & BS - WK' \\ \star & -2S \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.22)$$

então a origem é globalmente assintoticamente estável para o sistema saturado (1.21) no tempo contínuo.

Lema 1.9. (TARBOURIECH et al., 2011) Se existirem uma matriz definida $0 \prec W = W' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e uma matriz $0 \prec S \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $S \in \mathbb{D}$, que satisfaçam

$$\begin{bmatrix} -W & -WK' & W(A+BK)' \\ \star & -2S & SB' \\ \star & \star & -W \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.23)$$

então a origem é globalmente assintoticamente estável para o sistema saturado (1.21) no tempo discreto.

Observe que, como os lemas são baseados nas condições de setor e na estabilidade global, qualquer não linearidade pertencente ao setor é permitida e, portanto, os valores de u_{min} e u_{max} podem ser arbitrários. Ademais, embora recorra-se ao desenvolvimento apresentado em Tarbouriech et al. (2011) com os lemas 1.8 e 1.9, na literatura existem trabalhos anteriores abordando esse tipo de representação. Inclusive, no próprio livro (TARBOURIECH et al., 2011) são abordados dois tipos de condição de setor: a clássica, que pode ser encontrada em Khalil (1996) e a dita generalizada que, de acordo com os autores, foi originalmente proposta em Silva e Tarbouriech (2003), Silva e Tarbouriech (2005), Tarbouriech et al. (2006).

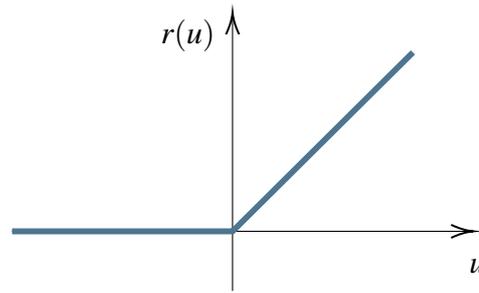
1.3.2 Usando rampas para definir saturação

Na subseção 1.3.1 foi introduzida a modelagem por não linearidade de setor. Porém, esta técnica não caracteriza especificamente o sistema saturado, mas sim toda uma classe de sistemas (PAIM, 2003). Deste modo, obter uma descrição exata da função de saturação é uma alternativa na busca por melhorias (resultados menos conservadores) nas condições de análise para sistemas sujeitos a saturação. Em Primlos e Giannelli (2001) a saturação é representada como um problema de otimização restrito, em que as condições necessárias (Karush-Kuhn-Tucker) para otimização são usadas para derivar restrições lineares e quadráticas que caracterizam a saturação. A construção dessa representação é mostrada na sequência, baseando-se no desenvolvimento de Valmorbidia (2021).

A função rampa $r(u)$, ilustrada na Figura 2, pode ser definida como

$$r(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u \leq 0, \\ u & , \quad u > 0 \end{cases} . \quad (1.24)$$

³ O símbolo \star representa blocos simétricos.

Figura 2 – Função rampa $r(u)$.

Alternativamente, $r(u)$ pode ser definida a partir das restrições envolvendo as variáveis u e $r(u)$, sendo duas desigualdades e uma igualdade, dadas por

$$r(u) \geq 0, \quad r(u) - u \geq 0, \quad r(u)(r(u) - u) = 0, \quad (1.25)$$

como pode ser verificado por inspeção escolhendo-se valores arbitrários de u .

As condições dadas em (1.25) podem ser obtidas alternativamente a partir do problema de otimização parametrizado em θ

$$\min_{r \geq 0} \frac{1}{2}(r - \theta)^2,$$

impondo-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker (necessárias para a otimalidade) (BOYD; VANDENBERGHE, 2004)

$$r - \theta - \lambda = 0, \quad \lambda r = 0, \quad r \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

ou, eliminando-se a variável $\lambda = r - \theta$,

$$r(r - \theta) = 0, \quad r \geq 0, \quad r - \theta \geq 0$$

que recaem nas condições dadas em (1.25) com $\theta = u$ e $r = r(u)$.

A função rampa pode ser utilizada para descrever outras funções, como por exemplo a função saturação, dada por

$$\text{sat}[-1, 1](u) = \begin{cases} -1 & , \quad u \leq -1 \\ u & , \quad -1 < u < 1 \\ 1 & , \quad u \geq 1 \end{cases} \quad (1.26)$$

e ilustrada na Figura 3.

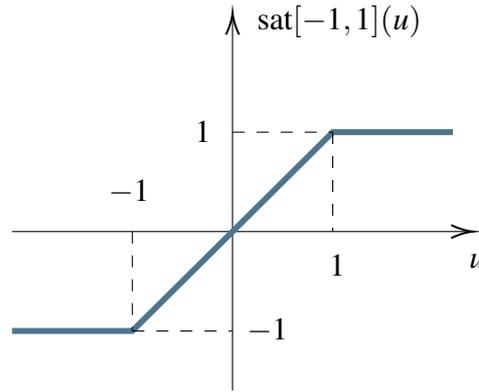


Figura 3 – Função saturação $\text{sat}[-1, 1](u)$.

A saturação pode ser reescrita em termos da função zona-morta (ilustrada na Figura 4), dada por

$$\text{dz}[-1, 1](u) = \begin{cases} u + 1 & , \quad u \leq -1 \\ 0 & , \quad -1 < u < 1 \\ u - 1 & , \quad u \geq 1 \end{cases} \quad (1.27)$$

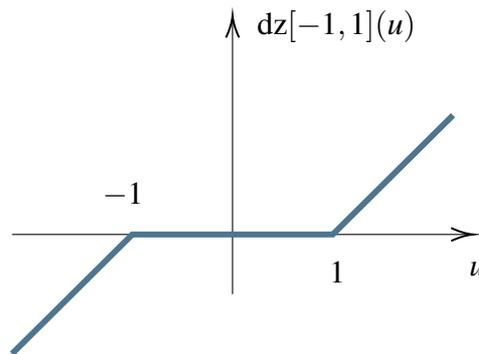


Figura 4 – Função zona morta $\text{dz}[-1, 1](u)$.

Pode-se notar que

$$\text{dz}[-1, 1](u) = r(u - 1) - r(-u - 1) \quad (1.28)$$

e, portanto, como $\text{sat}[-1, 1](u) = u - \text{dz}[-1, 1](u)$, tem-se

$$\text{sat}[-1, 1](u) = u - r(u - 1) + r(-u - 1). \quad (1.29)$$

Para um sinal saturado entre $u_{min} < 0$ e $u_{max} > 0$, tem-se

$$\text{sat}[u_{min}, u_{max}](u) = u - r(u - u_{max}) + r(-u + u_{min}). \quad (1.30)$$

1.4 Fundamentos de sistemas positivos

Esta seção apresenta alguns resultados preliminares referentes aos sistemas positivos. Para um estudo mais aprofundado veja as referências clássicas [Luenberger \(1979\)](#), [Farina](#)

e Rinaldi (2000) e também o artigo tutorial Rantzer e Valcher (2018). Além das definições de sistemas positivos, é feita a caracterização da estabilidade dessa classe de sistemas por meio da existência de uma matriz de Lyapunov diagonal definida positiva, tanto no caso de sistemas contínuos como discretos no tempo. Também são apresentadas condições que asseguram estabilidade e um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ (\mathcal{H}_2) dos sistemas positivos e o problema de síntese de um ganho de realimentação de estados (apenas estabilizante, ou estabilizante e assegurando um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ (\mathcal{H}_2)).

A seguir, são relembradas algumas definições sobre sistemas positivos definidos por uma realização de estados (FARINA; RINALDI, 2000; RANTZER, 2015).

Definição 1.1. *Um sistema linear com realização (A, B, C) é considerado externamente positivo se a saída forçada do sistema (isto é, a saída correspondente a um estado inicial nulo) é não negativa para toda função de entrada não negativa.*

Definição 1.2. *Um sistema linear com realização (A, B, C) é (internamente) positivo se os estados e as saídas são não negativos para qualquer estado inicial não negativo e entrada não negativa.*

Perceba que a Definição 1.1 requer a não negatividade da saída apenas para $x(0) = 0$, enquanto a Definição 1.2 é para todo estado inicial não negativo. Desse modo, a positividade interna implica na positividade externa, entretanto, o oposto não é verdadeiro. Além disso, segundo Farina e Rinaldi (2000), pode-se dizer que existem sistemas que são externamente positivos e não podem ser tornados internamente positivos por nenhuma mudança de base do espaço de estados.

Esta tese considera o contexto de sistemas internamente positivos, mas por questão de brevidade e consistência com a terminologia atual, são referidos apenas como sistemas positivos.

1.4.1 Sistemas contínuos

Um sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \quad (1.31)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t) \quad (1.32)$$

é positivo se, e somente se, $A \in \mathbb{M}$, $B \geq 0$, $C \geq 0$ e $D \geq 0$ (FARINA; RINALDI, 2000). As matrizes A , B , C e D possuem dimensões apropriadas, sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor de distúrbios e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saídas.

Lema 1.10 (FARINA; RINALDI, 2000). *O sistema positivo (1.31)-(1.32) é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P \in \mathbb{D}$, tal que*

$$A'P + PA \prec 0. \quad (1.33)$$

Note que a existência de uma matriz de Lyapunov diagonal definida positiva satisfazendo (1.33) assegura propriedades de robustez com respeito a perturbações no estado $x(t)$, um resultado conhecido na literatura como estabilidade absoluta ou D -estabilidade (KASZKUREWICZ; BHAYA, 1999; OLIVEIRA; PERES, 2005).

Definindo a matriz de transferência de $w(t)$ para $y(t)$ associada ao sistema positivo (1.31)-(1.32)

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \quad (1.34)$$

em que s representa a variável complexa da transformada de Laplace, pode-se enunciar o chamado *bounded real lemma* para sistemas positivos contínuos no tempo.

Lema 1.11 (RANTZER, 2016; TANAKA; LANGBORT, 2011). *O sistema positivo (1.31)-(1.32) é assintoticamente estável e $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ se, e somente se, existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P \in \mathbb{D}$, tal que*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & C' & PB \\ C & -I & D \\ B'P & D' & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (1.35)$$

Adicionalmente, se o sistema positivo (1.31)-(1.32) é assintoticamente estável, um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 pode ser computado pelo seguinte lema, adaptado do clássico Boyd *et al.* (1994).

Lema 1.12. *O sistema positivo (1.31)-(1.32) ($D = 0$) é assintoticamente estável e $\|H(s)\|_2 < \rho$ se existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P \in \mathbb{D}$, tal que*

$$\text{Tr}(B'PB) \leq \rho^2, \quad (1.36)$$

$$A'P + PA + C'C \prec 0 \quad (1.37)$$

ou se existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec W \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $W \in \mathbb{D}$, tal que

$$\text{Tr}(CWC') \leq \rho^2, \quad (1.38)$$

$$AW + WA' + BB' \prec 0. \quad (1.39)$$

No caso \mathcal{H}_2 , Lema 1.12, a condição é apenas suficiente. Além disso, é possível admitir P (ou W) com estrutura simétrica (não necessariamente diagonal), o que inclusive pode produzir limitantes melhores para a norma \mathcal{H}_2 .

1.4.1.1 Controle

Considere o sistema positivo dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t), \quad (1.40)$$

$$z(t) = Cx(t) + D_u u(t) + D_w w(t), \quad (1.41)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, respectivamente, os vetores de estados, da entrada de controle, da entrada exógena e da saída controlada. As matrizes do sistema (1.40)-(1.41) são de dimensões apropriadas.

O problema de estabilização por realimentação de estados com critério \mathcal{H}_∞ (\mathcal{H}_2 com $D_w = 0$) pode ser assim definido: Determine a lei de controle $u(t) = Kx(t)$ tal que o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A + B_u K)x(t) + B_w w(t), \quad (1.42)$$

$$z(t) = (C + D_u K)x(t) + D_w w(t), \quad (1.43)$$

cuja matriz de transferência é dada por

$$H_{mf}(s) = (C + D_u K)(sI - (A + B_u K))^{-1} B_w + D_w, \quad (1.44)$$

mantenha a positividade, seja assintoticamente estável e $\|H_{mf}(s)\|_\infty < \gamma$ ou, no caso \mathcal{H}_2 , com $D_w = 0$, $\|H_{mf}(s)\|_2 < \rho$.

Os lemas da Subseção 1.4.1 podem ser estendidos para síntese de ganhos estabilizantes. Para isso faz-se necessário empregar o Lema de Finsler ou o Lema da Projeção (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001; PIPELEERS *et al.*, 2009; XIE, 2008) para obter condições equivalentes com variáveis de folga (ou multiplicadores) e escalares. Em seguida, trocando-se A por $A + B_u K$ e C por $C + D_u K$ nas condições em que essas matrizes aparecem multiplicando à esquerda variáveis de decisão e fazendo a habitual mudança de variáveis $K = ZW^{-1}$ (BERNUSSOU *et al.*, 1989), por exemplo, produz-se o seguinte resultado para o cômputo do ganho K com limitante superior γ para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (1.42)-(1.43).

Lema 1.13. *O sistema positivo (1.40)-(1.41) é estabilizável por realimentação de estados $K = ZX^{-1}$ que garante $\|H_{mf}(s)\|_\infty < \gamma$ se existirem uma matriz de Lyapunov $0 \prec W \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $W \in \mathbb{D}$, matrizes $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e um escalar $\xi > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_u Z + X'A' + Z'B'_u & W + \xi(AX + B_u Z) - X' & X'C' + Z'D'_u & B_w \\ * & -\xi(X + X') & \xi(X'C' + Z'D'_u) & 0 \\ * & * & -I & D_w \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (1.45)$$

e, além disso, $A + B_u K$ for Metzler e $C + D_u K \geq 0$.

Uma estratégia similar à usada no Lema 1.13 poderia ser adotada para a síntese de controladores \mathcal{H}_2 por realimentação de estados (EBIHARA *et al.*, 2019). Perceba que, para o sistema positivo (1.40)-(1.41) em malha fechada atender as restrições de positividade, é necessário (adicionalmente ao exigido no problema de controle \mathcal{H}_∞ clássico) garantir que a matriz $A + B_u K$ seja Metzler e também que $C + D_u K \geq 0$. Várias abordagens têm aparecido na literatura para tratar esse problema, como por exemplo Briat (2013), Ebihara *et al.* (2014), Shen e Lam (2015), Shen e Lam (2016), Shen e Lam (2017), Tanaka e Langbort (2011), Wang e Huang

(2013). Pode-se dizer que um dos desafios do controle de sistemas positivos é estender métodos que funcionam bem para sistemas com uma entrada de controle e uma saída, por exemplo, baseados em programação linear (ARNESON; LANGBORT, 2012; AIT RAMI, 2011; ROSZAK; DAVISON, 2009), para o caso multivariável. Embora condições de síntese de controle por realimentação de estados por meio de LMIs possam ser obtidas de maneira direta, conforme mostrado nos lemas anteriores com a exigência adicional de que a matriz de Lyapunov seja diagonal, a dificuldade maior está em tratar a restrição de que o sistema em malha fechada mantenha-se positivo, o que pode ser conseguido impondo-se restrições de estrutura à matriz utilizada para computar o ganho (TANAKA; LANGBORT, 2011; EBIHARA *et al.*, 2014). No caso de sistemas precisamente conhecidos, as condições para realimentação de estados com P diagonal e sistema em malha fechada positivo de Tanaka e Langbort (2011) não impõem nenhum conservadorismo adicional, mas o mesmo não ocorre para sistemas incertos ou mesmo para o controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estados. Outras alternativas poderiam ser, por exemplo, o uso de abordagens iterativas.

1.4.2 Sistemas discretos

Um sistema linear discreto invariante no tempo dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad (1.46)$$

$$y(k) = Cx(k) + Dw(k) \quad (1.47)$$

é positivo se, e somente se, $A \geq 0$, $B \geq 0$, $C \geq 0$ e $D \geq 0$ (FARINA; RINALDI, 2000). As matrizes A , B , C e D possuem dimensões apropriadas, sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor de distúrbios e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saídas.

Lema 1.14 (FARINA; RINALDI, 2000). *O sistema positivo (1.46)-(1.47) é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P \in \mathbb{D}$, tal que*

$$A'PA - P \prec 0. \quad (1.48)$$

Definindo a matriz de transferência de $w(k)$ para $y(k)$ associada ao sistema positivo (1.46)-(1.47), com z representando a variável complexa da transformada Z ,

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D, \quad (1.49)$$

pode-se enunciar o chamado *bounded real lemma* para sistemas positivos discretos.

Lema 1.15 (RANTZER, 2016). *O sistema positivo discreto (1.46)-(1.47) é assintoticamente estável e $\|H(z)\|_\infty < \gamma$ se, e somente se existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P \in \mathbb{D}$, tal que*

$$\begin{bmatrix} P & A'P & 0 & C' \\ PA & P & PB & 0 \\ 0 & B'P & I & D' \\ C & 0 & D & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (1.50)$$

Adicionalmente, se o sistema positivo (1.46)-(1.47) é assintoticamente estável, um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 pode ser computado pelo lema a seguir, adaptado de [Boyd et al. \(1994\)](#).

Lema 1.16. *O sistema positivo discreto (1.46)-(1.47) é assintoticamente estável e $\|H(z)\|_2 < \rho$ se existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P \in \mathbb{D}$, tal que*

$$\text{Tr}(B'PB + D'D) \leq \rho^2, \quad (1.51)$$

$$A'PA - P + C'C \prec 0 \quad (1.52)$$

ou se existir uma matriz de Lyapunov $0 \prec W \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $W \in \mathbb{D}$, tal que

$$\text{Tr}(CWC' + DD') \leq \rho^2, \quad (1.53)$$

$$AWA' - W + BB' \prec 0. \quad (1.54)$$

Análogo ao caso contínuo, a condição \mathcal{H}_2 para sistemas positivos discretos é apenas suficiente. Portanto, o uso de P (ou W) simétrica (não necessariamente diagonal) pode produzir limitantes melhores para a norma \mathcal{H}_2 .

1.4.2.1 Controle

Um primeiro problema de controle relacionado à estabilização de sistemas positivos discretos pode ser formulado da seguinte forma. Dado um sistema positivo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + B_u u(k), \quad (1.55)$$

encontre uma lei de controle $u(k) = Kx(k)$ tal que: i) $A + B_u K$ seja Schur estável (ou seja, todos os autovalores estejam contidos no interior do círculo unitário); ii) $A + B_u K \geq 0$ (isto é, o sistema em malha fechada seja não negativo).

Uma solução para esse problema pode ser construída a partir do Lema 1.14, usando complemento de Schur, com $W = P^{-1}$ e trocando-se A' por A .

Lema 1.17. *Se existirem uma matriz $0 \prec W \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $W \in \mathbb{D}$, e $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} W & AW + B_u Z \\ WA' + Z' B'_u & W \end{bmatrix} \succ 0, \quad AW + B_u Z \geq 0, \quad (1.56)$$

então $K = ZW^{-1}$ assegura que a matriz de malha fechada $A + B_u K$ é não negativa e Schur estável.

Demonstração. Como $0 \prec W \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $W \in \mathbb{D}$, a restrição $(A + B_u ZW^{-1})W \geq 0$ assegura a não negatividade da matriz de malha fechada. Aplicando o complemento de Schur, verifica-se que $A + B_u ZW^{-1}$ satisfaz as condições do Lema 1.14 com $P = W^{-1} \in \mathbb{D}$. \square

De maneira similar, pode-se formular o problema de controle \mathcal{H}_∞ de sistemas positivos discretos. Considere um sistema positivo discreto dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + B_u u(k) + B_w w(k), \quad (1.57)$$

$$z(k) = Cx(k) + D_u u(k) + D_w w(k), \quad (1.58)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, respectivamente, os vetores de estados, da entrada de controle, da entrada exógena e da saída controlada. As matrizes do sistema (1.57)-(1.58) são de dimensões apropriadas.

O problema de controle \mathcal{H}_∞ (\mathcal{H}_2) por realimentação de estados pode ser definido como a busca por uma lei de controle $u(k) = Kx(k)$ que produza um sistema em malha fechada

$$x(k+1) = (A + B_u K)x(k) + B_w w(k), \quad (1.59)$$

$$z(k) = (C + D_u K)x(k) + D_w w(k) \quad (1.60)$$

com $A + B_u K \geq 0$ Schur estável, $C + D_u K \geq 0$ e $\|H_{mf}(z)\|_\infty < \gamma$ ou, no caso \mathcal{H}_2 , $\|H_{mf}(z)\|_2 < \rho$.

