UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

WALTER MAMANI CCASA

Um estudo da controlabilidade exata local a trajetórias das equações de Navier-Stokes

Campinas

2024

Walter Mamani Ccasa

Um estudo da controlabilidade exata local a trajetórias das equações de Navier-Stokes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Walter Mamani Ccasa e orientada pela Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M31e

Mamani Ccasa, Walter, 1991-
Um estudo da controlabilidade exata local a trajetórias das equações de Navier-Stokes / Walter Mamani Ccasa. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador(es): Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Controlabilidade exata. 2. Desigualdades de Carleman. 3. Equações de Navier-Stokes. I. Calsavara, Bianca Morelli Rodolfo, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações complementares

Título em outro idioma: A study of the exact controllability local to trajectories of the equations of Navier-Stokes
Palavras-chave em inglês:
Exact controllability
Carleman inequalities
Navier-Stokes equations
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Bianca Morelli Rodolfo Calsavara [Orientador]
Gabriela Del Valle Planas
Felipe Wallison Chaves Silva
Data de defesa: 12-12-2024
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0001-5414-4021
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/8221427200957687

Dissertação de Mestrado defendida em 12 de dezembro de 2024 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Profa. Dra. BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Profa. Dra. GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof. Dr. FELIPE WALLISON CHAVES SILVA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos meus pais Pedro e Maximiana.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me conceder força e saúde para concluir esta etapa da minha vida. Em segundo lugar, estou muito grato aos meus pais, Maximiana e Pedro, pelo apoio constante, atenção e por estarem presentes nos momentos difíceis. Terceiro e não menos importante, agradeço a minha orientadora, Bianca M.R. Calsavara pelo conselhos e respostas, apoio incondicional, infinita paciência, e bem como por ter me apresentado a área de pesquisa dentro da qual versa a presente dissertação.

Para finalizar, agradeço aos meus colegas, tanto aos que conheci anteriormente quanto aos que conheci ao longo desses anos, pela companhia e ajuda. Ao DEAPE, a Diretoria Executiva de Apoio e Permanência Estudantil pelo apoio em relação ao Restaurante Universitário.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001."

Resumo

Esta dissertação é dedicada ao estudo da controlabilidade exata local a trajetórias do sistema de Navier-Stokes. Para isso, primeiramente foi deduzida uma desigualdade de Carleman para o sistema adjunto do sistema linearizado de Navier-Stokes. Com isto é possível deduzir um resultado de controlabilidade nula para um sistema não linear auxiliar. Finalmente, utilizando o resultado anterior e um Teorema de função inversa é demonstrada a controlabilidade exata local a trajetórias para o sistema de Navier-Stokes.

Palavras-chave: Controlabilidade. Desigualdade de Carleman. Equações de Navier-Stokes.

Abstract

This final thesis is dedicated to the study of local exact controllability of trajectories of the Navier-Stokes system. To achieve this, a Carleman inequality was first deduced for the adjoint system of the linearized Navier-Stokes system. With this it is possible to deduce a null controllability result for an auxiliary nonlinear system. Finally, using the previous result and an inverse function theorem, the exact local controllability of trajectories for the Navier-Stokes system is demonstrated.

Keywords : Controllability. Carleman inequality. Navier-Stokes equations.

Sumário

Introdução

Um dos problemas mais sérios do nosso tempo são os problemas ambientais. A destruição indiscriminada de florestas, acúmulo de lixo plástico e a poluição dos mares e rios são exemplos disso. Neste último caso, ao querer minimizar a poluição, o controle das equações de Navier-Stokes aparece naturalmente. Um sistema controlado aceitável (simplificado) para um fluido contaminado é :

$$\begin{cases} y_t - \nu\Delta y + \nabla \cdot (y \otimes y) + \dfrac{1}{\rho}\nabla p = B(\psi, v), \\ \psi_t - \kappa\Delta\psi + y \cdot \nabla\psi = 0, \\ \nabla \cdot y = 0, \\ + \text{ condições iniciais e de contorno}, \end{cases}$$

onde as equações devem ser resolvidas para $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

No sistema acima, as funções $y = y(x,t)$ e $p = p(x,t)$ representam a velocidade e pressão do fluido contaminado, respectivamente. As constantes positivas ν e ρ são constantes que caracterizam o fluido. O termo $B(\psi, v)$ é uma função que muda de acordo com o modelo e depende da densidade de contaminação $\psi = \psi(x,t)$ e do controle $v = v(x,t)$. O controle permite identificar a estratégia de limpeza. Finalmente, a constante $\kappa > 0$ é o correspondente coeficiente de difusão.

Um problema natural que surge na situação descrita é o seguinte:

É possível encontrar um controle v tal que a densidade de contaminação ψ seja pequena no tempo final T?.

A resposta a tal questão está no âmbito da teoria do controle. Neste contexto, vamos descrever conceitos-chave relacionados à controlabilidade.

Um problema de controlabilidade exata é formulado da seguinte forma: Fixemos um intervalo temporal de observação $(0,T)$ e consideremos um sistema evolutivo governado por uma certa equação ou sistema de equações diferenciais (ordinárias ou parciais) munido de condições iniciais e/ou de fronteira. Suponhamos também que podemos agir neste sistema mediante uma função de controle v, pertencente a um determinado conjunto de controles admissíveis, U_{ad}. Fixado $v \in U_{ad}$, chamaremos de estado associado ao controle v uma solução correspondente y_v do sistema. Agora, sejam y_0 e y_d dois valores em um determinado espaço de Banach B onde o sistema possui solução. Dizemos que o sistema é exatamente controlável em B no tempo T, se podemos encontrar um controle $v \in U_{ad}$ tal que a correspondente solução y_v com dado inicial y_0, satisfaz

$$y_v(T) = y_d.$$

A última condição pode ser alterada de diversas maneiras, obtendo outras noções de controlabilidade.

Neste sentido, dizemos que o sistema é aproximadamente controlável em B no tempo T, se com as notações anteriores, para cada $\epsilon > 0$ existe um controle $v \in U_{ad}$ tal que o correspondente estado y_v, satisfaz

$$\|y_v(T) - y_d\|_B \leqslant \epsilon.$$

Outra noção de controlabilidade é a controlabilidade nula, isto é, quando $y_d = 0$.

A teoria da controlabilidade para equações diferenciais parciais de evolução começou a se desenvolver na década de 1960. Os fundamentos desta teoria foram estabelecidos por Egorov [12], Russell [43]-[44] e Fattorini [15]. Em particular, nestes artigos foi desenvolvido o método do momento, que reduz o problema de controlabilidade exata a problemas na teoria das séries exponenciais. Também é introduzido o princípio da dualidade, que reduz o problema de controlabilidade para uma equação de evolução ao problema de observabilidade para a equação adjunta.

A partir de meados da década de 1980, o interesse pela teoria da controlabilidade aumentou substancialmente. Naquela época, o caso das equações hiperbólicas era principalmente estudado. Em 1986, Ho [25] encontrou condições de observabilidade suficientes para uma equação hiperbólica de segunda ordem pelo método dos multiplicadores. Simultaneamente, J.-L. Lions apresentou o método de unicidade de Hilbert, que permite derivar a solubilidade do problema de controlabilidade para a equação original do teorema da unicidade para a equação adjunta.

Neste ponto, os pesquisadores notaram ser possível obter resultados sobre a controlabilidade da equação original a partir da unicidade para um certo problema de Cauchy para a equação adjunta. É aqui que entram no jogo as estimativas de Carleman, ao fornecerem um método mais poderoso para provar a unicidade do problema de Cauchy. Desde os resultados fundamentais de Hörmander's em [26] e [27], a teoria das estimativas de Carleman foi desenvolvida em muitas direções. Só para citar alguns, temos estimativas para espaços L^p com $p \neq 2$ (veja [33], [35] e [37]) e teoria de estimativas de Carleman com funções de peso singulares desenvolvida por Jerison em [34].

Desde o início da década de 1990, as estimativas de Carleman têm sido amplamente utilizadas em problemas de controlabilidade exata na fronteira. Usando essas estimativas, Kazemi e Klibanov em [36] resolveram o problema de observabilidade para a equação de onda, e Lasiecka e Triggiani [38] estudaram a controlabilidade de um sistema de equações hiperbólicas

A grande maioria dos artigos acima trata de problemas de controlabilidade para equações de evolução lineares. Muito menos se sabia sobre sistemas não lineares. Mas, atualmente é conhecido o método mais poderoso para provar controlabilidade de equações parabólicas não lineares. É o método no qual a solução é construída com a ajuda de um problema de otimização, aplica-se as estimativas de Carleman para um sistema linearizado e logo utiliza um teorema de função inversa para abordar a parte não linear. As bases deste método foram estabelecidas por Fursikov e Imanuvilov em [19] e [20], para estudar a controlabilidade exata local da equação de Burgers e da equação bidimensional de Helmholtz. Usando este método, estimativas de Carleman foram obtidas para demonstrar a controlabilidade exata de equações parabólicas semilineares. A controlabilidade exata para equações parabólicas semilineares com não linearidade crescendo no máximo linearmente no infinito foi estabelecido em [5] e [32].

No âmbito do controle do sistema de Navier-Stokes, a controlabilidade nula exata das equações de Navier Stokes foi estabelecida em [17] e [19]. A controlabilidade exata local das equações de Navier-Stokes e do sistema Boussinesq foram provadas por Fursikov e Imanuvilov em [18], [21], e [22] para o caso em que o controle é distribuído sobre a fronteira ou uma parte da fronteira, e também para o caso de um controle distribuído localmente no interior do domínio. Em [29] foi estudada a controlabilidade local exata das equações de Navier-Stokes e do sistema Boussinesq com controle distribuído localmente e com condições de contorno de deslizamento. A controlabilidade aproximada da equação de Euler bidimensional e do sistema Navier-Stokes bidimensional com condições de contorno de deslizamento e com controle de fronteira foi estabelecido por Coron em [6], [7] e [8]. Mais tarde este resultado foi estendido em [24] por Glass para a equação de Euler tridimensional. A controlabilidade exata global das equações de Navier-Stokes com um controle local distribuído em uma variedade bidimensional fechada foi provada por Coron em [9].

Com respeito a controlabilidade exata para o sistema de Navier-Stokes, devido as propriedades de dissipatividade e a não-linearidade do sistema, não podemos esperar a controlabilidade exata para uma função objetivo arbitrária.

Esta é a principal razão para introduzir outro conceito de controlabilidade para as equações de Navier-Stokes: controlabilidade exata local a trajetórias.

Fixemos um intervalo de observação $(0, T)$ e consideremos um sistema evolutivo governado por certa equação ou sistema de equações no qual não podemos agir (sistema não controlado) cuja solução $\overline{y}$ é chamada de trajetória com dado inicial $\overline{y}^0$. Suponha também que é possível introduzir uma função controle v neste sistema de modo que obtemos um novo sistema (sistema controlado) cuja solução associada a v é denotada por y_v com dado inicial y^0. Assim, dizemos que o último sistema possui a propriedade de controlabilidade exata local a trajetórias no tempo $T > 0$ no espaço de Banach B, se fixado $\overline{y}^0 \in B$ e para um dado inicial y^0 suficientemente próximo a $\overline{y}^0$ em B, podemos encontrar um controle v tal que a solução correspondente y_v com dado inicial y^0, coincide com o valor da trajetória no tempo T, isto é,

$$y_v(T) = \overline{y}(T).$$

Nesta dissertação estudamos um resultado concernente a esta noção de controlabilidade obtida por Fernández-Cara, Guerrero, Imanuvilov e Puel em [31] para o sistema de Navier-Stokes

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla \cdot (y \otimes y) + \nabla p = v1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde

$$(\nabla \cdot (y^1 \otimes y^2))_i = \sum_{j=1}^{N} \partial_j (y_i^1 y_i^2), \quad i = 1, ..., N.$$

Aqui $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N = 2$ ou 3, é um subconjunto aberto, conexo e limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é suave (por exemplo de classe C^2), ω um (pequeno) subconjunto aberto não vazio de Ω, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$ e $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$.

A função vetorial $y : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e a função escalar $p : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ representam respectivamente a velocidade (estado) e a pressão, $v = v(x, t)$ é a função controle com suporte em ω e $y^0 = y^0(x)$ representa a função que descreve o estado inicial do sistema.

Também, vamos apresentar alguns espaços importantes no contexto das equações de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega)^N, \nabla \cdot \varphi = 0\}, \\ V &= \{\varphi \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega\}, \\ H &= \{\varphi \in L^2(\Omega)^N : \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega,\ \varphi \cdot n = 0 \text{ em } \partial\Omega\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Agora, para definir o conceito de controlabilidade exata local a trajetórias, consideremos a solução $\overline{y}$ do sistema de Navier-Stokes não controlado

$$\begin{cases} \overline{y}_t - \Delta \overline{y} + \nabla \cdot (\overline{y} \otimes \overline{y}) + \nabla \overline{p} = 0 & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \overline{y} = 0 & \text{em } Q, \\ \overline{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \overline{y}(0) = \overline{y}^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

que será chamada de trajetória no resto da dissertação.

Definição 0.1. *Diz-se que o sistema de Navier-Stokes (1) possui a propriedade de controlabilidade exata local a trajetórias, se para cada $\overline{y}^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$, onde $N = 2, 3$, satisfazendo*

$$\|y^0 - \overline{y}^0\|_{L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H} \leqslant \delta,$$

existe um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))^N$ tal que a solução correspondente associada (y_v, p_v) de (1) com estado inicial y^0, satisfaz

$$y_v(T) = \overline{y}(T) \qquad em\ \Omega,$$

onde $\overline{y}$ (trajetória) denota a solução de (3) com estado inicial $\overline{y}^0$.

Um resultado de controlabilidade exata local a trajetórias para o sistema de Navier-Stokes (1) foi provado para $\overline{y} \in W^{1,\infty}\left(0, T; W^{1,\infty}(\Omega)^N \cap V\right)$ e $\overline{y}^0 \in V$ em [28]. Mas nesta dissertação assumiremos menor regularidade para a trajetória $\bar{y}$, isto é,

$$\overline{y} \in L^\infty(Q)^N, \text{ com } \overline{y}_t \in L^2\left(0, T; L^\sigma(\Omega)^N\right), \tag{4}$$

onde $\sigma > 1$ se $N = 2$ e $\sigma > 6/5$ se $N = 3$.

Para mostrar a controlabilidade exata local a trajetórias do sistema de Navier-Stokes (1) seguiremos a seguinte estratégia: primeiramente mostraremos a controlabilidade nula do seguinte sistema, que é a linearização de (1) em torno da trajetória $\overline{y}$,

$$\begin{cases} Ly + \nabla p = f + v 1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde

$$Ly = y_t - \Delta y + \nabla \cdot (\overline{y} \otimes y + y \otimes \overline{y}). \tag{6}$$

Para isso provaremos uma desigualdade global de Carleman para o sistema adjunto associado a (5) dado por

$$\begin{cases} L^*\varphi + \nabla \pi = g & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

onde

$$D\varphi = \nabla \varphi + \nabla \varphi^t \tag{8}$$

e

$$L^*\varphi = -\varphi_t - \Delta\varphi - D\varphi\overline{y}. \tag{9}$$

Para apresentar tal desigualdade, consideremos ω_1 aberto tal que $\omega_1 \subset\subset \omega$. Pelo Lema A.4 (apresentado no Apêndice A) podemos tomar uma função $\eta^0 \in C^2(\bar{\Omega})$, satisfazendo

$$\eta^0 > 0 \text{ em } \Omega, \quad \eta^0 = 0 \text{ em } \partial\Omega, \quad \left|\nabla\eta^0\right| > 0 \text{ em } \overline{\Omega\backslash\omega_1}. \tag{10}$$

Assim, para constantes positivas s, λ, podemos construir as seguintes funções auxiliares associadas a η^0

$$\begin{aligned}
\alpha(x,t) &= \frac{e^{5/4\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty} - e^{\lambda\left(m\left\|\eta^0\right\|_\infty + \eta^0(x)\right)}}{t^4(T-t)^4},\\
\hat{\alpha}(t) &= \min_{x\in\bar{\Omega}} \alpha(x,t) = \frac{e^{5/4\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty} - e^{\lambda(m+1)\left\|\eta^0\right\|_\infty}}{t^4(T-t)^4},\\
\alpha^*(t) &= \max_{x\in\bar{\Omega}} \alpha(x,t) = \frac{e^{5/4\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty} - e^{\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty}}{t^4(T-t)^4},\\
\xi(x,t) &= \frac{e^{\lambda\left(m\left\|\eta^0\right\|_\infty + \eta^0(x)\right)}}{t^4(T-t)^4},\\
\hat{\xi}(t) &= \max_{x\in\bar{\Omega}} \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(m+1)\left\|\eta^0\right\|_\infty}}{t^4(T-t)^4},\\
\xi^*(t) &= \min_{x\in\bar{\Omega}} \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty}}{t^4(T-t)^4},\\
\theta(t) &= s^{15/4} e^{-2s\hat{\alpha}+s\alpha^*} \hat{\xi}^{15/4},\\
\hat{\theta}(t) &= s\lambda e^{-s\hat{\alpha}} \hat{\xi}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Além disso, definamos

$$\begin{aligned}
I(s,\lambda;\varphi) :=& s^{-1} \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right) dx\, dt\\
&+ s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2\, dx\, dt + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\, dx\, dt.
\end{aligned} \tag{12}$$

A seguinte desigualdade de Carleman constitui o primeiro resultado principal do presente trabalho e é dada no seguinte teorema.

Teorema 0.2. *Suponha que (4) seja satisfeito. Então, existem três constantes positivas $\hat{s}, \hat{\lambda}$ e C, dependendo apenas de Ω e ω, tais que para cada $\varphi^0 \in H$ e cada $g \in L^2(Q)^N$, a* *solução correspondente φ do problema (7) verifica*

$$I(s,\lambda;\varphi) \leqslant C\left(1+T^2\right)\left(s^{15/2}\lambda^{20}\iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\hat{\xi}^{15/2}|g|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right.$$
$$\left.+s^{16}\lambda^{40}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}\hat{\xi}^{16}|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right), \tag{13}$$

para quaisquer $\lambda \geqslant \hat{\lambda}(1+\|\bar{y}\|_\infty+\|\bar{y}_t\|_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega))^N}+\mathrm{e}^{\hat{\lambda}T\|\bar{y}\|_\infty^2})$ e $s \geqslant \hat{s}(T^4+T^8)$. As funções α, ξ, $\hat{\alpha}$, α^* e $\hat{\xi}$ são dadas em (11).

A prova deste teorema pode ser encontrada no Apêndice B.

A desigualdade de Carleman anterior nos permitirá deduzir um resultado de controlabilidade nula para o sistema linearizado (5), quando o termo denotado por f do lado direito da primeira equação de (5) satisfaz certas propriedades perto de $t = T$. Assim, definamos formalmente o conceito de controlabilidade nula para o sistema linearizado (5).

Definição 0.3. *Diz-se que o sistema linearizado (5) é controlável a zero ou possui a propriedade de controlabilidade nula no espaço de Banach B, se para cada $y^0 \in B$, existe um controle $v \in L^2(\omega\times(0,T))^N$ tal que a solução associada (y_v, p_v) de (5) com estado inicial y^0, satisfaz*

$$y_v(T) = 0 \ \textit{em}\ \Omega.$$

Finalmente, a controlabilidade nula do sistema linearizado (5) e um Teorema da função inversa, nos permitirá demonstrar a controlabilidade nula local do sistema não linear auxiliar

$$\begin{cases} Lz + \nabla\cdot(z\otimes z) + \nabla q = v1_\omega & \text{em } Q,\\ \nabla\cdot z = 0 & \text{em } Q,\\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\ z(0) = z^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

onde $Lz = z_t - \Delta z + \nabla\cdot(\bar{z}\otimes z + z\otimes\bar{z})$ e $\bar{z}$ denota a trajetória do sistema não controlado (3).

Definição 0.4. *Diz-se que o sistema não linear auxiliar (14) possui a propriedade de controlabilidade nula local no espaço de Banach B, se existe $\delta > 0$ tal que para cada $z^0 \in B$, satisfazendo*

$$\left\|z^0\right\|_B \leqslant \delta,$$

existe um controle $v \in L^2(\omega\times(0,T))^N$ tal que a solução associada (z_v, q_v) de (14) com estado inicial z^0, satisfaz

$$z_v(T) = 0 \ \textit{em}\ \Omega.$$

Pelo Lema 3.1, as soluções do sistema de Navier-Stokes (1) e do sistema não linear auxiliar (14), estão relacionadas através de uma certa mudança de variável. Este último fato e a controlabilidade nula local do sistema não linear auxiliar (14), nos permitirá mostrar a controlabilidade exata local a trajetórias do sistema de Navier Stokes (1), o qual é o segundo resultado principal deste trabalho dado pelo seguinte teorema.

Teorema 0.5. *Suponha que (4) seja satisfeito. Então, o sistema de Navier-Stokes (1) possui a propriedade de controlabilidade exata local a trajetórias, de acordo na Definição 0.1.*

Este trabalho é organizado como se segue.

No Capítulo 1 introduz-se definições e enunciam-se resultados utilizados no decorrer da dissertação.

No Capítulo 2, assumindo que a desigualdade de Carleman dada pelo Teorema 0.2 é válida, mostramos uma segunda desigualdade de Carleman para o adjunto do sistema linearizado (5), isto é, o sistema (7). Além disso, utilizando esta última desigualdade mostramos dois resultados de controlabilidade nula para o sistema linearizado (5), sendo que no segundo resultado há regularidade adicional para o estado em relação ao primeiro resultado. Esta regularidade é necessária para aplicar o Teorema da função inversa no Capítulo 3.

No Capítulo 3, utilizando os resultados do capítulo anterior e uma versão adequada do Teorema da função inversa para espaços de Banach, demonstramos a controlabilidade exata local a trajetórias do sistema de Navier-Stokes (1) utilizando a controlabilidade nula local do sistema linearizado (5).

No Capítulo 4, apresentamos uma lista de conclusões e considerações finais.

No Apêndice A, encontra-se resultados auxiliares os quais utilizamos principalmente para demonstrar a desigualdade de Carleman no Apêndice B.

Finalmente, no Apêndice B encontra-se a demostração da desigualdade de Carleman para o sistema adjunto (7), desigualdade utilizada para deduzir os resultados do Capítulo 2.

1 Preliminares

Ao longo deste capítulo apresentaremos definições, propriedades e resultados utilizados ao longo desta dissertação.

1.1 Espaços de funções

Nesta seção $U \subset \mathbb{R}^n$ será considerado como um subconjunto aberto.

1.1.1 Espaços de Hölder

Seja k um número natural e consideremos os seguintes espaços de funções :

$$C(U) := \{u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u \text{ é contínua}\},$$
$$C(\bar{U}) := \{u \in C(U) : u \text{ é uniformemente contínua}\},$$
$$C^k(U) := \{u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\}.$$

Definição 1.1. *Seja $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $\gamma \in (0,1]$, então*

1. *u é dita Lipchitz se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$| u(x) - u(y) | \leqslant C \mid x - y \mid, \quad \forall x, y \in U.$$

2. *u é dita Hölder contínua com expoente γ, se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$| u(x) - u(y) | \leqslant C \mid x - y \mid^{\gamma}, \quad \forall x, y \in U.$$

3. *Se u é contínua e limitada, então definimos*

$$\|u\|_{C(\bar{U})} := \sup_{x \in U} |u(x)| .$$

Notação 1.2. *$C^{0,\gamma}(\bar{U}) := \{u \in C(U) : u$ é Hölder contínua com expoente $\gamma\}$.*

Teorema 1.3. *Seja $u \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$, então*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left| \frac{u(x) - u(y)}{x - y} \right|,$$
$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \|u\|_{C(\bar{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})},$$

são respectivamente uma seminorma e uma norma no espaço $C^{0,\gamma}(\bar{U})$.

O teorema anterior pode ser encontrado na Seção 5.1, pág. 240, de Evans [14].

Notação 1.4. $C^k(\bar{U}) := \{u \in C^k(U)|\ D^\alpha u$ *é uniformemente contínua para todo* $|\alpha| \leqslant k\}$.

Definição 1.5. *O espaço de Hölder* $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ *consiste de todas as funções* $u \in C^k(\bar{U})$ *tais que*

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} < \infty,$$

Em outras palavras, o espaço $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ *consiste de todas as funções* u *que são k-vezes continuamente diferenciáveis e cuja k-ésima derivada parcial é limitada e Hölder contínua com expoente* γ.

Proposição 1.6. $\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})}$ *é uma norma no espaço de funções* $C^{k,\gamma}(\bar{U})$. *Além disso,* $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ *é um espaço de Banach sob a norma* $\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})}$.

O resultado anterior pode ser visto no Teorema 1, Seção 5.1, pág. 241, de Evans [14].

1.1.2 Espaços de Sobolev

1.1.2.1 Derivadas fracas

Definição 1.7. *Suponha que* $u,v \in L^1_{loc}(U)$ *e seja* α *um multi-índice. Dizemos que* v *é a* α*-ésima derivada parcial fraca de* u *e denotamos*

$$D^\alpha u = v$$

se satisfaz

$$\int_U u D^\alpha \phi \ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi \ dx \ , \ \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

Proposição 1.8. *A* α*-ésima derivada parcial fraca de* u*, se existe, é unicamente definida a menos de um conjunto de medida nula.*

O resultado anterior pode ser visto na Seção 5.2, pág. 243, de Evans [14].

Proposição 1.9. *(Propriedades da derivada fraca)*
Sejam $k = 1, 2, \ldots,$ *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Assuma também que* $u, v \in W^{k,p}(U)$ *e* $|\alpha| \leqslant k$*, então*

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$.
2. $D^\beta (D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}(u)$ *para quaisquer multi-índices* α, β *com* $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$
3. *Para quaisquer* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *temos que* $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ *e* $D^\alpha(\lambda u+\mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
4. *Se* V *é um subconjunto aberto de* U*, então* $u \in W^{k,p}(V)$.

5. *Se $\zeta \in C_c^\infty(U)$, então $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ e*

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \delta D^{\alpha-\beta} u, \quad \textit{(Fórmula de Leibnitz)}$$

onde $\displaystyle\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

O resultado anterior pode ser visto no Teorema 1, Seção 5.2, pág. 247, de Evans [14].

1.1.2.2 Definição e propriedades de espaços de Sobolev

Definição 1.10. *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ consiste de todas as funções localmente somáveis $u : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que para cada multi-índice α, com $|\alpha| \leqslant k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(U)$, ou seja*

$$W^{k,p}(U) := \{u \in L^p(U) \ : D^\alpha u \in L^p(U) \text{ para todo } |\alpha| \leqslant k\}.$$

Definição 1.11. *O espaço $C_c^\infty(U)$ consiste de todas as funções infinitamente diferenciáveis $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em U. Uma função $\phi \in C_c^\infty(U)$ é chamada de função teste.*

Definição 1.12. *Definimos*

$$W_0^{k,p}(U) = \overline{C_c^\infty(U)}^{W^{k,p}(U)}.$$

Notação 1.13. *Denotamos $H_0^k(U) := W_0^{k,2}(U)$.*

Proposição 1.14. *Para cada $k = 1, 2, \ldots,$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$, definamos $\|u\|_{W^{k,p}(U)}$ por*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_U |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}, 1 \leqslant p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leqslant k} \operatorname*{ess\,sup}_U |D^\alpha u| \, , \ p = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Então $\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}$ é uma norma no espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$. Além disso $W^{k,p}(U)$ é um espaço de Banach sob a norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}$.

O resultado anterior pode ser visto no Teorema 2, Seção 5.2, pág. 249, de Evans [14].

Definição 1.15.

1. *Uma sequência* $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset W^{k,p}(U)$ *converge a* $u \in W^{k,p}(U)$ *se*

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

   Neste caso, denotamos

$$u_m \to u \text{ em } W^{k,p}(U).$$

2. $u_m \to u$ *em* $W^{k,p}_{loc}(U)$ *se* $u_m \to u$ *em* $W^{k,p}(V)$ *para todo* $V \subset\subset U$.

Teorema 1.16. *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um domínio tal que* $|\Omega| < \infty$ *e* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. *Se* $u \in L^q(\Omega)$, *então* $u \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_p \leqslant |\Omega|^{1/p-1/q}\|u\|_q,$$

portanto

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 2.14, pág. 28, de Adams [1].

1.1.2.3 Traço

Queremos ser capazes de atribuir valores na fronteira ∂U para uma função $u \in W^{k,p}(U)$ supondo que ∂U seja de classe C^1. Mas em geral a função u não é contínua, pior ainda, sendo definida em quase todos os pontos de U. Assim a noção do operador traço resolve o problema.

Proposição 1.17. *(Teorema do Traço)*
Assuma que U *é limitado,* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $\partial U \in C^1$, *então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

tal que

1. $Tu = u|_{\partial U}$ *se* $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$.

2. $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, *para cada* $u \in W^{1,p}(U)$, *com a constante* C *dependendo apenas de* p *e* U.

O operador T *será chamado operador traço, e se* $u \in W^{1,p}(U)$, *dizemos que* Tu *é o traço de* u *em* ∂U.

O resultado anterior pode ser visto no Teorema 1, Seção 5.5, pág. 258, de Evans [14].

Proposição 1.18. *(Funções de traço-zero em $W^{1,p}$)*
Assuma que U é limitado e $\partial U \in C^1$. Suponha ainda que $u \in W^{1,p}(U)$. Então,

$$u \in W_0^{1,p}(U) \quad \textit{se, e somente se,} \quad Tu = 0 \ \textit{em}\ \partial U.$$

O resultado anterior pode ser visto no Teorema 2, Seção 5.5, pág. 259, de Evans [14].

Teorema 1.19. *Seja Ω aberto limitado bem regular de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ e T a função traço, então existe uma constante $C > 0$ independente de $u \in C_c^\infty(\bar{U})$ tal que*

$$\|Tu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in C_c^\infty(\bar{U}).$$

A prova deste teorema pode ser encontrada na Proposição 2.26, pág. 112, de Medeiros [39].

1.1.3 Outros espaços de funções

Definição 1.20. *Denotamos por $H^{-1}(U)$ o espaço dual de $H_0^1(U)$. E denotamos por $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ a dualidade entre $H^{-1}(U)$ e $H_0^1(U)$.*

Observação 1.21. *O espaço $H^{-1}(U)$ é um espaço de Banach munido da norma dual $\|\cdot\|_{H^{-1}(U)}$, isto é,*

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} := \sup\left\{\langle f, u\rangle \mid u \in H_0^1(U), \|u\|_{H_0^1(U)} \leqslant 1\right\}.$$

1.1.3.1 Espaços envolvendo tempo

Nesta subseção B denotara um espaço de Banach real com norma $\|\cdot\|$.

Teorema 1.22. *O espaço*

$$L^p(0,T;B)$$

consiste de todas as funções mesuráveis $u : [0,T] \to B$ tal que $t \to \|u(t)\|_B^p$ é integrável em $[0,T]$. Este é um espaço de Banach munido da norma

1. $\|u\|_{L^p(0,T;B)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt\right)^{1/p} < \infty$ *para* $1 \leqslant p < \infty$,
2. $\|u\|_{L^\infty(0,T;B)} := \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\| < \infty$.

O teorema anterior pode ser visto na Proposição II.5.A, Seção 5.1, pág. 92, de Boyer [4].

Definição 1.23. *O espaço*

$$C([0,T];B)$$

consiste de todas as funções contínuas $u : [0,T] \to B$ *com*

$$\|u\|_{C([0,T];B)} := \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\| < \infty.$$

Definição 1.24. *Seja* $u \in L^1(0,T;B)$*. Dizemos que* $v \in L^1(0,T;B)$ *é a derivada fraca de* u*, e denotamos*

$$u' = v$$

se

$$\int_0^T \phi'(t)u(t)dt = -\int_0^T \phi(t)v(t)dt,$$

para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(0,T)$*.*

Definição 1.25. *O espaço*

$$W^{1,p}(0,T;B),$$

consiste de todas as funções $u \in L^p(0,T;B)$ *tais que* u' *existe no sentido fraco e pertence a* $L^p(0,T;B)$*.*

Teorema 1.26. *O espaço* $W^{1,p}(0,T;B)$ *é um espaço de Banach munido da norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;B)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^T \|u(t)\|^p + \|u'(t)\|^p\, dt\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(\|u(t)\| + \|u'(t)\|\right), & p = \infty. \end{cases}$$

O resultado anterior pode ser visto no Lema II.5.10, Seção 5.2, pág. 98, de Boyer [4].

Notação 1.27. $H^1(0,T;B)$ *denota o espaço* $W^{1,2}(0,T;B)$*.*

Proposição 1.28. *Seja* $u \in W^{1,p}(0,T;B)$ *para algum* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*, então*

1. $u \in C([0,T];B)$ *(após possivelmente ser redefinido em um conjunto de medida nula).*
2. $u(t) = u(s) + \displaystyle\int_s^t u'(\tau)d\tau$ *para todo* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$*.*
3. *Além disso, vale a estimativa*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\| \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;B)},$$

com a constante C *dependendo apenas de* T*.*

O resultado anterior pode ser visto no Teorema 2, Seção 5.9, pág. 286, de Evans [14].

Proposição 1.29. *Suponha* $u \in L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right)$, *com* $u' \in L^2\left(0,T;H^{-1}(U)\right)$,

1. *Então,*
$$u \in C\left([0,T];L^2(U)\right).$$
(após possivelmente ser redefinido em um conjunto de medida nula).

2. *A aplicação*
$$t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(U)},$$
é absolutamente contínua, com
$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(U)} = 2\left\langle u'(t), u(t)\right\rangle,$$
para quase todo $0 \leqslant t \leqslant T$.

3. *Além disso, temos a estimativa*
$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_{L^2(U)} \leqslant C\left(\|u\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(U)\right)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right),$$
com a constante C *dependendo apenas de* T.

O resultado anterior pode ser visto no Teorema 3, Seção 5.9, pág. 287, de Evans [14].

Teorema 1.30. *Sejam* X, Y, X' *três espaços de Hilbert satisfazendo* $X \subset Y \equiv Y' \subset X'$. *Se a função* u *pertence ao espaço* $L^2(0,T;X)$, *e sua derivada* u_t *pertence a* $L^2\left(0,T;X'\right)$, *então* u *é igual em quase todo ponto a uma função no espaço* $C([0,T];Y)$. *Além disso, satisfaz*
$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\left\langle u_t, u\right\rangle,$$
no sentido distribucional em $(0,T)$. *Em particular,* $u \in L^\infty(0,T;Y)$.

A prova deste teorema pode ser encontrada no Lema 1.3, Seção 3.1, pág. 176, de Temam [46].

Teorema 1.31. *(Interpolação em espaços de funções com valor num espaço de Banach) Sejam* I *um intervalo de* $\mathbb{R}$, Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* p_1, q_1, p_2, q_2 *em* $[1,\infty]$. *Se* $f \in L^{p_1}(I, L^{q_1}(\Omega)) \cap L^{p_2}(I, L^{q_2}(\Omega))$, *então para todo* $\theta \in (0,1)$ *tem-se que* $f \in L^p(I, L^q(\Omega))$ *para* p *e* q *definidas por*
$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2},$$
e
$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}.$$
Além disso,
$$\|f\|_{L^p(I,L^q(\Omega))} \leqslant \|f\|^\theta_{L^{p_1}(I,L^{q_1}(\Omega))}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_2}(I,L^{q_2}(\Omega))}.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema II. 5.5, pág. 93, de Boyer [4].

1.1.4 Decomposição de espaços

Nesta subseção apresentamos um resultado importante para provar a desigualdade de Carleman do Teorema 0.2, isto é, o Teorema de decomposição de Helmholtz. Para isso, definamos os espaços

$$
\begin{aligned}
&E^q(\Omega) := \{\nabla p \mid p \in L^q_{loc}(\bar{\Omega}), \nabla p \in L^q(\Omega)^n\},\\
&C^\infty_{o,\sigma}(\Omega)^n := \{u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in C^\infty_o(\Omega)^n \mid \nabla \cdot u = 0\}.\\
&L^q_\sigma(\Omega)^n := \overline{C^\infty_{o,\sigma}(\Omega)^n}^{L^q(\Omega)^n}
\end{aligned}
$$

Teorema 1.32. *(Decomposição de Helmholtz) Seja $n \geqslant 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado ou um domínio exterior com fronteira de classe C^1 e $1 < q < \infty$. Então, para cada $f \in L^q(\Omega)^n$ existem únicos $u \in L^q_\sigma(\Omega)^n$ e $\nabla p \in E^q(\Omega)$, tais que a decomposição*

$$f = u + \nabla p$$

é satisfeita.
Assim, $L^q(\Omega)^n = L^q_\sigma(\Omega)^n \oplus E^q(\Omega)$. ∇p e f estão relacionados pela equação

$$\langle \nabla p, \nabla \varphi \rangle = \langle f, \nabla \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in E^{q'}(\Omega).$$

Além disso, valem as estimativas

$$
\begin{aligned}
\|\nabla p\|_q &\leqslant C\|f\|_q,\\
\|u\|_q &\leqslant (C+1)\|f\|_q.
\end{aligned}
$$

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 1.4, pág. 5, de Simader-Sohr [45].

1.2 Mínimos de funcionais

Durante esta seção B denotará um espaço de Banach e $F : B \to \mathbb{R}$ um funcional.

Definição 1.33. *Um funcional $F : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$, com $\mathscr{A} \subset B$, é dito convexo, se para todo $u, v \in \mathscr{A}$ temos*

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leqslant \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v), \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

A função $F : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ é dita estritamente convexa se a última desigualdade é estrita.

Definição 1.34. *Um funcional F é dito coercivo sobre $\mathscr{C}$, subconjunto fechado e convexo de B, se*

$$\lim F(u) = +\infty \text{ para } u \in \mathscr{C}, \text{ sempre que } \|u\| \to +\infty.$$

Definição 1.35. *Um funcional F é dito semicontínuo-inferiormente (s.c.i), se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes*

1. *$\forall a \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{u \in B : F(u) \geqslant a\}$ é fechado .*

2. *$\forall v \in B$ temos que $\liminf_{u \to v} F(u) \geqslant F(v)$.*

Definição 1.36. *Um funcional $F : B \to \bar{\mathbb{R}}$ convexo é dito próprio se nunca atingir o valor de $-\infty$ e não for identicamente ∞.*

Teorema 1.37. *Seja B um espaço reflexivo, $\mathscr{C}$ um subconjunto não vazio, convexo e fechado de B. Além disso, considere o funcional F assumindo que é convexo, s.c.i e próprio. Se $\mathscr{C}$ é limitado ou o funcional F é coercivo sobre $\mathscr{C}$, então existe $u \in \mathscr{C}$ satisfazendo*

$$F(u) = \inf_{v \in \mathscr{C}} F(v).$$

Além disso, se o funcional F é estritamente convexo, então $u \in \mathscr{C}$ é único.

A prova deste teorema pode ser encontrada na Proposição 1.2, Capítulo II, pág. 35, de Ekeland [13].

1.3 Algumas desigualdades importantes

Nesta seção presentamos desigualdades extremadamente úteis para conseguir estimativas envolvendo equações diferencias parciais.

Teorema 1.38. *(Desigualdade de Cauchy)*
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada na Proposição a, Apêndice B, pág. 622, de Evans [14].

Teorema 1.39. *(Desigualdade de Cauchy com ε)*
Sejam $a, b, \varepsilon > 0$, então

$$ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada na Proposição b, Apêndice B, pág. 622, de Evans [14].

Teorema 1.40. *(Desigualdade de Young com ε)*
Sejam $a, b, \varepsilon > 0$ e $1 < p, q < \infty$ satisfazendo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ então

$$ab \leqslant \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada na Proposição d, Apêndice B, pág. 622, de Evans [14].

Teorema 1.41. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*
Seja $(X, (\cdot, \cdot))$ um espaço vetorial complexo com produto interno. Então, para quaisquer $u, v \in X$ tem-se que

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \|v\|.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada na Proposição 5.1.2, Seção 5.1, pág. 78, de Botelho [3].

Teorema 1.42. *(Desigualdade de Hölder discreta)*
Sejam $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p, q < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada na Observação 1, Apêndice B, pág. 623, de Evans [14].

Teorema 1.43. *(Desigualdade de Hölder contínua)*
Assuma que $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, U aberto de $\mathbb{R}^n$, e $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$, então

$$\int_U |uv| dx \leqslant \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada na Proposição e, Apêndice B, pág. 622, de Evans [14].

Teorema 1.44. *(Desigualdade de Poincaré-Wirtinger's)*
Seja U um subconjunto aberto, conexo e limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira ∂U de classe C^1, e assuma $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então, existe uma constante $C > 0$ dependendo de n e p tal que

$$\left\| u - \frac{1}{|U|} \int_U u \, dy \right\|_{L^p(U)} \leqslant C \|Du\|_{L^p(U)},$$

para todo $u \in W^{1,p}(U)$.

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 1, Seção 5.8, pág. 275, de Evans [14].

Teorema 1.45. *(Desigualdade de Young para convoluções)*
Sejam $u \in L^p(U)$ e $v \in L^q(U)$ para algum $U \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto, conexo e limitado. Assuma que $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ com $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, então $u * v \in L^r(U)$ e

$$\|u * v\|_{L^r(U)} \leqslant \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)},$$

onde

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada na Seção 1.2, pág. 20, de Gallagher [10].

Teorema 1.46. *(Desigualdade de Jensen)*
Assuma que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa e $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Seja $u : U \to \mathbb{R}$ somáveis, então

$$f\left(\frac{1}{|U|}\int_U u dx\right) \leqslant \frac{1}{|U|}\int f(u)dx.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 2, Apêndice B, pág. 621, de Evans [14].

Teorema 1.47. *(Desigualdade de Gronwall - forma diferencial)*
Seja $\eta(\cdot)$ um função absolutamente contínua em $[0, T]$ satisfazendo para q.t.p. em t a desigualdade diferencial

$$\eta'(t) \leqslant \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções somáveis, não negativos em $[0, T]$. Então,

$$\eta(t) \leqslant e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right], \quad \forall t \in [0, T].$$

Em particular, se $\eta' \leqslant \phi\eta$ em $[0, T]$ e $\eta(0) = 0$, então

$$\eta \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

A prova deste teorema pode ser encontrada na Proposição j, Apêndice B, pág. 624, de Evans [14].

1.4 Resultados de análise funcional

1.4.1 Convergência fraca e fraco-estrela

Nesta seção apresentaremos as noções de convergência fraca e fraco-estrela.

Sejam X um conjunto, $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $(f_i)_{i\in I}$ uma família de funções $f_i : X \longrightarrow Y_i$, para cada $i \in I$. Queremos encontrar em X a menor topologia que torna todas as funções f_i contínuas. Para cada $i \in I$ e cada aberto A_i em Y_i, considere o conjunto

$$f_i^{-1}(A_i) = \{x \in X : f_i(x) \in A_i\}.$$

Chame de Φ a coleção dos subconjuntos de X que podem ser escritos como interseções finitas de conjuntos da forma $f_i^{-1}(A_i)$.

Teorema 1.48. *Existe uma topologia τ em X que tem Φ como base.*

O resultado anterior pode ser encontrado na Proposição 6.1.1, Seção 6.1, pág. 104, de Botelho [3].

Definição 1.49. *A topologia τ do teorema anterior é chamada de topologia gerada pela família de funções $(f_i)_{i\in I}$.*

Definição 1.50. *A topologia fraca no espaço normado $\mathcal{N}$ será denotada por $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$ é a topologia gerada pelos pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in \mathcal{N}'$.*

Notação 1.51. *Quando uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{N}$ converge para algum $x \in \mathcal{N}$ na topologia fraca, escrevemos $x_n \rightharpoonup x$.*

Teorema 1.52. *Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{N}$, então $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$, para todo $\varphi \in \mathcal{N}'$.*

O resultado anterior pode ser encontrado na Proposição 6.2.2, Seção 6.2, pág. 105, de Botelho [3].

Definição 1.53. *Seja $J_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}''$ o mergulho canônico, onde $J_{\mathcal{N}}(x) : \mathcal{N}' \to \mathbb{R}$ é dado por $J_{\mathcal{N}}(x)(\varphi) = \varphi(x)$, para $\varphi \in \mathcal{N}'$. A topologia fraco-estrela no dual $\mathcal{N}'$ do espaço normado $\mathcal{N}$, denotada por $\sigma(\mathcal{N}', \mathcal{N})$, é a topologia em $\mathcal{N}'$ gerada pelas funções pertencentes ao conjunto $J_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}) = \{J_{\mathcal{N}}(x) : x \in \mathcal{N}\} \subset \mathcal{N}''$.*

Notação 1.54. *Quando uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{N}'$ converge para algum $\varphi \in \mathcal{N}'$ na topologia fraco-estrela, escrevemos $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.*

Teorema 1.55. *Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{N}'$, então $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$, para todo $x \in \mathcal{N}$.*

A prova deste resultado pode ser encontrada na Proposição 6.3.2, Seção 6.3, pág. 111, de Botelho [3].

Teorema 1.56. *Para todo espaço normado reflexivo $\mathcal{N}$, a bola fechada unitária $B_{\mathcal{N}}$ é compacta na topologia fraca $\sigma(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$ de $\mathcal{N}$.*

A prova deste resultado pode ser encontrada no Teorema 6.4.2, Seção 6.4, pág. 116, de Botelho [3].

Teorema 1.57. *Para todo espaço normado $\mathcal{N}$, a bola fechada unitária $B_{\mathcal{N}'}$ é compacta na topologia fraco-estrela $\sigma(\mathcal{N}', \mathcal{N})$ de $\mathcal{N}'$.*

A prova deste resultado pode ser encontrado no Teorema 6.3.9, Seção 6.3, pág. 114, de Botelho [3].

1.4.2 Completamento de espaços

Definição 1.58. *Um operador linear $U : (X; (\cdot,\cdot)_1) \longrightarrow (Y; (\cdot,\cdot)_2)$ entre dois espaços com produto interno, é unitário se for sobrejetor em Y e $(\zeta, \eta)_1 = (U\zeta, U\eta)_2$ para todos $\zeta, \eta \in X$. Se existe tal operador unitário, então os espaços X, Y são chamados de unitariamente equivalentes.*

Teorema 1.59. *Se $(X, (\cdot,\cdot))$ é um espaço com produto interno, então ele é unitariamente equivalente a um subespaço denso num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Tal espaço $\mathcal{H}$ é chamado de completamento de X. Além disso, quaisquer dois completamentos de X são unitariamente equivalentes entre si.*

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 17.15, Seção 17.2, pág. 124, de Oliveira [11].

1.4.3 Teorema de Lax-Milgram e Teorema da função inversa

Teorema 1.60. *(Lax-Milgram). Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear tal que existem constantes positivas α e β tais que*

$$|b(\eta, \xi)| \leqslant \alpha \|\eta\| \|\xi\|, \quad \forall \eta, \xi \in \mathcal{H}$$

e

$$|b(\eta, \eta)| \geqslant \beta \|\eta\|^2, \quad \forall \eta \in \mathcal{H}.$$

Então, para todo $f \in \mathcal{H}'$ existe um único $\xi_f \in \mathcal{H}$ com

$$f(\eta) = b(\xi_f, \eta), \quad \forall \eta \in \mathcal{H}.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 1, Seção 6.2, pág. 297, de Evans [14].

Teorema 1.61. *(Teorema da função inversa). Sejam B_1, B_2 espaços de Banach e seja $\mathcal{A} : B_1 \mapsto B_2$ satisfazendo $\mathcal{A} \in C^1(B_1; B_2)$. Assuma também que existe $e_0 \in B_1$, $h_0 \in B_2$*

tal que $\mathcal{A}(e_0) = h_0$ *e* $\mathcal{A}'(e_0) : B_1 \mapsto B_2$ *sobrejetor, então existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $h \in B_2$ *satisfazendo* $\|h - h_0\|_{B_2} < \delta$*, existe uma solução da equação*

$$\mathcal{A}(e) = h.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada na Seção 2.3.1, pág. 107, de Alekseev [2].

1.5 Navier-Stokes

Sejam Ω um subconjunto aberto, limitado e Lipchitz em $\mathbb{R}^N$, onde $N = 2$ ou 3, $T > 0$, ν uma constante, Q o cilíndro parabólico $\Omega \times (0, T]$ e $\Sigma = \partial\Omega \times [0, T]$ a fronteira lateral. Nesta seção denotaremos por $(\cdot, \cdot)$ o produto interno induzido no espaço H definido em (2), por $L^2(\Omega)$ e também lembremos que o espaço V em (2), é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx, \quad \forall u, v \in V. \tag{1.2}$$

1.5.1 Equações de Navier-Stokes caso linear

O caso linear das equações de Navier-Stokes são as equações de evolução correspondentes para o problema de Stokes

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + \nabla p = f & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde a função vetorial $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^N$ e a função escalar $p : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ são as incognitas e $f : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^N$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$ funções dadas.

Vamos supor que $u \in \mathcal{C}^2(\bar{Q})$ e $p \in \mathcal{C}^1(\bar{Q})$ são soluções clássicas de (1.3). Multiplicando primeira equação de (1.3) por $v \in \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V}$ é definido em (2), e integrando em Ω, temos

$$(u_t, v) + \nu a(u, v) = (f, v),$$

onde $a(\cdot, \cdot)$ é definido por (1.2).

Pela densidade de $\mathcal{V}$ em V, onde V é definido em (2), a igualdade anterior é satisfeita para todo $v \in V$.

O seguinte Teorema é referente a existência, unicidade de soluções das equações de Navier-Stokes no caso linear.

Teorema 1.62. *Se $u_0 \in H$ e $f \in L^2(0,T;V')$, então existe uma única $u \in C([0,T];H) \cap L^2(0,T;V)$ com $u' \in L^2(0,T;V')$ satisfazendo*

$$\begin{cases} (u,v)_t + \nu a(u,v) = \langle f, v\rangle, & \forall v \in V, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Mais ainda, existe uma distribuição p em Q tal que a dupla (u,p) satisfaz o sistema (1.3), no sentido de que (u,p) satisfaz

$$\begin{aligned} &u_t - \nu\Delta u + \nabla p = f \\ &\nabla \cdot u = 0 \end{aligned}$$

no sentido distribucional em Q, e

$$u(x,0) = u_0(x)$$

é satisfeito no sentido

$$u(t) \to u_0 \text{ em } L^2(\Omega)^N \text{ quando } t \to 0.$$

A prova deste resultado pode ser encontrada no Teorema 1.1, Seção 3.1, pág. 172 e na Proposição 1.1, Seção 3.1, pág. 180 de Temam [46].

