UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MATHEUS SILVEIRA CAMPOS

Fluxos generalizados para campos vetoriais de Sobolev

Campinas

2024

Matheus Silveira Campos

Fluxos generalizados para campos vetoriais de Sobolev

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Matheus Silveira Campos e orientada pelo Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C157f

Campos, Matheus Silveira, 1999-
Fluxos generalizados para campos vetoriais de Sobolev / Matheus Silveira Campos. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Campos vetoriais. 2. Espaços de Sobolev. I. Ledesma, Diego Sebastian, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Generalized flows for Sobolev vector fields
Palavras-chave em inglês:
Vector fields
Sobolev spaces
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Diego Sebastian Ledesma [Orientador]
Christian Horacio Olivera
Fabiano Borges da Silva
Data de defesa: 09-08-2024
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: orcid.org/0000-0001-9118-0067
- Currículo Lattes do autor: https://lattes.cnpq.br/0381867846478125

Dissertação de Mestrado defendida em 09 de agosto de 2024 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

Prof(a). Dr(a). CHRISTIAN HORACIO OLIVERA

Prof(a). Dr(a). FABIANO BORGES DA SILVA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à Deus por ter me permitido chegar até onde estou, por ter me guiado em todas as etapas e pela saúde e força durante esse trajeto.

Ao meu orientador e amigo **Diego Sebastián Ledesma** que ofereceu total apoio em todas as etapas deste trabalho e me ajudou a crescer na minha vida acadêmica.

A minha companheira **Milena Martins de Oliveira** que me ajudou, apoiou e incentivou em todos os momentos.

Em memória de minha avó paterna agradeço a ela, **Angelina Arantes Rodrigues** pelos ensinamentos, carinho e amor que me ofereceu durante toda minha infância. Aos meus avós maternos **Aparecida das Graças Ribeiro Silveira** e **Valdevino Antônio da Silveira** por todo o carinho dedicado aos netos.

A minha família que me apoiou e incentivou em todos os momentos, minha mãe **Silvania Donizete Silveira de Campos** que sempre me impulsionou a buscar meus sonhos e um futuro melhor. Ao meu pai **Liomar André de Campos** e meu irmão **Silas Silveira Campos** pelo companheirismo, a ajuda e a motivação durante todas as etapas da minha vida. As minhas irmãs **Amanda Silveira Campos** e **Lays Maria Silveira Campos** por todo o apoio, ajuda e incentivo.

Agradeço aos meus colegas de curso, em especial **Douglas Alves Gonzaga**, **Luis Carlos Urbiñes Suarez**, ,**Rodrigo Santiago Biasio**, **Vinicius Jose Joaquim Ferreira** e **Pedro Dragone Latini**.

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (**IMECC**) agradeço por toda experiência e conhecimento profissional e pessoal adquirido. Por fim, agradeço Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (**CNPq**) por ter fornecido o auxílio para o desenvolvimento deste trabalho sob o protocolo 131238/2022-1.

"O que o conhecimento faz é o mesmo
que acender um fósforo no campo no meio da noite.
Um fósforo não ilumina quase nada,
mas nos permite ver quanta escuridão existe ao redor."
- William Faulkner

Resumo

Este trabalho tem como objetivo encontrar o fluxos solução para campos em espaços de Sobolev. Para alcançar esse objetivo, consideramos uma família (V_t) de campos vetoriais de Sobolev e aplicamos regularizações no parâmetro temporal e espacial, obtendo uma nova família regular (V_t^ε) tal que $\|V_t^\varepsilon - V_t\| \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Em particular, para a regularização espacial foi usado o semi-grupo de calor. Com isto, construímos o fluxo associado à família (V_t) com regularidade de Sobolev, como limite do fluxo do campo regularizado (V_t^ε). O trabalho de referência utilizado para auxiliar este trabalho é [5].

Palavras-chave: Campo Vetorial. Espaco de Sobolev. Regularização. Fluxo.

Abstract

This work aims to find the solution flows for fields in Sobolev spaces. To achieve this goal, we consider a family (V_t) of Sobolev vector fields and apply regularizations to the temporal and spatial parameters, obtaining a new regular family (V_t^ε) such that $\|V_t^\varepsilon - V_t\| \to 0$, as $\varepsilon \to 0$. In particular, for spatial regularization, we use the heat semi-group. With this, we construct the flow associated with the family (V_t) with Sobolev regularity, as the limit of the flow of the regularized field (V_t^ε). The reference work used to assist this study is [5].

Keywords: Vector Field. Sobolev space. Regularization. Flow.

Lista de símbolos

$\mathbb{R}^n$	Conjunto das n-uplas $(x_1, \cdots, x_n)$ onde $x_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leqslant i \leqslant n$.
$(\mathbb{R}^n)^*$	Espaço dual de $\mathbb{R}^n$.
$\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$	Espaço dos k-tensores alternados.
$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$	Espaço dos campos vetoriais de $\mathbb{R}^n$).
$\frac{\partial}{\partial x_i}, \partial_i$	Derivada em relação a i-ésima coordenada.
$i_{\mathbf{V}}$	Produto interior em relação ao campo vetorial V.
$*$	Operador de Hodge.
$\mathbf{f}^*(\omega)$	Pull-back de ω.
$\Omega^k(\mathbb{R}^n)$	Conjunto das k-formas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$.
δ	Operador co-diferencial.
$\Box$	Operador laplaciano de Hodge-Rham.
Δ	Operador laplaciano.
$\mathrm{div}(V)$	Divergente de campo vetorial V.
$\nabla\varphi$	Gradiente de φ.
$\omega \in \Omega_c^n(M)$	Conjunto das n-formas diferenciáveis com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$.
$C^\infty(\mathbb{R}^n)$	Conjunto das funções que possuem derivadas de todas ordens em $\mathbb{R}^n$.
$C_c^k(\mathbb{R}^n)$	Conjunto das funções de C^K que possuem suporte compacto.
$\mathcal{L}_V$	Operador derivada de Lie ao longo do campo vetorial V.
$T_t^{\mathbb{R}^n}$	Semi-grupo do calor em $\mathbb{R}^n$ agindo em funções.
$T_1^{\mathbb{R}^n}$	Semi-grupo do calor em $\mathbb{R}^n$ agindo em funções.
$f\#\mu_1$	Medida pushforward.

Sumário

Introdução **12**
1 Campos vetoriais e formas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ **14**
1.1 Campos Vetoriais 14
1.2 Formas diferenciais $\mathbb{R}^n$ 19
1.3 O Laplaciano de Hodge-Rham em formas diferencias 24
1.4 Integração de formas e o Teorema de Stokes $\mathbb{R}^n$ 28
1.5 Derivada de Lie e a fórmula de Cartan 31
1.6 Resultados auxiliares 34
2 A equação do calor em $\mathbb{R}^n$ **36**
2.1 Solução da equação do calor homogênea em $\mathbb{R}^n$ 36
2.2 Semigrupo de calor em $\mathbb{R}^n$ 39
3 Conceitos de teoria da medida **43**
3.1 Teoria da medida 43
3.2 Os espaços L^P 54
4 Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$ **58**
4.1 Motivação e conceitos preliminares para os espaços de Sobolev 58
4.2 Os Espaços de Sobolev 60
5 Regularização de Campos Vetoriais em Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$ **65**
5.1 Regularização Espacial 67
5.2 Regularização no tempo 69
5.3 Construção do fluxo associado ao campo regularizado 72
6 Considerações Finais **81**

REFERÊNCIAS **82**

Introdução

Dada uma família de campos vetoriais $V\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathbf{C}^r$ associa-se naturalmente a seguinte equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_t}{\mathrm{d}t} = V\left(t, \varphi_t\right), \quad \varphi_t(0) = x \tag{1}$$

onde a função $\varphi_t\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisfazer a equação (1) é chamado de fluxo solução. Na teoria clássica das equações diferenciais ordinárias (EDO), se os campos são de classe $\mathbf{C}^r$, então o fluxo φ_t existe, tem regularidade $\mathbf{C}^r$ e é único.

A problemática do presente trabalho, surge ao perguntar se podemos enfraquecer a hipótese da família de campos vetoriais pertencerem ao espaço das funções classe $\mathbf{C}^r$ e possuírem apenas derivadas fracas, ou seja, pertencerem à espaços de Sobolev. Nesse contexto, a equação 1 pode perder o sentido, mas um questionamento pertinente é se existe ao menos algum conceito de solução para estes casos.

Para abordar essa problemática, neste trabalho consideramos uma família (V_t) de campos vetoriais de Sobolev. Nosso objetivo então é construir um *"fluxo solução"* para essa família. Com o intuito de alcançar este objetivo, vamos regularizar o parâmetro temporal e espacial desta família, ou seja, vamos aproxima-lo por campos vetoriais (V_t^ε) regulares tal que

$$\|V_t^\varepsilon - V_t\|_{L^p} \to 0 \tag{2}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Em particular, para a regularização espacial, será usado o semi-grupo de calor para 1-formas diferenciais. Logo, sabendo que cada (V_t^ε) tem fluxo solução, faremos $\varepsilon \to 0$, no processo, de construir o fluxo solução para (V_t).

O trabalho está divido em 5 capítulos. Nos 4 primeiros capítulos, abordaremos os conteúdos essenciais que serão utilizados para construir os tópicos do Capítulo 5. No primeiro capítulo, apresentaremos os objetos centrais do trabalho: os campos vetoriais e os fluxos soluções. Além disso, exploraremos as formas diferenciais, que desempenham um papel crucial no estudo dos campos vetoriais. No Capítulo 2, vamos estudar brevemente a equação do calor que está relacionada ao semi-grupo de calor em 1-formas diferenciais. O terceiro e quarto capítulo serão dedicados à apresentação dos espaços que estão os campos vetoriais. Deixamos claro que nenhuma das seções devem ser usadas como livro texto, as referências utilizadas serão deixadas ao longo do trabalho. Aqui, somente estaremos revisando o conteúdo essencial para a leitura do resultado do trabalho.

Para uma abordagem mais direta, o trabalho foi construído sobre a estrutura vetorial de $\mathbb{R}^n$, pois a compreensão de alguns tópicos pode se tornar mais fáceis e viáveis de compreensão, como por exemplo: formas diferenciais e semigrupos de calor. Um outro

motivo de ter feito esta abordagem em $\mathbb{R}^n$, é que este espaço é naturalmente o primeiro passo, para depois estudar resultados generalizados em variedades diferenciáveis.

O capítulo 5 é o cerne da dissertação e sua elaboração foi auxiliada pelo artigo citado [5]. Este capítulo começa com a regularização de uma família V_t de campos vetoriais de Sobolev pela família V_t^ε. Após a regularização, iremos construir uma família de medidas $\{\eta_\varepsilon\}$ no espaço de caminho de $\mathbb{R}^n$ (denotado por $W(\mathbb{R}^n)$), utilizando o fluxo solução X_t^ε associado ao campo V_t^ε. Vamos mostrar que essa família de medidas $\{\eta_\varepsilon\}$ é tight, e usando o teorema de Prokohov obtemos que existe existe uma sequência $\varepsilon_n \downarrow 0$ tal que η_{ε_n} converge fracamente para uma medida η em $W(\mathbb{R}^n)$. A medida η é fundamental para o trabalho, pois teremos que dada uma função real limitada φ, tem-se que

$$\int_{W(\mathbb{R}^n)} \varphi(\gamma(t))\mathrm{d}\eta(\gamma) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(X_t^{\varepsilon_n}\right) \mathrm{d}\mu_0 \tag{3}$$

e mostraremos que η está concentrada nas curvas integrais de V_t. Para ver isto, faremos a desintegração de η para cada $x \in \mathbb{R}^n$ obtendo a coleção de medidas η_x. Assim, η_x concentra-se em curvas integrais começando em x. O resultado final, consiste em mostrar que na verdade a medida η_x é uma delta de Dirac no espaço de caminhos $W(\mathbb{R}^n)$, provando que existe uma única curva integral γ começando em x para V_t^ε. Com isto, provamos a existência do fluxo solução mostrando que η está suportada no gráfico de uma função mensurável $X\colon \mathbb{R}^n \times [0,T] \to W(\mathbb{R}^n)$ e essa função será o fluxo procurado.

1 Campos vetoriais e formas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$

O propósito deste primeiro capítulo é introduzir dois dos principais objetos de estudo deste trabalho, que são os Campos vetoriais e os fluxos associados, seguindo a abordagem dos livros (Lima [12], 1973) e (Spivak [16], 1970). Todo o restante do capítulo será destinado para formas diferenciáveis, esses objetos tem um papel fundamental no estudo de campos vetoriais, visto que existe uma dualidade entre um campo vetorial e uma 1-forma diferencial e a partir dessa dualidade que será feita as regularizações e construções no último capítulo.

1.1 Campos Vetoriais

Começamos aqui com o estudo dos campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1. *Seja $r \geqslant 1$ um número inteiro e U um aberto de $\mathbb{R}^n$. Um* Campo Vetorial *de classe $\mathbf{C}^r$ em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação*

$$F\colon U \to \mathbb{R}^n$$

de classe $\mathbf{C}^r$. O conjunto dos campos vetoriais de classe $\mathbf{C}^r$ em $\mathbb{R}^n$ será denotado por $\mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^n)$.O conjunto de campos vetoriais $\mathbf{C}^\infty$ será denotado apenas por $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1. *Toda função $F\colon U \to \mathbb{R}^n$, pode ser escrita da forma*

$$F(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)), \text{ para todo } x \in U, \tag{1.1}$$

onde $f_i\colon U \to \mathbb{R}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. As funções f_i, são chamadas de funções coordenadas de F e a função F é de classe $\mathbf{C}^r$ se, e somente se, cada f_i for de classe $\mathbf{C}^r$ para $1 \leqslant i \leqslant n$.

Os campos vetoriais abordados neste trabalho, são campos vetoriais de Sobolev em $\mathbb{R}^n$, ou seja, na equação (1.1) as funções f_i com $1 \leqslant i \leqslant n$, são funções que estão no espaço de Sobolev, este espaço será abordado no Capítulo 4.

Exemplo 1. *Um exemplo clássico é o campo de força determinado pela lei da gravitação de Newton. Aqui o conjunto U de domínio é $\mathbb{R}^3$ menos a origem e o campo vetorial $\mathbf{C}^\infty$ é definido por*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}(x, y, z) \tag{1.2}$$

onde m é a massa de um corpo de teste, M é a massa do corpo central, G é a constante de gravitação, e $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$.

Um campo vetorial V de classe $\mathbf{C}^r$ definido em um subconjunto U aberto de $\mathbb{R}^n$ pode ser naturalmente associado a equação diferencial

$$x' = V(x)\,, \tag{1.3}$$

onde as soluções dessa equação são funções diferenciáveis $\varphi\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que satisfazem

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = V(\varphi(t))\,, \tag{1.4}$$

para todo $t \in I$. Se $V(x) = (f_1, \ldots, f_n)$ e $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ são as funções coordenadas de V e φ respectivamente, então a equação (1.4) se reduz as n equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d\varphi_i}{dt}(t) = f_i(\varphi_i(t))\,, \tag{1.5}$$

para todo $t \in I$ e $1 \leqslant i \leqslant n$. As curvas φ que satisfazem (1.4), são chamadas de *curvas integráveis* do campo vetorial V. Se considerarmos uma condição inicial para φ e considerar que o campo vetorial é de classe $\mathbf{C}^1$, tem-se um resultado de existência e unicidade para a curva integral, através do seguinte resultado

Teorema 1. *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $V\colon U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $\mathbf{C}^1$. Dado $p \in U$, existe uma curva integral $\lambda\colon (-c, c) \to U$ do campo V com condição inicial $\lambda(0) = p$. Mais ainda, se $\mu\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ for outra curva integral de V com $\mu(0) = p$, então $\lambda = \mu$ em um intervalo $(-\delta, \delta) \subset (-c, c) \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Demonstração. Seja B uma bola fechada de centro p, na qual as normas $|V|$ e $|V'|$ são limitadas por uma constante $k > 0$. Em particular, $x, y \in B$ implica $|V(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. Seja c um número real positivo tal que o produto ck seja menor do que 1 e do que o raio de B. Considere o espaço métrico E, formado pelos caminhos contínuos $\lambda : [-c, c] \to B$, com a métrica da convergência uniforme. Sabe-se que E é completo. Definimos uma aplicação $f : E \to E$ pondo, para cada $\lambda \in E$, $f(\lambda) = \mu$, onde

$$\mu(t) = p + \int_0^t V(\lambda(s))ds\,.$$

Note-se que $|\mu(t) - p| \leqslant ck <$ raio de B, donde $\mu(t) \in B$ e portanto $\mu \in E$. Observe-se também que se $\mu_1 = f(\lambda_1)$ e $\mu_2 = f(\lambda_2)$ então, para cada t,

$$|\mu_1(t) - \mu_2(t)| \leqslant \int_0^t |V(\lambda_1(s)) - V(\lambda_2(s))|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant ck \cdot \sup_s |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|$$

e portanto $d(\mu_1, \mu_2) \leqslant ck \cdot d(\lambda_1, \lambda_2)$. Como $ck < 1$, vê-se que $f : E \to E$ é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo para contrações (ver [13], Capítulo 5, Proposição 9), existe um único caminho $\lambda : [-c, c] \to B$ tal que $f(\lambda) = \lambda$. Isto significa

$$\lambda(t) = p + \int_0^t V(\lambda(s))ds\,.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, esta igualdade equivale a afirmar

$$\lambda'(t) = V(\lambda(t)), \quad \lambda(0) = p$$

Logo λ é uma curva integral com origem em p. Dada qualquer outra curva integral $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ com $\mu(0) = p$, podemos restringir λ e μ a um intervalo $[-\delta, \delta]$ tal que $\delta k < 1$ e $\delta k <$ raio de B. Então $\lambda = \mu$ em $[-\delta, \delta]$ pela unicidade do ponto fixo. □

O Teorema anterior foi demonstrado com intuito de valorizar a existência e unicidade no caso clássico de curvas integrais que serão usadas para definir fluxos soluções. Com o Teorema 1 anterior, vimos que para cada $x \in U$ existe uma única curva $\varphi_x \colon (\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$, então podemos definir uma nova função $\phi \colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\phi(t, x) \colon = \varphi_x(t) \tag{1.6}$$

e pelo Teorema 1 essa função satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = V(\phi(t, x)) \\ \phi\,(0, x) = x \end{cases}$$

A função (1.6) é chamada de fluxo para o campo vetorial V em $I \times \mathbb{R}^n$. Com base na discussão acima, definimos

Definição 2. *Seja V um campo vetorial , isto é, $V \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathbf{C}^r$ com $I \subset \mathbb{R}$ e $t_0 \in I$. O* Fluxo *de V iniciando no tempo t_0 é a aplicação*

$$X : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

que satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t, x) = V(X(t, x)) \\ X\,(t_0, x) = x \end{cases} .$$

Podemos mostrar que a função X da Definição 2, tem sua regularidades determinada a partir da regularidade do campo vetorial V. A seguir, tem-se um resultado que garante a continuidade do fluxo solução.

Teorema 2. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $V \colon U \to \mathbb{R}^n$ é localmente Lipschitz, então o fluxo $X : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido em (2) é contínuo.*

Demonstração. Ver [16], pág 144. □

Ao colocar condições adicionais no campo vetorial V, então podemos provar que o fluxo X possui mais regularidade. Na verdade, se V é de classe $\mathbf{C}^r$, então o fluxo X também é de classe $\mathbf{C}^r$. A prova desse resultado é bastante elaborada, o leitor interessado pode encontrar a prova em [11], pág 371 até 379. Com isso, se V é $\mathbf{C}^\infty$, então X é de classe $\mathbf{C}^r$ para todo r número inteiro, consequentemente X é $\mathbf{C}^\infty$.

Exemplo 2. *Seja $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $V(x,y) = (-y, x)$, então o fluxo associado a este campo vetorial iniciando em $t_0 = 0$ é $X\colon I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por*

$$X(t,(x,y)) = (xcost - ysent, xsent + ycost)\,.$$

Isto é fácil de se verificar, pois

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t,(x,y)) = (-xsent - ycost, xcost - ysent)$$

e

$$\begin{aligned} V(X(t,(x,y))) &= ((xcost - ysent, xsent + ycost)) \\ &= (-xsent - ycost, xcost - ysent)\,. \end{aligned}$$

Para encontrar X, basta notar que podemos escrever

$$X(t,\cdot) = \gamma_\cdot(t)$$

onde $\gamma_\cdot(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Assim,

$$V(\gamma(t,\cdot)) = V((\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (-\gamma_2(t), \gamma_1(t))$$

daí o problema se torna o sistema de equação diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \gamma_1'(t) = V((\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = -\gamma_2(t) \\ \gamma_2'(t) = V((\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \gamma_1(t) \end{cases} \Leftrightarrow \quad \gamma_2''(t) = -\gamma_2(t)$$

para resolver essa equação diferencial de segunda ordem associamos a equação característica

$$\lambda^2 - \lambda = (\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

e a solução para este tipo de equação é

$$\gamma_2(t) = e^{\alpha t}(C_1 sen\beta t + C_2 cos\beta t) =$$

onde α é o termo real da raiz complexa, β é o valor real do termo que acompanha a parte imaginaria. Neste caso, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, condições iniciais C_1 e C_2 são x e y respectivamente e a solução fica

$$\gamma_2(t) = xsent + ycos$$

e

$$\gamma_1(t) = -\gamma_2''(t) = xcost - ysent\,.$$

Esse processo pode ser feito para qualquer campo vetorial, concluindo que para encontrar o fluxo associado a um campo vetorial é equivalente a resolver um sistema com n equações diferenciais ordinárias.