Uma extensão do Lema 1.15 com variáveis de folga e escalares pode ser obtida seguindo as linhas de [Morais et al. \(2014\)](#) para o cômputo de um controlador \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados para o sistema positivo (1.46)-(1.47).

Lema 1.18. *Existe um ganho por realimentação de estados $K = ZX^{-1}$ que estabiliza o sistema positivo discreto (1.57)-(1.58) e garante $\|H_{mf}(z)\|_\infty < \gamma$ se existirem uma matriz de Lyapunov $0 \prec W \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $W \in \mathbb{D}$, matrizes $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e um escalar $\xi \in (-1, 1)$ tais que*

$$\begin{bmatrix} \xi AX + \xi B_u Z + \xi X' A' + \xi Z' B'_u - W & * & * & * \\ X' A' + Z' B'_u - \xi X & W - X - X' & * & * \\ \xi CX + \xi D_u Z & CX + D_u Z & -\gamma^2 I & * \\ 0 & B'_w & D'_w & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (1.61)$$

com $A + B_u K \geq 0$ e $C + D_u K \geq 0$.

Um método similar poderia ser adotado para a síntese de controladores \mathcal{H}_2 por realimentação de estados para sistemas discretos positivos ([EBIHARA et al., 2018](#)). A principal dificuldade do problema de síntese para sistemas discretos positivos vem do fato de que as matrizes de malha fechada devem ser todas não negativas (no caso contínuo, é preciso garantir que a matriz $A + B_u K$ seja Metzler, e também que $C + D_u K \geq 0$). Dentre os trabalhos na literatura que tratam esse problema, pode-se citar [Briat \(2013\)](#), [Ebihara et al. \(2014\)](#), [Shen e Lam \(2015\)](#), [Shen e Lam \(2016\)](#), [Shen e Lam \(2017\)](#), [Tanaka e Langbort \(2011\)](#), [Wang e Huang \(2013\)](#) que empregam programação linear ou programação semidefinida.

1.5 Testes de copositividade

Quando, para valores não negativos de x , a forma quadrática $x' M x$ assume apenas valores não negativos, a matriz real M é dita *copositiva*.

Nas condições de análise de estabilidade global, propostas no Capítulo 2, é necessário verificar a copositividade de uma matriz M . Desse modo, nesta seção são apresentados os testes e a definição da copositividade para uma matriz real.

Definição 1.3 (VÄLIAHO, 1986). *Uma matriz $M = M' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é copositiva se $x'Mx \geq 0$ para qualquer $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Uma matriz copositiva é denominada estritamente copositiva se $x \geq 0$ e $x'Mx = 0$ implica em $x = 0$.*

Embora, de acordo com Parrilo (2000), verificar a copositividade de uma matriz seja um problema co-NPC (co-NP-completo⁴, consulte Corman *et al.* (2009) como referência sobre complexidade computacional), condições suficientes podem ser estabelecidas em termos de testes baseados em programação semidefinida para determinar a copositividade de matrizes reais. A seguir, são apresentadas três destes testes.

Lema 1.19 (PARRILO, 2000). *Uma matriz $M = M' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M = [m_{ij}]$, é copositiva se $m_{ij} \geq 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$.*

Lema 1.20 (PARRILO, 2000). *Se existir uma matriz $0 \preceq P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $M_0 = M_0' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_0 = [m_{0ij}]$, com $m_{0ij} \geq 0$, então a matriz $M = P + M_0$ é copositiva.*

Lema 1.21 (PARRILO, 2000). *Se existir uma solução factível para o sistema de equações e desigualdades dado por (programação linear)*

$$\begin{aligned} M - \Omega^i &\geq 0, \\ \omega_{ii}^i &= 0, \\ \omega_{jj}^i + \omega_{ji}^j + \omega_{ij}^j &= 0, \quad i \neq j, \\ \omega_{jk}^i + \omega_{ki}^j + \omega_{ij}^k &\geq 0, \quad i \neq j \neq k, \end{aligned} \tag{1.62}$$

com $\Omega^i = \Omega^{i'} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, n$, $\Omega^i = [\omega_{jk}^i]$, então M é copositiva.

Como mostrado em Parrilo (2000), as condições dos lemas 1.19 e 1.20 são equivalentes e, embora o Lema 1.21 seja menos conservador do que os anteriores, a complexidade da resolução é maior, visto que requer mais variáveis e restrições.

1.6 Lemas auxiliares

Os lemas apresentados nesta seção são extensivamente utilizados para manipular condições LMIs, possibilitando, por exemplo, a inclusão ou exclusão de variáveis, a separação da matriz de Lyapunov em relação às matrizes do sistema e linearizações. Na sequência, o complemento de Schur, empregado na conversão de restrições convexas com desigualdades não lineares em LMIs (BOYD *et al.*, 1994), é reproduzido.

⁴ Problemas de decisão que são complementares aos problemas da classe NP-completo.

Lema 1.22 Complemento de Schur (BOYD *et al.*, 1994). *Considere as matrizes $Q = Q'$, $R = R'$ e S com dimensões apropriadas. Então, a LMI*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \succ 0 \quad (1.63)$$

é equivalente a

$$R \succ 0, \quad Q - SR^{-1}S' \succ 0. \quad (1.64)$$

Em outras palavras, as desigualdades (1.64), que incluem uma não linearidade, podem ser representadas como a LMI (1.63).

A seguir, apresenta-se o lema da Projeção, muito empregado para isolar a matriz de Lyapunov em relação às matrizes do sistema e obtenção de condições equivalentes, eliminando ou inserindo variáveis.

Lema 1.23 Lema da Projeção (GAHINET; APKARIAN, 1994; SKELTON *et al.*, 1998). *Dadas as matrizes W e V com n colunas e $\Psi = \Psi' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, existe uma matriz Θ tal que*

$$\Psi + W'\Theta V + V'\Theta'W \prec 0 \quad (1.65)$$

se, e somente se,

$$(W^\perp)'\Psi W^\perp \prec 0, \quad (1.66)$$

$$(V^\perp)'\Psi V^\perp \prec 0, \quad (1.67)$$

em que W^\perp e V^\perp são matrizes arbitrárias cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de W e V .

Por fim, tem-se o lema de Finsler, descrito a seguir, que também é aplicado para obter condições equivalentes.

Lema 1.24 Lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001). *Considere $\vartheta \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, em que $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$ e \mathcal{B}^\perp é uma base para o espaço nulo de \mathcal{B} , ou seja, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$. Então, as condições a seguir são equivalentes:*

1. $\vartheta' \mathcal{Q} \vartheta, \forall \vartheta \neq 0 : \mathcal{B} \vartheta = 0$;
2. $\mathcal{B}^\perp' \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp \prec 0$;
3. $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}' \mathcal{B} \prec 0$;
4. $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' \prec 0$.

Capítulo 2

Análise de Sistemas Positivos Saturados

2.1 Introdução

Como retratado anteriormente, os sistemas positivos estão presentes em diversas aplicações de engenharia como, por exemplo, redes de tráfego, de energia e de processos químicos (FARINA; RINALDI, 2000; RANTZER, 2015). Paralelamente, um fenômeno comumente encontrado em sistemas de controle industrial é a saturação nos atuadores, pois todo atuador possui limitação física (YIN *et al.*, 2018). Porém, independentemente da saturação ser originada por restrições advindas de limitações tecnológicas ou de requisitos de segurança, a análise e o projeto de um sistema que contém não linearidades do tipo saturação são problemas de difícil solução teórica, e que atraíram muitos esforços de pesquisa nas últimas décadas. Vale ressaltar que a saturação no atuador pode degradar o desempenho e até causar a instabilidade dos sistemas (HU; LIN, 2001; TARBOURIECH *et al.*, 2011; YIN *et al.*, 2018).

De acordo com Tarbouriech *et al.* (2011) existem três abordagens principais para lidar com os problemas de saturação. A primeira usa técnicas de controle ótimo para sintetizar um controlador que contenha as restrições de saturação, com condições frequentemente formuladas em termos de equações de Riccati e LMIs parametrizadas. Na segunda abordagem projeta-se um compensador *anti-windup*¹ para compensar o controlador projetado sem considerar a saturação. Por fim, o último método corresponde ao emprego das estratégias de controle preditivo de modelo.

Além do método a ser utilizado é possível explorar diferentes maneiras de modelar o termo de saturação. Dentre as representações existentes, três são descritas a seguir conforme Tarbouriech *et al.* (2011). A representação inicial é a modelagem politópica que viabiliza o uso de técnicas de controle robusto para tratar problemas de estabilidade e estabilização. A caracterização seguinte é a modelagem por não linearidade de setor, que consiste em reescrever o sistema em malha fechada e substituir a saturação por uma não linearidade de zona morta.

¹ O termo *windup* descreve diferenças entre a saída e a entrada do atuador ocasionadas quando o sinal de controle atinge um limite físico (saturação).

Assim, as condições do setor podem ser usadas na busca por condições de estabilidade e estabilizabilidade mais relaxadas. Por fim, a terceira representação envolve a divisão do espaço de estados em regiões de saturação. Dentro de cada uma dessas regiões, a dinâmica do sistema é descrita por um sistema linear afim. Isso permite que os problemas sejam tratados com ferramentas de sistemas híbridos.

Diferentemente das técnicas mencionadas, neste capítulo utiliza-se a representação da saturação em termos da função rampa (PRIMLOS; GIANNELLI, 2001) com o intuito de explorar a não negatividade característica dessa função e formular condições de estabilidade que explorem a copositividade de matrizes. Atualmente é possível testar a copositividade de uma matriz utilizando relaxações LMIs com precisão arbitrária. Embora seja possível considerar diferentes tipos de funções de Lyapunov, como poliedrais, do tipo Lur'e, quadrática por partes (GROFF *et al.*, 2023), neste trabalho, por simplicidade, apenas funções quadráticas de Lyapunov são consideradas para análise de estabilidade. Ademais, o uso de funções quadráticas permite uma comparação mais justa com os métodos baseados nas condições de setor, o que evidencia as melhorias obtidas pelo uso das condições propostas. Essas melhorias são ilustradas por meio de experimentos numéricos envolvendo sistemas positivos com diferentes ordens e número de entradas.

2.2 Saturação nos atuadores

Na sequência é apresentado um estudo da estabilidade global de sistemas com saturação nos atuadores explorando a representação da função de saturação em termos da função rampa. O objetivo é obter resultados menos conservadores do que os baseados na condição de setor generalizada (lemas 1.8 e 1.9), que consideram uma família de não linearidades, ou seja, todas as que possam ocorrer no setor.

2.2.1 Definição do problema

Considere o sistema linear positivo

$$\delta[x] = Ax + B\text{sat}[u_{min}, u_{max}](u), \quad (2.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa o vetor de estados e $u \in \mathbb{R}$ o sinal de controle² sujeito a saturação. Considerando a lei de controle por realimentação de estados $u = Kx$, obtém-se o sistema em malha fechada

$$\delta[x] = Ax + B\text{sat}[u_{min}, u_{max}](Kx) \quad (2.2)$$

que pode ser reescrito em termos da função rampa

$$\delta[x] = Ax + B(Kx - r(Kx - u_{max}) + r(-Kx + u_{min})) \quad (2.3)$$

² A apresentação é feita para uma entrada por simplicidade, sendo imediata a extensão para trabalhar com um número arbitrário de sinais de entrada em que $u \in \mathbb{R}^{n_u}$.

desde que as restrições (1.25) sejam satisfeitas.

Definindo

$$u_1 = Kx - u_{max}, \quad u_2 = -Kx + u_{min}, \quad (2.4)$$

tem-se

$$\delta[x] = Ax + B(Kx - r(u_1) + r(u_2)) \quad (2.5)$$

bem como, as desigualdades lineares

$$r(u_1) \geq 0, \quad r(u_1) - u_1 \geq 0, \quad r(u_2) \geq 0, \quad r(u_2) - u_2 \geq 0 \quad (2.6)$$

e as igualdades quadráticas

$$r(u_1)(r(u_1) - u_1) = 0, \quad r(u_2)(r(u_2) - u_2) = 0. \quad (2.7)$$

Empregando a teoria de Lyapunov é possível verificar a estabilidade global do sistema em malha fechada (2.5). Para tal, $r(u_1)$ e $r(u_2)$ devem satisfazer as restrições que descrevem a função rampa, ou seja, as desigualdades (2.6) e as igualdades (2.7).

2.2.2 Caso contínuo no tempo

O teorema abaixo apresenta condições LMIs para examinar a estabilidade global do sistema em malha fechada (2.2) para o caso de tempo contínuo.

Teorema 2.1. *Se existirem matrizes $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $T \in \mathbb{R}^{2n_u \times 2n_u}$, $T \in \mathbb{D}$, uma matriz copositiva $M = M' \in \mathbb{R}^{(4n_u + n_x + 1) \times (4n_u + n_x + 1)}$ e um escalar positivo ε , tais que*

$$Q_v + Q_h + Q_g \preceq 0 \quad (2.8)$$

seja satisfeita, sendo

$$Q_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A'P + PA + \text{He}(PBK) + \varepsilon I & -PB & PB \\ 0 & -B'P & 0 & 0 \\ 0 & B'P & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$Q_h = F'TG + G'TF, \quad (2.10)$$

$$Q_g = \begin{bmatrix} V & E & F' & G' \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} V' \\ E' \\ F \\ G \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n_u + n_x + 1) \times 1}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_u \times (2n_u + n_x + 1)}, \quad (2.12)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n_u+n_x+1) \times n_x}, \quad G = \begin{bmatrix} u_{max} & -K & I & 0 \\ -u_{min} & K & 0 & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_u \times (2n_u+n_x+1)}, \quad (2.13)$$

então a origem do sistema positivo em malha fechada de tempo contínuo (2.2) é globalmente exponencialmente estável.

Demonstração. Seja $v(x) = x'Px$ uma candidata a função Lyapunov, para $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, implicando que

$$x'Px > 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (2.14)$$

Uma vez que (2.8) é válida, a seguinte forma quadrática é satisfeita

$$\xi'(Q_v + Q_h + Q_g)\xi \leq 0, \quad (2.15)$$

sendo $\xi' = \begin{bmatrix} 1 & x' & r(u_1)' & r(u_2)' \end{bmatrix}$. Observe que

$$\xi'Q_v\xi = \dot{v}(x) + \varepsilon x'x, \quad \varepsilon > 0.$$

Além disso, para $r(u_1)$ e $r(u_2)$ satisfazendo (2.6) e (2.7), tem-se $\xi'Q_h\xi = 0$ e $\xi'Q_g\xi \geq 0$, implicando em

$$\dot{v}(x) \leq -\xi'Q_g\xi - \varepsilon x'x, \quad (2.16)$$

o que conclui a prova. \square

O Teorema 2.1 pode ser estendido para abranger sistemas lineares sujeitos a saturação, não necessariamente positivos, como segue.

Corolário 2.1. *Se existirem matrizes $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $T \in \mathbb{R}^{2n_u \times 2n_u}$, $T \in \mathbb{D}$, uma matriz copositiva $M = M' \in \mathbb{R}^{(4n_u+1) \times (4n_u+1)}$ e um escalar positivo ε , tais que (2.8) seja satisfeita, com Q_v definida por (2.9), Q_h descrita por (2.10) e*

$$Q_g = \begin{bmatrix} V & F' & G' \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} V' \\ F \\ G \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

com V , F e G definidas em (2.12) e (2.13), então a origem do sistema em malha fechada de tempo contínuo (2.2) (não necessariamente positivo) é globalmente exponencialmente estável.

Perceba que no Corolário 2.1 a dimensão da matriz copositiva M é menor do que no Teorema 2.1, pois no teorema os estados são incorporados aos vetores que multiplicam M .

e os propostos no Teorema 2.1 e no Corolário 2.1, empregando as relaxações de copositividade definidas pelos lemas 1.19 e 1.21 na matriz M , presente em (2.11) e (2.17). Para tal, é criada uma base de dados composta por sistemas positivos a tempo contínuo³ de modo que os sistemas em malha aberta (estáveis) e em malha fechada (com ganhos conhecidos) sejam estabilizáveis para uma P comum (situação em que a abordagem do Lema 1.8 é necessária e suficiente para o caso SISO). A base possui 200 sistemas para cada uma das combinações em que $N = 1$ (sistemas precisamente conhecidos), $n_x = 2, \dots, 5$ e $n_u = 2, \dots, 5$, com $n_u \leq n_x$.

A Tabela 1, mostrada a seguir, apresenta as soluções obtidas para o caso contínuo no tempo. Em relação aos parâmetros adotados, os valores $u_{max_i} = 1$, $u_{min_i} = -1$, $i = 1, \dots, n_u$ foram escolhidos por simplicidade (poderiam ser arbitrários). A tolerância adotada na resolução das LMIs e nas restrições elemento a elemento é denotada por tol . Finalmente, $\varepsilon = 10^{-3}$, presente no elemento (2,2) da matriz Q_v , foi escolhido de modo a garantir que as desigualdades sejam atendidas de modo estrito.

Tabela 1 – Resultados da estabilidade global de sistemas positivos contínuos no tempo com ordem n_x e entradas n_u comparando o método do Lema 1.8 (designado por S_1), com os propostos no Teorema 2.1 ($T1$) e no Corolário 2.1 ($C1$). São mostrados os números de sistemas certificados como estáveis em um total de 200 para cada combinação (n_x, n_u) . As abordagens propostas utilizam as relaxações de copositividade apresentadas nos lemas 1.19 ($L2$) e 1.21 ($L4$). O tempo de simulação é definido por t , em segundos. Além disso, adotam-se os seguintes parâmetros: $u_{max_i} = 1$, $u_{min_i} = -1$, $i = 1, \dots, n_u$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $tol = 10^{-7}$.

n_x	n_u	S_1	$t(s)$	$C1_{L2}$	$t(s)$	$C1_{L4}$	$t(s)$	$T1_{L2}$	$t(s)$	$T1_{L4}$	$t(s)$
2	2	22	24.7	35	27.2	98	186.2	49	37.7	102	290.4
3	2	20	48.1	49	52.6	110	366.6	99	74.6	115	550.4
	3	2	71.6	6	80.9	50	1001.1	25	122.5	55	1601.9
4	2	59	94.8	99	108.3	148	1164.1	144	161.6	149	1817.5
	3	2	118	7	138.3	72	1818.8	54	212.8	73	2928.1
	4	0	142.1	3	173.2	35	3337.5	14	282.4	41	5969.7
5	2	75	165.4	104	204.8	154	3569.4	152	325.8	154	6243.3
	3	7	188.9	37	237.3	116	4268	109	381.9	118	7173.8
	4	0	212.5	1	272.8	37	6078.8	14	455.5	43	11028.7
	5	0	235.8	1	313.2	16	10088.2	10	554.9	20	19321.5
TOTAL		9.3%	0h36	17.1%	0h44	36.9%	9h25	33.5%	1h12	43.5%	16h21

Repare que na Tabela 1 as soluções obtidas com $T1$ e $C1$ são menos conservadoras quando comparadas com as de S_1 . Ademais, note que os resultados utilizando o Teorema 2.1, específico para o caso de sistemas positivos, consegue verificar a estabilidade global de uma quantidade maior de sistemas do que o Corolário 2.1. Entretanto, perceba também que há um aumento significativo no tempo de simulação, visto que a ordem da matriz copositiva a ser testada, M , é maior no Teorema 2.1, o que em especial para o Lema 1.21, influencia diretamente na quantidade de restrições do problema.

³ Disponível em <https://www.fee.unicamp.br/profs/ricfow/programs/positiveSaturated_c.zip>

Exemplo 2.2. Neste segundo experimento numérico aborda-se o caso discreto⁴ no tempo, com uma base de sistemas gerada com o mesmo critério do caso contínuo (uma matriz de Lyapunov $P = P' \succ 0$ comum entre o sistema em malha aberta — estável — e o sistema em malha fechada). Portanto, a comparação é realizada entre o Lema 1.9, o Teorema 2.2 e o Corolário 2.2, e novamente adotam-se as relaxações de copositividade dos lemas 1.19 e 1.21.