Agora, para finalizar a subseção apresentamos dois resultados relacionados ao sistema

$$\begin{cases} -u_t - \Delta u + \nabla q = g & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(T) = u^0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Teorema 1.63. *Assuma que $u^0 \in V$ e $g \in L^2(Q)$. Então, a solução fraca (u,q) do sistema (1.4) é na verdade, uma solução forte de (1.4). Mais precisamente*

$$u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap C([0,T];V),\ \ u_t \in L^2(Q) \ \text{ e } \ q \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de Ω tal que

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(Q)} + \|q\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C(\|u^0\|_{H^1} + \|g\|_{L^2(Q)}).$$

A prova deste teorema pode ser encontrada no Lema 4, Apêndice, pág. 445, de Fernandez-Cara e Guerrero [16].

Teorema 1.64. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $g \in L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3)$ e $u^0 = 0$. Então, existe única solução (u,q) do sistema (1.4) satisfazendo*

$$u \in L^2(0,T;W_0^{1,6/5}(\Omega)^3) \cap C([0,T];L^{4/3}(\Omega)^3),$$

onde u depende continuamente de g.

A prova deste teorema pode ser encontrada no Lema 4.3, Seção 4.2, pág. 399, de Puel [41].

1.5.2 Equações de Navier-Stokes caso não linear

O caso não linear das equações de Navier-Stokes são as equações de evolução correspondentes ao sistema

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = f & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde a função vetorial $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^N$ e a função escalar $p : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ são as incógnitas e $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^N$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$ funções dadas, onde

$$(\nabla \cdot (u^1 \otimes u^2))_i = \sum_{j=1}^{N} \partial_j (u_i^1 u_i^2), \quad i = 1, ..., N.$$

Formulação fraca I: Sejam $f \in L^2(Q)^N$ e $u_0 \in H$. Encontrar u e p tais que

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), \; p \in \mathcal{D}'(Q), \\ u_t - \nu\Delta u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = f \text{ em } \mathcal{D}'(Q), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Notação 1.65. *$\mathcal{D}'(Q)$ denota o espaço das distribuições em Q.*

Formulação fraca II: Sejam $f \in L^2(Q)^N$ e $u_0 \in H$. Encontrar u tal que

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \\ \langle u_t, v\rangle + \nu a(u,v) + b(u,u,v) = \langle \ell, v\rangle, \quad \forall v \in V, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade entre V e V', $\ell = \ell(t)$ denota

$$\langle \ell(t), v\rangle = \int_\Omega f(x,t) \cdot v(x,t) \; \mathrm{d}x, \quad \forall v \in V, \quad \textit{q.t.p. } t \in [0,T],$$

e as formas bilinear e trilinear, respectivamente,

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; \mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in V, \\ b(u,v,w) &= \int_\Omega (\nabla \cdot (u \otimes v)) \cdot w \; \mathrm{d}x, \quad \forall u, v, w \in V. \end{aligned}$$

Considere o espaço

$$\mathcal{D}_\sigma := \Big\{ w \in C_c^\infty(\omega \times [0,\infty))^N : \nabla \cdot w(t) = 0, \ \forall t \in [0,\infty) \Big\}. \tag{1.7}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (1.5) por $w \in \mathcal{D}_\sigma$ e integrando no espaço, temos

$$(u_t, w) - \nu\,(\Delta u, w) + (\nabla \cdot (u \otimes u), w) + (\nabla p, w) = (f, w)\,, \quad \forall w \in \mathcal{D}_\sigma.$$

Na integração por partes na variável espacial temos que $(\nabla p, w) = -(p, \nabla w) = 0$ e $(\Delta u, w) = -\,(\nabla u, \nabla w)$, portanto

$$(u_t, w) + \nu\,(\nabla u, \nabla w) + (\nabla \cdot (u \otimes u), w) = (f, w)\,, \quad \forall w \in \mathcal{D}_\sigma.$$

Logo, integrando entre 0 e s e utilizando integração por partes na variável temporal, podemos obter a seguinte noção de formulação fraca.

Formulação fraca III: Encontrar $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ satisfazendo $u(0) = u_0$ e

$$\begin{aligned} &-\int_0^s (u, w_t)\ \mathrm{d}t + \nu \int_0^s (\nabla u, \nabla w)\ \mathrm{d}t - \int_0^s (\nabla \cdot (u \otimes u), w)\ \mathrm{d}t \\ &= \big(u(0), w(0)\big) + \big(u(s), w(s)\big) + \int_0^s (f, w)\ \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{1.8}$$

para todo $w \in \mathcal{D}_\sigma$ e q.t.p. $s > 0$.

Teorema 1.66. *Suponha que $N \leqslant 4$, $f \in L^2(0,T;V')$ e $u_0 \in H$. Então, existe pelo menos uma função $u \in L^2(0,T;V)$, com $u' \in L^2(0,T;V')$, satisfazendo (1.6). Além disso,*

$$u \in L^\infty(0,T;H)$$

e u é fracamente contínua de $[0,T]$ em H, isto é, a função $t \to (u(t), v)$ é uma função contínua para todo $v \in H$.

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 3.1, Capítulo 3, pág. 191, de Temam [46]

Teorema 1.67. *No caso 2-dimensional, a solução u de (1.6) no contexto do Teorema 1.66 é única. Além disso, u é igual q.t.p a uma função contínua de $[0,T]$ no espaço H e*

$$u(t) \to u_0, \ \text{ em } H, \text{ quando } t \to 0.$$

Também, para qualquer aberto Ω, vale

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant 2^{1/4} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 3.2, Capítulo 3, pág. 198 e Observação 3.3, Capítulo 3, pág. 200, de Temam [46].

Teorema 1.68. *Considere $u^0 \in H$ e $g \in L^2(Q)^N$. Então, existe uma única solução (u, p) do problema adjunto dado em (7), com $u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H)$. Além disso, seja $\gamma \in C^1([0, T])$ tal que $\gamma(T) = 0$, então $(\widetilde{u}, \widetilde{p}) := (\gamma u, \gamma p)$ é solução forte do problema*

$$\begin{cases} -\widetilde{u}_t - \Delta\widetilde{u} - D\widetilde{u}\bar{y} + \nabla\widetilde{p} = \gamma g - \gamma' u & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \widetilde{u} = 0 & \text{em } Q, \\ \widetilde{u} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \widetilde{u}(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

Em particular, temos

$$p(t) \in H^1(\Omega), \quad u(t) \in H^2(\Omega)^N, \quad u_t(t) \in L^2(\Omega)^N \quad q.t.p. \;\; t \in (0, T).$$

O teorema anterior pode ser encontrado na Observação 1, Seção 1, pág. 1504, de Fernandez-Cara [31].

Finalmente apresentamos um resultado de existência e unicidade referente ao sistema linearizado (5) das equações de Navier-Stokes caso não linear.

Teorema 1.69. *Seja $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$, $f \in L^2(0, T; H^{-1})$, $y^0 \in H$ e $v \in L^2(\omega \times (0, T))^N$. Então, existe uma única função $u \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$, com $u_t \in L^2\,(0, T; V')$, solução fraca do sistema linearizado (5).*

A prova deste teorema pode ser encontrada no Lema 1.49, Seção 1.7, pág. 17, de Huaman [40].

2 Controlabilidade do Sistema Linearizado de Navier-Stokes

Ao longo deste capítulo estudaremos a controlabilidade nula do sistema linearizado (5). Neste capítulo e até o final do trabalho continuaremos considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, onde $N = 2$ ou 3. Aqui demostraremos três resultados importantes. O primeiro estabelece uma desigualdade de Carleman com funções peso que não se anulam em $t = 0$ para o adjunto do sistema linearizado (5), isto é, o sistema (7). O segundo resultado estabelece utilizando o primeiro, a controlabilidade nula do sistema linearizado (5) quando o lado direito da primeira equação deste sistema decai exponencialmente quando $t \to T^-$. Mas, este último resultado não tem regularidade suficiente para aplicar o Teorema da função inversa. Por isso, precisamos de outro resultado de controlabilidade nula com regularidade adicional . Este é o terceiro resultado importante deste capítulo, um resultado de controlabilidade nula para o sistema linearizado (5), com regularidade adicional no estado para poder aplicar o Teorema da função inversa.

Observação 2.1. *Ao longo deste capítulo (φ, π) denotará a solução do sistema adjunto (7), isto é,*

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi - D\varphi\overline{y} + \nabla\pi = g & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

2.1 Desigualdade de Carleman com pesos que não se anulam em $t = 0$

Nesta subseção iremos deduzir uma desigualdade de Carleman com pesos que não se anulam em $t = 0$ para o sistema adjunto (7). Para isso utilizaremos como ferramenta a desigualdade de Carleman dada pelo Teorema 0.2, cujos pesos se anulam em $t = 0$ e $t = T$.

Observação 2.2. *Não podemos usar diretamente a desigualdade de Carleman dada no Teorema 0.2, pois os pesos de Carleman*

$$p_1 = \lambda^4 e^{-2s\alpha}(s\xi)^3, \quad p_2 = \lambda^2 e^{-2s\alpha}(s\xi), \quad p_3 = \lambda^{-1} e^{-2s\alpha}(s\xi)^{-1},$$
$$p_4 = \lambda^{20} e^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}(s\hat{\xi})^{15/2}, \quad p_5 = \lambda^{40} e^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}(s\hat{\xi})^{16},$$

que acompanham aos termos $|\varphi|^2$, $|\nabla\varphi|^2$, $\left(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right)$, $|g|^2$, nas respectivas integrais da desigualdade (13), se anulam em $t = 0$ e $t = T$. Portanto, seus inversos tendem para infinito. Se utilizamos tais inversos para definir os espaços E_N em (2.24) e (2.25), para um par $(y, v) \in E_N$, onde y é solução de (5), teremos que $y(0) = y(T) = 0$. Ou seja, o estado inicial será sempre nulo, situação indesejável pois queremos um estado inicial arbitrário.

Pela última observação, precisamos de outra desigualdade de Carleman com pesos que não se anulam em $t = 0$. Utilizando tais pesos definiremos os espaços E_N. Tais espaços desempenham um papel decisivo para mostrar mais adiante o segundo resultado de controlabilidade nula do sistema linearizado (5) do capítulo, dado na Proposição 2.12.

Consideremos uma função ℓ de classe C^∞ tal que para algum $\delta \in (0, T/2)$ satisfaz

$$\ell(t) = \begin{cases} T^2/4 & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2} - \delta, \\ t(T-t) & \text{para } \dfrac{T}{2} + \delta \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

e as seguintes funções auxiliares associadas,

$$\begin{aligned} \beta(x,t) &= \frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{\ell(t)^4}, \\ \hat{\beta}(t) &= \min_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x,t), \\ \beta^*(t) &= \max_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x,t), \\ \gamma(x,t) &= \frac{e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{\ell(t)^4}, \\ \hat{\gamma}(t) &= \max_{x\in\overline{\Omega}} \gamma(x,t), \\ \gamma^*(t) &= \min_{x\in\overline{\Omega}} \gamma(x,t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde η^0 é definida como no Lema A.4.

Para tornar a demonstração do lema 2.3 mais clara definamos

$$J(s,\lambda;\varphi) := \iint\limits_Q e^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \, dx \, dt + \iint\limits_Q e^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 \, dx \, dt + \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N}, \tag{2.2}$$

onde β e γ são dadas em (2.1) e φ solução do sistema adjunto (7).

Lema 2.3. *(Desigualdade de Carleman com pesos que não se anulam em $t = 0$) Seja $\overline{y}$ satisfazendo (4). Então, existe uma constante positiva C dependendo de T, s e λ tal que a solução φ do sistema adjunto (7) satisfaz*

$$J(s,\lambda,\varphi) \leqslant C\left(\iint\limits_Q e^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|g|^2 \, dx \, dt + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} e^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}|\varphi|^2 \, dx \, dt\right), \tag{2.3}$$

para quaisquer s e λ como no Teorema 0.2. As funções $\beta, \gamma, \hat{\beta}, \beta^*, \hat{\gamma}$ e γ^* são dadas em (2.1).

Demonstração. Consideremos a decomposição

$$J(s, \lambda; \varphi) = J_1(s, \lambda; \varphi) + J_2(s, \lambda; \varphi),$$

onde

$$J_1(s, \lambda; \varphi) := \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \, dx \, dt + \int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 \, dx \, dt,$$

$$J_2(s, \lambda; \varphi) := \int_{T/2}^{T}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \, dx \, dt + \int_{T/2}^{T}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 \, dx \, dt.$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$J_i(s, \lambda; \varphi) \leqslant C_i \left(\iint\limits_Q e^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|g|^2 \, dx \, dt + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} e^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}|\varphi|^2 \, dx \, dt \right),$$

para $i = 1, 2$.

Estimativa para $\mathbf{J_1}(\mathbf{s}, \lambda; \varphi)$: Consideremos a seguinte estimativa de energia para o sistema adjunto (7) dado pela Proposição A.10

$$\begin{aligned} &\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,T/2;V)} + \|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T/2;H)} \\ &\leqslant C_7 e^{C_2 T\|\overline{y}\|^2_\infty} \left(\|g\|^2_{L^2(0,3T/4;L^2(\Omega)^N)} + \frac{1}{T^2}\|\varphi\|^2_{L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega)^N)} \right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pelas definições de β e γ dadas em (2.1), existem constantes C_1, $C_2 > 0$ tais que

$$e^{-2s\beta}\gamma^3 \leqslant C_1 \quad \text{e} \quad e^{-2s\beta}\gamma \leqslant C_2 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T/2).$$

Multiplicando as duas desigualdades anteriores por $|\varphi|^2$ e $|\nabla\varphi|^2$, respectivamente, e integrando em $\Omega \times (0, T/2)$, temos

$$\int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \, dx \, dt \leqslant C_1 \int_0^{T/2}\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx \, dt,$$

$$\int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 \, dx \, dt \leqslant C_2 \int_0^{T/2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx \, dt.$$

Somando as duas desigualdades acima. Logo, somando o termo $\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N}$ em ambos membros da desigualdade resultante, obtem-se

$$\begin{aligned} &\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \, dx \, dt + \int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 \, dx \, dt \\ &\leqslant C_3 \left(\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^{T/2}\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx \, dt + \int_0^{T/2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx \, dt \right). \end{aligned}$$

Substituindo a última desigualdade no lado esquerdo de (2.4) e lembrando que $L^\infty \hookrightarrow L^2$, temos

$$\begin{aligned}&\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^{T/2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^{T/2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C_8\mathrm{e}^{C_2T\|\bar{y}\|^2_\infty}\left(\|g\|^2_{L^2(0,3T/4;L^2(\Omega)^N)} + \frac{1}{T^2}\|\varphi\|^2_{L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega)^N)}\right).\end{aligned}$$

No lado direito da última desigualdade seja C_4^* o máximo entre as constantes $C_8\mathrm{e}^{C_2T\|\bar{y}\|^2_\infty}$ e $C_8\mathrm{e}^{C_2T\|\bar{y}\|^2_\infty}/T^2$. Logo, esta torna se

$$\begin{aligned}&\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^{T/2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^{T/2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C_4^*(T,s,\lambda)\left(\int_0^{3T/4}\int_\Omega |g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Novamente, pelas definições de β e γ em (2.1), existem constantes C_4, $C_5 > 0$ tais que

$$\mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2} \geqslant C_4 \quad \text{e} \quad \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3 \geqslant C_5 \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,3T/4).$$

Multiplicando as duas desigualdades anteriores por $|g|^2$ e $|\varphi|^2$, respectivamente, e integrando em $\Omega\times(0,3T/4)$ e $\Omega\times(T/2,3T/4)$, obtemos

$$\begin{aligned}C_4\int_0^{3T/4}\int_\Omega |g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\ C_5\int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Somando as duas últimas desigualdades e considerando $C_6 = \min\{C_4, C_5\}$, temos

$$\begin{aligned}&C_6\left(\int_0^{3T/4}\int_\Omega |g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)\\ &\leqslant C_4\int_0^{3T/4}\int_\Omega |g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C_5\int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Em seguida, substituindo a última desigualdade no lado direito de (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}&\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^{T/2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^{T/2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C_1(T,s,\lambda)\left(\int_0^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Agora, vamos a estimar os dois termos no lado direito da desigualdade anterior. O primeiro termo pode ser estimado por

$$\int_0^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|g|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \leqslant \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|g|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

Para estimar o segundo termo do lado direito de (2.6), notemos que no aberto $\Omega \times (T/2, 3T/4)$ as funções α e β definidas em (11) e (2.1), respectivamente, coincidem. Portanto vale

$$\int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t.$$

Pela desigualdade de Carleman dada em (13) e a definição de $I(s,\lambda;\varphi)$ em (12), podemos estimar o lado direito da desigualdade anterior, de modo que

$$\begin{aligned}\int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t &\leqslant I(s,\lambda;\varphi)\\ &\leqslant C\left(1+T^2\right)\left(s^{15/2}\lambda^{20}\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\hat{\xi}^{15/2}|g|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right.\\ &\left.+s^{16}\lambda^{40}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}\hat{\xi}^{16}|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Consideremos $C(T,s,\lambda)$ o máximo entre as constantes $C_1 = C(1+T^2)s^{15/2}\lambda^{20}$ e $C_2 = C(1+T^2)s^{16}\lambda^{40}$, com s e λ como no Teorema 0.2. Como as definições de α e β coincidem em $\Omega\times(T/2,T)$, isso implica que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\alpha^* = \beta^*$, $\xi = \gamma$ e $\hat{\xi} = \hat{\gamma}$ em $\Omega\times(T/2,3T/4)$, de acordo com suas definições dadas em (11) e (2.1). Logo, podemos reescrever a desigualdade anterior em termos de γ e β, como

$$\begin{aligned}&\int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\\ &\leqslant C_2\left(T,s,\lambda\right)\left(\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|g|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo a desigualdade anterior e (2.7) no lado direito de (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}J_1(s,\lambda;\varphi) &= \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^{T/2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_0^{T/2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\\ &\leqslant C(T,s,\lambda)\left(\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|g|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right),\end{aligned} \tag{2.8}$$

para quaisquer s e λ como no Teorema 0.2.

Estimativa para $\mathbf{J_2}(\mathbf{s},\lambda;\varphi)$: Como as definições de α e β dadas em (11) e (2.1), respectivamente, coincidem em $\Omega\times(T/2,T)$, valem as igualdades

$$\int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$

e

$$\int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t,$$

para quaisquer λ e s como no Teorema 0.2.

Somando as duas igualdades anteriores e comparando o resultado com a definição de $I(s,\lambda;\varphi)$ dada em (12), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\\
&= \int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\\
&\leqslant I(s,\lambda;\varphi).
\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade anterior na desigualdade de Carleman dada por (13), temos

$$\begin{aligned}
&\int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\\
&\leqslant C\left(1+T^2\right)\left(s^{15/2}\lambda^{20}\iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\xi^{15/2}|g|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right.\\
&\left.+s^{16}\lambda^{40}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}\hat{\xi}^{16}|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

Considerando o máximo entre as constantes $C_1 = C(1+T^2)s^{15/2}\lambda^{20}$ e $C_2 = C(1+T^2)s^{16}\lambda^{40}$ denotado por $C(T,s,\lambda)$, para todo s e λ como no Teorema 0.2, podemos reescrever a desigualdade anterior, como

$$\begin{aligned}
&\int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\\
&\leqslant C(T,s,\lambda)\left(\iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\hat{\xi}^{15/2}|g|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}\hat{\xi}^{16}|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

Para terminar, como as definições de α e β coincidem em $\Omega\times(T/2,T)$, isso implica que $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$, $\alpha^*=\beta^*$, $\xi=\gamma$ e $\hat{\xi}=\hat{\gamma}$ em $\Omega\times(T/2,T)$, de acordo com suas definições dadas em (11) e (2.1). Assim, podemos reescrever a desigualdade anterior em termos de γ e β, isto é,

$$\begin{aligned} J_2(s,\lambda;\varphi) &= \int_{T/2}^{T}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|\varphi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T}\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C(T,s;\lambda)\left(\iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-4s\hat\beta+2s\beta^*}\hat\gamma^{15/2}|g|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat\beta+6s\beta^*}\hat\gamma^{16}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

para quaisquer s e λ como no Teorema 0.2.

Somando as desigualdades (2.8) e (2.9) obtemos a desigualdade desejada (2.3). □

2.2 Primeiro resultado de controlabilidade nula do sistema linearizado de Navier-Stokes

Seguindo a Definição 0.3, apresentamos o primeiro resultado de controlabilidade nula no espaço H definido em (2), para o sistema linearizado (5).

Proposição 2.4. *Sejam $y^0 \in H$ e $\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)$. Então, o sistema linearizado (5) possui a propriedade de controlabilidade nula no espaço H.*

Para demonstrar a última proposição, precisamos de alguns resultados preliminares com respeito ao funcional J_ϵ definido por (2.11). Tais resultados são coletados pelos lemas 2.5 a 2.8.

Para definir o funcional J_ϵ, consideremos para cada $\psi^0 \in H$ dado a solução ψ do sistema adjunto (7) com lado direito nulo, isto é,

$$\begin{cases} L^*\psi + \nabla q = 0 & \text{em } Q, \\ \nabla\cdot\psi = 0 & \text{em } Q, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(T) = \psi^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

onde L^* é definido por (9).

Assim para cada $\epsilon > 0$, definamos o funcional

$$\begin{aligned} J_\epsilon(\psi^0) := \frac{1}{2}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \epsilon\|\psi^0\|_H + \int_\Omega \psi(0)\cdot y^0\,\mathrm{d}x \\ + \int_0^T \langle f,\psi\rangle\,\mathrm{d}t, \quad \forall\psi^0 \in H, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota a dualidade usual entre os espaços $H^{-1}(\Omega)^N$ e $H_0^1(\Omega)^N$.

Lema 2.5. *O funcional J_ϵ definido por (2.11) é estritamente convexo de acordo a Definição 1.33.*

Demonstração. Consideremos v_1, $v_2 \in H$, com $v_1 \neq v_2$, e sejam ψ_1, ψ_2 soluções associadas do sistema adjunto com lado direito nulo (2.10), isto é,

$$\begin{cases} -\psi_{i,t} - \Delta\psi_i - D\psi_i\bar{y} + \nabla q_i = 0 & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \psi_i = 0 & \text{em } Q, \\ \psi_i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi_i(T) = v_i & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

para $i = 1, 2$.

Notemos que para $\lambda \in [0,1]$, $\psi = \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2$ é solução do sistema

$$\begin{cases} -\psi_t - \Delta\psi - D\psi\bar{y} + \nabla(\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2) = 0 & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \psi = 0 & \text{em } Q, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \end{cases}$$

e satisfaz

$$\psi(T) = (\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2)(T) = \lambda(\psi_1)(T) + (1-\lambda)(\psi_2)(T) = \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2.$$

Avaliando o funcional J_ϵ em $\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2$, temos

$$\begin{aligned} &J_\epsilon(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \epsilon\|\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2\|_H \\ &+ \int_\omega (\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2)(0)\cdot y^0 \,\mathrm{d}x + \int_0^T \langle f, \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2\rangle \,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Lembrando que para quaisquer x, y diferentes num espaço de Hilbert com norma $\|\cdot\|$ vale

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 < \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2, \quad \forall\lambda \in (0,1).$$

Então, em particular, o resultado anterior é válido no espaço $L^2(\omega\times(0,T))^N$, isto é,

$$\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < \lambda \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\psi_1|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + (1-\lambda) \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\psi_2|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Substituindo a última desigualdade no lado direito de (2.12) e utilizando a desigualdade triangular na norma $\|\cdot\|_H$, temos

$$\begin{aligned} J_\epsilon(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) &< \frac{1}{2}\lambda \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\psi_1|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \epsilon\lambda\|v_1\|_H + \lambda \int_\omega \psi_1(0)\cdot y^0 \, \mathrm{d}x \\ &+ \lambda \int_0^T \langle f, \psi_1\rangle \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2}(1-\lambda) \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\psi_2|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \epsilon(1-\lambda)\|v_2\|_H \\ &+ (1-\lambda)\int_\omega \psi_2(0)\cdot y^0 \, \mathrm{d}x + (1-\lambda)\int_0^T \langle f, \psi_2\rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \lambda J_\epsilon(v_1) + (1-\lambda)J_\epsilon(v_2). \end{aligned}$$

□

Lema 2.6. *O funcional J_ϵ definido por (2.11) é coercivo de acordo a Definição 1.34.*

Demonstração. Primeiramente vamos estimar o valor absoluto dos dois últimos termos na definição de J_ϵ. Pela desigualdade triangular vale

$$\left| \int_\omega \psi(0)\cdot y^0 \, \mathrm{d}x + \int_0^T \langle f, \psi\rangle \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \left|\left(\psi(0), y^0\right)\right| + \int_0^T |\langle f, \psi\rangle| \, \mathrm{d}t. \tag{2.13}$$

Como $\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}$ e $\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}$ são inversos multiplicativos e da bilinearidade da dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle$, temos

$$\left|\int_0^T \langle f, \psi\rangle \, \mathrm{d}t\right| = \int_0^T \left|\left\langle \mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f, \mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi \right\rangle\right| \, \mathrm{d}t.$$

Logo, tendo em conta a última igualdade, podemos reescrever (2.13) como

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \psi(0)\cdot y^0 \, \mathrm{d}x + \int_0^T \langle f, \psi\rangle \, \mathrm{d}t \right| &\leqslant \left|\left(\psi(0), y^0\right)\right| \\ &+ \int_0^T \left|\left\langle \mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f, \mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi \right\rangle\right| \, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela desigualdade de Young dadas nos Teoremas 1.41 e 1.40, podemos estimar o primeiro termo do lado direito de (2.14) por

$$\left|\left(\psi(0), y^0\right)\right| \leqslant \|\psi(0)\|_{L^2(\Omega)^N} \|y^0\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant \delta\|\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + C(\delta)\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)^N}. \tag{2.15}$$

Utilizando continuidade do operador linear $\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f$ e a desigualdade de Young (Teorema 1.40), podemos estimar o segundo termo do lado direito de (2.14). Assim, notemos que

$$\begin{aligned} &\left|\left\langle \mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f, \mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi \right\rangle\right| \\ &\leqslant \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|_{H^{-1}(\Omega)^N} \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi\|_{H_0^1(\Omega)^N} \\ &\leqslant \delta\|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)^N} + C(\delta)\|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)^N}. \end{aligned}$$

Logo, integrando a última desigualdade no intervalo $(0,T)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left|\left\langle \mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f, \mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi\right\rangle\right| \; \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^T \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|_{H^{-1}(\Omega)^N} \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi\|_{H_0^1(\Omega)^N} \; \mathrm{d}t \\
&\leqslant \delta \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} + C(\delta)\|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Somando as desigualdades (2.15) e (2.16) e agrupando adequadamente os termos, temos

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\psi(0), y^0\right)\right| + \int_0^T \left|\left\langle \mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f, \mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi\right\rangle\right| \; \mathrm{d}t \\
&\leqslant C(\delta)\left(\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)}\right) \\
&+ \delta\left(\|\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)}\right).
\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade anterior no lado direito de (2.14), conseguimos estimar o valor absoluto dos dois últimos termos do funcional J_ϵ, isto é,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \psi(0)\cdot y^0 \; \mathrm{d}x + \int_0^T \langle f, \psi\rangle \; \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant C(\delta)\left(\|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)}\right) \\
&+ \delta\left(\|\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)}\right).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora, notemos que na desigualdade de Carleman dada por (2.3), a função peso $\mathrm{e}^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}$ que acompanha o termo $|\varphi|^2$, é limitada em $(0,T)$, portanto

$$\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}|\varphi|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \leqslant \widetilde{C} \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t.$$

Além disso, pela definição de norma em $H_0^1(\Omega)^N$ e as definições de β^* e γ^* em (2.1), temos

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}\psi\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)} &= \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\beta^*}\gamma^*\left(|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2\right) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \\
&\leqslant \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma\left(|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2\right) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Como consequência das duas últimas desigualdades, da definição de $J(s,\lambda;\varphi)$ dada por (2.2) e da desigualdade de Carleman (2.3) obtida aplicando o Lema 2.3 para o sistema adjunto com lado direito nulo (2.10), obtemos

$$\|\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma\left(|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2\right) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \leqslant J(s,\lambda;\varphi) \leqslant \widetilde{C} \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t.$$

Substituindo a desigualdade anterior no lado direito de (2.17), temos

$$\int_\omega \psi(0)\cdot y^0\ \mathrm{d}x + \int_0^T \langle f,\psi\rangle\ \mathrm{d}t \geqslant -\Bigg[C(\delta)\left(\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)}\right) + \delta\tilde{C}\iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\Bigg].$$

Substituindo a última desigualdade na definição do funcional J_ϵ dada por (2.11) e considerando $\delta > 0$ de modo que $\delta\tilde{C} < 1/4$, temos

$$J_\epsilon(\psi^0) \geqslant \epsilon\|\psi^0\|_H - C\left(\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)}\right) + \frac{1}{4}\iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t.$$

De onde

$$J_\epsilon(\psi^0) \geqslant \epsilon\|\psi^0\|_H - C\left(\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)}\right).$$

Da última desigualdade, quando $\|\psi^0\| \to +\infty$ temos que $J_\epsilon(\psi^0) \to +\infty$, mostrando a coercividade. $\square$

Lema 2.7. *O funcional J_ϵ definido por (2.11) é semicontínuo inferiormente de acordo a Definição 1.35.*

Demonstração. Demonstraremos que o funcional J_ϵ é contínuo, isso implicará que J_ϵ é semicontínuo inferiormente. Para isso mostremos que para quaisquer v_1, $v_2 \in H$, temos

$$\lim_{\|v_2\|_H\to 0} |J_\epsilon(v_1+v_2) - J_\epsilon(v_1)| = 0.$$

Consideremos v_1, $v_2 \in H$ e sejam ψ_1, ψ_2 soluções associadas do sistema (2.10), isto é,

$$\begin{cases} -\psi_{i,t} - \Delta\psi_i - D\psi_i\bar{y} + \nabla q_i = 0 & \text{em } Q,\\ \nabla\cdot\psi_i = 0 & \text{em } Q,\\ \psi_i = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\ \psi_i(T) = v_i & \text{em } \Omega,\end{cases}$$

para $i = 1,2$.

Assim, notemos que

$$|J_\epsilon(v_1+v_2) - J_\epsilon(v_1)| = \epsilon(\|v_1+v_2\|_H - \|v_1\|_H) + \frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} \left(|\psi_1+\psi_2|^2 - |\psi_1|^2\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_\Omega \psi_2(0)\cdot y^0\ \mathrm{d}x + \int_0^T \langle f,\psi_2\rangle\ \mathrm{d}t.$$

De onde,

$$|J_\epsilon(v_1+v_2)-J_\epsilon(v_1)| \leqslant \epsilon\|v_2\|_H + \left(\|\psi_1\|_{L^2(\omega\times(0,T))^N}\|\psi_2\|_{L^2(\omega\times(0,T))^N} + \frac{1}{2}\|\psi_2\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))^N}\right)$$
$$+ (\psi_2(0), y^0)_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^T \langle f, \psi_2\rangle \, \mathrm{d}t. \tag{2.18}$$

Pela Proposição A.11, temos a dependência contínua da solução do sistema adjunto com lado direito nulo (2.10) com respeito do estado inicial, isto é,

$$\|\psi_2\|_{L^2(Q)^N} \leqslant C_0 \mathrm{e}^{CT}\|v_2\|_H.$$

De onde, quando $\|v_2\|_H \to 0$, temos que o primeiro termo do lado direito de (2.18) tende para zero

Quando $\|v_2\|_H \to 0$, temos que $\|\psi_2\|_{L^2(\omega\times(0,T))^N} \to 0$. Portanto, o segundo termo do lado direito de (2.18), tende também para zero

$$\lim_{\|v_2\|_H\to 0}\left(\|\psi_1\|_{L^2(\omega\times(0,T))^N}\|\psi_2\|_{L^2(\omega\times(0,T))^N} + \frac{1}{2}\|\psi_2\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))^N}\right) = 0.$$

Finalmente, considerando as desigualdades

$$\left|(\psi_2(0), y^0)_{L^2(\Omega)^N}\right| \leqslant \|\psi_2(0)\|_{L^2(\Omega)^N}\|y^0\|_{L^2(\Omega)^N},$$
$$\left|\int_0^T \langle f, \psi_2\rangle \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_{L^2(\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);H^{-1}(\Omega)^N)}\|\psi_2\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)},$$

podemos mostrar que o terceiro e quarto termo do lado direito de (2.18) tendem para zero.

Aplicando a Proposição A.10 ao sistema adjunto com lado direito nulo (2.10) obtemos a estimativa de energia

$$\|\psi_2(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\psi_2\|^2_{L^2(0,T/2;V)} + \|\psi_2\|^2_{L^\infty(0,T/2;H)} \leqslant C_1 \mathrm{e}^{C_2T\|\overline{y}\|^2_\infty}\frac{1}{T^2}\|\psi_2\|^2_{L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega)^N)}.$$

De onde como $\|\psi_2\|_{L^2(Q)^N} \to 0$, a última desigualdade implica que $\|\psi_2(0)\|_{L^2(\Omega)^N} \to 0$ e $\|\psi_2\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)} \to 0$.

Portanto, o terceiro e quarto termo do lado direito de (2.18) tendem para zero quando $\|v_2\|_H \to 0$. Assim,

$$\lim_{\|v_2\|_H\to 0}|J_\epsilon(v_1+v_2)-J_\epsilon(v_1)| = 0.$$

□

Lema 2.8. *Para cada $\epsilon > 0$, existe um único ponto em H denotado por ψ^0_ϵ, no qual o funcional J_ϵ definido por (2.11) atinge seu mínimo.*

Demonstração. Pelos lemas 2.5, 2.6 e 2.7, sabemos que o funcional J_ϵ definido em (2.11), satisfaz as condições de convexidade estrita, coercividade e semi-continuidade inferior dadas nas definições 1.33, 1.34 e 1.35. Logo, o resultado segue aplicando o Teorema 1.37 ao funcional J_ϵ. □

Para cada $\epsilon > 0$, pelo Lema 2.8 existe um único ponto $\psi_\epsilon^0 \in H$ no qual o funcional J_ϵ definido em atinge seu mínimo. Denotando por ψ_ϵ a solução correspondente do sistema adjunto com lado direito nulo (2.10) satisfazendo $\psi_\epsilon(T) = \psi_\epsilon^0$, podemos definir uma função v_ϵ, que a partir de agora será chamado de controle, da forma

$$v_\epsilon = \psi_\epsilon 1_\omega. \tag{2.19}$$

O controle v_ϵ possui certas propriedades coletadas nos lemas 2.9 e 2.10, que nos permitirão mostrar a Proposição 2.4.

Lema 2.9. *Para cada $\epsilon > 0$ a norma do controle v_ϵ definido em (2.19), é limitada no espaço $L^2(\omega \times (0,T))^N$.*

Demonstração. Denotemos por y_ϵ a solução correspondente do sistema linearizado (5) associada ao controle v_ϵ, ou seja,

$$\begin{cases} Ly_\epsilon + \nabla p = f + v_\epsilon 1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot y_\epsilon = 0 & \text{em } Q, \\ y_\epsilon = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_\epsilon(0) = y^0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Do fato que $J_\epsilon(\psi_\epsilon^0) \leqslant J_\epsilon(0) = 0$, pois J_ϵ atinge seu mínimo em ψ_ϵ^0, e utilizando o final da demostração do fato que J_ϵ é coerciva no Lema 2.6, temos

$$\frac{1}{4} \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\psi_\epsilon|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqslant C(\delta) \left(\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} \right).$$

Calculando a raiz quadrada de ambos os membros da desigualdade anterior e usando o fato que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$ para quaisquer números positivos x, y, temos

$$\frac{1}{2} \|\psi_\epsilon 1_\omega\|_{L^2(Q)^N} \leqslant \sqrt{C(\delta)} \left(\|y^0\|_H + \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} \right).$$

E consequentemente,

$$\begin{aligned} \|v_\epsilon\|_{L^2(\omega\times(0,T))^N} &= \|\psi_\epsilon 1_\omega\|_{L^2(Q)^N} \\ &\leqslant 2\sqrt{C(\delta)} \left(\|y^0\|_H + \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} \right). \end{aligned}$$

□

Lema 2.10. *Para cada $\epsilon > 0$, a solução y_ϵ do sistema linearizado (5) associada ao controle v_ϵ definido por (2.19), satisfaz a condição $\|y_\epsilon(T)\|_H \leqslant \epsilon$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, temos que $J_\epsilon(\psi_\epsilon^0) \leqslant J_\epsilon(\psi_\epsilon^0 + \lambda\psi^0)$, para todo $\psi^0 \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, pois em ψ_ϵ^0 o funcional J_ϵ atinge seu mínimo. Denotemos por ψ_ϵ e ψ as respectivas soluções associadas ao sistema adjunto com lado direito nulo (2.10) tais que $\psi_\epsilon(T) = \psi_\epsilon^0$ e $\psi(T) = \psi^0$, respectivamente.

Avaliando o funcional J_ϵ definido por (2.11) nos pontos ψ_ϵ^0 e $\psi_\epsilon^0 + \lambda\psi^0$, temos que a condição $J_\epsilon(\psi_\epsilon^0) \leqslant J_\epsilon(\psi_\epsilon^0 + \lambda\psi^0)$ equivale a

$$-\epsilon|\lambda|\|\psi^0\| \leqslant \lambda \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \psi_\epsilon \cdot \psi \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \frac{1}{2}|\lambda|^2 \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \lambda \int_\Omega \psi(0) \cdot y^0 \; \mathrm{d}x + \lambda \int_0^T \langle f, \psi \rangle \; \mathrm{d}t.$$

Considerando $\lambda < 0$ e dividindo a desigualdade anterior por λ, obtemos

$$\epsilon\|\psi^0\| \geqslant \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \psi_\epsilon \cdot \psi \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\lambda \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \int_\Omega \psi(0) \cdot y^0 \; \mathrm{d}x + \int_0^T \langle f, \psi \rangle \; \mathrm{d}t.$$

Fazendo $\lambda \to 0^-$ na última desigualdade, obtém-se

$$\epsilon\|\psi^0\| \geqslant \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \psi_\epsilon \cdot \psi \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \int_\Omega \psi(0) \cdot y^0 \; \mathrm{d}x + \int_0^T \langle f, \psi \rangle \; \mathrm{d}t. \tag{2.20}$$

Lembremos que para $\epsilon > 0$, existe um controle v_ϵ definido em (2.19). Seja y_ϵ a solução do sistema linearizado (5) associada ao controle v_ϵ, isto é,

$$\begin{cases} Ly_\epsilon + \nabla p = f + v_\epsilon 1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot y_\epsilon = 0 & \text{em } Q, \\ y_\epsilon = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_\epsilon(0) = y_\epsilon^0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Então, seu estado adjunto é dado pelo sistema (2.10), ou seja,

$$\begin{cases} L^*\psi + \nabla q = 0 & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \psi = 0 & \text{em } Q, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(T) = \psi^0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Portanto y_ϵ e ψ satisfazem

$$\iint\limits_Q y_\epsilon \cdot (L^*\psi + \nabla q)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_\Omega y_\epsilon(T)\cdot\psi(T)\ \mathrm{d}x = \int_0^T \langle f(t), \psi(t)\rangle\ \mathrm{d}t + \iint\limits_Q v_\epsilon \cdot \psi\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$
$$+ \int_\Omega y_\epsilon(0)\cdot\psi(0)\ \mathrm{d}x.$$

Portanto, considerando os sistemas (5) e seu adjunto (2.10) na igualdade anterior, obtemos

$$\int_\Omega y_\epsilon(T)\cdot\psi^0\ \mathrm{d}x = \int_0^T \langle f(t), \psi(t)\rangle\ \mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \psi_\epsilon\cdot\psi\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$
$$+ \int_\Omega y^0\cdot\psi(0)\ \mathrm{d}x.$$

Substituindo (2.20) na última igualdade, temos que

$$(y_\epsilon(T), \psi^0) \leqslant \epsilon\|\psi^0\|, \quad \forall\psi^0 \in H.$$

Consequentemente,

$$\|y_\epsilon(T)\|_H \leqslant \epsilon.$$

□

Finalmente, utilizando os lemas 2.9 e 2.10, podemos mostrar a Proposição 2.4.

Demonstração. (da Proposição 2.4) Seja $\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$. Mostraremos que dado $y^0 \in H$, existe um controle $v \in L^2(\omega\times(0,T))^N$ tal que a solução associada (y_v, p_v) do sistema linearizado (5) com estado inicial y^0, satisfaz

$$y_v(T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Notemos que se $(\widehat{y}, p_1)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \widehat{y}_t - \Delta\widehat{y} + \nabla\cdot(\bar{y}\otimes\widehat{y} + \widehat{y}\otimes\bar{y}) + \nabla p_1 = f & \text{em } Q, \\ \nabla\cdot\widehat{y} = 0 & \text{em } Q, \\ \widehat{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \widehat{y}(0) = y^0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e $(\widetilde{y}, p_2)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \widetilde{y}_t - \Delta\widetilde{y} + \nabla\cdot(\bar{y}\otimes\widetilde{y} + \widetilde{y}\otimes\bar{y}) + \nabla p_2 = v1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla\cdot\widetilde{y} = 0 & \text{em } Q, \\ \widetilde{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \widetilde{y}(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.21}$$

Então, (y, p) é solução do sistema linearizado (5), onde y é dado por $y = \widehat{y} + \widetilde{y}$ e $p = p_1 + p_2$.

Lembremos que para $\epsilon > 0$ podemos definir um controle v_ϵ como em (2.19). Assim, denotemos por $\widetilde{y}_\epsilon$ a solução associada ao controle v_ϵ do sistema (2.21) com estado inicial nulo, isto é,

$$\begin{cases} \widetilde{y}_{\epsilon,t} - \Delta\widetilde{y}_\epsilon + \nabla \cdot (\bar{y} \otimes \widetilde{y}_\epsilon + \widetilde{y}_\epsilon \otimes \bar{y}) + \nabla p_{2,\epsilon} = v_\epsilon 1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \widetilde{y}_\epsilon = 0 & \text{em } Q, \\ \widetilde{y}_\epsilon = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \widetilde{y}_\epsilon(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema 2.9 a família de funções v_ϵ da forma $v_\epsilon = \psi_\epsilon 1_\omega$ é uniformemente limitada. Pelo Teorema 1.56 a bola fechada é compacta na topologia fraca. Portanto, qualquer sequência limitada possuirá uma subsequencia convergente. Assim, temos que existe $v \in L^2(\omega \times (0, T))^N$ tal que $v_\epsilon \rightharpoonup v$.

Pela Proposição A.13, temos que existem constantes C_5, $C_6 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{y}_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)} \leqslant C_5, \\ &\|\widetilde{y}_{\epsilon,t}\|_{L^2(0,T;V')} \leqslant C_6. \end{aligned}$$

Como a bola fechada unitária é compacta na topologia fraca (ver Teorema 1.56), temos que existe $\widetilde{y} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, com $\widetilde{y}_t \in L^2(0, T; V')$, tal que

$$\begin{aligned} &\widetilde{y}_\epsilon \rightharpoonup \widetilde{y} \text{ em } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \\ &\widetilde{y}_{\epsilon,t} \rightharpoonup \widetilde{y}_t \text{ em } L^2(0, T; V'). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por um procedimento análogo ao feito para obter a formulação fraca III das equações de Navier Stokes dado em (1.8), obtemos a formulação fraca para o sistema (2.21), isto é,

$$\begin{aligned} &-\int_0^s (\widetilde{y}, w_t)\ dt + \int_0^s (\nabla\widetilde{y}, \nabla w)\ dt - \int_0^s \int_\Omega \big(\bar{y} \otimes y + y \otimes \bar{y}\big) \odot \nabla w \ dx\ dt \\ &= \big(\widetilde{y}(0), w(0)\big) + \big(\widetilde{y}(s), w(s)\big) + \int_0^s (v 1_\omega, w)\ dt, \end{aligned} \tag{2.23}$$

para todo $w \in \mathcal{D}_\sigma$ e *q.t.p.* $s > 0$, onde $\mathcal{D}_\sigma$ é definido em (1.7). Além disso, $\odot$ representa um produto interno de matrizes $N \times N$. Isto é, $A \odot B = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} b_{i,j}$.

Consequentemente, pelo Teorema 1.52 e a primeira convergência em (2.22), temos

$$\begin{aligned} &\int_0^s (\widetilde{y}_\epsilon, w_t)\ dt \longrightarrow \int_0^s (\widetilde{y}, w_t)\ dt, \\ &\int_0^s (\nabla\widetilde{y}_\epsilon, \nabla w)\ dt \longrightarrow \int_0^s (\nabla\widetilde{y}, \nabla w)\ dt, \\ &\int_0^s \int_\Omega \big(\bar{y} \otimes \widetilde{y}_\epsilon + \widetilde{y}_\epsilon \otimes \bar{y}\big) \odot \nabla w \ dx\ dt \longrightarrow \int_0^s \int_\Omega \big(\bar{y} \otimes \widetilde{y} + \widetilde{y} \otimes \bar{y}\big) \odot \nabla w \ dx\ dt. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando as últimas três convergências, o fato que $v_\epsilon \rightharpoonup v$ e tendo em conta a formulação fraca para o sistema (2.21) dada por (2.23), temos que $\widetilde{y}$ é solução associada ao controle v do sistema (2.21) com estado inicial nulo.

Notemos que definindo $y := \widehat{y} + \widetilde{y}$, temos que $y = y_v$ é solução do sistema linearizado (5) associada ao controle v com estado inicial $y(0) := \widehat{y}(0) + \widetilde{y}(0) = y^0$.

Agora, só resta provar que $y(T) = 0$ em Ω. Notemos que para cada $\epsilon > 0$ vale $y_\epsilon = \widehat{y} + \widetilde{y}_\epsilon$ e $\widetilde{y}_\epsilon \rightharpoonup \widetilde{y}$, então

$$y_\epsilon = \widehat{y} + \widetilde{y}_\epsilon \rightharpoonup y = \widehat{y} + \widetilde{y} \text{ em } L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V).$$

Consideremos $\phi \in H_0^1(\Omega)^N$ qualquer e $\theta \in C^1[0,T]$ satisfazendo $\theta(0) = 0$ e $\theta(T) = 1$. Notemos que

$$\frac{d}{dt}(y_\epsilon, \phi\theta)_{L^2(\Omega)^N} = \langle y_{\epsilon,t}, \phi\theta\rangle + (y_\epsilon, \phi\theta')_{L^2(\Omega)^N}.$$

Logo, integrando em $(0,T)$ e tendo em conta que $\theta(0) = 0$, obtemos

$$(y_\epsilon(T), \phi)_{L^2(\Omega)^N} = \int_0^T \langle y_{\epsilon,t}, \phi\theta\rangle \text{ dt} + \int_0^T (y_\epsilon, \phi\theta')_{L^2(\Omega)^N} \text{ dt}.$$

Pelas convergências dadas em (2.22), temos que

$$\begin{aligned}(y_\epsilon(T), \phi)_{L^2(\Omega)^N} \longrightarrow \int_0^T \langle y_t, \phi\theta\rangle \text{ dt} + \int_0^T (y, \phi\theta')_{L^2(\Omega)^N} \text{ dt} &= \int_0^T \frac{d}{dt}(y, \phi\theta)_{L^2(\Omega)^N} \text{ dt} \\ &= (y(T), \phi)_{L^2(\Omega)^N}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(y_\epsilon(T), \phi)_{L^2(\Omega)^N} \longrightarrow (y(T), \phi)_{L^2(\Omega)^N}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)^N.$$

Finalmente como $H_0^1(\Omega)^N$ é denso em $L^2(\Omega)^N$, então a convergência anterior é válida para todo $\phi \in L^2(\Omega)^N$. Portanto, deduzimos que $y_\epsilon(T) \rightharpoonup y(T)$ em $L^2(\Omega)^N$. Pelo Lema 2.10, temos que $y_\epsilon(T) \rightharpoonup 0$ em $L^2(\Omega)^N$ e da unicidade do limite fraco, segue que

$$y(T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

□

2.3 Segundo resultado de controlabilidade nula do sistema linearizado de Navier-Stokes

Agora apresentamos um segundo resultado de controlabilidade nula para o sistema linearizado (5) cuja solução é mais regular. Para isso, vamos definir espaços dependentes da dimensão N denotados por E_N, utilizando os inversos dos pesos da desigualdade de Carleman (2.3). Tais espaços são definidos da seguinte forma

$$\begin{aligned} E_2 =\Big\{&(y,v) \in E_0 : y(\cdot,0) \in H, \exists p \text{ tal que} \\ &\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(Ly + \nabla p - v1_\omega) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)\Big\} \end{aligned} \tag{2.24}$$

e

$$\begin{aligned} E_3 =\Big\{&(y,v) \in E_0 : y(\cdot,0) \in L^4(\Omega)^3 \cap H, \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}y \in L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3), \\ &\exists p \text{ tal que } \mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(Ly + \nabla p - v1_\omega) \in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)\Big\}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde

$$\begin{aligned} E_0 =\Big\{&(y,v) : \mathrm{e}^{2s\hat\beta - s\beta^*}\hat\gamma^{-15/4}y, \mathrm{e}^{4s\hat\beta-3s\beta^*}\hat\gamma^{-8}v1_\omega \in L^2(Q)^N, \\ &\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}y \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)\Big\}. \end{aligned}$$

Os espaços E_N $(N = 2,3)$, são espaços de Banach munidos das normas

$$\begin{aligned} \|(y,v)\|^2_{E_2} =&\|\mathrm{e}^{2s\hat\beta - s\beta^*}\hat\gamma^{-15/4}y\|^2_{L^2(Q)^2} + \|\mathrm{e}^{4s\hat\beta-3s\beta^*}\hat\gamma^{-8}v1_\omega\|^2_{L^2(Q)^2} \\ &+\|\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}y\|^2_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} \\ &+\|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(Ly + \nabla p - v1_\omega)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)} \\ &+\|y(0)\|^2_H \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|(y,v)\|^2_{E_3} =&\|\mathrm{e}^{2s\hat\beta - s\beta^*}\hat\gamma^{-15/4}y\|^2_{L^2(Q)^3} + \|\mathrm{e}^{4s\hat\beta-3s\beta^*}\hat\gamma^{-8}v1_\omega\|^2_{L^2(Q)^3} \\ &+\|\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}y\|^2_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} \\ &+\|\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}y\|^2_{L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3)} \\ &+\|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(Ly + \nabla p - v1_\omega)\|^2_{L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)} \\ &+\|y(0)\|^2_{L^4(\Omega)^3\cap H}. \end{aligned}$$

Observação 2.11. *Notemos que dado $(y,v) \in E_N$ então $y(T) = 0$. Pois, em particular $(y,v) \in E_0$, e portanto, $\mathrm{e}^{2s\hat\beta - s\beta^*}\hat\gamma^{-15/4}y \in L^2(Q)^N$, o que implica que*

$$\iint_Q \mathrm{e}^{4s\hat\beta - 2s\beta^*}\hat\gamma^{-15/2}|y|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{2.26}$$

Como a função $\mathrm{e}^{-4s\hat\beta + 2s\beta^*}\hat\gamma^{15/2}$ é um peso da desigualdade de Carleman (2.3), então ela se anula em $t = T$ e seu inverso $\mathrm{e}^{4s\hat\beta - 2s\beta^*}\hat\gamma^{-15/2}$ tende para infinito quando $t \to T^-$. Pela condição de finitude (2.26), deduzimos que $y(T) = 0$. Assim, dado um estado inicial $y^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$, se conseguimos mostrar a existência de um controle v tal que juntamente com a solução associada y_v do sistema (5) satisfaz que $(y_v, v) \in E_N$, então temos que o sistema (5) é controlável a zero no espaço $L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$ de acordo com a Definição 0.3.