Podemos generalizar o Teorema 2 para uma família de campos vetoriais. Para isso, vamos abordar família de campos vetoriais, sendo que o parâmetro é um intervalo de $\mathbb{R}$, o qual será chamado de parâmetro temporal.

Definição 3. *Seja* V *um campo vetorial dependendo do tempo, isto é,* $V\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma família de campo vetorial de classe* $\mathbf{C}^r$ *com* $I \subset \mathbb{R}$ *e* $t_0 \in I$*. O* Fluxo *de* V *iniciando no tempo* t_0 *é uma aplicação*

$$X : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

que satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t,x) = V(t, X(t,x)) \\ X\left(t_0, x\right) = x \end{cases}.$$

Vamos ver agora que, assim como para um campo vetorial único, sob as hipóteses certas, temos a existência e unicidade para o fluxo solução. Para isso, dado $V\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma família de campo vetorial defina $\bar{V}\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ por

$$\bar{V}(s,x) = (1, V(s,x)) \tag{1.7}$$

Assim, $\bar{V}$ é um campo vetorial, então pelo Teorema 1 existe um único fluxo $(\bar{\varphi_1}, \bar{\varphi_2}) = \bar{\phi}\colon I \times (I \times U) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ onde $(\bar{\varphi_1}, \bar{\varphi_2})$ são as funções coordenadas de ϕ, e o fluxo satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}(t,s,x) = \bar{V}(\bar{\phi}(t,s,x)) \\ \bar{\phi}\left(0,s,x\right) = (s,x) \end{cases}$$

Assim, a primeira função coordenada $\bar{\varphi_1}$ do fluxo $\bar{\phi}$ satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\varphi_1}}{\partial t}(t,s,x) = 1 \\ \bar{\varphi_1}\left(0,s,x\right) = s \end{cases}$$

Por isso

$$\bar{\varphi_1}\left(t,s,x\right) = t + s \tag{1.8}$$

Para a segunda função coordenada $\bar{\varphi_2}$ do fluxo $\bar{\phi}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi_2}}{\partial t}(t,s,x) =& V(\bar{\phi}(t,s,x)) \\ =& V(\bar{\varphi_1}(t,s,x), \bar{\varphi_2}(t,s,x)) \\ =& V(s+t, \bar{\varphi_2}(t,s,x)) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Daí

$$\beta(t,x) = \bar{\varphi_2}(t,0,x)) \tag{1.10}$$

Assim, β é o fluxo desejado para V

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \beta}{\partial t}(t,x) = V\left(t, \beta(t,x)\right) \\ \beta\left(0,x\right) = x \end{cases}$$

Assim, concluí-se que toda família de campos vetoriais possui um único fluxo associado

1.2 Formas diferenciais $\mathbb{R}^n$

Faremos aqui uma breve revisão das formas diferenciais. De modo geral, as 1-formas podem ser vistas como duais algébricos dos campos vetoriais. Deste modo, o estudo de formas e campos vetoriais estão internamente relacionados. Além disso, este objeto é fundamental na matemática, visto que esses objetos que podem ser integrados em variedades. Lembrando que *neste trabalho a variedade será o* $\mathbb{R}^n$. Para este capítulo, vamos seguir a abordagem do livro (Guillemin; Pollack [9], 2010).

Definição 4. *O* espaço vetorial dual de $\mathbb{R}^n$ *é*

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \alpha \text{ é linear } \}.$$

Os elementos de $(\mathbb{R}^n)^*$ *são denominados por funcionais lineares em* $\mathbb{R}^n$.

Como cada $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ é uma transformação linear, então ele é definido pela sua ação na base canônica de $\mathbb{R}^n$. Com isso, definimos os seguintes funcionais lineares: $dx_1, \ldots, dx_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ por

$$dx_i(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

e estendemos por linearidade, onde os (e_j) são os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Observação 2. *O conjunto* $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ *é base de* $(\mathbb{R}^n)^*$. *De fato, dado* $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ *tem-se*

$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n v^i \alpha(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n v^i \alpha_i$$

onde $\alpha_i = \alpha(\mathbf{e}_i)$. *Por outras palavras,*

$$\alpha(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i(\mathbf{v}) \Leftrightarrow \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$$

Não é difícil ver que $dx_1, \ldots, dx_n$ *são linearmente independentes, concluindo que é base de* $(\mathbb{R}^n)^*$.

Definição 5. *Um* k-tensor em $\mathbb{R}^n$ *é uma aplicação* T *multilinear* $T : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$, *tal que*

1. $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) + T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$;
2. $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = \lambda T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

Exemplo 3.
1. *Um funcional linear em* $\mathbb{R}^n$ *é um* 1*-tensor.*
2. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dado por* $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ *é um 2-tensor.*
3. $T : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ *dado por* $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *é um* n*-tensor.*

Definição 6. *Um* k-tensor α diz-se alternado*, se*

$$\alpha\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_j\ldots,\mathbf{v}_k\right)=-\alpha\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{v}_i\ldots,\mathbf{v}_k\right).$$

Denotamos por $\Lambda^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ *o espaço vetorial dos* k*-tensores alternados.*

O item (3) do Exemplo 3, é um exemplo de um k-tensor alternado. Podemos ver que uma base para o espaço vetorial $\Lambda^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ pode ser construída como segue. Dados $i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,n\}$, definimos $dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\in\Lambda^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ por

$$dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\right)=\det\begin{bmatrix} dx_{i_1}\left(\mathbf{v}_1\right) & \ldots & dx_{i_1}\left(\mathbf{v}_k\right)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ dx_{i_k}\left(\mathbf{v}_1\right) & \ldots & dx_{i_k}\left(\mathbf{v}_k\right)\end{bmatrix}$$

Observe que

$$dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}=-dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$$

e portanto

$$dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}\ldots\wedge dx_{i_k}=0.$$

Proposição 1. $\{dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\}_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}$ *é uma base para* $\Lambda^k\left(\mathbb{R}^n\right)$*, cuja dimensão é* $\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}$

Demonstração. Ver [9], pág 158. □

Se σ é uma permutação tal que $\sigma(1,\ldots,k)=(i_1,\ldots,l_k)$, então

$$dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}=sgn(\sigma)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_k\,.$$

Observação 3. *Define-se* $\Lambda^0\left(\mathbb{R}^n\right)=\mathbb{R}$.

Definição 7. *Se* $\alpha\in\Lambda^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ *e* $\beta\in\Lambda^l\left(\mathbb{R}^n\right)$*,*

$$\alpha=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\alpha_{i_1\ldots i_k}dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k},\quad \beta=\sum_{j_1<\ldots<j_l}\beta_{j_1\ldots j_l}dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_l}$$

definimos o seu produto exterior $\alpha\wedge\beta\in\Lambda^{k+l}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *como*

$$\alpha\wedge\beta=\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_k\\ j_1<\ldots<j_l}}\alpha_{i_1\ldots i_k}\beta_{j_1\ldots j_l}dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}$$

Proposição 2. *Propriedades do produto exterior:*

1. $\alpha\wedge(\beta+\gamma)=\alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\gamma$;

2. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl}\beta \wedge \alpha \quad \left(\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \beta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)\right)$;

3. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

Demonstração. Ver ref [9], pág 156 e 158. □

Exemplo 4. *Seja*

$$\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3$$

um 1-tensor alternado em $\mathbb{R}^3$ *e*

$$\eta = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$$

um 2-tensor alternado em $\mathbb{R}^3$*, tem-se que produto exterior é o 3-tensor alternado*

$$\omega \wedge \eta = x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_3 x_1 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = (x_3 x_1 - x_2)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Duas outras operações que pode ser definida no espaço dos k-tensores alternados $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, são as operações produto interior e o operador de Hodge.

Definição 8. *Seja* $v \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ *um campo vetorial e* $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ *uma* k*-tensor alternado, o* produto interior $i_{\mathbf{v}}\omega$ *é uma* $(k-1)$*-tensor alternado definido por:*

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{v}}\omega &= 0 && \text{se } \omega \text{ é uma } 0-\text{forma}, \\ i_{\mathbf{v}}\omega &= \omega(\mathbf{v}) && \text{se } \omega \text{ é uma } 1-\text{forma}, \\ i_{\mathbf{v}}\omega(\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_l) &= \omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_l) && \text{se } \omega \text{ é uma } k-\text{forma}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Exemplo 5. *Considere alguns 2-tensores alternados básicos dados por,* $dx \wedge dy, dy \wedge dz$ *e* $dx \wedge dz$*. E seja o campo vetorial* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$*, temos*

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{v}}(dx \wedge dy) &= (dx \wedge dy)(\mathbf{v}, \cdot) \\ &= dx(\mathbf{v})dy(\cdot) - dy(\mathbf{v})dx(\cdot) \\ &= v_1 dy - v_2 dx \\ i_{\mathbf{v}}(dy \wedge dz) &= (dy \wedge dz)(\mathbf{v}, \cdot) \\ &= dy(\mathbf{v})dz(\cdot) - dz(\mathbf{v})dy(\cdot) \\ &= v_2 dz - v_3 dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{v}}(dx \wedge dz) &= (dx \wedge dz)(\mathbf{v}, \cdot) \\ &= dx(\mathbf{v})dz(\cdot) - dz(\mathbf{v})dx(\cdot) \\ &= v_1 dz - v_3 dx. \end{aligned}$$

A seguir definimos o operador de Hodge. Este operador será essencial para este trabalho, pois permite definir o Laplaciano de Hodge-Rham.

Definição 9. *Seja $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ dada por $\omega = f_1 dx_{i_1} + ... + f_n dx_{i_n}$, onde f_i são funções reais em $\mathbb{R}^n$. O* operador de Hodge $*$*: $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n)$ será o único isomorfismo que aplica qualquer k-forma ω em sua $(n-k)$-forma dual, dado por*

$$*\omega = f_1(*dx_{i_n}) + ... + f_n(*dx_{i_n})$$

e satisfaz

$$dx_{i_n} \wedge (*dx_{i_n}) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$$

ou seja $dx_{i_n} \wedge (*dx_{i_n})$ é a forma volume

Proposição 3. *O operador $*$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $** \omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$,
2. $*(c_1\omega + c_2\eta) = c_1(*\omega) + c_2(*\eta)$,
3. $\omega \wedge *\omega = 0 \Rightarrow \omega = 0$.
4. $*1 = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ *e* $*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = 1$.

Demonstração. Ver Ref [15], pág 62 e 63. □

Exemplo 6. *Seja $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ dada por $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$, onde f_i são funções reais em $\mathbb{R}^n$. Então $*\omega$ é o 2-tensor alternado*

$$*\omega = f_1(*dx_1) + f_2(*dx_2) + f_3(*dx_3) = f_1(dx_2 \wedge dx_3) + f_2(-dx_1 \wedge dx_3) + f_3(dx_1 \wedge dx_2)$$

Assim, $*\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 - f_2 dx_1 \wedge dx_3 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$.

Definição 10. *Uma* forma diferencial de grau k em $\mathbb{R}^n$ *é uma função $\omega : \mathbb{R}^n \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ de classe C^∞. Denotamos por $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das k-formas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$.*

Definição 11. *Se $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$,*

$$\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} \omega_{i_1 ... i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

então a sua derivada exterior *é a $(k+1)$-forma $d\omega \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ definida por*

$$d\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 ... i_k}}{\partial x^i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Exemplo 7. *A derivada exterior de uma 0-forma f é a 1-forma*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx_i$$

Exemplo 8. *Seja $\omega \in \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ dada por $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$, então*

$$\boldsymbol{d}\omega = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

Definição 12. *Se $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^∞ e $\omega \in \Omega^k\left(\mathbb{R}^m\right)$ então o* "pull-back" *de ω por $\mathbf{f}$ é a forma-k $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ definida por*

$$\left(\mathbf{f}^*\omega\right)(\mathbf{x})\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\right) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\left(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \ldots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k\right).$$

Definição 13. *O "pull-back"de uma forma-0 ϕ por $\mathbf{f}$ é simplesmente a pré-composição $\phi \circ \mathbf{f}$.*

Proposição 4. *Propriedades derivada exterior e pull-back:*

1. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$;
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, *onde* $\left(\omega \in \Omega^k\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$;
3. $d(d\omega) = 0$;
4. $\mathbf{f}^*(\omega + \eta) = \mathbf{f}^*\omega + \mathbf{f}^*\eta$;
5. $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*\omega \wedge \mathbf{f}^*\eta$;
6. $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})^*(\omega) = \mathbf{f}^*\left(\mathbf{g}^*\omega\right)$;
7. $\mathbf{f}^*(d\omega) = d\left(\mathbf{f}^*\omega\right)$.

Demonstração. Ver [9]. □

Definição 14. *Dizemos que $\omega \in \Omega^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ é:*

1. fechada *se $d\omega = 0$;*
2. exata *se $\omega = d\eta$ para $\eta \in \Omega^{k-1}\left(\mathbb{R}^n\right)$.*

Proposição 5. *Se $\omega \in \Omega^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ é exata, então ω é fechada.*

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 4, pois como é exata, então $\omega = d\eta$. Daí, $d(\omega) = d(d\eta) = 0$. Portanto, ω é fechada. □

Exemplo 9. *A recíproca da Proposição 5 é falsa, o exemplo clássico é forma $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ definida por*

$$\omega(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy.$$

A 1-forma ω é fechada, pois

$$\begin{aligned} d\omega =& \frac{(-1)\left(x^2+y^2\right)+2y\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\wedge dy+\frac{\left(x^2+y^2\right)-2xx}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy\wedge dx \\ =& \frac{-\left(x^2+y^2\right)+2y^2-\left(x^2+y^2\right)+2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\wedge dy=0\,. \end{aligned}$$

Agora suponha que é exata, isto é, que exista θ tal que $d\theta=\omega$, então dado $\gamma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$ com $t\in[0,2\pi]$

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi}\omega\left(\gamma'(t)\right)dt \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{(-\cos t)}{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t}(-\cos t)+\frac{(-\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t}(-\operatorname{sen} t)dt \\ &= 2\pi\,. \end{aligned}$$

Mas por stokes

$$\int_\gamma w=\int_{\partial\gamma}dw=0\,.$$

o que é um absurdo, ou seja, ω não é exata.

1.3 O Laplaciano de Hodge-Rham em formas diferencias

O operador Laplaciano é muito usado na matemática, ele por exemplo aparece nas famosas equações de Laplace e de calor. Este operador será essencial para falar de semigrupo de calor em 1-formas diferenciais e a partir deste semigrupo que faremos as regularizações no último capítulo. O operador Laplaciano em $\mathbb{R}^n$ é definido sobre funções $u\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ por

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{1.12}$$

denotado por Δ. O Laplaciano definido anteriormente (1.12) sobre funções, essas funções podem ser vistas como 0-formas, então seria desejável estender o operador Laplaciano para k-formas, assim surge o operador Laplaciano de Hodge-Rham. Primeiro, precisamos do operador co-diferencial

Definição 15. *Seja $\omega\in\Omega^k(\mathbb{R}^n)$, o operador* co-diferencial *$\delta\colon\Omega^k(\mathbb{R}^n)\to\Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ é definido por $\delta=*\circ d\circ *$.*

Exemplo 10. *Seja a 1-forma em $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$\omega=f_1dx_1+f_2dx_2+f_3dx_3\,.$$

Encontremos o co-diferencial de ω. Do Exemplo 6, $*\omega$ é a 2-forma

$$*\omega=f_1dx_2\wedge dx_3-f_2dx_1\wedge dx_3+f_3dx_1\wedge dx_2\,.$$

Calculemos $d * \omega$.

$$\begin{aligned} d * \omega &= \partial_1 f_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \partial_2 f_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \partial_3 f_3 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \,. \end{aligned}$$

E por fim, calculemos $*d * \omega$

$$*d * \omega = *(d * \omega) = (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) * (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) \,.$$

Assim, se ω é o dual de um campo vetorial V, então

$$\delta\omega = \operatorname{div}(V) \,.$$

Exemplo 11. *Seja β a 2-forma de $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$\beta = (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\, dx_1 \wedge dx_2 + (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)\, dx_2 \wedge dx_3 + (\partial_3 f_1 + \partial_1 f_3)\, dx_3 \wedge dx_1 \,.$$

Calculemos o co-diferencial de β. Primeiro, $*\beta$

$$*\beta = (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\, dx_3 + (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)\, dx_1 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3)\, dx_2 \,.$$

Agora, $d * \beta$

$$\begin{aligned} d * \beta = &\left(\partial_1^2 f_2 - \partial_1\partial_2 f_1\right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\partial_2\partial_1 f_2 - \partial_2^2 f_1\right) dx_2 \wedge dx_3 \\ &+ \left(\partial_2^2 f_3 - \partial_2\partial_3 f_2\right) dx_2 \wedge dx_1 + \left(\partial_3\partial_2 f_3 - \partial_3^2 f_2\right) dx_3 \wedge dx_1 \\ &+ \left(\partial_1\partial_3 f_1 + \partial_1^2 f_3\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\partial_3^2 f_1 - \partial_3\partial_1 f_3\right) dx_3 \wedge dx_2 \\ &= \left(\partial_1^2 f_3 - \partial_2^2 f_3 + \partial_2\partial_3 f_2 + \partial_1\partial_3 f_1\right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &+ \left(-\partial_2^2 f_1 - \partial_3^2 f_1 + \partial_2\partial_1 f_2 + \partial_3\partial_1 f_3\right) dx_2 \wedge dx_3 \\ &+ \left(\partial_3^2 f_3 + \partial_1^2 f_2 - \partial_3\partial_2 f_3 - \partial_1\partial_2 f_1\right) dx_1 \wedge \partial dx_3 \,. \end{aligned}$$

Por fim, $*d * \beta$

$$\begin{aligned} *d * \beta = &\left(-\partial_2^2 f_1 - \partial_3^2 f_1 + \partial_2\partial_1 f_2 + \partial_3\partial_1 f_3\right) dx_1 \\ &+ \left(-\partial_3^2 f_2 - \partial_1^2 f_2 + \partial_3\partial_2 f_3 + \partial_1\partial_2 f_1\right) dx_2 \\ &+ \left(\partial_1^2 f_3 - \partial_2^2 f_3 + \partial_2\partial_3 f_3 + \partial_1\partial_3 f_1\right) dx_3 \,. \end{aligned}$$

Definição 16. *Seja $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, o operador* Laplaciano de Hodge-Rham $\square$: $\Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ *é definido por $\square = d\delta + \delta d$.*

Exemplo 12. *Calculemos o Laplaciano de Hodge-Rham da 1-forma em $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \,.$$

O Laplaciano de Hodge-Rham de ω é

$$\square\omega = d\delta\omega + \delta d\omega \,.$$

Do exemplo 10, temos a expressão de $\delta\omega$, basta calcular agora $d\delta(\omega)$, tem-se

$$\begin{aligned} d(\delta\omega) =& d\left[(\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3)\right] = \\ & \left(\partial_1^2 f_1 + \partial_1\partial_2 f_2 + \partial_1\partial_3 f_3\right) dx_1 + \left(\partial_2\partial_1 f_1 + \partial_2^2 f_2 + \partial_2\partial_3 f_3\right) dx_2 \\ & + \left(\partial_3\partial_1 f_1 + \partial_3\partial_2 f_2 + \partial_3^2 f_3\right) dx_3 \,. \end{aligned}$$

E do Exemplo 11, observe β é exatamente $d\omega = \beta$, a saber Exemplo 8. E como visto,

$$\begin{aligned} \delta\beta = \delta d\omega = & \left(-\partial_2^2 f_1 - \partial_3^2 f_1 + \partial_2\partial_1 f_2 + \partial_3\partial_1 f_3\right) dx_1 \\ & + \left(-\partial_3^2 f_2 - \partial_1^2 f_2 + \partial_3\partial_2 f_3 + \partial_1\partial_2 f_1\right) dx_2 \\ & + \left(\partial_1^2 f_3 - \partial_2^2 f_3 + \partial_2\partial_3 f_3 + \partial_1\partial_3 f_1\right) dx_3 \,. \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se

$$\begin{aligned} d\delta\omega - \delta d\omega =& \left(\partial_1^2 f_1 + \partial_1\partial_2 f_2 + \partial_1\partial_3 f_3\right) dx_1 + \left(\partial_2\partial_1 f_1 + \partial_2^2 f_2 + \partial_2\partial_3 f_3\right) dx_2 \\ & + \left(\partial_3\partial_1 f_1 + \partial_3\partial_2 f_2 + \partial_3^2 f_3\right) dx_3 - \left(-\partial_2^2 f_1 - \partial_3^2 f_1 + \partial_2\partial_1 f_2 + \partial_3\partial_1 f_3\right) dx_1 \\ & - \left(-\partial_3^2 f_2 - \partial_1^2 f_2 + \partial_3\partial_2 f_3 + \partial_1\partial_2 f_1\right) dx_2 \\ & - \left(-\partial_1^2 f_3 - \partial_2^2 f_3 + \partial_2\partial_3 f_3 + \partial_1\partial_3 f_1\right) dx_3 \\ =& \left(\partial_1^2 f_1 + \partial_2^2 f_1 + \partial_3^2 f_1\right) dx_1 + \left(\partial_2^2 f_2 + \partial_3^2 f_2 + \partial_1^2 f_2\right) dx_2 \\ & + \left(\partial_3^2 f_3 + \partial_1^2 f_3 + \partial_2^2 f_3\right) dx_3 \\ =& \left(\Delta f_1\right) dx_1 + \left(\Delta f_2\right) dx_2 + \left(\Delta f_3\right) dx_3 \,. \end{aligned}$$

Portanto, $\Box\omega = (\Delta f_1)\, dx_1 + (\Delta f_2)\, dx_2 + (\Delta f_3)\, dx_3$.

