



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Betania Silva Carneiro Campello

**Análise temporal no auxílio à decisão  
multicritério apoiada em uma estrutura tensorial  
dos dados e métodos de processamento de sinais**

Campinas

2023

Betania Silva Carneiro Campello

**Análise temporal no auxílio à decisão multicritério apoiada  
em uma estrutura tensorial dos dados e métodos de  
processamento de sinais**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na Área de Engenharia de Computação.

Orientador: Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano

Coorientador Prof. Dr. Leonardo Tomazeli Duarte

Este trabalho corresponde à versão final da tese defendida pela aluna Betania Silva Carneiro Campello, e orientada pelo Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano.

Campinas

2023

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

C153a Campello, Betania Silva Carneiro, 1984-  
Análise temporal no auxílio à decisão multicritério apoiada em uma estrutura tensorial dos dados e métodos de processamento de sinais / Betania Silva Carneiro Campello. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: João Marcos Travassos Romano.

Coorientador: Leonardo Tomazeli Duarte.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Análise de multicritério. 2. Processamento de sinais. 3. Previsão de séries temporais. 4. Álgebra tensorial. 5. Análise de séries temporais. I. Romano, João Marcos Travassos, 1960-. II. Duarte, Leonardo Tomazeli, 1982-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações Complementares

**Título em outro idioma:** Temporal analysis in multicriteria decision making supported by a tensor-based data structure and signal processing methods

**Palavras-chave em inglês:**

Multi-criteria analysis

Signal processing

Time series prediction

Tensor algebra

Time-series analysis

**Área de concentração:** Engenharia de Computação

**Titulação:** Doutora em Engenharia Elétrica

**Banca examinadora:**

João Marcos Travassos Romano [Orientador]

Charles Casimiro Cavalcante

Priscila Cristina Berbet Rampazzo

Caroline Maria de Miranda Mota

Rosângela Ballini

**Data de defesa:** 30-03-2023

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-9609-8724>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/9668497061923439>

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato(a): Betania Silva Carneiro Campello RA: 180839

Data de defesa: 30 de março de 2023

Título da Tese: "Análise temporal no auxílio à decisão multicritério apoiada em uma estrutura tensorial dos dados e métodos de processamento de sinais"

Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano

Prof. Dr. Charles Casimiro Cavalcante

Profa. Dra. Priscila Cristina Berbert Rampazzo

Profa. Dra. Caroline Maria de Miranda Mota

Profa. Dra Rosângela Ballini

A Ata de Defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no SIGA (Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese) e na Secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.



# Agradecimentos

Agradeço principalmente aos meus pais, Mônica e Francisco, por terem sempre me incentivado a gostar de estudar e pelo apoio total aos meus estudos. À minha irmã Gabriela, meu cunhado Antônio e meus sobrinhos Luíza e Gustavo, sempre presentes, apoiando e comemorando comigo cada vitória. À minha família em geral, em especial à minha avó Nilza e minha tia Suzana e tio Ronaldo, tia Josélia e minha madrinha Márcia, que estiveram sempre presentes.

Aos meus orientadores Profs. João Romano e Leonardo Duarte, pela confiança, apoio, orientação, conselhos e compreensão ao longo de toda essa jornada e por terem proporcionado que meu doutorado fosse algo leve, agradável e com aprendizados que levarei para toda a minha vida acadêmica. À minha orientadora do intercâmbio na Universidade de Ottawa, Profa. Sarah BenAmor, que, apesar de pouco tempo juntas, conseguiu contribuir, orientar, apoiar e se tornar especial na minha trajetória acadêmica.

Aos colegas e professores de laboratório. Em especial aos Profs. Renato Lopes, Levy Boccato, Rafael Ferrari e Romis Attux e aos colegas Renan, Renata e Guilherme. À minha amiga, Elaine, que esteve presente e me apoiando ao longo dessa jornada tão especial.

À equipe da FEEC e FCA pelo apoio.

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil, processos 168968/2018-5 e 202395/2020-0.

# Resumo

Métodos de análise de decisão multicritério (MCDA) vêm sendo bastante utilizados nas últimas décadas para auxiliar a tomada de decisão, principalmente em cenários cuja escolha pode causar impactos significativos para a sociedade ou empresas. Esse métodos visam modelar as relações entre um conjunto de alternativas avaliadas de acordo com múltiplos critérios. De forma geral, nas abordagens clássicas de MCDA, consideram-se os valores dos critérios como sendo aqueles disponíveis no momento em que a decisão deve ser feita, sem avaliar a evolução dos critérios ao longo do tempo através das suas séries temporais. Apesar da consolidação teórica e prática dessa abordagem clássica em MCDA, não considerar a temporalidade dos critérios leva à perda de informações importantes em diversos tipos de decisão. Diante disso, o presente estudo propõe uma análise mais abrangente dos dados envolvidos no problema da decisão multicritério. Modelamos os dados em uma estrutura tensorial (funções multidimensionais), em vez da clássica estrutura matricial, em que a terceira dimensão do tensor representa a série temporal dos critérios. A partir dessa estrutura tensorial, propomos novos métodos, baseados em extensões dos métodos clássicos de MCDA, como também novas metodologias híbridas de MCDA e processamento de sinais. As metodologias propostas são validadas utilizando dados reais. Assim, nesta tese, de forma geral, discutimos o benefício de incorporar a análise temporal em problemas envolvendo multicritério e suas possíveis aplicações.

**Palavras-chaves:** Análise de decisão multicritério; MCDA; Análise temporal multicritério; Multi-período; Predição adaptativa.

# Abstract

Multicriteria decision analysis (MCDA) methods have been widely used in recent decades to assist decision-making, especially in scenarios where choices can have significant impacts on society or businesses. These methods aim to model the relationships between a set of alternatives evaluated according to multiple criteria. In general, in classical MCDA approaches, the criterion values are considered as those available at the time the decision must be made, without evaluating the evolution of criteria over time through their time series. Despite the theoretical and practical consolidation of this classical MCDA approach, not considering the temporality of criteria leads to the loss of important information in various types of decision-making. Therefore, this study proposes a more comprehensive analysis of the data involved in the multicriteria decision problem. We model the data in a tensor structure (multidimensional functions), instead of the classical matrix structure, where the third dimension of the tensor represents the time series of the criteria. Based on this tensor structure, we propose new methods, based on extensions of classical MCDA methods, as well as new hybrid MCDA and signal processing methodologies. The proposed methodologies are validated using real data. Thus, in this thesis, we discuss the benefit of incorporating temporal analysis into multicriteria problems and possible applications in the field.

**Keywords:** Multi-criteria decision analysis; MCDA; Multi-criteria temporal analysis; Multi-period; Adaptive prediction.

# Lista de ilustrações

|                                                                                                                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1.1 – Esquema da pesquisa baseada na estrutura na análise temporal dos critérios com uma estrutura tensorial dos dados em MCDA. . . . .                                       | 18 |
| Figura 2.1 – Representação gráfica de uma matriz de decisão com 3 alternativas e 2 critérios. . . . .                                                                                | 31 |
| Figura 2.2 – Exemplo de como calcular os pontos ideal positivo no método TOPSIS. . . . .                                                                                             | 32 |
| Figura 2.3 – Exemplo de como calcular os pontos ideal negativo no método TOPSIS. . . . .                                                                                             | 32 |
| Figura 2.4 – Exemplos de curvas de utilidade para cada critério. . . . .                                                                                                             | 43 |
| Figura 2.5 – Exemplos de valor global para as alternativas dado um certo ordenamento. . . . .                                                                                        | 44 |
| Figura 2.6 – Representação gráfica das variáveis $w_{j\ell}$ a serem estimadas no método UTASTAR. . . . .                                                                            | 49 |
| Figura 3.1 – Estruturas de dados em MCDA: clássica (matricial) e proposta (tensorial). . . . .                                                                                       | 53 |
| Figura 3.2 – Exemplo das séries temporais de preço da matéria-prima e taxa de câmbio de dois países. . . . .                                                                         | 54 |
| Figura 3.3 – Exemplos de sinais senoidais contínuo $x(t)$ e discreto $x(n)$ em função do tempo $t$ . . . . .                                                                         | 56 |
| Figura 3.4 – Ilustração de um tensor de terceira ordem e seus três tipos de subtensores matriciais. . . . .                                                                          | 58 |
| Figura 3.5 – Esquema geral de um filtro de erro de predição. . . . .                                                                                                                 | 59 |
| Figura 4.1 – Esquema das abordagens três abordagens de agregação considerando as séries temporais dos critérios. . . . .                                                             | 64 |
| Figura 4.2 – Gráficos e matrizes do exemplo de agregação no espaço temporal e no espaço de atributos. . . . .                                                                        | 67 |
| Figura 4.3 – Exemplo das séries temporais e valores futuros dos critérios preço de matéria prima e taxa de câmbio considerando dois países. . . . .                                  | 77 |
| Figura 4.4 – Média do desvio padrão do erro de predição $\bar{s}_e$ de acordo com os valores da SNR para $m = 10$ . . . . .                                                          | 81 |
| Figura 4.5 – $\tau_{\mathbf{r}^* \times \mathbf{r}^c}^c$ , e $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$ de acordo com os valores da SNR para $m = 5, 10$ , e $15$ . . . . . | 82 |
| Figura 4.6 – Predição usando diferentes passos de predição: $\lambda = 1$ , $\lambda = 3$ , e $\lambda = 5$ , respectivamente. . . . .                                               | 86 |
| Figura 4.7 – Sinais $\mathbf{p}(i, j, :)$ e valores de predição para Alternativas 1 e 2 e critérios 1 e 2, quando $\lambda = 1$ . . . . .                                            | 87 |
| Figura 4.8 – Teste 1: Resultados de pontuação para alternativas na simulação de Monte Carlo. . . . .                                                                                 | 88 |
| Figura 4.9 – Teste 2: Resultados de pontuação para alternativas na simulação de Monte Carlo. . . . .                                                                                 | 89 |

|                                                                                                                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 4.10–Teste 3: Resultados de pontuação para alternativas na simulação de Monte Carlo. . . . .                                                                                                                  | 90  |
| Figura 4.11–Exemplo de séries temporais e do sinal de predição de dois critérios: preço da matéria-prima e taxa de câmbio, para dois países. . . . .                                                                 | 92  |
| Figura 4.12–Linha do tempo dos dados considerando o período atual o ano de 2012 e para $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6. . . . .                                                                                        | 95  |
| Figura 5.1 – Ilustração da abordagem de desagregação considerando características relevantes para a decisão das séries temporais, de onde obtém-se as funções de valor dos critérios em cada característica. . . . . | 100 |
| Figura 5.2 – Exemplo de espaço de decisão, espaço objetivo e fronteira de Pareto em problemas de otimização multiobjetivo. . . . .                                                                                   | 105 |
| Figura 5.3 – Funções de valor da característica 1: média. . . . .                                                                                                                                                    | 109 |
| Figura 5.4 – Funções de valor da característica 2: coeficiente angular. . . . .                                                                                                                                      | 109 |
| Figura 5.5 – Funções de valor da característica 1: média. . . . .                                                                                                                                                    | 112 |
| Figura 5.6 – Funções de valor da característica 2: coeficiente angular. . . . .                                                                                                                                      | 112 |

# Lista de tabelas

|                                                                                                                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 2.1 – Tipos de função de preferência . . . . .                                                                                                                                                     | 35  |
| Tabela 2.2 – Exemplo numérico de uma decisão de meios de transporte. . . . .                                                                                                                              | 45  |
| Tabela 2.3 – Possíveis valores para as funções de utilidade do exemplo numérico. . .                                                                                                                      | 46  |
| Tabela 2.4 – Exemplo numérico quando há inconsistências na decisão. . . . .                                                                                                                               | 46  |
| Tabela 2.5 – Possíveis valores para as funções de utilidade quando há inconsistência<br>na decisão. . . . .                                                                                               | 47  |
| Tabela 4.1 – Dados dos dez países emergentes. Retirado do estudo (BANAMAR;<br>SMET, 2018). . . . .                                                                                                        | 72  |
| Tabela 4.2 – Valores dos critérios nas alternativas considerando o espaço de caracte-<br>rísticas. . . . .                                                                                                | 73  |
| Tabela 4.3 – Ranking obtido de acordo com a estratégia utilizada. . . . .                                                                                                                                 | 74  |
| Tabela 4.4 – Matriz de probabilidade dos ordenamentos. . . . .                                                                                                                                            | 75  |
| Tabela 4.5 – Padrão 1: Ordenamentos alvo e de predição para SNR = 30dB e $m = 5$ . .                                                                                                                      | 83  |
| Tabela 4.6 – Padrão 1: $\mathbf{M}$ (%) para SNR = 30dB e $m = 5$ . . . . .                                                                                                                               | 83  |
| Tabela 4.7 – Padrão 2: Ordenamentos alvo e de predição para SNR = 30dB e $m = 5$ . .                                                                                                                      | 84  |
| Tabela 4.8 – Padrão 2: $\mathbf{M}$ (%) para SNR = 30dB. . . . .                                                                                                                                          | 84  |
| Tabela 4.9 – Padrão 3: Ordenamentos alvo e de predição para SNR = 10dB e $m = 5$ . .                                                                                                                      | 84  |
| Tabela 4.10–Padrão 3: $\mathbf{M}$ (%) para SNR = 10dB. . . . .                                                                                                                                           | 84  |
| Tabela 4.11–Padrão 4: Ordenamentos alvo e de predição para SNR = 0dB e $m = 5$ . .                                                                                                                        | 85  |
| Tabela 4.12–Padrão 4: $\mathbf{M}$ (%) para SNR = 0 dB. . . . .                                                                                                                                           | 85  |
| Tabela 4.13–Teste 1: Ordenamentos com dados do período atual, alvo e de predição<br>para $\lambda = 1$ , $t = 2017$ . . . . .                                                                             | 87  |
| Tabela 4.14–Teste 1: $\mathbf{M}$ (%) para $\lambda = 1$ , $t = 2017$ . . . . .                                                                                                                           | 88  |
| Tabela 4.15–Teste 2: Ordenamentos com dados do período atual, alvo e de<br>predição para $\lambda = 3$ , $t = 2015$ . . . . .                                                                             | 88  |
| Tabela 4.16–Teste 2: $\mathbf{M}$ (%) para $\lambda = 3$ , $t = 2015$ . . . . .                                                                                                                           | 88  |
| Tabela 4.17–Teste 3: Ordenamentos com dados do período atual, alvo e de<br>predição para $\lambda = 5$ , $t = 2013$ . . . . .                                                                             | 89  |
| Tabela 4.18–Teste 3: $\mathbf{M}$ (%) para $\lambda = 5$ , $t = 2013$ . . . . .                                                                                                                           | 90  |
| Tabela 4.19–Comparação dos ordenamentos obtidos a partir de três estratégias<br>diferentes. . . . .                                                                                                       | 96  |
| Tabela 4.20–Tensor de característica dos sinais de predição, matriz com dados do<br>período atual e tensor de características dos sinais de 2007 à 2012. . . .                                            | 96  |
| Tabela 5.1 – Exemplo numérico de um tensor $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{m \times n \times h}$ , considerando as caracte-<br>rísticas média e coeficiente angular, três critérios e três alternativas. . . | 102 |
| Tabela 5.2 – Resultado das variáveis $w_{kjl}$ obtido após aplicar o UTASTAR-T. . . .                                                                                                                     | 108 |

|                                                                                                                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 5.3 – Resultado das variáveis $w_{kj\ell}$ e suas ocorrências obtido na simulação<br>análise pós-otimização multiobjetivo. . . . .                                                        | 110 |
| Tabela 5.4 – Resultado das variáveis $w_{kj\ell}$ e suas ocorrências obtidos na simulação<br>da análise pós-otimização multiobjetivo quando há uma ordem de<br>relevância dos critérios. . . . . | 111 |

# Lista de abreviaturas e siglas

**IDH** Índice de Desenvolvimento Humano

**MAVT** Multi-Attribute Value Theory

**MCDM** Multicriteria Decision Making

**MCDA** Multiple Criteria Decision Analysis

**MMSE** Minimum Mean-Squared Error

**MSE** Mean Square Error

**PDA** Preference Disaggregation Analysis

**PROMETHEE** Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations

**RLS** Recursive Least-Square

**ROR** Robust Ordinal Regression

**SMAA** Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis

**SNR** Signal-to-Noise Ratio

**SOR** Stochastic Ordinal Regression

**SVD** Singular Value Decomposition

**TOPSIS** Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution

**UTA** UTility Additive



# Sumário

|            |                                                                                         |           |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                                       | <b>16</b> |
| <b>1.1</b> | <b>Objetivos</b>                                                                        | <b>19</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Organização da tese</b>                                                              | <b>19</b> |
| <b>1.3</b> | <b>Publicações</b>                                                                      | <b>19</b> |
| <br>       |                                                                                         |           |
| <b>I</b>   | <b>FUNDAMENTOS</b>                                                                      | <b>22</b> |
| <br>       |                                                                                         |           |
| <b>2</b>   | <b>ANÁLISE DE DECISÃO MULTICRITÉRIO</b>                                                 | <b>23</b> |
| <b>2.1</b> | <b>O processo de decisão multicritério: conceitos e definições</b>                      | <b>24</b> |
| 2.1.1      | Elementos básicos no apoio à decisão multicritério                                      | 24        |
| 2.1.2      | Relações de preferência na decisão multicritério                                        | 26        |
| 2.1.3      | Abordagens para a obtenção das preferências do decisor                                  | 27        |
| 2.1.4      | Tipos de problemática na decisão multicritério                                          | 28        |
| 2.1.5      | Aspectos gerais dos métodos de decisão multicritério                                    | 28        |
| 2.1.6      | O processo de decisão multicritério                                                     | 30        |
| <b>2.2</b> | <b>Abordagens essenciais no processo de agregação em MCDA</b>                           | <b>30</b> |
| 2.2.1      | Método TOPSIS                                                                           | 30        |
| 2.2.2      | Método PROMETHEE                                                                        | 34        |
| 2.2.3      | Método SMAA                                                                             | 38        |
| 2.2.4      | Distância de Kendall tau                                                                | 40        |
| <b>2.3</b> | <b>Desagregação em MCDA: família de métodos UTA</b>                                     | <b>41</b> |
| 2.3.1      | Funções de utilidade                                                                    | 42        |
| 2.3.2      | Princípios gerais do método UTA                                                         | 43        |
| 2.3.3      | Método UTA                                                                              | 47        |
| 2.3.4      | Método UTASTAR                                                                          | 48        |
| 2.3.5      | Problema de robustez no modelo de decisão                                               | 49        |
| <br>       |                                                                                         |           |
| <b>3</b>   | <b>FERRAMENTAS PARA EXPLORAÇÃO DA TEMPORALIDADE NA ANÁLISE DE DECISÃO MULTICRITÉRIO</b> | <b>51</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Revisão de estudos que consideram a análise temporal em MCDA</b>                     | <b>51</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Motivação da análise temporal em MCDA</b>                                            | <b>53</b> |
| <b>3.3</b> | <b>Conceitos e técnicas de processamento de sinais</b>                                  | <b>55</b> |
| 3.3.1      | Álgebra tensorial                                                                       | 57        |
| 3.3.2      | Predição adaptativa                                                                     | 59        |
| 3.3.2.1    | O algoritmo dos mínimos quadrados recursivos (RLS - <i>Recursive least-squares</i> )    | 61        |

|            |                                                                                                                                   |            |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>II</b>  | <b>CONTRIBUIÇÕES</b>                                                                                                              | <b>63</b>  |
| <b>4</b>   | <b>PROPOSTA DE MÉTODO DE AGREGAÇÃO EM ESTRUTURAS TENSORIAIS</b>                                                                   | <b>64</b>  |
| <b>4.1</b> | <b>Análise do espaço de características: uma proposta baseada no método TOPSIS</b>                                                | <b>66</b>  |
| 4.1.1      | Motivação da análise de decisão no espaço de características                                                                      | 67         |
| 4.1.2      | Método TOPSIS estendido para agregação do espaço de características                                                               | 68         |
| 4.1.3      | Experimentos com dados reais e discussão                                                                                          | 71         |
| 4.1.4      | Sumário da proposta no espaço de características                                                                                  | 75         |
| <b>4.2</b> | <b>Predição adaptativa no apoio à tomada de decisão</b>                                                                           | <b>75</b>  |
| 4.2.1      | Motivação da análise de decisão utilizando predição adaptativa                                                                    | 77         |
| 4.2.2      | Algoritmo da metodologia proposta                                                                                                 | 78         |
| 4.2.3      | Experimentos numéricos                                                                                                            | 78         |
| 4.2.3.1    | Simulação utilizando dados sintéticos                                                                                             | 79         |
| 4.2.3.1.1  | Resultados aplicando PROMETHEE II na matriz $\hat{P}$                                                                             | 80         |
| 4.2.3.1.2  | Resultados aplicando SMAA                                                                                                         | 82         |
| 4.2.3.2    | Experimentos utilizando dados reais                                                                                               | 85         |
| 4.2.4      | Sumário da proposta baseada em predição adaptativa                                                                                | 90         |
| <b>4.3</b> | <b>Apoio à decisão multicritério empregando a predição adaptativa em uma representação baseada em tensores de características</b> | <b>91</b>  |
| 4.3.1      | Metodologia proposta                                                                                                              | 93         |
| 4.3.1.1    | Extensão do PROMETHEE II para a abordagem tensorial                                                                               | 93         |
| 4.3.1.2    | Algoritmo da metodologia proposta                                                                                                 | 94         |
| 4.3.2      | Experimentos utilizando dados reais                                                                                               | 94         |
| 4.3.3      | Sumário da proposta baseada em espaço de características com predição adaptativa                                                  | 97         |
| <b>5</b>   | <b>PROPOSTAS DE MÉTODOS DE DESAGREGAÇÃO EM ESTRUTURAS TENSORIAIS</b>                                                              | <b>99</b>  |
| <b>5.1</b> | <b>Abordagem proposta: método UTASTAR-T</b>                                                                                       | <b>99</b>  |
| 5.1.1      | Exemplo numérico do método UTASTAR-T                                                                                              | 102        |
| <b>5.2</b> | <b>Análise pós-otimização através de uma abordagem multiobjetivo</b>                                                              | <b>104</b> |
| 5.2.1      | Modelo matemático UTASTAR-T multiobjetivo                                                                                         | 106        |
| <b>5.3</b> | <b>Resultados computacionais e discussão</b>                                                                                      | <b>107</b> |
| <b>5.4</b> | <b>Sumário da proposta de desagregação com estruturas tensoriais</b>                                                              | <b>113</b> |
| <b>6</b>   | <b>CONCLUSÕES</b>                                                                                                                 | <b>115</b> |
| <b>6.1</b> | <b>Perspectivas de trabalhos futuros</b>                                                                                          | <b>116</b> |

**REFERÊNCIAS . . . . . 117**

# 1 Introdução

Muitas decisões pessoais, corporativas ou governamentais, envolvem diversos critérios a serem analisados, os quais podem ser conflitantes entre si. Um exemplo de escolha pessoal com múltiplos critérios é a compra de um apartamento, situação na qual o tomador de decisão pode considerar como critérios de decisão o preço, o nível de desenvolvimento do bairro (acessos a serviços, educação, etc.), entre outros. Decisões de investimentos também costumam ter diversos critérios envolvidos, tais como maximização do benefício e minimização do risco, que são critérios normalmente conflitantes, pois investimentos com maior rentabilidade têm maior risco. No âmbito governamental, um exemplo relevante é a escolha de projetos a serem implementados, considerando como critérios, por exemplo, o grau de necessidade da sociedade, o impacto ambiental, e o custo de implementação. Além das situações mencionadas, (TZENG; HUANG, 2011) apresenta outros exemplos de problemas que envolvem decisões sob múltiplos critérios.

As decisões multicritério podem ser complexas devido à necessidade de analisar muitos dados, e as consequências das escolhas podem ter impactos importantes em empresas e na sociedade em geral. Para auxiliar esse processo de decisão, uma subárea da pesquisa operacional, conhecida como análise de decisão multicritério (MCDA, do inglês *Multiple Criteria Decision Analysis* ou, ainda, MCDM, do inglês *MultiCriteria Decision Making*) (COSTA, 2012; GRECO; FIGUEIRA; EHRGOTT, 2016), surge como uma ferramenta útil. É importante destacar que na literatura utiliza-se o termo MCDA em escolas europeias, maioritariamente francesas, enquanto o termo MCDM é mais utilizado nas escolas americanas. As principais diferenças entre estas definições são discutidas em diversos estudos, tais como (ROY, 1990; LOOTSMA, 1990; MUNDA, 1993).

No que se refere à maneira com a qual os dados são processados, existem duas abordagens principais em MCDA: a *agregação* e a *desagregação*. A agregação é uma técnica utilizada para simplificar os dados por meio de métodos que combinam ou comparam os desempenhos das alternativas, incorporando opiniões e preferências do decisor. A partir de uma etapa de agregação, são geradas recomendações de escolha, ordenação ou classificação das alternativas - tais tarefas são comumente elencadas como as principais problemáticas em MCDA. Por outro lado, a desagregação é usada para explicar e modelar decisões. Isto é feito por meio da decomposição (desagregação) de medidas comparativas do desempenho das alternativas, identificando preferências do decisor. A desagregação em MCDA está relacionada com o campo do aprendizado de preferências (*preference learning*), que, por sua vez, apresenta conexões com a área de aprendizado de máquina (DOUMPOS; ZOPOUNIDIS, 2019). Uma característica interessante nos métodos de aprendizado de preferência é que há uma maior interação com o decisor, quando comparado às técnicas

mais usuais de aprendizado de máquina (MARTYN; KADZIŃSKI, 2023).

Em ambas as abordagens, agregação e desagregação, a estrutura de dados utilizada é a chamada *matriz de decisão*. Cada elemento da matriz representa o desempenho de uma alternativa em relação a um critério específico, ou seja, a avaliação de uma alternativa em certo critério está associado a um valor pontual. Este valor pode ser a média do desempenho do critério, o valor do critério em um determinado período, ou algum outro valor pontual (estático). Por exemplo, na escolha da compra de um apartamento, a avaliação no critério preço costuma ser o valor atual de compra do apartamento. (XU, 2008) ilustra diversas aplicações e métodos MCDA em que os critérios são valores pontuais.

Embora a análise pontual possa ser adequada em algumas decisões multicritério, ela pode se tornar limitada em muitas outras, pois, em decisões práticas, nem sempre a decisão multicritério é feita baseada em único valor. Em muitas decisões, é relevante analisar a evolução do critério ao longo do tempo (o *signal* ou a *série temporal* do critério), ou também analisar diversas medidas descritivas da série temporal simultaneamente, tais como média, tendência e variância. No exemplo da compra do apartamento, se o decisor deseja comprá-lo como investimento, além do valor atual de compra do apartamento, ele provavelmente levará em conta a tendência do preço, pois uma tendência de baixa no valor do apartamento o fará perder dinheiro em uma possível venda futura, bem como a volatilidade do preço, pois pode indicar riscos no investimento.

A análise de séries temporais é a base de inúmeras tomadas de decisão em diferentes áreas e seu emprego vem crescendo bastante nos últimos anos, com o aumento da capacidade de armazenamento e processamento de dados. Ela é amplamente utilizada em diversas áreas, incluindo finanças, economia, ciências sociais, meteorologia, saúde e tecnologia. Em finanças, por exemplo, a análise de séries temporais é usada para prever tendências de mercado e avaliar escolhas de investimentos (ZHANG; WANG, 2017). Na área de saúde, a informação temporal pode ser usada para monitorar, prevenir doenças e para avaliar o impacto de programas de saúde, ajudando a equipe da área de saúde a tomar decisões (REZAEI et al., 2016). No gerenciamento público, a análise das séries temporais pode auxiliar decisões de políticas no apoio a redução de mortalidade por suicídio (PRIDEMORE; SNOWDEN, 2009).

Assim, o modelo clássico utilizado em MCDA, que se apoia em uma análise pontual estruturada em uma matriz de decisão, torna-se um modelo simplificado para determinadas decisões pois desconsidera vários aspectos relevantes para a recomendação final e análise de preferências. Se técnicas de MCDA não conseguem modelar temporalidade, as soluções fornecidas ao decisor podem ser insatisfatórias, desencorajando o uso dessas técnicas. Os benefícios da análise temporal é, então, expandir as aplicações em MCDA, bem como modelar e representar melhor as preferências dos decisores.

Com essa motivação, abordamos neste estudo os aspectos temporais na pro-

75 blemática de decisão multicritério. Ao considerar a evolução dos valores dos critérios, a  
 estrutura matricial utilizada na literatura torna-se limitada. Propomos então uma nova  
 abordagem baseada em uma *estrutura tensorial*<sup>1</sup> — designa-se tensor a uma função de três  
 ou mais índices (SIDIROPOULOS et al., 2017; COSTA; FAVIER; ROMANO, 2018). Do  
 ponto de vista metodológico, isso significa que as entradas do tensor são dadas por uma  
 80 dimensão associada às alternativas, uma aos critérios e outra à série temporal. Esta nova  
 abordagem traz novos desafios, uma vez que grande parte dos métodos MCDA existentes  
 lidam com estruturas matriciais. Assim, utilizaremos ferramentas da álgebra tensorial,  
 de processamento de sinais e de análise de dados para o apoio à decisão multicritério  
 temporal.

85 Apresentamos na Figura 1.1 um esquema para sintetizar nossa pesquisa. A  
 partir dos estudos atuais de MCDA, que trabalham com a matriz de decisão, propomos  
 abranger mais informações do problema, de modo que os dados passam a ser estruturados  
 como um tensor. Apoiados nessa nova abordagem tensorial, focamos a pesquisa em duas  
 vertentes. Na primeira, tratamos da **agregação tensorial**, com a finalidade de obter  
 90 o ordenamento das alternativas baseado na análise temporal dos critérios. Na segunda,  
 consideramos a **desagregação tensorial** com o intuito de explicar e modelar preferências  
 do decisor também em relação à análise temporal dos critérios.

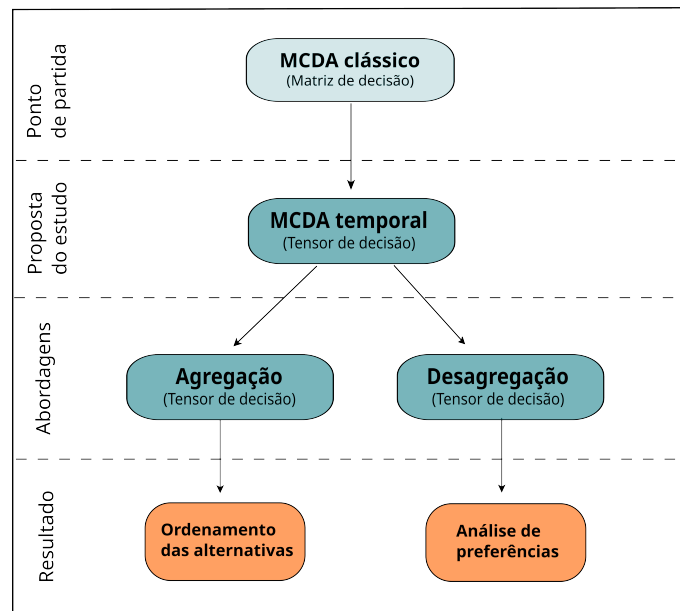


Figura 1.1 – Esquema da pesquisa baseada na estrutura na análise temporal dos critérios com uma estrutura tensorial dos dados em MCDA.

<sup>1</sup> Em física, o termo tensor possui um significado diferente. Porém, em diversas áreas, incluída a de processamento de sinais, o termo tensor é usado com o mesmo significado de arranjo multidimensional de dados (SIDIROPOULOS et al., 2017).

## 1.1 Objetivos

O objetivo da presente tese é propor novos métodos de MCDA, combinando-os com importantes aspectos da área de álgebra tensorial e de processamento de sinais. Mais especificamente, os objetivos principais da nossa pesquisa são:

- Estruturar em tensores os dados relevantes no apoio à tomada de decisão, incluindo comportamentos dinâmicos a serem encarados como séries temporais (sinais) ou preferências individuais;
- 100 • Desenvolver, a partir de tensores, novas metodologias baseadas em métodos MCDA e de processamento de sinais para fazer uma agregação dos dados e obter um ordenamento das alternativas;
- Elaborar novas técnicas de desagregação em MCDA para um estudo minucioso dos parâmetros do problema da tomada de decisão a fim de explicar e modelar preferências do decisor.

105

## 1.2 Organização da tese

Esta tese está dividida em duas partes: Na primeira, de Fundamentos, encontram-se os Capítulos 2 e 3. O Capítulo 2 apresenta alguns elementos importantes da análise de decisão multicritério. Mais especificamente, descrevem-se alguns métodos e faz-se uma revisão bibliográfica referente a área de MCDA. No Capítulo 3, faz-se uma revisão dos trabalhos que tratam da análise temporal em MCDA, discute-se a motivação dessa análise e descreve-se a estrutura e o processamento de dados que utilizamos no estudo.

110

Na segunda parte, Contribuições, têm-se os Capítulos 4, 5 e 6. O Capítulo 4 descreve as novas propostas para a abordagem da agregação tensorial. O Capítulo 5 trata da abordagem de desagregação tensorial. Esta tese é finalizada no Capítulo 6, com as conclusões obtidas e apontamentos para trabalhos futuros.

115

## 1.3 Publicações

Nesta seção, apresentamos os artigos que resultaram desta tese de doutorado e que foram publicados ou submetidos para publicação até o momento da defesa. Além disso, detalhamos os trabalhos apresentados em conferências científicas em âmbito nacional e internacional.

120

**Artigos submetidos em jornais:**

1. Campello, B. S. C., Duarte, L. T., & Romano, J. M. T. Multicriteria decision support employing adaptive prediction in a tensor-based feature representation.

#### 125 Artigos publicados em jornais:

1. Campello, B. S. C., Duarte, L. T., & Romano, J. M. T. (2022). Exploiting temporal features in multicriteria decision analysis by means of a tensorial formulation of the TOPSIS method. *Computers & Industrial Engineering*, 108915.
2. Campello, B. S. C., Duarte, L. T., & Romano, J. M. T. (2022). Dealing with multi-  
130 criteria decision analysis in time-evolving approach using a probabilistic prediction method. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 116, 105462.

#### Artigos apresentados em conferências nacionais e internacionais:

1. Betania S.C. Campello, Sarah Ben Amor, Leonardo T. Duarte, João M.T. Romano, "Preference disaggregation involving time-series", From Multiple-Criteria Decision  
135 Aid to Preference Learning - the DA2PL 2022, 17-18 november 2022.
2. Betania S.C. Campello, Sarah Ben Amor, Leonardo T. Duarte, João M.T. Romano. "A preference disaggregation method using time-series-based approach applied to basketball". 26th International Conference on Multiple Criteria Decision Making (MCDM2022). 26th June - 1st July 2022, Portsmouth Business School of University  
140 of Portsmouth.
3. Betania S.C. Campello, Sarah Ben Amor, Leonardo T. Duarte, João M.T. Romano. "Preference learning in multicriteria decision analyses: UTASTAR-T, a novel time-series-based optimization method." Optimization Days, May 16 to 18, 2022, at HEC Montréal, Canada.
- 145 4. Rafael A. Prochnow, Betania S.C. Campello, Luciano A. Mercadante, Leonardo T. Duarte, João M. T. Romano. Modelo Multicritério de apoio à decisão (MCDA) para análise dos quintetos do basquetebol. In: Congresso Brasileiro de Biomecânica, 2021. Congresso Brasileiro de Biomecânica - XIX CBB 2021, 2021.
5. Betania S.C. Campello, Rafael A. Prochnow, Luciano A. Mercadante, Leonardo T.  
150 Duarte, João M. T. Romano. Método de apoio à decisão multicritério em cenários dinâmicos aplicado ao basquetebol. In: INnovation for Systems Information and Decision meeting, 2021. Third Innovation for Systems Information and Decision Meeting, INSID 2021, 2021.



- 155 6. Betania S.C. Campello, Leonardo T. Duarte, João M. T. Romano. Uma abordagem de apoio à decisão multicritério baseado em predição probabilística e em uma representação tensorial de dados. XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais - SBrT 2020, 13–16 de Setembro de 2020, Florianópolis, SC.
- 160 7. Betania S.C. Campello, Leonardo T. Duarte, João M. T. “Adaptive prediction of financial time-series for decision-making using a tensorial aggregation approach”. In: ICASSP 2020-2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2020. p. 5435-5439.
- 165 8. Betania S.C. Campello, Leonardo T. Duarte, João M. T. Apoio à decisão multicritério em cenários dinâmicos: uma proposta baseada no método TOPSIS e em atributos temporais.. In: LI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2019, Limeira. LI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Brazil, 2019.

### **Seminário a convite:**

- 170 1. Betania S.C. Campello, apresentou o seminário: “Using temporal analysis to expand the application of multi-criteria decision making” no centro de pesquisa de decisão na Universidade de Leeds, UK, 16 de novembro de 2022.

# Parte I

## Fundamentos

## 2 Análise de decisão multicritério

Uma problemática da decisão recai na existência de múltiplos critérios que devem ser considerados no momento de analisar alternativas, sendo que esses critérios podem ser conflitantes entre si. A área que trata dessa problemática é conhecida como  
 5 análise de decisão multicritério (MCDA). Os estudos em MCDA têm diversas aplicações práticas em diferentes áreas, sendo algumas delas:

- *Saúde*: (BELACEL, 2000) propuseram uma aplicação clínica para classificar alternativas em categorias predefinidas no diagnóstico citopatológico da leucemia aguda. Também foram conduzidos estudos relacionados à farmacêutica para avaliar resultados favoráveis e desfavoráveis em certo tratamento ou medicamento (TERVONEN et al., 2011; LI et al., 2018; SAINT-HILARY et al., 2017). Outros estudos que tratam de aplicações e métodos de MCDA na saúde podem ser encontrados na revisão bibliográfica apresentada em (FRAZÃO et al., 2018);
- *Gestão de pessoas*: (GOCHET et al., 1997) tratou da classificação de pessoal em grupos de ocupação apropriados de acordo com suas qualificações. Além disso, o problema de avaliação do pessoal, que inclui múltiplos candidatos como alternativas e é baseado em vários critérios, é tratado de forma integrada com métodos de *big data* e MCDA em (MAGHSOODI et al., 2020). É possível encontrar mais estudos relacionados à gestão de pessoas em um estudo recente apresentado em (MAÊDA et al., 2021);
- *Esportes*: Em (BLANCO; SALMERÓN; GÓMEZ-HARO, 2018) jogadores de basquetebol são ordenados com base em critérios de eficiência, a abordagem é aplicada em um estudo de caso de basquetebol na liga ACB da Espanha. Ainda no basquetebol, (KIZIELEWICZ; DOBRYAKOVA, 2020) propuseram uma abordagem para avaliação de jogadores quando há incertezas nos dados. Em (PALCZEWSKI; SAŁABUN, 2019b) os autores propõem um método para gerar um ordenamento dos clubes de futebol considerados. (URBANIAK; WĄTRÓBSKI; SAŁABUN, 2020) trata do problema de avaliação de jogadores em *eSports* (competições organizadas de jogos eletrônicos);
- *Gestão financeira e econômica*: (ZOPOUNIDIS et al., 1999) estudaram a previsão de falhas de negócios com técnicas de análise multivariadas. (DOUMPOS; ZOPOUNIDIS, 1998) aplicaram técnicas de desagregação para avaliar riscos financeiros. (MARQUÉS; GARCÍA; SÁNCHEZ, 2020) trazem uma apresentação de métodos utilizados em aplicações financeiras no período 2000-2018;

- 35 • *Gestão ambiental e sustentabilidade*: (FRINI; BENAMOR, 2019) aplicam métodos  
MCDA considerando múltiplos períodos em contextos de sustentabilidade. (BAU-  
MANN et al., 2019) apresentam revisão de abordagens multicritério na avaliação  
de sistemas de armazenamento de energia. Outra revisão sistemática de métodos  
e aplicações em ambientes sustentáveis pode ser encontrada em (KANDAKOGLU;  
40 FRINI; AMOR, 2019).
- *Educação*: (CASTRO-LOPEZ et al., 2022) trataram da avaliação de critérios que  
influenciam na permanência de estudantes no ensino superior. (MACHADO et al.,  
2023) propôs um novo modelo para apoiar a escolha de metodologias de aprendizagem  
adequadas para o desenvolvimento das habilidades de colaboração, comunicação,  
45 criatividade e pensamento crítico, considerando critérios como motivação do aluno,  
nível de aprendizado, conforto do aluno, capacidade de tomada de decisão e tempo  
necessário para preparação da aula. Além disso, (WADHWANIYA, 2020) propôs  
uma análise de decisão multicritério para identificar fatores e componentes essenciais  
que possam auxiliar no desenvolvimento de um currículo inclusivo e responsivo às  
50 questões de gênero na educação de ensino superior.

Este capítulo tem por objetivo apresentar os conceitos e técnicas relevantes em MCDA para este estudo. Na Seção 2.1 tratamos do processo de decisão multicritério, enquanto a Seção 2.2 apresenta algumas abordagens no processo de agregação e a Seção 2.3 no processo de desagregação em MCDA.

## 55 2.1 O processo de decisão multicritério: conceitos e definições

Para entender o processo de decisão multicritério, é necessário apresentar alguns conceitos e definições. Assim, na Subseção 2.1.1, tratamos de seus elementos básicos, enquanto as Subseções 2.1.2 e 2.1.3 tratam da modelagem da preferência do decisor. Na Subseção 2.1.4, os tipos de problemática são apresentados. Na Subseção 2.1.5, apresentamos  
60 o problema de agregação e desagregação. Finalmente, na Subseção 2.1.6, o processo de decisão multicritério é discutido.

Esta seção foi elaborada baseada em algumas referências da área de MCDA tais como (ROY, 1996), (BOUYSSOU et al., 2006) e (POMEROL; BARBA-ROMERO, 2000).

### 65 2.1.1 Elementos básicos no apoio à decisão multicritério

Na sequência, fazemos uma breve descrição dos cinco elementos básicos na problemática da decisão multicritério: os atores, o conjunto de alternativas, conjunto de critérios, o vetor de pesos e a matriz de decisão.

**Atores - decisor e analista:** Os atores principais são o decisor e analista. O decisor é o responsável pela tomada de decisão. Na prática, pode-se ter um único decisor ou um grupo de decisores. Além do decisor, é comum considerar também o chamado analista, que será o responsável pela modelagem do problema e que faz a recomendação ao final do processo. O analista deve ser neutro com relação às suas preferências e é responsável por entender as preferências do decisor, buscando evitar inconsistências na decisão. Alguns autores, como (GRECO; FIGUEIRA; EHRGOTT, 2016), elencam outros tipos de atores.

**Conjunto de alternativas:** As alternativas são elementos tais como ações, bens móveis e imóveis, investimentos ou projetos, que são passíveis de escolha, ordenamento ou classificação. Essas alternativas devem pertencer a um conjunto finito com  $m$  elementos, em que  $m > 2$ . Denota-se neste estudo o conjunto de alternativas por  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

**Conjunto de critérios:** Os critérios são características das alternativas que influenciam na decisão. Os critérios podem ser do tipo qualitativos, tais como cor, qualidade, aparência, etc., ou quantitativo tais como preço, lucro, distância, etc. O conjunto dos critérios deve ser completo (deve conter de fato o que influencia na decisão), porém, é importante evitar critérios redundantes, pois tal prática pode acarretar em uma contagem dupla para um mesmo tipo de desempenho (KEENEY; RAIFFA, 1993). Além disso, o conjunto de critérios pode ser classificado em dois conjuntos, de benefício (representado por  $I$ ) e de custo (representado por  $J$ ). Os critérios pertencem ao conjunto de benefício,  $j \in I$ , quando o objetivo é maximizar o seu valor, ou de custo,  $j \in J$ , quando o objetivo é minimizar o seu valor. Representa-se aqui o conjunto dos critérios por  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ .

**Vetor de pesos:** O vetor de pesos contém elementos que associa a cada critério um coeficiente de ponderação. Esse vetor de pesos se aplica a modelos lineares, tanto na agregação como desagregação. A representação dos pesos em MCDA variam de acordo com o tipo de método considerado. Por um lado, podem representar a importância relativa dos critérios, e por outro, em métodos aditivos, podem representar a compensação entre diferentes escalas dos critérios. Neste último caso, são denominados por alguns autores como *constantes de escala* (VINCKE, 1992). Denotamos o vetor de critérios por  $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ . Esse vetor é normalizado na forma

$$W = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : w_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1 \right\}. \quad (2.1)$$

**Matriz de decisão:** Uma vez definidos os conjuntos de alternativas e critérios, deve-se associar um valor numérico ou qualitativo, denotado aqui por  $c_j(a_i)$  ou, alternativamente, por  $p_{ij}$ , que expresse a avaliação da alternativa  $i$  no critério  $j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

105  $j = 1, \dots, n$ . Por exemplo, dado um critério  $j$  que representa o preço, então  $p_{ij}$  indica o preço da alternativa  $i$ . Assim, os dados são organizados de modo matricial, na chamada matriz de decisão ou matriz de desempenho, cujas linhas e colunas representam as alternativas e os critérios, respectivamente. Existem duas formas equivalentes de representar a matriz de decisão  $\mathbf{P}$  na literatura:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_1(a_1) & c_2(a_1) & \dots & c_n(a_1) \\ c_1(a_2) & c_2(a_2) & \dots & c_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1(a_m) & c_2(a_m) & \dots & c_n(a_m) \end{bmatrix} \end{matrix} \equiv \begin{matrix} & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.2)$$

110 Empregamos ambas as formas ao longo do texto, em virtude da variação na notação adotada nas distintas áreas abrangidas neste estudo.