Neste contexto, apresentamos o segundo resultado de controlabilidade nula para o sistema linearizado (5).

Proposição 2.12. *Assuma que a trajetória $\bar{y}$, solução do sistema não controlado (3), satisfaz (4) e suponha que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas*

$$\begin{cases} \text{Se } N = 2 : y^0 \in H, e^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)^2), \\ \text{Se } N = 3 : y^0 \in H \cap L^4(\Omega)^3, e^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f \in L^2(0,T; W^{-1,6}(\Omega)^3). \end{cases} \tag{2.27}$$

Então, existe um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))^N$ tal que se y_v é a solução associada do sistema linearizado (5) com estado inicial y^0, temos que $(y_v, v) \in E_N$. Em particular, o sistema (5) é controlável a zero no espaço $L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$ de acordo na Definição 0.3.

Antes de iniciar a prova, daremos uma ideia intuitiva de como encontrar o par (y, v) da proposição acima.

Considere um problema de minimização com restrições, isto é,

$$\begin{cases} \inf F(u) \\ \text{sujeito a } G(u) = 0, \end{cases} \tag{2.28}$$

onde $F : B_1 \to \mathbb{R}$, $G : B_1 \to B_2$ e B_1, B_2 espaços de Banach.

Se o problema (2.28) possui solução $u_0 \in B_1$, então por multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in {B_2}^*$ tal que

$$F'(u_0)h - \lambda(G'(u_0)h) = 0, \quad \forall h \in B_1. \tag{2.29}$$

A recíproca não é necessariamente verdadeira, ou seja, se existe $u_0 \in B_1$ satisfazendo (2.29), não necessariamente satisfaz (2.28). Mas u_0 é um candidato como solução do problema de minimização (2.28).

Assim, vamos introduzir o problema de minimização

$$\begin{cases} \inf \dfrac{1}{2} \left(\displaystyle\iint_Q e^{4s\hat{\beta}-2s\beta^*} \hat{\gamma}^{-15/2} |y|^2 \, dx \, dt + \iint_{\omega\times(0,T)} e^{8s\hat{\beta}-6s\beta^*} \hat{\gamma}^{-16} |v|^2 \, dx \, dt \right) \\ \text{onde } v \in L^2(Q)^N, \operatorname{supp} v \subset \omega \times (0,T) \text{ e} \\ \begin{cases} Ly + \nabla p = f + v 1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0, \ y(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{2.30}$$

Primeiramente, como no contexto do problema de minimização (2.28), vamos a assumir que o problema de minimização (2.30), possui solução única $(\hat{y}, \hat{v})$. Então, pelo princípio de Lagrange, temos que existem variáveis duais $\hat{z}$ e $\hat{q}$ tais que

$$\begin{cases} \hat{y} = \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}(L^*\hat{z}+\nabla\hat{q}), \quad \nabla\cdot\hat{z}=0 & \text{em } Q, \\ \hat{v} = -\mathrm{e}^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}\hat{z} & \text{em } \omega\times(0,T), \\ \hat{z}=0 & \text{sobre } \Sigma, \end{cases} \tag{2.31}$$

onde L^* é o operador adjunto definido em (9).

Ainda no contexto do problema de minimização (2.28), a igualdade

$$a\left((\hat{z},\hat{q}),(w,h)\right) = \langle \ell,(w,h)\rangle, \quad \forall (w,h)\in P_0, \tag{2.32}$$

o par $(\hat{z},\hat{q})$ e o espaço vetorial P_0 desempenham o mesmo papel que a igualdade (2.29), u_0 e o espaço B_1, respectivamente. O espaço vetorial P_0 é definido como

$$P_0 = \left\{(w,h)\in C^\infty(\bar{Q})^{N+1} : \nabla\cdot w=0, \quad w=0 \text{ em } \Sigma, \quad \int_\omega h(x,t)\,\mathrm{d}x = 0\right\}, \tag{2.33}$$

$a(\cdot,\cdot)$ denota a forma bilinear $a: P_0\times P_0\to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a((z,q),(w,h)) := & \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}(L^*z+\nabla q)(L^*w+\nabla h)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ & + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16} zw\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad \forall (z,q),(w,h)\in P_0, \end{aligned} \tag{2.34}$$

e $\langle \ell,\cdot\rangle$ o funcional linear $\ell: P_0\to\mathbb{R}$ dado por

$$\langle \ell,(w,h)\rangle := \int_0^T \langle f(t),w(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \int_\Omega y^0\cdot w(0)\,\mathrm{d}x, \quad \forall (w,h)\in P_0. \tag{2.35}$$

Assim, procuramos um resultado que nos permita mostrar a existência de um par $(\hat{z},\hat{q})$ tal que (2.32) seja satisfeita, par mediante o qual definiremos o par (y,v) da Proposição 2.12.

Para isso, seguiremos a seguinte estratégia : definiremos um produto interno em P_0 mediante a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ dada em (2.34). Logo, aplicaremos o Teorema do completamento (Teorema 1.59) para encontrar um espaço de Hilbert P (completamento de P_0) contendo P_0. Depois, estendendo a forma bilinear e linear dadas em (2.34) e (2.35) ao espaço P, verificaremos a continuidade e coercividade da forma bilinear e a continuidade do funcional linear. Finalmente, aplicaremos o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.60) para encontrar um par $(\hat{z},\hat{q})$ tal que (2.32) seja satisfeita em P.

Lema 2.13. *A forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$, definida em (2.34), é um produto interno no espaço vetorial P_0 definido em (2.33).*

Demonstração. Pela definição da forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ dada em (2.34), verifica-se que são satisfeitas a linearidade na primeira variável, a simetria e $a(0,0)=0$. É necessário apenas mostrar que se $a\left((w,h),(w,h)\right)=0$ então $(w,h)=0$.

Seja $(w,h)\in P_0$, então pela definição de $a(\cdot,\cdot)$ temos

$$a\big((w,h),(w,h)\big) = \iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|L^*w+\nabla h|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}|w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Em particular, pela definição de P_0 em (2.33), (w,h) é solução do sistema

$$\begin{cases} -w_t-\Delta w+Dw\bar{y}+\nabla h = L^*w+\nabla h & \text{em } Q,\\ \nabla\cdot w=0 & \text{em } Q,\\ w=0 & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Assim, aplicando o Lema 2.3 ao sistema anterior, temos que (w,h) satisfaz a desigualdade de Carleman (2.3), isto é,

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{Q}\mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\iint\limits_{Q}\mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\|w(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N}\\ &\leqslant C\left(\iint\limits_{Q}\mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|L^*w+\nabla h|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\iint\limits_{\omega\times(0,T)}\mathrm{e}^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}|w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)\\ &=Ca\big((w,h),(w,h)\big),\quad\forall (w,h)\in P_0. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Assumindo que $a((w,h),(w,h))=0$, pela desigualdade anterior temos que

$$\iint\limits_{Q}\mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|L^*w+\nabla h|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=0,$$
$$\iint\limits_{Q}\mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3|w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=0.$$

Como os pesos $\mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}$ e $\mathrm{e}^{-2s\beta}\gamma^3$ são positivos quase sempre, então $w=0$, $L^*w+\nabla h=0$, o que implica que $\nabla h=0$. Do fato que $h\in C^\infty(\bar{Q})$, $\nabla h=0$ e $\bar{Q}$ conexo, temos que h é constante. Finalmente como $\displaystyle\int_\omega h(x,t)\,\mathrm{d}x=0$, temos que $h=0$. □

Lema 2.14. *Existe um espaço de Hilbert P contendo ao espaço vetorial P_0 definido em (2.33), e um único par $(\hat{z},\hat{q})\in P$, satisfazendo (2.32) em P.*

Demonstração. Pelo Lema 2.13 sabemos que $(P_0,a(\cdot,\cdot))$ é um espaço com produto interno. Mas este não é necessariamente completo com respeito ao produto interno $a(\cdot,\cdot)$. Pelo

Teorema de completamento (Teorema 1.59), temos que existe um espaço de Hilbert P, conjunto das classes de equivalência de sequencias de Cauchy em P_0, com produto interno

$$\widetilde{a}(\widetilde{w}, \widetilde{h}) := \lim_{n\to\infty} a(w_n, h_n), \quad \forall(\widetilde{w}, \widetilde{h}) \in P,$$

onde $\widetilde{w} = (w_n)_{n=1}^{\infty}$, $\widetilde{h} = (h_n)_{n=1}^{\infty}$ e $w_n, h_n \in P_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, também pelo Teorema de completamento, P_0 é isométricamente isomorfo a um subespaço denso de P. Sem perda de generalidade podemos considerar que

$$P = \overline{P_0}^{\|\cdot\|_P}.$$

Para aliviar as notações e não sobrecarregarmos com uma simbologia desnecessária, $a(\cdot,\cdot)$ denotará o produto interno em P.

Agora, para mostrar a existência do par $(\hat{z}, \hat{q})$ em P, mostraremos algumas propriedades satisfeitas pela forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ e o funcional linear ℓ.

Continuidade e Coercividade da forma bilinear a$(\cdot,\cdot)$: Como $a(\cdot,\cdot)$ é um produto interno no espaço de Hilbert P, então a norma em P é induzida pelo produto interno $a(\cdot,\cdot)$. Em outras palavras, vale a igualdade

$$a((w,h),(w,h)) = \|(w,h)\|_P^2, \quad \forall(w,h) \in P.$$

De onde segue imediatamente a continuidade e coercividade.

Continuidade do funcional linear ℓ: Notemos que pela desigualdade triangular, temos

$$|\langle \ell, (w,h)\rangle| \leqslant \left|\int_0^T \langle f(t), w(t)\rangle \, \mathrm{d}x\right| + \left|\int_\Omega y^0 w(0) \, \mathrm{d}x\right|. \tag{2.37}$$

O segundo termo do lado direito da última desigualdade satisfaz

$$\left|\int_\Omega y^0 w(0) \, \mathrm{d}x\right| = \left|\big(y^0, w(0)\big)\right|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant \|y^0\|_H \|w(0)\|_H. \tag{2.38}$$

Como $\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}$ e $\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2}$ são inversos multiplicativos e da bilinearidade da dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle$, segue

$$\begin{aligned}|\langle f(t), w(t)\rangle|_{(H^{-1}(\Omega)^N, H_0^1(\Omega)^N)} &= |\langle \mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f(t), \mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} w(t)\rangle|_{(H^{-1}(\Omega)^N, H_0^1(\Omega)^N)} \\ &\leqslant \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)^N} \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} w(t)\|_{H_0^1(\Omega)^N}.\end{aligned}$$

Integrando a última desigualdade no intervalo $(0,T)$, temos uma estimativa para o primeiro termo do lado direito da desigualdade (2.37)

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle f(t), w(t)\rangle \, \mathrm{d}t &\leqslant \int_0^T \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)^N} \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} w(t)\|_{H_0^1(\Omega)^N} \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} w\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Somando as desigualdades (2.38) e (2.39) e substituindo no lado direito de (2.37), temos

$$
\begin{aligned}
|\langle \ell, (w,h)\rangle| \leqslant{}& \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} w\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)} \\
&+ \|y^0\|_H \|w(0)\|_H, \quad \forall (w,h) \in P.
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

Agora, estimemos alguns termos do lado direito da desigualdade anterior para conseguir a continuidade de ℓ.

Notemos que pela desigualdade (2.36) e as definições de β^*, γ^* dadas em (2.1), vale

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} w\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)} &= \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\beta^*}\gamma^* |w|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\beta^*}\gamma^* |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant C a\big((w,h),(w,h)\big) \\
&= C\|(w,h)\|_P^2.
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Também como P_0 é denso em P, então dado $(w,h) \in P$, existe uma sequência $(w_n,h_n) \subset P_0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|(w_n,h_n)\|_{P_0} = \|(w,h)\|_P$. Pela desigualdade (2.36) temos que $\|w_n(0)\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant C\|(w_n,h_n)\|_{P_0}$, onde fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$
\|w(0)\|_H \leqslant C\|(w,h)\|_P. \tag{2.42}
$$

Substituindo as desigualdades (2.41) e (2.42) em (2.40), obtemos

$$
|\langle \ell, (w,h)\rangle| \leqslant C \left(\|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} + \|y^0\|_H \right) \|(w,h)\|_P, \quad \forall (w,h) \in P.
$$

Portanto, ℓ é contínua.

Finalmente, como são válidas a continuidade e coercividade da forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ e o funcional linear ℓ é contínuo, pelo Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.60), existe um único par $(\hat{z}, \hat{q}) \in P$ satisfazendo

$$
a\left((\hat{z},\hat{q}),(w,h)\right) = \langle \ell, (w,h)\rangle, \quad \forall (w,h) \in P. \tag{2.43}
$$

□

Lema 2.15. *Existem um controle $\hat{v} \in L^2(\omega \times (0,T))^N$, uma função $\hat{y} \in L^2(Q)^N$ e uma função $\hat{p}$ tal que o par $(\hat{y},\hat{p})$ é solução do sistema linearizado (5) com controle $\hat{v}$ e estado inicial y^0.*

Demonstração. Pelo Lema 2.14, existe um único par $(\hat{z},\hat{q}) \in P$ satisfazendo (2.43). Por (2.31), podemos definir outro par $(\hat{y},\hat{v})$ por

$$
\hat{y} = \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}(L^*\hat{z} + \nabla\hat{q}) \quad \text{e} \quad \hat{v} = -\mathrm{e}^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}\hat{z}1_\omega. \tag{2.44}
$$

Das definições anteriores, podemos deduzir que

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{4s\hat{\beta}-2s\beta^*}\hat{\gamma}^{-15/2}|\hat{y}|^2 = \mathrm{e}^{-4s\hat{\beta}+2s\beta^*}\hat{\gamma}^{15/2}|L^*\hat{z}+\nabla\hat{q}|^2 & \text{em } Q, \\ \mathrm{e}^{8s\hat{\beta}-6s\beta^*}\hat{\gamma}^{-16}|\hat{v}|^2 = \mathrm{e}^{-8s\hat{\beta}+6s\beta^*}\hat{\gamma}^{16}|\hat{z}|^2 & \text{em } \omega\times(0,T). \end{cases}$$

Integrando as duas igualdades anteriores em Q e $\omega \times (0,T)$, respectivamente, somando as integrais e pela definição de $a(\cdot,\cdot)$ dada em (2.34), obtemos

$$\iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{4s\hat{\beta}-2s\beta^*}\hat{\gamma}^{-15/2}|\hat{y}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{8s\hat{\beta}-6s\beta^*}\hat{\gamma}^{-16}|\hat{v}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = a\big((\hat{z},\hat{q}),(\hat{z},\hat{q})\big).$$

Pela igualdade (2.43), a continuidade do funcional linear ℓ e a definição da norma $\|\cdot\|_P$, segue que

$$a\big((\hat{z},\hat{q}),(\hat{z},\hat{q})\big) = \langle \ell,(\hat{z},\hat{q})\rangle \leqslant C\|(\hat{z},\hat{q})\|_P = Ca\big((\hat{z},\hat{q}),(\hat{z},\hat{q})\big)^{1/2}.$$

De onde, temos

$$a\left((\hat{z},\hat{q}),(\hat{z},\hat{q})\right)^{1/2} \leqslant C < \infty.$$

Consequentemente,

$$\iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{4s\hat{\beta}-2s\beta^*}\hat{\gamma}^{-15/2}|\hat{y}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{8s\hat{\beta}-6s\beta^*}\hat{\gamma}^{-16}|\hat{v}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{2.45}$$

Em particular, da última desigualdade segue que $\hat{y} \in L^2(Q)^N$ e $\hat{v} \in L^2(\omega\times(0,T))^N$.

Agora vamos a mostrar que para o controle $\hat{v}$ existe uma função $\hat{p}$ tal que o par $(\hat{y},\hat{p})$ satisfaz o sistema (5) com estado inicial y^0, sem a condição $\hat{y}(T) = 0$.

Para isso, pelo Teorema 1.69 existe um único par $(\tilde{y},\tilde{p})$, solução (fraca) associada ao controle $\hat{v}$ com estado inicial y^0 do sistema linearizado (5), isto é,

$$\begin{cases} L\tilde{y} + \nabla\tilde{p} = f + \hat{v}1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla\cdot\tilde{y} = 0 & \text{em } Q, \\ \tilde{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \tilde{y}(0) = y^0, & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Logo, $\tilde{y}$ é também a única solução do sistema linearizado (5) por transposição (ou solução ultrafraca). Em outras palavras, que $\tilde{y}$ é a única função em $L^2(Q)^N$ satisfazendo certa equação integro-diferencial, onde $\tilde{y}$ e y^0 não precisam regularidade extra alguma. Tal equação será obtida a seguir por um método não rigoroso.

Solução por transposição: Seja $w \in \mathcal{D}_\sigma$, onde $\mathcal{D}_\sigma$ é definido em (1.7). Multiplicando a primeira equação do sistema linearizado (5) por w e integrando em Q, temos

$$\iint_Q (Ly + \nabla p) \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t = \iint_Q (f + v1_\omega) \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t. \tag{2.46}$$

Lembrando a definição do operador L dado em (6) e mediante a integração por partes, obtemos as igualdades

$$\begin{aligned}
&\iint_Q y_t \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t = -\iint_Q y \cdot w_t \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \int_\Omega \big[y(T) \cdot w(T) - y(0) \cdot w(0)\big] \; \mathrm{d}x,\\
&\iint_Q \Delta y \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t = \iint_Q y \cdot \Delta w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t,\\
&\iint_Q (\nabla \cdot (y \otimes \overline{y})) \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t = -\iint_Q y \cdot \nabla w \overline{y} \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t,\\
&\iint_Q (\nabla \cdot (\overline{y} \otimes y)) \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t = -\iint_Q y \cdot \nabla w^t \overline{y} \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Consequentemente, a igualdade (2.46) pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned}
&\iint_Q y \cdot L^* w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \int_\Omega y(T) \cdot w(T) - \iint_Q p \; \nabla \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t\\
&= \iint_Q f \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \iint_Q v1_\omega \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \int_\Omega y(0) \cdot w(0) \; \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

onde o operador adjunto L^* é dado em (9).

Para que a igualdade anterior faça sentido, precisamos substituir alguns do seus termos da seguinte forma

$$\iint_Q f \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle \; \mathrm{d}t,$$

$$-\iint_Q p \; \nabla \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t = \iint_Q \nabla h \cdot y \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t,$$

obtendo

$$\begin{aligned}
\iint_Q y \cdot (L^* w + \nabla h) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \int_\Omega y(T) \cdot w(T) = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle \; \mathrm{d}t + \iint_Q v1_\omega \cdot w \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t\\
+ \int_\Omega y(0) \cdot w(0) \; \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Mediante a última igualdade, podemos definir o conceito de solução por transposição.

Definição 2.16. *Diz-se que y_* é solução por tranposição (ou ultrafraca) do sistema linearizado (5) se y_* é a única função em $L^2(Q)^N$ satisfazendo*

$$\iint\limits_Q y_* \cdot b \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, \mathrm{d}t + \int_\Omega y^0 \cdot w(0) \, \mathrm{d}x + \iint\limits_Q v 1_\omega \cdot w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \quad \forall b \in L^2(Q)^N, \tag{2.47}$$

onde (w, h) satisfaz

$$\begin{cases} L^* w + \nabla h = b & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot w = 0 & \text{em } Q, \\ w = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(T) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{2.48}$$

e L^* é dado em (9).

Observação 2.17. *A definição anterior faz sentido pois o lado direito de (2.47) pode ser visto como um funcional $S : L^2(Q)^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Tal funcional é contínuo quando y^0 e f satisfazem as hipóteses em (2.27) e (w, q) solução do sistema (2.48). Logo, pelo Teorema de representação de Riesz, existe um único $y_* \in \left(L^2(Q)^N\right)' = L^2(Q)^N$ tal que*

$$\langle y_*, b \rangle_{L^2(Q)^N, L^2(Q)^N} := \iint\limits_Q y^* \cdot b \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \langle S, b \rangle, \quad \forall b \in L^2(Q)^N.$$

Agora, notemos que substituindo a igualdade (2.44) em (2.43) e tendo em conta as definições para $a(\cdot, \cdot)$ e ℓ dadas em (2.34) e (2.35), temos que o par $(\hat{y}, \hat{v})$ satisfaz

$$\iint\limits_Q \hat{y} \cdot (L^* w + \nabla h) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, \mathrm{d}t + \int_\Omega y^0 \cdot w(0) \, \mathrm{d}x + \iint\limits_Q \hat{v} 1_\omega \cdot w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \quad \forall (w, h) \in P.$$

Da última igualdade, como é válida para todo $(w, h) \in P$, então em particular é válida para $(w, h) \in P$ satisfazendo o sistema (2.48). Logo, podemos reescrevê-la, obtendo

$$\iint\limits_Q \hat{y} \cdot b \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, \mathrm{d}t + \int_\Omega y^0 \cdot w(0) \, \mathrm{d}x + \iint\limits_Q \hat{v} 1_\omega \cdot w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \quad \forall b \in L^2(Q)^N, \tag{2.49}$$

onde $(w, h) \in P$ satisfaz

$$\begin{cases} L^* w + \nabla h = b & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot w = 0 & \text{em } Q, \\ w = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Note que, seguindo a Observação 2.17, o lado direito de (2.49) pode ser visto como o funcional

$$S : L^2(Q)^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$\langle S, b\rangle := \int_0^T \langle f(t), w(t)\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \,\mathrm{d}t + \int_\Omega y^0 \cdot w(0) \,\mathrm{d}x + \iint_Q \hat{v} 1_\omega \cdot w \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.$$

De onde segue que S está bem definido e é linear. A continuidade de S, segue da desigualdade abaixo. Aqui devemos lembrar que pela Proposição A.12, w depende continuamente de b

$$\begin{aligned} |\langle S, b\rangle| &\leqslant \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} w\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)} \\ &+ \|y^0\|_H \|w(0)\|_{L^2(Q)^N} + \|\hat{v}\|_{L^2(Q)^N} \|w\|_{L^2(Q)^N} \\ &\leqslant \|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} \|\mathrm{e}^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{1/2} w\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^N)} \\ &+ \|y^0\|_H \|w\|_{C(0,T;H)} + C_1 \|\hat{v}\|_{L^2(Q)^N} \|w\|_{L^2(0,T;V)} \\ &\leqslant C_2 \left(\|\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2} f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)} + \|y^0\|_H + \|\hat{v}\|_{L^2(Q)^N} \right) \|w\|_{L^2(0,T;V)\cap C(0,T;H)} \\ &\leqslant C_3 \|b\|_{L^2(Q)^N}. \end{aligned}$$

Deste último fato e da igualdade (2.49) temos que pela Definição 2.16, $\hat{y}$ é solução por transposição associada ao controle $\hat{v}$ do sistema (5). Como o par $(\tilde{y}, \tilde{p})$ é solução fraca de (5), em particular é solução por transposição de (5). Pela unicidade, segue que $\hat{y} = \tilde{y}$. Considerando $\hat{p} = \tilde{p}$, temos que $(\hat{y}, \hat{p})$ é solução do sistema linearizado (5) com controle $\hat{v}$ e estado inicial y^0, mas ainda sem satisfazer a condição $\hat{y}(T) = 0$. □

Agora podemos provar a Proposição 2.12. Lembremos que pela Observação 2.11, se mostrarmos que $(\hat{y}, \hat{v}) \in E_N$, então se satisfaz a condição $\hat{y}(T) = 0$. Ou seja, é satisfeita a controlabilidade a zero do sistema linearizado (5) no espaço $L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$ de acordo na Definição 0.3.

Demonstração. (da Proposição 2.12) Seja $\overline{y}$ (trajetória) solução do sistema (3) satisfazendo (4). Além disso suponha válidas as hipóteses para y^0 e f em (2.27). Mostraremos que existe um controle $\widehat{v} \in L^2(\Omega \times (0,T))^N$ tal que se $y_{\widehat{v}}$ é a solução associada do sistema linearizado (5) com estado inicial y^0, temos que $(y_{\widehat{v}}, \widehat{v}) \in E_N$.

Pelo Lema 2.15, existe um controle $\hat{v}$, uma função $\hat{y} \in L^2(Q)^N$ e uma função $\hat{p}$ tal que o par $(\hat{y}, \hat{p})$ satisfaz o sistema linearizado (5) com controle $\hat{v}$ e estado inicial y^0. Só resta provar que $(\hat{y}, \hat{v}) \in E_N$ para $N = 2, 3$.

Da desigualdade (2.45) dada na demonstração do Lema 2.15, temos que $(\hat{y}, \hat{v})$ satisfaz

$$\mathrm{e}^{2s\hat{\beta}-s\beta^*}\hat{\gamma}^{-15/4}\hat{y}, \ \mathrm{e}^{4s\hat{\beta}-3s\beta^*}\hat{\gamma}^{-8}\hat{v} \in L^2(Q)^N.$$

Como $(\hat{y}, \hat{p})$ é solução do sistema (5) associado ao controle $\hat{v}$, então podemos isolar f na primeira igualdade de (5), obtendo $f = L\hat{y} + \nabla\hat{p} - \hat{v}1_\omega$. Pelas hipóteses para f dadas em (2.27), obtemos que

- Se $N = 2:$ Existe $\hat{p}$ tal que $\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(L\hat{y} + \nabla\hat{p} - \hat{v}1_\omega) \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)^2)$.
- Se $N = 3:$ Existe $\hat{p}$ tal que $\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(L\hat{y} + \nabla\hat{p} - \hat{v}1_\omega) \in L^2(0,T; W^{-1,6}(\Omega)^3)$.

Como o par $(\hat{y}, \hat{p})$ satisfaz o sistema linearizado (5) com controle $\hat{v}$, temos que $\hat{y}(0) = y^0$. Pelas hipóteses para y^0 em (2.27), obtemos que

- Se $N = 2 : \hat{y}(0) \in H$.
- Se $N = 3 : \hat{y}(0) \in L^4(\Omega)^3 \cap H$.

Lembrando a definição do espaço E_N dada em (2.24) e (2.25), então só resta mostrar os seguinte fatos

- FATO 1: Se $N = 2, 3$; então $\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}\hat{y} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$.
- FATO 2: Se $N = 3$; então $\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}\hat{y} \in L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3)$.

Prova do Fato 1: Consideremos as funções

$$\begin{aligned}
y^* &= \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}\hat{y}, \\
p^* &= \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}\hat{p}, \\
f^* &= \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}(f + \hat{v}1_\omega).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
y_t^* &= (\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4})_t\hat{y} + \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}\hat{y}_t, \\
\Delta y^* &= \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}\Delta\hat{y}, \\
\nabla\cdot(\bar{y}\otimes y^* + y^*\otimes\bar{y}) &= \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}\nabla\cdot(\bar{y}\otimes\hat{y} + \hat{y}\otimes\bar{y}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Ly^* + \nabla p^* &= (\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4})_t\hat{y} + \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}(\hat{y}_t - \Delta\hat{y} + \nabla\cdot(\bar{y}\otimes\hat{y} + \hat{y}\otimes\bar{y}) + \nabla\hat{p}) \\ &= (\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4})_t\hat{y} + (\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4})(L\hat{y} + \nabla\hat{p}) \\ &= (\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4})_t\hat{y} + f^*. \end{aligned}$$

Consequentemente, o par (y^*, p^*) satisfaz o sistema

$$\begin{cases} Ly^* + \nabla p^* = f^* + (\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4})_t\hat{y} & \text{em } Q, \\ \nabla\cdot y^* = 0 & \text{em } Q, \\ y^* = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y^*(0) = \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(0)\gamma^*(0)^{-1/4}y^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.50}$$

Dado que $f^* \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)$, $(\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4})_t\hat{y} \in L^2(Q)^N$ e $y^0 \in H$, pelo Teorema 1.69, temos que

$$y^* = \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}\hat{y} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H).$$

Finalizando a prova do Fato 1.

Prova do Fato 2: Sejam $y^0 \in H \cap L^4(\Omega)^3$, $z^0 = 0$ e (z,q) solução do sistema (1.4), isto é,

$$\begin{cases} -z_t - \Delta z + \nabla q = g & \text{em } Q, \\ \nabla\cdot z = 0 & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

com $g \in L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3)$.

Pelo Teorema 1.64 sabemos que para cada $g \in L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3)$, existe uma única solução (z,q) de (1.4) satisfazendo

$$z \in L^2(0,T;W_0^{1,6/5}(\Omega)^3) \cap C([0,T];L^{4/3}(\Omega)^3),$$

onde z depende continuamente de g.

Além disso, como $N = 3$ e pelo fato que $y^* \in L^2(0,T;V)$, temos que vale a imersão $L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;L^6(\Omega)^3)$. Portanto, como $\bar{y} \in L^\infty(Q)^3$ temos que $(\bar{y}\otimes y^* + y^*\otimes\bar{y}) \in L^2(0,T;L^6(\Omega)^3)$. Além disso, $\nabla\cdot(\bar{y}\otimes y^* + y^*\otimes\bar{y}) \in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)$.

Assim, temos que

$$F := f^* + (\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4})_t\hat{y} - \nabla\cdot(\bar{y}\otimes y^* + y^*\otimes\bar{y}) \in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3).$$

Portanto, o funcional

$$B : L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$\langle B, g\rangle := \int_\Omega \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(0)\gamma^*(0)^{-1/4}y^0 \cdot z(0)\ \mathrm{d}x + \int_0^T \langle F, z\rangle_{W^{-1,6},W_0^{1,6/5}}\ \mathrm{d}t, \tag{2.51}$$

está bem definido e é linear.

A continuidade do funcional B, segue da desigualdade abaixo. Aqui devemos lembrar que pelo Teorema 1.64, z depende continuamente de g

$$\begin{aligned}
|\langle B, g\rangle| &\leqslant \|\mathrm{e}^{s\beta^*/2}(0)\gamma^*(0)^{-1/4}y^0\|_{L^4(\Omega)^3}\|z(0)\|_{L^{4/3}(\Omega)^3}\\
&+ \|F\|_{L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)}\|z\|_{L^2(0,T;W_0^{-1,6}(\Omega)^3)}\\
&\leqslant C\left(\|z\|_{C(0,T;L^4(\Omega)^3)} + \|z\|_{L^2(0,T;W_0^{-1,6}(\Omega)^3)}\right)\\
&\leqslant C_1\|z\|_{L^2(0,T;W_0^{1,6/5}(\Omega)^3)\cap C([0,T];L^{4/3}(\Omega)^3)}\\
&\leqslant C_2\|g\|_{L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3)}.
\end{aligned}$$

Como $F \in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)$, podemos reescrever o sistema (2.50) de forma que o par (y^*, p^*), satisfaça

$$\begin{cases}
y_t^* - \Delta y^* + \nabla p^* = F & \text{em } Q,\\
\nabla \cdot y^* = 0 & \text{em } Q,\\
y^* = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\
y^*(0) = \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(0)\gamma^*(0)^{-1/4}y^0 & \text{em } \Omega.
\end{cases} \tag{2.52}$$

Então, y^* é a única solução de (5) por transposição, ou seja, que y^* é a única função em $L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3)$ satisfazendo certa equação integro-diferencial, na qual y^* que não precisa regularidade extra alguma. Tal equação será obtida a seguir por um método não rigoroso.

Solução por transposição: Seja $w \in \mathcal{D}_\sigma$, onde $\mathcal{D}_\sigma$ é definido em (1.7). Multiplicando a primeira equação do sistema (2.52) por w e integrando em Q, temos

$$\iint\limits_Q (y_t^* - \Delta y^* + \nabla p^*) \cdot w\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \iint\limits_Q F \cdot w\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t. \tag{2.53}$$

Mediante a integração por partes, obtemos as seguintes igualdades

$$\iint\limits_Q y_t^* \cdot w\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = -\iint\limits_Q y^* \cdot w_t\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_\Omega y^*(T)\cdot w(T) - y^*(0)\cdot w(0)\ \mathrm{d}x,$$

$$\iint\limits_Q \Delta y^* \cdot w\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \iint\limits_Q y^* \cdot \Delta w\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t.$$

Consequentemente (2.53), pode ser reescrita da forma

$$\iint_Q y \cdot (-w_t - \Delta w)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_\Omega y^*(T) \cdot w(T)\ \mathrm{d}x - \iint_Q p^* \nabla \cdot w\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$
$$= \iint_Q F \cdot w\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_\Omega y^*(0) \cdot w(0)\ \mathrm{d}x.$$

Para que a igualdade anterior faça sentido, precisamos substituir alguns do seus termos da seguinte forma

$$\iint_Q F \cdot w\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \int_0^T \langle F, w \rangle\ \mathrm{d}t,$$

$$-\iint_Q p^* \nabla \cdot w\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \iint_Q \nabla q \cdot y^*\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t,$$

obtendo

$$\iint_Q y^* \cdot (-w_t - \Delta w + \nabla q)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_\Omega y^*(T) \cdot w(T) = \int_0^T \langle F, w \rangle\ \mathrm{d}t + \int_\Omega y^*(0) \cdot w(0)\ \mathrm{d}x.$$

Assim, procedamos a definir o conceito de solução por transposição.

Definição 2.18. *Diz-se que y_* é solução por tranposição (ou ultrafraca) do sistema (2.52) se y_* é a única função em $L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3)$, satisfazendo*

$$\iint_Q y_* \cdot g\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \int_\Omega y^*(0) \cdot w(0)\ \mathrm{d}x + \int_0^T \langle F, w \rangle\ \mathrm{d}t, \quad \forall g \in L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3), \tag{2.54}$$

onde (w,h) satisfaz o sistema

$$\begin{cases} -w_t - \Delta w + \nabla q = g & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot w = 0 & \text{em } Q, \\ w = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Observação 2.19. *A definição anterior faz sentido pois o lado direito de (2.54) coincide com o funcional linear B definido em (2.51). Tal funcional é contínuo quando $y^*(0) \in L^{4/3}(\Omega)^3$, $F \in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)$ e (w,q) solução do sistema (1.4). Logo, pelo Teorema de representação de Riesz, existe um único $y_* \in \left(L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3)\right)'$ tal que*

$$\langle y_*, g \rangle := \int_0^T \langle y_*, g \rangle_{(L^{12}(\Omega)^3)', L^{12/11}(\Omega)^3}\ \mathrm{d}t = \langle B, g \rangle, \quad \forall g \in L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3).$$

Como y^* é solução do sistema (2.52), então também é solução por transposição de (2.52), ou seja, y^* satisfaz

$$\begin{aligned}\iint\limits_Q y^* \cdot g \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t &= \int_\Omega \mathrm{e}^{s\beta^*/2}(0)\gamma^*(0)^{-1/4} y^0 \cdot z(0) \; \mathrm{d}x + \int_0^T \langle F, z\rangle_{W^{-1,6}, W_0^{1,6/5}} \; \mathrm{d}t, \\ &= \langle B, g\rangle, \quad \forall g \in L^{4/3}(0,T; L^{12/11}(\Omega)^3).\end{aligned}$$

Como a última igualdade é válida para todo g $\in L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3)$ e $B \in (L^{4/3}(0,T;L^{12/11})'$, temos que $y^* \in \left(L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3)\right)' = L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3)$, finalizando a prova. $\square$

3 Controlabilidade do Sistema não Linear

Neste capítulo provaremos o segundo resultado principal desta dissertação dado pelo Teorema 0.5. Para isso, mostraremos que a controlabilidade nula local do sistema não linear auxiliar (14), isto é,

$$\begin{cases} Lz + \nabla \cdot (z \otimes z) + \nabla q = v1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = z^0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

implica a controlabilidade exata local a trajetórias do sistema de Navier-Stokes (1).

Primeiramente mostremos o seguinte resultado preliminar

Lema 3.1. *Se $y = \overline{y} + z$ e $p = \overline{p} + q$, onde $(\overline{y}, \overline{p})$ é solução do sistema não controlado (3), então (y, p) é solução do sistema de Navier-Stokes (1) se, e somente se, (z, q) é solução do sistema não linear auxiliar (14).*

Demonstração. Suponhamos que (y, p) é solução do sistema (1) e mostremos que (z, q) é solução do sistema (14). Definamos z e q da forma $z = y - \overline{z}$ e $q = p - \overline{p}$. Então,

$$\begin{cases} \nabla \cdot z = \nabla \cdot y - \nabla \cdot \overline{z} = 0 & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = y^0 - \overline{y}^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Agora só resta mostrar que (z, q) satisfaz a primeira equação do sistema (14). Observemos que

$$\begin{aligned} & z_t = y_t - \overline{z}_t, \\ & \Delta z = \Delta y - \Delta \overline{z}, \\ & \nabla q = \nabla p - \nabla \overline{p}, \\ & \nabla \cdot (y \otimes y) = \nabla \cdot (\overline{z} \otimes \overline{z}) + \nabla \cdot (\overline{z} \otimes z) + \nabla \cdot (z \otimes \overline{z}) + \nabla \cdot (z \otimes z). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Substituindo (3.2) em $Lz + \nabla \cdot (z \otimes z) + \nabla q$, onde L é dado em (6), e agrupando termos adequadamente, obtemos

$$\begin{aligned} Lz + \nabla \cdot (z \otimes z) + \nabla q &= z_t - \Delta z + \nabla \cdot (z \otimes \overline{z}) + \nabla \cdot (\overline{z} \otimes z) + \nabla \cdot (z \otimes z) + \nabla q \\ &= (y_t - \Delta y + \nabla \cdot (y \otimes y) + \nabla p) - (\overline{z}_t - \Delta \overline{z} + \nabla \cdot (\overline{z} \otimes \overline{z}) + \nabla \overline{p})\,. \end{aligned}$$

Como (y,p) e $(\bar{z},\bar{p})$ satisfazem a primeira equação dos sistemas (1) e (3) respectivamente, então a última igualdade pode ser reescrita como

$$Lz + \nabla \cdot (z \otimes z) + \nabla q = v1_{\omega}, \quad \text{em} \ \ Q.$$

Portanto, (z,q) é solução do problema (14).

A recíproca é provada de forma similar. □

Agora, tendo em conta os conceitos de controlabilidade exata local a trajetórias para o sistema de Navier-Stokes (1) e controlabilidade nula local para o sistema não linear (14), dadas nas definições 0.1 e 0.4, respectivamente, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.2. *Se o sistema não linear (14) possui a propriedade de controlabilidade nula local, então o sistema de Navier-Stokes (1) possui a propriedade de controlabilidade exata local a trajetórias.*

Demonstração. Assumamos que o sistema (14) possui a propriedade de controlabilidade nula local, então existe $\delta > 0$ tal que se $z^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$ satisfaz

$$\|z^0\|_{L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H} < \delta,$$

temos que existe um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))^N$ tal que a solução associada (z_v, q_v) de (14) com estado inicial z^0, satisfaz

$$z_v(T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Seja a trajetória $(\overline{y},\overline{p})$ solução do sistema (3) e $y^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$ satisfazendo

$$\|y^0 - \overline{y}^0\|_{L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H} < \delta,$$

onde $\overline{y}^0$ denota o estado inicial da trajetória $(\overline{y},\overline{p})$.

Considerando $z^0 = y^0 - \overline{y}^0$, então existe um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))^N$ tal que a solução associada (z_v, q_v) de (14) com estado inicial z^0, satisfaz

$$z_v(T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Definindo $y_v = z_v + \overline{y}$, pelo Lema 3.1, temos que (y_v, p_v) é solução do sistema (1) com estado inicial y^0. Além disso, pela última igualdade, segue que

$$y_v(T) = z_v(T) + \overline{y}(T) = \overline{y}(T) \text{ em } \Omega.$$

Assim, mostramos a controlabilidade exata local a trajetórias do sistema (1). □

3.1 Controlabilidade exata local a trajetórias

Nesta seção mostraremos o segundo resultado principal nesta dissertação dado pelo Teorema 0.5. Assumindo as hipóteses do Teorema 0.5, pelo Teorema 3.2 é suficiente mostrar a controlabilidade nula local do sistema não linear (14). Para isso, utilizaremos como ferramenta o Teorema da função inversa (Teorema 1.61) e o segundo resultado de controlabilidade nula do capítulo anterior, dado pela Proposição 2.12.

Primeiramente, consideremos os espaços de Banach E_N definidos em (2.24) e (2.25), e o espaço G_N definido por

$$G_N = \begin{cases} G_2 = \mathcal{G}_2 \times X_2 & \text{se } N = 2, \\ G_3 = \mathcal{G}_3 \times X_3 & \text{se } N = 3, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 &= L^2\left(\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T); H^{-1}(\Omega)^2\right), \\ \mathcal{G}_3 &= L^2\left(\mathrm{e}^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T); W^{-1,6}(\Omega)^3\right), \\ X_2 &= H, \\ X_3 &= L^4(\Omega)^3 \cap H. \end{aligned}$$

Definamos o operador $\mathcal{A} : E_N \mapsto G_N$ dado por

$$\mathcal{A}(z,v) = \big(Lz + \nabla\cdot(z\otimes z) + \nabla q - v1_\omega, z(0)\big).$$

A seguir, mostrarmos que o operador $\mathcal{A}$ satisfaz as hipóteses do Teorema da função inversa (Teorema 1.61), isto é,

- $\mathcal{A} \in C^1(E_N; G_N)$.
- Se $e_0 = (0,0) \in E_N$ então $\mathcal{A}'(e_0) : E_N \mapsto G_N$ é sobrejetor.

Observação 3.3. *A Proposição 2.12, concernente a controlabilidade nula do sistema linearizado (5), tem um papel importante na demostração da sobrejetividade do operador $\mathcal{A}'(e_0)$.*

Lema 3.4. *Se $\overline{y} \in L^\infty(Q)^N$, então $\mathcal{A} \in C^1(E_N; G_N)$.*

Demonstração. Notemos que o operador $\mathcal{A}$ pode ser decomposto da forma $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(z,v) &= \big(Lz + \nabla q - v1_\omega, z(0)\big), \quad \forall (z,v) \in E_N, \\ \mathcal{A}_2(z,v) &= \left(\nabla\cdot(z\otimes z), 0\right), \quad \forall (z,v) \in E_N. \end{aligned}$$

Observemos que o operador $\mathcal{A}_1 : E_N \mapsto G_N$ é bem definido. Pela definição dos espaços E_N em (2.24) e (2.25), para $(z,v) \in E_N$ temos que

- Para $N = 2$:

$$
\begin{aligned}
(z,v) \in E_2 \Rightarrow\ & \text{existe } q \text{ tal que } e^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(Lz + \nabla q - v1_\omega) \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)^2) \\
\Rightarrow\ & \text{existe } q \text{ tal que } (Lz + \nabla q - v1_\omega) \in L^2(e^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T); H^{-1}(\Omega)^2) \\
\Rightarrow\ & \text{existe } q \text{ tal que } (Lz + \nabla q - v1_\omega, z(0)) \in \mathcal{G}_2 \times H = G_2.
\end{aligned}
$$

- Para $N = 3$:

$$
\begin{aligned}
(z,v) \in E_3 \Rightarrow\ & \text{existe } q \text{ tal que } e^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(Lz + \nabla p - v1_\omega) \in L^2(0,T; W^{-1,6}(\Omega)^3) \\
\Rightarrow\ & \text{existe } q \text{ tal que } (Lz + \nabla q - v1_\omega) \in L^2(e^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T); W^{-1,6}(\Omega)^3) \\
\Rightarrow\ & \text{existe } q \text{ tal que } (Lz + \nabla q - v1_\omega, z(0)) \in \mathcal{G}_3 \times (L^4(\Omega)^3 \cap H) = G_3.
\end{aligned}
$$

Agora mostremos que o operador $\mathcal{A}_1$ é contínuo. Como por definição $\mathcal{A}_1$ é linear, para mostrar que é contínua só precisamos mostrar continuidade no ponto $0 \in E_N$, isto é, dada uma sequência $(z_n, v_n) \to (0,0)$ em E_N, mostraremos que $\mathcal{A}_1(z_n, v_n) \to (0,0)$ em G_N. Pelas normas dos espaços E_N definidos em (2.24) e (2.25), segue que

- Para $N = 2$:

$$
\begin{aligned}
(z_n, v_n) \xrightarrow{E_2} (0,0) \Rightarrow\ & \|(z_n, v_n)\|_{E_2}^2 \to 0 \\
\Rightarrow\ & \|z_n(0)\|_{X_2}, \|(Lz_n + \nabla q_n - v_n 1_\omega)\|_{\mathcal{G}_2} \to 0 \\
\Rightarrow\ & \|\mathcal{A}_1(z_n, v_n)\|_{G_2} \to 0.
\end{aligned}
$$

- Para $N = 3$:

$$
\begin{aligned}
(z_n, v_n) \xrightarrow{E_3} (0,0) \Rightarrow\ & \|(z_n, v_n)\|_{E_3}^2 \to 0 \\
\Rightarrow\ & \|z_n(0)\|_{X_3}, \|(Lz_n + \nabla q_n - v_n 1_\omega)\|_{\mathcal{G}_3} \to 0 \\
\Rightarrow\ & \|\mathcal{A}_1(z_n, v_n)\|_{G_3} \to 0.
\end{aligned}
$$

Como a aplicação $\mathcal{A}_1$ é linear e contínua, então sua derivada coincide com a mesma aplicação, ou seja, para $(z_0, v_0) \in E_N$ fixo, temos

$$\mathcal{A}_1'(z_0, v_0) \cdot (z, v) = \mathcal{A}_1(z, v), \quad \forall (z, v) \in E_N.$$

Agora, mostraremos que a aplicação $\mathcal{A}_2$ é bem definida e contínua, logo calculamos sua derivada. Para mostrar que é bem definida e contínua, notemos que quando $N = 2$, se $(z, v) \in E_2$ então $e^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4} z \in L^2(0,T; V)$. Pelo segundo resultado do Teorema 1.67 temos que $e^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4} z \in L^4(Q)^2$.

Lembrando a definição de norma para funções $f \in L^p(g(0,T); X)$, onde g é uma função peso

$$\|f\|_{L^p(g(0,T);X)}^p := \int_0^T g^p(t) \|f(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t,$$

e aplicando a desigualdade de Hölder nas variáveis espacial e temporal, temos que

- Para $N = 2$:

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla \cdot (z_1 \otimes z_2)\|_{L^2\left(e^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);H^{-1}(\Omega)^2\right)} \\
&\leqslant C\|z_1 \otimes z_2\|_{L^2\left(e^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);L^2(\Omega)^4\right)} \\
&\leqslant \widehat{C}\|e^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}z_1\|_{L^4(Q)^2}\|e^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}z_2\|_{L^4(Q)^2}.
\end{aligned}
$$

- Para $N = 3$:

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla \cdot (z_1 \otimes z_2)\|_{L^2\left(e^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);W^{-1,6}(\Omega)^3\right)} \\
&\leqslant C\|z_1 \otimes z_2\|_{L^2\left(e^{s\beta^*}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);L^6(\Omega)^9\right)} \\
&\leqslant \widehat{C}\|z_1\|_{L^4(e^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}(0,T);L^{12}(\Omega)^3)}\|z_2\|_{L^4(e^{s\beta^*/2}(\gamma^*)^{-1/4}(0,T);L^{12}(\Omega)^3)}.
\end{aligned}
$$

Se definimos a aplicação bilinear $\mathcal{B}\ : E_N \times E_N \mapsto \mathcal{G}_N$, dada por

$$\mathcal{B}\big((z_1, v_1), (z_2, v_2)\big) = \nabla \cdot (z_1 \otimes z_2),$$

então as últimas duas desigualdades implicam que $\mathcal{B}$ é bem definida e contínua.

Tendo em conta a aplicação bilinear $\mathcal{B}$, notemos que a aplicação $\mathcal{A}_2$ pode ser escrita da forma

$$\mathcal{A}_2(z, v) = \Big(\mathcal{B}\big((z, v), (z, v)\big), 0\Big), \quad \forall (z, v) \in E_N,$$

e portanto, $\mathcal{A}_2$ também é bem definida e contínua.

Além disso, sua derivada no ponto fixo $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = ((\bar{z}_1, \bar{v}_1), (\bar{z}_2, \bar{v}_2)) \in E_N \times E_N$, pelo Teorema A.2 é dada por

$$\mathcal{B}'(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \cdot (e_1, e_2) = \mathcal{B}(e_1, \bar{e}_2) + \mathcal{B}(\bar{e}_1, e_2), \quad \forall (e_1, e_2) \in E_N \times E_N.$$

Portanto, a derivada do operador $\mathcal{A}_2$ no ponto $e_0 = (z_0, v_0)$ é da forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}'(e_0) \cdot (e) &= \big(\mathcal{B}'(e_0, e_0) \cdot (e, e), 0\big) \\
&= \big(\mathcal{B}(e, e_0) + \mathcal{B}(e_0, e), 0\big), \quad \forall e = (z, v) \in E_N.
\end{aligned}
$$

Cuja forma explícita é

$$\mathcal{A}_2'(z_0, v_0) \cdot (z, v) = \big(\nabla \cdot (z \otimes z_0) + \nabla \cdot (z_0 \otimes z), 0\big), \quad \forall (z, v) \in E_N.$$

Finalmente, como $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, então $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_1' + \mathcal{A}_2'$ e assim obtemos a derivada do operador $\mathcal{A}$ no ponto $e_0 = (z_0, v_0)$

$$\mathcal{A}'(z_0, v_0) \cdot (z, v) = \big(Lz + \nabla q - v1_\omega + \nabla \cdot (z \otimes z_0) + \nabla \cdot (z_0 \otimes z), z(0)\big), \quad \forall (z, v) \in E_N.$$

Como os operadores $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, estão bem definidos, são contínuos e suas derivadas existem e são contínuas, concluímos que $\mathcal{A} \in C^1(E_N; G_N)$. $\square$

Lema 3.5. *Se $e_0 = (0,0) \in E_N$, então $\mathcal{A}'(e_0) : E_N \mapsto G_N$ é sobrejetor.*

Demonstração. A aplicação linear $\mathcal{A}'(0,0) : E_N \mapsto G_N$ é dada pela expressão

$$\mathcal{A}'(0,0) \cdot (z,v) = \big(Lz + \nabla q - v1_\omega, z(0)\big), \quad \forall (z,v) \in E_N.$$

Dado $(f, z^0) \in G_N$, precisamos mostrar que existe $e = (z,v) \in E_N$ tal que a igualdade

$$\mathcal{A}'(0,0) \cdot (z,v) = (f, z^0)$$

é satisfeita. Isto é equivalente a encontrar uma solução $(z,v) \in E_N$ (junto com alguma função q) do seguinte problema

$$\begin{cases} Lz + \nabla q = f + v1_\omega & \text{em } Q, \\ z(0) = z^0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Note que a Proposição 2.12 nos garante a existência de um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))^N$ tal que a solução z (junto com alguma função q) associada ao controle v do sistema

$$\begin{cases} Lz + \nabla q = f + v1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = z^0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

ainda possui mais regularidade, isto é, $(z,v) \in E_N$. Portanto, a aplicação linear $\mathcal{A}'(0,0) : E_N \mapsto G_N$ é sobrejetora. □

Finalmente, mostraremos o segundo resultado principal desta dissertação, isto é, o Teorema 0.5.