A quantidade de sistemas positivos discretos no tempo com estabilidade global verificada e o tempo de simulação necessário para isto são expostos na Tabela 2. Os parâmetros utilizados para a simulação são os mesmos do caso contínuo, isto é, $u_{max_i} = 1$, $u_{min_i} = -1$, $i = 1, \dots, n_u$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $tol = 10^{-7}$.

Tabela 2 – Resultados da estabilidade global de sistemas positivos discretos no tempo com ordem n_x e entradas n_u comparando o método do Lema 1.9 (designado por S_2), com os propostos no Teorema 2.2 (T_2) e no Corolário 2.2 (C_2). São mostrados os números de sistemas certificados como estáveis em um total de 200 para cada combinação (n_x, n_u) . As abordagens propostas utilizam as relaxações de copositividade apresentadas nos lemas 1.19 (L_2) e 1.21 (L_4). O tempo de simulação é definido por t , em segundos. Além disso, adotam-se os seguintes parâmetros: $u_{max_i} = 1$, $u_{min_i} = -1$, $i = 1, \dots, n_u$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $tol = 10^{-7}$.

n_x	n_u	S_2	$t(s)$	C_{2L_2}	$t(s)$	C_{2L_4}	$t(s)$	T_{2L_2}	$t(s)$	T_{2L_4}	$t(s)$
2	2	32	24.2	61	28.9	109	162.1	97	37.3	110	210.1
3	2	43	46.1	72	55.1	133	318.6	114	75.4	131	436.6
	3	12	67.9	35	83.3	76	847.4	54	124.5	75	1336.8
4	2	64	89.7	93	111.3	146	1011.1	128	165.3	144	1601.5
	3	3	111.5	41	140.8	100	1560.5	73	217.6	99	2598.9
	4	3	134.4	9	174.2	54	3110.1	24	288.3	51	5609.4
5	2	88	156.6	117	206.1	165	3317.1	148	337.8	161	5905.8
	3	13	178.8	57	239.8	129	3902.5	99	395.2	120	6979.8
	4	1	200.9	14	275.9	75	5538.5	28	468.9	57	10760.9
	5	0	223.1	2	315.9	29	9339.5	12	563.9	27	19551.5
TOTAL		12.9%	0h34	25%	0h45	50.8%	8h08	38.8%	1h14	48.7%	15h27

Na Tabela 2, T_2 e C_2 apresentam resultados menos conservadores em relação a S_2 . As soluções associadas ao Teorema 2.2, específico para o caso de sistemas positivos, são mais vantajosas que as do Corolário 2.2 apenas quando associadas à relaxação mais simples dada no Lema 1.19. Novamente, o tempo de simulação referente ao Teorema 2.2 é maior, pois, assim como no caso contínuo, a dimensão da matriz copositiva, M , é maior quando comparada à do Corolário 2.2.

⁴ A base de dados para o caso discreto no tempo pode ser vista em <https://www.fee.unicamp.br/profs/ricfow/programs/positiveSaturated_d.zip>

2.2.5 Conclusões

Os métodos propostos em ambos os casos, contínuo e discreto, mostraram-se menos conservadores quando comparados com as condições apresentadas nos lemas 1.8 e 1.9. O emprego dos teoremas 2.1 e 2.2 em oposição aos corolários 2.1 e 2.2 na análise de sistemas positivos mostra-se vantajoso principalmente ao utilizar a relaxação descrita no Lema 1.21, ao preço do aumento da complexidade computacional.

Capítulo 3

Controle de Sistemas Positivos

3.1 Introdução

As restrições presentes no projeto de controladores não advêm apenas dos critérios de desempenho ou de perturbações externas, mas também podem estar atreladas às características inerentes ao próprio sistema tratado, como é o caso dos sistemas positivos. Nestes, existe a restrição de positividade intrínseca ao sistema em malha fechada que, inclusive, é um aspecto que dificulta a síntese (EBIHARA *et al.*, 2018). Na estabilização por realimentação de estados, esse problema é comumente contornado pelo emprego de uma estrutura diagonal na matriz de Lyapunov (ou na matriz quadrada utilizada para recuperar o ganho) de modo que a positividade do sistema em malha fechada possa ser indiretamente garantida pela mudança usual de variáveis, provendo um ganho estabilizante por meio de um procedimento convexo de otimização. Para tal, vale-se do resultado bem estabelecido de que sistemas positivos assintoticamente estáveis admitem uma matriz de Lyapunov com estrutura diagonal (FARINA; RINALDI, 2000). Esta estratégia pode ser estendida também para lidar com o problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados (TANAKA; LANGBORT, 2011; EBIHARA *et al.*, 2014; RANTZER, 2016) sem perder a convexidade, produzindo condições necessárias e suficientes para sistemas precisamente conhecidos (TANAKA; LANGBORT, 2011). Todavia, na realimentação de saída, ou quando incertezas afetam a planta, as condições \mathcal{H}_∞ existentes para sistemas positivos são apenas suficientes. Não obstante, no caso \mathcal{H}_2 , mesmo para sistemas precisamente conhecidos e no controle por realimentação de estados, apenas soluções subótimas são obtidas (DEAECTO; GEROMEL, 2017; EBIHARA, 2018; EBIHARA *et al.*, 2019), uma vez que a matriz de Lyapunov, restrita para garantir a positividade, desempenha um papel importante nos gramianos de controlabilidade e de observabilidade associados à norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada. Ainda, de acordo com Ebihara *et al.* (2018), é possível que o controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estados com restrições de positividade seja um problema não convexo.

No que concerne ao problema de síntese por realimentação de saída, mesmo o caso que abrange sistemas lineares sem restrição de positividade é visto como um problema de difí-

cil solução (BLONDEL; TSITSIKLIS, 2000). Ademais, no âmbito de sistemas positivos, Bhat-tacharyya e Patra (2018) afirmam que são poucas as abordagens propostas para este tipo de controle na literatura.

Os trabalhos citados nesta seção investigam, em sua maioria, sistemas positivos precisamente conhecidos e o controle por realimentação de estados, às vezes incluindo critérios de desempenho como as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 . Entretanto, conforme mencionado no primeiro capítulo, os sistemas positivos estão presentes em uma vasta gama de problemas práticos, na qual é inevitável que fontes de incertezas afetem o comportamento do sistema, seja devido a limitações de aquisição de dados, flutuações de parâmetros, perturbações externas ou outros efeitos (ZHOU; DOYLE, 1998). Portanto, é importante levar em consideração a presença de incertezas no modelo e fornecer procedimentos de síntese para o controle robusto de sistemas positivos.

Dentre as diversas formas de modelar ou descrever as incertezas, neste capítulo são abordados os sistemas lineares positivos afetados por parâmetros invariantes no tempo pertencentes a um polítopo e os sistemas lineares positivos sujeitos a incertezas intervalares. No segundo caso, as condições disponíveis geralmente são conservadoras ou exigem um enorme esforço computacional se for realizada uma conversão para a representação politópica. No entanto, ao lidar com sistemas positivos intervalares, é necessário apenas testar certos limites do domínio de incerteza (SHU *et al.*, 2008). Além de facilitar o desenvolvimento das condições de estabilidade e síntese, essa propriedade também reduz drasticamente a carga computacional. Conforme afirmado no célebre livro de Luenberger (LUENBERGER, 1979): *apenas o conhecimento de que o sistema é positivo permite fazer algumas afirmações bastante fortes sobre seu comportamento: essas afirmações sendo verdadeiras não importa o valor que os parâmetros possam assumir* (traduzido pela autora da tese). Ainda em relação aos sistemas intervalares positivos, existem resultados para realimentação de estados (ZAIDI *et al.*, 2015), observadores positivos (ZAIDI *et al.*, 2015; SHU *et al.*, 2008) e controladores dinâmicos por realimentação de saída (SHU *et al.*, 2008).

Neste capítulo, são abordados: *i*) o problema de síntese de um ganho estático por realimentação de saída que assegura um custo garantido \mathcal{H}_2 para sistemas lineares positivos em tempo contínuo com parâmetros incertos pertencentes a um polítopo; e *ii*) o projeto de um controlador dinâmico por realimentação de saída de ordem completa para sistemas lineares positivos sujeitos a incertezas intervalares, em tempo contínuo e discreto. No caso dos sistemas intervalares, a técnica proposta é inspirada no método de Shu *et al.* (2008), que considera a positividade do sinal de erro (definido como a diferença entre os estados da planta e do controlador) para projetar o controlador dinâmico de ordem completa por realimentação de saída.

Como contribuições, são propostas condições suficientes dadas em termos de LMIs para ambos os controladores, estático e dinâmico, que são resolvidas em termos de métodos iterativos, seguindo a metodologia de projeto sugerida em Felipe e Oliveira (2021). Deste modo, uma estratégia para relaxar as condições de síntese e as escolhas iniciais viáveis para o procedi-

mento iterativo, visando reduzir o conservadorismo do método, são apresentadas. Finalmente, apresentam-se os exemplos numéricos que ilustram a eficácia das técnicas propostas.

3.2 Controle por realimentação estática de saída

Na sequência, apresenta-se uma abordagem para o projeto de controle \mathcal{H}_2 para sistemas lineares positivos em tempo contínuo com parâmetros incertos pertencentes a um politopo. A abordagem para sistemas discretos no tempo não é apresentada, pois os problemas de estabilização e de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares positivos discretos no tempo com parâmetros variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter-Varying — LPV*) estão presentes na dissertação de mestrado da autora (SPAGOLLA, 2019).

Os resultados do método proposto são ilustrados por meio de exemplos numéricos. Um primeiro exemplo evidencia o melhor desempenho da técnica proposta quando comparada com outros métodos da literatura no caso do controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estados para sistemas lineares positivos de tempo contínuo precisamente conhecidos, um problema que se acredita ser não convexo. No mesmo exemplo, para demonstrar a versatilidade do método, controladores \mathcal{H}_2 descentralizados por realimentação de saída são obtidos pela imposição de restrições estruturais sobre os ganhos. Um segundo exemplo, relacionado com o controle \mathcal{H}_2 , destaca o potencial do método para tratar sistemas incertos.

3.2.1 Definição do problema

Considere o sistema linear incerto

$$\begin{cases} \delta[x] = A(\alpha)x + B(\alpha)u + E(\alpha)w, \\ z = C_z(\alpha)x + D_z(\alpha)u + E_z(\alpha)w, \\ y = C_y(\alpha)x + E_y(\alpha)w, \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ a entrada exógena, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída controlada e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída medida. As matrizes do espaço de estados possuem dimensões apropriadas e são incertas, como definido em (1.2).

Nesta seção, o problema consiste em projetar uma lei de controle robusto por realimentação estática de saída (independente de parâmetros) dada por $u = Ly$ para o sistema (3.1) tal que o sistema em malha fechada

$$\begin{cases} \delta[x] = A_{cl}(\alpha)x + B_{cl}(\alpha)w, \\ z = C_{cl}(\alpha)x + D_{cl}(\alpha)w \end{cases} \quad (3.2)$$

com

$$\begin{aligned} A_{cl}(\alpha) &= A(\alpha) + B(\alpha)LC_y(\alpha), & B_{cl}(\alpha) &= E(\alpha) + B(\alpha)LE_y(\alpha), \\ C_{cl}(\alpha) &= C_z(\alpha) + D_z(\alpha)LC_y(\alpha), & D_{cl}(\alpha) &= E_z(\alpha) + D_z(\alpha)LE_y(\alpha), \end{aligned} \quad (3.3)$$

seja assintoticamente estável e positivo, conforme caracterizado no seguinte lema (FARINA; RINALDI, 2000).

Lema 3.1. *O sistema contínuo (3.2) é (internamente) positivo se, e somente se, a matriz $A_{cl}(\alpha) \in \mathbb{M}$, $B_{cl}(\alpha) \geq 0$, $C_{cl}(\alpha) \geq 0$ e $D_{cl}(\alpha) \geq 0$, ou seja, todos os elementos de $B_{cl}(\alpha)$, $C_{cl}(\alpha)$ e $D_{cl}(\alpha)$ são não negativos para todo $\alpha \in \Lambda$.*

Além de assegurar a positividade e a estabilidade assintótica, é possível satisfazer algum critério de desempenho como, por exemplo, impor limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Para tal, no sistema de tempo contínuo (3.1), tem-se $A(\alpha) \in \mathbb{M}$, $E(\alpha) \geq 0$, $C_z(\alpha) \geq 0$ e $E_z(\alpha) \geq 0$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Observe que, como Λ é um conjunto convexo, as restrições se verificam para todo $\alpha \in \Lambda$ se, e somente se, as mesmas propriedades são mantidas nos vértices do polítopo (1.2). Finalmente, no controle \mathcal{H}_2 , as matrizes $E_z(\alpha)$ e $E_y(\alpha)$ são consideradas nulas para garantir valores finitos do custo garantido \mathcal{H}_2 .

3.2.2 Caso contínuo no tempo

O teorema a seguir apresenta condições LMIs dependentes de parâmetros suficientes que, se satisfeitas, resultam em um ganho estático por realimentação de saída que garante a positividade e a estabilidade assintótica com um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema (3.1) (com $E_z(\alpha) = E_y(\alpha) = 0$) em malha fechada.

Teorema 3.1. *Sejam as matrizes $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ com $F_2(\alpha)$ de posto completo, e um escalar $\xi > 0$, dados. Se existirem matrizes dependentes de parâmetros $0 \prec P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{(3n_x+n_z) \times (4n_x)}$, escalares reais δ e $\rho > 0$, e uma matriz independente de parâmetros $L \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ tais que*

$$A_{cl}(\alpha) + \delta I \geq 0, \quad C_{cl}(\alpha) \geq 0, \quad (3.4)$$

$$\text{Tr}(E(\alpha)'P(\alpha)E(\alpha)) < \rho^2, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)' \prec 0 \quad (3.6)$$

sejam válidas para todo $\alpha \in \Lambda$, em que $\mathcal{B}(\alpha) = [F_1(\alpha) \ \xi F_1(\alpha) \ 0 \ F_2(\alpha)]$,

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star \\ P(\alpha) & 0 & \star & \star \\ C_{cl}(\alpha) & 0 & -I & \star \\ A_{cl}(\alpha) & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} H_1(\alpha) \\ \xi H_1(\alpha) \\ 0 \\ H_2(\alpha) \end{bmatrix}$$

com $A_{cl}(\alpha)$ e $C_{cl}(\alpha)$ definidas em (3.3), então L é um ganho de controle por realimentação estática de saída que assegura simultaneamente a positividade e a estabilidade com um custo garantido \mathcal{H}_2 , ρ , para o sistema (3.1) em malha fechada.

Demonstração. Primeiro, observe que (3.4) garante a positividade do sistema de malha fechada (3.2) com $E_y(\alpha) = 0$ e $E_z(\alpha) = 0$. Além disso, $F_2(\alpha)$ é uma matriz de posto completo, o que significa que $\mathcal{B}(\alpha)$ pode ser reescrita como

$$\mathcal{B}(\alpha) = F_2(\alpha)[-G(\alpha) - \xi G(\alpha) \ 0 \ I]$$

com $G(\alpha) = -F_2^{-1}(\alpha)F_1(\alpha)$. Pré- e pós-multiplicando (3.6) respectivamente por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)'$ e $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ (uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\alpha)$, ou seja, $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}^\perp(\alpha) = 0$), e então, multiplicando a desigualdade resultante à esquerda por $\mathcal{N}(\alpha)'$ e à direita por $\mathcal{N}(\alpha)$, com

$$\mathcal{B}^\perp(\alpha)' = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & G(\alpha)' \\ 0 & I & 0 & \xi G(\alpha)' \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}(\alpha)' = \begin{bmatrix} I & A_{cl}(\alpha)' & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

obtem-se a LMI dependente de parâmetros do gramiano de observabilidade (BOYD *et al.*, 1994) que, juntamente com (3.5), fornece um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 do sistema incerto em malha fechada (3.2). \square

Na sequência, uma relaxação na estabilidade do sistema em malha fechada e escolhas de $F_1(\alpha)$ e $F_2(\alpha)$ que sempre garantem uma solução factível para o Teorema 3.1 são apresentadas.

Teorema 3.2. *Substitua $A_{cl}(\alpha)$ por $\bar{A}(\alpha) = A_{cl}(\alpha) - rI$ nas condições do Teorema 3.1. Então, as escolhas*

$$F_1(\alpha) = I, \quad F_2(\alpha) = I \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} I & \xi I & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \xi > 0$$

asseguram a existência de uma solução factível para o Teorema 3.1 para um r positivo suficientemente grande.

Demonstração. Com as escolhas acima, supondo $\mathcal{X}(\alpha) = -(r/2)\mathcal{B}_0(\alpha)'$ e $P(\alpha) = \xi rI$, com $r > 0$, a condição (3.6) (após aplicar o complemento de Schur) assegura

$$\begin{bmatrix} -rI & \star \\ A_{cl}(\alpha) & -rI \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & C_{cl}(\alpha)' \\ (\xi r - 1)I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\xi^2 r I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & (\xi r - 1)I \\ C_{cl}(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \prec 0,$$

que é equivalente, pelo complemento de Schur, a

$$\left(\frac{1 - 2\xi r}{\xi^2 r}\right)I \prec A_{cl}(\alpha) (C_{cl}(\alpha)'C_{cl}(\alpha) - rI)^{-1} A_{cl}(\alpha)'.$$

Fazendo r grande o suficiente, a desigualdade acima tende a $-2/\xi < 0$ que é sempre verificada, pois $\xi > 0$. Observe que, como o sistema em malha aberta (3.1) é considerado positivo, a escolha $L = 0$ garante que (3.4) seja satisfeita. Finalmente, sempre existe um ρ suficientemente grande tal que (3.5) seja válida. \square

É possível adaptar o Teorema 3.1 de modo a contemplar distintas classes de sistemas e tipos de leis de controle. Por exemplo, o controle por realimentação de estados é apresentado a seguir.

Corolário 3.1 Realimentação de estados. *Sejam as matrizes $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ com $F_2(\alpha)$ de posto completo, e um escalar $\xi > 0$, dados. Se existirem matrizes dependentes de parâmetros $0 \prec P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $H_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $H_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, escalares reais δ , $\rho > 0$, e uma matriz independente de parâmetros $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, considerando $C_y(\alpha) = I$ e $E_y(\alpha) = 0$, tais que (3.4), (3.5) e (3.6) sejam satisfeitas, então K é um ganho de controle por realimentação estática de estados que assegura simultaneamente a positividade e a estabilidade com um custo garantido \mathcal{H}_2 , ρ , para o sistema (3.1) em malha fechada.*

A partir dos resultados anteriores, para resolver a versão do Teorema 3.1 (e Corolário 3.1) com a variável de relaxação ‘ r ’, um procedimento iterativo (Algoritmo 1) é proposto.

3.2.3 Método iterativo

O Algoritmo 1 é dividido em duas etapas: *i)* Dado um número máximo de iterações, it_{\max} , comece a partir da iteração $m = 0$ com a condição inicial fornecida pelo Teorema 3.2 e substitua $A_{cl}(\alpha)$ por $\bar{A}(\alpha) = A_{cl}(\alpha) - rI$. Resolva (3.4) e (3.6) minimizando o escalar r , que é um limitante superior para a parte real dos autovalores da matriz dinâmica de malha fechada $A_{cl}(\alpha)$. Portanto, quando $r \leq 0$, L é um ganho estabilizante e o algoritmo segue para a segunda etapa. Caso contrário, como a estabilidade em malha fechada não foi certificada, execute a atualização $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{X}(\alpha)'$ (que sempre garante uma solução viável para o Teorema 3.1, visto que $\text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) = \text{He}(\mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)')$ em (3.6)), implicando que o algoritmo é não crescente em termos do valor de r ao longo das iterações. Incremente m e repita o primeiro passo até $r \leq 0$ (vá para a próxima etapa, pois uma solução foi encontrada) ou $m = it_{\max}$ (aborte o algoritmo, pois não foi encontrada uma solução). *ii)* Faça¹ $r = 0$ (removendo a relaxação de estabilidade). Minimize ρ sujeito a (3.4), (3.5) e (3.6), incremente m e atualize $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{X}(\alpha)'$ enquanto $m < it_{\max}$ e a diferença entre dois valores consecutivos de ρ for maior que uma tolerância predefinida (tol). O valor do custo garantido ρ não pode ser pior de uma iteração para a próxima. Do ponto de vista numérico, pode ser interessante impor um valor máximo para ρ durante a minimização de r .