### 2.1.2 Relações de preferência na decisão multicritério

Considerando duas alternativas  $a$  e  $b \in A$ , em certas situações faz-se necessário que o decisor expresse a relação entre  $a$  e  $b$ , ou seja, se  $a$  é preferível a  $b$  (ou vice-versa), se  
115 são indiferentes, etc. Dada a importância dessa comparação par-a-par das alternativas em MCDA, apresentamos o conceito de relação binária que serve de base para entender as relações de preferência do decisor.

**Definição 1** *Seja  $X$  um conjunto finito de elementos  $a, b, \dots, z$ . Uma relação binária  $R$  do conjunto  $X$  é um subconjunto do produto cartesiano  $X \times X$ , representado por*  
120  *$R \subseteq X \times X$ . O complementar de  $R$ , denotado por  $\bar{R}$ , é o subconjunto de pares não relacionados, formalmente definido como:  $\bar{R} \subseteq X \times X - \{R\}$ .*

Considerando que, para qualquer  $(a, b) \in R$ , se  $a$  e  $b$  estão relacionados, denotamos por  $aRb$ , e se  $a$  e  $b$  não estão relacionados denotamos por  $a\bar{R}b$ . Definimos algumas relações binárias como:

125 **Definição 2** *Definições de relações binárias:*

**Relação reflexiva:** Se  $aRa, \forall a \in X$ ;

**Relação irreflexiva:** Se  $a\bar{R}a, \forall a \in X$ ;

**Relação simétrica:** Se  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in X$ ;

**Relação assimétrica:** Se  $(aRb \text{ e } bRa) \implies a = b, \forall a, b \in X$ ;

130 **Relação transitiva:** Se  $(aRb \text{ e } bRc) \implies aRc, \forall a, b, c \in X$ ;

**Relação completa:** Se  $(aRb \text{ ou } bRc), \forall a \neq b \in X$ .

Assim, as relações de preferência do decisor podem ser definidas como relações binárias quando a análise é feita par-a-par. Formalmente definimos essas relações como:

135 **Relação de preferência estrita:** Se o decisor prefere estritamente  $a$  à  $b$ , representa-se essa relação por:  $aPb$  ou  $a \succ b$ ;

**Relação de indiferença:** Se o decisor não tem preferência por  $a$  ou  $b$ , considera-se que  $a$  é indiferente à  $b$ . Representa-se essa relação por:  $aIb$ ,  $a \approx b$ , ou ainda  $a \sim b$ ;

**Relação de preferência fraca:** Se o decisor não tem uma preferência estrita de  $a$  à  $b$ , considera-se  $a$  preferida ou indiferente à  $b$  e representa-se por:  $aQb$  ou  $a \succeq b$ ;

140 **Relação de incompatibilidade:** Se o decisor não é capaz de comparar  $a$  com  $b$ , então  $a$  é incomparável à  $b$ . Essa relação é representada por  $NC$ .

As relações  $P, I, Q$  e  $NC$  possuem algumas propriedades da Definição 2:

- A relação de preferência estrita  $P$  é assimétrica, pois, se o decisor prefere estritamente  $a$  a  $b$ , então ele não pode preferir  $b$  a  $a$  se  $a \neq b$ ;
- 145 • A relação de indiferença  $I$  é reflexiva e simétrica, pois se o decisor é indiferente entre  $a$  e  $a$  e se  $a$  é indiferente a  $b$ , então  $b$  também é indiferente a  $a$ ;
- A relação  $Q$  é transitiva, pois, se o decisor diz que  $a$  é preferida ou indiferente a  $b$  e se  $b$  é preferido ou indiferente a  $c$ , então  $a$  é preferido ou indiferente a  $c$ ;

### 2.1.3 Abordagens para a obtenção das preferências do decisor

150 (DOUMPOS; ZOPOUNIDIS, 2019) define duas principais abordagens para a obtenção das preferências do decisor:

**Direta:** Nesta abordagem, há uma interação direta entre o analista e o decisor (ou decisores) que provê informações descrevendo sua preferência. Neste caso, o decisor pode especificar compromissos entre os critérios, dar informações sobre a importância de cada critério, etc.;

155

**Indireta:** Na forma indireta, a obtenção das preferências do decisor é feita a partir de exemplos de decisões. Tais exemplos de ordenamento podem ser um conjunto de decisões passadas do decisor, um subconjunto de alternativas de decisão, ou um conjunto de alternativas fictícias (ZOPOUNIDIS; PARDALOS, 2010).

### 2.1.4 Tipos de problemática na decisão multicritério

Os tipos de problemática em MCDA se referem ao que é esperado ao final do processo do conjunto de alternativas  $A$ . Em (ROY, 1996) são definidas três problemáticas:

**Escolha (*selection*):** Nesta problemática, é desejado selecionar uma ou algumas alternativas do conjunto  $A$ . É possível encontrar aplicações e técnicas que trataram dessa problemática em vários estudos como (BARRON, 1992; AL-SHEMMERI; AL-KLOUB; PEARMAN, 1997; SALO; HAMALAINEN, 2001; FRINI; BENAMOR, 2015);

**Ordenação (*ranking*):** Aqui o objetivo é obter uma ordem da melhor a pior de todas as alternativas do conjunto  $A$ . O ordenamento pode ser parcial, se for permitida a relação de incomparabilidade entre alternativas, ou total, se não for permitida incomparabilidades. Diversos estudos trataram da problemática do ordenamento, tais como (BRANS; VINCKE; MARESCHAL, 1986; MALIENE; DIXON-GOUGH; MALYS, 2018; FRINI; BENAMOR, 2019; URBANIAK; WĄTRÓBSKI; SAŁABUN, 2020);

**Classificação (*sorting*):** A problemática de classificação consiste em associar cada alternativa a grupos pré-definidos (denominados categorias). Um problema de classificação ordinal é aquele em que as categorias possuem uma ordem de melhor para pior. Encontram-se vários estudos, tais como em (ZOPOUNIDIS; DOUMPOS, 2002; KÖK-SALAN; ULU, 2003; MOUHIB; FRINI, 2021; PELISSARI; ABACKERLI; DUARTE, 2022).

### 2.1.5 Aspectos gerais dos métodos de decisão multicritério

Os métodos MCDA são utilizados para modelar e apoiar decisões multicritério. Existem duas abordagens principais das técnicas MCDA: a agregação e a desagregação. Na primeira, a agregação, há uma maior interação entre os analistas e decisores e, de modo geral, o objetivo final é a recomendação de uma escolha, um ordenamento ou uma classificação das alternativas. Por outro lado, na desagregação, há uma menor interação entre os analistas e os decisores, pois utilizam-se abordagens indiretas (descrita na Subseção 2.1.3). Desse modo, a desagregação parte de um exemplo de ordenação ou classificação, e o objetivo final é a análise de preferências do decisor. A seguir destacamos características importantes das duas abordagens.

**Agregação** Destacamos duas classes de métodos MCDA com diferentes características no processo de agregação, a baseada na teoria de valor multi-atributo (MAVT, do inglês *Multi-Attribute Value Theory*) e a baseada em relações de superação (em inglês



chamados de *outranking*). A principal característica da MAVT é que, no processo de  
 195 agregação obtém-se um valor global para cada alternativa, utilizado para ordenar  
 ou classificá-las. Pertencem a esta classe os métodos como os da família da teoria  
 da utilidade multi-atributo e o TOPSIS (do inglês, *Technique for Order Preference  
 by Similarity to Ideal Solution*). Já os métodos baseados em relações de superação  
 200 são fundamentados no conceito de concordância e discordância em comparações  
 par-a-par; isto é, estão baseados em um sistema de preferências relacionais. Vale  
 destacar que os métodos de superação não são necessariamente fundamentados na  
 agregação, eles podem se basear em outros tipos de estrutura de preferência. Um  
 exemplo de um método de agregação desta classe é o método PROMETHEE II (do  
 inglês, *Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations II*)  
 205 Os métodos de agregação se fundamentam em estruturas conhecidas como operadores  
 de agregação, que são funções que satisfazem as características de monotonicidade,  
 expressas pelas seguintes definições:

**Definição 3** Uma função  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é monotonicamente não-decrescente em cada  
 argumento se, para cada vetor  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $p_{i1} \geq p_{i2} \implies f\{p_{i1}\} \geq f\{p_{i2}\}, \forall i$ .

210 **Definição 4** Uma função de agregação em  $\mathbb{R}^m$  é uma função  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , com as  
 propriedades (i) é monotonicamente não-decrescente em cada argumento; (ii)  $\inf_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m} f(\mathbf{p}) = \inf \mathbb{R}$  e  $\sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m} f(\mathbf{p}) = \sup \mathbb{R}$ .

**Desagregação:** As metodologias de desagregação em MCDA geralmente utilizam técnicas  
 de regressão ordinal (ANGILELLA; GRECO; MATARAZZO, 2010) para inferir  
 215 modelos de decisão compatíveis com os exemplos de decisão. Os modelos de decisão  
 obtidos podem ser usados para explicar as preferências do decisor, bem como obter  
 ordenamentos ou classificações para outro conjunto de alternativas. A família de  
 métodos UTA é bastante utilizada no contexto de desagregação e se baseia na teoria  
 aditiva de utilidade multi-atributo. Assim, supõe-se que existe uma função utilidade  
 220 que explica as preferências do decisor, e que o valor global de cada alternativa  $u[\mathbf{c}(a_i)]$   
 é obtida por uma função aditiva dada por:

$$u[\mathbf{c}(a_i)] = \sum_{j=1}^n w_j \times u_j[c_j(a_i)], \quad (2.3)$$

onde  $w_j > 0, \forall j$ , representam as constantes de escala e  $u_j(\cdot)$  as utilidades marginais  
 dos critérios.

### 2.1.6 O processo de decisão multicritério

225 O processo de decisão multicritério pode ser representado em quatro etapas (ROY, 1996), apresentadas de forma resumida nos passos abaixo:

**Representação da situação do problema:** Nesta etapa, o analista deve interagir com o decisor (ou decisores) para entender o problema. É necessário definir quem são os decisores envolvidos no processo, qual o interesse de cada um e quais recursos  
230 envolvidos na decisão;

**Formulação do problema:** Esta etapa formaliza a representação do problema e a preocupação do decisor. Aqui as potenciais alternativas devem ser analisadas e é necessário definir qual a problemática a ser tratada (conforme apresentado na Seção 2.1.4);

**Modelo de decisão:** Aqui o analista deve construir o modelo de decisão. Os conjuntos de  
235 alternativas e critérios são definidos. As avaliações das alternativas (qualitativas ou quantitativas) em cada critério são estabelecidas. As preferências do decisor devem ser estabelecidas de forma direta ou indireta. Além disso, nesta etapa é importante definir bem a escolha do método MCDA a ser utilizado, pois diferentes métodos levam a diferentes soluções (ZANAKIS et al., 1998).

240 **Recomendação final:** A recomendação final deve ser capaz de traduzir todo o processo e deve ser compreensível para o decisor. É importante realizar uma análise de sensibilidade para verificar a robustez da solução e apresentar diferentes cenários para o decisor.

## 2.2 Abordagens essenciais no processo de agregação em MCDA

245 Nesta seção, apresentamos as técnicas de agregação utilizadas neste estudo. Na Subseção 2.2.1, introduzimos o método TOPSIS. Na Subseção 2.2.2, apresentamos o método PROMETHEE. Na Subseção 2.2.3, a técnica *Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis* (SMAA) é apresentada. Finalmente, na Subseção 2.2.4, apresentamos a chamada distância de Kendall Tau (*Kendall's tau distance*), que será utilizada como uma métrica  
250 de comparação entre dois ordenamentos.

### 2.2.1 Método TOPSIS

O método TOPSIS foi inicialmente proposto por (HWANG; YOON, 1981). Entre os vários métodos MCDA, o TOPSIS é um dos mais populares, pois apresenta vantagens tais como simplicidade e rapidez computacional (UZUN et al., 2021).

255 Muitas extensões e aplicações do TOPSIS vêm sendo propostas. Por exemplo, (KANDAKOGLU; FRINI; AMOR, 2019) mostra que o TOPSIS é o segundo método de

agregação mais utilizado em desenvolvimento sustentável. (JAHANSHALOO; LOTFI; IZADIKHAH, 2006) propôs uma extensão do método TOPSIS quando os valores de critérios são um intervalo em vez de um valor exato. (CHEN, 2015) desenvolveu uma variante do método TOPSIS para tratar de problemas de tomada de decisão em grupo em ambientes *fuzzy*. (FRINI; BENAMOR, 2015) tratou do problema em MCDA para selecionar projetos em um contexto de desenvolvimento sustentável aplicando o método TOPSIS. Além disso, (SHUKLA et al., 2017) tratou do método TOPSIS aplicado à otimização dos processos de fabricação. (BEHZADIAN et al., 2012) traz uma revisão de aplicações e extensões do TOPSIS. Mais recentemente, (DASH et al., 2019) utilizou o TOPSIS para a previsão dos preços e de índice de ações. (PELEGRINA; DUARTE; ROMANO, 2019) utilizaram o TOPSIS juntamente com técnicas de processamento de dados para lidar com MCDA quando há uma relação de dependência entre critérios. (NĂDĂBAN; DZITAC; DZITAC, 2016) e (PALCZEWSKI; SAŁABUN, 2019a) fizeram uma revisão das aplicações *fuzzy* TOPSIS. É possível também encontrar comparações entre os método MCDA, incluído o TOPSIS, em estudos como (KRAUJALIENĖ, 2019) e (SHARMA; SRIDHAR; CLAUDIO, 2020).

A ideia geral do TOPSIS considera que a melhor alternativa deve ter a menor distância do ponto *ideal positivo* e a maior distância do ponto *ideal negativo* (BEHZADIAN et al., 2012). A definição mais usual do ponto ideal positivo é entendê-lo como uma alternativa ideal, formada pelas melhores avaliações de cada critério; da mesma forma, o ponto ideal negativo corresponde a uma alternativa idealizada na qual as avaliações correspondem às piores avaliações de cada critério. Na sequência, e com auxílio das Figuras 2.1, 2.2 e 2.3, apresentaremos os passos para obtenção desses pontos e os descrevemos a seguir e, posteriormente, apresentamos o algoritmo do método TOPSIS.

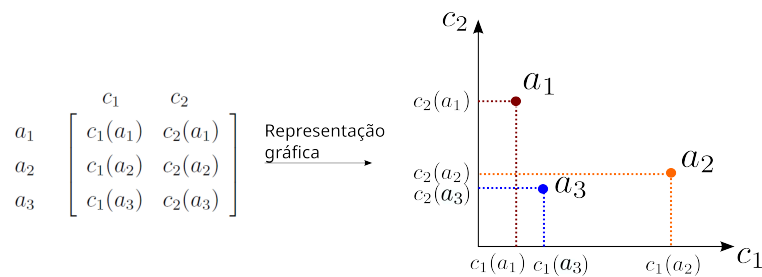


Figura 2.1 – Representação gráfica de uma matriz de decisão com 3 alternativas e 2 critérios.

Considere a representação gráfica de uma matriz de decisão  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ , exibida na Figura 2.1, e que os dois critérios pertencem ao conjunto de benefício  $I$ . Para obter o ponto ideal positivo deve-se primeiro identificar o maior valor que o Critério 1 assume; no caso da Figura 2.2 (a), observa-se que o maior valor é  $c_1(a_2)$ . Note que no caso de critério de custo, o ponto ideal positivo seria o menor valor. Em seguida, encontra-se o maior valor de  $c_2$ , pela Figura 2.2 (b), é possível ver que é o  $c_2(a_1)$ . Para  $n$  critérios, esse processo

## ● Cálculo do ponto ideal Positivo

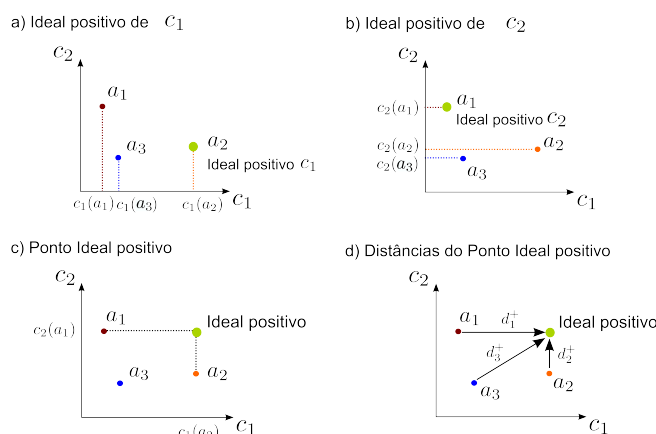


Figura 2.2 – Exemplo de como calcular os pontos ideal positivo no método TOPSIS.

segue até que se encontre melhor valor para  $c_n$ . Assim, o ponto ideal positivo será formado por todos os melhores valores de cada critério que, no exemplo em questão, conforme ilustrado na Figura 2.2 (c), é dado por  $[c_1(a_2), c_2(a_1)]$ . Após esse processo, calcula-se a distância Euclidiana de cada alternativa para o ponto ideal positivo, conforme ilustrado no na Figura 2.2 (d).

## ● Cálculo do ponto ideal Negativo

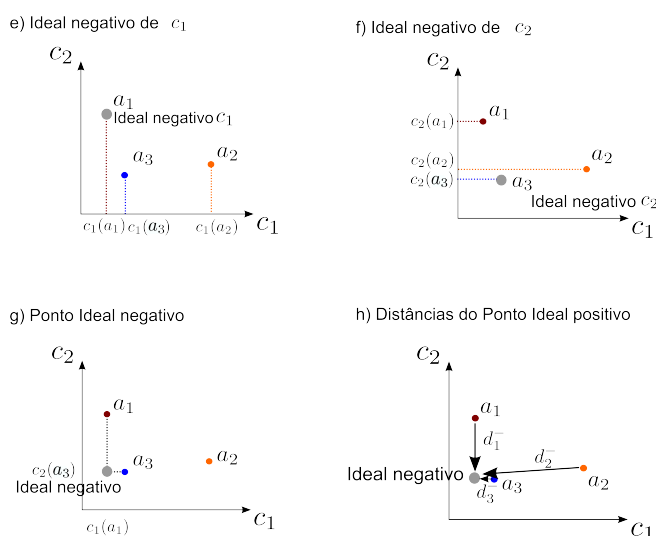


Figura 2.3 – Exemplo de como calcular os pontos ideal negativo no método TOPSIS.

Para encontrar o ponto ideal negativo, o processo é similar. Inicia-se identificando o menor valor do  $c_1$ , conforme a Figura 2.3 (e), é o  $c_1(a_1)$ . Destacamos que, para o caso de critério de custo, o ponto ideal negativo seria o maior valor. Em seguida, encontra-se o menor valor para o  $c_2$ , que é ilustrado na Figura 2.3 (f) como  $c_2(a_3)$ . Obtém-se então o ponto ideal negativo como mostrado na Figura 2.3 (g):  $[c_1(a_1), c_2(a_3)]$ . Por fim calcula-se as distâncias Euclidianas das alternativas para o ponto ideal negativo, conforme ilustrado na Figura 2.3 (h).

Tendo visto como podemos calcular os pontos ideais, apresentamos na sequência o algoritmo do TOPSIS:

1. Definir a matriz de decisão  $\mathbf{P}$  e definir os pesos dos critérios conforme Equação (2.1);
2. Normalizar os elementos  $p_{ij}$  da matriz de decisão  $\mathbf{P}$ , de onde obtém-se a matriz normalizada  $\mathbf{N}$ .

Esta etapa é necessária pois os critérios podem ter diferentes unidades de medidas e ordem de grandeza, o que afeta a comparação entre os critérios. A normalização desses valores pode ser realizada por meio de uma das fórmulas de normalização disponíveis em (UZUN et al., 2021), destacamos aqui as duas mais comuns:

$$n_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (p_{ij})^2}}, \quad \forall i, j \quad (2.4)$$

$$n_{ij} = \frac{p_{ij}}{\max_i p_{ij}}, \quad \forall i, j; \quad (2.5)$$

3. Obter  $\mathbf{V}$ , uma versão ponderada de  $\mathbf{N}$  considerando os pesos definidos pelo tomador de decisão.

$$v_{ij} = n_{ij}w_j, \quad \forall i, j; \quad (2.6)$$

4. Conforme ilustrado anteriormente, identificar os pontos ideal positivo  $\mathbf{A}^+$  e negativo  $\mathbf{A}^-$ . Se o critério for de benefício,  $j \in I$ , identificamos o maior valor que cada critério assume, se for de custo,  $j \in J$ , o menor. Matematicamente, podemos representar esse procedimento da seguinte maneira:

$$A^+ = \{v_1^+, \dots, v_n^+\} = \left\{ \left( \max_i v_{ij} \mid j \in I \right), \left( \min_i v_{ij} \mid j \in J \right) \right\} \quad (2.7)$$

$$A^- = \{v_1^-, \dots, v_n^-\} = \left\{ \left( \min_i v_{ji} \mid j \in I \right), \left( \max_i v_{ji} \mid j \in J \right) \right\}; \quad (2.8)$$

5. Calcular a distância euclidiana  $n$ -dimensional de cada alternativa para os pontos ideal positivo e negativo.

$$d_i^+ = \left\{ \sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall i \quad (2.9)$$

$$d_i^- = \left\{ \sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall i; \quad (2.10)$$

6. Calcular a proximidade relativa das alternativas ao ponto ótimo positivo da forma:

$$g_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, \quad \forall i; \quad (2.11)$$

onde  $g_i$  assume valores entre zero e um, sendo que quando  $g_i$  tende a um a alternativa tende a estar mais próxima do ponto positivo ideal e longe do ponto negativo.

320 7. Ordenar de forma decrescente os valores de  $\mathbf{g}$ , sendo  $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_m]$ , de onde obtém-se o ordenamento das alternativas.

Em resumo, o TOPSIS é um método simples e eficiente para a análise de apoio à decisão multicritério. É fundamental considerar que, embora este método tenha muitas vantagens, ele também apresenta algumas limitações, como por exemplo a chamada  
325 reversão de ordenamento (*rank reversal*) (GARCÍA-CASCALES; LAMATA, 2012). Nesse fenômeno, ocorre uma mudança na ordem das alternativas quando uma nova alternativa é acrescentada ou uma antiga é removida do conjunto de alternativas. Alguns estudos, como por exemplo em (AIRES; FERREIRA, 2019), propuseram formas de lidar com este problema.

### 330 2.2.2 Método PROMETHEE

A classe de métodos conhecida como PROMETHEE teve sua versão inicial proposta em (BRANS, 1982). Como veremos mais adiante, essa classe é baseada em relações conhecidas como superação. Diversas extensões do método foram propostas, o que vem permitindo o uso do PROMETHEE em um amplo número de aplicações (BEHZADIAN  
335 et al., 2010). Apresentamos neste estudo os passos do método PROMETHEE I, o qual tem como saída um ordenamento parcial das alternativas, e o PROMETHEE II, em que a saída é um ordenamento completo das alternativas (BEHZADIAN et al., 2010). Cabe destacar que as contribuições do presente trabalho, que serão discutidas nos capítulos subsequentes, utilizam a versão do PROMETHEE II.

340 As principais etapas do PROMETHEE I e II podem ser resumidas da seguinte forma (BRANS; MARESCAL, 2005): **Etapa (1)**: *análise das informações dentro de cada critério*; **Etapa (2)**: *análise das informações entre os critérios*; **Etapa (3)**: *estimativa e agregação dos índices de preferência*. Estas etapas são detalhadas a seguir e, posteriormente, aplicadas a um exemplo numérico.

345 **Etapa (1)**: *análise das informações dentro de cada critério*.

Nesta etapa, é feito o cálculo da diferença entre o desempenho de cada par de alternativas  $a, b \in A$ , considere  $j = 1, \dots, n$ :

$$d_j(a, b) = c_j(a) - c_j(b), \quad \forall j. \quad (2.12)$$

Os elementos  $d_j(a, b)$ , de um certo critério  $j$ , compõem uma *matriz de comparação par a par*,  $\mathbf{D}_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\forall j$ .

350 Em seguida aplica-se uma função conhecida como *função de preferência*  $F_j$  para cada matriz  $\mathbf{D}_j$ , conforme mostrado na Equação (2.13), no caso de critério de benefício, e, na Equação (2.14), quando o critério é de custo.

$$F_j(\mathbf{D}_j) \forall j; \quad (2.13)$$

$$F_j(-\mathbf{D}_j) \forall j, \quad (2.14)$$

355 Diversas funções de preferências foram propostas por (BRANS; VINCKE; MARESCHAL, 1986). Na Tabela 2.1 os principais exemplos da literatura são apresentados. As funções de preferencia são não decrescentes e têm como saída valores entre 0 e 1, onde quanto mais próximo de 0, menor a preferência, e mais próximo de 1, maior a preferência. Desse modo, ao aplicar uma função  $F_j$  em cada matriz  $\mathbf{D}_j$ , na forma  $F_j(\mathbf{D}_j)$ , obtêm-se  $j$  matrizes onde seus elementos variam em  $]0, 1[$ .

Tabela 2.1 – Tipos de função de preferência

| Tipo                             | Função de preferência                                                                                                      | Definição de parâmetro                                    |
|----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Tipo I - Critério usual          | $F_j(\mathbf{D}_j) = \begin{cases} 0, & d_j \leq 0 \\ 1, & d_j > 0 \end{cases}$                                            | Não é necessário                                          |
| Tipo II - Quase critério         | $F_j(\mathbf{D}_j) = \begin{cases} q, & d_j \leq q \\ 1, & d_j > q \end{cases}$                                            | $q$ , em que $q$ um limiar de indiferença                 |
| Tipo III - Limiar de preferência | $F_j(\mathbf{D}_j) = \begin{cases} 0, & d_j < 0 \\ \frac{d_j}{p}, & 0 \leq d_j \leq q \\ 1, & d_j > p \end{cases}$         | $p$ , em que $p$ um limiar de preferência rigorosa        |
| Tipo IV - Pseudo critério        | $F_j(\mathbf{D}_j) = \begin{cases} 0, & d_j < q \\ \frac{1}{2}, & q \leq d_j \leq p \\ 1, & d_j > p \end{cases}$           | $p, q$                                                    |
| Tipo V - Área de indiferença     | $F_j(\mathbf{D}_j) = \begin{cases} 0, & d_j < q \\ \frac{d_j - q}{p - q}, & q \leq d_j \leq p \\ 1, & d_j > p \end{cases}$ | $p, q$                                                    |
| Tipo VI - Critério gaussiano     | $F_j(\mathbf{D}_j) = \begin{cases} 0, & d_j \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d_j^2}{2s^2}}, & d_j > 0 \end{cases}$                  | $s$ , em que $s$ é um valor intermediário entre $q$ e $p$ |

360 **Etapa (2): análise das informações entre os critérios.**

Para esta segunda etapa consideram-se os pesos dos critérios  $\mathbf{w}$ , conforme a Equação (2.1), e a função de preferência  $F_j$ . Calcula-se então a soma ponderada das

preferências, conforme a Equação (2.15). Representamos o resultado dessa soma ponderada por  $\pi(\mathbf{D})$ , que é uma matriz  $\mathbb{R}^{m \times m}$ , cujas linhas indicam o grau em que  $a$  é preferível a  $b$ ,  
 365 cujas colunas representam o grau em que  $b$  é preferível a  $a$ ,  $\forall a, b \in A$ .

$$\pi(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^n w_j F_j(\mathbf{D}_j). \quad (2.15)$$

**Etapa (3):** *estimativa e agregação dos índices de preferência*

Esta etapa final corresponde ao mapeamento  $\mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Este mapeamento é feito a partir do *fluxo de superação* (em inglês *outranking flows*), o que significa quantificar o índice médio de preferência de  $a$  sobre todas as outras alternativas, chamado de fluxo  
 370 de superação positivo de  $\phi^+(a)$ ; e o índice médio de preferência de todas as alternativas sobre  $a$ , chamado de fluxo de superação negativo de  $\phi^-(a)$ . O fluxo de superação  $\phi^+(a)$  corresponde à soma de cada linha da matriz  $\pi(\mathbf{D})$ , e  $\phi^-(a)$ , à soma de cada coluna. Considere  $\pi(d_{ik})$ ,  $i, k = 1, \dots, m$ , os elementos da matriz  $\pi(\mathbf{D})$ , os fluxos de superação são obtidos da forma:

$$\phi^+(a) = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m \pi(d_{ik}), \quad \forall i, \quad (2.16)$$

375

$$\phi^-(a) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \pi(d_{ik}), \quad \forall k. \quad (2.17)$$

Quanto maior o valor  $\phi^+(a)$  e menor o valor  $\phi^-(a)$  de uma alternativa, maior sua relação de preferência. Esses fluxos de superação são usados para estabelecer o ordenamento parcial e total no PROMETHEE I e II, respectivamente. Na sequência, apresentamos o detalhamento de como esses ordenamentos são feitos no PROMETHEE I e no PROMETHEE II.

380 • **PROMETHEE I: ordenamento parcial**

O ordenamento parcial do PROMETHEE I é obtido a partir dos fluxos de superação positivos e negativos da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} aPb \text{ sse } \left\{ \begin{array}{l} \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) < \phi^-(b), \text{ ou} \\ \phi^+(a) = \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) < \phi^-(b), \text{ ou} \\ \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) = \phi^-(b); \end{array} \right. \\ aIb \text{ sse } \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) < \phi^-(b); \\ aRb \text{ sse } \left\{ \begin{array}{l} \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) > \phi^-(b); \text{ ou} \\ \phi^+(a) < \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) < \phi^-(b). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Onde  $aPb$ ,  $aIb$  e  $aRb$  representam preferência, indiferença e incomparabilidade, respectivamente.



- 385 • PROMETHEE II: Ordenamento completo

O ordenamento total das alternativas é dado por:

$$g_i = \phi^+(a_i) - \phi^-(a_i), \quad \forall i. \quad (2.19)$$

Assim, O vetor  $\mathbf{g}$  é formado pelos  $g_i \in ]-1, 1[$  e, ao ordená-lo em ordem decrescente, obtém-se o ordenamento das alternativas.

390 Por fim, associamos os valores do vetor ordenado  $\mathbf{g}$  à representação  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , de cada alternativa, sendo esse vetor denotado por  $\mathbf{r}$ .

Para facilitar a compreensão deste método, apresentamos em seguida um breve exemplo numérico.

### Exemplo numérico:

Considere a matriz de decisão  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  dada por:

$$395 \quad \mathbf{P} = \begin{matrix} & c_1 & c_2 \\ a_1 & \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \\ a_2 & \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \\ a_3 & \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Aplicando a Equação (2.12) na matriz, obtemos:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ a_2 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ a_3 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{D}_2 = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ a_2 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ a_3 & \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Supondo que os dois critérios são de benefício e que  $F_j$  é do Tipo I (Tabela 2.1), aplicando Equação (2.13):

$$400 \quad \mathbf{D}_1 = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ a_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ a_3 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{D}_2 = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ a_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ a_3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Considerando os pesos como  $\mathbf{w} = [0.5, 0.5]$ , e aplicando a Equação (2.15),  $w_1 \times \mathbf{D}_1 + w_2 \times \mathbf{D}_2 = \pi(\mathbf{D}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ :

$$\pi(\mathbf{D}) = 0.5 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 0.5 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

405 Obtemos o fluxo de superação positivo e negativo, conforme Equação (2.16) e (2.17):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \frac{1.5}{2} = 0.75 \\ \frac{0.5}{2} = 0.25 \\ \frac{1}{2} = 0.50 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{0.5}{2} = 0.25 \quad \frac{1.5}{2} = 0.75 \quad \frac{1}{2} = 0.50 \end{array}$$

Finalmente, aplicando a Equação (2.19), obtemos a saída do PROMETHEE II como:  $\mathbf{g} = [0.5, -0.5, 0]$ , de onde obtém-se a relação de preferência  $a_1 \succ a_3 \succ a_2$ . Considerando  $\mathbf{r}$  o vetor que representa o ordenamento das alternativas obtido a partir da pontuação  
410 obtida por elas, temos  $\mathbf{r} = [a_1, a_3, a_2]$ .

### 2.2.3 Método SMAA

Os métodos da família SMAA (do inglês, *Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis*) foram desenvolvidos para apoiar decisões multicritério onde os valores dos critérios ( $p_{ij}$ ) e/ou seus pesos ( $w_j$ ) são incertos ou incompletos. Esta técnica foi proposta  
415 por (LAHDELMA; HOKKANEN; SALMINEN, 1998), permitindo que as medidas dos critérios sejam representadas por variáveis aleatórias definidas por suas funções de probabilidades. Assim, é possível modelar incertezas nas medidas dos critérios, obtendo possíveis ordenações ou classificações das alternativas de forma probabilística. O método SMAA é muito utilizado para a análise de sensibilidade das soluções obtidas.

420 Seguindo a notação usada em (LAHDELMA; HOKKANEN; SALMINEN, 1998), as funções de utilidade  $u(\cdot)$  são usadas para mapear as distribuições dos critérios em uma distribuição de utilidade, sendo a utilidade geral  $u_i(\phi, w)$  representada como uma combinação convexa da distribuição de utilidade dos critérios, na forma:

$$u_i(\phi_i, w) = \sum w_j u_j(\phi_{ij}), \quad (2.20)$$

em que os pesos  $w_j$  são não negativos e normalizados definidos no espaço de pesos viáveis  
425 conforme Equação (2.1). Sendo que, no caso de pesos desconhecidos, estes são representados por variáveis aleatórias com função de densidade  $f_w(\mathbf{w})$ .

O SMAA-2 foi proposto por (LAHDELMA; SALMINEN, 2001), onde os autores utilizam três medidas descritivas diferentes. Uma delas é o índice de aceitabilidade do ordenamento que descreve a probabilidade de uma certa alternativa de  $i$  ser aceitável em um  
430 determinado ordenamento  $r$ ; este índice é calculado como uma integral multidimensional

sobre as distribuições dos critérios. A segunda medida, chamada de vetor central de peso, apoia o tomador de decisão na compreensão dos ordenamentos obtidos com valores diferentes para o peso. Finalmente, o *fator de confiança* define a probabilidade de uma alternativa ser preferida, dado o vetor central de peso.

435 Como as técnicas do SMAA envolvem funções de probabilidade, seu cálculo pode ser bastante complexo. Porém os cálculos numéricos podem ser substituídos pela simulação de Monte Carlo, que fornece boas aproximações (LAHDELMA; HOKKANEN; SALMINEN, 1998; TERVONEN; LAHDELMA, 2007). O número de iterações na simulação é inversamente proporcional ao quadrado de precisão desejado e não depende da  
440 dimensionalidade do problema (TERVONEN; LAHDELMA, 2007).

Os passos gerais do SMAA podem ser resumidos em três principais: **(P1)** amostragem; **(P2)** agregação; **(P3)** cálculo das estatísticas descritivas. Esses três passos, que são detalhados abaixo, para o caso em que os valores dos critérios são variáveis estocásticas  $\phi_{ij}$ , representada por uma distribuição de probabilidade  $f_{ij}(\phi_{ij})$ , e/ou os pesos  
445 são variáveis aleatórias definidas pela função de probabilidade  $f_w(w_{ij})$ . Assim, considere  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$  os passos devem se repetir  $s$  vezes (sendo  $s$  um número geralmente na casa dos milhares):

**P1 Amostragem:** aplique a função  $f_{ij}(\phi_{ij})$  para gerar valores para os critérios, obtendo a matriz de decisão  $\mathbf{P}$ , e/ou a função  $f_w(w_{ij})$  para obter o vetor de pesos  $\mathbf{w}$ ;

450 **P2 Agregação:** aplique algum método de agregação dada  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{w}$  obtidos no **P1**, de onde se obtém um ordenamento  $\mathbf{r}$ ;

**P3 Cálculo das estatísticas descritivas:** Estime a probabilidade de uma alternativa estar em certa posição através de um contador  $m_{ik}$ , que são elementos de uma matriz de probabilidades  $\mathbf{M}$ .

Para exemplificar o SMAA, considere três alternativas a serem ordenadas, em que os critérios são associados a variáveis aleatórias  $\phi_{ij}$ , os pesos  $\mathbf{w}$  são determinísticos e considere uma matriz de zeros  $\mathbf{M} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$  (e seus elementos  $m_{ik}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $k = 1, \dots, 3$ ). Supondo que na primeira iteração, no passo **P2**, obtém-se  $\mathbf{r} \Rightarrow a_1 \succ a_3 \succ a_2$ . Então, no passo **P3**, calcula-se  $m_{11} = 1$  (Alternativa 1 está na posição 1),  $m_{32} = 1$  (Alternativa 3 está na posição 2) e  $m_{23} = 1$  (Alternativa 2 está na posição 3); os outros elementos permanecem nulos. Em uma segunda iteração, supõe-se que no passo **P2** o ordenamento é  $\mathbf{r} \Rightarrow a_1 \succ a_2 \succ a_3$ . Em **P3**, calcula-se  $m_{11} = 2$ ,  $m_{22} = 1$ ,  $m_{33} = 1$ . Ao final das iterações,

calcula-se a proporção, obtendo-se a seguinte matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 50 \\ 0 & 50 & 50 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Após um número elevado de iterações, por exemplo 10000, obtemos a seguinte matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 97 & 3 & 0 \\ 3 & 80 & 17 \\ 0 & 17 & 83 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Este resultado indica que a Alternativa 1 ficou em primeiro lugar em 97% das vezes, enquanto a Alternativa 2 e a Alternativa 3 ficaram em segundo e terceiro lugar em 80% e 83% das vezes, respectivamente. Assim, a classificação mais provável é  $\hat{\mathbf{r}} \implies a_1 \succ a_2 \succ a_3$ .

## 2.2.4 Distância de Kendall tau

Para analisar o desempenho de métodos de MCDA em problemas de ordenamento, é importante definir métricas capazes de comparar dois ordenamentos dados. Tal problema pode ser considerado do tipo: dados dois ordenamentos  $\mathbf{r}$  e  $\hat{\mathbf{r}}$  de um mesmo conjunto de alternativas  $A$ , quão parecidos (ou próximos) estes ordenamentos estão um do outro? Uma forma de quantificar o grau de similaridade de dois ordenamentos é através do chamado *coeficiente de correlação de Kendall tau* ou *distância de Kendall tau*, proposto por (KENDALL, 1938). A distância de Kendall tau corresponde ao número de inversões de pares de alternativas necessárias para tornar ambos ordenamentos iguais (ABDI, 2007). Assim, dados dois ordenamentos,  $\mathbf{r}$  e  $\hat{\mathbf{r}}$ , a distância de Kendall tau entre eles pode ser denotada por  $\|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}\|_\kappa$  ou  $\tau_{\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}}}$  e calculada da seguinte maneira (KENDALL, 1938; DUARTE; MUSSIO; TOREZZAN, 2018):

$$\tau_{\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}}} = \frac{2}{n(n-1)} |\{(q, u) : q < u, (\tau_{\mathbf{r}}(q) < \tau_{\mathbf{r}}(u) \wedge \tau_{\hat{\mathbf{r}}}(q) > \tau_{\hat{\mathbf{r}}}(u)) \vee (\tau_{\mathbf{r}}(q) > \tau_{\mathbf{r}}(u) \wedge \tau_{\hat{\mathbf{r}}}(q) < \tau_{\hat{\mathbf{r}}}(u))\}|, \quad (2.21)$$

onde  $\tau_{\mathbf{r}}(q)$  e  $\tau_{\hat{\mathbf{r}}}(q)$  indicam a posição do elemento  $q$  no vetor  $\mathbf{r}$  e  $\hat{\mathbf{r}}$ , respectivamente. Também, os operadores lógicos " $\wedge$ " (lê-se "E"), indica que duas ou mais proposições devem ser verdadeiras para que a afirmação composta seja verdadeira, e " $\vee$ " (lê-se "OU"), que indica que pelo menos uma das proposições deve ser verdadeira para que a afirmação composta seja verdadeira. O valor de  $\tau_{\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}}}$  está limitado entre zero e um; se seu valor for zero, isso significa que os ordenamentos são iguais, e se assumir o valor um, significa que os ordenamentos são o oposto.

Como exemplo do cálculo desta medida (retirado de (KENDALL, 1938)), vamos considerar um conjunto  $A$  formado por números de 1 ao 10, e dois ordenamentos quaisquer deste mesmo conjunto:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] \\ \hat{\mathbf{r}} &= [4, 7, 2, 10, 3, 6, 8, 1, 5, 9]. \end{aligned}$$

Considere agora um subconjunto  $A'$  como sendo pares de elementos de  $\hat{\mathbf{r}}$ , na forma  $\{a, b\}$ , obtidos ao considerar  $a$  fixo e igual ao primeiro elemento de  $\hat{\mathbf{r}}$  (neste caso, 4) e  $b$  variando, sendo os sucessivos elementos de  $a$ , temos:

$$A' = \{\{4, 7\}, \{4, 2\}, \{4, 10\}, \{4, 3\}, \dots, \{4, 9\}\}.$$

O primeiro passo é somar 1 se o par  $\{a, b\}$  preserva a ordem:  $a$  está na posição anterior de  $b$  no ordenamento  $\mathbf{r}$ , ou -1 se  $a$  não está na posição antes de  $b$  no ordenamento  $\mathbf{r}$ . Assim, verificando o primeiro elemento de  $A'$ ,  $\{4, 7\}$ , observa-se que preserva a ordem: 4 está na posição antes de 7 no ordenamento  $\mathbf{r}$ , com o qual, computa-se +1. O mesmo é feito com o segundo elemento do conjunto  $A'$ ,  $\{4, 2\}$ : 4 não está na posição antes de 2 no ordenamento  $\mathbf{r}$ , computa-se -1, e assim por diante, obtém-se: +1 -1 +1 -1 +1 +1 -1 +1 +1, chegando ao valor +3. Após este cálculo em que  $a$ , do par  $\{a, b\}$ , era o primeiro número de  $\hat{\mathbf{r}}$ , faz-se o mesmo considerando agora  $a$  como o segundo elemento de  $\hat{\mathbf{r}}$ :  $a$  é fixo é igual a 7, e  $b$  variando, sendo os sucessivos elementos de  $a$ , tem-se: -1 +1 -1 -1 +1 -1 -1 +1, chegando ao valor -2. Seguindo esta regra, até que  $a$  seja o penúltimo elemento do ordenamento  $\hat{\mathbf{r}}$ , todos os valores obtidos são: +3, -2, +5, -6, +3, 0, -1, +2, +1, que totaliza uma pontuação de +5. Sabendo que o número de elementos do conjunto  $A$  é igual a 10,  $n = 10$ , aplica-se a Equação (2.21) para obter o valor final:  $\tau_{\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}}} = \frac{2}{90} \times 5 = 0,11$ . Dado que o valor do índice igual a zero indica que os ordenamentos são idênticos e igual a um indica que são totalmente diferentes, então o valor 0,11 pode indicar uma semelhança significativa entre os dois ordenamentos, mas com diferenças presentes.

## 2.3 Desagregação em MCDA: família de métodos UTA

Nos métodos apresentados até o momento, o foco do apoio à decisão consistia em como a decisão final deve ser tomada a partir de certas preferências do decisor. Porém, em muitos casos, o problema pode ser considerado da forma oposta: assumindo que dispomos de uma decisão já tomada, como podemos analisar as preferências do tomador de decisão? Esse problema é conhecido como análise de desagregação de preferências (PDA, do inglês *preference disaggregation analysis*) (DOUMPOS; ZOPOUNIDIS, 2019).

Em MCDA, os métodos de desagregação geralmente se baseiam em modelos de função de utilidade aditiva (KADZINSKI et al., 2017; SOBRIE et al., 2018; DOUMPOS;

ZOPOUNIDIS, 2019). Tal modelo associa um valor numérico para cada alternativa, calculado a partir das chamadas *funções de utilidade* dos critérios. A abordagem de desagregação visa estimar as funções de utilidade através de exemplos de escolhas fornecidas indiretamente pelo decisor.

Um método de desagregação muito conhecido em MCDA é o UTA (*UTility Additive*), proposto inicialmente por (JACQUET-LAGREZE; SISKOS, 1982). O método UTA se fundamenta na formulação de um modelo de programação linear para determinar as funções de utilidade, tendo como objetivo minimizar uma função custo que, em termos simplificados, representa a discrepância entre os ordenamentos fornecidos pelo tomador de decisão e os ordenamentos fornecidos pelo modelo baseado em funções de utilidade aditiva. Diversas variantes do UTA foram propostas, como por exemplo, o UTASTAR (SISKOS; YANNAKOPOULOS, 1985), considerado uma melhoria do método UTA, o UTADIS (ZOPOUNIDIS; DOUMPOS, 2002), usado para inferir decisões relacionadas a categorias ordenadas, o UTA-poly (SOBRIE et al., 2018), que assume polinômios em vez de funções de utilidades lineares, entre outras (JACQUET-LAGREZE; SISKOS, 2001; DOUMPOS; ZOPOUNIDIS, 2019).

Esta seção está dividida em subseções. Na Subseção 2.3.1, apresentamos conceitos e notações das funções de utilidade; na Subseção 2.3.2 discutimos os princípios do método UTA, juntamente com um exemplo numérico; apresentamos o método UTA e o UTASTAR nas Subseções 2.3.4 e 2.3.4, respectivamente; por fim, discutimos a problemática de pós-otimização desses métodos na Subseção 2.3.5

### 2.3.1 Funções de utilidade

O conceito de utilidade em economia faz referência à satisfação de um indivíduo gerada por certa quantidade de consumo de bens e serviços (VINER, 1925; GORMAN, 1959). A função de utilidade visa modelar preferências e indiferenças de indivíduos com relação a esses bens e serviços.

