UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MATEUS FERREIRA DE MELO

Dinâmicas de Operadores Lineares - weighted shift

Campinas

2024

Mateus Ferreira de Melo

Dinâmicas de Operadores Lineares - weighted shift

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Mateus Ferreira de Melo e orientada pelo Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Silvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

M491d Melo, Mateus Ferreira de, 1998-
Dinâmicas de operadores lineares - weighted shift / Mateus Ferreira de Melo. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos lineares. 2. Operadores shift (Teoria de operadores). I. Varão Filho, José Régis Azevedo, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Dynamics of linear operators - weighted shift
Palavras-chave em inglês:
Linear dynamical systems
Shift operators (Operator theory)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
José Régis Azevedo Varão Filho [Orientador]
Junilson Cerqueira da Silva
Mayara Braz Antunes
Data de defesa: 08-03-2024
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-2647-6894
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5521795808581181

Dissertação de Mestrado defendida em 08 de março de 2024 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO

Prof(a). Dr(a). JUNILSON CERQUEIRA DA SILVA

Prof(a). Dr(a). MAYARA BRAZ ANTUNES

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais, Luis e Aguinalda pelo apoio constante. Aos meus amigos Dimitri, Marília e Walter pelas dicas valiosas. Ao meu colega Paulo, pela assintência essencial, e para o meu orientador Régis Varão, pela supervisão, disponibilidade e paciência.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O objetivo dessa dissertação é estudar detalhadamente o artigo *Shadowing and structural stability for operators* de N.Bernardes e A.Messaoudi [3]. Estudaremos condições em que um operador num espaço de Banach possua propriedades comuns a um sistema dinâmico como por exemplo, as propriedades de sombreamento, expansividade e hiperbolicidade. Determinaremos suas propriedades e como tais características se relacionam.

Em particular, focaremos no operador shift no espaço de Banach das sequências limitadas. Usando propriedades de análise funcional e sistemas dinâmicos, iremos determinar as condições em que certas propriedades se manifestam, baseando-se em propriedades das sequências de pesos que geram o operador.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos lineares; sombreamento; shift ponderado.

Abstract

The goal of this dissertation is to study the article *Shadowing and structural stability for operators* by N.Bernardes and A.Messaoudi [3]. We will investigate conditions under which an operator in a Banach space exhibits usual characteristics of dynamic systems, such as shadowing, expansivity, and hyperbolicity. We will determine their properties and how such characteristics are related.

Particularly, we will focus on the shift operator in the Banach space of bounded sequences. Using properties of functional analysis and dynamic systems, we will determine the conditions under which certain properties present themselves, based on properties of the weight sequences that generate the operator.

Keywords: linear dynamical systems; shadowing; weighted shift.

Lista de ilustrações

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	O conjunto dos números inteiros não negativos
S_X	A esfera unitária de um espaço métrico X
$B(x,r)$	A bola aberta de raio r e centro x de um espaço métrico
$\overline{B(x,r)}$	A bola fechada de raio r e centro x de um espaço métrico
$\mathbb{T}$	A esfera unitária dos complexos
$\mathbb{D}$	O disco unitário aberto dos complexos
$\mathbb{N}_0$	O conjunto dos números inteiros positivos
$\overline{\mathbb{D}}$	O disco unitário fechado dos complexos

Sumário

1 Introdução

Nos primórdios da humanidade, a Matemática era vista como um modelo para estudar objetos estáticos, como figuras geométricas, ou encontrar números específicos que solucionem problemas através de equações. Apenas no século XVII, com o advento do Cálculo, passou-se a estudar o movimento de objetos através de um modelo matemático preciso.

Com isso em mente, os sistemas dinâmicos surgem como uma maneira de estudar a evolução temporal de um determinado sistema. No caso discreto, isso se traduz em considerar uma função $f : X \to X$, em que X é um conjunto equipado com uma noção de distância d. Considerando um ponto $x \in X$ como uma função específica, aplicar a função f representa uma passagem de tempo de uma unidade, e a posição resultante é representada por $f(x)$. Repetindo esse processo, através de mais uma passagem de tempo, obtemos a nova posição $f\big(f(x)\big) = f^2(x)$.

O conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ de todas as posições resultantes do ponto x é denominada por órbita de x e denotada por $\mathrm{orb}(x, T)$. Analisar o comportamento dessas órbitas nos permite classificar os sistemas dinâmicos. Por exemplo, podemos estudar operadores que possuem um ponto com órbita densa, ou seja, dados $y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^n(x), y) < \varepsilon.$$

Em palavras, isso quer dizer que a evolução de sua posição passa suficientemente próxima a todo ponto do espaço.

No caso linear, restringimos X a um espaço de Banach, um espaço vetorial normado e completo, e consideramos o sistema dinâmico como um operador linear $T : X \to X$. Aqui a propriedade de possuir um ponto com órbita densa é denominada por hiperciclicidade, e podemos conectar essa propriedade à capacidade do operador intersectar quaisquer vizinhanças em um tempo futuro, conforme resultado abaixo apresentado em [6]:

Teorema 1.0.1 (Teorema de Transitividade de Birkhoff)**.** *Um operador T é hipercíclico se e somente se é topologicamente transitivo, isto é, para cada par de abertos não vazios U, V em X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$.*

Outra propriedade que abordaremos aqui é a propriedade de sombreamento de um operador. Em palavras, essa propriedade se resume a indicar que toda sequência que se mantem suficientemente próxima à ação do operador T, é sombreada pela órbita de um ponto, no sentido que as trajetórias estão próximas em todos os instantes.

O espaço de Banach que vamos considerar aqui é um espaço vetorial que consiste em sequências limitadas de números complexos (x_n), com $n \in \mathbb{Z}$, o qual denotamos por c_0. A norma nesse espaço é definida como o supremo (ou norma do infinito) da sequência absoluta $(|x_n|)$, ou seja

$$||(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}|| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|.$$

Nesse espaço, vamos estudar as propriedades do operador shift bilateral ponderado posterior, cuja ação em uma sequência é de deslocar todos os pontos desta para a esquerda, e em seguida, multiplicar por um peso. Mais formalmente, o operador shift $B_w : c_0 \to c_0$ é definido por uma sequência de números complexos (w_n), onde $n \in \mathbb{Z}$, e sua ação sobre uma sequência $(x_n) \in c_0$ é dada por:

$$B_w((x_n)) = (w_{n+1}x_{n+1})$$

Veremos que a possibilidade desse sistema dinâmico satisfazer propriedades que mencionamos, como sombreamento e hiperciclidade, depende da sequência que define os pesos do operador shift. Com isso, conseguimos traduzir propriedades de dinâmica linear como propriedades de sequências complexas. Assim, o objetivo desse estudo é encontrar essas equivalências, e, a partir disso, buscar contra-exemplos e estimar possíveis relações entre as principais propriedades de sistemas dinâmicos.

Inicialmente, vamos estudar conceitos básicos de Análise Funcional, como propriedades gerais de espaços de Banach, espectro de operadores e a complexificação de espaços. Em seguida, veremos propriedades básicas de sistemas dinâmicos, começando com sistemas quaisquer e depois nos restringindo a sistemas lineares. Por fim, vamos estudar as propriedades específicas do espaço c_0 e do operador shift, com resultados inspirados nos artigos de [4] e [10].

2 Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo, nos dedicaremos a explorar resultados preliminares de Análise Funcional, com o objetivo é fornecer uma base sólida para o estudo de sistemas dinâmicos. Apresentaremos alguns resultados clássicos da área, como o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema da categoria de Baire e o Teorema da Invversa Limitada. Para uma compreensão mais aprofundada, iremos também demonstrar alguns destes teoremas, oferecendo uma visão clara e elucidativa de sua validade e importância na teoria dos espaços métricos e na análise de sistemas dinâmicos.

2.1 Espaços Métricos

Definição 2.1.1. *Dado um conjunto X, um espaço métrico é um par (X, d), em que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma* ***métrica****, ou seja, uma função que cumpre as seguintes propriedades:*

Para quaisquer $x, y, z \in X$, temos

(i) Definida positiva: $d(x, y) \geqslant 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) Simetria: $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) Desigualdade Triangular: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Exemplo 2.1.1. *Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de espaços métricos com a métrica padrão dada por $d(x, y) = |x - y|$.*

Exemplo 2.1.2. *Dados $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ espaços métricos, podemos definir uma métrica $d : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x_1, y_1 \in X_1$ e $x_2, y_2 \in X_2$*

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}.$$

É fácil ver que esta métrica é definida positiva e simétrica. Para verificar a desigualdade triangular, dados $x_1, y_1, z_1 \in X_1$ e $x_2, y_2, z_2 \in X_2$, temos que

$$\begin{aligned} d\big((x_1, x_2), (z_1, z_2)\big) &= \sqrt{d(x_1, z_1)^2 + d(x_2, z_2)^2} \\ &\leq \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + d(y_1, z_1)^2 + d(x_2, y_2)^2 + d(y_2, z_2)^2} \\ &= \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + d(x_2, y_2)^2} + \sqrt{d(y_1, z_1)^2 + d(y_2, z_2)^2} \\ &= d\big(x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) + d\big(y_1, y_2), (z_1, z_2)\big) \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.3. *Seja (X, d) um espaço métrico, A um conjunto não vazio e $\eta : A \to X$ uma função qualquer. Definimos o conjunto*

$$X_\eta^A = \{f : A \to X \ : \ \sup_{a \in A} d\big(f(a), \eta(a)\big) < \infty\}.$$

Então X_η^A é um espaço métrico ao considerarmos a métrica dada por

$$D(f, g) = \sup_{a \in A} d\big(f(a), g(a)\big), \forall f, g \in X_\eta^A.$$

Tal métrica está bem definida, pois para cada $a \in A$

$$\begin{aligned} d\big(f(a), g(a)\big) &\leq d\big(f(a), \eta(a)\big) + d\big(\eta(a), g(a)\big) \\ &\leq \sup_{a \in A} d\big(f(a), \eta(a)\big) + \sup_{a \in A} d\big(g(a), \eta(a)\big) < \infty. \end{aligned}$$

Um argumento similar também mostra a desigualdade triangular. A simetria e o fato que D é sempre não negativa são evidentes. Por fim, se $f, g \in X_\eta^A$ com $D(f, g) = 0$, então

$$\begin{aligned} \sup_{a \in A} d\big(f(a), g(a)\big) = 0 &\implies d\big(f(a), g(a)\big) = 0, \forall a \in A \\ &\implies f(a) = g(a), \forall a \in A \\ &\implies f = g. \end{aligned}$$

Portanto D é, de fato, uma métrica.

Exemplo 2.1.4. *Se $X = \mathbb{C}$, A é não vazio e $\eta : A \to X$ é a função identicamente nula, vale que $f \in X_\eta^A$ se, e somente se $\sup_{a \in A} |f(a)| < \infty$. Vale ainda que*

$$D(f, g) = \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)|.$$

Ainda, no caso em que $A = \mathbb{N}$ ou $A = \mathbb{Z}$, uma função $f : A \to X$ é denotada uma sequência. Logo, X_η^A representa o espaço das sequências limitadas, com a métrica do supremo. Se $A = \mathbb{N}$, denotamos $X_\eta^A = l^\infty$, enquanto que se $A = \mathbb{Z}$, denotamos $X_\eta^A = l^\infty(\mathbb{Z})$.

Definição 2.1.2. *Dado um espaço métrico X, um elemento $x \in X$ e $r > 0$, a* ***bola aberta de raio*** *r é o conjunto*

$$B(x; r) := \{y \in X : d(x, y) < r\},$$

e a ***bola fechada de raio*** *r*

$$\overline{B(x; r)} := \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\}.$$

No caso de X também ser um espaço vetorial, denotamos o caso especial em que $x = 0$ e $r = 1$ como a esfera unitária de X, denotada por S_X.

Definição 2.1.3. *Um espaço métrico X é dito **separável** se existe um subconjunto enumerável Y denso em X. Isto implica que para cada $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in Y$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.*

Proposição 2.1.1. *O espaço l^∞ não é separável.*

Demonstração. Seja V o subconjunto de l^∞ formado pelas sequências binárias. Note que dados $x, y \in V$, com $x \neq y$, temos, com a métrica definida em l^∞, que $d(x, y) = 1$.

Seja M um subconjunto denso em l^∞. Dado $x \in V$, existe $z_x \in M$ tal que $d(x, z_x) < \frac{1}{2}$. Mostraremos que não existe $y \neq x \in V$ com $d(y, z_x) < \frac{1}{2}$. Com efeito, caso contrário teríamos

$$1 = d(x, y) \leqslant d(x, z_x) + d(y, z_x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Contradição. Logo a função

$$V \to M$$

$$x \mapsto z_x$$

é injetiva. Como V é um conjunto não enumerável, concluímos que M é um conjunto não enumerável. Sendo M denso arbitrário, temos que l^∞ não pode ser separável. □

Definição 2.1.4. *Dizemos que uma sequência (x_n) em um espaço métrico X é uma **sequência de Cauchy** se dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ se } n, m \geqslant N.$$

*Dizemos que (x_n) é **convergente** em X se existe $x \in X$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo*

$$d(x_n, x) < \varepsilon \text{ se } n \geqslant N.$$

Neste caso escrevemos $x_n \to x$ e dizemos que x é o limite da sequência (x_n).

Proposição 2.1.2. *O limite de uma sequência em um espaço métrico X é único.*

Demonstração. Seja (x_n) em X com $x_n \to x$ e $x_n \to y$, sendo $x, y \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geqslant N_1.$$

$$d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geqslant N_2.$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, vale pela Desigualdade Triangular:

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_N) + d(x_N, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Como ε é arbitrário, segue que $d(x, y) = 0$ e $x = y$. □

Proposição 2.1.3. *Toda sequência convergente em um espaço métrico X é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em X com $x_n \to x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geqslant N.$$

Assim

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ se } n, m \geqslant N.$$

□

Definição 2.1.5. *Um espaço métrico X é **completo** se toda sequência de Cauchy em X é convergente em X.*

Exemplo 2.1.5. *É um fato conhecido que os espaços $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ dotados das métrica padrão são completos.*

Proposição 2.1.4. *Dado A não vazio, um espaço métrico X e $\eta : A \to X$, vale que, se X é completo, então X_η^A também é completo.*

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em X_η^A. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$D(f_n, f_m) = \sup_{a \in A} d\big(f_n(a), f_m(a)\big) < \varepsilon, \forall n, m \geq N.$$

Em particular, fixado $a \in A$, obtemos que $d\big(f_n(a), f_m(a)\big) < \varepsilon$ para $n, m \geq N$. Portanto, a sequência $\{f_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em X. Como este espaço é completo, tal sequência converge para um elemento em X, que denotamos $f(a)$. Isto define uma função $f : A \to X$. Mostraremos que $f_n \to f$ e que $f \in X_\eta^A$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$D(f_n, f_m) = \sup_{a \in A} d\big(f_n(a), f_m(a)\big) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, m \geq N.$$

Além disso, para cada $a \in A$ fixado, existe $M_a \in \mathbb{N}$, tal que se $m \geq M_a$, então

$$d\big(f_m(a), f(a)\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para $n \geq N$ e $m \geq \max\{N, M_a\}$, vale que

$$d\big(f_n(a), f(a)\big) \leq d\big(f_n(a), f_m(a)\big) + d\big(f_m(a), f(a)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tal n não depende de a, logo, tomando o supremo sobre $a \in A$:

$$D(f_n, f) = \sup_{a \in A} d\big(f_n(a), f(a)\big) < \varepsilon, \text{ se } n \geq N.$$

Isso mostra que $f_n \to f$ em X_η^A. Por fim, como

$$\begin{aligned} d\big(f(a), \eta(a)\big) &\leq d\big(f(a), f_n(a)\big) + d\big(f_n(a), \eta(a)\big) \\ &\leq \sup_{a \in A} d\big(f(a), f_n(a)\big) + \sup_{a \in A} d\big(f_n(a), \eta(a)\big), \forall a \in A, \end{aligned}$$

obtemos que $f \in X_\eta^A$. $\square$

Corolário 2.1.1. *Os espaços l^∞ e $l^\infty(\mathbb{Z})$ são completos.*

Se X é um espaço métrico, um subconjunto $Y \subseteq X$ pode ser considerado um espaço métrico ao considerarmos a restrição da métrica para Y.

Proposição 2.1.5. *Seja X um espaço métrico completo e Y um subconjunto fechado de X. Então Y é completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em Y. Como X é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Mas por definição, temos que $x \in \bar{Y} = Y$. Portanto, toda sequência de Cauchy em Y é convergente em Y, mostrando que este é completo. $\square$

Definição 2.1.6. *Dado um espaço métrico X, um **ponto fixo** de uma função $f : X \to X$ é um ponto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$. Dizemos que a função f é **Lipschtziana** se existe $C > 0$ satisfazendo*

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq Cd(x, y), \forall x, y \in X.$$

*Se tal C pode ser tomando no intervalo $(0, 1)$, então f é denominada uma **contração**. Nesse caso, a constante C é dita constante de contração. Vale que toda função Lipschitziana é contínua.*

Uma propriedade muito importante de um espaço métrico completo é que, nesse tipo de espaço, toda contração possui um único ponto fixo.

Teorema 2.1.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja $f : X \to X$ uma contração, em que X é um espaço métrico completo. Então f admite um único ponto fixo.*

Demonstração. Para provar a unicidade, se $x, y \in X$ são tais que $f(x) = f(y)$, então, sendo C uma constante de contração de f, vale que

$$d(x, y) = d\big(f(x), f(y)\big) \leq Cd(x, y).$$

E como $C < 1$, devemos ter $d(x, y) = 0$ e portanto $x = y$. Para provarmos a existência, tome $x_0 \in X$ qualquer, e defina uma sequência $(x_n) \in X$ por $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que tal sequência é de Cauchy. Com efeito, pela desigualdade triangular aplicada sucessivas vezes, obtemos para cada $n, k \in \mathbb{N}$

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}).$$

Por indução, é fácil ver que

$$d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq C^{n+j} d(x_1, x_0), \forall j \in \mathbb{N},$$

de modo que

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{j=0}^{k-1} C^{n+j} d(x_1, x_0) \leq d(x_1, x_0) \frac{C^n}{1-C} \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, mostramos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X, e sendo X um espaço completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Por fim, usando a continuidade de f, temos

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x.$$

Provando assim o resultado. □

Definição 2.1.7. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma **norma** em X é uma função $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo, para quaisquer $x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:*

1) $||x|| > 0$ *e* $||x|| = 0 \iff x = 0$;

2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

*Nesse caso, dizemos que X é dito espaço vetorial normado. Note que todo espaço normado é em particular um espaço métrico com a métrica induzida dada por $d(x, y) = ||x - y||$. Um espaço vetorial normado é um **espaço de Banach** se for um espaço métrico completo com a métrica induzida.*

Exemplo 2.1.6. *Os conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ são espaços de Banach com a norma induzida pela métrica padrão;*

Exemplo 2.1.7. *Se X é um espaço normado, vimos que X é um espaço métrico com $d(x, y) = ||x - y||$. Seja A um conjunto não vazio e $\eta : A \to X$ a função identicamente nula. Então, X_η^A é o conjunto*

$$\{f : A \to X \ : \ \sup_{a \in A} ||f(a)|| < \infty\}.$$

Neste caso, como a função η não varia, escrevemos simplesmente X^A. É fácil ver que X^A é um espaço vetorial, e podemos definir uma norma neste espaço por

$$||f|| = \sup_{a \in A} ||f(a)||.$$

Note que a métrica induzida $D(f, g) = \sup_{a \in A} ||f(a) - g(a)||$ corresponde à métrica definida no Exemplo 2.1.3. Portanto, pela Proposição 2.1.4, vale que X^A é um espaço de Banach se X também o for.

Definição 2.1.8. *Sejam X, Y espaços normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear. Dizemos que T é* ***limitada*** *se existe um número real c tal que*

$$||T(x)|| \leqslant c||x||, \forall x \in X.$$

Se T é uma transformação linear limitada, a ***norma*** *de T é dada por*

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||T(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||T(x)||.$$

Decorre da definição que $||T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||x||, \forall x \in X$. Também é fácil ver que dados espaços métricos X, Y, Z e transformações limitadas $T_1 : Y \to Z, T_2 : X \to Y$, então $T_1 \circ T_2$ é limitada com $||T_1 \circ T_2|| \leqslant ||T_1|| \cdot ||T_2||$. Com efeito, dado $x \in X$

$$||(T_1 \circ T_2)(x)|| \leqslant ||T_1|| \cdot ||T_2(x)|| \leq (||T_1|| \cdot ||T_2||)||x||.$$

Em particular, para cada uma transformação linear limitada $T : X \to X$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, concluímos que a n-ésima iterada T^n é limitada com $||T^n|| \leq ||T||^n$.

Lema 2.1.1. *Se $T : X \to Y$ é uma transformação linear, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *T é limitada;*

ii) *T é lipschtziana;*

iii) *T é contínua.*

Demonstração.

- *i) $\Rightarrow$ ii)*

  Seja $c \in \mathbb{R}$ com $||T(x)|| \leqslant c||x||, \forall x \in X$. Em particular temos

  $$||T(x) - T(y)|| = ||T(x - y)|| \leqslant c||x - y||, \forall x, y \in X.$$

- *ii) $\Rightarrow$ iii)*

  Seja $c \in \mathbb{R}$ com $||T(x) - T(y)|| \leqslant c||x - y||, \forall x, y \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon / c$. Então, fixado $x \in X$, temos

  $$||x - y|| < \delta \Rightarrow ||T(x) - T(y)|| < c||x - y|| < c\delta = \varepsilon.$$

  O que implica que T é contínua em x. Como x era arbitrário, vale o resultado.