O Exemplo 12 motiva o seguinte resultado

Teorema 3. *Se $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\Box f = \Delta f \,.$$

Ainda, se $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ sendo que ω é da forma $\omega = f_1 dx_1 + \cdots f_n dx_n$, então

$$\Box\omega = \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i dx_i \,.$$

Demonstração. Primeiro, seja $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$, como $\delta(f) = 0$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\Box f &= d(\delta(f)) + \delta(d(f)) \\
&= \delta\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f \; dx_i\right) \\
&= *\, d \, *\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f \; dx_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} *\left(d\left(\partial_i f * (dx_i)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} *\left(d\left(\partial_i f \; (-1)^i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} *\left(\sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f \; dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n\right)\Bigg) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} f \; (-1)^i * \left(dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} f \; * \left((-1)^i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} * (d\mathbb{V}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} f = \Delta f \, .
\end{aligned}$$

Agora, seja a 1-forma $\omega = f dx_i$, calculemos $\Box\omega = (d\delta + \delta d) f dx_i$. Observe que a primeira parcela é

$$\begin{aligned}
(d\delta) f dx_i = (d * d*) f dx_i = d * d\left(f \; dx_1 (-1)^i \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n\right) \\
= d * \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f \; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\right) \\
= d\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f\right) \\
= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_{ij} f\right) dx_j \, .
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Agora a segunda parcela

$$\begin{aligned}
(\delta d)\, f dx_i &= *d* \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j dx_j \wedge dx_i \right) \\
&=^{i<j} *d \left(\sum_{j}^{n} \partial_j f \ (-1)^{i+j-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \right) \\
&= * \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j}^{n} \partial_{kj} f \ (-1)^{i+j-1} dx_k \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \right) \\
&= * \left(\sum_{j}^{n} \partial_{jj} f \ (-1)^{i} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \right) + \\
&* \left(\sum_{j}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_{ij} f \ (-1)^{i+j-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n \right) \\
&= \left(\sum_{j}^{n} \partial_{jj} f \right) dx_i + (-1) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_{jj} f \right) dx_j \,.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Na 2º igualdade de (1.14), foi usado $i < j$, similarmente prova-se o caso $i > j$. Assim, se $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ é da forma $\omega = f dx_i$, como $\omega = \delta d + d\delta$ somando (1.13) e (1.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\omega = \delta d + d\delta &= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_{ij} f \right) dx_j + \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_{jj} f \right) dx_i + (-1) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_{jj} f \right) dx_j \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_{jj} f \right) dx_i \\
&= (\Delta f)\, dx_i \,.
\end{aligned}$$

Portanto, se $\omega = f_1 dx_1 + \cdots f_n dx_n$ pela linearidade do operador $\Box$, tem-se

$$\Box\omega = \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i dx_i \,.$$

□

1.4 Integração de formas e o Teorema de Stokes $\mathbb{R}^n$

Conhecido os objetos que podem ser integrados sobre variedades, vamos definir formalmente a integral e alguns resultados que serão fundamentais para esse trabalho

Definição 17. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\omega \in \Omega^n(U)$ uma n-forma, então $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ para alguma $f \in \mathbb{C}^\infty(U)$. Definimos a* integral *de ω em U por*

$$\int_U \omega = \int_U f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

se a integral do lado direito existir, dizemos que ω é integrável.

Não entraremos em detalhes sobre a Definição 17 ser uma boa definição ou propriedade, para maiores detalhes consultar (Guillemin; Pollack[9], 2010, pág 165.) As formas foram criadas para integração, mas um questionamento interessante é "o que as torna integrandos apropriados?"Talvez a fundamental qualidade das formas é que elas podem transformar corretamente em outra integral quando as coordenadas são alteradas. Lembre-se do importante teorema do cálculo (prova pode ser encontrada em Spivak [16], 1970, pág 67). Se $f\colon V \to U$ é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$ e a uma função integrável em U. Então

$$\int_U a dx_1 \cdots dx_n = \int_V (a \circ f)|det(df)|dy_1 \cdots dy_n \tag{1.15}$$

este resultado segue similarmente para formas diferenciais, pois se temos $\omega = a dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ e f é o difeomorfismo considerado, então

$$f^*(\omega) = (a \circ f) det(df) y_1 \wedge \cdots \wedge dy_n\,. \tag{1.16}$$

Daí se f preservar a orientação $det(df) > 0$, então o pull-back $f^*(\omega)$ é exatamente o integrando (1.15). Precisamente

Proposição 6. *Seja* $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ *um difeomorfismo definido em um aberto conexo* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Se* ω *é uma forma diferencial integrável em* $\Phi(U)$, *então* $\Phi^*\omega$ *é integrável em* U *e*

$$\int_{\Phi(U)} \omega = \pm \int_U \Phi^*\omega,$$

sendo que o $\pm$ *é o sinal do determinante da matriz jacobiana* $\Phi'(p)$.

Demonstração. Ver [9], pág 168. □

O leitor familiarizado com a teoria de variedades, deve reparar que como as variedades deste trabalho são abertos de $\mathbb{R}^n$ e, portanto, eles são sempre orientáveis. Assim, podemos ter uma certa liberdade alguns resultados desta teoria, que necessitaria de variedades orientáveis. Com base na Proposição, vamos definir integrais sobre k-formas $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto, isto é, dado $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, então o conjunto

$$\sup \omega = \overline{\{p \in \mathbb{R}^n : \omega_p \neq 0\}},$$

é compacto. Denotamos por $\Omega^k_c(M)$ as formas diferenciais de grau k com suporte compacto. Agora vamos considerar U aberto em $\mathbb{R}^n$ como variedade orientada de dimensão n e seja $\omega \in \Omega^n_c(U)$ uma forma diferencial com suporte compacto. Definimos a integral sobre U da seguinte forma:

$$\int_U \omega = \int_{\Phi(V)} (\Phi^{-1})^*\omega, \tag{1.17}$$

onde (V, Φ) é um sistema de coordenadas positivo de M.

Um problema que surge com a definição anterior, é que o aberto U possa ter mais de 1 parametrização, para isso vamos usar o conceito de partição da unidade, definido a seguir

Definição 18. *Uma partição da unidade em um espaço topológico* $\mathbb{R}^n$ *é uma família de funções contínuas* $\{\rho_i\}_{i\in I} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *de forma que, para cada ponto* $x \in \mathbb{R}^n$

1. *existe uma vizinhança de* x *em que todas, exceto uma quantidade finita, das funções são identicamente zero;*
2. *a soma das funções em* x *é 1 , ou seja,* $\sum_{i\in I} \rho_i(x) = 1$.

Daí, caso o aberto U em (1.17) possua mais de uma parametrização, definimos a integral sobre U por

$$\int_U \omega = \sum_\alpha \int_U \rho_\alpha \omega,$$

onde (V_α, Φ_α) é um sistema de coordenadas positivo de U e $\{\rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. Colocado essas definições, não é difícil checar que a integral definida acima satisfaz as propriedades de linearidade e aditividade. A próxima proposição nos dá uma fórmula para fazer uma mudança de variável na integral.

Teorema 4 (Fórmula mudança de variável)**.** *Sejam* U_1 *e* U_2 *abertos orientados de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\Phi : U_1 \to U_2$ *um difeomorfismo que preserva orientações. Então, para toda a forma diferencial* $\omega \in \Omega^n_c(U_2)$,

$$\int_{U_2} \omega = \int_{U_1} \Phi^*\omega.$$

Demonstração. Como Φ é um difeomorfismo e preserva orientações, existe uma cobertura de U_1 por sistemas de coordenadas (V_α, ϕ_α) positivos, tal que os $\Phi(V_\alpha)$ são domínios de sistemas coordenadas positivos $\psi_\alpha : \Phi(V_\alpha) \to \mathbb{R}^n$ de U_2. Se $\{\rho_\alpha\}$ é uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a esta cobertura, então $\{\rho_\alpha \circ \Phi\}$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$. Pela Proposição 6, tem-se que

$$\int_{\Phi(V_\alpha)} \rho_\alpha \omega = \int_{V_\alpha} \Phi^*(\rho_\alpha \omega) = \int_{V_\alpha} (\rho_\alpha \circ \Phi)\, \Phi^*\omega.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{U_2} \omega &= \sum_\alpha \int_{U_2} \rho_\alpha \omega \\
&= \sum_\alpha \int_{\Phi(V_\alpha)} \rho_\alpha \omega \\
&= \sum_\alpha \int_{V_\alpha} (\rho_\alpha \circ \Phi)\, \Phi^*\omega \\
&= \sum_\alpha \int_{U_1} (\rho_\alpha \circ \Phi)\, \Phi^*\omega = \int_{U_1} \Phi^*\omega.
\end{aligned}$$

□

O próximo teorema é um dos mais belos e importantes da Análise, o Teorema de Stokes. Ele generaliza vários dos grandes teoremas do cálculo, como por exemplo o Teorema fundamental do cálculo, Teorema de Green e o Teorema da divergência.

Teorema 5 (Teorema de Stokes)**.** *Seja U aberto com bordo, orientada, de dimensão n. Se $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ é uma forma de suporte compacto, então*

$$\int_{\partial U} \omega = \int_U \mathrm{d}\omega \,,$$

onde $\int_{\partial U} \omega$ significa a integral da restrição de ω ao bordo ∂U, isto é, integral da forma $i^*\omega$ com $i\colon \partial U \to U$ sendo a aplicação inclusão.

Demonstração. Ver [9], pág 183. □

Notamos que no Teorema de Stokes 5, se $\partial U = \varnothing$ ou $\omega\,|_{\partial U} = 0$, então

$$\int_U d\omega = 0 \,,$$

que é o que utilizamos neste trabalho

1.5 Derivada de Lie e a fórmula de Cartan

A derivada de Lie em $\mathbb{R}^n$ é um tipo de derivação em formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$, que preserva o grau da forma. Nessa seção, vamos introduzir esse conceito e abordar alguns resultados envolvendo esse conceito, que será usado neste trabalho.

Definição 19. *Chama-se* derivada de Lie de $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ *ao longo do campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ a forma diferencial $\mathcal{L}_X\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ definida por:*

$$\mathcal{L}_X\omega = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\left(\phi_X^t\right)^*\omega - \omega\right) \,,$$

onde ϕ_X^t é fluxo gerado por X.

Algumas propriedades básicas da derivada de Lie de formas diferenciais são dadas pela seguinte proposição:

Proposição 7. *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ um campo vetorial. A derivada de Lie $\mathcal{L}_X : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ satisfaz:*

1. $\mathcal{L}_X(a\omega + b\eta) = a\mathcal{L}_X\omega + b\mathcal{L}_X\eta$;

2. $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta$;

3. $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$, *se* $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;

4. $\mathcal{L}_X\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\mathcal{L}_X\omega$.

Demonstração. Ver [16], pág 151. □

A derivada de Lie pode se tornar trabalhosa por envolver em sua definição o pull-back pelo fluxo gerado do campo vetorial. O próximo resultado é muito interessante, pois permite visualizar as derivadas de Lie através de uma expressão algébrica envolvendo apenas produto interior e derivada exterior. Em alguns textos a fórmula a seguir é até mesmo chamada de fórmula mágica, devido a sua relevância.

Teorema 6 (Fórmula de Cartan)**.** *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ campo vetorial e $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ uma forma diferencial. Então:*

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega.$$

Demonstração. Pela Proposição 7 item (3), a derivada de Lie é de fato uma derivação. Por outro lado, pelas propriedades de derivada exterior e produto interior, também é uma derivação. Primeiro verificamos na 1-forma diferencial $\omega = f\ \mathrm{d}g$, onde $f, g \in C^\infty(M)$. Usando as propriedades da Proposição 7 a derivada de Lie dessa 1-forma é

$$\mathcal{L}_X(f\ \mathrm{d}g) = X(f)\mathrm{d}g + f\ \mathrm{d}(X(g)).$$

Já pelas propriedades da derivada exterior e produto interior:

$$\begin{aligned} i_X\mathrm{d}(f\ \mathrm{d}g) + \mathrm{d}i_X(f\mathrm{d}g) &= i_X(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g) + \mathrm{d}\left(fi_X\mathrm{d}g\right) \\ &= X(f)\mathrm{d}g - X(g)\mathrm{d}f + \mathrm{d}(fX(g)) \\ &= X(f)\mathrm{d}g + f\ \mathrm{d}(X(g)). \end{aligned}$$

Assim, segue que para 1-formas $\mathcal{L}_X\omega = i_X\ \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega$. Suponha que seja válido para uma k-forma. Seja ω uma $k+1$-forma, então $\omega = \sum_i \alpha_i \wedge \beta_i$ em que $\alpha_i \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ e $\beta_i \in \Omega(\mathbb{R}^n)$. Então da Proposição 7 item (1) e (2), observe que

$$\mathcal{L}_X\left(\alpha_i \wedge \beta_i\right) = \mathcal{L}_X\alpha_i \wedge \beta_i + \alpha_i \wedge \mathcal{L}_X\beta_i = \left(di_X + i_Xd\right)\alpha_i \wedge \beta_i + \alpha_i \wedge \left(di_X + i_Xd\right)\beta_i \quad (1.18)$$

A ultima igualdade da equação anterior (1.18), é obtida do resultado para 1-formas e pela hipótese de indução. Por outro lado

$$\begin{aligned} &\left(di_X + i_Xd\right)\left(\alpha_i \wedge \beta_i\right) = di_X\left(\alpha_i \wedge \beta_i\right) + i_Xd\left(\alpha_i \wedge \beta_i\right) \\ &= d\left(i_X\alpha_i \wedge \beta_i - \alpha_i \wedge i_X\beta_i\right) + i_X\left(d\alpha_i \wedge \beta_i - \alpha_i \wedge d\beta_i\right) \\ &= di_X\alpha_i \wedge \beta_i + i_X\alpha_i \wedge \beta_i - d\alpha_i \wedge i_X\beta_i + \alpha_i \wedge di_X\beta_i \\ &+ i_Xd\alpha_i \wedge \beta_i + d\alpha_i \wedge i_X\beta_i - i_X\alpha_i \wedge d\beta_i + \alpha_i \wedge i_Xd\beta_i \\ &= di_X\alpha_i \wedge \beta_i + \alpha_i \wedge di_X\beta_i + i_X \wedge d\alpha_i \wedge + \alpha_i \wedge i_Xd\beta_i \\ &= \left(di_X + i_Xd\right)\alpha_i \wedge \beta_i + \alpha_i \wedge \left(di_X + i_Xd\right)\beta_i \end{aligned} \quad (1.19)$$

Assim, das equações (1.18) e (1.19) e pelo item 2 da Proposição 7, tem-se

$$\mathcal{L}_X\left(\sum_i \alpha_i \wedge \beta_i\right) = (di_X + i_X d)\left(\sum_i \alpha_i \wedge \beta_i\right) \tag{1.20}$$

O que prova o resultado. □

Corolário 1. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $V\colon U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial e $\omega \in \Omega(U)$. Então vale que*

$$\int_U \mathcal{L}_V\omega = \int_{\partial U} i_V\omega$$

Demonstração. Pela fórmula de Cartan $\int_U \mathcal{L}_V\omega = \int_U i_V \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_V\omega$, mas $i_V\mathrm{d}\omega = 0$, aplicando Stokes, temos que

$$\int_U \mathcal{L}_V\omega = \int_{\partial U} i_V\omega$$

□

Proposição 8. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $V\colon U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial, $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ uma função de suporte compacto. Então vale que*

$$\int_U (V\phi)\, dx = -\int_U \phi\ \mathrm{div}(V) dx\,.$$

Demonstração. Do Corolário 1, tem-se que $\int_U \mathcal{L}_V(\phi dx) = \int_{\partial U} i_V(\phi dx) = 0$. Agora note que, $\mathcal{L}_V(\phi dx) = V\phi dx + \phi\mathcal{L}_V dx$. Assim, $\int_U \mathcal{L}_V(\phi dx) = \int_U (V\phi dx + \phi\mathcal{L}_V dx) = 0$ Portanto, como $\mathcal{L}_V dx = \mathrm{div}(V)dx$

$$\int_U (V\phi)\, dx = -\int_U \phi\ \mathrm{div}(V) dx\,.$$

□

O próximo resultado é um Teorema que conecta o operador Laplaciano de Hodge-Rham e a derivade de Lie, para este resultado vamos considerar os campos de vetores $e_i \in \mathfrak{X}(U)$ definidos por

$$e_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \tag{1.21}$$

onde 1 está na i-ésima coordenada.

Teorema 7. *Seja U é um aberto de $\mathbb{R}^n$, $e_i \in \mathfrak{X}(U)$ é o campo vetorial projeção na i-ésima coordenada e $\omega \in \Omega(U)$, então*

$$\Box\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{e_i}^2\omega\,.$$

Demonstração. Seja $\omega = f dx_j$. Note que

$$\mathcal{L}_{e_i}(f dx_j) = \partial_i f dx_j + f \mathcal{L}_{e_i} dx_j = \partial_i f dx_j + f d\delta_{ij} = \partial_i f dx_j$$

e

$$\mathcal{L}^2_{e_i}(f dx_j) = \mathcal{L}_{e_i}(\partial_i f dx_j) = \partial_i^2 f dx_j$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^2_{e_i}(f dx_j) = (\Delta f)\, dx_j$$

Daí pela linearidade da derivada de Lie da Proposição 7 item (1) e o Teorema 3, tem-se para $\omega = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^2_{e_i} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j dx_j \right) = \sum_{j=1}^{n} (\Delta f_j)\, dx_j = \Box\omega$$

□

1.6 Resultados auxiliares

Esta seção será reservada para enunciarmos alguns resultados que serão essenciais no nosso trabalho. Agora, vamos enunciar e mostrar duas versões do Lema de Gronwall

Lema 1 (Lema de Grönwall para integrais)**.** *Se, para $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ as funções $\phi(t) \geqslant 0$ e $\psi(t) \geqslant 0$ são funções continuas tais que a desigualdade*

$$\phi(t) \leqslant K + L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)\mathrm{d}s$$

se mantenha em $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, com K e L sendo constantes positivas, então

$$\phi(t) \leqslant K \exp\left(L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\mathrm{d}s \right)$$

sendo $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Demonstração. Note que

$$\frac{\phi(t)}{K + L\int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)\mathrm{d}s} \leqslant 1$$

definindo $u(t) := K + L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)\mathrm{d}s$, tem-se

$$\frac{u'}{u} \leqslant \mathrm{Ln}(s)$$

Integrando entre t_0 e t, obtemos:

$$\ln u - \ln u\left(t_0\right) \leqslant L \int_{t_0}^{t} \psi(s) ds$$

Aplicando exponenciais:

$$u(t) \leqslant u\left(t_0\right) \exp\left(L \int_{t_0}^{t} \psi(s) ds\right)$$

como $u\left(t_0\right) = K$ e $\phi(t) \leqslant u(t)$, vale:

$$\phi(t) \leqslant K \exp\left(L \int_{t_0}^{t} \psi(s) ds\right)$$

□

Lema 2 (Lema de Grönwall versão diferencial)**.** *Seja* $u(t)$ *uma função não negativa e diferenciável em* $[0, T]$*, tal que* $u'(t) \leqslant f(t)u(t) + g(t)$*, onde* $f(t)$ *e* $g(t)$ *são funções integráveis em* $[0,\ \mathrm{T}]$*, então*

$$u(t) \leqslant u(0) e^{\int_0^t f(\tau) dr} + \int_0^t g(s) e^{\int_1^1 f(\tau) d\tau} ds, \forall t \in [0, T]$$

Se $f(t)$ *e* $g(t)$ *forem não negativas, então a expressão se simplifica por*

$$u(t) \leqslant e^{t\int_0^t f(T) dt} \left[u(0) + \int_0^t g(s) ds\right], \forall t \in [0, T]$$

Demonstração. Multiplicamos a expressão pelo fator integrante $e^{\int_0^t f(t) dt}$ e rearranjamos os termos

$$\left(u(t) e^{-\int_0^l f(t) dt}\right)' \leqslant g(t) e^{-\int_0^t f(t) d\tau}$$

Integrando de 0 a t

$$u(t) e^{-\int_0^t f(\tau) dr} - u(0) \leqslant \int_0^t g(s) e^{-\int_0^t f(\tau) dt} ds$$

$$u(t) \leqslant e^{\int_0^l f(t) dt} \left[u(0) + \int_0^t g(s) e^{\int_s^t f(t) dt} ds\right]$$

□

2 A equação do calor em $\mathbb{R}^n$

O intuito deste capítulo é estudar brevemente a equação do calor em $\mathbb{R}^n$, encontrar a solução da equação do calor homogênea e definir o semigrupo de calor para funções. O conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto que estará representando um corpo. A equação que descreve a temperatura do corpo ao longo do tempo é

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t), \quad x \in U, t > 0 \\ &\mathcal{B}u(x,t) = 0, \quad x \in \partial U, t > 0, \\ &u(x,0) \quad = u_0(x), \quad x \in U \end{aligned}$$

em que $\mathcal{B}$ corresponde a condições de contorno. A função f é uma função indicando fontes de calor ao longo do corpo U e u_0 é uma função dada inicialmente ao problema, chamada de condição inicial.