¹ Observe que, para $r \neq 0$, o limitante \mathcal{H}_2 é referente a $\bar{A}(\alpha)$, e não a $A_{cl}(\alpha)$.

Algoritmo 1: CONTROLE \mathcal{H}_2

```

1 Função H2 ( $A, B, E, C_z, D_z, E_z(\alpha(k)), tol, it_{max}$ )
2   Inicialização de  $\mathcal{B}_0, m \leftarrow 0, etapa \leftarrow 1$ ;
3   enquanto  $m < it_{max}$  &  $|\rho_m - \rho_{m-1}| \geq tol$  faça
4      $m \leftarrow m + 1; A_{cl} \leftarrow \bar{A}$ ;
5     se  $etapa = 1$  então
6       minimize  $r$  sujeito a
7        $P(\alpha) \succ 0, (3.4), (3.6)$ ;
8       se factível então
9         se  $r \leq 0$  então
10           $r \leftarrow 0, etapa \leftarrow 2$ ;
11          fim
12        senão
13          Abandone;
14        fim
15      senão
16        minimize  $\rho$  sujeito a
17         $P(\alpha) \succ 0, (3.4), (3.5), (3.6)$ ;
18        se factível &  $|\rho_m - \rho_{m-1}| \leq tol$  então
19           $\rho = \rho_m$ ;
20          retorna  $L, \rho$ ;
21        fim
22      fim
23       $\mathcal{B}_m(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}'(\alpha)$ ;
24    fim
25 fim

```

3.2.4 Exemplos numéricos

As rotinas foram programadas em Matlab-R2017a, utilizando os *parsers* ROL-MIP (AGULHARI *et al.*, 2012) e Yalmip (LÖFBERG, 2004) e o SDP *solver* Mosek (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000). O computador utilizado foi um Intel® Core™i7-7700 (3.60 GHz×8), 15.6 GiB, Linux (Ubuntu 18.04.5 LTS).

Nesta seção, os métodos propostos para estabilização por realimentação estática de saída e de estados são submetidos a uma comparação baseada em exemplos numéricos. Além disso, verifica-se a capacidade da abordagem fornecer ganhos por realimentação de estados com restrições de estrutura como, por exemplo, descentralizados.

Exemplo 3.1. Considere o projeto por realimentação de estados de um controlador \mathcal{H}_2 para o sistema linear positivo retirado de Ebihara *et al.* (2019, Example A). Assim, faça $C_y = I$ e $E_y = 0$ em (3.1), com $E_z = 0$

$$A = \begin{bmatrix} -1.90 & 0.87 & 0.39 & 0.55 & 0.27 \\ 0.73 & -1.31 & 0.23 & 0.26 & 0.29 \\ 0.16 & 0.19 & -1.47 & 0.28 & 0.05 \\ 0.55 & 0.17 & 0.92 & -1.37 & 0.22 \\ 0.99 & 0.87 & 0.08 & 0.80 & -1.89 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.37 & -0.57 \\ 0.56 & 0.03 \\ -0.74 & 0.42 \\ -0.38 & 0.17 \\ 0.09 & -0.29 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.79 \\ 0.54 \\ 0.17 \\ 0.84 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0.79 & 0.80 & 0.88 & 0.30 & 0.45 \\ 0.55 & 0.27 & 0.88 & 0.83 & 0.60 \end{bmatrix}, D_z = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.09 \\ 0.60 & -0.26 \end{bmatrix}.$$

O objetivo é efetuar comparações numéricas entre as três condições de síntese presentes em Ebihara *et al.* (2019), a técnica iterativa de Deaecto e Geromel (2017) e o algoritmo proposto nesta tese (A1). Preliminarmente, diversos valores de ξ (condições iniciais para A1) foram investigadas. Na Figura 5 é possível notar que ao aplicar o Algoritmo 1 para solucionar o Corolário 3.1, diferentes custos garantidos $\mathcal{H}_2(\rho)$ e normas de malha fechada (ρ^*) são computadas para cada $\xi > 0$ empregado na condição inicial proposta pelo Teorema 3.2 (20 valores espaçados logaritmicamente para $\xi \in [0.01, 10]$). Isto ilustra a influência do parâmetro escalar ξ na condição inicial factível para A1.

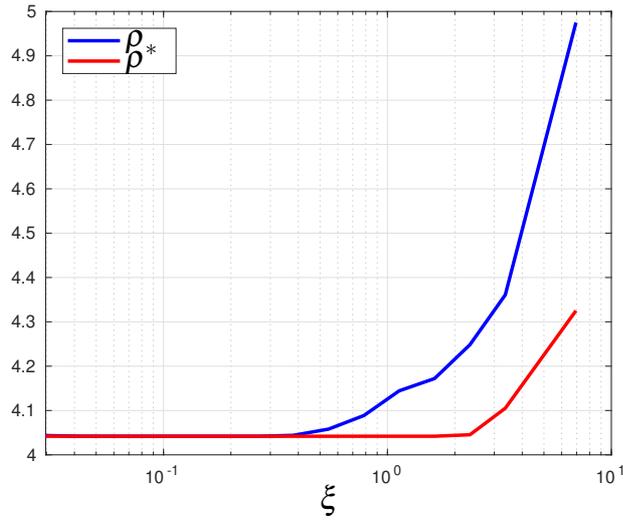


Figura 5 – Norma \mathcal{H}_2 em malha fechada (ρ^*) e custo \mathcal{H}_2 garantido (ρ) computados pelo Algoritmo 1 com condição inicial $\mathcal{B}_0 = [I \ \xi I \ 0 \ -I]$ versus ξ , utilizando $it_{\max} = 100$, Exemplo 3.1.

Os limitantes da norma \mathcal{H}_2 fornecidos pelo método proposto e por outros da literatura são mostrados na Tabela 3. O Algoritmo 1 provê² o ganho de realimentação de estados³

$$K = \begin{bmatrix} 2.6142 & 1.5927 & 2.9547 & 1.4662 & 0.5327 \\ 4.2250 & 2.5602 & 1.1928 & 1.9166 & 0.8194 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

usando $\xi = 0.2$ e 30 iterações, com custo garantido dado por $\rho = \rho^* = 4.0419$. Perceba que, considerando três casas decimais de precisão, esse ganho é o mesmo que F_{est} dado em Ebihara *et al.* (2019), em que foi verificado (por meio de um cálculo do limite inferior) ser a solução ótima para este exemplo.

Tabela 3 – Custos garantidos \mathcal{H}_2 (ρ) computados pelo Algoritmo 1 (A1), por Deaecto e Geromel (2017) (DG) e pelos métodos de Ebihara *et al.* (2019) (E-(12), E-(13) e E-(14)) usando realimentação de estados sem restrição de estrutura.

	A1	E-(12)	E-(13)	E-(14)	DG
ρ	4.0419	4.3660	4.3731	4.2184	4.0525
$(\rho - \rho_{A1})/\rho_{A1}$ (%)	0	+8.02	+8.19	+4.37	+0.26

Embora a abordagem proposta tenha sido desenvolvida para lidar com sistemas positivos incertos, pode-se notar na Tabela 3 os bons resultados obtidos pelo método no tratamento de sistemas precisamente conhecidos. Ademais, diferentemente dos métodos de projeto apresentados em Ebihara *et al.* (2019) e Deaecto e Geromel (2017), a abordagem proposta também

² Devido aos bons resultados, $\xi = 0.2$ foi adotado nos demais experimentos numéricos envolvendo a norma \mathcal{H}_2 .

³ Os ganhos apresentados nos exemplos são truncados com quatro dígitos decimais.

pode tratar o caso de realimentação de saída. Além disso, como A1 considera o ganho de controle diretamente como uma variável de otimização, ganhos estruturados (como no controle descentralizado) podem ser calculados de forma direta, sem introduzir conservadorismo adicional. Assim, para ilustrar o desempenho da técnica proposta nos casos mencionados acima, primeiro, considere o ganho de realimentação de estados com a seguinte estrutura

$$K_{struc} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Os resultados fornecidos pelo Algoritmo 1 e os obtidos com Ebihara *et al.* (2019) e Deaecto e Geromel (2017), adaptados para considerar uma estrutura particular para realimentação de estados, são mostrados na Tabela 4. O ganho estruturado obtido por A1 é dado por

$$K_{struc} = \begin{bmatrix} 2.6142 & 1.5927 & 2.9547 & 1.4662 & 0 \\ 4.2251 & 2.5602 & 1.1928 & 1.9167 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

que garante um custo garantido \mathcal{H}_2 menor em comparação aos outros métodos testados.

Tabela 4 – Custos garantidos $\mathcal{H}_2(\rho)$ calculados pelo Algoritmo 1 (A1), por Deaecto e Geromel (2017) (DG) e pelas técnicas de Ebihara *et al.* (2019) (E-(12), E-(13) e E-(14)), considerando um ganho de realimentação de estados com estrutura definida em (3.8).

	A1	E-(12)	E-(13)	E-(14)	DG
ρ	4.1807	4.4182	5.693	4.6545	4.1998
$(\rho - \rho_{A1})/\rho_{A1}$ (%)	0	+5.68	+36.17	+11.33	+0.46

Outra vantagem do ganho de controle ser diretamente uma variável de otimização (ou seja, não requerendo mudança de variáveis) é o tratamento imediato das restrições de magnitude nas entradas do ganho. Assim, sabendo que em algumas aplicações práticas a magnitude do ganho deve ser pequena o suficiente para evitar a saturação nos atuadores, considere o problema de determinar o valor mínimo de $\beta > 0$ tal que as entradas de ganho obedeçam a $|k_{ij}| \leq \beta$, $i = 1, \dots, n_u$, $j = 1, \dots, n_y$, e o custo garantido \mathcal{H}_2 não aumente mais de 3% quando comparado com a solução obtida sem as restrições de magnitude. A imposição de um limitante na magnitude das entradas do ganho corresponde simplesmente a incluir $2n_u n_y$ restrições lineares no problema, ou seja, duas restrições lineares para cada entrada de ganho. Nesse contexto, o Algoritmo 1 fornece $\rho = \rho^* = 4.1299$ (2% maior que a norma \mathcal{H}_2 ótima obtida sem restrições de magnitude) e o seguinte ganho

$$K_{limitado} = \begin{bmatrix} 1.5783 & 1.5211 & 2.4000 & 1.4662 & 0.5327 \\ 2.4000 & 2.4000 & 1.0207 & 1.9167 & 0.8194 \end{bmatrix},$$

cuja magnitude máxima ($\beta = 2.4$) é 40% inferior à magnitude máxima do ganho ótimo ($\beta = 4.2251$).

Por fim, para exemplificar o caso de realimentação de saída, considere quando apenas o segundo, terceiro e quinto estados podem ser medidos, ou seja,

$$C_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, A1 é usado para resolver o Teorema 3.1 e fornece um ganho estabilizador de realimentação de saída dado por

$$L = \begin{bmatrix} 1.5927 & 2.9546 & 0.5326 \\ 2.5602 & 1.1928 & 0.8194 \end{bmatrix}$$

associado a $\rho = 4.3035$ (aumento de apenas 6% quando comparado com a solução ótima de realimentação de estados).

Exemplo 3.2. A fim de demonstrar a capacidade da técnica proposta no tratamento de incertezas, considere o sistema linear positivo incerto de tempo contínuo gerado aleatoriamente cujos vértices são $E_{y1,2} = E_{z1,2} = 0$, $C_{y1,2} = I$,

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} -1.15 & 0.35 & 0.43 & | & -1.46 & 0.38 & 0.09 \\ 0.18 & -1.73 & 0.61 & | & 0.88 & -0.13 & 0.11 \\ 0.31 & 0.32 & -0.09 & | & 0.85 & 0.71 & -0.46 \end{bmatrix}, E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0.41 & | & 0.58 \\ 1.00 & | & 0.44 \\ 0.58 & | & 0.36 \end{bmatrix},$$

$$B_{1,2} = \begin{bmatrix} 0.77 & 0.84 & | & 0.59 & 0.68 \\ 0.38 & 0.42 & | & 0.55 & 0.29 \\ 0.31 & 0.37 & | & 0.25 & 0.23 \end{bmatrix}, C_{z1,2} = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 & 0.54 & | & 0.74 & 0.31 & 0.29 \\ 0.64 & 0.48 & 0.83 & | & 0.40 & 0.89 & 0.10 \end{bmatrix},$$

$$D_{z1,2} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0.49 & | & 0.11 & 0.62 \\ 0.46 & 0.30 & | & 0.33 & 0.43 \end{bmatrix}.$$

O objetivo é comparar o conservadorismo do Algoritmo 1 com as condições LMIs de Ebihara *et al.* (2019), adaptadas para lidar com o caso incerto (basicamente, definindo as LMIs nos vértices do domínio incerto), para o projeto de controladores robustos \mathcal{H}_2 por realimentação de estados. Infelizmente, nenhuma solução viável foi obtida com as adaptações dos métodos de Ebihara *et al.* (2019). Por outro lado, A1 (resolvendo o Corolário 3.1 com 64 iterações) obteve um custo garantido \mathcal{H}_2 dado por $\rho = 2.8055$ e a norma de malha fechada de pior caso $\rho_{wc} = 2.6515$ para o ganho associado

$$K = \begin{bmatrix} -2.6274 & 0.2107 & -0.2400 \\ 1.9486 & -0.5373 & 0.0758 \end{bmatrix}.$$

Para ilustrar melhor a aplicabilidade do método proposto, suponha que o vetor de estados não esteja disponível para realimentação. Em vez disso, apenas as variáveis de saída

podem ser usadas para estabilizar o sistema, com uma matriz de saída incerta representando sensores sujeitos a falhas parciais, de 80% a 100% (capacidade total), dada por

$$C_{y1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, o Algoritmo 1 é usado para resolver o Teorema 3.1 e fornece o seguinte ganho estabilizante por realimentação de saída

$$L = \begin{bmatrix} -2.7096 & -0.1527 \\ 2.0230 & -0.0329 \end{bmatrix}$$

associado com $\rho = 3.9829$ ($\rho_{wc} = 3.5321$, 100 iterações). Deste modo, os exemplos numéricos mostram que a técnica proposta apresenta custos garantidos menores quando comparada a outros métodos na literatura, sendo capaz de fornecer soluções quando outros métodos falham ou não podem ser aplicados.

3.3 Controle por realimentação dinâmica de saída

Nesta seção, aborda-se o projeto de um controlador dinâmico por realimentação de saída de ordem completa para sistemas lineares positivos sujeitos a incertezas intervalares, considerando o tempo contínuo e discreto. As particularidades das técnicas propostas e os dados necessários para a reprodução dos resultados obtidos são expostos ao longo do texto. Para ilustrar a melhor eficiência do método quando comparado com a técnica proposta em [Shu et al. \(2008\)](#), dois exemplos são apresentados ao final.

3.3.1 Definição do problema

Um sistema linear positivo intervalar é descrito por

$$\begin{aligned} \delta[x] &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{3.10}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída medida. Além disso, $(A, B, C) \in [(A_m, B_m, C_m), (A_M, B_M, C_M)]$ são matrizes intervalares (veja a Seção 1.1.1), com $A_m \in \mathbb{M}$, $B_m \geq 0$ e $C_m \geq 0$ no tempo contínuo ou $A_m \geq 0$, $B_m \geq 0$ e $C_m \geq 0$ no caso discreto. A estrutura do controlador é dada por

$$\begin{aligned} \delta[x_c] &= Gx_c + Ly, \\ u &= Kx_c, \end{aligned} \tag{3.11}$$

em que $x_c \in \mathbb{R}^{n_x}$, sendo G , L e K as matrizes a serem projetadas. O sistema em malha fechada, resultante da união de (3.10) e (3.11), é dado por

$$\begin{bmatrix} \delta[x] \\ \delta[x_c] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

No entanto, conforme provado por [Shu et al. \(2008\)](#), não é possível obter G , L e K tais que o sistema (3.12) seja assintoticamente estável e positivo simultaneamente. Todavia, ainda de acordo com [Shu et al. \(2008\)](#), esse desafio pode ser superado considerando o vetor do erro, $e = x - x_c$, no estado aumentado, fazendo $z = [x' \ e']'$. Note que a proposta de [Shu et al. \(2008\)](#) pode ser reinterpretada como a aplicação de uma simples transformação de similaridade na matriz dinâmica usando a mudança de base

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

o que mostra que nem toda realização em espaço de estados é adequada para lidar com sistemas positivos no contexto de controle por realimentação dinâmica de saída. Por fim, o sistema de malha fechada resultante é dado por

$$\delta[z] = \underbrace{\begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ A - LC + BK - G & G - BK \end{bmatrix}}_{A_{cl}} z. \quad (3.14)$$

Assim, assumindo um sistema intervalar instável dado por (3.10) é possível projetar um controlador como em (3.11), garantindo a estabilidade assintótica e a positividade do sistema (3.14).

3.3.2 Caso contínuo no tempo

A seguir, condições LMIs suficientes para a existência de um controlador estabilizante como em (3.11) que garanta a estabilidade assintótica e a positividade do sistema intervalar em malha fechada de tempo contínuo (3.14) são apresentadas.

Teorema 3.3. *Sejam Y_i , $i = 1, 2, 3$ matrizes dadas. Se existirem matrizes $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $\mathcal{X}_c \in \mathbb{R}^{6n_x \times 6n_x}$, $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $G \in \mathbb{M}$, $0 \leq L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ e $0 \geq K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar real δ tais que*

$$A_m + B_M K + \delta I \geq 0, \quad (3.15)$$

$$A_m - LC_M + B_M K - G \geq 0, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{Q}_c + \mathcal{X}_c \mathcal{B}_c + \mathcal{B}_c' \mathcal{X}_c' \prec 0 \quad (3.17)$$

sejam válidas com $\mathcal{B}_c = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{bmatrix}$,

$$\mathcal{Q}_c = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ P & 0 & \star \\ A_{cle} & -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_c = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix},$$

$$A_{cle} = \begin{bmatrix} A_M + B_m K & -B_M K \\ A_M - LC_m + B_m K - G & G - B_M K \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

então G , L e K são as matrizes de um controlador dinâmico que assegura, simultaneamente, a estabilidade assintótica e a positividade do sistema de malha fechada de tempo contínuo (3.14) para qualquer $(A, B, C) \in [(A_m, B_m, C_m), (A_M, B_M, C_M)]$.

Demonstração. A prova referente à positividade do sistema em malha fechada segue o mesmo caminho de [Shu et al. \(2008\)](#), em que (3.15) impõe $A_m + B_M K$ a ser Metzler e (3.16) restringe $A_m - LC_M + B_M K - G$ a ser não negativa. Adicionalmente, combinando a isso as desigualdades $L \geq 0$ e $K \leq 0$, tem-se

$$A + BK \geq A_m + B_M K$$

e

$$A - LC + BK - G \geq A_m - LC_M + B_M K - G.$$

Além disso, $K \leq 0$ e $G \in \mathbb{M}$ garantem que, para qualquer $B \in [B_m, B_M]$, $-BK \geq 0$ e $G - BK \in \mathbb{M}$. Portanto, para qualquer $(A, B, C) \in [(A_m, B_m, C_m), (A_M, B_M, C_M)]$ o sistema (3.14) é positivo.