- *iii)* $\Rightarrow$ *i)*

  Em particular, temos que T é contínua em 0. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||x|| \leqslant \delta \Rightarrow ||T(x)|| \leqslant \varepsilon.$$

  Tome $y \in X$ não nulo e ponhamos

$$x = \frac{\delta y}{||y||}.$$

  Daí, $||x|| = \delta$ e temos $||T(x)|| \leqslant \varepsilon$. Mas

$$||T(x)|| = \left|\left|T\left(\frac{\delta y}{||y||}\right)\right|\right| = \frac{\delta}{||y||}||T(y)||.$$

  Então

$$||T(x)|| \leqslant \varepsilon \Rightarrow ||T(y)|| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}||y||.$$

  Pondo $c = \dfrac{\varepsilon}{\delta}$, obtemos o resultado.

$\square$

Dados X, Y espaços normados, denotamos por $B(X, Y)$ o conjunto das transformações lineares limitadas $T : X \to Y$. Dados $T_1, T_2 \in B(X, Y)$ e α escalar, vale que

$$||(\alpha T_1 + T_2)x|| \leq \alpha||T_1 x|| + ||T_2 x|| \leq (\alpha||T_1|| + ||T_2||)||x||,$$

de modo que $\alpha T_1 + T_2 \in B(X, Y)$. Portanto, concluímos que $B(X, Y)$ é um espaço vetorial. Ademais, com a norma de uma transformação linear $||T||$, o conjunto $B(X, Y)$ é um espaço normado. A proposição abaixo mostra em que caso tal espaço é de Banach.

Proposição 2.1.6. *Se X é um espaço normado e Y é um espaço de Banach, o conjunto $B(X, Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Inicialmente, note que uma transformação linear $T : X \to Y$ pode ser completamente caracterizada por sua restrição $T : S_X \to Y$. Como

$$||T|| = \sup_{x \in S_X} ||Tx||$$

e

$$Y^{S_X} = \{f : S_x \to Y \ : \sup_{x \in S_X} ||f(x)|| < \infty\},$$

podemos considerar $B(X, Y) \subseteq Y^{S_X}$. Como Y é completo, segue que Y^{S_X} é completo. Portanto, basta mostrarmos que $B(X, Y)$ é fechado, e obtemos o resultado pela Proposição 2.1.5. Seja (T_n) uma sequência em $B(X, Y)$ tal que T_n converge para uma função T. Dados $x_1, x_2 \in X$ e α escalar, temos que

$$\lim T_n(\alpha x_1 + x_2) = \lim(\alpha T_n x_1 + T_n x_2) = \alpha \lim T_n x_1 + \lim T_n x_2,$$

o que mostra que T é linear. Por fim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$

$$||T - T_n|| < 1,$$

de modo que $T - T_n$ é limitado. Como $B(X, Y)$ é um espaço vetorial e $T = T_n + (T - T_n)$, concluímos que $T \in B(X, Y)$.

□

Definição 2.1.9. *Dado um espaço $\mathbb{K}$-vetorial normado X, um **funcional linear** é uma transformação linear $\phi : X \to \mathbb{K}$.*

2.2 Principais Resultados

Nesta seção vamos apresentar alguns dos principais teoremas da Análise Funcional. Estes são o Teorema de Hahn-Banach (Teorema 2.2.2), o Teorema da Categoria de Baire (Teorema 2.2.5) e o Teorema da Inversa Limitada (Teorema 2.2.6).

Definição 2.2.1. *Um conjunto **parcialmente ordenado** é um conjunto M, em que se está definida uma relação $\leqslant$ que satisfaz as condições*

1) *$a \leqslant a, \forall a \in M$ (Reflexividade)*

2) *Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$, então $a = b$ (Antissimetria)*

3) *Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$, então $a \leqslant c$ (Transitividade)*

*Se além disso, $\leqslant$ satisfazer que dados $a, b \in M$, temos $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$, então M é dito **totalmente ordenado**.*

*Se $W \subseteq M$ é um subconjunto totalmente ordenado, uma **cota superior** de W é um elemento $u \in M$ tal que*

$$x \leqslant u, \forall x \in W$$

*Um **elemento máximo** é um elemento $m \in W$ satisfazendo*

$$x \geqslant m \Rightarrow x = m, \forall x \in W$$

O lema a seguir é apenas um enunciado equivalente ao Axioma da Escolha.

Lema 2.2.1 (Lema de Zorn)**.** *Seja M um conjunto não vazio parcialmente ordenado. Suponha que todo subconjunto totalmente ordenado de M possui uma cota superior. Então M possui ao menos um elemento máximo.*

Definição 2.2.2. *Dado um espaço vetorial X, um **sublinear funcional** em X é uma função $p : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz*

- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \forall x, y \in X$
- $p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall \alpha \geqslant 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

Dado um espaço vetorial X, um subespaço vetorial Z e um funcional linear $f : Z \to \mathbb{R}$, uma **extensão linear** é um funcional linear $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in Z$.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Hahn-Banach (Caso Real))**.** *Seja X um espaço vetorial real e seja p um sublinear funcional em X. Seja Z um subespaço de X e $f : Z \to \mathbb{R}$ um funcional linear que satisfaz*

$$f(x) \leqslant p(x), \forall x \in Z$$

Existe uma extensão linear que satisfaz

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x), \forall x \in X$$

Demonstração. Seja E o conjunto de todas as extensões lineares $g : D(g) \to \mathbb{R}$ de f que satisfazem

$$g(x) \leqslant p(x), \forall x \in D(g)$$

Note que $E \neq \varnothing$, pois $f \in E$. Definimos em E a relação de ordem parcial

$$g \leqslant h \iff h \text{ é uma extensão de } g$$

ou seja, $D(g) \subseteq D(h)$ e $g(x) = h(x), \forall x \in D(g)$.

Mostremos que dado $C \subseteq E$ totalmente ordenado, existe uma cota superior em C. Em C, definimos

$$\hat{g} : \bigcup_{g \in C} D(g) \to \mathbb{R}$$

tal que $\hat{g}(x) = g(x), \forall x \in D(g)$. Temos que $\bigcup_{g \in C} D(g)$ é um subespaço vetorial pois C é totalmente ordenado (uma união de subespaços vetorias é um subespaço vetorial se a união for crescente ou decrescente). Além disso, $\hat{g}$ está bem definida pois dado $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$, temos $g_1(x) = g_2(x)$ por definição de C. Por fim, basta notar que g é um funcional linear tal que $g \leqslant \hat{g}, \forall g \in C$. Logo, existe $c \in E$ tal que c é uma cota superior para C.

Pelo Lema de Zorn (Lema 2.2.1), podemos tomar um elemento máximo $\tilde{f} \in E$. Afirmamos que $D(\tilde{f}) = X$. Com efeito, suponha que exista $y_1 \in X \setminus D(\tilde{f})$. Defina $Y_1 \coloneqq \text{Span}\{D(\tilde{f}, y_1)\}$. Note que $y_1 \neq 0$, pois $0 \in D(\tilde{f})$. Dado $x \in Y_1$, temos

$$x = y + \alpha y_1, y \in D(\tilde{f}), \alpha \in \mathbb{R}$$

Tal representação é única. De fato, se $y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1$, com $y, \tilde{y} \in D(\tilde{f})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, segue que

$$(y - \tilde{y}) = (\beta - \alpha) y_1$$

Como $y_1 \notin D(\tilde{f})$, a única solução possível é $y - \tilde{y} = 0$ e $\beta - \alpha = 0$. Isto implica a unicidade.

Dado c uma constante real qualquer, defina

$$\begin{aligned} g_1 : Y_1 &\to \mathbb{R} \\ y + \alpha y_1 &\mapsto \tilde{f}(y) + \alpha c \end{aligned} \tag{2.1}$$

Temos que g_1 é linear. Além disso, se $x = y + \alpha y_1 \in D(\tilde{f})$, então $\alpha = 0$ e vale $g_1(x) = \tilde{f}(x)$. Logo, g_1 é uma extensão própria de f, isto é, $D(\tilde{f}) \subsetneq D(g_1)$. Se mostrarmos que $g_1 \in E$ com

$$g_1(x) \leqslant p(x), \forall x \in D(g_1) \tag{2.2}$$

com c apropriado, teremos uma contradição ao fato de $\tilde{f}$ ser maximal em E.

Dados $y, z \in D(\tilde{f})$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) &= \tilde{f}(y - z) \\ &\leqslant p(y - z) \\ &= p(y + y_1 - y_1 - z) \\ &\leqslant p(y + y_1) + p(-y_1 - z) \end{aligned}$$

Logo

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leqslant p(y + y_1) - \tilde{f}(y)$$

Tome

$$\begin{aligned} m_0 &:= \sup_{z \in D(\tilde{f})} \{-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z)\} \\ m_1 &:= \inf_{y \in D(\tilde{f})} \{p(y + y_1) - \tilde{f}(y)\} \end{aligned}$$

e $c \in \mathbb{R}$ tal que $m_0 \leqslant c \leqslant m_1$. Segue que

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leqslant c, \forall z \in D(\tilde{f}) \tag{2.3}$$

$$p(y + y_1) - \tilde{f}(y) \geqslant c, \forall y \in D(\tilde{f}) \tag{2.4}$$

Provemos (2.2) inicialmente para $\alpha < 0$ em (2.1). Tomando $z = \alpha^{-1} y$ em (2.3), temos

$$-p(-y_1 - \alpha^{-1} y) - \tilde{f}(\alpha^{-1} y) \leqslant c$$

Multiplicando por $(-\alpha)$:

$$p(-\alpha y_1 - y) + \tilde{f}(\alpha^{-1} y) \leqslant -\alpha c$$

Usando que $y_1 + \alpha y = x \in Y_1 = D(g_1)$:

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leqslant -p(-\alpha y_1 - y) = p(\alpha y_1 + y) = p(x)$$

Para $\alpha = 0$, temos $x \in D(\tilde{f})$ e portanto $g_1(x) = \tilde{f} \geqslant p(x)$. Se $\alpha > 0$, tomamos $\alpha^{-1}y$ em (2.4):

$$c \leqslant p(\alpha^{-1}y + y_1) - \tilde{f}(\alpha^{-1}y)$$

Multiplicando por $\alpha > 0$:

$$\alpha c \leqslant p(y + \alpha y_1) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y)$$

Daí

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leqslant p(x), \forall x \in Y_1$$

□

Teorema 2.2.2 (Teorema de Hahn-Banach (Generalizado))**.** *Seja X um espaço vetorial real ou complexo e $p : X \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz, para todos $x, y \in X$*

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$$

e para cada escalar α

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

Então dado Z subespaço de X e f um funcional linear definido em Z que satisfaz

$$|f(x)| \leqslant p(x), \forall x \in Z$$

Então existe uma extensão linear $\tilde{f}$ de f em X satisfazendo

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \forall x \in X$$

Demonstração.

a) Caso real

Se X é real, vale que $f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant p(x)$ e o Teorema 2.2.1 nos dá uma extensão linear $\tilde{f}$ de f em X tal que

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x), \forall x \in X \tag{2.5}$$

Daí

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leqslant p(-x) = |-1|p(x) = p(x),$$

e obtemos que $-\tilde{f}(-x) \geqslant p(x)$. Junto com (2.5), concluímos que $|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \forall x \in X$.

b) Caso complexo

Se X é complexo, Z também é. Logo, f toma valores complexos e podemos escrever

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$$

com f_1, f_2 funcionais lineares com valores reais.

Considere X_r, Z_r as respectivas restrições dos espaços X, Z ao corpo dos reais. Como

$$f_1(x) \leqslant |f(x)| \leqslant p(x), \forall x \in Z_r,$$

podemos aplicar o Teorema 2.2.1 para encontrar um extensão linear $\tilde{f}_1$ de f_1 em X_r tal que

$$\tilde{f}_1(x) \leqslant p(x), \forall x \in X_r.$$

Voltando a Z, temos para cada $x \in Z$:

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = f_1(ix) + if_2(ix)$$

de modo que

$$-f_2(x) = f_1(ix), \forall x \in Z. \tag{2.6}$$

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{f} : X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix) \end{aligned}$$

Note que $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in Z$ por (2.6). Como f é linear, segue que $\tilde{f}_1$ é linear. Resta-nos mostrar que

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \forall x \in X$$

Se $x \in \mathcal{N}(\tilde{f})$, então

$$p(x) \geqslant |\tilde{f}(x)| = 0,$$

pois

$$0 = p\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) \leqslant p\left(\frac{x}{2}\right) + p\left(-\frac{x}{2}\right) = \left|\frac{1}{2}\right| p(x) + \left|-\frac{1}{2}\right| p(x) = p(x).$$

Se $x \notin \mathcal{N}(\tilde{f})$, então $\tilde{f}(x) \neq 0$. Considerando a forma polar de $\tilde{f}(x)$, temos

$$\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|e^{i\theta} \Rightarrow |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x)e^{-i\theta} = \tilde{f}(e^{-i\theta}x)$$

Como $|\tilde{f}(x)|$ é real, segue que $\tilde{f}(e^{-i\theta}x)$ é real e daí

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

$\square$

Teorema 2.2.3 (Hahn-Banach em espaços normados)**.** *Seja f um funcional linear limitado em um subespaço Z de um espaço normado X. Então existe uma extensão linear limitada $\tilde{f}$ de f em X tal que*

$$||\tilde{f}||_X = ||f||_Z$$

com

$$||\tilde{f}||_X = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} \ e \ ||f||_Z = \sup_{x \in Z\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||}$$

e $||f||_Z = 0$ *no caso* $Z = \{0\}$.

Demonstração. Se $Z = \{0\}$, então $f = 0$ e a extensão é $\tilde{f} = 0$. Se $Z \neq \{0\}$, defina $p : X \to \mathbb{K}$ por

$$p(x) = ||f||_Z||x||, \forall x \in X.$$

Daí

$$|f(x)| \leqslant ||f||_Z||x|| = p(x), \forall x \in X.$$

Além disso, como p é definido a partir da norma de X, segue que p é um sublinear funcional. Daí, pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 2.2.2), existe uma extensão $\tilde{f}$ de f em X tal que

$$||\tilde{f}|| \leqslant p(x) = ||f||_Z||x||, \forall x \in X.$$

De modo que

$$||\tilde{f}||_X = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} \leqslant ||f||_Z$$

Além disso, como $\tilde{f}$ é uma extensão de f, vale que $||\tilde{f}||_X \geqslant ||f||_Z$. Portanto vale a igualdade. □

Teorema 2.2.4 (Funcionais Lineares Limitados)**.** *Seja X um espaço normado e seja $x_0 \neq 0$ um elemento em X. Então existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ em X tal que*

$$||\tilde{f}|| = 1 \ e \ \tilde{f}(x_0) = ||x_0||.$$

Demonstração. Considere o subespaço Z de X definido por $Z = \mathrm{Span}\{x_0\}$. Em Z, defina um funcional f por

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha||x_0||,$$

vale que f é linear e que $||f|| = 1$. Com efeito,

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \cdot ||x_0|| = ||\alpha x_0|| = ||x||, \forall x \in Z.$$

Pelo Teorema 2.2.3, podemos tomar uma extensão linear $\tilde{f}$ de f em X com $||\tilde{f}|| = ||f|| = 1$. Além disso, vale que $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = ||x_0||$. □

Definição 2.2.3. *Um subconjunto M de um espaço métrico X é dito*

a) *raro em X se seu fecho $\bar{M}$ não possui pontos interiores;*

b) *magro em X se M é a união enumerável de conjuntos raros em X.*

Teorema 2.2.5 (Teorema da Categoria de Baire)**.** *Um espaço métrico completo não vazio é não magro.*

Ou seja, se $X \neq \varnothing$, é completo e

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

com cada M_k fechado, então ao menos um M_k possui um subconjunto aberto não vazio.

Demonstração. Suponha que X é magro. Então

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \tag{2.7}$$

com cada M_k magro em X. Construiremos uma sequência de Cauchy $(p_k) \in X$ cujo limite p não pertence a nenhum M_k, logo, não pertence a X. Por hipótese, M_1 é raro em X. Por definição, isto implica que $\bar{M}_1$ não contém nenhum subconjunto aberto não vazio. Mas X contém (por exemplo, ele próprio). Isto implica que $\bar{M}_1 \neq X$. Daí, tomamos $p_1 \in \bar{M}_1^{\,c}$ e uma bola aberta sobre ele, digamos

$$B_1 \coloneqq B(p_1; \varepsilon_1) \subseteq \bar{M}_1^{\,c}, \varepsilon_1 < \frac{1}{2}.$$

Por hipótese, M_2 é raro em X, então $\bar{M}_2$ não contém um subconjunto aberto não vazio. Em particular, não contém a bola aberta $B\left(p_1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Isto implica que $\bar{M}_2^{\,c} \cap B\left(p_1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ é não vazio e aberto, então podemos tomar uma bola aberta neste conjunto, digamos

$$B_2 \coloneqq B\left(p_2; \varepsilon_2\right) \subseteq \bar{M}_2^{\,c} \cap B\left(p_1, \frac{\varepsilon}{2}\right), \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2} < \frac{1}{4}.$$

Recursivamente, construímos uma sequência de bolas abertas

$$B_k \coloneqq B\left(p_k, \varepsilon_k\right), \varepsilon_k < 2^{-k}$$

tais que $B_k \cap M_k \neq \varnothing$ e

$$B_{k+1} \subseteq B\left(p_k; \frac{1}{2}\varepsilon_k\right) \subseteq B_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\varepsilon_k < 2^{-k}$, a sequência p_k é de Cauchy, logo, converge, pois X é completo. Suponha que $p_k \to \infty$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $n > m$ vale que $B_n \subseteq B\left(p_m; \frac{\varepsilon_m}{2}\right)$, logo:

$$\begin{aligned} d(p_m, p) &\leqslant d(p_m, p_n) + d(p_n, p) \\ &< \frac{\varepsilon_m}{2} + d(p_n, p) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\varepsilon_m}{2}. \end{aligned}$$

Loggo $p \in B_m, \forall m \in \mathbb{N}$. Como $B_m \subseteq \bar{M}_m^{\,c}$, temos que $p \notin M_m, \forall m \in \mathbb{N}$. Isto contradiz (2.7), pois $p \in X$. □

O Teorema da Categoria de Baire, assim como o Teorema de Hahn-Banach, consiste em um dos teoremas fundamentais da Análise Funcional. Também de extrema importância é o teorema abaixo, que enuncia que toda transformação linear limitada bijetiva é invertível.

Teorema 2.2.6 (Teorema da Inversa Limitada)**.** *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma transformação linear bijetiva e limitada. Então T admite uma inversa $T^{-1} : Y \to X$ limitada.*

A demonstração do Teorema acima pode ser encontrada em [8] como uma fácil implicação do Lema da Bola Unitária.

2.3 Espectro e Resolvente

Dado um espaço de Banach X e um operador T em X, definimos o **espectro** de T como $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ é não invertível}\}$ e o **resolvente** de T como sendo o conjunto $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Dado $\lambda \in \rho(T)$, o operador resolvente de T em λ é definido como $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$.

Em análise funcional, o espectro de um operador linear limitado T é a generalização do conjunto dos autovalores de T. De fato, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $Tx = \lambda x$, para algum $x \neq 0$ no espaço X, então $(\lambda I - T)$ não é injetiva, e em particular, não é invertível.

Contudo, podemos mostrar que nem todo elemento do espectro de T é necessariamente um autovalor de T. Por exemplo, considere o operador $T : l^\infty \to l^\infty$ dado por

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

então T não possui um autovalor pois $Tx = \lambda x$ implica $x_1 = 0, x_2 = x_1$, etc, de modo que $x = 0$. Mas o operador $T - 0I = T$ é não invertível, de modo que $0 \in \sigma(T)$.

Lema 2.3.1. *Seja X um espaço de Banach e $A, B : X \to X$ operadores. Então*

1) *Se A é invertível, $\sigma(A^{-1}) = \left\{\dfrac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\right\}$;*

2) *Se $c \neq 0$, então $\sigma(cA) = \left\{\dfrac{\lambda}{c} : \lambda \in \sigma(A)\right\}$;*

3) *Se B é invertível, $\sigma(BAB^{-1}) = \sigma(A)$.*

Demonstração.

1) Inicialmente, note que se A é invertível, então $0 \notin \sigma(A)$. Além disso, temos para $\lambda \neq 0$

$$\lambda I - A = \lambda A \left(\frac{1}{\lambda} I - A^{-1} \right).$$

Logo, se A é um isomorfismo, então $\lambda I - A$ é invertível se, e somente se $\dfrac{1}{\lambda} I - A^{-1}$ é invertível.

2) Como

$$\lambda I - cA = c \left(\frac{\lambda}{c} I - A \right),$$

segue que $\lambda I - cA$ se, e somente se $\dfrac{\lambda}{c} I - A$ é invertível.

3) Dado B isomorfismo e $\lambda \in \mathbb{C}$, vale que

$$\lambda I - BAB^{-1} = B(\lambda I)B^{-1} - BAB^{-1} = B(\lambda I - A)B^{-1}.$$

Logo, $\lambda I - BAB^{-1}$ é invertível se, e somente se $\lambda I - A$ é invertível.

□

Relembre que, dados X, Y espaços normados, denotamos por $B(X, Y)$ o espaço normado das transformações lineares limitadas. Em particular, quando $X = Y$, denotamos $B(X, X) = B(X)$. Pela Proposição 2.1.6, vale que se X é um espaço de Banach, então $B(X)$ é um espaço de Banach.

Lema 2.3.2. *Seja X um espaço de Banach e T um operador em X. Então*

1*)* *se* $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ *converge, então* $I - T$ *é invertível e* $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$*;*

2*)* *se* $||T|| < 1$*, então* $I - T$ *é invertível com* $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ *e*

$$||(I - T)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||T||}.$$

Demonstração.