2.1 Solução da equação do calor homogênea em $\mathbb{R}^n$

A equação do calor a ser considerada neste trabalho, é o caso em que $U = \mathbb{R}^n$ e não existem fontes de calor, isto é, $f = 0$. Neste caso, não precisamos nos preocupar com condições de contorno, já que a fronteira de $\mathbb{R}^n$ é vazia. A equação se torna

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ &u(x,0) \quad = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vamos ver que a solução é

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \tag{2.2}$$

Para encontrar a solução u, vamos aplicar transformada de Fourier na variável x. Primeiramente vamos definir o que é transformada de Fourier e algumas propriedades

Definição 20. *Seja f uma função real (ou complexa), define-se a* transformada de Fourier *$\mathcal{F}$ de f como:*

$$\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt.$$

ou ainda, denotamos $\mathcal{F}(w) = \hat{f}(w)$.

Definição 21. *Seja $\mathcal{F}$ uma função real (ou complexa), define-se a* transformada inversa de Fourier *f de $\mathcal{F}$ como:*

$$f(t) = F^{-1}\{\mathcal{F}(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw.$$

Exemplo 13. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Logo $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$. De fato, temos*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\xi_1} e^{-\frac{x_1^2}{2}} dx_1\right) \ldots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n\xi_n} e^{-\frac{x_n^2}{2}} dx_n\right) \\ &= \left(\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi_1^2}{2}}\right) \ldots \left(\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi_n^2}{2}}\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}\end{aligned}$$

Proposição 9 (Linearidade)**.** *Para quaisquer números complexos a e b, se* $\mathrm{f(t) = ag(t) + bh(t)}$*, então* $\hat{\mathrm{f}}(\omega) = \mathrm{a}\hat{\mathrm{g}}(\omega) + \mathrm{b}\hat{\mathrm{h}}(\omega)$*.*

Demonstração. Vem direto da propriedade de linearidade da integral. Seja, $\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{ag(t) + bh(t)\}$

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{\infty} (ag(t) + bh(t)) e^{-it\omega} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ag(t) e^{-it\omega} dt + \int_{-\infty}^{\infty} bh(t) e^{-it\omega} dt \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-it\omega} dt + b\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-it\omega} dt \\ &= a\hat{g}(\omega) + b\hat{h}(\omega)\end{aligned}$$

□

Proposição 10 (Deslocamento no eixo t)**.** *Considerando uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $\mathcal{F}(\omega)$, então*

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{-ia\omega} F(\omega)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega) f(t-a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega(s+a)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega a} e^{-i\omega s} ds \\ &= e^{-i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \\ &= e^{-i\omega a} F(\omega)\end{aligned}$$

□

Proposição 11 (Transformada da derivada)**.** *Dada uma função diferenciável $f(t)$ tal que $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então*

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$$

Demonstração. Usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \left[f'(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= i\omega F(\omega)\end{aligned}$$

□

Visto algumas propriedades das transformadas de Fourier, vamos encontrar a solução da equação do calor. Vamos supor aqui u e u_0 seja de classe C^2. Aplicando a transformada de Fourier na equação (2.1), obtemos

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right) = \mathcal{F}(\Delta u(x,t))$$

ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = k\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\Delta u(x,t)dx.$$

Note que, para condições bastante gerais para u, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}u(x,t)dx$$

e que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\Delta u(x,t)dx \overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\left(e^{-ix\xi}\right)u(x,t)dx \\ &= -|\xi|^2\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}u(x,t)dx = -|\xi|^2\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}u(x,t)dx.\end{aligned}$$

Na passagem (1) foi utilizado apenas integração por partes. Vamos denotar por $\hat{u} = \mathcal{F}u$ a transformada de Fourier de u na variável x e por $\hat{u}_0 = \mathcal{F}u_0$ a transformada de Fourier de u_0. Assim, a equação do calor se torna:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\xi,t) &= -|\xi|^2\hat{u}(\xi,t), \quad t>0, \xi\in\mathbb{R}^n \\ \hat{u}(\xi,0) &= \hat{u}_0(\xi), \qquad\qquad \xi\in\mathbb{R}^n\end{cases}.$$

Mas esta equação é simples de resolver. De fato, como $f'(t) = af(t)$ implica que $f(t) = f(0)e^{at}$. Logo

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -|\xi|^2\hat{u}(\xi,t) \Longrightarrow \hat{u}(\xi,t) = e^{-|\xi|^2t}\hat{u}(\xi,0) = e^{-|\xi|^2t}\hat{u}_0(\xi)$$

Para descobrir $u(x,t)$ basta aplicar a transformada de Fourier inversa. Assim,

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2t}\hat{u}_0(\xi)\right) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}e^{-|\xi|^2t}\hat{u}_0(\xi)d\xi$$

Note que a integral acima já nos fornece a solução. Mas são duas integrais, pois $\hat{u}_0$ também é definida através de uma integral. Para deixar a solução mais simples, vamos usar convolução. Lembrando que $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi)\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{u}_0\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(u_0\right)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) * u_0\end{aligned}$$

Vamos agora calcular $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right)$.

Lema 3. *A seguinte fórmula é válida:* $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

Demonstração. Temos do Exemplo 13 que a transformada da gaussiana $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ é $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$ e que $\mathcal{F}\left(M_\delta f\right) = \dfrac{1}{\delta^n}\mathcal{F}f\left(\dfrac{\xi}{\delta}\right)$. Assim

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{\left(\frac{|x|}{\sqrt{2t}}\right)^2}{2}}\right) = (2t)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\right)(\sqrt{2t}\xi) = (2t)^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2}.$$

Logo

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left(e^{-\frac{\left(\frac{|x|}{\sqrt{2t}}\right)^2}{2}}\right) = (4\pi t)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\right)$$

Concluímos que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

□

Voltando aos cálculos, chegamos que

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) * u_0 = \left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right) * u_0 = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$$

Portanto, com as suposições iniciais a solução da equação do calor em $\mathbb{R}^n$

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy \tag{2.3}$$

2.2 Semigrupo de calor em $\mathbb{R}^n$

A teoria de semigrupos tem extrema importância na matemática, como por exemplo na área de equações diferenciais. Esta teoria, auxilia para encontrar existência, unicidade e regularizações de soluções dessas equações. Vamos dar uma pequena ideia de onde começa a teoria. Considere a seguinte equação diferencial em $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. A única solução deste problema é $x(t) = x_0 e^{at}$, para $t \in \mathbb{R}$. As propriedades da função $T(t) = e^{at}$ que fazem com que $x(t)$ seja solução do problema. Para ver essas propriedades, note primeiro que

$$\frac{d}{dt}T(t) = \lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)-T(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{a(t+h)}-e^{at}}{h} = e^{at}\lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{h}$$

Assim, $\dfrac{dT}{dt} = aT(t)$, para isso usamos $e^{c+d} = e^c e^d$ e $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{ah}-1}{h}$ = a. Este último limite só existe pois $\lim\limits_{h\to 0}\left(e^{ah}-1\right) = 0$. Observe as propriedades:

$$T(0) = 1, \quad T(t+s) = T(t)T(s) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}(T(h)-1) = 0$$

Com isso, vamos definir semigrupos. Mas primeiro precismos definir o que é operador limitado.

Definição 22. *Sejam X e Y espaços normados e $T\colon X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é um operador limitado, se existir $c > 0$ real tal que*

$$||Tx||_Y \leqslant c||x||_X \quad \forall x \in X\,. \tag{2.4}$$

Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ a família dos operadores lineares limitados de X.

Definição 23. *Dizemos que uma aplicação $T : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ é um* semigrupo de operadores lineares limitados *de X se as seguintes condições são satisfeitas*

1. *$T(0) = I$, onde I é o operador identidade de X;*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$;*

Se, além disso, tivermos

1. *$\|T(t) - I\|_{\mathcal{B}(X)} \xrightarrow{t\to 0^+} 0$, diremos que o semigrupo é uniformemente contínuo;*
2. *$\|T(t)x - x\|_X \xrightarrow{t\to 0^+} 0$, para cada $x \in X$, diremos que o semigrupo é fortemente contínuo, ou um C^0-semigrupo.*

A função exponencial pode ser facilmente estendida para um operador linear A limitado de um espaço de Banach X. Da seguinte forma

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!} \tag{2.5}$$

onde A^n é a composição do operador A, por n-vezes. Essa extensão fica bem definidas para operadores limitados, pois

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{||A||^n}{n!} \tag{2.6}$$

é convergente. Não vamos adentrar muito a essa teoria, vamos enunciar apenas o seguinte enunciado

Teorema 8. *Uma função $E : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{B}(X)$ satisfaz as condições*

1. $E(0) = I$;
2. $E(t + s) = E(t)E(S)$;
3. $\|E(t) - I\| \to 0$ *quando* $t \to 0^+$.

se, e somente se, $E(t) = e^{tA}$, onde A é um operador limitado em X e e^{tA} é definida em (2.6).

Demonstração. Ver [7], pág 15. □

O semigrupo de calor está relacionado a equação do calor, após definir este semigrupo, essa relação será dada através de uma proposição.

Definição 24. *O* semigrupo do calor em $\mathbb{R}^n$ *é a família de operadores $\left(e^{t\Delta}\right)_{t\geqslant 0}$, onde para cada t_0 é um operador em $e^{t_0\Delta} \colon C(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ definidos da seguinte maneira:*

$$\left(e^{0\Delta}u_0\right)(x) = u_0(x)$$

e

$$\left(e^{t\Delta}u_0\right)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u_0(y)dy, t > 0.$$

Verifica-se facilmente que a família $\left(e^{t\Delta}\right)_{t\geqslant 0}$ satisfaz

1. $e^{0\Delta}u_0 = u_0$;
2. $e^{(t+s)\Delta} = e^{t\Delta} \circ e^{s\Delta}, \forall t, s \geqslant 0$.

Observação 4. *Uma importante observação sobre a Definição 24 d semigrupo de calor é que a derivada em relação a x não age sobre a função u_0, mas ela age sobre a função $e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$, isto é,*

$$\partial_x\left(\left(e^{t\Delta}u_0\right)(x)\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x\left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right)u_0(y)dy$$

Neste trabalho o semigrupo de calor será denotado por $T_t^{\mathbb{R}^n}$ e em determinados contexto $T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}$. O semigrupo do calor está intimamente ligado à equação do calor

$$\begin{aligned}\partial_t u - \Delta u = 0 \quad &\text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)\\ u(x, 0) = f(x) \quad &\text{sobre } \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Sendo mais preciso, temos o seguinte o resultado:

Proposição 12. *Seja* $f \in (\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$u(x,t) = \left(e^{t\Delta} f\right)(x)$$

satisfaz

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \qquad em\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

Demonstração. Basta observar que a Definição (24) de $\left(e^{t\Delta} f\right)(x)$ é a solução da equação do calor em (2.3). □

Observação 5. *É comum encontrar o semigrupo de calor simplificado por* $e^{t\Delta} : C(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$, *dado por*

$$e^{t\Delta} u_0 = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y) u_0(y) dy \tag{2.7}$$

com $G_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$ *e* $t \geqslant 0$. *Na verdade, o semigrupo de calor pode ser definido em espaços mais gerais que* $C(\mathbb{R}^n)$, *que são os espaços* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *e das* 1*-formas diferenciais. Os espaços* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *será definido no Capítulo 4, mas já adiantamos que o semigrupo age identicamente a 24, onde a função* $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *No Capítulo 5 será feito um teorema envolvendo o semigrupo nos espaços* L^p *e ainda mostraremos como o semigrupo de calor age sobre* 1 *formas diferenciais.*

3 Conceitos de teoria da medida

Neste trabalho vamos considerar campos de Sobolev. Para definir estes campos é necessário definir os espaços de Sobolev, com isto, precisamos de alguns conceitos de teoria da medida. Além dos conceitos, também vamos abordar alguns resultados como por exemplo, o Teorema de Fubini e Prokohov, e diversos outros resultados necessários para o desenvolvimento do último capítulo.

A teoria da medida, é de extrema importância na matemática, pois ela fornece ferramentas para atribuir "tamanho"ou "medida"a conjunto, mesmo sendo infinitamente grande ou não enumeráveis, de uma maneira consistente e sólida. Ela estabelece a base sólida para teoria de integração de Lebesgue, que é uma generalização de integral de Riemann. A integração de Lebesgue, permite integrar funções mais gerais e é mais adequada para tratar limites de sequência de funções. Um outro ponto importante, é que com essa teoria ela permite a definir e estudar espaço de funções mensuráveis, como por exemplo os espaços L^p, que são os espaços centrais na análise funcional e diversas aplicações na teoria de equação diferencial parcial. A partir dos espaços L^p e o conceito de derivada fraca, que conseguiremos definir os espaços de Sobolev e esse é o espaço onde estão os campos vetoriais a serem trabalhados.

3.1 Teoria da medida

Vamos primeiro definir os objetos principais da teoria da medida que são os espaços de medidas e as funções mensuráveis, para esses conceitos iniciais usamos o livro (Bartle [2], 2014). Após isso, será feito uma revisão dos principais resultados dessa teoria e ainda resultados que serão essenciais para o desenvolvimento dos últimos capítulos. Agora, um material que recomendamos no qual aborda os principais conceitos da teoria da medida é o livro (Bogachev [3], volume 1 e 2, 2007).

Definição 25. *Uma família $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X é chamado de* σ-álgebra *se:*

1. *$\varnothing, X$ pertence a $\mathcal{M}$.*
2. *Se A pertence a $\mathcal{M}$, então o complemento $A^{\complement} = X \backslash A$ também pertence a $\mathcal{M}$.*
3. *Se (A_n) é uma sequência de conjuntos de $\mathcal{M}$, então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence a $\mathcal{M}$.*

O par ordenado $(X, \mathcal{M})$ consistindo de X e a σ-álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X é chamado de espaço mensurável. *Todo conjunto em $\mathcal{M}$ é chamado de* Σ-mensurável.

Ao considerar uma família qualquer $\mathcal{A}$ não vazia, exite a menor σ-álgebra que contém a coleção $\mathcal{A}$ (a saber, esta σ-álgebra é a interseção de todas as outras σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$). A menor σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$ é chamada de σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$.

Definição 26. *Se (X, τ) é um espaço topológico, então a σ-álgebra gerada por τ é chamada de* σ-álgebra de Borel. *Os elementos dessa σ-álgebra, são chamados de* Borelianos.

Definição 27. *Seja $f\colon (X_1, \mathcal{M}_1) \to (X_2, \mathcal{M}_2)$. Dizemos que a função f* é mensurável *se*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_1 \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{M}_2$$

isto é, a pré imagem de um conjunto mensurável é mensurável.

Definição 28. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Uma* medida *no espaço mensurável X é uma função $\mu\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup +\infty$ que satisfaz*

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu(A) \geqslant 0$, *para todo* $A \in \mathcal{M}$
3. $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_n\right)$, *para toda sequência* $(E_n) \in \mathcal{M}$

A tripla $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é chamado de espaço de medida. *Dizemos que X tem* medida finita *se $\mu(X) < \infty$. Se $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$, com $A_n \in \mathcal{M}$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que X é* $\sigma-$finito

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que certa proposição é válida *μ-quase sempre* se existe $N \in \mathcal{M}$ com $\mu(N) = 0$ tal que a proposição é válida no complemento de N. Por exemplo, duas funções em X são iguais μ-quase sempre, ou ainda, para quase todo ponto, se para algum $N \in \mathcal{M}$ com $\mu(N) = 0$, tem-se que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in C(N)$. Neste casos, vamos escrever por

$$f(x) = g(x) \quad \mu\text{-q.t.p}$$

Definição 29. *Uma função real $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ é dita* simples *se assumir apenas um número finito de valores. Podemos representar a função φ da seguinte forma*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \tag{3.1}$$

onde $a_j \in \boldsymbol{R}$ e χ_{E_j} é a função característica de E_j em $\boldsymbol{X}$

Definição 30. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se φ é uma função simples mensurável com a representação (3.1), definimos a* integral *de φ em relação a μ como sendo um número real da reta estendida*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(E_j\right)$$

Definição 31. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f\colon X \to \mathbb{R}^+$ é uma função real positiva e mensurável, definimos a* integral *de f com respeito a μ como sendo um número real da reta estendida*

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu$$

onde o supremo é sobre todas as funções simples φ mensuráveis satisfazendo $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in X$

Lema 4. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.*

1. *Se f e g funções reais positivas e mensuráveis e $f \leqslant g$, então*

$$\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$$

2. *Se $f\colon X \to \mathbb{R}^+$ é uma função real positiva e mensurável, se E, F pertence a X, e se $E \subseteq F$, então*

$$\int_E f d\mu \leqslant \int_F f d\mu$$

Demonstração. 1. Esse resultado segue das integrais para funções simples. Ver [2], pág 31.

2. Como $f_{X_E} \leqslant f_{X_F}$, segue imediatamente do item anterior.

□

O próximo Teorema é um dos grandes resultados da teoria da medida, que diz que sequências monótonas de funções mensuráveis que são convergentes, tem um bom comportamento de convergência em integrais. A saber

Teorema 9 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções positivas mensuráveis que converge para f, então*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Demonstração. A função f é mensurável (este resultado não será provado, ver Bartle). Assim, $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$, segue do Lema 4 parte (1) que

$$\int f_n d\mu \leqslant \int f_{n+1} d\mu \leqslant \int f d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que

$$\lim \int f_n d\mu \leqslant \int f d\mu$$

Para a outra desigualdade, seja α um número real $0 < \alpha < 1$ e φ uma função simples mensurável $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Seja

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geqslant \alpha\varphi(x)\}$$

note que $A_n \in X, A_n \subseteq A_{n+1}$, e $X = \bigcup A_n$. Com o Lema 4, tem-se

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leqslant \int_{A_n} f_n d\mu \leqslant \int f_n d\mu \tag{3.2}$$

Como a sequência (A_n) é monótona crescente, segue que

$$\int \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

Assim, ao tomar o limite em (3.2), obtemos

$$\alpha \int \varphi d\mu \leqslant \lim \int f_n d\mu$$

Como isso vale para todos α com $0 < \alpha < 1$, tem-se a desigualdade

$$\int \varphi d\mu \leqslant \lim \int f_n d\mu$$

como φ é uma função simples mensurável arbitrária que satisfaz $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, concluindo

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu \leqslant \lim \int f_n d\mu$$

Portanto, do Teorema 9 e (3.2) segue o resultado. □

Corolário 2. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, vale que*

1. *Se f é uma função real positiva e $c \geqslant 0$, então cf é mensurável e*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu$$

2. *Se f, g são funções reais positivas e mensuráveis, então $f + g$ é mensurável e*

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Demonstração. Ver [2], pág 33. □

O próximo Lema estabelece uma desigualdade relacionando a integral do limite inferior de uma sequência de funções com relação ao limite inferior de integrais destas funções. Esse Lema é essencial para prova um grande Teorema da teoria da medida, o Teorema da convergência dominada.

Lema 5 (Lema Fatou's)**.** *Se (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis positivas, então*

$$\int (\liminf f_n)\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n d\mu$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$, tem-se $g_m \leqslant f_n$ com $m \leqslant n$. Dessa forma, tem-se

$$\int g_m d\mu \leqslant \int f_n d\mu, \quad m \leqslant n$$

Assim,

$$\int g_m d\mu \leqslant \liminf \int f_n d\mu$$

Como a sequência (g_m) é crescente e converge para $\liminf f_n$, pelo Teorema da convergência monótona 9

$$\begin{aligned}\int (\liminf f_n)\, d\mu &= \lim \int g_m d\mu \\ &\leqslant \liminf \int f_n d\mu\end{aligned}$$

□

O Lema 5 pode falhar se não assumir que $f_n \geqslant 0$. Definimos integrais para funções $f\colon (X, \mathcal{M}, \mu) \to \mathbb{R}^+$, agora vamos definir para funções que podem assumir valores positivos e negativos

Definição 32. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço medida e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Dizemos que f é* integrável *em relação μ se as partes positivas e negativas f^+, f^- são integráveis em relação a μ e definimos*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Denotamos por $L = L(X, \mathcal{M}, \mu)$ o conjunto das funções integráveis. Se E é subconjunto X, nós definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

Proposição 13. *Uma função mensurável f pertence a L se e somente se $|f|$ pertence a L. Neste caso*

$$\left|\int f d\mu\right| \leqslant \int |f| d\mu$$

Demonstração. Por definição f pertence a L se, e somente se, f^+ e f^- são integráveis (no sentido da Definição 31). Assim, $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$ e $|f|^- = 0$. Daí, usando o Lema 4

$$\begin{aligned}\left|\int f d\mu\right| &= \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \\ &\leqslant \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu\end{aligned}$$

□

Corolário 3. *Se f é mensurável, g integrável e $|f| \leqslant |g|$, então f é integrável e*

$$\int |f| d\mu \leqslant \int |g| d\mu$$

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 13 e da Proposição 4 □

Proposição 14. *Se $f, g \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então as funções αf e $f + g$ estão em $L(X, \mathcal{M}, \mu)$*

Demonstração. Ver [2], pág 44. □

Definição 33. *Sejam μ e ν duas medidas em um espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$. Dizemos que ν é absolutamente contínua com respeito a μ se $\mu(A) = 0m$ implica que $\nu(A) = 0$, qualquer que seja A o conjunto mensurável. Neste caso escrevemos $\nu \ll \mu$. Caso tenhamos $\mu(A) = 0$ se, e somente se, $\nu(A) = 0$, dizemos que μ é equivalente a ν e escrevemos $\mu \sim \nu$.*

O próximo resultado é clássico na teoria da medida, ele expressa a relação entre duas medidas definidas no mesmo espaço mensurável.