Demonstração. (do Teorema 0.5) Fixemos a trajetória $(\bar{y}, \bar{p})$ solução do sistema não controlado (3) com estado inicial $\bar{y}^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$. Denotemos por (y,p) á solução do sistema de Navier-Stokes (1) com estado inicial $y^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$. Nosso objetivo é demonstrar a controlabilidade local nula do sistema não linear (14) no espaço $L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$, de acordo na Definição 0.4.

Pelo Lema 3.1, temos que o par (z,q), onde $z = y - \bar{y}$ e $q = p - \bar{p}$, é solução do sistema não linear (14), com estado inicial $z^0 = y^0 - \bar{y}^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$, isto é,

$$\begin{cases} Lz + \nabla \cdot (z \otimes z) + \nabla q = v1_\omega & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = z^0 = y^0 - \bar{y}^0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

A primeira equação do último sistema e o fato que $z^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$, nos motiva a utilizar os espaços E_N e G_N dados em (2.24), (2.25) e (3.3) e definir o operador $\mathcal{A} : E_N \mapsto G_N$

$$\mathcal{A}(z, v) = \big(Lz + \nabla \cdot (z \otimes z) + \nabla q - v1_\omega, z(0)\big).$$

Pelos lemas 3.4 e 3.5, o operador $\mathcal{A}$ é bem definido e satisfaz as hipóteses necessárias para aplicar o Teorema da função inversa (Teorema 1.61). Portanto, no contexto do Teorema 1.61, para $e_0 = (0,0) \in E_N$ e $\mathcal{A}(0,0) = (0,0) = h_0 \in G_N$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $h = (f, z^0) \in G_N$ satisfazendo $\|(f, z^0)\|_{G_N} < \delta$, existe $e = (z, v) \in E_N$ tal que

$$\mathcal{A}(e) = \mathcal{A}(z, v) = \big(Lz + \nabla \cdot (z \otimes z) + \nabla q - v1_\omega, z(0)\big) = (f, z^0) = h.$$

Em outras palavras, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer estado inicial $z^0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$ satisfazendo $\|z^0\|_{L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H} \leqslant \|(f, z^0)\|_{G_N} < \delta$ existe um controle v tal que a solução (z_v, q_v) associada a (14) com estado inicial z^0, satisfaz

$$z_v(T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Assim, mostramos a controlabilidade local nula do sistema não linear (14). Finalmente, pelo Teorema 3.2 obtemos a controlabilidade local a trajetórias do sistema de Navier-Stokes (1). $\square$

4 Conclusões

A partir do desenvolvimento do presente trabalho foi possível obter algumas conclusões e/ou considerações finais.

(i) Este trabalho permitiu ao autor conhecer algumas ferramentas de análise funcional e teoria de controle utilizadas para estudar a controlabilidade exata local a trajetórias do sistema de Navier-Stokes (1).

(ii) Neste trabalho foi possível reproduzir o procedimento para obtenção da desigualdade de Carleman para o estado adjunto do sistema linearizado de Navier-Stokes (5). A partir desta desigualdade foi deduzida uma segunda desigualdade de Carleman (veja Lema 2.3), sendo uma variante do que no âmbito do controle é conhecida como *desigualdade de observabilidade*, isto é,

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} \leqslant C \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t,$$

onde φ é solução do estado adjunto (7) associado ao sistema linearizado (5), ω é uma sub-região de observação do domínio Ω e C é uma constante que depende de ω e T. A desigualdade acima é utilizada para determinar se é possível controlar completamente o sistema com base na informação disponível.

(iii) Foram obtidos dois resultados de controlabilidade nula para o sistema linearizado (5). Tais resultados foram obtidos utilizando um problema de controle ótimo. Isso revela uma relação entre teoria de controle e otimização.

Para finalizar, apresentamos algumas questões levantadas a partir deste trabalho.

- Com respeito a (*ii*), uma questão natural que surge neste caso é se um sistema onde é válida uma desigualdade de observabilidade é sempre controlável ou, reciprocamente, se a controlabilidade do sistema implica que existe uma desigualdade de observabilidade. A resposta a esta pergunta é sim para sistemas lineares.

- Com respeito a (*iii*), uma questão que surge é se é sempre possível resolver um problema de controlabilidade resolvendo um problema de controle ótimo associado. A resposta a esta pergunta também é afirmativa.

- As duas últimas questões estão relacionadas ao conceito de dualidade. Isto é, reformular o problema em termos de um segundo problema (problema dual), que oferece uma forma diferente (mas relacionada) de atacar o problema original. Do que foi visto, a dualidade surge naturalmente quando se resolve problemas de controlabilidade. Tendo em conta estas considerações, é natural questionar se é realmente necessário resolver um problema de controle ótimo ou, pelo contrário, se é possível resolver diretamente um problema de controlabilidade.

- Finalmente, com respeito a controlabilidade exata local a trajetórias das equações de Navier-Stokes (1), que constitui um dos resultados principais deste trabalho. É natural perguntar se esta pode ser estendida as generalizações destas equações que descrevem fluxos sob condições mais complexas ou em diferentes contextos.

A Resultados Auxiliares

Neste apêndice, encontram-se resultados auxiliares que não foram considerados no Capítulo 1. Estes são utilizados principalmente para demonstrar a desigualdade de Carleman do Teorema 0.2 no Apêndice B.

Teorema A.1. *Assuma que $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Considere o problema*

$$\begin{cases} u_t - \kappa \Delta u = f & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{A.1}$$

onde $\kappa > 0$. Então,

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) dyds,$$

é solução do problema (A.1), onde

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right), \quad t > 0.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 2, Cap. 2, pág. 50, de Evans [14].

Proposição A.2. *Sejam B_1 e B_2 espaços de Banach. Consideremos uma aplicação bilinear $\mathcal{B} : B_1 \times B_1 \mapsto B_2$ contínua, então sua derivada num ponto $(x_0, y_0) \in B_1 \times B_1$ é dada pela aplicação linear*

$$\mathcal{B}'(x_0, y_0) \cdot (x, y) = \mathcal{B}(x, y_0) + \mathcal{B}(x_0, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1.$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como $\mathcal{B}$ é contínua, existe $C > 0$ tal que $\mathcal{B}(x, y) \leqslant C\|x\|\|y\|$, para todo $(x, y) \in B_1 \times B_1$. Consideremos $\delta = \epsilon/C$, então para todo $(x, y) \in B_1 \times B_1$ tal que $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathcal{B}(x,y) - \mathcal{B}(x_0,y_0) - \mathcal{B}'(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)\|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} &= \frac{\|\mathcal{B}(x-x_0, y-y_0)\|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} \\ &\leqslant \frac{C\|x-x_0\|\|y-y_0\|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \\ &\leqslant \frac{C\|x-x_0\|\|y-y_0\|}{\|x-x_0\| + \|y-y_0\|} \\ &\leqslant C\|x-x_0\| \\ &\leqslant C\delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

□

Proposição A.3. *Consideremos quatro números reais k_1, k_2, k_3 e k_4 satisfazendo*

$$\frac{2}{k_1}+\frac{6}{k_2}=1 \quad e \quad \frac{4/3}{k_3}+\frac{2}{k_4}=1.$$

Então, valem as seguintes imersões contínuas

$$L^2(0,T;H^2(\Omega)^N)\cap L^\infty(0,T;V)\subset L^{k_1}(0,T;L^{k_2}(\Omega)^N) \tag{A.2}$$

e

$$L^2(0,T;L^6(\Omega)^N)\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N)\subset L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N) \tag{A.3}$$

Demonstração. Primeiramente mostraremos a segunda imersão, isto é, (A.3). Para isso, dada $f\in L^2(0,T;L^6(\Omega)^N)\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N)$, então

$$f_i\in L^2(0,T;L^6(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\ \text{para } i=1,...,N.$$

Seja $\theta\in(0,1)$ e $r=\infty$. Pelo Teorema 1.31, temos que $f_i\in L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega))$ onde k_3 e k_4 são números reais satisfazendo

$$\frac{1}{k_3}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{r} \quad \text{e} \quad \frac{1}{k_4}=\frac{\theta}{6}+\frac{1-\theta}{2}.$$

Das igualdades acima, deduzimos que

$$\frac{4/3}{k_3}=\frac{2\theta}{3} \quad \text{e} \quad \frac{2}{k_4}=1-\frac{2\theta}{3}.$$

Somando as duas igualdades anteriores, temos que k_3 e k_4 satisfaz

$$\frac{4/3}{k_3}+\frac{2}{k_4}=1.$$

Finalmente, como $f_i\in L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega))$ para $i=1,...,N$, então $f\in L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)$.

A prova da primeira imersão, isto é, (A.2) é similar. Basta aplicar o Teorema 1.31 sabendo que para $N=2,3$, valem as imersões $H^2(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$ e $H^1(\Omega)\subset L^6(\Omega)$. □

O resultado a seguir garante a existência da função de peso η^0 utilizada na demostração da desigualdade de Carleman no Apêndice B.

Lema A.4. *Seja ω um aberto não vazio de $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, domínio limitado e conexo com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, satisfazendo $\omega\subset\subset\Omega$. Então, existe uma função $\eta^0\in C^2(\overline{\Omega})$ que satisfaz as seguintes propriedades*

$$\begin{cases}\eta^0>0 & em\ \Omega,\\ \eta^0=0 & em\ \partial\Omega,\\ |\nabla\eta^0|>0 & em\ \overline{\Omega\backslash\omega}.\end{cases}$$

A prova deste lema pode ser encontrada no Lema 1.1, pág. 4, de Furkisov [21].

O próximo resultado é uma desigualdade de Carleman para solução de uma equação elíptica geral de segunda ordem com lado direito em $H^{-1}(\Omega)$ e com valor na fronteira pertencente a $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Esta desigualdade nos permite obter estimativas para o termo da pressão na prova da desigualdade de Carleman do Teorema 0.2 no Apêndice B.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, aberto, de classe C^2 e com fronteira $\partial\Omega$. Seja $y \in H^1(\Omega)$ solução do problema elíptico

$$\begin{cases} Py = f + \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} & \text{em } \Omega, \\ y = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.4}$$

onde

$$Py = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=0}^{n} b_j(x)\frac{\partial y}{\partial x_j} + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(c_i(x)y) + d(x)y.$$

Suponha que sejam satisfeitas as seguintes hipóteses

$$a_{ij} \in \mathrm{C}^2(\bar{\Omega}), b_j, c_i, d \in \mathrm{L}^\infty(\Omega), f_j \in \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ para } i, j = 0, \ldots, n, \tag{A.5}$$

$$f \in \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ e } \ g \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega). \tag{A.6}$$

Além disso, P é um operador uniformemente elíptico, isto é, existe $\beta > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ e para todo $x \in \Omega$

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \beta|\xi|^2.$$

Seja a função η^0 dada pelo Lema A.4 e consideremos

$$\widehat{\varphi}(x) = \mathrm{e}^{\lambda\eta^0(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{A.7}$$

Teorema A.5. *Seja $y \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ uma solução do Problema (A.4) e suponha que as hipóteses (A.5)-(A.6) sejam satisfeitas. Então, existe uma constante $C > 0$ independente de s e λ, e existem parâmetros $\hat{\lambda} > 1$, $\hat{s} > 1$ tais que para todo $\lambda \geqslant \hat{\lambda}$ e $s \geqslant \hat{s}$ tem-se*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla y|^2 \mathrm{e}^{2s\widehat{\varphi}} \mathrm{d}x + s^2\lambda^2 \int_\Omega \widehat{\varphi}^2 |y|^2 \mathrm{e}^{2s\widehat{\varphi}} \mathrm{d}x \\ &\leqslant C\left(s^{1/2}\mathrm{e}^{2s}\|g\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)} + \frac{1}{s\lambda^2}\int_\Omega \frac{|f|^2}{\widehat{\varphi}}\mathrm{e}^{2s\widehat{\varphi}}\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{n} s\int_\Omega |f_j|^2\,\widehat{\varphi}\mathrm{e}^{2s\widehat{\varphi}}\mathrm{d}x \right. \\ &\quad \left. + \int_\omega \left(|\nabla y|^2 + s^2\lambda^2\widehat{\varphi}^2|y|^2\right)\mathrm{e}^{2s\widehat{\varphi}}\mathrm{d}x \right), \end{aligned} \tag{A.8}$$

onde $\widehat{\varphi}$ é dado por (A.7).

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 2.2, Seção 2, pág. 885, de Imanuvilov [30].

Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$, com $n \geqslant 2$, assuma que a fronteira $\partial\Omega$ é ao menos de classe $C^{2+\mu}$, com $0 < \mu < 1$, e seja $0 < q < \infty$. Denotaremos por $L^q_\sigma(\Omega)$ o fecho de $C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)^n$, onde

$$C^\infty_{0,\sigma}(\Omega) = \{u \in C^\infty_0(\Omega)^N; \nabla \cdot u = 0\}.$$

Pela decomposição de Helmholtz (Teorema 1.32), cada $f \in L^q(\Omega)^n$ pode ser decomposto de forma que $f = f_0 + \nabla p$, onde $f_0 \in L^q_\sigma(\Omega)$, $p \in L^q_{loc}(\bar{\Omega})$ e $\nabla p \in L^q(\Omega)^n$. Assim podemos definir o operador $P_q : L^q(\Omega)^n \longrightarrow L^q_\sigma(\Omega)$ como $P_q(f) = f_0$.

Uma função $\zeta : X \times X \to \mathbb{R}$ é simétrica se $\zeta(x, y) = \zeta(y, x)$ e biconvexa se $\zeta(., y)$ e $\zeta(x, .)$ são convexas em X para todo x, $y \in X$. Dizemos que um espaço de Banach X é ζ-convexo se existe uma função biconvexa ζ em $X \times X$ tal que $\zeta(0, 0) > 0$ e

$$\zeta(x, y) \leqslant |x + y|, \quad \text{se} \quad |x| \leqslant 1 \leqslant |y|.$$

Consideremos $0 < \alpha < 1$, $1 < s < \infty$, X um espaço de Banach ζ-convexo e A um operador linear fechado com domínio $D(A) \subset X$ e imagem $R(A) \subset X$. Definamos

$$D^{\alpha,s}_A = \left\{ v \in X; \|v\|_{D^{\alpha,s}_A} := \|v\|_X + \left(\int_0^\infty \|t^{1-\alpha} A e^{-tA} v\|^s_X \frac{dt}{t} \right)^{1/s} < \infty \right\},$$

também temos que $D^{1-1/s,s}_q$ denotara o espaço $D^{1-1/s,s}_A$ definido acima com $A = A_q$, onde A_q denota o operador de Stokes $A_q = -P_q\Delta$, sendo que Δ denota o operador laplaciano.

Suponha também que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisfaz uma das condições abaixo

1. $\Omega = \mathbb{R}^n$.

2. Ω é um domínio limitado.

3. Ω é um semi-espaço.

4. Ω é um domínio exterior em $\mathbb{R}^n$, isto é, domínio cujo complemento é um subconjunto compacto não vazio, se $n \geqslant 3$.

No contexto dado acima temos o seguinte resultado.

Teorema A.6. *Assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz uma das condições anteriores e seja $1 < s < \infty$. Assuma $1 < q < \infty$ nas condições $(1) - (3)$ e $1 < q < n/2$ na condição (4). Então, para todo $f \in L^s\,(0, T; L^q_\sigma(\Omega))$ e $a \in D^{1-1/s,s}_q$ existe uma única solução (u, p) do sistema de*

Stokes

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla p = f & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u(x,0) = a(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{A.9}$$

satisfazendo

- $u \in L^s\left(0, T_0; W^{2,q}(\Omega)^n\right)$, *para todo* $0 < T_0 \leqslant T$ *com* $T_0 < \infty$,
- $u_t, \nabla p \in L^s\left(0, T; L^q(\Omega)^n\right)$,
- $\displaystyle\int_0^T \|u_t\|^s_{L^q(\Omega)^n} \mathrm{d}t + \int_0^T \|\Delta u\|^s_{L^q(\Omega)^n} \mathrm{d}t + \int_0^T \|\nabla p\|^s_{L^q(\Omega)^n} \mathrm{d}t \leqslant C \left(\int_0^T \|f\|^s_{L^q(\Omega)^n} \mathrm{d}t + \|a\|^s_{D_q^{1-1/s,s}} \right)$,

com $C = C(q, s, \Omega) > 0$.

A prova deste teorema pode ser encontrada no Teorema 2.8, Seção 2, pág. 82, de Giga-Sohr [23].

Teorema A.7. *(Desigualdade de Carleman para equação do calor).*
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado não vazio com fronteira de classe* C^2, $T > 0$ *fixo,* $Q = \Omega \times (0,T)$, $\omega \subset\subset \Omega$ *aberto não vazio e* $u \in C^2(\bar{\Omega} \times (0,T))$ *tal que* $u = 0$ *em* $\partial\Omega \times (0,T)$. *Então, existem constantes* $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega,\omega) \geqslant 1$, $s_1 = s_1(\Omega,\omega)(T^7 + T^8) > 0$ *e* $C_1 = C_1(\Omega,\omega) > 0$ *tais que para todo* $\lambda \geqslant \lambda_1$ *e* $s \geqslant s_1$, *vale a desigualdade*

$$s^{-1} \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} \left(|u_t|^2 + |\Delta u|^2\right) dxdt + s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla u|^2 dxdt + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |u|^2 dxdt$$
$$\leqslant C_1 \left(\iint_Q e^{-2s\alpha} |u_t + \Delta u|^2 dxdt + s^3\lambda^4 \iint_{\omega \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |u|^2 dxdt \right),$$

sendo as funções de peso α, β *definidas como em (11).*

A prova deste teorema é semelhante ao encontrado no Lema 5.2.4, Capítulo 5, pág. 52, de Santos [42], considerando as funções peso de (11).

A seguir daremos uma pequena motivação para definir a solução por transposição da equação do calor, para isso considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{A.10}$$

Multiplicando a primeira igualdade no sistema anterior por z num espaço adequado temos

$$(u_t - \Delta u) \cdot z = F \cdot z$$

e integrando em $\mathbb{R}^N \times (0, T)$, temos

$$-\iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} \Delta u \cdot z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} u_t \cdot z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} F \cdot z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Integrando por partes nas variáveis espacial e temporal, temos

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} u \cdot (-z_t - \Delta z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} F \cdot z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Denotando por $-z_t - \Delta z = h$, obtemos o desejado

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} u \cdot h \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} F \cdot z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Os cálculos anteriores motivam a seguinte definição.

Definição A.8. *(solução ultrafraca ou por transposição)*
Dizemos que u é solução por transposição de (A.10) se é a única função em $L^2(\mathbb{R}^N \times (0, T))^N$ tal que para cada $h \in L^2(\mathbb{R}^N \times (0, T))^N$ se satisfaz

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} u \cdot h \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} F \cdot z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

onde $z \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^N)^N)$ é solução de

$$\begin{cases} -z_t - \Delta z = h & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ z(T) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Proposição A.9. *Sejam (φ, π) solução do sistema adjunto (7) e $\eta \in C^1([0, T])$ tal que $\eta(T) = 0$, satisfazendo as propriedades*

$$\eta = 1 \text{ em } [0, T/2], \quad \eta = 0 \text{ em } [3T/4, T], \quad |\eta'| \leqslant C/T \text{ em } [0, T]. \tag{A.11}$$

Então, vale a estimativa de energia

$$\begin{aligned} &\|\eta\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|\eta\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;H)} \\ &\leqslant C\mathrm{e}^{CT\|\overline{y}\|^2_\infty} \left(\|\eta g\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|\eta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} \right). \end{aligned} \tag{A.12}$$

Demonstração. Como (φ, π) é solução do sistema (7), então pelo Teorema 1.68 o par $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\pi}) := (\eta\varphi, \eta\pi)$ é solução do sistema (1.9), isto é,

$$\begin{cases} -\widetilde{\varphi}_t - \Delta\widetilde{\varphi} - D\widetilde{\varphi}\bar{y} + \nabla\widetilde{\pi} = \eta g - \eta'\varphi & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \widetilde{\varphi} = 0 & \text{em } Q, \\ \widetilde{\varphi} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \widetilde{\varphi}(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema anterior por $\widetilde{\varphi} = \eta\varphi$, temos

$$-(\eta\varphi)_t(\eta\varphi) - \Delta(\eta\varphi)(\eta\varphi) - D(\eta\varphi)\bar{y}(\eta\varphi)) + \nabla(\eta\pi)(\eta\varphi) = (\eta g)(\eta\varphi) - (\eta'\varphi)(\eta\varphi).$$

Fazendo a mudança de variável de $t \in [0, T]$ para $T - t$, ainda teremos $(T - t) \in [0, T]$. Logo, substituindo $\varphi(x, t) = \varphi(x, T - t)$ na igualdade anterior, esta torna se

$$\begin{aligned} &- (\eta\varphi(x, T - t))_t(\eta\varphi(x, T - t)) - \Delta(\eta\varphi(x, T - t))(\eta\varphi(x, T - t)) \\ &- D(\eta\varphi(x, T - t))\bar{y}(x, T - t)(\eta\varphi(x, T - t)) + \nabla(\eta\pi(x, T - t))(\eta\varphi(x, T - t)) \\ &= (\eta g(x, T - t))(\eta\varphi(x, T - t)) - (\eta'\varphi(x, T - t))(\eta\varphi(x, T - t)). \end{aligned}$$

Integrando em Ω, utilizando integração por partes e aplicando as desigualdades de Cauchy e Young (Teoremas 1.38 e 1.40) na desigualdade anterior, segue que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}\left|\eta\varphi(x, T - t)\right|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\nabla\big(\eta\varphi(x, T - t)\big)\right|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_\Omega \left|D(\eta\varphi(x, T - t))\bar{y}(x, T - t)(\eta\varphi(x, T - t))\right| \, \mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega (\eta g(x, T - t))(\eta\varphi(x, T - t)) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (\eta'\varphi(x, T - t))(\eta\varphi(x, T - t)) \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant C\left(\delta\int_\Omega |\nabla(\eta\varphi(x, T - t))|^2 \, \mathrm{d}x + C(\delta)\|\bar{y}\|_\infty^2 \int_\Omega |\eta\varphi(x, T - t)|^2 \, \mathrm{d}x\right) \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\eta g(x, T - t)\right|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\eta\varphi(x, T - t)\right|^2 \, \mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\eta'\varphi(x, T - t)\right|^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Considerando $\delta > 0$ tal que $C\delta = 1/2$ e rearranjando termos na última desigualdade, temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\eta\varphi(x, T - t)\right|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla\big(\eta\varphi(x, T - t)\big)\right|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant C(\|\bar{y}\|_\infty^2 + 1)\int_\Omega \left|\eta\varphi(x, T - t)\right|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\eta g(x, T - t)\right|^2 \, \mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\eta'\varphi(x, T - t)\right|^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Multiplicando por 2 a desigualdade anterior, esta torna se

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\eta\varphi(x,T-t)\right|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\nabla\big(\eta\varphi(x,T-t)\big)\right|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant C(\|\bar{y}\|_\infty^2+1)\int_\Omega \left|\eta\varphi(x,T-t)\right|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\eta g(x,T-t)\right|^2 \,\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \left|\eta'\varphi(x,T-t)\right|^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

A última desigualdade implica

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\eta\varphi(x,T-t)\right|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant C(\|\bar{y}\|_\infty^2+1)\int_\Omega \left|\eta\varphi(x,T-t)\right|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\eta g(x,T-t)\right|^2 \,\mathrm{d}x \\
+ \int_\Omega \left|\eta'\varphi(x,T-t)\right|^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Logo, utilizando a desigualdade de Gronwall (Teorema 1.47) na desigualdade anterior e tendo em conta que $\eta\varphi(x,T)=0$, obtem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\eta\varphi(x,T-t)\right|^2 \,\mathrm{d}x &\leqslant \mathrm{e}^{Ct(\|\bar{y}\|_\infty^2+1)}\left(\int_\Omega \left|\eta\varphi(x,T)\right|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega \left|\eta g(x,T-s)\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right. \\
&\left.+ \int_0^t\int_\Omega \left|\eta'\varphi(x,T-s)\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right) \\
&\leqslant C\mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|_\infty^2}\left(\|\eta g\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|\eta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)}\right), \quad \forall t\in[0,T].
\end{aligned}$$

Portanto, pela definição de supremo essencial, vale

$$\|\eta\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N)} \leqslant C\mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|_\infty^2}\left(\|\eta g\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|\eta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)}\right). \tag{A.14}$$

Integrando em $(0,T)$ a desigualdade (A.13) e tendo em conta que $\eta\varphi(x,T)=0$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left|\eta\varphi(x,0)\right|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \left|\eta\varphi(x,T)\right|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega \left|\nabla\big(\eta\varphi(x,T-t)\big)\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \|\eta\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T;V)} \\
&\leqslant C\left(\|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|\eta g\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|\eta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)}\right).
\end{aligned}$$

Note que $L^\infty \hookrightarrow L^2$ implica que $\|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} \leqslant C_0\|\eta\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N)}$. Utilizando este fato, somando a última desigualdade com (A.14) e rearranjando termos, obtemos a estimativa desejada (A.12), isto é,

$$\begin{aligned}
&\|\eta\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|\eta\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;H)} \\
&\leqslant C\mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|_\infty^2}\left(\|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|\eta g\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|\eta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)}\right).
\end{aligned}$$

□

Proposição A.10. *Seja (φ, π) solução do sistema adjunto (7), então vale a estimativa de energia*

$$\begin{aligned} &\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,T/2;V)} + \|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T/2;H)} \\ &\leqslant C_1 \mathrm{e}^{C_2 T\|\bar{y}\|^2_\infty}\Big(\|g\|^2_{L^2(0,3T/4;L^2(\Omega)^N)} + \frac{1}{T^2}\|\varphi\|^2_{L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega)^N)}\Big). \end{aligned} \tag{A.15}$$

Demonstração. Consideremos uma função $\eta \in C^1([0,T])$ tal que $\eta(T) = 0$, satisfazendo as propriedades dadas em (A.11). Logo, note que valem as desigualdades

$$\begin{cases} \|\eta g\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} \leqslant C_1 \displaystyle\int_0^{3T/4}\int_\Omega |g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\ \|\eta' \varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} \leqslant \dfrac{C_2}{T^2}\displaystyle\int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\ \|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T/2;V)} \leqslant \|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T;V)}, \\ \|\eta\varphi\|^2_{L^\infty(0,T/2;H)} \leqslant \|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;H)}. \end{cases} \tag{A.16}$$

Aplicando a Proposição A.9, vale a estimativa de energia

$$\begin{aligned} &\|\eta\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|\eta\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;H)} \\ &\leqslant C\mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|^2_\infty}\left(\|\eta\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|\eta g\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|\eta'\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo as quatro desigualdades dadas em (A.16) na estimativa acima, obtemos a estimativa desejada (A.15). □

Proposição A.11. *Seja (φ, π) solução do sistema (7) com lado direito nulo, então existem constantes positivas C_0 e C_1, tais que*

$$\|\varphi\|_{L^2(Q)^N} \leqslant C_0 \mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|^2_\infty}\|\varphi(T)\|_{L^2(\Omega)^N}. \tag{A.17}$$

Demonstração. Seja (φ, π) solução do sistema adjunto (7) com lado direito nulo, isto é,

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi - D\varphi\bar{y} + \nabla\pi = 0 & \text{em } Q, \\ \nabla\cdot\varphi = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema anterior por φ, temos

$$-(\varphi_t)\varphi - (\Delta\varphi)\varphi - (D\varphi\bar{y})\varphi + (\nabla\pi)\varphi = 0.$$

Fazendo a mudança de variável de $t \in [0,T]$ para $T-t$, ainda teremos $(T-t) \in [0,T]$. Logo, substituindo $\varphi(x,t) = \varphi(x, T-t)$ na igualdade anterior, esta torna se

$$\begin{aligned} &-(\varphi(x,T-t))_t(\varphi(x,T-t)) - \Delta(\varphi(x,T-t))(\varphi(x,T-t)) \\ &- D(\varphi(x,T-t))\bar{y}(x,T-t)(\varphi(x,T-t)) + \nabla(\pi(x,T-t))(\varphi(x,T-t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Integrando em Ω, utilizando integração por partes e aplicando as desigualdades de Cauchy e Young (Teoremas 1.38 e 1.40) na desigualdade anterior, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}\big|\varphi(x,T-t)\big|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \big|\nabla\big(\varphi(x,T-t)\big)\big|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_\Omega \big|D(\varphi(x,T-t))\bar{y}(x,T-t)(\varphi(x,T-t))\big|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\left(\delta\int_\Omega |\nabla\varphi(x,T-t)|^2\,\mathrm{d}x + C(\delta)\|\bar{y}\|_\infty^2\int_\Omega |\varphi(x,T-t)|^2\,\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

Seja $\delta > 0$ tal que $C\delta = 1/2$ na última desigualdade. Logo, esta torna se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \big|\varphi(x,T-t)\big|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \big|\nabla\big(\varphi(x,T-t)\big)\big|^2\,\mathrm{d}x \leqslant C\|\bar{y}\|_\infty^2\int_\Omega |\varphi(x,T-t)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Multiplicando por 2 a desigualdade anterior, temos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \big|\varphi(x,T-t)\big|^2\,\mathrm{d}x \leqslant C\|\bar{y}\|_\infty^2\int_\Omega |\varphi(x,T-t)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (Teorema 1.47) na última desigualdade, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varphi(x,T-t)|^2\,\mathrm{d}x &\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^t C\|\bar{y}\|_\infty^2\,\mathrm{d}s}\int_\Omega |\varphi(x,T)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|_\infty^2}\|\varphi(T)\|_{L^2(\Omega)^N}^2, \quad \forall t\in[0,T].
\end{aligned}$$

Pela definição de supremo essencial, vale

$$\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N)}^2 \leqslant \mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|_\infty^2}\|\varphi(T)\|_{L^2(\Omega)^N}^2.$$

Como $L^\infty \hookrightarrow L^2$ implica que $\|\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)}^2 \leqslant C_0\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N)}^2$. Este fato e a desigualdade anterior implicam a desigualdade desejada (A.17). □

Proposição A.12. *Seja (φ,π) solução do sistema (7) com lado direito $g\in L^2(Q)^N$ e $\varphi(T)=0$. Então, φ depende continuamente de g. Isto é, existem constantes positivas C_0 e C_1 tais que*

$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)}^2 \leqslant C_0\big(\|\bar{y}\|_\infty^2+1\big)\mathrm{e}^{C_1T\|\bar{y}\|_\infty^2}\|g\|_{L^2(Q)^N}^2.$$

Demonstração. Repetindo o procedimento da prova da Proposição A.11, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \big|\varphi(x,T-t)\big|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \big|\nabla\big(\varphi(x,T-t)\big)\big|^2\,\mathrm{d}x &\leqslant C(\|\bar{y}\|_\infty^2+1)\int_\Omega |\varphi(x,T-t)|^2\,\mathrm{d}x \\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega \big|g(x,T-t)\big|^2\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}$$

Multiplicando a desigualdade anterior por 2, esta torna se

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\varphi(x,T-t)\right|^2 \, dx \leqslant C(\|\bar{y}\|_\infty^2+1)\int_\Omega |\varphi(x,T-t)|^2 \, dx + \int_\Omega \left|g(x,T-t)\right|^2 \, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (Teorema 1.47) na última desigualdade e tendo em conta que $\varphi(x,T)=0$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\varphi(x,T-t)|^2 \, dx &\leqslant e^{\int_0^t C(\|\bar{y}\|_\infty^2+1)\, ds}\left(\int_\Omega |\varphi(x,T)|^2 \, dx + \int_0^t\int_\Omega \left|g(x,T-t)\right|^2 \, dx \, dt\right)\\ &\leqslant Ce^{CT\|\bar{y}\|_\infty^2}\int_Q \left|g(x,T-t)\right|^2 \, dx \, dt, \quad \forall t\in[0,T].\end{aligned}$$

Da definição de supremo essencial, a última desigualdade implica

$$\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N)} \leqslant Ce^{CT\|\bar{y}\|_\infty^2}\|g\|^2_{L^2(Q)^N}. \tag{A.19}$$

Multiplicando a desigualdade (A.18) por 2 e integrando em $(0,T)$, temos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left|\varphi(x,0)\right|^2 \, dx - \int_\Omega \left|\varphi(x,T)\right|^2 \, dx + \int_0^T\int_\Omega \left|\nabla\big(\varphi(x,T-t)\big)\right|^2 \, dx \, dt\\ &\leqslant C(\|\bar{y}\|_\infty^2+1)\int_0^T\int_\Omega \left|\varphi(x,T-t)\right|^2 \, dx \, dt + \int_0^T\int_\Omega \left|g(x,T-t)\right|^2 \, dx \, dt.\end{aligned}$$

Tendo em conta na última desigualdade que $\varphi(x,T)=0$, o fato que $L^\infty \hookrightarrow L^2$ e a desigualdade (A.19), obtemos

$$\|\varphi\|^2_{L^2(0,T;V)} \leqslant C(\|\bar{y}\|_\infty^2+1)\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|g\|^2_{L^2(Q)^N}.$$

Finalmente, a desigualdade anterior e (A.19) implicam

$$\|\varphi\|^2_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} \leqslant C_0(\|\bar{y}\|_\infty^2+1)e^{C_1T\|\bar{y}\|_\infty^2}\|g\|^2_{L^2(Q)^N}.$$

□

Proposição A.13. *Seja (y,p) solução do sistema linearizado (5), então existem constantes positivas C_1 e C_2, tais que vale*

$$\begin{aligned}\|y_t\|^2_{L^2(0,T;V')} + \|y\|^2_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)} \leqslant C_1e^{C_2T\|\bar{y}\|_\infty^2}\Big(&\|y(0)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|f\|^2_{L^2(Q)^N}\\ &+\|v\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))^N}\Big).\end{aligned} \tag{A.20}$$

Demonstração. Primeiramente vamos estimar $\|y\|^2_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)}$.

Seja (y,p) é solução do sistema linearizado (5), isto é,

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla\cdot(\bar{y}\otimes y + y\otimes\bar{y}) + \nabla p = f + v1_\omega & \text{em } Q,\\ \nabla\cdot y = 0 & \text{em } Q,\\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\ y(0) = y^0 & \text{em } \Omega.\end{cases}$$

Daqui até o final da prova, $\odot$ representará o produto interno de matrizes $N \times N$, isto é,

$$A \odot B = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Multiplicando a primeira equação do sistema anterior por y, integrando em Ω e utilizando integração por partes, segue que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|y|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla y|^2 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \big(\overline{y}\otimes y + y \otimes \overline{y}\big) \odot \nabla y \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (f + v1_\omega)\cdot y \, \mathrm{d}x. \tag{A.21}$$

Agora, notemos que valem as desigualdades

$$\Big|\int_\Omega \big(y\otimes \overline{y}\big)\odot \nabla y \, \mathrm{d}x\Big| \leqslant \delta \int_\Omega |\nabla y|^2 \, \mathrm{d}x + C_1(\delta) N \|\overline{y}\|_\infty^2 \int_\Omega |y|^2 \, \mathrm{d}x.$$
$$\Big|\int_\Omega \big(\overline{y}\otimes y\big)\odot \nabla y \, \mathrm{d}x\Big| \leqslant \delta \int_\Omega |\nabla y|^2 \, \mathrm{d}x + C_2(\delta) N \|\overline{y}\|_\infty^2 \int_\Omega |y|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Logo, substituindo as duas últimas desigualdades no lado direito de (A.21), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|y|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla y|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant 2\delta \int_\Omega |\nabla y|^2 \, \mathrm{d}x + C(\delta) N \|\overline{y}\|_\infty^2 \int_\Omega |y|^2 \, \mathrm{d}x \\ + \int_\Omega (f + v1_\omega)\cdot y \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tomando $\delta = 1/4$ na última desigualdade, esta torna se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |y|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant C\|\overline{y}\|_\infty^2 \int_\Omega |y|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |y|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \big|(f + v1_\omega)\big|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{A.22}$$

Multiplicando por 2 e integrando em $(0,T)$ a desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \big|y(x,T)\big|^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \big|y(x,0)\big|^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^T \int_\Omega \big|\nabla y(x,t)\big|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant C(\|\overline{y}\|_\infty^2 + 1)\int_0^T \int_\Omega |y|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \big|(f + v1_\omega\big|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

A última desigualdade implica que

$$\|y\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leqslant C\big(\|y\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + \|f + v1_\omega\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|y(0)\|_H^2\big). \tag{A.23}$$

Multiplicando por 2 a desigualdade (A.22), esta torna se

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |y|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant (C\|\overline{y}\|_\infty^2 + 1)\int_\Omega |y|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \big|(f + v1_\omega)\big|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Utilizando a desigualdade de Gronwall (Teorema 1.47) na desigualdade anterior, temos

$$\int_\Omega \left|y(x,t)\right|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{Ct(\|\bar{y}\|_\infty^2+1)} \left(\int_\Omega \left|y(x,0)\right|^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^t \int_\Omega \left|f + v1_\omega\right|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \right)$$
$$\leqslant C\mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|_\infty^2} \left(\|y(0)\|_H^2 + \|f + v1_\omega\|_{L^2(Q)^N}^2 \right), \quad \forall t \in [0,T].$$

A última desigualdade implica que

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 \leqslant C\mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|_\infty^2} \left(\|y(0)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)}^2 + \|f + v1_\omega\|_{L^2(Q)^N}^2 \right).$$

Finalmente, utilizando a desigualdade anterior e (A.23), obtemos

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)}^2 \leqslant C\mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|_\infty^2} \Big(\|y(0)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)}^2 + \|f\|_{L^2(Q)^N}^2 + \|v\|_{L^2(\omega\times(0,T))^N}^2 \Big). \tag{A.24}$$

No resto da prova vamos estimar o termo $\|y_t\|_{L^2(0,T;V')}^2$.

Pela formulação fraca do sistema linearizado (5), temos

$$\langle y_t, u\rangle + \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \left(\bar{y} \otimes y + y \otimes \bar{y}\right) \odot \nabla u \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (f + v1_\omega) \cdot u \, \mathrm{d}x,$$

para todo $u \in V$.

Logo, segue que

$$|\langle y_t, u\rangle| \leqslant \left| \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_\Omega \left(\bar{y} \otimes y + y \otimes \bar{y}\right) \odot \nabla u \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_\Omega (f + v1_\omega) \cdot u \, \mathrm{d}x \right|. \tag{A.25}$$

Notemos que valem as desigualdades

$$\left| \int_\Omega \left(y \otimes \bar{y}\right) \odot \nabla u \, \mathrm{d}x \right| \leqslant C_1 \|\bar{y}\|_\infty \|y\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}.$$
$$\left| \int_\Omega \left(\bar{y} \otimes y\right) \odot \nabla u \, \mathrm{d}x \right| \leqslant C_2 \|\bar{y}\|_\infty \|y\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Hölder (Teorema 1.43) e substituindo as duas desigualdades acima no lado direito de (A.25), podemos reescrevê-la, obtendo

$$\langle y_t, u\rangle \leqslant C \left(\|\nabla y\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\bar{y}\|_\infty \|y\|_{L^2(\Omega)^N} + \|(f + v1_\omega)\|_{L^2(\Omega)^N} \right) \|u\|_V.$$

Utilizando a definição da norma $\|y_t\|_{V'}$ na última desigualdade, segue que

$$\|y_t\|_{V'} \leqslant C \left(\|\nabla y\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\bar{y}\|_\infty \|y\|_{L^2(\Omega)^N} + \|(f + v1_\omega)\|_{L^2(\Omega)^N} \right).$$

Elevando ao quadrado ambos lados da desigualdade anterior e integrando em $(0, T)$, temos

$$\begin{aligned}\|y_t\|^2_{L^2(0,T;V')} \leqslant C \Big(&\|y\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|\bar{y}\|^2_\infty \|y\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} + \|f\|^2_{L^2(Q)^N} \\ &+ \|v\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))^N} \Big) .\end{aligned}$$

Lembrando a definição da norma no espaço $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, a última desigualdade implica

$$\|y_t\|^2_{L^2(0,T;V')} \leqslant \widehat{C} \left(\|y\|^2_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)} + \|f\|^2_{L^2(Q)^N} + \|v\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))^N} \right) .$$

Finalmente, somando a desigualdade anterior com (A.24), obtemos a estimativa desejada (A.20). □

B Desigualdade de Carleman

Neste apêndice, provaremos a desigualdade de Carleman dada no Teorema 0.2 para o sistema adjunto (7), isto é,

$$I(s,\lambda;\varphi) \leqslant C\left(1+T^2\right)\left(s^{15/2}\lambda^{20}\iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\hat{\xi}^{15/2}|g|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t\right.$$
$$\left.+s^{16}\lambda^{40}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}\hat{\xi}^{16}|\varphi|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t\right).$$

A prova será dividida em 5 partes. Na primeira parte abordaremos o sistema adjunto (7) como se fosse N equações do calor. Logo, aplicaremos a desigualdade de Carleman clássica para a equação do calor dada pelo Teorema A.7 para conseguir uma estimativa para o termo $I(s,\lambda,\varphi)$ definido em (12). A estimativa é formada por integrais globais do gradiente da pressão π, o termo g no lado direito da primeira equação do sistema (7) e uma integral local da solução φ do sistema (7).

Na segunda parte, estimaremos a integral global do gradiente da pressão π da primeira parte mediante integrais globais dos termos g, $D\varphi\bar{y}$ que aparecem na primeira equação do sistema adjunto (7), uma integral local da pressão π e do seu traço. Para isso utilizaremos o fato que a primeira equação do sistema (7) pode ser vista como uma equação elíptica satisfeita pela pressão π.

Na terceira parte, nos centraremos em estimar o termo do traço da pressão π da segunda parte, utilizando resultados já conhecidos de regularidade para o sistema de Navier-Stokes. A estimativa é formada por integrais globais dos termos g, φ e $\nabla\varphi$, onde φ é solução do sistema adjunto (7).

Tendo chegado até aqui, nos teremos uma desigualdade de Carleman, com lado esquerdo $I(s,\lambda,\varphi)$ e lado direito com integrais locais dos termos φ, π e uma integral global do termo g.

Na quarta parte, nos dedicaremos a estimar a integral local da pressão da desigualdade de Carleman mencionada acima. Nessa integral, está presente uma função peso dependente das variáveis espacial e temporal. Consequentemente, estimaremos a integral local da pressão com peso dependente das variáveis espacial e temporal por outra integral local da pressão com peso dependente só da variável temporal. Logo, estimaremos esta última integral local mediante outra integral local do gradiente da pressão π. Utilizando a equação satisfeita pelo vetor velocidade φ e a pressão π na primeira igualdade do sistema adjunto (7), estimaremos a integral local do gradiente da pressão π em termos de integrais locais de $\hat{\theta}g$, $\hat{\theta}\Delta\varphi$, $\hat{\theta}\varphi_t$ e $\hat{\theta}\nabla\varphi$. A partir daí nos concentraremos apenas em estimar essas quatro integrais, o que será uma das maiores tarefas da quarta parte.

Na quinta e última parte reunimos todas as estimativas das partes anteriores para obter a desigualdade de Carleman procurada no Teorema 0.2.

B.1 Desigualdade de Carleman para a equação do calor.

Nesta seção obteremos uma primeira estimativa para $I(s, \lambda; \varphi)$ definido em (12), resultado dado no Lema B.1. Para encontrar essa estimativa, seguiremos os seguintes passos :

- Vamos reescrever o sistema adjunto (7) como N equações do calor.
- Estimaremos $I(s, \lambda; \varphi)$ utilizando uma desigualdade de Carleman clássica para cada equação do calor do passo anterior.
- Estimaremos a integral global de $D\varphi\bar{y}$ na desigualdade do passo anterior em termos da integral global de $\nabla\varphi$.
- Finalmente, calcularemos a estimativa desejada de $I(s, \lambda; \varphi)$.

Lema B.1. *Suponha que (4) seja satisfeito. Então, existem três constantes positivas s_1, λ_1 e C, dependendo apenas de Ω e ω, tais que para cada $\varphi^0 \in H$ e cada $g \in L^2(Q)^N$, a solução correspondente (φ, π) do problema (7) verifica*

$$I(s, \lambda; \varphi) \leqslant C \left(\iint_Q e^{-2s\alpha}(|g|^2 + |\nabla\pi|^2)\ dx\ dt + s^3\lambda^4 \iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ dx\ dt \right), \quad \text{(B.1)}$$

para quaisquer $\lambda \geqslant \lambda_1(1 + \|\bar{y}\|_\infty)$, $s \geqslant s_1(T^4 + T^8)$ e funções auxiliares α e ξ dadas em (11).

Demonstração. Como já mencionamos no início da seção, vamos a dividir a prova deste lema em 4 passos.

Passo 1 : Notemos que podemos reescrever a primeira equação do sistema (7) da forma

$$\varphi_t + \Delta\varphi = G, \quad \text{(B.2)}$$

onde $G = -(g + D\varphi\bar{y} - \nabla\pi)$. Então, cada componente de (B.2) pode ser reescrita como

$$\varphi_{i,t} + \Delta\varphi_i = G_i, \quad \text{(B.3)}$$

onde

$$G_i = -(g_i + (D\varphi\bar{y})_i - \partial_i\pi),\ \text{para } i = 1, ..., N.$$

Passo 2 : Como (B.3) é uma equação do calor para cada $i = 1, ..., N$, podemos aplicar a desigualdade de Carleman clássica (Teorema A.7) para cada i, onde consideramos um aberto ω_1 tal que $\omega_1 \Subset \omega$. Assim, temos que para cada $i = 1, ..., N$ existem constantes positivas

$$\lambda_{1,i} = \lambda_{1,i}(\Omega, \omega_1) \geqslant 1, \quad s_{1,i} = s_{1,i}(\Omega, \omega_1)(T^7 + T^8), \quad C_{1,i} = C_{1,i}(\Omega, \omega_1),$$

tais que vale a desigualdade

$$\begin{aligned} & s^{-1} \iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi^{-1} \left(|\varphi_{i,t}|^2 + |\Delta\varphi_i|^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + s\lambda^2 \iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi_i|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ & + s^3\lambda^4 \iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi_i|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ & \leqslant C_{1,i} \left(\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha} \, |G_i|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1 \times (0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi_i|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right), \end{aligned} \tag{B.4}$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_{1,i}$, $s \geqslant s_{1,i}(T^7 + T^8)$ e $i = 1, ..., N$.

Consideremos $\lambda_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \{\lambda_{1,i}\}$ e $s_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \{s_{1,i}\}$. Logo, as N desigualdades em (B.4) são satisfeitas para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$, $s \geqslant s_0(T^7 + T^8)$ e $i = 1, ..., N$.

Somando de 1 até N ambos lados da desigualdade (B.4), temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N} \left(s^{-1} \iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi^{-1} \left(|\varphi_{i,t}|^2 + |\Delta\varphi_i|^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + s\lambda^2 \iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi_i|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right. \\ & \left. + s^3\lambda^4 \iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi_i|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right) \\ & \leqslant \sum_{i=1}^{N} C_{1,i} \left(\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha} \, |G_i|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1 \times (0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi_i|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right), \end{aligned} \tag{B.5}$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$, $s \geqslant s_0(T^7 + T^8)$ e $i = 1, ..., N$.

Substituindo a desigualdade

$$|G_i|^2 = |(g_i + (D\varphi\bar{y})_i - \partial_i\pi)|^2 \leqslant C^*_{1,i}\big(|g_i|^2 + |(D\varphi\bar{y})_i|^2 + |\partial_i\pi|^2 \big),$$

no lado direito de (B.5), temos que esta se torna

$$\sum_{i=1}^{N}\left(s^{-1}\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|\varphi_{i,t}|^2+|\Delta\varphi_i|^2\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t+s\lambda^2\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi_i|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right.$$
$$\left.+s^3\lambda^4\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi_i|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right)$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}C_{1,i}\left(\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\big(|g_i|^2+|(D\varphi\bar{y})_i|^2+|\partial_i\pi|^2\big)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t+s^3\lambda^4\iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi_i|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right),$$

para todo $\lambda\geqslant\lambda_0$, $s\geqslant s_0(T^7+T^8)$ e $i=1,...,N$.

Passando os somatórios para dentro das integrais na desigualdade anterior e sabendo que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}|\varphi_{i,t}|^2=|\varphi_t|^2, \quad &&\sum_{i=1}^{N}|\Delta\varphi_i|^2=|\Delta\varphi|^2,\\
&\sum_{i=1}^{N}|\varphi_i|^2=|\varphi|^2, &&\sum_{i=1}^{N}|\nabla\varphi_i|^2=|\nabla\varphi|^2,\\
&\sum_{i=1}^{N}|g_i|^2=|g|^2, &&\sum_{i=1}^{N}|(D\varphi\bar{y})_i|^2=|D\varphi\bar{y}|^2
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n}|\partial_i\pi|^2=|\nabla\pi|^2,$$

temos a desigualdade

$$s^{-1}\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|\varphi_t|^2+|\Delta\varphi|^2\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t+s\lambda^2\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$
$$+\,s^3\lambda^4\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$
$$\leqslant C_1\left(\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\big(\,|g|^2+|(D\varphi\bar{y})|^2+|\nabla\pi|^2\,\big)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t+s^3\lambda^4\iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right),$$

para todo $\lambda\geqslant\lambda_0$, $s\geqslant s_0(T^7+T^8)$.