1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge para um operador S, vale em particular que $T^m \to 0$ quando $m \to \infty$. Dado $m \in \mathbb{N}$, temos

$$(I - T) \sum_{n=0}^{m} T^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n \right) (I - T) = I - T^{m+1},$$

logo, fazendo $m \to \infty$, obtemos $(I - T)S = S(I - T) = I$.

2) Suponha agora que $||T|| < 1$. Então, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||T^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||T||^n$$

e esta última série converge, concluímos que a sequência de somas parciais de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$ é de Cauchy, e visto que $B(X)$ é um espaço de Banach, segue que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$ converge. Do item 1, concluímos que $I - T$ é invertível e $(I-T)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$. Por fim, para $||T|| < 1$,

$$||(I-T)^{-1}|| = \left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||T^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty}; ||T||^n = \frac{1}{1 - ||T||}.$$

□

Teorema 2.3.1. *Seja X um espaço de Banach complexo e T um operador em X. Então*

1*)* *$\rho(T)$ é aberto em $\mathbb{C}$ e contém $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > ||T||\}$;*

2*)* $R_\lambda(T) = \dfrac{1}{\lambda} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{T^n}{\lambda^n}$*, para $|\lambda| > ||T||$;*

3*)* *A função*

$$\begin{aligned} \Phi : \rho(T) &\longrightarrow B(X) \\ \lambda &\longmapsto R_\lambda(T) \end{aligned}$$

é analítica.

Demonstração. Se $|\lambda| > ||T||$, usando o Lema 2.3.2 deduzimos que $\lambda I - T$ é invertível e

$$R_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}.$$

Logo, mostramos que $\rho(T) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > ||T||\}$ e com isso o item 2.

Dado $\lambda_0 \in \rho(T)$, tome $\varepsilon = \dfrac{1}{||R_{\lambda_0}(T)||}$. Então, para $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, vale que

$$\lambda I - T = \lambda_0 I - T + (\lambda - \lambda_0)I = [I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)](\lambda_0 I - T).$$

Então como $||(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)|| < \varepsilon||R_{\lambda_0}(T)|| = 1$, o Lema 2.3.2 nos dá que $I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)$ é invertível, e portanto $\lambda I - T$ é invertível com

$$R_\lambda(T) = R_{\lambda_0}(T)[I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)]^{-1}$$

Logo, $\lambda \in \rho(T)$ e $\rho(T)$ é aberto. Por fim, o Lema 2.3.2 nos dá

$$I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^n,$$

e portanto

$$R_\lambda(T) = R_{\lambda_0}(T)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^n.$$

Portanto, escrevemos $R_\lambda(T)$ como uma série de potências convergente em torno de λ_0, o que mostra que Φ é uma função analítica. □

Com isso, podemos mostrar que o espectro de todo operador limitado deve ser obrigatoriamente não vazio. Para isso, devemos usar o Teorema de Liouville, um importante resultado de Análise Complexa, cuja demonstração pode ser encontrada em [11].

Teorema 2.3.2. *Toda função inteira (ou seja, holomórfica em todo o plano complexo $\mathbb{C}$) e limitada é constante.*

Teorema 2.3.3. *Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach complexo e T um operador em X. Então $\sigma(T)$ é um conjunto compacto não vazio contido em $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ||T||\}$.*

Demonstração. Como $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$, segue do Teorema 2.3.1 que $\sigma(T)$ é um espaço fechado e limitado com $\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ||T||\}$. Resta mostrar que $\sigma(T)$ é não vazio. Para isso, assuma por contradição que $\rho(T) = \mathbb{C}$. Assim, a função $\Phi : \rho(T) \to B(X)$ definida no Teorema 2.3.1 é uma função analítica definida em todo o plano complexo. Além disso, segue do Lema 2.3.2 que para $|\lambda| > ||T||$, temos

$$||R_\lambda(T)|| = \left|\left|\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1}\right|\right| \leq \frac{1}{|\lambda|(1 - ||T/\lambda||)},$$

de modo que Φ é uma função limitada. Logo, o Teorema de Liouville (Teorema 2.3.2) garante que Φ é constante. Como $R_\lambda(T) \to 0$ quando $\lambda \to \infty$, segue que $R_\lambda(T) = 0$, o que contradiz o fato de $X \neq \{0\}$. □

Definição 2.3.1. *Seja X um espaço vetorial complexo. Definimos o* ***raio espectral*** *de um operador T de X por*

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Note que, se T é um operador invertível, o Lema 2.3.1 nos dá que

$$\inf_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \frac{1}{\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |1/\lambda|} = \frac{1}{\sigma(T^{-1})}.$$

Teorema 2.3.4 (Fórmula do Raio Espectral)**.** *Dado um espaço de Banach complexo X e um operador T em X, vale que*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} ||T^n||^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração. Começamos mostrando que $\lim\limits_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n}$ existe e coincide com

$$s(T) = \liminf_{n\geq 1} ||T^n||^{1/n}.$$

Para isso, é suficiente mostrar que

$$\limsup_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} \leq s(T). \tag{2.8}$$

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tome $p \in \mathbb{N}$ tal que $||T^p||^{1/p} < s(T) + \varepsilon$. Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $n = pq + r$ com $0 \leq r < p$. Assim, obtemos

$$||T^n||^{1/n} = ||T^{pq+r}||^{1/n} \leq ||T^p||^{q/n}||T||^{r/n} < (s(T) + \varepsilon)^{pq/n}||T||^{r/n}.$$

Como $pq/n \to 1$ e $r/n \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que

$$\limsup_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} \leq s(T) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, provamos (2.8).

Vamos mostrar agora que $r(T) \leq s(T)$, ou equivalentemente, que $\lambda \in \rho(T)$ para $|\lambda| > s(T)$. De fato, tomando $c = |\lambda| - s(T) > 0$, obtemos que $||T^n|| < [s(T) + c/2]^n$, para n suficientemente grande, visto que $\lim\limits_{n\to\infty} ||T^N||^{1/n} = s(T)$. Então

$$\frac{1}{|\lambda|^n}||T^n|| \leq \left(\frac{s(T) + c/2}{s(T) + c}\right)^n,$$

o que mostra que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n/\lambda^n$ converge em $B(X)$. Além disso, pelo Lema 2.3.2, podemos escrever

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = R_\lambda(T), \tag{2.9}$$

de modo que provamos que $\lambda \in \rho(T)$ para $|\lambda| > s(T)$.

Resta mostrar que $r(T) \geq s(T)$. Pelo Teorema 2.3.1, $r(T) \leq ||T||$ e a função Φ é analítica para $|\lambda| > r(T)$. Em particular, $\Phi(\lambda) = R_\lambda(T)$ admite uma representação em série de Laurent centrado em 0 para $|\lambda| > r(T)$. A equação (2.9) mostra que essa série necessariamente é $\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}$. Portanto, vale que $\lim\limits_{n\to\infty} ||\lambda^{-n}T^n|| = 0$ para $|\lambda| > r(T)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, temos $||T^n|| \leq [\varepsilon + r(T)]^n$ para n suficientemente grande. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos

$$s(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} \leq r(T),$$

de modo que $r(T) = s(T)$. $\square$

O principal resultado desta seção é o Teorema 2.3.5 abaixo, conhecido como a Decomposição Espectral. Como sua demonstração é grande e aborda assuntos de variáveis complexas e topologia, não a apresentaremos aqui. Uma demonstração pode ser encontrada em [9].

Teorema 2.3.5. *Seja X um espaço de Banach complexo e T um operador limitado em X. Suponha que $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, em que σ_1, σ_2 são conjuntos compactos e disjuntos. Então existem subespaços fechados X_1, X_2 de X tais que*

1) $X = X_1 \oplus X_2$;

2) $T(X_1) \subseteq X_1$ *e* $T(X_2) \subseteq X_2$;

3) $\sigma(T_{|X_1}) = \sigma_1$ *e* $\sigma(T_{|X_2}) = \sigma_2$.

Em suma, este teorema nos diz que a decomposição do espectro de um operador em determinados subconjuntos nos dá uma decomposição do operador em subespaços invariantes. Este resultado é importante pois nos permite tratar o estudo de um operador ao analisarmos e classificarmos separadamente as componenetes de seu espectro. Assim, ao discutirmos operadores cujo espectro possuem uma topologia específica, analisamos as propriedades de seus operadores induzidos por seus respectivos subespaços invariantes.

Teorema 2.3.6. *Seja X um espaço de Banach complexo e T um operador limitado em X. As seguintes condições são equivalentes:*

i) *o raio espectral de T é estritamente menor que* 1;

ii) *existe uma norma $|\cdot|$ equivalente à norma $||\cdot||$ de X tal que* $|T| < 1$;

iii) *existem $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tal que $||T^n x|| \leq C\lambda^n ||x||, \forall x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Suponha que $r(T) < 1$. Segue do Teorema 2.3.4 que, fixado $r(T) < s < 1$, então vale que $||T^n||/s^n < 1$ para n suficientemente grande. Logo, existe $C > 0$ tal que

$$||T^n x|| \leq Cs^n ||x||, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Tome $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$Cs^N < 1. \tag{2.11}$$

Definimos uma norma em X por

$$|x| = \sum_{n=0}^{N-1} ||T^n x||, x \in X.$$

Então $|\cdot|$ é uma norma em X satisfazendo $||x|| \leq |x|, \forall x \in X$. Além disso, segue por (2.10) e (2.11) que para todo $x \in X$

$$|x| \leq \sum_{n=0}^{N-1} Cs^n ||x|| \leq \frac{C}{1-s}||x||. \tag{2.12}$$

Logo, mostramos que as normas $||\cdot||$ e $|\cdot|$ são equivalentes. Para cada $x \in X$

$$|Tx| = \sum_{n=1}^{N} ||T^n x|| = |x| - ||x|| + ||T^N x|| \leq |x| - (1 - Cs^N)||x||,$$

o que junto com (2.12) nos dá

$$|Tx| \leq \left(1 - \frac{(1-s)(1-Cs^N)}{C}\right)|x|.$$

Como $1 - s > 0$ e $(1 - Cs^N) > 0$, concluímos que $|T| < 1$. Isso mostra que a condição $i)$ implica condição $ii)$.

Já se $|T| < 1$, então tomando $\lambda > 0$ tal que $|T| < \lambda < 1$, vale que $|T^n x| < \lambda^n ||x||, \forall x \in X, n \in \mathbb{N}$, e como $|\cdot|$ e $||\cdot||$ são equivalentes, existe $C > 0$ tal que $||T^n x|| \leq C|T^n x| \leq C\lambda^n ||x|| \forall x \in X, n \in \mathbb{N}$, o que mostra que condição $ii)$ implica condição $iii)$.

Por fim, se vale a condição $iii)$, o Teorema 2.3.4 facilmente implica a condição $i)$.

□

2.4 Complexificação

Como visto nas seções anteriores, o espectro de um operador é um subconjunto do corpo dos complexos $\mathbb{C}$, e portanto o estudo da decomposição espectral deve ser realizado com espaços vetoriais complexos. Assim, no caso de um espaço vetorial real, é necessária uma maneira de estender o espaço de modo que se torne um espaço vetorial complexo. Como iremos ver adiante, esse processo é semelhante à extensão dos reais para os complexos.

Definição 2.4.1. *Dado um espaço vetorial real X, definimos*

$$X_{\mathbb{C}} = \{x + iy : x, y \in X\},$$

em que introduzimos uma estrutura de espaço vetorial complexo, como a soma de vetores $x + iy, u + iv \in X_{\mathbb{C}}$ por

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$

e a multiplicação por um escalar $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ por $x + iy \in \mathbb{C}$ definida como

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x).$$

Se X for um espaço normado, podemos definir uma norma em $X_{\mathbb{C}}$ por

$$||x + iy||_{\mathbb{C}} = \sup_{\theta \in [0.2\pi]} || \cos(\theta)x - \text{sen}(\theta)y||.$$

Proposição 2.4.1. *Se X é um espaço vetorial real com norma $|| \cdot ||$, então $|| \cdot ||_{\mathbb{C}}$ é uma norma em $X_{\mathbb{C}}$ tal que, para todos $x, y \in X$*

$$\max\{||x||, ||y||\} \leqslant ||x + iy|| \leq ||x|| + ||y||. \tag{2.13}$$

Demonstração. Como

$$||x|| = || \cos(0)x - \text{sen}(0)y|| \leq ||x + iy||_{\mathbb{C}}$$

e

$$||y|| = \left|\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) y\right|\right|_{\mathbb{C}},$$

segue que $\max\{||x||, ||y||\} \leqslant ||x+iy||$. Para a outra desigualdade, basta observar que para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, temos

$$|| \cos(\theta)x - \text{sen}(\theta)y|| \leq | \cos\theta| ||x|| + | \text{sen}\,\theta| ||y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Agora vamos ver que $|| \cdot ||_{\mathbb{C}}$ define uma norma em $X_{\mathbb{C}}$. Por (2.13), obtemos

$$||x + iy||_{\mathbb{C}} = 0 \iff x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Dados $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tome $\alpha \in [0, 2\pi]$ tal que $\lambda = |\lambda|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$. Vale que

$$\begin{aligned}
||\lambda(x+iy)||_{\mathbb{C}} &= |||\lambda|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(x + iy)||_{\mathbb{C}} \\
&= |||\lambda|[(\cos(\alpha)x - \text{sen}(\alpha)y) + i(\cos(\alpha)y + \text{sen}(\alpha)x]||_{\mathbb{C}} \\
&= |\lambda| \sup_{\theta \in [0,2\pi]} || \cos\theta(\cos(\alpha)x - \text{sen}(\alpha)y) - \text{sen}(\theta)(\cos(\alpha)y + \text{sen}(\alpha)x])|| \\
&= |\lambda| \sup_{\theta \in [0,2\pi]} || \cos(\theta + \alpha)x - \text{sen}(\theta + \alpha)y|| \\
&= |\lambda| ||x + iy||_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

Por fim, para obter a desigualdade triangular, dados $u + iv, x + iy \in X_{\mathbb{C}}$, temos

$$\begin{aligned}
||(u + iv) + (x+iy)||_{\mathbb{C}} &= ||(u + x) + (v + y)i||_{\mathbb{C}} \\
&= \sup_{\theta \in [0,2\pi]} || \cos(\theta)(u + x) - \text{sen}(\theta)(v + y)|| \\
&= \sup_{\theta \in [0,2\pi]} || \cos(\theta)u - \text{sen}(\theta)u + \cos(\theta)x - \text{sen}(\theta)y|| \\
&\leq \sup_{\theta \in [0,2\pi]} || \cos(\theta)u - \text{sen}(\theta)v|| + \sup_{\theta \in [0,2\pi]} || \cos(\theta)x - \text{sen}(\theta)y|| \\
&= ||u + iv||_{\mathbb{C}} + ||x + iy||_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Dado um operador $T : X \to X$ em um espaço vetorial real, definimos a complexificação de T por

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} &\longrightarrow X_{\mathbb{C}} \\ x + iy &\longmapsto Tx + iTy \end{aligned}$$

Corolário 2.4.1. *Se X é um espaço de Banach real, então $X_{\mathbb{C}}$ também é um espaço de Banach. Além disso, se $T : X \to X$ é um operador limitado, então $T_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ também é limitado com norma $||T_{\mathbb{C}}||_{\mathbb{C}} = ||T||$.*

Demonstração. Suponha que X é um espaço de Banach. Note que se $(x_n + iy_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $X_{\mathbb{C}}$, então (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em X, pela Proposição 2.4.1. Logo, ambas (x_n) e (y_n) convergem em X. A convergência destas sequências implica a convergência de $(x_n + iy_n)$, novamente pela Proposição 2.4.1. Para mostrar que $||T_{\mathbb{C}}||_{\mathbb{C}} = ||T||$, temos que para cada $x + iy \in X_{\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned} ||T_{\mathbb{C}}(x + iy)||_{\mathbb{C}} &= ||Tx + iTy||_{\mathbb{C}} \\ &= \sup_{\theta \in [0,2\pi]} ||\cos(\theta)Tx - \operatorname{sen}(\theta)y|| \\ &\leq ||T|| \sup_{\theta \in [0,2\pi]} ||\cos(\theta)x - \operatorname{sen}(\theta)y|| \\ &= ||T|| ||x + iy||_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

o que mostra que $||T_{\mathbb{C}}|| \leq ||T||$. Além disso, notando que para qualquer $x \in X$, vale que $||x||_{\mathbb{C}} = ||x||$, segue que

$$||T_{\mathbb{C}}||_{\mathbb{C}} \geq \sup_{x \neq 0} \frac{||T_{\mathbb{C}}(x + i0)||_{\mathbb{C}}}{||x + i0||_{\mathbb{C}}} = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||_{\mathbb{C}}}{||x||_{\mathbb{C}}} = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = ||T||,$$

e obtemos a outra desigualdade. $\square$

3 Dinâmica Topológica

3.1 Sistemas Dinâmicos

Neste seção vamos realizar uma breve introdução à teoria dos sistemas dinâmicos, assim como estudar propriedades gerais e critérios de hiperciclicidade. As principais referências para esta seção são os livros [2] e [6]. Começamos definindo formalmente um sistema dinâmico.

Definição 3.1.1. *Um **sistema dinâmico** é um par (X, T), com X um espaço métrico e $T : X \to X$ uma função contínua. Geralmente, dizemos que $T : X \to X$ é um sistema dinâmico, ou nos referimos apenas a T, quando o espaço X é subentendido.*

Dado $x \in X$, a órbita de x (ou trajetória de x) sobre T é o conjunto

$$\begin{aligned} \operatorname{orb}(x, T) &= \{T^n x; n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x, Tx, T^2x, \dots\}. \end{aligned}$$

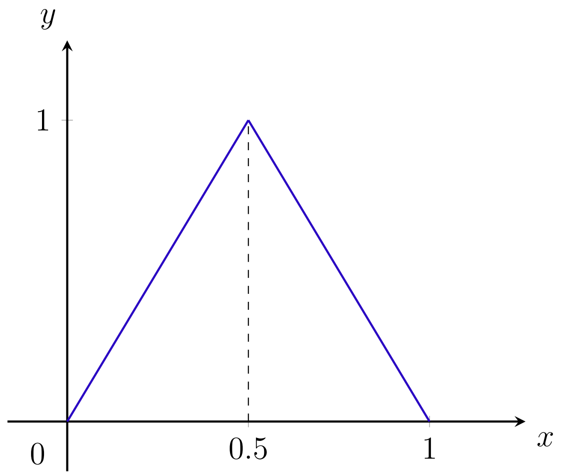
Note que, x é um **ponto fixo** de T se, e somente se $\operatorname{orb}(x, T) = \{x\}$ e x é um **ponto eventualmente periódico** de T (isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) = x$) se e somente se sua órbita sobre T é finita.

Exemplo 3.1.1. *Se $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado por $Tx = x^2$, então suas iteradas são $T^n x = x^{2n}$. Vale que $\operatorname{orb}(0, T) = \{0\}, \operatorname{orb}(1, T) = \{1\}$ e $\operatorname{orb}(-1, T) = \{-1, 1\}$. Se $|x| < 1$, então sua órbita tende a 0, enquanto que se $|x| > 1$, sua órbita tende a infinito.*

Exemplo 3.1.2. *A função tenda $T : [0, 1] \to [0, 1]$ é dada por*

$$Tx = \begin{cases} 2x, x \in [0, 1/2]; \\ 2 - 2x, x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Figura 1 – Gráfico da função tenda



Fonte: os autores

Como $T(1/2) = 1$ e $T(1) = 0$ e 0 é um ponto fixo de T, segue que $\mathrm{orb}(1/2, T) = \{1/2, 1, 0\}$.

Exemplo 3.1.3. *Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, o sistema $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ dado por $Tz = e^{2\pi i\alpha}z$ descreve a rotação pelo ângulo $2\pi\alpha$ no círculo unitário. Afirmamos que se $\alpha \in \mathbb{Q}$, a órbita de qualquer ponto $z \in \mathbb{T}$ é finita. De fato, se $\alpha = m/n$, com $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, então*

$$T^n z = (e^{2\pi i m/n})^n z = e^{2\pi i m} z = z.$$

Já se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a órbita de qualquer ponto é infinita. De fato, suponha que para algum $z \in \mathbb{T}$ existem $m > n \geq 0$ tais que $T^n z = T^m z$, então existe um inteiro positivo q tal que $2\pi(m - n) = 2\pi\alpha q$, o que implica $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Exemplo 3.1.4. *Consideramos o intervalo $I = [0, 1]$ na qual identificamos 0 com 1 e consideramos a métrica $d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos o sistema dinâmico $S : [0, 1] \to [0, 1]$ por $Sx = x + \alpha$.*

Inúmeros objetos matemáticos possuem a noção de equivalência entre si, dada através de uma função bijetora que preserva as principais propriedades dos objetos. No caso de sistemas dinâmicos, a função em questão é denominada quasi-conjugação.

Definição 3.1.2. *Sejam $S : Y \to Y, T : X \to X$ sistemas dinâmicos. Dizemos que T é quasi-conjugado a S se existe uma função contínua $\phi : Y \to X$ com imagem densa tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$, ou seja o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] & X \\ Y \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "S"'] & Y \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

comuta. Tal função ϕ é dita uma quasi-conjugação entre S e T. Podemos especificar o tipo de conjugação se podemos tomar uma função ϕ que satisfaz propriedades extras, como segue abaixo:

- *Se ϕ for uma função uniformemente contínua, dizemos que ϕ é uma quasi-conjugação uniforme e que T é uniformemente quasi-conjugado a S.*
- *Se ϕ for um homeomorfismo, ou seja, uma função contínua, bijetiva e com inversa contínua, então T e S são ditos conjugados e dizemos que ϕ é uma conjugação entre S e T.*
- *Se ϕ for um homeomorfismo tal que ϕ, ϕ^{-1} são uniformemente contínuas, então ϕ é uma conjugação uniforme entre S e T, e estes são ditos uniformemente conjugados.*

Por exemplo, se $I = [0,1]$, em que identificamos 0 com 1, a função $\phi : I \to \mathbb{T}$ dada por $\phi(z) = e^{2\pi i z}$ é uma conjugação entre os sistemas dinâmicos $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ e $S : I \to I$ definidas acima. De fato, sabemos que ϕ é uma homeomorfismo entre I e $\mathbb{T}$. Além disso, dado $z \in I$:

$$T\big(\phi(z)\big) = T(e^{2\pi i z}) = e^{2\pi i \alpha} e^{2\pi i z} = e^{2\pi i (z+\alpha)} = \phi(z+\alpha) = \phi\big(S(z)\big).$$

Dizemos que uma propriedade P é preservada por quasi-conjugação se satsifaz a seguinte condição: dado um sistema dinâmico $T : X \to X$ que satisfaz a propriedade P, então todo sistema quasi-conjugado a T também satisfaz P.