Em problemas de análise de decisão multicritério, a função de utilidade (ou função de valor) é muito usada para representar o grau de satisfação do decisor para os distintos valores dos critérios. Assim, seguindo a metodologia geral de modelagem dos problemas MCDA, considera-se um conjunto de alternativas de referência,  $A_R = \{a_1, \dots, a_m\}$  e um conjunto de critérios  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ , onde cada critério pode ser representado na forma (ZOPOUNIDIS; PARDALOS, 2010):

$$c_j : A_R \rightarrow [c_{j*}, c_j^*] \subset \mathbb{R}/a \rightarrow c(a), \in \mathbb{R}, \quad (2.22)$$

sendo  $c_{j*}$  e  $c_j^*$  o pior e melhor desempenho, respectivamente, no  $j$ -ésimo critério. Neste contexto, ao fazer uma escolha com múltiplos critérios, o decisor está, de certo modo, associando indiretamente um grau de satisfação (uma utilidade) para cada valor de um

certo critério. Essa utilidade é calculada através da função de utilidade, denotada por  $u_j(c_j)$ , conforme ilustrado na Figura 2.4.

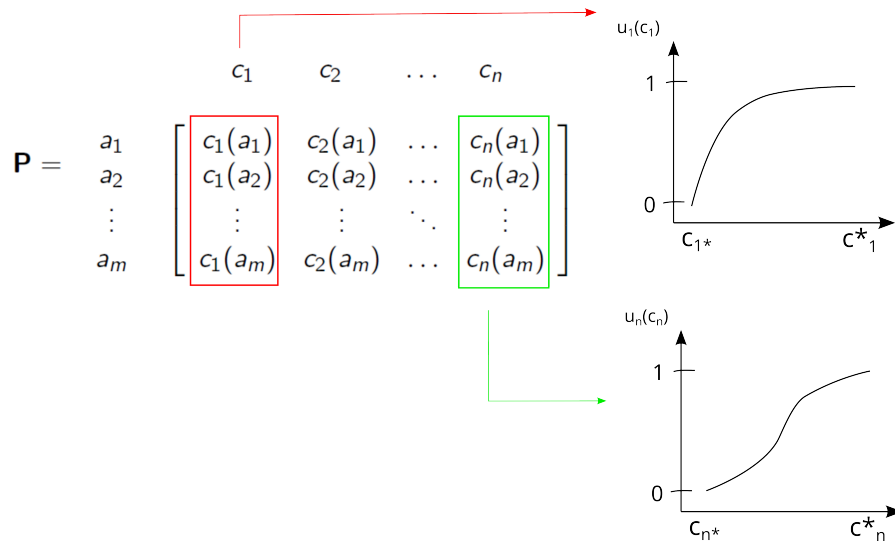


Figura 2.4 – Exemplos de curvas de utilidade para cada critério.

As definições abaixo são importantes para entender a ideia geral do método UTA:

**Pior e melhor desempenho no critério:** o pior desempenho no critério  $j$ ,  $c_{j*}$ , é aquele que traz a menor utilidade para o decisor; o melhor,  $c_j^*$ , é o que traz a maior utilidade. Por exemplo, o *pior* desempenho no critério preço costuma ser seu *maior* valor e o *melhor* desempenho seu *menor* valor.

**Monotonicidade da função de utilidade:** a função de utilidade deve ser sempre monótona. Assim, ao ordenar os valores de um critério do pior desempenho  $c_{j*}$  para o melhor  $c_j^*$ , a imagem da função de utilidade deve ser não-decrescente:

$$[c_{j*}, \dots, c_j^*] \implies u_j(c_{j*}) \leq \dots \leq u_j(c_j^*). \quad (2.23)$$

**Normalização da utilidade:** como o conceito de utilidade não tem uma unidade de medida específica, a utilidade é então normalizada entre 0 e 1.

### 2.3.2 Princípios gerais do método UTA

O método UTA visa determinar uma função de utilidade para cada critério, de modo que essas funções expliquem o ordenamento das alternativas feito pelo decisor. A estratégia consiste em, dado um ordenamento das alternativas, estimar um *valor global* para cada alternativa, tal que, quanto melhor sua posição no ordenamento, maior seu valor global, e, se o decisor é indiferente entre duas ou mais alternativas, o valor global delas

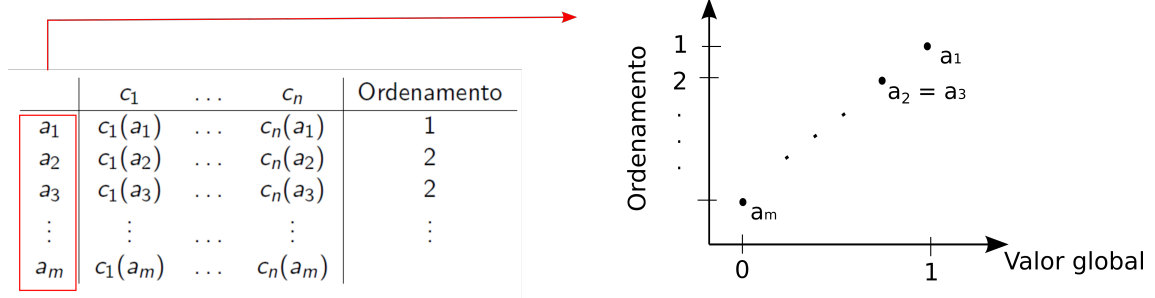


Figura 2.5 – Exemplos de valor global para as alternativas dado um certo ordenamento.

565 deve ser igual, conforme ilustrado na Figura 2.5. O valor global de cada alternativa deve ser calculado pela soma das utilidades dos critérios dessa alternativa.

Assim, supondo uma matriz de decisão como a da Figura 2.5, onde suas linhas estão ordenadas de acordo com a escolha de um decisor, denotamos a linha  $i$  dessa matriz por  $\mathbf{c}(a_i)$  e o valor global da alternativa  $a_i$  por  $u[\mathbf{c}(a_i)]$ . Sabendo que, quanto melhor a  
 570 posição de uma certa alternativa  $i$ , maior seu valor global, no método UTA se estabelece uma relação de ordem par a par das alternativas na forma:

$$\begin{cases} u[\mathbf{c}(a_i)] \geq u[\mathbf{c}(a_{i+1})] & \text{se } a_i \succ a_{i+1} \text{ (preferência)} \\ u[\mathbf{c}(a_i)] = u[\mathbf{c}(a_{i+1})] & \text{se } a_i \sim a_{i+1} \text{ (indiferença)} \end{cases} \quad (2.24)$$

Além disso, representa-se o valor global da alternativa  $i$ ,  $\forall i$ , como a soma das utilidades dos critérios dessa alternativa:

$$u[\mathbf{c}(a_i)] = u_1[c_1(a_i)] + \dots + u_n[c_n(a_i)] \quad \forall a \in A_R. \quad (2.25)$$

Substituindo os valores globais da Equação (2.24) pela soma das utilidades,  
 575 conforme a Equação (2.25), temos:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n u_j[c_j(a_i)] + \sigma(a) \geq \sum_{j=1}^n u_j[c_j(a_{i+1})] & \text{se } a_i \succ a_{i+1} \\ \sum_{j=1}^n u_j[c_j(a_i)] + \sigma(a) = \sum_{j=1}^n u_j[c_j(a_{i+1})] & \text{se } a_i \sim a_{i+1} \end{cases} \quad (2.26)$$

em que a variável  $\sigma(a)$  representa um erro potencial em caso de inconsistências no ordenamento. Se todas as variáveis erro forem iguais a zero, é possível encontrar valores viáveis mantendo a relação de ordem imposta pelo decisor. Assim, o método UTA visa encontrar valores para essas utilidades, respeitando as Restrições (2.26) e buscando  
 580 minimizar as variáveis erro  $\sigma(a)$ .

Na sequência, ilustramos a ideia geral do UTA por meio de um exemplo numérico no qual um decisor ordena os meios de transporte que prefere usar para ir ao trabalho, considerando como critérios o preço e tempo de deslocamento por viagem, conforme Tabela 2.2.



Tabela 2.2 – Exemplo numérico de uma decisão de meios de transporte.

|             | Preço | Tempo | Ordenamento |
|-------------|-------|-------|-------------|
| Carro (CA)  | 3     | 10    | 1           |
| Ônibus (ON) | 1     | 20    | 2           |

585 Conforme estratégia apresentada do funcionamento do UTA, busca-se valores globais para as alternativas respeitando as Restrições (2.24) na forma:

$$u[\mathbf{c}(CA)] > u[\mathbf{c}(ON)]. \quad (2.27)$$

Considerando o valor global de cada alternativa como soma das utilidades de seus critérios, como nas Equações (2.25), obtemos:

$$\begin{cases} u[\mathbf{c}(CA)] = u_{price}[3] + u_{time}[10] \\ u[\mathbf{c}(ON)] = u_{price}[1] + u_{time}[20]. \end{cases} \quad (2.28)$$

Assim, substituindo os valores da Equação (2.28) na Equação (2.27), e adicionando a  
590 variável erro  $\sigma(a)$ , temos:

$$u_{price}[3] + u_{time}[10] + \sigma(a) > u_{price}[1] + u_{time}[20]. \quad (2.29)$$

Além disso, é importante lembrar que as funções de utilidades devem ser monótonas, conforme Equação (2.23), e estar normalizadas entre 0 e 1. Então, ao ordenar os valores do preço e do tempo do pior para o melhor desempenho (o pior desempenho dos dois critérios corresponde aos seus maiores valores), os valores das utilidades devem  
595 preservar as seguintes restrições:

$$\begin{cases} u_{price}[3] < u_{price}[1] \\ u_{time}[20] < u_{time}[10]. \end{cases} \quad (2.30)$$

O problema consiste agora em encontrar valores para  $u_{price}[3]$ ,  $u_{price}[1]$ ,  $u_{time}[20]$ ,  $u_{time}[10]$  e  $\sigma(a)$  respeitando as Restrições (2.29) e (2.30), de modo que o erro  $\sigma(a)$  seja o menor possível. O método UTA visa encontrar uma solução viável para este problema através da formulação de um modelo de programação linear. Como esse é um exemplo pequeno,  
600 é possível inferir esses valores sem recorrer a realização do processo de otimização. Por exemplo, podemos associar zero para a variável erro:  $\sigma(a) = 0$ , e encontrar diversos valores para as funções de utilidade e que satisfazem as restrições do problema. De fato, a Tabela 2.3 apresenta algumas das soluções viáveis e mostra que elas satisfazem as Restrições expressas em (2.29) e (2.30).

605 É importante mencionar duas questões a partir deste exemplo: **(1)** é possível encontrar várias soluções que satisfazem as restrições impostas. Essas múltiplas soluções ocorrem em exemplos reais e estão relacionadas a um problema de robustez do modelo de

Tabela 2.3 – Possíveis valores para as funções de utilidade do exemplo numérico.

| $u_{price}[3]$ | $u_{price}[1]$ | $u_{time}[20]$ | $u_{time}[10]$ | Restrição (2.29)    | Restrição (2.30)      |
|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------|-----------------------|
| 0              | 0,1            | 0              | 0,9            | $0 + 0,9 > 0,1 + 0$ | $0 < 0,1$ e $0 < 0,9$ |
| 0              | 0,2            | 0              | 0,8            | $0 + 0,8 > 0,2 + 0$ | $0 < 0,2$ e $0 < 0,8$ |
| 0              | 0,3            | 0              | 0,7            | $0 + 0,7 > 0,3 + 0$ | $0 < 0,3$ e $0 < 0,7$ |

decisão (DOUMPOS; ZOPOUNIDIS, 2019), que apresentamos na Subseção 2.3.5; (2) Nem sempre é possível encontrar uma solução em que os erros  $\sigma(a)$  sejam zero, o que indica que não é possível encontrar valores globais para as alternativas respeitando a ordem imposta pelo decisor. Isso acontece porque as decisões estão sujeitas a fragilidades do decisor, tais como vieses, inconsistências e irracionalidades (FRENCH; MAULE; PAPAMICHAIL, 2009).

Para mostrar um exemplo onde não é possível que as variáveis erro sejam zero, modificamos o exemplo numérico anterior. Considere agora que o tempo de deslocamento de carro é de 20 minutos e de ônibus de 10 minutos. Supondo que, mesmo com os novos dados apresentados na Tabela 2.4, a preferência do decisor seja a mesma. Nota-se que, se somente esses dois critérios estão sendo levados em consideração, há uma inconsistência na decisão, pois a alternativa ônibus possui melhores valores para todos os critérios.

Tabela 2.4 – Exemplo numérico quando há inconsistências na decisão.

|             | Preço | Tempo | Ordenamento |
|-------------|-------|-------|-------------|
| Carro (CA)  | 3     | 20    | 1           |
| Ônibus (ON) | 1     | 10    | 2           |

Para obter os novos valores das funções de utilidades, obtemos as restrições da forma:

$$u_{price}[3] + u_{time}[20] + \sigma(a) > u_{price}[1] + u_{time}[10], \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} u_{price}[3] < u_{price}[1] \\ u_{time}[20] < u_{time}[10] \end{cases}. \quad (2.32)$$

Pelas Restrições (2.32), os valores:  $u_{price}[3]$  e  $u_{time}[20]$  devem ser menores que:  $u_{price}[1]$  e  $u_{time}[10]$ , respectivamente, o que leva a que  $u_{price}[3] + u_{time}[20] < u_{price}[1] + u_{time}[10]$ . Observa-se, então, que não é possível atribuir zero à variável erro na Restrição (2.31), pois isso implicaria em  $u_{price}[3] + u_{time}[20] > u_{price}[1] + u_{time}[10]$ , que contradiz as Restrições (2.32). Para visualizar melhor esse ponto, mostramos na Tabela 2.5 alguns valores viáveis, dadas as Restrições (2.31) e (2.32). Neste caso, para que a Restrição (2.31) seja viável, o erro  $\sigma(a)$  deve ser maior que zero.

Esse exemplo apresenta a ideia geral por trás do UTA. Essa ideia é formalizada nas Subseções 2.3.3 e 2.3.4, onde apresentamos os algoritmos dos métodos UTA e UTASTAR, respectivamente.

Tabela 2.5 – Possíveis valores para as funções de utilidade quando há inconsistência na decisão.

| $u_{price}[3]$ | $u_{price}[1]$ | $u_{time}[20]$ | $u_{time}[10]$ | Restrição (2.31)                | Restrição (2.32)      |
|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------------|-----------------------|
| 0              | 0,1            | 0              | 0,9            | $0 + 0 + \sigma(a) > 0,1 + 0,9$ | $0 < 0,1$ e $0 < 0,9$ |
| 0              | 0,2            | 0              | 0,8            | $0 + 0 + \sigma(a) > 0,2 + 0,8$ | $0 < 0,2$ e $0 < 0,8$ |
| 0              | 0,3            | 0              | 0,7            | $0 + 0 + \sigma(a) > 0,3 + 0,7$ | $0 < 0,3$ e $0 < 0,7$ |

### 2.3.3 Método UTA

No método UTA as funções de utilidade são modeladas como funções lineares por parte. Nesse contexto, cada função de utilidade  $u_j(c_j)$  é definida por  $\alpha_j$  pontos  $c_j^\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, \alpha_j$ , sendo  $\alpha_j$  número de diferentes valores que um critério  $j$  assume no conjunto de alternativas  $A$ . Os pontos extremos  $c_j^1$  e  $c_j^{\alpha_j}$  (também denotados por  $c_{j*}$  e  $c_j^*$ ) representam o pior e melhor desempenho do  $j$ -ésimo critério no conjunto de alternativas  $A$ , respectivamente:  $c_j^1 = \min_{a_i \in A} c_j(a_i)$  e  $c_j^{\alpha_j} = \max_{a_i \in A} c_j(a_i)$ . O intervalo dos valores dos critérios para cada critério  $j$  é então representado por  $[c_j^1, c_j^2, \dots, c_j^{\alpha_j}]$ . Quando os valores de algum critério  $c_j \in C$  é contínuo (ou quando ele contém um número considerável de diferentes valores), ele pode ser dividido em  $(\alpha_j - 1)$  intervalos iguais (SISKOS; GRIGOROUDIS; MATSATSINIS, 2005). Nesse caso, os pontos  $c_j^\ell$  são calculados da forma:

$$c_j^\ell = c_{j*} + \frac{\ell - 1}{\alpha_j - 1}(c_j^* - c_{j*}), \quad \ell = 1, \dots, \alpha_j. \quad (2.33)$$

Assim, o valor global de uma alternativa é aproximada por interpolação linear como:

$$u_j[c_j(a_i)] = u_j(c_j^\ell) + \frac{c_j(a_i) - c_j^\ell}{c_j^{\ell+1} - c_j^\ell} [u_j(c_j^{\ell+1}) - u_j(c_j^\ell)]. \quad (2.34)$$

A função de valor global da alternativa  $i$  é representada por  $u[\mathbf{c}(a_i)]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , seguindo as propriedades:

$$\begin{cases} u[\mathbf{c}(a_i)] > u[\mathbf{c}(a_{i+1})] & \iff a_i \succ a_{i+1} \quad (\text{preferência}) \\ u[\mathbf{c}(a_i)] = u[\mathbf{c}(a_{i+1})] & \iff a_i \sim a_{i+1} \quad (\text{indiferença}). \end{cases} \quad (2.35)$$

Utiliza-se um modelo de programação linear para estimar o modelo de preferência do tomador de decisão. Para tal, primeiramente o conjunto de alternativas,  $A_R = \{a_1, \dots, a_m\}$ , é ordenado de modo que  $a_1$  seja a melhor e  $a_m$  a pior alternativa, de acordo com o ordenamento do decisor. Então, cada comparação par a par mostrada em (2.35) é expressa como uma restrição no modelo UTA da seguinte forma: para cada comparação de pares de alternativas temos

$$\Delta(a_i, a_{i+1}) = u[\mathbf{c}(a_i)] - u[\mathbf{c}(a_{i+1})] + \sigma(a), \quad (2.36)$$

onde:

$$\begin{cases} \Delta(a_i, a_{i+1}) \geq \delta & \text{se } a_i \succ a_{i+1} \quad \forall i \\ \Delta(a_i, a_{i+1}) = 0 & \text{se } a_i \sim a_{i+1} \quad \forall i \end{cases}, \quad (2.37)$$

em que  $\sigma(a)$  são as *variáveis de erro*. Se essas variáveis são iguais a zero, há uma solução  
 655 viável que representa exatamente a ordem de preferência do decisor. Desse modo, visando  
 alcançar essa ordem de preferência, a função objetivo do UTA busca minimizar as variáveis  
 erros. O modelo matemático completo do método UTA é dado por:

$$\min z = \sum_{a \in A_r} \sigma(a) \quad (2.38)$$

sujeito à

$$\Delta(a_i, a_{i+1}) \geq \delta \text{ if } a_i \succ a_{i+1} \quad \forall i \quad (2.39)$$

$$\Delta(a_i, a_{i+1}) = 0 \text{ if } a_i \sim a_{i+1} \quad \forall i \quad (2.40)$$

$$u_j(c_j^{\ell+1}) - u_j(c_j^\ell) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \ell = 1, \dots, \alpha_j \quad (2.41)$$

$$\sum_{j=1}^n u_j(c_j^*) = 1 \quad (2.42)$$

$$u_j(c_{j*}) = 0, u_j(c_j^\ell) \geq 0, \sigma(a) \geq 0, \quad \forall a \in A_R, \quad \forall j, \ell \quad (2.43)$$

As Restrições (2.41) garantem a monotonicidade das funções de utilidade e as Restri-  
 ções (2.42) estão relacionada à normalização destas funções.

#### 660 2.3.4 Método UTASTAR

O método UTASTAR (SISKOS; YANNAKOPOULOS, 1985) é considerado uma  
 versão melhorada do UTA, no sentido que permite modelar variações de erros positivos e  
 negativos (SISKOS; GRIGOROUDIS; MATSATSINIS, 2005; ZOPOUNIDIS; PARDALOS,  
 2010). Assim, duas modificações importantes foram propostas. Primeiramente, uma função  
 665 de erro duplo,  $\sigma^+(a_i)$  e  $\sigma^-(a_i)$ , foi introduzida, se trata de uma representação mais  
 adequada do objetivo, pois considera diferentes tipos de variação em relação aos valores  
 desejados (SISKOS; GRIGOROUDIS; MATSATSINIS, 2005). Essa primeira modificação  
 leva a uma reorganização da Equação (2.36) da seguinte forma:

$$\Delta(a_i, a_{i+1}) = \left( u[\mathbf{c}(a_i)] - \sigma^+(a_i) + \sigma^-(a_i) \right) - \left( u[\mathbf{c}(a_{i+1})] - \sigma^+(a_{i+1}) + \sigma^-(a_{i+1}) \right) \quad (2.44)$$

A segunda modificação é referente às Restrições (2.41), em que estas são substituídas  
 670 pelas novas variáveis de transformação,  $w_{j\ell}$ , que reduzem a quantidade de restrições e  
 representam as sucessivas etapas das funções de utilidade, na forma:

$$w_{j\ell} = u[\mathbf{c}(a_i^{\ell+1})] - u[\mathbf{c}(a_i^\ell)] \geq 0, \quad \forall i, \ell. \quad (2.45)$$

A Figura 2.6 ilustra graficamente as variáveis  $w_{j\ell}$ .

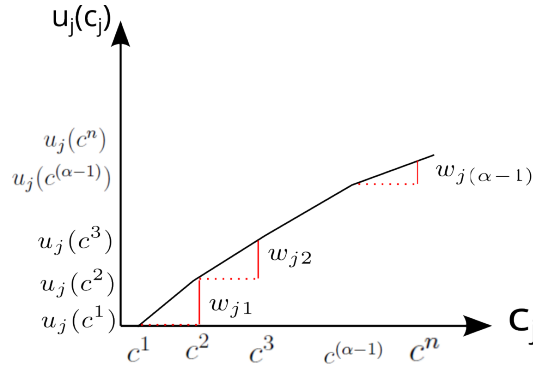


Figura 2.6 – Representação gráfica das variáveis  $w_{j\ell}$  a serem estimadas no método UTASTAR.

Assim, o modelo matemático do UTASTAR é dado por:

$$\min z = \sum_{i=1}^m [\sigma^+(a_i) + \sigma^-(a_i)] \quad (2.46)$$

$$\text{sujeito à} \quad (2.47)$$

$$\Delta(a_i, a_{i+1}) \geq \delta \text{ if } a_i \succ a_{i+1} \quad \forall i \quad (2.48)$$

$$\Delta(a_i, a_{i+1}) = 0 \text{ if } a_i \sim a_{i+1} \quad \forall i \quad (2.49)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^{\alpha_j-1} w_{j\ell} = 1, \quad (2.50)$$

$$w_{j\ell} \geq 0, \sigma^+(a_i) \geq 0, \sigma^-(a_i) \geq 0, \quad \forall j, \ell \text{ e } i \quad (2.51)$$

### 2.3.5 Problema de robustez no modelo de decisão

Os métodos UTA e UTASTAR são bastante úteis para a análise de preferência, porém é importante considerar que estes possuem um problema de robustez no modelo de decisão. Em (JACQUET-LAGREZE; SISKOS, 1982) os autores destacam que existem diferentes soluções viáveis (funções de utilidade) que são compatíveis com as preferências do decisor. Se as possíveis soluções forem muito diferentes entre si, o modelo não será representativo e fornecerá diferentes recomendações ao aplicá-lo a um novo conjunto de alternativas (DOUMPOS; ZOPOUNIDIS, 2019).

No estudo (JACQUET-LAGREZE; SISKOS, 1982), os autores observaram que, quando a solução ótima  $z^*$  é igual a zero, diferentes funções de utilidade podem ser obtidas. Já quando a solução ótima é diferente de zero, é possível incrementar  $z^*$  da forma  $z^* + \gamma(z^*)$ , sendo  $\gamma$  um valor muito pequeno, e também se obtém diferentes funções de

utilidade. Assim, os autores propuseram uma análise pós-otimização resolvendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min u_j(c_j^*) \\ \text{Sujeito à :} \\ \text{Restrições (2.39) – (2.43)} \\ z \leq z^* + \gamma(z^*) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max u_j(c_j^*) \\ \text{Sujeito à :} \\ \text{Restrições (2.39) – (2.43)} \\ z \leq z^* + \gamma(z^*) \end{array} \right. \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.52)$$

de forma a encontrar diversas funções de utilidade, sendo a solução final a média das funções obtidas.

O problema de robustez do modelo de decisão vem atraindo diversas pesquisas que focam tanto em técnicas analíticas (também conhecidas como ROR - *Robust Ordinal Regression*) quanto em métodos de simulação (também conhecidos como SOR - *Stochastic Ordinal Regression*) (KADZIŃSKI; MICHALSKI, 2016). No âmbito das técnicas analíticas, utiliza-se a pós-otimização para identificar alguns dos pontos do poliedro formado pelas Restrições (2.39)-(2.43). A partir das soluções encontradas, é possível apresentar como solução final a média dos resultados obtidos (JACQUET-LAGREZE; SISKOS, 1982), assim como selecionar o modelo de decisão mais representativo (DOUMPOS; ZOPOUNIDIS, 2007) e também fornecer recomendações baseadas nos diversos os modelos de decisão obtidos (GRECO; MOUSSEAU; SŁOWIŃSKI, 2008). Além disso, foram propostas técnicas para calcular um índice de estabilidade dos modelos de decisão obtidos (GRIGOROUDIS; SISKOS, 2002) ou outras medidas de robustez (DOUMPOS; ZOPOUNIDIS, 2016). Por outro lado, as técnicas SOR aplicam simulação de Monte Carlo para obter amostras das funções de utilidade. Trabalhos tais como (CORRENTE et al., 2016; KADZIŃSKI; MICHALSKI, 2016; ANGILELLA; CORRENTE; GRECO, 2015) fornecem uma distribuição de probabilidade das funções de utilidade compatíveis com as preferências do decisor.

Assim, tanto o ROR quando o SOR trazem para o decisor diversos modelos de preferência compatíveis com o exemplo de decisão fornecido. Como essas abordagens são consideradas como um processo de aprendizado construtivo, em geral o decisor participa do processo do aprendizado de preferências. Sendo assim, esses modelos são úteis para proporcionar ao decisor um entendimento de suas preferências e fornecer sugestões para a tomada de decisão (CORRENTE et al., 2013).

### 3 Ferramentas para exploração da temporalidade na análise de decisão multicritério

Conforme discutido no capítulo de Introdução, a análise de séries temporais traz informações relevantes em muitos problemas de decisão, o que, por sua vez, pode ter um impacto significativo na recomendação final. No entanto, integrar a análise temporal em processos de tomada de decisão multicritério ainda é um desafio. Para superar esses obstáculos as contribuições desta tese, como será descrito a partir do Capítulo 4, se valem de técnicas de processamento de sinais, como o uso de tensores para estruturar as séries temporais e a predição adaptativa, que nos permite prever o comportamento futuro dos critérios de decisão com base nas séries temporais.

O presente capítulo visa apresentar tais ferramentas, bem como o contexto de aplicação em MCDA. Mais precisamente, na Seção 3.1 revisamos estudos que tratam temporalidade em MCDA. A Seção 3.2 apresenta uma discussão da importância de considerar a análise de séries temporais em MCDA e seus desafios. Por fim, na Seção 3.3, descrevemos alguns conceitos e técnicas de processamento de sinais utilizados neste estudo.

#### 3.1 Revisão de estudos que consideram a análise temporal em MCDA

Poucos estudos no campo de MCDA consideram a evolução dos critérios na forma de séries temporais. (XU, 2008) revisou diversos estudos de métodos e aplicações em MCDA e destacou que, até a data, a maioria deles não utiliza múltiplos períodos de tempo. O estudo propõe um novo método que considera mais de um período para apoiar decisões multicritério. A validação da proposta considera um problema no qual uma empresa que deseja investir dinheiro em cinco possíveis empresas com base nos critérios de benefício econômico, benefício social e poluição ambiental, considerando esses critérios ao longo de três anos.

(LIN; LEE; TING, 2008) introduziu um modelo de tomada de decisão multia-tributo dinâmico (DMADM - *Dynamic Multi-attribute Decision Making*) para considerar a análise temporal e a incerteza em MCDA, com base em uma extensão do TOPSIS. Os autores propuseram agregar os dados para cada período, obtendo um ordenamento por período e, posteriormente, uma nova agregação é feita para obter o ordenamento geral das alternativas. O estudo concluiu que a abordagem é útil em várias aplicações práticas.

(ZHOU; CHEN, 2011) investigou decisões multicritério em múltiplos períodos

usando o método de média ponderada ordenada para a etapa de agregação. Os autores usaram diferentes estratégias relacionadas às preferências na decisão, mostrando que considerar a temporalidade no modelo é relevante. Por exemplo, eles consideram que, em  
35 uma cidade histórica, prédios mais antigos podem ser preferidos ante prédios mais novos e essa preferência deve ser modelada no MCDA considerando a temporalidade, em vez de apenas um único período para a agregação.

([YAN et al., 2015](#)) introduziu uma nova abordagem considerando a tendência das alternativas ao longo de um período de tempo. Primeiro, uma agregação das alternativas  
40 em todos os períodos é feita. Em segundo lugar, eles analisam a tendência entre os períodos adjacentes, o que lhes permite modelar a tendência de desenvolvimento das alternativas.

([WATROBSKI; SALABUN; LADORUCKI, 2017](#)) propôs um modelo para estender o MCDA clássico com aspectos de avaliação temporal para a seleção de fornecedores. O método de Processo Analítico Hierárquico (AHP) é usado para classificar os  
45 fornecedores ao longo do tempo, e, posteriormente, também para obter a agregação final.

([BANAMAR; SMET, 2018](#); [BANAMAR, 2019](#)) ilustrou a importância de considerar a temporalidade em MCDA através de três exemplos relacionados à avaliação do desempenho de bancos, ao Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e à avaliação de jogadores de futebol. Eles propuseram uma extensão do método PROMETHEE para  
50 avaliações multi-período.

([FRINI; BENAMOR, 2015](#); [FRINI; BENAMOR, 2019](#); [MOUHIB; FRINI, 2021](#)) consideraram as séries temporais dos critérios em um contexto de desenvolvimento sustentável. Em tais trabalhos, os autores enfatizam a importância de utilizar métodos temporais para tomar decisões considerando impactos a curto e longo prazo, ajudando as necessidades  
55 atuais, sem comprometer as gerações futuras. Para esse propósito, ([FRINI; BENAMOR, 2015](#); [FRINI; BENAMOR, 2019](#)) aplicaram um método de agregação chamado Método de Superação Multicritério em Períodos Múltiplos e o TOPSIS, obtendo um ordenamento para cada período e, em seguida, um ordenamento final das alternativas. ([MOUHIB; FRINI, 2021](#)) introduziu um método chamado SMAA-TRI para abordar a questão de classificar  
60 as alternativas considerando uma abordagem temporal.

De acordo com estudos anteriores, ([WITT; KLUMPP, 2021](#)) destacou que a maioria das técnicas de MCDA avalia sistemas de energia em um único período e apresenta o MP-PROMETHEE-S, uma extensão do clássico PROMETHEE, na qual um conjunto de possíveis cenários é introduzido em múltiplos períodos. A abordagem é aplicada a um  
65 estudo de caso do setor de energia alemão, que concluiu o potencial da análise multi-período no processo de tomada de decisão.

([MARTINS; GARCEZ, 2021](#)) utilizou uma abordagem multicritério para medir o risco e as consequências de acidentes de trânsito ao longo do tempo. Nos experimentos



realizados, eles comparam abordagens temporais e não-temporais obtendo soluções diferentes. Esses resultados mostraram que, considerando unicamente um modelo MCDA, o decisor não pode observar o aumento nas taxas de acidentes. Os resultados indicam que a incorporação de mais informações de ordem temporal em MCDA torna os resultados mais descritivos de cenários da vida real.

Essa revisão bibliográfica enfatiza a importância da análise temporal na MCDA e seu potencial de ampliar a aplicação de MCDA em diversos casos práticos. A inclusão da dimensão temporal pode ser mais adequada em decisões que envolvem considerações dinâmicas, pois permite a incorporação de novas preferências e a avaliação da evolução dos critérios ao longo do tempo.

### 3.2 Motivação da análise temporal em MCDA

O Capítulo 2 apresenta a forma clássica utilizada em MCDA para estruturação dos dados, baseada na chamada matriz de decisão  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , ilustrada na Figura 3.1(a). As linhas da matriz representam as alternativas a serem ordenadas e as colunas representam os critérios. O desempenho das alternativas é medido em termos dos valores dos critérios. Cada elemento  $p_{ij}$  da matriz  $\mathbf{P}$ , definida em (2.2), corresponde à avaliação da alternativa  $i$  no critério  $j$ . Desse modo, em MCDA, cada critério é associado a um único valor ( $p_{ij}$ ), que pode ser a média do desempenho do critério em um período de tempo, o valor no momento em que a decisão é tomada (dados do período atual) ou outros dados estáticos (XU, 2008). Apesar dessa abordagem ser amplamente utilizada, em muitas decisões é importante fazer uma análise das séries temporais dos critérios, considerando suas características tais como média, volatilidade, tendência, sazonalidade.

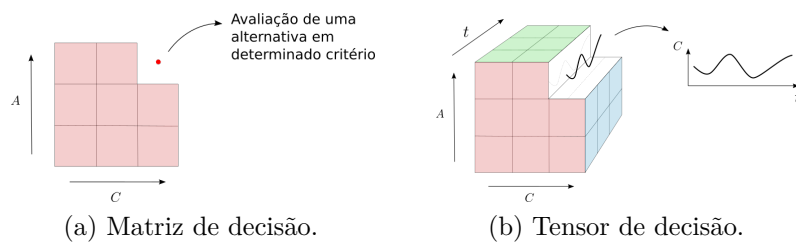


Figura 3.1 – Estruturas de dados em MCDA: clássica (matricial) e proposta (tensorial).

90

A análise de séries temporais é usada para a tomada de decisão em diferentes aplicações. Por exemplo, em economia, finanças e negócios, (ZHANG; WANG, 2017) argumenta como as ferramentas de áreas como processamento de sinais ou aprendizado de máquina são úteis para identificar características das séries temporais (tendência, não estacionariedade, análise espectral e de ruído) e, assim, apoiar decisões econômico-financeiras. Muitos estudos, como (SUNG; LAPAN, 2000; ATELLA; ATZENI; BELVISI, 2003; BUSH; NORIA, 2021; HENRIQUES; SADORSKY, 2011; BRESSER-PEREIRA;

OREIRO; MARCONI, 2014; ALAALI, 2020), discutem como a volatilidade da taxa de câmbio e do preço do petróleo impactam as decisões de investimento doméstico e internacional. Além disso, a análise das séries temporais sazonais e semanais são úteis no contexto do turismo para ajudar com investimentos e decisões de marketing (JEFFREY; HUBBARD, 1988; BUTLER, 2001; JERMSITTIPARSERT, 2019). Na área da saúde, a análise de séries temporais também é utilizada para ajudar na tomada de decisão conforme vemos em (REZAEI et al., 2016; KASSAKIAN et al., 2016; MEHRMOLAEI; KEYVANPOUR, 2018; HOLLAND et al., 2020).

Em MCDA, alguns pesquisadores vêm destacado a relevância de novos métodos que considerem a análise temporal dos critérios (XU, 2008; WATROBSKI; SALABUN; LADORUCKI, 2017; BANAMAR; SMET, 2018; MARTINS; GARCEZ, 2021); no entanto, a maioria dos métodos de MCDA existentes não lida com essa temporalidade. Um estudo de revisão da literatura realizada em (KANDAKOGLU; FRINI; AMOR, 2019) mostrou que, apesar da temporalidade ser relevante no desenvolvimento sustentável em decisões multicritério, apenas 5% dos artigos trataram desta problemática.

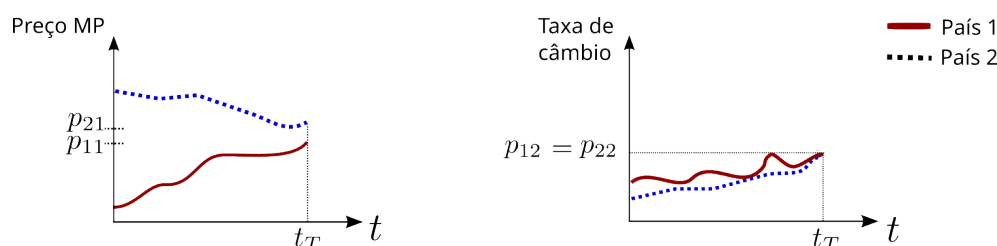


Figura 3.2 – Exemplo das séries temporais de preço da matéria-prima e taxa de câmbio de dois países.

Para ilustrar o interesse por trás da análise das características de séries temporais em MCDA, considere uma situação na qual o decisor deseja ordenar dois países para abrir uma nova filial, tendo como critérios o preço da matéria-prima e na taxa de câmbio. A Figura 3.2 mostra um exemplo dos valores desses critérios para cada país. Ao aplicar técnicas clássicas de MCDA, os valores dos critérios seriam seu valor do período atual ou a média da série temporal e, em ambos os casos, o País 1 ocupa o primeiro lugar devido ao menor preço da matéria-prima. No entanto, como discutido anteriormente, tendência e volatilidade nas séries temporais são consideradas em decisões de investimento. Ao modelar o problema de decisão considerando essas características pode-se mudar o ordenamento, já que o País 2 apresenta uma tendência de queda nos preços da matéria-prima e suas séries temporais são menos voláteis. Portanto, se as técnicas de MCDA não conseguem modelar decisões com análise temporal, as soluções dadas ao decisor podem ser insatisfatórias.

Em vista disso, este trabalho de tese se propõe a tratar aspectos temporais na decisão multicritério, abordagem que traz novos desafios. O primeiro deles é que a estrutura de dados na forma matricial torna-se limitada. De fato, observa-se pela Figura 3.1(a) que não é possível modelar os dados com série temporal na forma matricial. Propomos então

utilizar a estrutura de dados tensorial para representar de forma compacta e eficiente  
130 múltiplos sinais temporais. A Figura 3.1(b) ilustra esta estrutura de dados tensorial. O  
tensor do exemplo é formado por três dimensões, sendo a primeira representada pelas  
alternativas, a segunda pelos critérios enquanto a terceira representa a série temporal  
desses critérios.

O segundo desafio da abordagem temporal é que a análise das séries temporais  
135 exige uma etapa de agregação adicional, para a qual usaremos técnicas de processamento  
de sinais, cujos principais fundamentos revisaremos a seguir.

### 3.3 Conceitos e técnicas de processamento de sinais

Um sinal é um conjunto de dados que transmite informações e pode ser  
representado por uma função de uma ou mais variáveis independentes, como o tempo ou  
140 espaço (ROMANO et al., 2011; LATHI, 2006; OPPENHEIM, 1999). Neste sentido, uma  
série temporal é um tipo de sinal caracterizado por uma sequência de dados em função do  
tempo. Exemplos de sinais temporais são registro de vendas de uma empresa, índice de  
preços, preços de ações, dados meteorológicos ou sinais fisiológicos, como batimento cardíaco  
ou pressão arterial. Sinais temporais podem ser analisados para entender tendências,  
145 padrões e relações nos dados e podem ser usados para fazer previsões sobre eventos ou  
resultados futuros.

Os sinais podem ser manipulados de diferentes maneiras, como por exemplo,  
através de operações de deslocamento e escalamento temporal. Deslocamento temporal  
consiste em atrasar ou adiantar o sinal em um determinado período de tempo. Assim,  
150 dado um sinal  $x(t)$  e o mesmo sinal atrasado  $\lambda$  segundos, representado por  $x(t - \lambda)$ , tudo  
que acontecer em  $x(t)$ , em algum tempo  $t$  também acontecerá com  $x(t - \lambda)$ . O escalamento  
temporal consiste em aumentar ou diminuir a velocidade do sinal. Então, dado um sinal  
 $x(t)$  e o mesmo sinal comprimido no tempo por um fator de  $\lambda$ , representado por  $x(\lambda t)$ , o  
que acontecer com  $x(t)$ , também acontecerá com  $x(\lambda t)$  no instante  $t/\lambda$ . Essas operações  
155 são importantes em filtros adaptativos, que serão abordados em mais detalhes em seções  
posteriores.

Em seguida, citamos algumas maneiras de classificar um sinal (ROMANO et al., 2011; LATHI, 2006):

**Sinais contínuos e discretos no tempo:** Um sinal de tempo contínuo é definido para  
160 todos os instantes de tempo, enquanto um sinal de tempo discreto é definido para  
alguns instantes de tempo e pode ser obtido, por exemplo, a partir de amostras de  
um sinal de tempo contínuo, a Figura 3.3 ilustra um exemplo desses dois tipos de  
sinais.

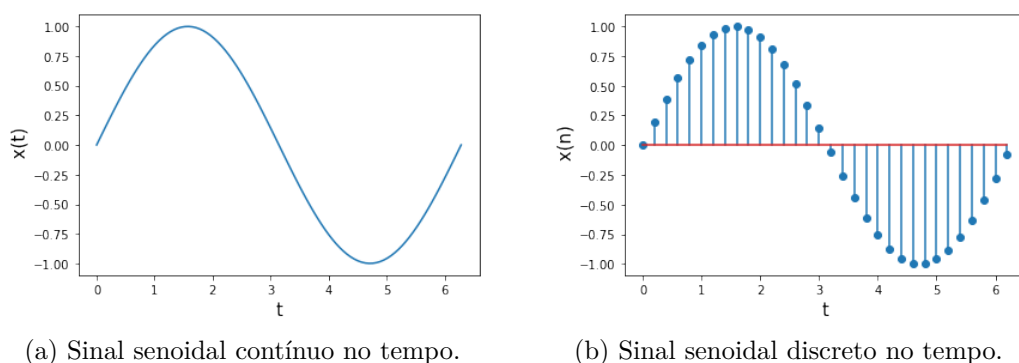


Figura 3.3 – Exemplos de sinais senoidais contínuo  $x(t)$  e discreto  $x(n)$  em função do tempo  $t$ .

**Sinais analógicos e digitais:** O conceito de analógico e digital está associado a amplitude dos sinais (medida da magnitude de um sinal). Assim, um sinal digital é aquele cuja amplitude assume alguns valores finitos, por exemplo, sinais binários que podem assumir apenas zero ou um. O sinal analógico pode assumir qualquer valor de amplitude em uma faixa contínua. Estes conceitos são comumente confundidos com sinais contínuos e discretos. Porém, é importante saber que o conceito de contínuo e discreto no tempo está associado à natureza do sinal ao longo do eixo do tempo, enquanto o de analógico e digital está associado à natureza no eixo da amplitude;

**Sinais periódicos e não periódicos:** Um sinal  $x(t)$  é periódico se, dada uma constante positiva qualquer  $T_0$ , tem-se:

$$x(t) = x(t + T_0). \quad (3.1)$$

O menor valor de  $T_0$  que satisfaz a condição de periodicidade é chamado de período fundamental de  $x(t)$ ;

**Sinais determinísticos e aleatórios:** Um sinal cuja descrição é completamente conhecida é dito determinístico, enquanto sinais cujos valores não podem ser preditos precisamente, sendo apenas descritos em termos probabilísticos, são ditos sinais aleatórios.

**Sinais estacionários e não estacionários** Um sinal aleatório estacionário é caracterizado por suas estatísticas serem invariantes no tempo, tais como média, variância e autocorrelação. Um sinal não estacionário pode ter uma ou mais medidas estatísticas que variam com o tempo. Sinais não estacionários são comuns em muitas aplicações, como áudio e vídeo, bem como séries temporais econômicas (ZHANG; WANG, 2017), e requerem técnicas mais sofisticadas de processamento para serem analisados.

Os sinais podem ser estruturados de diferentes formas. O sinal unidimensional (1D) é uma sequência de amostras e pode ser representado como um vetor. O sinal de

áudio é um exemplo de sinal unidimensional. O sinal bidimensional (2D) é comumente representado na forma matricial. A imagem é um exemplo de sinal 2D, sendo representada por uma matriz de *pixels*. Por sua vez, os sinais multidimensionais (3D ou mais) podem ser representados por uma estrutura tensorial. Um exemplo dessa estrutura tensorial é em sistemas de comunicação sem-fio, em que o sinal pode ter natureza multidimensional, sendo uma dimensão o espaço (número de antenas de recepção), a outra o tempo (comprimento do bloco de dados a ser processado), enquanto a terceira geralmente está relacionada ao tipo de processamento realizado no transmissor (ALMEIDA, 2007).

A seguir, apresentamos a representação dos sinais utilizada neste estudo, bem como a técnica de predição adaptativa empregada.

### 3.3.1 Álgebra tensorial

Embora a álgebra tensorial seja utilizada há mais de um século, ela ganhou destaque em tratamento de dados e processamento da informação a partir de 1990 (KROONENBERG, 2008). Suas aplicações vêm sendo amplamente estendidas nas últimas décadas, principalmente por conta da crescente quantidade de dados gerados e armazenados (SIDIROPOULOS et al., 2017; CALVI; LUCIC; MANDIC, 2019). Os tensores são utilizados em diversas áreas tais como psicomетria (CARROLL; CHANG, 1970), química (SMILDE; BRO; GELADI, 2005), ciências sociais (KROONENBERG, 2008), processamento de sinais e inteligência artificial (SIDIROPOULOS et al., 2017), telecomunicações (COSTA; FAVIER; ROMANO, 2018), entre outros (CICHOCKI et al., 2015).

Muitos métodos importantes em abordagens matriciais podem ser adaptados para os tensores, tais como os métodos de separação de sinais, regressão linear, decomposição de valores singulares, entre outros (CICHOCKI et al., 2015). Esses métodos são bastante conhecidos, sendo alguns dos mais clássicos: decomposição de Tucker, modelos Parafac e modelos ParaTuck2 (KROONENBERG, 2008).