Note que o lado esquerdo da última desigualdade é igual a $I(s,\lambda,\varphi)$. Portanto, esta última desigualdade pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
I(s,\lambda;\varphi) \leqslant C_1 \Bigg(& \iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}(|g|^2 + |(D\varphi\bar{y})|^2 + |\nabla\pi|^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\
& + s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \Bigg),
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$ e $s \geqslant s_0(T^7 + T^8)$.

Passo 3 : Agora, lembrando a definição de $D\varphi$ dada em (8) e a regularidade de $\bar{y}$ dada por (4), vamos a estimar o termo que envolve $D\varphi\bar{y}$ no lado direito de (B.6). Para isso, note que

$$
C_1\,|(D\varphi\bar{y})|^2 \leqslant C|\nabla\varphi|^2\,\|\bar{y}\|_\infty^2 . \tag{B.7}
$$

Na desigualdade anterior, seja $s_1(\Omega,\omega) = 1$ e note que $T^8\xi \geqslant 2^8 \geqslant 1$, onde ξ é dada em (11). Então, temos

$$
C_1\,|(D\varphi\bar{y})|^2 \leqslant CT^8\xi|\nabla\varphi|^2\,\|\bar{y}\|_\infty^2 \leqslant Cs\,\|\bar{y}\|_\infty^2\,\xi|\nabla\varphi|^2, \quad \forall s \geqslant s_1T^8.
$$

Tomando $\lambda_1(\Omega,\omega) = (2C)^{1/2}$ na desigualdade anterior, temos

$$
C_1\,|(D\varphi\bar{y})|^2 \leqslant Cs\,\|\bar{y}\|_\infty^2\,\xi|\nabla\varphi|^2 \leqslant \frac{1}{2}s\lambda^2\xi|\nabla\varphi|^2, \quad \forall\lambda \geqslant \lambda_1\,\|\bar{y}\|_\infty\,,\ \forall s \geqslant s_1T^8. \tag{B.8}
$$

Sejam agora as constantes $\lambda_2(\Omega,\omega) = \max\{\lambda_0,\lambda_1\}$ e $s_2(\Omega,\omega) = \max\{s_0,s_1\}$. Então, valem as seguintes relações

$$
\begin{aligned}
&\lambda_2(\Omega,\omega)(1 + \|\bar{y}\|_\infty) \geqslant \lambda_2\,\|\bar{y}\| \geqslant \lambda_1\,\|\bar{y}\|\,,\\
&s_2(\Omega,\omega)(T^7 + T^8) \geqslant s_1(\Omega,\omega)T^8,\\
&\lambda_2(\Omega,\omega)(1 + \|\bar{y}\|_\infty) \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_0,\\
&s_2(\Omega,\omega)(T^7 + T^8) \geqslant s_0(\Omega,\omega)(T^7 + T^8).
\end{aligned}
$$

Pelas quatro últimas desigualdades concluímos que (B.6) e (B.8) são válidas para todo $\lambda \geqslant \lambda_2(1 + \|\bar{y}\|_\infty)$ e $s \geqslant s_2(\Omega,\omega)(T^7 + T^8)$.

Multiplicando a desigualdade (B.8) por $e^{-2s\alpha}$ e integrando em Q, conseguimos estimar a integral global de $D\varphi\bar{y}$ em termos da integral global de $\nabla\varphi$, isto é,

$$
C_1 \iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\,|(D\varphi\bar{y})|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}s\lambda^2 \iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t,
$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_2(\Omega,\omega)(1 + \|\bar{y}\|_\infty)$ e $s \geqslant s_2(\Omega,\omega)(T^7 + T^8)$.

Passo 4 : Finalmente, calcularemos a estimativa desejada para $I(s,\lambda;\varphi)$.

Substituindo a última desigualdade no lado direito de (B.6), conseguimos eliminar o termo que envolve $D\varphi\bar{y}$, obtendo

$$I(s,\lambda;\varphi) \leqslant C_1 \left(\iint\limits_Q e^{-2s\alpha}(|g|^2 + |\nabla\pi|^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \right) + \frac{1}{2}s\lambda^2 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t,$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_2(\Omega,\omega)(1+\|\bar{y}\|_\infty)$ e $s \geqslant s_2(\Omega,\omega)(T^7+T^8)$.

Substituindo na desigualdade anterior a expressão para $I(s,\lambda,\varphi)$ dada por (12) e absorvendo a integral que envolve o termo $|\nabla\varphi|^2$ no lado direito com seu similar no lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned} &s^{-1}\iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}s\lambda^2 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ &+ s^3\lambda^4 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant C_1 \left(\iint\limits_Q e^{-2s\alpha}(|g|^2 + |\nabla\pi|^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \right). \end{aligned}$$

Multiplicando por 2 ambos lados da desigualdade anterior, notamos que o lado esquerdo resultante é maior que $I(s,\lambda,\varphi)$, obtendo a desigualdade desejada (B.1), isto é,

$$I(s,\lambda;\varphi) \leqslant C_2 \left(\iint\limits_Q e^{-2s\alpha}(|g|^2 + |\nabla\pi|^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \right),$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_2(\Omega,\omega)(1+\|\bar{y}\|_\infty)$ e $s \geqslant s_2(\Omega,\omega)(T^7+T^8)$. □

B.2 Estimativa do gradiente da pressão π

Nesta seção estimaremos a integral global do gradiente da pressão π no lado direito de (B.1) em termos de uma integral local da pressão π, um termo envolvendo o traço de π e outras duas integrais globais envolvendo o termo g e o gradiente da velocidade φ. Esta estimativa é dada no Lema B.2 e para encontrá-la seguiremos os seguintes passos :

- Olharemos a primeira equação do sistema (7) como um problema elíptico em π.
- Obteremos uma estimativa da integral global no espaço do gradiente da pressão π utilizando uma desigualdade de Carleman para o problema elíptico do passo anterior.

- Estimaremos a integral local no espaço do gradiente da pressão π na desigualdade obtida no passo anterior em termos de $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ definidas em (B.19).

- Estimaremos $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$.

- Utilizando os passos 3 e 4 eliminaremos o termo relacionado à integral local do gradiente da pressão π da estimativa do passo 2.

- Finalmente, reescreveremos a estimativa global no espaço do gradiente da pressão π em termos de novos pesos. Logo, integraremos em $(0, T)$ para obter a estimativa desejada.

Lema B.2. *Suponha que (4) seja satisfeito. Então, existem três constantes positivas s_2, λ_2 e C, dependendo apenas de Ω e ω, tais que para cada $\varphi^0 \in H$ e cada $g \in L^2(Q)^N$, a solução correspondente (φ, π) do problema (7) verifica*

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leqslant C \Bigg(s\int_0^T \int_\Omega e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + s\int_0^T \int_\Omega e^{-2s\alpha}\xi|(D\varphi\bar{y})|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ + s^{1/2}\int_0^T \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}\|\pi(t)\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \, \mathrm{d}t \\ + s^2\lambda^2\int_0^T \int_{\omega_2} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Bigg),\end{aligned} \tag{B.9}$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_2$, $s \geqslant s_2 T^8$ e funções auxiliares α, ξ, α^* e $\hat{\xi}$ dadas em (11).

Demonstração. Como já mencionamos no início da seção, vamos a dividir a prova deste lema em 6 passos.

Passo 1 : Olharemos a primeira equação do sistema adjunto (7) como um problema elíptico em π.

Aplicando o operador de divergência na primeira equação do sistema (7), temos

$$\nabla \cdot (-\varphi_t - \Delta\varphi + \nabla\pi) = \nabla \cdot (g + D\varphi\bar{y}). \tag{B.10}$$

Logo, aplicando o operador divergência em cada um dos termos do lado esquerdo de (B.10), vale

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \varphi_t &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_{i,t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi_i\right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_i\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_i\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \varphi) = 0,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \Delta\varphi &= \nabla \cdot (\Delta\varphi_1, ..., \Delta\varphi_N) \\
&= \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \partial_i{}^2(\varphi_1), ..., \sum_{i=1}^{N} \partial_i{}^2(\varphi_N) \right) \\
&= \partial_1 \left(\sum_{i=1}^{N} \partial_i{}^2(\varphi_1) \right) + ... + \partial_N \left(\sum_{i=1}^{N} \partial_i{}^2(\varphi_N) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \partial_1(\partial_i{}^2(\varphi_1)) + ... + \sum_{i=1}^{N} \partial_N(\partial_i{}^2(\varphi_N)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \partial_i{}^2(\partial_1(\varphi_1)) + ... + \sum_{i=1}^{n} \partial_i{}^2(\partial_N(\varphi_N)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \partial_i{}^2(\partial_1(\varphi_1) + ... + \partial_N(\varphi_N)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \partial_i{}^2(\nabla \cdot \varphi) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

e

$$\nabla \cdot (\nabla\pi) = \Delta\pi.$$

Portanto, substituindo as três igualdades anteriores em (B.10), temos

$$\Delta\pi = \nabla \cdot (g + D\varphi\bar{y}). \tag{B.11}$$

Passo 2 : Neste passo, aplicaremos a desigualdade de Carleman do Teorema A.5 ao problema elíptico (B.11) em π para obter uma estimativa da integral global no espaço do gradiente da pressão π.

Pelo Teorema 1.68, $\pi(t) \in H^1(\Omega)$ para quase todo $t \in (0, T)$. Então, o lado direito de (B.11) pertence ao espaço $H^{-1}(\Omega)$.

Escrevendo (B.11) explicitamente, obtemos

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_i{}^2(\pi) = \sum_{i=1}^{N} \partial_i(F_i), \tag{B.12}$$

onde

$$F = g + D\varphi\bar{y}.$$

Comparando (B.12) com (A.4) e utilizando as notações no contexto do Teorema A.5, temos que

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \\
b_i &= 0, \text{ para } i = 1, ..., N, \\
c_i &= 0, \text{ para } i = 1, ..., N, \\
d &= 0, \\
f_j &= (g + D\varphi\bar{y})_j, \text{ para } j = 1, ..., N, \\
f &= 0, \\
y &= \pi, \\
\text{e} & \\
\eta &= \widehat{\varphi},
\end{aligned}
$$

onde

$$\eta(x) = \mathrm{e}^{\lambda\eta^0(x)}, \tag{B.13}$$

com η^0 definida em (10).

Assim, aplicando o Teorema A.5 no problema elíptico dado por (B.12), temos que existem constantes $C_0 > 0, \widehat{\lambda} > 1$ e $\widehat{\tau} > 1$, tais que vale a desigualdade

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathrm{e}^{2\tau\eta}|\nabla\pi|^2 \mathrm{d}x + \tau^2\lambda^2 \int_\Omega \eta^2|\pi|^2\mathrm{e}^{2\tau\eta}\mathrm{d}x \\
&\leqslant C_0 \left(\tau^{1/2}\mathrm{e}^{2\tau}\|\pi\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \tau \int_\Omega |(g + D\varphi\bar{y})_j|^2 \, \eta e^{2\tau\eta}\mathrm{d}x \right. \\
&\left. + \int_{\omega_1} (|\nabla\pi|^2 + \tau^2\lambda^2\eta^2|\pi|^2)\mathrm{e}^{2\tau\eta}\mathrm{d}x \right),
\end{aligned} \tag{B.14}
$$

para todo $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}$ e $\tau \geqslant \widehat{\tau}$.

Substituindo as desigualdades

$$\int_\Omega \mathrm{e}^{2\tau\eta}|\nabla\pi|^2\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \mathrm{e}^{2\tau\eta}|\nabla\pi|^2\mathrm{d}x + \tau^2\lambda^2 \int_\Omega \eta^2|\pi|^2\mathrm{e}^{2\tau\eta}\mathrm{d}x$$

e

$$\sum_{j=1}^{N} |(g + D\varphi\bar{y})_j|^2 \leqslant 2\sum_{j=1}^{N}(|g_j|^2 + |(D\varphi\bar{y})_j|^2) = 2(|g|^2 + |(D\varphi\bar{y})|^2)$$

em (B.14), temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{e}^{2\tau\eta}|\nabla\pi(t)|^2\mathrm{d}x \leqslant C_1 &\left(\tau \int_\Omega e^{2\tau\eta}\eta\big(|(D\varphi\bar{y})|^2 + |g|^2\big)(t)\mathrm{d}x + \tau^{1/2}\mathrm{e}^{2\tau}\|\pi(t)\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \\
&+ \int_{\omega_1} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\big(|\nabla\pi|^2 + \tau^2\lambda^2\eta^2|\pi|^2\big)(t)\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{B.15}
$$

para quase todo $t \in (0,T)$, para todo $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}$ e $\tau \geqslant \widehat{\tau}$.

A desigualdade (B.15) tem um papel importante, pois desta desigualdade vamos a deduzir a estimativa desejada em (B.9). Mas para isso precisamos eliminar a integral local de $\nabla\pi$ no lado direito de (B.15).

Passo 3 : Neste passo, estimaremos a integral local no espaço do gradiente da pressão π no lado direito da desigualdade (B.15), em termos de $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ definidas em (B.19).

Começaremos estimando a integral local de $\nabla\pi$ no lado direito de (B.15) em termos de uma integral local de π em um aberto ω_2 que satisfaça $\omega_1 \Subset \omega_2 \Subset \omega$. Para isso, introduzimos uma função $\zeta \in C_c^2(\omega_2)$ tal que $\zeta \equiv 1$ em ω_1 com $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$.

Notemos que

$$\int_{\omega_1} \mathrm{e}^{2\tau\eta}|\nabla\pi(t)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\omega_1} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta|\nabla\pi(t)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta\big(\nabla\pi(t)\cdot\nabla\pi(t)\big)\mathrm{d}x. \tag{B.16}$$

Escrevendo o último termo à direita da desigualdade anterior em termos de suas funções coordenadas, temos

$$\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta\nabla\pi(t)\cdot\nabla\pi(t)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N}\int_{\omega_2} \partial_i\big(\pi(t)\big)\mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta\partial_i\big(\pi(t)\big)\mathrm{d}x. \tag{B.17}$$

Observemos que para cada $1 \leqslant i \leqslant N$, mediante a integração por partes no lado direito de (B.17), obtemos

$$\int_{\omega_2} \partial_i(\pi(t))\mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta\partial_i(\pi(t))\mathrm{d}x = -\int_{\omega_2} \pi(t)\partial_i\big(e^{2\tau\eta}\zeta\partial_i(\pi(t))\big)dx,$$

pois ζ tem suporte contido em ω_2.

Expandindo também o termo $\partial_i\big(e^{2\tau\eta}\zeta\partial_i(\pi(t))\big)$ na igualdade anterior, temos

$$\int_{\omega_2} \pi(t)\partial_i(e^{2\tau\eta}\zeta\partial_i(\pi(t)))dx = \int_{\omega_2} \pi(t)\partial_i(e^{2\tau\eta}\zeta)\partial_i(\pi(t))dx + \int_{\omega_2} \pi(t)e^{2\tau\eta}\zeta{\partial_i}^2(\pi(t))dx.$$

Substituindo as duas últimas igualdades em (B.17), esta última torna se

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta\ \nabla\pi(t)\cdot\nabla\pi(t)\ \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{N}\int_{\omega_2} \partial_i(\pi(t))\mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta\partial_i(\pi(t))\ \mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\int_{\omega_2} \pi(t)\partial_i(e^{2\tau\eta}\zeta)\partial_i(\pi(t))\ \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{N}\int_{\omega_2} \pi(t)e^{2\tau\eta}\zeta{\partial_i}^2(\pi(t))\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\omega_2} \partial_i(e^{2\tau\eta}\zeta)\partial_i(\pi(t)^2)\ \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{N}\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta\pi(t){\partial_i}^2(\pi(t))\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\omega_2} \nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)\cdot\nabla|\pi(t)|^2\ \mathrm{d}x - \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta\pi(t)\Delta(\pi(t))\ \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta\ \nabla\pi(t)\cdot\nabla\pi(t)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{\omega_2} \nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)\cdot\nabla\left|\pi(t)\right|^2\ \mathrm{d}x - \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta\pi(t)\Delta(\pi(t))\ \mathrm{d}x. \tag{B.18}$$

Integrando por partes o primeiro termo do lado direito da equação anterior e lembrando que ζ tem suporte contido em ω_2, temos

$$-\frac{1}{2}\int_{\omega_2} \nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)\cdot\nabla|\pi(t)|^2dx = \frac{1}{2}\int_{\omega_2} \Delta(e^{2\tau\eta}\zeta)|\pi(t)|^2dx.$$

Notemos que o segundo termo do lado direito da igualdade (B.18) pode ser reescrito como

$$\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta\pi(t)\Delta(\pi(t))dx = \left\langle e^{2\tau\eta}\Delta\pi(t), \zeta\pi(t)\right\rangle_{H^{-1}(\omega_2),H_0^1(\omega_2)}.$$

Substituindo as duas últimas igualdades no lado direito de (B.18) e o resultado no lado direito de (B.16), obtemos a estimativa desejada

$$\int_{\omega_1} \mathrm{e}^{2\tau\eta}|\nabla\pi(t)|^2\mathrm{d}x \leqslant \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \tag{B.19}$$

onde

$$\mathcal{I}_1 = -\left\langle e^{2\tau\eta}\Delta\pi(t), \zeta\pi(t)\right\rangle_{H^{-1}(\omega_2),H_0^1(\omega_2)}, \quad \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}\int_{\omega_2} \Delta(e^{2\tau\eta}\zeta)|\pi(t)|^2\ \mathrm{d}x.$$

Passo 4 : Neste passo estimaremos os termos do lado direito da desigualdade (B.19), isto é, $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$.

Começaremos substituindo (B.11), isto é, $\Delta\pi = \nabla\cdot(g + D\varphi\bar{y})$, no primeiro termo do lado direito de (B.19), ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 = -\left\langle e^{2\tau\eta}\Delta(\pi(t)), \zeta\pi(t)\right\rangle_{H^{-1}(\omega_2),H_0^1(\omega_2)} &= -\left\langle e^{2\tau\eta}\nabla\cdot(g + D\varphi\bar{y})(t), \zeta\pi(t)\right\rangle_{H^{-1}(\omega_2),H_0^1(\omega_2)} \\
&= -\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\ \nabla\cdot(g + D\varphi\bar{y})(t)\zeta\pi(t)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\partial_i((g_i + (D\varphi\bar{y})_i)(t))\zeta\pi(t)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

portanto,

$$-\left\langle e^{2\tau\eta}\Delta(\pi(t)), \zeta\pi(t)\right\rangle_{H^{-1}(\omega_2),H_0^1(\omega_2)} = -\sum_{i=1}^{N}\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\partial_i\left((g_i + (D\varphi\bar{y})_i)(t)\right)\zeta\pi(t)\mathrm{d}x. \tag{B.20}$$

Integrando por partes para $i = 1, ..., N$ o lado direito de (B.20) e tendo em conta que ζ tem suporte contido em ω_2, obtem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\partial_i((g_i + (D\varphi\bar{y})_i)(t))\zeta\pi(t)\mathrm{d}x &= -\int_{\omega_2} (g_i + (D\varphi\bar{y})_i)(t)\partial_i(e^{2\tau\eta}\zeta\pi(t))\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\omega_2} (D\varphi\bar{y} + g)_i(t)\left(\partial_i(e^{2\tau\eta}\zeta)\pi(t)\right)\mathrm{d}x \\
&- \int_{\omega_2} (D\varphi\bar{y} + g)_i(t)\left(e^{2\tau\eta}\zeta\partial_i(\pi(t))\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Substituindo a igualdade anterior em (B.20) e passando os somatórios para dentro das integrais, obtemos

$$\begin{aligned}
-\left\langle e^{2\tau\eta}\Delta(\pi(t)), \zeta\pi(t)\right\rangle_{H^{-1}(\omega_2),H_0^1(\omega_2)} &= \int_{\omega_2} \nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)\cdot(D\varphi\bar{y} + g)(t)\pi(t)\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta(D\varphi\bar{y} + g)(t)\cdot\nabla\pi(t)\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Tendo chegado até aqui, pela igualdade (B.22), deduzimos que para estimar mas adiante o lado direito de (B.19), precisamos de estimativas que ainda não temos para o gradiente e Laplaciano de $e^{2\tau\eta}\zeta$. Estimativas que apresentaremos agora.

Desenvolvendo componente a componente $\nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)$ e $\Delta(e^{2\tau\eta}\zeta)$. Utilizando a desigualdade triangular e regularidade de η dada em (B.13) e $\zeta \in C_c^2(\omega_2)$, temos que existem constantes positivas $\bar{\lambda}_0$ e $\bar{\lambda}_1$, tais que valem as desigualdades

$$|\Delta(e^{2\tau\eta}\zeta)| \leqslant 2C_2\tau^2\lambda^2\eta^2 e^{2\tau\eta}, \quad \forall\lambda \geqslant \bar{\lambda}_0 \tag{B.23}$$

e

$$|\nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)| \leqslant C_3\tau\lambda\eta e^{2\tau\eta}, \quad \forall\lambda \geqslant \bar{\lambda}_1. \tag{B.24}$$

Estimemos agora o lado direito de (B.22). Comecemos estimando o segundo termo do lado direito de (B.22). Aplicando as desigualdades de Cauchy e Cauchy-Schwarz (ver teoremas 1.38 e 1.41), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta(D\varphi\bar{y}) + g)(t)\cdot\nabla\pi(t)\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta|(D\varphi\bar{y} + g)(t)||\nabla\pi(t)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta\left(|(D\varphi\bar{y} + g)(t)|^2 + |\nabla\pi(t)|^2\right)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta\left(|D\varphi\bar{y}(t)|^2 + |g(t)|^2\right)\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta|\nabla\pi(t)|^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{C}{2}\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\left(|D\varphi\bar{y}(t)|^2 + |g(t)|^2\right)\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta|\nabla\pi(t)|^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta(D\varphi\bar{y})+g)(t)\cdot\nabla\pi(t)\mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{2}\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\left(|D\varphi\bar{y}(t)|^2+|g(t)|^2\right)\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta|\nabla\pi(t)|^2\mathrm{d}x. \tag{B.25}$$

Para estimar o primeiro termo do lado direito de (B.22), isto é,

$$\int_{\omega_2}\nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)\cdot(D\varphi\bar{y}+g)(t)\pi(t)\mathrm{d}x,$$

vamos a substituir neste, a estimativa para o termo $\nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)$ dada em (B.24). Logo, utilizando novamente as desigualdades de Cauchy e Cauchy-Schwarz, obtem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_2}\nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)\cdot(D\varphi\bar{y}+g)(t)\pi(t)\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\omega_2}|\nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)||(D\varphi\bar{y}+g)(t)||\pi(t)|\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant C_3\int_{\omega_2}\tau\lambda\eta e^{2\tau\eta}|(D\varphi\bar{y}+g)(t)||\pi(t)|\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{C_3}{2}\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\left(\tau^2\lambda^2\eta^2(|\pi(t)|)^2+|(D\varphi\bar{y}+g)(t)|^2\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{C_3}{2}\tau^2\eta^2\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\mathrm{d}x\\
&+C_3\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\left(|D\varphi\bar{y}(t)|^2+|g(t)|^2\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\omega_2}\nabla(e^{2\tau\eta}\zeta)\cdot(D\varphi\bar{y}+g)(t)\pi(t)\mathrm{d}x \leqslant \frac{C_3}{2}\tau^2\eta^2\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\mathrm{d}x$$
$$+C_3\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\left(|D\varphi\bar{y}(t)|^2+|g(t)|^2\right)\mathrm{d}x. \tag{B.26}$$

Substituindo as desigualdades (B.25) e (B.26) no lado direito de (B.22), conseguimos a estimativa desejada para o primeiro termo do lado direito de (B.19), ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= -\left\langle e^{2\tau\eta}\Delta(\pi(t)),\zeta\pi(t)\right\rangle_{H^{-1}(\omega_2),H_0^1(\omega_2)}\\
&\leqslant C_4\left(\tau^2\lambda^2\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\mathrm{d}x+\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}(|D\varphi\bar{y}|^2+|g|^2)(t)\mathrm{d}x\right)\\
&+\frac{1}{2}\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\zeta|\nabla\pi(t)|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{B.27}$$

Para estimar o segundo termo do lado direito de (B.19), precisamos apenas substituir a desigualdade (B.23) em (B.19), obtendo

$$\mathcal{I}_2=\frac{1}{2}\int_{\omega_2}\Delta(e^{2\tau\eta}\zeta)|\pi(t)|^2dx \leqslant C_2\tau^2\lambda^2\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2dx. \tag{B.28}$$

Passo 5 : Neste passo, vamos eliminar o termo relacionado com a integral local do gradiente da pressão π do lado direito de (B.15).

Começaremos substituindo as desigualdades (B.27) e (B.28) no lado direito de (B.19). Assim, temos que (B.19) torna se

$$\begin{aligned}\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta\ \nabla\pi(t)\cdot\nabla\pi(t)\mathrm{d}x \leqslant C_2\tau^2\lambda^2\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\mathrm{d}x \\ + C_4\left(\tau^2\lambda^2\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\mathrm{d}x + \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}(|D\varphi\bar{y}|^2+|g|^2)(t)\mathrm{d}x\right) \\ + \frac{1}{2}\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta\ \nabla\pi(t)\cdot\nabla\pi(t)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Nesta última desigualdade, notamos que o último termo do lado direito pode ser absorvido pelo termo do lado esquerdo. Multiplicando por 2 ambos lados da desigualdade resultante e considerando $C^* = \max\{C_2, C_4\}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\zeta\ \nabla\pi(t)\cdot\nabla\pi(t)\mathrm{d}x \leqslant 2C^*\Bigg(\tau^2\lambda^2\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\mathrm{d}x \\ + \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}(|D\varphi\bar{y}|^2+|g|^2)(t)\mathrm{d}x\Bigg).\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade anterior no lado direito de (B.16) e a desigualdade resultante no lado direito de (B.15), temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathrm{e}^{2\tau\eta}|\nabla\pi(t)|^2\mathrm{d}x &\leqslant C_1^*\Bigg(\tau\int_{\Omega} e^{2\tau\eta}\eta\big(|(D\varphi\bar{y})|^2+|g|^2\big)(t)\mathrm{d}x + \tau^{1/2}\mathrm{e}^{2\tau}\|\pi\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\quad + \tau^2\lambda^2\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\ \mathrm{d}x\Bigg) + C_2^*\Bigg(\tau^2\lambda^2\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}(|D\varphi\bar{y}|^2+|g|^2)(t)\mathrm{d}x\Bigg) \\ &\leqslant C_3^*\Bigg(\tau\int_{\Omega} e^{2\tau\eta}\eta\big(|(D\varphi\bar{y})|^2+|g|^2\big)(t)\mathrm{d}x + \tau^{1/2}\mathrm{e}^{2\tau}\|\pi\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\quad + \tau^2\lambda^2\int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2 + \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\big(|D\varphi\bar{y}|^2+|g|^2\big)(t)\mathrm{d}x\Bigg) \\ &\leqslant C_4^*\Bigg(\tau\int_{\Omega} e^{2\tau\eta}\eta\big(|(D\varphi\bar{y})|^2+|g|^2\big)(t)\mathrm{d}x \\ &\quad + \tau^{1/2}\mathrm{e}^{2\tau}\|\pi\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} + \tau^2\lambda^2\int_{\omega_2} \mathrm{e}^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\ \mathrm{d}x\Bigg).\end{aligned}$$

A desigualdade anterior é válida para todo $\lambda \geqslant \overline{\lambda}_2(\Omega,\omega)$ e $\tau \geqslant \overline{\tau}$, onde $\overline{\lambda}_2 = \max\{\overline{\lambda}, \overline{\lambda}_0, \overline{\lambda}_1\}$. Pois esta última desigualdade resulta de combinar essencialmente as desigualdades (B.15), (B.23) e (B.24), quais são válidas para todo $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}$ e $\tau \geqslant \widehat{\tau}$, $\lambda \geqslant \overline{\lambda}_0$ e $\lambda \geqslant \overline{\lambda}_1$, respectivamente.

Em resumo, pela última desigualdade, conseguimos eliminar a integral local de $\nabla\pi$ no lado direito de (B.15), tornando esta em

$$\int_\Omega \mathrm{e}^{2\tau\eta}|\nabla\pi(t)|^2\mathrm{d}x \leqslant C_4^*\Big(\tau\int_\Omega \mathrm{e}^{2\tau\eta}\eta\big(|(D\varphi\bar{y})|^2+|g|^2\big)(t)\mathrm{d}x \\ +\tau^{1/2}\mathrm{e}^{2\tau}\|\pi\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}+\tau^2\lambda^2\int_{\omega_2}\mathrm{e}^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\,\mathrm{d}x\Big), \tag{B.29}$$

para todo $\lambda \geqslant \overline{\lambda}_2(\Omega,\omega)$ e $\tau \geqslant \overline{\tau}$.

Passo 6 : No resto da seção vamos a reescrever a desigualdade (B.29), cujos pesos são dados pelas funções

$$\mathrm{e}^{2\tau\eta}, \quad \tau^{2\tau\eta}\eta, \quad \tau^{1/2}\mathrm{e}^{2\tau}, \quad \tau^2\lambda^2\mathrm{e}^{2\tau\eta}\eta^2,$$

em termos dos novos pesos

$$\mathrm{e}^{-2s\alpha}, \quad s\mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi, \quad s^{1/2}\mathrm{e}^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}, \quad s^2\lambda^2\mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2.$$

Vamos começar considerando a mudança de variável

$$\tau = \frac{s}{t^4(T-t)^4}e^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}, \tag{B.30}$$

onde η^0 é dada como em (10).

Observemos que para $t \in (0,T)$, vale

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (T-2t)^2 &\iff 0 \leqslant T^2-4Tt+4t^2 \\ &\iff t(T-t) \leqslant \left(\frac{T}{2}\right)^2 \\ &\iff 1 \leqslant \frac{T^8}{2^8t^4(T-t)^4}. \end{aligned} \tag{B.31}$$

Tomando

$$s \geqslant \bar{s_0}T^8, \tag{B.32}$$

onde $\bar{s_0} := \dfrac{\overline{\tau}}{2^8}$, temos que a desigualdade (B.29) é satisfeita para τ dado por (B.30).

Substituindo τ dado por (B.30) na desigualdade (B.29) e multiplicando a mesma por $\mathrm{e}^{-2s\mu(t)}$, onde

$$\mu(t) = \frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4},$$

temos

$$\left(\int_\Omega \mathrm{e}^{2\tau\eta}|\nabla\pi|^2\mathrm{d}x\right)e^{-2s\mu(t)} \leqslant C_4^*e^{-2s\mu(t)}\Big(\tau\int_\Omega \mathrm{e}^{2\tau\eta}\eta(|(D\varphi\bar{y})|^2+|g|^2)(t)\mathrm{d}x \\ +\tau^{1/2}\mathrm{e}^{2\tau}\|\pi\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}+\tau^2\lambda^2\int_{\omega_2}\mathrm{e}^{2\tau\eta}\eta^2|\pi(t)|^2\,\mathrm{d}x\Big). \tag{B.33}$$

Passando a exponencial $e^{-2s\mu(t)}$ para dentro das integrais, adicionando seus expoentes, e observando que

$$
\begin{aligned}
e^{2\tau\eta}e^{-2s\mu(t)} &= \exp\left(2s\frac{\mathrm{e}^{\lambda\left(m\left\|\eta^0\right\|_\infty+\eta^0(x)\right)}}{t^4(T-t)^4} - 2s\frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}\right)\\
&= \exp\left(-2s\frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - \mathrm{e}^{\lambda\left(m\left\|\eta^0\right\|_\infty+\eta^0(x)\right)}}{t^4(T-t)^4}\right)\\
&= e^{-2s\alpha}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
e^{2\tau}e^{-2s\mu(t)} &= \exp\left(2s\frac{\mathrm{e}^{\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty}}{t^4(T-t)^4} - 2s\frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}\right)\\
&= \exp\left(-2s\frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - \mathrm{e}^{\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}\right)\\
&= e^{-2s\alpha^*},
\end{aligned}
$$

temos que (B.33) torna se

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2\mathrm{d}x \leqslant C_4^*\Bigg(\tau\int_\Omega e^{-2s\alpha}\eta(|(D\varphi\bar{y})|^2+|g|^2)(t)\mathrm{d}x\\
+\tau^{1/2}\mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\|\pi(t)\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}+\tau^2\lambda^2\int_{\omega_2}\mathrm{e}^{-2s\alpha}\eta^2|\pi(t)|^2\,\mathrm{d}x\Bigg).
\end{aligned}
\tag{B.34}
$$

Vamos agora expressar τ e η em termos de s e ξ

$$
\begin{aligned}
\tau\eta &= \frac{s}{t^4(T-t)^4}\mathrm{e}^{\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty}e^{\lambda\eta^0} = s\frac{\mathrm{e}^{\lambda(m\left\|\eta^0\right\|_\infty+\eta^0)}}{t^4(T-t)^4} = s\xi,\\
\tau^{1/2} &= \left(s\frac{\mathrm{e}^{\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}\right)^{1/2} = s^{1/2}(\xi^*)^{1/2},\\
\tau^2\eta^2 &= \left(s\frac{\mathrm{e}^{\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}\right)^2(e^{\lambda\eta^0})^2 = s^2\left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}\right)^2 = s^2\xi^2.
\end{aligned}
$$

Substituindo as igualdades acima na desigualdade (B.34), temos que esta torna se

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\alpha}|\nabla\pi(t)|^2\mathrm{d}x \leqslant C_4^*\Bigg(s\int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi(|(D\varphi\bar{y})|^2+|g|^2)(t)\mathrm{d}x\\
+s^{1/2}\mathrm{e}^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}\|\pi(t)\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}+\ s^2\lambda^2\int_{\omega_2}\mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi(t)|^2\,\mathrm{d}x\Bigg).
\end{aligned}
$$

Finalmente, integrando a desigualdade anterior em $(0, T)$, obtemos a estimativa desejada para a integral global de $\nabla\pi$ procurada em (B.9), isto é,

$$\int_0^T \int_\Omega \mathrm{e}^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C_4^* \left(s\int_0^T \int_\Omega e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s\int_0^T \int_\Omega e^{-2s\alpha}\xi|(D\varphi\bar{y})|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right.$$
$$+s^{1/2}\int_0^T \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}\|\pi(t)\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \,\mathrm{d}t$$
$$\left. +s^2\lambda^2\int_0^T \int_{\omega_2} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right),$$

para todo $\lambda \geqslant \bar{\lambda}_2$ e $s \geqslant \bar{s}_0 T^8$. □

B.3 Estimativa do traço da pressão π

Nesta seção mostraremos dois resultados principais dados pelos lemas B.3 e B.4. O primeiro é uma estimativa do traço da pressão π e o segundo é referido a uma estimativa de $I(s, \lambda; \varphi)$ definido em (12).

B.3.1 Primeiro resultado principal da subseção

Nesta subseção estimaremos o terceiro termo do lado direito de (B.9), isto é, a integral que envolve o traço de π mediante integrais que envolvem os termos $|g|^2$, $|\phi|^2$ e $|\nabla\phi|^2$ com expoentes adequados para os parâmetros s e λ. Este resultado é dado pelo lema B.3.

Lema B.3. *Suponha que (4) seja satisfeito. Então, existem constantes positivas s_3 e C, dependendo apenas de Ω e ω, tais que para cada $\varphi^0 \in H$ e cada $g \in L^2(Q)^N$, a solução correspondente (φ, π) do problema (7) verifica*

$$\int_0^T \|\pi^*(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \,\mathrm{d}t \leqslant C \left(s \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right.$$
$$+s\,\|\bar{y}\|^2_\infty \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$\left. +s^{5/2}T^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right), \tag{B.35}$$

para todo $s \geqslant s_3 T^8$ e funções auxiliares α, ξ, α^* e ξ dadas em (11), onde

$$\pi^* = s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}\pi.$$

Para demonstrar o Lema B.3 seguiremos os seguintes passos :

- Mostraremos que o par (φ^*, π^*) é solução do sistema de Navier Stokes linear (B.36) para obter, mediante estimativas de energia, uma estimativa da norma da pressão π^* no espaço $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.
- Utilizando o passo anterior, estimaremos a integral do traço da pressão π em termos das integrais $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_3$ definidas em (B.41).
- Estimaremos $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$.
- Estimaremos $\mathcal{T}_3$.
- Finalmente, utilizando os passos 2, 3 e 4, estimaremos a integral do traço de π em termos de integrais globais dos termos g, φ e $\nabla\varphi$.

Demonstração. (do Lema B.3) Como já mencionamos acima, vamos a dividir a prova deste lema em 5 passos.

Passo 1 : Consideremos as funções

$$\varphi^* = s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}\varphi \quad \text{e} \quad \pi^* = s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}\pi.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_t^* &= s^{1/4}(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4})_t\varphi + s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}\varphi_t,\\
\Delta\varphi^* &= s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}\Delta\varphi,\\
\nabla\pi^* &= s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}\nabla\pi.
\end{aligned}$$

Lembremos que φ satisfaz a primeira equação do sistema (7), isto é,

$$-\varphi_t - \Delta\varphi - D\varphi\bar{y} + \nabla\pi = g.$$

Multiplicando a igualdade anterior por $s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}$ e substituindo os termos da igualdade resultante em função de φ^*, π^*, $\nabla\pi^*$, temos que φ^* e π^* satisfazem

$$\begin{cases}
-\varphi_t^* - \Delta\varphi^* + \nabla\pi^* = g^* & \text{em } Q,\\
\nabla\cdot\varphi^* = 0 & \text{em } Q,\\
\varphi^* = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\
\varphi^*(T) = 0 & \text{em } \Omega,
\end{cases} \tag{B.36}$$

onde

$$g^* = s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}g + s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}D\varphi\bar{y} - s^{1/4}(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4})_t\varphi. \tag{B.37}$$

Usando propriedades de regularidade para o sistema (B.36) dadas no Teorema 1.63, temos que

$$\begin{aligned}
&\varphi^* \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^N \cap V) \cap L^\infty(0,T;V),\\
&\varphi_t^* \in L^2(0,T;H),\\
&\pi^* \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).
\end{aligned}$$

Além disso, temos que as funções φ^*, φ_t^*, e π^* são limitadas em seus respectivos espaços pelo termo $\|g^*\|_{L^2(Q)^N}$, onde g^* é o lado direito da primeira equação do sistema (B.36). Para π^*, temos

$$\|\pi^*\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C_1 \iint\limits_Q |g^*|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{B.38}$$

Passo 2 : Neste passo, estimaremos a integral do traço da pressão π do lado direito da desigualdade (B.9) em termos de $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_3$ definidas em (B.41).

Pelo Teorema 1.19, podemos estimar o traço de π^* em termos da norma $H^1(\Omega)$ de π^*. Isto é, que existe $\bar{C} > 0$ tal que

$$\|\pi^*(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant \bar{C}\|\pi^*(t)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Consequentemente, elevando ao quadrado ambos lados da desigualdade anterior, integrando em $(0,T)$ e utilizando a desigualdade (B.38), obtem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\pi^*(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\mathrm{d}t &\leqslant \bar{C}\int_0^T \|\pi^*(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant C_2 \iint\limits_Q |g^*|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{B.39}$$

Agora, pela definição de g^* dada em (B.37), aplicando as desigualdades triangular e o fato que $(a+b) \leqslant 2(a^2+b^2)$ para $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
|g^*|^2 &= |s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}g + s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}D\varphi\overline{y} - s^{1/4}(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4})_t\varphi|^2\\
&\leqslant \left(|s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}g| + |s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}D\varphi\overline{y}| + |s^{1/4}(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4})_t\varphi|\right)^2\\
&\leqslant \bar{C}_3\left(|s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}g|^2 + |s^{1/4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}D\varphi\overline{y}|^2 + |s^{1/4}(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4})_t\varphi|^2\right)\\
&= \bar{C}_3\left(s^{1/2}e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}|g|^2 + s^{1/2}e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}|D\varphi\overline{y}|^2 + s^{1/2}|(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4})_t|^2|\varphi|^2\right).
\end{aligned}$$

Logo, substituindo a desigualdade anterior no lado direito de (B.39), esta última torna se

$$\int_0^T \|\pi^*(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\, \mathrm{d}t \leqslant C_3 \left(s^{1/2} \iint\limits_Q e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}|g|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right.$$
$$+ s^{1/2} \iint\limits_Q e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}|D\varphi\bar{y}|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$\left. + s^{1/2} \iint\limits_Q |(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4})_t|^2|\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right). \tag{B.40}$$

Agora, eliminemos o termo que envolve a $(D\varphi\bar{y})$ na última desigualdade. Para isso, substituindo a desigualdade (B.7), isto é,

$$C_1 \left|(D\varphi\bar{y})\right|^2 \leqslant C|\nabla\varphi|^2 \, \|\bar{y}\|^2_\infty$$

no segundo termo do lado direito da desigualdade anterior, temos

$$\int_0^T \|\pi^*(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \mathrm{d}t \leqslant C_4 \left(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3\right), \tag{B.41}$$

onde

$$\mathcal{T}_1 = s^{1/2} \iint\limits_Q e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}|g|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \quad \mathcal{T}_2 = s^{1/2} \, \|\bar{y}\|^2_\infty \iint\limits_Q e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}|\nabla\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$\mathcal{T}_3 = s^{1/2} \iint\limits_Q |(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4})_t|^2|\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

Passo 3 : Neste passo estimaremos $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ no lado direito de (B.41).

Pela igualdade (B.30) e pelas definições de α^*, ξ^*, α e ξ dadas em (11), as seguintes desigualdades são válidas

$$\xi^*(t) \leqslant \xi(x,t), \quad e^{-2s\alpha^*} \leqslant e^{-2s\alpha} \;\text{ e }\; s\xi^*(t) \geqslant \bar{\tau} > 1, \quad \text{para} \quad s \geqslant \bar{s}_0 T^8,$$

com $\bar{s}_0$ como em (B.32).

Pelas três desigualdades anteriores e tomando $\bar{s}_1$ tal que $\bar{s}_1 \geqslant \bar{s}_0$ e $\bar{s}_1 T^8 \geqslant 1$, vale

$$s^{1/2} e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2} \leqslant s e^{-2s\alpha}\xi, \quad \forall s \geqslant \bar{s}_1 T^8.$$

Portanto, da última desigualdade, podemos estimar $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ no lado direito de (B.41) da seguinte forma

$$\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \leqslant s \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + s \, \|\bar{y}\|^2_\infty \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \tag{B.42}$$

para todo $s \geqslant \bar{s}_1 T^8$.

Passo 4 : Neste passo vamos obter uma estimativa para o terceiro termo do lado direito de (B.41), isto é, $\mathcal{T}_3$.

Para isso, vamos estimar a derivada temporal da função peso $e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}$. Observemos que

$$(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4})_t = e^{-s\alpha^*}\left(-s\alpha_t^*(\xi^*)^{1/4} + \frac{1}{4}(\xi^*)^{3/4}\xi_t^*\right). \tag{B.43}$$

Lembrando as definições de ξ^* e α^* dadas em (11), deduzimos as desigualdades

$$\xi_t^* \leqslant 4T(\xi^*)^{5/4} \text{ e } \alpha_t^* \leqslant 4T(\xi^*)^{5/4}. \tag{B.44}$$

De onde obtemos

$$\frac{1}{4}(\xi^*)^{3/4}\xi_t^* \leqslant T(\xi^*)^{1/2} \text{ e } -s\alpha_t^*(\xi^*)^{1/4} \leqslant 4sT(\xi^*)^{3/2}.$$

Substituindo a última desigualdade em (B.43) e tomando $C_5 \geqslant 4$, obtemos uma estimativa para a função $e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}$

$$\begin{aligned}\left(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}\right)_t &\leqslant C_5 e^{-s\alpha^*}\left(sT(\xi^*)^{3/2} + T(\xi^*)^{1/2}\right) \\ &= C_5 e^{-s\alpha^*}T(\xi^*)^{1/2}\left(s\xi^* + 1\right).\end{aligned}$$

Como $s\xi^* \geqslant 1$ para todo $s \geqslant \bar{s}_1 T^8$, então a desigualdade anterior se torna

$$\left(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4}\right)_t \leqslant C_6 e^{-s\alpha^*} sT(\xi^*)^{3/2}.$$

Finalmente, como consequência da última desigualdade o terceiro termo do lado direito de (B.42) é estimado da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_3 = \iint\limits_Q |(e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/4})_t|^2|\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t &\leqslant C_7 s^2T^2 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^3|\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant C_7 s^2 T^2 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Passo 5 : Neste passo, utilizando os passos 2, 3 e 4, estimaremos a integral do traço de π em termos de integrais globais dos termos g, φ e $\nabla\varphi$.

Substituindo a última desigualdade do passo anterior e (B.42) no lado direito de (B.41), obtemos a estimativa para a integral que envolve o traço de π procurada no

Lema B.3, isto é,

$$\int_0^T \|\pi^*(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \, \mathrm{d}t \leqslant C_8 \left(s \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right.$$
$$+ s \, \|\bar{y}\|^2_\infty \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$\left. + s^{5/2}T^2 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right),$$

para todo $s \geqslant \bar{s}_1 T^8$. □

B.3.2 Segundo resultado principal da subseção

Nesta subseção encontraremos uma nova estimativa para $I(s,\lambda;\varphi)$, que é dada no Lema B.4. Para isso, encontraremos uma nova estimativa para o lado esquerdo de (B.9), para depois utilizar o Lema B.1 para estimar $I(s,\lambda;\varphi)$.

Lema B.4. *Suponha que (4) seja satisfeito. Então, existem três constantes positivas s_4, λ_4 e C, dependendo apenas de Ω e ω, tais que para cada $\varphi^0 \in H$ e cada $g \in L^2(Q)^N$, a solução correspondente (φ,π) do problema (7) verifica*

$$I(s,\lambda;\varphi) \leqslant C \left(s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + s^2\lambda^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + s \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right), \tag{B.45}$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_4(1 + \|\bar{y}\|_\infty)$, $s \geqslant s_4(T^7 + T^8)$ e funções auxiliares α, ξ dadas em (11).

Demonstração. Pelo Lema B.3, temos que vale a desigualdade (B.35) e pelo Lema B.2 vale a desigualdade (B.9). Logo, substituindo (B.35) no lado direito de (B.9), tem-se

$$\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leqslant C \left(s \, \|\bar{y}\|^2_\infty \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right.$$
$$+ s \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + s^{5/2}T^2 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$\left. + s^2\lambda^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right),$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_2$ e $s \geqslant \bar{s}_1 T^8$, onde $\bar{s}_1 = \max\{s_2, s_3\}$.

Agora, pelo Lema B.1 vale a desigualdade (B.1). Logo, substituindo a última desigualdade no lado direito de (B.1), obtemos

$$
\begin{aligned}
I(s,\lambda,\varphi) \leqslant C_1 \Bigg(& s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
& + s^2\lambda^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s\iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
& + s^{5/2}T^2 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s\,\|\bar{y}\|_\infty^2 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Bigg),
\end{aligned}
\tag{B.46}
$$

para todo $\lambda \geqslant \bar{\lambda}_3(1+\|\bar{y}\|_\infty)$ e $s \geqslant \bar{s}_3(T^7+T^8)$, onde $\bar{\lambda}_3 = \max\{\lambda_1,\lambda_2\}$ e $\bar{s}_3 = \max\{s_1,\bar{s}_1\}$.

Agora estimaremos os últimos dois termos do lado direito da última desigualdade. Tomando constantes $\bar{s}_4$ e $\bar{\lambda}_4$, tais que valem as desigualdades

$$
C_2 s^{5/2}T^2 \leqslant \frac{1}{2}s^3, \quad \forall s \geqslant \bar{s}_4 T^4,
\tag{B.47}
$$

e

$$
C_3\,\|\bar{y}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\lambda^2. \quad \lambda \geqslant \bar{\lambda}_4\,\|\bar{y}\|_\infty\,.
\tag{B.48}
$$

Multiplicando (B.47) por $\mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2$, (B.48) por $\mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2$ e integrando em Q, obtemos

$$
C_2 s^{5/2}T^2 \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\lambda^4}{2}s^3 \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
\tag{B.49}
$$

e

$$
C_3 s\,\|\bar{y}\|_\infty^2 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{s}{2}\lambda^2 \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\tag{B.50}
$$

para todo $s \geqslant \bar{s}_4(T^7+T^8)$ e $\lambda \geqslant \bar{\lambda}_4(1+\|\bar{y}\|_\infty)$, respectivamente.

Consideremos $\bar{\lambda}_5 = \max\{\bar{\lambda}_3,\bar{\lambda}_4\}$ e $\bar{s}_5 = \max\{\bar{s}_3,\bar{s}_4\}$. Substituindo (B.49) e (B.50) em (B.46), obtemos

$$
\begin{aligned}
I(s,\lambda,\varphi) \leqslant C_4 & \left(s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^2\lambda^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right) \\
& + \frac{s^3\lambda^4}{2} \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{s\lambda^2}{2} \iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
& + s\iint\limits_Q e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{B.51}
$$

para todo $\lambda \geqslant \overline{\lambda}_5(1+\|\bar{y}\|_\infty)$ e $s \geqslant \overline{s}_5(T^7+T^8)$.

Definamos agora

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
\mathcal{B} &:= s^2\lambda^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
\mathcal{C} &:= s \iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
\widehat{\mathcal{A}} &:= s^{-1} \iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|\varphi_t|^2+|\Delta\varphi|^2\right) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
\widehat{\mathcal{B}} &:= s\lambda^2 \iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
\widehat{\mathcal{C}} &:= s^3\lambda^4 \iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{B.52}$$

A desigualdade (B.51) pode ser reescrita como

$$\widehat{\mathcal{A}}+\widehat{\mathcal{B}}+\widehat{\mathcal{C}} \leqslant C_4(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\widehat{\mathcal{C}}/2+\widehat{\mathcal{B}}/2+\mathcal{C}.$$

Portanto,

$$\widehat{\mathcal{A}}+\widehat{\mathcal{B}}/2+\widehat{\mathcal{C}}/2 \leqslant C_5(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}).$$

Então,

$$\widehat{\mathcal{A}}+\widehat{\mathcal{B}}+\widehat{\mathcal{C}} \leqslant C_6(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}).$$

Finalmente, a última desigualdade é a estimativa procurada (B.45) no início da subseção para $I(s,\lambda;\varphi)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
I(s,\lambda;\varphi) \leqslant C_6 \Bigg(& s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^2\lambda^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
& + s\iint\limits_{Q} e^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Bigg),
\end{aligned}$$

para todo $\lambda \geqslant \overline{\lambda}_5(1+\|\bar{y}\|_\infty)$ e $s \geqslant \overline{s}_5(T^7+T^8)$. $\square$

B.4 Estimativa da integral local da pressão π com peso dependente da variável espacial e temporal

Nesta seção temos dois objetivos principais, o primeiro é estimar o segundo termo no lado direito da desigualdade (B.45), isto é,

$$s^2\lambda^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

A estimativa citada é dada no seguinte lema.