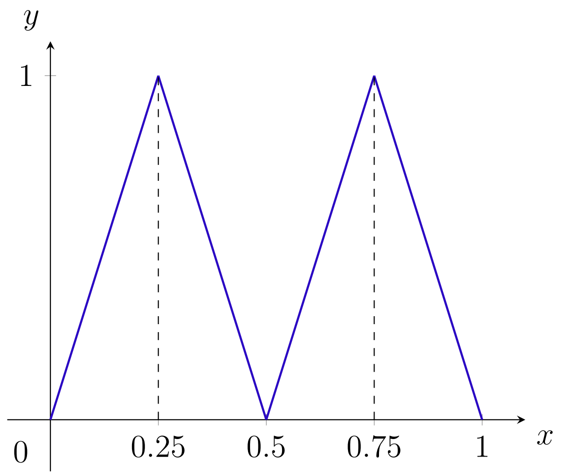
Definição 3.1.3. *Um sistema dinâmico $T : X \to X$ é dito* ***topologicamente transitivo*** *se para cada par de abertos não vazios U, V de X, existe $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$.*

Note que tal definição é equivalente a dizer que, dado $U \neq \varnothing$ aberto em X, temos que $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ é denso em X. Logo, para T ser topologicamente transitivo, é necessário que se $U \subseteq X$ é um aberto não vazio T-invariante (isto é, $T(U) \subseteq U$) então U é denso em X.

Exemplo 3.1.5. *A função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ não é topologicamente transitiva pois $U = (0,1)$ é um aberto não-vazio T invariante que não é denso em $\mathbb{R}$;*

Exemplo 3.1.6. *A função tenda (Figura 1) é topologicamente transitiva. De fato, o gráfico de uma iteradas T^n de T é um conjuntos de 2^{n-1} triângulos que conectam $(m/2^n, 0)$, $((m+1)/2^n, 1)$ e $((m+2)/2^n, 0)$, para m par entre 0 e $2^n - 2$ (confira Figura 2 para o gráfico da função no caso $n = 2$). Logo, se $J = [m/2^n, (m+1)/2^n]$, então $T^n(J) = [0, 1]$. Como todo aberto não vazio U contém algum intervalo da forma J, concluímos que existe $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \supseteq T^n(J) = [0, 1]$;*

Figura 2 – Gráfico da segunda iterada da função tenda



Fonte: os autores

Proposição 3.1.1. *Transitividade topológica é preservada por quasi-conjugação.*

Demonstração. Seja $T : X \to X$ quasi-conjugado a $S : Y \to Y$, com $\phi : Y \to X$ uma quasi-conjugação. Suponha que S é topologicamente transitivo, e sejam U, V abertos não vazios de X. Como ϕ é contínua e de imagem densa, $\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(V)$ são abertos não vazios de Y. Logo, existem $n \geq 0$ e $y \in Y$ tais que $y \in S^n\big(\phi^{-1}(U)\big) \cap \phi^{-1}(V)$. Mas então

$$\phi(y) \in \phi(S^n\big(\phi^{-1}(U)\big) \cap \phi^{-1}(V)) = \phi(S^n\big(\phi^{-1}(U)\big)) \cap \phi(\phi^{-1}(V)) = T^n(U) \cap V.$$

□

3.2 Dinâmica Linear

Agora, consideramos X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e consideramos um sistema dinâmico $T : X \to X$ linear. Um ponto $x \in X$ é dito **hipercíclico** se $\mathrm{orb}(x, T)$ é denso em X. O operador T é hipercíclico se T admite um ponto hipercíclico. Note que se T é hipercíclico, então X é um espaço separável. Ainda mais, a proposição a seguir mostra que tais operadores só existem no caso infinito:

Proposição 3.2.1. *Se $X \neq \{0\}$ é um espaço vetorial de dimensão finita, então X não admite operadores hipercíclicos.*

Demonstração. Como todo operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pode ser visto como um operador em $\mathbb{C}^n$ através da complexificação, basta considerar o caso complexo. Suponha por contradição que $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é um operador hipercíclico. Em dimensão finita, todo espaço vetorial admite um produto interno $\langle , \rangle$. Considere a adjunta T^* de T em relação a este produto interno, e como estamos no caso complexo, T^* admite um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, existe $x^* \in X$ não nulo tal que

$$T^* x^* = \lambda x^*$$

Portanto, se $x \in X$ é um vetor hipercíclico, dado $n \geq 0$ temos

$$\langle T^n x, x^* \rangle = \langle x, (T^*)^n x^* \rangle = \overline{\lambda}^n \langle x, x^* \rangle.$$

Como $x^* \neq 0$, a hiperciclicidade de T implica que o lado direito da equação acima é denso em $\mathbb{C}$. Portanto, concluímos que $S = \{\overline{\lambda}^n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathbb{C}$. Mas se $|\lambda| \leq 1$, então $S \subseteq \{z \in \mathbb{C} : ||z|| \leq 1\}$, enquanto que se $|\lambda| > 1$, vale $S \cap \{z \in \mathbb{C} : ||z|| \leq 1\} = \varnothing$. Portanto, S não pode ser denso em $\mathbb{C}$ e temos uma contradição. $\square$

O próximo teorema nos dá uma conexão entre hiperciclicidade e transitividade topológica.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Transitividade de Birkhooff)**.** *Seja X um espaço de Banach separável e sem pontos isolados. Dado um operador $T : X \to X$, então T é topologicamente transitivo se, e somente se T é hipercíclico. Neste caso o conjunto de pontos hipercíclicos de T, denotado por $HC(T)$ é um conjunto denso e G_δ, isto é, $HC(T)$ pode ser escrito como interseção finita de conjuntos abertos.*

Demonstração. Inicialmente, note que $\mathrm{orb}(x, T) \subseteq HC(T)$. De fato, como X não contém pontos isolados, qualquer subconjunto denso de X permanece denso após a remoção de qualquer quantidade finita de pontos. Assim, como $\mathrm{orb}(T^n x, T)$ é obtida após a remoção dos k primeiros termos de $\mathrm{orb}(x, T)$, obtemos que $T^n x \in HC(T), \forall n \geq 0$.

Portanto, se T é um operador hipercíclico, então dados U, V abertos não vazios e um vetor x hipercíclico, existe $n \geq 0$ tal que $T^n x \in U$, e como $T^n x \in HC(T)$, existe $k \geq 0$ satisfazendo $T^{n+k} x \in V$. Logo, $T^n(x) \in T^k(U) \cap V \neq \varnothing$.

Para provar a recíproca, seja $(V_j)_{j \geq 0}$ uma base enumerável de X. Um vetor $x \in X$ é hipercíclico se, e somente se para cada $j \geq 0$ existe $n \geq 0$ tal que $T^n x \in V_j$. Em outras palavras

$$HC(T) = \bigcap_{j \geq 0} \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(V_j)$$

Isso mostra que $HC(T)$ é um conjunto G_δ. Se T é topologicamente transitivo, então para cada $j \geq 0$, o conjunto $\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j)$ é denso em X, e portanto, pelo Teorema da Categoria de Baire (Teorema 2.2.5), concluímos que $HC(T)$ é um conjunto denso em X, e em particular, não vazio. □

Logo, mostrar que um sistema dinâmico possui um ponto cuja órbita é densa é equivalente a mostrar sua transitividade topológica, o que por sua vez, é mais fácil e prático de se mostrar em geral.

Por exemplo, vamos mostrar que se α é irracional, a função $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, z \mapsto e^{2\pi i\alpha}$ é topologicamente transitiva ao exibirmos um ponto em $\mathbb{T}$ com órbita densa (de fato, todo ponto em $\mathbb{T}$ tem órbita densa, mas não usaremos este fato). Como α é irracional, vimos que a órbita de qualquer ponto é infinita. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe um arco de comprimento ε que contém ao menos dois pontos da órbita de 1, digamos $T^n 1, T^m 1$, com $m > n$. Assim $|T^m 1 - T^n 1| < \varepsilon$ e pondo $p = m - n$, concluímos que

$$|T^m 1 - T^n 1| = |e^{2\pi i n\alpha}(e^{2\pi i p\alpha} - 1)| = |(e^{2\pi i p\alpha} - 1)| < \varepsilon.$$

Analogamente,

$$|T^{2p} 1 - T^p 1| = |e^{4\pi i p\alpha} - e^{2\pi i p\alpha}| = |e^{2\pi i p\alpha}(e^{2\pi i p\alpha} - 1)| < \varepsilon$$

Portanto, por indução, concluímos que os pontos consecutivos da órbita de $T^p 1$ têm distância menor que ε. Assim, existe um ponto desta órbita em qualquer arco de comprimento ε. Isso mostra que $\mathrm{orb}(T^p 1)$ é denso em $\mathbb{T}$.

Definição 3.2.1. *Um sistema dinâmico $T : X \to X$ é dito **misturador** se, para cada par U, V de abertos não vazios de X, existe $N \geq 0$ tal que*

$$T^n(U) \cap V \neq \varnothing, \forall n \geq N.$$

Por exemplo, note que a função tenda é misturadora, visto que mostramos que dado U aberto não vazio de $[0, 1]$, existe $N \geq 0$ tal que $T^n(U) \supseteq [0, 1], \forall n \geq N$.

Sejam $T : X \to X$ e $S : Y \to Y$ sistemas dinâmicos. Consideramos o sistema dinâmico $T \times S : X \times Y \to X \times Y$ dado por

$$(T \times S)(x, y) = (Tx, Sy)$$

Definição 3.2.2. *Um sistema dinâmico $T : X \to X$ é dito **fracamente misturador** se $T \times T$ é topologicamente transitivo. Em outras palavras, T é fracamente misturador se e somente se para cada quadrúpla U_1, U_2, V_1, V_2 de abertos não vazios em X, existe $n \geq 0$ tal que*

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing \text{ e } T^n(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$$

Proposição 3.2.2. *Para qualquer sistema dinâmico, vale as implicações*

$$\textit{misturador} \Longrightarrow \textit{fracamente misturador} \Longrightarrow \textit{topologicamente transitivo.}$$

Demonstração. Se $T : X \to X$ é um sistema dinâmico misturador, dados U_1, V_1, U_2, V_2 abertos não vazios de X, existem $N_1, N_2 \geq 0$ tais que

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing, \forall n \geq N_1 \text{ e}$$

$$T^m(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing, \forall m \geq N_2$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, então

$$T^N(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing \text{ e } T^N(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing.$$

Portanto, T é misturador. Por sua vez, se T é misturador, então $T \times T$ é topologicamente transitivo. Considerando a projeção $\pi : X \times X \to X, \pi(x_1, x_2) = x_1$, vemos que, dados $x, y \in X$

$$\pi(T \times T)(x, y) = \pi(Tx, Ty) = Tx = T\big(\pi(x, y)\big),$$

de modo que $\pi \circ (T \times T) = T \circ \pi$ e portanto T é quasi-conjugado a $T \times T$. Pela Proposição 3.1.1, como a transitividade topológica é preservada por quasi-conjugação, então concluímos que T também é topologicamente transitivo. □

Considere a rotação pelo ângulo $2\pi\alpha$ no círculo unitário $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, Tz = e^{2\pi i\alpha}$. Vamos mostrar que T não é fracamente misturador. De fato, suponha que $T \times T$ é topologicamente transitivo. Pelo Teorema de Transitividade de Birkhooff (Teorema 3.2.1), isto é equivalente a existir um ponto $(z_1, z_2) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ com órbita densa. Assim, dado $(w_1, w_2) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, existe uma sequência (n_k) tal que

$$(w_1, w_2) = \lim_{k\to\infty} (e^{2\pi i n_k \alpha} z_1, e^{2\pi i n_k \alpha} z_2) = \lim_{k\to\infty} e^{2\pi i n_k \alpha}(z_1, z_2).$$

Tomando $\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} e^{2\pi i n_k \alpha}$, concluímos que dado $(w_1, w_2) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, existe $\lambda \in \mathbb{T}$ tal que $(w_1, w_2) = \lambda(z_1, z_2)$. Isto não é verdade pois $w_1 = w_2$ implica $z_1 = z_2$, enquanto $w_1 \neq w_2$ implica $z_1 \neq z_2$.

Portanto, se α é irracional, a rotação pelo ângulo $2\pi\alpha$ é um exemplo de sistema que é topologicamente transitivo, mas não é fracamente misturador, e portanto, também não é misturador.

3.3 Critérios de Hiperciclicidade

O objetivo do próximo Teorema é exibir condições simples em que um operador é misturador, e em particular, topologicamente transitivo.

Teorema 3.3.1 (Critério de Kitai)**.** *Seja T um operador. Se existem conjuntos densos $X_0, Y_0 \subseteq X$ e uma função $S : Y_0 \to Y_0$ tais que, para quaisquer $x \in X_0$ e $y \in Y_0$,*

(1) $T^n x \to 0$;

(2) $S^n y \to 0$;

(3) $TSy = y$;

então T é um operador misturador.

Demonstração. Dados U, V abertos não vazios de X, podemos encontrar $x \in X_0 \cap U$ e $y \in Y_0 \cap V$. Como $T^n x \to 0$ e $S^n y \to 0$, existe $N \geq 0$ tal que, $\forall n \geq N$

$$x + S^n y \in U \text{ e } T^n(x + S^n y) = T^n x + y \in V,$$

em que usamos que $T^n S^n y = y, \forall n \in \mathbb{N}$. Isso mostra que T é misturador. $\square$

Exemplo 3.3.1. *Seja X o espaço de Banach*

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in \mathbb{C} \text{ e } \lim x_n = 0\}$$

com $||x|| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos o ***operador de Rolewicz*** *$T : X \to X$ por*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots ...) = \lambda(x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Note que se $|\lambda| \leq 1$, então $||T^n x|| = |\lambda|^n ||x|| \leq ||x||, \forall n \geq 0$ e $x \in X$. Assim, $\mathrm{orb}(x, T) \subseteq B(0, ||x||)$, e portanto não pode ser densa em c_0. Logo, se $|\lambda| \leq 1$, T não pode ser hipercíclico.

Por outro lado, se $|\lambda| > 1$, podemos usar o Critério de Kitai para provar que T é misturador. De fato, basta tomar $X_0 = Y_0$ como o conjunto de sequências finitas de X, o qual é um conjunto denso. Já a função $S : Y_0 \to Y_0$ pode ser definida como

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{\lambda}(0, x_1, x_2, \dots)$$

Então as condições $(1) - (3)$ do Teorema 3.3.1 são atendidas.

4 Sombreamento, Expansividade e Hiperbolicidade

Nesta capítulo, vamos estudar três propriedades muito importantes para a dinâmica de operador em um espaço métrico. A primeira é a propriedade de sombreamento, que indica a capacidade de um sistema de possuir pontos cujas órbitas são suficientemente próximas a qualquer sequência de pontos que simule uma trajetória. A segunda, a propriedade de expansividade, é a propriedade de um operador possuir órbitas ilimitadas. Por fim, a hiperbolicidade é a capacidade de um operador se decompor em dois subespaços invariantes, um instável e outro estável. No final desta seção, vamos mostrar como estas três propriedades se relacionam.

As principais referências para esta seção são os artigos [4] e [3].

4.1 Sombreamento

Definição 4.1.1. *Dado um espaço métrico X e um homeomorfismo $f : X \to X$, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma δ-pseudo trajetória de f, para $\delta > 0$, se*

$$d\big(f(x_n), x_{n+1}\big) \leq \delta, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como o nome sugere, as pseudo-trajetórias simulam trajetórias verdadeiras, com a imagem de um ponto distando até δ unidades do próximo ponto da sequência. É claro que toda trajetória é em si uma pseudo trajetória, mas vamos focar nas sequências que não são órbitas de nenhum ponto.

Exemplo 4.1.1. *Relembre que denotamos por $l^\infty(\mathbb{Z})$ o espaço métrico $\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n \in \mathbb{C}$ e $\sup |x_n| < \infty\}$. Consideramos o operador shift $T : l^\infty(\mathbb{Z}) \to l^\infty(\mathbb{Z})$ dado por $T(x_n) = x_{n-1}$, isto é,*

$$T(\dots, \overline{x_0}, x_1, \dots) = (\dots, \overline{x_{-1}}, x_0, \dots).$$

Então se $z = (\dots, 1, 1, 1 \dots) \in l^\infty(\mathbb{Z})$, dado $\delta > 0$ construa a sequência $z_n = n\delta z = (\dots, n\delta, n\delta, \dots)$, para $n \in \mathbb{Z}$. Note que vale $Tz_n = z_n, \forall n \in \mathbb{Z}$. Temos que a sequência (z_n) é uma δ-pseudo trajetória pois para cada n

$$||Tz_n - z_{n+1}|| = ||z_n - z_{n+1}|| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |n\delta - (n+1)\delta| = \delta.$$

Exemplo 4.1.2. *Considere $X = \mathbb{T}$ e $T : X \to X$ a função rotação por um ângulo α, o qual é um homeomorfismo no círculo unitário. Dado $\delta > 0$, tome $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $|e^{2\pi i\alpha} - e^{2\pi i\beta}| \leq \delta$, e seja S a rotação pelo ângulo β. Afirmamos que a sequência $z_n = S^n z$, com $z \in \mathbb{T}$ qualquer, é uma δ-pseudo trajetória de T. De fato, dado $n \in \mathbb{Z}$ temos*

$$\begin{aligned} ||Tz_n - z_{n+1}|| &= |Te^{2\pi in\beta}z - e^{2\pi i(n+1)\beta}z| \\ &= |e^{2\pi in\beta}z(e^{2\pi i\alpha} - e^{2\pi i\beta})| \\ &= |e^{2\pi i\alpha} - e^{2\pi i\beta}| \leq \delta. \end{aligned}$$

Com a noção de pseudo trajetória, podemos apresentar a noção de sombreamento:

Definição 4.1.2. *Um homeomorfismo f é dito ter a propriedade de **sombreamento** se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo trajetória é ε-sombreada, ou seja, existe $x \in X$ tal que*

$$d\big(x_n, f^n(x)\big) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nesse caso, dizemos que x $\varepsilon-$sombreia a δ-pseudo trajetória. Vejamos se os operadores dos exemplos anteriores possuem a propriedade de sombreamento:

1) Afirmamos que o operador shift $T : l^\infty(\mathbb{Z}) \to l^\infty(\mathbb{Z})$ não possui a propriedade de sombreamento. De fato, suponha que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo trajetória seja ε-sombreada. Então, em particular, existe $x = (x_n) \in l^\infty(\mathbb{Z})$ tal que a sequência $z_n = n\delta z$ satisfaz $d(z_n, T^n x) < \varepsilon, \forall n$. Portanto para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |n\delta - x_{k-n}| < \varepsilon &\implies |x_{k-n} - n\delta| < \varepsilon, \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\implies n\delta - \varepsilon < |x_{k-n}|, \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

o que contraria o fato de que $\sup |x_n| < \infty$.

2) É fácil ver que no caso do exemplo 4.1.2, a δ-pseudo trajetória $S^n z$ é δ-sombreada por z. No entanto, para provar o sombreamento de T, devemos considerar toda δ-pseudo trajetória em $\mathbb{T}$, o que se revela em geral uma tarefa árdua. Por isso, vamos definir outras propriedades de sistemas dinâmicos e procurar implicacações ou equivalências à propriedade de sombreamento. No entanto, vamos antes estudar mais algumas características do sombreamento.

Teorema 4.1.1. *A propriedade de sombreamento é preservada por conjugação uniforme.*

Demonstração. Sejam $f : X \to X, g : Y \to Y$ homeomorfismos uniformemente conjugados. Então existe uma função $\phi : X \to Y$ tal que ambas ϕ, ϕ^{-1} são uniformemente contínuas e $\phi \circ f = g \circ \phi$. Suponha que g tem a propriedade de sombreamento. Como ϕ^{-1} é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\varepsilon' > 0$ tal que

$$d(y, y') < \varepsilon' \implies d\big(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(y')\big) < \varepsilon, \forall y, y' \in Y. \tag{4.1}$$

Pela propriedade de sombreamento de g, existe $\delta' > 0$ tal que dada uma δ'-pseudo trajetória (y_n) em Y, existe $y \in Y$ satisfazendo

$$d(g^n(y), y_n) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Pela continuidade uniforme de ϕ, existe $\delta > 0$ tal que dados $x, x' \in X$

$$d(x, x') < \delta \implies d\big(\phi(x), \phi(x')\big) < \delta'. \tag{4.2}$$

Seja (x_n) uma δ-pseudo trajetória em X. Então por (4.2)

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta \implies d\big(\phi(f(x_n)), \phi(x_{n+1})\big) = d\big(g(\phi(x_n)), \phi(x_{n+1})\big) < \delta'.$$

Portanto, $(\phi(x_n))$ é uma δ-pseudo trajetória em Y. Pelo sombreamento de g, existe $y \in Y$ tal que $d(g^n(y), \phi(x_n)) < \varepsilon', \forall n$. Por (4.1), isso implica que

$$d\big(\phi^{-1}(g^n(y)), x_n\big) = d\big(f^n(\phi^{-1}(y)), x_n\big) < \varepsilon,$$

ou seja, (x_n) é ε-sombreado por $\phi^{-1}y$ em X. □

Proposição 4.1.1. *Seja X um espaço métrico completo e $f : X \to X$ um homeomorfismo e uma contração, com constante de contração $a < 1$. Então f tem a propriedade de sombreamento.*

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ e defina $\delta = (1-a)\varepsilon$. Seja $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma δ-pseudo trajetória e defina um espaço métrico E por

$$E = \{\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq X \ : \ d(x_n, y_n) \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}\},$$

com métrica

$$D(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} d(y_n, z_n).$$

Então (E, D) é um espaço métrico completo. De fato, inicialmente note que se $\eta : \mathbb{Z} \to X$ é a função $\eta(n) = x_n$, então $E \subseteq X_\eta^{\mathbb{Z}}$ (confira Exemplo 2.1.3). Em seguida, vamos mostrar que E é fechado, de modo que pela Proposição 2.1.5, vamos concluir o resultado.