Teorema 10 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida σ-finita. Seja $\nu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ uma medida σ-finita absolutamente contínua com respeito a μ. Então existe uma função mensurável não negativa $f : X \to \mathbb{R}$ tal que:*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

Demonstração. Ver [2], pág 85. □

A função $f \in L^1(\mu)$ obtida no Teorema de Radon-Nikodym é chamada de derivada de Randon-Nikodym ou densidade da medida ν em relação a medida μ e denotada por $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

O próximo Teorema nos fornece uma condição suficiente sob a qual os limites e integrais de uma sequência de funções podem ser trocados

Teorema 11 (Teorema da convergência dominada)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p para uma função real mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Demonstração. Ao redefinir as funções f_n, f em um conjunto de medida 0 podemos assumir que a convergência ocorre em todo X. Segue-se do Corolário 5.4 que f é integrável. Como $g + f_n \geqslant 0$, podemos aplicar o Lema de Fatou's 5 e a Proposição 14 para obter

$$\begin{aligned}\int g d\mu + \int f d\mu = \int (g+f) d\mu &\leqslant \liminf \int (g+f_n)\, d\mu \\ &= \liminf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\ &= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\int f d\mu \leqslant \liminf \int f_n d\mu \tag{3.3}$$

Como $g - f_n \geqslant 0$, aplicando novamente o Lema de Fatou's 5 e a Proposição 14, tem-se

$$\begin{aligned}\int g d\mu - \int f d\mu = \int (g-f) d\mu &\leqslant \liminf \int (g-f_n)\, d\mu \\ &= \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu\end{aligned}$$

Concluindo que

$$\limsup \int f_n \leqslant \int f d\mu\,. \tag{3.4}$$

Portanto de (3.3) e (3.4)

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu\,.$$

□

Definição 34. *Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff e $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra que contém τ. Dizemos que uma coleção de medidas (μ_i) é* tight *se dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto K_ε, tal que para todo μ_i tem-se*

$$\mu_i(K_\varepsilon^c) < \varepsilon$$

Definição 35. *Seja $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ espaços de medida. Definimos o* espaço de medida $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \mu_1 \times \mu_1)$ produto*, onde*

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \{A_1 \times A_2 \colon A_1 \in \mathcal{M}_1 \ e \ A_2 \in \mathcal{M}_2\} \\ &\mu_1 \times \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A)\mu_2(A_2)\end{aligned}$$

É conhecido da análise real que para integrais de Riemann em $\mathbb{R}^n$ é possível inverter a ordem de integrais múltiplas através do Teorema de Fubini, sob algumas condições. Um exemplo clássico que utiliza esse resultado é para resolver a integral gaussiana, definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \tag{3.5}$$

Na verdade, o Teorema de Fubini é válido para espaços de medida σ-finitos

Teorema 12 (Teorema de Fubini)**.** *Seja $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ espaços de medida σ-finitos e $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, então*

$$\int_{X_1}\left(\int_{X_2}|f(x,y)|\mathrm{d}\mu_2\right)\mathrm{d}\mu_1 = \int_{X_2}\left(\int_{X_1}|f(x,y)|\mathrm{d}\mu_1\right)\mathrm{d}\mu_2 = \int_{X_1\times X_2}|f(x,y)|\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2)$$

Além disso, se qualquer uma dessas integrais for finita, então

$$\int_{X_1}\left(\int_{X_2}f(x,y)\mathrm{d}\mu_2\right)\mathrm{d}\mu_1 = \int_{X_2}\left(\int_{X_1}f(x,y)\mathrm{d}\mu_1\right)\mathrm{d}\mu_2 = \int_{X_1\times X_2}f(x,y)\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2)$$

Demonstração. Ver [2], pág 120. □

Se tivermos um espaço mensurável e uma função mensurável, com o domínio sendo um espaço de medida e o contradomínio o espaço mensurável considerado, conseguimos definir uma medida neste espaço mensurável. Vejamos agora essa construção que será importante no nosso trabalho

Definição 36. *Seja $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ espaço de medida, $(X_2, \mathcal{M}_2)$ um espaço mensurável e $f\colon X_1 \to X_2$ uma função mensurável. Definimos a medida* pushforward *em X_2 por*

$$\mu_2(B) = \mu_1(f^{-1}(B)) \quad \textit{para todo } B \in \mathcal{M}_2 \tag{3.6}$$

A medida pushforward *muitas vezes é denotada por $f\#\mu_1$*

Se $\mathcal{P}$ for uma partição do conjunto X_1 e definirmos a projeção natural $\pi : X \to \mathcal{P}$ por $\pi(x) = P(x)$, onde $P \in \mathcal{P}$, chamaremos a medida $\pi\#\mu_1$ de medida quociente e denotamos por $\pi\#\mu_1 = \hat{\mu}$.

Proposição 15. *Seja $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ espaço de medida, $(X_2, \mathcal{M}_2)$ um espaço mensurável e $f\colon X_1 \to X_2$ uma função mensurável. Uma função g mensurável em X_2 é integrável com respeito a medida pushforward $f\#\mu_1$ se, e somente se, a composição $g \circ f$ é integrável com respeito a μ_1. Neste caso, as integrais coincidem*

$$\int_{X_2} g d(f\#\mu_1) = \int_{X_1} g \circ f d\mu_1 \tag{3.7}$$

Demonstração. Para funções indicadoras em conjuntos em $\mathcal{M}_2$, a fórmula (3.7) é a definição inicial da medida da pré-imagem de f, assim, ela se estende a funções simples. A seguir, esta fórmula se estende a funções $\mathcal{M}_2$-mensuráveis limitadas, uma vez que essas funções são limites uniformes de funções simples. Agora para estender para o caso em que g é uma função $\mathcal{M}_2$-mensurável, não negativa e que é integrável em relação a $f\#\mu_1$, então para as funções $g_n = \min(g, n)$ a igualdade (3.7) já está estabelecida por ser função simples. Pelo Teorema da convergência monótona 9, permanece verdadeiro para g, uma vez que as integrais das funções $g_n \circ f$ com respeito a medida μ são uniformemente limitadas.

Com o mesmp raciocínio, também mostra a necessidade da integrabilidade $g \circ f$ em relação μ para $g \geqslant 0$ em relação a $f\#\mu_1$. Portanto, como podemos escrever (3.7), como soma de funções positivas, obtemos o resultado para qualquer g. □

Definição 37. *Uma* desintegração de μ *relativamente a uma partição* $\mathcal{P}$ *de* X *é uma família* $\{\mu_P \colon P \in \mathcal{P}\}$ *de probabilidades em* X *tal que, para mensurável* $E \subset X$

1. $\mu_P(P) = 1$ *para* $\hat{\mu}$*-quase todo* $P \in \mathcal{P}$.
2. $P \mapsto \mu_P(E)$ *é mensurável.*
3. $\mu(E) = \int \mu_P(E) d\hat{\mu}(P)$.

Exemplo 14. *Considere o toro* $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$*, com a medida de Lebesgue* m*. O toro pode ser facilmente particionado pelos conjuntos* $\{y\} \times \mathbb{S}^1$ *com* $y \in \mathbb{S}^1$*. Denote por* m_y *a medida de Lebesgue sobre o círculo* $y \in \mathbb{S}^1$ *e* $\hat{m}$ *a medida sobre* $\mathbb{S}^1$*. Daí, se* $E \subset \mathbb{T}$ *é um conjunto mensurável, daí tem-se que*

$$m(E) = \int m_y(E) d\hat{m}(y)$$

Teorema 13 (Teorema de Rokhlin)**.** *Seja* X *um espaço métrico completo e separável, seja* $\mathcal{P}$ *uma partição mensurável de* X *e seja* μ *uma medida de probabilidade. Então* μ *admite uma desintegração relativamente à* $\mathcal{P}$*, ou seja, existe* $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ *tal que, para todo* $E \subset X$ *mensurável:*

1. $\mu_P(P) = 1$ *para* $\hat{\mu}$*-quase todo* $P \in \mathcal{P}$.
2. $P \mapsto \mu_P(E)$ *é mensurável.*
3. $\mu(E) = \int \mu_P(E) d\hat{\mu}(P)$.

Demonstração. Ver [14], pág 29. □

Definição 38. *Seja* $(X, \mathcal{M})$ *espaço mensurável. Dizemos que uma coleção de medidas* $\{\mu_m \colon n \in \mathbb{N}\}$ *em* X converge *para* μ

$$\mu_m(A) \to \mu(A) \tag{3.8}$$

para todo $A \in \mathcal{M}$*. Dizemos que a coleção* $\{\mu_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ *em* X converge fracamente *para* μ

$$\int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu \tag{3.9}$$

para toda f *limitada.*

No momento em que estivermos construindo o fluxo de uma família de campos vetoriais em Sobolev no último capítulo, vamos construir uma coleção $\{\eta_{\varepsilon_n}\}$ de medidas no espaço de caminhos $W(\mathbb{R}^n)$ e vamos mostrar que essa coleção é tight. Após isso, vamos aplicar o Teorema de Prokohov para conseguirmos uma sub-coleção que converge fracamente para uma medida em $W(\mathbb{R}^n)$. Então vamos enunciar e provar aqui o Teorema que vamos utilizar para mostrar que essa família é tight e também vamos enunciar o Teorema de Prokohov, cuja a demonstração pode ser achada, por exemplo, em (Bogachev [3], 2007). Primeiro precisamos do seguinte Lema.

Lema 6 (Desigualdade de Chebyshev)**.** *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \to [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável, $g : \mathrm{Im}(f) \to [0, +\infty]$ uma função mensurável não-negativa e não decrescente. Então*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geqslant t\}) \leqslant \frac{1}{g(t)} \int_X g \circ f d\mu.$$

Demonstração. Defina $A_t := \{x \in X : f(x) \geqslant t\}$ e seja X_{A_t} a função indicadora de A_t em $[0, +\infty]$. Então:

$$0 \leqslant g(t)1_{A_t} \leqslant g \circ f 1_{A_t} \leqslant g \circ f$$

Assim,

$$g(t)\mu\left(A_t\right) = \int_X g(t)1_{A_t} d\mu \leqslant \int_{A_t} g \circ f d\mu \leqslant \int_X g \circ f d\mu$$

E o resultado segue dividindo a desigualdade obtida por $g(t)$. □

Um caso particular e interesse, acontece quando substituímos f por $|f - c|$ e tomamos $g : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ como $g(x) = x^n$.

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - c| \geqslant t\}) \leqslant \frac{1}{t^n} \int_X |f - c|^n d\mu.$$

Teorema 14. *Seja μ uma medida em $\mathbb{R}^n$ e $X_i \colon \mathbb{R}^n \to W(\mathbb{R}^n)$ funções μ-mensuráveis com $i \in I$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ considere a coleção $(X_i(x)) \subset W(\mathbb{R}^n)$. Se $(X_i(x))$ satisfaz*

1. *existem constantes reais M e γ tal que*

$$d^{\gamma}\left(X_i(x)(0), 0\right) \leqslant M\,;$$

2. *existem constantes reais positivas α, β, M_i tais que*

$$d^{\alpha}(X_i(x)(t), X_i(x)(s)) \leqslant M_i|t - s|^{1+\beta}\,.$$

Então existe uma sequência $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tal que a coleção $\{X_{n_k}\#\mu\}$ é tight.

Demonstração. Primeiro observe duas propriedades que conseguimos com as condições (1) e (2). Pela desigualdade de Chebyshev's, tem-se

$$\mu\{x \in \mathbb{R}^n \colon |X_i(x)(0)| > N\} \leqslant M/N^\gamma \text{ para todo i}$$

tomando o supremo em i e fazendo $N \to \infty$, tem-se

$$\lim_N \sup_i \mu\{x \in \mathbb{R}^n \colon |X_i(x)(0)| > N\} = 0 \tag{3.10}$$

a outra propriedade, é que para cada $T > 0$ e $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_i \{ \max_{t,s \in [0,T]} |X_i(x)(t) - X_i(x)(s)| > \varepsilon\} = 0, \quad \text{onde } |t-s| \leqslant h \tag{3.11}$$

A propriedade (3.11) não será provada, mas pode ser encontrada em (Ikeda; Watanabe [10], pág 18). Pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, um subconjunto $A \subset W(\mathbb{R}^n)$ é relativamente compacto se, e somente se, satisfaz as condições: para cada $T > 0$

1. $\sup_{w \in A} \max_{t \in I} |w(t)| \leqslant \infty$ (condição uniformemente limitado).
2. $\lim_{h \downarrow 0} \sup_{w \in A} \{ \max_{t,s \in [0,T]} |w(s) - w(t)|\} = 0, \text{onde } |t-s| \leqslant h$ (condição equicontínua).

Agora note que fazendo a medida pushfoward de X_{n_k}, tem-se da equação (3.10), que dado $\varepsilon > 0$ existe $a > 0$ tal que

$$X_{n_k} \# \mu\{w \in A \colon |w(0)| \leqslant a\} > 1 - \varepsilon/2$$

para todo n_k. E para esse mesmo $\varepsilon > 0$ e $k = 1, 2, \ldots$, da equação (3.11) existe $h_k > 0$ tal que $h_k \downarrow 0$ e

$$X_{n_k} \# \mu \left(w; \max_{t,s \in [0,T]} |w(s) - w(t)| > 1/k \right) \leqslant \varepsilon / 2^{k+1}$$

onde $|t-s| \leqslant h_k$ e para todo n. Assim,

$$X_{n_k} \# \mu \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ w; \max_{t,s \in [0,T]} |w(s) - w(t)| \leqslant 1/k \right\} \right) > 1 - \varepsilon/2$$

com $|t-s| \leqslant h_k$. Definimos o conjunto

$$K_\varepsilon = \{w; |w(0)| \leqslant a\} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ w; \max_{t,s \in [0,T]} |w(s) - w(t)| \leqslant 1/k \right\} \right)$$

com $|t-s| \leqslant h_k$, então claramente K_ε satisfaz as condições do Teorema de Ascoli-Arzelà, e K_ε é relativamente compacto. Assim $X_{n_k} \# \mu\,(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ mostrando que $\{X_{n_k} \# \mu\}$ é tight. □

Teorema 15 (Teorema de Prokohov)**.** *Seja X espaço métrico completo separável e Λ uma família de medidas em X. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *cada sequência* $\{\mu_n\} \subset \Lambda$ *contém uma subsequência que converge fracamente;*

2. *a família* Λ *é tight e uniformemente limitada.*

As condições acima são equivalentes para qualquer espaço métrico completo X *se* Λ *é uma coleção de probabilidades.*

Demonstração. Ver [3], pág 202. □

Exemplo 15. *Um subconjunto* K *de um espaço métrico* X *tem fecho compacto se, e somente se, a família de medidas* $\{\delta_x : x \in K\}$ *tem fecho compacto na topologia fraca.*

3.2 Os espaços L^P

Revisamos aqui a construção do espaços L^p. Nesta seção o espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ estará fixo. Dado f uma função mensurável em X e $0 < p < \infty$ um número inteiro, definimos a seguinte norma

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p d\mu\right]^{1/p}$$

(existe a possibilidade de $\|f\|_p = \infty$).

Definição 39. *Se* f *é uma função mensurável em* X *e* $0 < p < \infty$ *um número inteiro, definimos*

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\}$$

O espaço $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ *será denotado apenas por* L^p.

Proposição 16 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja* $1 < p < \infty$ *e* $p^{-1} + q^{-1} = 1$ *(isto é,* $q = p/(p-1)$*). Se* f *e* g *são funções mensuráveis em* X*, então*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \tag{3.12}$$

Em particular, se $f \in L^p$ *e* $g \in L^q$*, então* $fg \in L^1$*, e neste caso a igualdade se* $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ *para constantes* α, β *com* $\alpha\beta \neq 0$.

Demonstração. Seja α um número real tal que $0 < \alpha < 1$ e a função φ para $t \geqslant 0$ definida por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

É fácil verificar que $\varphi'(t) < 0$ para $0 < t < 1$ e $\varphi'(t) > 0$ para $t > 1$. Do Teorema do valor médio, $\varphi(t) \geqslant \varphi(1)$ e que $\varphi(t) = \varphi(1)$, se, e somente se, $t = 1$. Assim temos

$$t^\alpha \leqslant \alpha t + (1 - \alpha), \quad t \geqslant 0.$$

Se a, b são não negativos, e deixarmos $t = a/b$ e multiplicarmos por b, temos a seguinte desigualdade

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha)b,$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $a = b$. Agora, seja p e q satisfy $1 < p < \infty$ e $(1/p) + (1/q) = 1$ tome $\alpha = 1/p$. Segue que se A, B são número quaisquer reais não negativos

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \tag{3.13}$$

e que a igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$. Suponha que $f \in L_p$ e $g \in L_q$, e que $\|f\|_p \neq 0$ and $\|g\|_q \neq 0$. O prdouto fg é mensurável e (3.13) com $A = |f(x)|/\|f\|_D$ e $B = |g(x)|/\|g\|_q$ implica em

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{|\ q\|g\|_q^q}.$$

Como ambos os termos à direita são integráveis, segue-se do Corolário 3 e do Teorema 14 que fg é integrável. E ainda, obtemos

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_,\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Concluindo a demonstração. □

A condição $p^{-1} + q^{-1} = 1$ que ocorre na desigualdade de Hölder aparece frequentemente na teoria dos espaços L^p. Se $1 < p < \infty$, o número $q = p/(p-1)$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ é chamado de expoente conjugado de p.

Proposição 17 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se $1 \leqslant p < \infty$ e $f, g \in L^p$, então*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demonstração. É fácil ver que desigualdade é válida para $p = 1$ ou se $f + g = 0$. Para os outros casos, observe que

$$|f + g|^p \leqslant (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}$$

aplicando a desigualdade de Hölder, observe que $(p-1)q = p$ onde q é o expoente conjugado para p, assim

$$\begin{aligned}\int |f + g|^p &\leqslant \|f\|_p \left\||f + g|^{p-1}\right\|_q + \|g\|_p \left\||f + g|^{p-1}\right\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int |f + g|^p\right)^{1/q}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f + g\|_p = \left[\int |f + g|^p\right]^{1-(1/q)} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

Com o resultado acima, fica fácil ver que L^P é um espaço vetorial normado e com a proposição a seguir, podemos afirmar mais ainda

Proposição 18. *Para $1 \leqslant p < \infty, L^p$ é um Espaço de Banach.*

Demonstração. Vamos mostrar que toda série absolutamente convergente em L^p é convergente. Seja $\{f_k\} \subset L^p$ tal que $\sum_1^\infty \|f_k\|_p = B < \infty$. Denotamos por $G_n = \sum_1^n |f_k|$ e $G = \sum_1^\infty |f_k|$. Então $\|G_n\|_p \leqslant \sum_1^n \|f_k\|_p \leqslant B$ para todo n, pelo Teorema da convergência monótona, $\int G^p = \lim \int G_n^p \leqslant B^p$. Assim $G \in L^p$, e em particular $G(x) < \infty$, com isso implica que a série $\sum_1^\infty f_k$ é convergente. Denotado sua soma por F,temos que $|F| \leqslant G$ e assim $F \in L^p$. Além disso, $\left|F - \sum_1^n f_k\right|^p \leqslant (2G)^p \in L^1$, E pelo Teorema da convergência dominada

$$\left\|F - \sum_1^n f_k\right\|_p^p = \int \left|F - \sum_1^n f_k\right|^p \to 0$$

Portanto, a série $\sum_1^\infty f_k$ converge na norma de L^p. □

Para completar os espaços L^P, vamos introduzir o conceito para o $p = \infty$. Se f é uma função mensurável em X, definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geqslant 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}$$

Definição 40. *Se f é uma função mensurável em X e $p = \infty$, definimos*

$$L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \|f\|_\infty < \infty\}$$

Em grande parte do trabalho, vamos denotar $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ apenas por L^∞

Proposição 19. *Seja f e g funções mensuráveis em X, as seguintes afirmações são verdadeiras*

1. *$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Se $f \in L^1$ e $g \in L^\infty, \|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ com $|g(x)| = \|g\|_\infty$ no conjunto onde $f(x) \neq 0$.*
2. *$\|\cdot\|_\infty$ é norma em L^∞*
3. *$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ se, e somente se, existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E^c) = 0$ e $f_n \to f$ uniformemente em E*
4. *L^∞ é um espaço de Banach*

5. O conjunto das funções simples é denso em L^∞

Demonstração. Ver [6], pág 184. □

Proposição 20. *Se $0 < p < q < r \leqslant \infty$, então $L^q \subset L^p + L^r$; isto é, para cada $f \in L^q$ é a soma de uma função em L^p e uma função em L^r.*

Demonstração. Se $f \in L^q$, considere $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ e defina $g = f\chi_E$ e $h = f\chi_{E^c}$. Então $|g|^p = |f|^p\chi_E \leqslant |f|^q\chi_E$, assim $g \in L^p$, e $|h|^r = |f|^r\chi_{E^c} \leqslant |f|^q\chi_{E^c}$, então $h \in L^r$. (para o caso $r = \infty$, claro que $\|h\|_\infty \leqslant 1$.) □

Proposição 21. *Se $\mu(X) < \infty$ e $0 < p < q \leqslant \infty$, então $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ e $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q \mu(X)^{(1/p)-(1/q)}$.*

Demonstração. Se $q = \infty$, basta notar que

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \leqslant \|f\|_\infty^p \int 1 = \|f\|_\infty^p \mu(X)$$

Se $q < \infty$, usamos a desigualdade de Hölder 16 com expoentes conjugados q/p e $q/(q-p)$, assim

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \cdot 1 \leqslant \||f|^p\|_{q/p} \|1\|_{q/(q-p)} = \|f\|_q^p \mu(X)^{(q-p)/q}$$

□

4 Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$

Nesta seção abordaremos os espaços de Sobolev, precisamos disto pois é o espaço onde se encontra os campos vetoriais a serem trabalhados. Esses espaços de Sobolev denotados por $W^{k,p}$, generalizam os espaços de funções diferenciáveis, permitindo inclusão de funções que não são diferenciáveis no sentido clássico, mas que possuem derivadas fracas. Também será definido aqui as derivadas fracas

4.1 Motivação e conceitos preliminares para os espaços de Sobolev

Para motivar começamos com um exemplo. Para isso, considere o seguinte problema.