Lema B.5. *Suponha que (4) seja satisfeito. Então, existe $C > 0$, dependendo apenas de Ω e ω, tais que para cada $\varphi^0 \in H$ e cada $g \in L^2(Q)^N$, a solução correspondente (φ, π) do problema (7) verifica*

$$s^2\lambda^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leqslant C\left(\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|g|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\Delta\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\varphi_t|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \|\bar{y}\|_\infty^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\nabla\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right), \tag{B.53}$$

para quaisquer constantes positivas s, λ e funções auxiliares α, ξ e $\hat{\theta}$ dadas em (11).

O segundo objetivo da seção é estimar os termos no lado direito de (B.53) relacionados com as funções $\hat{\theta}\Delta\varphi$ e $\hat{\theta}\varphi_t$, isto é,

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\Delta\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \quad \text{e} \quad \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\varphi_t|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

Tais estimativas são dadas em (B.95) e (B.186) no final das subseções $B.4.1$ e $B.4.2$, respectivamente.

Vamos começar com o primeiro objetivo da seção, isto é, a prova do Lema B.5.

Demonstração. (do Lema B.5) Notemos que o integrando do segundo termo no lado direito da desigualdade (B.45) tem a função peso $\mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2$ que depende da variável espacial x e da variável temporal t multiplicando ao quadrado do valor absoluto da pressão π.

Substituiremos a função peso $\mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2$ por outra dependendo apenas da variável temporal t para estimar o segundo termo no lado direito da desigualdade (B.45).

Pelas definições de α, $\hat{\alpha}$, ξ, $\hat{\xi}$ em (11) segue que $\xi(x,t) \leqslant \hat{\xi}(t)$ e $e^{-2s\alpha} \leqslant e^{-2s\hat{\alpha}}$. Logo, utilizando ambas desigualdades temos que

$$s^2\lambda^2\mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2 \leqslant s^2\lambda^2\mathrm{e}^{-2s\hat{\alpha}}\hat{\xi}^2.$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $|\pi|^2$, integrando em $\omega_2 \times (0,T)$ e pela definição de $\hat{\theta}$ dada em (11), temos

$$s^2\lambda^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{B.54}$$

Agora, consideremos $\pi(t)$ tal que

$$\int_{\omega_2} \pi(t)\mathrm{d}x = 0, \text{ para todo } t \in (0,T).$$

Usando esta última hipótese e aplicando a desigualdade de Poincaré (Teorema 1.44) a $\pi(t)$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|\pi(t)\|_{L^2(\omega_2)} \leqslant C_1\|\nabla\pi(t)\|_{L^2(\omega_2)}.$$

Elevando ao quadrado a desigualdade anterior, multiplicando por $|\hat{\theta}|^2$ e integrando em $(0,T)$

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C_1 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\nabla\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{B.55}$$

Agora, utilizando a primeira equação do sistema (5) e isolando o gradiente da pressão, temos

$$\nabla\pi = g + \Delta\varphi + \varphi_t + D\varphi\bar{y}.$$

Logo, utilizando a desigualdade triangular, a desigualdade dada em (B.7) e o fato que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, temos

$$\begin{aligned}
|\nabla\pi|^2 &= |g + \Delta\varphi + \varphi_t + D\varphi\bar{y}|^2 \\
&\leqslant C_2(|g|^2 + |\Delta\varphi|^2 + |\varphi_t|^2 + |D\varphi\bar{y}|^2) \\
&\leqslant C_3(|g|^2 + |\Delta\varphi|^2 + |\varphi_t|^2 + \|\bar{y}\|_\infty^2 |\nabla\varphi|^2).
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo a desigualdade anterior no lado direito de (B.55) e tendo em conta a desigualdade (B.54), obtemos a desigualdade procurada (B.53), ou seja,

$$\begin{aligned}
s^2\lambda^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C_4 \Bigg(&\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\Delta\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\varphi_t|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \|\bar{y}\|_\infty^2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Bigg).
\end{aligned}$$

□

B.4.1 Estimativa de $\|\hat{\theta}\Delta\varphi\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$

Nesta subseção estimaremos o segundo termo do lado direito da desigualdade (B.53). Para isso consideremos ω_3 e ω_4 abertos, tais que

$$\omega_2 \Subset \omega_3 \Subset \omega_4 \Subset \omega, \tag{B.56}$$

uma função $\rho \in \mathcal{D}(\omega_4)$ com $\rho \equiv 1$ in ω_3, $\hat{\theta}$ como em (11) e definamos

$$u(x,t) := \hat{\theta}(t)\rho(x)\Delta\varphi(x,T-t) \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,T). \tag{B.57}$$

Primeiramente observemos que

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |u|^2 \, dx \, dt = \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\rho|^2|\Delta\varphi(x,T-t)|^2 dx \, dt = \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2||\Delta\varphi(x,t)|^2 \, dx \, dt. \tag{B.58}$$

Assim, precisamos estimar o lado esquerdo da igualdade anterior. Para isso, primeiramente vamos mostrar que u satisfaz

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

com F a determinar.

B.4.1.1 A função $u = \hat{\theta}\rho\Delta\varphi$ satisfaz um sistema envolvendo a equação do calor

Nesta subseção mostraremos que a função u definida em (B.57) satisfaz o sistema (B.63). Pela primeira igualdade do sistema (7), temos

$$-\varphi_t(T-t) - \Delta\varphi(T-t) - D\varphi\bar{y}(T-t) - \nabla\pi(T-t) = g(T-t), \quad t \in (0,T).$$

Logo, aplicando o operador de Laplace a ambos lados da igualdade anterior e reordenando, temos

$$\begin{aligned} -\Delta(\varphi_t(T-t)) - \Delta(\Delta(\varphi(T-t)) =& \Delta(D\varphi\bar{y}(T-t)) + \Delta(g(T-t)) \\ & -\Delta(\nabla\pi(T-t)). \end{aligned} \tag{B.59}$$

Podemos notar que o último termo do lado direito da igualdade anterior pode ser escrito como

$$\Delta(\nabla\pi(T-t)) = \nabla(\Delta\pi(T-t)).$$

Lembrando por (B.11) que $\Delta\pi(t) = \nabla \cdot (g + D\varphi\bar{y})(t) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e substituindo no lado direito da igualdade anterior

$$\begin{aligned}\Delta(\nabla\pi(T-t)) &= \nabla\big(\nabla \cdot (g + D\varphi\bar{y})(T-t)\big)\\ &= \nabla\big(\nabla \cdot D\varphi\bar{y}(T-t) + \nabla \cdot g(T-t)\big)\\ &= \nabla(\nabla \cdot D\varphi\bar{y}(T-t)) + \nabla(\nabla \cdot g(T-t)) \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)).\end{aligned}$$

Substituindo a última igualdade no lado direito de (B.59), temos

$$\begin{aligned}-\Delta(\varphi_t(T-t)) - \Delta(\Delta(\varphi(T-t)) &= \Delta(D\varphi\bar{y}(T-t)) + \Delta(g(T-t))\\ &\quad - \nabla(\nabla \cdot D\varphi\bar{y}(T-t)) - \nabla(\nabla \cdot g(T-t)).\end{aligned} \tag{B.60}$$

Notando que $(\Delta\varphi(T-t))_t = -\Delta\varphi_t(T-t)$ e definindo f como

$$\begin{aligned}f := {}& \Delta(D\varphi\bar{y}(T-t)) + \Delta(g(T-t)) - \nabla(\nabla \cdot D\varphi\bar{y}(T-t))\\ & - \nabla(\nabla \cdot g(T-t)) \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)),\end{aligned} \tag{B.61}$$

temos que (B.60) torna se

$$(\Delta\varphi(T-t))_t - \Delta(\Delta\varphi(T-t)) = f \text{ em } Q.$$

Da definição de u dada em (B.57) obtemos

$$\begin{aligned}u_t &= \hat{\theta}'(t)\rho(x)\Delta\varphi(x,T-t) + \hat{\theta}(t)\rho(x)(\Delta\varphi(x,T-t))_t,\\ \Delta u &= \hat{\theta}(t)\Delta\big(\rho(x)\Delta\varphi(x,T-t)\big).\end{aligned} \tag{B.62}$$

Além disso, como

$$\Delta\big(\rho(x)\Delta\varphi(x,T-t)\big) = \Delta\rho(x)\Delta\varphi(x,T-t) + \rho(x)\Delta(\Delta\varphi(x,T-t)) + 2\nabla\rho \cdot \nabla\Delta\varphi(T-t),$$

e tendo em conta (B.62), temos que u satisfaz

$$\begin{aligned}u_t - \Delta u =& \hat{\theta}'(t)\rho(x)\Delta\varphi(T-t) + \hat{\theta}(t)\rho(x)(\Delta\varphi(T-t))_t\\ & - \hat{\theta}(t)\Delta\rho(x)\Delta\varphi(T-t) - \hat{\theta}(t)\rho(x)\Delta(\Delta\varphi(T-t))\\ & - 2\hat{\theta}(t)\nabla\rho(x) \cdot \nabla\Delta\varphi(T-t)\\ =& \hat{\theta}(t)\rho(x)\big[\Delta\varphi(T-t))_t - \Delta(\Delta\varphi(T-t)\big]\\ & + \hat{\theta}'(t)\rho(x)\Delta\varphi(T-t) - \hat{\theta}(t)\Delta\rho(x)\Delta\varphi(T-t)\\ & - 2\hat{\theta}\nabla\rho \cdot \nabla\Delta\varphi(T-t)\\ =& \hat{\theta}(t)\rho(x)f + \hat{\theta}'(t)\rho(x)\Delta\varphi(T-t)\\ & - \hat{\theta}(t)\Delta\rho(x)\Delta\varphi(T-t)\\ & - 2\hat{\theta}(t)\nabla\rho(x) \cdot \nabla\Delta\varphi(T-t).\end{aligned}$$

Portanto, pela última igualdade, da definição de u em (B.57) e sendo $\hat{\theta}(0) = 0$, temos

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{B.63}$$

onde $F = \hat{\theta}\rho f + \hat{\theta}'\rho\Delta\varphi(T-t) - \hat{\theta}\Delta\rho\Delta\varphi(T-t) - 2\hat{\theta}\nabla\rho\cdot\nabla\Delta\varphi(T-t) \in L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)$, com f definida em (B.61).

B.4.1.2 A função u pode ser reescrita como $u = u^1 + u^2$, onde u^1, u^2 satisfaz cada um respectivamente um sistema envolvendo a equação do calor

Nesta subseção mostraremos que a função u definida em (B.57) pode ser reescrita da forma $u = u^1 + u^2$. Além disso, que u^1, u^2 satisfaz cada uma um sistema envolvendo a equação do calor.

Tendo em conta F no lado direito do sistema (B.63), podemos definir as funções

$$\begin{aligned} F_1 :=& \hat{\theta}[\Delta(\rho(D\varphi\overline{y})(T-t)) + \Delta(\rho g(T-t)) - \nabla(\nabla\cdot(\rho(D\varphi\overline{y})(T-t)) \\ & -\nabla(\nabla\cdot(\rho g(T-t)))] + \hat{\theta}'\Delta\left(\rho\varphi(T-t)\right), \end{aligned} \tag{B.64}$$

e

$$\begin{aligned} F_2 :=& -2\hat{\theta}\nabla\rho\cdot\nabla(D\varphi\overline{y})(T-t) - \hat{\theta}\Delta(\rho(D\varphi\overline{y})(T-t)) - 2\hat{\theta}\nabla\rho\cdot\nabla g(T-t) \\ & -\hat{\theta}\Delta\rho g(T-t) + \hat{\theta}\nabla(\nabla\rho\cdot(D\varphi\overline{y})(T-t)) + \hat{\theta}\nabla\rho(\nabla\cdot(D\varphi\overline{y})(T-t)) \\ & +\hat{\theta}\nabla(\nabla\rho\cdot g(T-t)) + \hat{\theta}\nabla\rho(\nabla\cdot g(T-t)) - 2\hat{\theta}'\nabla\rho\cdot\nabla\varphi(T-t) - \hat{\theta}'\Delta\rho\varphi(T-t) \\ & -2\hat{\theta}\nabla\rho\cdot\nabla\Delta\varphi(T-t) - \hat{\theta}\Delta\rho\Delta\varphi(T-t). \end{aligned} \tag{B.65}$$

Consideremos também as igualdades

$$\begin{aligned} \Delta(\rho(D\varphi\overline{y})(T-t)) &= \Delta\rho(D\varphi\overline{y})(T-t) + 2\nabla\rho\cdot\nabla(D\varphi\overline{y})(T-t) + \rho\Delta(D\varphi\overline{y})(T-t), \\ \Delta(\rho g(T-t)) &= \Delta\rho g(T-t) + 2\nabla\rho\cdot\nabla g(T-t) + \rho\Delta g(T-t), \\ \Delta(\rho\varphi(T-t)) &= \Delta\rho\varphi(T-t) + 2\nabla\rho\cdot\nabla\varphi(T-t) + \rho\Delta\varphi(T-t), \\ \nabla(\nabla\cdot(\rho g(T-t))) &= \nabla(\nabla\rho\cdot g(T-t)) + \nabla\rho(\nabla\cdot g(T-t)) + \rho\nabla(\nabla\cdot g), \\ \nabla(\nabla\cdot(\rho(D\varphi\overline{y})(T-t)) &= \nabla(\nabla\rho\cdot(D\varphi\overline{y})(T-t)) + \nabla\rho(\nabla\cdot(D\varphi\overline{y})(T-t)), \\ &\quad + \rho\nabla(\nabla\cdot(D\varphi\overline{y})(T-t)). \end{aligned}$$

Das definições para F_1 e F_2 dadas em (B.64) e (B.65) e igualdades dadas acima, podemos verificar que F_1 e F_2 satisfazem

$$F = F_1 + F_2.$$

Note que F_1 contem todos os termos com derivadas de segunda ordem de g, $D\varphi\overline{y}$ e φ, e que F_2 é uma função com suporte compacto contido em $\omega_4\backslash\overline{\omega_3}$, pois as derivadas de ρ aparecem em todos os termos.

Assim, podemos definir os seguintes sistemas

$$\begin{cases} u^i_t - \Delta u^i = F_i & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u^i(0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

para $i = 1,2$, com $F_1 \in L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)$ e $F_2 \in L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^N)^N)$, onde u^1 e u^2 são duas funções em $L^2(\mathbb{R}^N \times (0,T))^N$ tais que $u = u^1 + u^2$.

Como $u = u^1 + u^2$, se estimamos as integrais

$$\iint\limits_{\omega_2 \times (0,T)} |u^i|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \text{ para } i = 1,2,$$

poderemos estimar

$$\iint\limits_{\omega_2 \times (0,T)} |u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

B.4.1.3 Estimativa de $\|u^1\|_{L^2(\omega_2 \times (0,T))^N}$

Como u^1 satisfaz o problema

$$\begin{cases} u^1_t - \Delta u^1 = F_1 & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u^1(0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{B.66}$$

e queremos encontrar uma estimativa para $u^1 \in L^2(\mathbb{R}^N \times (0,T))^N$, então consideremos u^1 como solução ultrafraca do problema (B.66).

Da definição de solução ultrafraca dada em (A.8) temos que u^1 é a única função em $L^2(\mathbb{R}^N \times (0,T))^N$ tal que para cada $h \in L^2(\mathbb{R}^N \times (0,T))^N$ temos

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} u^1 \cdot h \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} F_1 \cdot z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

onde z é solução de

$$\begin{cases} -z_t - \Delta z = h & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ z(T) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Como para cada $h \in L^2(\mathbb{R}^N \times (0,T))^N$, o sistema anterior possui única solução z dependendo continuamente de h, então vale

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} u^1 \cdot h \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \iint\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} F_1 \cdot z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|F_1\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)} \|z\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^N)^N)} \\ &\leqslant C_1 \|F_1\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)} \|h\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^N)^N)}. \end{aligned}$$

Em particular, pela desigualdade anterior u^1 satisfaz a estimativa

$$\|u^1\|_{L^2(\mathbb{R}^N\times(0,T))^N} \leqslant C_1\|F_1\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)}. \tag{B.67}$$

Como F_1 definida em (B.64) pode ser reescrita como $F_1 = F_{1,1} - F_{1,2}$, onde

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= \Delta\left((\hat{\theta}\rho(D\varphi\overline{y}) + \hat{\theta}\rho g + \hat{\theta}'\rho\varphi)(T-t)\right), \\ F_{1,2} &= \nabla\left(\nabla\cdot(\hat{\theta}\rho(D\varphi\overline{y}) + \hat{\theta}\rho g)(T-t)\right), \end{aligned} \tag{B.68}$$

então, temos que

$$\|F_1\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)} \leqslant \|F_{1,1}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)} + \|F_{1,2}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)},$$

Portanto, pela desigualdade anterior e (B.67), obtem-se

$$\begin{aligned} \|u^1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N\times(0,T))^N} &\leqslant C_1^2\|F_1\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)} \\ &\leqslant C_2\left(\|F_{1,1}\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)} + \|F_{1,2}\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)}\right). \end{aligned} \tag{B.69}$$

Tendo em conta as definições para $F_{1,1}$ e $F_{1,2}$ em (B.68), podemos deduzir as seguintes estimativas

$$\|F_{1,1}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)} \leqslant C_3\|(\hat{\theta}\rho(D\varphi\overline{y}) + \hat{\theta}\rho g + \hat{\theta}'\rho\varphi)(T-t)\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^N)^N)}$$

e

$$\|F_{1,2}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)} \leqslant C_4\|(\hat{\theta}\rho(D\varphi\overline{y}) + \hat{\theta}\rho g)(T-t)\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^N)^N)}.$$

Pelas últimas duas desigualdades, podemos obter estimativas explicitas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \|F_{1,1}\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)} \leqslant C_5 \Bigg(&\iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}\rho g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t) + \iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}\rho D\varphi\overline{y}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &+ \iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}'\rho\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Bigg) \end{aligned}$$

e

$$\|F_{1,2}\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\mathbb{R}^N)^N)} \leqslant C_6 \left(\iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}\rho g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t) + \iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}\rho D\varphi\overline{y}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right).$$

Substituindo as duas últimas desigualdades no lado direito de (B.69) temos a seguinte estimativa para u^1

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |u^1|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_7 \left(\iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}\rho g|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t) + \iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}\rho D\varphi\overline{y}|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}'\rho\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \right). \tag{B.70}$$

Como $\rho \in \mathcal{D}(\omega_4)$, podemos estimar as três integrais do lado direito da última desigualdade

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}\rho g|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \leqslant C_8 \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta} g|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t,$$
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}\rho D\varphi\overline{y}|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \leqslant C_9 \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta} D\varphi\overline{y}|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t,$$
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\theta}'\rho\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \leqslant C_{10} \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}'\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t.$$

Consequentemente, substituindo as ultimas três desigualdades no lado direito de (B.70) e tendo em conta que $\|u^1\|_{\omega_2\times(0,T)} \leqslant \|u^1\|_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\times(0,T)}$, obtemos finalmente a estimativa desejada para u^1

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |u^1|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \leqslant C_{11} \left(\iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta} g|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta} D\varphi\overline{y}|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}'\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \right). \tag{B.71}$$

B.4.1.4 Estimativa de $\|u^2\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$

Como u^2 satisfaz o problema

$$\begin{cases} u^2_t - \Delta u^2 = F_2 & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u^2(0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{B.72}$$

onde $F_2 \in L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^N)^N)$, então $u^2 \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^N)^N)$.

Para encontrar uma estimativa para $\|u^2\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$, seguiremos os seguintes 9 passos :

- Escreveremos u^2 em termos da solução fundamental do calor $G(\cdot,\cdot)$ definida em (B.74).

- Escreveremos u^2 em termos de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ definidos em (B.79).
- Escreveremos $\mathcal{L}_1$ em termos de $\hat{\theta}D^\beta\rho g$, $\hat{\theta}D^\beta\rho\varphi$, $\hat{\theta}D^\beta\rho D\varphi\overline{y}$ e $\hat{\theta}'D^\beta\rho\varphi$.
- Escreveremos $\mathcal{L}_2$ em termos de $\hat{\theta}D^\beta\rho g$, $\hat{\theta}D^\beta\rho\varphi$, $\hat{\theta}D^\beta\rho D\varphi\overline{y}$ e $\hat{\theta}'D^\beta\rho\varphi$.
- Escreveremos u^2 em termos de $\hat{\theta}D^\beta\rho g$, $\hat{\theta}D^\beta\rho\varphi$, $\hat{\theta}D^\beta\rho D\varphi\overline{y}$ e $\hat{\theta}'D^\beta\rho\varphi$.
- Estimaremos $|u^2|$ em termos das derivadas parciais na variável espacial da solução fundamental $G(\cdot,\cdot)$ e da função $z(\cdot,\cdot)$ definidas em (B.74) e (B.83), respectivamente.
- Estimaremos $\|u^2\|^2_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$ em termos da função $z(\cdot,\cdot)$.
- Estimaremos $\|z\|^2_{L^2(\omega_4\times(0,T))^N}$.
- Calcularemos a estimativa final de $\|u^2\|^2_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$.

Passo 1 : Escreveremos u^2 em termos da solução fundamental do calor $G(\cdot,\cdot)$.

Consideremos a j é-sima componente da primeira equação do sistema (B.72). Então, pelo Teorema A.1 temos que

$$u_j^2(x,t) = \iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,t)} G(x-y,t-s)F_{2,j}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s,\ \text{com } j=1,...,N, \tag{B.73}$$

onde $G(x,t)$ representa a solução fundamental da equação do calor, isto é,

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{(N/2)}}\mathrm{e}^{-|x|^2/2t}. \tag{B.74}$$

Agora, usaremos a seguinte notação para denotar a integral de uma função vetorial $w(x,t) = (w_1(x,t),...,w_N(x,t))$ da seguinte maneira

$$\iint\limits_{\Omega} w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \left(\iint\limits_{\Omega} w_1(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t, ..., \iint\limits_{\Omega} w_N(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right).$$

Portanto, podemos escrever a solução $u^2(x,t)$, isto é,

$$u^2(x,t) = \iint\limits_{\mathbb{R}^N\times(0,t)} G(x-y,t-s)F_2(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s.$$

Passo 2 : Neste passo vamos escrever a última igualdade do passo anterior em termos de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ definidas em (B.79).

Notemos que podemos escrever F_2 em (B.65) como

$$F_2 = F_{21} + \nabla F_{22}, \tag{B.75}$$

onde

$$\begin{aligned}F_{21} = &- 2\hat{\theta}\nabla\rho \cdot \nabla(D\varphi\overline{y})(T-t) - \hat{\theta}\Delta(\rho(D\varphi\overline{y})(T-t)) - 2\hat{\theta}\nabla\rho \cdot \nabla g(T-t)\\ &-\hat{\theta}\Delta\rho g(T-t) + \hat{\theta}\nabla\rho(\nabla \cdot (D\varphi\overline{y})(T-t))\\ &+\hat{\theta}\nabla\rho(\nabla \cdot g(T-t)) - 2\hat{\theta}'\nabla\rho \cdot \nabla\varphi(T-t) - \hat{\theta}'\Delta\rho\varphi(T-t)\\ &-2\hat{\theta}\nabla\rho \cdot \nabla\Delta\varphi(T-t) - \hat{\theta}\Delta\rho\Delta\varphi(T-t)\end{aligned} \tag{B.76}$$

e

$$F_{22} = \hat{\theta}(\nabla\rho \cdot (D\varphi\overline{y})(T-t) + \nabla\rho \cdot g(T-t)). \tag{B.77}$$

Para facilitar os cálculos, vamos definir

$$H(y,s) = G(x-y, t-s), \text{ com } x \in \omega_2. \tag{B.78}$$

Consideremos a j-ésima componente da igualdade (B.75), multiplicando por $H(y,s)$ e integrando em $\mathbb{R}^N \times (0,t)$, temos

$$u_j^2(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} H(y,s)F_{21,j}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} H(y,s)\frac{\partial}{\partial y_j}F_{22}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s.$$

Integrando por partes na variável espacial o segundo termo do lado direito da igualdade anterior

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} H(y,s)\frac{\partial}{\partial y_j}F_{22}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s = -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial y_j}H(y,s)F_{22}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s.$$

Assim, podemos escrever cada j ésima componente de u^2 da forma

$$u_j^2(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} H(y,s)F_{21,j}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial y_j}H(y,s)F_{22}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s$$

e consequentemente encontrar a seguinte expressão para u^2 em termos de F_{21} e F_{22}

$$u^2(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} H(y,s)F_{21}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_y H(y,s)F_{22}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s.$$

Como F_{21} e F_{22} são funções com suporte em $\omega_4 \backslash \overline{\omega}_3 \times [0,T]$, então é válida a seguinte expressão para u^2

$$u^2(x,t) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \tag{B.79}$$

onde

$$\mathcal{L}_1 = \int_0^t \int_{\omega_4\backslash\overline{\omega}_3} H(y,s)F_{21}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 = -\int_0^t \int_{\omega_4\backslash\overline{\omega}_3} \nabla_y H(y,s)F_{22}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s,$$

para todo $(x,t) \in \omega_2 \times (0,T)$ e $H(\cdot,\cdot)$ definido em (B.78).

Passo 3 : Neste passo vamos escrever $\mathcal{L}_1$ no lado direito de (B.79) em termos de $\hat{\theta}D^{\beta}\rho g$, $\hat{\theta}D^{\beta}\rho\varphi$, $\hat{\theta}D^{\beta}\rho D\varphi\overline{y}$ e $\hat{\theta}'D^{\beta}\rho\varphi$.

Da definição de F_2 em (B.65) temos que F_{21} e ∇F_{22} dadas em (B.76) e (B.77), podem ser escritas como somatória de derivadas de até segunda ordem de termos $\hat{\theta}D^{\beta}\rho g$, $\hat{\theta}D^{\beta}\rho\varphi$, $\hat{\theta}D^{\beta}\rho D\varphi\overline{y}$, $\hat{\theta}'D^{\beta}\rho\varphi$.

Seja $m > 1$ e $v : U \to \mathbb{R}^m$ onde $v = \big(v^1,\dots,v^m\big)$. Definimos $D^{\alpha}v = \big(D^{\alpha}v^1,\dots,D^{\alpha}v^m\big)$, para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,,\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, onde

$$D^{\alpha}v(x) := \frac{\partial^{|\alpha|}v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Portanto, podemos reescrever F_{21} e ∇F_{22} da seguinte forma

$$F_{21} = \sum_{\alpha\in I,\beta\in J} C^*_{\alpha,\beta}\hat{\theta}D^{\alpha}D^{\beta}\rho g + D^*_{\alpha,\beta}\hat{\theta}D^{\alpha}D^{\beta}\rho\varphi + E^*_{\alpha,\beta}\hat{\theta}D^{\alpha}D^{\beta}\rho D\varphi\overline{y} + U^*_{\alpha,\beta}\hat{\theta}'D^{\alpha}D^{\beta}\rho\varphi$$

e

$$\nabla F_{22} = \sum_{\alpha\in I,\beta\in J} \bar{C}_{\alpha,\beta}\hat{\theta}D^{\alpha}D^{\beta}\rho g + \bar{D}_{\alpha,\beta}\hat{\theta}D^{\alpha}D^{\beta}\rho\varphi + \bar{E}_{\alpha,\beta}\hat{\theta}D^{\alpha}D^{\beta}\rho D\varphi\overline{y} + \bar{U}_{\alpha,\beta}\hat{\theta}'D^{\alpha}D^{\beta}\rho\varphi, \tag{B.80}$$

onde α e β pertencem aos conjuntos I e J de multi-índices satisfazendo $1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2$ e $1 \leqslant |\beta| \leqslant 4$ respetivamente, com $\bar{C}_{\alpha,\beta}$, $\bar{D}_{\alpha,\beta}$, $\bar{E}_{\alpha,\beta}$, $\bar{U}_{\alpha,\beta}$, $C^*_{\alpha,\beta}$, $D^*_{\alpha,\beta}$, $E^*_{\alpha,\beta}$, $U^*_{\alpha,\beta}$ constantes.

Agora, integraremos por partes com respeito a y as duas integrais no lado direito de (B.79), passando as derivadas de F_{21} e ∇F_{22} com respeito ao multi-índice α para $H(y,s)$.

Assim na primeira integral no lado direito de (B.79), isto é, $\mathcal{L}_1$, substituimos a j-ésima componente de F_{21} e mediante as igualdades

$$\begin{aligned}
(D^{\alpha}D^{\beta}\rho g)_j &= D^{\alpha}(D^{\beta}\rho g)_j,\\
(D^{\alpha}D^{\beta}\rho\varphi)_j &= D^{\alpha}(D^{\beta}\rho\varphi)_j,\\
(D^{\alpha}D^{\beta}\rho D\varphi\overline{y})_j &= D^{\alpha}(D^{\beta}\rho D\varphi\overline{y})_j,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1,j} &= \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s) F_{21,j}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\
&= \sum_{\alpha\in I,\beta\in J} \left(C^*_{\alpha,\beta} \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s) D^\alpha (D^\beta \hat{\theta}\rho g)_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \right. \\
&+ D^*_{\alpha,\beta} \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s) D^\alpha (D^\beta \hat{\theta}\rho \varphi)_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\
&+ E^*_{\alpha,\beta} \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s) D^\alpha (D^\beta \hat{\theta}\rho D\varphi\overline{y})_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\
&\left. + U^*_{\alpha,\beta} \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s) D^\alpha (D^\beta \hat{\theta}'\rho \varphi)_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \right).
\end{aligned}$$

Aplicando integração por partes na variável espacial no lado direito da última igualdade para transferir as derivadas respeito ao multi-índice α dos termos $D^\alpha(D^\beta\hat{\theta}\rho g)_j$, $D^\alpha(D^\beta\hat{\theta}\rho\varphi)_j$, $D^\alpha(D^\beta\hat{\theta}\rho D\varphi\overline{y})_j$ e $D^\alpha(D^\beta\hat{\theta}'\rho\varphi)_j$ para $H(y,s)$ definida em (B.78), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1,j} &= \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s) F_{21,j}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\
&= \sum_{\alpha\in I,\beta\in J} \left(C^*_{\alpha,\beta} \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} D^\alpha H(y,s) (D^\beta \hat{\theta}\rho g)_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \right. \\
&+ D^*_{\alpha,\beta} \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} D^\alpha H(y,s) (D^\beta \hat{\theta}\rho \varphi)_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\
&+ E^*_{\alpha,\beta} \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} D^\alpha H(y,s) (D^\beta \hat{\theta}\rho D\varphi\overline{y})_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\
&\left. + U^*_{\alpha,\beta} \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} D^\alpha H(y,s) (D^\beta \hat{\theta}'\rho \varphi)_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \right).
\end{aligned}$$

Passando a somatória dentro das integrais e usando as igualdades abaixo

$$\begin{aligned}
(D^\beta \rho g)_j &= D^\beta \rho g_j, \\
(D^\beta \rho \varphi)_j &= D^\beta \rho \varphi_j, \\
(D^\beta \rho D\varphi\overline{y})_j &= D^\beta \rho (D\varphi\overline{y})_j,
\end{aligned}$$

para agrupar termos baixo o sinal da derivada D^β, temos que a primeira integral do lado direito de (B.79) é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1,j} &= \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s) F_{21,j}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} \sum_{\alpha\in I,\beta\in J} D^\alpha H(y,s) \big[D^\beta (\rho\hat{\theta} C^*_{\alpha,\beta} g_j + \rho\hat{\theta} D^*_{\alpha,\beta}\varphi_j \\
&+ \rho\hat{\theta} E^*_{\alpha,\beta} (D\varphi\overline{y})_j) + \rho\hat{\theta}' U^*_{\alpha,\beta}\varphi_j \big]\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{B.81}$$

Passo 4 : Neste passo vamos escrever $\mathcal{L}_2$ no lado direito de (B.79) em termos de $\hat{\theta}D^\beta\rho g$, $\hat{\theta}D^\beta\rho\varphi$, $\hat{\theta}D^\beta\rho D\varphi\overline{y}$ e $\hat{\theta}'D^\beta\rho\varphi$.

Começaremos aplicando a fórmula de integração por partes no espaço a cada componente j de $\mathcal{L}_2$. Assim, vale

$$\mathcal{L}_{2,j} = -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial}{\partial y_j}H(y,s)F_{22}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}H(y,s)\frac{\partial}{\partial y_j}F_{22}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s.$$

Logo, podemos substituir a j-ésima componente de ∇F_{22} definida em (B.80) no lado direito da igualdade anterior para obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,j} &= \int_0^t\int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s)\frac{\partial}{\partial y_j}F_{22}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\\
&= \sum_{\alpha\in I,\beta\in J}\Bigg(\bar{C}_{\alpha,\beta}\int_0^t\int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s)D^\alpha(D^\beta\hat{\theta}\rho g)_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\\
&+\bar{D}_{\alpha,\beta}\int_0^t\int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s)D^\alpha(D^\beta\hat{\theta}\rho\varphi)_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\\
&+\bar{E}_{\alpha,\beta}\int_0^t\int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s)D^\alpha(D^\beta\hat{\theta}\rho D\varphi\overline{y})_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\\
&+\bar{U}_{\alpha,\beta}\int_0^t\int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3} H(y,s)D^\alpha(D^\beta\hat{\theta}'\rho\varphi)_j\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\Bigg).
\end{aligned}$$

Notemos que na última igualdade podemos proceder de forma análoga ao que foi feito para estimar $\mathcal{L}_1$ no passo anterior, para obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{2,j} &= -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial}{\partial y_j}H(y,s)F_{22}(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\\
&= \int_0^t\int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3}\sum_{\alpha\in I,\beta\in J}D^\alpha H(y,s)\big[D^\beta(\rho\hat{\theta}\widehat{C}_{\alpha,\beta}g_j + \rho\hat{\theta}\widehat{D}_{\alpha,\beta}\varphi_j\\
&+ \rho\hat{\theta}\widehat{E}_{\alpha,\beta}(D\varphi\overline{y})_j) + \rho\hat{\theta}'\widehat{U}_{\alpha,\beta}\varphi_j\big]\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{B.82}$$

para constantes $\widehat{C}_{\alpha,\beta}, \widehat{D}_{\alpha,\beta}, \widehat{E}_{\alpha,\beta}, \widehat{U}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$.

Passo 5 : Neste passo vamos reescrever u^2 em (B.79), onde u^2 depende de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, em termos de $\hat{\theta}D^\beta\rho g$, $\hat{\theta}D^\beta\rho\varphi$, $\hat{\theta}D^\beta\rho D\varphi\overline{y}$ e $\hat{\theta}'D^\beta\rho\varphi$.

Substituindo as igualdades (B.81) e (B.82) no lado direito de (B.79), podemos escrever u^2 da forma

$$\begin{aligned}
u^2(x,t) = &\int_0^t\int_{\omega_4\setminus\overline{\omega}_3}\sum_{\alpha\in I,\beta\in J}D^\alpha H(y,s)\big[D^\beta\rho(y)\big(\hat{\theta}C_{\alpha,\beta}g(y,s) + \hat{\theta}D_{\alpha,\beta}\varphi(y,s) + \hat{\theta}E_{\alpha,\beta}(D\varphi\overline{y})\big)\\
&+ \hat{\theta}'U_{\alpha,\beta}\varphi(y,s)\big]\mathrm{d}y\ \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

para certas constantes $C_{\alpha,\beta}, D_{\alpha,\beta}, E_{\alpha,\beta}, U_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$.

Denotando por

$$z_{\alpha,\beta}(y,s) := U_{\alpha,\beta}\hat{\theta}'(s)\varphi(y,s) + \hat{\theta}(s)\left(C_{\alpha,\beta}g(y,s) + D_{\alpha,\beta}\varphi(y,s) + E_{\alpha,\beta}(D\varphi\overline{y})(y,s)\right),$$

podemos escrever u^2 de maneira mais compacta

$$u^2(x,t) = \int_0^t \int_{\omega_4\backslash\overline{\omega}_3} \sum_{\alpha\in I,\beta\in J} D^\alpha G(x-y,t-s)D^\beta\rho(y)z_{\alpha,\beta}(y,s)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}s.$$

Passo 6 : Neste passo estimaremos $|u^2|$, onde u^2 é dada pela última igualdade do passo anterior. Isso é feito em termos da função $z(\cdot,\cdot)$ e das derivadas parciais na variável espacial da solução fundamental $G(\cdot,\cdot)$ definidas em (B.83) e (B.74), respectivamente.

Para conseguir a de $|u^2|$, estimemos as componentes $|u_j^2|$ tendo em conta que as derivadas $D^\beta\rho$ tem suporte compacto em $\omega_4\backslash\overline{\omega}_3$, e portanto, são limitadas em $\omega_4\backslash\overline{\omega}_3$, assim temos

$$\begin{aligned}
|u_j^2(x,t)| &= \left|\int_0^t \int_{\omega_4\backslash\overline{\omega}_3} \sum_{\alpha\in I,\beta\in J} D^\alpha G(x-y,t-s)D^\beta\rho(y)z^j_{\alpha,\beta}(y,s)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^t \int_{\omega_4\backslash\overline{\omega}_3} \sum_{\alpha\in I,\beta\in J} D^\alpha G(x-y,t-s)z^j(y,s)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \sum_{\alpha\in I,\beta\in J}\left|\int_0^t \int_{\omega_4\backslash\overline{\omega}_3} D^\alpha H(y,s)z^j(y,s)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\right|,
\end{aligned}$$

onde z^j denota a j-ésima componente de

$$z(y,s) = \hat{\theta}(s)\left(\widehat{C}_4 g(y,s) + \widehat{C}_5\varphi(y,s) + \widehat{C}_6(D\varphi\bar{y})(y,s)\right) + \widehat{C}_7\hat{\theta}'(s)\varphi(y,s), \tag{B.83}$$

para constantes $\widehat{C}_4, \widehat{C}_5, \widehat{C}_6, \widehat{C}_7 \in \mathbb{R}$.

Já estimadas as componentes $|u_j^2|$, podemos estimar $|u^2|$ mediante a norma da soma

$$\begin{aligned}
|u^2(x,t)| &= \sum_{i=1}^N\left|\int_0^t \int_{\omega_4\backslash\overline{\omega}_3} \sum_{\alpha\in I,\beta\in J} D^\alpha H(y,s)D^\beta\rho(y)z^j_{\alpha,\beta}(y,s)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^N\int_0^t \int_{\omega_4\backslash\overline{\omega}_3}\left|\sum_{\alpha\in I,\beta\in J} D^\alpha H(y,s)z^j(y,s)\right|\mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\
&\leqslant \sum_{\alpha\in I}\int_0^t \int_{\omega_4\backslash\overline{\omega}_3} |D^\alpha H(y,s)|\sum_{j=1}^N|z^j(y,s)|\mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_{\omega_4\backslash\overline{\omega}_3}\sum_{\alpha\in I}|D^\alpha H(y,s)||z(y,s)|\mathrm{d}y\ \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\left|u^2(x,t)\right| \leqslant \iint_{(\omega_4\backslash\bar{\omega}_3)\times(0,t)} \sum_{\alpha\in I}\left|D_y^\alpha G(x-y,t-s)\right||z(y,s)|\mathrm{d}y\ \mathrm{d}s, \tag{B.84}$$

para todo $(x,t) \in \omega_2 \times (0,T)$.

Passo 7 : Neste passo, utilizando a última desigualdade do passo anterior, estimaremos o quadrado da norma de u^2 no espaço $L^2(\omega_2 \times (0,T))^N$ em termos da função $z(\cdot,\cdot)$ definida em (B.83).

Observe que para qualquer $y \in \omega_4 \backslash \overline{\omega_3}$ e qualquer $x \in \omega_2$, temos que $|x-y| \geqslant \operatorname{dist}(\partial\omega_2, \partial\omega_3) = d > 0$. Tomando $0 < \delta < d$, então existe uma constante positiva $C_0(\delta,\omega)$ tal que

$$|D^\alpha G(x-y,t-s)| \leqslant C_0 \exp\left(\frac{-\delta^2}{2(t-s)}\right),$$

para todo $(x,t) \in \omega_2 \times (0,T)$, $(y,s) \in (\omega_4 \backslash \overline{\omega_3}) \times (0,t)$ e $\alpha \in I$.

Assim, substituindo a desigualdade anterior no lado direito de (B.84), temos

$$\left|u^2(x,t)\right| \leqslant C_1 \iint\limits_{(\omega_4 \backslash \bar{\omega}_3)\times(0,t)} \exp\left(\frac{-\delta^2}{2(t-s)}\right) |z(y,s)| \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s,$$

com $C_1 = C_1(\omega) > 0$.

Elevando ao quadrado ambos lados da última desigualdade e integrando em $\omega_2 \times (0,T)$, obtemos

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |u^2|^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_2 \int_0^T \left(\int_0^t \mathfrak{X}(s)\ \mathrm{d}s\right)^2\ \mathrm{d}t, \tag{B.85}$$

onde $\mathfrak{X}(s)$ denota a função

$$\mathfrak{X}(s) := \exp\left(\frac{-\delta^2}{2(t-s)}\right) \int_{\omega_4 \backslash \bar{\omega}_3} |z(y,s)| \mathrm{d}y.$$

Aplicando a desigualdade de Jensen (Teorema 1.46) ao integrando do lado direito da desigualdade (B.85), temos

$$\left(\int_0^t \mathfrak{X}(s)\ \mathrm{d}s\right)^2 \leqslant \mu\{(0,t)\} \int_0^t \mathfrak{X}(s)^2\ \mathrm{d}s = t\int_0^t \mathfrak{X}(s)^2\ \mathrm{d}s. \tag{B.86}$$

Lembrando a definição de $\mathfrak{X}(s)$, temos que o lado direito da última desigualdade pode ser reescrito como

$$\int_0^t \mathfrak{X}(s)^2\ \mathrm{d}s = \int_0^t \exp\left(\frac{-\delta^2}{(t-s)}\right) \left(\int_{\omega_4 \backslash \bar{\omega}_3} |z(y,s)| \mathrm{d}y\right)^2\ \mathrm{d}s. \tag{B.87}$$

Novamente aplicando a desigualdade de Jensen (Teorema 1.46) no lado direito da última igualdade, vale

$$\begin{aligned}\left(\int_{\omega_4 \backslash \bar{\omega}_3} |z(y,s)| \mathrm{d}y\right)^2 &\leqslant \mu\{\omega_4 \backslash \bar{\omega}_3\} \int_{\omega_4 \backslash \bar{\omega}_3} |z(y,s)|^2 \mathrm{d}y \\ &\leqslant \mu\{\omega_4 \backslash \bar{\omega}_3\} \|z(s)\|^2_{L^2(\omega_4)} \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade anterior no lado direito de (B.87), obtemos

$$\int_0^t \mathfrak{X}(s)^2 \, \mathrm{d}s \leqslant \mu\{\omega_4 \backslash \bar{\omega}_3\} \int_0^t \exp\left(\frac{-\delta^2}{t-s}\right) \|z(s)\|^2_{L^2(\omega_4)} \mathrm{d}s.$$

Substituindo a última desigualdade no lado direito de (B.86) e o resultado em (B.85), esta última torna se

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\omega_2 \times (0,T)} |u^2|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t &\leqslant C_2 \int_0^T \left(\int_0^t \mathfrak{X}(s) \, \mathrm{d}s\right)^2 \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant C_2 \int_0^T \left(t \int_0^t \mathfrak{X}(s)^2 \, \mathrm{d}s\right) \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant C_2 \int_0^T \left(T \int_0^t \mathfrak{X}(s)^2 \, \mathrm{d}s\right) \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant C_2 T \mu\{\omega_4 \backslash \bar{\omega}_3\} \int_0^T \int_0^t \exp\left(\frac{-\delta^2}{t-s}\right) \|z(s)\|^2_{L^2(\omega_4)} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\
&= C_3 T \int_0^T \int_0^t \exp\left(\frac{-\delta^2}{t-s}\right) \|z(s)\|^2_{L^2(\omega_4)} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\iint\limits_{\omega_2 \times (0,T)} |u^2|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leqslant C_3 T \int_0^T \int_0^t \exp\left(\frac{-\delta^2}{t-s}\right) \|z(s)\|^2_{L^2(\omega_4)} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t. \tag{B.88}$$

Escrevamos agora a integral do lado direito da desigualdade anterior em termos de convolução, isto é,

$$\int_0^T \left(\int_0^t \exp\left(\frac{-\delta^2}{t-s}\right) \|z(s)\|^2_{L^2(\omega_4)} \, \mathrm{d}s\right) = \int_0^T (f_1 * f_2)(t) \, \mathrm{d}t, \tag{B.89}$$

onde

$$f_1 = e^{-\delta^2/t} 1_{(0;\infty)}(t) \in L^1(\mathbb{R}), \quad f_2 = \|z(t)\|^2_{L^2(\omega_4)} 1_{[0;T]}(t) \in L^1(\mathbb{R})$$

e $f_1 * f_2$ denota

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_{\mathbb{R}} f_1(t-s) f_2(s) \, \mathrm{d}s.$$

Agora, como $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, pelo Teorema 1.45 sabemos que $(f_1 * f_2)$ existe e vale

$$\|f_1 * f_2\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Substituindo (B.89) em (B.88) e substituindo no resultado a última desigualdade, podemos reescrever (B.88) tal que

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\omega_2 \times (0,T)} |u^2|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t &\leqslant C_3 T \int_0^T (f_1 * f_2)(t) \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant C_3 T \int_{\mathbb{R}} (f_1 * f_2)(t) \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant C_3 T \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Tendo em conta que $\|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|z\|^2_{L^2(\omega_4\times(0,T))^N}$ e tomando $C_4 = C_3\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})}$, a última desigualdade torna se

$$\|u^2\|^2_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N} \leqslant C_4 T\|z\|^2_{L^2(\omega_4\times(0,T))^N}. \tag{B.90}$$

Passo 8 : Neste passo estimaremos o termo $\|z\|^2_{L^2(\omega_4\times(0,T))^N}$ do lado direito da desigualdade (B.90).

Da definição de $z(\cdot,\cdot)$ em (B.83), podemos reescrever o lado direito de (B.90) da seguinte forma

$$\iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |z|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{N} \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |z_i|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{B.91}$$

e podemos estimar cada componente z_i por

$$\begin{aligned}
|z_i(x,t)|^2 &= |\widehat{C}_7\hat{\theta}'(t)\varphi_i(x,t) + \widehat{C}_4\hat{\theta}(t)g_i(x,t) + \widehat{C}_5\hat{\theta}(t)\varphi_i(x,t) + \widehat{C}_6\hat{\theta}(t)(D\varphi\overline{y})_i(x,t)|^2 \\
&\leqslant C_1^*\left(\widehat{C}_7^2|\hat{\theta}'(t)|^2|\varphi_i(x,t)|^2 + \widehat{C}_4^2|\hat{\theta}(t)|^2|g_i(x,t)|^2 + \widehat{C}_5^2|\hat{\theta}(t)|^2|\varphi_i(x,t)|^2\right. \\
&\left.+\ \widehat{C}_6^2|\hat{\theta}(t)|^2|(D\varphi\overline{y})_i(x,t)|^2\right) \\
&\leqslant C_2^*\left(|\hat{\theta}'(t)|^2|\varphi_i(x,t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2\left(|g_i(x,t)|^2 + |\varphi_i(x,t)|^2 + |(D\varphi\overline{y})_i(x,t)|^2\right)\right).
\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade anterior no lado direito de (B.91), obtemos

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |z|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\leqslant \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} C_3^*\left(|\hat{\theta}'(t)|^2\sum_{i=1}^{N}|\varphi_i(x,t)|^2 + |\hat{\theta}(t)|^2\left(\sum_{i=1}^{N}|g_i(x,t)|^2 + \sum_{i=1}^{N}|\varphi_i(x,t)|^2\right.\right. \\
&\left.\left.+\ \sum_{i=1}^{N}|(D\varphi\overline{y})^i(x,t)|^2\right)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant C_4^*\left(\iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}'\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2(|g|^2 + |D\varphi\overline{y}|^2 + |\varphi|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

Passo 9 : Neste passo vamos obter a estimativa desejada para $\|u^2\|^2_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$ no início da subseção.

Substituindo a última desigualdade do passo anterior no lado direito de (B.90), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u^2\|^2_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N} \leqslant C_5 T&\left(\iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2(|g|^2 + |D\varphi\overline{y}|^2 + |\varphi|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right. \\
&\left.+\ \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}'\varphi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right).
\end{aligned} \tag{B.92}$$

B.4.1.5 Cálculo da estimativa de $\|\hat{\theta}\Delta\varphi\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$

Primeiramente definamos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &:= \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad \mathcal{I}_2 := \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}D\varphi\overline{y}|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\ \mathcal{I}_3 &:= \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad \mathcal{I}_4 := \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}'\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{B.93}$$

Pela igualdade (B.58) do início da subseção e o fato que $u = u^1 + u^2$, temos

$$\begin{aligned} \|\hat{\theta}\Delta\varphi\|^2_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N} &= \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant C_0\left(\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |u^1|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |u^2|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned} \tag{B.94}$$

Pelas desigualdades (B.71) e (B.92), podemos reescrever as estimativas para u^1 e u^2 como

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |u^1|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_{11}(\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4)$$

e

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |u^2|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C_5 T(\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4).$$

Finalmente, substituindo as duas últimas desigualdades em (B.94), podemos estimar $\|\hat{\theta}\Delta\varphi\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$

$$\|\hat{\theta}\Delta\varphi\|^2_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N} \leqslant C(1+T)\big(\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4\big), \tag{B.95}$$

onde $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ e $\mathcal{I}_4$ são definidas em (B.93).

B.4.2 Estimativa de $\|\hat{\theta}\varphi_t\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$

Nesta seção vamos a estimar o terceiro termo do lado direito de (B.53) que envolve a derivada temporal da velocidade φ, isto é,

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\varphi_t|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Para isso, primeiro estimaremos seu equivalente, que é dado por

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^{-2}|\hat{\theta}|^2\,|\theta\varphi_t|^2 \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{B.96}$$

em termos de $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ e $\mathcal{J}_3$ definidas mais adiante em (B.105).

