UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MÁRIO CESAR SOARES TEIXEIRA

ANÁLISE COMPARATIVA DAS ABORDAGENS CONTÍNUA E DISCRETA NA MODELAGEM LOGÍSTICA DE VERHULST PARA PREVISÃO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

Campinas

2025

Mário Cesar Soares Teixeira

ANÁLISE COMPARATIVA DAS ABORDAGENS CONTÍNUA E DISCRETA NA MODELAGEM LOGÍSTICA DE VERHULST PARA PREVISÃO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Felix Silva Costa

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Mário Cesar Soares Teixeira e orientada pelo Prof. Dr. Felix Silva Costa.

Campinas

2025

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

	Teixeira, Mário Cesar Soares, 1974-
T235a	Análise comparativa das abordagens contínua e discreta na modelagem logística de Verhulst para previsão de crescimento populacional / Mário Cesar Soares Teixeira. – Campinas, SP : [s.n.], 2025.
	Orientador: Felix Silva Costa.
	Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Modelos logísticos. 2. Equações diferenciais. 3. Modelo de Verhulst. I. Costa, Felix Silva, 1982-. II. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações complementares

Título em outro idioma: Comparative analysis of approaches continuous and discreet in modeling Verhulst logistics for forecasting of population growth
Palavras-chave em inglês:
Logistic models
Differential equations
Verhulst model
Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional
Banca examinadora:
Felix Silva Costa [Orientador]
Junior Cesar Alves Soares
José Vanterler da Costa Sousa
Data de defesa: 05-02-2025
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0000-9110-8911
- Currículo Lattes do autor: https://lattes.cnpq.br/0135155394091563

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 05 de fevereiro de 2025 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. Dr. FELIX SILVA COSTA

Prof. Dr. JUNIOR CESAR ALVES SOARES

Prof. Dr. JOSÉ VANTERLER DA COSTA SOUSA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, cuja presença iluminou meu caminho ao longo deste processo.

À minha família, especialmente aos meus pais, por seu apoio incondicional e incentivo contínuo ao longo de minha jornada acadêmica.

Expresso minha profunda gratidão à minha namorada, Maria Francinete do Nascimento Silva, cujo apoio e motivação foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Sou imensamente grato ao meu orientador, Professor Dr. Felix Silva Costa, por sua orientação dedicada, disponibilidade constante e pelas valiosas sugestões que enriqueceram este trabalho.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

“Não é o mais forte que sobrevive, nem o mais inteligente, mas o que melhor se adapta às mudanças.”(Charles Darwin)

Resumo

Esta dissertação analisa comparativamente as abordagens contínua e discreta na modelagem logística de Verhulst para prever o crescimento populacional. O estudo destaca a importância dos modelos matemáticos na compreensão das dinâmicas populacionais, fundamentais para a formulação de políticas públicas, planejamento urbano e gestão de recursos naturais. A abordagem contínua, baseada em equações diferenciais ordinárias, oferece uma visão abrangente das tendências de longo prazo, enquanto a abordagem discreta, utilizando equações de diferença, permite uma análise detalhada em intervalos específicos. A pesquisa avalia a eficácia de cada abordagem em termos de precisão das previsões, adequação a diferentes contextos ecológicos e demográficos, e estabilidade numérica das soluções. Os resultados indicam que o modelo contínuo é mais eficaz para captar tendências gerais, enquanto o modelo discreto é mais adequado para análises detalhadas. A dissertação conclui com recomendações sobre a escolha da abordagem mais apropriada, enfatizando a necessidade de políticas sustentáveis para mitigar os impactos do crescimento populacional.

Palavras-chave: Modelagem logística, crescimento populacional, abordagem contínua, abordagem discreta, equações diferenciais, sustentabilidade, Verhulst.

Abstract

This dissertation provides a comparative analysis of the continuous and discrete approaches in Verhulst's logistic modeling to forecast population growth. The study underscores the significance of mathematical models in understanding population dynamics, which are crucial for public policy formulation, urban planning, and natural resource management. The continuous approach, based on ordinary differential equations, offers a comprehensive view of long-term trends, while the discrete approach, using difference equations, allows for detailed analysis at specific intervals. The research evaluates the effectiveness of each approach in terms of prediction accuracy, applicability to various ecological and demographic contexts, and numerical stability of solutions. The results suggest that the continuous model is more effective in capturing general trends, while the discrete model is better suited for detailed analyses. The dissertation concludes with recommendations on selecting the most appropriate approach, emphasizing the need for sustainable policies to mitigate the impacts of population growth.

Keywords: Logistic modeling, population growth, continuous approach, discrete approach, differential equations, sustainability, Verhulst.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

O crescimento populacional é um fenômeno intrinsecamente complexo, que exerce influência significativa sobre diversos aspectos da sociedade e do meio ambiente. Compreender as dinâmicas de crescimento e estabilização das populações é essencial para a formulação de políticas públicas eficazes, planejamento urbano sustentável, conservação da biodiversidade e gestão de recursos naturais. Essas questões são ainda mais relevantes em um contexto global marcado por desafios como a sustentabilidade ambiental e a segurança alimentar (ALVES, 2014).

Desde o século XVIII, modelos matemáticos têm sido ferramentas indispensáveis para descrever e prever o comportamento populacional. O modelo de crescimento exponencial, introduzido por Leonhard Euler, foi pioneiro na tentativa de representar matematicamente o crescimento populacional. No entanto, sua premissa de recursos ilimitados mostrou-se inadequada para a maioria dos cenários naturais. Para abordar essa limitação, Pierre-François Verhulst desenvolveu o modelo logístico, que incorpora a capacidade de suporte do ambiente, oferecendo uma representação mais realista das dinâmicas populacionais (NÁPOLES, 2018).

A modelagem logística de Verhulst pode ser explorada por meio de duas abordagens principais: as equações diferenciais ordinárias (EDOs), que descrevem o crescimento contínuo, e as equações de diferença, que tratam do crescimento em intervalos discretos de tempo. Cada abordagem apresenta vantagens e limitações, e a escolha entre elas depende das características específicas do sistema em estudo e dos objetivos da modelagem.

Este estudo realiza uma análise comparativa das abordagens contínua e discreta na modelagem logística de Verhulst, visando identificar vantagens, desvantagens e aplicabilidades de cada uma. A pesquisa busca responder: qual abordagem, contínua ou discreta, é mais eficaz na previsão do crescimento populacional no modelo de Verhulst? Para isso, serão comparadas a precisão das previsões, a aplicabilidade em diferentes contextos ecológicos e demográficos e a estabilidade numérica das soluções de ambas.

A dissertação está estruturada em três capítulos principais. O primeiro capítulo aborda a fundamentação teórica, apresentando os conceitos de modelagem matemática e os diferentes tipos de modelos. O segundo capítulo discute tanto as equações diferenciais quanto as equações de diferenças e suas aplicações, enquanto o terceiro capítulo foca no modelo logístico de Verhulst e sua aplicação ao crescimento populacional mundial. Os resultados desta pesquisa poderão orientar ecologistas, demógrafos, planejadores urbanos e formuladores de políticas na escolha da abordagem mais adequada para seus estudos e aplicações práticas. Assim, espera-se que esse trabalho não apenas ofereça uma base acadêmica sólida, mas também consistentes ferramentas práticas para profissionais das áreas ambientais e demográficas.

1 Fundamentação Teórica

1.1 Modelagem Matemática

Modelagem matemática é o processo de representar sistemas e fenômenos do mundo real através de modelos matemáticos, que são construídos e analisados para prever comportamentos e solucionar problemas complexos. Bassanezi (2002, p.24) define a modelagem matemática como "a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Esta definição enfatiza a importância da modelagem como uma ponte entre a teoria matemática e a aplicação prática.

1.1.1 Tipos de Modelos Matemáticas

De acordo com (BASSANEZI, 2002) em sua obra Modelagem Matemática , os modelos matemáticos podem ser classificados de várias maneiras, dependendo de seu propósito e da natureza das especificidades que representam. Os principais tipos de modelos matemáticos conforme Bassanezi e que serão são:

1.1.1.1 Modelos Determinísticos

- **Definição:** Nos modelos determinísticos, não há incerteza no comportamento do sistema. Se as condições iniciais e as leis que regem o sistema são conhecidos, o futuro pode ser previsto com precisão.
- **Exemplo:** Modelos que utilizam equações diferenciais para descrever o crescimento populacional, onde o resultado é determinado unicamente pelas variações e suas relações.

1.1.1.2 Modelos Discretos

- **Definição:** São aqueles que ponderam variáveis e processos que mudam em etapas discretas, ou seja, os valores reforçados pelas variáveis não são contínuos.
- **Exemplo:** Modelos baseados em equações de diferenças, como os usados para descrever processos populacionais em gerações discretas.

1.1.1.3 Modelos Contínuos

- **Definição:** Utilizam variáveis contínuas para descrever especificações em que as mudanças ocorrem de forma contínua ao longo do tempo ou de outra dimensão.
- **Exemplo:** Modelos baseados em equações diferenciais, como o modelo de crescimento logístico para a população, em que as mudanças populacionais são contínuas no tempo.

1.1.1.4 Modelos Lineares

- **Definição:** São aqueles em que a relação entre as variáveis do sistema é linear, ou seja, podem ser descritas por equações lineares.
- **Exemplo:** Modelos simples de crescimento populacional que assumem uma taxa de crescimento constante.

1.1.1.5 Modelos Não Lineares

- **Definição:** Nesses modelos, as relações entre as variações não são lineares, tornando-os mais complexos e muitas vezes mais realistas na descrição de características naturais.
- **Exemplo:** O modelo logístico de crescimento populacional é um modelo não linear, já que a taxa de crescimento varia conforme a população se aproxima da capacidade de suporte do ambiente.

1.1.2 Construção de um Modelo Matemático

A construção de um modelo matemático envolve várias etapas críticas:

- **Identificação das Variáveis:** Determinar quais são as variáveis-chave que influenciam o sistema e como elas interagem entre si.
- **Formulação de Hipóteses:** Estabelecer suposições baseadas na compreensão do sistema. Essas hipóteses ajudam a simplificar a realidade, tornando o problema tratável matematicamente.
- **Desenvolvimento de Equações:** Traduzir as hipóteses e interações entre variáveis em equações matemáticas. Esta etapa é crucial, pois as equações formam a espinha dorsal do modelo.

- **Solução e Análise:** Resolver as equações do modelo, o que pode ser feito através de métodos analíticos ou numéricos, e então analisar as soluções para interpretar o comportamento do sistema modelado.
- **Validação:** Comparar as previsões do modelo com dados reais ou experimentais para verificar sua precisão. Este passo é fundamental para garantir que o modelo seja uma representação fiel do sistema real.

1.1.3 Importância dos Modelos Matemáticos

Os modelos matemáticos são indispensáveis na maioria das áreas científicas e tecnológicas. Eles são ferramentas cruciais para:

- **Previsão e Planejamento:** Permitir a previsão de eventos futuros com base em dados históricos e tendências atuais.
- **Análise de Sistemas Complexos:** Facilitar a compreensão de sistemas complexos que são difíceis de estudar diretamente.
- **Desenvolvimento de Estratégias:** Auxiliar na formulação de estratégias para otimização, controle ou mitigação de riscos em sistemas variados.
- **Inovação e Descoberta:** Proporcionar um meio para explorar novas teorias, hipóteses e tecnologias.

Em essência, os modelos matemáticos desempenham um papel importante na exploração dos mistérios do universo, abrangendo desde os fenômenos mais elementares até os mais complexos. Eles fornecem perspectivas valiosas que orientam o avanço científico e tecnológico.

1.1.4 Aplicações da Modelagem Matemática e Suas Equações

A modelagem matemática encontra aplicações em diversas áreas, algumas das quais incluem:

1.1.4.1 Absorção de Drogas

Um dos principais desafios na área da Farmacologia é compreender como a concentração de um fármaco no sangue de um paciente reduz ao longo do tempo. Esse entendimento é fundamental para estabelecer a dosagem adequada e o intervalo entre as doses do medicamento. O modelo mais simples para descrever esse fenômeno é baseado na suposição de que a taxa de variação da concentração é proporcional à quantidade de medicamento presente no sistema circulatório em qualquer momento.

Matematicamente, se considerarmos $C = C(t)$ como a função que representa a concentração do medicamento no sangue ao longo do tempo, o decaimento dessa concentração pode ser modelado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dC}{dt} = -kC \tag{1.1}$$

onde (k) é uma constante positiva determinada experimentalmente, que varia conforme o medicamento específico (BASSANEZI, 2015).

1.1.4.2 Disseminação de uma doença

Considere uma doença contagiosa, como o vírus da gripe, que se propaga em uma comunidade através do contato entre indivíduos. Definimos $x(t)$ como o número de pessoas que contraíram a doença até o tempo (t) e $y(t)$ como o número de pessoas que ainda não foram infectadas. É razoável assumir que a taxa de infecção $\frac{dx}{dt}$, é proporcional ao número de interações entre os dois grupos de pessoas, ou seja, entre os infectados e os não infectados. Se assumirmos que o número de interações é proporcional ao produto xy, podemos expressar isso da seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = kxy \tag{1.2}$$

onde (k) é uma constante de proporcionalidade. Suponha que a comunidade tenha uma população fixa de (n) pessoas. Se introduzirmos uma pessoa infectada na comunidade, podemos argumentar que $x(t)$ e $y(t)$ estão relacionados pela equação $x + y = n + 1$. Isso ocorre porque a população total é (n), mas estamos adicionando uma pessoa infectada inicialmente.

Usando essa relação para eliminar y na equação (2), chegamos a seguinte equação:

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x) \tag{1.3}$$

A condição inicial para este modelo é que em $x(0)$, há exatamente uma pessoa infectada, ou seja, $x(0) = 1$ (ZILL, 2016).

1.1.4.3 PRINCÍPIO DA ALOMETRIA

O princípio da alometria, amplamente aplicado na biomatemática, afirma que, em um mesmo organismo, a proporção entre os crescimentos relativos de seus órgãos permanece constante. Isso significa que diferentes partes do corpo crescem em proporção umas às outras de maneira consistente ao longo do tempo (BASSANEZI, 2011).

1.1.4.3.1 Modelo Matemático da Alometria

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ os tamanhos de órgãos ou partes distintas do corpo de um mesmo indivíduo em um instante (t). O modelo matemático que traduz o princípio da alometria é dado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \beta\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} \tag{1.4}$$

onde:

- $x(t)$ e $y(t)$ são os tamanhos dos órgãos ou partes do corpo em função do tempo (t).
- (β) é a taxa de proporcionalidade do crescimento relativo, também conhecida como coeficiente de alometria.

A origem da equação alométrica reside na observação de que o crescimento de diferentes partes de um organismo é interdependente. A equação assume:

1. Proporcionalidade Relativa: As taxas de crescimento de diferentes órgãos são proporcionais. Se um órgão cresce a uma determinada taxa, outro órgão crescerá a uma taxa proporcional, determinada pelo coeficiente β.

2. Derivação Matemática: A equação é derivada da relação linear entre as taxas de crescimento específicas dos órgãos, expressando a igualdade das razões de suas taxas de crescimento.

3. Suposições Subjacentes:

- Constância de β: O modelo pressupõe que β é constante ao longo do tempo, implicando uma relação de crescimento estável entre os órgãos.
- Independência de Fatores Externos: Simplifica a realidade ao não considerar influências externas, como nutrição ou condições ambientais, que podem afetar o crescimento.

O modelo alométrico tem ampla aplicação em diversas áreas como:

- Biologia do Desenvolvimento: Utilizado para compreender como diferentes partes do corpo se desenvolvem em organismos em crescimento, fornecendo insights sobre o desenvolvimento proporcional.
- Ecologia e Evolução: Ajuda a explicar padrões de crescimento em populações e espécies, oferecendo uma base para a compreensão de adaptações evolutivas e estratégias de sobrevivência.