Seja $\{(y_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E tal que $(y_n^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (Y_n)$. Então dado $\alpha > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$D\big((y_n^k), (Y_n)\big) = \sup_{n\in\mathbb{Z}}(y_n^k, Y_n) < \alpha, \forall k \geq K.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}$ e $k > K$

$$d(x_n, Y_n) \leq d(x_n, y_n^k) + d(y_n^k, Y_n) < \varepsilon + \alpha.$$

Como $\alpha > 0$ é arbitrário, concluímos que $d(x_n, Y_n) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}$. Portanto, $(Y_n) \in E$ e concluímos que E é fechado.

Dada $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E$, defina a sequência $F(\mathbf{y})$ por

$$F(\mathbf{y}) = (fy_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Como

$$\begin{aligned} d(fy_{n-1}, x_n) &\leq d(fy_{n-1}, fx_{n-1}) + d(fx_{n-1}, x_n) \\ &\leq ad(y_{n-1}, x_{n-1}) + \delta \leq a\varepsilon + (1-a)\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $F(E) \subseteq E$. Além disso, F é uma contração com constante de contração a pois

$$\begin{aligned} D\big(F(\mathbf{y}), F(\mathbf{z})\big) &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} d(fy_{n-1}, fz_{n-1}) \\ &\leq a \sup_{n\in\mathbb{Z}} d(y_{n-1}, z_{n-1}) \\ &= a \sup_{n\in\mathbb{Z}} d(y_n, z_n) = aD(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 2.1.1), existe $\mathbf{z} = (z_n) \in E$ com $F(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$. Mas então $z_n = fz_{n-1} = f^n z_0$, o que implica que (x_n) é ε-sombreada por z_0. □

Lema 4.1.1. *Sejam $(X_i, d_i), i = 1, 2$ espaços métricos e f_i funções em X_i. Seja $X = X_1 \times X_2$ com a métrica produto. Se $f = f_1 \times f_2$ é definida em X da maneira usual, então f possui a propriedade do sombreamento se, e somente se f_1 e f_2 possuem.*

Demonstração. Suponha que $f_1 \times f_2$ tem propriedade de sombreamento. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ associado na definição de sombreamento de $f_1 \times f_2$. Se (x_n) é uma δ-pseudo trajetória em X_1, fixado $y_0 \in X_2$ arbitrário, temos que (x_n, y_0) é uma δ-pseudo trajetória em X, e portanto existe $z = (x, y) \in X$ tal que $d\big(f^n(x, y), (x_n, y_0)\big) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Como

$$d\big(f^n(x), x_n\big) \leq d\big(f^n(x, y), (x_n, y_0)\big) < \varepsilon,$$

concluímos que x sombreia (x_n), e portanto f_1 possui a propriedade de sombreamento. Analogamente, provamos que f_2 tem propriedade de sombreamento.

Para provar a volta, suponha que f_1, f_2 possuem a propriedade de sombreamento. Então dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, para cada (x_n) δ_1-pseudo trajetória em X_1, e toda (y_n) δ_2-pseudo trajetória em X_2, existem $x \in X_1, y \in X_2$ tais que

$$d\big(f_1^n(x), x_n\big) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad d\big(f_2^n(y), y_n\big) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então se $z_n = (x_n, y_n)$ é uma δ-pseudo trajetória em X, vale que

$$\begin{aligned} d\big(f_1(x_n), x_{n+1}\big) &\leq d\big(f(z_n), z_{n+1}\big) < \delta \leq \delta_1, \\ d\big(f_2(y_n), y_{n+1}\big) &\leq d\big(f(z_n), z_{n+1}\big) < \delta \leq \delta_2, \end{aligned}$$

de modo que (x_n) é uma δ_1-pseudo trajetória em X_1 e (y_n) é uma δ_2-pseudo trajetória em X_2. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d\big(f^n(x, y), (x_n, y_n)\big) &= \sqrt{d\big(f_1^n(x), x_n\big)^2 + d\big(f_2^n(y), y_n\big)^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 4.1.2. *Seja f um homeomorfismo uniformemente contínuo em um espaço métrico X. Se f possui a propriedade do sombreamento então f^{-1} também possui.*

Demonstração. Como f é uniformemente contínua, dado $\delta > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta' \implies d\big(f(x), f(y)\big) < \delta, \forall x, y \in X.$$

Seja $\delta > 0$ associado a $\varepsilon > 0$ na propriedade de sombreamento de f. Dada uma δ'-pseudo trajetória $(x_n)_{-\infty}^{\infty}$ de f^{-1}, vale que

$$d(f^{-1}(x_n), x_{n+1}) < \delta' \implies d(x_n, f(x_{n+1})\big) = d(f(x_{n+1}), x_n) < \delta, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Defina $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em X por $y_n = x_{-n}$. Então

$$d(f(y_n), y_{n+1}) = d(f(x_{-n}), x_{-n-1}) < \delta, \forall n \in \mathbb{Z},$$

de modo que (y_n) é uma δ-pseudo trajetória para f. Assim, existe $x \in X$ tal que

$$d(f^n(x), y_n) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z},$$

o que implica, substituindo n por $-n$, que

$$d(f^{-n}(x), x_n) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Logo, x sombreia a δ'-pseudo trajetória (x_n). □

Definição 4.1.3. *Um operador T em um espaço de Banach complexo é* ***hiperbólico*** *se seu espectro $\sigma(T)$ não intersecta o círculo unitário $\mathbb{T}$. No caso de espaços de Banach reais, requerimos que $\sigma(T_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{T} = \varnothing$, em que $T_{\mathbb{C}}$ é a complexificação de T.*

Vale, pelo Teorema da Decomposição Espectral (Teorema 2.3.5), que um operador invertível $T : X \to X$ é hiperbólico se, e somente se podemos decompor $X = X_s \oplus X_u$ e $T = T_s \oplus T_u$, com X_s, X_u subespaços invariantes e $||T_s|| < 1$ e $||T_u^{-1}|| < 1$.

As proposições anteriores nos permitem mostrar o seguinte Teorema

Teorema 4.1.2. *Um operador hiperbólico invertível em um espaço de Banach possui a propriedade de sombreamento.*

Demonstração. Se $T : X \to X$ é um operador hiperbólico invertível, então podemos escrever $X = X_s \oplus X_u$ e $T = T_s \oplus T_u$, com X_s, X_u subespaços invariantes e $||T_s|| < 1$ e $||T_u^{-1}|| < 1$. Como T_s, T_u^{-1} são contrações com constantes de contração menor que 1, a Proposição 4.1.1, implica que T_s, T_u^{-1} têm a propriedade de sombreamento. Além disso, T_u^{-1} é uniformemente contínua, de modo que $(T_u^{-1})^{-1} = T_u$ possui a propriedade de sombreamento pelo Lema 4.1.2. Por fim, basta observar que T é conjugado à função $T_u \times T_s$, que possui a propriedade de sombreamento pelo Lema 4.1.1. □

Voltando ao operador shift $T : l^\infty(\mathbb{Z}) \to l^\infty(\mathbb{Z}), (x_n) \to (x_{n-1})$, vemos que T não é hiperbólico, pois caso contrário teria a propriedade de sombreamento. Podemos ver isso também diretamente quando calcularmos o espectro do operador: veremos que $\sigma(T) = \mathbb{T}$.

4.2 Expansividade

Outra propriedade que nos ajuda a entender o sombreamento é a expansividade. Em termos simples, a expansividade de um operador é a capacidade de expandir pontos através de suas iteradas.

Definição 4.2.1. *Um homeomorfismo $f : X \to X$ em um espaço métrico X é dito* ***expansivo*** *se existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo par de pontos distintos x, y, existe $n \in \mathbb{Z}$ com $d\big(f^n(x), f^n(y)\big) \geq c$.*

No caso de T ser um operador invertível em um espaço de Banach X, o Teorema a seguir nos dá uma condição equivalente a T ser expansivo.

Teorema 4.2.1. *Para um operador invertível T em um espaço de Banach X, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *T é expansivo;*

ii) *Para cada* $c \in \mathbb{N}$ *e* $x \in S_X$*, existe* $n \in \mathbb{Z}$ *com* $||T^n x|| \geq c$.

iii) *Existe* $c > 1$ *tal que, para cada* $x \in S_X$*, existe* $n \in \mathbb{Z}$ *com* $||T^n x|| \geq c$.

Demonstração. Seja $x_0 \in X$ com $||x_0|| = 1$. Se T é expansivo, então existe $c' > 0$ tal que, dados $x, y \in X$ distintos, existe $n \in \mathbb{Z}$ com $||T^n x - T^n y|| \geq c'$. Se $c = 0$, o resultado é evidente. Já se $c \neq 0$, tome $x = \dfrac{c}{c'} x_0$ e $y = 0$. Então, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $||T^n x|| \geq c'$. Assim

$$||T^n x_0|| = \left|\left|T^n\left(\frac{c}{c'}x\right)\right|\right| = \frac{c}{c'}||T^n x|| \geq \frac{c}{c'} \cdot c' = c$$

Isso mostra que i) implica ii). A demonstração que ii) implica iii) é evidente.

Para mostrar que iii) implica i), seja $c > 1$ tal que, para cada $x \in S_X$ existe $n \in \mathbb{Z}$ com $||T^n x|| \geq c$. Vamos mostrar que para todo $k > 0$ existe $n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $||T^n x|| \geq k$. De fato, isto é óbvio se $k \leq c$; assuma portanto que $k > c$. Dado $x \in S_X$, existem $p, n_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $||T^p x|| \geq c$ e

$$\left|\left|T^{n_1}\left(\frac{T^p x}{||T^p x||}\right)\right|\right| \geq c$$

Portanto $||T^{n_1}(T^p x)|| \geq c||T^p x|| \geq c^2$.

Prosseguindo de forma análoga, dado l inteiro positivo, podemos encontrar uma sequência finita de inteiros $n_1, n_2, \ldots, n_l$ tal que

$$||T^{n_1+n_2+\ldots+n_l+p} x|| \geq c^{l+1}.$$

Como $c > 1$, podemos tomar l tal que $c^{l+1} > k$. Assim, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_l + p$ é tal que $||T^n x|| \geq c^{l+1} > k$.

Para mostrar que T é expansivo, fixe $\varepsilon > 0$. Baseado no que foi feito acima, se $x, y \in X$ são pontos distintos, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\left|\left|T^n\left(\frac{x - y}{||x - y||}\right)\right|\right| \geq \frac{\varepsilon}{||x - y||},$$

donde obtemos que

$$||T^n x - T^n y|| \geq \varepsilon,$$

o que conclui o resultado. □

No caso de existir uma norma $||\cdot||_1$ mais forte que $||\cdot||$, isto é, se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $\alpha||x|| \leq ||x||_1, \forall x \in X$, então T é expansivo em $||\cdot||_1$ quando é expansivo em $||\cdot||$. De fato, dados $x, y \in X$ distintos e $c > 0$, existe $n \in \mathbb{Z}$ com $||T^n x - T^n y|| \geq \dfrac{c}{\alpha}$. Então

$$||T^n x - T^n y|| \geq \alpha||T^n x - T^n y|| \geq \alpha \cdot \frac{c}{\alpha} = c.$$

Um operador T é dito **uniformemente expansivo** se existem $c > 1$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$x \in S_X \Longrightarrow ||T^m x|| \geq c \text{ ou } ||T^{-m} x|| \geq c.$$

Note que este conceito é mais forte que a expansividade, pois aqui o n pode ser tomado para todo $x \in S_X$. Assim como no caso de expansividade, se T é uniformemente expansivo, então podemos tomar $c > 0$ qualquer para satisfazer a condição acima. Além disso, T permanece uniformemente expansivo em normas mais fortes.

Uma forma equivalente de dizer que T é uniformemente expansivo é que existe $m \in \mathbb{Z}$ com $||T^m x|| \geq 2||x||, \forall x \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
||T^{m+1}x|| &= ||T^m(Tx)|| \geq 2||Tx||,\\
||T^{m+2}x|| &= ||T^m(T^2x)|| \geq 2||T^2x||,\\
&\vdots\\
||T^{2m}|| &= ||T^m(T^m x)|| \geq 2||T^m x|| \geq 2^2,\\
||T^{2m+1}x|| &= ||T^m(T^{m+1}x)|| \geq 2||T^{m+1}x|| \geq 2^2||Tx||.
\end{aligned}$$

De modo que, se $\lambda = \min\{||Tx||, \ldots, ||T^{m-1}x||\}$, concluímos que $||T^{am+b}|| \geq 2^a\lambda, \forall m, a \in \mathbb{N}$ e $b \in \{0, \ldots, m-1\}$. Portanto, para cada $x \neq 0$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} ||T^n x|| = \infty$.

Com essa informação e a parte *iii)* do Teorema 4.2.1, podemos concluir a seguinte Proposição:

Proposição 4.2.1. *Seja T um operador invertível em um espaço de Banach X. Então*

a) *T é expansivo $\iff \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} ||T^n x|| = \infty$ para todo x não nulo em X;*

b) *T é uniformemente expansivo $\iff S_X = A \cup B$, em que $\lim\limits_{n\to\infty} ||T^n x|| = \infty$ uniformemente em A e $\lim\limits_{n\to\infty} ||T^{-n} x|| = \infty$ uniformemente em B.*

No caso de f ser uma função contínua não invertível, podemos definir a noção de expansividade positiva de um sistema dinâmico ao trocar $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{N}$ na definição de expansividade. Note que se um operador invertível $T : X \to X$ é positivamente expansivo, então T é expansivo. Com efeito, por definição, se T é positivamente expansivo, então existe $c > 1$ tal que

$$\forall x \in S_X, \exists n \in \mathbb{N}; ||T^n x|| \geq c.$$

Como $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, em particular, concluímos que

$$\forall x \in S_X, \exists n \in \mathbb{Z}; ||T^n x|| \geq c,$$

e portanto T é expansivo.

Vamos mostrar que não vale a volta. Seja X um espaço métrico qualquer e considere $T : X \to X$ dado por $T(x) = x/2$. Então, se $x \in S_X$:

$$||T^n x|| = ||2^{-n} x|| = 2^{-n}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

de modo que f é expansiva mas não positivamente expansiva.

Para o caso positivo, temos a seguinte versão da Proposição 4.2.1:

Proposição 4.2.2. *Seja T um operador em um espaço de Banach X. Então*

a) *T é positivamente expansivo $\iff \sup_{n\in\mathbb{N}} ||T^n x|| = \infty$ para todo x não nulo em X;*

b) *T é uniforme e positivamente expansivo $\iff \lim_{n\to\infty} ||T^n x|| = \infty$ uniformemente em S_X.*

O próximo resultado nos dá uma relação entre as principais propriedades que vimos até agora.

Teorema 4.2.2. *Se T é um operador invertível em um espaço de Banach, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *T é hiperbólico;*

ii) *T é expansivo e possui a propriedade de sombreamento.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$: Se T é hiperbólico, então T possui a propriedade de sombreamento pelo Teorema 4.1.2. Resta mostrarmos que T é expansivo. Como T é hiperbólico, podemos decompor $X = X_s \oplus X_u$ e $T = T_s \oplus T_u$, com X_s, X_u subespaços invariantes e $||T_s|| < 1$ e $||T_u^{-1}|| < 1$. Tome uma constante c tal que

$$\max\{r(T_s), r(T_u^{-1})\} < c < 1$$

e um inteiro positivo i suficientemente grande tal que

$$c^i \leq \frac{1}{4}, \qquad ||T_s^i||^{1/i} < c \qquad \text{e} \qquad ||T_u^{-i}||^{1/i} < c.$$

Se $x \in X$ é escrito como $x = x_s + x_u$ com $x_s \in X_s$ e $x_u \in X_u$, definimos a norma em X por

$$||x||_w = ||x_s|| + ||x_u||.$$

Note que esta norma é mais forte que $||\cdot||$ pois $||x|| \leq ||x||_w$ por Cauchy-Schwarz. Dado $x \in X$ com $||x||_w = 1$, vale que $||x_u|| \geq 1/2$ ou $||x_s|| \geq 1/2$. Se $||x_s|| \geq 1/2$, então

$$||T^{-i}x||_w \geq ||T_s^{-i}x_s|| \geq ||T_s^i||^{-1} \cdot ||x_s|| \geq 4(1/2) = 2.$$

Em que, usamos o fato que $||x_s|| = ||T^iT^{-i}x_s|| \leq ||T^i|| \cdot ||T^{-i}x_s||$. Similarmente, se $||x_u|| \geq 1/2$, então $||T^ix||_w \geq 2$. Isso mostra que T é uniformemente expansivo na norma $||\cdot||_w$, e portanto é uniformemente expansivo em $||\cdot||$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Seja $\lambda \in \mathbb{T}$. Vamos mostrar que $\lambda \in \rho(T)$, ou seja, que $T - \lambda I$ é invertível. Pelo Teorema da Inversa Limitada (Teorema 2.2.6), é suficiente mostrar que tal operador é bijetivo.

Injetividade: Seja $x \in X$ tal que $(T - \lambda I)x = 0$, de modo que $Tx = \lambda x$. Então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, vale que

$$||T^n x|| = ||\lambda^n x|| = |\lambda|^n ||x|| = ||x||.$$

Pela expansividade de T, devemos ter que $x = 0$ e portanto $(T - \lambda I)$ é injetivo.

Sobrejetividade: Seja $\delta > 0$ associado a $\varepsilon = 1$ na propriedade de sombreamento de T. Dado $w \in X$ com $||w|| = \delta$, vamos encontrar $x \in X$ com $Tx - \lambda x = w$, mostrando que $(T - \lambda I)$ é sobrejetivo.

Defina uma sequência (z_n) em X de tal modo que satisfaça as relações

$$\begin{cases} z_0 = 0; \\ z_{n+1} - \lambda z_n = T^n w, \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Subtraindo as relações

$$\begin{aligned} z_{n+2} - \lambda z_{n+1} &= T^{n+1}w \\ Tz_{n+1} - \lambda T z_n &= T^{n+1}w \end{aligned}$$

obtemos

$$||z_{n+2} - Tz_{n+1}|| = ||\lambda z_{n+1} - \lambda T z_n|| = ||z_{n+1} - Tz_n||.$$

Prosseguindo indutivamente, concluímos que

$$||z_{n+1} - Tz_n|| = ||z_1 - Tz_0|| = ||w|| = \delta, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, (z_n) é uma δ-pseudo trajetória. Seja $x \in X$ tal que $||T^n x - z_n|| < 1, \forall n \in \mathbb{Z}$. Daí

$$||\lambda z_n - \lambda T^n x|| < 1 \quad \text{e} \quad ||T^{n+1}x - z_{n+1}|| < 1,$$

o que implica

$$\begin{aligned} 2 &> ||T^{n+1}x - z_{n+1} + \lambda z_n - \lambda T^n x|| \\ &= ||T^{n+1}x - T^n w - \lambda T^n x|| = ||T^n(Tx - w - \lambda x)||, \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por fim, pela expansividade de T, obtemos $Tx - w - \lambda x = 0$. $\square$

Definição 4.2.2. *Seja (M, d) um espaço métrico e $h : M \to M$ um homeomorfismo. Para cada $x \in M$ e $\varepsilon > 0$, definimos os conjuntos ε-estável, ε-instável, estável e instável de h em x respectivamente por*

$$\begin{aligned} W^s_\varepsilon(x,h) &= \{y \in M \ : \ d\big(h^n(x), h^n(y)\big) < \varepsilon, \forall n \geq 0\} \\ W^u_\varepsilon(x,h) &= \{y \in M \ : \ d\big(h^n(x), h^n(y)\big) < \varepsilon, \forall n \leq 0\} \\ W^s(x,h) &= \{y \in M \ : \ d\big(h^n(x), h^n(y)\big) \to 0 \text{ quando } n \to \infty\} \\ W^u(x,h) &= \{y \in M \ : \ d\big(h^n(x), h^n(y)\big) \to 0 \text{ quando } n \to -\infty\} \end{aligned}$$

O homeomorfismo h é dito ter coordenadas canônicas se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada par $x, y \in M$:

$$d(x,y) < \delta \Longrightarrow W^s_\varepsilon(x,h) \cap W^u_\varepsilon(y,h) \neq \varnothing.$$

Além disso, dizemos que h tem ***coordenadas hiperbólicas*** *se tem coordenadas canônicas e existem constantes $c \geq 1, 0 < \beta < 1$ e $\gamma > 0$ tais que as seguintes propriedades valem para todo $x \in M$:*

- $y \in W^s_\gamma(x,h) \Longrightarrow d\big(h^n(x), h^n(y)\big) \leq c\beta^n d(x,y), \forall n \in \mathbb{N}$;
- $y \in W^u_\gamma(x,h) \Longrightarrow d\big(h^{-n}(x), h^{-n}(y)\big) \leq c\beta^n d(x,y), \forall n \in \mathbb{N}$.