Em relação à estabilidade assintótica, observe que, se (3.17) é válida, então Y_3 é uma matriz de posto completo e, portanto, \mathcal{B}_c pode ser reescrita como $\mathcal{B}_c = Y_3 \begin{bmatrix} -R & -U & I \end{bmatrix}$, com $R = -Y_3^{-1} Y_1$ e $U = -Y_3^{-1} Y_2$. Assim, pré- e pós-multiplicando (3.17), respectivamente, por

$$\mathcal{B}_c^{\perp'} = \begin{bmatrix} I & 0 & R' \\ 0 & I & U' \end{bmatrix}$$

e \mathcal{B}_c^{\perp} (uma base para o espaço nulo de \mathcal{B}_c), tem-se

$$\begin{bmatrix} \text{He}(RA_{cl_e}) & * \\ P + UA_{cl_e} - R' & -\text{He}(U) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.19)$$

com A_{cl_e} dada por (3.18). A multiplicação de (3.19) à esquerda por $\Gamma'_c = \begin{bmatrix} I & A'_{cl_e} \end{bmatrix}$ e à direita por Γ_c resulta em

$$A'_{cl_e} P + PA_{cl_e} \prec 0 \quad (3.20)$$

que assegura a estabilidade assintótica de A_{cl_e} , visto que $P \succ 0$. Finalmente, como mostrado em [Shu et al. \(2008\)](#) $A_{cl_e} \geq A_{cl}$. Logo, (3.14) é assintoticamente estável para qualquer $(A, B, C) \in [(A_m, B_m, C_m), (A_M, B_M, C_M)]$. \square

Uma vez que o Teorema 3.3 requer que algumas matrizes sejam pré-especificadas, para evitar termos bilineares nas condições, o próximo teorema propõe escolhas iniciais para tais matrizes, além de introduzir um parâmetro de relaxação, r , garantindo soluções viáveis para as condições modificadas.

Teorema 3.4. *Substitua A_{cl_e} por $\bar{A} = A_{cl_e} - rI$ no Teorema 3.3. Então, as escolhas*

$$Y_1 = I, Y_2 = I, Y_3 = -I \Rightarrow \mathcal{B}_c = \mathcal{B}_{c0} = \begin{bmatrix} I & I & -I \end{bmatrix}$$

garantem a existência de uma solução factível do Teorema 3.3 para um r positivo suficientemente grande.

Demonstração. Adote a escolha \mathcal{B}_{c0} proposta no Teorema 3.4 e faça $\mathcal{X}_c = (-r/2)\mathcal{B}_{c0}$. Deste modo, (3.17) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} -rI & \star & \star \\ P-rI & -rI & \star \\ A_{cle} & (r-1)I & -rI \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.21)$$

Para a escolha particular $P = rI$, com $r > 0$, e aplicando o complemento de Schur em (3.21), tem-se

$$-rI - \begin{bmatrix} A_{cle} & (r-1)I \end{bmatrix} (-rI)^{-1} \begin{bmatrix} A'_{cle} \\ (r-1)I \end{bmatrix} \prec 0$$

que é equivalente a

$$-rI + \frac{1}{r}A_{cle}A'_{cle} + \frac{(r-1)^2}{r}I \prec 0. \quad (3.22)$$

Multiplicando (3.22) por r em ambos os lados, tem-se

$$(1-2r)I + A_{cle}A'_{cle} \prec 0$$

que é sempre verificada para qualquer $r > 0$ tal que $(2r-1)$ seja maior que o raio espectral de $A_{cle}A'_{cle}$. \square

3.3.3 Caso discreto no tempo

O próximo teorema apresenta condições LMIs suficientes para a obtenção de um ganho dinâmico por realimentação de saída que garanta a positividade e a estabilidade assintótica do sistema intervalar em malha fechada de tempo discreto (3.14).

Teorema 3.5. *Sejam Y_i , $i = 1, 2, 3$ matrizes dadas. Se existirem matrizes $0 \prec P = P' \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $\mathcal{X}_d \in \mathbb{R}^{6n_x \times 6n_x}$, $0 \leq G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $0 \leq L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ e $0 \geq K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que (3.16),*

$$A_m + B_M K \geq 0, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{Q}_d + \mathcal{X}_d \mathcal{B}_d + \mathcal{B}'_d \mathcal{X}'_d \prec 0 \quad (3.24)$$

sejam satisfeitas, sendo $\mathcal{B}_d = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 & \bar{Y}_2 & \bar{Y}_3 \end{bmatrix}$,

$$\mathcal{Q}_d = \begin{bmatrix} -P & \star & \star \\ 0 & P & \star \\ A_{cle} & -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_d = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix}$$

e A_{cle} dada por (3.18), então G , L e K são as matrizes do controlador dinâmico que assegura, simultaneamente, a estabilidade assintótica e a positividade do sistema em malha fechada a tempo discreto (3.14) para qualquer $(A, B, C) \in [(A_m, B_m, C_m), (A_M, B_M, C_M)]$.

Demonstração. Novamente, a prova em relação à positividade do sistema em malha fechada segue o mesmo caminho de [Shu et al. \(2008\)](#). Com relação à estabilidade assintótica, observe que, se (3.24) é válida, então \bar{Y}_3 é uma matriz de posto completo e, portanto, \mathcal{B}_d pode ser reescrita como $\mathcal{B}_d = \bar{Y}_3 \begin{bmatrix} -F & -J & I \end{bmatrix}$, com $F = -\bar{Y}_3^{-1}\bar{Y}_1$ e $J = -\bar{Y}_3^{-1}\bar{Y}_2$. Assim, pré- e pós-multiplicando (3.24) respectivamente por

$$\mathcal{B}_d^{\perp'} = \begin{bmatrix} I & 0 & F' \\ 0 & I & J' \end{bmatrix}$$

e \mathcal{B}_d^{\perp} produz

$$\begin{bmatrix} -P + \text{He}(A_{cl_e}F) & \star \\ J'A_{cl_e} - F & P - \text{He}(J) \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.25)$$

Multiplicando (3.25) à esquerda por $\Gamma_d' = \begin{bmatrix} I & A'_{cl_e} \end{bmatrix}$ e à direita por Γ_d , tem-se

$$-P + A'_{cl_e}PA_{cl_e} \prec 0 \quad (3.26)$$

que, com $P \succ 0$, assegura a estabilidade assintótica de A_{cl_e} . Finalmente, como mostrado em [Shu et al. \(2008\)](#), $A_{cl_e} \geq A_{cl}$, então o sistema (3.14) é assintoticamente estável para qualquer $(A, B, C) \in [(A_m, B_m, C_m), (A_M, B_M, C_M)]$. \square

Uma inicialização com relaxação da estabilidade para o caso discreto é dada abaixo.

Teorema 3.6. *Substitua A_{cl_e} por $\bar{A} = (1-r)A_{cl_e}$ no Teorema 3.5. Então, as escolhas*

$$\bar{Y}_1 = 0, \bar{Y}_2 = I, \bar{Y}_3 = -I \Rightarrow \mathcal{B}_d = \mathcal{B}_{d0} = \begin{bmatrix} 0 & I & -I \end{bmatrix}$$

garantem a existência de uma solução viável para o Teorema 3.5.

Demonstração. Assuma as escolhas propostas no Teorema 3.6 e considere $\mathcal{X}_d = (-r/2)\mathcal{B}_{d0}$ e $r = 1$ ($\bar{A} = 0$). Aplicando um complemento de Schur em (3.24), obtém-se

$$\begin{bmatrix} -P & \star & \star \\ 0 & P - I & \star \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.27)$$

Finalmente, fixando $P = \nu I$, $\nu \in (0, 1)$ a condição (3.27) é satisfeita. \square

Os resultados dos teoremas 3.4 e 3.6, fornecem propostas para \mathcal{B}_c e \mathcal{B}_d , assim como a inclusão do parâmetro de relaxação r , permitindo sempre obter soluções viáveis para os teoremas 3.3 e 3.5. Porém, para garantir que os controladores sintetizados estabilizem o sistema em malha fechada, o parâmetro r deve ser não positivo ($r \leq 0$). A busca por uma solução pode ser feita resolvendo as condições relaxadas dos teoremas 3.3 e 3.5 minimizando o valor de r . Caso o valor resultante de r seja maior que zero, nada pode ser concluído sobre a estabilidade em malha fechada, mas as atualizações $\mathcal{B}_c = \mathcal{X}'_c$ e $\mathcal{B}_d = \mathcal{X}'_d$ podem ser usadas como novas

escolhas iniciais viáveis para as condições modificadas dos teoremas 3.3 e 3.5, respectivamente, produzindo garantidamente um novo valor de r que não pode ser maior que o anterior. Consequentemente, é possível estabelecer um procedimento iterativo em que r é minimizado até que $r \leq 0$. Tal procedimento é apresentado na próxima seção.

3.3.4 Método iterativo

Com escolhas iniciais apropriadas de \mathcal{B}_{c0} e \mathcal{B}_{d0} , dadas nos teoremas 3.4 e 3.6, um procedimento iterativo é estabelecido, sendo apresentado pelo Algoritmo 2. A finalidade é obter ganhos que garantam a estabilidade e a positividade do sistema intervalar positivo em malha fechada para os casos de tempo contínuo e discreto. No algoritmo, as condições para a abordagem discreta no tempo são indicadas entre parênteses.

Para usar este procedimento, comece definindo um número máximo de iterações, it_{\max} , a escolha inicial \mathcal{B}_{c0} (ou \mathcal{B}_{d0}) e defina o contador de iterações $m = 0$. Então, resolva (3.17) para o Teorema 3.3 (ou (3.24) para o Teorema 3.5), substituindo A_{cle} por \bar{A} como no Teorema 3.4 (ou 3.6). A seguir, resolva o Teorema 3.3 (ou 3.5) modificado, minimizando o escalar r (r_m indica o valor de r na iteração m no algoritmo). Portanto, quando $r \leq 0$ as matrizes do controlador dinâmico G , L e K garantem a estabilidade assintótica e a positividade do sistema em malha fechada para qualquer $(A, B, C) \in [(A_m, B_m, C_m), (A_M, B_M, C_M)]$. Caso contrário, se $r > 0$, incremente m e faça a atualização $\mathcal{B}_{c_m} \leftarrow \mathcal{X}'_c$ (ou $\mathcal{B}_{d_m} \leftarrow \mathcal{X}'_d$) até que $r \leq 0$ ou $m = it_{\max}$. Perceba que a substituição $\bar{A} \leftarrow (1 - r)A_{cle}$ no caso discreto no tempo requer a mudança das variáveis $\bar{G} = (1 - r)G$, $\bar{K} = (1 - r)K$ e $\bar{L} = (1 - r)L$. Consequentemente, após uma solução factível, os valores de G , K e L podem ser recuperados fazendo $G = \bar{G}/(1 - r)$, $K = \bar{K}/(1 - r)$ e $L = \bar{L}/(1 - r)$, conforme indicado entre parênteses na linha 8 do Algoritmo 2. Por fim, note que o algoritmo proposto não tem garantia de convergir para um valor negativo de r (mesmo que esse valor exista), ou seja, os resultados dependem da condição inicial \mathcal{B}_{c0} (\mathcal{B}_{d0}).

Algoritmo 2: ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS POSITIVOS INTERVALARES NO TEMPO CONTÍNUO (DISCRETO)

```

1 Função Estab-intervalar ( $A_m, A_M, B_m, B_M, C_m, C_M, it_{max}$ )
2   Inicialização de  $\mathcal{B}_{c0}$  (ou  $\mathcal{B}_{d0}$ ),  $m \leftarrow 0$ ,  $\bar{A}$  como no Teorema 3.4 (ou 3.6);
3   enquanto  $m < it_{max}$  faça
4      $m \leftarrow m + 1$ ;
5     minimize  $r$  sujeito a  $P \succ 0, L \geq 0, K \leq 0, G \in \mathbb{M}$ , (3.15), (3.16), (3.17) (ou
6        $P \succ 0, L \geq 0, K \leq 0, G \geq 0$ , (3.16), (3.23), (3.24));
7       se factível então
8         se  $r \leq 0$  então
9           retorna  $G, L, K$  (ou  $\bar{G}/(1-r_m), \bar{L}/(1-r_m), \bar{K}/(1-r_m)$ ).
10          fim
11        senão
12          Abandone;
13        fim
14       $\mathcal{B}_{c_m} \leftarrow \mathcal{X}'_c$  (ou  $\mathcal{B}_{d_m} \leftarrow \mathcal{X}'_d$ );
15 fim

```

3.3.5 Exemplos numéricos

Os *scripts* computacionais foram programados em MatlabR2017a, utilizando o *parser* Yalmip (LÖFBERG, 2004) e o *solver* Mosek (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000). O computador utilizado foi um Intel® Core™i7-7700 (3.60 GHz × 8), 15.6 GiB, Linux (Ubuntu 18.04.5 LTS). O Algoritmo 2 é implementado com X_i e \bar{X}_i , $i = 1, 2, 3$ como matrizes arbitrárias e $it_{\max} = 100$.

Dois exemplos ilustram a aplicabilidade das condições de projeto propostas nesta seção.

Exemplo 3.3. Considere o problema de estabilização por realimentação dinâmica de saída para o sistema linear positivo de tempo discreto retirado de Shu et al. (2008), em que condições suficientes para o projeto de um controlador dinâmico por realimentação dinâmica de saída são propostas e um algoritmo iterativo baseado em LMIs é fornecido para a resolução das condições. O modelo matricial de Leslie é usado para descrever a dinâmica populacional estruturada de uma determinada praga, dado em (3.10) com

$$A = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & p_{2,3} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ c \end{bmatrix}' \quad (3.28)$$

e $x(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]'$, em que $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $x_3(k)$ representam o número de pragas juvenis, imaturas e adultas no tempo k , respectivamente. A taxa de natalidade para pais na i -ésima faixa etária é denotada por f_i , e $p_{i,j}$ representa a taxa de sobrevivência para indivíduos na i -ésima faixa etária passando para $(i+1)$.

Adotando os mesmos parâmetros que Shu et al. (2008), ou seja,

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.3011 \pm 0.0220, f_2 = 0.5915 \pm 0.0282, f_3 = 0.5235 \pm 0.0022, \\ b_1 &= 0.9000 \pm 0.0200, b_2 = 0.5000 \pm 0.0050, c = 1 \pm 0.0100, \\ p_{1,2} &= 0.8868 \pm 0.0128, p_{2,3} = 0.7894 \pm 0.0194, \end{aligned}$$

o objetivo é aniquilar a praga de um determinado distrito. O controlador estabilizante, obtido em Shu et al. (2008) após 58 iterações, é reproduzido abaixo

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.0008 & 0.0010 \\ 0.8726 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7651 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0.3758 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ K &= \begin{bmatrix} -0.1680 & -0.1192 & -0.0667 \\ -0.2438 & -0.1445 & -0.1563 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Visando comparar o Algoritmo 2 com o método de Shu et al. (2008), este também foi programado utilizando o *parser* Yalmip (LÖFBERG, 2004) e o *solver* Mosek (ANDERSEN; ANDER-

SEN, 2000), fornecendo os seguintes ganhos

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.8740 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5616 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0.4247 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.1560 & -0.0526 & 0 \\ -0.2685 & -0.1702 & -0.1828 \end{bmatrix},$$

obtidos após 42 iterações com tempo computacional de 106.95 segundos. O método de *Shu et al. (2008)* requer a seleção de uma matriz inicial Q no algoritmo. Assim, considerando $Q = \varphi I$, foi realizada uma busca com $\varphi \in \{1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 10000\}$ (8 valores). Neste exemplo, escolheu-se $\varphi = 10$ por este valor requerer um menor número de iterações. Ademais, note que os valores dos ganhos do controlador são ligeiramente diferentes dos relatados em *Shu et al. (2008)*, possivelmente devido a versões distintas de software e solvers, além da inicialização da matriz Q , que não foi informada em *Shu et al. (2008)*.

Por outro lado, o Algoritmo 2 fornece após apenas 2 iterações com tempo de simulação de 1.57 segundos, os seguintes ganhos de controle estabilizantes

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.8740 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7700 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0.3909 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.5527 & -0.3336 & -0.2504 \end{bmatrix}.$$

A fim de ilustrar a resposta em malha fechada com os ganhos projetados, considere o conjunto $\Lambda = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ e as matrizes $A = \alpha A_m + (1 - \alpha)A_M$, $B = \beta B_m + (1 - \beta)B_M$ e $C = \gamma C_m + (1 - \gamma)C_M$ com $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda \times \Lambda \times \Lambda$. Tomando todas as combinações possíveis de (α, β, γ) tem-se $5^3 = 125$ (A, B, C) sistemas. A Figura 6 mostra o envoltório das trajetórias considerando os 125 sistemas (A, B, C) avaliados com os ganhos de controle (3.29) gerados pelo Algoritmo 2. Os valores dos estados iniciais usados são $x(0) = [300 \ 250 \ 230]'$ e $x_c(0) = [0 \ 0 \ 0]'$. As trajetórias obtidas com os ganhos calculados com o método de *Shu et al. (2008)* são semelhantes às apresentadas na Figura 6 e, portanto, são omitidas. Observe que o Algoritmo 2 e a técnica de *Shu et al. (2008)* lidam apenas com a estabilização robusta, sendo a vantagem do Algoritmo 2 sobre *Shu et al. (2008)* a menor complexidade (estimada pelo tempo necessário para se obter a solução) para calcular os ganhos de estabilização.

Exemplo 3.4. Para comparar a técnica proposta com o Algoritmo 2 de *Shu et al. (2008)* no caso do tempo contínuo, considere o sistema linear intervalar positivo contínuo no tempo, cujas matrizes, geradas aleatoriamente, são mostradas na sequência.

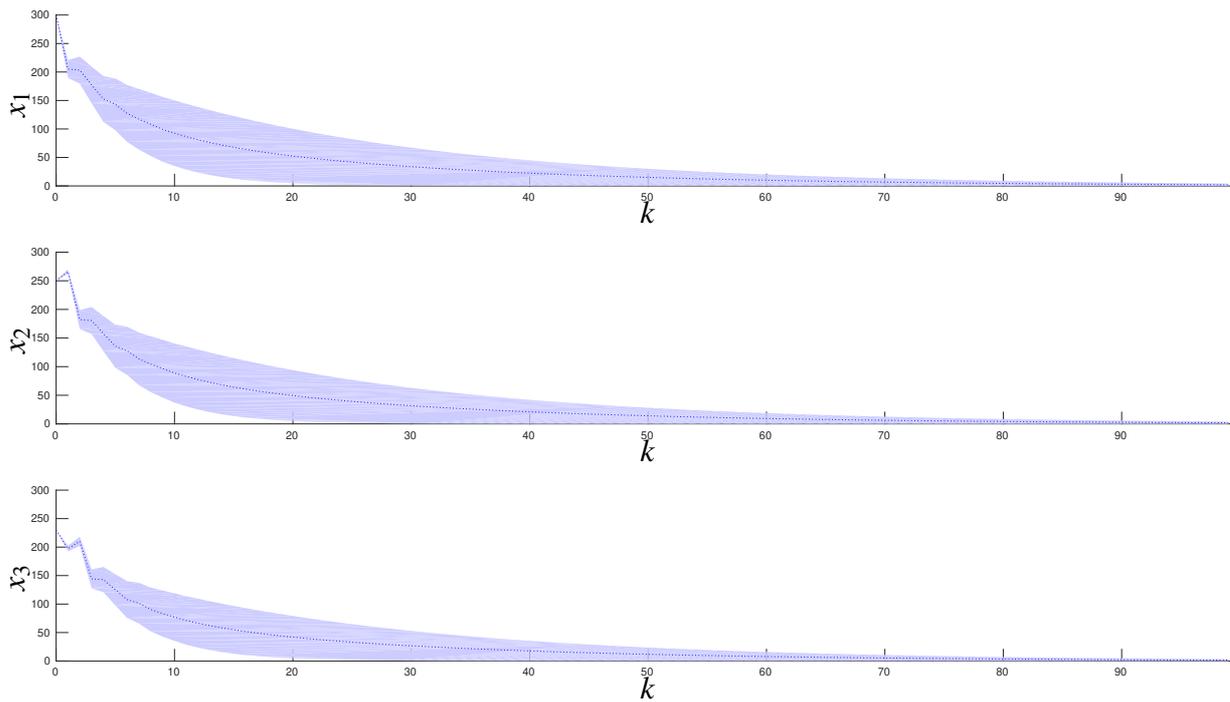


Figura 6 – Envelopes das trajetórias de $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 3.3 com condição inicial $x(0) = [300 \ 250 \ 230]'$ e $x_c(0) = [0 \ 0 \ 0]'$.

$$A_m = \begin{bmatrix} -2.60 & 0.80 & 1.60 \\ 0 & -0.40 & 2.80 \\ 0.60 & 0 & -3.60 \end{bmatrix}, C_m = \begin{bmatrix} 14 & 20 & 10 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_M = \begin{bmatrix} -1.82 & 0.80 & 1.60 \\ 0 & -0.15 & 2.80 \\ 0.60 & 0 & -2.35 \end{bmatrix}, C_M = \begin{bmatrix} 16.92 & 24 & 10 \end{bmatrix}, B_M = B_m.$$

Os ganhos dinâmicos do controlador por realimentação de saída obtidos pela técnica de *Shu et al. (2008)*, após 326 iterações com tempo computacional de 553.73 segundos, são

$$G = \begin{bmatrix} -12.8727 & 0 & 1.2976 \\ 0 & -0.4000 & 0.5029 \\ 0.6000 & 0 & -3.7005 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0.0302 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -4.8808 & -0.0376 & -0.0001 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo, o único valor de φ (dentre as 8 possibilidades testadas) que fornece uma solução foi $\varphi = 10000$. Por outro lado, o Algoritmo 2, proposto nesta seção, após 3 iterações com

tempo de simulação de 1.84 segundos, produz os ganhos

$$G = \begin{bmatrix} -42.1191 & 0 & 1.0291 \\ 0 & -0.4000 & 2.8000 \\ 0.6000 & 0 & -3.6000 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0.0333 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -19.4776 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, para este exemplo, a abordagem contínua no tempo, semelhante ao método discreto, se mostra mais eficiente em termos de esforço computacional (i.e., menor número de iterações e menor tempo de simulação) do que a técnica proposta em [Shu et al. \(2008\)](#).