1.1.5 Equações Diferenciais Ordinárias

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) são fundamentais para a modelagem e análise de uma vasta variedades de fenômenos naturais e tecnológicos. Estas equações, que estabelecem relações entre funções e suas derivadas, são essenciais para descrever como sistemas evoluem ao longo do tempo ou em relação a outras variáveis. A forma geral de uma EDO é expressa como $y' = f(x, y)$, onde (y') representa a derivada de (y) em relação a (x), e $f(x, y)$ é uma função que pode depender tanto de (x) quanto de (y).

1.1.5.1 Aplicações das EDOs

O uso de EDOs se estende por vários campos do saber, possibilitando a representação de processos e sistemas em:

- **Circuitos Elétricos:** Para circuitos elétricos, as EDOs ajudam a descrever a variação de correntes e tensões ao longo do tempo, considerando elementos como resistências, capacitâncias e indutâncias.
- **Reações Químicas:** Na química, as EDOs são aplicadas para modelar a cinética de reações químicas, permitindo a análise da velocidade das reações e a evolução das concentrações de reagentes e produtos.
- **Crescimento Populacional:** Em ecologia, as EDOs são fundamentais para modelar o crescimento populacional, considerando fatores como taxas de nascimento, morte e capacidade de suporte do ambiente.
- **Geometria:** As EDOs também encontram aplicações em geometria, por exemplo, na determinação de curvas que satisfazem certas propriedades geométricas ou físicas.

1.1.5.2 Importância das EDOs

A capacidade das EDOs de modelar a variação de quantidades em relação a outra permite não apenas a compreensão profunda dos sistemas estudados, mas também a previsão de seu comportamento futuro sob diferentes condições. Isso é crucial para o desenvolvimento de novas tecnologias, a otimização de processos existentes e a solução de problemas complexos em ciência e engenharia.

1.1.5.3 Definição

Uma equação diferencial é uma equação que relaciona uma função com uma ou mais de suas derivadas. Em termos simples, ela descreve a taxa de variação de uma quantidade em relação a outra. As equações diferenciais são ferramentas poderosas para modelar fenômenos contínuos em várias disciplinas científicas e de engenharia.

Uma equação diferencial pode ser escrita na forma-padrão ou na forma diferencial. A forma-padrão é representada por:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.5}$$

onde $\frac{dy}{dx}$ é a derivada da função desconhecida (y) em relação à variável independente (x), e $f(x, y)$ é uma função dada de x e y.

Por outro lado, a forma diferencial é representada por:

$$\mathbf{M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0} \tag{1.6}$$

onde $M(x, y)eN(x, y)$ são funções de x e y. A forma diferencial é particularmente útil para identificar equações diferenciais exatas, que satisfazem a condição de exatidão:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.7}$$

Essas duas formas são equivalentes e podem ser convertidas uma na outra. Por exemplo, uma equação na forma-padrão $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ pode ser convertida para a forma diferencial multiplicando ambos os lados por dx:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow dy = f(x, y)dx \tag{1.8}$$

Da mesma forma, uma equação na forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ pode ser convertida para a forma-padrão dividindo ambos os lados por dx:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \tag{1.9}$$

Essas representações são fundamentais para a análise e solução de equações diferenciais, permitindo a aplicação de diferentes métodos de solução conforme a forma da equação (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

1.1.5.4 Classificação das Equações diferenciais ordinárias

A classificação das EDOs é essencial para a escolha do método de solução mais adequado, pois cada categoria possui características específicas que influenciam diretamente as técnicas e estratégias utilizadas (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

1.1.5.4.1 Quanto à Ordem

A ordem de uma EDO é determinada pela maior derivada presente na equação. A ordem da equação é um fator crucial, pois define a complexidade do problema e as técnicas de solução aplicáveis.

1.1.5.4.2 Primeira Ordem:

Envolve apenas a primeira derivada da função desconhecida. Essas equações são frequentemente encontradas em problemas de crescimento populacional, decaimento radioativo e circuitos elétricos simples.

- **Exemplo:**
$$\frac{dy}{dx} + y = e^x \tag{1.10}$$
- **Descrição:** Esta equação descreve uma relação linear entre a função (y) e sua primeira derivada $\frac{dy}{dx}$, com um termo independente e^x.

1.1.5.4.3 Segunda Ordem:

Envolve até a segunda derivada da função desconhecida. Equações de segunda ordem são comuns em problemas de movimento, como a equação do movimento harmônico simples e a equação da onda.

- **Exemplo:**
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{1.11}$$
- **Descrição:** Esta equação homogênea de segunda ordem é típica em sistemas oscilatórios e pode ser resolvida utilizando métodos como a transformação de Laplace ou a solução característica

1.1.5.4.4 n-ésima Ordem:

Envolve até a n-ésima derivada da função desconhecida. Equações de ordem superior são menos comuns, mas aparecem em problemas complexos de engenharia e física.

- **Exemplo:**
$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x) \tag{1.12}$$
- **Descrição:** Esta equação geral de n-ésima ordem pode modelar sistemas dinâmicos complexos e requer técnicas avançadas para sua solução.

1.1.5.4.5 Quanto à Linearidade:

A linearidade de uma EDO é determinada pela forma como a função desconhecida e suas derivadas aparecem na equação. A distinção entre equações lineares e não lineares é fundamental, pois afeta diretamente a abordagem de solução.

1.1.5.4.6 Linear:

A função desconhecida e suas derivadas aparecem de forma linear, ou seja, não são multiplicadas entre si nem elevadas a uma potência diferente de 1. Equações lineares são mais fáceis de resolver e possuem uma teoria bem desenvolvida.

- **Exemplo:**

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \tag{1.13}$$

$$x^2\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 4y = \operatorname{sen}(x) \tag{1.14}$$

- **Descrição:** Esta equação linear com coeficientes variáveis pode ser resolvida utilizando métodos como a variação dos parâmetros ou a série de potências.

1.1.5.4.7 Não Linear:

A função desconhecida ou suas derivadas aparecem de forma não linear, o que torna a solução dessas equações mais complexa e, muitas vezes, impossível de obter de forma analítica

- **Exemplo:**

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = x \tag{1.15}$$

  Nesse exemplo, a derivada $\frac{dy}{dx}$ está elevada ao quadrado, o que caracteriza uma equação diferencial não linear.

- **Descrição:** Esta equação não linear pode modelar fenômenos complexos como turbulência e caos, e geralmente requer métodos numéricos para sua solução.

1.1.5.4.8 Quanto à Homogeneidade

A homogeneidade de uma EDO linear refere-se à presença ou ausência de um termo independente. Esta classificação é importante para determinar a abordagem de solução, especialmente em métodos de superposição.

1.1.5.4.9 Homogênea:

A equação é igual a zero, indicando que não há termo independente. Equações homogêneas possuem soluções que podem ser combinadas linearmente para formar a solução geral.

- **Exemplo:**
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{1.16}$$
- **Descrição:** Esta equação homogênea de segunda ordem pode ser resolvida utilizando o método das soluções características, resultando em uma combinação linear de funções exponenciais.

1.1.5.4.10 Não Homogênea:

A equação é igual a uma função não nula, o que introduz um termo forçante ou fonte. A solução de equações não homogêneas geralmente envolve encontrar a solução da equação homogênea associada e uma solução particular.

- **Exemplo:**
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x \tag{1.17}$$
descrição: Esta equação não homogênea pode ser resolvida utilizando o método dos coeficientes indeterminados ou a variação dos parâmetros.

1.1.5.4.11 Quanto à Separabilidade

A separabilidade de uma EDO de primeira ordem refere-se à possibilidade de separar as variáveis em lados opostos da equação. Esta propriedade simplifica a solução de muitas equações diferenciais.

1.1.5.4.12 Separável

Pode ser escrita na forma $g(y)dy = f(x)dx$, permitindo a integração direta de ambos os lados. Equações separáveis são comuns em problemas de crescimento e decaimento exponencial.

- **Exemplo:**
$$\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{1}{y}dy = xdx \tag{1.18}$$
- **Descrição:** Esta equação separável pode ser resolvida integrando ambos os lados, resultando em uma solução implícita ou explícita.

1.1.5.4.13 Não Separável

Não pode ser escrita na forma separável, o que requer métodos mais avançados para sua solução.

- **Exemplo:**
$$\frac{dy}{dx} + y^2 = x \tag{1.19}$$
- **Descrição:** Esta equação não separável pode exigir técnicas como a substituição ou métodos numéricos para encontrar uma solução.

1.1.5.4.14 Quanto à Exatidão

A precisão de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem está relacionada à sua capacidade de ser expressa como uma forma diferencial exata. Esta propriedade permite a utilização de métodos específicos para encontrar soluções

1.1.5.4.15 Exata

Pode ser escrita na forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ e satisfaz a condição de exatidão $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Equações exatas podem ser resolvidas encontrando uma função potencial.

- **Exemplo:**
$$(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0 \tag{1.20}$$
- **Descrição:** Esta equação exata pode ser resolvida encontrando uma função $F(x, y)$ tal que $dF = Mdx + Ndy$.

1.1.5.4.16 Não Exata

Não satisfaz a condição de exatidão, o que pode requerer a utilização de fatores integrantes para transformá-la em uma equação exata.

- **Exemplo:**
$$(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0 \tag{1.21}$$
- **descrição:** Esta equação não exata pode ser transformada em uma equação exata utilizando um fator integrante apropriado.

1.1.5.4.17 Quanto à Linearidade com Coeficientes Constantes ou Variáveis

A linearidade com coeficientes constantes ou variáveis refere-se à natureza dos coeficientes das derivadas na equação. Esta classificação é importante para determinar os métodos de solução aplicáveis.

1.1.5.4.18 Coeficientes Constantes

Os coeficientes das derivadas são constantes, o que simplifica a solução da equação. Equações com coeficientes constantes são comuns em problemas de sistemas lineares e circuitos elétricos.

- **Exemplo:**
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{1.22}$$
- **Descrição:** Esta equação com coeficientes constantes pode ser resolvida utilizando o método das soluções características, resultando em uma combinação linear de funções exponenciais.

1.1.5.4.19 Coeficientes Variáveis

Os coeficientes das derivadas são funções da variável independente, o que pode complicar a solução da equação. Equações com coeficientes variáveis aparecem em problemas de dinâmica de fluidos e mecânica quântica.

- **Exemplo:**
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{1.23}$$
- **Descrição:** Esta equação com coeficientes variáveis pode ser resolvida utilizando métodos como a série de potências ou a transformação de Frobenius.

A classificação das EDOs é essencial para a escolha do método de solução mais adequado. Cada categoria possui características específicas que influenciam diretamente as técnicas e estratégias utilizadas para resolver as equações diferenciais. Compreender essas classificações permite uma abordagem mais sistemática e eficiente na resolução de problemas envolvendo EDOs, facilitando a aplicação de métodos analíticos e numéricos apropriados para cada tipo de equação.

1.1.5.5 Soluções para equações diferenciais ordinárias

De acordo com (ZILL, 2016), uma solução para uma equação diferencial ordinária pode ser descrita da seguinte maneira: qualquer função ϕ, definida em um intervalo I, que possua pelo menos n derivadas contínuas, e que, ao ser substituída na equação diferencial ordinária de ordem n, transforme a equação em uma identidade, é considerada uma solução da equação diferencial nesse intervalo.

Isso implica que, para uma equação diferencial de ordem n, existirão n derivadas, de modo que, para todo ponto no intervalo I, a função ϕ satisfaça a equação diferencial. Na busca por soluções de equações diferenciais, também será necessário verificar se uma determinada função é de fato a solução da equação diferencial.

Para uma equação diferencial de ordem n, haverá n derivadas, de modo que, para qualquer valor de x dentro do intervalo considerado, a seguinte relação será satisfeita: $F(x, \phi(x), \phi(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)) = 0$. Na busca por soluções de equações diferenciais, frequentemente será necessário verificar se uma função específica resolve a equação diferencial.

Exemplo 1: verifique se $y = e^{x^2}$ com $x \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$.
Resolução:

- Encontrar a derivada de (y) em relação a (x) em $y = e^{x^2}$
  Usando a regra da cadeia para derivar (y) em relação a (x), temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) = e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2} \tag{1.24}$$

- Substituir (y) e $\dfrac{dy}{dx}$ na equação diferencial original: A equação diferencial dada é:
  Substituindo $y = e^{x^2}$ e $\dfrac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$

$$2xe^{x^2} = 2xe^{x^2} \tag{1.25}$$

- Verificar a igualdade: Observamos que ambos os lados da equação são iguais:

$$2xe^{x^2} = 2xe^{x^2} \tag{1.26}$$

  Portanto, a função $y = e^{x^2}$ é de fato uma solução da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = 2xy \; x \in \mathbb{R}$.

Uma solução de uma equação diferencial é chamada de solução explícita quando a variável dependente é expressa apenas em termos da variável independente e das constantes (se houver). Por outro lado, uma função é considerada uma solução implícita se existir pelo menos uma função que satisfaça a equação diferencial (ZILL, 2016).

Exemplo: Verifique se $x^2 + y^2 = 25$ é uma solução implícita da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.
Resolução: Primeiro, aplicamos a diferenciação implícita. Temos: $x^2 + y^2 = 25$, diferenciando ambos os lados em relação a (x):

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}25 \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.27}$$

Isolando $\frac{dy}{dx}$, temos:

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{1.28}$$

Portanto, verificamos que $x^2 + y^2 = 25$ é uma solução implícita da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Na verdade, qualquer equação da forma $x^2 + y^2 - c = 0$, onde (c) é uma constante numérica, é uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

1.1.5.6 Equações diferenciais de variáveis separáveis

Uma equação diferencial de primeira ordem é chamada de variáveis separáveis se existirem funções $g(x)$ e $h(y)$ tais que a equação possa ser expressa na forma $y'(x) = g(x).h(y)$.

Isso significa que, ao identificar duas funções $g(x)$ e $h(y)$ cujo produto seja igual à equação diferencial, podemos concluir que a equação diferencial é de variáveis separáveis. É importante lembrar que $h(y)$ é uma função composta, pois $h(y) = h(y(x))$. Esses conceitos são essenciais para determinar se uma equação diferencial é de variáveis separáveis.

1.1.5.6.1 Verificação de Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis

Para determinar se uma equação diferencial é de variáveis separáveis, é necessário verificar se a equação pode ser escrita na forma $y'(x) = g(x).h(y)$, onde $g(x)$ é uma função de (x) e $h(y)$ é uma função de (y). A seguir, apresentamos alguns exemplos de equações diferenciais e verificamos se elas são de variáveis separáveis.

Exemplo 1

Considere a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \tag{1.29}$$

Para verificar se esta equação é de variáveis separáveis, tentamos escrever a equação na forma $y'(x) = g(x).h(y)$. Neste caso, não é possível separar as variáveis (x) e (y) de forma que a equação se torne um produto de duas funções independentes. Portanto, esta equação não é de variáveis separáveis.

Exemplo 2

Considere a equação diferencial:

$$y'(x) = xy \tag{1.30}$$

Podemos escrever esta equação como:

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y) = x \cdot y \tag{1.31}$$

Sendo, $g(x) = x$ e $h(y) = y$. Portanto, esta equação é de variáveis separáveis.

Exemplo 3

Considere a equação diferencial:

$$y'(x) = \frac{y}{x} + x \tag{1.32}$$

Para verificar se esta equação é de variáveis separáveis, tentamos escrever a equação na forma $y'(x) = g(x) \cdot h(y)$. Neste caso, não é possível separar as variáveis (x) e (y) de forma que a equação se torne um produto de duas funções independentes. Portanto, esta equação não é de variáveis separáveis.