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) \text{ em } (-1,1); \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-1,0); \\ 0 & \text{se } x = 0; \\ 1 & \text{se } x \in (0,1). \end{cases}$$

Integrado ambos os lados em (4.1) e substituindo a condição inicial tem-se que

$$u(x) = |x|.$$

no sentido em que

$$u(x_0) - u(0) = \int_0^{x_0} f(x)dx$$

para todo $x_0 \in (-1,1)$. Mas isto não pode ocorrer, pois observe que u não é derivável em 0, daí u não é solução de (4.1). Assim o problema não admite solução no sentido clássico, mas se multiplicarmos (4.1) por uma função $\psi \in C^1[-1,1]$ tal que $\psi(-1) = \psi(1) = 0$ e integrando por partes, tem-se que

$$\int_{-1}^{1} u\psi^r dx = -\int_{-1}^{1} f\psi dx \quad \forall \psi \in C^1([-1,1]), \psi(-1) = \psi(1) = 0. \tag{4.2}$$

Note que se definirmos a solução de (4.1) como uma função u tal que satisfaz (4.2), consequentemente $u(x) = |x|$ é solução de (4.1). Dessa forma, esse é um dos exemplos que faz induzir a definir um novo espaço, onde as funções tenham a propriedade de ser "fracamente deriváveis"para que problemas com soluções semelhantes, possa ter soluções com essa nova definição de ser "fracamente deriváveis". Para definir esse novo espaço, deve-se primeiro introduzir a noção de funções "fracamente deriváveis", a qual será introduzida nesta seção.

Definição 41. *Um vetor da forma $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ onde cada componente γ_i é um número inteiro não-negativo é chamado de* multi-índice *de ordem $|\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$.*

Definição 42. *Seja $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dado um multi-índice γ definimos a* derivada parcial *da função u como sendo*

$$D^\gamma u(x) = \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x_1^{\gamma_1} \cdots \partial x_n^{\gamma_n}}(x).$$

Na próxima definição vamos enfraquecer o conceito de derivadas parciais visto acima. Para isto, seja $C_c^\infty(U)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $\phi \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto em U. Cada função em $C_c^\infty(U)$ será chamada de função teste.

Definição 43. *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(U)$, e α um multi-índice. Dizemos que v é a α^{th} derivada fraca de u, e escrevemos*

$$D^\alpha u = v,$$

quando

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi dx$$

para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(U)$.

A seguir fazemos um exemplo, para ilustrar este conceito

Exemplo 16. *Considere $n = 1, U = (0, 2)$ e*

$$u(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & se \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Definindo

$$v(x) = \begin{cases} 1, & se\ 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & se\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

tem-se $u' = v$ no sentido fraco. De fato, para qualquer $\phi \in C_c^\infty(U)$ tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\phi' dx &= \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx \\ &= x\phi|_0^1 - \int_0^1 \phi dx + \phi(2) - \phi(1) \\ &= \phi(1) - \int_0^1 \phi dx + \phi(2) - \phi(1) \\ &= -\int_0^1 \phi dx \\ &= -\int_0^2 v\phi dx \end{aligned}$$

4.2 Os Espaços de Sobolev

Finalmente estudamos os espaços Sobolev, esses são os espaços que contém as funções coordenadas associadas aos campos vetoriais deste trabalho. Para isso, seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e seja $k \geqslant 0$ inteiro. Definimos agora determinados espaços de funções, cujos membros tem derivadas fracas de várias ordens em vários espaços L^p.

Definição 44. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$.* O espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ *consiste de todas as funções $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de modo que, para cada multi-índice α, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^P(U)$. Podemos escrevê-lo da seguinte forma:*

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^p(U); D^\alpha u \in L^p(U) \text{ para todo } |\alpha| \leqslant k\}.$$

Proposição 22. *Os espaços $W^{k,p}(U)$, munido com*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\int_U |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{L^P(U)}. \tag{4.3}$$

são normados

Demonstração. Vamos checar que $\|u\|_{W^{k,p}(U)}$ é uma norma. As duas primeiras condições de norma, são claras, pois

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(U)}$$

e

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0 \text{ q.t.p}$$

Agora a desigualdade triangular, seja $u, v \in W^{k,p}(U)$. Se $1 \leqslant p < \infty$, pela desigualdade de Minkowski 17, implica

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(U)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(U)} \right)^p \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p} \\
&= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}
\end{aligned}$$

□

Observação 6.

- *Note que $W^{0,p}(U) = L^p(U)$;*
- *Para $p = 2$, a norma anteriormente definida é induzida pelo produto interno*

- *$W^{k,2}$ é um espaço de Hilbert e o denotamos por*

$$H^k(U) = W^{k,2}(U)$$

- *Definimos $W_0^{k,p}(U) = \overline{C_c^\infty(U)}$. Em particular $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_U D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

Vejamos agora algumas propriedades de derivadas fracas e dos espaços de Sobolev.

Proposição 23. *Suponhamos $u, v \in W^{k,p}(U), |\alpha| \leqslant k$. Então vale as seguintes afirmações*

1. *$D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ e $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ para todos os multi-índices α, β com $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$;*
2. *Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v, |\alpha| \leqslant k$ e $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$;*
3. *Se V é um subconjunto aberto de U, então $u \in W^{k,p}(V)$;*
4. *Se $\xi \in C_c^\infty(U)$, então $\xi u \in W^{k,p}(U)$ e*

$$D^\alpha(\xi u) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta \xi D^{\alpha-\beta} u, \text{ onde } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} \tag{4.4}$$

Demonstração. 1. Para a primeira, fixe $\phi \in C_c^\infty(U)$. Então $D^\beta\phi \in C_c^\infty(U)$, assim

$$\begin{aligned}\int_U D^\alpha u D^\beta \phi dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u D^{\alpha+\beta}\phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|\beta|} \int_U D^{\alpha|\beta} u\phi dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u\phi dx\end{aligned}$$

Portanto, $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ no sentido fraco

2. Segue diretamente da definição.

3. Segue diretamente da definição.

4. Provemos por indução para $|\alpha|$. Primeiro para o caso em que $|\alpha| = 1$. Seja $\phi \in C_c^\infty(U)$. então

$$\begin{aligned}\int_U \zeta u D^\alpha \phi dx &= \int_U u D^\alpha(\zeta\phi) - u\left(D^\alpha\zeta\right)\phi dx \\ &= -\int_U \left(\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta\right)\phi dx\end{aligned}$$

Assim, $D^\alpha(\zeta u) = \zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta$, o que prova o primeiro passo. Agora, assuma $l < k$ e que a fórmula seja válida para todo $|\alpha| \leqslant l$ e todas funções ζ. Seja α com $|\alpha| = l + 1$. Então $\alpha = \beta + \gamma$ para algum $|\beta| = l$, $|\gamma| = 1$. Então para ϕ as above,

$$\begin{aligned}\int_U \zeta u D^\alpha \phi dx &= \int_U \zeta u D^\beta \left(D^\gamma \phi\right) dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_U \sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \zeta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \phi dx\end{aligned}$$

pela hipótese de indução

$$= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_U \sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma \left(D^\sigma \zeta D^{\beta-\sigma} u\right) \phi dx$$

novamente pela hipótese de indução

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} \left[D^\rho \zeta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \zeta D^{\alpha-\sigma} u\right] \phi dx$$

onde, $\rho = \sigma + \gamma$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U \left[\sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \zeta D^{\alpha-\sigma} u\right] \phi dx$$

com

$$\binom{\beta}{\sigma - \gamma} + \binom{\beta}{\sigma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

□

A equação (4.4) da proposição anterior é conhecida como fórmula de Leibniz. Na verdade, muitas das regras usuais de cálculo se aplicam a derivadas fracas e também os próprios espaços de Sobolev têm uma boa estrutura matemática:

Proposição 24. *Para todo k inteiro positivo e $1 \leqslant p \leqslant \infty, W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Da Proposição 22 os espaço $W^{k,p}(U)$ são normados, basta mostrar que $W^{k,p}(U)$ são completos. Seja $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(U)$. Então para cada $|\alpha| \leqslant k, \{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(U)$. Como $L^p(U)$ é completo pela Proposição 18, existem funções $u_\alpha \in L^p(U)$ tal que

$$D^\alpha u_m \to u_\alpha \quad \text{em } L^p(\boldsymbol{U})$$

para cada $|\alpha| \leqslant k$. Em particular,

$$u_m \to u_{(0,\ldots,0)} =: u \quad \text{em } L^p(\widetilde{U})$$

Agora, vamos mostrar que

$$u \in W^{k,p}(U), D^\alpha u = u_\alpha \quad (|\alpha| \leqslant k)$$

Para verificar a afirmação acima, fixemos $\phi \in C_c^\infty(U)$. Então

$$\begin{aligned}\int_U uD^\alpha \phi dx &= \lim_{m\to\infty} \int_U u_m D^\alpha \phi dx \\ &= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_m \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \phi dx\end{aligned}$$

Assim a afirmação é verdade. Portanto, $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ in $L^p(U)$ para todo $|\alpha| \leqslant k$, vimos que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(U)$, como queríamos. □

Agora vamos definir o objeto de estudo do nosso trabalho, campo vetorial de Sobolev. Em seguida, daremos um exemplo no qual será usado no último capítulo para ser feito a regularização e a construção do fluxo associado.

Definição 45. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Um campo vetorial de Sobolev é uma função $V\colon U \to \mathbb{R}^n$ tal que as funções coordenadas $V(x) = (f_1, \ldots, f_n)$ estão em um espaço de Sobolev. Se as funções f_i estão no espaço de Sobolev $W^{j,q}(U)$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ denotamos que $V \in \mathbb{D}_j^q(U)$ ou simplesmente por $\mathbb{D}_j^q$.*

Exemplo 17. *Considere $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$V(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } |x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}.$$

a função não é regular em -1, 0 e 1. Afirmamos que $V \in \mathbb{D}_1^q$ para todo $q \in \mathbb{N}$. A candidata a derivada fraca é $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (-1, 0] \\ -1, & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{se } x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

tem-se que $V' = h$ no sentido fraco. De fato, para qualquer $\phi \in C_c^\infty((-1,1))$ tem-se que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 v\phi' dx &= \int_{-1}^0 (1+x)\phi' dx + \int_0^1 (1-x)\phi' dx \\ &= \int_{-1}^0 \phi' dx + \int_{-1}^0 x\phi' dx + \int_0^1 \phi' dx + \int_0^1 -x\phi' dx \\ &= x\phi|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \phi dx + x\phi|_0^1 + \int_0^1 \phi dx \\ &= -\int_{-1}^0 \phi dx + \int_0^1 \phi dx \\ &= -\int_{-1}^1 h\phi dx\end{aligned} \tag{4.5}$$

Agora dado $q \in \mathbb{N}$. Note que $V, h \in L^q(\mathbb{R})$. De fato, basta observar que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |V(x)|^q dx &= \int_{-1}^{0} |1+x|^q dx + \int_{0}^{1} |1-x|^q dx \\ &= \int_{-1}^{0} (1+x)^q dx + \int_{0}^{1} (1-x)^q dx \\ &= \frac{(1+x)^{q+1}}{q+1}\Big|_{-1}^{0} + \frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+1} \\ &= \frac{2}{q+1}\end{aligned} \tag{4.6}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^q dx &= \int_{-1}^{0} |1|^q dx + \int_{0}^{1} |-1|^q dx \\ &= \begin{cases} 2, & \text{se } q \text{ é par} \\ 0, & \text{se } q \text{ é ímpar} \end{cases}\end{aligned} \tag{4.7}$$

Portanto, das equações (4.5), (4.6) e (4.7), tem-se que $V \in \mathbb{D}_1^q$ para todo $q \in \mathbb{N}$.

5 Regularização de Campos Vetoriais em Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$

Este é o capítulo principal do trabalho, pois contém os resultados principais. Se $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial de classe $\mathbf{C}^r$, do Teorema 1 tem-se que existe fluxo solução e esse fluxo é de classe $\mathbf{C}^r$. Agora, se o campo vetorial V está em um espaço de Sobolev não podemos dizer nada com a teoria clássica. Veremos aqui uma forma de dar uma noção de fluxo solução para esses objetos. Para isso, vamos regularizar os campos vetoriais destes espaços, onde será usado o semigrupo de calor em 1-formas diferenciais.

Primeiro, vamos enunciar e demonstrar um resultado para o semigrupo de calor 24 de funções nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$, com as simplificações do semigrupo de calor dada na Observação 2.7, do capítulo 2.

Teorema 16. *O semigrupo de calor satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\|G_t\|_{L^1} = 1, t > 0$;
2. *Se* $u_0 \geqslant 0$, *então* $e^{t\Delta}u_0 \geqslant 0$ *e* $\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{L^1} = \|u_0\|_{L^1}$;
3. *Se* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *então* $\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{L^p} \leqslant \|u_0\|_{L^p}$, *para todo* $t > 0$;
4. *Se* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ *e se* $r^{-1} = p^{-1} - q^{-1}$, *então* $\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{L^q} \leqslant (4\pi t)^{-n/2r} \|u_0\|_{L^p}$, *para todo* $t > 0$.

Demonstração. 1. Basta observar que é a integral gaussiana padrão (3.5).

2. Segue do Teorema de Fubini 12 e da parte (1).

3. Note que $\|G_r * \phi\|_\rho \leqq \|G_t\|_1 \|\phi\|_p = \|\phi\|_p$

4. Finalmente, segue interpolando entre o caso $p = q$, que é a parte (3), e o caso $p = 1, q = \infty$, que é imediato

□

Seja $\omega \in I \times \Omega(\mathbb{R}^n)$ uma família de 1-formas diferenciais em I. Na seção 1.3, do Capítulo 1 o Teorema 3 diz que o Laplaciano de Hodge-Rham é uma generalização do Laplaciano para 1-formas. Assim, podemos definir uma equação do calor para formas diferenciais, por

$$\begin{cases} \partial_t \omega = \Box\omega \\ \omega(0, x) = \omega_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Se ω é uma coleção de 1-formas, então

$$\omega = f_1 dx_1 + \ldots f_n x_n$$

com $f_i \colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $1 \leqslant i \leqslant n$. Daí a equação (5.1), é equivalente a resolver

$$\begin{cases} \partial_t \left(f_1 dx_1 + \ldots f_n x_n\right) = \square \left(f_1 dx_1 + \ldots f_n x_n\right) \\ f_i(0, x) = u_i(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t f_i = \Delta f_i \\ f_i(0, x) = u_i(x) \end{cases} \tag{5.2}$$

com $1 \leqslant i \leqslant n$ e $\omega_0 = u_1 dx_1 + \ldots + u_n dx_n$, já que do Teorema 3, tem-se que

$$\square \omega = \Delta f_1 dx_1 + \ldots + \Delta f_n dx_n$$

ou seja, se reduz a n-sistemas da clássica equação do calor homogênea em $\mathbb{R}^n$. Compreendido a equação do calor homogênea em 1-formas, definimos o *semigrupo de calor* $\left(e^{t\square}\right)$ para uma 1-forma

$$\omega = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n$$

por

$$e^{t\square}\omega = \left(e^{t\Delta} f_1\right) dx_1 + \ldots + \left(e^{t\Delta} f_n\right) dx_n \tag{5.3}$$

Dessa forma, conseguimos conectar a equação do calor para 1-formas (5.1) com o semigrupo de calor em 1-formas, com a seguinte Proposição

Proposição 25. *Seja $\omega_0 \in \Omega\left(\mathbb{R}^n\right)$ a forma diferencial dada em (5.1). Então*

$$\omega(x, t) = \left(e^{t\square}\omega_0\right)(x)$$

satisfaz (5.1).

Demonstração. Note que da equação (5.1), tem-se

$$e^{t\square}\omega_0 = \left(e^{t\Delta} u_1\right) dx_1 + \ldots + \left(e^{t\Delta} u_n\right) dx_n \tag{5.4}$$

Da Proposição 12, as funções definidas por

$$g_i(t, x) = \left(e^{t\Delta} u_i\right)(x)$$

satisfaz o i-ésimo sistema linear. Portanto,

$$\omega = g_1 dx_1 + \ldots g_n dx_n$$

é solução da equação do calor para as 1-formas. □

5.1 Regularização Espacial

Dizer que um campo vetorial $V\colon U \to \mathbb{R}^n$ pertencente a L^p, é um abuso de linguagem, pois as funções coordenadas de V não necessariamente são de classe $\mathbf{C}^r$. A ideia desta seção, é utilizar o semigrupo de calor em 1-formas para aproximá-lo por campos vetoriais, isto é, regulariza-lo. Neste trabalho o semigrupo de calor agindo em 1-formas diferenciais será denotado por T^1_ε, ou seja, $T^1_\varepsilon = e^{-\varepsilon\square}$, onde

$$\square = d\delta + \delta d$$

é o Laplaciano de Hodge-Rham em formas diferenciáveis. Em muitos trabalhos é chamado de semigrupo de Hodge-Rham em formas diferenciáveis.

Dada um campo vetorial V, associamos esse campo a 1-forma

$$\begin{aligned} &V = (f_1, \cdots, f_n) \\ &\Downarrow \\ &\omega = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n \end{aligned} \tag{5.5}$$

vamos denotar a forma ω associada por V por V^*. Agora, dada uma 1-forma ω, associamos

$$\begin{aligned} &\omega = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n \\ &\Downarrow \\ &V = (f_1, \cdots, f_n) \end{aligned} \tag{5.6}$$

denotamos o campo V associado pela 1-forma ω por $\omega^\#$. Essa dualidade apresentada será denotada por $\langle \omega, V \rangle$.