Definimos ainda os conjuntos

$$W^{b,s}(x,h) = \{y \in M \ : \ d\big(h^n(x), h^n(y)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada } \}$$

$$W^{b,u}(x,h) = \{y \in M \ : \ d\big(h^{-n}(x), h^{-n}(y)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada } \}$$

No caso de T ser um operador linear invertível, temos que $||T^n x - T^n y|| = ||T^n(x - y)||$, e portanto $W^s_\varepsilon(x,T) = x + W^s_\varepsilon(0,T)$, assim como

$$W^s(x,T) = x + W^s(0,T) \ \text{ e } \ W^{b,s}(x,T) = x + W^{b,s}(0,T).$$

E similarmente com os conjuntos instáveis.

Proposição 4.2.3. *Seja T um operador invertível num espaço de Banach X. Se T é uniformemente expansivo, então existem constantes $c \geq 1$ e $0 < \beta < 1$ tais que*

$$W^{b,s}(0,T) = W^s(0,T) = \{x \in X \ : \ ||T^n x|| \leq c\beta^n ||x||, \forall n \in \mathbb{N}\} \tag{4.3}$$

e

$$W^{b,u}(0,T) = W^u(0,T) = \{x \in X \ : \ ||T^{-n} x|| \leq c\beta^n ||x||, \forall n \in \mathbb{N}\} \tag{4.4}$$

Em particular, os subespaços $W^{b,s}(0,T)$ e $W^{b,u}(0,T)$ são fechados em X.

Demonstração. Como T é uniformemente expansivo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S_X = A \cup B$, com

$$A = \{x \in S_X \ : \ ||T^m x|| \geq 2\} \text{ e } B = \{x \in S_X \ : \ ||T^{-m} x|| \geq 2\}.$$

Note que

$$x \in A \Longrightarrow \frac{T^m x}{||T^m x||} \in A \tag{4.5}$$

caso contrário, teríamos $1 = ||x|| \geq 2||T^m x|| \geq 4$, uma contradição. Similarmente,

$$x \in B \Longrightarrow \frac{T^{-m} x}{||T^{-m} x||} \in B \tag{4.6}$$

Tome

$$\beta = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/m} \text{ e } c = \max\left\{\frac{||T^j||}{\beta^j}, 0 \leq j < m\right\}.$$

Por definição de c, temos que dado $x \in X$:

$$||T^j x|| \leq ||T^j|| \cdot ||x|| \leq c\beta^j ||x||, \ 0 \leq j < m$$

Seja $W = \{x \in X \ : \ ||T^n x|| \leq c\beta^n ||x||, \forall n > 0\}$. Como $W^s(0,T) = \{x \in X \ : \ T^n x \to 0 \text{ quando } n \to \infty\}$, então

$$W \subseteq W^s(0,T) \subseteq W^{b,s}(0,T)$$

Seja $x \in W^{b,s}(0,T) \setminus \{0\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos duas sequências $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ recursivamente por

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{T^n x}{||T^n x||} \\ y_k = \dfrac{T^m y_{k-1}}{||T^m y_{k-1}||}, k > 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{T^n x}{||T^n x||} \\ z_k = \dfrac{T^{-m} y_{k-1}}{||T^{-m} y_{k-1}||}, k > 1. \end{cases}$$

Note que, para $k \geq 2$

$$y_k = \frac{T^{(k-1)m+n}x}{||T^m y_1|| \dots ||T^m y_{k-1}|| \cdot ||T^n x||}$$

e

$$z_k = \frac{T^{-(k-1)m+n}x}{||T^{-m} z_1|| \dots ||T^{-m} z_{k-1}|| \cdot ||T^n x||}$$

Se $y_1 \in A$, então (4.5) implica que $y_k \in A, \forall k \in \mathbb{N}$ e portanto

$$||T^{km+n}x|| = ||T^m y_1|| \dots ||T^m y_k|| \cdot ||T^n x|| \geq 2^k ||T^n x||, \forall k \in \mathbb{N},$$

o que contradiz o fato de $(T^j x)_{j \in \mathbb{N}}$ ser limitado. Portanto, temos $z_1 = y_1 \in B$ e por (4.6), $z_k \in B, \forall k \in \mathbb{N}$, de modo que

$$||T^{-km+n}x|| = ||T^{-m} z_1|| \dots ||T^{-m} z_k|| \cdot ||T^n x|| \geq 2^k ||T^n x||, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, tomamos $n = km$ e obtemos

$$||T^{km}x|| \leq \frac{1}{2^k} ||x|| = \beta^{km} ||x||, \forall k \in \mathbb{N}$$

Por fim, dado $j = km + q \in \mathbb{N}$, com $0 \leq q < m$, temos

$$\begin{aligned} ||T^j x|| &= ||T^q T^{km} x|| \leq c\beta^q ||T^{km} x|| \\ &\leq c\beta^q \beta^{km} ||x|| = c\beta^j ||x|| \end{aligned}$$

e portanto $x \in W$, o que mostra (4.3). Aplicando T^{-1} em (4.3), obtemos (4.4). □

4.3 O caso positivo

Note que na definição de sombreamento, requeremos que o sistema dinâmico f seja um homeomorfismo, de modo que também consideramos as iteradas da inversa de f na definição. No caso de f não ser invertível, podemos também considerar uma noção de sombreamento, mas apenas com órbitas positivas. Por isso, se f satisfaz as propriedades do sombreamento com $\mathbb{N}$ em vez de $\mathbb{Z}$, dizemos que f tem a propriedade de **sombreamento positivo**.

Vale que, se $f : X \to X$ é sombreada, então f é positivamente sombreada. De fato, se f é sombreada, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo trajetória é ε-sombreada.

Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma δ-pseudo trajetória positiva, então definindo (y_n) por

$$y_n = \begin{cases} x_n, n \geq 0 \\ x_{-n}, n < 0 \end{cases}$$

então $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma δ-pseudo trajetória e portanto existe $x \in X$ com $d\big(f^n(x), y_n\big) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}$. Em particular, obtemos $d\big(f^n(x), x_n\big) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.

A proposição abaixo mostra que no caso compacto, os dois conceitos coincidem.

Proposição 4.3.1. *Seja X um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ um homeomorfismo. Então f possui a proprieadade de sombreamento se, e somente se possui a proprieadade de sombreamento positivo.*

Demonstração. Suponha que f possui sombreamento positivo. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo trajetória positiva é $\varepsilon/2$ sombreada. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma δ-pseudo trajetória. Para cada $n > 0$, seja y_{-n} um ponto que $\varepsilon/2$-sombreia a δ-pseudo trajetória positiva $(x_{-n}, x_{-n+1}, x_{-n+2}, \dots,)$. Como X é compacto, a sequência $\big(f^n(y_{-n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, de modo que existe um ponto $z_0 \in X$ e um subconjunto infinito $N_0 \subseteq \mathbb{N}$ tal que $f^n(y_{-n}) \to z_0$ quando $n \to \infty$ em N_0.

Por continuidade, obtemos $f^{n+k}(y_{-n}) \to f^k(z_0)$ quando $n \to \infty$, para $k \in \mathbb{N}$ e $n \in N_0$. Logo, dado $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $m \in N_0$ tal que

$$d\big(f^k(z_0), f^{m+k}(y_{-m})\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} d\big(f^k(z_0), x_k\big) &\leq d\big(f^k(z_0), f^{m+k}(y_{-m})\big) + d\big(f^{m+k}(y_{-m}), x_k\big) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

e portanto a órbita positiva de z_0 ε-sombreia a sequência $(x_0, x_1, \dots)$.

Novamente, podemos encontrar uma subsequência convergente da sequência $\{f^{n-1}(y_{-n}) : n \in N_0 \cap \{2, 3, \dots\}\}$. Logo, sejam $z_{-1} \in X$ e um subconjunto infinito N_1 de N_0 satisfazendo $f^{n-1}(y_{-n}) \to z_{-1}$ quando $n \to \infty$ com $n \in N_1$. Podemos provar de maneira semelhante ao caso anterior que

$$d(f^k(z_{-1}), x_{k-1}) < \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N},$$

e, em particular, $d(z_{-1}, x_{-1}) < \varepsilon$. Além disso, por continuidade

$$f(z_{-1}) = \lim f^n(y_{-n}) = z_0.$$

Prosseguindo indutivamente, podemos encontrar uma sequência (z_{-n}) tal que $d(z_{-n}, x_{-n}) < \varepsilon$ e $f^n(z_n) = z_0$. Assim

$$d(f^n(z_0), x_n) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

e concluímos que z_0 ε-sombreia a δ-pseudo trajetória $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. $\square$

Para o caso positivo, temos a seguinte versão da Proposição 4.1.1.

Proposição 4.3.2. *Seja X um espaço métrico e $f : X \to X$ uma contração com constante de contração $a < 1$. Seja $\delta > 0$. Para cada δ-pseudo trajetória positiva $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in X$ com $d(x_0, x) \leq \delta$, vale que*

$$d(f^n x, x_n) \leq \frac{\delta}{1-a}, \forall n \geq 0.$$

Demonstração. Dado $n \geq 1$, temos que

$$d(f^n x, x_n) \leq d(f^n x, f x_{n-1}) + d(f x_{n-1}, x_n) \leq a d(f^{n-1} x, x_{n-1}) + \delta.$$

Prosseguindo indutivamente, obtemos

$$d(f^n x, x_n) \leq a^n \delta + a^{n-1}\delta + \ldots + \delta.$$

De onde segue o resultado. □

Vamos também estudar possíveis generalizações dos conceitos apresentados. Note que um sistema dinâmico (X, f) é positivamente expansivo precisamente quando, para cada $x \in X$ e $r > 0$, o conjunto

$$\Gamma^+(x, r) = \{y \in X \mid d\big(f^k(x), f^k(y)\big) < r, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

contém um único elemento, a saber, x.

Definição 4.3.1. *Seja (X, f) um sistema dinâmico. Dizemos que f é positivamente n-expansivo, com $n \in \mathbb{N}$, se existe $r > 0$ tal que, para cada $x \in X$, o conjunto*

$$\Gamma^+(x, r) = \{y \in X \mid d\big(f^k(x), f^k(y)\big) < r, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

contém no máximo n pontos.

Vale sempre que $x \in \Gamma^+(x, r), \forall x \in X$. Assim, note que f é positivamente 1-expansiva precisamente quando é expansiva.

Definição 4.3.2. *Um espaço dinâmico (X, f) é dito ter a propriedade de **n-sombreamento positivo** se existe $\eta > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < \eta$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo trajetória é ε-sombreada por no mínimo um e no máximo n pontos.*

*Dizemos que f é **unicamente sombreada** (positivamente) quando é 1-sombreada.*

O resultado abaixo nos diz que a n-expansividade ainda é relacionada com o $n-$ sombreamento, o que mostra que de fato, estamos tratando de generalizações.

Teorema 4.3.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, o sistema (X, f) é n-sombreado positivamente se, e somente se é sombreado positivamente e é positivamente n-expansivo.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha por contradição que f não é n-expansivo. Seja $\eta > 0$ como na definição de n-sombreamento e seja $0 < \varepsilon < \eta$. Então existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo trajetória é ε-sombreada por no máximo n pontos. Seja x_0 um ponto tal que $\Gamma^+(x_0, \varepsilon)$ contém $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Vale que

$$d\big(f^k(x_0), f^k(x_j)\big) < \varepsilon, \forall k \geq 0 \text{ e } 0 \leq j \leq n.$$

Mas como $\{f^k(x_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma δ-pseudo trajetória e é ε-sombreada por todo x_j, obtemos uma contradição.

($\Longleftarrow$) Agora suponha que f tem sombreamento e é n-expansiva. Seja $r > 0$ a constante de n-expansividade de f. Afirmamos que f tem n-sombreamento com $\eta = r/2$. De fato, tome $0 < \varepsilon < \eta$ e seja $\delta > 0$ correspondente na definição de sombreamento. Suponha que $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma δ-pseudo trajetória ε-sombreada por $n+1$ pontos distintos $x_0, \ldots, x_n \in X$. Então, pela desigualdade triangular, obtemos, para $n \in \mathbb{N}$ e $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, que

$$d\big(f^n(x_i), f^n(x_j)\big) \leq d\big(f^n(x_i), y_n\big) + d\big(f^n(x_j), y_n\big) < 2\varepsilon < r,$$

uma contradição. $\square$

Proposição 4.3.3. *Seja T um operador em um espaço de Banach X. Se T é positivamente expansivo e tem a propriedade do sombreamento positivo, então T é unicamente sombreado.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$ associado a $\varepsilon > 0$ na definição de sombreamento positivo. Dado uma δ-pseudo trajetória (x_n) qualquer, suponha que existem $x, y \in X$ com

$$||T^n x - x_n|| < \varepsilon \text{ e } ||T^n y - x_n|| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então $||T^n(x-y)|| < 2\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$, o que implica que $x = y$ por expansividade. $\square$

A proposição abaixo é o resultado análogo ao Teorema 4.2.2 para o caso positivo. Note que, na demonstração do Teorema 4.2.2, provamos que se $|\lambda| = 1$, então o operador $T - \lambda I$ é invertível. No caso de consideramos apenas os números naturais, temos que se $|\lambda| \leq 1$, então $|\lambda^n| \leq 1, \forall n$. Portanto, no caso positivo temos o resultado mais forte que, se $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, então $\lambda \in \rho(T)$.

Proposição 4.3.4. *Seja T um operador em um espaço de Banach X. As seguintes afirmações são equivalentes*

i) *T é hiperbólico com espectro contido em $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$;*

ii) *T é positivamente expansivo e tem a propriedade de sombreamento positivo.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$: Como T é hiperbólico, vale pelo Teorema 4.2.2 que T possui a propriedade de sombreamento, e em particular, possui a propriedade de sombreamento positivo. Já a demonstração da expansividade de T é a mesma do Teorema 4.2.2, com as observações de que $X_s = \varnothing$ e que o inteiro i tomado na demonstração deve ser natural.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Decorre das observações feitas anteriormente a esta Proposição. □

Definição 4.3.3. *Dado um espaço de Banach X, definimos $C_b(X)$ o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas $\phi : X \to X$ com norma*

$$||\phi||_\infty = \sup_{x\in X} ||\phi(x)||$$

*Duas funções $\phi, \psi : X \to X$ são **topologicamente conjugadas** se existe um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h \circ \phi = \psi \circ h$.*

*Um operador invertível em X é dito **estruturalmente estável** se existe $\varepsilon > 0$ tal que $T + \phi$ é topologicamente conjugado com T sempre que $\phi \in C_b$ é uma função Lipschitz com $||\phi||_\infty \leq \varepsilon$ e $\mathrm{Lip}(\phi) \leq \varepsilon$.*

*Além disso, se $GL(X)$ é o grupo dos operadores invertíveis de X, T é **estruturalmente estável a** $GL(X)$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que S é topologicamente conjugado com T sempre que $S \in GL(X)$ e $||S - T|| < \varepsilon$.*

A demonstração do próximo Lema pode ser encontrado em [7].

Lema 4.3.1 (Hedlund)**.** *Seja $\sigma_a(T)$ o espectro de pontos aproximados de T, isto é, o conjunto dos pontos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S_X tal que $||Tx_n - \lambda x_n|| \to 0$ quando $n \to \infty$. Então um operador invertível T em um espaço de Banach X é uniformemente expansivo se, e somente se $\sigma_a(T) \cap \mathbb{T} = \varnothing$.*

Lema 4.3.2. *Se $\alpha : X \to X$ é uma função Lipschitz, então existe uma função Lipschitz limitada $\phi : X \to X$ que estende $\alpha|_{B_X}$ e satisfaz $||\phi||_\infty \leq ||\alpha|_{2B_X}||$ e $\mathrm{Lip}(\phi) \leq 3\,\mathrm{Lip}(\alpha)$.*

Demonstração. Seja $\rho : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por

$$\rho(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } t \leq 1; \\ 2 - t, \text{ se } 1 \leq t \leq 2; \\ 0, \text{ se } t \geq 2. \end{cases}$$

Então ρ satisfaz $|\rho(a) - \rho(b)| \leq |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Defina, para $x \in X$

$$\phi(x) = \alpha(0) + \phi(||x||)\big(\alpha(x) - \alpha(0)\big)$$

Então temos que $\phi = \alpha$ em B_X. Além disso, $||\phi||_\infty \leq ||\alpha|_{2B_X}||$. Com efeito, se $1 \leq ||x|| \leq 2$, então

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \alpha(0) + (2 - ||x||)\big(\alpha(x) - \alpha(0)\big)\\ &\leq \alpha(0) + \big(\alpha(x) - \alpha(0)\big) = \alpha(x)\end{aligned}$$

de modo que $\phi(x) \leq \alpha(x), \forall x \in 2B_X$.

Sejam $x, y \in X$. Se $x \in 2B_X$, então

$$\begin{aligned}||\phi(x) - \phi(y)|| &= ||\big(\rho(||x||) - \rho(||y||)\big)\big(\alpha(x) - \alpha(0)\big) + \rho(||y||)\big(\alpha(x) - \alpha(y)\big)||\\ &\leq |\big(\rho(||x||) - \rho(||y||)\big)| \cdot ||\big(\alpha(x) - \alpha(0)\big)|| +\\ &\quad |\rho(||y||)| \cdot ||\big(\alpha(x) - \alpha(y)\big)||\\ &\leq (||x|| - ||y||)\,\mathrm{Lip}(\alpha)||x|| + |\rho(||y||)|\,\mathrm{Lip}(\alpha)||x - y||\\ &\leq 2\,\mathrm{Lip}(\alpha)(||x - y||) + \mathrm{Lip}(\alpha)||x - y||\\ &= 3\,\mathrm{Lip}(\alpha)||x - y||.\end{aligned}$$

E analogamente para $y \in 2B_X$. A desigualdade é trivial se ambos x e y não pertencem a $2B_X$. □

Lema 4.3.3. *Todo operador hiperbólico em um espaço de Banach é estruturalmente estável.*

Teorema 4.3.2. *Todo operador invertível hiperbólico T em um espaço de Banach X é estruturalmente estável em relação a $GL(X)$.*

Demonstração. Como T é estruturalmente estável pelo Lema 4.3.3 anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que $T + \phi$ é topologicamente conjugado com T quando $\phi \in C_b(X)$ é uma função Lipschitz com $||\phi||_\infty \leq \varepsilon$ e $\mathrm{Lip}(\phi) \leq \varepsilon$. Tome $S \in GL(X)$ com $||S - T|| < \varepsilon/3$. Tomando $\varepsilon > 0$ pequeno suficiente, temos que S também é hiperbólico. Devemos mostrar que existe um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que

$$h \circ T = S \circ h$$

Seja U a bola unitária aberta em X. Pelo Lema 4.3.2, existe uma função Lipschitz $\phi \in C_b(X)$ tal que $\phi = S - T$ em U, $||\phi||_\infty \leq \varepsilon$ e $\mathrm{Lip}(\phi) \leq \varepsilon$. Logo, existe um homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f \circ T = (T + \phi) \circ f$. Como S é hiperbólica e $S\big(f(0)\big) = f(0)$, temos $f(0) = (S - I)^{-1}(0) = 0$. Tome $V = f^{-1}(U)$. Então

$$f \circ T|_V = S \circ f|_V \text{ e } T \circ f^{-1}|_U = f^{-1} \circ S|_U \tag{4.7}$$

Sejam $X = X_s^T \oplus X_u^T$ e $X = X_s^S \oplus X_u^S$ as divisões hiperbólicas de T e S, respectivamente. Existem constantes $c \geq 1$ e $0 < \beta < 1$ tais que

$$||T^n x|| \leq c\beta^n ||x|| \text{ e } ||S^n y|| \leq c\beta^n ||y||, \text{ para } x \in X_s^T \text{ e } y \in X_s^S. \tag{4.8}$$

Dados $x \in X_s^T$ e $y \in X_s^S$, sejam n_x e m_y os menores inteiros positivos tais que $T^n x \in V$ e $S^m y$ quando $n \geq n_x$ e $m \geq m_y$. Definimos $h_s(x) = S^{-n_x}\big(f(T^{n_x}x)\big)$ e $g_s(y) = T^{-m_y}\big(f^{-1}(S^{m_y}y)\big)$. Usando indução em (4.7), obtemos

$$h_s(x) = S^{-n}\big(f(T^n x)\big) \text{ e } g_s(y) = T^{-m}\big(f^{-1}(S^m y)\big), \text{ se } n \geq n_x \text{ e } m \geq m_y. \tag{4.9}$$

Como

$$S^k\big(h_s(x)\big) = S^{k-n_x}\big(f(T^n x)\big) = S^{-n_x}\big(f(T^{n_x+k}x)\big) \to 0$$

e $T^k\big(g_s(y)\big) = T^{-m_y}\big(f^{-1}(S^{m_y+k}y)\big) \to 0$ quando $k \to \infty$, temos que $h_s(x) \in X_s^S$ e $g_s(y) \in X_s(T)$. Daí, temos funções $h_s : X_s^T \to X_s^S$ e $g_s : X_s^S \to X_s^T$. Se $x \in X_s^T, y = h_s(x) \in X_s^S$ e $n \geq \max\{n_x, m_y\}$, então

$$g_s\big(h_s(x)\big) = T^{-n} \circ f^{-1} \circ S^n \circ S^{-n} \circ f \circ T^n(x) = x$$

Analogamente, $h_s\big(g_s(y)\big) = y, \forall y \in X_s^S$. Assim, as funções h_s e g_s são inversas uma da outra. Mostremos que h_s é contínua. Seja (x_k) uma sequência $\in X_s^T$ convergindo para um ponto $x \in X_s^T$. Por (4.8),

$$||T^n x - T^n x_k|| \leq c\beta^{n_x} ||x - x_k||, \text{ para } k \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq n_x.$$

Como a sequência $(T^n x)_{n \geq n_x}$ está contida no aberto V e não se acumula na fronteira (já que converge a zero), temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x_k \in V$ para $k \geq k_0$ e $n \geq n_x$. Portanto, por (4.9), $h_s(x_k) = S^{-n_x}\big(f(T^{n_x}x_k)\big), \forall k \geq k_0$, o que implica $h_s(x_k) \to h_s(x)$ quando $k \to \infty$. Analogamente, obtemos que g_s é contínua. Assim $h_s : X_s^T \to X_s^S$ é um homeomorfismo. Vale que

$$h_s(Tx) = S^{-n_x}\big(f(T^{n_x+1}x)\big) = S^{-n_x+1}\big(f(T^{n_x}x) = S\big(h_s(x)\big), \forall x \in X_s^T$$

de modo que $h_s \circ T|_{X_s^T} = S|_{X_s^S} \circ h_s$. De modo similar, obtemos um homeomorfismo $h_u : X_u^T \to X_u^S$ tal que $h_u \circ T|_{X_u^T} = S|_{X_u^S} \circ h_u$.