Exemplo 4

Considere a equação diferencial:

$$y'(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) \tag{1.33}$$

Podemos escrever esta equação como:

$$y'(x) = x \cdot \cos(y) \tag{1.34}$$

Sendo, $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $h(y) = \cos{(y)}$. Portanto, esta equação é de variáveis separáveis.

Exemplo 5

Considere a equação diferencial:

$$y' = e^x \cdot e^y \tag{1.35}$$

Podemos escrever esta equação como:

$$y' = g(x) \cdot h(y) = e^x \cdot e^y \tag{1.36}$$

Sendo, $g(x) = e^x$ e $h(y) = e^y$. Portanto, esta equação é de variáveis separáveis.

1.1.5.7 Equação Diferencial de Primeira Ordem

As equações diferenciais de primeira ordem possuem uma definição específica. De acordo com Guidorizzi (2018, p.158), uma equação diferencial de primeira ordem é expressa da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{1.37}$$

onde $F(x, y)$ é uma função definida em um aberto Ω do $\mathbb{R}^2$. Uma função $y = y(x)$ definida em um intervalo aberto (I) é considerada uma solução dessa equação se, para todo (x) em (I), a relação $y'(x) = F(x, y(x))$ for satisfeita.

Inicialmente, pode parecer que estamos lidando com duas variáveis independentes devido à presença de (x) e (y). No entanto, (y) é uma função de (x), o que implica que (y) depende de (x). Portanto, temos duas coordenadas (por isso a função é definida no conjunto dos números reais ao quadrado), mas ambas as coordenadas dependem de uma única variável independente (neste exemplo, (x), mas poderia ser qualquer outra, como (t) para tempo). Assim, podemos afirmar que há apenas uma variável independente, que é (x), pois tanto (x) quanto (y) dependem dessa variável independente (GUIDORIZZI, 2018).

1.1.5.7.1 Exemplos

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

b) $[(1 + x)dy - ydx = 0] \cdot \dfrac{1}{x} \Rightarrow (1 + x)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{1 + x}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y + 3}{4x + 5}\right)^2$

1.1.5.7.2 Problema de Valor Inicial

Um problema de valor inicial (PVI) é composto por uma equação diferencial junto com uma condição inicial, que define o valor da função desconhecida em um ponto específico. A forma geral é:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.38}$$

1.1.5.7.3 Teorema de Existência e Unicidade de Solução

Para garantir que o PVI tenha uma solução única, aplicamos o **Teorema de Existência e Unicidade**. Este teorema afirma que, se a função $f(x, y)$ e sua derivada parcial em relação a y, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, são contínuas em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0), então existe um intervalo em torno de x_0 onde existe uma única solução $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e a condição inicial (ZILL, 2016).

1.1.5.7.4 Exemplo: Resolva $(e^{2y}-y)cosx\dfrac{dy}{dx}=e^{y}sen2x, \quad y(0)=0$

Resolução:

Multiplicando a equação por $\dfrac{1}{e^{y}cosx}$ temos:

$$\frac{(e^{2y}-y)}{e^{y}}dy=\frac{sen2x}{cosx}dx \Rightarrow \frac{(e^{2y}-y)}{e^{y}}dy=\frac{2senxcosx}{cosx}dx.$$
$$\Rightarrow \frac{(e^{2y}-y)}{e^{y}}dy=2senxdx \tag{1.39}$$

Integrando ambos os lados, temos:

$$\int\frac{(e^{2y}-y)}{e^{y}}dy=\int 2senxdx \Rightarrow \underbrace{\int(e^{y}-ye^{-y})dy}_{\text{(I)}}=\underbrace{2\int senxdx}_{\text{(II)}} \tag{1.40}$$

$(I)\ \int(e^{y}-ye^{-y})dy=\int e^{y}dy-\int ye^{-y}dy=e^{y}-[y(-e^{-y}+\int(-e^{-y})dy]$

$\Rightarrow \int(e^{y}-ye^{-y})dy=e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}+C_1$

$(II)\ \int senxdx=-cosx+C_2$

Resultando em:

$e^{y}+ye^{(-y)}+e^{(-y)}+C_1=-2cosx+C_2$

$e^{y}+ye^{(-y)}+e^{(-y)}=-2cosx+C_2-C_1$

$e^{y}+ye^{(-y)}+e^{(-y)}=-2cosx+C$

Usamos a condição inicial $y(0)=0$ para determinar a constante (C), temos:

$e^{y}+ye^{(-y)}+e^{(-y)}=-2cosx+C$

$e^{0}+0e^{(-0)}+e^{(-0)}=-2cos0+C$

$1+0+1=-2.1+C$

$2=-2+C\Rightarrow 2+2=C\Rightarrow C=4$

Portanto a solução geral do problema de valor inicial é:

$$e^{y}+ye^{(-y)}+e^{(-y)}=-2cosx+4 \tag{1.41}$$

1.1.5.7.5 Equação Linear de Primeira Ordem

Uma equação diferencial é chamada de equação linear de primeira ordem se a função f na equação $\dfrac{dy}{dx}=f(t,y)$ depende linearmente da variável (y). A forma geral de uma equação linear de primeira ordem é:

$$\frac{dy}{dx} = p(t)y = g(t) \tag{1.42}$$

onde $p(t)$ e $g(t)$ são funções conhecidas da variável independente (t) (ZILL, 2016).

1.1.5.7.6 Exemplos de Equações Lineares de Primeira Ordem

Exemplo 1: Circuitos Elétricos

Considere um circuito RC (resistor-capacitor) onde a tensão $V(t)$ aplicada ao circuito é uma função do tempo. A equação diferencial que descreve a carga $Q(t)$ no capacitor é:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{RC}Q = \frac{V(t)}{R} \tag{1.43}$$

,onde (R) é a resistência e (C) é a capacitância.

Exemplo 2: Crescimento Populacional com Taxa de Decaimento

Um modelo simples de crescimento populacional com uma taxa de decaimento proporcional ao tamanho da população pode ser descrito pela equação:

$$\frac{dP}{dt} + KP = r \tag{1.44}$$

,onde $P(t)$ é a população no tempo (t), (k) é a taxa de decaimento, e (r) é a taxa de crescimento constante.

Exemplo 3: Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton afirma que a taxa de variação da temperatura de um objeto é proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura ambiente. A equação diferencial correspondente é:

$$\frac{dT}{dt} + k(T - T_a) = 0 \tag{1.45}$$

onde $T(t)$ é a temperatura do objeto no tempo (t), (k) é uma constante de proporcionalidade, e (Ta) é a temperatura ambiente.

Exemplo 4: Decaimento Radioativo O decaimento radioativo de uma substância é descrito por uma equação linear de primeira ordem onde a taxa de decaimento é proporcional à quantidade de substância presente:

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0 \tag{1.46}$$

,onde $N(t)$ é a quantidade de substância no tempo (t) e (λ) é a constante de decaimento.

As equações lineares de primeira ordem são amplamente aplicáveis em diversas áreas da ciência e engenharia. Elas fornecem modelos matemáticos para descrever sistemas dinâmicos onde a taxa de variação de uma quantidade é linearmente dependente da própria quantidade e de uma função do tempo. A solução dessas equações permite prever o comportamento do sistema ao longo do tempo, o que é importante para o entendimento e controle de processos físicos, biológicos, econômicos e muitos outros.

A simplicidade estrutural das equações lineares de primeira ordem facilita a aplicação de métodos analíticos e numéricos para encontrar soluções, tornando-as uma ferramenta essencial para pesquisadores e profissionais em várias áreas de conhecimento.

1.2 Equações e Soluções para EDO's de 1ª Ordem

1.2.1 Equações separáveis

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem que são separáveis podem ser resolvidas separando as variáveis e integrando ambos os lados da equação. Explorando esse método em detalhes.

Forma Geral das Equações Separáveis

Uma EDO de primeira ordem é chamada de separável se pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{1.47}$$

onde $g(x)$ é uma função de (x) e $h(y)$ é uma função de (y).

Passos para Resolver Equações Separáveis

i) **Reescrever a Equação:** Colocamos a equação na forma separável.

ii) **Separar as Variáveis:** Reorganizamos a equação para que todas as funções de (y) estejam de um lado e todas as funções de (x) estejam do outro lado.

iii) **Integrar Ambos os Lados:** Integramos ambos os lados da equação.

iv) **Resolver para (y):** Isolamos (y) para encontrar a solução geral.

Exemplo 1: Resolva $(1 + x)dy - ydx = 0$ (ZILL, 2016).

Solução:

A equação dada é:

$$(1 + x)\frac{dy}{dx} = ydx \tag{1.48}$$

Reorganizando a equação para separar as variáveis y e x, temos:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x} \tag{1.49}$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \tag{1.50}$$

As integrais resultam em:

$$\ln|y| = \ln|1+x| + C \tag{1.51}$$

Para eliminar o logaritmo, exponenciamos ambos os lados:

$$|y| = e^{\ln|1+x|+C} = |1+x|e^{C} \tag{1.52}$$

Podemos reescrever da seguinte forma:

$$y = k(1+x) \tag{1.53}$$

onde $k = \pm e^{C}$ é uma constante arbitrária.

Portanto, a solução geral da equação diferencial é:

$$y = k(1+x) \tag{1.54}$$

Exemplo 2: (MODELAGEM)

A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de urn objeto varia a uma razäo proportional diferenca entre sua temperatura e a temperatura ambiente. Suponha que a temperatura de uma xicara de café obedece a Iei do resfriamento de Newton. Se o café esta a uma temperatura de 200 °F quando colocado na xlcara e 1 minuto depois esfriou e esta a 190 °F em uma sala a temperatura de 70 °F, determine quando o café alcanca a temperatura de 150 °F (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

Solução:

- **Definir a Equação Diferencial**

A Lei do Resfriamento de Newton é dada por:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \tag{1.55}$$

onde: $T(t)$ é a temperatura do objeto no tempo (t); Ta é a temperatura ambiente; k é uma constante de proporcionalidade positiva.

- **Substituir os Valores Dados**

Dados:

I) Temperatura inicial do café: $T(0) = 200°F$;

II) Temperatura do café após 1 minuto: $T(1) = 190°F$;

III) Temperatura ambiente: $T_a = 70°F$.

- **Separar as Variáveis**

A equação diferencial é: $\frac{dT}{dt} = -k(T - 70)$
Separando as variáveis, temos:
$\frac{dT}{(T-70)} = -kdt$

- **Integrar Ambos os Lados**

Integramos ambos os lados da equação:

$$\int \frac{1}{(T-70)} d = -k \int dt$$

$$ln|T - 70| + C_1 = -kt + C_2$$

$$ln|T - 70| = -kt + C_2 - C_1$$

$$ln|T - 70| = -kt + C$$

- **Determinar a Constante de Integração** (C)

Usando a condição inicial:

$$T(0) = 200°F$$

$$ln|T - 70| = -kt + C \Rightarrow ln|200 - 70| = -k.0 + C \Rightarrow ln|130| = C$$

Portanto,

$$ln|T - 70| = -kt + C \Rightarrow ln|T - 70| = -kt + ln|130|$$

- **Resolver para** (T)

  Isolanto (T):

$$|T-70| = e^{(-kt+ln|130|)}$$

$$|T-70| = e^{(-kt)}.e^{(ln|130|)}$$

  Como $T > 70$, podemos remover o valor absoluto:

$$T - 70 = 130.e^{(-kt)}$$

  Portanto,

$$T(t) = 70 + 130.e^{(-kt)}$$

- **Determinar a Constante** (k)

  Usando a condição:

$$T(1) = 190°F$$

:

$$T(t) = 70 + 130.e^{(-kt)}$$

$$190 = 70 + 130.e^{(-k)}$$

  Subtraindo 70 de ambos os lados: $120 = 130.e^{(-k)}$

  Dividindo ambos os lados por 130:

$$\frac{120}{130} = e^{(-k)}$$

Simplificando:

$$\frac{12}{13} = e^{(-k)}$$

  Tomando o logaritmo natural de ambos os lados:

$$-k = ln(12/13)$$

Portanto,

$$k = -ln(12/13)$$

- **Determinar o Tempo para** $T = 150°F$

Queremos encontrar (t) quando $T = 150°F$:

$$T(t) = 70 + 130.e^{(-kt)}$$

$$150 = 70 + 130.e^{(-kt)}$$

Subtraindo 70 de ambos os lados:

$$80 = 130.e^{(-kt)}$$

Dividindo ambos os lados por 130:

$$\frac{80}{130} = e^{(-kt)}$$

Simplificando:

$$\frac{8}{13} = e^{(-kt)}$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os lados:

$$-kt = ln(8/13)$$

Substituindo (k):

$$-k = ln(8/13)$$

$$-[-ln(12/13)t] = ln(8/13)$$

$$ln(12/13)t = ln(8/13)$$

$$t = ln(8/13)/ln(12/13)$$

- **Calcular o Valor de** (t)

Calculando os logaritmos:

$$ln(8/13) \approx -0,4855$$

$$ln(12/13) \approx -0,08$$

$$t = \frac{ln(8/13)}{ln(12/13)} \approx \frac{(-0,4855)}{(-0,08)} \approx -6,07$$

Portanto, o café alcançará a temperatura de $(150°F)$ aproximadamente $6,07$ minutos após ser colocado na xícara.

1.2.2 Método dos Fatores Integrantes para EDOs de Primeira Ordem

O método dos fatores integrantes é uma técnica eficaz para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares de primeira ordem. Este método é particularmente útil quando a equação diferencial não é facilmente separável.

1.2.2.1 Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem

As equações diferenciais lineares de primeira ordem são equações diferenciais que podem ser expressas na forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas de x.

1.2.2.2 Passos do Método dos Fatores Integrantes

1. **Identificação do Fator Integrante:** O fator integrante $\mu(x)$ é uma função que, quando multiplicada pela equação original, permite que ela seja escrita como uma derivada de um produto. O fator integrante é determinado por:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

2. **Multiplicação pela Equação Original:** Multiplicamos ambos os lados da equação diferencial original pelo fator integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

3. **Reescrita da Equação:** A equação resultante pode ser reescrita como a derivada de um produto:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right) = \mu(x)Q(x)$$

4. **Integração:** Integramos ambos os lados da equação em relação a x:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)\,dx + C$$

5. **Solução Geral:** Finalmente, isolamos y para obter a solução geral:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)\,dx + C\right)$$

Exemplo: Resolver a EDO linear $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 6$ (ZILL, 2016).

Solução:

- **Identificação do Fator Integrante:**

$$P(x) = -3, \quad \mu(x) = e^{\int -3\,dx} = e^{-3x}$$

- **Multiplicação pela Equação Original:**

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x}$$

- **Reescrita da Equação:**

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y\right) = 6e^{-3x}$$

- **Integrando a última equação:**

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{-3x}y\right)\,dx = 6\int e^{-3x}\,dx$$

$$e^{-3x}y = 6\left(\frac{-e^{-3x}}{3}\right) + C$$

$$e^{-3x}y = -2e^{-3x} + C$$

- **Solução Geral:**

$$y = -2 + Ce^{3x}$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial é:

$$y = \frac{-2e^{-3x}}{e^{-3x}} + \frac{C}{e^{-3x}}$$

$$y = -2 + Ce^{3x}$$

Exemplo 2: (Modelagem) Marca-passo cardíaco - Um marca-passo cardíaco consiste em uma chave, uma bateria de tensão constante E_0, um capacitor com capacitância constante C, e o coração como um resistor com resistência constante R. Quando a chave é fechada, o capacitor se carrega; quando a chave é aberta, o capacitor se descarrega, enviando um estímulo elétrico para o coração. Durante o tempo em que o coração é estimulado, a tensão E em todo o coração satisfaz a equação diferencial linear

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E$$

Resolva a equação diferencial sujeita a $E(4) = E_0$ (ZILL, 2016), p. 66.