Alguns estudos mostram a utilidade do tensor para modelagem de dados na tomada de decisão. Por exemplo, (CALVI; LUCIC; MANDIC, 2019) ampliou o uso da técnica de *Support Vector Machine*, que é um tipo de modelo de aprendizado de máquina, para uma estrutura tensorial, chamada *Support Tensor Machine*, para predição financeira. (NILASHI et al., 2021) utilizou uma técnica de redução de dimensionalidade de tensor para predição de preferências dos turistas. (BOBILLO, 2016) propôs uma representação tensorial e técnicas de decomposição para classificação de som cardíaco.

Em MCDA, o uso da estrutura tensorial ainda é bastante limitado. Em (PELIS-SARI; ABACKERLI; DUARTE, 2022), foi proposto um tensor de decisão tridimensional desbalanceado, o que significa que a terceira dimensão do tensor pode ter tamanhos diferentes. Eles testaram a proposta em um estudo de caso para avaliar instituições de

pesquisa.

Assim, neste estudo propomos utilizar tensores no apoio à decisão multicritério. Denotamos um tensor por  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_o}$ , em que  $o$  indica sua ordem (número de dimensões). Um vetor  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$  é considerado um tensor de primeira ordem e uma matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  um tensor de segunda ordem (CICHOCKI et al., 2015). Os subtensores são obtidos fixando um subconjunto de índices de tensores. Assim, os subtensores vetoriais  $\mathbf{p}(:, i_2, i_3, \dots, i_o)$  são chamados de fibras, obtidos fixando todos os índices, exceto um. Já os Slices  $\mathbf{P}(:, :, i_3, \dots, i_o)$  são subtensores matriciais obtidos fixando todos os índices, exceto dois.

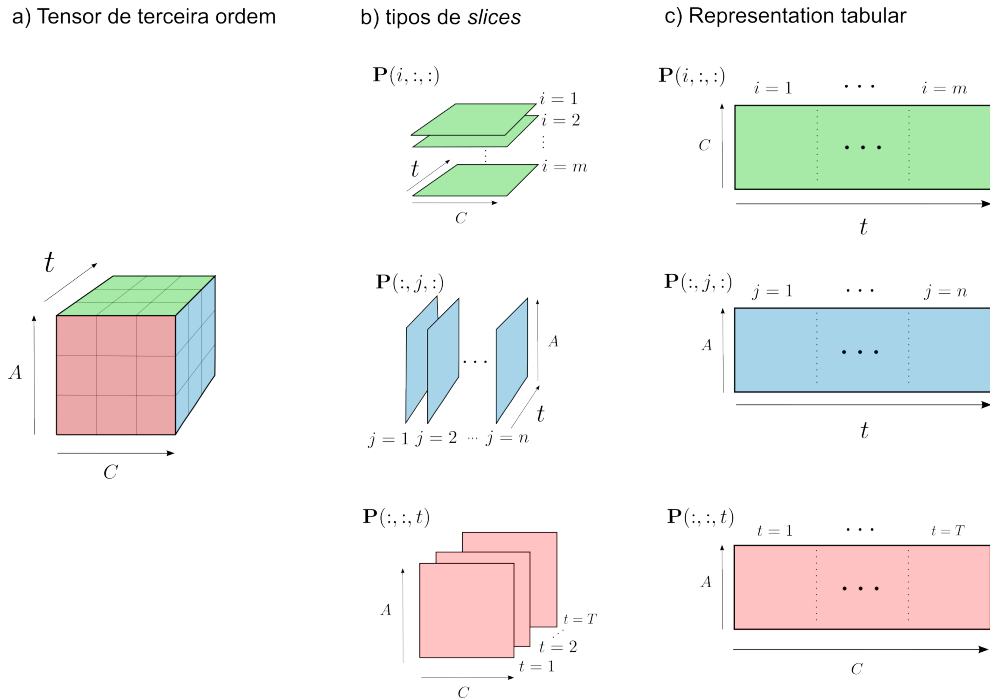


Figura 3.4 – Ilustração de um tensor de terceira ordem e seus três tipos de subtensores matriciais.

O tensor de decisão considerado neste estudo é um tensor de ordem 3, denotado por  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$  e ilustrado na Figura 3.4. A primeira dimensão deste tensor está relacionada com as alternativas, a segunda com os critérios e a terceira com a série temporal. Neste tensor, há três tipos de slices, representadas como frontal  $\mathbf{P}(:, :, t)$ , horizontal  $\mathbf{P}(:, j, :)$  e vertical  $\mathbf{P}(i, :, :)$  (KANATSOULIS et al., 2019). Cada slice frontal  $\mathbf{P}(:, :, t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ , é equivalente a uma matriz de decisão no instante  $t$ . Portanto, o slice frontal no instante  $t_T$  (dados do período atual) pode ser representada como  $\mathbf{P}(:, :, T)$ , e corresponde à matriz de decisão clássica  $\mathbf{P}$ . Da mesma forma, há três tipos de fibras,  $\mathbf{p}(i, j, :)$ ,  $\mathbf{p}(i, :, t)$  e  $\mathbf{p}(:, j, t)$ . A fibra  $\mathbf{p}(i, j, :)$  é ilustrada na Figura 3.1(b), representando a série temporal relacionada aos critérios. É importante destacar que a chamada fibra do tensor é um sinal conforme definido na Seção 3.3; assim, denominamos  $\mathbf{p}(i, j, :)$  de fibra, sinal ou série temporal de forma equivalente. Por fim, cada elemento deste tensor é denotado por  $p_{ijt}$ , e corresponde

245 à avaliação da alternativa  $i$  no critério  $j$  no instante  $t$ .

### 3.3.2 Predição adaptativa

Sistemas adaptativos e procedimentos recursivos, como o filtro de Kalman (WELCH; BISHOP, 1995) e outros (HAYKIN, 2008), têm sido amplamente utilizados em problemas de engenharia e ciências naturais. O algoritmo que utilizamos neste estudo para a  
250 predição adaptativa é o chamado mínimos quadrados recursivos (RLS, do inglês *Recursive least-squares*). Para entender melhor esse algoritmo, é necessário que seja apresentado previamente o conceito geral de um filtro de erro de predição, como um caso particular do problema de filtragem de Wiener.

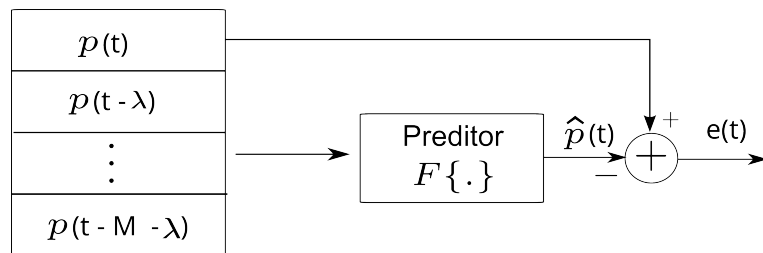


Figura 3.5 – Esquema geral de um filtro de erro de predição.

No esquema geral de um filtro de erro de predição, o problema da predição de  
255  $\lambda$  passos consiste em estabelecer um mapeamento que, quando aplicado a um conjunto de amostras de uma série temporal, forneça um valor de predição  $\lambda$  passos à frente (ROMANO et al., 2011). A Figura 3.5 ilustra um esquema do chamado filtro de erro de predição  $F\{.\}$ . Dado um sinal  $\mathbf{p}(i, j, :)$ , a entrada do filtro é um conjunto de amostras desse sinal, denotamos como (por simplicidade na notação omitimos os índices  $i$  e  $j$ ):  $\mathbf{p}(t - \lambda) =$   
260  $[p(t - \lambda), \dots, p(t - \lambda - M)]^T$ , onde  $M$  é o tamanho do filtro,  $t = 1, \dots, T$  o número de amostras e  $\lambda$  o tamanho do passo de predição. Consideramos de agora em diante  $\lambda = 1$ . Observe que, nesta notação, cada elemento do vetor  $\mathbf{p}(t - 1)$  é um sinal atrasado em  $t - 1$ ,  $t - 2$ ,  $t - 3$ ,  $\dots$ ,  $t - M - 1$  amostras. A saída do filtro é dada por

$$\hat{p}(t) = F\{\mathbf{p}(t - 1)\}. \quad (3.2)$$

Ao considerar a predição linear, o mapeamento  $F\{.\}$  é geralmente associado a  
265 um conjunto de  $M$  coeficientes  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_0, \dots, \omega_{M-1}]$ . O mapeamento  $F\{.\}$  é uma combinação linear das amostras passadas  $\mathbf{p}(t - 1)$ . Então, a Equação (3.2) pode ser reescrita como:

$$\hat{p}(t) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{p}(t - 1). \quad (3.3)$$

O erro de predição  $e(t)$  é calculado como a diferença entre o sinal alvo  $p(t)$  e o sinal estimado  $\hat{p}(t)$ , na forma:

$$e(t) = p(t) - \hat{p}(t). \quad (3.4)$$



Ao considerar as Equações (3.3) e (3.4), nota-se que existe uma relação de dependência entre o erro  $e(t)$  e os coeficientes livres  $\boldsymbol{\omega}$ . Assim, tendo como critério de aprendizado o erro quadrático médio mínimo (MMSE - *minimum mean-squared error*), a função custo que relaciona o erro quadrático médio (MSE) ao vetor de coeficientes é dada por:

$$J_{MSE}(\boldsymbol{\omega}) = E[e(t)^2] = E[(p(t) - \hat{p}(t))^2] = E\left[\left(p(t) - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{p}(t-1)\right)^2\right]. \quad (3.5)$$

Após um desenvolvimento da Equação (3.5), temos que:

$$\begin{aligned} J_{MSE}(\boldsymbol{\omega}) &= E[p^2(t)] - E[p(t)\mathbf{p}(t-1)^T] \boldsymbol{\omega} \\ &\quad - \boldsymbol{\omega}^T E[\mathbf{p}(t-1)p(t)] + \boldsymbol{\omega}^T E[\mathbf{p}(t-1)\mathbf{p}^T(t-1)] \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ao representar  $E[\mathbf{p}(t-1)\mathbf{p}^T(t-1)]$  por  $\mathbf{R}$  e  $E[\mathbf{p}(t-1)p(t)]$  por  $\mathbf{q}$ , reescrevemos a Equação (3.6):

$$J_{MSE}(\boldsymbol{\omega}) = E[p^2(t)] - \mathbf{q}^T \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}. \quad (3.7)$$

Assim, a função de custo do critério MMSE é estabelecida em termos de médias estatísticas (ROMANO et al., 2011).

A função de custo definida na Equação (3.7) é uma função quadrática dos coeficientes do filtro e possui apenas um mínimo, o que significa que há apenas um vetor de coeficientes que minimiza o MSE. A minimização da função de custo  $J_{MSE}(\boldsymbol{\omega})$  é feita ao zerar seu gradiente na Equação (3.7):

$$\nabla J_{MSE}(\boldsymbol{\omega}) = 2\mathbf{R}\boldsymbol{\omega} - 2\mathbf{q} = 0 \rightarrow \mathbf{R}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{q}. \quad (3.8)$$

A Equação (3.8) é conhecida por equação de *Wiener-Hopf*, que pode ser rescrita por uma notação matricial da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{q}. \quad (3.9)$$

Em que  $\boldsymbol{\omega}$  é o vetor de coeficientes que corresponde à solução de Wiener.

A utilização da Equação (3.9) é dependente do conhecimento de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{q}$  e da possibilidade de inverter  $\mathbf{R}$ . Se essas condições forem atendidas, é possível encontrar, de forma analítica, a solução que minimiza o critério MSE.

Com o objetivo de chegar a uma solução que não exija conhecimento prévio das estatísticas e que, ao mesmo tempo, permita acompanhar a solução de Wiener em contextos não estacionários, introduz-se a ideia da filtragem adaptativa. A literatura apresenta uma grande variedade de algoritmos baseados em diferentes critérios. Neste trabalho de tese, vamos focar no critério de mínimos quadrados e no algoritmo recursivo derivado dele.



### 3.3.2.1 O algoritmo dos mínimos quadrados recursivos (RLS - *Recursive least-squares*)

295 A técnica de mínimos quadrados tem como objetivo minimizar a soma dos  
quadrados da diferença entre o sinal desejado e a saída do filtro. É possível fazer esse  
procedimento de forma recursiva, isto é, à medida que novas amostras dos sinais de entrada  
são recebidas. Desta forma, a solução vai sendo computada de forma recursiva. Esse  
algoritmo é chamado de algoritmo dos mínimos quadrados recursivos (RLS) e é conhecido  
300 por ter uma convergência rápida e apresentar um bom desempenho em ambientes variantes  
no tempo.

Para chegar ao algoritmo, minimiza-se o critério de mínimos quadrados, dado  
por

$$J_{LS}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{t=1}^{N_a} \Lambda(t) e^2(t) \quad (3.10)$$

onde  $\Lambda(t)$  é um fator de peso, dito de esquecimento, que controla o grau de relevância que  
305 o erro produz no instante  $t$ . O que leva à solução:

$$\boldsymbol{\omega}_{LS} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(N_a) \boldsymbol{\pi}(N_a), \quad (3.11)$$

em que

$$\boldsymbol{\Psi}(N_a) = \sum_{t=1}^{N_a} \Lambda(t) \mathbf{p}(t-1) \mathbf{p}^T(t-1) \quad (3.12)$$

e

$$\boldsymbol{\pi}(N_a) = \sum_{t=1}^{N_a} \Lambda(t) \mathbf{p}(t-1) p(t), \quad (3.13)$$

Reescrevendo (3.12) como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}(n) &= \sum_{t=1}^n \Lambda(t) \mathbf{p}(t-1) \mathbf{p}^T(t-1) = \\ &\Lambda(n) \mathbf{p}(n-1) \mathbf{p}^T(n-1) + \sum_{t=1}^{n-1} \Lambda(t) \mathbf{p}(t-1) \mathbf{p}^T(t-1), \end{aligned} \quad (3.14)$$

e (3.13) como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}(n) &= \sum_{t=1}^n \Lambda(t) \mathbf{p}(t-1) p(t) = \\ &\Lambda(n) \mathbf{p}(n-1) p(n) + \sum_{t=1}^{n-1} \Lambda(t) \mathbf{p}(t-1) p(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

310 Considerando o fator de esquecimento da forma:

$$\Lambda(n) = \Lambda^{N_a-n}, \quad (3.16)$$

a matriz (3.14) e o vetor (3.15) são representados como:

$$\begin{aligned}\Psi(n) &= \sum_{t=1}^n \Lambda^{n-t} \mathbf{p}(t-1) \mathbf{p}^T(t-1) = \\ &\mathbf{p}(n-1) \mathbf{p}^T(n-1) + \Lambda \sum_{t=1}^{n-1} \Lambda^{n-t-1} \mathbf{p}(t-1) \mathbf{p}^T(t-1) = \\ &\mathbf{p}(n-1) \mathbf{p}^T(n-1) + \Lambda \Psi(n-1)\end{aligned}\tag{3.17}$$

e

$$\pi(n) = \sum_{t=1}^n \Lambda^{n-t} \mathbf{p}(t-1) p(t) = \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\Lambda(n) \mathbf{p}(n-1) p(n) &+ \sum_{t=1}^{n-1} \Lambda(t) \mathbf{p}(t-1) p(t) = \\ &\mathbf{p}(n-1) p(n) + \Lambda \pi(n-1)\end{aligned}\tag{3.19}$$

Para evitar uma inversão direta da matriz, como mostrado na Equação (3.11), utiliza-se o chamado lema da inversão das matrizes (GOLUB; LOAN, 2013), tornando a  
315 matriz (3.14), na forma (ROMANO et al., 2011):

$$\Psi^{-1}(n) = \Lambda^{-1} \Psi^{-1}(n-1) - \frac{\Lambda^{-2} \Psi^{-1}(n-1) \mathbf{p}(n-1) \mathbf{p}^T(n-1) \Psi^{-1}(n-1)}{1 + \Lambda^{-1} \mathbf{p}^T(n-1) \Psi^{-1}(n-1) \mathbf{p}(n-1)} \tag{3.20}$$

Na situação em que o passo de predição é  $\lambda = 1$ , o algoritmo RLS assume a forma apresentada no Algoritmo 1.

**Algoritmo 1:** RLS.

1. **Inicialização:**  $\mathbf{p}_{ij}(0) = \omega(0) = \mathbf{0}_M$ ; tipicamente o valor de uma matriz  $\mathbf{K}(0)$ , que corresponde à inversa de  $\Psi$ , é dada por uma matriz diagonal com valores pequenos.
2. Para cada amostra recebida, atualize os coeficientes da forma:

$$\begin{aligned}\gamma(n) &= \frac{\Lambda^{-1} \Psi^{-1}(n-1) \mathbf{p}(n-1)}{1 + \Lambda^{-1} \mathbf{p}^T(n-1) \Lambda^{-1} \mathbf{p}(n-1)} \\ \xi(n) &= \hat{p}(n) - \omega^T(n-1) \mathbf{p}(n) \\ \omega(n) &= \omega(n-1) + \gamma(n) \xi(n) \\ \mathbf{K}(N) &= \Lambda^{-1} \Psi^{-1}(n-1) - \Lambda^{-1} \gamma(n) \omega^T(n) \Psi^{-1}(n-1)\end{aligned}$$

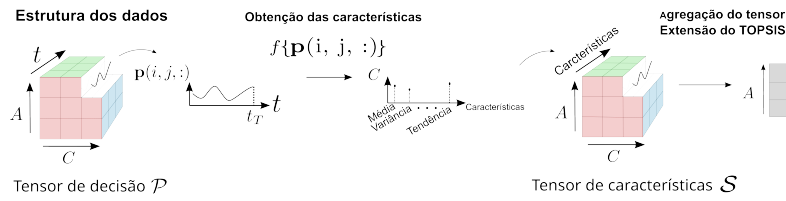
## Parte II

### Contribuições

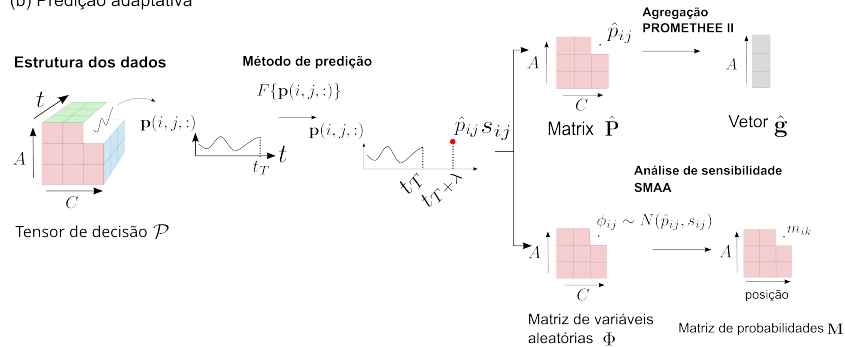
## 4 Proposta de método de agregação em estruturas tensoriais

Este capítulo tem como objetivo apresentar as contribuições de nosso estudo sob a perspectiva da agregação tensorial. Foram desenvolvidas três novas metodologias, cada uma adequada a diferentes tipos de decisão e preferências do decisor. Essas metodologias utilizam como dados de entrada o tensor de decisão  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ , que representa  $m$  alternativas,  $n$  critérios e  $T$  amostras da série temporal, conforme retratadas na Figura 4.1.

(a) Espaço de características



(b) Predição adaptativa



(c) Espaço de características com dados preditivos

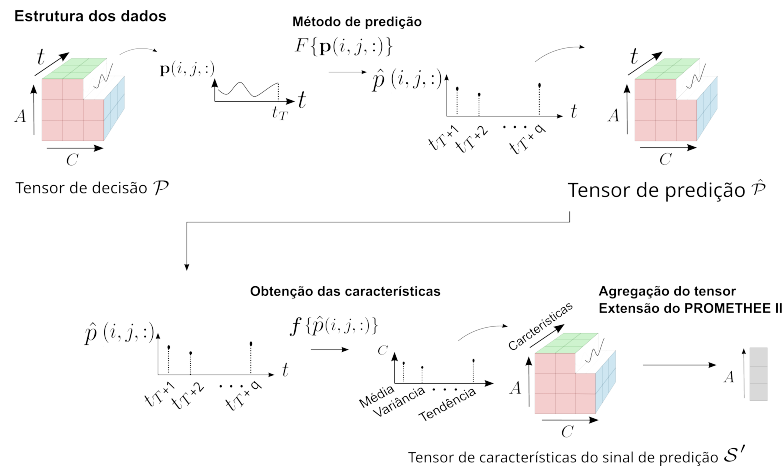


Figura 4.1 – Esquema das abordagens três abordagens de agregação considerando as séries temporais dos critérios.

A primeira metodologia, exemplificada na Figura 4.1(a) e detalhada na Seção 4.1, consiste na análise de medidas descritivas das séries temporais dos critérios. Essas medidas descritivas, que denominamos por características, incluem a média, a tendência e outras propriedades relevantes. De forma breve, nesta metodologia aplica-se uma função  $f\{\cdot\}$  em cada série temporal  $\mathbf{p}(i, j, :)$  do tensor  $\mathcal{P}$ , através da qual obtém-se as características. Assim, para cada alternativa e cada critério, tem-se  $h$  características (exemplo,  $h = 3$ : média, variância e tendência), que compõem a terceira dimensão de um novo tensor, denominado tensor de características  $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{m \times n \times h}$ . Para a agregação do tensor de características, propomos uma extensão do método TOPSIS.

A segunda metodologia, que descrevermos na Seção 4.2, é denominada predição adaptativa para o apoio à decisão, e a representamos na Figura 4.1(b). Em suma, nesta metodologia, aplicamos uma função  $F\{\cdot\}$ , em cada série temporal  $\mathbf{p}(i, j, :)$  do tensor  $\mathcal{P}$ , pela qual obtém-se valores de predição dos critérios  $\hat{p}_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , e o desvio padrão dos erros de predição  $s_{ij}$ . Os valores de predição  $\hat{p}_{ij}$  são usados para compor uma matriz de predição  $\hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Esta matriz é equivalente à matriz de decisão clássica, sendo que agora com valores preditivos dos critérios. Além disso, os valores de predição também podem ser vistos como a média de uma variável aleatória  $\phi_{ij}$  que segue uma distribuição normal, com desvio padrão  $s_{ij}$ . Essas variáveis aleatórias compõem uma matriz  $\Phi$ , equivalente à matriz de decisão, sendo que os seus valores não são mais determinísticos, mas sim estocásticos, e representam a probabilidade dos valores futuros dos critérios. Nesta metodologia, utilizamos tanto o método clássico PROMETHEE II, para agregar a matriz  $\hat{\mathbf{P}}$  e obter um ordenamento futuro, quanto o método SMAA, na matriz  $\Phi$  para obter a probabilidade de cada alternativa estar em dada posição do ordenamento futuro.

Por fim, a terceira metodologia, que mostramos na Seção 4.3, é denominada predição adaptativa em uma representação baseada em tensores de características, e está esquematizada na Figura 4.1(c). Nela, utilizamos elementos relevantes das duas metodologias anteriores. Assim, aplica-se aqui também a função  $F\{\cdot\}$ , em cada série temporal  $\mathbf{p}(i, j, :)$  do tensor  $\mathcal{P}$ , sendo que agora, para cada série temporal, obtemos  $q$  valores de predição, isto é, obtemos o valor de predição de cada critério para os instantes de tempo  $T + 1, T + 2, \dots, T + q$ . Cada um desses sinais de predição corresponde a valores futuros de um critério em uma determinada alternativa. Assim, forma-se o tensor de predição  $\hat{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}^{m \times n \times q}$ . Neste novo tensor, aplicamos a função  $f\{\cdot\}$  para obter  $h$  características do sinal, assim como na primeira metodologia, sendo que agora essas são características das séries temporais de predição. A partir dessas características das séries temporais de predição, obtém-se um novo tensor  $\mathcal{S}' \in \mathbb{R}^{m \times n \times h}$ . Finalmente, para agregar o tensor  $\mathcal{S}'$  e obter um ordenamento, propomos uma extensão do método PROMETHEE II. O ordenamento obtido representa um ordenamento com base nas características das séries temporais preditas.

45 Nas seções que apresentam as metodologias, detalhamos o porquê da escolha de cada método, assim como a motivação de cada uma das metodologias e aplicações que acreditamos serem adequadas para cada uma.

## 4.1 Análise do espaço de características: uma proposta baseada no método TOPSIS

50 No Capítulo 3, discutimos a relevância de considerar uma análise temporal dos critérios e mostramos que poucos estudos em MCDA fazem essa análise. Nesta seção, apresentamos uma nova abordagem para a análise temporal em MCDA, propomos ampliar a matriz de decisão para considerar a evolução dos critérios ao longo do tempo, formando um tensor de decisão. Posteriormente, passamos o tensor de decisão para o espaço de  
55 características, tais como média, variância, tendência, entre outros. Propomos também uma nova extensão para o método TOPSIS para agregar o tensor de decisão e obter um ordenamento. Ao final, é feita uma análise de sensibilidade através do SMAA para analisar melhor o desempenho de nossa proposta. Estudamos ainda mudanças no ordenamento das alternativas quando os pesos das características são modificados e validamos a proposta  
60 utilizando dados reais.

Esta abordagem se diferencia dos estudos revisados na Seção 3.1, pois eles agregam diretamente as séries temporais dos critérios e, normalmente, é feita uma primeira agregação dos dados para cada período e uma segunda agregação para obter o ordenamento final. Mesmo que alguns dos estudos revisados analisem uma tendência, isto é feito sem  
65 considerar outras características simultaneamente para a agregação final. Em vez disso, o nosso objetivo é explorar mais de uma características da série temporal com base na preferência do decisor e, então, fazer a agregação do tensor. A principal vantagem de nossa abordagem é que o decisor pode indicar quais características da série temporal são relevantes na decisão, assim como estabelecer a importância de cada uma, o que leva a  
70 uma solução baseada em suas preferências quanto às características das séries temporais. Além disso, a abordagem proposta nos leva a uma contribuição metodológica original, que é uma extensão do método TOPSIS para agregar a estrutura tensorial. Essa extensão considera as preferências do decisor em relação à terceira dimensão, sendo que os pontos ideal positivo e negativo são considerados com base nestas múltiplas dimensões.

75 Como discutido na Seção 2.2.1, o TOPSIS apresenta diversas vantagens, sendo que várias delas o tornam particularmente adequado: **(a)** a complexidade computacional envolvida no TOPSIS é simples, o que é importante, pois estamos lidando com um tensor que tem uma estrutura mais complexa que a matriz; **(b)** é interessante ter o conceito de pontos ideais positivo e negativo pois, ao tratar de uma determinada característica relacionada à  
80 série temporal, é preciso ter referências que indiquem o que deve ser considerado uma boa

e uma má solução; (c) o conceito de pesos é incorporado à terceira dimensão do tensor para modelar a importância relativa da característica.

#### 4.1.1 Motivação da análise de decisão no espaço de características

Em muitas aplicações em MCDA, o ordenamento das alternativas leva em  
85 conta o valor dos critérios no domínio do tempo. Entretanto, este domínio nem sempre é o mais favorável para analisar aspectos importantes da decisão; algumas vezes pode ser mais apropriado considerar simultaneamente algumas características da série temporal. Assim, nesta contribuição, mostramos como o espaço de características proporciona diferentes soluções daquelas encontradas considerando apenas o espaço temporal.

90 Supondo que um decisor tenha que ordenar duas alternativas ( $m = 2$ ) de acordo com dois critérios de benefício ( $n = 2$ ), onde cada critério é medido de acordo com dois períodos ( $T = 2$ ). O tensor de decisão é representado por  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2 \times 2}$ , e cada alternativa  $i$  é representada por *slices*  $\mathbf{P}(i, :, :) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  da forma:

$$\mathbf{P}(i, :, :) = \begin{bmatrix} p_{i11} & p_{i12} \\ p_{i21} & p_{i22} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Cada vetor  $\mathbf{p}(i, j, :)$  representa a série temporal da alternativa  $i$  no critério  $j$ . A Figura 4.2  
95 ilustra os dados e os gráficos correspondentes.

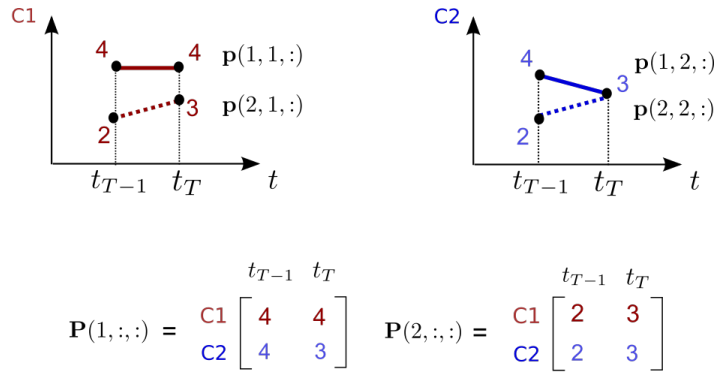


Figura 4.2 – Gráficos e matrizes do exemplo de agregação no espaço temporal e no espaço de atributos.

Observamos que no espaço temporal, todos os valores dos critérios da Alternativa 1 são maiores ou iguais que da Alternativa 2:  $p_{1jT} \geq p_{2jT} \forall j, t$ . De acordo com as Definições 1 e 2, apresentadas na Subseção 2.1.5, ao aplicarmos qualquer função de agregação  $f\{\cdot\}$  em  $\mathbf{P}(1, :, :)$  e  $\mathbf{P}(2, :, :)$  implica em  $f\{\mathbf{P}(1, :, :)\} \geq f\{\mathbf{P}(2, :, :)\}$ , pois  $p_{ijt} \geq p_{2ijt} \forall j, t$ . Isto  
100 significa que a Alternativa 1 domina a Alternativa 2, independente do método de agregação.

Para ilustrar melhor o problema, suponha  $f\{\cdot\}$  uma função aditiva na forma:

$$f\{\mathbf{P}(i, :, :)\} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{t=1}^T w_{tj} p_{ijt} \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.2)$$

em que os elementos  $w_{tj}$ , de uma matriz  $\mathbf{W}$ , representa o peso do critério  $j$  no período  $t$ , e  $w_{tj} \geq 0$  e  $\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n w_{tj} = 1$ . Vamos assumir neste exemplo:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Considerando tal matriz na Equação (4.2), temos que  $f\{\mathbf{P}(1, :, :)\} = 4$  e  $f\{\mathbf{P}(2, :, :)\} = 2.5$ .  
105 Como esperado, a Alternativa 1 é preferível à Alternativa 2:

$$\mathbf{P}(1, :, :) \succ \mathbf{P}(2, :, :). \quad (4.4)$$

O mesmo ocorre se aplicarmos a Equação (4.2) considerando apenas os valores em  $t_T$  (dados atuais). Note que não é possível encontrar um  $\mathbf{W}$  capaz de mudar a preferência da Equação (4.4), pois  $p_{1jt} \geq p_{2jt} \forall j, t$ , o que implica em  $\sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^T p_{1jt} \geq \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^T p_{2jt}$ ; finalmente, dado que os pesos não podem ser negativos,  $w_{tj} \geq 0$ , ao multiplicar números  
110 não negativos em ambos os lados da desigualdade, não é possível mudar o ordenamento:  
 $\sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^T w_{tj} p_{1jt} \geq \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^T w_{tj} p_{2jt}$ .

Supomos agora que nesta decisão é mais relevante considerar a tendência dos critérios. Assim, mudamos o domínio do tempo para o domínio de características. Este mapeamento é representado por  $G\{.\}: G\{\mathbf{P}(1, :, :)\}$  e  $G\{\mathbf{P}(2, :, :)\}$ , sendo  $G(.)$  o coeficiente  
115 angular das séries temporais. Aplicando, então,  $G\{.\}$  e o método aditivo definido na Equação (4.2), obtemos  $f\{G\{\mathbf{P}(1, :, :)\}\} = -0.25$  e  $f\{G\{\mathbf{P}(2, :, :)\}\} = 0.5$ . Assim, a Alternativa 2 torna-se preferível à Alternativa 1, ou seja,

$$\mathbf{P}(2, :, :) \succ \mathbf{P}(1, :, :). \quad (4.5)$$

A preferência em (4.5) é diferente da apresentada em (4.4). No domínio do tempo, a Alternativa 1 domina a Alternativa 2. Em um espaço de características, a  
120 Alternativa 2 torna-se a preferida. Os rankings são diferentes, mas ambos são adequados para apoiar a tomada de decisão. Assim, o exemplo mostra que considerar apenas o domínio do tempo pode não alcançar uma solução que pode ser relevante na decisão. Em outras palavras, ignorar os características leva à perda de informações cruciais e a solução não é necessariamente satisfatória. Portanto, nossa proposta considera mais elementos  
125 além dos dados atuais, tais como tendência, média, variância, etc.

#### 4.1.2 Método TOPSIS estendido para agregação do espaço de características

Nesta proposta de extensão do método TOPSIS, os dados de entrada do algoritmo são representados como um tensor de terceira ordem  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ , onde  $m$  é o número de alternativas,  $n$  é o número de critérios, e  $T$  o número de amostras na  
130 série temporal. Nesta extensão, primeiro mapeamos o espaço temporal para o espaço de



características  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T} \Rightarrow \mathcal{S} \in \mathbb{R}^{m \times n \times h}$ , onde  $h$  indica o número de características. Os pesos dos critérios são  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , definidos de acordo com a Equação (2.1). Também introduzimos pesos para as características, representadas por  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, h$ , nos quais  $\alpha_k \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^h \alpha_k = 1$ .

135 Finalmente, verificamos se a característica  $k$  é de benefício ou custo para determinar os pontos ideais positivos e negativos. Este passo é necessário, uma vez que é desejável que algumas características sejam de valor mais alto (ou baixo) possível, independente do critério. Por exemplo, se for importante uma variância baixa para a decisão, independente do critério, o ponto positivo ideal será o mais baixo. Entretanto, a  
140 tendência não é nem de benefício nem de custo, pois depende se o critério é de benefício ou de custo; se o critério for de benefício, é desejada uma tendência crescente. Se o critério for de custo, é preferível uma tendência decrescente.

Para os passos da extensão do TOPSIS, considere um tensor de ordem três, representado por  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$  e suas entradas por  $p_{ijt}$ , em que  $i = 1, \dots, m$  representa  
145 as alternativas,  $j = 1, \dots, n$  os critérios e  $t = 1, \dots, T$  os períodos. Dado os pesos dos critérios  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e os pesos das características  $\alpha_l$ ,  $l = 1, \dots, h$ , o algoritmo proposto consiste nos seguintes passos:

1. Transformar o tensor do espaço temporal para o espaço de características.

$$f : \mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T} \rightarrow \mathcal{S} \in \mathbb{R}^{m \times n \times h}, \quad (4.6)$$

onde  $f$  é a função que passa do domínio  $\mathcal{P}$  ao  $\mathcal{S}$ , os  $s_{ijk}$  são os elementos de  $\mathcal{S}$  e  $h$  o  
150 número de características. As características escolhidas devem ser aquelas que são relevantes para o propósito da decisão.

Para testar nossa abordagem, escolhemos quatro características ( $h = 4$ ): valores atuais, média, variância e tendência. A escolha foi feita pois acreditamos que essas quatro características podem ser usadas na maior parte das aplicações. Cada  
155 característica foi obtida da forma:

- Valor atual ( $k = 1$ ):

$$s_{ij1} = p_{ijT}, \quad \forall i, j, \quad (4.7)$$

- Média ( $k = 2$ ):

$$s_{ij2} = \hat{p}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_{ijt}, \quad \forall i, j, \quad (4.8)$$

onde  $\hat{p}_{ij}$  representa a média das séries temporais na alternativa  $i$  e critério  $j$ .

- Coeficiente de variação ( $k = 3$ ):

$$s_{ij3} = \frac{\sigma}{\hat{p}_{ij}}, \quad \forall i, j, \quad (4.9)$$

160 onde  $\sigma$  é o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_1^T (p_{ijt} - \hat{p}_{ij})^2}, \quad \forall i, j, \quad (4.10)$$

- Tendência ( $k = 4$ ) é calculada através do coeficiente angular ( $s_{ij4} = \hat{\beta}$ ) calculada por regressão linear da forma:  $s_{ijt} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}t$ ,  $\forall t = 1, \dots, T$ , sendo  $\hat{\beta}$  obtido como

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_1^T (p_{ijt} - \hat{p}_{ij})(t_{ijt} - \hat{t}_{ij})}{\sum_1^T (p_{ijt} - \hat{p}_{ij})^2}, \quad \forall i, j, \quad (4.11)$$

2. Normalizar os elementos do tensor  $\mathcal{S}$ , obtendo o tensor normalizado  $\mathcal{N}$ :

$$n_{ijk} = \frac{s_{ijk}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (s_{ijk})^2}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, h. \quad (4.12)$$

165 Esta etapa é necessária, pois a ordem de grandeza e a unidade de medida dos dados podem influenciar os resultados.

3. Ponderar  $\mathcal{N}$ , obtendo o tensor ponderado  $\mathcal{V}$ :

$$v_{ijk} = \alpha_k n_{ijk} w_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, h. \quad (4.13)$$

4. Determinar os pontos ideal positivos e negativos, aqui representados como  $\mathcal{A}^+$  e  $\mathcal{A}^- \in \mathbb{R}^{1 \times n \times h}$ . Os pontos ideal positivos e negativos dependem da característica  $k$  pertencer ao conjunto de benefício  $I$  ou custo  $J$ , ou se não pertencem nem ao conjunto de benefício e nem ao de custo:  $k \notin I \wedge k \notin J$ . A Equação (4.14) representa a primeira declaração (*se*), na forma: *se*  $k$  é uma característica de benefício ( $k \in I$ ) ou ( $\vee$ )  $k$  é uma característica de custo ( $k \in J$ ), então faça ( $\rightarrow$ ); e a Equação (4.17) representa a segunda declaração (*se*) na forma: *se*  $k$  não é uma característica de benefício ( $k \notin I$ ) e ( $\wedge$ )  $k$  não é uma característica de custo ( $k \notin J$ ), então faça ( $\rightarrow$ ).  
 Em seguida, se a Equação (4.14) for verdadeira, os pontos ideais positivos e negativos são identificados na Equação (4.15), sendo eles o maior valor de cada critério  $j$  ( $\max_j v_{ijk}$ ) se a característica  $k$  é de benefício ou o menor ( $\min_j v_{ijk}$ ) se for de custo; os pontos ideal negativos são identificados na Equação (4.16), em que o menor valor de cada critério  $j$  ( $\min_j v_{ijk}$ ) se a característica  $k$  é de benefício ou o maior ( $\max_j v_{ijk}$ ) se for de custo. Por fim, se a declaração da Equação (4.17) for a correta, os pontos

ideais positivos são identificados na Equação (4.18), sendo o maior valor para cada critério  $j$  ( $\max_j v_{ijk}$ ) se o critério  $j$  for de benefício ou o menor ( $\min_j v_{ijk}$ ) se for de custo; os pontos ideais negativos são identificados na Equação (4.19), sendo o menor valor de cada critério  $j$  ( $\min_j v_{ijk}$ ) se o critério  $j$  for de benefício ou o maior ( $\max_j v_{ijk}$ ) se for de custo. Assim, para cada  $k = 1, \dots, h$ :

$$\text{se } k \in I \vee k \in J \rightarrow \quad (4.14)$$

$$A_k^+ = \{v_{1k}^+, \dots, v_{nk}^+\} = \left\{ \left( \max_j v_{ijk} \mid k \in I \right), \left( \min_j v_{ijk} \mid k \in J \right) \right\} \quad (4.15)$$

$$A_k^- = \{v_{1k}^-, \dots, v_{nk}^-\} = \left\{ \left( \min_j v_{ijk} \mid k \in I \right), \left( \max_j v_{ijk} \mid k \in J \right) \right\} \quad (4.16)$$

$$\text{se } k \notin I \wedge k \notin J \rightarrow \quad (4.17)$$

$$A_k^+ = \{v_{1k}^+, \dots, v_{nk}^+\} = \left\{ \left( \max_j v_{ijk} \mid j \in I \right), \left( \min_j v_{ijk} \mid j \in J \right) \right\} \quad (4.18)$$

$$A_k^- = \{v_{1k}^-, \dots, v_{nk}^-\} = \left\{ \left( \min_j v_{jik} \mid j \in I \right), \left( \max_j v_{jik} \mid j \in J \right) \right\}; \quad (4.19)$$

5. Calcular a distância Euclidiana  $n$ -dimensional de cada alternativa para as soluções ideais positiva e negativa.

$$d_i^+ = \left\{ \sum_{k=1}^h \sum_{j=1}^n (v_{ijk} - v_{jk}^+)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.20)$$

$$d_i^- = \left\{ \sum_{k=1}^h \sum_{j=1}^n (v_{ijk} - v_{jk}^-)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, m; \quad (4.21)$$

6. Calcular a proximidade das alternativas com relação ao ponto ideal positivo, de onde o vetor  $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_m]$  é obtido:

$$g_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.22)$$

Quando  $g_i$  tende a 1, a alternativa tende a estar mais perto do ponto ideal positivo e longe do ideal negativo.

### 4.1.3 Experimentos com dados reais e discussão

Nesta seção, abordamos um problema relacionado ao Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), visando ordenar países considerando os mesmos critérios que compõem esse indicador. O IDH pode ser calculado agregando três critérios: expectativa de vida ao nascer ( $c_1$ ), educação ( $c_2$ ), e renda nacional bruta per capita ( $c_3$ ). Normalmente, os valores dos critérios são os valores atuais do ano em que o índice é calculado. No estudo (BANAMAR;

SMET, 2018), os autores propuseram abordar a problemática relacionada ao IDH para classificar dez países com economias emergentes: Brasil (BR), China (CN), Índia (IN), Indonésia (ID), Malásia (MY), México (MX), Filipinas (PH), Rússia (RU), África do Sul (ZA), Turquia (TR); de acordo com os critérios  $c_1$ ,  $c_2$ , e  $c_3$ . Eles consideram a evolução dos critérios ao longo dos anos (a série temporal dos critérios). Para testar nossa proposta, utilizamos os mesmos dados, que são mostrados na Tabela 4.1, na representação horizontal do tensor  $\mathbf{P}(:, j, :)$ . Consideramos que os pesos para os critérios são iguais, ou seja,  $w_j = 0,333$  e que todos são critério de benefício.

Tabela 4.1 – Dados dos dez países emergentes. Retirado do estudo (BANAMAR; SMET, 2018).

| Pesos $\mathbf{w}$ | 0.333                                   |      |      |      |      |      | 0.333              |       |       |       |       |       | 0.333                                     |       |       |       |       |       |
|--------------------|-----------------------------------------|------|------|------|------|------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Max/Min            | Max                                     |      |      |      |      |      | Max                |       |       |       |       |       | Max                                       |       |       |       |       |       |
| Criteria           | Expectativa de vida ao nascer ( $c_1$ ) |      |      |      |      |      | Educação ( $c_2$ ) |       |       |       |       |       | Renda nacional bruta per capita ( $c_3$ ) |       |       |       |       |       |
| Anos               | 1990                                    | 1995 | 2000 | 2005 | 2010 | 2015 | 1990               | 1995  | 2000  | 2005  | 2010  | 2015  | 1990                                      | 1995  | 2000  | 2005  | 2010  | 2015  |
| BR                 | 65.3                                    | 67.6 | 70.1 | 71.9 | 73.3 | 74.8 | 8.00               | 8.95  | 9.95  | 10.15 | 11.05 | 11.60 | 10065                                     | 10959 | 11161 | 12032 | 14420 | 15062 |
| CN                 | 69.0                                    | 69.9 | 71.7 | 73.7 | 75.0 | 76.0 | 6.80               | 7.25  | 7.85  | 8.75  | 9.85  | 10.30 | 1520                                      | 2508  | 3632  | 5632  | 9387  | 13347 |
| IN                 | 57.9                                    | 60.4 | 62.6 | 64.5 | 66.5 | 68.4 | 5.35               | 5.90  | 6.45  | 7.35  | 8.25  | 8.55  | 1754                                      | 2046  | 2522  | 3239  | 4499  | 5814  |
| ID                 | 63.3                                    | 65.0 | 66.3 | 67.2 | 68.1 | 69.1 | 6.75               | 7.20  | 8.70  | 9.30  | 9.95  | 10.30 | 4337                                      | 5930  | 5308  | 6547  | 8267  | 10130 |
| MY                 | 70.7                                    | 71.8 | 72.8 | 73.6 | 74.1 | 74.8 | 8.10               | 8.90  | 10.25 | 10.15 | 11.35 | 11.35 | 9772                                      | 13439 | 14500 | 17157 | 19725 | 23712 |
| MX                 | 70.8                                    | 72.8 | 74.4 | 75.3 | 76.1 | 77.0 | 8.05               | 8.55  | 9.15  | 9.85  | 10.50 | 10.80 | 12074                                     | 12028 | 14388 | 14693 | 15395 | 16249 |
| PH                 | 65.3                                    | 66.1 | 66.7 | 67.2 | 67.7 | 68.3 | 8.70               | 8.95  | 9.50  | 9.75  | 9.75  | 10.20 | 3962                                      | 4111  | 4994  | 6058  | 7478  | 8232  |
| RU                 | 68.0                                    | 66.0 | 65.1 | 65.8 | 68.6 | 70.3 | 10.95              | 10.85 | 11.85 | 12.60 | 13.10 | 13.35 | 19461                                     | 12011 | 12933 | 17797 | 21075 | 22094 |
| ZA                 | 62.1                                    | 61.4 | 55.9 | 51.6 | 54.5 | 57.9 | 8.95               | 10.65 | 11.00 | 11.15 | 11.55 | 11.75 | 9987                                      | 9566  | 9719  | 10935 | 11833 | 12110 |
| TR                 | 64.3                                    | 67.0 | 70.0 | 72.5 | 74.2 | 75.6 | 6.70               | 7.20  | 8.30  | 8.95  | 10.55 | 11.05 | 10494                                     | 11317 | 12807 | 14987 | 16506 | 18976 |

Consideramos para os testes computacionais quatro características ( $h = 4$ ): dados atuais (dados de 2015), média, coeficiente de variação (CV), e coeficiente angular (CA). A Tabela 4.2 mostra o tensor  $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{10 \times 3 \times 4}$ , na representação frontal  $\mathbf{S}(:, :, k)$ , obtido pelo cálculo destas características. O CV é uma característica de custo ( $CV \in J$ ), e as características CA, dados atuais e média não pertencem a nenhum conjunto de benefício ou custo (CA, dados atuais e média  $\notin I \wedge k \notin J$ ).