3.4 Conclusões

No projeto de controle estático \mathcal{H}_2 robusto para sistemas lineares positivos incertos de tempo contínuo, os exemplos numéricos mostraram que a técnica proposta apresenta custos garantidos menores quando comparada com outros métodos da literatura, sendo inclusive capaz de fornecer soluções quando outras abordagens falham ou não podem ser aplicadas.

Em relação às técnicas propostas para fornecer os controladores dinâmicos por realimentação de saída de ordem completa para sistemas lineares positivos sujeitos a incertezas intervalares no tempo contínuo e no discreto, os exemplos salientaram que o algoritmo proposto fornece ganhos de controle com menos iterações e menor tempo de simulação em relação às estratégias comparadas.

Filtragem de Sistemas Positivos

4.1 Introdução

A filtragem é um problema clássico extensivamente estudado na literatura de controle e de processamento de sinais. Em termos gerais, o objetivo é obter uma estimativa precisa de um determinado sinal corrompido por ruído, possivelmente minimizando algum critério de desempenho (ANDERSON; MOORE, 1979). Este problema tem sido considerado em vários contextos diferentes, como sistemas lineares, não lineares e incertos com ênfase nos métodos baseados em desigualdades matriciais lineares. As abordagens LMIs para o projeto de filtros lineares podem reproduzir os resultados do filtro de Kalman ótimo (obtido por meio de uma equação de Riccati), podem lidar com outros critérios de desempenho e, mais importante, fornecer filtros com robustez certificada por meio das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares afetados por parâmetros incertos (BOYD *et al.*, 1994).

No contexto de sistemas positivos, o projeto de filtros permanece desafiador. Conforme discutido em Li *et al.* (2010), existem particularidades relacionadas com a restrição de positividade que não podem ser abordadas diretamente nos métodos baseados em LMIs para o projeto de filtros sem adicionar conservadorismo extra, mesmo no caso de sistemas precisamente conhecidos. Em particular, as abordagens LMIs que tratam o projeto de filtro robusto \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ de ordem completa, baseadas na mudança de variáveis envolvendo blocos da matriz de Lyapunov (GEROMEL, 1999) (ou das variáveis de folga (GEROMEL *et al.*, 2002)), precisam impor restrições de estrutura diagonal e não-negatividade elemento a elemento caso sejam adaptadas para assegurar a positividade das matrizes do sistema filtrado. Resultados mais recentes, que utilizam uma parametrização mais simples para as matrizes de realização do filtro (e.g., Duan *et al.* (2006), Lacerda *et al.* (2011)), permitem que a restrição de positividade seja definida de forma semelhante à usada para o controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados para sistemas positivos (TANAKA; LANGBORT, 2011) (ou seja, uma matriz não negativa elemento a elemento multiplicando o inverso de uma matriz diagonal definida positiva), mas ainda introduzem conservadorismo no projeto do filtro.

Neste capítulo, uma nova abordagem baseada em LMIs é proposta para projeto de um filtro robusto positivo para sistemas lineares positivos de tempo discreto com parâmetros incertos pertencentes a um politopo. Condições suficientes para a existência de um filtro positivo de ordem completa ou reduzida assegurando um custo garantido \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ são propostas. Como principal vantagem em relação às demais técnicas baseadas em LMIs, as matrizes de realização do filtro aparecem de forma afim nas condições propostas, sendo variáveis de decisão no problema de otimização. Portanto, a restrição de não negatividade pode ser imposta diretamente (nenhuma mudança de variável é necessária), sem introduzir conservadorismo extra. Um algoritmo iterativo, baseado em Felipe e Oliveira (2021), é proposto em conjunto com uma condição inicial que viabiliza a busca por filtros positivos que assegurem os níveis de desempenho \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Exemplos motivados por problemas físicos ilustram as vantagens da abordagem proposta.

4.2 Filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

Os problemas de projeto de filtros positivos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida para sistemas lineares incertos positivos a tempo discreto são investigados neste capítulo. Devido à restrição de positividade nas matrizes do filtro, os filtros ótimos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ não podem ser obtidos por meio de métodos convencionais baseados em LMIs, mesmo no contexto de filtragem de ordem completa para sistemas precisamente conhecidos. Portanto, novas condições LMIs suficientes são propostas para o projeto de filtros positivos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares positivos de tempo discreto, tendo como principal vantagem o fato de que as matrizes dos filtros são variáveis do problema. Neste caso, nenhuma restrição estrutural nas variáveis de otimização (fonte de conservadorismo) é necessária para garantir a positividade. Uma relaxação na estabilidade do filtro é incluída, sendo propostos um algoritmo iterativo e uma condição inicial factível para buscar filtros positivos que assegurem um nível de atenuação \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ para o sistema filtrado. As condições podem lidar com filtragem de ordem completa ou reduzida, incerteza do tipo politópica e restrições estruturais. Exemplos inspirados em modelos da literatura ilustram os resultados.

O problema é apresentado genericamente (casos contínuo e discreto) pois, apesar da tese abordar e apresentar resultados apenas para o caso discreto, o caso contínuo poderia ser tratado seguindo uma metodologia similar.

4.2.1 Definição do problema

Considere o sistema linear incerto positivo

$$\mathcal{G} = \begin{cases} \delta[x] = A(\alpha)x + E(\alpha)w, \\ z = C_z(\alpha)x + E_z(\alpha)w, \\ y = C_y(\alpha)x + E_y(\alpha)w, \end{cases} \quad (4.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada de ruído, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ é o sinal a ser estimado, e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida. As matrizes do espaço de estados possuem dimensões apropriadas e são incertas, como definido em (1.2). Deseja-se obter as matrizes do seguinte filtro

$$\mathcal{G}_f \triangleq \begin{cases} \delta[x_f] = A_f x_f + B_f y, \\ z_f = C_f x_f + D_f y, \end{cases} \quad (4.2)$$

em que $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$, $0 < n_f \leq n_x$ é o estado estimado, e $z_f \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída estimada do sistema (4.1) que minimiza os efeitos da entrada de ruído w para o erro $e = z - z_f$. Com este propósito, definindo o vetor de estado aumentado $\tilde{x} = [x' \ x_f']'$, tem-se a seguinte dinâmica de erro

$$\mathcal{G}_e \triangleq \begin{cases} \delta[\tilde{x}] = \tilde{A}(\alpha)\tilde{x} + \tilde{B}(\alpha)w, \\ e = \tilde{C}(\alpha)\tilde{x} + \tilde{D}(\alpha)w \end{cases} \quad (4.3)$$

com $\tilde{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_f) \times (n_x+n_f)}$, $\tilde{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_f) \times n_w}$, $\tilde{C}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times (n_x+n_f)}$ e $\tilde{D}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$ dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ B_f C_y(\alpha) & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} E(\alpha) \\ B_f E_y(\alpha) \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}(\alpha) &= \begin{bmatrix} C_z(\alpha) - D_f C_y(\alpha) & -C_f \end{bmatrix}, \\ \tilde{D}(\alpha) &= \begin{bmatrix} E_z(\alpha) - D_f E_y(\alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2.2 Caso discreto no tempo

O Teorema 4.1 apresenta uma condição suficiente para o projeto de um filtro \mathcal{H}_∞ positivo para sistemas positivos em tempo discreto, expressa em termos de LMIs dependentes de parâmetros, sendo necessário fornecer (como discutido em seguida) a matriz $Y(\alpha)$ a priori.

Teorema 4.1. *Sejam $Y_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 5$, matrizes dadas. Se existirem matrizes dependentes de parâmetros $0 \prec P(\alpha) = P'(\alpha) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_f) \times (n_x+n_f)}$, $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{(3n_x+3n_f+n_z+n_w) \times (5n_x+5n_f)}$, matrizes $A_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_y}$, $C_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n_f}$, $D_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ e um escalar $\gamma > 0$ tais que*

$$Q(\alpha) + X(\alpha)Y(\alpha) + Y'(\alpha)X'(\alpha) \prec 0, \quad (4.5)$$

$$A_f \geq 0, \quad B_f \geq 0, \quad C_f \geq 0, \quad D_f \geq 0 \quad (4.6)$$

sejam válidas para todo $\alpha \in \Lambda$, em que

$$\begin{aligned} Y(\alpha) &= \begin{bmatrix} Y_1(\alpha) & Y_2(\alpha) & Y_3(\alpha) & Y_4(\alpha) & Y_5(\alpha) \end{bmatrix}, \\ X(\alpha) &= \begin{bmatrix} X'_1(\alpha) & X'_2(\alpha) & X'_3(\alpha) & X'_4(\alpha) & X'_5(\alpha) \end{bmatrix}', \\ Q(\alpha) &= \begin{bmatrix} -P(\alpha) & * & * & * & * \\ 0 & P(\alpha) & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma I & * & * \\ \tilde{B}'(\alpha) & 0 & \tilde{D}'(\alpha) & -\gamma I & * \\ \tilde{A}'(\alpha) & -I & \tilde{C}'(\alpha) & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

com $\tilde{A}(\alpha)$, $\tilde{B}(\alpha)$, $\tilde{C}(\alpha)$, e $\tilde{D}(\alpha)$ dadas por (4.4), então (4.2) é um filtro positivo e γ é um custo garantido \mathcal{H}_∞ do sistema (4.3).

Demonstração. Perceba que as condições em (4.6) garantem a positividade do filtro (4.2). Além disso, se (4.5) for válida, então $X_5(\alpha)$ e $Y_5(\alpha)$ são matrizes de posto completo e, portanto, $Y(\alpha)$ pode ser reescrita como

$$Y(\alpha) = Y_5(\alpha) \begin{bmatrix} -F(\alpha) & -G(\alpha) & -H(\alpha) & -J(\alpha) & I \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= -Y_5(\alpha)^{-1}Y_1(\alpha), & G(\alpha) &= -Y_5(\alpha)^{-1}Y_2(\alpha), \\ H(\alpha) &= -Y_5(\alpha)^{-1}Y_3(\alpha), & J(\alpha) &= -Y_5(\alpha)^{-1}Y_4(\alpha). \end{aligned}$$

Assim, pré- e pós-multiplicando (4.5) respectivamente por $Y^{\perp'}(\alpha)$ e $Y^\perp(\alpha)$, sendo

$$Y^\perp(\alpha) = \begin{bmatrix} \text{-----} & I & \text{-----} \\ F(\alpha) & G(\alpha) & H(\alpha) & J(\alpha) \end{bmatrix}$$

(em que $Y^\perp(\alpha)$ é uma base para o espaço nulo de $Y(\alpha)$, ou seja, $Y(\alpha)Y^\perp(\alpha) = 0$) e, então, multiplicando o resultado à esquerda por

$$\begin{bmatrix} I & \tilde{A}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}(\alpha) & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

e à direita pela matriz transposta, tem-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)P(\alpha)\tilde{A}'(\alpha) - P(\alpha) & * & * \\ \tilde{C}(\alpha)P(\alpha)\tilde{A}'(\alpha) & -\gamma I + \tilde{C}(\alpha)P(\alpha)\tilde{C}'(\alpha) & * \\ \tilde{B}'(\alpha) & \tilde{D}'(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.8)$$

que é equivalente, por complemento de Schur, ao *bounded real lemma* dado em (1.50) aplicado ao sistema (4.3). \square

No Teorema 4.1, a fim de tornar as desigualdades apresentadas lineares nas variáveis de otimização, pode-se utilizar uma escolha fixa de $Y(\alpha)$, como por exemplo, a sugerida no Teorema 4.2. Entretanto, fixar uma variável pode dificultar a obtenção de uma solução viável. Uma alternativa é introduzir uma relaxação, conforme sugerido em Felipe e Oliveira (2021). Deste modo, a desigualdade (4.5) do Teorema 4.1 é solucionada substituindo $A(\alpha)$ por $\bar{A}(\alpha) = rA(\alpha)$ com $r \in [0, +\infty)$. Assim, para $r \in [0, 1)$, é mais fácil verificar a estabilidade de $\bar{A}(\alpha)$ do que de $A(\alpha)$. Além disso, se $r \geq 1$, a estabilidade de $\bar{A}(\alpha)$ implica na estabilidade de $A(\alpha)$.

Teorema 4.2. *Substitua $A(\alpha)$ por $\bar{A}(\alpha) = rA(\alpha)$ no Teorema 4.1. Em seguida, para a escolha particular*

$$Y(\alpha) = Y_0 = \begin{bmatrix} 0 & \xi I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

em que $\xi \in (1/2, +\infty)$ é um parâmetro escalar livre, sempre existe um r finito e um γ suficientemente grande para os quais (4.5) é válida.

Demonstração. Observe que a desigualdade (4.5), com $r = 0$ ($\bar{A}(\alpha) = 0$), $B_f = 0$, $A_f = 0$ e $X(\alpha) = -(1/2)Y'_0$ fornece, após o complemento de Schur,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{B}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}'(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathbb{T}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} -\gamma I & \star \\ \tilde{D}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}'(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathbb{T}_2} - \underbrace{\begin{bmatrix} -P(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & P(\alpha) - \xi^2 I & -I + \xi I \\ 0 & -I + \xi I & -I \end{bmatrix}}_{\mathbb{T}_2} \succ 0.$$

Para γ suficientemente grande, o termo \mathbb{T}_1 pode ser desconsiderado e, aplicando o complemento de Schur novamente em $\mathbb{T}_2 \prec 0$, tem-se

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & 0 \\ 0 & P(\alpha) - \xi^2 I + (\xi - 1)^2 I \end{bmatrix} \prec 0$$

que é assegurado ao escolher $P(\alpha) = \tau I$ com

$$0 < \tau < 2\xi - 1.$$

□

Uma condição suficiente para o projeto de um filtro \mathcal{H}_2 positivo para sistemas positivos de tempo discreto é fornecida a seguir.

Teorema 4.3. *Sejam $\bar{Y}_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 8$, matrizes dadas. Se existirem matrizes dependentes de parâmetros $0 \prec P(\alpha) = P'(\alpha) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_f) \times (n_x+n_f)}$, $0 \prec M(\alpha) = M'(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$, $X_g(\alpha) \in \mathbb{R}^{(3n_x+3n_f+n_z) \times (4n_x+4n_f)}$, $X_t(\alpha) \in \mathbb{R}^{(2n_x+2n_f+n_z+n_w) \times (4n_x+4n_f)}$, matrizes $A_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_y}$, $C_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n_f}$, $D_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ e um escalar $\rho > 0$ tais que (4.6),*

$$Q_g(\alpha) + X_g(\alpha)Y_g(\alpha) + Y'_g(\alpha)X'_g(\alpha) \prec 0, \quad (4.10)$$

$$Q_t(\alpha) + X_t(\alpha)Y_t(\alpha) + Y'_t(\alpha)X'_t(\alpha) \prec 0, \quad (4.11)$$

$$\text{Tr}(M(\alpha)) \leq \rho^2 \quad (4.12)$$

sejam válidas para todo $\alpha \in \Lambda$, com

$$Y_g(\alpha) = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1(\alpha) & \bar{Y}_2(\alpha) & \bar{Y}_3(\alpha) & \bar{Y}_4(\alpha) \end{bmatrix}, Y_t(\alpha) = \begin{bmatrix} \bar{Y}_5(\alpha) & \bar{Y}_6(\alpha) & \bar{Y}_7(\alpha) & \bar{Y}_8(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$X_g(\alpha) = \begin{bmatrix} \bar{X}'_1(\alpha) & \bar{X}'_2(\alpha) & \bar{X}'_3(\alpha) & \bar{X}'_4(\alpha) \end{bmatrix}', X_t(\alpha) = \begin{bmatrix} \bar{X}'_5(\alpha) & \bar{X}'_6(\alpha) & \bar{X}'_7(\alpha) & \bar{X}'_8(\alpha) \end{bmatrix}',$$

$$Q_g(\alpha) = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & \star & \star & \star \\ 0 & P(\alpha) & \star & \star \\ \tilde{B}'(\alpha) & 0 & -I & \star \\ \tilde{A}'(\alpha) & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$Q_t(\alpha) = \begin{bmatrix} -M(\alpha) & \star & \star & \star \\ 0 & P(\alpha) & \star & \star \\ \tilde{D}'(\alpha) & 0 & -I & \star \\ \tilde{C}'(\alpha) & -I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

e $\tilde{A}(\alpha)$, $\tilde{B}(\alpha)$, $\tilde{C}(\alpha)$, e $\tilde{D}(\alpha)$ dadas por (4.4), então (4.2) é um filtro positivo e ρ é um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema (4.3).

Demonstração. Análogo ao Teorema 4.1, as desigualdades em (4.6) garantem a positividade do filtro (4.2) e, se (4.10) é verificada, constata-se que $\bar{Y}_4(\alpha)$ possui posto completo. Assim, pode-se escrever

$$Y_g(\alpha) = \bar{Y}_4(\alpha) \begin{bmatrix} -R(\alpha) & -T(\alpha) & -U(\alpha) & I \end{bmatrix},$$

sendo

$$R(\alpha) = -\bar{Y}_4^{-1}(\alpha)\bar{Y}_1(\alpha), \quad T(\alpha) = -\bar{Y}_4^{-1}(\alpha)\bar{Y}_2(\alpha), \quad U(\alpha) = -\bar{Y}_4^{-1}(\alpha)\bar{Y}_3(\alpha).$$

Então, pré- e pós-multiplicando (4.10) respectivamente por

$$Y_g^{\perp'}(\alpha) = \begin{bmatrix} \text{-----} & I & \text{-----} \\ R(\alpha) & T(\alpha) & U(\alpha) \end{bmatrix}$$

e $Y_g^{\perp}(\alpha)$, em que $Y_g^{\perp}(\alpha)$ é uma base do espaço nulo de $Y_g(\alpha)$ (ou seja, $Y_g(\alpha)Y_g^{\perp}(\alpha) = 0$), e, em seguida, multiplicando a desigualdade resultante à esquerda por

$$\begin{bmatrix} I & \tilde{A}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

e à direita pela matriz transposta, tem-se (1.54). Seguindo um desenvolvimento similar com $Y_t(\alpha)$ e (4.11), a condição (1.53) do Lema 1.16 pode ser obtida, garantindo que, com (4.12), ρ é um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema (4.3). \square

Na sequência, possíveis valores iniciais de $Y_g(\alpha)$ e $Y_t(\alpha)$ que garantem uma solução factível para o Teorema 4.3 são sugeridos.

Teorema 4.4. *Adote $\bar{A}(\alpha) = rA(\alpha)$ ao invés de $A(\alpha)$ no Teorema 4.3. Posteriormente, valendo-se das escolhas particulares*

$$Y_g(\alpha) = Y_t(\alpha) = Y_{g0} = Y_{t0} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma I & 0 & -(1/\sigma)I \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

para um valor apropriado de $\sigma > 0$, sempre há uma solução factível para as condições (4.10), (4.11) e (4.12).