Considere agora o campo vetorial $T^1_\varepsilon V$ por

$$T^1_\varepsilon V = \left(T^1_\varepsilon V^*\right)^\# \tag{5.7}$$

o lado esquerdo da igualdade parece não fazer sentido, já que o semigrupo de calor em 1-formas diferenciais em um campo vetorial, mas abrindo a igualdade (5.7) note que está bem definido, pois

$$\begin{aligned} &V = (f_1, \ldots, f_n) \\ &\Downarrow \\ &V^* = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n \\ &\Downarrow \\ &T^1_\varepsilon V^* = g^\varepsilon_1 dx_1 + \ldots + g^\varepsilon_n dx_n \\ &\Downarrow \\ &\left(T^1_\varepsilon V^*\right)^\# = (g^\varepsilon_1, \cdots, g^\varepsilon_n) \end{aligned}$$

onde,

$$g^\varepsilon_i(x) = \left(e^{\varepsilon\Delta} f_i\right)(x) = \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}} f_i(y) dy, \varepsilon > 0$$

com $1 \leqslant i \leqslant n\}$. O campo vetorial $T_\varepsilon^1 V = \left(T_\varepsilon^1 V^*\right)^\#$ regulariza o campo V (com hipótese $V \in L^p$), a saber

Teorema 17. *Seja $V \in L^p$ e $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, tem-se que para cada $\varepsilon > 0$ o operador T_ε^1 é contínuo, isto é, $\left\|T_\varepsilon^1 V\right\|_{L^p} \leqslant \|V\|_{L^p}$ e ainda $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\|T_\varepsilon^1 V - V\right\|_{L^p} = 0$.*

Demonstração. Dado $V \in L^p$, então podemos escrever $V = (f_1, \cdots, f_n)$, onde as funções $f_1, \cdots, f_n \in L^p$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|T_\varepsilon^1 V\right\|_{L^p} &= \left\|\left(e^{\varepsilon\Delta} f_1, \cdots, e^{\varepsilon\Delta} f_n\right)\right\|_{L^p} \\
&\leqslant \sup\left\{\left|e^{\varepsilon\Delta} f_i(x)\right| : (\varepsilon, x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n \text{ e } 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \\
&\leqslant \sup\left\{|f_i(x)| : x \in \times\mathbb{R}^n \text{ e } 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \\
&= \|(f_1, \cdots, f_n)\|_{L^p} = \|V\|_{L^p}
\end{aligned}$$

na desigualdade foi usado o item (3) do Teorema 16 . Agora,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\|T_\varepsilon^1 V - V\right\|_{L^p} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|(g_1^\varepsilon, \cdots, g_n^\varepsilon) - (f_1, \cdots, f_n)\|_{L^p} \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|(g_1^\varepsilon - f_1, \cdots, g_n^\varepsilon - f_n)\|_{L^p} \\
&\leqslant \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup\left\{\|g_i^\varepsilon - f_i\|_{L^p} : x \in \times\mathbb{R}^n \text{ e } 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup\left\{\left\|e^{\varepsilon\Delta} f_i - f_i\right\|_{L^p} : x \in \times\mathbb{R}^n \text{ e } 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \quad = 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

onde a última igualdade vem do item 3 do Teorema 8. □

Observamos a seguinte proposição desta regularização que será essencial para o desenvolvimento do restante do trabalho

Proposição 26. *Seja $V \in \mathbb{D}_1^q$, tem-se que*

$$\operatorname{div}\left(T_\varepsilon^1 V\right) = T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}(\operatorname{div}(V))\,. \tag{5.9}$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, então utilizando a Proposição 8, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\left(T_\varepsilon^1 V\right)\varphi \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(T_\varepsilon^1 V \varphi\right)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle T_\varepsilon^1 V, d\varphi\right\rangle \mathrm{d}x$$

do artigo [1] tem-se que para cada $\varepsilon > 0$ o operador T_ε^1 é auto adjunto, então

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle T_\varepsilon^1 V, d\varphi\right\rangle \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle V, T_\varepsilon^1(d\varphi)\right\rangle \mathrm{d}x$$

Ainda do artigo [1], o semigrupo comuta com a derivada exterior, isto é, $dT_\varepsilon^{\mathbb{R}^n} = T_\varepsilon^1 d$, assim a última igualdade é igual a

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle V, T_\varepsilon^1(d\varphi)\right\rangle \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle V, d\left(T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}\varphi\right)\right\rangle \mathrm{d}x$$

Daí, basta aplicar a Proposição 8 novamente e obtemos

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle V, d\left(T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}\varphi\right)\right\rangle \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} V\left(T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}\varphi\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(V) T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}\varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}(\operatorname{div}(V))\varphi \mathrm{d}x$$

Portanto, tem-se que $\operatorname{div}\left(T_\varepsilon^1 V\right) = T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}(\operatorname{div}(V))\,.$ □

5.2 Regularização no tempo

Na seção anterior, foi realizado a regularização de um campo vetorial em L^p pelo semigrupo T^1_ε. Agora, considerando uma família de campos vetoriais um dos objetivos desta seção é regularizar o parâmetro dessa família, denominado parâmetro "temporal". Dessa forma, primeiro vamos considerar uma família de campos vetoriais $(V_t)_{t\in[0,T]}$ regularizar o parâmetro temporal e com o parâmetro regularizado, passar cada campo da família para a forma T^1_ε. Começamos com a seguinte proposição

Proposição 27. *Seja $q \geqslant 1$ um número inteiro , $(V_t)_{t\in[0,T]}$ uma família de campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ tal que $(t,x) \to V_t(x)$ é de classe C^1 e denotamos por $\tau(x)$ o tempo de vida da solução X_t da equação diferencial ordinária*

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = V_t\left(X_t\right), \quad X_0 = x$$

Assumindo que

$$\int_0^T \left\|\mathrm{div}\left(V_t\right)\right\|_\infty \mathrm{d}t < +\infty \quad e \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |V_t(x)|^q \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}t < +\infty \tag{5.10}$$

Então para quase todo $x \in \mathbb{R}^n, \tau(x) \geqslant T$.

Demonstração. O volume de uma bola aberta do $\mathbb{R}^n$ é sempre finito, seja $c > 0$ uma constante tal que $\mathrm{Vol}\left(B\left(x_0, r\right)\right) \leqslant e^{cr}$. Assim conseguimos uma outra constante $\lambda_0 > 0$, tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda_0 d^2_{\mathbb{R}^n}(x,x_0)}\mathrm{d}x < +\infty$. Consideramos a medida finita

$$\mu_0(\ \mathrm{d}x) = e^{-\lambda_0 d^2_{\mathbb{R}^n}(x,x_0)}\mathrm{d}x.$$

Calculamos o termo $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t\in[0,\tau(x)\wedge T[} d_{\mathbb{R}^n}\left(x, X_t(x)\right)\mathrm{d}\mu_0$. Primeiro observe a desigualdade

$$d_{\mathbb{R}^n}\left(x, X_t(x)\right) = \left|\int_0^t \frac{\mathrm{d}X_s}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^t \left|\frac{\mathrm{d}X_s}{\mathrm{d}s}\right| \mathrm{d}s = \int_0^t \left|V_s\left(X_s(x)\right)\right| \mathrm{d}s$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t\in[0,\tau(x)\wedge T[} d_{\mathbb{R}^n}\left(x, X_t(x)\right)\mathrm{d}\mu_0 &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\tau(x)\wedge T} \left|V_t\left(X_t(x)\right)\right| \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\mu_0(x) \\
&= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{(\tau>t)} \left|V_t\left(X_t(x)\right)\right| \mathrm{d}\mu_0(x)\right) \mathrm{d}t \\
&\leqslant C_{q,T}\left[\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{(\tau>t)} \left|V_t\left(X_t(x)\right)\right|^q \ \mathrm{d}\mu_0(x)\right) \mathrm{d}t\right]^{1/q}.
\end{aligned}$$

Na igualdade foi usado o Teorema de Fubini, já na desigualdade foi utilizado a desigualdade de Holder duas vezes e as constantes que apareceram, são denotadas por $C_{q,T}$. Como

$x \to X_t(x)$ é suave em $U := \{\tau > t\}$ e para $x \in U$, o Jacobiano J_{X_t} de X_t admite a expressão

$$J_{X_t}(x) = e^{-\int_0^t \operatorname{div}(V_s)\left(X_{t-s}^{-1}\right)\mathrm{d}s} \leqslant e^{\int_0^T \|\operatorname{div}(V_s)\|_\infty \mathrm{d}s}.$$

Voltando aos cálculos, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{(\tau>t)} \left|V_t\left(X_t(x)\right)\right|^q \ \mathrm{d}\mu_0(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |V_t(x)|^q \, e^{\int_0^T \|\operatorname{div}(V_s)\|_\infty \mathrm{d}s} \ \mathrm{d}x \\ &= e^{\int_0^T \|\operatorname{div}(V_s)\|_\infty \mathrm{d}s} \int_{\mathbb{R}^n} |V_t(x)|^q \ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t\in[0,\tau(x)\wedge T[} d_{\mathbb{R}^n}\left(x, X_t(x)\right) \mathrm{d}\mu_0 < +\infty$. Assim, para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sup_{t\in[0,\tau(x)\wedge T[} d_M\left(x, X_t(x)\right) < +\infty, \text{ ou seja, } \tau(x) \geqslant T$$

O que prova a proposição. □

Agora, vamos considerar uma família de campos vetoriais dependendo do tempo $(V_t)_{t\in[0,T]}$ que satisfaça as condições (5.10). Primeiro, vamos regularizar o tempo, para isso vamos definir como 0 se $t \notin [0,T]$, isto é,

$$V_t = 0 \text{ para } t \notin [0,T]$$

Seja $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \ \operatorname{supp}(\alpha) \subset (-1,1) \ \text{ e } \int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\mathrm{d}t = 1$$

Defina

$$\alpha_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\alpha\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

Primeiro definimos o Campo

$$\hat{V}_t^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} V_s(x)\alpha_\varepsilon(t-s)\mathrm{d}s. \tag{5.11}$$

Tem-se as seguintes propriedades deste campo

Proposição 28. *Com as informações do contexto acima, tem-se que*

$$\int_0^T \left\|\operatorname{div}\left(\hat{V}_t^\varepsilon\right)\right\|_\infty \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T \|\operatorname{div}\left(V_s\right)\|_\infty \mathrm{d}s \tag{5.12}$$

e

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{V}_t^\varepsilon(x)\right|^q \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |V_s(x)|^q \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}s \tag{5.13}$$

Demonstração. Para a primeira desigualdade, note que para $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{div}\left(\hat{V}_t^\varepsilon\right)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \operatorname{div}(V_s)\,\alpha_\varepsilon(t-s)\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{div}(V_s)|\,\alpha_\varepsilon(t-s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{div}(V_s)|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant ||\operatorname{div}(V_s)||_\infty\end{aligned}$$

Como é válido para qualquer t, tem-se

$$\left\|\operatorname{div}\left(\hat{V}_t^\varepsilon\right)\right\|_\infty \leqslant ||\operatorname{div}(V_s)||_\infty$$

Concluindo que

$$\int_0^T \left\|\operatorname{div}\left(\hat{V}_t^\varepsilon\right)\right\|_\infty \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T \|\operatorname{div}(V_s)\|_\infty \,\mathrm{d}s,$$

Para a segunda desigualdade, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{V}_t^\varepsilon(x)\right|^q \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} |V_s(x)|^q\,|\alpha_\varepsilon(t-s)|^q\,\mathrm{d}s \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} |V_s(x)|^q\,\mathrm{d}s\;\mathrm{d}x$$

Portanto,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{V}_t^\varepsilon(x)\right|^q \,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |V_s(x)|^q \,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}s$$

□

Seja V uma família de campos vetoriais de Sobolev. Regularizamos no tempo e obtemos $\hat{V}_t^\varepsilon$. Agora regularizamos a variável "espacial"do campo $\hat{V}_t^\varepsilon$ definido em (5.11) por

$$V_t^\varepsilon = T_\varepsilon^1 \hat{V}_t^\varepsilon \tag{5.14}$$

Da Proposição 26 e as desigualdades da Proposição 28, para $\varepsilon > 0$

$$\int_0^T \|\operatorname{div}(V_t^\varepsilon)\|_\infty \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T \|\operatorname{div}(V_t)\|_\infty \,\mathrm{d}t \tag{5.15}$$

e para $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, do Teorema 17

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |V_t^\varepsilon(x)|^q \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |V_t(x)|^q \,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t.$$

Daí, novamente pelo Teorema 17, tem-se que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |V_t^\varepsilon(x) - V_t(x)|^q \,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t = 0$$

O que prova a regularização da família V_t por V_t^ε.

5.3 Construção do fluxo associado ao campo regularizado

Finalmente, construímos um fluxo solução para campos vetoriais de Sobolev. Ao considerar uma família $(V_t)_{t\in[0,T]}$ de campos vetoriais de Sobolev que satisfaça a condição (5.10), da seção anterior provamos que para $\varepsilon > 0$ a família V_t^ε é formada por campos suaves em $\mathbb{R}^n$. Dessa forma, podemos falar de fluxo associado a V_t^ε. Daí, o objetivo desta seção é construir um fluxo para família $(V_t)_{t\in[0,T]}$, a partir do fluxo de V_t^ε. Seja $X_{t,s}^\varepsilon$ o fluxo associado a V_t^ε, isto é,

$$\frac{\mathrm{d}X_{t,s}^\varepsilon}{\mathrm{d}t} = V_t^\varepsilon\left(X_{t,s}^\varepsilon\right), \quad X_{s,s}^\varepsilon = x$$

Seja $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não negativa, a função $u_s^\varepsilon = \theta\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)$ satisfaz a equação do transporte

$$\frac{\mathrm{d}u_s^\varepsilon}{\mathrm{d}s} + V_s^\varepsilon \cdot \nabla u_s^\varepsilon = 0, \quad u_t^\varepsilon = \theta \tag{5.16}$$

com $s \geqslant t$. A partir da equação do transporte (5.16) deduzimos

Proposição 29. *Seja $\theta \in C_c^\infty$, $V\colon I \times \mathbb{R}^n$ uma família de campos vetoriais de Sobolev e (V_τ^ε) a regularização de V definida em (5.14), então*

$$e^{-\int_s^t \|\mathrm{div}(V_\tau^\varepsilon)\|_\infty \mathrm{d}\tau} \int_{\mathbb{R}^n} \theta \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)\mathrm{d}x \leqslant e^{\int_s^t \|\mathrm{div}(V_\tau^\varepsilon)\|_\infty \mathrm{d}\tau} \int_{\mathbb{R}^n} \theta \mathrm{d}x$$

Demonstração. Pelo Teorema de mudança de variável, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y)\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)^* \mathrm{d}x \tag{5.17}$$

Agora derivando em relação a t e passando o módulo em (5.17)

$$\begin{aligned}
\left|\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \theta(y)\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)^* \mathcal{L}_{V_s}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \theta(y)\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)^* \mathrm{div}(V_t)\circ X_{t,s}^\varepsilon \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(y)|\left|\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)^*\right|\left|\mathrm{div}(V_t)\circ X_{t,s}^\varepsilon\right|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y)\left|\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)^*\right|\|\mathrm{div}\,(V_\tau^\varepsilon)\|_\infty \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \|\mathrm{div}\,(V_\tau^\varepsilon)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y)\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)^* \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Dessa forma

$$-\|\mathrm{div}\,(V_\tau^\varepsilon)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y)\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)^* \mathrm{d}x \leqslant \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)\mathrm{d}x \leqslant \|\mathrm{div}\,(V_\tau^\varepsilon)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y)\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)^* \mathrm{d}x$$

Pelo Lema de Gronwall 2 em ambas desigualdades, segue que

$$e^{-\int_s^t \|\mathrm{div}(V_\tau^\varepsilon)\|_\infty \mathrm{d}\tau} \int_{\mathbb{R}^n} \theta \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)\mathrm{d}x \leqslant e^{\int_s^t \|\mathrm{div}(V_\tau^\varepsilon)\|_\infty \mathrm{d}\tau} \int_{\mathbb{R}^n} \theta \mathrm{d}x$$

□

Da Proposição anterior 29 e a desigualdade (5.15), obtemos

$$e^{-\int_s^t \|\mathrm{div}(V_\tau)\|_\infty \mathrm{d}\tau} \int_{\mathbb{R}^n} \theta \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \theta\left(X_{t,s}^\varepsilon\right) \mathrm{d}x \leqslant e^{\int_s^t \|\mathrm{div}(V_\tau)\|_\infty \mathrm{d}\tau} \int_{\mathbb{R}^n} \theta \mathrm{d}x$$

Denotando $k_{t,s}^\varepsilon$ como sendo a densidade de $\left(X_{t,s}^\varepsilon\right)_\#(\ \mathrm{d}x)$, dá Proposição 15 e da desigualdade anterior, temos uma estimativa para a densidade (com respeito a $\varepsilon > 0$)

$$e^{-\int_s^t \|\mathrm{div}(V_\tau)\|_\infty \mathrm{d}\tau} \leqslant k_{t,s}^\varepsilon \leqslant e^{\int_s^t \|\mathrm{div}(V_\tau)\|_\infty \mathrm{d}\tau}. \tag{5.19}$$

Agora vamos definir coleção de medidas η_ε no espaço de caminhos de $\mathbb{R}^n$, denotado por $W(\mathbb{R}^n)$. Para isto, vamos denotar $X_t^\varepsilon = X_{t,0}^\varepsilon$. Agora, fixado $T > 0$ e dado uma família $V\colon \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ de campos vetoriais de Sovolev, então para $\varepsilon > 0$ existe $X^\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ o fluxo associado a V_t^ε. Considere a função, $\xi^\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to W(\mathbb{R}^n)$, que associa x ao caminho $\xi^\varepsilon(x)$ onde esse caminho é $\xi^\varepsilon(x)\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ definido por $\xi^\varepsilon(x)(t) = X^\varepsilon(x,t)$. Assim, a medida pushforward η_ε é definida por

$$\eta_\varepsilon(B) = \mu_0\left((\xi^\varepsilon)^{-1}(B)\right),$$

com B boreliano em $W(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 30. *Suponha que para algum $q > 2$, a condição (5.10) da Proposição 27 seja verdadeira. Então a família de medidas finitas $\{\eta_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ em $W(\mathbb{R}^n)$ é tight.*

Demonstração. Vamos mostrar que essa família é tight, mostrando as condições do Teorema 14. Primeiro, note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d_{\mathbb{R}^n}^q\left(x_0, X_0^\varepsilon(x)\right) \mathrm{d}\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} d_{\mathbb{R}^n}^q\left(x_0, x\right) \mathrm{d}\mu_0(x) < +\infty$$

Agora, vamos estimar o termo $\int_{\mathbb{R}^n} d_{\mathbb{R}^n}^q\left(X_t^\varepsilon, X_s^\varepsilon\right) \mathrm{d}\mu_0$. Seja, $\zeta(\tau) = X_{\tau t+(1-\tau)s}^\varepsilon$ um caminho em $\mathbb{R}^n$ conectando $X_s^\varepsilon(x)$ e $X_t^\varepsilon(x)$. Assim,

$$d_{\mathbb{R}^n}\left(X_s^\varepsilon, X_t^\varepsilon\right) \leqslant \int_s^t \left|V_\tau^\varepsilon\left(X_\tau^\varepsilon\right)\right| \mathrm{d}\tau$$

Tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d_{\mathbb{R}^n}^q\left(X_s^\varepsilon, X_t^\varepsilon\right) \mathrm{d}\mu_0 \leqslant (t-s)^{q-1} \int_s^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|V_\tau^\varepsilon\left(X_\tau^\varepsilon\right)\right|^q \ \mathrm{d}\mu_0\right) \mathrm{d}\tau$$

Defina $h(x) = e^{-\lambda_0 d_{\mathbb{R}^n}^2(x_0,x)}$, então por (5.19), para alguma constante $C > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|V_\tau^\varepsilon\left(X_\tau^\varepsilon\right)\right|^q \ \mathrm{d}\mu_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \left|V_\tau^\varepsilon(x)\right|^q h\left(\left(X_\tau^\varepsilon\right)^{-1}\right) k_\tau^\varepsilon \mathrm{d}x \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n} \left|V_\tau\right|^q \ \mathrm{d}x = C \int_{\mathbb{R}^n} \left|V_\tau\right|^q \ \mathrm{d}x.$$

Assim com as desigualdades acima, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d_{\mathbb{R}^n}^q\left(X_s^\varepsilon, X_t^\varepsilon\right) \mathrm{d}\mu_0 \leqslant C(t-s)^{q-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left|V_\tau(x)\right|^q \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}\tau$$

Assim, com $q > 2$, as condições do Teorema 14 são satisfeita. □

Pelo Teorema de Prokohov, como $\{\eta_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ é tight, existe uma sequência $\varepsilon_n \downarrow 0$ tal que η_{ε_n} converge fracamente para uma medida finita η em $W(\mathbb{R}^n)$. Em particular, para $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ do Teorema 3.7, tem-se que

$$\int_{W(\mathbb{R}^n)} \varphi(\gamma(t))\mathrm{d}\eta(\gamma) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(X_t^{\varepsilon_n}\right) \mathrm{d}\mu_0 \tag{5.20}$$

Seja $e_t : W(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ a função evaluação, isto é, $e_t(\gamma) = \gamma(t)$ e a medida $v_t = (e_t)_{\#}\,\eta$. Então a igualdade acima, novamente pelo Teorema 3.7

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \mathrm{d}v_t = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(X_t^{\varepsilon_n}\right) \mathrm{d}\mu_0 \tag{5.21}$$

Proposição 31. *Para cada $t \in [0,T]$, v_t admite uma densidade k_t em relação à medida Lebesgue $\mathrm{d}x$ em $\mathbb{R}^n$ e*

$$k_t \leqslant e^{\int_0^T \|\mathrm{div}(V_s)\|_\infty \mathrm{d}s} \tag{5.22}$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $\{\varphi_\alpha : \alpha \in \Gamma\} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_\alpha \uparrow \varphi$. Assim, temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha\left(X_t^{\varepsilon_n}\right) \mathrm{d}\mu_0\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha(y) X_t^{\varepsilon_n *} \mathrm{d}\mu_0\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha(y) e^{-\lambda_0 d^2_{\mathbb{R}^n}\left(x_t^\varepsilon, x_0\right)} k_t^\varepsilon \mathrm{d}x\right|$$

Agora, pela estimativa feita em (5.19) e a primeira desigualdade da Proposição 28, tem-se que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha(y) e^{-\lambda_0 d^2_{\mathbb{R}^n}\left(x_t^\varepsilon, x_0\right)} k_t^\varepsilon \mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\alpha| e^{\int_0^T \left\|\mathrm{div}\left(V_t^\varepsilon\right)\right\|_\infty \mathrm{d}s}\, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\alpha| e^{\int_0^T \|\mathrm{div}(V_s)\|_\infty \mathrm{d}s}\, \mathrm{d}x = e^{\int_0^T \|\mathrm{div}(V_t)\|_\infty \mathrm{d}s} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\alpha|\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Por fim, obtemos a desigualdade

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha\left(X_t^{\varepsilon_n}\right) \mathrm{d}\mu_0\right| \leqslant e^{\int_0^T \|\mathrm{div}(V_s)\|_\infty \mathrm{d}s} \|\varphi_\alpha\|_{L^1(\,\mathrm{d}x)}$$

Fazendo $\alpha \to +\infty$, tem-se pelo Teorema da convergência dominada

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(X_t^{\varepsilon_n}\right) \mathrm{d}\mu_0\right| \leqslant e^{\int_0^T \|\mathrm{div}(V_s)\|_\infty \mathrm{d}s} \|\varphi\|_{L^1(\,\mathrm{d}x)}$$