Por fim, defina $h : X \to X$ por $h(x) = h_s(x_s) + h_u(x_u)$ se $x = x_s + x_u$, com $x_s \in X_s^T$ e $x_u \in X_u^T$. Então h é um homeomorfismo satisfazendo $h \circ T = S \circ h$. □

Teorema 4.3.3. *Suponha que um operador invertível T em um espaço de Banach X é um operador estruturavelmente estável ou operador estruturavelmente estável a $GL(X)$. Vale que*

a) *Se T é expansivo, então T é uniformemente expansivo;*

b) *Se T é positivamente expansivo, então T é hiperbólico.*

Demonstração.

a) Suponha que T é expansivo mas não uniformemente expansivo. Então, pelo Lema 4.3.1 (Hedlund) existe $\lambda \in \sigma_a(T) \cap \mathbb{T}$. Como $\lambda \in \sigma_a(T)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in S_X$ tal que $||Ty - \lambda y|| \leq \varepsilon$. Pelo teorema da extensão de Hahn-Banach (Teorema 2.2.4), existe um funcional linear ψ em X tal que $||\psi|| = 1$ e $\psi(ay) = a, \forall a \in \mathbb{C}$. Seja $S \in \mathcal{B}(X)$ dada por

$$Sx = Tx + \psi(x)(\lambda y - Ty)$$

Então $||S - T|| \leq \varepsilon$ e $Sy = \lambda y$.

i) Se T é estruturalmente estável a $GL(X)$, então tomando $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, existe um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $T \circ h = h \circ S$. Portanto

$$T^n\big(h(y)\big) = h(\lambda^n y), \forall n \in \mathbb{Z}$$

Como a sequência $\big(h(\lambda^n y)\big)$ é limitada (visto que está contida no conjunto compacto $\{h(\beta y) : \beta \in \mathbb{T}\}$) e $h(y) \neq 0$ (pois h é injetiva e $T\big(h(0)\big) = h\big(S(0)\big) = h(0)$ implica $h(0) = 0$), isto contradiz a expansividade de T pelo Lema 4.3.1.

ii) Se T é estruturalmente estável, aplicamos o Lema anterior (Lema 4.3.2) para obter uma função Lipschitz $\phi : X \to X$ tal que $\phi = S - T$ em B_X, $||\phi||_\infty \leq 2\varepsilon$ e $\text{Lip}(\phi) \leq 3\varepsilon$. Tomando $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, existe um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $T \circ h = h \circ (T + \phi)$. Note que $T + \phi = S$ em B_X implica $(T + \phi)y = Sy$, mas não implica $(T + \phi)^2 y = S^2 y$.

Seja $\gamma = \min\{1, 1/||S^{-1}||\}$. Então $\gamma B_X \subseteq S(B_X)$. De fato, dado $x \in \gamma B_X$, como S é sobrejetiva, existe $z \in X$ com $Sz = x$. Portanto

$$||z|| \leq ||S^{-1}||||x|| \leq ||S^{-1}||\gamma \leq 1,$$

o que implica $z \in B_X$ e $x \in S(B_X)$. Assim, temos $S^{n+1}(\gamma y) = \lambda^{n+1}\gamma y \in \gamma B_X \subseteq S(B_X)$ e daí $\gamma y \in S^{-n}(B_X), \forall n \in \mathbb{Z}$. Então

$$T^n\big(h(\gamma y)\big) = h(\lambda^n \gamma y), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

O que novamente contradiz a expansividade de T.

b) Assuma que T é positivamente expansivo mas não hiperbólico. Então $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \neq \varnothing$. Como $0 \notin \sigma(T)$, a fronteira de $\sigma(T)$ deve intersectar $\overline{\mathbb{D}}$. Assim, existe $\lambda \in \sigma_a(T) \cap \overline{\mathbb{D}}$ e concluímos que T não é uniformemente expansivo, o que contraria o item a).

□

5 O shift bilateral ponderado

Nesta capítullo definimos o principal operador que estudaremos: o shift bilateral pnderado no espaço das sequências que convergem a 0.

Definição 5.0.1. *Seja* $X = c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \ : \ \lim\limits_{|n|\to\infty} x_n = 0\}$ *com a norma dada por*

$$||(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}|| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|.$$

Vamos mostrar que c_0 é um espaço de Banach. Como toda sequência convergente é limitada, temos que $c_0 \subseteq l^\infty(\mathbb{Z})$. Portanto, pela Proposição 2.1.5, basta mostrarmos que c_0 é um subconjunto fechado.

Seja $\{(x_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em c_0 tal que $(x_n^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (X_n)$. Devemos mostrar que $\lim\limits_{|n|\to\infty} X_n = 0$. Com efeito, para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$||(x_n^K) - (X_n)|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

o que implica

$$|x_n^K - X_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como $\lim\limits_{|n|\to\infty} x_n^K = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n^K| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } n \geq N \text{ ou } n \leq -N.$$

Por fim, para cada $n \geq N$ ou $n \leq -N$, obtemos que

$$|X_n| \leq |x_n^K - X_n| + |x_n^K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $(X_n) \in c_0$ e obtemos o resultado.

Definição 5.0.2. *Dada uma sequência limitada de número complexos* $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *com* $\inf |w_n| > 0$, *o operador shift bilateral ponderado posterior* $B_w : X \to X$ *é dado por*

$$B_w\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) = (w_{n+1}x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Vale que B_w é um operador limitado com $||B_w|| = \sup |w_n|$. De fato, dado $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ com $||x|| = 1$, então

$$||B_w(x)|| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |w_n x_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |w_n|$$

$$\therefore \quad ||B_w|| \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} |w_n|.$$

Reciprocamente, se $e_n = (x_k)$ é o vetor em X tal que $x_n = 1$ e $x_k = 0$, para todo $k \neq n$, então $||e_n|| = 1$ e temos

$$|w_n| = ||B_w(e_n)|| \leq ||B_w||,$$

tomando o supremo sobre n, obtemos a outra desigualdade. Vale ainda que B_w é invertível com $B_w^{-1}(x) = \left(\dfrac{x_{n-1}}{w_n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $||B_w^{-1}|| = \sup \dfrac{1}{|w_n|} = \dfrac{1}{\inf |w_n|}$.

Vamos encontrar as iteradas de B_w. Dado $x \in c_0$, temos

$$\left(B_w^2(x)\right)_n = B_w(w_{n+1}x_{n+1})_n = w_{n+1}w_{n+2}x_{n+2}$$

e

$$\left(B_w^{-2}(x)\right)_n = B_w^{-1}\left(\frac{x_{n-1}}{w_n}\right)_n = \frac{x_{n-2}}{w_n w_{n-1}}.$$

Em geral, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\left(B_w^k(x)\right)_n = \begin{cases} w_{n+1}\ldots w_{n+k}x_{n+k}, & \text{se } k > 0; \\ \dfrac{x_{n+k}}{w_n \ldots w_{n+k+1}}, & \text{se } k < 0; \end{cases}$$

e, portanto

$$||B_w^k|| = \begin{cases} \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |w_{n+1}\ldots w_{n+k}|, & \text{se } k > 0; \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{|w_n \ldots w_{n+k+1}|}, & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

5.1 O espectro do shift bilateral

Em seguida, vamos calcular o espectro do operador B_w. Para isso, precisamos primeiro provar que tal conjunto possui a propriedade de simetria:

Lema 5.1.1. *Se $\mu \in \sigma(B_w)$, então o conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |\mu|\}$ está contido em $\sigma(B_w)$.*

Demonstração. Como B_w é invertível, temos $\mu \neq 0$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = |\mu|$ e tome $c = \lambda/\mu$. Defina um operador $T : c_0 \to c_0$ que atua em $x = (x_n) \in c_0$ na forma

$$Tx_n = \frac{x_n}{c^n}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Note que tal operador está bem definido pois $|c| = 1$. Como

$$\begin{aligned}\big((TB_wT^{-1})(x)\big)_n &= (TB_w)(c^n x_n) = T(w_{n+1}c^{n+1}x_{n+1})\\ &= \frac{1}{c^n}w_{n+1}c^{n+1}x_{n+1}\\ &= cw_{n+1}x_{n+1}\end{aligned}$$

concluímos que $TB_wT^{-1} = cB_w$. Então, pelo Lema 2.3.1, segue que $\sigma(cB_w) = \sigma(TB_wT^{-1}) = \sigma(B_w)$. Assim, o resultado deriva do fato que

$$\lambda \in \sigma(cB_w) \iff \mu = \frac{\lambda}{c} \in \sigma(B_w),$$

em que novamente usamos o Lema 2.3.1. □

Proposição 5.1.1. *O espectro de B_w é o anel*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \frac{1}{r(B_w^{-1})} \leq |\lambda| \leq r(B_w)\right\}.$$

Demonstração. Inicialmente, note que como $r(B_w) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(B_w)} |\lambda|$ e

$$\frac{1}{r(B_w^{-1})} = \inf_{\lambda\in\sigma(B_w)} |\lambda|,$$

o anel deve estar contido no espectro. Para provar a outra inclusão, seja $\lambda \neq 0$ pertencente ao conjunto resolvente $\rho(B_w)$. Tome $x = (x_k) = (B_w - \lambda I)^{-1}(e_0)$. Então

$$e_0 = (B_w - \lambda I)x = B_w x - \lambda x,$$

de modo que

$$\begin{cases} w_1x_1 - \lambda x_0 = 1\\ w_{k+1}x_{k+1} - \lambda x_k = 0, \forall k \neq 0.\end{cases}$$

Assim, recursivamente, obtemos

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{k-1}w_1x_1}{w_1\dots w_k}, & \text{se } k > 0;\\ \lambda^k w_{k+1}\dots w_0x_0, & \text{se } k < 0.\end{cases}$$

Além disso, vale que

$$B_w^{-n}e_0 = \begin{cases} \dfrac{e_n}{w_1\dots w_n}, & \text{se } n > 0;\\ w_{n+1}\dots w_0e_n, & \text{se } n < 0.\end{cases}$$

Separamos a demonstração em casos:

1) Se $n > 0$, então para cada $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
|(B_w - \lambda I)^{-1} e_n|_j &= |w_1 \dots w_n||(B_w - \lambda I)^{-1} B_w^{-n} e_0|_j \\
&= |w_1 \dots w_n||B_w^{-n}(B_w - \lambda I)^{-1} e_0|_j \\
&= |w_1 \dots w_n||B_w^{-n} x|_j \\
&= |w_1 \dots w_n| \frac{|x_{j-n}|}{|w_{j-n+1} \dots w_j|}.
\end{aligned}$$

Pondo $k = j - n$, obtemos

$$|(B_w - \lambda I)^{-1} e_n|_{n+k} = \frac{|w_1 \dots w_n|}{|w_{k+1} \dots w_{k+n}|} |x_k|, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

E portanto

$$\begin{aligned}
\frac{|w_1 \dots w_n|}{|w_{k+1} \dots w_{k+n}|} |x_k| &= |(B_w - \lambda I)^{-1} e_n|_{n+k} \\
&\leq ||(B_w - \lambda I)^{-1} e_n|| \\
&\leq ||(B_w - \lambda I)^{-1}||.
\end{aligned}$$

i) Caso 1.1: Se $k > 0$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{|w_1 \dots w_n|}{|w_{k+1} \dots w_{k+n}|} \right) |x_k| &= \left(\frac{|w_1 \dots w_n|}{|w_{k+1} \dots w_{k+n}|} \right) \frac{|\lambda|^{k-1} |w_1 x_1|}{|w_1 \dots w_k|} \\
&= \frac{|w_1 \dots w_n|}{|w_1 \dots w_{k+n}|} |\lambda|^{k-1} |w_1 x_1| \\
&= \frac{|\lambda|^{k-1} |w_1 x_1|}{|w_{n+1} \dots w_{n+k}|}
\end{aligned}$$

Portanto, para $n > 0$ e $k > 0$:

$$|x_1||\lambda|^{k-1} \leq \frac{||(B_w - \lambda I)^{-1}||}{|w_1|} |w_{n+1} \dots w_{n+k}|. \tag{5.1}$$

ii) Caso 1.2: Se $k < 0$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{|w_1 \dots w_n|}{|w_{k+1} \dots w_{k+n}|} \right) |x_k| &= \left(\frac{|w_1 \dots w_n|}{|w_{k+1} \dots w_{k+n}|} \right) |x_0 \lambda^k||w_{k+1} \dots w_0| \\
&= \frac{|w_{k+1} \dots w_n|}{|w_{k+1} \dots w_{k+n}|} |x_0 \lambda^k| \\
&= |w_{k+n+1} \dots w_n| \cdot |x_0 \lambda^k|.
\end{aligned}$$

Portanto, para $n > 0$ e $k < 0$:

$$|x_0 \lambda^k| \leq \frac{||(B_w - \lambda I)^{-1}||}{|w_{k+n+1} \dots w_n|}. \tag{5.2}$$

2) Se $n < 0$, então através do mesmo processo do caso positivo, chegamos a

$$\frac{|w_{k+n+1}\dots w_k|}{|w_{n+1}\dots w_0|}|x_k| \leq ||(B_w - \lambda I)^{-1}||, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

i) Caso 2.1: Se $k > 0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{|w_{k+n+1}\dots w_k|}{|w_{n+1}\dots w_0|}\right)|x_k| &= \left(\frac{|w_{k+n+1}\dots w_k|}{|w_{n+1}\dots w_0|}\right)\frac{|\lambda|^{k-1}|w_1x_1|}{|w_1\dots w_k|}\\ &= \frac{|w_{k+n+1}\dots w_k|}{|w_{n+1}\dots w_k|}|\lambda|^{k-1}|w_1x_1|\\ &= \frac{|\lambda|^{k-1}|w_1x_1|}{|w_{n+1}\dots w_{n+k}|}\end{aligned}$$

Portanto, para $n < 0$ e $k > 0$:

$$|x_1||\lambda|^{k-1} \leq \frac{||(B_w - \lambda I)^{-1}||}{|w_1|}|w_{n+1}\dots w_{n+k}|. \tag{5.3}$$

ii) Caso 2.2: Se $k < 0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{|w_{k+n+1}\dots w_k|}{|w_{n+1}\dots w_0|}\right)|x_k| &= \left(\frac{|w_{k+n+1}\dots w_k|}{|w_{n+1}\dots w_0|}\right)|x_0\lambda^k||w_{k+1}\dots w_0|\\ &= \frac{|w_{k+n+1}\dots w_0|}{|w_{n+1}\dots w_0|}|x_0\lambda^k|\\ &= |w_{k+n+1}\dots w_n| \cdot |x_0\lambda^k|\end{aligned}$$

Portanto, para $n < 0$ e $k < 0$:

$$|x_0||\lambda|^k \leq \frac{||(B_w - \lambda I)^{-1}||}{|w_{k+n+1}\dots w_n|}. \tag{5.4}$$

Com isso, a partir das equações (5.1), (5.2),(5.3) e (5.4) concluímos que

$$|x_1\lambda^{k-1}| \leq \frac{||(B_w - \lambda I)^{-1}||}{|w_1|}|w_{n+1}\dots w_{n+k}|, \forall k > 0, \forall n \in \mathbb{Z},$$

e

$$|x_0\lambda^k| \leq \frac{||(B_w - \lambda I)^{-1}||}{|w_{k+n+1}\dots w_n|}, \forall k < 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Tomando o ínfimo sobre $n \in \mathbb{Z}$ nas duas equações, obtemos

$$\begin{aligned}|x_1\lambda^{k-1}| &\leq \frac{||(B_w - \lambda I)^{-1}||}{|w_1|}\frac{1}{||B_w^{-k}||}, \forall k > 0 \text{ e}\\ |x_0\lambda^k| &\leq \frac{||(B_w - \lambda I)^{-1}||}{||B_w^{-k}||}, \forall k < 0.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Como $w_1x_1 - \lambda x_0 = 1$, temos que $x_0 \neq 0$ ou $x_1 \neq 0$. Caso $x_1 \neq 0$, temos

$$|\lambda|^{k-1} \leq \frac{||(B_w - \lambda I)^{-1}||}{|w_1x_1|} \frac{1}{||B_w^{-k}||}, \forall k > 0.$$

Tomando a k-ésima raiz e fazendo $k \to \infty$, obtemos $|\lambda| \leq \dfrac{1}{r(B_w^{-1})}$.

Já se $x_0 \neq 0$, tomamos $k = -m$ na segunda equação de (5.5) e portanto

$$\frac{1}{|\lambda|^m} \leq \frac{||(B_w - \lambda I)^{-1}||}{|x_0|} \frac{1}{||B_w^m||}, \forall m > 0.$$

Tomando a m-ésima raiz e fazendo $m \to \infty$, obtemos $|\lambda| \geq r(B_w)$.

Portanto, se $\lambda \in \sigma(B_w)$, devemos ter $\dfrac{1}{r(B_w^{-1})} < |\lambda| < r(B_w)$. As igualdades também devem valer por causa da simetria do espectro provada no Lema 5.1.1, já que tanto $r(B_w) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(B_w)} |\lambda|$ quanto $\dfrac{1}{r(B_w^{-1})} = \inf\limits_{\lambda \in \sigma(B_w)} |\lambda|$ pertencem ao espectro, por este ser um conjunto fechado.

□

Com o espectro de B_w, podemos provar em que condições o operador será hiperbólico.

Corolário 5.1.1. *O operador B_w é hiperbólico se, e somente se*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k}w_{-k-1} \dots w_{-k-n}|^{1/n} < 1 \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \dots w_{k+n}|^{-1/n} < 1$$

Demonstração. Como

$$\sigma(B_w) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ : \ \frac{1}{r(B_w^{-1})} \leq |\lambda| \leq r(B_w) \right\},$$

devemos ter $r(B_w) < 1$ e $r(B_w^{-1}) < 1$. □

5.2 Condições de Expansividade

Teorema 5.2.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $B_w : X \to X$ *é expansivo;*

(ii) $B_w : X \to X$ *ou* $B_w^{-1} : X \to X$ *é positivamente expansivo;*

(iii) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |w_1 \dots w_n| = \infty$ *ou* $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |w_{-n} \dots w_{-1}|^{-1} = \infty$.

Demonstração. Se B_w é expansiva, então

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||B_w^n(e_1)|| = \infty \text{ ou } \sup_{n\in\mathbb{N}} ||B_w^{-n}(e_1)|| = \infty.$$

A primeira igualdade implica que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_1 \dots w_n| = \infty$, enquanto a segunda implica que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_1 \dots w_n|^{-1} = \infty$. Isso mostra que (i) implica (iii). Para provar que (iii) implica (ii), suponha que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_1 \dots w_n| = \infty$. Seja $x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ um vetor não nulo em X e tome $k \in \mathbb{Z}$ com $x_k \neq 0$. Como, para $n \in \mathbb{N}$, $(B_w^n x)_{k-n} = w_k \dots w_{k+n-1} x_k$, temos

$$||B_w^n(x)|| \geq |w_k \dots w_{k+n-1} x_k| = \frac{|x_k|}{|w_1 \dots w_{k-1}|} |w_1 \dots w_{k+n-1}|$$

$$\therefore \sup_{n\in\mathbb{N}} ||B_w^n(x)|| \geq \frac{|x_k|}{|w_1 \dots w_{k-1}|} \sup_{n\in\mathbb{N}} |w_1 \dots w_{k+n-1}| = \infty.$$

Logo, B_w é positivamente expansivo. Analogamente, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_{-n} \dots w_{-1}|^{-1} = \infty$ implica que B_w^{-1} é positivamente expansivo. □

Para encontrar as condições em que B_w é uniformemente expansivo, precisamos provar um resultado sobre partições em $\mathbb{Z}$.

Lema 5.2.1. *Dada uma partição não trivial $I \cup J = \mathbb{Z}$ tal que exista uma função $\phi : \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ satisfazendo*

$$\lim_{n\to\infty} [\inf_{k\in I} \big(\phi(k) \dots \phi(k+n-1)\big)] > 1 \ \ e \ \ \lim_{n\to\infty} [\sup_{k\in J} \big(\phi(k-n) \dots \phi(k-1)\big)] < 1,$$

então existem $i, j \in \mathbb{Z}$ tais que $(-\infty, j] \cap \mathbb{Z} \subseteq J$ e $[i, \infty) \cap \mathbb{Z} \subseteq I$.