Demonstração. Escolhendo $r = 0$ ($\bar{A}(\alpha) = 0$), $B_f = 0$, $A_f = 0$, $X_g'(\alpha) = -1/2Y_{g0}$, $X_t'(\alpha) = -1/2Y_{t0}$ e aplicando o complemento de Schur em (4.10) e (4.11), obtêm-se respectivamente

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)\tilde{B}'(\alpha) & 0 \\ 0 & P(\alpha) - \sigma^2 I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} -M(\alpha) + \tilde{D}(\alpha)\tilde{D}'(\alpha) + \sigma^2\tilde{C}(\alpha)\tilde{C}'(\alpha) & 0 \\ 0 & P(\alpha) - \sigma^2I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.17)$$

Note que, $P(\alpha) = vI$, com $v \in (0, \sigma^2)$, garante que os blocos (2,2) de (4.16) e de (4.17) sejam definidos negativos. Ademais, sempre existe uma $M(\alpha)$ garantindo que o bloco (1,1) de (4.17) seja definido negativo. O bloco (1,1) de (4.16) implica que

$$\sigma^2I \succ P = vI \succ \begin{bmatrix} E(\alpha)E(\alpha)' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

garantindo que a escolha¹

$$\sigma^2 > v > \lambda_M = \max_{\{i=1, \dots, n_x\}, \{\alpha \in \Lambda\}} \{\bar{\lambda}_i(\alpha)\} \quad (4.18)$$

certifica que (4.16) tenha sempre uma solução factível. \square

Observação 4.1. O Teorema 4.3 pode ser escrito em termos do gramiano de observabilidade com simples modificações, alterando as variáveis de decisão $P(\alpha)$, $M(\alpha)$ por $W(\alpha)$, $S(\alpha)$ e fazendo $\tilde{A}(\alpha) = \tilde{A}'(\alpha)$, $\tilde{B}(\alpha) = \tilde{C}'(\alpha)$, $\tilde{C}(\alpha) = \tilde{B}'(\alpha)$ e $\tilde{D}(\alpha) = \tilde{D}'(\alpha)$.

Observação 4.2. Os teoremas 4.1 e 4.3 também podem ser usados no projeto de filtros para sistemas lineares incertos no tempo discreto (não necessariamente positivos), simplesmente desconsiderando as restrições de positividade (4.6).

4.2.3 Método iterativo

Com condições iniciais factíveis para os teoremas 4.1 e 4.3, um procedimento iterativo pode ser construído. O algoritmo aumenta o valor de r gradativamente até $r \geq 1$. Em seguida, $r = 1$ é fixado e a minimização do custo garantido se inicia. Lembrando que, como $\text{He}(X(\alpha)Y(\alpha)) = \text{He}(Y'(\alpha)X'(\alpha))$, todos os possíveis valores para $Y(\alpha)$ são escolhas válidas para $X'(\alpha)$. Isso também é válido para $Y_g(\alpha)$ com $X'_g(\alpha)$ em (4.10) e $Y_t(\alpha)$ com $X'_t(\alpha)$ em (4.11). Perceba que, com essas atualizações, a factibilidade é sempre assegurada e os novos valores de r são maiores (ou iguais) aos anteriores, e os valores de ρ e γ são menores (ou iguais) aos anteriores.

O Algoritmo 3, mostrado mais adiante, é dividido nas seguintes etapas:

- Etapa 1 (Estabilidade): Defina o número máximo de iterações it_{\max} e a precisão do custo garantido tol . Inicialize o contador de iterações $m = 0$ e $Y(\alpha)$ (Teorema 4.1) satisfazendo (4.9) com $\xi \in (1/2, \infty)$ ou $Y_g(\alpha)$ e $Y_t(\alpha)$ (Teorema 4.3) como em (4.15), atendendo (4.18). Em seguida, aplique uma relaxação na estabilidade do sistema filtrado, substituindo $A(\alpha)$ por $\bar{A}(\alpha) = rA(\alpha)$ para resolver as condições dos teoremas 4.1 ou 4.3. Maximize r , incremente m e atualize $Y(\alpha) = X'(\alpha)$ (Teorema 4.1) ou $Y_g(\alpha) = X'_g(\alpha)$ e

¹ O i -ésimo autovalor da matriz $E(\alpha)E'(\alpha)$ para um valor fixo de α é denotado por $\bar{\lambda}_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, n_x$.

$Y_t(\alpha) = X_t'(\alpha)$ (Teorema 4.3) enquanto $r < 1$ e $m < it_{\max}$. Se $r \geq 1$, a estabilidade assintótica de $\tilde{A}(\alpha)$ está assegurada. Então, remova a relaxação fixando $r = 1$ e prossiga para a etapa 2. Caso contrário, o procedimento é encerrado sem um filtro estável.

- Etapa 2 (Custo garantido): Minimize o limitante de desempenho \mathcal{H}_2 , $\rho_m = \rho$, sujeito às condições (4.6), (4.10), (4.11) e (4.12) (Teorema 4.3) ou o limitante \mathcal{H}_∞ , $\gamma_m = \gamma$, sujeito às condições (4.5) e (4.6) (Teorema 4.1). Na sequência, incremente m , e atualize $Y(\alpha)$ (Teorema 4.1) ou $Y_g(\alpha)$ e $Y_t(\alpha)$ (Teorema 4.3) enquanto $m < it_{\max}$ e $|\gamma_m - \gamma_{m-1}| > tol$ (Teorema 4.1) ou $|\rho_m - \rho_{m-1}| > tol$ (Teorema 4.3).

Algoritmo 3: FILTRO POSITIVO \mathcal{H}_∞ (OU \mathcal{H}_2)

```

1 Filtro-Positivo( $A, E, C_z, E_z, C_y, E_y, tol, it_{\max}$ )
2  $m \leftarrow 0, Y_0$  (ou  $Y_{g0}, Y_{t0}$ ),  $etapa \leftarrow 1, A \leftarrow r_m A$ ;
3 enquanto  $m < it_{\max}$  faça
4   se  $etapa = 1$  então
5     maximize  $r_m$  sujeito a  $P \succ 0$ , (4.5), (4.6), (ou (4.6), (4.10), (4.11), (4.12));
6     se  $r_m \geq 1$  & factível então
7        $r_m \leftarrow 1, etapa \leftarrow 2$ ;
8     fim
9   fim
10  se  $etapa = 2$  então
11    minimize  $\gamma_m$  (ou  $\rho_m$ ) sujeito a  $P \succ 0$ , (4.5), (4.6), (ou (4.6), (4.10), (4.11),
12      (4.12));
13    se  $|\gamma_m - \gamma_{m-1}| \leq tol$  (ou  $|\rho_m - \rho_{m-1}| \leq tol$ ) então
14      retorna  $\gamma_m$  (ou  $\rho_m$ );
15    fim
16   $m \leftarrow m + 1, Y_m \leftarrow X'$  (ou  $Y_{tm} \leftarrow X'_t, Y_{gm} \leftarrow X'_g$ );
17 fim

```

4.2.4 Exemplos numéricos

As rotinas foram programadas em Matlab-R2017a, utilizando os *parsers* ROL-MIP (AGULHARI *et al.*, 2012) e Yalmip (LÖFBERG, 2004) e o SDP *solver* Mosek (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000). O computador utilizado foi um Intel® Core™i7-7700 (3.60 GHz×8), 15.6 GiB, Linux (Ubuntu 18.04.5 LTS).

Dois exemplos com motivação prática ilustram a aplicabilidade das condições de projeto propostas neste capítulo. Os casos dual e primal são testados e o melhor resultado é mantido. Nas simulações numéricas, as matrizes dependentes de parâmetros são consideradas como polinômios homogêneos, os graus das variáveis X_i , $i = 1, \dots, 4$ e \bar{X}_j , $j = 1, \dots, 8$ (apresentadas nas condições como genericamente dependentes do parâmetro $\alpha \in \Lambda$) são iguais a zero, e os graus das outras variáveis matriciais são iguais a um. O Algoritmo 3 é implementado com $X_{1,2,5}$ e $\bar{X}_{2,6}$ como matrizes arbitrárias, $X_{3,4}$ e $\bar{X}_{3,5,7}$ iguais a zero, e $\bar{X}_{1,4,8}$ como simétricas, $it_{\max} = 100$, $tol = 10^{-3}$, $\xi = 1$ e $\sigma = 2$. Outras escolhas, especialmente para ξ e σ , podem produzir resultados diferentes (piores ou melhores). Um melhor comportamento numérico pode ser obtido definindo *a priori* limites para os custos garantidos γ ou ρ durante a etapa 1 (que podem ser tratados diretamente como variáveis de otimização, ou podem ser minimizados por bisseção).

Exemplo 4.1. *Considere o modelo de Leslie que descreve a dinâmica populacional estruturada de uma certa praga, retirado de Li et al. (2010).*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 \end{bmatrix} w(k), \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix} w(k), \end{aligned} \quad (4.19)$$

em que $x(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]'$, sendo $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $x_3(k)$ o número de pragas juvenis, imaturas e adultas no tempo k . Além disso, f_i denota a taxa de natalidade dos pais na classe de idade i e s_i expressa a taxa de indivíduos que sobrevivem da classe de idade i para a classe $i+1$. Os valores dos parâmetros são os mesmos que em Li et al. (2010) e podem ser vistos a seguir

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.1595, f_2 = 0.1890, f_3 = 0.2713, s_1 = 0.5091, s_2 = 0.6740, \\ b_1 &= 0.1350, b_2 = 0.0128, b_3 = 0.0128, b_4 = 0.0510, b_5 = 0.1021, \\ b_6 &= 0.1250, d_1 = 0, d_2 = 0.1250, d_3 = 0.1460, d_4 = d_1, c = 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Em Li et al. (2010), condições LMIs iterativas baseadas em um sistema aumentado são propostas para o projeto de filtro \mathcal{H}_∞ positivo de ordem reduzida para sistemas positivos precisamente conhecidos no tempo discreto. O objetivo é estimar a quantidade de pragas juvenis (primeiro estado), minimizando o limitante da norma \mathcal{H}_∞ da dinâmica de erro. O filtro

positivo para $n_f = 1$, reportado em [Li et al. \(2010\)](#), está associado com um custo \mathcal{H}_∞ garantido de $\gamma = 0.1415$, sendo apresentado na sequência

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} 0.22819 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.00003 & 0.00003 \end{bmatrix}, \\ C_f &= \begin{bmatrix} 0.14130 \end{bmatrix}, D_f = \begin{bmatrix} 0.17889 & 0.34404 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por outro lado, o Algoritmo 3 fornece (após 11 iterações) o filtro de primeira ordem dado por (números truncados com 4 dígitos decimais)

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} 0.0000 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.9671 & 2.4386 \end{bmatrix}, \\ C_f &= \begin{bmatrix} 0.2433 \end{bmatrix}, D_f = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0215 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

associado a $\gamma = 0.0744$ (aproximadamente 50% menor do que o custo em [Li et al. \(2010\)](#)) e com a norma \mathcal{H}_∞ de $\|\mathcal{G}_e\|_\infty = 0.0743$. Uma vez que as matrizes do filtro em [Lacerda et al. \(2011\)](#) são recuperadas como $A_f = \hat{K}^{-1}K_1$, $B_f = \hat{K}^{-1}K_2$, C_f e D_f , com \hat{K} definida positiva, uma condição suficiente para a positividade pode ser obtida impondo \hat{K} como diagonal, $K_i \geq 0$, $i = 1, 2$, $C_f \geq 0$ e $D_f \geq 0$, resultando em $\gamma = 0.1444$. Esta estratégia, que pode ser vista como uma alternativa para obtenção de filtros positivos de ordem completa, é utilizada no controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados para sistemas lineares positivos de tempo contínuo em [Tanaka e Langbort \(2011\)](#). Observe que [Lacerda et al. \(2011\)](#) requer uma busca no espaço dos parâmetros, que foi feita com $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 \in \{10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 1, \dots, 10^6\}$ (13 valores).

A complexidade computacional pode ser estimada em termos de número de variáveis escalares (\mathcal{V}) e linhas de LMIs (\mathcal{L}). Neste exemplo, o filtro de ordem completa de [Lacerda et al. \(2011\)](#) foi obtido com $\mathcal{V} = 90$ e $\mathcal{L} = 41$, o filtro de primeira ordem de [Li et al. \(2010\)](#) utilizou $\mathcal{V} = 94$ e $\mathcal{L} = 27$ e o filtro de primeira ordem resultante do Algoritmo 3 (A3) possui $\mathcal{V} = 66$ e $\mathcal{L} = 26$. Os valores de \mathcal{V} e \mathcal{L} correspondem a cada vez que as condições são resolvidas. Fica claro que a abordagem proposta fornece os melhores resultados, superando até mesmo o filtro positivo de ordem completa derivado de [Lacerda et al. \(2011\)](#).

Exemplo 4.2. Considere o processo de tanques sêxtuplos, ilustrado na Figura 7, que é uma extensão do modelo apresentado em [Johansson \(2000\)](#). As entradas são v_1 e v_2 (tensões aplicadas nas bombas) e os estados são os níveis dos tanques (em torno de pontos nominais pré-especificados). As saídas medidas y_1 e y_2 são as tensões dos sensores de nível dos tanques.

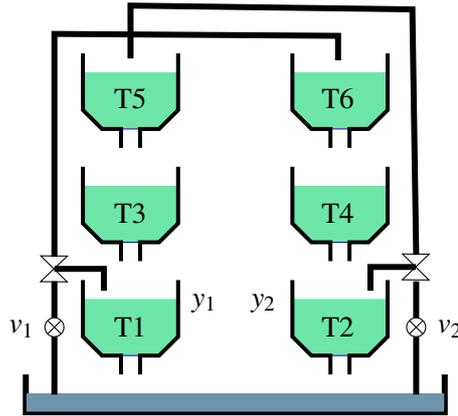


Figura 7 – Diagrama esquemático do processo de tanque sêxtuplo.

O objetivo é projetar um filtro positivo estável que estime os estados não medidos (níveis dos tanques 3, ..., 6), minimizando um limitante para a norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ da dinâmica de erro (4.3). A representação em espaço de estados do sistema positivo em tempo contínuo é dada por

$$A_c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{(A_1 T_3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{(A_2 T_4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 & \frac{A_5}{(A_3 T_5)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} & 0 & \frac{A_6}{(A_4 T_6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_6} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} \frac{\eta_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\eta_2 k_2}{A_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{(1-\eta_2)k_2}{A_5} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\eta_1)k_1}{A_6} \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_j = \frac{A_j}{a_j} \sqrt{\frac{2h_j}{g}}, \quad j = 1, \dots, 6,$$

em que B_c e C_c são matrizes com elementos não negativos e A_c é uma matriz Metzler. Os significados dos parâmetros presentes nessas matrizes são descritos a seguir: A_i e a_i são a área da seção transversal dos tanques e orifícios de saída ($A_{1,3,5} = 28$, $A_{2,4,6} = 32$, $a_{1,3,5} = 0.071$, $a_{2,4,6} = 0.057 \text{ cm}^2$); h_i é o nível da água ($h_1 = 12.4$, $h_2 = 12.7$, $h_{3,5} = 1.8$, $h_{4,6} = 1.4 \text{ cm}$); $g = 981 \text{ cm/s}^2$ é a aceleração gravitacional; $k_c = 0.5 \text{ V/cm}$ é o ganho dos sinais de nível medidos; $\eta_1 = 0.7$, $\eta_2 = 0.6$ determinam a relação de vazão ($\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$); e $k_1 = 3.33$, $k_2 = 3.35$ são os ganhos de tensão aplicados à bomba.

Uma matriz dinâmica positiva em tempo discreto pode ser obtida fazendo $A = I + tA_c$ (aproximação de Euler de primeira ordem), em que t é a taxa de amostragem. Neste exemplo, t não é precisamente conhecida, mas pertence ao intervalo dado por $t \in [3.5, 5]$. Além disso, para garantir robustez contra falhas parciais do sensor, uma matriz de saída dada pela combinação convexa de $0.1C_y$ e C_y , com $C_y = C_c$ (valor nominal) também é considerada, resultando em um sistema incerto com $N = 4$ vértices. As outras matrizes no sistema (4.1) são $E = B_c$, $C_z = [0 \mid I_4]$, $E_z = 0$, $E_y = 0.9I$.

Tabela 5 – Custos garantidos \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 (γ e ρ) obtidos pelo Algoritmo 3 (m iterações) e Lacerda *et al.* (2011) (estendido, denotado por L^*), \mathcal{V} e \mathcal{L} (respectivamente, variáveis escalares e linhas LMIs para cada teste das condições LMIs) e as normas de pior caso ($\|\mathcal{G}_e\|_\infty$ e $\|\mathcal{G}_e\|_2$ computadas por meio de uma grade fina em α) para o Exemplo 4.2.

	n_f	estritamente próprio				próprio			
		m	γ	$\ \mathcal{G}_e\ _\infty$	\mathcal{V}, \mathcal{L}	m	γ	$\ \mathcal{G}_e\ _\infty$	\mathcal{V}, \mathcal{L}
A3	1	35	1.4024	1.3818	268, 144	49	1.0120	1.0114	276, 152
	6	48	0.9998	0.9997	818, 289	49	0.9994	0.9991	826, 297
L^*	6		1.6174	1.6169	1110, 420		1.0040	1.0040	1118, 428
	n_f	m	ρ	$\ \mathcal{G}_e\ _2$	\mathcal{V}, \mathcal{L}	m	ρ	$\ \mathcal{G}_e\ _2$	\mathcal{V}, \mathcal{L}
A3	1	30	0.4832	0.4400	315, 228	47	0.4807	0.4324	323, 236
	6	38	0.3481	0.3283	920, 413	70	0.3301	0.3071	928, 421
L^*	6		0.5920	0.5917	1054, 408		0.5914	0.5910	1062, 416

A Tabela 5 mostra os resultados fornecidos por A3 para os filtros positivos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de ordens $n_f = 1, 6$, assim como os de Lacerda *et al.* (2011) (ordem completa $n_f = 6$, denotado por L^* , adaptado para projeto de filtro positivo e para considerar $D_f \neq 0$ no caso \mathcal{H}_2), com os respectivos números de \mathcal{V} e de \mathcal{L} . Em ambos os métodos, os filtros estritamente próprios podem ser obtidos zerando D_f (variável do problema). Conforme observa-se, A3 fornece os melhores resultados em termos de custos garantidos. Os números de \mathcal{V} e \mathcal{L} são menores no caso de filtros de ordem reduzida e semelhantes quando $n_f = n_x$ (filtros de ordem completa), porém, A3 requer em todos os casos mais iterações do que o número de parâmetros escalares testados na busca linear do método L^* .

4.2.5 Conclusões

Um algoritmo iterativo baseado em LMIs foi proposto para o projeto de filtros positivos para sistemas lineares positivos incertos de tempo discreto, considerando como critério de desempenho as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 . Conforme ilustrado por exemplos numéricos, o método pode lidar com filtros de ordem reduzida e restrições de positividade com menos conservadorismo quando comparado com técnicas da literatura. As deficiências do método são a convergência lenta (em alguns casos) e a necessidade de procurar um filtro estável viável (fase 1 do algoritmo) antes de iniciar a minimização do custo garantido.

Capítulo 5

Considerações Finais

A primeira contribuição apresentada nesta tese concerne a estabilidade global de sistemas lineares positivos com saturação nos atuadores. Foram elaboradas técnicas de análise para o tempo contínuo e discreto. Nas condições propostas a representação da saturação é feita em termos da função rampa e considerando relaxações para o teste da copositividade de matrizes. A eficácia das abordagens propostas é demonstrada por meio de exemplos numéricos envolvendo comparações com as técnicas baseadas nas condições generalizadas de setor.

A segunda contribuição é uma condição para tratar o problema de síntese de um ganho estático por realimentação de saída que assegura um custo garantido \mathcal{H}_2 para sistemas lineares positivos em tempo contínuo com parâmetros incertos pertencentes a um polítopo. A condição proposta é solucionada por meio de um procedimento iterativo. Dentre as vantagens do método proposto, pode-se citar a capacidade de tratar o controle por realimentação de estados e de saída indistintamente, a descentralização ou as restrições de magnitude no ganho de controle e a presença de incertezas em todas as matrizes do sistema. Exemplos numéricos ilustram que o método proposto pode fornecer resultados menos conservadores, em geral ao preço de um maior esforço computacional quando comparado com outras técnicas disponíveis na literatura.