B.4.2.1 Estimativa de $\|\hat{\theta}\varphi_t\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$ em termos de $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ e $\mathcal{J}_3$

Lembrando que (φ,π) é solução do sistema (5) onde $\varphi^0 \in H$, $g \in L^2(Q)^N$ e seja $\theta \in C^1([0,T])$. Então, pelo Teorema 1.68 temos que $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\pi}) := (\theta\varphi,\theta\pi)$ é a única solução do sistema (1.9), isto é,

$$\begin{cases} -\widetilde{\varphi}_t - \Delta\widetilde{\varphi} - D\widetilde{\varphi}\bar{y} + \nabla\widetilde{\pi} = \theta g - \theta'\varphi & \text{em } Q, \\ \nabla\cdot\widetilde{\varphi} = 0 & \text{em } Q, \\ \widetilde{\varphi} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \widetilde{\varphi}(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{B.97}$$

Tendo em conta que o sistema anterior é linear, vamos decompô-lo nos sistemas

$$\begin{cases} -\psi_{1,t} - \Delta\psi_1 - D\psi_1\bar{y} + \nabla q_1 = \theta g & \text{em} Q, \\ \nabla\cdot\psi_1 = 0 & \text{em } Q, \\ \psi_1 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi_1(T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{B.98}$$

e

$$\begin{cases} -\psi_{2,t} - \Delta\psi_2 - D\psi_2\bar{y} + \nabla q_2 = -\theta'\varphi & \text{em } Q, \\ \nabla\cdot\psi_2 = 0 & \text{em } Q, \\ \psi_2 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi_2(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{B.99}$$

Se consideramos suas respectivas soluções (ψ_1,q_1) e (ψ_2,q_2), então $(\psi_1+\psi_2, q_1+q_2)$ é solução do sistema (B.97). Pela unicidade da solução do sistema (B.97) dada pelo Teorema 1.68, tem-se

$$\widetilde{\varphi} := \theta\varphi = \psi_1 + \psi_2 \ \text{ e } \ \widetilde{\pi} := \theta\pi = q_1 + q_2. \tag{B.100}$$

Para estimar o integrando de (B.96), vamos a reescrever os termos $\theta^{-2}|\hat{\theta}|^2$ e $\theta\varphi_t$. Para isso, definamos

$$\theta^* := s^{-11/2}\lambda^{-4}e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}\hat{\xi}^{-11/2}. \tag{B.101}$$

Logo, pelas definições de θ e $\hat{\theta}$ em (11), podemos reescrever $\theta^{-2}|\hat{\theta}|^2$ como

$$\theta^{-2}|\hat{\theta}|^2 = \lambda^6\theta^*. \tag{B.102}$$

Também podemos reescrever $\theta\varphi_t$ em termos das derivadas temporais de ψ_1, ψ_2 e um termo extra. Derivando respeito da variável temporal a primeira equação de (B.100), temos

$$\psi_{1,t} + \psi_{2,t} = (\theta\varphi)_t = \theta'\varphi + \theta\varphi_t \Longrightarrow \theta\varphi_t = \psi_{1,t} + \psi_{2,t} - \theta'\varphi. \tag{B.103}$$

Substituindo (B.102) e (B.103) em (B.96), temos

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2 \left|\varphi_t\right|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t &= \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^{-2}|\hat{\theta}|^2 \left|\theta\varphi_t\right|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ &= \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \left|\psi_{1,t} + \psi_{2,t} - \theta'\varphi\right|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant C\lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \left(|\psi_{1,t}|^2 + |\psi_{2,t}|^2 + |\theta'\varphi|^2\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2 \left|\varphi_t\right|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leqslant C\left(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3\right), \tag{B.104}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1 &= \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \left|\psi_{1,t}\right|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \\ \mathcal{J}_2 &= \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \left|\psi_{2,t}\right|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \\ \mathcal{J}_3 &= \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* |\theta'\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{B.105}$$

Pelo lado direito da desigualdade (B.104), para estimar $\|\hat{\theta}\varphi_t\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$ só estimaremos os termos que envolvem a $\psi_{1,t}$ e $\psi_{2,t}$. Não é necessário estimar o termo que envolve a $\theta'\varphi$, pois será absorvido mais tarde.

Devido as propriedades de ψ_1 e ψ_2 os métodos para estimar $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$ serão distintos. Essas estimativas serão desenvolvidas nas seguintes subseções.

B.4.2.2 Estimativa de $\mathcal{J}_1$

Para estimar $\mathcal{J}_1$ definida em (B.105) seguiremos os seguintes 2 passos :

- Mostraremos que a função $\lambda^6\theta^* = s^{-11/2}\lambda^2 \mathrm{e}^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}\hat{\xi}^{-11/2}$ é uniformemente limitada.
- Utilizando estimativas de energia para o sistema adjunto (B.98) dadas pelo Teorema 1.63, estimaremos $\mathcal{J}_1$.

Passo 1 : Pelas definições de α^* e $\hat{\alpha}$ em (11) e considerando $\widehat{\lambda}_1 > 0$ tal que

$$\widehat{C}_1 := 2^9(\mathrm{e}^{\widehat{\lambda}_1\|\eta^0\|_\infty} - 1) > 0,$$

temos que

$$-2s\alpha^* + 2s\hat{\alpha} = -2s\frac{\mathrm{e}^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}(\mathrm{e}^{\lambda\|\eta^0\|_\infty} - 1)}{t^4(T-t)^4} \leqslant -\frac{s}{2^8}\frac{\mathrm{e}^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}\widehat{C}_1}{t^4(T-t)^4}, \tag{B.106}$$

para todo $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}_1$.

Substituindo a desigualdade (B.31), isto é,

$$-\frac{1}{t^4(T-t)^4} \leqslant -\frac{2^8}{T^8}$$

no lado direito de (B.106), podemos reescrever esta última tal que

$$-2s\alpha^* + 2s\hat{\alpha} \leqslant -\widehat{C}_1 s T^{-8} \mathrm{e}^{\lambda m \|\eta^0\|_\infty},$$

para todo $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}_1$.

Considerando $\widehat{s}_1 > 0$ tal que $\widehat{s}_1 T^8 \geqslant 1$, a desigualdade anterior torna se

$$-2s\alpha^* + 2s\hat{\alpha} \leqslant -\widehat{C}_1 s T^{-8} \mathrm{e}^{\lambda m \|\eta^0\|_\infty} \leqslant -\widehat{C}_2 \mathrm{e}^{\lambda m \|\eta^0\|\|_\infty},$$

para todo $s \geqslant \widehat{s}_1 T^8$ e $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}_1$.

Em consequência, temos

$$\mathrm{e}^{-2s\alpha^* + 2s\hat{\alpha}} \leqslant \mathrm{e}^{-\widehat{C}_2 \mathrm{e}^{\lambda m \|\eta^0\|_\infty}}, \tag{B.107}$$

para todo $s \geqslant \widehat{s}_1 T^8$ e $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}_1$.

Além disso, pela definição de $\hat{\xi}$ em (11) e a desigualdade (B.31), vale

$$\hat{\xi}(t) \geqslant \widehat{C}_3 > 0, \quad \forall \lambda \geqslant \widehat{\lambda}_1, \tag{B.108}$$

onde $\widehat{C}_3 := 2^8 \mathrm{e}^{\lambda_1^*(m+1)\|\eta^0\|_\infty} / T^8$.

Finalmente, utilizando as desigualdades (B.107), (B.108) e o fato que

$$s^{-11/2} \leqslant (\widehat{s}_1 T^8)^{-11/2}, \quad \forall s \geqslant \widehat{s}_1 T^8,$$

podemos estimar $\lambda^6 \theta^*$, obtendo

$$\lambda^6 \theta^* = s^{-11/2} \lambda^2 \hat{\xi}^{-11/2} \mathrm{e}^{-2s\alpha^* + 2s\hat{\alpha}} \leqslant \widehat{C}_4 \lambda^2 \mathrm{e}^{-C_1^* \mathrm{e}^{\lambda m \|\eta^0\|_\infty}},$$

para todo $s \geqslant \widehat{s}_1 T^8$ e $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}_1$.

Como a família de funções $f(\lambda) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-C_1^* \mathrm{e}^{\lambda m \|\eta^0\|_\infty}}$ é uniformemente limitada, existe $M > 0$ tal que $f(\lambda) \leqslant M$, para todo $\lambda \in \big(\widehat{\lambda}_1, \infty\big)$. Assim, existe $\widehat{C}_5 > 0$ tal que

$$\lambda^6 \theta^* = s^{-11/2} \lambda^2 \hat{\xi}^{-11/2} \mathrm{e}^{-2s\alpha^* + 2s\hat{\alpha}} \leqslant \widehat{C}_5, \tag{B.109}$$

para todo $s \geqslant \widehat{s}_1 T^8$ e $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}_1$.

Passo 2 : Agora, pelas estimativas de energia para o sistema (B.98) dadas pelo Teorema 1.63, temos que $\psi_{1,t} \in L^2(Q)^N$ e vale

$$\|\psi_{1,t}\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\psi_1\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^N)} \leqslant C \left(1 + \|\bar{y}\|^2_\infty \mathrm{e}^{C_5^* T \|\bar{y}\|^2_\infty}\right) \|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}. \tag{B.110}$$

Multiplicando a desigualdade (B.109) por $|\psi_{1,t}|^2$ e integrando em $\omega_2 \times (0,T)$, obtemos

$$\lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \, |\psi_{1,t}|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \leqslant C_1 \iint\limits_{Q} |\psi_{1,t}|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t.$$

Substituindo a última desigualdade no lado esquerdo de (B.110), tendo em conta que $\mathrm{e}^{C_5^* T \|\bar{y}\|_\infty^2} \geqslant 1$ e lembrando a definição de $\mathcal{J}_1$ em (B.105), obtem-se

$$\mathcal{J}_1 \leqslant C_2 \left(1 + \|\bar{y}\|_\infty^2\right) \mathrm{e}^{C_5^* T \|\bar{y}\|_\infty^2} \|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}. \tag{B.111}$$

B.4.2.3 Estimativa de $\mathcal{J}_2$ em termos de $\mathcal{J}_{2,1}$, $\mathcal{J}_{2,2}$ e $\mathcal{J}_{2,3}$.

Nesta subseção estimaremos $\mathcal{J}_2$ definida em (B.105) em termos de $\mathcal{J}_{2,1}$, $\mathcal{J}_{2,2}$ e $\mathcal{J}_{2,3}$ definidas como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{2,1} &:= \frac{\lambda^6}{2} \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} (\theta^*)'' \, |\psi_2|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t, \\ \mathcal{J}_{2,2} &:= \frac{1}{2} \, \|\theta^* \psi_{2,tt}\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} \, , \\ \mathcal{J}_{2,3} &:= \frac{1}{2} \lambda^{12} \|\psi_2\|^2_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)}. \end{aligned} \tag{B.112}$$

Para isso, seguiremos os seguintes passos :

- Vamos reescrever $\mathcal{J}_2$ mediante a fórmula de integração por partes.
- Estimaremos o termo $\|\theta^* \psi_{2,tt} \cdot \psi_2\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$ que aparece no passo anterior.
- Utilizando o passo anterior estimaremos $\mathcal{J}_2$ em termos de $\mathcal{J}_{2,1}$, $\mathcal{J}_{2,2}$ e $\mathcal{J}_{2,3}$.

Passo 1 : Na definição de $\mathcal{J}_2$ em (B.105), vamos reescrever o termo $\psi_{2,t}$ em termos de suas componentes para logo utilizar a fórmula de integração por partes, isto é,

$$\mathcal{J}_2 = \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \sum_{j=1}^{N} \left|\psi_{2,t}^j\right|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t = \lambda^6 \sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \left|\psi_{2,t}^j\right|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t. \tag{B.113}$$

Da igualdade anterior, pelo fato que $\psi_2 = 0$ em Σ, pois ψ_2 é solução do sistema (B.99), e integrando por partes na variável temporal o termo $\theta^* \left|\psi_{2,t}^j\right|^2$ para j fixo, obtem-se

$$
\begin{aligned}
\lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \left|\psi^j_{2,t}\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \psi^j_{2,t}\psi^j_{2,t} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= -\lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} (\theta^* \psi^j_{2,t})_t \psi^j_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= -\lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} (\theta^*_t \psi^j_{2,t} + \theta^*\psi^j_{2,tt})\psi^j_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= -\lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*_t \psi^j_{2,t}\psi^j_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \psi^j_{2,tt}\psi^j_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\lambda^6}{2} \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*_t ((\psi^j_2)^2)_t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \psi^j_{2,tt}\psi^j_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda^6}{2} \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*_{tt} (\psi^j_2)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \psi^j_{2,tt}\psi^j_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \left|\psi^j_{2,t}\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda^6}{2} \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*_{tt} (\psi^j_2)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \psi^j_{2,tt}\psi^j_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
$$

Como a igualdade anterior é válida para $j \in \{1, ..., N\}$, então podemos calcular o termo do lado direito de (B.113), fazendo a somatória de $j = 1$ até N, obtendo

$$
\begin{aligned}
\lambda^6 \sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \left|\psi^j_{2,t}\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \sum_{j=1}^{N} \left|\psi^j_{2,t}\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda^6}{2} \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*_{tt} \sum_{j=1}^{N} (\psi^j_2)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \sum_{j=1}^{N} \psi^j_{2,tt}\psi^j_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{B.114}
$$

Substituindo a última igualdade no lado direito de (B.113), obtemos

$$
\mathcal{J}_2 = \frac{\lambda^6}{2} \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*_{tt} \left|\psi_2\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^* \psi_{2,tt} \cdot \psi_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{B.115}
$$

Passo 2 : Consideremos $r > 0$ tal que

$$
6/5 < r < \min\{2, \sigma\} \text{ para } N = 3 \;\text{ e }\; 1 < r < \min\{2, \sigma\} \text{ para } N = 2, \tag{B.116}
$$

e σ como em (4). Além disso, seja $r' > 0$ tal que

$$
\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1. \tag{B.117}
$$

Vamos estimar o segundo termo do lado direito de (B.115) em termos de $\|\theta^*\psi_{2,tt}\|_{L^2(0,T;L^r(\omega_2)^N)}$ e $\|\psi_2\|_{L^2\left(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N\right)}$. Para isso, apresentamos três resultados preliminares dados por (B.118), (B.119) e (B.120), onde para suas respectivas demostrações aplicaremos a desigualdade de Hölder contínua e discreta.

Para facilitar os cálculos, consideraremos $X := L^r(\omega_2)^N$, $Y := L^{r'}(\omega_2)^N$, $A := L^2(0,T;L^r(\omega_2))$ e $B := L^2\left(0,T;L^{r'}(\omega_2)\right)$.

O primeiro resultado preliminar é

$$\begin{aligned}
\|\theta^*\psi_{2,tt}\|_{L^2(0,T;X)}\|\psi_2\|_{L^2(0,T;Y)} &= \left(\int_0^T \|\theta^*\psi_{2,tt}\|_X^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^T \|\psi_2\|_Y^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\
&= \left(\int_0^T \sum_{j=1}^N \left\|\theta^*\psi_{2,tt}^j\right\|_{L^r(\omega_2)}^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^T \sum_{j=1}^N \left\|\psi_2^j\right\|_{L^{r'}(\omega_2)}^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}\\
&= \left(\left(\sum_{j=1}^N \left\|\theta^*\psi_{2,tt}^j\right\|_A^2\right)\left(\sum_{j=1}^N \left\|\psi_2^j\right\|_B^2\right)\right)^{1/2}. \qquad \text{(B.118)}
\end{aligned}$$

O segundo é obtido utilizando a desigualdade de Hölder discreta (Teorema 1.42).

$$\sum_{j=1}^N \left\|\theta^*\psi_{2,tt}^j\right\|_A\left\|\psi_2^j\right\|_B \leqslant \left(\sum_{j=1}^N \left\|\theta^*\psi_{2,tt}^j\right\|_A^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^N \left\|\psi_2^j\right\|_B^2\right)^{1/2}. \qquad \text{(B.119)}$$

O último é o seguinte

$$\iint_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*|\psi_{2,tt}\cdot\psi_2| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^N \left\|\theta^*\psi_{2,tt}^j\right\|_A\left\|\psi_2^j\right\|_B, \qquad \text{(B.120)}$$

cuja prova desenvolveremos abaixo.

Consideremos a integral $\displaystyle\int_{\omega_2} |\theta^*\psi_{2,tt}^j||\psi_2^j| \,\mathrm{d}x$ e apliquemos a desigualdade de Hölder do Teorema 1.43, obtendo

$$\int_{\omega_2} |\theta^*\psi_{2,tt}^j||\psi_2^j| \,\mathrm{d}x \leqslant \left\|\theta^*\psi_{2,tt}^j\right\|_{L^r(\omega_2)}\left\|\psi_2^j\right\|_{L^{r'}(\omega_2)}.$$

Logo, integrando a desigualdade anterior em $(0,T)$ e aplicando novamente a desigualdade de Hölder do Teorema 1.43, temos

$$\begin{aligned}
\iint_{\omega_2\times(0,T)} |\theta^*\psi_{2,tt}^j||\psi_2^j| \,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^T \left\|\theta^*\psi_{2,tt}^j\right\|_{L^r(\omega_2)}\left\|\psi_2^j\right\|_{L^{r'}(\omega_2)} \mathrm{d}t\\
&\leqslant \left\|\theta^*\psi_{2,tt}^j\right\|_A\left\|\psi_2^j\right\|_B.
\end{aligned}$$

Somando desde $j = 1$ até N ambos lados da desigualdade anterior obtemos (B.120), finalizando a prova do terceiro resultado preliminar.

Substituindo (B.120) e (B.118) em (B.119), obtemos

$$\left| \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*\psi_{2,tt}\cdot\psi_2 \text{ d}x \text{ d}t \right| \leqslant \|\theta^*\psi_{2,tt}\|_{L^2(0,T;X)} \|\psi_2\|_{L^2(0,T;Y)} \,.$$

Portanto,

$$-\lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*\psi_{2,tt}\cdot\psi_2 \text{ d}x \text{ d}t \leqslant \lambda^6 \|\theta^*\psi_{2,tt}\|_{L^2\left(0,T;L^r(\omega_2)^N\right)} \|\psi_2\|_{L^2\left(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N\right)} \,.$$

Aplicando agora a desigualdade de Cauchy dada no Teorema 1.38 ao lado direito da desigualdade anterior, temos

$$\begin{aligned}\lambda^6 \|\theta^*\psi_{2,tt}\|_{L^2\left(0,T;L^r(\omega_2)^N\right)} \|\psi_2\|_{L^2\left(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N\right)} \leqslant{}& \frac{1}{2}\|\theta^*\psi_{2,tt}\|^2_{L^2\left(0,T;L^r(\omega_2)^N\right)} \\ &+ \frac{1}{2}\lambda^{12}\|\psi_2\|^2_{L^2\left(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N\right)} \,.\end{aligned}$$

Finalmente, pelas duas últimas desigualdades conseguimos estimar o segundo termo do lado direito de (B.115)

$$\begin{aligned}-\lambda^6 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} \theta^*\psi_{2,tt}\cdot\psi_2 \text{ d}x \text{ d}t \leqslant{}& \frac{1}{2}\|\theta^*\psi_{2,tt}\|^2_{L^2\left(0,T;L^r(\omega_2)^N\right)} \\ &+ \frac{1}{2}\lambda^{12}\|\psi_2\|^2_{L^2\left(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N\right)} \,,\end{aligned} \tag{B.121}$$

com r e r' definidos como em (B.116) e (B.117) respectivamente.

Passo 3 : Neste passo calcularemos a estimativa procurada para $\mathcal{J}_2$ em termos de $\mathcal{J}_{2,1}$, $\mathcal{J}_{2,2}$ e $\mathcal{J}_{2,3}$.

Substituindo (B.121) no lado direito de (B.115), temos

$$\mathcal{J}_2 \leqslant \mathcal{J}_{2,1} + \mathcal{J}_{2,2} + \mathcal{J}_{2,3}, \tag{B.122}$$

onde $\mathcal{J}_{2,1}$, $\mathcal{J}_{2,2}$ e $\mathcal{J}_{2,3}$ são definidas em (B.112).

B.4.2.4 Estimativa de $\mathcal{J}_{2,1}$

Para estimar o primeiro termo do lado direito de (B.122), precisamos estimar a função $(\theta^*)''$. Para isso derivemos duas vezes respeito da variável temporal a função θ^* definida em (B.101) e aplicando sucessivamente as desigualdades

$$\alpha^{*\prime}(t) \leqslant 4T\hat{\xi}^{5/4}(t), \quad \hat{\xi}'(t) \leqslant 4T\hat{\xi}^{5/4}(t) \;\text{ e }\; \hat{\alpha}'(t) \leqslant 4T\hat{\alpha}(t),$$

obtemos

$$\lambda^6(\theta^*)'' = \left(s^{-11/2}\lambda^2\mathrm{e}^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}\hat{\xi}^{-11/2}\right)_{tt} \leqslant Cs^{-7/2}\lambda^8T^2\mathrm{e}^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}\hat{\xi}^{-3}, \tag{B.123}$$

Pelas cálculos feitos em (B.107) e (B.108) podemos mostrar de maneira similar para o que foi feito para J_1 definido em (B.105) na subseção B.4.2.1, que o lado direito de (B.123) é limitado uniformemente, ou seja, existem constantes positivas C_1, $\widehat{s}_2$ e $\widehat{\lambda}_2$ tais que

$$Cs^{-7/2}\lambda^8 T^2 e^{-2s\alpha^* + 2s\hat{\alpha}}\hat{\xi}^{-3} \leqslant C_1, \tag{B.124}$$

para todo $s \geqslant \widehat{s}_2 \left(T^4 + T^8\right)$ e $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}_2$.

Pelas desigualdades (B.123) e (B.124), podemos estimar a função $\lambda^6(\theta^*)''$ na definição de $\mathcal{J}_{2,1}$, obtendo

$$\mathcal{J}_{2,1} \leqslant C_2 \iint\limits_{\omega_2 \times (0,T)} |\psi_2|^2 \, dx \, dt. \tag{B.125}$$

B.4.2.5 Estimativa de $\mathcal{J}_{2,2}$

Nesta subseção, estimaremos o segundo termo do lado direito de (B.122), isto é,

$$\mathcal{J}_{2,2} := \frac{1}{2} \|\theta^* \psi_{2,tt}\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} .$$

Para isso, no resto da subseção denotaremos por (ψ, q) o par

$$(\psi, q) := (\theta^* \psi_{2,t}, \theta^* q_{2,t}) , \tag{B.126}$$

onde θ^* é definido em (B.101) e (ψ_2, q_2) é solução do sistema (B.99). Logo, seguiremos os seguintes passos :

- Mostraremos que o par (ψ, q) é solução do sistema adjunto (B.127).
- Utilizando a regularidade do par (ψ, q), encontraremos estimativas para $\|\psi\|_{L^2(0,T;V)}$ e $\|D\psi\|_{L^2(Q)}$.
- Mediante o par (ψ, q) construímos outro par $(u, \widetilde{q})$ solução do sistema de Navier Stokes linear (B.135).
- Utilizando a regularidade do par $(u, \widetilde{q})$ estimaremos $\|\psi_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}$.
- Finalmente, calcularemos a estimativa para $\mathcal{J}_{2,2}$.

Passo 1 : Neste passo mostraremos que o par (ψ, q) definido em (B.126) é solução do sistema

$$\begin{cases} -\psi_t - \Delta\psi - D\psi\bar{y} + \nabla q = G & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot \psi = 0 & \text{em } Q, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{B.127}$$

onde

$$G = -\theta^*\theta''\varphi - \theta^*\theta'\varphi_t + \theta^* D\psi_2\bar{y}_t - (\theta^*)'\,\psi_{2,t}. \tag{B.128}$$

Como (ψ_2, q_2) é solução do sistema (B.99), derivando a primeira equação de (B.99) em relação da variável temporal e multiplicando ambos membros da igualdade resultante por θ^*, obtemos

$$-\theta^*\psi_{2,tt} - \Delta(\theta^*\psi_{2,t}) - D(\theta^*\psi_{2,t})\bar{y} + \nabla(\theta^* q_{2,t}) = -\theta^*\theta''\varphi - \theta^*\theta'\varphi_t + \theta^* D\psi_2\bar{y}_t \ \text{ em } Q.$$

Logo, tendo em conta que $(\theta^*\psi_{2,t})' = (\theta^*)'\psi_{2,t} + \theta^*\psi_{2,tt}$ na última igualdade, temos

$$-(\theta^*\psi_{2,t})' - \Delta(\theta^*\psi_{2,t}) - D(\theta^*\psi_{2,t})\bar{y} + \nabla(\theta^* q_{2,t}) = G \ \text{ em } Q.$$

Como

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\psi = \nabla\cdot(\theta^*\psi_{2,t}) = \theta^*(\nabla\cdot\psi_2)' = 0 \text{ em } \ Q,\\ &\theta^*(T) = 0 \Longrightarrow \psi(T) = \theta^*(T)\psi_{2,t}(T) = 0, \text{ em } \ \Omega, \end{aligned} \tag{B.129}$$

então o par $(\psi, q) := (\theta^*\psi_{2,t}, \theta^* q_{2,t})$ satisfaz o sistema (B.127).

Passo 2 : Neste passo encontraremos estimativas para $\|\psi\|_{L^2(0,T;V)}$ e $\|D\psi\|_{L^2(Q)}$.

Considerando ψ como solução fraca do sistema adjunto (B.127), então pelo Teorema 1.68, temos que $\psi \in L^2(0,T;V)$ e vale a estimativa

$$\|\psi\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant \widehat{C}_1 \mathrm{e}^{\widehat{C}_2 T\|\bar{y}\|_\infty^2}\|G\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)}.$$

De modo análogo,

$$\|D\psi\|_{L^2(Q)} \leqslant \widehat{C}_1 \mathrm{e}^{\widehat{C}_2 T\|\bar{y}\|_\infty^2}\|G\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)}, \tag{B.130}$$

onde $D\psi$ é definido como em (8).

Observação B.6. *Nos seguintes passos vamos assumir que para r como em (B.116)*

$$\theta^* D\psi_2\bar{y}_t \in L^2\left(0,T; L^r(\Omega)^N\right),$$

fato que será provado mais adiante na subseção $B.4.2.8$.

Passo 3 : Neste passo utilizando o par (ψ, q), definido em (B.126), vamos construir outro par $(u, \tilde{q})$ solução do sistema de Navier Stokes linear (B.135).

Como o par (ψ, q) satisfaz o sistema (B.127), em particular vale

$$-\psi_t - \Delta\psi - D\psi\bar{y} + \nabla q = G \quad \text{em } Q, \tag{B.131}$$

onde G é dado por (B.128). Aqui vamos a decompor dois termos mediante a decomposição de Helmholtz: O primeiro é $D\psi\bar{y}$ e o segundo $\theta^* D\psi_2 \bar{y}_t$, encontrado na definição de G.

Pelo Teorema 1.32 (decomposição de Helmholtz's), temos que existem funções g_1, g_2, g_3 e g_4 tais que $g_1, \nabla g_2 \in L^2(Q)^N$, com $\nabla \cdot g_1 = 0$, e $g_3, \nabla g_4 \in L^2\left(0, T; L^r(\Omega)^N\right)$, com $\nabla \cdot g_3 = 0$, satisfazendo

$$D\psi\bar{y} = g_1 + \nabla g_2 \quad \text{e} \quad \theta^* D\psi_2 \bar{y}_t = g_3 + \nabla g_4. \tag{B.132}$$

Aqui as funções $g_1, \nabla g_2$ e $g_3, \nabla g_4$ dependem continuamente de $D\psi\bar{y}$ e $\theta^* D\psi_2 \bar{y}_t$, respectivamente, nos espaços $L^2(Q)^N$ e $L^2\left(0, T; L^r(\Omega)^N\right)$. Isto é, existem constantes positivas C_1, C_2, C_3 e C_4 tais que

$$\begin{aligned}
\|g_1\|_{L^2(Q)^N} &\leqslant C_1 \|D\psi\bar{y}\|_{L^2(Q)^N}, \\
\|\nabla g_2\|_{L^2(Q)^N} &\leqslant C_2 \|D\psi\bar{y}\|_{L^2(Q)^N}, \\
\|g_3\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} &\leqslant C_3 \|\theta^* D\psi_2 \bar{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}, \\
\|\nabla g_4\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} &\leqslant C_4 \|\theta^* D\psi_2 \bar{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}.
\end{aligned} \tag{B.133}$$

Assim, substituindo em (B.131) as decomposições dadas em (B.132), podemos reescrever (B.131) da forma

$$-\psi_t - \Delta\psi + \nabla\widetilde{q} = J,$$

onde

$$\widetilde{q} = q - g_2 - g_4 \quad \text{e} \quad J = -\theta^*\theta''\varphi - \theta^*\theta'\varphi_t + g_3 - (\theta^*)'\,\psi_{2,t} + g_1. \tag{B.134}$$

Considerando $u(\cdot, t) = \psi(\cdot, T - t)$ e como ψ é solução do sistema (B.127), pelas três igualdades acima temos que o par $(u, \widetilde{q})$ satisfaz o sistema de Navier Stokes linear

$$\begin{cases}
u_t - \Delta u + \nabla\widetilde{q} = J & \text{em } Q, \\
\nabla \cdot u = 0 & \text{em } Q, \\
u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\
u(x, 0) = 0 & \text{em } \ \Omega.
\end{cases} \tag{B.135}$$

Como

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \varphi = 0, \\
&\nabla \cdot \varphi_t = (\nabla \cdot \varphi)_t = 0, \\
&\nabla \cdot \psi_{2,t} = (\nabla \cdot \psi_2)_t = 0,
\end{aligned}$$

temos que

$$\nabla \cdot J = 0.$$

Passo 4 : Neste passo, utilizando a regularidade do par $(u, \widetilde{q})$ do passo anterior, estimaremos ψ_t no espaço $L^2\left(0,T;L^r(\Omega)^N\right)$.

Aplicando o Teorema A.6, que estabelece estimativas de energia e regularidade de $u(\cdot,t) = \psi(\cdot, T-t)$, ao sistema (B.135), temos que $\psi_t \in L^2\left(0,T;L^r(\Omega)^N\right)$ e vale

$$\|\psi_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} \leqslant C_5\|J\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}. \tag{B.136}$$

Considerando a dependência contínua de g_3 com respeito a $\theta^* D\psi_2\bar{y}_t$ dada por (B.133) e r como em (B.116), isto é,

$$6/5 < r < \min\{2,\sigma\} \text{ para } N=3 \;\text{ e }\; 1 < r < \min\{2,\sigma\} \text{ para } N=2,$$

na definição de J em (B.134), obtemos a seguinte estimativa para J

$$\begin{aligned}\|J\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} &= \|\theta^*\theta''\varphi\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} + \|g_3\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}\\ &+ \|(\theta^*)'\,\psi_{2,t}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} + \|g_1\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}\\ &\leqslant C_6\left(\|\theta^*\theta''\varphi\|_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|_{L^2(Q)^N} + \|\theta^* D\psi_2\bar{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}\right.\\ &\left.+\|(\theta^*)'\,\psi_{2,t}\|_{L^2(Q)^N} + \|g_1\|_{L^2(Q)^N}\right).\end{aligned} \tag{B.137}$$

Tendo em conta a definição de G em (B.128), a dependência contínua de g_1 com respeito a $D\psi\bar{y}$ dada em (B.133), a desigualdade (B.130) e como $L^r(\Omega)$ é continuamente imerso em $H^{-1}(\Omega)$, obtém-se

$$\begin{aligned}\|g_1\|_{L^2(Q)^N} &\leqslant C_1\|D\psi\bar{y}\|_{L^2(Q)^N}\\ &\leqslant C_1\|\bar{y}\|_\infty\|D\psi\|_{L^2(Q)^N}\\ &\leqslant C_1^*\|\bar{y}\|_\infty \mathrm{e}^{\widehat{C}_2 T\|\bar{y}\|_\infty^2}\|G\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)}\\ &\leqslant C_2^*\|\bar{y}\|_\infty \mathrm{e}^{\widehat{C}_2 T\|\bar{y}\|_\infty^2}\left(\|\theta^*\theta''\varphi\|_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|_{L^2(Q)^N}\right.\\ &\left.+\|\theta^* D\psi_2\bar{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} + \|(\theta^*)'\,\psi_{2,t}\|_{L^2(Q)^N}\right).\end{aligned} \tag{B.138}$$

Note que substituindo (B.138) em (B.137) e o resultado no lado direito de (B.136), conseguimos estimar $\|\psi_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}$ de forma explicita. Mas no seguinte passo, não precisamos tal estimativa. Só precisamos das estimativas (B.138) e (B.137).

Passo 5 : Neste passo estimaremos $\mathcal{J}_{2,2}$.

Lembrando que $\psi = \theta^*\psi_{2,t}$ temos que $\psi_t = (\theta^*)'\psi_{2,t} + \theta^*\psi_{2,tt}$, portanto

$$\|\theta^*\psi_{2,tt}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} \leqslant \|\psi_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} + \|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}.$$

Substituindo (B.136) no lado direito da última desigualdade, obtemos

$$\|\theta^*\psi_{2,tt}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} \leqslant C_7\|J\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} + \|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}. \tag{B.139}$$

Finalmente, substituindo (B.138) em (B.137) e o resultado em (B.139), obtemos uma estimativa para $\|\theta^*\psi_{2,tt}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}$. Logo, substituindo na definição de $\mathcal{J}_{2,2}$ em (B.112), temos a estimativa procurada ao início da subseção

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{2,2} \leqslant C_8 \left(1 + \|\bar{y}\|_\infty^2\right) \mathrm{e}^{\widehat{C}_3 T\|\bar{y}\|_\infty^2} \Big(&\|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N} \\ &+ \left\|(\theta^*)'\,\psi_{2,t}\right\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^* D\psi_2\bar{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}\Big) . \end{aligned} \tag{B.140}$$

B.4.2.6 Estimativa de $\mathcal{J}_{2,3}$

Nesta subseção vamos a estimar o terceiro termo do lado direito da desigualdade (B.122), ou seja,

$$\mathcal{J}_{2,3} := \frac{1}{2}\lambda^{12}\|\psi_2\|^2_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)},$$

onde r' é dado como em (B.117).

Para isso, consideraremos $X := L^2(0,T;L^2\left(\omega_3\right)^N)$ e seguiremos os seguintes passos :

- Encontraremos uma primeira estimativa para $\|\psi_2\|_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)}$ em termos das normas de ψ_2 e $\Delta\psi_2$ no espaço X.
- Estimaremos a norma de termo $\Delta\psi_2$ no espaço X.
- Utilizando o passo anterior encontraremos uma segunda e última estimativa para $\|\psi_2\|_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)}$ e portanto estimaremos $\mathcal{J}_{2,3}$.

Passo 1 : Neste passo, calcularemos uma primeira estimativa de $\|\psi_2\|_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)}$.

Vamos introduzir uma função de corte $\zeta \in C_c^2\left(\omega_3\right)$ tal que $\operatorname{supp}\zeta \subset \omega_3$ e $\zeta = 1$ em ω_2, onde os abertos ω_2 e ω_3 satisfaz (B.56), isto é,

$$\omega_2 \Subset \omega_3 \Subset \omega.$$

Dado que o espaço $H^2\left(\omega_3\right)^N \cap H_0^1\left(\omega_3\right)^N$ está continuamente imerso em $L^{r'}\left(\omega_3\right)^N$, para todo $r' < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \|\psi_2\|^2_{L^2\left(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N\right)} &\leqslant \|\zeta\psi_2\|^2_{L^2\left(0,T;L^{r'}(\omega_3)^N\right)} \\ &\leqslant C_1\,\|\zeta\psi_2\|^2_{L^2\left(0,T;H^2(\omega_3)^N\cap H_0^1(\omega_3)^N\right)} \\ &= C_1\,\|\Delta(\zeta\psi_2)\|_X \\ &= C_1\,\|\psi_2\Delta\zeta + 2\nabla\zeta\cdot\nabla\psi_2 + \zeta\Delta\psi_2\|_X^2 \\ &\leqslant C_2\left(\|\psi_2\Delta\zeta\|_X^2 + 4\,\|\nabla\zeta\cdot\nabla\psi_2\|_X^2 + \|\zeta\Delta\psi_2\|_X^2\right) \\ &\leqslant C_3\left(\|\psi_2\|_X^2 + \|\Delta\psi_2\|_X^2 + \|\zeta\Delta\psi_2\|_X^2\right). \end{aligned} \tag{B.141}$$

Passo 2 : Neste passo estimaremos $\|\Delta\psi_2\|_X$.

Seguindo as ideias do início da subseção $B.4.1$, onde estimamos o termo $\|\hat{\theta}\Delta\varphi\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$, vamos obter uma estimativa do termo $\|\Delta\psi_2\|_X$. Para isso, vamos começar definindo a função $u(x,t)$ como em (B.57).

Considerando

$$\varphi=\psi_2,\quad \widehat{\theta}=1,\quad \omega_2=\omega_3 \ \text{ e } \ \omega_4=\omega_5, \tag{B.142}$$

onde ω_5 é um novo aberto satisfazendo $\omega_3\Subset\omega_5\Subset\omega$, definimos

$$u(x,t):=\rho(x)\Delta\psi_2(x,T-t) \text{ em } \mathbb{R}^N\times(0,T),$$

onde $\rho\in\mathcal{D}(\omega_5)$ com $\rho\equiv 1$ in ω_4.

Definida $u(x,t)$ acima, verificaremos que satisfaz que $u(x,0)=0$. Note que como ψ_2 é solução do sistema ($B.99$), temos $\psi_2(T)=0$, portanto

$$u(x,0)=\rho(x)\Delta\psi_2(x,T)=0.$$

Finalmente, procedendo como no início da subseção $B.4.1$, da definição de $u(x,t)$ em (B.57), φ satisfaz a primeira equação do sistema (7), isto é,

$$-\varphi_t-\Delta\varphi-D\varphi\overline{y}+\nabla\pi=g.$$

No nosso caso ψ_2 é solução do sistema ($B.99$) e portanto satisfaz a primeira equação de ($B.99$), isto é,

$$-\psi_{2,t}-\Delta\psi_2-D\psi_2\overline{y}+\nabla q_2=-\theta'\varphi, \quad \text{em} \quad Q.$$

Comparando a última igualdade com a primeira equação do sistema (7), deduzimos que temos que considerar $g=-\theta'\varphi$, como no contexto da subseção $B.4.1$.

O resultado principal da subseção $B.4.1$ é dado pela desigualdade (B.95). No nosso caso, (B.95) é válida, mas com as alterações dadas em (B.142) e considerando $g=-\theta'\varphi$, obtemos

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\omega_3\times(0,T)}|\Delta\psi_2|^2\mathrm{d}x\ \mathrm{d}t &\leqslant C_4(1+T)\left(\iint\limits_{\omega_5\times(0,T)}|\theta'\varphi|^2+|D\psi_2\overline{y}|^2+|\psi_2|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right),\\ &\leqslant C_5(1+T)\left(\iint\limits_{\omega_5\times(0,T)}|\theta'\varphi|^2+|\nabla\psi_2|^2\|\overline{y}\|_\infty^2+|\psi_2|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Passo 3 : Neste passo, calcularemos uma segunda estimativa de $\|\psi_2\|_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)}$.

Substituindo a última desigualdade no lado direito de (B.141), temos

$$\|\psi_2\|^2_{L^2\left(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N\right)} \leqslant C_6\left(1+\|\bar{y}\|^2_\infty\right)(1+T) \iint\limits_{\omega_5\times(0,T)} \left(|\psi_2|^2+|\nabla\psi_2|^2+|\theta'\varphi|^2\right) \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t. \tag{B.143}$$

Na desigualdade (B.143), vamos a escrever os termos relacionados com ψ_2 em termos de ψ_1. Pela equação (B.100), temos as seguintes relações para as soluções (ψ_1, q_1) e (ψ_2, q_2) dos sistemas (B.98) e (B.99) respectivamente

$$\psi_2 = \theta\varphi - \psi_1 \ \text{ e } \ \nabla\psi_2 = \theta\nabla\varphi - \nabla\psi_1.$$

Logo, valem as desigualdades

$$\begin{aligned} |\psi_2|^2 &= |\theta\varphi-\psi_1|^2 \leqslant \big(|\theta\varphi|+|\psi_1|\big)^2 \leqslant 2\big(|\theta\varphi|^2+|\psi_1|^2\big),\\ |\nabla\psi_2|^2 &= |\theta\nabla\varphi-\nabla\psi_1|^2 \leqslant \big(|\theta\nabla\varphi|+|\nabla\psi_1|\big)^2 \leqslant 2\big(|\theta\nabla\varphi|^2+|\nabla\psi_1|^2\big). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|\psi_2|^2+|\nabla\psi_2|^2 \leqslant 2\big(\,|\psi_1|^2+|\nabla\psi_1|^2+|\theta|^2\left(|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2\right)\big).$$

Substituindo a desigualdade anterior no lado direito de (B.143), temos

$$\begin{aligned} \|\psi_2\|^2_{L^2(0,T;L^{r'}(\omega_2)^N)} \leqslant C_7(1+\|\bar{y}\|^2_\infty)(1+T) &\Bigg(\iint\limits_{\omega_5\times(0,T)} |\psi_1|^2+|\nabla\psi_1|^2 \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ &+ \iint\limits_{\omega_5\times(0,T)} (|\theta|^2+|\theta'|^2)|\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \iint\limits_{\omega_5\times(0,T)} |\theta|^2|\nabla\varphi|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\Bigg). \end{aligned} \tag{B.144}$$

Vendo ψ_1 como solução fraca do sistema (B.98), e usando a estimativa para o sistema (B.98) dada pela desigualdade (B.110), vale

$$\iint\limits_{\omega_5\times(0,T)} |\psi_1|^2+|\nabla\psi_1|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \leqslant \|\psi_1\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^N)} \leqslant \mathrm{e}^{C^*_{10}T\|\bar{y}\|^2_\infty}\|\theta g\|^2_{L^2(Q)}.$$

Finalmente, substituindo a última desigualdade no lado direito de (B.144), obtemos a estimativa procurada para $\mathcal{J}_{2,3}$ no início da subseção, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{2,3} \leqslant C_8(1+\|\bar{y}\|^2_\infty)\mathrm{e}^{C^*_{17}T\|\bar{y}\|^2_\infty}\lambda^{12}(1+T)&\left(\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}\right.\\ &\left.+\|\theta'\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}+\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}\right). \end{aligned} \tag{B.145}$$

B.4.2.7 Cálculo da primeira estimativa de $\|\hat{\theta}\varphi_t\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$

Nesta subseção vamos a estimar o lado direito da estimativa do termo $\hat{\theta}\varphi_t$ dada em (B.104), isto é,

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2\,|\varphi_t|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \leqslant C(\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2+\mathcal{J}_3).$$

Das subseções anteriores, temos estimativas para $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ e $\mathcal{J}_3$. A desigualdade (B.111) é uma estimativa para $\mathcal{J}_1$, isto é,

$$\mathcal{J}_1 \leqslant C_1\left(1+\|\bar{y}\|_\infty^2\right)\mathrm{e}^{C_5^* T\|\bar{y}\|_\infty^2}\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}.$$

Para obter uma estimativa para $\mathcal{J}_2$, vamos substituir as estimativas para $\mathcal{J}_{2,1}$, $\mathcal{J}_{2,2}$ e $\mathcal{J}_{2,3}$ dadas pelas desigualdades (B.125), (B.140) e (B.145) respectivamente, no lado direito de (B.122), obtendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2 &\leqslant \mathcal{J}_{2,1}+\mathcal{J}_{2,2}+\mathcal{J}_{2,3}\\
&\leqslant C_2\left(1+\|\bar{y}\|_\infty^2\right)\mathrm{e}^{C_{17}^* T\|\bar{y}\|_\infty^2}\Big[\lambda^{12}(1+T)\Big(\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}\\
&\quad+\|\theta'\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}+\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}\Big)+\|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&\quad+\|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}+\left\|(\theta^*)'\,\psi_{2,t}\right\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^* D\psi_2\bar{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}\Big].
\end{aligned} \tag{B.146}$$

Para obter uma estimativa para $\mathcal{J}_3$, note que pela desigualdade (B.109) a função $\lambda^6\theta^*$ definida em (B.101) é limitada uniformemente. Tendo em conta este último fato na definição de $\mathcal{J}_3$ em (B.105), temos

$$\mathcal{J}_3 \leqslant C_3\|\theta'\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)} \leqslant C_3\left(1+\|\bar{y}\|_\infty^2\right)\mathrm{e}^{C_{19}^* T\|\bar{y}\|_\infty^2}\|\theta'\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}.$$

Substituindo as estimativas para $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ e $\mathcal{J}_3$ em (B.104) e absorvendo termos similares, obtemos

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2\,|\varphi_t|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \leqslant C_4\left(1+\|\bar{y}\|_\infty^2\right)\mathrm{e}^{C_{19}^* T\|\bar{y}\|_\infty^2}\big[\lambda^{12}(1+T)\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi)+\mathcal{S}_0(\theta,\theta^*,\varphi,\psi_2)\\
+\|\theta^* D\psi_2\bar{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}\Big],
\end{aligned} \tag{B.147}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0(\theta,\theta^*,\varphi,\psi_2) &:= \|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}+\left\|(\theta^*)'\,\psi_{2,t}\right\|^2_{L^2(Q)^N}.\\
\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi) &:= \|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}+\|\theta'\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}\\
&\quad+\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}.
\end{aligned} \tag{B.148}$$

B.4.2.8 Estimativa de $\|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}$

Nesta subseção vamos a encontrar uma estimativa para o termo que envolve $\theta^* D\psi_2\overline{y}_t$ no lado direito da desigualdade (B.147), isto é,

$$\|\theta^* D\psi_2\bar{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}.$$

O primeiro objetivo é deduzir uma estimativa para $\theta^*\psi_2$ em $L^2(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)$ para $l<\infty$ qualquer. A partir disso, conseguiremos uma estimativa para $\theta^* D\psi_2\overline{y}_t$ em $L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)$, para r dado como em (B.116). Assim, seguiremos os seguintes passos :

- Mostraremos que $\theta^*\psi_2$ é solução do sistema adjunto (B.154) com lado direito no espaço $L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)$.
- Mostraremos que $\theta^*\psi_2$ é solução do sistema adjunto (B.158) mas com lado direito no espaço $L^{k_3}(0,T;L^{l}(\Omega)^N)$.
- Calcularemos a estimativa de $\|\theta^*\psi_2\|_{L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)}$.
- Finalmente, utilizando o passo anterior calcularemos a estimativa da norma do termo $\theta^* D\psi_2\overline{y}_t$ no espaço $L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)$.

Primeiramente, notemos que para θ^* definido em (B.101), temos $\theta^*(T)=0$. Dado que (ψ_2,q_2) é solução do sistema (B.99), pelo Teorema 1.68 temos que $(\theta^*\psi_2,\theta^* q_2)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} -(\theta^*\psi_2)_t-\Delta(\theta^*\psi_2)-D(\theta^*\psi_2)\bar{y}+\nabla(\theta^* q_2)=-(\theta^*)'\psi_2-\theta^*\theta'\varphi & \text{em } Q,\\ \nabla\cdot(\theta^*\psi_2)=0 & \text{em } Q,\\ \theta^*\psi_2=0 & \text{sobre } \Sigma,\\ (\theta^*\psi_2)(T)=0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{B.149}$$

Considerando $\theta^*\psi_2$ como solução forte de (B.149) e pela primeira imersão da Proposição A.3, temos que

$$\theta^*\psi_2\in L^2(0,T;H^2(\Omega)^N)\cap L^\infty(0,T;V)\subset L^{k_1}(0,T;L^{k_2}(\Omega)^N), \tag{B.150}$$

onde $\dfrac{2}{k_1}+\dfrac{6}{k_2}=1.$

Além disso, lembrando que $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$ e pela segunda imersão da Proposição A.3, temos

$$D(\theta^*\psi_2)\bar{y}\in L^2(0,T;L^6(\Omega)^N)\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^N)\subset L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N), \tag{B.151}$$

onde $\dfrac{4/3}{k_3}+\dfrac{2}{k_4}=1.$

Passo 1 : Neste passo mostraremos que $\theta^*\psi_2$ é solução do sistema adjunto (B.154) com lado direito no espaço $L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)$.

Por (B.151), podemos aplicar o Teorema 1.32 (decomposição de Helmholtz's) a $D(\theta^*\psi_2)\overline{y}$ no espaço $L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)$. Logo, existem funções g_5 e g_6 com g_5, $\nabla g_6 \in L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)$ e $\nabla\cdot g_5 = 0$ tais que

$$D(\theta^*\psi_2)\overline{y} = g_5 + \nabla g_6. \tag{B.152}$$

Além disso, g_5 e ∇g_6 dependem continuamente de $D(\theta^*\psi_2)\overline{y}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \|g_5\|_{L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)} &\leqslant C_1\|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|_{L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)}, \\ \|\nabla g_6\|_{L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)} &\leqslant C_2\|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|_{L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)}. \end{aligned} \tag{B.153}$$

Substituindo a decomposição de $D(\theta^*\psi_2)\overline{y}$ dada por (B.152) na primeira equação do sistema (B.149), obtemos

$$\begin{cases} -(\theta^*\psi_2)_t - \Delta(\theta^*\psi_2) + \nabla(\theta^* q_2 - g_6) = -(\theta^*)'\psi_2 - \theta^*\theta'\varphi + g_5 & \text{em } Q, \\ \nabla\cdot(\theta^*\psi_2) = 0 & \text{em } Q, \\ \theta^*\psi_2 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ (\theta^*\psi_2)(T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{B.154}$$

onde o lado direito da primeira equação do sistema anterior satisfaz

$$\big(-(\theta^*)'\psi_2 - \theta^*\theta'\varphi + g_5\big) \in L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)$$

e

$$\nabla\cdot\big(-(\theta^*)\psi_2 - \theta^*\theta'\varphi + g_5\big) = -\nabla\cdot(\theta^*\psi_2) - \theta^*\theta'\nabla\cdot\varphi + \nabla\cdot g_5 = 0.$$

Aplicando o Teorema A.6 ao sistema de Stokes (B.154) para obter estimativas de energia e regularidade de $\theta^*\psi_2$, temos que $\theta^*\psi_2 \in L^{k_3}(0,T;W^{2,k_4}(\Omega)^N)$ e vale estimativa

$$\|\theta^*\psi_2\|_{L^{k_3}(0,T;W^{2,k_4}(\Omega)^N)} \leqslant C_3\|-(\theta^*)'\psi_2 - \theta^*\theta'\varphi + g_5\|_{L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)}. \tag{B.155}$$

Além disso, a desigualdade anterior implica que $\theta^* D\psi_2 \in L^{k_3}(0,T;W^{1,k_4}(\Omega)^N)$.