Solução:

1. **Identificação da Equação:** A equação diferencial é uma EDO linear de primeira ordem e pode ser escrita na forma padrão:

$$\frac{dE}{dt} + \frac{1}{RC}E = 0$$

2. **Identificação do Fator Integrante:** O fator integrante $\mu(t)$ é dado por:

$$P(t) = \frac{1}{RC}, \quad \mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC}\,dt} = e^{\frac{t}{RC}}$$

3. **Multiplicação pela Equação Original:**

$$e^{\frac{t}{RC}}\frac{dE}{dt} + e^{\frac{t}{RC}}\frac{1}{RC}E = 0$$

4. **Reescrita da Equação:**

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{RC}}E\right) = 0$$

5. **Integração:**

$$e^{\frac{t}{RC}}E = C$$

onde C é uma constante de integração.

6. **Isolamento de E:** Isolamos E para obter a solução geral:

$$E = \frac{C}{e^(t/RC)} \Rightarrow E = Ce^{(-t/RC)}$$

$$E(t) = Ce^{-\frac{t}{RC}}$$

7. **Aplicação da Condição Inicial:** Usamos a condição inicial $E(4) = E_0$ para determinar a constante C:

$$E(4) = Ce^{\frac{-t}{RC})} \Rightarrow Ce^{\frac{-4}{RC}} = E_0 \Rightarrow C = \frac{E_0}{e^{\frac{-4}{RC}}}$$

8. **Substituímos (C) na solução geral:**

$$E(t) = Ce^{\frac{-t}{RC}} = \frac{E_0}{e^{\frac{-4}{RC}}}.e^{\frac{-t}{RC}} = E_0e^{(-t/RC-(-4/RC))} = E_0e^{(-t/RC+4/RC)} = E_0e^{\frac{(4-t)}{RC}}$$

Portanto, a solução da equação diferencial sujeita à condição inicial $E(4) = E0$ é:

$$E(t) = E_0e^{\frac{4-t}{RC}}$$

A solução encontrada mostra como a tensão E varia ao longo do tempo t no coração, considerando o comportamento de carga e descarga do capacitor no circuito do marca-passo cardíaco. Esta solução é fundamental para entender como o marca-passo mantém a estimulação elétrica necessária para o funcionamento adequado do coração.

1.3 Equações Diferenciais Exatas

Segundo Zill, uma expressão diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é considerada uma diferencial exata em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial de uma função $f(x, y)$ definida em $\mathbb{R}$. Em outras palavras, existe uma função (f) tal que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{1.56}$$

Neste contexto, uma equação diferencial de primeira ordem da forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.57}$$

é denominada equação diferencial exata se a expressão à esquerda for uma diferencial exata. Isso implica que as funções M e N devem satisfazer a condição de exatidão, que é expressa matematicamente por:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.58}$$

Quando essa condição é atendida, podemos afirmar que a equação diferencial possui uma solução na forma de uma função potencial $f(x, y)$, cuja diferencial total é igual à expressão diferencial original. A solução geral da equação diferencial exata pode ser expressa como:

$$f(x, y) = C \tag{1.59}$$

onde (C) é uma constante arbitrária.

A verificação da condição de exatidão e a subsequente determinação da função $f(x, y)$ são passos cruciais na resolução de equações diferenciais exatas. A integração das funções M e N em relação às suas respectivas variáveis, seguida da combinação dos

resultados, permite a construção da função potencial f. Esta abordagem sistemática garante que a solução da equação diferencial seja obtida de maneira rigorosa e precisa.
Exemplo: Resolva a EDO exata $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ (ZILL, 2016).
Solução:

- Verificar a Condição de Exatidão
  Primeiro, identificamos $M(x, y)$ e $N(x, y)$:

$$M(x, y) = 2xy \quad \text{e} \quad N(x, y) = x^2 - 1 \tag{1.60}$$

- Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \tag{1.61}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \tag{1.62}$$

  Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. a equação é exata.

- Encontrar a Função $f(x, y)$
  Para encontrar a função $f(x, y)$, integramos $M(x, y)$ em relação a (x):

$$f(x, y) = \int 2xydx = x^2y + g(y) \tag{1.63}$$

  onde $g(y)$ é uma função de y que será determinada.
  Derivamos $f(x, y)$ em relação a y e igualamos a $N(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y)x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \tag{1.64}$$

  Portanto,

$$g'(y) = -1g(y) = -y + C \tag{1.65}$$

  onde C é uma constante de integração.
  Assim, a função $f(x, y)$ é:

$$f(x, y) = x^2y - y + c \tag{1.66}$$

- Formar a Solução Geral
  A solução da equação diferencial é dada por:

$$f(x, y) = C \tag{1.67}$$

  Substituindo $f(x, y)$:

$$x^2y - y = C \tag{1.68}$$

  onde (C) é uma constante arbitrária.

Portanto a solução geral da equação diferencial exata $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ é:

$$x^2y - y = C \tag{1.69}$$

1.3.1 Equações Diferenciais de Bernoulli

As equações diferenciais de Bernoulli são equações diferenciais de primeira ordem e não lineares que podem ser transformadas em equações diferenciais lineares através de uma substituição apropriada. A equação de Bernoulli tem a seguinte forma geral:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{1.70}$$

onde $P(x)$, $Q(x)$ são funções de $y = y(x)$ é a função desconhecida, e n é um número real. Quando $n = 0$ ou $n = 1$, a equação se reduz a uma equação diferencial linear de primeira ordem.

1.3.1.1 Características da equação de Bernoulli

A equação é não linear devido ao termo y^n quando $n \neq 0$ ou $n \neq 1$. No entanto, para valores de n diferentes de 0 e 1, pode-se transformar a equação de Bernoulli em uma equação diferencial linear, usando uma substituição específica que simplifica a equação.

1) Multiplicamos a equação por y^{-n};

$$y^-n\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{1.71}$$

2) Fazer a substituição $z = y^{1-n}$, onde z é uma nova função de x. Então, a derivada de z em relação a x é:

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \tag{1.72}$$

ou seja,

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{1.73}$$

3) Multiplicar ambos os lados por $(1-n)$ para simplificar:

$$\frac{dy}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \tag{1.74}$$

Formando uma equação linear de primeira ordem na variável z.

Exemplo: Resolver a equação diferencial de Bernoulli $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y = xy^2$ (BOYCE; DIPRIMA, 2007. p.80)"não tem nas referências".
Solução:

1) Identificamos: $P(x) = 1/x$, $Q(x) = x$ e $n = 2$:

2) Multiplicamos por y^{-2}:

$$y^{-2} \cdot \left(\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\right) = xy^2 \cdot y^{-2} \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = x \tag{1.75}$$

3) Substituindo $z = y^{1-n}$, ou seja, $z = y^{1-2} \Rightarrow z = y^{-1}$, temos $y = z^{-1}$.

4) Derivando $y = z^{-1}$, em relação a x:

$$\frac{dy}{dx} = -z^{-2}\frac{dz}{dx} \tag{1.76}$$

5) Substituindo na equação de Bernoulli, temos:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2 \tag{1.77}$$

$$-z^{-2}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z^{-1} = xz^{-2} \tag{1.78}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -x \tag{1.79}$$

6) Fator de integração para essa equação linear em, digamos $(0, +\infty)$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|^{-1}} = e^{\log_e x^{-1}} = x^{-1} \tag{1.80}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}z] = -1 \tag{1.81}$$

7) Integrando $\dfrac{dy}{dx}[x^{-1}z] = -1$, obtemos:

$$x^{-1}z = -x + C \tag{1.82}$$

$$z = -x^2 + Cx \tag{1.83}$$

8) Substituindo $z = y^{-}1$, temos:

$$y^{-}1 = -x^2 + Cx \tag{1.84}$$

$$y = \frac{1}{-x^2 + Cx} \tag{1.85}$$

Exemplo: (MODELAGEM - **Crescimento populacional**) No estudo de dinâmica de populações, um dos modelos mais famosos para uma população que cresce mais tem limitações é a **equação logística**

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) \tag{1.86}$$

em que a e b são constantes positivas, resolva a equação diferencial levando em conta o fato de que ela é uma equação de Bernoulli.
Solução:

- Reescrever a Equação
  A equação diferencial logística é:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) \tag{1.87}$$

Podemos rearranjar a equação para a forma padrão de uma equação de Bernoulli:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

Reescrevendo:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$$

$$\frac{dP}{dt} - aP = -bP^2$$

Identificamos: $P(t) = -a$, $Q(t) = -b$ e $n = 2$.

Multiplicamos por P^{-2}:

$$\left(\frac{dP}{dt} - aP = -bP^2\right) P^{-2} \Rightarrow P^{-2}\frac{dP}{dt} - aP^{-1} = -b$$

Substituindo $z = P^{1-n}$, ou seja, $z = P^{-1}$, temos $P = z^{-1}$.

Derivando $P = z^{-1}$ em relação a t:

$$\frac{dP}{dt} = -z^{-2}\frac{dz}{dt}$$

Substituindo na equação de Bernoulli:

$$-z^{-2}\frac{dz}{dt} - az^{-1} = -bz^{-2}$$

Multiplicamos por $-z^2$:

$$dz/dt + az = b$$

O fator de integração para essa equação linear é:

$$e^{\int -adt} = e^{-at}$$

Resolvendo:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-at}z\right) = b$$

Integrando:

$$\int \frac{d}{dt}\left(e^{-at}z\right) dt = b\int e^{-at}dt$$

o que resulta em:

$$e^{-at}z + C_1 = \frac{-b}{a}e^{-at} + C_2$$

$$e^{-at}z = \frac{-b}{a}e^{-at} + C$$

Substituindo $z = P^{-1}$:

$$e^{-at}P^{-1} = \frac{-b}{a}e^{-at} + C$$

Multiplicamos por e^{at}:

$$P^{-1} = \frac{-b}{a} + \frac{C}{e^{-at}}$$

Finalmente, a solução geral é:

$$P = \frac{1}{\frac{-b}{a} + \frac{C}{e^{-at}}}$$

Portanto a solução geral da equação logística $\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$, usando o método de Bernoulli, é:

$$P(t) = \frac{1}{-\frac{b}{a} + C \cdot e^{at}}$$

onde C é determinada pelas condições iniciais do problema.

1.3.2 Equações Diferenciais de Ricatti

As equações diferenciais de Riccati são um tipo especial de equação diferencial não linear, nomeada em homenagem ao matemático italiano Jacopo Riccati. Elas aparecem em diversas áreas da matemática e da física e têm a forma geral:

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

onde $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são funções conhecidas de x e $y = y(x)$ é a função desconhecida.

1.3.2.1 Características da Equação de Riccati

- A equação de Riccati é uma equação de primeira ordem e não linear devido ao termo y^2.
- Ela tem uma estrutura quadrática em relação à função y.
- As equações de Riccati não podem ser resolvidas diretamente por métodos simples de equações diferenciais lineares, exceto em alguns casos especiais, como quando é possível reduzir a equação a uma forma linear.

1.3.2.2 Resolução da Equação de Riccati

Se conhecermos uma solução particular $y_1(x)$ da equação de Riccati, podemos transformar a equação original em uma equação diferencial linear. Para isso, fazemos a seguinte mudança de variável:

$$y = y_1 + u \tag{1.88}$$

Derivando em relação a x, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} \tag{1.89}$$

- Substituindo essa expressão na equação original, obtemos:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1 + u)^2$$

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)y_1 + Q(x)u + R(x)y_1^2 + 2R(x)y_1u + R(x)u^2$$

$$\underbrace{\left[\frac{dy_1}{dx} - P(x) - Q(x)y_1 - R(x)y_1^2\right]}_{=0} + \frac{du}{dx} = Q(x)u + 2R(x)y_1u + R(x)u^2$$

$$\frac{du}{dx} = Q(x)u + 2R(x)y_1u + R(x)u^2$$

$$\underbrace{\frac{du}{dx} - [Q(x) + 2R(x)y_1]u = R(x)u^2}_{\text{É uma equação de Bernoulli}}$$

Temos uma equação diferencial linear de 1ª ordem.

Exemplo: Resolva a equação de Riccati dada, sendo y_1 uma solução conhecida para a equação:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2, \quad y_1 = -e^x.$$

Solução: Sendo $y_1 = -e^x$, uma solução particular para a equação, temos:

$$\frac{dy}{dt} = (1 - y)[x(t) + by]$$

$$\frac{du}{dt} = [1 - (1 + u)][x(t) + b(1 + u)]$$

$$\frac{du}{dt} = (1 - 1 - u)[x(t) + b + bu]$$

$$\frac{du}{dt} = (-u)[x(t) + b + bu]$$

$$\frac{du}{dt} = -ux(t) - ub - bu^2$$

$$\frac{du}{dt} + ux(t) + ub = -bu^2$$

$$\frac{du}{dt} + [x(t) + b]u = -bu^2$$

(EDO de Bernoulli)

Para transformar essa equação em uma equação linear, fazemos a substituição de variável $u = \frac{1}{v}$, e em seguida derivamos u em relação a t:

$$\frac{du}{dt} = -v^{-2}\frac{dv}{dt}$$

Substituímos na equação original:

$$\frac{du}{dt} + [x(t) + b]u = -bu^2$$

$$-v^{-2}\frac{dv}{dt} + [x(t) + b]v^{-1} = -bv^{-2}$$

Multiplicamos por $-v^2$:

$$\frac{dv}{dt} - [x(t) + b]v = b$$

Portanto, a equação linear satisfeita por $x(t)$ é representada por:

$$v' - [x(t) + b]v = b$$

Exemplo 2: (Modelagem - Adaptada) A propagação de uma única ação em uma população grande (por exemplo, motoristas ligando os faróis ao pôr do sol) muitas vezes depende parcialmente de circunstâncias externas (o escurecer) e parcialmente de uma tendência de imitar os outros que já executaram a ação. Nesse caso, a proporção $y(t)$ de pessoas que já executaram a ação pode ser descrita pela equação:

$$\frac{dy}{dt} = (1 - y)[x(t) + by] \tag{1.90}$$

onde $x(t)$ mede o estímulo externo e b é o coeficiente de imitação. Note que a Eq.(1.90) é uma equação de Riccati e que $y_1(t) = 1$ é uma solução. Encontre a equação linear satisfeita por $x(t)$.

Solução:

- Solução particular: $y_1(t) = 1 \Rightarrow y = 1 + u$
- Derivando em relação a t, temos:

$$y = 1 + u \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt}$$

- Substituindo na equação original, temos:

$$\frac{dy}{dt} = (1-y)[x(t)+by] \Rightarrow \frac{du}{dt} = [1-(1+u)][x(t)+b(1+u)]$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = (-u)[x(t)+b+bu]$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = -ux(t) - ub - u^2 b$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + ux(t) + ub = -u^2 b$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + [x(t)+b]u = -u^2 b \Rightarrow \text{EDO de primeira ordem não linear (EDO de Bernoulli)}$$

- Para transformar essa equação em uma equação linear, fazemos a substituição de variável $u = \frac{1}{v}$ e derivamos (u) em relação a (t):

$$\frac{du}{dt} = -v^{-2}\frac{dv}{dt}$$

  Substituímos na equação original:

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} + [x(t)+b]u = -bu^2 \Rightarrow -v^{-2}\frac{dv}{dt} + [x(t)+b]v^{-1} = -bv^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} - [x(t)+b]v = b$$

  Portanto, a equação linear satisfeita por $x(t)$ é representada por:

$$v' - [x(t)+b]\,v = -b$$

1.4 Equações de Diferenças Lineares

As equações de diferenças são ferramentas matemáticas fundamentais para a modelagem de fenômenos que ocorrem em intervalos discretos de tempo ou espaço. Elas descrevem relações entre os valores de uma variável dependente, que variam conforme pontos específicos de uma variável independente, como o tempo. Em muitos casos, assume-se que os valores da variável independente são espaçados uniformemente, isto é, $t_{n+1} - t_n = k$, onde

k representa a distância entre dois pontos consecutivos. Para simplificação e conveniência, costuma-se adotar $k = 1$, o que reflete uma evolução em passos unitários, sendo uma abordagem prática em diversas aplicações.