Agora, fazendo $n \to +\infty$ por (5.21)

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \mathrm{d}v_t\right| \leqslant e^{\int_0^T \|\mathrm{div}(V_s)\|_\infty \mathrm{d}s} \|\varphi\|_{L^1(\,\mathrm{d}x)} \tag{5.23}$$

Portanto, a densidade k_t de v_t exite em relação a $\mathrm{d}x$ e satisfaz a estimativa (5.23). □

Proposição 32. *Com a medida η em $W(\mathbb{R}^n)$, é válido que*

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = V_t(\gamma(t)) \quad \eta\text{-q.t.p}$$

Demonstração. Primeiro, observe que a seguinte igualdade para $\tilde{V}_t$ um campo vetorial suave em $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\int_{W(\mathbb{R}^n)} 1\wedge\left|\gamma(t)-\gamma(0)-\int_0^t \tilde{V}_s(\gamma(s))\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}\eta_{\varepsilon_n}(\gamma)\\&=\int_{W(\mathbb{R}^n)} 1\wedge\left|\gamma(t)-\gamma(0)-\int_0^t \tilde{V}_s(\gamma(s))\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}\eta(\gamma).\end{aligned}\tag{5.24}$$

Agora, consideramos o fluxo X_t^ε associado ao campo V_t^ε que regulariza V_t, então ele satisfaz

$$\frac{\mathrm{d}X_t^\varepsilon}{\mathrm{d}t}=V_t^\varepsilon\left(X_t^\varepsilon\right)$$

ou ainda

$$X_t^\varepsilon-X_0^\varepsilon=\int_0^t V_s^\varepsilon\left(X_s^\varepsilon\right)\mathrm{d}s\tag{5.25}$$

subtraindo $\displaystyle\int_0^t \tilde{V}_s\left(X_s^\varepsilon\right)$ de (5.25), tem-se

$$X_t^\varepsilon-X_0^\varepsilon-\int_0^t \tilde{V}_s\left(X_s^\varepsilon\right)\mathrm{d}s=\int_0^t\left(V_s^\varepsilon\left(X_s^\varepsilon\right)-\tilde{V}_s\left(X_s^\varepsilon\right)\right)\mathrm{d}s.\tag{5.26}$$

Usando a estimativa para a densidade em (5.22), tem-se

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} 1\wedge\left|X_t^\varepsilon-X_0^\varepsilon-\int_0^t \tilde{V}_s\left(X_s^\varepsilon\right)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}\mu_0\\&\leqslant\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\left|V_s^\varepsilon\left(X_s^\varepsilon\right)-\tilde{V}_s\left(X_s^\varepsilon\right)\right|\mathrm{d}s\;\mathrm{d}\mu_0\leqslant C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\left|V_s^\varepsilon\left(X_s^\varepsilon\right)-\tilde{V}_s\left(X_s^\varepsilon\right)\right|^q\;\mathrm{d}s\;\mathrm{d}\mu_0\right)^{1/q}\\&\leqslant C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\left|V_s^\varepsilon\left(X_s^\varepsilon\right)-\tilde{V}_s\left(X_s^\varepsilon\right)\right|^q\;\mathrm{d}s\;\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\left|V_s^\varepsilon(x)-\tilde{V}_s(x)\right|^q\;\mathrm{d}s\;\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\&\leqslant C\left(\|V^\varepsilon-V\|_{L^q([0,T]\times\mathbb{R}^n)}+\|V-\tilde{V}\|_{L^q([0,T]\times\mathbb{R}^n)}\right)\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon_n\to 0$ na última desigualdade, o lado esquerdo da desigualdade é justamente a primeira observação (5.24), assim ficamos

$$\int_{W(\mathbb{R}^n)} 1\wedge\left|\gamma(t)-\gamma(0)-\int_0^t \tilde{V}_s(\gamma(s))\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}\eta(\gamma)\quad\leqslant C\|V-\tilde{V}\|_{L^q([0,T]\times\mathbb{R}^n)}.$$

Agora

$$\begin{aligned}&\int_{W(\mathbb{R}^n)} 1\wedge\left|\gamma(t)-\gamma(0)-\int_0^t V_s(\gamma(s))\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}\eta(\gamma)\\&\quad\leqslant\int_{W(\mathbb{R}^n)} 1\wedge\left|\gamma(t)-\gamma(0)-\int_0^t \tilde{V}_s(\gamma(s))\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}\eta(\gamma)+C\|V-\tilde{V}\|_{L^q([0,T]\times\mathbb{R}^n)}\\&\quad\leqslant 2C\|V-\tilde{V}\|_{L^q([0,T]\times\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\int_{W(\mathbb{R}^n)} 1\wedge\left|\gamma(t)-\gamma(0)-\int_0^t V_s(\gamma(s))\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}\eta(\gamma)=0.$$

Ou seja, para $\gamma \in W(\mathbb{R}^n)$ e todo $t \in [0,T]$, é η-qtp

$$\gamma(t) - \gamma(0) = \int_0^t V_s(\gamma(s))\mathrm{d}s \tag{5.27}$$

Assim, no suporte da medida η, temos que a função $\eta, t \to \gamma(t)$ é derivável em quase todos t. Portanto, pela equação acima (5.27) para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = V_t(\gamma(t))$$

□

Desta forma, a Proposição anterior 32 mostra que, a medida η está concentrada nas "curvas integráveis"do campo vetorial V.

Seja η_x a desintegração de η em relação a $\mu_0 = (e_0)_{\#}\,\eta$, ou seja,

$$\eta = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_x \, \mathrm{d}\mu_0(x)$$

Então η_x concentra-se nessas curvas integrais começando em x. Se provarmos para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ a medida η_x é um delta de Dirac, então isso implica que existe apenas uma curva integral começando em um determinado ponto, que é exatamente o fluxo gerado por V. Para isso, precisamos dos dois Lemas a seguir

Lema 7. *Seja $V \in L^1([0,T], \mathbb{D}_1^q)$, e $\mathrm{div}(V), \xi \in L^1([0,T], L^\infty)$. Então a equação*

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}t} + V_t \cdot \nabla u_t + \xi_t u_t = 0\,, \quad u\big|_{t=0} = u_0 \tag{5.28}$$

tem no máximo uma solução no espaço $L^\infty\left([0,T], L^p \cap L^{2p}\right)$.

Demonstração. Seja $u \in L^\infty\left([0,T], L^p \cap L^{2p}\right)$ uma solução da equação (5.28) com $u_0 \equiv 0$. Vamos provar que $u_t = 0$ para todo $t \in [0,T]$. Para isto, seja $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, da equação (7) e da regra da cadeia, tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\beta(u_t)}{\mathrm{d}t} + V_t \cdot \nabla\beta(u_t) + \xi_t u_t \beta'(u_t) &= \beta'(u_t)\frac{\mathrm{du_t}}{\mathrm{d}t} + V_t \cdot \beta'(u_t)\nabla u_t + \xi_t u_t \beta'(u_t) \\
&= \beta'(u_t)\left(\frac{\mathrm{du_t}}{\mathrm{d}t} + V_t \cdot \nabla u_t + \xi_t u_t\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

a equação acima, é válida pela teoria de Di Perna Lions. Seja uma sequência de funções suaves não negativas $\{\varphi_n\}_n \geqslant 1 \subset C_c^1(\mathbb{R}^n)$, tal que $\sup_{n\geqslant 1} \|\nabla\varphi_n\|_\infty \leqslant 2, \varphi_n \uparrow 1$ e a sequência de subconjuntos $\{\varphi_n = 1\} \uparrow \mathbb{R}^n$ com $n \to \infty$. Para existência desta sequência, é suficiente notar por Greene e Wu [8], existe uma função suave que aproxima a função distância $x \to d_{\mathbb{R}^n}(x, x_0)$ de tal maneira que

$$|\rho(x) - d_{\mathbb{R}^n}(x, x_0)| \leqslant 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant |\nabla\rho| \leqslant 2$$

Então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \beta(u_t)\,\varphi_n \,\mathrm{d}x =& \beta(0)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n \,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(\varphi_n V_s)\,\beta(u_s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n \xi_s u_s \beta'(u_s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Agora tomamos a função $\beta(s) = (|s| \wedge 1)^p$ na igualdade acima (note que β é contínua Lipschitz mas não pertence a $C_b^2(\mathbb{R})$, pois pode ser superado com um argumento de aproximação (ver [4]). Note que $\beta'(s) = 0$ para $|s| > 1$ e $|\beta'(s)| = p|s|^{p-1}$ para $|s| < 1$, assim $|s\beta'(s)| \leqslant p\beta(s)$.Com isso, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (|u_t| \wedge 1)^p \,\varphi_n \,\mathrm{d}x \leqslant& \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (|u_s| \wedge 1)^p \,|V_s \cdot \nabla \varphi_n|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n \,(|u_s| \wedge 1)^p \,(|\operatorname{div}(V_s)| + p\,|\xi_s|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{5.29}$$

Denote por I_t^n e J_t^n os dois termos do lado direito respectivamente da igualdade acima. Assim $(|u_s| \wedge 1)^p \leqslant |u_s| \wedge 1$, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}I_t^n &\leqslant \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|u_s| \wedge 1)^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |V_s \cdot \nabla \varphi_n|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \mathrm{d}s \\ &\leqslant 2\|u\|_{L^\infty([0,T],L^p)} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi_n = 1\}} |V_s|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \mathrm{d}s\end{aligned}$$

Assim $V \in L^1\left([0,T], W^{1,q}\right)$, para qualquer $s \in [0,T]$, a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi_n = 1\}} |V_s|^q \,\mathrm{d}x$ tende a 0, quando $n \to \infty$ e $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi_n = 1\}} |V_s|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant \|V_s\|_{L^q}$ que é uma função integrável de $s \in [0,T]$. Assim, pelo Teorema da convergência dominada (11), $\lim_{n\to\infty} I_t^n = 0$. Agora definimos

$$L_s = \|\operatorname{div}(V_s)\|_{L^\infty} + p\,\|\xi_s\|_{L^\infty},$$

então

$$J_t^n \leqslant \int_0^t L_s \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|u_s| \wedge 1)^p \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}s$$

Fazendo $n \to \infty$ em (5.29), tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|u_t| \wedge 1)^p \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^t L_s \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|u_s| \wedge 1)^p \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}s$$

Portanto, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (|u_t| \wedge 1)^p \,\mathrm{d}x = 0$, o que implica que $|u_t| \wedge 1 = 0$ q.t.p. Disto concluímos que $u_t = 0$ para todo $t \leqslant T$. □

Lema 8. *Seja η a medida finita em $W(\mathbb{R}^n)$ tal que para $\gamma \in W(\mathbb{R}^n)$ é verdade η-quase sempre que*

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = V_t(\gamma(t)) \quad \text{para quase todo } t \in [0,T] \tag{5.30}$$

Suponha que $\mu_t^\eta := (e_t)_\# \eta$ é absolutamente contínua em relação à medida de volume $\mathrm{d}x$ com a função densidade k_t^η. Então k_t^η é solução da equação do transporte

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}t} + V_t \cdot \nabla u_t + \operatorname{div}(V_t)\, u_t = 0 \tag{5.31}$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, por definição da medida μ_t^η, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \mathrm{d}\mu_t^\eta &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W(\mathbb{R}^n)} \varphi(\gamma(t))\mathrm{d}\eta(\gamma) \\ &= \int_{W(\mathbb{R}^n)} \langle \nabla\varphi(\gamma(t)), V_t(\gamma(t))\rangle \,\mathrm{d}\eta(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\varphi, V_t\rangle \,\mathrm{d}\mu_t^\eta\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi k_t^\eta \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\varphi, V_t\rangle \, k_t^\eta \mathrm{d}x \\ &= \int V_t\varphi \,(k_t^\eta \mathrm{d}x) \\ &= \int \varphi \cdot \mathcal{L}_{V_t}\,(k_t^\eta \mathrm{d}x) \\ &= \int \varphi \left[\langle \nabla k_t^\eta, V_t\rangle \,\mathrm{d}x + k_t^\eta \mathcal{L}_{V_t}\mathrm{d}x\right] \\ &= \int \varphi \left(\langle \nabla k_t^\eta, V_t\rangle + \operatorname{div}(V_t)\, k_t^\eta\right) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Assim, segue (5.31) □

Teorema 18. *Seja V um campo vetorial em $L^1([0,T], \mathbb{D}_1^q)$ com $q > 2$. Satisfazendo*

$$\int_0^T \|\operatorname{div}(V_t)\|_\infty \,\mathrm{d}t < +\infty$$

então existe um único fluxo de funções mensuráveis $X_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_t(x) = V_t\,(X_t(x))$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $(X_t)_\# \mu_0 = k_t \,\mathrm{d}x$. Além disso,

$$k_t \leqslant e^{\int_0^T \|\operatorname{div}(V_s)\|_\infty \mathrm{d}s}$$

Demonstração. Considere a medida η em $W(\mathbb{R}^n)$ e sua desintegração η_x. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ a medida η_x está concentrado subconjuntos de curvas integráveis γ tais que $\gamma(0) = x$. Suponha que η não está suportado por um gráfico de uma função $T\colon \mathbb{R}^n \to W(\mathbb{R}^n)$, então existem um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ com $\mu_0(C) > 0$ tal que $supp(\mu_0 \times \eta)$ não coincide com o GrT em U, para nenhuma função T. Como o suporte de η não é gráfico de uma função T, existem curvas $t \longmapsto \gamma_1(t)$ e $t \longmapsto \gamma_2(t)$ e $t_0 \in [0,T]$ tal que $\gamma_1(t_0) \neq \gamma_2(t_0)$. Ainda, como $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico, existem bola abertas em torno $\gamma_1(t_0) \subset B(\gamma_1(t_0), \varepsilon_1)$ e

$\gamma_2(t_0) \subset B(\gamma_2(t_0), \varepsilon_2)$ e claro que bolas abertas possuem medidas não nulas. Assim, tome dois subconjuntos disjuntos definidos da seguinte maneira

$$E = B(\gamma_1(t_0), \varepsilon_1) \text{ e } E' = E^{\mathbb{C}}$$

claro que E e E' são mensuráveis, e tem-se que

$$\eta_x\left(e_{t_0}^{-1}(E)\right)\eta_x\left(e_{t_0}^{-1}(E')\right) > 0 \quad \text{para todos } x \in C.$$

Escolhemos o conjunto C tal que $\eta_x\left(e_{t_0}^{-1}(E)\right)$ e $\eta_x\left(e_{t_0}^{-1}(E')\right)$ são limitados inferiormente por uma constante positiva ε_0 para todo $x \in C$. Definimos

$$\eta_x^1 = \mathbf{1}_C(x)\frac{\eta_x\left(e_{t_0}^{-1}(E) \cap \bullet\right)}{\eta_x\left(e_{t_0}^{-1}(E)\right)} \quad \text{e} \quad \eta_x^2 = \mathbf{1}_C(x)\frac{\eta_x\left(e_{t_0}^{-1}(E') \cap \bullet\right)}{\eta_x\left(e_{t_0}^{-1}(E')\right)}$$

Então η_x^1, η_x^2 são concentrados como η_x para $x \in C$. Como η_x^1 e η_x^2 são absolutamente contínuos em relação a η_x, é fácil mostrar que $\mu_t^{\eta^1}, \mu_t^{\eta^2}$ admite densidades $k_t^1, k_t^2 \in L^\infty\left([0,T], L^\infty \cap L^1(\,\mathrm{d}x)\right)$ respectivamente. E as condições do Lema 8 são verificadas, portanto k_t^1, k_t^2 satisfazem a equação de transporte (5.31) com o mesmo valor inicial $\mathbf{1}_C(x)e^{-\lambda_0 d^2(x,x_0)}$. Mas nesta classe, a singularidade vale para a equação (5.31) devido ao Lema 7. Portanto, $\mu_t^{\eta^1} = \mu_t^{\eta^2}$, o que é impossível, pois $\eta_x^1 \neq \eta_x^2$. Assim, η é suportado pelo gráfico de uma função mensurável $X : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to W(\mathbb{R}^n)$, então

$$(X_t)_{\#}\,\mu_0 = v_t = k_t\,\mathrm{d}x.$$

A mensurabilidade de $x \to X_t(x)$ segue da mensurabilidade de $x \to \eta_x$. O que prova o teorema. □

Enfim construímos e provamos a unicidade de fluxos soluções para alguns campos vetoriais de Sobolev que satisfazem as hipóteses do Teorema 18. Apesar dessa existência e unicidade desses fluxos e termos obtido como consequência um "algoritmo"de construção, os cálculos podem ser tornar muito complexos, até mesmo com campos vetoriais de Sobolev muito simples, como veremos a seguir

Exemplo 18. *Seja o campo vetorial* $V\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$V(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } |x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}.$$

no Exemplo 17, vimos que $V \in \mathbb{D}_1^q$ *para todo* $q \in \mathbb{N}$ *e* $\|\mathrm{div}\,(V)\|_\infty = 1$. *Do Teorema 18 existe o fluxo e é único, vamos tentar expressar tal fluxo na sua forma algébrica. A primeira coisa a se fazer, é regularizar o campo, ou seja, aproxima-lo pelos seguintes campos* $V^\epsilon = T_\varepsilon^1 V$ *da seguinte forma*

$$\begin{aligned} V^\epsilon(x) &= \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}}V(y)dy \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}}\left(1-|y|\right)dy, & \text{se } |x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

o problema começa a surgir desse passo da regularização, pois precisamos dos fluxos desses campos regulares, e note que a integral é muito complexa. Daí ao associar ao fluxo X^ϵ dos campos V^ϵ, devemos resolver a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{dX_0^\epsilon}{dt} = V^\epsilon\left(X_0^\epsilon\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-\frac{|X_0^\epsilon - y|^2}{4\varepsilon}} \left(1 - |y|\right) dy, & se\ |x| \leqslant 1 \\ 0, & se\ |x| > 1 \end{cases}$$

daí, sem a solução algébrica dessa equação a família de medidas $\{\eta_\epsilon\}$ fica incompreensível no sentido algébrico. Consequentemente, as curvas integrais não são obtidas explicitamente. Mas esta regularização possui algumas vantagens, pois qualquer campo em $L^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser regularizado e a construção do fluxo só foi realizado pela validade da propriedade

$$\operatorname{div}\left(T_\varepsilon^1 V\right) = T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}(\operatorname{div}(V)).$$

para $p \geqslant 2$.

6 Considerações Finais

Dado uma família de campos vetoriais $V_t \in \mathbb{D}_1^q$ com $q > 2$ que satisfaça

$$\int_0^T \|\mathrm{div}\,(V_t)\|_\infty \,\mathrm{d}t < +\infty\,,$$

mostramos que existe uma regularização que permite construir um conceito de fluxo generalizado X_t para V_t. A condição $q > 2$ foi para garantir que a família de medidas $\{\eta_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ em $W(\mathbb{R}^n)$, construídas em 5.3, seja tight. Já a condição de $V_t \in \mathbb{D}_1^q$, foi para a importante propriedade

$$\mathrm{div}\left(T_\varepsilon^1 V\right) = T_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}(\mathrm{div}(V))\,.$$

Este fluxo satisfaz que para todo x no suporte de uma medida tem-se que $X_t(x)$ é uma curva integral para V_t no sentido clássico.

As regularizações foram essenciais para obter o fluxo generalizado. A regularização do parâmetro temporal é clássica por usar convolução. A regularização espacial foi realizada usando semi-grupo de calor em 1-formas diferenciais e vale ressaltar que esta regularização pode ser realizada para qualquer campo em L^p.

Referências

[1] Bakry, D. Étude des transformations de riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de ricci minorée. In *Séminaire de probabilités XXI* (1987), Springer, pp. 137–172.

[2] Bartle, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014.

[3] Bogachev, V. Measure theory volume, volume 1 and 2, 2007.

[4] DiPerna, R. J., and Lions, P.-L. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Inventiones mathematicae 98*, 3 (1989), 511–547.

[5] Fang, S., Li, H., and Luo, D. Heat semi-group and generalized flows on complete riemannian manifolds. *Bulletin des sciences mathematiques 135*, 6-7 (2011), 565–600.

[6] Folland, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*, vol. 40. John Wiley & Sons, 1999.

[7] Goldstein, J. A. *Semigroups of linear operators and applications*. Courier Dover Publications, 2017.

[8] Greene, R. E., and Wu, H. c^∞ approximations of convex, subharmonic, and plurisubharmonic functions. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (1979), vol. 12, pp. 47–84.

[9] Guillemin, V., and Pollack, A. *Differential topology*, vol. 370. American Mathematical Soc., 2010.

[10] Ikeda, N., and Watanabe, S. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Elsevier, 2014.

[11] Lang, S. *Real and functional analysis*, vol. 142. Springer Science & Business Media, 2012.

[12] Lima, E. L. *Variedades diferenciáveis*. No. 15. Impa, 1973.

[13] Lima, E. L. *Análise real*, vol. 1. Impa Rio de Janeiro, 2004.

[14] Possobon, R. *Desintegração de medidas: propriedades e aplicações*. PhD thesis, [sn], 2020.

[15] Ribeiro, C. A. D. Teorema de hodge e aplicações.

[16] Spivak, M. D. A comprehensive introduction to differential geometry. *(No Title)* (1970).