Ainda no âmbito de controle, outro resultado desta tese é o controle por realimentação dinâmica de saída de ordem completa para sistemas lineares positivos sujeitos a incertezas intervalares, considerando o tempo contínuo e discreto. As condições propostas novamente são solucionadas por meio de um procedimento iterativo. Nos exemplos o algoritmo proposto obteve ganhos de controle com menos iterações e tempo computacional também menor em relação aos resultados de outras técnicas da literatura.

Por fim, investigou-se o projeto de filtros positivos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida para sistemas lineares incertos positivos em tempo discreto. Mais uma vez a resolução das condições propostas é feita por um procedimento iterativo. Conforme apresentado nos exemplos numéricos, a abordagem proposta fornece resultados menos conservadores quando comparada a outras técnicas da literatura.

Como comentário final, vale ressaltar que as condições apresentadas para sistemas

positivos politópicos podem ser adaptadas de forma imediata para tratar sistemas intervalares, seguindo o que foi feito na Seção 3.3. Além dessa extensão direta, na sequência apresentam-se outros tópicos pertinentes para investigação.

Perspectivas

Para trabalhos futuros, considera-se:

1. O emprego de diferentes tipos de funções de Lyapunov, como funções quadráticas por partes ou do tipo Lur'e, nas condições de análise propostas no Capítulo 2.
2. Analisar o efeito do uso de distintas condições iniciais nos algoritmos iterativos utilizados para solucionar os problemas de síntese.
3. A elaboração de condições de síntese, ou seja, propor condições para realimentação de estados e de saída, estática e dinâmica, para sistemas positivos sujeitos a saturação, partindo dos resultados do Capítulo 2.
4. No âmbito de sistemas positivos intervalares, abordado no Capítulo 3, é possível abordar o problema de observadores de estado.
5. Adaptar o projeto de filtros, apresentado no Capítulo 4, para o caso contínuo no tempo. Além disso, melhorias no projeto de filtros positivos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ seriam proporcionadas pelo uso de um filtro *ad hoc* estável e positivo para a construção de uma condição inicial mais adequada para o algoritmo.

Publicações

Durante o desenvolvimento desta pesquisa de doutorado foram produzidos artigos científicos baseados: nas contribuições inéditas apresentadas nesta tese, e também nos resultados obtidos com o aprimoramento de métodos previamente propostos durante o mestrado da autora (SPAGOLLA, 2019). Segue a lista de artigos publicados no período.

- A. Spagolla, C. F. Morais, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres. Realimentação estática de saída de sistemas LPV positivos a tempo discreto. Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2019), p. 1-6, Ouro Preto, MG, Brasil.
DOI: <<https://doi.org/10.17648/sbai-2019-111231>>
- A. Spagolla, C. F. Morais, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_∞ static output-feedback control for positive uncertain discrete-time linear systems. In Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control, pages 6772–6777, Nice, France, December 2019.

DOI: <<https://doi.org/10.1109/CDC40024.2019.9166460>>.

- A. A. Lemaire, A. Spagolla, C. F. Morais, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. An LMI-based algorithm for static output-feedback stabilization of continuous-time positive polytopic linear systems. In Proceedings of the 21st IFAC World Congress, Berlin, Germany, July 2020.
DOI: <<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.478>>.
- A. Spagolla, C. F. Morais, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Stabilization and \mathcal{H}_2 static output-feedback control of discrete-time positive linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021.
DOI: <<https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3064822>>.
- A. Spagolla, C. F. Morais, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Reduced order positive filter design for positive uncertain discrete-time linear systems. IEEE Control Systems Letters, v. 6, p. 1148-1153, 2022.
DOI: <<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3089368>>.
- A. Spagolla, A. A. Lemaire, C. F. Morais, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control for positive continuous-time uncertain linear systems. Journal of the Franklin Institute, v. 359, p. 4842-4855, 2022.
DOI: <<https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2022.04.017>>.
- A. Spagolla, C. F. Morais, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Dynamic Output-Feedback Controller Design for Interval Positive Linear Systems. Proceedings of the 2022 IEEE International Conference on Automation/XXV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA), p. 1-6, Curicó, Chile, 2022.
DOI: <<https://doi.org/10.1109/ICA-ACCA56767.2022.10006124>>

O seguinte artigo foi submetido para o XVI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2023).

- A. Spagolla, G. Valmorbida, C. F. Morais, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Estabilidade global de sistemas lineares positivos sujeitos a saturação nos atuadores.

Referências

- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 2298–2305. <<http://rolmip.github.io>>. Citado 4 vezes nas páginas 29, 45, 56 e 80.
- AIT RAMI, M. Solvability of static output-feedback stabilization for LTI positive systems. *Systems & Control Letters*, v. 60, n. 9, p. 704–708, set. 2011. Citado na página 36.
- AIT RAMI, M.; BOKHARAIE, V. S.; MASON, O.; WIRTH, F. R. Stability criteria for SIS epidemiological models under switching policies. *Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B*, v. 19, n. 9, p. 2865–2887, nov. 2014. Citado na página 19.
- ANDERSEN, E. D.; ANDERSEN, K. D. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In: FRENK, H.; ROOS, K.; TERLAKY, T.; ZHANG, S. (Ed.). *High Performance Optimization*. [S.l.]: Springer US, 2000, (Applied Optimization, v. 33). p. 197–232. <<http://www.mosek.com>>. Citado 5 vezes nas páginas 45, 56, 67, 68 e 80.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. *Optimal Filtering*. Englewood, NJ: Prentice-Hall, 1979. Citado na página 71.
- ARNESON, H.; LANGBORT, C. A linear programming approach to routing control in networks of constrained linear positive systems. *Automatica*, v. 48, n. 5, p. 800–807, maio 2012. Citado na página 36.
- BARMISH, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 46, n. 4, p. 399–408, ago. 1985. Citado na página 25.
- BERMAN, A.; PLEMMONS, R. J. *Nonnegative Matrices in The Mathematical Sciences*. New York, NY: Academic Press, 1979. (Computer Science and Applied Mathematics). Citado na página 19.

BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, v. 13, n. 1, p. 65–72, jul. 1989. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 35.

BHATTACHARYYA, S.; PATRA, S. Static output-feedback stabilization for MIMO LTI positive systems using LMI-based iterative algorithms. *IEEE Control Systems Letters*, v. 2, n. 2, p. 242–247, abr. 2018. Citado na página 50.

BLANCHINI, F.; GIORDANO, G. Piecewise-linear Lyapunov functions for structural stability of biochemical networks. *Automatica*, v. 50, n. 10, p. 2482–2493, out. 2014. Citado na página 19.

BLIMAN, P.-A. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 42, n. 6, p. 2016–2042, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 26.

BLONDEL, V. D.; TSITSIKLIS, J. N. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, v. 36, n. 9, p. 1249–1274, set. 2000. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 50.

BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. Citado 8 vezes nas páginas 24, 25, 34, 37, 39, 40, 53 e 71.

BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004. Citado na página 31.

BRIAT, C. Robust stability and stabilization of uncertain linear positive systems via integral linear constraints: L_1 -gain and L_∞ -gain characterization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 23, n. 16, p. 1932–1954, nov. 2013. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 38.

BRU, R.; ROMERO-VIVO, S. Positive Systems. In: *Proceedings of the third Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 2009)*. Valencia, Spain: [s.n.], 2009. Citado na página 19.

CHESI, G. LMI techniques for optimization over polynomials in control: A survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, n. 11, p. 2500–2510, nov. 2010. Citado na página 19.

CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 3, p. 365–370, mar. 2005. Citado na página 19.

CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. *Homogeneous Polynomial Forms for Robust-*

ness Analysis of Uncertain Systems. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2009. v. 390. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 390). Citado na página 19.

CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. *Introduction to Algorithms*. 3rd. ed. [S.l.]: MIT press, London, England, 2009. Citado na página 39.

DATTA, K. B.; PATEL, V. V. H_∞ -based synthesis for robust controller of interval plants. *Automatica*, v. 32, n. 11, p. 1575–1579, nov. 1996. Citado na página 22.

DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, v. 37, n. 4, p. 261–265, jul. 1999. Citado na página 18.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257. Citado 3 vezes nas páginas 18, 35 e 40.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. \mathcal{H}_2 state feedback control design of continuous-time positive linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, n. 11, p. 5844–5849, nov. 2017. Citado 6 vezes nas páginas 13, 20, 49, 56, 57 e 58.

DUAN, Z. S.; ZHANG, J. X.; ZHANG, C. S.; MOSCA, E. Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, v. 42, n. 11, p. 1919–1926, nov. 2006. Citado na página 71.

EBIHARA, Y. \mathcal{H}_2 state-feedback synthesis under positivity constraint: Upper and lower bounds computation of the achievable performance. In: *Proceedings of the 2018 European Control Conference*. Limassol, Cyprus: [s.n.], 2018. p. 2867–2872. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 49.

EBIHARA, Y.; COLANERI, P.; GEROMEL, J. C. H_2 state-feedback synthesis for discrete-time systems under positivity constraint. In: *Proceedings of the SICE Annual Conference 2018 (SICE 2018)*. Tokyo, Japan: [s.n.], 2018. p. 39–46. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 38 e 49.

EBIHARA, Y.; COLANERI, P.; GEROMEL, J. C. \mathcal{H}_2 state-feedback control for continuous-time systems under positivity constraint. In: *Proceedings of the 2019 European Control Conference*. Naples, Italy: [s.n.], 2019. p. 3797–3802. Citado 8 vezes nas páginas 13, 20, 35, 49, 56, 57, 58 e 59.

EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. LMI approach to linear positive system analysis and synthesis. *Systems & Control Letters*, v. 63, p. 50–56, jan. 2014. Citado 5 vezes nas páginas 19, 35, 36, 38 e 49.

FARINA, L. Positive systems in the state space approach: main issues and recent results. In: *Proceedings of MTNS*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 1–15. Nenhuma citação no texto.

FARINA, L.; RINALDI, S. *Positive Linear Systems: Theory and Applications*. New York, NY: John Wiley & Sons, 2000. Citado 7 vezes nas páginas 19, 32, 33, 36, 41, 49 e 52.

FELIPE, A. *Um algoritmo de busca local baseado em LMIs para computar ganhos de realimentação estabilizantes diretamente como variáveis de otimização*. Dissertação (M.Sc. Thesis) — FEEC – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brazil, 2017. Citado na página 20.

FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F. An LMI-based algorithm to compute robust stabilizing feedback gains directly as optimization variables. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 66, n. 9, p. 4365–4370, set. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 50, 72 e 74.

GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 4, n. 4, p. 421–448, July-August 1994. Citado na página 40.

GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A. The projective method for solving linear matrix inequalities. *Mathematical Programming: Series B*, v. 77, n. 2, p. 163–190, 1997. Citado na página 18.

GAROFALO, F.; CELENTANO, G.; GLIELMO, L. Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 38, n. 2, p. 281–284, fev. 1993. Citado na página 23.

GEROMEL, J. C. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n. 1, p. 168–175, jan. 1999. Citado na página 71.

GEROMEL, J. C.; DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 41, n. 3, p. 700–711, 2002. Citado na página 71.

GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; BERNUSSOU, J. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 29, n. 2, p. 381–402, mar. 1991. Citado na página 18.

GROFF, L. B.; VALMORBIDA, G.; JR., J. M. G. An implicit representation for the analysis of piecewise affine discrete-time systems. *Automatica*, v. 147, p. 110730, jan. 2023. Citado na página 42.

HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, G. *Inequalities*. 2. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1952. Citado na página 26.

HERNANDEZ-VARGAS, E. A.; MIDDLETON, R. H. Modeling the three stages in HIV infection. *Journal of Theoretical Biology*, v. 320, p. 33–40, mar. 2013. Citado na página 19.

HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge, MA, USA: Cambridge University Press, 1991. Citado na página 19.

HU, T.; LIN, Z. *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Boston, MA: Birkhäuser, 2001. Citado na página 41.

JOHANSSON, K. H. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 8, n. 3, p. 456–465, maio 2000. Citado na página 81.

KASZKUREWICZ, E.; BHAYA, A. *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation*. Boston, MA: Birkhäuser, 1999. Citado na página 34.

KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 2nd. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996. Citado na página 30.

LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices. *Signal Processing*, v. 91, n. 5, p. 1115–1122, maio 2011. Citado 4 vezes nas páginas 13, 71, 81 e 83.

LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 48, n. 3, p. 500–504, mar. 2003. Citado na página 18.

LI, P.; LAM, J.; SHU, Z. H_∞ positive filtering for positive linear discrete-time systems: An augmentation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, n. 10, p. 2337–2342, out. 2010. Citado 4 vezes nas páginas 19, 71, 80 e 81.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. <<http://yalmip.github.io>>. Citado 4 vezes nas páginas 45, 56, 67 e 80.

LUENBERGER, D. G. *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models & Applications*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., 1979. Citado 4 vezes nas páginas 19, 32, 33 e 50.

LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992. Citado na página 24.

MA, R.; WANG, X.; LIU, Y. Robust stability of switched positive linear systems with interval uncertainties via multiple time-varying linear copositive Lyapunov functions. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, v. 30, p. 285–292, nov. 2018. Citado na página 23.

MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_∞ static output

feedback control of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition probability matrix. In: *Proceedings of the 2014 American Control Conference*. Portland, OR, USA: [s.n.], 2014. p. 489–494. Citado na página 38.

OLIVEIRA, R. C. L. F. *Estudo de Robustez em Sistemas Lineares por Meio de Relaxações em Termos de Desigualdades Matriciais Lineares*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 23.

OLIVEIRA, R. C. L. F. IA892 – *Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)*: Aula 6: Soluções polinomiais para LMIs robustas. 2023. Disponível em: <https://www.fee.unicamp.br/profs/ricfow/IA892/relaxpoly_lmi.pdf> Acesso em: 06 abr. 2023. Citado na página 26.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; de Oliveira, M. C.; PERES, P. L. D. Convergent LMI relaxations for robust analysis of uncertain linear systems using lifted polynomial parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, v. 57, n. 8, p. 680–689, ago. 2008. Citado na página 19.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. A simple and less conservative test for D-stability. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 26, n. 2, p. 415–425, jan. 2005. Citado na página 34.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, jul. 2007. Citado 4 vezes nas páginas 19, 26, 27 e 29.

PAIM, C. *Análise e Controle de Sistemas Lineares sujeitos a Saturação*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, 2003. Citado na página 30.

PALHARES, R. M.; GONÇALVES, E. N. Desigualdades matriciais lineares em controle. In: AGUIRRE, L. A. (Ed.). *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação*. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 2007. v. 1, p. 155–195. Citado 3 vezes nas páginas 18, 22 e 24.

PARRILO, P. A. *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2000. Citado na página 39.

PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; BACHELIER, O.; BERNUSSOU, J. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, v. 40, n. 1, p. 21–30, maio 2000. Citado na página 18.

PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE, B.; SWEVERS, J.; VANDENBERGHE, L. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, v. 58, n. 7, p. 510–518, jul. 2009. Citado na página 35.

- PRIMLOS, J. A.; GIANNELLI, M. Kuhn-Tucker-based stability conditions for systems with saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 10, p. 1643–1647, out. 2001. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 42.
- RAMOS, D. C. W.; PERES, P. L. D. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 4, p. 675–678, abr. 2002. Citado na página 25.
- RANTZER, A. Scalable control of positive systems. *European Journal of Control*, v. 24, p. 72–80, jul. 2015. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 41.
- RANTZER, A. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma for positive systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 61, n. 5, p. 1346–1349, maio 2016. Citado 3 vezes nas páginas 34, 36 e 49.
- RANTZER, A.; VALCHER, M. E. A tutorial on positive systems and large scale control. In: *Proceedings of the 57th IEEE Conference on Decision and Control*. Miami Beach, FL, USA: [s.n.], 2018. p. 3686–3697. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 33.
- ROSZAK, B.; DAIVSON, E. J. Necessary and sufficient conditions for stabilizability of positive LTI systems. *Systems & Control Letters*, v. 58, n. 7, p. 474–481, jul. 2009. Citado na página 36.
- SCHERER, C.; WEILAND, S. *Linear Matrix Inequalities in Control*. 2015. Citado na página 18.
- SCHERER, C. W. Higher-order relaxations for robust LMI problems with verifications for exactness. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, HI, USA: [s.n.], 2003. p. 4652–4657. Citado na página 27.
- SCHERER, C. W. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 27, n. 2, p. 365–395, jun. 2005. Citado na página 27.
- SCHERER, C. W.; HOL, C. W. J. Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs. *Mathematical Programming: Series B*, v. 107, n. 1–2, p. 189–211, jun. 2006. Citado na página 19.
- SHEN, J.; LAM, J. Improved results on H_∞ model reduction for continuous-time linear systems over finite frequency ranges. *Automatica*, v. 53, p. 79–84, mar. 2015. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 38.
- SHEN, J.; LAM, J. Static output-feedback stabilization with optimal L_1 -gain for positive linear systems. *Automatica*, v. 63, p. 248–253, jan. 2016. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 38.

SHEN, J.; LAM, J. Some extensions on the bounded real lemma for positive systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, n. 6, p. 3034–3038, jun. 2017. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 38.

SHU, Z.; LAM, J.; GAO, H.; DU, B.; WU, L. Positive observers and dynamic output-feedback controllers for interval positive linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 55, n. 10, p. 3209–3222, nov. 2008. Citado 9 vezes nas páginas 50, 60, 61, 62, 64, 67, 68, 69 e 70.

SILVA, J. G. da; TARBOURIECH, S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, v. 5, p. 4451–4456, mar. 2003. Citado na página 30.

SILVA, J. G. da; TARBOURIECH, S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 1, p. 106–111, jan. 2005. Citado na página 30.

SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Bristol, PA: Taylor & Francis, 1998. Citado na página 40.

SPAGOLLA, A. *Análise de Estabilidade e Síntese de Controle para Sistemas Lineares Positivos Discretos no Tempo por meio de Desigualdades Matriciais Lineares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 85.

SU, T. J.; SHYR, W. J. Robust D-stability for linear uncertain discrete time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 2, p. 425–428, 1994. Citado na página 23.

TANAKA, T.; LANGBORT, C. The bounded real lemma for internally positive systems and H-infinity structured static state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 9, p. 2218–2223, set. 2011. Citado 8 vezes nas páginas 19, 34, 35, 36, 38, 49, 71 e 81.

TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; QUEINNEC, I. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. London, UK: Springer, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 41.

TARBOURIECH, S.; PRIEUR, C.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 51, n. 8, p. 1364–1371, ago. 2006. Citado na página 30.

VÄLIAHO, H. Criteria for copositive matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 81, p. 19–34, set. 1986. Citado na página 39.

VALMORBIDA, G. *Semi-Definite Programming Methods for the Stability Analysis of Non-*

linear Systems. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Saclay. Gif-sur-Yvette, France, 2021. Citado na página 30.

WANG, C.; HUANG, T. Static output feedback control for positive linear continuous-time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 23, n. 14, p. 1537–1544, set. 2013. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 38.

XIE, W. An equivalent LMI representation of Bounded Real Lemma for continuous-time systems. *Journal of Inequalities and Applications*, v. 2008, n. 1, p. 1–8, jan. 2008. Citado na página 35.

YEDAVALLI, R. K. It suffices to check only two special vertex matrices in Kronecker space to analyze the robust stability of an interval matrix. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference*. Anchorage, AK, USA: [s.n.], 2002. v. 1, p. 1266–1271. Citado na página 23.

YIN, Y.; LIN, Z.; LIU, Y.; TEO, K. L. Event-triggered constrained control of positive systems with input saturation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 28, n. 11, p. 3532–3542, jul. 2018. Citado na página 41.

ZAIDI, I.; CHAABANE, M.; TADEO, F.; BENZAOUIA, A. Static state-feedback controller and observer design for interval positive systems with time delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, v. 62, n. 5, p. 506–510, maio 2015. Citado na página 50.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of Robust Control*. New York, NY: Prentice Hall, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 50.