A solução de uma equação de diferenças é uma expressão funcional que não depende de diferenças entre termos e é aplicável a todos os números naturais $n \in \mathbb{N}$. Essa solução deve satisfazer a equação de diferenças, transformando-a em uma identidade. Embora a solução de uma equação de diferenças seja obtida por um processo recursivo, nem sempre é possível determinar explicitamente a solução geral quando a equação não é linear.

A forma geral de uma equação de diferenças linear de ordem $(n - m)$ pode ser representada por:

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_m y_{n-m} \tag{1.91}$$

ou de forma mais compacta:

$$y_n = \sum_{k=1}^{m} a_k y_{n-k} \tag{1.92}$$

onde a_k são constantes, $m < n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, e são fornecidas $(n - m)$ condições iniciais (BASSANEZI, 2002).

Exemplo 1: A equação de diferenças associada à sequência de Fibonacci é:

$$F_n = F(n-1) + F(n-2) \tag{1.93}$$

com condições iniciais $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$.

Para encontrar a solução geral dessa equação de diferenças, buscamos uma expressão que não dependa diretamente das diferenças entre termos. A solução fechada para essa equação é dada pela fórmula de Binet:

$$f(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \tag{1.94}$$

Essa expressão fornece o valor de F(n) diretamente para qualquer número natural n, sem a necessidade de calcular todos os termos anteriores.

No contexto do problema, a solução geral da equação de diferenças, representada pela fórmula de Binet neste caso, é uma relação funcional definida para todos os números naturais $n \in \mathbb{N}$, e não envolve diferenças entre termos consecutivos.

1.4.1 Equação de Diferenças lineares de Primeira Ordem

Uma equação de diferenças de primeira ordem é um caso específico da equação geral, onde $(n - m) = 1$. Ela é expressa como:

$$\begin{cases} y_n = \beta y_{n-1}, \\ y_0 = a \text{ (valor inicial dado).} \end{cases} \tag{1.95}$$

O processo recursivo para resolver essa equação é:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta a \\ y_2 &= \beta y_1 = \beta^2 a \\ y_3 &= \beta y_2 = \beta^3 a \\ &\vdots \\ y_n &= \beta y_{n-1} = \beta^n a \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação é:

$$y_n = y_0 \beta^n$$

Uma maneira de resolver a equação é assumir que a solução tem a forma:

$$y_n = k\lambda^n$$

Substituindo essa expressão na equação, obtemos:

$$k\lambda^n = \beta k \lambda^{n-1}$$

Simplificando, temos:

$$k\lambda^{n-1}(\lambda - \beta) = 0$$

Isso implica que:

$$\begin{cases} \lambda = 0, \\ \text{ou} \\ \lambda = \beta. \end{cases}$$

Considerando que para $n = 0$ devemos ter $y_0 = k\lambda^0$, então $k = y_0$. Portanto, a solução é:

$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } y_0 = 0 \\ y_0\lambda^n, & \text{se } y_0 \neq 0 \end{cases}$$

Observamos que quando $y_0 \neq 0$, podemos ter:

- Se $|\lambda| < 1$; então y_n é convergente, isto é, dado $\varepsilon > 0$; existe um número natural n_0 tal que, se $n > n_0$ então $|y_n - y^*| < \varepsilon$;
- Se $|\lambda| = 1$; então y_n é constante se $\lambda = 1$ e é oscilante entre dois valores se $\lambda = -1$;
- Se $|\lambda| > 1$; então y_n é divergente, ou seja, $\lim\limits_{n \Rightarrow \infty} y_n = \pm\infty$ (BASSANEZI, 2002).

Exemplo 2: Crescimento Populacional

Suponha que a população de uma certa cidade no ano 0 (P_0) seja de 1.000 habitantes e que a taxa de crescimento anual seja de 10% (ou $0,10$). Queremos modelar e prever a população da cidade após (n) anos.

Resolução:

A equação de diferenças de primeira ordem é expressa por:

$$P_n = \beta P_{n-1}$$

Onde:

- P_n é a população no ano n.
- β é a taxa de crescimento ($1 +$ taxa de crescimento anual).
- População inicial P_0: 1.000 habitantes.
- Taxa de crescimento: $1 + 0,10 = 1,10$.

a) Solução Recursiva: Usando a fórmula recursiva para calcular a população nos primeiros anos:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \beta P_0 = (1,10) \cdot P_0, \\
P_2 &= \beta P_1 = (1,10) \cdot (1,10) \cdot P_0 = (1,10)^2 \cdot P_0, \\
P_3 &= \beta P_2 = (1,10)^3 \cdot P_0, \\
&\vdots \\
P_n &= (1,10)^n \cdot P_0 = \beta^n \cdot P_0.
\end{aligned} \tag{1.96}$$

Substituindo os valores de P_0 e β, temos:

$$P_n = 1000 \cdot (1,10)^n \tag{1.97}$$

Análise de Convergência

- Se $\beta < 1$: A população tenderia a diminuir e se estabilizar em zero.
- Se $\beta = 1$: A população permaneceria constante.
- Se $\beta > 1$: A população cresce exponencialmente, como é o caso deste exemplo (1.97).

b) Solução Alternativa:

- Outra maneira de resolver a equação é assumir que a solução tem a forma:

$$P_n = k\lambda^n \tag{1.98}$$

- Substituindo essa expressão na equação, obtemos:

$$k\lambda^n = \beta k \lambda^{n-1} \tag{1.99}$$

- Simplificando, temos:
$$k\lambda^{n-1}(\lambda - \beta) = 0 \tag{1.100}$$

- Isso implica que:
$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \beta \tag{1.101}$$

  Considerando que para $n = 0$ devemos ter $P_0 = k\lambda^0$, então $k = P_0$. Portanto, a solução é:
$$P_n = \begin{cases} 0, & \text{se } P_0 = 0 \\ P_0\beta^n, & \text{se } P_0 \neq 0 \end{cases} \tag{1.102}$$

Comportamento da Solução
Observamos que quando $P_0 \neq 0$, podemos ter:

- Se $|\beta| < 1$; então P_n é convergente, isto é, dado $\varepsilon > 0$; existe um número natural n_0 tal que, se $n > n_0$, então $|P_n - P^*| < \varepsilon$;
- Se $|\beta| = 1$; então P_n é constante se $\beta = 1$ e é oscilante entre dois valores se $\beta = -1$;
- Se $|\beta| > 1$; então P_n é divergente, ou seja, $\lim\limits_{n \Rightarrow \infty} P_n = \pm\infty$, como é o caso deste exemplo (1.97).

Exemplo 3: (Adaptada) Uma determinada população de insetos com 100 indivíduos, duplica seu número em cada geração, porém 10 novos indivíduos se incorporam em cada geração procedente de outro lugar. Construir uma equação de diferenças que modele esta situação (Bertone, R. A. and et al., 2015).
Resolução:

- Equação de Diferenças linear, não homogênea e autônoma:
$$\begin{cases} y_n = 2y_{n-1} + 10 \\ y_0 = 100 \end{cases} \tag{1.103}$$

a) Solução Recursiva: Calculando os primeiros termos:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2y_0 + 10 = 2 \cdot 100 + 10, \\
y_2 &= 2y_1 + 10 = 2 \cdot (2 \cdot 100 + 10) + 10 = 2 \cdot 2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 10 = 4 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 10, \\
y_3 &= 2y_2 + 10 = 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 10) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 100 + 2 \cdot 2 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 10 \\
&= 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 10, \\
&\vdots \\
y_n &= \underbrace{2 \cdots 2}_{n \text{ fatores}} \cdot 100 + \underbrace{2 \cdots 2}_{n-1 \text{ fatores}} \cdot 10 + \cdots + 2 \cdot 10 + 10 \\
y_n &= 2^n \cdot 100 + 2^{n-1} \cdot 10 + \cdots + 2 \cdot 10 + 10 \\
y_n &= 2^n \cdot 100 + \underbrace{(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots 1)}_{\text{soma dos termos de uma PG de razão 2}} \cdot 10 \\
y_n &= 2^n \cdot 100 + (2^n - 1) \cdot 10 \\
y_n &= 2^n \cdot 100 + 2^n \cdot 10 - 10 \\
y_n &= 2^n \cdot (100 + 10) - 10 \\
y_n &= 2^n \cdot 110 - 10.
\end{aligned}
$$

$$2 \cdots 2 = \underbrace{2 \cdots 2}_{n \text{ fatores}}$$

Portanto a solução geral da equação de diferenças é:

$$y_n = 2^n \cdot 110 - 10 \tag{1.104}$$

Análise de Convergência:

- Se ($\beta < 1$): A população tenderia a diminuir e se estabilizar em zero.
- Se ($\beta = 1$): A população permaneceria constante.
- Se ($\beta > 1$): A população cresce exponencialmente, como é o caso deste exemplo (1.104).

b) Solução Alternativa:

- Outra maneira de resolver a equação é assumir que a solução tem a forma:

$$y_n = k\lambda^n \tag{1.105}$$

- Substituindo essa expressão na equação, obtemos:

$$k\lambda^n = \beta k\lambda^{n-1} \tag{1.106}$$

- Simplificando, temos:
$$k\lambda^{n-1}(\lambda - \beta) = 0 \tag{1.107}$$

- Isso implica que:
$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \beta \tag{1.108}$$

- Considerando que para $n = 0$ devemos ter $y_0 = k\lambda^0$, então $k = y_0$. Portanto, a solução é:
$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } y_0 = 0 \\ y_0\beta^n, & \text{se } y_0 \neq 0 \end{cases} \tag{1.109}$$

Comportamento da Solução Observamos que quando $y_0 \neq 0$, podemos ter:

- Se $|\beta| < 1$; então y_n é convergente, isto é, dado $\epsilon > 0$; existe um número natural n_0 tal que se $n > n_0$ então $|y_n - y^*| < \epsilon$;
- Se $|\beta| = 1$; então y_n é constante se $\beta = 1$ e é oscilante entre dois valores se $\beta = -1$;
- Se $|\beta| > 1$; então y_n é divergente, ou seja, $y_n = \pm\infty$, como é o caso deste exemplo (1.104).

2 Análise da Evolução do Crescimento Populacional: De Euler a Verhulst

O estudo do crescimento populacional é uma área fundamental na matemática aplicada, pois oferece insights cruciais sobre como as populações se comportam ao longo do tempo. Esses modelos matemáticos são essenciais para a formulação de políticas públicas, planejamento urbano, gestão de recursos naturais e saúde pública. O objetivo desta análise é traçar a evolução dos modelos de crescimento populacional, começando pela abordagem exponencial de Leonhard Euler e culminando no modelo logístico de Pierre-François Verhulst. Através da discussão das contribuições de cada matemático, destacaremos como suas ideias formaram a base para a teoria contemporânea da dinâmica populacional.

2.1 Leonhard Euler $(1707 - 1783)$: O Pioneiro do Crescimento Exponencial

Leonhard Euler é um dos pioneiros na modelagem matemática do crescimento populacional. Em seu tratado "Introdução à Análise do Infinito", publicado em 1748, ele apresentou o modelo de crescimento exponencial, que é descrito pela equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = rN \tag{2.1}$$

2.1.1 Solução da Equação

A solução dessa equação fornece a população em função do tempo:

$$P(t) = P_0 e^{rt} \tag{2.2}$$

onde:

- $P(t)$ é a população no tempo (t).
- P_0 é a população inicial.
- (r) é a taxa de crescimento.
- (e) é a base do logaritmo natural.

Essa equação assume que a taxa de crescimento (r) é constante e que não há limitações ambientais ou recursos limitados. Portanto, ela descreve um crescimento ilimitado e contínuo, o que não é realista para a maioria das populações naturais. Euler também combinou o crescimento exponencial com a estrutura etária da população, precursor da teoria das populações estáveis, desenvolvida no século XX.

2.1.2 Análise do Modelo

O modelo exponencial de Euler assume que a população cresce de maneira ilimitada. Ao aplicar esta equação, Euler demonstrou que uma população inicial de 100.000 habitantes, com uma taxa de crescimento de 1/30 por ano, poderia atingir aproximadamente 2.654.874 em 100 anos. Esse resultado ilustra a capacidade do modelo de prever um crescimento populacional robusto em condições ideais (BACAëR, 2021).

2.1.3 Vantagens do Modelo de Euler

- **Simplicidade:** A equação é direta e fácil de entender, permitindo previsões rápidas sobre o crescimento populacional.
- **Aplicabilidade**: É útil para descrever populações em condições de abundância de recursos, como em fases iniciais de crescimento.

2.1.4 Desvantagens do Modelo de Euler

- **Ausência de Limitações:** O modelo ignora as limitações impostas pelo ambiente, como competição por recursos, doenças e outras restrições que podem ocorrer a longo prazo.
- **Crescimento Irrealista:** Sugere um crescimento populacional indefinido, que não reflete a realidade observada em ecossistemas naturais.

Além disso, Euler ajudou Johann Peter Süssmilch na segunda edição de seu tratado sobre demografia, elaborando um modelo semelhante à sequência de Fibonacci para populações humanas. Este modelo considerava casamentos aos 20 anos, mortes aos 40 e seis filhos por casal, resultando em uma progressão geométrica de nascimentos.

2.2 Daniel Bernoulli $(1700 - 1782)$: Contribuições à Dinâmica Populacional

Daniel Bernoulli foi um dos primeiros a aplicar a matemática à epidemiologia. Em seu trabalho de 1760 sobre a varíola, ele introduziu o conceito de variáveis demográficas em modelos populacionais. Seu modelo considerou a taxa de infecção e a mortalidade associada à varíola, resultando em um impacto significativo na saúde pública.

2.2.1 Modelo de Bernoulli para a Varíola

A equação diferencial que Bernoulli utilizou é:

$$\frac{dS}{dx} = -qS - m(x)S \tag{2.3}$$

onde:

- $S(x)$ representa o número de indivíduos suscetíveis à infecção;
- q é a taxa de infecção;
- $m(x)$ é a taxa de mortalidade por outras causas.

Bernoulli demonstrou que a inoculação contra a varíola poderia aumentar a expectativa de vida, provando que o risco de morte pela doença poderia ser mitigado. Ele concluiu que, se a mortalidade da varíola fosse inferior a 11%, a inoculação aumentaria a expectativa de vida média da população (BACAëR, 2021).

2.2.2 Impacto

A introdução de variáveis demográficas por Bernoulli criou uma ponte entre o crescimento populacional e a saúde pública, permitindo a aplicação de modelos matemáticos para abordar questões de saúde coletiva.

2.2.3 Vantagens do Modelo de Bernoulli

- **Relevância na Saúde Pública:** O modelo possibilitou o desenvolvimento de políticas de saúde baseadas em dados matemáticos, especialmente no controle de epidemias.
- **Integração de Fatores Demográficos:** A inclusão da mortalidade por doenças é fundamental para entender a dinâmica de populações em contextos de saúde.

2.2.4 Desvantagens do Modelo de Bernoulli

- **Complexidade:** O modelo é mais complexo do que o de Euler e requer dados epidemiológicos específicos para ser aplicado efetivamente.
- **Limitação a Doenças:** Foca principalmente nas doenças infecciosas, desconsiderando outros fatores que podem afetar a dinâmica populacional.