Passo 2 : Neste passo mostraremos que $\theta^*\psi_2$ é solução do sistema adjunto (B.158) com lado direito no espaço $L^{k_3}(0,T;L^{l}(\Omega)^N)$.

Por (B.150) temos que $\theta^*\psi_2 \in L^{k_1}(0,T;L^{k_2}(\Omega)^N)$. Logo, vamos fazer outra decomposição de Helmholt'z de $D(\theta^*\psi_2)\overline{y}$, mas agora no espaço $L^{k_1}(0,T;L^{k_2}(\Omega)^N)$. Lembrando que também fizemos a decomposição de $D(\theta^*\psi_2)\overline{y}$ no espaço $L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega)^N)$, vamos fixar k_1, k_2, k_3 e k_4.

Pelas imersões dadas em (B.150) e (B.151), temos

$$\frac{2}{k_1} + \frac{6}{k_2} = 1, \quad \frac{4/3}{k_3} + \frac{2}{k_4} = 1,$$

onde vamos considerar $k_3 = k_1$, $k_2 = l$ e

$$3 \leqslant k_4 < 6 \Longrightarrow l > 12.$$

Assim, novamente aplicando o Teorema 1.32 (decomposição de Helmholtz's) a $D(\theta^*\psi_2)\overline{y}$ mas agora no espaço $L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)$, temos que existem funções g_7 e g_8 com $g_7,\ \nabla g_8 \in L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)$ e $\nabla\cdot g_7 = 0$ tais que

$$D(\theta^*\psi_2)\overline{y} = g_7 + \nabla g_8. \tag{B.156}$$

Além disso, g_7 e ∇g_8 dependem continuamente de $D(\theta^*\psi_2)\overline{y}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \|g_7\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)} &\leqslant C_4\|\theta^* D\psi_2\bar{y}_t\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)},\\ \|\nabla g_8\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)} &\leqslant C_5\|\theta^* D\psi_2\bar{y}_t\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)}. \end{aligned} \tag{B.157}$$

Substituindo a nova decomposição de $D(\theta^*\psi_2)\overline{y}$ dada por (B.156) na primeira equação do sistema (B.149), obtemos

$$\begin{cases} -(\theta^*\psi_2)_t - \Delta(\theta^*\psi_2) + \nabla(\theta^* q_2 - g_8) = -(\theta^*)'\psi_2 - \theta^*\theta'\varphi + g_7 & \text{em } Q,\\ \nabla\cdot(\theta^*\psi_2) = 0 & \text{em } Q,\\ \theta^*\psi_2 = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\ (\theta^*\psi_2)(T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{B.158}$$

onde o lado direito da primeira equação do sistema (B.158), satisfaz

$$\big(-(\theta^*)'\psi_2 - \theta^*\theta'\varphi + g_7\big) \in L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)$$

e

$$\nabla\cdot\big(-(\theta^*)\psi_2 - \theta^*\theta'\varphi + g_7\big) = -\nabla\cdot(\theta^*\psi_2) - \theta^*\theta'\nabla\cdot\varphi + \nabla\cdot g_7 = 0.$$

Aplicando o Teorema A.6 ao sistema de Stokes (B.158), temos que $\nabla(\theta^* q_2 - g_8) \in L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)$ e

$$\|\nabla(\theta^* q_2 - g_8)\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)} \leqslant C_6\|-(\theta^*)'\psi_2 - \theta^*\theta'\varphi + g_7\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)}. \tag{B.159}$$

Tendo em conta (B.155) e a dependência contínua de g_7 e g_5 com respeito a $D(\theta^*\psi_2)\overline{y}$ dadas pelas desigualdades (B.153) e (B.157), a desigualdade anterior torna se

$$\begin{aligned} \|\nabla(\theta^* q_2 - g_8)\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)} \leqslant C_7(1+\|\overline{y}\|^2)\big(&\|\theta^*\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N}\\ &+ \|(\theta^*\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N} + \|((\theta^*)'\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N}\\ &+ \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*\theta'\varphi)_t\|_{L^2(Q)^N}\big). \end{aligned} \tag{B.160}$$

Passo 3: Neste passo vamos mostrar que a última desigualdade é suficiente para assegurar que $\theta^*\psi_2 \in L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)$ e obter uma estimativa para $\|\theta^*\psi_2\|_{L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)}$.

Para isso, consideremos o problema (B.158) como um sistema de N equações do calor

$$\begin{cases} -(\theta^*\psi_2)_t - \Delta(\theta^*\psi_2) = B & \text{em } Q, \\ \nabla \cdot (\theta^*\psi_2) = 0 & \text{em } Q, \\ \theta^*\psi_2 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ (\theta^*\psi_2)(T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{B.161}$$

onde

$$B := -(\theta^*)'\psi_2 - \theta^*\theta'\varphi - \nabla(\theta^* q_2 - g_8) + g_7 \in L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N). \tag{B.162}$$

Considerando a solução do sistema anterior em termos do semigrupo do operador do calor, temos que

$$\begin{aligned} \|\theta^*\psi_2(t)\|_{W^{1,l}(\Omega)^N} &\leqslant C_8 \int_0^t (t-s)^{-1/2}\|B(s)\|_{L^l(\Omega)^N} ds \\ &= C_8 \int_{\mathbb{R}} h(t-s)g(s)ds \\ &= C_8(h * g)(t), \end{aligned} \tag{B.163}$$

onde

$$g(z) := \|B(z)\|_{L^l(\Omega)^N} \in L^{k_3}(0,T) \quad \text{e} \quad h(z) := z^{-1/2} \in L^{k_3'}(0,T), \tag{B.164}$$

com $1/k_3 + 1/k_3' = 1$ e $k_3 > 2$, pois lembremos que

$$3 \leqslant k_4 < 6 \ \text{ e } \ \frac{4/3}{k_3} + \frac{2}{k_4} = 1.$$

Aplicando a desigualdade de Young (Teorema 1.45) nas funções g e h definidas em (B.164), onde k_3 e k_3' satisfaz $1/k_3 + 1/k_3' = 1 + 1/r$ com $r = \infty$. Temos que $h * g \in L^\infty(0,T)$ e também

$$\|h * g\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant \|g\|_{L^{k_3}(0,T)}\|h\|_{L^{k_3'}(0,T)}.$$

Portanto, a última desigualdade e (B.163) implicam que $\|\theta^*\psi_2(\cdot)\|_{W^{1,l}(\Omega)^N} \in L^\infty(0,T)$ e

$$\|\theta^*\psi_2\|_{L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)} \leqslant C_8\|g\|_{L^{k_3}(0,T)}\|h\|_{L^{k_3'}(0,T)}. \tag{B.165}$$

Pelas definições de h e g em (B.164) temos que

$$\|h\|_{L^{k_3'}(0,T)} = (1 - k_3'/2)^{-1/k_3'} T^{-1/2+1/k_3'} \ \text{ e } \|g\|_{L^{k_3}(0,T)} = \|B\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)}.$$

Logo, substituindo as duas últimas igualdades no lado direito de (B.165), obtemos

$$\|\theta^*\psi_2\|_{L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)} \leqslant C_8(1 - k_3'/2)^{-1/k_3'} T^{-1/2+1/k_3'} \|B\|_{L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega)^N)}.$$

Substituindo a definição de B em (B.162) no lado direito da última desigualdade, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|\theta^*\psi_2\|_{L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega)^N)} \leqslant C_8(1-k_3'/2)^{-1/k_3'}T^{-1/2+1/k_3'}\big(&\|\theta^*\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|((\theta^*)'\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|(\theta^*\theta'\varphi)_t\|_{L^2(Q)^N}\big). \qquad \text{(B.166)}
\end{aligned}
$$

Passo 4 : Neste passo calcularemos a estimativa para $\|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}$ utilizando a última desigualdade do passo anterior.

A desigualdade (B.166) é uma estimativa para $\|\theta^* D\psi_2\|_{L^\infty(0,T;L^l(\Omega)^N)}$ e implica que $\theta^* D\psi_2 \in L^\infty(0,T;L^l(\Omega)^N)$. Lembrando por (4) que $\overline{y}_t \in L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} &\leqslant \|\theta^* D\psi_2\|_{L^\infty(0,T;L^l(\Omega)^N)}\|\overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)} \\
&\leqslant C_8\|\overline{y}_t\|_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)}T^{-1/2+1/k_3'}(1+\|\overline{y}\|_\infty^2)\big(\|\theta^*\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|((\theta^*)'\psi_2)_t\|_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|(\theta^*\theta'\varphi)_t\|_{L^2(Q)^N}\big).
\end{aligned}
$$

Elevando ao quadrado ambos lados da última desigualdade e utilizando a desigualdade de Cauchy (Teorema 1.38), temos

$$
\begin{aligned}
\|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} \leqslant \widehat{C}_8\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}T^{-1+2/k_3'}(1+\|\overline{y}\|_\infty^2)^2\Big(&\|\theta^*\Delta\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*\psi_2)_t\|^2_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|((\theta^*)'\psi_2)_t\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|(\theta^*\theta'\varphi)_t\|^2_{L^2(Q)^N}\Big). \qquad \text{(B.167)}
\end{aligned}
$$

Notemos que $2 < k_3 \leqslant 4$ implica $0 < -1 + 2/k_3' \leqslant 1/2$, pois $1/k_3 + 1/k_3' = 1$, logo

$$
T^{-1+2/k_3'} \leqslant T^{1/2}. \qquad \text{(B.168)}
$$

Agora, desenvolvendo os termos que envolvem derivadas respeito do tempo no lado direito de (B.167), temos

$$
\begin{aligned}
(\theta^*\psi_2)_t &= (\theta^*)'\psi_2 + \theta^*\psi_{2,t}, \\
((\theta^*)'\psi_2)_t &= (\theta^*)''\psi_2 + (\theta^*)'\psi_{2,t}, \\
(\theta^*\theta'\varphi)_t &= (\theta^*)'\theta'\varphi + \theta^*\theta''\varphi + \theta^*\theta'\varphi_t.
\end{aligned}
$$

Logo, tomando a norma $L(Q)^N$ nas últimas três igualdades, utilizando a desigualdade triangular, elevando ao quadrado e pela desigualdade $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, temos que as ultimas três igualdades tornam se

$$\begin{aligned}
\|(\theta^*\psi_2)_t\|^2_{L^2(Q)^N} &\leqslant \widehat{C}_1(\|(\theta^*)'\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\psi_{2,t}\|^2_{L^2(Q)^N}),\\
\|((\theta^*)'\psi_2)_t\|^2_{L^2(Q)^N} &\leqslant \widehat{C}_2(\|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|^2_{L^2(Q)^N}),\\
\|(\theta^*\theta'\varphi)_t\|^2_{L^2(Q)^N} &\leqslant \widehat{C}_3(\|(\theta^*)'\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}).
\end{aligned} \tag{B.169}$$

Assim, substituindo (B.168) e (B.169) no lado direito de (B.167), podemos reescrever esta última obtendo a estimativa desejada no início da subseção, isto é,

$$\begin{aligned}
\|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} \leqslant C_9\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}T^{1/2}(1+\|\overline{y}\|^2_\infty)^2 \Big(&\|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|(\theta^*)'\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta^*\psi_{2,t}\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|(\theta^*)''\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\Delta\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N}\Big).
\end{aligned} \tag{B.170}$$

B.4.2.9 Cálculo da segunda estimativa de $\|\hat{\theta}\varphi_t\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$

Nesta subseção vamos reescrever o lado direito da estimativa (B.147), isto é,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2\,|\varphi_t|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t \leqslant C_4\left(1+\|\overline{y}\|^2_\infty\right)\mathrm{e}^{C^*_{19}T\|\overline{y}\|^2_\infty}\Big[&\lambda^{12}(1+T)\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi) + \mathcal{S}_0(\theta,\theta^*,\varphi,\psi_2)\\
&+\|\theta^* D\psi_2\bar{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)}\Big],
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{S}_0$ e $\mathcal{S}_1$ são definidos em (B.148).

Para isso, definamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(\theta,\theta^*,\varphi,\psi_2) := &\|(\theta^*)'\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta^*\psi_{2,t}\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)''\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&+\|\theta^*\Delta\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N}.
\end{aligned} \tag{B.171}$$

Pelas definições de $\mathcal{S}_0$ e $\mathcal{S}_2$ em (B.148) e (B.171), respectivamente, temos que $\mathcal{S}_0 \leqslant \mathcal{S}_2$. Logo, utilizando em conjunto com (B.170), considerando que $(1+\|\overline{y}\|^2_\infty)^2 > 1$ e tomando uma constante $\widehat{C}_1$ tal que $C_9 \leqslant \widehat{C}_1$ e $\widehat{C}_1\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)} \geqslant 1$, vale

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 + \|\theta^* D\psi_2\overline{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega)^N)} &\leqslant \mathcal{S}_2 + C_9\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}T^{1/2}(1+\|\overline{y}\|^2_\infty)^2\mathcal{S}_2\\
&\leqslant (1+\widehat{C}_1\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}T^{1/2})(1+\|\overline{y}\|^2_\infty)^2\mathcal{S}_2\\
&\leqslant \widehat{C}_1\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}(1+\|\overline{y}\|^2_\infty)^2(1+T^{1/2})\mathcal{S}_2.
\end{aligned}$$

Substituindo a última desigualdade no lado direito de (B.147), tendo em conta que $\widehat{C}_1\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}(1+\|\overline{y}\|^2_\infty)^2 \geqslant 1$ e o fato que $(1+\|\overline{y}\|^2_\infty)^3 \leqslant C(1+\|\overline{y}\|^6_\infty)$, (B.147) torna se

$$\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2\,|\varphi_t|^2 \;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t \leqslant \widehat{C}_2(1+\|\overline{y}\|^6_\infty)\|\overline{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}\mathrm{e}^{CT\|\overline{y}\|^2_\infty}\Big[\lambda^{12}(1+T)\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi)$$
$$+(1+T^{1/2})\mathcal{S}_2(\theta,\theta^*,\varphi,\psi_2)\Big], \tag{B.172}$$

onde $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são definidas em (B.148) e (B.171), respectivamente.

Lembrando a relação $\theta\varphi = \psi_1+\psi_2$ dada em (B.100), onde $\theta\varphi$ é solução do sistema (B.97) e as identidades

$$\begin{aligned}\psi_2 &= -\psi_1+\theta\varphi,\\ \psi_{2,t} &= \psi_{1,t}+\theta'\varphi+\theta\varphi_t,\\ \Delta\psi_2 &= -\Delta\psi_1+\theta\Delta\varphi,\end{aligned} \tag{B.173}$$

escreveremos os termos relacionados com ψ_2 na definição de $\mathcal{S}_2(\theta,\theta^*,\varphi,\psi_2)$ dada em (B.171), em termos de ψ_1.

Multiplicando a primeira equação de (B.173) por $(\theta^*)'$ e por $(\theta^*)''$. Tomando a norma em $L^2(Q)^N$, aplicando a desigualdade triangular e o fato que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, obtemos

$$\begin{aligned}\|(\theta^*)'\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} &\leqslant \widehat{C}_3\left(\|(\theta^*)'\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\right),\\ \|(\theta^*)''\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} &\leqslant \widehat{C}_4\left(\|(\theta^*)''\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)''\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\right).\end{aligned}$$

Realizando o mesmo procedimento anterior para a segunda e terceira equações de (B.173), segue que

$$\begin{aligned}\|\theta^*\psi_{2,t}\|^2_{L^2(Q)^N} &\leqslant \widehat{C}_5\left(\|\theta^*\psi_{1,t}\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}\right),\\ \|(\theta^*)'\psi_{2,t}\|^2_{L^2(Q)^N} &\leqslant \widehat{C}_6\left(\|(\theta^*)'\psi_{1,t}\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}\right),\\ \|\theta^*\Delta\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} &\leqslant \widehat{C}_7\left(\|\theta^*\Delta\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\right),\\ \|(\theta^*)'\Delta\psi_2\|^2_{L^2(Q)^N} &\leqslant \widehat{C}_8\left(\|(\theta^*)'\Delta\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\right).\end{aligned}$$

Substituindo as últimas seis desigualdades na definição de $\mathcal{S}_2(\theta,\theta^*,\varphi,\psi_2)$ em (B.171), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2(\theta,\theta^*,\varphi,\psi_2) \leqslant C\Big(&\|\theta^*\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)''\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\\ &+\|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\theta\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N}\\ &+\|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}\\ &+\|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}\\ &+\|(\theta^*)''\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}+\|\theta^*\Delta\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\Delta\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N}\\ &+\|\theta^*\psi_{1,t}\|^2_{L^2(Q)^N}+\|(\theta^*)'\psi_{1,t}\|^2_{L^2(Q)^N}\Big).\end{aligned} \tag{B.174}$$

Lembrando a definição de θ^* em (B.101), temos que pelas desigualdades (B.109) e (B.123) as funções θ^* e $(\theta^*)''$ são limitadas em $(0,T)$. De forma similar podemos mostrar que $(\theta^*)'$ é também limitada em $(0,T)$. Utilizando este último fato e a desigualdade (B.110), todos os termos relacionados com ψ_1 na última desigualdade podem ser estimados pelo termo $\|g\|_{L^2(Q)^N}$. Ou seja, existem constantes s_6, $\lambda_6 \geqslant 0$, tais que

$$\begin{aligned}
&\|(\theta^*)'\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)''\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\Delta\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|(\theta^*)'\Delta\psi_1\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\psi_{1,t}\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\psi_{1,t}\|^2_{L^2(Q)^N} \leqslant C_1\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N},
\end{aligned}$$

para todo $s \geqslant s_6\left(T^4 + T^8\right)$ e $\lambda \geqslant \lambda_6$.

Substituindo a última desigualdade no lado direito de (B.174), temos que esta torna se

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(\theta,\theta^*,\varphi,\psi_2) \leqslant C_1\Big(&\|\theta^*\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)''\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}\Big) + C_2\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}.
\end{aligned}$$

Substituindo a última desigualdade no lado direito de (B.172) e absorvendo termos similares, temos

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2\,|\varphi_t|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t \leqslant \widehat{C}_9\left(1+\|\bar{y}\|^6_\infty\right)\|\bar{y}_t\|^2_{L^2(L^\sigma)}\mathrm{e}^{CT\|\bar{y}\|^2_\infty}\Big[&\lambda^{12}(1+T)\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi) \\
&+ (1+T^{1/2})\mathcal{S}_3(\theta,\theta^*,\varphi)\Big],
\end{aligned} \tag{B.175}$$

onde $\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi)$ é definido em (B.148) e

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_3(\theta,\theta^*,\varphi) := {}&\|\theta^*\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)''\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|\theta^*\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} \\
&+ \|\theta^*\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}.
\end{aligned} \tag{B.176}$$

B.4.2.10 Cálculo da última estimativa de $\|\hat{\theta}\varphi_t\|_{L^2(\omega_2\times(0,T))^N}$ em termos de $\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi)$ e $I(s,\lambda;\varphi)$

Nesta subseção vamos reescrever o lado direito de (B.175) em termos de $\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi)$ e $I(s,\lambda;\varphi)$ definidos em (B.148) e (12), respectivamente. Para isso, primeiramente vamos estimar o termo que $(1+T^{1/2})\mathcal{S}_3(\theta,\theta^*,\varphi)$ no lado direito de (B.175), onde $\mathcal{S}_3(\theta,\theta^*,\varphi)$ é definido em (B.176).

Na definição de $\mathcal{S}_3$, notemos que podemos estimar os termos que envolvem φ, $\Delta\varphi$, φ_t. Para isso, consideremos as definições de θ^* e θ dadas em (B.101) e (11) respectivamente, e as desigualdades dadas em (B.44) para obter

$$\begin{aligned}
&|\theta^*\theta'| + |(\theta^*)'\theta| \leqslant \widehat{C}_1 T s^{-3/4}\lambda^{-4}\mathrm{e}^{-s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1/2},\\
&|(\theta^*)'\theta'| + |(\theta^*)''\theta| + |(\theta^*)\theta''| \leqslant \widehat{C}_2 T^2 s^{1/4}\lambda^{-4}\mathrm{e}^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{3/4}.
\end{aligned} \tag{B.177}$$

Considerando $0 < \beta \leqslant 1/2$, multiplicando as últimas duas desigualdades por T^β e considerando $s_7 \geqslant 0$ adequado, as seguintes desigualdades são válidas

$$\begin{aligned}
&T^\beta(|\theta^*\theta'| + |(\theta^*)'\theta|) \leqslant \widehat{C}_3 s^{-1/2}\lambda^{-4}\mathrm{e}^{-s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1/2},\\
&T^\beta(|(\theta^*)'\theta'| + |(\theta^*)''\theta| + |(\theta^*)\theta''|) \leqslant \widehat{C}_4 s^{3/2}\lambda^{-4}\mathrm{e}^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{3/2},
\end{aligned} \tag{B.178}$$

para todo $s \geqslant s_7\left(T^4 + T^8\right)$.

Agora, vamos a estimar o termo $(1+T^{1/2})\mathcal{S}_3$. Para isso, precisamos estimar cada um do seguintes termos

$$\begin{aligned}
(1+T^{1/2})\mathcal{S}_{3,1} &= (1+T^{1/2})\big(\|\theta^*\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\big),\\
(1+T^{1/2})\mathcal{S}_{3,2} &= (1+T^{1/2})\big(\|\theta^*\theta'\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\big),\\
(1+T^{1/2})\mathcal{S}_{3,3} &= (1+T^{1/2})\big(\|\theta^*\theta'\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)'\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}\big),\\
(1+T^{1/2})\mathcal{S}_{3,4} &= (1+T^{1/2})\big(\|\theta^*\theta\Delta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta^*\theta\varphi_t\|^2_{L^2(Q)^N}\big),\\
(1+T^{1/2})\mathcal{S}_{3,5} &= (1+T^{1/2})\big(\|(\theta^*)'\theta'\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|(\theta^*)''\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\\
&\qquad + \|(\theta^*)\theta''\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\big),
\end{aligned} \tag{B.179}$$

onde

$$\mathcal{S}_3 = \sum_{i=1}^{5}\mathcal{S}_{3,i}.$$

Os primeiros três termos de (B.179), podem ser estimados respectivamente, utilizando em conjunto as primeiras desigualdades de (B.177) e (B.178) respectivamente, obtendo

$$\begin{aligned}
(1+T^{1/2})\mathcal{S}_{3,1} &\leqslant \widehat{C}_5 s^{-1}\lambda^{-8}\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}|\varphi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
(1+T^{1/2})\mathcal{S}_{3,2} &\leqslant \widehat{C}_6 s^{-1}\lambda^{-8}\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}(|\Delta\varphi|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
(1+T^{1/2})\mathcal{S}_{3,3} &\leqslant \widehat{C}_7 s^{-1}\lambda^{-8}\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}(|\varphi_t|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{B.180}$$

O quarto termo de (B.179), pode ser estimado tendo em conta as definições de θ^* e θ dadas em (B.101) e (11) respectivamente e considerando $s \geqslant s_8\left(T^4 + T^8\right)$, com $s_8 > 0$ adequado

$$(1+T^{1/2})\mathcal{S}_{3,4} \leqslant \widehat{C}_8 s^{-1}\lambda^{-8}\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}(\hat{\xi})^{-7/2}(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{B.181}$$

Finalmente o último termo de (B.179), também pode ser estimado utilizando em conjunto as segundas desigualdades de (B.177) e (B.178) respectivamente, obtendo a estimativa

$$(1+T^{1/2})\mathcal{S}_{3,5} \leqslant \widehat{C}_9 s^3\lambda^{-8} \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{B.182}$$

Pelas estimativas (B.180), (B.182) e (B.181) e lembrando que $\mathcal{S}_3 = \sum_{i=1}^{5} \mathcal{S}_{3,i}$, conseguimos estimar o termo $(1+T^{1/2})\mathcal{S}_3$ por

$$\begin{aligned}(1+T^{1/2})\mathcal{S}_3 \leqslant C \Bigg(& s^3\lambda^{-8} \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ & + s^{-1}\lambda^{-8} \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Bigg).\end{aligned} \tag{B.183}$$

Pelas definições de α, α^*, ξ e $\hat{\xi}$ dadas em (11), podemos estimar o lado direito da última desigualdade, pois valem as desigualdades

$$s^3 \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant s^3\lambda^4 \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

e

$$s^{-1} \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant s^{-1} \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Somando as duas últimas desigualdades e comparando o resultado com $I(s,\lambda;\varphi)$ definido em (12), vale

$$s^3 \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^{-1} \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant I(s,\lambda;\varphi).$$

Substituindo a última desigualdade no lado direito de (B.183), obtemos

$$(1+T^{1/2})\mathcal{S}_3 \leqslant C\lambda^{-8} I(s,\lambda;\varphi).$$

Substituindo a última desigualdade no lado direito de (B.175), temos

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2\,|\varphi_t|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C_1\left(1+\|\bar{y}\|_\infty^6\right)\|\bar{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)}\mathrm{e}^{C_{16}T\|\bar{y}\|_\infty^2}\Big[&\lambda^{12}(1+T)\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi) \\ & + \lambda^{-8} I(s,\lambda;\varphi)\Big].\end{aligned} \tag{B.184}$$

Desenvolvendo o lado direito da última desigualdade, notamos que um dos termos é

$$\frac{1}{\lambda^8} C_1 \left(1 + \|\bar{y}\|_\infty^6\right) \|\overline{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)} \mathrm{e}^{C_{16} T \|\bar{y}\|^2_\infty} I(s,\lambda;\varphi).$$

Como $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \dfrac{1}{\lambda^8} = 0$, podemos tornar

$$\frac{1}{\lambda^8} C_1 \left(1 + \|\bar{y}\|_\infty^6\right) \|\overline{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)} \mathrm{e}^{C_{16} T \|\bar{y}\|^2_\infty},$$

arbitrariamente pequeno.

Assim, podemos tomar constantes $\lambda_6 > 0$ e $\lambda_9 > 0$ tais que

$$\frac{1}{\lambda^8} C_1 \left(1 + \|\bar{y}\|_\infty^6\right) \|\overline{y}_t\|^2_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)} \mathrm{e}^{C_{16} T \|\bar{y}\|^2_\infty} \leqslant \frac{1}{2C_1C_2},$$

seja válida para todo $\lambda \geqslant \lambda_6(1 + \|\overline{y}\|_\infty + \|\overline{y}_t\|^2_{L^2\left(0,T;L^\sigma(\Omega)^N\right)} + \mathrm{e}^{\lambda_9 T \|\bar{y}\|^2_\infty})$.

Substituindo a desigualdade anterior no lado direito da desigualdade (B.184), obtem-se

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2 \left|\varphi_t\right|^2 \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t &\leqslant C_2\lambda^{12}(1+T)\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi) + \frac{1}{2C_1C_2} I(s,\lambda;\varphi) \\ &\leqslant C_2\lambda^{20}(1+T)\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi) + \frac{1}{2C_1C_2} I(s,\lambda;\varphi). \qquad \text{(B.185)}\end{aligned}$$

Logo, multiplicando ambos lados da última desigualdade por C_1C_2, obtemos a estimativa desejada no início da subseção, ou seja,

$$C_1C_2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2 \left|\varphi_t\right|^2 \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqslant C_4\lambda^{20}(1+T)\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi) + \frac{1}{2} I(s,\lambda;\varphi), \qquad \text{(B.186)}$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_6(1 + \|\overline{y}\|_\infty + \|\overline{y}_t\|^2_{L^2\left(0,T;L^\sigma(\Omega)^N\right)} + \mathrm{e}^{\lambda_9 T \|\bar{y}\|^2_\infty}) > 1$, onde $\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi)$ e $I(s,\lambda;\varphi)$ são definidas em (B.148) e (12), respectivamente.

B.5 Estimativa final de $I(s,\lambda;\varphi)$

Nesta seção vamos utilizar os resultados principais das seções anteriores: O Lema B.4, que é uma pré-desigualdade de Carleman. O Lema B.5, que é uma estimativa para a integral local da pressão π no lado direito da desigualdade do Lema B.4. A desigualdade (B.95), que é uma estimativa para a integral local do Laplaciano da velocidade φ no lado direito da desigualdade do Lema B.5. Finalmente a desigualdade (B.186), que constitui uma estimativa para a integral local da derivada temporal da velocidade φ, também no lado direito da desigualdade do Lema B.5.

Em outras palavras, são válidas

$$
\begin{aligned}
&I(s,\lambda;\varphi) \leqslant C_1\left(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}\right),\\
&\mathcal{B} \leqslant C_2\left(\mathcal{D}+\mathcal{E}+\mathcal{F}+\mathcal{G}\right),\\
&\mathcal{E} \leqslant C_3(1+T)\left(\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4\right),\\
&C_1C_2\mathcal{F} \leqslant C_4\lambda^{20}(1+T)\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi)+\frac{1}{2}I(s,\lambda;\varphi),
\end{aligned}
\tag{B.187}
$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_6(1+\|\overline{y}\|_\infty+\|\overline{y}_t\|^2_{L^2\left(0,T;L^\sigma(\Omega)^N\right)}+\mathrm{e}^{\lambda_9 T\|\overline{y}\|^2_\infty}) > 1$, $s \geqslant s_6(T^4+T^8)$, onde $\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi)$ e $I(s,\lambda;\varphi)$ são definidas em (B.148) e (12), respectivamente. Além disso, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são definidas como em (B.52), $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ e $\mathcal{I}_4$ em (B.93) e

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D} := \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
&\mathcal{E} := \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\Delta\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
&\mathcal{F} := \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\varphi_t|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\\
&\mathcal{G} := \|\overline{y}\|^2_\infty \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{B.188}
$$

Consideremos as primeiras três desigualdades de (B.187). Logo, vamos substituir a segunda e terceira na primeira. Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
I(s,\lambda;\varphi) &\leqslant C_1(\mathcal{A}+\mathcal{C})+C_2C_3(\mathcal{D}+\mathcal{G})+C_1C_2C_3(1+T)(\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4)+C_1C_2\mathcal{F}\\
&= \mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2+\mathcal{M}_3+C_1C_2\mathcal{F}.
\end{aligned}
\tag{B.189}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1 := C_1\mathcal{C}+C_2C_3\mathcal{D}+C_1C_2C_3(1+T)\mathcal{I}_1,\\
&\mathcal{M}_2 := C_1\mathcal{A}+C_1C_2C_3(1+T)(\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4),\\
&\mathcal{M}_3 := C_1C_2\mathcal{G}+C_1C_2C_3(1+T)\mathcal{I}_2.
\end{aligned}
$$

A seguir também apresentamos estimativas para $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ e $\mathcal{M}_3$ em (B.189). Para isso consideremos as definições de θ e $\hat{\theta}$ dadas em (11).

Estimativa de $\mathcal{M}_1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= sC_1 \iint\limits_Q \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C_1C_2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\quad + C_1C_2C_3(1+T) \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \widehat{C}_1\lambda^{20}s^{15/2}(1+T)\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\hat{\xi}^{15/2}|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \\ &= \widehat{C}_1\lambda^{20}(1+T)\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N}.\end{aligned}$$

Estimativa de $\mathcal{M}_2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &= C_1s^3\lambda^4 \iint\limits_{\omega_1\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C_1C_2C_3(1+T)\left(\iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}'|^2|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right. \\ &\quad \left. + \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right) \\ &\leqslant \widehat{C}_2\lambda^{20}s^{15/2}(1+T)\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\hat{\xi}^{15/2}|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \\ &= \widehat{C}_2\lambda^{20}(1+T)\|\theta \varphi\|^2_{L^2(Q)^N}.\end{aligned}$$

Estimativa de $\mathcal{M}_3$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_3 &= C_1C_2 \iint\limits_{\omega_2\times(0,T)} |\hat{\theta}|^2\left|\nabla\varphi\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C_1C_2C_3(1+T) \iint\limits_{\omega_4\times(0,T)} |\widehat{\theta}|^2\left|D\varphi\overline{y}\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \widehat{C}_3\lambda^{20}s^{15/2}(1+T)\iint\limits_Q \mathrm{e}^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\hat{\xi}^{15/2}|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \\ &= \widehat{C}_3\lambda^{20}(1+T)\|\theta \nabla\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}.\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas para $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, e $\mathcal{M}_3$ dadas pelas últimas três desigualdades e a estimativa para $C_1C_2\mathcal{F}$ dada em (B.186), na desigualdade (B.189), obtemos

$$\begin{aligned}I(s,\lambda;\varphi) &\leqslant \widehat{C}_4\lambda^{20}(1+T)\Big(\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta\varphi\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2(Q)^N}\Big) \\ &\quad + C_4\lambda^{20}(1+T)\mathcal{S}_1(\theta,g,\varphi) + \frac{1}{2}I(s,\lambda;\varphi),\end{aligned}$$

Na última desigualdade podemos notar que os termos relacionados com θg, $\theta\varphi$ e $\theta\nabla\varphi$ no lado direito, podem ser absorvidos por $\mathcal{S}_1$ definido em (B.148). Logo, rearranjando e absorvendo termos semelhantes na última desigualdade, obtem-se

$$I(s,\lambda;\varphi) \leqslant C_5\lambda^{20}(1+T)\Big(\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)} \\ + \|\theta'\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)} + \|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}\Big), \tag{B.190}$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_7(1+\|\overline{y}\|_\infty + \|\overline{y}_t\|^2_{L^2\left(0,T;L^\sigma(\Omega)^N\right)} + e^{\lambda_9 T\|\overline{y}\|^2_\infty})$ e $s \geqslant s_7(T^4+T^8)$.

B.5.1 Estimativa de $\|\theta\nabla\varphi\|_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}$

Nesta subseção vamos a estimar o termo $\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}$ no lado direito da desigualdade (B.190), em termos das integrais locais de $|\theta|^2|\varphi|^2$ e $|\theta|^2|\Delta\varphi||\varphi|$.

Para isso, introduzimos uma função $\zeta \in C^2_c(\omega)$ tal que $\zeta \equiv 1$ em ω_5 e $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$. Assim, vale

$$\iint\limits_{\omega_5\times(0,T)} |\theta|^2\,|\nabla\varphi|^2 \;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t \leqslant \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta\,|\nabla\varphi|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t.$$

Agora, vamos a utilizar integração por partes na integral do lado direito da última desigualdade. Reescrevendo esta integral, temos

$$\iint\limits_{\omega_5\times(0,T)} |\theta|^2\,|\nabla\varphi|^2 \;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t \leqslant \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta\,|\nabla\varphi|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^N \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta\left|\nabla\varphi^i\right|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t. \tag{B.191}$$

Novamente, vamos reescrever cada um dos elementos da soma do lado direito da igualdade anterior. Fixando $i \in \{1,\ldots,N\}$, temos

$$\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta\left|\nabla\varphi^i\right|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^N \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta(\varphi^i)^2_{x_j}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t. \tag{B.192}$$

Fixando $j \in \{1,\ldots,N\}$, vamos a integrar por partes um dos elementos da soma da última igualdade. Tendo em conta que ζ é zero na fronteira de $\omega\times(0,T)$ e usando a regra do produto das derivadas, temos

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta(\varphi^i)_{x_j}(\varphi^i)_{x_j}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t &= -\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2(\zeta(\varphi^i)_{x_j})_{x_j}\varphi^i\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t \\ &= -\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta_{x_j}\varphi^i_{x_j}\varphi^i\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t - \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta\varphi^i_{x_jx_j}\varphi^i\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{B.193}$$

Integrando por partes o primeiro termo do lado direito da igualdade anterior

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta_{x_j}\varphi^i_{x_j}\varphi^i \text{ d}x \text{ d}t &= -\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2(\zeta_{x_j}\varphi^i)_{x_j}\varphi^i \text{ d}x \text{ d}t \\ &= -\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta_{x_jx_j}(\varphi^i)^2 \text{ d}x \text{ d}t - \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta_{x_j}\varphi^i_{x_j}\varphi^i \text{ d}x \text{ d}t.\end{aligned}$$

Consequentemente, da última igualdade deduzimos que

$$\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta_{x_j}\varphi^i_{x_j}\varphi^i \text{ d}x \text{ d}t = -\frac{1}{2}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta_{x_jx_j}(\varphi^i)^2 \text{ d}x \text{ d}t.$$

Substituindo a última igualdade no lado direito de (B.193), obtemos

$$\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta(\varphi^i)_{x_j}(\varphi^i)_{x_j} \text{ d}x \text{ d}t = \frac{1}{2}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta_{x_jx_j}(\varphi^i)^2 \text{ d}x \text{ d}t - \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta\varphi^i_{x_jx_j}\varphi^i \text{ d}x \text{ d}t.$$

Substituindo novamente o último resultado em (B.192), esta última torna se

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta|\nabla\varphi^i|^2 \text{ d}x \text{ d}t &= \sum_{j=1}^{N}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta(\varphi^i_{x_j})^2 \text{ d}x \text{ d}t \\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\Delta\zeta(\varphi^i)^2 \text{ d}x \text{ d}t - \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2\zeta\Delta\varphi^i\varphi^i \text{ d}x \text{ d}t.\end{aligned}$$

Logo, substituindo a última igualdade em (B.191) e lembrando que $\zeta \in C^2_c(\omega)$, conseguimos estimar $\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}$ em termos das integrais locais de $|\theta|^2|\varphi|^2$ e $|\theta|^2|\Delta\varphi||\varphi|$, isto é,

$$\iint\limits_{\omega_5\times(0,T)} |\theta|^2\left|\nabla\varphi\right|^2 \text{ d}x \text{ d}t \leqslant C\left(\frac{1}{2}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2|\varphi|^2 \text{ d}x \text{ d}t + \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2|\Delta\varphi||\varphi| \text{ d}x \text{ d}t\right). \tag{B.194}$$

B.5.2 Cálculo da estimativa final de $I(s,\lambda;\varphi)$

Nesta subseção vamos obter finalmente a desigualdade do Teorema 0.2 dada por (13).

Aplicando a desigualdade de Cauchy (Teorema 1.39) no integrando do segundo termo do lado direito de (B.194) para $\varepsilon > 0$, obtemos

$$|\theta|^2|\Delta\varphi||\varphi| \leqslant \varepsilon(|\theta|^2|\varphi|)^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|\Delta\varphi|^2.$$

Integrando a última desigualdade em $\omega \times (0,T)$ e tomando $\varepsilon = \dfrac{C_5}{2} s\lambda^{20}(1+T)\mathrm{e}^{2s\alpha^*}\hat{\xi} > 0$, obtemos

$$\iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\theta|^2|\Delta\varphi||\varphi| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{C_5}{2}s\lambda^{20}(1+T) \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{2s\alpha^*}|\theta|^4\hat{\xi}|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2C_5}s^{-1}\lambda^{-20}(1+T)^{-1} \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}|\Delta\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Substituindo a desigualdade anterior no lado direito de (B.194), notamos que a integral que envolve o termo $|\theta|^2|\varphi|^2$ pode ser absorvida pela integral que envolve o termo $\mathrm{e}^{2s\alpha^*}|\theta|^4\hat{\xi}|\varphi|^2$, obtendo

$$\iint\limits_{\omega_5\times(0,T)} |\theta|^2\,|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C_6 s\lambda^{20}(1+T) \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{2s\alpha^*}|\theta|^4\hat{\xi}|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2C_5}s^{-1}\lambda^{-20}(1+T)^{-1} \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}|\Delta\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Note que a última desigualdade é uma estimativa de $\|\theta\nabla\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}$. Assim, podemos substituir no lado direito de (B.190)

$$\begin{aligned} I(s,\lambda;\varphi) \leqslant{}& C_5\lambda^{20}(1+T)\big(\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N} + \|\theta\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)} + \|\theta'\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}\big) \\ &+ C_5C_6 s\lambda^{20}(1+T)^2 \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{2s\alpha^*}|\theta|^4\hat{\xi}|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{s^{-1}}{2}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}|\Delta\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{B.195}$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_8(1 + \|\overline{y}\|_\infty + \|\overline{y}_t\|^2_{L^2\left(0,T;L^\sigma(\Omega)^N\right)} + \mathrm{e}^{\lambda_9 T\|\overline{y}\|^2_\infty})$ e $s \geqslant s_8(T^4 + T^8)$.

Das definições de $I(s,\lambda;\varphi)$ em (12) e de ξ e α^* em (11), deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I(s,\lambda;\varphi) &\leqslant I(s,\lambda;\varphi) - \frac{s^{-1}}{2}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha}\xi^{-1}|\Delta\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant I(s,\lambda;\varphi) - \frac{s^{-1}}{2}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}|\Delta\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{s^{-1}}{2}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{-1}|\Delta\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}I(s,\lambda;\varphi) \leqslant I(s,\lambda;\varphi).$$

Consequentemente, substituindo a última desigualdade em (B.195) e agrupando termos, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}I(s,\lambda;\varphi) \leqslant{}& C_{26}\lambda^{20}(1+T)\left(\|\theta\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)} + \|\theta'\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}\right)\\ &+ C_{26}C_{27}\lambda^{40}(1+T)^2 s \iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{2s\alpha^*}|\theta|^4\hat{\xi}|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &+ C_{26}\lambda^{20}(1+T)\|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N},\end{aligned} \tag{B.196}$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_8(1+\|\overline{y}\|_\infty + \|\overline{y}_t\|^2_{L^2\left(0,T;L^\sigma(\Omega)^N\right)} + \mathrm{e}^{\lambda_9 T\|\overline{y}\|^2_\infty})$ e $s \geqslant s_8(T^4+T^8)$.

Na desigualdade anterior, os termos $\|\theta\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}$ e $\|\theta'\varphi\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\omega_5)^N\right)}$ podem ser absorvidos pela integral

$$\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{2s\alpha^*}|\theta|^4\hat{\xi}|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Além disso, considerando a desigualdade $(1+T)^2 \leqslant 2(1+T^2)$ e as igualdades

$$\begin{aligned}&s^{15/2}\iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\hat{\xi}^{15/2}|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \|\theta g\|^2_{L^2(Q)^N},\\ &\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{2s\alpha^*}|\theta|^4\hat{\xi}|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = s^{15}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}\hat{\xi}^{16}|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

em (B.196), obtemos

$$\begin{aligned}I(s,\lambda;\varphi) \leqslant C_{28}(1+T^2)\Bigg[& s^{15/2}\lambda^{20}\iint\limits_{Q} \mathrm{e}^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\hat{\xi}^{15/2}|g|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &+ s^{16}\lambda^{40}\iint\limits_{\omega\times(0,T)} \mathrm{e}^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}\hat{\xi}^{16}|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Bigg],\end{aligned}$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_8(1+\|\overline{y}\|_\infty + \|\overline{y}_t\|^2_{L^2\left(0,T;L^\sigma(\Omega)^N\right)} + \mathrm{e}^{\lambda_9 T\|\overline{y}\|^2_\infty})$ e $s \geqslant s_9(T^4+T^8)$. Que é a desigualdade desejada, isto é, (13).

Referências

[1] Adams, R. A., and Fournier, J. J. *Sobolev spaces.* Elsevier, 2003. Citado na página 22.

[2] Alekseev, V. M. *Optimal control.* Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 32.

[3] Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E. *Fundamentos de análise funcional.* SBM, 2012. Citado nas páginas 28, 30 e 31.

[4] Boyer, F., and Fabrice, P. Mathematical tools for the Navier-Stokes equations and models related to the study of incompressible fluids, 2013. Citado nas páginas 23, 24 e 26.

[5] Chae, D., Imanuvilov, O. Y., and Kim, S. M. Exact controllability for semilinear parabolic equations with neumann boundary conditions. *Journal of Dynamical and Control Systems 2*, 4 (1996), 449–483. Citado na página 13.

[6] Coron, J.-M. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique 317*, 3 (1993), 271–276. Citado na página 13.

[7] Coron, J.-M. On the controllability of 2D incompressible perfect fluids. *Journal de mathématiques pures et appliquées 75*, 2 (1996), 155. Citado na página 13.

[8] Coron, J.-M. On the controllability of the 2D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 1* (1996), 35–75. Citado na página 13.

[9] Coron, J.-M., and Fursikov, A. V. Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary. *Russian Journal of Mathematical Physics 4*, 4 (1996). Citado na página 13.

[10] Danchin, R., and Gallagher, I. Analyse non linéaire. *Notes de cours disponiblese l'adresse http://perso-math. univmlv. fr/users/danchin. raphael* (2006). Citado na página 29.

[11] De Oliveira, C. R. *Introdução à análise funcional.* Impa, 2001. Citado na página 31.

[12] Egorov, Y. V. Some problems in the theory of optimal control. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki 3*, 5 (1963), 887–904. Citado na página 12.

[13] Ekeland, I., and Temam, R. *Convex Analysis and Variational Problems*. SIAM, 1999. Citado na página 27.

[14] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, vol. 19. American Mathematical Society, 2010. Citado nas páginas 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 31 e 78.

[15] Fattorini, H. Boundary control of temperature distributions in a parallelepipedon. *SIAM Journal on Control 13*, 1 (1975), 1–13. Citado na página 12.

[16] Fernández-Cara, E., and Guerrero, S. Local exact controllability of micropolar fluids. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics 9* (2007), 419–453. Citado na página 33.

[17] Fursikov, A. V. Exact boundary zero controllability of three-dimensional Navier-Stokes equations. *Journal of Dynamical and Control Systems 1*, 3 (1995), 325–350. Citado na página 13.

[18] Fursikov, A. V., and Imanuvilov, O. Local exact controllability of the Navier-Stokes equations. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique 323*, 3 (1996), 275–280. Citado na página 13.

[19] Fursikov, A. V., and Imanuvilov, O. Y. On exact boundary zero-controlability of two-dimensional Navier-Stokes equations. *Acta Applicandae Mathematica 37*, 1-2 (1994), 67–76. Citado na página 13.

[20] Fursikov, A. V., and Imanuvilov, O. Y. On controllability of certain systems simulating a fluid flow. In *Flow Control* (1995), Springer, pp. 149–184. Citado na página 13.

[21] Fursikov, A. V., and Imanuvilov, O. Y. Controllability of evolution equations. *Lecture Notes, Seoul National University, Korea 34* (1996). Citado nas páginas 13 e 80.

[22] Fursikov, A. V., and Imanuvilov, O. Y. Local exact boundary controllability of the Boussinesq equation. *SIAM Journal on Control and optimization 36*, 2 (1998), 391–421. Citado na página 13.

[23] Giga, Y., and Sohr, H. Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains. *Journal of functional analysis 102*, 1 (1991), 72–94. Citado na página 82.

[24] Glass, O. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics 325*, 9 (1997), 987–992. Citado na página 13.

[25] Ho, L. F. Boundary observability of the wave-equation. *COMPTES RENDUS DE L ACADEMIE DES SCIENCES SERIE I-MATHEMATIQUE 302*, 12 (1986), 443–446. Citado na página 12.

[26] Hörmander, L. Distribution theory and Fourier analysis. *(No Title)* (1986). Citado na página 12.

[27] Hörmander, L., et al. Linear partial differential operators [electronic resource]. *(No Title)* (1965). Citado na página 12.

[28] Imanuvilov, O. Y. Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 6* (2001), 39–72. Citado na página 15.

[29] Imanuvilov, O. Y. Local exact controllability for the 2D Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. In *Turbulence Modeling and Vortex Dynamics: Proceedings of a Workshop Held at Istanbul, Turkey, 2–6 September 1996* (2007), Springer, pp. 148–168. Citado na página 13.

[30] Imanuvilov, O. Y., and Puel, J.-P. Global Carleman estimates for weak solutions of elliptic nonhomogeneous Dirichlet problems. *International Mathematics Research Notices 2003*, 16 (2003), 883–913. Citado na página 81.

[31] Imanuvilov, O. Y., and Puel, J.-P. Local exact controllability of the Navier-Stokes system. *Journal de mathématiques pures et appliquées 83*, 12 (2004), 1501–1542. Citado nas páginas 14 e 36.

[32] Imanuvilov, O. Y., and Yamamoto, M. Carleman inequalities for parabolic equations in sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences 39*, 2 (2003), 227–274. Citado na página 13.

[33] Isakov, V. On uniqueness in a lateral Cauchy problem with multiple characteristics. *Journal of Differential Equations 1*, 134 (1997), 134–147. Citado na página 12.

[34] Jerison, D. Carleman inequalities for the Dirac and Laplace operators and unique continuation. *Advances in Mathematics 62*, 2 (1986), 118–134. Citado na página 12.

[35] Jerison, D., and Kenig, C. E. Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators. *Annals of Mathematics 121*, 3 (1985), 463–488. Citado na página 12.

[36] Kazemi, M. A., and Klibanov, M. V. Stability estimates for ill-posed cauchy problems involving hyperbolic equations and inequalities. *Applicable Analysis 50*, 1-2 (1993), 93–102. Citado na página 12.

[37] Kim, Y. M. Carleman inequalities for the Dirac operator and strong unique continuation. *Proceedings of the American Mathematical Society 123*, 7 (1995), 2103–2112. Citado na página 12.

[38] Lasiecka, I., and Triggiani, R. Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled, nonconservative second-order hyperbolic equations. In *Partial differential equation methods in control and shape analysis*. CRC Press, 1997, pp. 231–260. Citado na página 12.

[39] Medeiros, L. A., and Miranda, M. M. Espaços de Sobolev. *IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil* (2000). Citado na página 23.

[40] Nina Huaman, D. Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N-dimensional com N-1 controles escalares. *Dissertação (Mestrado)* (2015). Citado na página 36.

[41] Puel, J.-P. Controllability of Navier-Stokes equations. *Optimization with PDE Constraints: ESF Networking Program'OPTPDE'* (2014), 379–402. Citado na página 34.

[42] Rocha, M. S. *Controlabilidade aproximada e nula para a equação do calor linear*. PhD thesis, [sn], 2022. Citado na página 82.

[43] Russell, D. L. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in applied mathematics 52*, 3 (1973), 189–211. Citado na página 12.

[44] Russell, D. L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions. *Siam Review 20*, 4 (1978), 639–739. Citado na página 12.

[45] Simader, C. G., and Sohr, H. A new approach to the Helmholtz decomposition and the Neumann problem in L^q-spaces for bounded and exterior domains. In *Mathematical problems relating to the Navier-Stokes equations*. World Scientific, 1992, pp. 1–35. Citado na página 26.

[46] Temam, R. Navier-Stokes Equations: Theory and numerical analysis(book). *Amsterdam, North-Holland Publishing Co.(Studies in Mathematics and Its Applications* (1984), 410. Citado nas páginas 25, 33 e 35.