Os resultados são apresentados utilizando cinco estratégias. As quatro primeiras consideram apenas uma das características mencionadas no parágrafo anterior. A partir destas quatro estratégias, podemos analisar melhor a posição dos países no ranking, dada uma característica específica. Na quinta estratégia, que corresponde à nossa proposta, todas as características são consideradas. Nesta última, aplicamos o método SMAA para os valores dos pesos das características e, assim, realizar uma análise de sensibilidade. As cinco estratégias foram implementadas da seguinte forma:

**Estratégia 1:** Nesta estratégia, fazemos  $\alpha^{S^1} = [1, 0, 0, 0, 0]$ , o que significa que somente os dados de 2015 são levados em conta, o que equivale a considerar somente o *slice*  $\mathbf{S}(:, :, 1)$ . Note que esta estratégia é como vem-se tratando a problemática de MCDA na literatura;

**Estratégias 2, 3 e 4:** Nessas três estratégias, os valores são  $\alpha^{S^2}, \alpha^{S^3}, \alpha^{S^4} = [0, 1, 0, 0]$ ,  $[0, 0, 1, 0]$ ,  $[0, 0, 0, 1]$ , o que equivale a considerar apenas os *slices*  $\mathbf{S}(:, :, 2)$ ,  $\mathbf{S}(:, :, 3)$  e  $\mathbf{S}(:, :, 4)$  respectivamente;

**Estratégia 5:** Nesta estratégia, consideramos que  $\alpha^{S5} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ , onde:

$\alpha_1 = 1 - (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ , e  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \sim U[0.1, 0.2]$ , sendo  $U$  uma distribuição uniforme contínua. Optamos por dar mais importância aos dados de 2015 e associar  
230 igual probabilidade de pesos para as demais características.

Tabela 4.2 – Valores dos critérios nas alternativas considerando o espaço de características.

| Características | Dados atuais – $S(:, :, 1)$ |       |       | Média – $S(:, :, 2)$ |       |       | CV – $S(:, :, 3)$ |       |       | CA – $S(:, :, 4)$ |       |       |
|-----------------|-----------------------------|-------|-------|----------------------|-------|-------|-------------------|-------|-------|-------------------|-------|-------|
| Crítérios       | $c_1$                       | $c_2$ | $c_3$ | $c_1$                | $c_2$ | $c_3$ | $c_1$             | $c_2$ | $c_3$ | $c_1$             | $c_2$ | $c_3$ |
| BR              | 74,8                        | 11,60 | 15062 | 70.5                 | 9.9   | 12283 | 0.05              | 0.12  | 0.15  | 1.9               | 0.70  | 1035  |
| CN              | 76,0                        | 10.30 | 13347 | 72.5                 | 8.5   | 6004  | 0,03              | 0.15  | 0.69  | 1.5               | 0.75  | 2336  |
| IN              | 68.4                        | 8.55  | 5814  | 63.4                 | 6.9   | 3312  | 0.06              | 0.17  | 0.43  | 2.1               | 0.68  | 810   |
| ID              | 69,1                        | 10.30 | 10130 | 66.5                 | 8.7   | 6753  | 0.03              | 0.15  | 0.29  | 1.1               | 0.76  | 1063  |
| MY              | 74,8                        | 11.35 | 23712 | 72.9                 | 10.0  | 16384 | 0.02              | 0.12  | 0.27  | 0.8               | 0.67  | 2606  |
| MX              | 77,0                        | 10.80 | 16249 | 74.4                 | 9.5   | 14137 | 0.03              | 0.10  | 0.11  | 1.2               | 0.58  | 893   |
| PH              | 68.3                        | 10.20 | 8232  | 66.9                 | 9.5   | 5805  | 0.01              | 0.05  | 0.28  | 0.6               | 0.29  | 929   |
| RU              | 70.3                        | 13.35 | 22094 | 67.3                 | 12.1  | 17561 | 0.03              | 0.08  | 0.22  | 0.6               | 0.56  | 1292  |
| ZA              | 57.9                        | 11.75 | 12110 | 57.2                 | 10.9  | 10691 | 0.06              | 0.08  | 0.09  | -1.3              | 0.48  | 532   |
| TR              | 75.6                        | 11.05 | 18976 | 70.6                 | 8.8   | 14181 | 0.06              | 0.18  | 0.21  | 2.3               | 0.93  | 1718  |

A primeira linha da Tabela 4.3, que chamamos de R1, mostra o ranking obtido por (BANAMAR; SMET, 2018), o qual é mostrado aqui a fim de comparar com nossos resultados. Lembrando que (BANAMAR; SMET, 2018) consideraram o domínio do tempo para ordenar os países. As outras linhas da Tabela 4.3 mostram o ordenamento obtido ao  
235 aplicarmos as cinco estratégias. Como temos dez países, vamos nos concentrar em três para facilitar a análise dos resultados: Rússia, Malásia e Turquia. Além disso, destacamos esses três países nas Tabelas 4.2 e 4.3 para facilitar a visualização dos dados. Cada país tem a mesma cor em ambas as tabelas.

Uma primeira observação da Tabela 4.3 é que o ordenamento em R1 é semelhante  
240 ao ordenamento considerando somente os dados atuais  $\alpha^{S1}$  e ao ordenamento considerando somente a média  $\alpha^{S2}$ . Por exemplo, no ranking R1,  $\alpha^{S1}$  e  $\alpha^{S2}$ , Rússia e Malásia ocupam o primeiro e o segundo lugar. A posição de liderança desses dois países muda quando consideramos outras características das séries temporais, como nas Estratégias 3 e 4.

Diferentes ordenamentos são obtidos nos resultados usando  $\alpha^{S1}$ ,  $\alpha^{S2}$ ,  $\alpha^{S3}$  e  
245  $\alpha^{S4}$ , como mostrado na Tabela 4.3. Observamos que essas quatro estratégias atribuem toda a importância apenas para uma característica específica. O ordenamento  $\alpha^{S1}$  (dados atuais) é muito próximo daquele de  $\alpha^{S2}$  (média). Pode-se ver que Rússia e Malásia estão em primeiro e segundo lugar em ambas as estratégias; no entanto, a Turquia muda de posição com o México na  $\alpha^{S3}$ . Como se pode ver na Tabela 4.2, essa mudança de posição ocorre  
250 porque a Turquia apresenta um desempenho melhor nos dados atuais, portanto fica melhor posicionada na  $\alpha^{S1}$ . Mas em termos de média, o desempenho da Turquia é pior, o que faz com que fique atrás do México na  $\alpha^{S2}$ . Observa-se que os ordenamentos nas Estratégias 3 e 4 são muito diferentes dos ordenamentos nas Estratégias 1 e 2. De fato, na  $\alpha^{S4}$ , a Rússia

ocupa o oitavo lugar, em vez do primeiro, e a Turquia e a Malásia superam-na. Esta última  
 255 análise pode ser entendida pelos dados da Tabela 4.2, na característica coeficiente angular,  
 o desempenho da Rússia é pior.

Este exemplo prático nos permite aprofundar a discussão apresentada na  
 Subseção 4.1.1. Aqui, observamos que a Rússia ocupa o primeiro lugar nas estratégias  
 que consideram apenas o espaço temporal. Porém, ao lidar com a tendência, a Rússia  
 260 se aproxima do último lugar. Ou seja, quando consideramos outras características das  
 séries temporais, é possível obter uma nova solução, e ela pode ser mais adequada se essas  
 características forem relevantes para a decisão.

Tabela 4.3 – Ranking obtido de acordo com a estratégia utilizada.

|               | 1º | 2º | 3º | 4º | 5º | 6º | 7º | 8º | 9º | 10º |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| R1            | RU | MY | MX | BR | TR | CN | ZA | PH | ID | IN  |
| $\alpha^{S1}$ | RU | MY | TR | MX | BR | CN | ZA | ID | PH | IN  |
| $\alpha^{S2}$ | RU | MY | MX | TR | BR | ZA | ID | PH | CN | IN  |
| $\alpha^{S3}$ | MX | ZA | BR | RU | TR | PH | MY | ID | IN | CN  |
| $\alpha^{S4}$ | TR | CN | BR | MY | IN | ID | MX | RU | PH | ZA  |
| $\alpha^{S5}$ | MY | RU | TR | BR | MX | CN | ID | ZA | PH | IN  |

Para a análise de sensibilidade, elaboramos a Tabela 4.4 com a porcentagem  
 de ordenamento do SMAA obtida usando  $\alpha^{S5}$ . Como se pode ver na Tabela 4.4, 92%  
 265 das vezes, a Malásia ocupou o primeiro lugar. Rússia e Turquia disputam o segundo e  
 terceiro lugar. A Rússia obteve o segundo lugar 50,19% das vezes e o terceiro lugar 49,81%,  
 enquanto a Turquia ficou em segundo lugar 41,88% das vezes e em terceiro lugar 50,19%.  
 Ao analisar as características na Tabela 4.2, é possível ver que, em termos de média e  
 dados atuais, a Rússia tem desempenho superior à Turquia nos critérios  $c_2$  e  $c_3$ . Além  
 270 disso, o coeficiente de variação da Rússia é menor do que o da Turquia nos critérios  $c_1$  e  
 $c_2$ . Finalmente, a Rússia tem pior desempenho no CA em comparação com a Turquia para  
 todos os critérios.

Comparando outros países, como México e Brasil, o CA também impacta  
 fortemente no ordenamento. Como se pode ver na Tabela 4.4, México e Brasil disputam  
 275 pelo quarto e quinto lugares. O Brasil fica em quarto lugar 55,95% das vezes e em quinto  
 lugar 44,05%, enquanto o México fica em segundo lugar 44,05% das vezes e em quinto  
 lugar 55,95%. Ao analisar os dados da Tabela 4.3, o México tem melhor desempenho do  
 que o Brasil em  $\alpha^{S1}$ ,  $\alpha^{S2}$  e  $\alpha^{S3}$ , mas tem pior desempenho em  $\alpha^{S4}$ . Portanto, o México  
 tem melhor desempenho do que o Brasil em três das quatro características. No entanto,  
 280 quando todas as características são consideradas (ou seja, em  $\alpha^{S5}$ ), o México não é melhor  
 que o Brasil; mas eles disputam o quarto e quinto lugar.

É importante notar que o bom desempenho de alguns países em termos de  
 dados atuais, média e coeficiente de variação foi afetado por um desempenho pior no

Tabela 4.4 – Matriz de probabilidade dos ordenamentos.

|    | 1 <sup>o</sup> | 2 <sup>o</sup> | 3 <sup>o</sup> | 4 <sup>o</sup> | 5 <sup>o</sup> | 6 <sup>o</sup> | 7 <sup>o</sup> | 8 <sup>o</sup> | 9 <sup>o</sup> | 10 <sup>o</sup> |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| BR | 0              | 0              | 0              | 55.95          | 44.05          | 0              | 0              | 0              | 0              | 0               |
| CN | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 90.07          | 9.75           | 0.18           | 0              | 0               |
| IN | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 24.22          | 37.09          | 38.69           |
| ID | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 56.09          | 43.91          | 0              | 0               |
| MY | 92.07          | 7.93           | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0               |
| MX | 0              | 0              | 0              | 44.05          | 55.95          | 0              | 0              | 0              | 0              | 0               |
| PH | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 38.75          | 61.25           |
| RU | 0              | 50.19          | 49.81          | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0               |
| ZA | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 9.93           | 34.16          | 31.69          | 24.16          | 0.06            |
| TR | 7.93           | 41.88          | 50.19          | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0               |

coeficiente angular. Nesse sentido, o ordenamento mostra-se muito sensível ao valor de  $\alpha$ .  
 285 Portanto, é crucial analisar a importância das características na tomada de decisão.

#### 4.1.4 Sumário da proposta no espaço de características

Nesta abordagem, estruturamos os dados da problemática de MCDA em uma abordagem tensorial para explorar plenamente as características relevantes para a tomada de decisão. Propomos uma extensão do método TOPSIS para agregar o tensor e classificar  
 290 as alternativas. Também fornecemos uma análise de sensibilidade usando o método SMAA para verificar o impacto dos pesos das características na classificação. Para os testes computacionais, aplicamos o método proposto em séries temporais reais de dez países para ordená-los de acordo com três critérios diferentes.

A principal conclusão da análise é que o uso de características de séries temporais  
 295 pode levar a diferentes perspectivas na tomada de decisão, quando comparado com o caso em que se considera apenas as séries temporais ou os dados atuais. Assim, a abordagem proposta permite novas soluções (ordenamentos) que podem representar melhor as preferências do decisor, melhorando o apoio à tomada de decisão.

Dos experimentos computacionais, observamos mudanças nos ordenamentos  
 300 quando se consideram novos elementos além dos dados atuais. Este método mostra que a tendência das séries temporais impacta fortemente as classificações finais, o que pode ser positivo se os impactos da decisão forem avaliados a médio ou longo prazo.

Com relação a essa proposta, pesquisas futuras devem considerar outras características em diferentes tipos de decisões e um estudo de caso pode ser conduzido.

## 305 4.2 Predição adaptativa no apoio à tomada de decisão

A proposta utilizada nesta seção é a ilustrada na Figura 4.1 (b), em que modelamos a problemática MCDA considerando as séries temporais dos critérios, estruturando os dados na forma tensorial. Em seguida, propomos aplicar o algoritmo RLS em cada sinal



para obter os valores de predição dos critérios. Por fim, estruturamos o valor de predição  
 310 de cada critério em uma matriz de decisão e aplicamos o PROMETHEE II para obter um  
 ordenamento esperado.

Embora as técnicas de predição forneçam estimativas confiáveis, existe um erro  
 de predição inerente nessas metodologias, o que pode levar à incerteza no ordenamento  
 de predição. Portanto, também propomos usar uma técnica de predição probabilística  
 315 (KIM et al., 2011; KABIR et al., 2018; ZHANG et al., 2020), que fornece uma gama de  
 possíveis valores futuros com um nível de confiança (KIM et al., 2011; BANDTE, 2000),  
 em vez de fornecer apenas um valor pontual. Ao usar predição probabilística em MCDA, é  
 possível prever uma gama de valores futuros prováveis dos critérios e estimar incerteza nos  
 ordenamentos. Então, o decisor pode avaliar o risco de aceitar um ordenamento futuro,  
 320 bem como estabelecer o ordenamento futuro mais provável.

Não identificamos estudos na literatura que utilizam predição probabilística  
 para obter as probabilidades futuras dos critérios no campo da MCDA. Como citamos na  
 Seção 3.1, alguns trabalhos consideram a série temporal dos critérios para diferentes con-  
 textos, mas sem usar técnicas de predição. No entanto, eles não usam técnicas de predição.  
 325 Além disso, em (WITT; KLUMPP, 2021), os autores propuseram o MP-PROMETHEE-S,  
 uma extensão do clássico PROMETHEE, em que um conjunto de cenários possíveis é  
 introduzido em vários períodos de tempo. No estudo, os autores supõem que esses possíveis  
 cenários são conhecidos, ou seja, não utilizam predição probabilística ou outras técnicas  
 para obter esses dados futuros incertos. Assim, este último estudo difere do nosso prin-  
 330 cipalmente porque aplicamos predição probabilística nos dados passados para prever os  
 valores futuros dos critérios e, em seguida, procedemos uma análise de sensibilidade.

No que diz respeito à predição probabilística, é possível encontrar estudos que  
 aplicam esses métodos nos campos de decisão (KABIR et al., 2018; ZHANG et al., 2020;  
 AGGARWAL, 2021), mas não no âmbito de decisões multicritério.

335 Em nossa abordagem, escolhemos o algoritmo RLS por duas razões principais,  
 a rapidez de convergência com a qual o RLS tende a solução ótima; e a capacidade de  
 se adaptar a mudanças dinâmicas nos dados. Além disso, o RLS é relativamente fácil de  
 implementar e requer uma complexidade computacional compatível com nosso problema.

Para a etapa de agregação, fizemos um estudo prévio analisando ambos métodos  
 340 TOPSIS e PROMETHEE II e concluímos, por experimentos numéricos, que para o caso  
 em estudo, usando o PROMETHEE II os ordenamentos de predição ficavam mais próximos  
 dos ordenamentos reais (isto é, supondo que conhecemos os valores reais futuros). Portanto,  
 decidimos utilizar neste estudo o método PROMETHEE II na etapa de agregação.



### 4.2.1 Motivação da análise de decisão utilizando predição adaptativa

Para ilustrar a motivação deste estudo, considere um problema no qual o decisor deseja selecionar um país para abrir uma empresa baseado nos seguintes critérios de decisão: preço da matéria-prima (PMP) e a taxa de câmbio (TC). A Figura 4.3 mostra a série temporal e os dados do período atual ( $t_T$ ) destes critérios para os Países 1 e 2. A partir desta figura, é possível observar que se a decisão considerar apenas os dados em  $t_T$ , o País 2 seria o escolhido pois tem o menor preço da matéria-prima. Assim, o ordenamento mais provável considerando os dados  $t_T$ , que representamos por  $\mathbf{r}^c$ , seria  $\mathbf{r}^c = [\text{País 2}, \text{País 1}]$ .

Porém, ao analisar a série temporal do preço da matéria-prima, pode-se inferir que o País 2 apresenta uma tendência crescente neste critério e o País 1, decrescente. Como os retornos do investimento são a curto ou médio prazo, uma solução mais razoável para esta decisão pode ser considerar os valores futuros dos critérios para obter um ordenamento futuro. Assumindo que os valores futuros no instante  $t_{T+\lambda}$  são conhecidos, como ilustrado na Figura 4.3, observamos que o País 1 seria o preferido. Assim, ao considerar os valores futuros, obtém-se um ordenamento, denotado por  $\mathbf{r}^*$ , da forma:  $\mathbf{r}^* = [\text{País 1}, \text{País 2}]$ , sendo este ordenamento diferente daquele considerando os dados do período atual  $t_T$ :  $\mathbf{r}^c \neq \mathbf{r}^*$ .

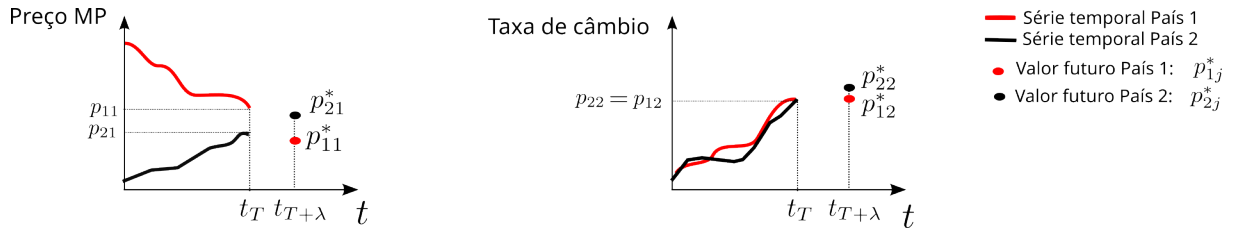


Figura 4.3 – Exemplo das séries temporais e valores futuros dos critérios preço de matéria prima e taxa de câmbio considerando dois países.

Como os valores futuros não são conhecidos na prática, propomos uma aproximação desses valores futuros usando métodos de predição. A proposta consiste em aplicar uma técnica de predição adaptativa em cada serie temporal dos critérios para todas as alternativas, a partir da qual obtêm-se os valores de predição  $\hat{p}_{ij}$ , e uma matriz de decisão é formulada como:

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{PMP} & \text{TC} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{País 1} \\ \text{País 2} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \hat{p}_{11} & \hat{p}_{12} \\ \hat{p}_{21} & \hat{p}_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (4.23)$$

de onde obtém-se um ordenamento predito, representado por  $\hat{\mathbf{r}}$ , que é desejado estar o mais próximo possível do alvo  $\mathbf{r}^*$ .

Para analisar a proximidade entre  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{r}^*$ , podemos representar os valores futuros reais ( $p_{ij}^*$ ) como os valores de predição ( $\hat{p}_{ij}$ ) mais um erro de predição (representado por

370  $e_{ij}$ ). A matriz com os valores futuros reais  $\mathbf{P}^*$  pode ser descrita como:

$$\mathbf{P}^* = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{PMP} & \text{TC} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{País 1} \\ \text{País 2} \end{array} & \begin{bmatrix} \hat{p}_{11} + e_{11} & \hat{p}_{12} + e_{12} \\ \hat{p}_{21} + e_{21} & \hat{p}_{22} + e_{22} \end{bmatrix} \end{array}. \quad (4.24)$$

Se  $e_{ij} = 0$ ,  $\forall i, j$ , as matrizes  $\hat{\mathbf{P}}$ , da Equação (4.23) e  $\mathbf{P}^*$  da Equação (4.24), são iguais; consequentemente:  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^*$ . À medida que o erro de predição aumenta, os elementos destas matrizes se tornam mais diferentes uns dos outros, e  $\hat{\mathbf{r}}$  se torna distante do alvo  $\mathbf{r}^*$ . Se os ordenamentos  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{r}^*$  forem muito diferentes, o tomador de decisão pode escolher o país  
375 errado para investir por conta do erro de predição.

Dada a importância em analisar a proximidade entre  $\hat{\mathbf{r}}$  e o ordenamento alvo  $\mathbf{r}^*$ , propomos estimar os valores dos critérios  $p_{ij}^*$  e calcular o desvio padrão do erro  $s_{ij}$  por meio de uma técnica de predição probabilística. Com este enfoque, é possível avaliar os resultados possíveis do ordenamento alvo ( $\mathbf{r}^*$ ) e quantificar incertezas no ordenamento  
380 com dados de predição  $\hat{\mathbf{r}}$ .

## 4.2.2 Algoritmo da metodologia proposta

Os principais passos da metodologia proposta são apresentados na Figura 4.1(b) e formalizados por meio do Algoritmo 2, considerando como entrada um tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$  e os pesos  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ . Para cada fibra  $\mathbf{p}(i, j, :)$  do tensor  $\mathcal{P}$ , é aplicado o algoritmo de predição  
385 RLS apresentado na Subseção 3.3.2, de onde obtém-se como saída o valor de predição  $\hat{p}_{ij}$ . O cálculo da variância do erro  $\sigma_{ij}^2$  é estimado pela variância populacional  $s_{ij}^2$ , na forma (CHRYSSOLOURIS; LEE; RAMSEY, 1996; SHRESTHA; SOLOMATINE, 2006):

$$s_{ij}^2 = \frac{1}{T - M} \sum_{t=1}^T (e_{ijt})^2, \quad (4.25)$$

em que o erro  $e_{ijt}$  é calculado no Algoritmo 1 como:

$$\xi(n) = \hat{p}(n) - \boldsymbol{\omega}^T(n-1)\mathbf{p}(n). \quad (4.26)$$

As saídas  $\hat{p}_{ij}$  e  $s_{ij} = \sqrt{s_{ij}^2}$  são usadas como média e desvio padrão de uma distribuição  
390 normal, que modela as variáveis aleatórias  $\phi_{ij} \sim N(\hat{p}_{ij}, s_{ij})$  da matriz aleatória  $\Phi$ . Também calculamos a média entre os desvios padrão do erro de predição  $s_{ij}$ ,  $\forall i, j$ , denotado por  $\bar{s}_e$ . Assim, o método SMAA é aplicado, usando como entrada a matriz aleatória  $\Phi$  e os pesos  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  e a saída do Algoritmo 2 é a matriz  $\hat{\mathbf{P}}$ , a média dos desvios padrão do erro de predição  $\bar{s}_e$  e a matriz de probabilidades  $\mathbf{M}$ .

## 395 4.2.3 Experimentos numéricos

Esta seção apresenta os experimentos computacionais realizados, utilizando tanto dados sintéticos quanto dados reais, para analisar as vantagens do ordenamento de

**Algoritmo 2:** Metodologia proposta com predição adaptativa das séries temporais dos critérios.

**Entrada:**  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ ,  $\mathbf{w} \in [0, 1]^n$  e  $\lambda$

**Inicialização:**  $\mathbf{M} = \mathbf{0}_{m \times m}$

**for**  $i = 1$  **to**  $m$  **do**

**for**  $j = 1$  **to**  $n$  **do**

$\hat{p}_{ij}, s_{ij} \leftarrow$  **Resolva** Algoritmo 1 (RLS) usando como entrada  $\mathbf{p}(i, j, :)$ , e  $\lambda$ . Obtenha  $s_{ij}$  pela Equação (4.25)

**end for**

**end for**

$\Phi \leftarrow \phi_{ij} \sim N(\hat{p}_{ij}, s_{ij})$

$\bar{s}_e \leftarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n s_{ij} / (m + n)$

$\hat{\mathbf{P}} \leftarrow \hat{p}_{ij}$

$\mathbf{M} \leftarrow$  **Resolva** S1 – S3 o algoritmo SMAA usando como entrada  $\Phi$  e  $\mathbf{w}$

**Saída:**  $\hat{\mathbf{P}}$ ,  $\bar{s}_e$ ,  $\mathbf{M}$

predição em comparação com o ordenamento utilizando dados do período. Além disso, investigamos como a predição probabilística pode melhorar o suporte à decisão em cenários de incertezas. As Subseções 4.2.3.1 e 4.2.3.2 apresentam os resultados considerando dados sintéticos e reais, respectivamente. O código e os dados usados nesta seção podem ser encontrados em <https://codeocean.com/capsule/2453875/tree/v1>.

#### 4.2.3.1 Simulação utilizando dados sintéticos

São realizadas simulações variando o número de alternativas  $m$ , assumindo os valores  $m = 5$ ,  $m = 10$ , ou  $m = 15$ . Para cada  $m$ , realizamos as seguintes etapas  $\ell$  vezes e calculamos a média dos resultados dessas  $\ell$  simulações. Considere  $\ell = 1.000$ , faça:

**Etapla 1 - gerar o tensor de decisão:** É gerado um tensor aleatório  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ , onde  $m$  é o número de alternativas,  $n = 4$  critérios e  $T = 200$  amostras. Dado uma distribuição uniforme contínua  $U$  e um conjunto  $Z = [1, \dots, T]$ , com  $t \in Z$ , cada fibra  $\mathbf{p}(i, j, :)$  do tensor  $\mathcal{P}$  é obtida da seguinte maneira:

**Critério 1,**  $\mathbf{p}(i, 1, :) \rightarrow p_{i1t} = a_i + b_i t$ ,  $a_i \sim U[2, 20]$ ,  $b_i \sim U[0.5, 0.8]$ ,  $\forall t, i$ ;

**Critério 2,**  $\mathbf{p}(i, 2, :) \rightarrow p_{i2t} = a_i + \sin(f_i t)$ ,  $a_i \sim U[2, 20]$ ,  $f_i \sim U[0.7\pi, 0.75\pi]$ ,  $\forall t, i$ ;

**Critério 3,**  $\mathbf{p}(i, 3, :) \rightarrow p_{i3t} = a_i + (-1)^t$ ,  $a_i \sim U[2, 20]$ ,  $\forall t, i$ ;

**Critério 4,**  $\mathbf{p}(i, 4, :) \rightarrow p_{i4t} = a_i + t^{0.075}$ ,  $a_i \sim U[2, 20]$ ,  $\forall t, i$ .

De modo a modelar situações reais, adicionamos um termo de ruído  $\alpha \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} \sim N(0, 1)$ , aos sinais  $\mathbf{p}(i, j, :)$ , sendo  $\alpha$  calculado da seguinte forma:

$$\alpha = 10^{\left(\frac{10 \log \sigma^2_{\mathbf{p}(i,j,:)} - SNR}{20}\right)},$$

onde  $\sigma_{\mathbf{p}(i,j,:)}^2$  é a variância de  $\mathbf{p}(i,j,:)$  e a SNR é a relação sinal-ruído (*signal to noise*), que assume os valores de 0 a 50 dB.

420 **Etapla 2 - calcular os resultados:** Para calcular os resultados, suponhamos que os dados do período atual são no instante de tempo  $t_{T-\lambda}$ . Supõem-se que o sinal é conhecido até o instante  $t_{T-\lambda}$  e os dados em  $t_T$  são usados como referência para a predição. Portanto, para cada valor da SNR, de 0 a 50 dB, calculamos os resultados:

(1) **A média da desvio padrão do erro de previsão  $\bar{s}_e$ .** Este resultado é  
425 calculado aplicando a abordagem proposta no tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times 4 \times (T-\lambda)}$ .

(2) **Distância de Kendall tau  $\tau_{\mathbf{r}^* \times \mathbf{r}^c}^c$  e  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$ .** Estes coeficientes são calculados usando três ordenamentos, obtidos da seguinte maneira:

- *Ordenamento de referência ou benchmark ( $\mathbf{r}^*$ ):* estruturamos a matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times 4}$  com o valor alvo, ou seja, os dados no período  $t_T$ , e aplicamos o método PROMETHEE II.
- 430 – *Ordenamento do período atual ( $\mathbf{r}^c$ ):* estruturamos a matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times 4}$  com os dados do instante  $t_{T-\lambda}$  (valores do período atual) e aplicamos o método PROMETHEE II.
- *Ordenamento de predição ( $\hat{\mathbf{r}}$ ):* este ordenamento é calculado aplicando a abordagem proposta no tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times 4 \times (T-\lambda)}$ .

Ao final destas duas etapas, para cada  $m$  e para cada valor da SNR, calculamos  
435 a média das  $\ell$  simulações dos valores de  $\bar{s}_e$ ,  $\tau_{\mathbf{r}^* \times \mathbf{r}^c}^c$ , e  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$ .

O passo de predição utilizado foi  $\lambda = 1$ , e os pesos  $w_j$  para o PROMETHEE II foram iguais para todos os critérios,  $w_j = 1/4$ ,  $\forall j$ . O fator de esquecimento do RLS e o número de parâmetros foram determinados após uma série de experimentos e fixados em  $\theta = 0,9$  e  $M = 2$ , respectivamente.

440 Os resultados são apresentados em duas subseções. Na Subseção 4.2.3.1.1, apresentamos e analisamos os resultados ao aplicar o método de agregação PROMETHEE II na matriz  $\hat{\mathbf{P}}$  (de acordo com a Figura 4.1). Na Subseção 4.2.3.1.2 mostramos os resultados ao aplicar a análise de sensibilidade SMAA na matriz de variáveis aleatórias  $\Phi$  (de acordo com a Figura 4.1).

#### 445 4.2.3.1.1 Resultados aplicando PROMETHEE II na matriz $\hat{\mathbf{P}}$

A Figura 4.4 mostra o  $\bar{s}_e$  de acordo com os valores da SNR para  $m = 10$ . Como  $\bar{s}_e$  não depende dos valores de  $m$ , as figuras para  $m = 5, 10$  e  $15$  são similares. Na Figura 4.4, observamos que  $\bar{s}_e$  diminui exponencialmente à medida que o SNR aumenta. Quando a SNR está cerca de 25dB, o  $\bar{s}_e$  converge para o menor valor (em torno de  $0.5 \times 10^{-3}$ ).

450 A Figura 4.5 apresenta as distâncias  $\tau_{\mathbf{r}^* \times \mathbf{r}^c}^c$  e  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$  como uma função da SNR, para  $m = 5, 10$  e  $15$ . Os valores de  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$  diminuem de forma não linear à medida que a

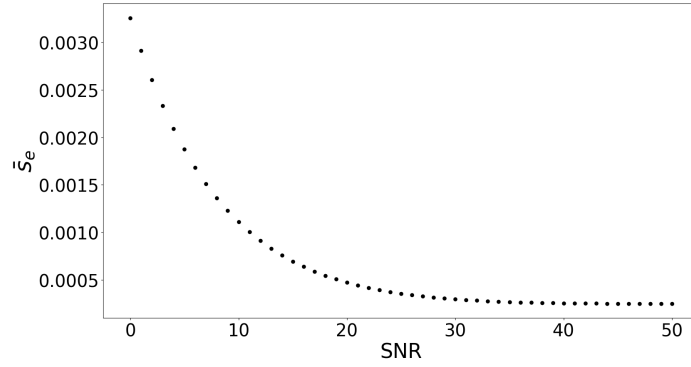


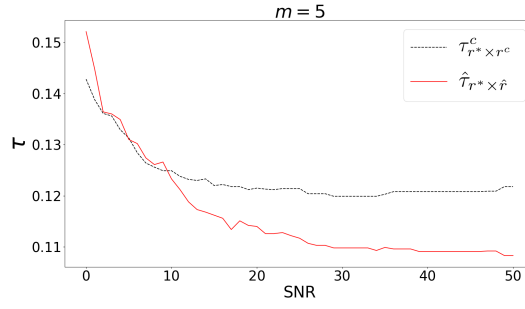
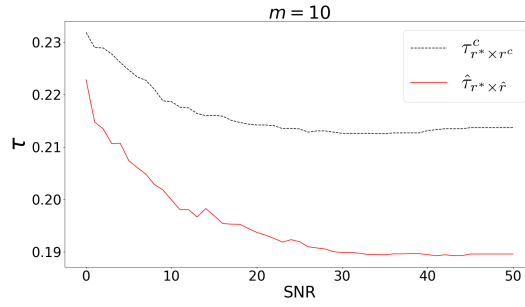
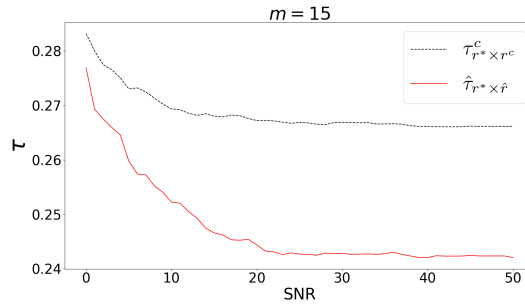
Figura 4.4 – Média do desvio padrão do erro de predição  $\bar{s}_e$  de acordo com os valores da SNR para  $m = 10$ .

SNR aumenta. As curvas referentes a  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$  na Figura 4.5 seguem uma curva de diminuição semelhante à curva de  $\bar{s}_e$  na Figura 4.4. Essa semelhança ocorre porque, em geral, quanto maior a SNR, menor o  $\bar{s}_e$ , e quando o  $\bar{s}_e$  diminui, o valor de predição se aproxima do valor real (valor do alvo). Consequentemente,  $\hat{\mathbf{r}}$  se aproxima de  $\mathbf{r}^*$ , o que resulta em uma diminuição em  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$ .

A partir da Figura 4.5, também é possível comparar  $\tau_{\mathbf{r}^* \times \mathbf{r}^c}^c$  com  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$  para  $m = 5, 10$  e  $15$ . Observe que, somente quando  $m = 5$  e  $\text{SNR} < 10$ , observamos  $\tau_{\mathbf{r}^* \times \mathbf{r}^c}^c \leq \hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$ . Ou seja, o ordenamento  $\mathbf{r}^c$  está mais próximo do alvo  $\mathbf{r}^*$  do que  $\hat{\mathbf{r}}$ . Para todos os outros valores,  $\tau_{\mathbf{r}^* \times \mathbf{r}^c}^c > \hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$ . Portanto, em muitos casos, o ordenamento com predição  $\hat{\mathbf{r}}$  está mais próximo do ordenamento alvo  $\mathbf{r}^*$  do que o ordenamento usando dados do período atual  $\mathbf{r}^c$ . Esta análise aponta que o ordenamento usando valores de predição pode fornecer uma solução mais adequada quando a decisão envolve retornos futuros.

A última observação a respeito da Figura 4.5 é que, ao aumentar o número de alternativas, aumenta a diferença entre os ordenamentos:  $\tau_{\mathbf{r}^* \times \mathbf{r}^c}^c$  e  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$ . Por exemplo, para  $m = 5$ ,  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$  varia entre aproximadamente 0,11 e 0,15, enquanto para  $m = 15$ , varia de 0,24 a 0,28. Isto pode ser atribuído ao fato de que um número maior de alternativas aumenta a probabilidade de que as alternativas mudem de posição, ou seja, um maior  $m$  aumenta a sensibilidade do modelo.

Portanto, como observamos na Figura 4.5, ao aumentar a SNR, os ordenamentos de predição e ordenamento alvo tornam-se mais próximos, ou seja,  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$  diminui. Na prática, a SNR nem sempre é conhecida, e o ordenamento de alvo é desconhecido, o que gera incerteza sobre a aceitação do ordenamento de predição  $\hat{\mathbf{r}}$ . Desse modo, é necessário utilizar métodos que quantifiquem essa incerteza, conforme descrevemos na próxima seção.

(a) Valores de  $\tau$  para  $m = 5$ .(b) Valores de  $\tau$  para  $m = 10$ .(c) Valores de  $\tau$  para  $m = 15$ .Figura 4.5 –  $\tau_{\mathbf{r}^* \times \mathbf{r}^c}^c$ , e  $\hat{\tau}_{\mathbf{r}^* \times \hat{\mathbf{r}}}$  de acordo com os valores da SNR para  $m = 5, 10$ , e  $15$ .

#### 4.2.3.1.2 Resultados aplicando SMAA

Nesta subseção, investigamos como obter um grau de confiança no ranking  $\hat{\mathbf{r}}$  analisando a matriz  $\mathbf{M}$  para o caso em que os pesos dos critérios são determinísticos e os valores dos critérios são probabilísticos. Lembrando que esta matriz é obtida ao aplicar o SMAA e ela indica a probabilidade de cada alternativa estar em cada posição do ordenamento. Para isso, exploramos em profundidade o ordenamento  $\hat{\mathbf{r}}$  e a matriz de probabilidades  $\mathbf{M}$  de algumas das  $\ell = 1000$  simulações para  $m = 5$  (selecionamos alguns exemplares de forma aleatória). Nos exemplares explorados, observamos quatro situações (padrões), que discutiremos a seguir.

No primeiro padrão encontrado, a análise da matriz  $\mathbf{M}$  indica que é provável que  $\hat{\mathbf{r}}$  esteja correto, ou seja,  $\mathbf{M}$  apresenta uma alta probabilidade de que as alternativas estejam nas posições como estão em  $\hat{\mathbf{r}}$ . E observamos que efetivamente  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^*$ . Esta

Tabela 4.5 – Padrão 1: Ordenamentos alvo e de predição para  $\text{SNR} = 30\text{dB}$  e  $m = 5$ .

| Ordenamento                 | 1º    | 2º    | 3º    | 4º    | 5º    |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Alvo $\mathbf{r}^*$         | $a_2$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ |
| Predição $\hat{\mathbf{r}}$ | $a_2$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ |

Tabela 4.6 – Padrão 1:  $\mathbf{M}$  (%) para  $\text{SNR} = 30\text{dB}$  e  $m = 5$ .

|       | 1º    | 2º    | 3º    | 4º    | 5º    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$ | 0.00  | 0.00  | 77.80 | 20.21 | 1.99  |
| $a_2$ | 99.01 | 0.99  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| $a_3$ | 0.00  | 0.00  | 22.14 | 69.79 | 8.07  |
| $a_4$ | 0.99  | 99.01 | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| $a_5$ | 0.00  | 0.00  | 0.06  | 10.00 | 89.94 |

situação ocorre em muitas amostras, independentemente do valor de  $\text{SNR}$ , mas é mais comum em  $\text{SNR}$  mais elevadas. Um exemplo deste caso é fornecido na Tabela 4.5, que mostra os ordenamentos  $\mathbf{r}^*$  e  $\hat{\mathbf{r}}$ , e na Tabela 4.6, que mostra a matriz  $\mathbf{M}$ , para  $\text{SNR} = 30\text{dB}$ . Da Tabela 4.5, observamos que a Alternativa 2 ( $a_2$ ) ocupa o primeiro lugar em  $\hat{\mathbf{r}}$ . Na Tabela 4.6, é possível ver que em 99,01% das simulação do SMAA,  $a_2$  está no primeiro lugar. A partir dessas observações, podemos inferir que é muito provável que  $a_2$  ocupe o primeiro lugar no ordenamento alvo  $\mathbf{r}^*$ . O mesmo ocorre com todas as alternativas neste exemplo. Portanto, a matriz  $\mathbf{M}$  mostra que há uma alta probabilidade de  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^*$ . Em casos como este, o tomador de decisão pode aceitar o ranking  $\hat{\mathbf{r}}$  com alta confiança, mesmo sem conhecer a  $\text{SNR}$  ou o ordenamento alvo.

Em um segundo padrão, a análise da matriz  $\mathbf{M}$  indica que o risco de algumas alternativas não estarem nas posições como estão em  $\hat{\mathbf{r}}$ . No entanto,  $\hat{\mathbf{r}}$  é o ranking mais provável. Nas Tabelas 4.7 e 4.8, mostramos um exemplo de tal situação. Por exemplo, a partir da matriz  $\mathbf{M}$  mostrada na Tabela 4.8, observamos que a maior probabilidade é que  $a_5$  ocupe o primeiro lugar e  $a_3$  ocupe o segundo; no entanto, há uma alta possibilidade dessas alternativas mudarem de posição. Portanto, mesmo se  $\hat{\mathbf{r}}$  é o ranking mais provável, há um risco considerável em aceitá-lo. Mais precisamente, há o risco de aceitar  $a_5$  no primeiro lugar e  $a_3$  no segundo, pois, as outras alternativas apresentam alta probabilidade de estarem corretas em suas posições. Nessa situação, com a nossa proposta, o tomador de decisão está ciente do risco, mas sabe que  $\hat{\mathbf{r}}$  é o ranking com maior probabilidade de ser o correto. Finalmente, neste exemplo, é possível ver que  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^*$  (na Tabela 4.7). Em outras instâncias que seguem este padrão, as alternativas com uma significativa probabilidade de mudar de posição, de fato, mudam.

O terceiro padrão é semelhante ao segundo, onde a matriz  $\mathbf{M}$  indica um risco

Tabela 4.7 – Padrão 2: Ordenamentos alvo e de predição para  $\text{SNR} = 30\text{dB}$  e  $m = 5$ .

| Ordenamento                 | 1º    | 2º    | 3º    | 4º    | 5º    |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Alvo $\mathbf{r}^*$         | $a_5$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_4$ |
| Predição $\hat{\mathbf{r}}$ | $a_5$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_4$ |

Tabela 4.8 – Padrão 2:  $\mathbf{M}$  (%) para  $\text{SNR} = 30\text{dB}$ .

|       | 1º    | 2º    | 3º    | 4º    | 5º    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$ | 0.00  | 0.00  | 98.22 | 1.78  | 0.0   |
| $a_2$ | 0.00  | 0.00  | 1.78  | 98.22 | 0.0   |
| $a_3$ | 40.42 | 59.58 | 0.00  | 0.00  | 0.0   |
| $a_4$ | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 100.0 |
| $a_5$ | 59.58 | 40.42 | 0.00  | 0.00  | 0.0   |

Tabela 4.9 – Padrão 3: Ordenamentos alvo e de predição para  $\text{SNR} = 10\text{dB}$  e  $m = 5$ .

| Ordenamento                 | 1º    | 2º    | 3º    | 4º                      | 5º                      |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------------------------|-------------------------|
| Alvo $\mathbf{r}^*$         | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ | $a_4$                   | $a_2$                   |
| Predição $\hat{\mathbf{r}}$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ | <b><math>a_2</math></b> | <b><math>a_4</math></b> |

de algumas alternativas mudarem de posição. Mas, neste caso,  $\hat{\mathbf{r}}$  não é o ranking com a máxima probabilidade. As Tabelas 4.9 e 4.10 apresentam um exemplo deste padrão. Na Tabela 4.9, observamos que no ranking  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $a_2$  está em quarto e  $a_4$  em quinto lugar. Ao analisar a matriz  $\mathbf{M}$ , é possível ver que o oposto é mais provável de ocorrer, ou seja,  $a_4$  na quarta posição e  $a_2$  na quinta. Neste exemplo, o tomador de decisão sabe do risco de aceitar  $a_2$  e  $a_4$  na posição como estão em  $\hat{\mathbf{r}}$ . A partir da matriz  $\mathbf{M}$  é possível escolher o ordenamento mais provável, no qual  $a_4$  está na quarta posição e  $a_2$  está na quinta, que, neste caso, é o igual ao ordenamento de alvo  $\mathbf{r}^*$ .