2.3 Thomas Robert Malthus $(1766 - 1834)$: O Alerta sobre os Limites do Crescimento

Thomas Malthus é conhecido por sua teoria que contrasta o crescimento populacional geométrico com o crescimento aritmético dos recursos. Ele argumentou que, enquanto a população pode crescer exponencialmente, os recursos, como alimentos, crescem apenas de forma linear, o que leva a uma inevitável crise de subsistência.

2.3.1 Equação Diferencial Ordinária (EDO)

O modelo de Malthus, ou modelo exponencial, descreve a taxa de variação da população, (P), em relação ao tempo, (t), através da seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dP}{dt} = rP \tag{2.4}$$

Ele alertou que a população, se não controlada, superaria os recursos disponíveis, resultando em crises de fome, guerras e epidemias (BACAëR, 2021).

2.3.2 Análise

Malthus não forneceu um modelo matemático específico, mas suas considerações sobre os limites ao crescimento e a relação entre a população e os recursos disponíveis foram fundamentais para as discussões contemporâneas sobre sustentabilidade e controle populacional.

2.3.3 Impacto

- **Influência no Pensamento Econômico:** Malthus moldou o pensamento econômico e demográfico, enfatizando a importância dos recursos na dinâmica populacional.
- **Relevância Atual:** Suas ideias ainda são debatidas em contextos contemporâneos, especialmente nas discussões sobre crescimento populacional e sustentabilidade.

2.3.4 Vantagens do Modelo de Malthus

- **Perspectiva Socioeconômica:** Malthus introduziu uma análise que considera as limitações sociais e econômicas no crescimento populacional.
- **Alerta para Crises:** Sua teoria chama atenção para os riscos de crises quando o crescimento populacional não é gerenciado adequadamente.

2.3.5 Desvantagens do Modelo de Malthus

- **Visão Pessimista:** O modelo é frequentemente considerado excessivamente pessimista, não levando em conta inovações tecnológicas que poderiam aumentar a capacidade de suporte.
- **Falta de Modelagem Matemática:** A ausência de uma equação matemática clara limita a aplicabilidade de suas teorias.

Thomas Robert Malthus destacou a discrepância entre o crescimento exponencial da população e o crescimento linear dos recursos, alertando para possíveis crises de subsistência. Embora suas ideias tenham influenciado profundamente o pensamento econômico e demográfico, sua visão é frequentemente vista como pessimista, subestimando o impacto das inovações tecnológicas. Apesar de não ter desenvolvido um modelo matemático formal, suas teorias continuam relevantes nas discussões sobre sustentabilidade e controle populacional, servindo como um alerta sobre a importância de gerenciar o crescimento populacional de forma equilibrada e sustentável.

2.4 Pierre François Verhulst $(1804-1849)$ Introdução da Capacidade de Carga

Pierre-François Verhulst, matemático belga, desenvolveu o modelo logístico em 1838, revolucionando a compreensão do crescimento populacional. Este modelo introduziu o conceito fundamental de capacidade de carga, refinando significativamente as teorias anteriores de crescimento populacional

2.4.1 Equação Logística

A equação logística de Verhulst é expressa como:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) \tag{2.5}$$

Onde:

- $P(t)$ é a população no tempo (t);
- (r) é a taxa de crescimento intrínseca;
- (K) é a capacidade de suporte do ambiente ou o valor máximo que a população pode atingir.

Verhulst argumentou que, à medida que a população cresce, a taxa de crescimento diminui à medida que se aproxima de K, resultando em uma curva sigmoidal que descreve o crescimento populacional. A estabilização ocorre quando a população atinge a capacidade máxima de suporte do ambiente (BACAëR, 2021).

2.4.2 Análise do Modelo

O modelo logístico é caracterizado por um crescimento limitado, onde a população cresce rapidamente no início, desacelera conforme se aproxima da capacidade de suporte e, eventualmente, estabiliza. Isso fornece uma descrição mais precisa das dinâmicas populacionais observadas na natureza.

2.4.3 Contribuição

- **Síntese das Ideias Anteriores:** Verhulst foi fundamental ao integrar as ideias de crescimento exponencial de Euler e as considerações de limites de Malthus em um modelo mais realista.

2.4.4 Vantagens do Modelo Logístico

- **Realismo e Relevância:** O modelo logístico é amplamente utilizado na biologia e na ecologia para descrever o crescimento de populações em ambientes limitados.
- **Abordagem Flexível:** O modelo permite ajustar a taxa de crescimento e a capacidade de suporte, possibilitando sua aplicação em diferentes contextos.

2.4.5 Desvantagens do Modelo Logístico

- **Assunções Fixas:** O modelo assume uma capacidade de suporte constante, o que pode não refletir realidades dinâmicas em ambientes que mudam.
- **Desconsideração de Fatores Externos:** O modelo não leva em conta eventos como migrações ou desastres que podem influenciar drasticamente a dinâmica populacional.

A transição das equações de crescimento populacional de Euler à Verhulst representa um avanço significativo na modelagem matemática do crescimento populacional. Enquanto a equação de Euler é útil para entender o crescimento inicial de uma população, a equação de Malthus introduz a ideia de crescimento geométrico, e a equação de Verhulst fornece uma visão mais completa e realista, incorporando os limites impostos pelo ambiente. A contribuição de Malthus, ao destacar os obstáculos ao crescimento geométrico, também foi crucial para o desenvolvimento dessas teorias. Essa evolução reflete a crescente sofisticação na compreensão dos processos biológicos e ecológicos que governam as populações, fornecendo uma base sólida para estudos demográficos e ecológicos contemporâneos.

3 Aplicação do Modelo Logístico de Verhulst

Pierre François Verhulst, um matemático belga nascido em 1804, é amplamente reconhecido por sua contribuição significativa ao estudo do crescimento populacional. Em 1838, Verhulst publicou o artigo “Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement” (VERHULST, 1838), no qual apresentou o modelo logístico. Este modelo surgiu como uma resposta às previsões de crescimento ilimitado propostas por Thomas Malthus. Verhulst introduziu a ideia inovadora de que o crescimento populacional é autocontrolado pela limitação de recursos do ambiente. Ele postulou que, enquanto o crescimento inicial de uma população pode ser exponencial, ele inevitavelmente desacelera e se estabiliza à medida que a população se aproxima da capacidade de suporte do ambiente. Este conceito foi um marco, pois incorporava a noção de sustentabilidade no crescimento populacional, refletindo um entendimento mais profundo das interações ecológicas.

3.1 Definição do Modelo de Verhulst

O modelo de Verhulst, também conhecido como modelo logístico, é uma equação diferencial que descreve o crescimento populacional considerando a capacidade limitada de recursos. A equação é formulada como:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

onde:

- $P(t)$ é o tamanho da população no tempo t;
- r representa a taxa intrínseca de crescimento da população;
- K é a capacidade de suporte do ambiente, ou seja, o limite máximo que o ambiente pode sustentar.

3.1.1 Dedução da Equação do Modelo

A equação diferencial do modelo logístico é deduzida considerando que a taxa de crescimento da população $\frac{dP}{dt}$ é proporcional à população atual P e ao fator de limitação $\left(1 - \frac{P}{K}\right)$. Este fator representa a fração de recursos disponíveis, decrescendo linearmente conforme P se aproxima de K.

Para resolver a equação:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Primeiro, separamos as variáveis:

$$\int \frac{1}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)}\,dP = \int r\,dt$$

Utilizando frações parciais, podemos escrever:

$$\frac{1}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P}$$

Resolvendo, encontramos $A = 1$ e $B = 1$, resultando em:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right) dP = \int r\,dt$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\ln|P| - \ln|K-P| = rt + C$$

onde C é a constante de integração. Reescrevendo, temos:

$$\ln\left(\frac{P}{K-P}\right) = rt + C$$

Exponenciando ambos os lados, obtemos:

$$\frac{P}{K-P} = e^{rt+C}$$

Definindo $e^C = \dfrac{P_0}{K-P_0}$, onde P_0 é a população inicial, a solução geral é:

$$P(t) = \frac{KP_0}{(K-P_0)e^{-rt} + P_0}$$

Comportamento da Solução

- Inicialmente ($t = 0$): A população começa em P_0. A solução verifica a condição inicial, pois:

$$P(0) = \frac{KP_0}{(K-P_0)e^0 + P_0} = \frac{KP_0}{(K-P_0)+P_0} = \frac{KP_0}{K-P_0+P_0} = \frac{KP_0}{K} = P_0$$

- À medida que $t \to \infty$: O termo $e^{-rt} \to 0$. Assim, a solução se aproxima de:

$$P(\infty) \approx \frac{KP_0}{P_0} = K$$

Isso indica que a população estabiliza em torno da capacidade de suporte K, refletindo a limitação de recursos disponíveis no ambiente.

Importância dos Parâmetros

- r **(Taxa de Crescimento)**
  - Determina a rapidez inicial do crescimento populacional.
  - Um valor maior de r implica um crescimento mais rápido, mas não altera o valor final de estabilização K.
- K **(Capacidade de Suporte)**
  - Representa o ponto de equilíbrio onde os recursos são suficientes para sustentar a população.
  - É o valor assintótico que a população atinge conforme $t \to \infty$.

O modelo logístico captura a dinâmica do crescimento populacional em ambientes naturais. Inicialmente, a população cresce rapidamente devido à abundância de recursos. No entanto, à medida que a população se aproxima da capacidade de suporte K, o crescimento desacelera e eventualmente estabiliza, refletindo a realidade de recursos limitados. Este modelo é amplamente utilizado em ecologia e planejamento de recursos para prever comportamentos populacionais sustentáveis.

3.1.2 Gráfico do modelo gerado no software R Studio

Para ilustrar o comportamento do modelo logístico, podemos utilizar a linguagem de programação R para gerar um gráfico. O código a seguir demonstra como isso pode ser feito:

```
# Parâmetros do modelo
r <- 0.1  # Taxa de crescimento
K <- 1000 # Capacidade de suporte
P0 <- 10  # População inicial

# Função para calcular P(t)
logistic_growth <- function(t, r, K, P0) {
  K * P0 / ((K - P0) * exp(-r * t) + P0)
}

# Gerar dados para o gráfico
t_values <- seq(0, 100, by = 0.1)
P_values <- logistic_growth(t_values, r, K, P0)

# Plotar o gráfico
```

```
plot(t_values, P_values, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
     xlab = "Tempo", ylab = "População",
     main = "Crescimento Logístico da População")
abline(h = K, col = "red", lty = 2) # Linha de capacidade de suporte
```

Gráfico do modelo

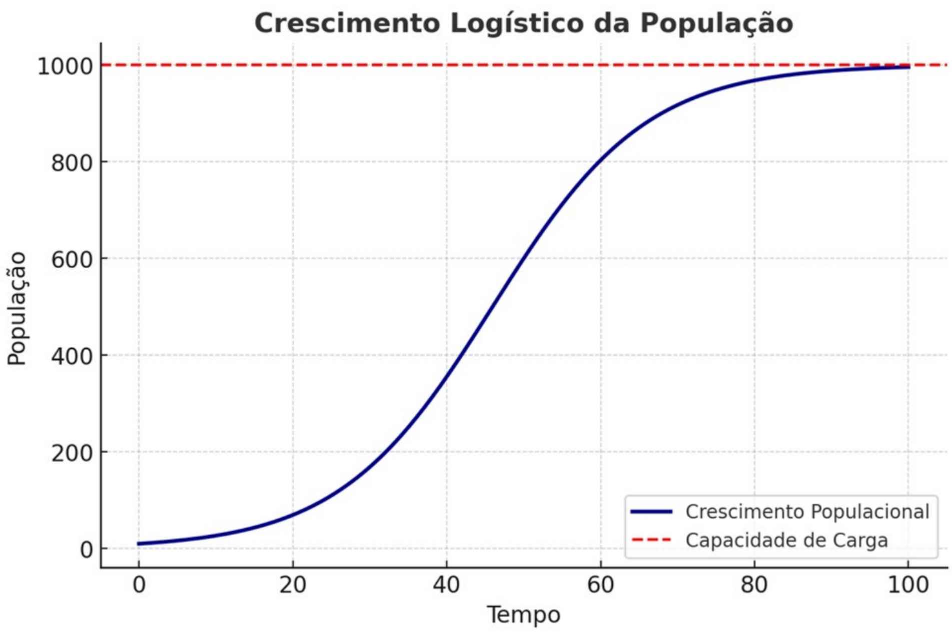

Figura 1 – Crescimento Logístico da População

3.2 Análise do Crescimento Populacional Mundial Usando o Modelo Logístico de Verhulst

O estudo do crescimento populacional mundial é um tema amplamente discutido, especialmente devido às limitações impostas pelos recursos naturais do planeta. Inicialmente, o crescimento da população segue um padrão exponencial, mas à medida que os recursos se tornam escassos, esse crescimento desacelera e eventualmente se estabiliza. Para modelar esse comportamento, utiliza-se o modelo logístico de Verhulst, uma ferramenta eficaz para descrever o crescimento de populações sujeitas a restrições ambientais.

O modelo logístico é expresso pelo seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right), \quad P(0) = P_0 = 2,518629$$

onde

- $P(t)$ é a população mundial no tempo t;

- r representa a taxa máxima de crescimento populacional;
- K é a capacidade de suporte da Terra, definida como o número máximo de habitantes que o planeta pode sustentar.

Neste estudo, adotamos $r = 0,026$ e $K = 12$ bilhões de habitantes, conforme proposto por (RODRIGUES; HAUSER, 2014).

3.2.1 Solução Analítica (Abordagem Contínua)

A solução analítica desta equação diferencial é dada por:

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$$

onde A é calculado pela equação:

$$A = \frac{K - P_0}{P_0}$$

3.2.1.1 Cálculos da Abordagem Contínua

Substituindo os valores de K e P_0:

$$A = \frac{12 - 2,518629}{2,518629} \approx 3,765$$

Expressão final da solução analítica:

$$P(t) = \frac{12}{1 + 3,765e^{-0,026t}}$$

3.2.1.1.1 Cálculo para o ano 1960 ($t = 10$)

$$P(10) = \frac{12}{1 + 3,765e^{-0,026 \cdot 10}} \approx \frac{12}{1 + 3,765 \cdot 0,771} \approx \frac{12}{3,902} \approx 3,075 \text{ bilhões}$$

3.2.1.1.2 Para os demais anos:

- 1970 ($t = 20$):

$$P(20) = \frac{12}{1 + 3,765e^{-0,026 \cdot 20}} \approx \frac{12}{3,236} \approx 3,708 \text{ bilhões}$$

- 1980 ($t = 30$):

$$P(30) = \frac{12}{1 + 3,765e^{-0,026 \cdot 30}} \approx \frac{12}{2,724} \approx 4,405 \text{ bilhões}$$

- 1990 ($t = 40$):

$$P(40) = \frac{12}{1 + 3,765e^{-0,026 \cdot 40}} \approx \frac{12}{2,329} \approx 5,152 \text{ bilhões}$$

- 2000 ($t = 50$):

$$P(50) = \frac{12}{1 + 3,765e^{-0,026 \cdot 50}} \approx \frac{12}{2,024} \approx 5,929 \text{ bilhões}$$

3.2.2 Análise Gráfica do Modelo Contínuo

3.2.2.1 Gráfico gerado pelo software R Studio para abordagem contínua

Para ilustrar o comportamento do modelo logístico, podemos utilizar a linguagem de programação R para gerar um gráfico. O código a seguir demonstra como isso pode ser feito:

```
# Instalar o ggplot2 se ainda não estiver instalado
if (!requireNamespace("ggplot2", quietly = TRUE)) {
  install.packages("ggplot2")
}

# Carregar o pacote ggplot2
library(ggplot2)

# Criar um dataframe com os dados
dados <- data.frame(
  ano = c(1960, 1970, 1980, 1990, 2000),
  populacao = c(3.075, 3.708, 4.405, 5.152, 5.929)
)

# Criar o gráfico
grafico <- ggplot(dados, aes(x = ano, y = populacao)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_point(color = "red") +
  labs(
    title = "Crescimento Populacional Mundial Usando
    o Modelo Logístico de Verhulst",
    x = "Ano",
    y = "População Mundial (bilhões)"
  ) +
  theme_minimal() +
```

```
  annotate("text", x = 1960, y = 6.5, label = "Fonte: Mário Cesar Soares
  Teixeira, baseado em Rodrigues & Hauser (2014)", size = 3.5, hjust = 0)

# Exibir o gráfico
print(grafico)
```

Gráfico

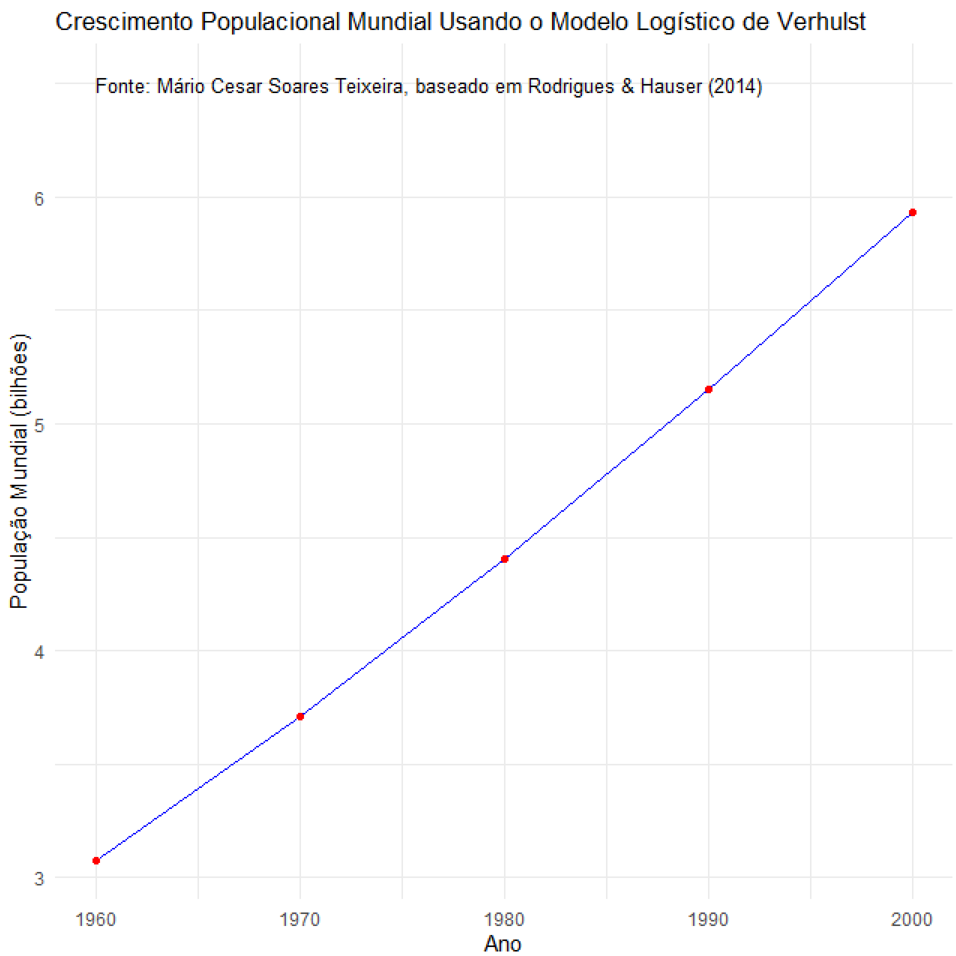

Figura 2 – Crescimento Logístico de Verhulst

3.2.3 Análise referente ao gráfico do Modelo Contínuo de Crescimento Populacional Mundial (1960-2000)

O gráfico representando o crescimento populacional mundial de 1960 a 2000 é baseado no modelo logístico de Verhulst em sua forma contínua. Este modelo contínuo é particularmente eficaz para capturar as dinâmicas de crescimento populacional em um contexto onde os recursos são limitados e a capacidade de suporte do ambiente exerce uma influência significativa. A análise deste gráfico fornece insights sobre o comportamento do crescimento populacional ao longo das décadas, destacando as fases de crescimento exponencial e a subsequente transição para um crescimento mais sustentável.

3.2.3.1 Comportamento do Crescimento Populacional

3.2.3.1.1 Fase Exponencial Inicial (1960-1980)

- **Crescimento Rápido:** O gráfico mostra um aumento significativo na população mundial, de 3,075 bilhões em 1960 para 4,405 bilhões em 1980. Este crescimento rápido é característico da fase inicial do modelo logístico contínuo, onde a população cresce exponencialmente devido à abundância de recursos e avanços tecnológicos que suportam o aumento populacional.
- **Impulso Tecnológico:** Durante este período, melhorias em saúde pública, agricultura e tecnologia contribuíram para uma redução nas taxas de mortalidade e um aumento na expectativa de vida, impulsionando o crescimento populacional.

3.2.3.1.2 Transição para Crescimento Logístico (1980-2000)

- **Desaceleração do Crescimento:** A partir de 1980, observa-se uma desaceleração no crescimento populacional, com a população atingindo 5,929 bilhões em 2000. Esta desaceleração indica uma transição do crescimento exponencial para o logístico, à medida que a população se aproxima da capacidade de suporte do planeta.
- **Limitações Ambientais:** O gráfico reflete o impacto das limitações ambientais e a crescente pressão sobre os recursos naturais. À medida que a população se aproxima de $K = 12$ bilhões, a taxa de crescimento diminui, destacando a importância de considerar a capacidade de suporte em projeções populacionais.

3.2.3.1.3 Implicações para a Sustentabilidade

- **Capacidade de Suporte:** O conceito de capacidade de suporte (K) é central para entender as limitações do crescimento populacional. O gráfico sugere que, sem intervenções significativas, o crescimento populacional pode eventualmente estabilizar, mas não sem desafios significativos relacionados à gestão de recursos.
- **Necessidade de Políticas Sustentáveis:** A análise do gráfico enfatiza a importância de políticas que promovam o uso sustentável dos recursos naturais, inovação tecnológica e planejamento familiar para mitigar os impactos do crescimento populacional.

Este gráfico, ao ilustrar a transição de um crescimento exponencial para um logístico, fornece uma base sólida para entender as dinâmicas do crescimento populacional em um contexto de recursos finitos. Ele destaca a necessidade de estratégias sustentáveis para gerenciar o crescimento populacional e assegurar a viabilidade dos recursos naturais para as gerações futuras. Esta análise serve como um ponto de partida para comparações com outros gráficos e modelos que serão explorados posteriormente na dissertação.

3.3 Abordagem Discreta

Para a abordagem discreta, a população é calculada em intervalos de tempo fixos, por exemplo, a cada 10 anos. Usamos a fórmula discreta baseada na equação diferencial:

$$P_{n+1} = P_n + rP_n\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)\Delta t$$

onde Δt é o intervalo de tempo entre os cálculos.

3.3.1 Justificativa para o Passo Temporal Δt

O intervalo de 10 anos é escolhido por:

- **Dados Disponíveis:** Censos são tipicamente decenais, facilitando a comparação e validação com dados reais.
- **Captura de Tendências:** É suficientemente longo para mostrar mudanças significativas, mas curto o bastante para permitir ajustes estratégicos em políticas.
- **Simplicidade Computacional:** Facilita a implementação e análise do modelo.

3.3.2 Análise de Estabilidade

A estabilidade é essencial para previsões confiáveis:

- **Critérios de Estabilidade:** Manter $r\Delta t$ dentro de limites críticos para evitar oscilações populacionais excessivas.

3.3.3 Cálculos da Abordagem Discreta

3.3.3.0.1 Cálculo para o ano de 1950 ($t = 0$)

$$P_0 = 2,518629$$

Este é o valor inicial.

3.3.3.0.2 Para os demais anos:

- **1960** ($t = 10$):
$$P_1 = P_0 + rP_0\left(1 - \frac{P_0}{K}\right)\Delta t$$
Com $\Delta t = 10$ e substituindo os valores:
$$P_1 = 2,518629 + 0,026 \cdot 2,518629 \cdot (1 - \frac{2,518629}{12}) \cdot 10 \approx 3,036 \text{ bilhões}$$

- **1970** ($t = 20$):
$$P_2 = P_1 + rP_1\left(1 - \frac{P_1}{K}\right)\Delta t$$
Com $\Delta t = 10$ e substituindo os valores:
$$P_2 \approx 3,626 \text{ bilhões}$$

- **1980** ($t = 30$):
$$P_3 = P_2 + rP_2\left(1 - \frac{P_2}{K}\right)\Delta t \approx 4,286 \text{ bilhões}$$

- **1990** ($t = 40$):
$$P_4 \approx 5,006 \text{ bilhões}$$

- **2000** ($t = 50$):
$$P_5 \approx 5,787 \text{ bilhões}$$

3.3.4 Análise Gráfica do Modelo Discreto

3.3.4.1 Gráfico gerado no software R Studio para abordagem Discreta

Para ilustrar o comportamento do modelo logístico para a abordagem discreta, podemos utilizar a linguagem de programação R para gerar um gráfico. O código a seguir demonstra como isso pode ser feito:

```
# Instalar o ggplot2 se ainda não estiver instalado
if (!requireNamespace("ggplot2", quietly = TRUE)) {
  install.packages("ggplot2")
}

# Carregar o pacote ggplot2
library(ggplot2)

# Criar um dataframe com os dados discretos de crescimento populacional
```

```
dados_discretos <- data.frame(
  ano = c(1950, 1960, 1970, 1980, 1990, 2000),
  populacao = c(2.518629, 3.036, 3.626, 4.286, 5.006, 5.787)
)

# Criar o gráfico
grafico_discreto <- ggplot(dados_discretos, aes(x = ano, y = populacao)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_point(color = "red") +
  labs(
    title = "Crescimento Populacional Mundial: Abordagem Discreta",
    x = "Ano",
    y = "População Mundial (bilhões)"
  ) +
  theme_minimal() +
  annotate("text", x = 1950, y = 6.2, label = "Gráfico elaborado
  por Mário Cesar Soares Teixeira\
  nDados baseados em Rodrigues & Hauser (2014)", size = 3.5, hjust = 0)

# Exibir o gráfico
print(grafico_discreto)
```

Gráfico gerado pelo software R Studio para a abordagem Discreta. Representado na Figura 3

3.4 Análise do Modelo Discreto de Crescimento Populacional Mundial (1950-2000)

O gráfico baseado na abordagem discreta do modelo logístico de Verhulst ilustra o crescimento populacional mundial em intervalos de 10 anos, de 1950 a 2000. Este modelo considera o crescimento populacional em passos discretos, refletindo mudanças periódicas e permitindo uma análise detalhada das dinâmicas populacionais ao longo do tempo. A análise fornece informações sobre o comportamento do crescimento populacional e as implicações para o planejamento sustentável.

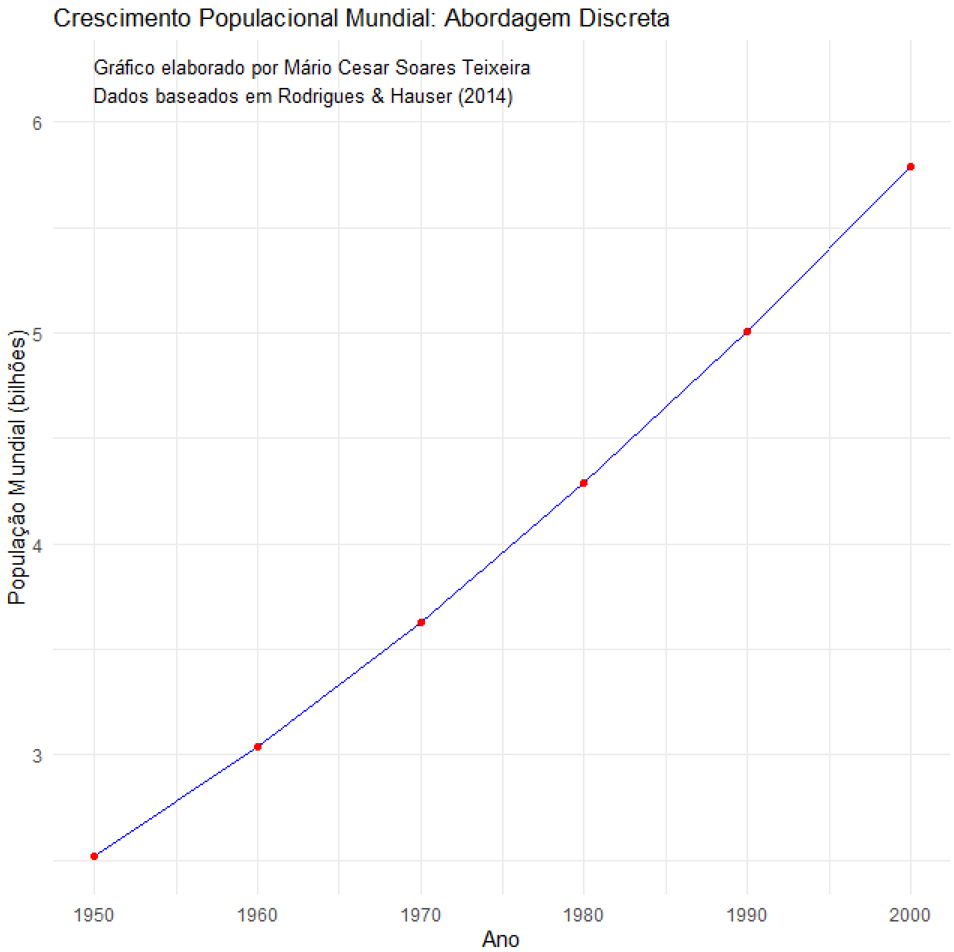

Figura 3 – Crescimento Logístico de Verhust

3.4.1 Comportamento do Crescimento Populacional

3.4.1.1 Crescimento Inicial (1950-1960)

- **População Inicial e Crescimento:** O gráfico começa com uma população inicial de aproximadamente 2.518 bilhões em 1950, crescendo para cerca de 3.036 bilhões em 1960.

- **Influência de Fatores Externos:** Este crescimento reflete as condições favoráveis do período, incluindo avanços na medicina e agricultura, que aumentaram a capacidade de suporte temporariamente.

3.4.1.2 Aumento Consistente (1960-1980)

- **Crescimento Sustentado:** Entre 1960 e 1980, a população continua a crescer, atingindo 4.286 bilhões em 1980. A taxa de crescimento, embora consistente, começa a mostrar sinais de desaceleração.

- **Pressões Ambientais:** A abordagem discreta registra a influência crescente das pressões ambientais e limitações de recursos, que começam a afetar a taxa de crescimento.

3.4.1.3 Desaceleração e Estabilização (1980-2000)

- **Desaceleração do Crescimento:** De 1980 a 2000, a população mundial cresce de 4.286 bilhões para 5.787 bilhões. A desaceleração é mais pronunciada, indicando que o crescimento está se aproximando da capacidade de suporte do planeta.
- **Impacto das Restrições Ambientais:** Este padrão é consistente com o comportamento previsto pelo modelo discreto, onde o crescimento é progressivamente limitado à medida que a população se aproxima da capacidade de suporte (K).