Por fim, no quarto padrão, pela matriz  $\mathbf{M}$  não é possível determinar um orde-

Tabela 4.10 – Padrão 3:  $\mathbf{M}$  (%) para  $\text{SNR} = 10\text{dB}$ .

|       | 1º   | 2º   | 3º   | 4º   | 5º   |
|-------|------|------|------|------|------|
| $a_1$ | 71.8 | 27.0 | 1.1  | 0.0  | 0.0  |
| $a_2$ | 0.0  | 0.1  | 16.4 | 32.8 | 50.7 |
| $a_3$ | 28.2 | 70.9 | 0.8  | 0.0  | 0.0  |
| $a_4$ | 0.0  | 0.1  | 16.6 | 51.8 | 31.6 |
| $a_5$ | 0.0  | 1.9  | 65.1 | 15.4 | 17.7 |



Tabela 4.11 – Padrão 4: Ordenamentos alvo e de predição para  $\text{SNR} = 0\text{dB}$  e  $m = 5$ .

| Ordenamento                 | 1º             | 2º             | 3º             | 4º             | 5º    |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| Alvo $\mathbf{r}^*$         | $a_4$          | $a_1$          | $a_2$          | $a_5$          | $a_3$ |
| Predição $\hat{\mathbf{r}}$ | $\mathbf{a}_1$ | $\mathbf{a}_4$ | $\mathbf{a}_5$ | $\mathbf{a}_2$ | $a_3$ |

Tabela 4.12 – Padrão 4:  $\mathbf{M}$  (%) para  $\text{SNR} = 0\text{ dB}$ .

|       | 1º    | 2º    | 3º    | 4º    | 5º    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$ | 35.57 | 32.03 | 27.74 | 4.46  | 0.20  |
| $a_2$ | 37.27 | 32.44 | 24.99 | 5.22  | 0.08  |
| $a_3$ | 0.04  | 0.45  | 2.99  | 29.35 | 67.17 |
| $a_4$ | 26.30 | 29.73 | 30.61 | 11.90 | 1.46  |
| $a_5$ | 0.82  | 5.35  | 13.67 | 49.07 | 31.09 |

520 namento mais provável. Além disso, ela mostra um alto risco de considerar o ordenamento  $\hat{\mathbf{r}}$ . Essa situação ocorre para diferentes SNR, mas é mais comum para SNR mais baixos. Nas Tabelas 4.11 e 4.12 mostramos um exemplo quando o  $\text{SNR} = 0\text{ dB}$ . Na Tabela 4.12 é possível inferir que as probabilidades de as Alternativas 1, 2 e 4 estarem nas primeiras, segundas e terceiras posições são muito semelhantes. Para a quarta posição,  $a_5$  é a alternativa mais provável, que não é a posição que ela assume em  $\hat{\mathbf{r}}$  (na Tabela 4.11). Apenas  $a_3$  apresenta uma alta probabilidade de estar na mesma posição em que está em  $\hat{\mathbf{r}}$ . Neste caso, o ordenamento  $\hat{\mathbf{r}}$  é diferente do ordenamento  $\mathbf{r}^*$ .

#### 4.2.3.2 Experimentos utilizando dados reais

530 Neste experimento, estamos interessados em avaliar se há diferença na tomada de decisão quando se utiliza dados atuais ou dados futuros usando séries temporais reais. Além disso, investigamos como a matriz  $\mathbf{M}$  pode ajudar a medir o grau de confiança no ordenamento de predição  $\hat{\mathbf{r}}$  supondo que o alvo  $\mathbf{r}^*$  é desconhecido. Para isso, utilizamos os dados do Fundo Monetário Internacional (FMI: : <https://www.imf.org/en/Data>.) para avaliar o desempenho de cinco países (Bélgica, Canadá, França, Japão e Holanda) de acordo com três critérios econômico-financeiros: poupança nacional bruta, inflação e taxa de desemprego. As séries temporais são compostas por 40 amostras (anos):  $t = 1980, \dots, 2018$ . Esses dados são estruturados como um tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ , onde  $m = 5$ ,  $n = 3$  e  $T = 40$ .

540 Consideramos que o alvo é o ano de 2018 e testamos nossa abordagem usando três etapas de previsão diferentes:  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 3$  e  $\lambda = 5$ , como ilustrado na Figura 4.6, em que  $\lambda$  indica a quantidade de períodos a frente. Dessa forma, o ordenamento alvo ( $\mathbf{r}^*$ ) é obtido aplicando o método PROMETHEE II usando como entrada o *slice*  $\mathbf{P}(:, :, 40)$  do tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{5 \times 3 \times 40}$ , ou seja, usando os dados do ano de 2018. Para obter o ordenamento

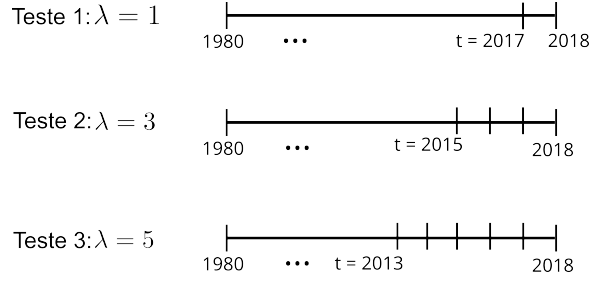


Figura 4.6 – Predição usando diferentes passos de predição:  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 3$ , e  $\lambda = 5$ , respectivamente.

atual ( $\mathbf{r}^c$ ), aplicamos o método PROMETHEE II usando como entrada os *slice*  $\mathbf{P}(:, :, 39)$  para o Teste 1,  $\mathbf{P}(:, :, 37)$  para o Teste 2 e  $\mathbf{P}(:, :, 35)$  para o Teste 3. Isso significa que  
 545 obtemos  $\mathbf{r}^c$  quando o ano atual é 2017, 2015 e 2013, respectivamente. Por fim, calculamos o ordenamento de predição  $\hat{\mathbf{r}}$  aplicando o Algoritmo 1, obtendo  $\hat{\mathbf{P}}$  e, em seguida, aplicando o método PROMETHEE II, considerando como entrada o tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{5 \times 4 \times (40 - \lambda)}$ , para  $\lambda = 1$  no Teste 1,  $\lambda = 3$  no Teste 2 e  $\lambda = 5$  no Teste 3.

Neste experimento, o critério 1 (poupança nacional bruta) foi considerado como  
 550 critério de benefício e os critérios 2 e 3 (inflação e taxa de desemprego) de custo. Os pesos  $w_j$  para o PROMETHEE II foram iguais para os três critérios,  $\mathbf{w} = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ . Para o RLS, consideramos dois parâmetros e, após realizarmos testes iniciais, definimos o fator de esquecimento 0,99 para os sinais do critério 2 e 0,95 para os sinais dos critérios 1 e 3.

**Teste 1:**  $t = 2017$ ,  $\lambda = 1$ .

555 Para este teste, apresentamos na Figura 4.7 os sinais reais (sinal de referência ou alvo) e os respectivos sinais de previsão. Esta figura mostra seis deles:  $\mathbf{p}(i, j, :)$  para  $i = 1, 2$  e  $j = 1, 2, 3$ , e  $\lambda = 1$ . É interessante observar que os sinais de um determinado critério seguem um padrão. As séries temporais do Critério 2 são aproximadamente lineares com pouco ruído, enquanto os sinais dos Critérios 1 e 3 são não lineares e com mais ruído.  
 560 A mesma observação pode ser feita para os outros sinais usados nesta seção.

A Tabela 4.13 mostra os ordenamentos do período atual, o alvo e de o de predição para  $\lambda = 1$ , ou, equivalentemente, para  $t = 2017$ ; e a Tabela 4.14 apresenta a matriz  $\mathbf{M}$ . Além disso, o *boxplot* mostrado na Figura 4.8 representa as características distributivas das pontuações das alternativas obtidas no SMAA. A partir da Tabela 4.13,  
 565 observamos que  $\mathbf{r}^c = \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^*$ , o que significa, neste caso, que não há diferença entre tomar uma decisão usando os dados atuais ou usando predição. Além disso, a Tabela 4.14 mostra que é provável que  $\hat{\mathbf{r}}$  seja igual ao alvo, pois há alta probabilidade de cada alternativa estar na posição em que está em  $\hat{\mathbf{r}}$ . Por fim, a Figura 4.8 fornece uma maneira útil de visualizar que os intervalos das pontuações das alternativas são relativamente curtos, destacando  
 570 que suas posições no ordenamento estão bem estabelecidas. Este exemplo segue o Padrão 1 mostrado na Subseção 4.2.3.1.2.

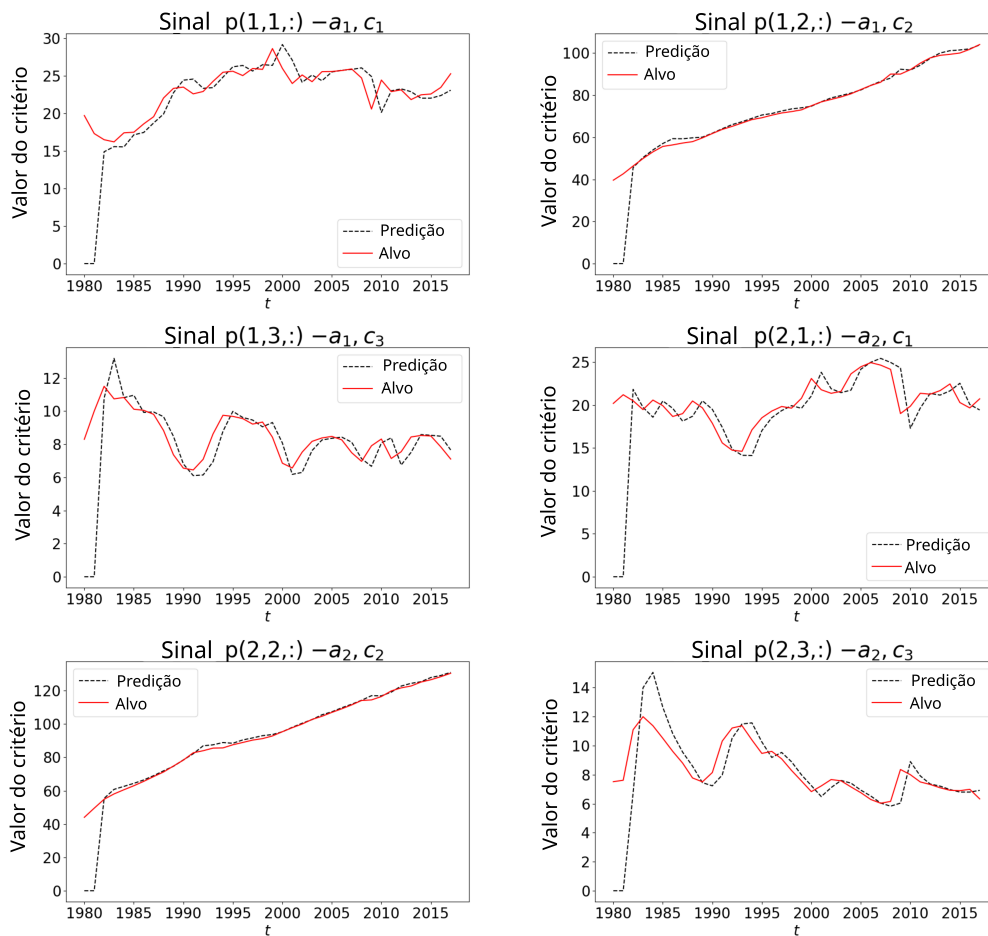


Figura 4.7 – Sinais  $\mathbf{p}(i, j, :)$  e valores de predição para Alternativas 1 e 2 e critérios 1 e 2, quando  $\lambda = 1$ .

Tabela 4.13 – Teste 1: Ordenamentos com dados do período atual, alvo e de predição para  $\lambda = 1$ ,  $t = 2017$ .

| Ordenamento                  | 1º    | 2º    | 3º    | 4º    | 5º    |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Período atual $\mathbf{r}^c$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_2$ |
| Alvo $\mathbf{r}^*$          | $a_4$ | $a_5$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_2$ |
| Predição $\hat{\mathbf{r}}$  | $a_4$ | $a_5$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_2$ |

**Teste 2:**  $t = 2015$ ,  $\lambda = 3$ .

A Tabela 4.15 apresenta os os ordenamentos, a Tabela 4.16 mostra a matriz  $\mathbf{M}$  e a Figura 4.9 mostra o *boxplot* para  $\lambda = 3$ . A primeira observação da Tabela 4.15 é  
 575 que  $\mathbf{r}^c \neq \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^*$ . É possível ver que as Alternativas 5 e 4 ocupam as primeiras e segundas posições em  $\mathbf{r}^c$  e o oposto em  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{r}^*$ . Neste caso, tomar a decisão com base nos dados atuais pode levar a um erro a médio prazo.

Supondo que o ordenamento alvo não está disponível, como ocorre na vida real, se apenas  $\hat{\mathbf{r}}$  estiver disponível para o tomador de decisão, não será possível ter uma ideia do

Tabela 4.14 – Teste 1:  $\mathbf{M}$  (%) para  $\lambda = 1$ ,  $t = 2017$ .

| $a_i$ – Alternativas | 1º           | 2º           | 3º           | 4º           | 5º           |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $a_1$ – Bélgica      | 0.00         | 0.03         | <b>82.49</b> | 14.79        | 2.69         |
| $a_2$ – Canadá       | 0.00         | 0.00         | 1.34         | 13.49        | <b>85.17</b> |
| $a_3$ – França       | 0.00         | 0.00         | 16.14        | <b>71.72</b> | 12.14        |
| $a_4$ – Japão        | <b>85.75</b> | 14.25        | 0.00         | 0.00         | 0.00         |
| $a_5$ – Holanda      | 14.25        | <b>85.72</b> | 0.03         | 0.00         | 0.00         |

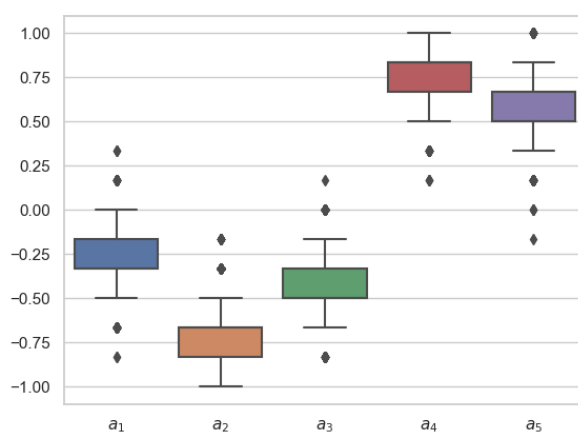


Figura 4.8 – Teste 1: Resultados de pontuação para alternativas na simulação de Monte Carlo.

Tabela 4.15 – Teste 2: Teste 1: Ordenamentos com dados do período atual, alvo e de predição para  $\lambda = 3$ ,  $t = 2015$ .

| Ordenamento                  | 1º                      | 2º                      | 3º    | 4º    | 5º    |
|------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------|-------|-------|
| Período atual $\mathbf{r}^c$ | <b><math>a_5</math></b> | <b><math>a_4</math></b> | $a_1$ | $a_3$ | $a_2$ |
| Alvo $\mathbf{r}^*$          | $a_4$                   | $a_5$                   | $a_1$ | $a_3$ | $a_2$ |
| Predição $\hat{\mathbf{r}}$  | $a_4$                   | $a_5$                   | $a_1$ | $a_3$ | $a_2$ |

Tabela 4.16 – Teste 2:  $\mathbf{M}$  (%) para  $\lambda = 3$ ,  $t = 2015$ .

| $a_i$ – Alternativas | 1º           | 2º           | 3º           | 4º           | 5º           |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $a_1$ – Bélgica      | 1.17         | 9.13         | <b>52.85</b> | 22.38        | 14.47        |
| $a_2$ – Canadá       | 0.03         | 0.87         | 11.88        | 36.97        | <b>50.25</b> |
| $a_3$ – França       | 0.16         | 2.70         | 23.09        | <b>39.07</b> | 34.98        |
| $a_4$ – Japão        | <b>86.26</b> | 12.53        | 1.11         | 0.09         | 0.01         |
| $a_5$ – Holanda      | 12.38        | <b>74.77</b> | 11.07        | 1.49         | 0.29         |

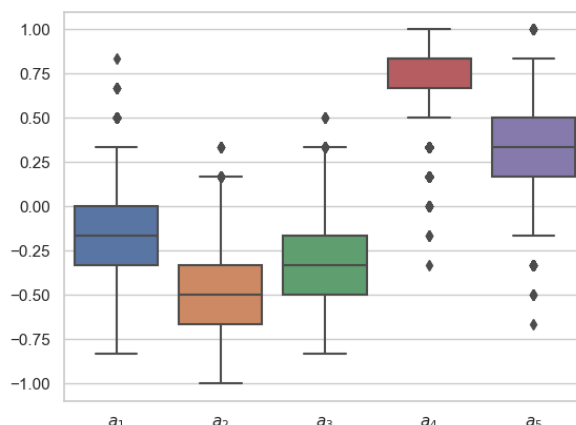


Figura 4.9 – Teste 2: Resultados de pontuação para alternativas na simulação de Monte Carlo.

Tabela 4.17 – Teste 3: Teste 1: Ordenamentos com dados do período atual, alvo e de predição para  $\lambda = 5$ ,  $t = 2013$ .

| Ordenamento                  | 1 <sup>o</sup> | 2 <sup>o</sup> | 3 <sup>o</sup> | 4 <sup>o</sup>          | 5 <sup>o</sup>          |
|------------------------------|----------------|----------------|----------------|-------------------------|-------------------------|
| Período atual $\mathbf{r}^c$ | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$          | <b><math>a_2</math></b> | <b><math>a_3</math></b> |
| Alvo $\mathbf{r}^*$          | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$          | $a_3$                   | $a_2$                   |
| Predição $\hat{\mathbf{r}}$  | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$          | $a_3$                   | $a_2$                   |

risco em aceitar o ordenamento. No entanto, ao analisar a matriz  $\mathbf{M}$ , exibida na Tabela 4.16, observamos que  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_1$  e  $a_2$  apresentam probabilidades superiores a 50% de estarem na posição em que estão em  $\hat{\mathbf{r}}$ . As Alternativas 4 e 5 são muito prováveis de ocuparem as primeiras e segundas posições, respectivamente. Além disso, há boa possibilidade de as Alternativas 1 e 2 ocuparem as 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> posições, respectivamente. Observe que há uma incerteza na Alternativa 2 pois, embora haja alta probabilidade de ela ocupar a 5<sup>a</sup> posição, também há uma probabilidade relevante de ocupar a 4<sup>a</sup> posição. A Figura 4.9 atesta as afirmações anteriores, pois, em termos de mediana, é possível obter o mesmo ordenamento que em  $\hat{\mathbf{r}}$ , mas é possível ver que, neste teste, a distribuição das pontuações das alternativas estão mais espalhadas do que no Teste 1. Este caso é similar ao exemplo do Padrão 2 mostrado na Subseção 4.2.3.1.2.

**Teste 3:**  $t = 2013$ ,  $\lambda = 5$ .

Os resultados desses testes são apresentados nas Tabelas 4.17 e 4.18. A partir da Tabela 4.17, é possível ver que  $\mathbf{r}^c \neq \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^*$  novamente. Neste caso, as Alternativas 2 e 3 ocupam as 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> posições, respectivamente, no ordenamento do período atual e no ordenamentos de predição e alvo ocupam posições opostas.

Na Tabela 4.18, observamos que essa matriz  $\mathbf{M}$  é mais ruidosa do que as

Tabela 4.18 – Teste 3:  $\mathbf{M}$  (%) para  $\lambda = 5$ ,  $t = 2013$ .

| $a_i$ – Alternativas | 1º           | 2º           | 3º           | 4º           | 5º           |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $a_1$ – Bélgica      | 2.03         | 7.11         | <b>48.51</b> | 25.80        | 16.55        |
| $a_2$ – Canadá       | 0.48         | 2.38         | 19.38        | 33.58        | <b>44.18</b> |
| $a_3$ – França       | 0.30         | 2.07         | 20.02        | <b>38.51</b> | 39.10        |
| $a_4$ – Japão        | <b>64.56</b> | 31.44        | 3.49         | 0.44         | 0.07         |
| $a_5$ – Holanda      | 32.63        | <b>57.00</b> | 8.60         | 1.67         | 0.10         |

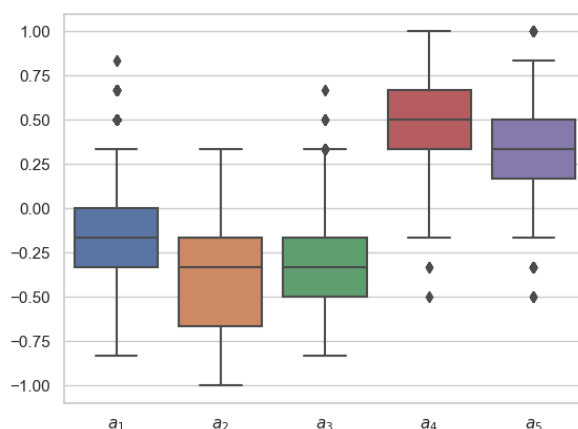


Figura 4.10 – Teste 3: Resultados de pontuação para alternativas na simulação de Monte Carlo.

anteriores. Este aumento de ruído nesta matriz pode ser consequência de que, quanto maior for a etapa de predição, maior o  $\bar{s}_e$ . Consequentemente, os critérios podem assumir uma ampla gama de valores, gerando diferentes ordenamentos possíveis. Neste caso,  $\hat{\mathbf{r}}$  é o ordenamento mais provável, mas o tomador de decisão está ciente do risco das Alternativas 1, 2 e 3 estarem em posições diferentes das de  $\hat{\mathbf{r}}$ . A Figura 4.10 apresenta uma melhor perspectiva sobre as Alternativas 1, 2 e 3. É possível observar que, embora a mediana das Alternativas 2 e 3 sejam as mesmas, os primeiros dois quartis da Alternativa 2 apresentam maior variância, assumindo pontuações inferiores à da Alternativa 3. Além disso, é possível ver que a Alternativa 1 apresenta uma mediana mais alta do que a Alternativa 3; as distribuições são bastante similares, variando de cerca de -0,74 a 0,30, mas o primeiro quartil da Alternativa 1 é mais alto, o que indica que poucos valores assumem pontuações baixas em comparação com a Alternativa 3.

#### 4.2.4 Sumário da proposta baseada em predição adaptativa

Nesta contribuição, consideramos as séries temporais dos critérios de decisão, e utilizamos uma técnica de predição probabilística baseada no algoritmo RLS para obter a média e o desvio padrão de uma variável aleatória normal, que modela o comportamento

dos valores futuros dos critérios. O método SMAA foi aplicado para obter uma matriz com as probabilidades de ordenamento para cada alternativa. Tal abordagem permite que o tomador de decisão observe o grau de incerteza nos ordenamentos fornecido pelo método.

Experimentos numéricos com dados sintéticos e reais mostraram que a diferença entre os ordenamentos de predição e de referência aumenta conforme a SNR é reduzida. Isso decorre diretamente do fato de que o desvio padrão médio do erro de predição aumenta conforme a SNR diminui. Além disso, vale observar que a maioria das vezes o ordenamento de predição está mais próximo do ordenamento de referência do que do ordenamento com dados do período atual. Esse resultado atesta que decisões melhores podem ser alcançadas ao considerar amostras anteriores que trazem informações sobre o aspecto dinâmico do problema.

### 4.3 Apoio à decisão multicritério empregando a predição adaptativa em uma representação baseada em tensores de características

As duas abordagens descritas nas Subseções 4.1 e 4.2 podem ser mais ou menos adequadas dependendo do contexto da decisão, do tipo de série temporal e das preferências do decisor. O espaço de características, por exemplo, oferece a vantagem de uma análise mais ampla, permitindo que o decisor escolha quais características são relevantes para a decisão. Na abordagem de predição adaptativa, essas características não são diretamente escolhidas pelo decisor, mas são, de certo modo, utilizadas pelo algoritmo de predição para obter valores futuros. Uma desvantagem da abordagem da predição é que apenas um período futuro é considerado, o que leva a uma abordagem estática, sendo que agora olhando para um único período futuro. Por outro lado, a desvantagem da abordagem do espaço de características é que, em casos em que os sinais são não-estacionários, considerar as características dos dados passados, pode levar a erros no ordenamento final.

As vantagens e desvantagens das duas abordagens podem ser melhor entendidas retomando o exemplo da escolha de dois países para investir, levando em consideração os critérios preço da matéria prima e taxa de câmbio, que foi discutido na Seção 4.2.1. Supondo, como ilustrado na Figura 4.11, que dispõem-se das séries temporais dos critérios para os dois países até o ano atual do momento da decisão,  $t_T$ . Ao aplicar um algoritmo de predição, obtêm-se um sinal de predição para os valores dos anos seguintes:  $t_{T+\lambda}$ , com  $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ . Nota-se pela Figura 4.11 que, se considerarmos os dados do período atual, provavelmente o País 2 é escolhido por apresentar um valor menor da matéria prima. Do mesmo modo, ao utilizar a abordagem da Seção 4.2, sendo o período de predição  $t_{T+1}$ , o País 2 ainda apresenta menor valor da matéria prima que o País 1, sendo então o País 2 o escolhido novamente. Porém se o período de predição considerado é a partir de  $t_{T+2}$ , esse cenário muda, passando o País 1 a ser o escolhido. Assim, saber qual o período futuro em

que deve ser feito o ordenamento pode ser complexo, sendo essa a principal desvantagem da  
 650 abordagem de predição. Com relação à abordagem do espaço de características apresentado  
 na Seção 4.1, observa-se que, em termos de matéria prima, a média dos dados passados do  
 País 2 é maior que a média do País 1, porém, a média do sinal de predição desses dois  
 países são semelhantes. Ou seja, o ordenamento considerando características do sinal de  
 predição pode ser diferente daquele utilizando dados passados.

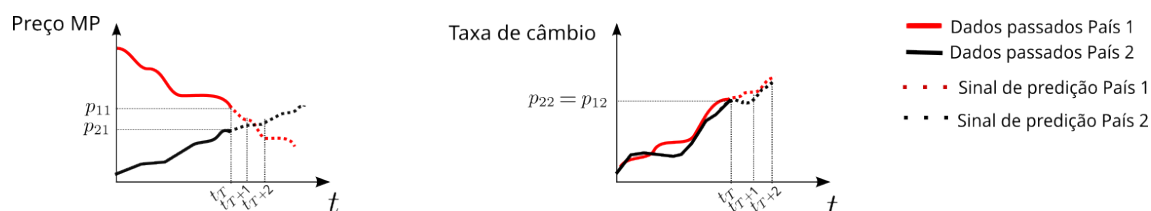


Figura 4.11 – Exemplo de séries temporais e do sinal de predição de dois critérios: preço da matéria-prima e taxa de câmbio, para dois países.

Esta seção apresenta uma nova abordagem incorporando as vantagens das duas  
 abordagens descritas nas Subseções 4.1 e 4.2. A ideia principal é explorar as características  
 obtidas a partir dos sinais de predição, os quais são obtidos por um método de predição  
 adaptativa. Além disso, a contribuição desta seção também é desenvolver uma extensão do  
 PROMETHEE II para tensores. Em resumo, a metodologia proposta utiliza o RLS para  
 660 fornecer os sinais de predição, e então, mapear os sinais resultantes do domínio do tempo  
 em um domínio de características, estruturando esses dados num tensor de terceira ordem,  
 onde as dimensões representam as alternativas, os critérios e as características do sinal de  
 predição. Finalmente, ao aplicar a extensão do PROMETHEE II, um ordenamento das  
 alternativas é obtido.

Esta metodologia pode ser utilizada em contextos em que é necessário um  
 ordenamento futuro, porém com uma abordagem dinâmica. Por exemplo, em certas tomadas  
 de decisões sustentáveis dos governos, é necessário analisar não só os impactos imediatos  
 das escolhas de projetos, mas também consequências futuras (FRINI; BENAMOR, 2017).  
 Para levar em conta esses impactos futuros, alguns estudos na área de MCDA vêm  
 670 propondo considerar múltiplos períodos futuros, ou seja, analisar sinais futuros dos critérios.  
 Neste sentido, nesta proposta, obtemos os sinais futuros dos critérios e utilizamos suas  
 características para o ordenamento final.

Esta seção está dividida da seguinte forma: a Subseção 4.3.1 apresenta a  
 metodologia proposta, bem como a extensão do PROMETHEE II. Na Subseção 4.3.2  
 675 testamos nossa abordagem utilizando séries temporais reais. Finalmente, a Subseção 4.3.3  
 conclui esta proposta.



### 4.3.1 Metodologia proposta

Na introdução deste capítulo, apresentamos e ilustramos na Figura 4.1(c) os passos gerais desta terceira metodologia. Em resumo, aplica-se em cada fibra  $\mathbf{p}(i, j, :)$ , do tensor de decisão  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ , o método de predição adaptativa RLS (Algoritmo 1) para  $q$  passos futuros, de onde obtemos um sinais de predição  $\hat{\mathbf{p}}(i, j, :)$  para cada alternativa e cada critério. Assim, forma-se o tensor de predição  $\hat{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}^{m \times n \times q}$ . Em cada sinal  $\hat{\mathbf{p}}(i, j, :)$ , aplicamos a função  $f\{\cdot\}$ , que obtém  $h$  características desses sinais, formando o novo tensor  $\mathcal{S}' \in \mathbb{R}^{m \times n \times h}$ . Propomos então uma extensão do método PROMETHEE II para agregar  $\mathcal{S}'$  e obter o ordenamento  $\hat{\mathbf{f}}$  das alternativas.

Na Subseção 4.3.1.1 apresentamos a extensão do PROMETHEE II e a Subseção 4.3.1.2 mostra a metodologia em forma de pseudo-algoritmo.

#### 4.3.1.1 Extensão do PROMETHEE II para a abordagem tensorial

O objetivo desta seção é apresentar a proposta de extensão do método PROMETHEE II, na qual a entrada é um tensor  $\hat{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}^{n \times m \times q}$  (obtido no passo de predição) e a saída é o vetor  $\hat{\mathbf{f}}$ , que representa o ordenamento das alternativas.

No primeiro passo, calculam-se  $q$  características para cada fibra  $\hat{\mathbf{p}}(i, j, :)$  do tensor  $\hat{\mathcal{P}}$ , mapeando o espaço temporal para o espaço de características:

$$\hat{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}^{n \times m \times q} \Rightarrow \mathcal{S}' \in \mathbb{R}^{n \times m \times h}, \quad (4.27)$$

onde  $h$  é o número de características. Consideramos neste estudo três características: média (pela Equação (4.8)), coeficiente angular (pela Equação (4.11)) e coeficiente de variação (pela Equação (4.9)).

No seguinte passo, para cada *slice*  $\mathcal{S}(:, :, \ell)$ ,  $\ell = 1, \dots, h$ , é feita uma comparação por pares calculando a diferença entre o desempenho de cada par de alternativas  $a_i, a_k \in A$ , para cada critério  $j$ :

$$d_{j\ell}(a_i, a_k) = c_{ij\ell} - c_{kj\ell} \quad \forall j, \ell. \quad (4.28)$$

A partir de (4.28), obtemos um tensor  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n \times n \times m \times h}$ . Cada fatia  $\mathbf{D}(:, :, j, \ell) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de  $\mathcal{D}$  é uma matriz de comparação por pares.

Em seguida, é aplicada a função de preferência critério usual  $F_j$  (mostrada na Tabela 2.1) em  $\mathbf{D}(:, :, j, \ell)$ , da seguinte forma:

$$F_{j\ell}(d_{j\ell}(a_i, a_k)) = F_{j\ell}(\mathbf{D}(:, :, j, \ell)) \quad \forall j, \ell, \quad (4.29)$$

onde  $0 \leq P_{j\ell}(\mathbf{D}(:, :, j, \ell)) \leq 1$ .

Considerando um conjunto de pesos  $\mathbf{W}_\ell = \{w_{1\ell}, w_{2\ell}, \dots, w_{m\ell}\}$ , com  $w_{j\ell} \geq 0 \quad \forall j, \ell$ , e  $\sum_{\ell=1}^h \sum_{j=1}^m w_{j\ell} = 1$ , o próximo passo é mapear  $\mathbb{R}^{n \times n \times m \times h} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , o que fornece

um índice de preferência global de  $a_i$  sobre  $a_k \forall i, k$

$$\pi(a_i, a_k) = \sum_{\ell=1}^h \sum_{j=1}^m w_{j\ell} F_{j\ell}(\mathbf{D}(:, :, j, \ell)). \quad (4.30)$$

Dado que  $f_{j\ell}(\mathbf{D}(:, :, j, \ell)) \geq 0$  e  $w_{j\ell} \geq 0$ , então  $\pi(a_i, a_k) \geq 0$ .

O último passo é um processo de agregação que mapeia  $\pi(a_i, a_k)$  para um vetor **g**. Este processo é dado pela diferença entre a preferência média de  $a_i$  sobre as outras alternativas e a preferência média de todas as alternativas sobre  $a_i$ :

$$\mathbf{g} = \frac{1}{n-1} \sum_{a \in A} \pi(a, a_i) - \frac{1}{n-1} \sum_{a \in A} \pi(a_i, a), \quad \forall i. \quad (4.31)$$

Cada elemento do vetor **g** se encontra no intervalo  $[-1, 1]$ . Ao ordenar as alternativas de acordo com as pontuações de **g**, obtém-se o vetor de ordenamento que representamos aqui por  $\hat{\mathbf{f}}$ .

#### 4.3.1.2 Algoritmo da metodologia proposta

O Algoritmo 3 formaliza a metodologia baseada em tensores de características. A entrada do algoritmo é o tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$  e a saída é o ordenamento das alternativas, representado por  $\hat{\mathbf{f}}$ .

**Algoritmo 3:** Metodologia proposta com predição adaptativa e cálculo das características do sinal de predição.

**Entrada:**  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$  e  $\lambda$ .

```

for  $\lambda = 1$  to  $q$  do
  for  $i = 1$  to  $m$  do
    for  $j = 1$  to  $n$  do
       $\hat{p}_{ij\lambda} \leftarrow$  Resolva Algoritmo 1 (RLS) usando como entrada  $\mathbf{p}(i, j, :)$  e  $\lambda$ 
    end for
     $\hat{\mathbf{p}}(i, j, :) \leftarrow \hat{p}_{ij\lambda}$ 
  end for
   $\hat{\mathbf{P}}(i, :, :) \leftarrow \hat{\mathbf{p}}(i, j, :)$ 
end for
 $\hat{\mathcal{P}} \leftarrow \hat{\mathbf{P}}(i, j, :)$ 
 $\hat{\mathbf{f}} \leftarrow$  Resolva Extensão do PROMETHEE II detalhado na Subseção 4.3.1.1 utilizando como entrada o tensor  $\hat{\mathcal{P}}$ 

```

**Saída:**  $\hat{\mathbf{f}}$

#### 4.3.2 Experimentos utilizando dados reais

Neste experimento computacional utilizamos os mesmos dados dos experimentos da Seção 4.2.3.2. Assim, a abordagem proposta é testada considerando séries temporais reais obtidas do Fundo Monetário Internacional (FMI): <https://www.imf.org/en/Data>. Fornecemos essas séries temporais, seus respectivos gráficos e o código Python no link <https://github.com/BSCCampello/tensorpredictionsignals>.

Supõem-se aqui que o decisor deseja ordenar cinco países ( $n = 5$ ):  $a_1$  – Bélgica;  $a_2$  – Canadá;  $a_3$  – França;  $a_4$  – Japão;  $a_5$  – Holanda, de acordo com três critérios econômico financeiros ( $m = 3$ ): poupança nacional bruta ( $c_1$ ), inflação ( $c_2$ ) e taxa de desemprego ( $c_3$ ). O critério  $c_1$  é considerado de benefício (max) e os critérios  $c_2$  e  $c_3$  são de custo (min). O coeficiente de variação é considerado característica de custo, pois está relacionado ao risco.

As séries temporais disponíveis consistem em 40 amostras ( $T = 40$ ):  $t = 1980, \dots, 2018$ .

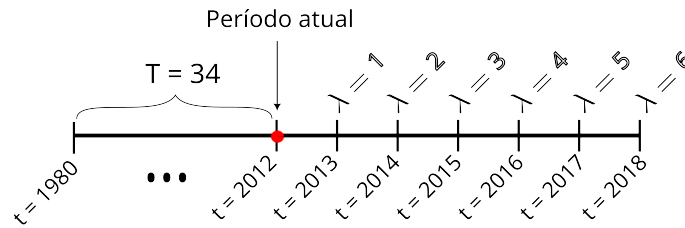


Figura 4.12 – Linha do tempo dos dados considerando o período atual o ano de 2012 e para  $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ .

Considera-se uma situação em que a decisão deve ser tomada em 2012 (o período atual é o ano de 2012), conforme Figura 4.12. Desse modo, supõe-se que as séries temporais estejam disponíveis de 1980 até 2012 ( $T = 34$  períodos); portanto, podemos usar os dados de 2013 à 2018 como alvo para avaliar a estratégia proposta. Organizamos os dados em um tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times m \times T}$ , onde  $n = 5$ ,  $m = 3$ ,  $T = 34$ . Com base nesta informação, obtemos diferentes ordenamentos, a fim de comparar as diferentes abordagens:

**Ordenamento das características dos sinais de predição,  $\hat{\mathbf{f}}$ :** Esse ordenamento é obtido considerando o tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{5 \times 3 \times 34}$  como entrada para o Algoritmo 3. Consideramos que a predição é para os 6 anos seguintes  $t = 2013, \dots, 2018$ ,  $q = 6$  e  $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ . A saída do algoritmo é o ordenamento de predição  $\hat{\mathbf{f}}$ ;

**Ordenamento alvo de  $\hat{\mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{f}^*$ :** Esse ordenamento é obtido usando os dados reais dos anos  $t = 2013, \dots, 2018$  para estruturar o tensor  $\mathcal{P}^* \in \mathbb{R}^{5 \times 3 \times 6}$  e usá-lo como entrada para a extensão do PROMETHEE II, Equações (4.27) - (4.31). Nota-se que  $\mathbf{f}^*$  é o alvo do  $\hat{\mathbf{f}}$ , pois, se o algoritmo RLS obtiver erro de predição zero,  $\hat{\mathbf{f}}$  deve ser igual a  $\mathbf{f}^*$ ;

**Ordenamento com valores do período atual,  $\mathbf{r}^c$ :** esse ordenamento é obtido usando a matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ , que é estruturada com os dados em  $T = 34$  (os dados do ano 2012) e usada como entrada para o PROMETHEE II clássico, definido na Subseção 2.2.2;

**Ordenamento obtido utilizando abordagem da Seção 4.2,  $\hat{\mathbf{r}}$ :** para obter o ordenamento ( $\hat{\mathbf{r}}$ ), os dados são representados como um tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{5 \times 3 \times 34}$ , que serve de entrada para o Algoritmo 2. A saída é o ordenamento  $\hat{\mathbf{r}}$  para cada ano  $t = 2013, \dots, 2018$ ;

Tabela 4.19 – Comparação dos ordenamentos obtidos a partir de três estratégias diferentes.

| Ano                          | Ordenamento                 | 1º             | 2º             | 3º    | 4º             | 5º             |
|------------------------------|-----------------------------|----------------|----------------|-------|----------------|----------------|
| Características<br>2013–2018 | Alvo $\mathbf{f}^*$         | $a_5$          | $a_4$          | $a_3$ | $a_1$          | $a_2$          |
|                              | Predição $\hat{\mathbf{f}}$ | $a_5$          | $a_4$          | $a_3$ | $a_1$          | $a_2$          |
| 2012                         | Atual $\mathbf{r}^c$        | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$ | $a_2$          | $a_3$          |
| 2013                         | Alvo $\mathbf{r}^*$         | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$ | $a_2$          | $a_3$          |
|                              | Predição $\hat{\mathbf{r}}$ | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$ | $a_2$          | $a_3$          |
| 2014                         | Alvo $\mathbf{r}^*$         | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$ | $a_2$          | $a_3$          |
|                              | Predição $\hat{\mathbf{r}}$ | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$ | $a_2$          | $a_3$          |
| 2015                         | Alvo $\mathbf{r}^*$         | $a_5$          | $a_4$          | $a_1$ | $a_3$          | $a_2$          |
|                              | Predição $\hat{\mathbf{r}}$ | $a_5$          | $a_4$          | $a_1$ | $\mathbf{a}_2$ | $\mathbf{a}_3$ |
| 2016                         | Alvo $\mathbf{r}^*$         | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$ | $a_3$          | $a_2$          |
|                              | Predição $\hat{\mathbf{r}}$ | $\mathbf{a}_5$ | $\mathbf{a}_4$ | $a_1$ | $\mathbf{a}_2$ | $\mathbf{a}_3$ |
| 2017                         | Alvo $\mathbf{r}^*$         | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$ | $a_3$          | $a_2$          |
|                              | Predição $\hat{\mathbf{r}}$ | $\mathbf{a}_5$ | $\mathbf{a}_4$ | $a_1$ | $a_3$          | $a_2$          |
| 2018                         | Alvo $\mathbf{r}^*$         | $a_4$          | $a_5$          | $a_1$ | $a_3$          | $a_2$          |
|                              | Predição $\hat{\mathbf{r}}$ | $\mathbf{a}_5$ | $\mathbf{a}_4$ | $a_1$ | $a_3$          | $a_2$          |
| Características              | 2007–2012 $\mathbf{r}$      | $a_5$          | $a_4$          | $a_1$ | $a_3$          | $a_2$          |

Tabela 4.20 – Tensor de característica dos sinais de predição, matriz com dados do período atual e tensor de características dos sinais de 2007 à 2012.

| $a_i$ | Tensor de características dos sinais de predição $\mathcal{S}'$ |       |       |        |       |        |       |       |       | $\mathbf{P}$         |        |       | Tensor de características dos sinais passados $\mathcal{S}$ |         |       |        |        |       |       |       |       |
|-------|-----------------------------------------------------------------|-------|-------|--------|-------|--------|-------|-------|-------|----------------------|--------|-------|-------------------------------------------------------------|---------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
|       | Média                                                           |       |       | CA     |       |        | CV    |       |       | Período atual = 2012 |        |       | Média                                                       |         |       | CA     |        |       | CV    |       |       |
|       | $c_1$                                                           | $c_2$ | $c_3$ | $c_1$  | $c_2$ | $c_3$  | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_1$                | $c_2$  | $c_3$ | $c_1$                                                       | $c_2$   | $c_3$ | $c_1$  | $c_2$  | $c_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|       | Max                                                             | Min   | Min   | Max    | Min   | Min    | Min   | Min   | Min   | Max                  | Min    | Min   | Max                                                         | Min     | Min   | Max    | Min    | Min   | Min   | Min   | Min   |
| $a_1$ | 22.7                                                            | 105.6 | 7.2   | -0.069 | 2.255 | -0.114 | 0.007 | 0.037 | 0.027 | 23.15                | 97.68  | 7.55  | 23.631                                                      | 91.846  | 7.563 | -0.443 | 2.154  | 0.035 | 0.072 | 0.041 | 0.060 |
| $a_2$ | 20.9                                                            | 131.5 | 7.0   | -0.003 | 2.905 | -0.078 | 0.012 | 0.038 | 0.021 | 21.28                | 121.68 | 7.32  | 21.733                                                      | 116.333 | 7.229 | -0.699 | 2.010  | 0.289 | 0.095 | 0.030 | 0.120 |
| $a_3$ | 21.4                                                            | 105.6 | 9.8   | -0.054 | 2.110 | -0.050 | 0.006 | 0.034 | 0.011 | 21.66                | 98.33  | 9.79  | 22.298                                                      | 93.813  | 8.798 | -0.444 | 1.635  | 0.414 | 0.054 | 0.030 | 0.092 |
| $a_4$ | 22.4                                                            | 97.8  | 4.4   | -0.277 | 0.453 | 0.047  | 0.027 | 0.008 | 0.022 | 23.62                | 96.22  | 4.33  | 25.610                                                      | 97.006  | 4.476 | -1.036 | -0.360 | 0.121 | 0.079 | 0.008 | 0.107 |
| $a_5$ | 30.1                                                            | 103.9 | 5.4   | 0.149  | 2.011 | -0.342 | 0.009 | 0.033 | 0.113 | 29.39                | 96.98  | 5.83  | 28.011                                                      | 92.203  | 4.666 | 0.274  | 1.598  | 0.370 | 0.045 | 0.030 | 0.150 |

**Ordenamento alvo de  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{r}^*$ :** Para obter o ordenamento alvo  $\hat{\mathbf{r}}$ , a matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$  é estruturada com os valores-alvo (dados reais) para cada ano  $t = 2013, \dots, 2018$ , seguida da aplicação do método clássico PROMETHEE II, Equações (2.12) - (2.19);

755 **Ordenamento obtido utilizando a abordagem da Seção 4.1:  $\mathbf{r}$ :** esse ordenamento é obtido usando uma janela de dados passados, especificamente, os valores dos últimos seis anos ( $t = 2007, \dots, 2012$ ). Portanto, o tensor com os dados passados são estruturado como  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{5 \times 3 \times 6}$ , para os dados em  $t = 2007, \dots, 2012$ , que é a entrada para a extensão do PROMETHEE II, Equações (4.27) - (4.31), e a saída é o

760 ordenamento  $\mathbf{r}$ .

Todos os ordenamentos acima são mostrados na Tabela 4.19.

Como pode ser visto nas duas primeiras linhas da Tabela 4.19, os ordenamentos obtidos pelo método proposto  $\hat{\mathbf{f}}$  e seu alvo  $\mathbf{f}^*$  são iguais, o que significa que o erro de

predição não afetou o ordenamento. Além disso, a partir da Tabela 4.19, observamos que  $\hat{\mathbf{f}}$  é muito diferente de  $\mathbf{r}^c$ , dado que todas as alternativas estão em posições diferentes. Essas diferenças podem ser explicadas com a ajuda da Tabela 4.20, que mostra o tensor com as características de predição  $\mathcal{S}' \in \mathbb{R}^{5 \times 3 \times 3}$  (as características dos sinais de predição), bem como a matriz de valores atuais,  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ . Vamos nos concentrar nos valores das Alternativas 1 e 3 (que são ordenadas de maneira diferente em  $\hat{\mathbf{f}}$  e  $\mathbf{r}^c$ ). A partir da matriz  $\mathbf{P}$ , nota-se que  $a_1$  supera  $a_3$  em todos os critérios. Em contrapartida, ao analisarmos as características obtidas a partir dos sinais de predição,  $a_3$  apresenta menor coeficiente de variação para todos os critérios. Além disso, nas características de  $\mathcal{S}'$  relacionado à média,  $a_3$  é igual a  $a_1$  em  $c_2$ . Portanto, na abordagem clássica no MCDA, muitos elementos essenciais para a decisão são desconsiderados.