3.4.2 Implicações para a Sustentabilidade

- **Capacidade de Suporte e Sustentabilidade:** O conceito de capacidade de suporte (K) é fundamental para entender as limitações do crescimento populacional. O gráfico sugere que, sem intervenções significativas, o crescimento populacional pode eventualmente estabilizar, mas não sem desafios relacionados à gestão de recursos.
- **Políticas de Planejamento Sustentável:** É fundamental adotar políticas que promovam o uso eficiente dos recursos naturais e incentivem a inovação tecnológica. Essas estratégias ajudam a garantir que o crescimento populacional se mantenha dentro dos limites dos recursos disponíveis, preservando elementos essenciais como água e alimentos. Tais ações são essenciais para mitigar os impactos do crescimento populacional e assegurar um desenvolvi-mento sustentável para o futuro

Este gráfico, ao ilustrar o crescimento populacional em intervalos discretos, fornece uma visão detalhada das dinâmicas do crescimento em um contexto de recursos limitados. A abordagem discreta é valiosa para entender como as mudanças periódicas influenciam o crescimento populacional e para desenvolver estratégias que assegurem a sustentabilidade dos recursos naturais para as gerações futuras. Esta análise serve como um ponto de comparação com outros modelos que podem ser explorados em estudos futuros.

3.5 Análise Gráfica Comparativa dos Modelos Discreto e Contínuo

3.5.1 Gráfico gerado pelo software R Studio para comparação das abordagens discreta e contínua de crescimento populacional

```
# Instalar o ggplot2 se ainda não estiver instalado
```

```
if (!requireNamespace("ggplot2", quietly = TRUE)) {
  install.packages("ggplot2")
}

# Carregar o pacote ggplot2
library(ggplot2)

# Criar dataframes com os dados de ambos os modelos
dados_continuos <- data.frame(
  ano = c(1960, 1970, 1980, 1990, 2000),
  populacao = c(3.075, 3.708, 4.405, 5.152, 5.929),
  modelo = "Contínuo"
)

dados_discretos <- data.frame(
  ano = c(1950, 1960, 1970, 1980, 1990, 2000),
  populacao = c(2.518629, 3.036, 3.626, 4.286, 5.006, 5.787),
  modelo = "Discreto"
)

# Combinar os dataframes
dados_combinados <- rbind(dados_continuos, dados_discretos)

# Criar o gráfico comparativo
grafico_comparativo <- ggplot(dados_combinados,
aes(x = ano, y = populacao, color = modelo)) +
  geom_line() +
  geom_point() +
  labs(
    title = "Comparação dos Modelos de Crescimento Populacional:
    Contínuo vs Discreto",
    x = "Ano",
    y = "População Mundial (bilhões)"
  ) +
  theme_minimal() +
  scale_color_manual(values = c("Contínuo" = "blue", "Discreto" = "red")) +
  annotate("text", x = 1950, y = 6.5, label =
  "Gráfico elaborado por Mário Cesar Soares Teixeira\
  nDados baseados em Rodrigues & Hauser (2014)", size = 3.5, hjust = 0)
```

```
# Exibir o gráfico
print(grafico_comparativo)
```

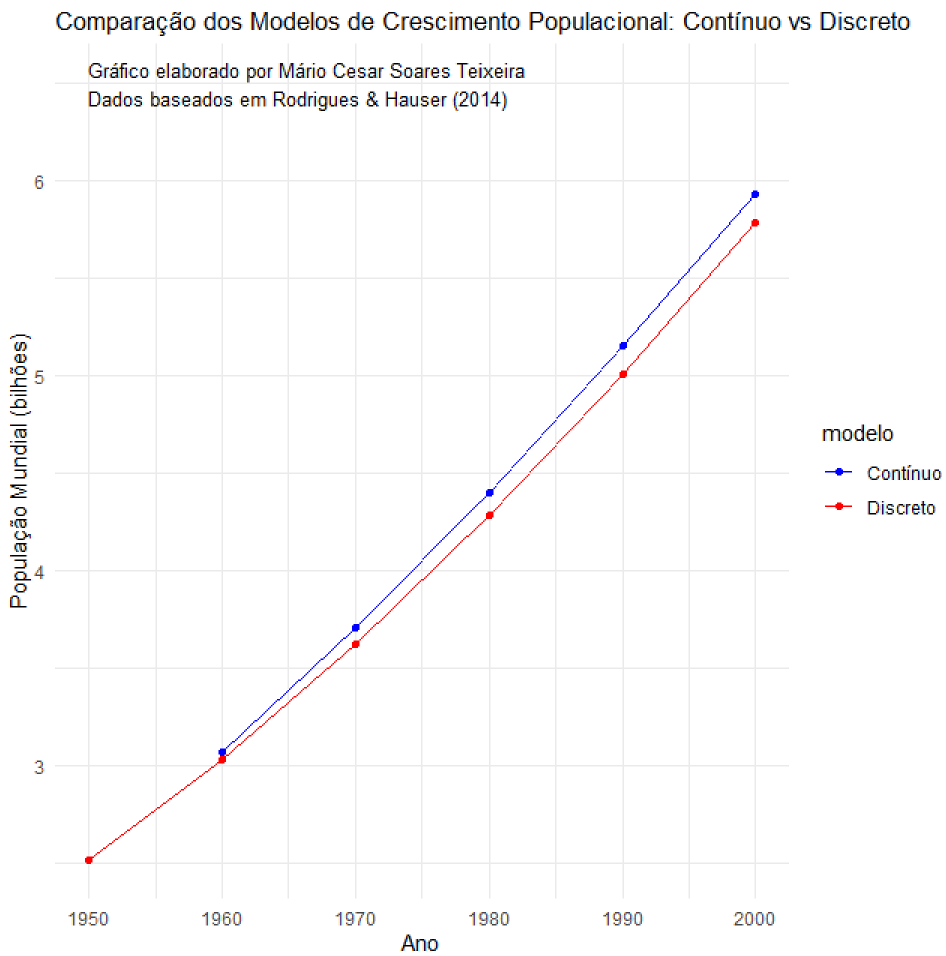

Figura 4 – Comparação dos Modelos de Crescimento Populacional: Contínuo vs Discreto.

3.5.2 Análise do Modelo Discreto e Contínuo de Crescimento Populacional Mundial (1950-2000)

3.5.2.1 Crescimento Inicial

O modelo discreto começa em 1950, enquanto o modelo contínuo inicia em 1960. O crescimento inicial no modelo discreto é mais gradual, refletindo um ponto de partida anterior.

3.5.2.2 Tendências de Crescimento

Ambos os modelos mostram um crescimento populacional significativo até 1980. No entanto, o modelo contínuo apresenta uma curva de crescimento ligeiramente mais suave, enquanto o modelo discreto tem saltos mais definidos devido aos intervalos de tempo fixos.

3.5.2.3 Desaceleração do Crescimento

A partir de 1980, ambos os modelos indicam uma desaceleração no crescimento populacional. No entanto, o modelo contínuo mostra uma transição mais gradual, enquanto o modelo discreto reflete mudanças mais abruptas entre os intervalos de tempo.

3.5.2.4 Convergência e Divergência

Até 2000, as previsões de ambos os modelos começam a convergir em termos de população total, mas as diferenças nos métodos de cálculo (discreto vs. contínuo) são evidentes na forma das curvas.

3.5.2.5 Implicações para Planejamento

A comparação destaca a importância de escolher o modelo apropriado dependendo do contexto da análise. O modelo contínuo é útil para entender tendências gerais, enquanto o modelo discreto pode ser mais adequado para análises em intervalos específicos.

Esta comparação gráfica fornece uma base sólida para entender como diferentes abordagens modelam o crescimento populacional e suas implicações para o planejamento e a sustentabilidade.

Neste estudo, comparamos as abordagens discreta e contínua do modelo logístico de Verhulst para analisar o crescimento populacional mundial entre 1950 e 2000. A análise gráfica revelou diferenças significativas nas representações de crescimento, destacando como cada modelo captura as dinâmicas populacionais sob restrições ambientais. O modelo discreto, iniciado em 1950, permitiu observar o crescimento em intervalos de tempo fixos, evidenciando mudanças mais abruptas e a influência de fatores externos em períodos específicos. Em contraste, o modelo contínuo, iniciado em 1960, apresentou uma curva de crescimento mais suave, oferecendo uma visão geral das tendências populacionais ao longo do tempo. Ambos os modelos indicam uma desaceleração do crescimento a partir de 1980, convergindo para uma estabilização em torno da capacidade de suporte do planeta. Essa convergência sublinha a importância de considerar as limitações ambientais e a capacidade de suporte (K) no planejamento populacional.

A comparação entre os modelos destaca a necessidade de escolher a abordagem mais adequada ao contexto da análise. O modelo contínuo é eficaz para capturar tendências gerais, enquanto o modelo discreto é valioso para análises detalhadas em intervalos específicos. Essa dualidade oferece uma base sólida para o desenvolvimento de políticas públicas e estratégias de sustentabilidade que assegurem o uso eficiente dos recursos naturais.

Em suma, este estudo fornece informações valiosas sobre como diferentes abordagens podem modelar o crescimento populacional, contribuindo para uma compreensão mais profunda das dinâmicas envolvidas e suas implicações para o futuro planejamento sustentável.

3.6 Comparação com a Referência de Rodrigues e Hauser (2014)

Após a apresentação dos cálculos e gráficos para as abordagens contínua e discreta, este segmento oferece uma comparação detalhada entre os resultados obtidos na dissertação e aqueles reportados por Rodrigues e Hauser (2014) usando o método de Runge-Kutta. Esta comparação visa avaliar a precisão e a eficácia das abordagens contínua e discreta.

3.6.1 Tabela de Comparação de Estimativas Populacionais

A Tabela 1 apresenta as siglas: Cont, Dis e RK para contínuo, discreto e Runge-Kutta, respectivamente. Os valores Contínuo, discreto e Runge-Kutta estão em Bilhões.

Ano	Contínuo	Discreto	Runge-Kutta	Erro Absoluto	
				Cont. vs RK	Dis. vs RK
1960	3,075	3,036	3,074	0,001	0,038
1970	3,708	3,626	3,705	0,003	0,079
1980	4,405	4,286	4,402	0,003	0,116
1990	5,152	5,006	5,149	0,003	0,143
2000	5,929	5,787	5,923	0,006	0,136

Tabela 1 – Comparação das estimativas populacionais

3.6.2 Análise dos Resultados

Precisão dos Métodos:

- O método de Runge-Kutta fornece estimativas próximas da solução contínua, destacando sua alta precisão.
- A abordagem discreta mostra maiores discrepâncias, especialmente em anos posteriores.

Implicações para a Modelagem:

- A solução contínua é preferível para simulações de longo prazo devido à sua precisão analítica.

- O método de Runge-Kutta é ideal para aplicações que requerem alta precisão numérica.

3.7 Análise de Erros Numéricos entre Modelos Contínuo e Discreto

Analisamos os erros numéricos entre as estimativas dos modelos contínuo e discreto, destacando as diferenças e implicações para a modelagem populacional.

3.7.1 3.7.1 Fórmulas de Erro

Erro Absoluto (EA):

$$EA = |P_{\text{contínuo}} - P_{\text{discreto}}| \tag{3.1}$$

Erro Relativo (ER):

$$ER = \frac{|P_{\text{contínuo}} - P_{\text{discreto}}|}{P_{\text{contínuo}}} \times 100\% \tag{3.2}$$

3.7.2 Tabela de Comparação de Erros

Ano	Abordagem Contínua	Abordagem Discreta	Erro (%)	
			Absoluto (EA)	Relativo (ER)
1960	3,075 bilhões	3,036 bilhões	0,039	1,27
1970	3,708 bilhões	3,626 bilhões	0,082	2,21
1980	4,405 bilhões	4,286 bilhões	0,119	2,70
1990	5,152 bilhões	5,006 bilhões	0,146	2,83
2000	5,929 bilhões	5,787 bilhões	0,142	2,39

Tabela 2 – Comparação dos erros entre as abordagens contínua e discreta

3.7.3 Observações

- **Diferenças entre Modelos:** O erro absoluto aumenta ao longo do tempo, indicando diferenças crescentes entre as estimativas.
- **Estabilidade do Erro Relativo:** O erro relativo permanece estável, refletindo a consistência do modelo contínuo.
- **Implicações para Modelagem:** A escolha entre os modelos deve considerar a escala temporal e a precisão desejada.

4 Considerações Finais

Esta dissertação realizou uma análise abrangente das abordagens contínua e discreta na modelagem logística de Verhulst, com o objetivo de prever o crescimento populacional. Os resultados indicaram que o modelo contínuo é eficaz para identificar tendências gerais de crescimento ao longo do tempo, oferecendo uma visão abrangente e essencial para o planejamento de longo prazo. Sua capacidade de suavizar variações torna-o ideal para cenários em que o foco é compreender as tendências gerais e as dinâmicas populacionais em contextos de longo prazo.

Por outro lado, o modelo discreto destacou-se por sua capacidade de oferecer análises detalhadas em intervalos específicos, sendo especialmente útil em contextos que exigem precisão em períodos discretos, como impactos sazonais ou eventos específicos. Essa abordagem permite uma compreensão mais aprofundada das dinâmicas populacionais em situações em que as mudanças ocorrem em etapas definidas.

A aplicação dos modelos ao crescimento populacional mundial entre 1950 e 2000 evidenciou uma desaceleração do crescimento, convergindo para a capacidade de suporte do planeta. Ambos os modelos sugerem que, sem intervenções significativas, o crescimento populacional pode se estabilizar, embora não sem enfrentar desafios relacionados à gestão de recursos. Este cenário reforça a importância de considerar a capacidade de suporte ambiental e a taxa de crescimento intrínseca no planejamento populacional.

Recomenda-se que a escolha entre modelos contínuos e discretos seja orientada pelo contexto específico do estudo. O modelo contínuo é mais adequado para análises de tendências gerais, enquanto o modelo discreto é preferível para investigações detalhadas em intervalos específicos. Além disso, a implementação de políticas que promovam o uso sustentável dos recursos naturais, a inovação tecnológica e o planejamento familiar é fundamental para reduzir os impactos do crescimento populacional e assegurar a sustentabilidade a longo prazo.

Em síntese, esta dissertação oferece uma contribuição significativa para a compreensão das dinâmicas populacionais e suas implicações para a sustentabilidade. As conclusões obtidas são fundamentais para ecologistas, demógrafos, planejadores urbanos e formuladores de políticas, orientando a escolha da abordagem mais adequada para estudos e aplicações práticas. A pesquisa destaca a importância de abordagens matemáticas robustas e adaptativas para enfrentar os desafios futuros, garantindo um desenvolvimento sustentável e equilibrado.

Referências

ALVES, J. E. D. População, desenvolvimento e sustentabilidade: perspectivas para a cipd pós-2014. *Revista Brasileira de Estudos de População*, SciELO Brasil, v. 31, p. 219–230, 2014.

BACAëR, N. *Breve História Matemática da Dinâmica Populacional*. S.l.: Institut de Recherche pour le Développement, 2021.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002.

______. *Equações Diferenciais Ordinárias - Um curso introdutório*. 1. ed. São Paulo: UFABC, 2002.

______. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2011.

______. Modelagem matemática: teoria e prática. *São Paulo: Contexto*, p. 79,80, 2015.

Bertone, R. A. and et al. *Modelagem Matemática com Diferenciais e Diferenças Finitas*. 1ª. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2015.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 10.. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. v. 4.

NÁPOLES, S. O crescimento exponencial de populações: Euler ou malthus? *Revista de Ciência Elementar*, Casa das Ciências, v. 6, n. 2, 2018.

RODRIGUES, D. S.; HAUSER, E. B. Modelo logístico de verhulst e métodos numéricos na análise do censo populacional mundial. *Proceedings Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.5540/03.2014.002.01.0068>.

VERHULST, P.-F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondence mathematique et physique*, v. 10, p. 113–129, 1838.

ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. [S.l.]: Cengage Learning, 2016.