Além disso, é interessante observar na Tabela 4.19 que, mesmo que  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\mathbf{f}}$  sejam obtidos usando valores de predição, o método utilizado aqui apresenta informações adicionais ao problema, o que, por sua vez, pode levar a ordenamentos diferentes, que podem ser mais adequados em uma determinada situação. Por exemplo,  $a_1$  ocupa a quarta posição em  $\hat{\mathbf{f}}$ ; no entanto, sempre ocupa a terceira posição em  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{r}^*$ . Esses resultados mostram, na prática, a discussão apresentada pela Figura 4.11.

Finalmente, a Tabela 4.19 mostra que os ordenamentos obtidos analisando características do sinal passado e o ordenamento obtido usando o sinal de predição são diferentes,  $\mathbf{r} \neq \hat{\mathbf{f}}$ , pois  $a_3$  e  $a_1$  mudam de posição. A Tabela 4.20 apresenta o tensor  $\mathcal{S}'$  com as características calculadas a partir das amostras passadas. A partir dessa tabela, observamos porque  $a_3$  e  $a_1$  estão em posições diferentes em  $\mathbf{r}$  e  $\hat{\mathbf{f}}$ . A partir de  $\mathcal{S}'$ , vemos que, em termos da característica média, o valor de  $a_1$  é igual ao valor de  $a_3$  no critério  $c_2$ . Em contrapartida, em  $\mathcal{S}$ , o valor de  $a_3$  em  $c_2$  é pior do que o valor de  $a_1$  para  $c_2$ . Além disso, em  $\mathcal{S}'$ ,  $a_3$  apresenta um coeficiente de variação menor do que  $a_1$  para todos os critérios. Em vez disso, em  $\mathcal{S}$ , o  $c_3$  de  $a_3$ , no coeficiente de variação, é pior do que o de  $a_1$ . Portanto, em um período de seis anos, os sinais mostram uma mudança em seu comportamento. Esse comportamento aponta que a abordagem proposta é interessante quando há mudanças bruscas na média, tendência ou variância dos sinais.

### 4.3.3 Sumário da proposta baseada em espaço de características com predição adaptativa

As propostas do presente capítulo apresentam uma abordagem para apoiar decisões multicritério usando uma estrutura tensorial, o algoritmo de predição adaptativa RLS para gerar um sinal de predição e uma variante do método PROMETHEE II para obter um ordenamento das alternativas.

A nova abordagem foi testada em um experimento numérico usando séries

800 temporais reais. Comparamos o ordenamento obtido da proposta com ordenamentos  
obtidos com outras estratégias. Tal análise sugeriu que esta proposta foi capaz de capturar  
características dos sinais de predição que são significativos em muitos processos de decisão.  
A abordagem proposta é adequada em decisões que o ordenamento futuro é relevante e os  
sinais das séries temporais são não-estacionárias, ou seja, as características dos sinais dos  
805 critérios apresentam variações significativas em um curto intervalo de tempo.

## 5 Propostas de métodos de desagregação em estruturas tensoriais

Conforme descrito em (2.3), a desagregação em MCDA é um processo utilizado para entender e modelar as preferências do decisor. Isso é feito através da determinação de funções de utilidade (ou funções de valor) que modelam as decisões. De forma geral, em MCDA, as funções de valor são construídas para cada critério relevante no problema, o que permite que os decisores entendam suas preferências e os fatores que influenciam suas decisões com relação à esses critérios.

No Capítulo 3, mostramos a relevância de considerar temporalidade na análise de decisão multicritério e apresentamos uma revisão de literatura mostrando que poucos estudos tratam deste problema. No Capítulo 4, discutimos e apresentamos novas metodologias para lidar com esta temporalidade do ponto de vista da agregação. Discorremos que os decisores podem ter preferências em termos de análise das séries temporais e que, se essa temporalidade não for levada em consideração, a solução final pode não ser representativa para o decisor. Este mesmo argumento pode ser considerado na desagregação. Por exemplo, um decisor pode fazer o ordenamento das alternativas levando em conta a análise das séries temporais dos critérios. Neste caso, se o analista aplicar um método clássico de desagregação, que considera apenas valores pontuais para os critérios, o modelo de decisão obtido pode não ser representativo com relação às preferências do decisor.

Sendo assim, apresentamos neste capítulo uma nova abordagem para a desagregação com análise temporal em MCDA, conforme ilustrada na Figura 5.1. A Seção 5.1 apresenta o método de desagregação proposto, chamado de método UTASTAR-T; Na Seção 5.2, introduzimos a problemática multiobjetivo e nossa proposta de modelo pós-otimização através da abordagem multiobjetivo; Na Seção 5.3, apresentamos os resultados computacionais e este capítulo é finalizado na Seção 5.4 com as conclusões.

### 5.1 Abordagem proposta: método UTASTAR-T

Esta seção apresenta o método UTASTAR-T, uma extensão do UTASTAR para uma situação na qual os dados de entrada são representadas por um tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ . Conforme ilustrado na Figura 5.1, os passos da metodologia consistem em aplicar uma função no tensor  $\mathcal{P}$  para calcular características das séries temporais, de onde obtém-se o tensor  $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{m \times n \times h}$ , com  $h$  características. Então, aplica-se o método UTASTAR-T no tensor  $\mathcal{S}$ , de onde se obtém as funções de valor dos  $n$  critérios nas  $h$  características.

Assim, nesta abordagem, ao invés de estimar a função de utilidade de cada

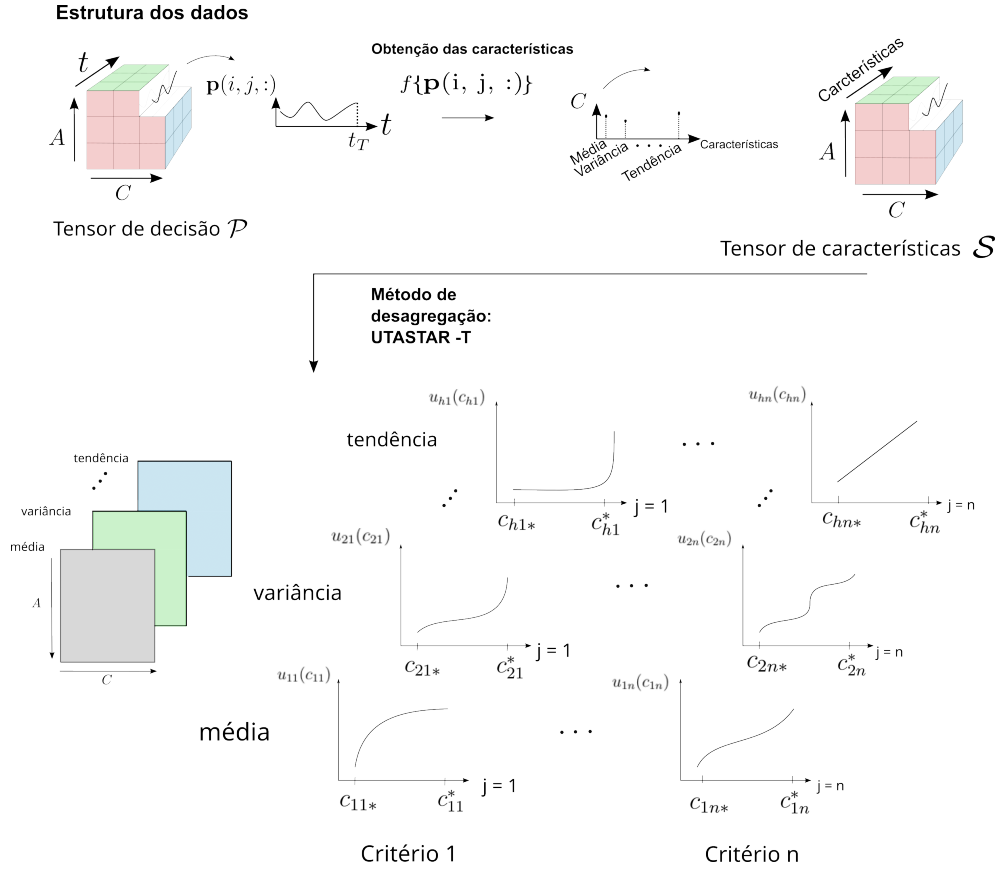


Figura 5.1 – Ilustração da abordagem de desagregação considerando características relevantes para a decisão das séries temporais, de onde obtém-se as funções de valor dos critérios em cada característica.

critério,  $u_j(c_j)$ , como no UTASTAR, inferimos a função de valor dos critérios para cada característica  $k$ , denotada por  $u_{jk}(c_{jk})$ ,  $k = 1, \dots, h$ , como mostra a Figura 5.1. Logo, temos  $n$  critérios e  $h$  características que compõem  $n \times h$  funções de valor. A função de valor global da alternativa  $i$  é representada por  $u[c(a_i)]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , obtidos da seguinte forma:

$$u[c(a_i)] = \sum_{k=1}^h \sum_{j=1}^n u_{kj}(c_{kj}), i = 1, \dots, m. \quad (5.1)$$

O valor global de uma alternativa é definido como uma combinação linear das utilidades para cada critério e para as diferentes características definidas.

A escala de valores de cada critério  $j$  para cada característica  $k$  é denotada por  $[c_{jk}^1, c_{jk}^2, \dots, c_{jk}^{\alpha_{kj}}]$ , onde  $c_{jk}^1$  é o pior valor do critério  $j$  na característica  $k$  (também representado por  $c_{jk*}$ ) e  $c_{jk}^{\alpha_{kj}}$  o melhor (também representado por  $c_{jk}^*$ ). As Propriedades (2.35) e Equação (2.44) são similares às do UTASTAR.

Outras duas modificações importantes dizem respeito às variáveis  $w_{j\ell}$ ; estas variáveis são substituídas por  $w_{kj\ell}$  a fim de garantir as condições de monotonicidade para



todas as funções de valor em cada característica, na forma:

$$w_{kj\ell} = u_{kj}(c^{\ell+1}) - u_{kj}(c^\ell) \geq 0, \forall j, \ell, k. \quad (5.2)$$

Além disso, no UTASTAR clássico, as restrições (2.50) normalizam os pesos dos critérios que devem somar 1. No UTASTAR-T,  $w_{kj\ell}$  são normalizados de tal forma que somam 1 em cada característica:  $\sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^{\alpha_{kj}-1} w_{kj\ell} = 1$ , para cada  $k$ .

50 Levando em conta essas modificações, o algoritmo UTASTAR-T pode ser resumido pelos seguintes passos.

**Passo 1:**

Dado o tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ , faça a transformação para o espaço de características:

$$f : \mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T} \rightarrow \mathcal{S} \in \mathbb{R}^{m \times n \times h}, \quad (5.3)$$

onde  $f$  é a função que passa do domínio  $\mathcal{P}$  ao  $\mathcal{S}$ , os  $s_{ijk}$  são os elementos de  $\mathcal{S}$  e  $h$  o  
55 número de características. As características consideradas devem ser definidas de acordo com a preferência do decisor. Neste estudo consideramos as características média, calculada conforme a Equação (4.8), e coeficiente angular (CA), calculado pela Equação (4.11).

**Passo 2:**

Calcule o valor global das alternativas  $u[c(a_i)]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , em termos de valores  
60 marginais  $u_{kj}(c_{jk})$ , de acordo com a Equação (5.1), e, em seguida, em termos das variáveis  $w_{kj\ell}$ , na forma:

$$\begin{cases} u_{kj}(c_{kj}^1) = 0, j = 1, \dots, n \\ u_{kj}(c_{kj}^\ell) = \sum_{\ell=1}^{\alpha_{kj}-1} w_{kj\ell}, j = 1, \dots, n \text{ e } k = 1, \dots, h \end{cases} \quad (5.4)$$

**Passo 3:**

Faça a comparação par a par das alternativas consecutivas no ordenamento e acrescente a função de erro, de acordo com a Equação (2.44).

65 **Passo 4:**

Resolva:

$$\min z = \sum_{i=1}^m [\sigma^+(a_i) + \sigma^-(a_i)] \quad (5.5)$$

$$\text{sujeito a} \quad (5.6)$$

$$\Delta(a_i, a_{i+1}) \geq \delta \text{ se } a_i \succ a_{i+1} \forall i \quad (5.7)$$

$$\Delta(a_i, a_{i+1}) = 0 \text{ se } a_i \sim a_{i+1} \forall i \quad (5.8)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^{\alpha_{kj}-1} w_{kj\ell} = 1, \forall k \quad (5.9)$$

$$w_{kj\ell} \geq 0, \sigma^+(a_i) \geq 0, \sigma^-(a_i) \geq 0, \forall j, \ell \text{ e } i \quad (5.10)$$

Após aplicação do UTASTAR-T, encontramos as utilidades de cada característica para cada critério sob a forma dos pesos  $w_{kj\ell}$ .

### 5.1.1 Exemplo numérico do método UTASTAR-T

70 Para o exemplo numérico, considere o tensor  $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{m \times n \times h}$  apresentado na Tabela 5.1, sendo  $m = 3$  alternativas,  $n = 3$  critérios (supondo que todos os critérios são de maximização) e  $h = 2$  características (média e coeficiente angular). O ordenamento dado pelo decisor é  $a_1 \succ a_2 \succ a_3$ . Este tensor é obtido pela transformação (5.3) que corresponde ao **Passo 1** do algoritmo.

Tabela 5.1 – Exemplo numérico de um tensor  $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{m \times n \times h}$ , considerando as características média e coeficiente angular, três critérios e três alternativas.

| Característica $k$ | Média $k = 1$ |       |       | CA $k = 2$ |       |       |             |
|--------------------|---------------|-------|-------|------------|-------|-------|-------------|
| Critérios $c_j$    | $c_1$         | $c_2$ | $c_3$ | $c_1$      | $c_2$ | $c_3$ | Ordenamento |
| $a_1$              | 3             | 10    | 1     | 4          | 10    | 2     | 1           |
| $a_2$              | 4             | 20    | 2     | 5          | 15    | 1     | 2           |
| $a_3$              | 2             | 11    | 3     | 3          | 11    | 3     | 3           |

75 A escala de valores de cada critério  $j$  para cada característica  $k$ ,  $[c_{jk}^1, c_{jk}^2, \dots, c_{jk}^{\alpha_{kj}}]$ , é obtida como:

$$k = 1 \text{ e } c_1: [c_{11}^1, c_{11}^{\alpha_{11}}] = [2, 3, 4];$$

$$k = 1 \text{ e } c_2: [c_{12}^1, c_{12}^{\alpha_{12}}] = [10, 11, 20];$$

$$k = 1 \text{ e } c_3: [c_{13}^1, c_{13}^{\alpha_{13}}] = [1, 2, 3];$$

80  $k = 2 \text{ e } c_1: [c_{21}^1, c_{21}^{\alpha_{21}}] = [3, 4, 5];$

$$k = 2 \text{ e } c_2: [c_{22}^1, c_{22}^{\alpha_{22}}] = [10, 11, 15];$$

$$k = 2 \text{ e } c_3: [c_{23}^1, c_{23}^{\alpha_{23}}] = [1, 2, 3].$$

Sabendo que a quantidade de diferentes valores que cada critério  $j$  assume em cada característica  $k$  é representada por  $\alpha_{kj}$ , tem-se que  $\alpha_{kj} = 3, \forall k, j$ , ou seja, todos os  
85 valores são diferentes para cada  $k$  e  $j$ .

**Passo 2:** Calcular o valor global das alternativas em termos de utilidade e depois em termos de  $w_{kj\ell}$ :

De acordo com a Equação (5.1), as utilidades  $u[\mathbf{c}(a_i)]$ ,  $\forall i$  são:

$$u[\mathbf{c}(a_1)] = u_{11}(3) + u_{12}(10) + u_{13}(1) + u_{21}(4) + u_{22}(10) + u_{23}(2) \quad (5.11)$$

$$u[\mathbf{c}(a_2)] = u_{11}(4) + u_{12}(20) + u_{13}(2) + u_{21}(5) + u_{22}(15) + u_{23}(1) \quad (5.12)$$

$$u[\mathbf{c}(a_3)] = u_{11}(2) + u_{12}(11) + u_{13}(3) + u_{21}(3) + u_{22}(11) + u_{23}(3). \quad (5.13)$$

Para termos as utilidades em função dos  $w_{kj\ell}$ , consideram-se as Equações (5.2) e (5.4). Para a Equação (5.2), mostramos um exemplo para  $k = 1$ ,  $j = 1$  e  $\ell = 1, \dots, \alpha_{11}$ :

$$w_{111} = u_{11}(c_{11}^2) - u_{11}(c_{11}^1) = u_{11}(3) - u_{11}(2) \quad (5.14)$$

$$w_{112} = u_{11}(c_{11}^3) - u_{11}(c_{11}^2) = u_{11}(4) - u_{11}(3). \quad (5.15)$$

Sendo que, pelas Equações (5.4), sabemos que os valores  $u_{kj}(c_{kj}^1) = 0$ :  $u_{11}(2) = 0$ ,  $u_{12}(10) = 0$ ,  $u_{13}(1) = 0$ ,  $u_{21}(3) = 0$ ,  $u_{22}(10) = 0$  e  $u_{23}(1) = 0$ . É possível então reescrever as Equações (5.14)-(5.15) da forma:

$$w_{111} = u_{11}(c_{11}^2) - u_{11}(c_{11}^1) = u_{11}(3) - 0 = u_{11}(3) \quad (5.16)$$

$$w_{112} = u_{11}(c_{11}^3) - u_{11}(c_{11}^2) = u_{11}(4) - u_{11}(3). \quad (5.17)$$

Pela Equação (5.16), tem-se:  $u_{11}(3) = w_{111}$ . Substituindo o valor de  $u_{11}(3)$  na Equação (5.17) por  $w_{111}$  e isolando  $u_{11}(4)$ , temos:

$$u_{11}(3) = w_{111} \quad (5.18)$$

$$u_{11}(4) = w_{112} + w_{111}. \quad (5.19)$$

Com o qual, podemos substituir  $u_{11}(3) = w_{111}$  na Equação (5.11),  $u_{11}(4) = w_{112} + w_{111}$  na Equação (5.12) e  $u_{11}(2) = 0$  na Equação (5.13). Ao repetir a operação para todos  $k$  e  $j$ , obtemos:

$$\begin{aligned} u[\mathbf{c}(a_1)] &= 1w_{111} + 0w_{112} + 0w_{121} + 0w_{122} + 0w_{131} + 0w_{132} \\ &\quad + 1w_{211} + 0w_{212} + 0w_{221} + 0w_{222} + 1w_{231} + 0w_{232} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} u[\mathbf{c}(a_2)] &= 1w_{111} + 1w_{112} + 1w_{121} + 1w_{122} + 1w_{131} + 0w_{132} \\ &\quad + 1w_{211} + 1w_{212} + 1w_{221} + 1w_{222} + 0w_{231} + 0w_{232} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} u[\mathbf{c}(a_3)] &= 0w_{111} + 0w_{112} + 1w_{121} + 0w_{122} + 1w_{131} + 1w_{132} \\ &\quad + 0w_{211} + 0w_{212} + 1w_{221} + 0w_{222} + 1w_{231} + 1w_{232}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

**Passo 3:** Faça a comparação par a par das alternativas consecutivas no ordenamento e acrescente a função de erro como na Equação (2.44).

Neste passo, subtraímos a Equação (5.20) pela Equação (5.21) e acrescentamos as variáveis erro (obtendo a Equação (5.23)), e depois subtraímos a Equação (5.20) pela Equação (5.21) e acrescentamos as variáveis erro (obtendo a Equação (5.24)):

$$\begin{aligned} \Delta(a_1, a_2) &= -w_{112} - w_{121} - w_{122} - w_{131} - w_{212} - w_{221} - w_{222} + w_{231} \\ &\quad - \sigma^+(a_1) + \sigma^-(a_1) - \sigma^+(a_2) + \sigma^-(a_2) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta(a_2, a_3) &= w_{111} + w_{112} + w_{122} - w_{132} + w_{211} + w_{212} + w_{222} - w_{231} - w_{232} \\ &\quad - \sigma^+(a_2) + \sigma^-(a_2) - \sigma^+(a_3) + \sigma^-(a_3) \end{aligned} \quad (5.24)$$

**Passo 4:** Resolver o problema de otimização em (5.5) - (5.10).

105 Ao aplicar os valores deste exemplo, obtém-se a função objetivo igual a zero,  $z = 0$ , o que indica que é possível encontrar uma solução que atende as preferências do decisor, e obtém-se os valores de  $w_{111} = 1$ ,  $w_{211} = 0,95$  e  $w_{231} = 0,05$ . Calculando os valores das utilidades, temos:

| Média            | CA                 |
|------------------|--------------------|
| $u_{11}(2) = 0$  | $u_{21}(3) = 0$    |
| $u_{11}(3) = 1$  | $u_{21}(4) = 0,95$ |
| $u_{11}(4) = 1$  | $u_{21}(5) = 0,95$ |
| $u_{12}(10) = 0$ | $u_{22}(10) = 0$   |
| $u_{12}(11) = 0$ | $u_{22}(11) = 0$   |
| $u_{12}(20) = 0$ | $u_{22}(15) = 0$   |
| $u_{13}(1) = 0$  | $u_{23}(1) = 0$    |
| $u_{13}(2) = 0$  | $u_{23}(2) = 0,05$ |
| $u_{13}(3) = 0$  | $u_{23}(3) = 0,05$ |

110 Substituindo esses valores nas Equações (5.11), (5.12) e (5.13), obtemos a pontuação final das alternativas:

$$\begin{aligned}
 u[\mathbf{c}(a_1)] &= 1 + 0,95 + 0,05 = 2 \\
 u[\mathbf{c}(a_2)] &= 1 + 0,95 = 1,95 \\
 u[\mathbf{c}(a_3)] &= 0,05,
 \end{aligned}$$

com a qual chega-se a  $u[\mathbf{c}(a_1)] > u[\mathbf{c}(a_2)] > u[\mathbf{c}(a_3)]$ , conforme ordenamento do decisor.

## 5.2 Análise pós-otimização através de uma abordagem multiobjetivo

115 A otimização multiobjetivo é uma área utilizada para encontrar um conjunto de soluções ótimas em um problema em que há mais de um objetivo a ser otimizado e que são conflitantes entre si (MIETTINEN, 2012; CAMPELLO et al., 2020). Neste caso, ao invés de obter uma única solução ótima, como é o caso na otimização mono-objetivo, a abordagem de otimização multiobjetivo busca encontrar diversas soluções. Nesta seção, apresentamos brevemente a técnica de otimização multiobjetivo. Para mais detalhes sobre  
 120 o assunto, sugerimos as referências (COELLO et al., 2007; MIETTINEN, 2012).

É importante destacar que a otimização multiobjetivo é diferente da análise de decisão multicritério, apesar da problemática ser semelhante. A otimização multiobjetivo visa encontrar soluções ótimas em um espaço de decisão geralmente contínuo ou não

enumerável e que envolvem a minimização/maximização simultânea de dois ou mais  
 125 objetivos conflitantes. Enquanto a MCDA é um método de apoio à decisão quando há um  
 número finito de alternativas, explicitamente conhecido no início do processo de solução, e  
 leva em consideração preferências do decisor para obter a solução final.

O problema de otimização multiobjetivo é formulado por:

$$\min f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\} \quad (5.25)$$

s.a

$$x \in \Phi. \quad (5.26)$$

em que  $n \geq 2$ ,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$  é o vetor de funções objetivo,  $f(x) \in \mathbb{R}^n$ ;  
 130  $x = (x_1, x_2, \dots, x_o)^T$  é o vetor de variáveis e  $\Phi$ , subconjunto de  $\mathbb{R}^o$ , é a região factível do  
 espaço de decisão. A Figura 5.2 exemplifica o espaço de decisão  $\Phi$  e o espaço objetivo  $Z$   
 para  $n = 2$ . A linha destacada no espaço objetivo factível é a chamada *Fronteira de Pareto*.  
 As soluções que estão na fronteira de Pareto são aquelas que não podem ser melhoradas  
 em um objetivo sem piorar em outro. Ela é usada para identificar soluções ótimas, ou seja,  
 135 aquelas em que não é possível melhorar o valor de uma função objetivo sem piorar o valor  
 de outra.

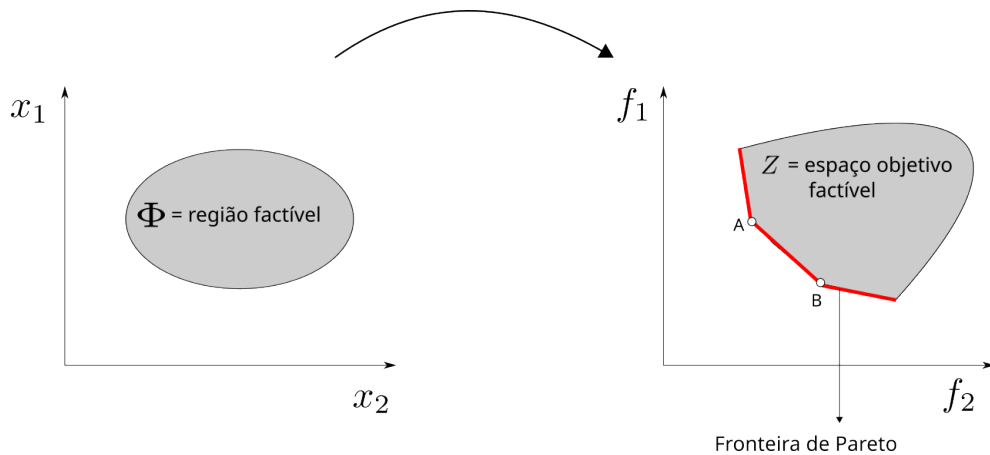


Figura 5.2 – Exemplo de espaço de decisão, espaço objetivo e fronteira de Pareto em problemas de otimização multiobjetivo.

Existem diversos métodos para a resolução de (5.25)-(5.26), tais como os  
 métodos clássicos apresentados em (MIETTINEN, 2012), ou ainda algoritmos evolutivos,  
 encontrados em (COELLO et al., 2007). Neste estudo, utilizamos o método clássico da  
 140 soma ponderada, pois ele tem um conceito simples de entender e é de fácil implementação,  
 garantindo que as soluções encontradas são Pareto-ótimas (MIETTINEN, 2012).

O método da soma ponderada consiste em atribuir pesos  $p_j$ , com  $\sum_{j=1}^n p_j = 1$   
 e  $p_j \in [0, 1]$ , para as  $n$  funções objetivo, transformando o problema em mono-objetivo

ponderado. Assim, para aplicar esse método, reescrevemos (5.25)-(5.26) na forma:

$$\min f(x) = \sum_{j=1}^n p_j f_j(x) \quad (5.27)$$

$$\text{s.a } x \in \Phi. \quad (5.28)$$

145 Desse modo, a cada variação dos valores dos  $p_j$ , uma solução ótima da curva de Pareto é obtida.

Ao associar zero a todos os  $p_j$ , exceto um único  $j$  (por exemplo:  $p_j = 0$ ,  $j = 2, \dots, n$ , então temos  $p_1 = 1$ ), a Equação (5.27) torna-se:

$$\min f(x) = \mathbf{1} \times f_j(x), \quad j = 1, \dots, n \quad (5.29)$$

$$\text{s.a } x \in \Phi, \quad (5.30)$$

o que é equivalente a minimizar cada função objetivo  $f_j$  individualmente, de onde obtém-se  
150 o limitante inferior de cada função, respeitando as Restrições (5.30).

### 5.2.1 Modelo matemático UTASTAR-T multiobjetivo

Na Subseção 2.3.4, apresentamos a proposta do estudo (JACQUET-LAGREZE; SISKOS, 1982) para a análise pós-otimização, a qual consiste em maximizar e minimizar cada função de valor  $u_j(c_j^*)$ ,  $\forall j$ , conforme as Equações (2.52), e calcular a média das  
155 soluções obtidas. Esse processo de maximizar e minimizar cada função de valor é equivalente a obter os limitantes superiores e inferiores de cada função de valor  $j$ , análogo ao que foi feito nas Equações (5.29)-(5.30). Desse modo, no lugar de obter apenas os limitantes das funções de valor e calcular a média, propomos aplicar o método multiobjetivo da soma ponderada, a fim de analisar múltiplas soluções ótimas que as funções de valor podem  
160 assumir.

Para testar a existência de múltiplas soluções ótimas, propomos o seguinte problema multiobjetivo:

$$\begin{aligned} \max F(x) = & (u_{11}(c_{11}), \dots, u_{1n}(c_{1n}), \dots, u_{21}(c_{21}), \dots, u_{2n}(c_{2n}), \\ & \dots, u_{h1}(c_{h1}), \dots, u_{hn}(c_{hn}))^T \end{aligned} \quad (5.31)$$

no poliedro de Restrições (5.7)-(5.10) limitado pela nova restrição:

$$\sum_{i=1}^m [\sigma^+(a_i) + \sigma^-(a_i)] \leq z^* + \epsilon, \quad (5.32)$$

sendo  $z^*$  o valor ótimo obtido ao resolver o Modelo Matemático (5.5)-(5.10) do Passo 4 do  
165 algoritmo UTASTAR-T e  $\epsilon$  um número muito pequeno e positivo.

Para resolver o modelo matemático multiobjetivo, usamos simulação e o método da soma ponderada, atribuindo um peso  $p_j$  a cada  $u_{kj}(c_{kj})$  na função multiobjetivo (5.31), e repetindo 1.000 vezes os seguintes passos:

**Passo 1:** Extraia amostras aleatórias para cada  $p_j$ , como:  $p_j \sim U[0, 1]$ ,  $\forall j$ ;

170 **Passo 2:** Resolva o seguinte Modelo Matemático Multiobjetivo com o método da soma ponderada:

$$\begin{aligned} \max F(x) = & p_1 \times \left( \sum_{k=1}^h u_{kj}(c_{k1}) \right) + p_2 \times \left( \sum_{k=1}^h u_{kj}(c_{k2}) \right) \\ & + \dots + p_n \times \left( \sum_{k=1}^h u_{kn}(c_{kn}) \right), \end{aligned} \quad (5.33)$$

sujeito às Restrições (5.7)-(5.10) e (5.32);

**Passo 3:** Armazene as diferentes soluções do vetor  $\mathbf{w}_k$ ,  $\forall k$ , e o número de ocorrências de cada vetor.

175 Uma vez obtidas as soluções, é possível analisar quantas vezes cada vetor solução  $\mathbf{w}_k$  é obtido na simulação dados os diferentes valores dos  $p_j$ , também pode-se calcular a média ponderada dos valores vetor  $\mathbf{w}_k$ . Além disso, em abordagens de desagregação em MCDA, alguns autores consideram uma possível interação entre o analista e o decisor após a obtenção dos resultados para apresentar, analisar e discutir as soluções obtidas (GRECO; 180 MOUSSEAU; SŁOWIŃSKI, 2010; MARTYN; KADZIŃSKI, 2023). Neste caso, se o decisor fornecer preferências entre os critérios, é possível aplicar uma ordem dos  $p_j$  na simulação. Para tal, considera-se a relevância dos critérios de acordo com a preferência do decisor:  $c_a \succ c_b \succ \dots \succ c_y$ , temos então que o **Passo 1** da simulação torna-se:

**Passo 1 - Com ordenamento:** Extraia amostras aleatórias para o vetor de pesos  $\mathbf{p}$ :

185  $\mathbf{p} \sim U[0, 1]$  e ordene o vetor na forma:  $p_a > p_b > \dots > p_y$ , dado  $c_a \succ c_b \succ \dots \succ c_y$ , obtendo  $\mathbf{p}_{\text{ordenado}} = [p_a, p_b, \dots, p_y]$ .

Após aplicar o **Passo 1 - Com preferência dos critérios**, aplica-se os **Passo 2** e **Passo 3**, obtendo os vetores solução  $\mathbf{w}_k$ ,  $\forall k$ , e o número de ocorrências.

### 5.3 Resultados computacionais e discussão

190 Nesta seção, utilizamos os mesmos dados da Seção 4.1.3, apresentados na Tabela 4.1. Supomos que o ordenamento dado pelo decisor é o mesmo da tabela: Malásia (MY)  $\succ$  Rússia (RU)  $\succ$  Turquia (TR)  $\succ$  Brasil (BR)  $\succ$  China (CN)  $\succ$  Índia (IN)  $\succ$  Indonésia (ID)  $\succ$  México (MX)  $\succ$  Filipinas (PH)  $\succ$  África do Sul (ZA). Supomos também que o decisor considerou duas características relevantes para tomar esta decisão, a média 195 e o coeficiente angular.

Tabela 5.2 – Resultado das variáveis  $w_{kj\ell}$  obtido após aplicar o UTASTAR-T.

| Característica      | $w_{kj\ell}$ | Valor |
|---------------------|--------------|-------|
| Média               | $w_{113}$    | 0,10  |
|                     | $w_{137}$    | 0,05  |
|                     | $w_{138}$    | 0,85  |
| Coeficiente angular | $w_{212}$    | 0,60  |
|                     | $w_{217}$    | 0,20  |
|                     | $w_{222}$    | 0,05  |
|                     | $w_{234}$    | 0,15  |

Nosso objetivo é analisar as preferências do decisor com base no ordenamento dado, aplicando o método UTASTAR-T. Assim, primeiro realizamos uma transformação espacial do espaço temporal, exibido na Tabela 4.1, para o espaço de características, apresentado na Tabela 4.2. Então, aplicando o método UTASTAR-T, obtemos uma solução  
 200 ótima: função objetivo  $z^* = 0$ , sendo que as variáveis  $w_{kj\ell}$  são apresentadas na Tabela 5.2. É importante notar que, como  $z^* = 0 \implies \sigma^+(a_i) = \sigma^-(a_i) = 0$ , o que significa que há pelo menos uma solução que explica a preferência do decisor. A partir dos resultados de  $w_{kj\ell}$  da Tabela 5.2, obtemos as funções de valor marginal. Estas utilidades marginais podem ser normalizadas dividindo cada função de valor,  $u_{kj}(c_{kj}^\ell)$ , pelo melhor valor da  
 205 função de valor,  $u_{kj}(c_{kj}^*)$ . As funções de valor marginal normalizadas são apresentadas nas Figuras 5.3 e 5.4. Além disso, as utilidades de cada alternativa são:

$$\begin{aligned}
 u[\mathbf{c}(\text{MY})] &= 1,80 & u[\mathbf{c}(\text{IN})] &= 0,85 \\
 u[\mathbf{c}(\text{RU})] &= 1,20 & u[\mathbf{c}(\text{ID})] &= 0,80 \\
 u[\mathbf{c}(\text{TR})] &= 1,15 & u[\mathbf{c}(\text{MX})] &= 0,75 \\
 u[\mathbf{c}(\text{BR})] &= 1,10 & u[\mathbf{c}(\text{PH})] &= 0,70 \\
 u[\mathbf{c}(\text{CN})] &= 0,90 & u[\mathbf{c}(\text{ZA})] &= 0,00
 \end{aligned}$$

Pela Tabela 5.2 observamos que é possível analisar as preferências do decisor em termos de características e critérios. Por exemplo, observamos que o  $c_2$  (educação) teve  
 210 menor relevância no ordenamento que o  $c_1$  (expectativa de vida) e  $c_3$  (renda nacional bruta per capita), uma vez que seu peso é menor para todas as características. Também, o  $c_2$  (educação) é mais relevante em termos de tendência do que em termos de média. A média do  $c_3$  (Renda bruta per capita) é mais relevante que a do  $c_1$  (expectativa de vida), mas a tendência do  $c_1$  (expectativa de vida) é mais relevante que a do  $c_3$  (renda nacional bruta  
 215 per capita). As mesmas análises podem ser feitas a partir das funções de valor ilustradas nas Figuras 5.3 e 5.4.

Além disso, as Figuras 5.3 e 5.4 também permitem analisar o comportamento das curvas de utilidade de cada característica e cada critério. Por exemplo, em termos de média, o  $c_1$  apresenta inicialmente utilidades nulas para os três valores mais baixos e o  
 220 valor máximo para valores mais altos. Para o  $c_3$ , as utilidades são nulas para quase todos



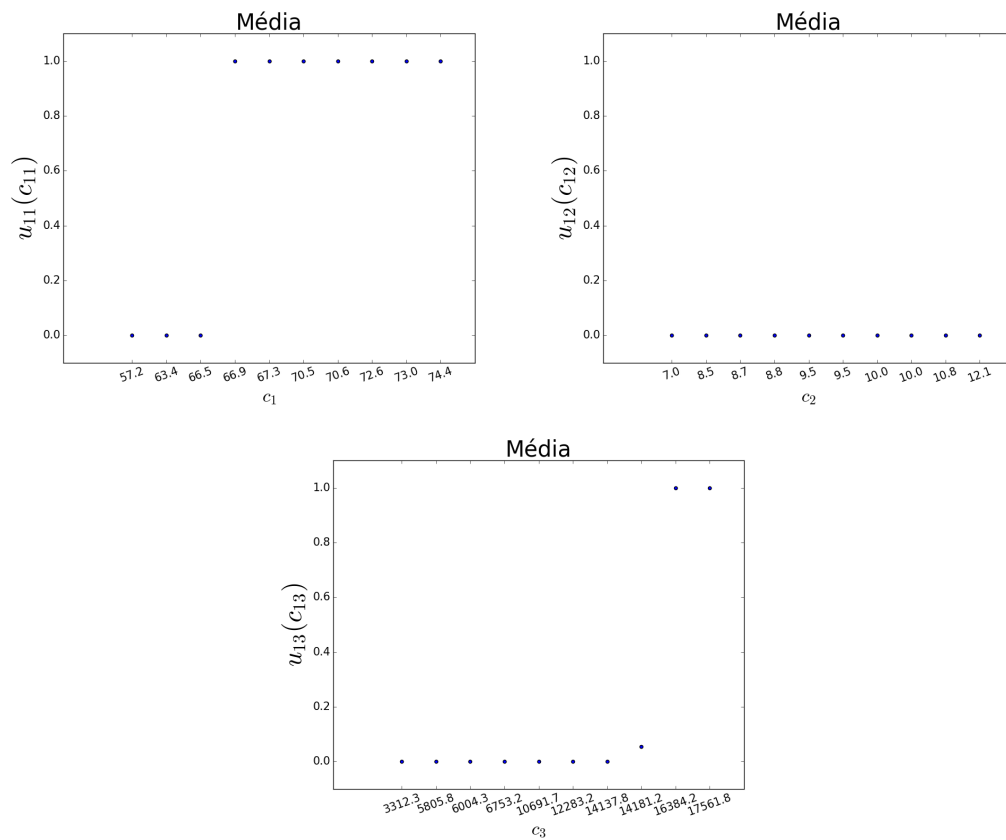


Figura 5.3 – Funções de valor da característica 1: média.

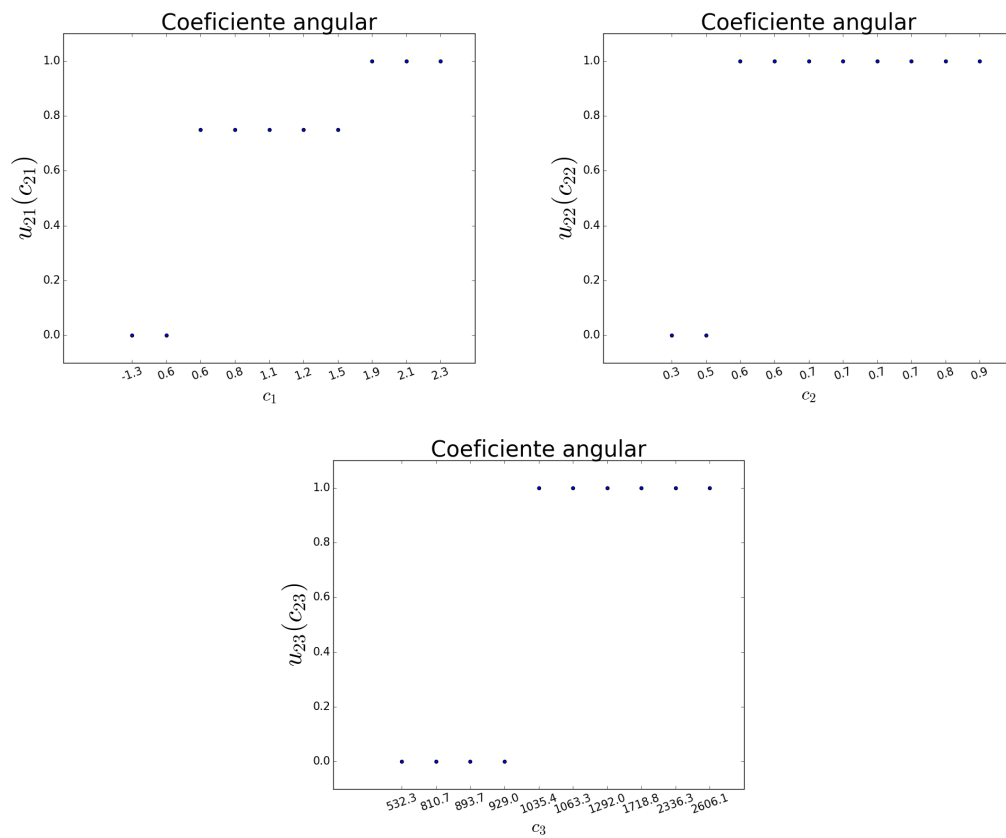


Figura 5.4 – Funções de valor da característica 2: coeficiente angular.

os valores, exceto para os três últimos.

Tabela 5.3 – Resultado das variáveis  $w_{kjl}$  e suas ocorrências obtido na simulação análise pós-otimização multiobjetivo.

| $k$         | $c_j$ | $w_{kjl}$ | Valor     |      |      |       |       |      |       | MP    |         |      |
|-------------|-------|-----------|-----------|------|------|-------|-------|------|-------|-------|---------|------|
| Ocorrência: |       |           | 97        | 167  | 69   | 156   | 187   | 53   | 109   | 162   | = 1.000 |      |
| Média       | $c_1$ | $w_{111}$ | 0.0       | 0.0  | 0.0  | 0.0   | 0.1   | 0.55 | 0.7   | 0.7   | 0.24    |      |
|             |       | $w_{112}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,1  | 0,0   | 0,0   | 0,01    |      |
|             |       | $w_{113}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,0   | 0,1   | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,02    |      |
|             | $c_2$ | $w_{123}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,325 | 0,275 | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,10    |      |
|             |       | $w_{124}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,15  | 0,0   | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,02    |      |
|             |       | $w_{126}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,0  | 0,05  | 0,0   | 0,01    |      |
|             |       | $w_{127}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,0   | 0,15  | 0,35 | 0,25  | 0,0   | 0,07    |      |
|             |       | $w_{129}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,475 | 0,375 | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,14    |      |
|             |       | $c_3$     | $w_{135}$ | 0,05 | 0,05 | 0,1   | 0,0   | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,0     | 0,02 |
|             |       |           | $w_{137}$ | 0,75 | 0,75 | 0,65  | 0,05  | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,05    | 0,26 |
| $w_{138}$   | 0,2   |           | 0,2       | 0,25 | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,0  | 0,225 | 0,11  |         |      |
| CA          | $c_1$ | $w_{211}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,7  | 0,7   | 0,75  | 0,23    |      |
|             |       | $w_{213}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,05 | 0,05  | 0,05  | 0,02    |      |
|             |       | $w_{216}$ | 0,1       | 0,1  | 0,05 | 0,0   | 0,0   | 0,1  | 0,1   | 0,075 | 0,06    |      |
|             |       | $w_{217}$ | 0,0       | 0,05 | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,05 | 0,0   | 0,05  | 0,02    |      |
|             |       | $w_{218}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,05  | 0,05  | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,02    |      |
|             | $c_2$ | $w_{219}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,05 | 0,1   | 0,0   | 0,01    |      |
|             |       | $w_{222}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,275 | 0,525 | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,14    |      |
|             |       | $w_{224}$ | 0,0       | 0,0  | 0,0  | 0,525 | 0,425 | 0,05 | 0,0   | 0,0   | 0,16    |      |
|             |       | $w_{225}$ | 0,05      | 0,0  | 0,15 | 0,0   | 0,0   | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,02    |      |
|             |       | $c_3$     | $w_{231}$ | 0,75 | 0,7  | 0,7   | 0,05  | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,0     | 0,25 |
| $w_{234}$   | 0,05  |           | 0,1       | 0,0  | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,05 | 0,075 | 0,04  |         |      |
| $w_{236}$   | 0,0   |           | 0,0       | 0,05 | 0,1  | 0,0   | 0,0   | 0,0  | 0,0   | 0,02  |         |      |
| $w_{239}$   | 0,05  |           | 0,05      | 0,05 | 0,0  | 0,0   | 0,0   | 0,0  | 0,0   | 0,02  |         |      |

Para a análise multiobjetivo, elaboramos as Tabelas 5.3 e 5.4 e as figuras 5.5 e 5.6. A Tabela 5.3 indica os resultados da análise pós-otimização multiobjetivo. A primeira coluna indica a característica  $k$ , a segunda o critério  $c_j$  e a terceira os valores de  $w_{kjl}$  que foram diferentes de zero em pelo menos um resultado da simulação. As oito seguintes colunas representam os resultados dos  $w_{kjl}$  e quantas vezes esse mesmo resultado ocorreu na simulação. Por fim, a última coluna mostra a média ponderada dos valores dos  $w_{kjl}$  nas mil simulações. As Figuras 5.5 e 5.6 ilustram o resultado da média ponderada (da Tabela 5.3) em forma de gráficos. Por fim, a Tabela 5.4 apresenta os resultados da análise pós-otimização multiobjetivo, sendo que agora com o **Passo 1 - Com preferência dos critérios**, mantendo-se passos 2 e 3 da Subseção 5.2.1.

A primeira observação a respeito da Tabela 5.3 é que os valores de cada  $w_{kjl}$  podem variar bastante. Por exemplo, a variável  $w_{111}$  pode ter seu valor passando de 0 à 0,7, enquanto  $w_{137}$  varia entre 0,75 e 0. Para entender melhor essa variação dos  $w_{kjl}$ , pode-se

Tabela 5.4 – Resultado das variáveis  $w_{kjl}$  e suas ocorrências obtidos na simulação da análise pós-otimização multiobjetivo quando há uma ordem de relevância dos critérios.

| Ocor. | $c_1 \succ c_2 \succ c_3$ |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|-------|---------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|       | $w_{111}$                 | $w_{112}$ | $w_{126}$ | $w_{127}$ | $w_{211}$ | $w_{213}$ | $w_{216}$ | $w_{217}$ | $w_{219}$ | $w_{224}$ | $w_{234}$ |
| 338   | 0,55                      | 0,1       | 0,00      | 0,35      | 0,7       | 0,05      | 0,1       | 0,05      | 0,05      | 0,05      | 0,00      |
| 662   | 0,70                      | 0,0       | 0,05      | 0,25      | 0,7       | 0,05      | 0,1       | 0,00      | 0,10      | 0,00      | 0,05      |
| Ocor. | $c_1 \succ c_3 \succ c_2$ |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|       | $w_{111}$                 | $w_{113}$ | $w_{137}$ | $w_{138}$ | $w_{211}$ | $w_{213}$ | $w_{216}$ | $w_{217}$ | $w_{234}$ |           |           |
| 1000  | 0,7                       | 0,025     | 0,05      | 0,225     | 0,75      | 0,05      | 0,075     | 0,05      | 0,075     |           |           |
| Ocor. | $c_2 \succ c_1 \succ c_3$ |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|       | $w_{111}$                 | $w_{113}$ | $w_{123}$ | $w_{127}$ | $w_{129}$ | $w_{218}$ | $w_{222}$ | $w_{224}$ |           |           |           |
| 1000  | 0,1                       | 0,1       | 0,275     | 0,15      | 0,375     | 0,05      | 0,525     | 0,425     |           |           |           |
| Ocor. | $c_2 \succ c_3 \succ c_1$ |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|       | $w_{123}$                 | $w_{124}$ | $w_{129}$ | $w_{137}$ | $w_{218}$ | $w_{222}$ | $w_{224}$ | $w_{231}$ | $w_{236}$ |           |           |
| 1000  | 0,325                     | 0,15      | 0,475     | 0,05      | 0,05      | 0,275     | 0,525     | 0,05      | 0,1       |           |           |
| Ocor. | $c_3 \succ c_1 \succ c_2$ |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|       | $w_{135}$                 | $w_{137}$ | $w_{138}$ | $w_{216}$ | $w_{217}$ | $w_{231}$ | $w_{234}$ | $w_{239}$ |           |           |           |
| 1000  | 0,05                      | 0,75      | 0,2       | 0,1       | 0,05      | 0,7       | 0,1       | 0,05      |           |           |           |
| Ocor. | $c_3 \succ c_2 \succ c_1$ |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|       | $w_{135}$                 | $w_{137}$ | $w_{138}$ | $w_{216}$ | $w_{225}$ | $w_{231}$ | $w_{234}$ | $w_{236}$ | $w_{239}$ |           |           |
| 678   | 0,05                      | 0,75      | 0,20      | 0,10      | 0,05      | 0,75      | 0,05      | 0,00      | 0,05      |           |           |
| 322   | 0,10                      | 0,65      | 0,25      | 0,05      | 0,15      | 0,70      | 0,00      | 0,05      | 0,05      |           |           |

235 fazer uma análise dos  $w_{111}$  e  $w_{137}$  na Tabela 5.4. Percebemos que de  $w_{111}$  só é positivo e assume um valor relativamente alto quando  $c_1$  é o critério mais relevante. Quando temos  $c_2 \succ c_1 \succ c_3$ ,  $w_{111} = 0,10$  e, nos demais casos,  $w_{111} = 0$ . Com relação à variável  $w_{137}$ , observa-se que ela é positiva e assume um valor relativamente alto quando  $c_3$  é o critério mais relevante, sendo pouco significativo ou nula nos demais casos. Desse modo, essa

240 grande variação dos  $w_{kjl}$  na Tabela 5.3 deve-se à ordem em que os  $p_j$  são obtidos no **Passo 1** da proposta multiobjetivo. Assim, percebemos que os valores dos  $w_{kjl}$  na Tabela 5.3 estão, de certo modo, "agrupados" como na Tabela 5.4. Note, pela Tabela 5.3, que os  $w_{kjl}$  do  $c_1$  assumem valores positivos e relativamente altos nas últimas 3 colunas, com ocorrências 53, 109 e 162, que totalizam 324 ocorrências (aproximadamente 1/3 das ocorrências totais);

os  $w_{kjl}$  do  $c_2$  têm valores positivos e relativamente altos nas colunas com ocorrências 156 e 187, totalizando 343 ocorrências (aproximadamente 1/3 das ocorrências totais); os  $w_{kjl}$  do  $c_3$  têm valores positivos e relativamente altos nas colunas com ocorrências 97, 167, 69, totalizando 333 ocorrências (aproximadamente 1/3 das ocorrências totais). Dessa análise podemos concluir que, para os dados analisados, os valores dos  $w_{kjl}$  são muito

250 sensíveis com relação a qual função de valor está sendo maximizada, o que mostra que obter os limitantes superiores e inferiores e tirar média pode não ser representativo das

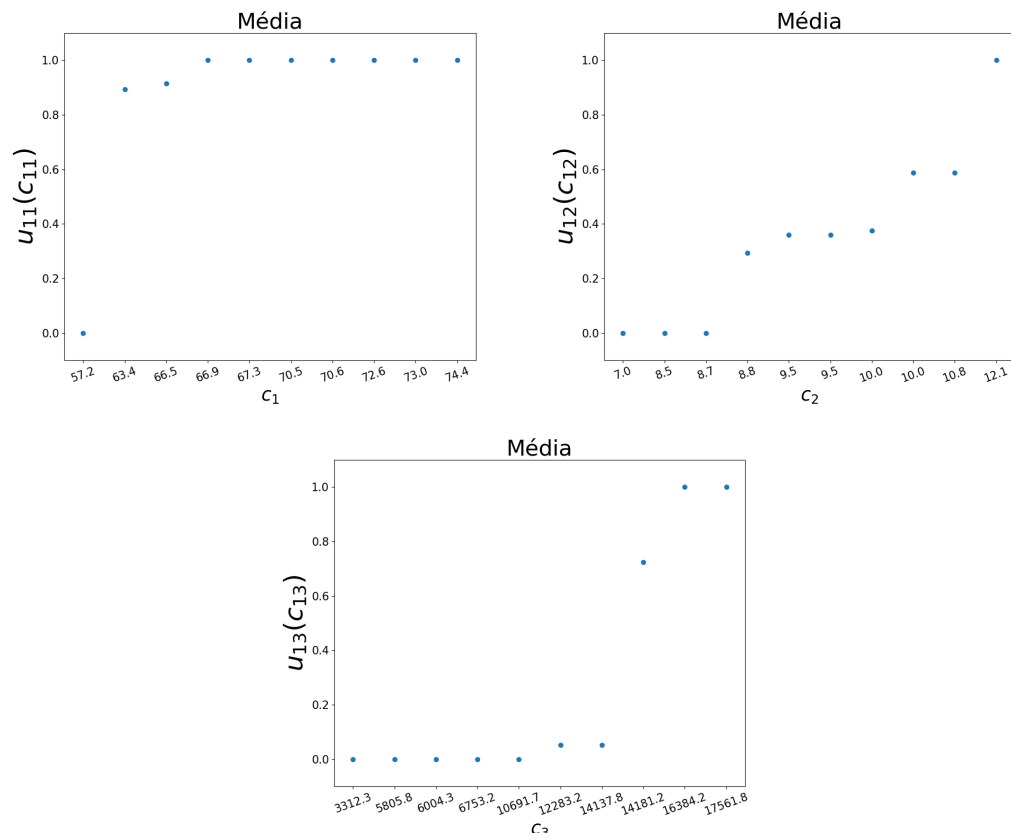


Figura 5.5 – Funções de valor da característica 1: média.

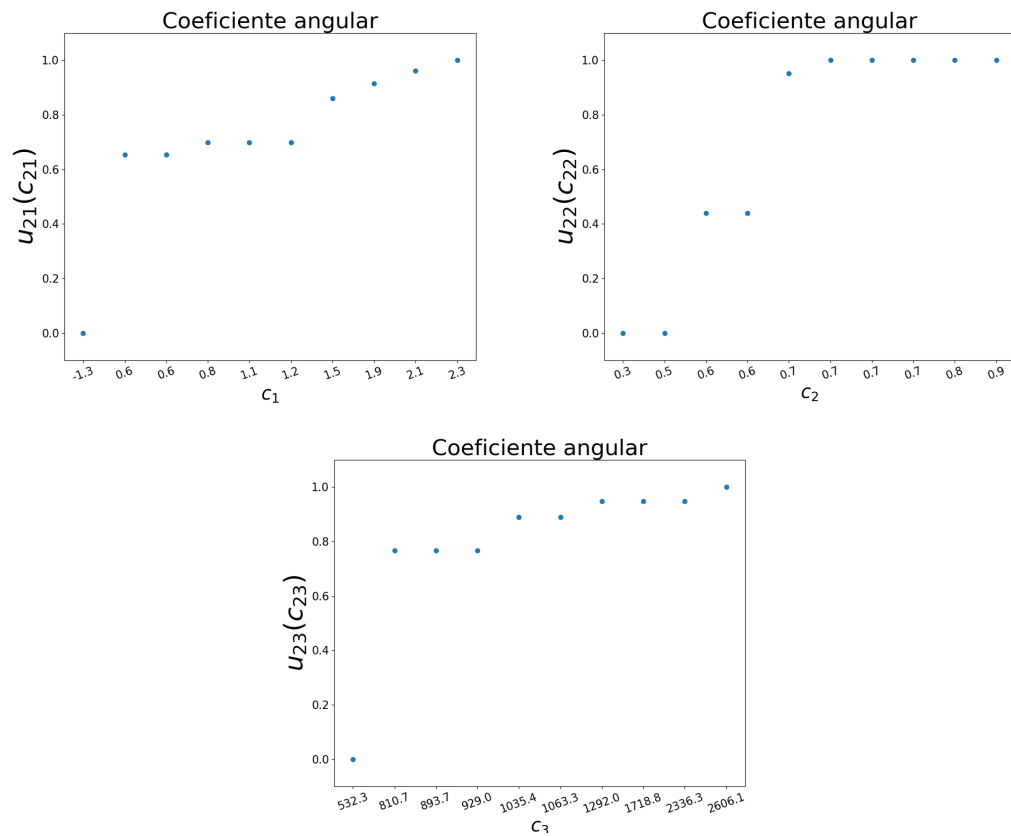


Figura 5.6 – Funções de valor da característica 2: coeficiente angular.

preferências do decisor. De fato, neste caso, vemos que há uma grande perda de informação se considerarmos apenas a média ponderada.

A análise da Tabela 5.4 expõe que, se for possível entender preferências do decisor com relação a relevância dos critérios, então é possível achar uma convergência nos resultados. Em alguns casos há 100% de convergência dos valores dos  $w_{kjl}$ , como por exemplo quando  $c_1 \succ c_3 \succ c_2$ , pois, nas 1.000 simulações, os valores dos  $w_{kjl}$  foram sempre os mesmos. É interessante notar que essa convergência se dá apenas com uma ordem dos  $p_j$ , independente dos valores que podem assumir. Além disso, mesmo nos casos em que não houve convergência de 100%, como em  $c_1 \succ c_2 \succ c_3$ , os valores são muito parecidos.

Por fim, observamos que as Figuras 5.5 e 5.6, que ilustram a média ponderada dos resultados, são bem diferentes das obtidas apenas na otimização do UTASTAR-T, correspondente às Figuras 5.3 e 5.4 (sem considerar o modelo multiobjetivo). Com isto, podemos concluir que considerar apenas a solução do modelo UTASTAR-T, sem a análise pós-otimização, não é representativo das preferências do decisor.

## 5.4 Sumário da proposta de desagregação com estruturas tensoriais

Nesta contribuição objetivamos a análise de preferências em decisões envolvendo múltiplos critérios a partir de uma abordagem tensorial. A principal novidade é obter as funções de valor do decisor considerando as características das séries temporais associadas à evolução dos critérios. Foi proposto o método UTASTAR-T, para a desagregação do tensor, e um método multiobjetivo para a análise de pós-otimização.

Os resultados computacionais mostram que é possível analisar as preferências do decisor em termos de característica e de critérios. Discutimos como as preferências do decisor podem ser diferentes em termos de média e coeficiente angular, dado um mesmo critério. Por exemplo, vimos que a tendência do Critério 2 é mais importante que sua média. Além disso, é possível fazer uma análise dentro do conjunto dos critérios, independente das características. Como por exemplo, os resultados indicam que o Critério 2 tem menos relevância que os critérios 1 e 3.

Quanto à proposta da análise multiobjetivo para a pós-otimização, vimos que é possível obter diferentes vetores soluções, em alguns casos com valores bastante diferentes. Concluimos que, dependendo do problema, tirar a média dos limitantes superiores e inferiores das funções de valor não é representativo das preferências do decisor. Isto expõe a importância da análise multiobjetivo pois, através dela, obtém-se essas múltiplas soluções que permitem uma discussão entre o analista e o decisor, verificando qual se adapta melhor às preferências do decisor. Além disso, a análise mostra que, se o decisor fornece uma ordem de preferência entre os critérios, há uma melhor convergência nas soluções.

Por fim, acreditamos que a proposta de desagregação do espaço de atributos permite uma análise mais completa das preferências do decisor. Essa análise pode ser ampliada para mais características, se necessário. Para trabalhos futuros é interessante  
290 aplicar a abordagem em um caso de estudo real.

## 6 Conclusões

A principal contribuição desta tese de doutorado foi introduzir a análise temporal na problemática da decisão multicritério e estruturar os dados do problema na forma tensorial. Discutimos a importância de considerar as séries temporais dos critérios e citamos algumas aplicações em que esta abordagem pode ser útil. A partir dessa perspectiva, propusemos tratar o tensor com as séries temporais em duas principais abordagens, a agregação e a desagregação do tensor. Na abordagem de agregação, utilizamos tanto medidas descritivas das séries temporais, quanto um método de predição adaptativa para obter o ordenamento das alternativas. Na desagregação, propusemos um novo método, chamado de UTASTAR-T, para analisar as preferências do decisor. Aplicamos o método multiobjetivo da soma ponderada para obter as diversas soluções ótimas do UTASTAR-T.

Os resultados computacionais das metodologias propostas na abordagem de agregação mostraram que, ao considerar as séries temporais, é possível obter diferentes soluções (ordenamentos), as quais podem ser mais apropriadas para certas decisões. Mais especificamente, a metodologia do espaço de características traz mudanças nos ordenamentos das alternativas, comparado com utilizar apenas dados atuais. Essa metodologia traz uma análise mais completa e pode considerar melhor as preferências do decisor, dependendo do contexto da problemática. Na metodologia da predição adaptativa, os resultados mostraram que, para os dados utilizados, o ordenamento de predição está mais próximo do ordenamento de referência do que utilizando os dados atuais. Essa metodologia é útil quando as decisões devem ser tomadas no presente, porém, analisando consequências futuras. Por fim, concluímos que a metodologia que utiliza a predição adaptativa e o espaço de característica dos sinais futuros é relevante quando se está lidando com séries temporais não-estacionárias.

Com relação à abordagem de desagregação, vimos que é possível analisar as preferências do decisor da perspectivas das características e dos critérios. Em alguns casos, vimos que a tendência de um critério pode ser mais relevante que a média deste mesmo critério, por exemplo. Além disso, mostramos que a proposta multiobjetivo é interessante para analisar algumas das diferentes soluções. Se for possível uma maior interação com o decisor, é possível convergir para uma ou duas soluções ótimas que descrevem as preferências do decisor.

Desse modo, acreditamos que mais estudos em MCDA devem considerar a análise temporal para abarcar novas problemáticas da decisão e aumentar as possibilidades de aplicações na área.

## 35 6.1 Perspectivas de trabalhos futuros

Apesar de termos lidado com a temporalidade em MCDA utilizando mais de um método, acreditamos que este estudo ainda apresenta algumas limitações que podem ser tratadas em trabalhos futuros. Primeiramente percebemos que os métodos MCDA que utilizamos não tratam das possíveis interações entre a terceira dimensão do tensor do espaço de características. Entretanto, as características podem apresentar redundâncias ou sinergias que devem ser levadas em consideração. Por exemplo, a tendência e a variância podem ser redundantes (alto valor da tendência implica alto valor da variância), e a tendência e a média podem ter sinergia (pode ser importante para o decisor que o critério apresente alta tendência com média alta). Além disso, pode-se estudar interações entre as diferentes dimensões do tensor (correlações entre as séries temporais) que devem ser tratadas. É possível, então, estender este estudo utilizando métodos para tratar essas interações, como o da integral de Choquet ([GRABISCH; LABREUCHE, 2008](#)), que modela interações de sinergia e redundância entre critérios, bem como métodos de aprendizado de máquina para encontrar correlações entre os sinais.

Outra limitação deste estudo é que, ao aumentar a quantidade de informações envolvidas na decisão, obtém-se soluções mais completas, porém, o problema se torna mais complexo. Uma consequência da complexidade é que faz-se necessário uma maior interação entre o decisor e o analista, que muitas vezes não é possível, ou o próprio decisor não é capaz de descrever suas preferências ou de fornecer um exemplo de decisão. Esta limitação pode ser tratada com o apoio de métodos de aprendizado de máquina, que fazem uma análise mais voltadas a dados, ajudando o decisor a descrever suas preferências. Portanto, presente tese abre perspectivas a serem trabalhadas na abordagem com múltiplas dimensões no problema de apoio à decisão multicritério.



## Referências

- ABDI, H. The kendall rank correlation coefficient. *Encyclopedia of Measurement and Statistics*. Sage, Thousand Oaks, CA, Citeseer, p. 508–510, 2007. Citado na página 40.
- AGGARWAL, M. Attitude-based entropy function and applications in decision-making. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 104, p. 104290, 2021. Citado na página 76.
- AIRES, R. F. de F.; FERREIRA, L. A new approach to avoid rank reversal cases in the topsis method. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 132, p. 84–97, 2019. Citado na página 34.
- AL-SHEMMERI, T.; AL-KLOUB, B.; PEARMAN, A. Model choice in multicriteria decision aid. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 97, n. 3, p. 550–560, 1997. Citado na página 28.
- ALAALI, F. The effect of oil and stock price volatility on firm level investment: The case of uk firms. *Energy Economics*, Elsevier, v. 87, p. 104731, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- ALMEIDA, A. L. *Tensor modeling and signal processing for wireless communication systems*. Tese (Doutorado) — Université de Nice Sophia Antipolis, 2007. Citado na página 57.
- ANGILELLA, S.; CORRENTE, S.; GRECO, S. Stochastic multiobjective acceptability analysis for the choquet integral preference model and the scale construction problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 240, n. 1, p. 172–182, 2015. Citado na página 50.
- ANGILELLA, S.; GRECO, S.; MATARAZZO, B. Non-additive robust ordinal regression: A multiple criteria decision model based on the choquet integral. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 201, n. 1, p. 277–288, 2010. Citado na página 29.
- ATELLA, V.; ATZENI, G. E.; BELVISI, P. L. Investment and exchange rate uncertainty. *Journal of Policy Modeling*, Elsevier, v. 25, n. 8, p. 811–824, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- BANAMAR, I. An interpolation-based method for the time weighed vector elicitation in temporal promethee ii applications. *International Journal of Multicriteria Decision Making*, Inderscience Publishers (IEL), v. 8, n. 1, p. 84–103, 2019. Citado na página 52.
- BANAMAR, I.; SMET, Y. D. An extension of PROMETHEE II to temporal evaluations. *International Journal of Multicriteria Decision Making*, Inderscience Publishers (IEL), v. 7, n. 3-4, p. 298–325, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 10, 52, 54, 72 e 73.
- BANDTE, O. *A probabilistic multi-criteria decision making technique for conceptual and preliminary aerospace systems design*. Tese (Doutorado) — School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, 2000. Citado na página 76.

- BARRON, F. H. Selecting a best multiattribute alternative with partial information about attribute weights. *Acta psychologica*, Elsevier, v. 80, n. 1-3, p. 91–103, 1992. Citado na página [28](#).
- BAUMANN, M. et al. A review of multi-criteria decision making approaches for evaluating energy storage systems for grid applications. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Elsevier, v. 107, p. 516–534, 2019. Citado na página [24](#).
- BEHZADIAN, M. et al. PROMETHEE: A comprehensive literature review on methodologies and applications. *European journal of Operational research*, Elsevier, v. 200, n. 1, p. 198–215, 2010. Citado na página [34](#).
- BEHZADIAN, M. et al. A state-of the-art survey of TOPSIS applications. *Expert Systems with applications*, Elsevier, v. 39, n. 17, p. 13051–13069, 2012. Citado na página [31](#).
- BELACEL, N. Multicriteria assignment method proaftn: Methodology and medical application. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 125, n. 1, p. 175–183, 2000. Citado na página [23](#).
- BLANCO, V.; SALMERÓN, R.; GÓMEZ-HARO, S. A multicriteria selection system based on player performance: Case study—the spanish acb basketball league. *Group Decision and Negotiation*, Springer, v. 27, n. 6, p. 1029–1046, 2018. Citado na página [23](#).
- BOBILLO, I. J. D. A tensor approach to heart sound classification. In: IEEE. *2016 Computing in Cardiology Conference (CinC)*. [S.l.], 2016. p. 629–632. Citado na página [57](#).
- BOUYSSOU, D. et al. *Evaluation and decision models with multiple criteria: Stepping stones for the analyst*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 86. Citado na página [24](#).
- BRANS, J. L'ingénierie de la décision; Elaboration d'instruments d'aide à la décision. La méthode PROMETHEE. *Presses de l'Université Laval*, Québec, Canada, p. 183–213, 1982. Citado na página [34](#).
- BRANS, J. P.; MARESCHAL, B. PROMETHEE methods. In: *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 163–186. Citado na página [34](#).
- BRANS, J.-P.; VINCKE, P.; MARESCHAL, B. How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 24, n. 2, p. 228–238, 1986. Citado 2 vezes nas páginas [28](#) e [35](#).
- BRESSER-PEREIRA, L. C.; OREIRO, J. L.; MARCONI, N. *Developmental Macroeconomics: new developmentalism as a growth strategy*. [S.l.]: Routledge, 2014. Citado 2 vezes nas páginas [53](#) e [54](#).
- BUSH, G.; NORIA, G. L. Uncertainty and exchange rate volatility: Evidence from mexico. *International Review of Economics & Finance*, Elsevier, v. 75, p. 704–722, 2021. Citado 2 vezes nas páginas [53](#) e [54](#).
- BUTLER, R. W. Seasonality in tourism: Issues and implications. In: *Seasonality in tourism*. [S.l.]: Routledge, 2001. p. 5–21. Citado na página [54](#).

- CALVI, G. G.; LUCIC, V.; MANDIC, D. P. Support tensor machine for financial forecasting. In: IEEE. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process (ICASSP)*. [S.l.], 2019. p. 8152–8156. Citado na página 57.
- CAMPELLO, B. S. et al. A multiobjective integrated model for lot sizing and cutting stock problems. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 71, n. 9, p. 1466–1478, 2020. Citado na página 104.
- CARROLL, J. D.; CHANG, J.-J. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of “eckart-young” decomposition. *Psychometrika*, v. 35, n. 3, p. 283–319, Sep 1970. ISSN 1860-0980. Citado na página 57.
- CASTRO-LOPEZ, A. et al. Evaluating critical success factors in the permanence in higher education using multi-criteria decision-making. *Higher Education Research & Development*, Taylor & Francis, v. 41, n. 3, p. 628–646, 2022. Citado na página 24.
- CHEN, T.-Y. The inclusion-based TOPSIS method with interval-valued intuitionistic fuzzy sets for multiple criteria group decision making. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 26, p. 57–73, 2015. Citado na página 31.
- CHRYSSOLOURIS, G.; LEE, M.; RAMSEY, A. Confidence interval prediction for neural network models. *IEEE Transactions on Neural Networks*, IEEE, v. 7, n. 1, p. 229–232, 1996. Citado na página 78.
- CICHOCKI, A. et al. Tensor decompositions for signal processing applications: From two-way to multiway component analysis. *IEEE Signal Processing Magazine*, IEEE, v. 32, n. 2, p. 145–163, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.
- COELLO, C. A. C. et al. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. [S.l.]: Springer, 2007. v. 5. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 105.
- CORRENTE, S. et al. Robust ordinal regression in preference learning and ranking. *Machine Learning*, Springer, v. 93, n. 2, p. 381–422, 2013. Citado na página 50.
- CORRENTE, S. et al. Inducing probability distributions on the set of value functions by subjective stochastic ordinal regression. *Knowledge-Based Systems*, Elsevier, v. 112, p. 26–36, 2016. Citado na página 50.
- COSTA, C. A. B. *Readings in multiple criteria decision aid*. Lisbon, Portugal: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 16.
- COSTA, M. N.; FAVIER, G.; ROMANO, J. M. T. Tensor modelling of mimo communication systems with performance analysis and kronecker receivers. *Signal Processing*, Elsevier, v. 145, p. 304–316, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 57.
- DASH, R. et al. An integrated TOPSIS crow search based classifier ensemble: In application to stock index price movement prediction. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 85, p. 105784, 2019. Citado na página 31.
- DOUMPOS, M.; ZOPOUNIDIS, C. The use of the preference disaggregation analysis in the assessment of financial risks. *Fuzzy Economic Review*, Reus (Tarragona): SIGEF, v. 3, n. 1, p. 3, 1998. Citado na página 23.

- DOUMPOS, M.; ZOPOUNIDIS, C. Regularized estimation for preference disaggregation in multiple criteria decision making. *Computational Optimization and Applications*, Springer, v. 38, n. 1, p. 61–80, 2007. Citado na página 50.
- DOUMPOS, M.; ZOPOUNIDIS, C. Data-driven robustness analysis for multicriteria classification problems using preference disaggregation approaches. In: *Robustness analysis in decision aiding, optimization, and analytics*. [S.l.]: Springer, 2016. p. 21–37. Citado na página 50.
- DOUMPOS, M.; ZOPOUNIDIS, C. Preference disaggregation for multicriteria decision aiding: An overview and perspectives. In: *New Perspectives in Multiple Criteria Decision Making*. [S.l.]: Springer, 2019. p. 115–130. Citado 6 vezes nas páginas 16, 27, 41, 42, 46 e 49.
- DUARTE, L. T.; MUSSIO, A. P.; TOREZZAN, C. Dealing with missing information in data envelopment analysis by means of low-rank matrix completion. *Annals of Operations Research*, Springer, p. 1–14, 2018. Citado na página 40.
- FRAZÃO, T. D. et al. Multicriteria decision analysis (mcda) in health care: a systematic review of the main characteristics and methodological steps. *BMC medical informatics and decision making*, Springer, v. 18, n. 1, p. 1–16, 2018. Citado na página 23.
- FRENCH, S.; MAULE, J.; PAPAMICHAIL, N. *Decision behaviour, analysis and support*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado na página 46.
- FRINI, A.; BENAMOR, S. A TOPSIS multi-criteria multi-period approach for selecting projects in sustainable development context. In: IEEE. *Industrial Engineering and Operations Management (IEOM), 2015 International Conference on*. [S.l.], 2015. p. 1–9. Citado 3 vezes nas páginas 28, 31 e 52.
- FRINI, A.; BENAMOR, S. Making decisions in a sustainable development context: A state-of-the-art survey and proposal of a multi-period single synthesizing criterion approach. *Computational Economics*, Springer, p. 1–45, 2017. Citado na página 92.
- FRINI, A.; BENAMOR, S. Mupom: A multi-criteria multi-period outranking method for decision-making in sustainable development context. *Environmental Impact Assessment Review*, Elsevier, v. 76, p. 10–25, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 24, 28 e 52.
- GARCÍA-CASCALES, M. S.; LAMATA, M. T. On rank reversal and topsis method. *Mathematical and computer modelling*, Elsevier, v. 56, n. 5-6, p. 123–132, 2012. Citado na página 34.
- GOCHET, W. et al. Multigroup discriminant analysis using linear programming. *Operations Research*, INFORMS, v. 45, n. 2, p. 213–225, 1997. Citado na página 23.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix computations*. [S.l.]: JHU press, 2013. Citado na página 62.
- GORMAN, W. M. Separable utility and aggregation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 469–481, 1959. Citado na página 42.
- GRABISCH, M.; LABREUCHE, C. A decade of application of the choquet and sugeno integrals in multi-criteria decision aid. *4OR*, Springer, v. 6, n. 1, p. 1–44, 2008. Citado na página 116.

- GRECO, S.; FIGUEIRA, J.; EHRGOTT, M. *Multiple criteria decision analysis*. [S.l.]: Springer, 2016. v. 37. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 25.
- GRECO, S.; MOUSSEAU, V.; SŁOWIŃSKI, R. Ordinal regression revisited: multiple criteria ranking using a set of additive value functions. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 191, n. 2, p. 416–436, 2008. Citado na página 50.
- GRECO, S.; MOUSSEAU, V.; SŁOWIŃSKI, R. Multiple criteria sorting with a set of additive value functions. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 207, n. 3, p. 1455–1470, 2010. Citado na página 107.
- GRIGOROUDIS, E.; SISKOS, Y. Preference disaggregation for measuring and analysing customer satisfaction: The musa method. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 143, n. 1, p. 148–170, 2002. Citado na página 50.
- HAYKIN, S. S. *Adaptive filter theory*. [S.l.]: Pearson Education India, 2008. Citado na página 59.
- HENRIQUES, I.; SADORSKY, P. The effect of oil price volatility on strategic investment. *Energy Economics*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 79–87, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- HOLLAND, W. C. et al. Interrupted time series of user-centered clinical decision support implementation for emergency department-initiated buprenorphine for opioid use disorder. *Academic Emergency Medicine*, Wiley Online Library, v. 27, n. 8, p. 753–763, 2020. Citado na página 54.
- HWANG, C.-L.; YOON, K. Methods for multiple attribute decision making. In: *Multiple attribute decision making*. [S.l.]: Springer, 1981. p. 58–191. Citado na página 30.
- JACQUET-LAGREZE, E.; SISKOS, J. Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the uta method. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 151–164, 1982. Citado 4 vezes nas páginas 42, 49, 50 e 106.
- JACQUET-LAGREZE, E.; SISKOS, Y. Preference disaggregation: 20 years of MCDA experience. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 130, n. 2, p. 233–245, 2001. Citado na página 42.
- JAHANSHAHLOO, G. R.; LOTFI, F. H.; IZADIKHAH, M. An algorithmic method to extend TOPSIS for decision-making problems with interval data. *Applied mathematics and computation*, Elsevier, v. 175, n. 2, p. 1375–1384, 2006. Citado na página 31.
- JEFFREY, D.; HUBBARD, N. J. Temporal dimensions and regional patterns of hotel occupancy performance in england: A time series analysis of midweek and weekend occupancy rates in 266 hotels, in 1984 and 1985. *International Journal of Hospitality Management*, Elsevier, v. 7, n. 1, p. 63–80, 1988. Citado na página 54.
- JERMSITTIPARSERT, K. Behavior of tourism industry under the situation of environmental threats and carbon emission: Time series analysis from thailand. *International Journal of Energy Economics and Policy*, v. 9, p. 366–372, 2019. Citado na página 54.



- KABIR, H. D. et al. Neural network-based uncertainty quantification: A survey of methodologies and applications. *IEEE access*, IEEE, v. 6, p. 36218–36234, 2018. Citado na página 76.
- KADZINSKI, M. et al. Expressiveness and robustness measures for the evaluation of an additive value function in multiple criteria preference disaggregation methods: An experimental analysis. *Computers and operations research*, Elsevier, v. 87, p. 146–164, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- KADZIŃSKI, M.; MICHALSKI, M. Scoring procedures for multiple criteria decision aiding with robust and stochastic ordinal regression. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 71, p. 54–70, 2016. Citado na página 50.
- KANATSOULIS, C. I. et al. Regular sampling of tensor signals: Theory and application to fmri. In: IEEE. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process (ICASSP)*. [S.l.], 2019. p. 2932–2936. Citado na página 58.
- KANDAKOGLU, A.; FRINI, A.; AMOR, S. B. Multicriteria decision making for sustainable development: A systematic review. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Wiley Online Library, v. 26, n. 5-6, p. 202–251, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 24, 30 e 54.
- KASSAKIAN, S. Z. et al. Clinical decision support reduces overuse of red blood cell transfusions: interrupted time series analysis. *The American journal of medicine*, Elsevier, v. 129, n. 6, p. 636–e13, 2016. Citado na página 54.
- KEENEY, R. L.; RAIFFA, H. *Decisions with multiple objectives: preferences and value trade-offs*. [S.l.]: Cambridge university press, 1993. Citado na página 25.
- KENDALL, M. G. A new measure of rank correlation. *Biometrika*, JSTOR, v. 30, n. 1/2, p. 81–93, 1938. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- KIM, J. H. et al. Beyond point forecasting: evaluation of alternative prediction intervals for tourist arrivals. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 27, n. 3, p. 887–901, 2011. Citado na página 76.
- KIZIELEWICZ, B.; DOBRYAKOVA, L. Mcda based approach to sports players' evaluation under incomplete knowledge. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 176, p. 3524–3535, 2020. Citado na página 23.
- KÖKSALAN, M.; ULU, C. An interactive approach for placing alternatives in preference classes. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 144, n. 2, p. 429–439, 2003. Citado na página 28.
- KRAUJALIENĖ, L. Comparative analysis of multicriteria decision-making methods evaluating the efficiency of technology transfer. *Business, Management and Economics Engineering*, v. 17, n. 1, p. 72–93, 2019. Citado na página 31.
- KROONENBERG, P. M. *Applied multiway data analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. v. 702. Citado na página 57.
- LAHDELMA, R.; HOKKANEN, J.; SALMINEN, P. SMAA-stochastic multiobjective acceptability analysis. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 106, n. 1, p. 137–143, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

- LAHDELMA, R.; SALMINEN, P. Smaa-2: Stochastic multicriteria acceptability analysis for group decision making. *Operations Research*, INFORMS, v. 49, n. 3, p. 444–454, 2001. Citado na página 38.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares-2*. [S.l.]: Bookman, 2006. Citado na página 55.
- LI, K. et al. Periodic benefit-risk assessment using bayesian stochastic multi-criteria acceptability analysis. *Contemporary clinical trials*, Elsevier, v. 67, p. 100–108, 2018. Citado na página 23.
- LIN, Y.-H.; LEE, P.-C.; TING, H.-I. Dynamic multi-attribute decision making model with grey number evaluations. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 35, n. 4, p. 1638–1644, 2008. Citado na página 51.
- LOOTSMA, F. A. The french and the american school in multi-criteria decision analysis. *RAIRO-Operations Research*, EDP Sciences, v. 24, n. 3, p. 263–285, 1990. Citado na página 16.
- MACHADO, R. H. C. et al. A multiple criteria framework to assess learning methods in engineering education. *Thinking Skills and Creativity*, Elsevier, p. 101290, 2023. Citado na página 24.
- MAÊDA, N. et al. Bibliometric studies on multi-criteria decision analysis (mcda) applied in personnel selection. *Modern Management Based on Big Data II and Machine Learning and Intelligent Systems III: Proceedings of MMBD 2021 and MLIS 2021*, IOS Press, v. 341, p. 119 – 125, 2021. Citado na página 23.
- MAGHSOODI, A. I. et al. An integrated parallel big data decision support tool using the w-clus-mcda: A multi-scenario personnel assessment. *Knowledge-Based Systems*, Elsevier, v. 195, p. 105749, 2020. Citado na página 23.
- MALIENE, V.; DIXON-GOUGH, R.; MALYS, N. Dispersion of relative importance values contributes to the ranking uncertainty: Sensitivity analysis of multiple criteria decision-making methods. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 67, p. 286–298, 2018. Citado na página 28.
- MARQUÉS, A. I.; GARCÍA, V.; SÁNCHEZ, J. S. Ranking-based mcdm models in financial management applications: analysis and emerging challenges. *Progress in Artificial Intelligence*, Springer, v. 9, n. 3, p. 171–193, 2020. Citado na página 23.
- MARTINS, M. A.; GARCEZ, T. V. A multidimensional and multi-period analysis of safety on roads. *Accident Analysis & Prevention*, Elsevier, v. 162, p. 106401, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 54.
- MARTYN, K.; KADZIŃSKI, M. Deep preference learning for multiple criteria decision analysis. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 305, n. 2, p. 781–805, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 107.
- MEHRMOLAEI, S.; KEYVANPOUR, M. R. Tsp-sa: Usage of time series techniques on healthcare data. *International Journal of Electronic Healthcare*, Inderscience Publishers (IEL), v. 10, n. 3, p. 190–230, 2018. Citado na página 54.
- MIETTINEN, K. *Nonlinear multiobjective optimization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 12. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 105.

- MOUHIB, Y.; FRINI, A. TSMAA-TRI: A temporal multi-criteria sorting approach under uncertainty. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Wiley Online Library, v. 28, n. 3-4, p. 185–199, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 52.
- MUNDA, G. Multiple-criteria decision aid: Some epistemological considerations. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Wiley Online Library, v. 2, n. 1, p. 41–55, 1993. Citado na página 16.
- NĂDĂBAN, S.; DZITAC, S.; DZITAC, I. Fuzzy TOPSIS: A general view. *Procedia computer science*, Elsevier, v. 91, p. 823–831, 2016. Citado na página 31.
- NILASHI, M. et al. Travellers decision making through preferences learning: A case on malaysian spa hotels in tripadvisor. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 158, p. 107348, 2021. Citado na página 57.
- OPPENHEIM, A. V. *Discrete-time signal processing*. [S.l.]: Pearson Education India, 1999. Citado na página 55.
- PALCZEWSKI, K.; SAŁABUN, W. The fuzzy TOPSIS applications in the last decade. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 159, p. 2294–2303, 2019. Citado na página 31.
- PALCZEWSKI, K.; SAŁABUN, W. Identification of the football teams assessment model using the comet method. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 159, p. 2491–2501, 2019. Citado na página 23.
- PELEGRINA, G. D.; DUARTE, L. T.; ROMANO, J. M. T. Application of independent component analysis and TOPSIS to deal with dependent criteria in multicriteria decision problems. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 122, p. 262–280, 2019. Citado na página 31.
- PELISSARI, R.; ABACKERLI, A. J.; DUARTE, L. T. Choquet capacity identification for multiple criteria sorting problems: A novel proposal based on stochastic acceptability multicriteria analysis. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 120, p. 108727, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 57.
- POMEROL, J.-C.; BARBA-ROMERO, S. *Multicriterion decision in management: principles and practice*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2000. v. 25. Citado na página 24.
- PRIDEMORE, W. A.; SNOWDEN, A. J. Reduction in suicide mortality following a new national alcohol policy in slovenia: an interrupted time-series analysis. *American journal of public health*, American Public Health Association, v. 99, n. 5, p. 915–920, 2009. Citado na página 17.
- REZAEI, S. et al. Determinants of healthcare expenditures in iran: evidence from a time series analysis. *Medical journal of the Islamic Republic of Iran*, Iran University of Medical Sciences, v. 30, p. 313, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 54.
- ROMANO, J. M. T. et al. *Unsupervised signal processing: channel equalization and source separation*. [S.l.]: CRC Press, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 55, 59, 60 e 62.
- ROY, B. Decision-aid and decision-making. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 45, n. 2-3, p. 324–331, 1990. Citado na página 16.



- ROY, B. *Multicriteria methodology for decision aiding*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1996. v. 12. Citado 3 vezes nas páginas 24, 28 e 30.
- SAINT-HILARY, G. et al. A simple way to unify multicriteria decision analysis (mcda) and stochastic multicriteria acceptability analysis (smaa) using a dirichlet distribution in benefit–risk assessment. *Biometrical Journal*, Wiley Online Library, v. 59, n. 3, p. 567–578, 2017. Citado na página 23.
- SALO, A. A.; HAMALAINEN, R. P. Preference ratios in multiattribute evaluation (prime)-elicitation and decision procedures under incomplete information. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, IEEE, v. 31, n. 6, p. 533–545, 2001. Citado na página 28.
- SHARMA, D.; SRIDHAR, S.; CLAUDIO, D. Comparison of AHP-TOPSIS and ahp-ahp methods in multi-criteria decision-making problems. *International Journal of Industrial and Systems Engineering*, Inderscience Publishers (IEL), v. 34, n. 2, p. 203–223, 2020. Citado na página 31.
- SHRESTHA, D. L.; SOLOMATINE, D. P. Machine learning approaches for estimation of prediction interval for the model output. *Neural Networks*, Elsevier, v. 19, n. 2, p. 225–235, 2006. Citado na página 78.
- SHUKLA, A. et al. Applications of TOPSIS algorithm on various manufacturing processes: a review. *Materials Today: Proceedings*, Elsevier, v. 4, n. 4, p. 5320–5329, 2017. Citado na página 31.
- SIDIROPOULOS, N. D. et al. Tensor decomposition for signal processing and machine learning. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 65, n. 13, p. 3551–3582, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 57.
- SISKOS, Y.; GRIGOROUDIS, E.; MATSATSINIS, N. F. Uta methods. In: *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 297–334. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.
- SISKOS, Y.; YANNACOPOULOS, D. Utastar: An ordinal regression method for building additive value functions. *Investigação Operacional*, v. 5, n. 1, p. 39–53, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 48.
- SMILDE, A.; BRO, R.; GELADI, P. *Multi-way analysis: applications in the chemical sciences*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. Citado na página 57.
- SOBRIE, O. et al. Uta-poly and uta-splines: additive value functions with polynomial marginals. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 264, n. 2, p. 405–418, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- SUNG, H.; LAPAN, H. E. Strategic foreign direct investment and exchange-rate uncertainty. *International Economic Review*, Wiley Online Library, v. 41, n. 2, p. 411–423, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- TERVONEN, T.; LAHDELMA, R. Implementing stochastic multicriteria acceptability analysis. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 178, n. 2, p. 500–513, 2007. Citado na página 39.

- TERVONEN, T. et al. A stochastic multicriteria model for evidence-based decision making in drug benefit-risk analysis. *Statistics in Medicine*, Wiley Online Library, v. 30, n. 12, p. 1419–1428, 2011. Citado na página 23.
- TZENG, G.; HUANG, J. *Multiple attribute decision making: methods and applications*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2011. Citado na página 16.
- URBANIAK, K.; WĄTRÓBSKI, J.; SAŁABUN, W. Identification of players ranking in e-sport. *Applied Sciences*, MDPI, v. 10, n. 19, p. 6768, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 28.
- UZUN, B. et al. The technique for order of preference by similarity to ideal solution (TOPSIS). In: *Application of Multi-Criteria Decision Analysis in Environmental and Civil Engineering*. [S.l.]: Springer, 2021. p. 25–30. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 33.
- VINCKE, P. *Multicriteria decision-aid*. John Wiley & Sons, 1992. Citado na página 25.
- VINER, J. The utility concept in value theory and its critics. *Journal of Political Economy*, The University of Chicago Press, v. 33, n. 6, p. 638–659, 1925. Citado na página 42.
- WADHWANIYA, M. A multi criteria decision analysis approach towards creating a inclusive curriculum for gender responsive higher education. *Towards Excellence*, v. 12, n. 5, 2020. Citado na página 24.
- WATROBSKI, J.; SALABUN, W.; LADORUCKI, G. The temporal supplier evaluation model based on multicriteria decision analysis methods. In: SPRINGER. *Asian Conference on Intelligent Information and Database Systems*. [S.l.], 2017. p. 432–442. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 54.
- WELCH, G.; BISHOP, G. *An introduction to the Kalman filter*. [S.l.]: Citeseer, 1995. 127–132 p. Citado na página 59.
- WITT, T.; KLUMPP, M. Multi-period multi-criteria decision making under uncertainty: A renewable energy transition case from germany. *Sustainability*, MDPI, v. 13, n. 11, p. 6300, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 76.
- XU, Z. On multi-period multi-attribute decision making. *Knowledge-Based Systems*, Elsevier, v. 21, n. 2, p. 164–171, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 17, 51, 53 e 54.
- YAN, S. et al. Dynamic grey target decision making method with grey numbers based on existing state and future development trend of alternatives. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, IOS Press, v. 28, n. 5, p. 2159–2168, 2015. Citado na página 52.
- ZANAKIS, S. H. et al. Multi-attribute decision making: A simulation comparison of select methods. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 107, n. 3, p. 507–529, 1998. Citado na página 30.
- ZHANG, X. et al. Deep-learning-based probabilistic forecasting of electric vehicle charging load with a novel queuing model. *IEEE Transactions on Cybernetics*, IEEE, 2020. Citado na página 76.
- ZHANG, X. P. S.; WANG, F. Signal processing for finance, economics, and marketing: Concepts, framework, and big data applications. *IEEE Signal Processing Magazine*, IEEE, v. 34, n. 3, p. 14–35, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 17, 53 e 56.

ZHOU, M.; CHEN, Y. An aggregation framework for time series-based MCDA. *The Proceedings of IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services (GSIS)*, p. 571–575, 2011. Citado na página 51.

ZOPOUNIDIS, C.; DOUMPOS, M. Multicriteria classification and sorting methods: a literature review. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 138, n. 2, p. 229–246, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 42.

ZOPOUNIDIS, C. et al. Business failure prediction using rough sets: A comparison with multivariate analysis techniques. *Fuzzy economic review*, Reus (Tarragona): SIGEF, v. 4, n. 1, p. 1, 1999. Citado na página 23.

ZOPOUNIDIS, C.; PARDALOS, P. M. *Handbook of multicriteria analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. v. 103. Citado 3 vezes nas páginas 27, 42 e 48.