Demonstração. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi(k) \dots \phi(k+n-1) > 1, \forall k \in I$ e $\phi(k-n) \dots \phi(k-1) < 1, \forall k \in J$ quando $n \geq n_0$. Afirmamos que

$$k \in I \Rightarrow k+n \in I, \forall n \geq n_0.$$

De fato, suponha que $k \in I$ mas $k+n \in J$ para um certo $n \geq n_0$. Então

$$\phi(k) \dots \phi(k+n-1) = \phi\big((k+n)-n\big) \dots \phi\big((k+n)-1\big)$$

é simultaneamente maior que 1 e menor que 1, visto que $k \in I$ e $k+n \in J$ e $n \geq n_0$. Assim, tomando $k \in I$ qualquer, temos que $i = k + n_0$ satisfaz $[i, \infty) \cap \mathbb{Z} \subseteq I$. Analogamente para J. □

Teorema 5.2.2 (Expansividade uniforme)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$B_w : X \to X$ é uniformemente expansivo;*

(ii) Vale uma das condições abaixo:

a) $\lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\in\mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}| \big) = \infty$;

b) $\lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\in\mathbb{Z}} |w_{k-n} \dots w_{k-1}|^{-1} \big) = \infty$

c) $\lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\in\mathbb{N}} |w_k \dots w_{k+n-1}| \big) = \infty$ *e*
$\lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\in -\mathbb{N}} |w_{k-n} \dots w_{k-1}|^{-1} \big) = \infty$.

Demonstração. Suponha que B_w é uniformemente expansiva. Então existe uma partição $\{A, B\}$ de S_X tal que $\lim c_n = \lim d_n = \infty$, com

$$c_n = \inf_{x\in A} ||B_w^n(x)|| \text{ e } d_n = \inf_{x\in B} ||B_w^{-n}(x)||.$$

Defina

$$I = \{k \in \mathbb{Z} : e_k \in A\} \text{ e } J = \{k \in \mathbb{Z} : e_k \in B\},$$

então $\{I, J\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$. Como, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{k\in I} |w_k \dots w_{k+n-1}| \geq c_n \text{ e } \inf_{k\in J} |w_{k-n} \dots w_{k-1}|^{-1} \geq d_n,$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\in I} |w_k \dots w_{k+n-1}| \big) = \infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\in J} |w_{k-n} \dots w_{k-1}|^{-1} \big) = \infty \tag{5.6}$$

Assim, $J = \varnothing$ implica a primeira possibilidade em (ii) enquanto $I = \varnothing$ implica a segunda. Se $I \neq \varnothing$ e $J = \varnothing$, então, pelo Lema 5.2.1, existem $i, j \in \mathbb{Z}$ tais que

$$(-\infty, j] \cap \mathbb{Z} \subseteq J \text{ e } [i, \infty) \cap \mathbb{Z} \subseteq I.$$

O que implica a terceira possibilidade.

Reciprocamente, suponha que vale (ii). Seja $I = \mathbb{Z}, J = \varnothing$ ou $I = \varnothing, J = \mathbb{Z}$ ou $I = \mathbb{N}, J = -\mathbb{N}_0$, dependendo se vale a primeira, segunda ou terceira possibilidade em (ii), analogamente. Então, em qualquer caso, vale (5.6). Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf_{k\in I} |w_k \dots w_{k+n-1}| \geq 4 \text{ e } \inf_{k\in I} |w_{k-n} \dots w_{k-1}|^{-1} \geq 4.$$

Dado $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in S_X$, escreva $x = a + b$, com $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ e $b = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfazendo $a_k = 0$ quando $k \in J$ e $b_k = 0$, quando $k \in I$. Como $1 = ||x|| \leq ||a|| + ||b||$, temos que $||a|| \geq \frac{1}{2}$ ou $||b|| \geq \frac{1}{2}$. Se vale $||a|| \geq \frac{1}{2}$, então

$$||B_w^n(x)|| \geq ||B_w^n(a)|| = ||\big(w_k \dots w_{k+n-1})a_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}|| \geq 4||a|| \geq 2,$$

e se vale $||b|| \geq \frac{1}{2}$, então

$$||B_w^{-n}(x)|| \geq ||B_w^{-n}(b)|| = ||\big(w_{k-n} \dots w_{k-1})b_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}^{-1}|| \geq 4||b|| \geq 2.$$

Portanto, B_w é uniformemente expansivo. $\square$

Teorema 5.2.3 (Estabilidade estrutural)**.** *Se*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_{-k}w_{-k-1}\dots w_{-k-n}|^{1/n} < 1 \ \text{e} \ \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_k w_{k+1}\dots w_{k+n}|^{-1/n} < 1,$$

então o shift B_w é estruturalmente estável mas não é hiperbólico.

Demonstração. Queremos encontrar um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que

$$h \circ B_w = (B_w + \alpha) \circ h,$$

com $\alpha \in C_b(X)$ uma função Lipschitz tal que $||\alpha||_\infty$ e $\text{Lip}(\alpha)$ são pequenos o suficiente. Pondo $\phi = h - I$, então temos

$$\begin{aligned}
\big((I+\phi)\circ B_w\big)(x) &= \big((B_w+\alpha)\circ(I+\phi)\big)(x) \\
&\Longrightarrow B_w(x) + \phi\big(B_w(x)\big) = B_w(x) + B_w\big(\phi(x)\big) + \big(\alpha\circ(I+\phi)\big)(x) \\
&\Longrightarrow \phi\big(B_w(x)\big) - B_w\big(\phi(x)\big) = \big(\alpha\circ(I+\phi)\big)(x).
\end{aligned}$$

Inicialmente, vamos resolver a equação para encontrar ϕ

$$\phi(B_w x) - B_w\big(\phi(x)\big) = \alpha(x). \tag{5.7}$$

Escrevendo $\alpha(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i(x)e_i$, temos

$$\phi_i(B_w x) - w_{i+1}\phi_{i+1}(x) = \alpha_i(x), \forall i \in \mathbb{Z},$$

$$\Rightarrow \phi_{i+1}(x) = \frac{1}{w_{i+1}}\phi_i(B_w x) - \alpha_i(x). \tag{5.8}$$

Substituindo $i+1$ por i, obtemos

$$\begin{aligned}
\phi_i(x) &= \frac{1}{w_i}\phi_{i-1}(B_w x) - \alpha_{i-1}(x) \\
\Rightarrow \phi_i(B_w x) &= \frac{1}{w_i}\phi_{i-1}(B_w^2 x) - \alpha_{i-1}(B_w x).
\end{aligned}$$

Portanto, substintuindo a equação acima na equação (5.8)

$$\phi_{i+1}(x) = \frac{1}{w_{i+1}w_i}\phi_{i-1}(B_w^2 x) - \frac{1}{w_{i+1}}\alpha_{i-1}(B_w x) - \alpha_i(x),$$

de modo que, por recursão, vale, para cada $i \in \mathbb{N}$

$$\phi_i(x) = \frac{\phi_0(B_w^i x)}{w_1\dots w_i} - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\alpha_j(B_w^{i-j-1}x)}{w_{j+1}\dots w_i}$$

e

$$\phi_{-i}(x) = w_{-i+1} \dots w_0 \phi_0(B_w^{-i}x) + \sum_{j=1}^{i} w_{-i+1} \dots w_{-j} \alpha_{-j}(B_w^{-i+j-1}x).$$

Definimos

$$C_{b,0}(X) = \{\phi \in C_b(X) : \phi_0 = 0\},$$

o qual é um subespaço fechado de $C_b(X)$. Afirmamos que a transformação linear

$$F : C_{b,0}(X) \to C_b(X)$$
$$\phi \mapsto \phi \circ B_w - B_w \circ \phi$$

é bijetiva. De fato, fixado $\alpha \in C_b(X)$, a única solução para (5.7) é dada por

$$\phi_0 = 0, \phi_i(x) = -\sum_{j=0}^{i-1} \frac{\alpha_j(B_w^{i-j-1}x)}{w_{j+1} \dots w_i} \text{ e } + \sum_{j=1}^{i} w_{-i+1} \dots w_{-j} \alpha_{-j}(B_w^{-i+j-1}x).$$

Por outro lado, definindo ϕ como acima, afirmamos que $\phi \in C_{b,0}$ e portanto vale (5.7).

Af. 1: $\phi \in C_{b,0}(X)$: De fato, temos $\phi = f + g$, com

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_{-i}(x) e_{-i} \text{ e } g(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i(x) e_i.$$

Basta mostrarmos que $f, g \in C_b(X)$. Por hipótese, existem $s \in (0,1)$ e $\beta > 1$ tais que

$$|w_{-j} w_{-j-1} \dots w_{-j-k+1}| \leq \beta s^k \text{ e } \frac{1}{|w_j w_{j+1} \dots w_{j+k-1}|} \leq \beta s^k, \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Seja $g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) e_i$. Reorganizando a série dupla que define g_n, obtemos

$$\begin{aligned} g_n(x) &= -\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{\alpha_j(B_w^{i-j-1}x)}{w_{j+1} \dots w_i} \right) \\ &= -\sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{k=t}^{n} \frac{\alpha_{k-t}(B_w^{t-1}x)}{w_{k-t+1} \dots w_k} e_k \right). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} ||g_n(x)|| &\leq \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{k=t}^{n} \frac{||\alpha_{k-t}(B_w^{t-1}x)||}{|w_{k-t+1} \dots w_k|} \right) \\ &\leq \sum_{t=1}^{n} \beta ||\alpha||_\infty s^t \leq \frac{\beta}{1-s} ||\alpha||_\infty < \infty, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{i\to\infty} \phi_i(x) = 0$ e $g(c_0) \subseteq c_0$ e que g é limitada. Como

$$\begin{aligned} ||g(x) - g(y)|| &\leq \sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{k=t}^{\infty} \frac{||\alpha_{k-t}(B_w^{t-1}x) - \alpha_{k-t}(B_w^{t-1}y)||}{|w_{k-t+1} \dots w_k|} \right) \\ &\leq \beta \sum_{t=1}^{\infty} ||\alpha(B_w^{t-1}x) - \alpha(B_w^{t-1}y)||s^t, \end{aligned}$$

concluímos que g é contínua. Logo, $g \in C_b(X)$. A prova de que $f \in C_b(X)$ é análoga.

Agora tome $0 < \varepsilon < ||F^{-1}||^{-1}$ e seja $\alpha \in C_b(X)$ uma função Lipschitz com $||\alpha||_\infty \leq \varepsilon$ e $\mathrm{Lip}(\alpha) \leq \varepsilon$, e seja $S = B_w + \alpha$.

Af 2: Existe uma única $u \in C_{b,0}(X)$ que satisfaz

$$F(u) = u \circ B_w - B_w \circ u = \alpha \circ (I + u).$$

De fato, seja $G : C_{b,0}(X) \to C_{b,0}(X)$ a função dada por

$$G(\phi) = F^{-1}\big(\alpha \circ (I + \phi)\big).$$

Como

$$||G(\phi) - G(\psi)||_\infty \leq \mathrm{Lip}(\alpha)||F^{-1}||\ ||\psi - \phi||_\infty,$$

temos que G é uma contração, e portanto possui um único ponto fixo em $C_{b,0}(X)$. Como (5.9) é equivalente a $G(u) = u$, provamos a afirmação.

Assim, se $h = I + u$, mostramos que

$$h \circ B_w = S \circ h. \tag{5.9}$$

Af. 3: Existe uma única $v \in C_{b,0}(X)$ tal que a função $h' = I + v$ satisfaz

$$h' \circ S = B_w \circ h'. \tag{5.10}$$

De fato, (5.10) é equivalente à equação

$$v \circ S - B_w \circ v = -\alpha.$$

Como $v_0 = 0$, esta equação implica que

$$v_i(x) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\alpha_j(S^{i-j-1}x)}{w_{j+1} \dots w_i} \text{ e } v_{-i}(x) = -\sum_{j=1}^{i} w_{-i+1} \dots w_{-j}\alpha_j(S^{-i+j-1}x),$$

para $i \in \mathbb{N}$. Então, se existe uma solução $v \in C_{b,0}(X)$, esta deve ser única. Além disso, dada v como acima, temos que $v \in C_{b,0}(X)$ e $h' = I + v$ satisfaz (5.10). Isto mostra a terceira afirmação.

Por (5.9) e (5.10),

$$h' \circ (h \circ B_w) = (h' \circ S) \circ h = (B_w \circ h') \circ h.$$
$$\Rightarrow h' \circ h \circ B_w = B_w \circ h' \circ h.$$

Como $h = I + u, h' = I + v$, com $u, v \in C_{b,0}(X)$, temos $h' \circ h = I + (u + v + u \circ v) = I + \psi$, com $\psi \in C_{b,0}(X)$, a equação acima é equivalente a

$$\psi(B_w x) = w_{i+1}\psi_{i+1}(x), \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Como $\psi_0 = 0$, obtemos $\psi = 0$ e portanto $h' \circ h = I$. Basta mostrar então que

$$h \circ h' = I.$$

Como $h \circ h' \circ S = S \circ h \circ h'$, resta mostrar que

Af. 4: A única solução para a equação

$$(I + \theta) \circ S = S \circ (I + \theta), \tag{5.11}$$

com $\theta \in C_{b,0}(X)$ é $\theta = 0$. De fato, considere a transformação linear dada por

$$\begin{aligned} H : C_{b,0}(X) &\to C_b(X) \\ \gamma &\mapsto \gamma \circ S - B_w \circ \gamma \end{aligned}$$

Temos que H é bijetiva, pois, dado $\eta \in C_b(X)$, a equação

$$\gamma(Sx) - B_w((\gamma(x)\big) = \eta(x)$$

é equivalente a

$$\gamma_i(Sx) - w_{i+1}\gamma_{i+1}(x) = \eta_i(x), \forall i \in \mathbb{Z},$$

e podemos argumentar analogamente ao caso da função F. Defina $K : C_{b,0}(X) \to C_{b,0}(X)$ por

$$K(\phi) = H^{-1}\big(\alpha \circ (I + \phi) - \alpha\big).$$

Então

$$||K(\psi) - K(\phi)||_\infty \leq \text{Lip}(\alpha)||H^{-1}||\ ||\psi - \phi||_\infty.$$

Além disso, temos

$$H^{-1}(\eta)(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_{-i}(x)e_{-i} + \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i(x)e_i,$$

com

$$\gamma_i(x) = -\sum_{j=0}^{i-1} \frac{\eta_j(S^{i-j-1}x)}{w_{j+1}\dots w_i} \text{ e } \gamma_{-i}(x) = -\sum_{j=1}^{i} w_{j+1}\dots w_i \eta_{-j}(S^{-i+j-1}x)$$

E argumentando analogamente a F, obtemos

$$||H^{-1}(\eta)||_\infty \leq \frac{2\beta}{1-s}||\eta||_\infty,$$

escolhendo $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, podemos garantir que K é uma contração, e portanto possui um único ponto fixo em $C_{b,0}(X)$. Se θ é tal ponto, temos que

$$\begin{aligned}
\theta = K(\theta) &= H^{-1}(\alpha \circ (I+\theta) - \alpha)\\
&\Rightarrow H(\theta) = \alpha \circ (I+\theta) - \alpha\\
&\Rightarrow \theta \circ S - B_w \circ \theta = \alpha \circ \theta\\
&\Rightarrow \theta \circ S = (B_w + \alpha) \circ \theta = S \circ \theta\\
&\Rightarrow (I+\theta) \circ S = S \circ (I+\theta),
\end{aligned}$$

ou seja θ é solução de (5.11). Como $K(0) = 0$ vale que $\theta = 0$ é a única solução da equação.

Assim, $h^{-1} = h'$ e h é um homeomorfismo satisfazendo $h \circ B_w = (B_w + \alpha) \circ h$. □

Para provar as condições em que B_w possui sombreamento, introduzimos uma condição mais geral de hiperbolicidade.

Definição 5.2.1. *Um operador invertível T em um espaço de Banach X é dito* ***hiperbólico generalizado*** *se $X = M \oplus N$, com M, N subespaços fechados de X satisfazendo $T(M) \subseteq M, T^{-1}(N) \subseteq N$ e $\sigma(T|_M) \subseteq \mathbb{D}, \sigma(T|_N^{-1}) \subseteq \mathbb{D}$. Estas duas últimas condições são equivalentes, após uma renormalização, a dizer que $||T|_M|| < 1$ e $||(T^{-1})|_N|| < 1$.*

Assim, na noção mais geral de hiperbolicidade, não requerimos que o subespaço N seja invariante.

Como [1] aponta, é fácil ver que o operador shift B_w é hiperbólico generalizado em c_0 quando $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |w_{-k} \dots w_{-k-n}|^{1/n} < 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} |w_k \cdot \dots \cdot w_{k+n}|^{1/n} > 1$. De fato, defina

$$M = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X : x_n = 0, \forall n > 0\}$$

e

$$N = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X : x_n = 0, \forall n \leq 0\},$$

os quais são subespaços fechados de X com $X = M \oplus N, B_w(M) \subseteq M$ e $B_w^{-1}(N) \subseteq N$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$||(B_w|_M)^n|| = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} |w_{-k} \cdot w_{-k-1} \dots w_{-k-n+1}|$$

e

$$||(B_w^{-1}|_N)^n|| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_{k+1} \cdot w_{k+2} \dots w_{k+n}|,$$

segue $\sigma(B_w|_M) \subseteq \mathbb{D}, \sigma\big((B_w)^{-1}|_N\big) \subseteq \mathbb{D}$. Portanto, por definição, B_w é hiperbólico generalizado.

Teorema 5.2.4. *Todo operador hiperbólico generalizado em um espaço de Banach tem a propriedade de sombreamento.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, tome $x^{(1)} \in M, x^{(2)} \in N$ com $x = x^{(1)} + x^{(2)}$. Existe $\beta > 0$ tal que

$$||x^{(1)}|| \leq \beta||x||, ||x^{(2)}|| \leq \beta||x||, \forall x \in X$$

Como $r(T|_M) < 1$ e $r(T^{-1}|_N) < 1$, podemos tomar $t \in \mathbb{R}$ com

$$\max\{r(T|_M), r(T^{-1}|_N\} < t < 1.$$

Logo, existe $C \geq 1$, tal que

$$||(T|_M)^n|| \leq Ct^n, ||(T^{-1}|_{\mathbb{N}})^n|| \leq Ct^n, \forall n \geq 0$$

Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência limitada em X. Dado $n \in \mathbb{Z}$, defina

$$y_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k z_{n-k-1}^{(1)} \in M,$$

$$y_n^{(2)} = -\sum_{k=1}^{\infty} T^{-k} z_{n+k-1}^{(2)} \in N$$

e $y_n = y_n^{(1)} + y_n^{(2)}$. Então

$$\begin{aligned} Ty_n + z_n &= \sum_{k=0}^{\infty} T^{k+1} z_{n-k-1}^{(1)} - \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k+1} z_{n+k-1}^{(2)} + z_n^{(1)} + z_n^{(2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} T^k z_{n-k}^{(1)} - \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k} z_{n+k}^{(2)} = y_{n+1}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Note que

$$||y_n^{(1)}|| \leq C\sum_{k=0}^{\infty} t^k||z_{n-k-1}^{(1)}||, ||y_n^{(2)}|| \leq C\sum_{k=0}^{\infty} t^k||z_{n+k-1}^{(2)}||.$$

Portanto

$$\begin{aligned} ||y_n|| &\leq C\sum_{k=0} t^k(||z_{n-k-1}^{(1)}|| + ||z_{n+k-1}^{(2)}||) \\ &\leq 2\beta C\sum_{k\in\mathbb{Z}} t^k||z_k|| \leq \left(\frac{2\beta C}{1-t}\right)\sup_{k\in\mathbb{Z}}||z_k|| \\ &= K\sup_{k\in\mathbb{Z}}||z_k||, \forall n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

com $K = \left(\frac{2\beta C}{1-t}\right)$. Para mostrar o sombreamento de T, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{1}{2k\varepsilon}$. Então dada uma pseudo-trajetória (x_n), vale que a sequência $z_n = x_{n+1} - Tx_n$ é limitada com $\sup_n ||z_n|| \leq \delta$. Usando (5.12), temos que

$$\begin{aligned} x_{n+1} - y_{n+1} &= (z_n + Tx_n) - (Ty_n + z_n) \\ &= T(x_n - y_n), \end{aligned}$$

e portanto $x_n - y_n = T^n(x_0 - y_0)$. Assim

$$||x_n - T^n(x_0 - y_0)|| = ||y_n|| \leq K \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||z_n|| \leq K\delta = \varepsilon.$$

□

A noção de hiperbólico generalizado nos ajuda a entender quando o operador tem sombreamento. Para observar as condições que B_w tem sombreamento, usaremos o Lema a seguir.

Lema 5.2.2. *Se (w_n) é uma sequência limitada de escalares, então*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |w_k w_{k+1} \dots w_{k+n}|^{1/n} < 1$$
$$\iff \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} |w_k \dots w_{k+n}| < \infty.$$

Demonstração. Tome $R_n = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |w_k \dots \cdot \dots w_{k+n}|^{1/n}$ e suponha que $\lim R_n < 1$. Então, existe $M > 0$ tal que para todo $R_n \leq M < 1$, com $n \geq m$. Como

$$|w_k \dots \cdot \dots w_{k+n}|^{1/n} \leq R_n^n \leq M^n, \forall k \in \mathbb{Z},$$

então

$$\sum_{n=0}^{\infty} |w_k \dots w_{k+n}| \leq \sum_{n=0}^{m} R_n^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} M^n = \sum_{n=0}^{m} R_n^n + \frac{1 - M^{m+1}}{1 - M}$$

de modo que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} |w_k \dots w_{k+n}| < \infty$.

Para mostrar a volta, seja $R_k = \sum_{n=0}^{\infty} |w_k \dots w_{k+n}|$. Então existe $K > 0$ tal que $R_k \leq K, \forall k \geq 0$. Vale que

$$\begin{aligned} |w_k|(1 + R_{k+1}) &= |w_k|(1 + |w_{k+1}| + |w_{k+1}w_{k+2}| + \dots) \\ &= (|w_k| + |w_k w_{k+1}| + |w_k w_{k+1} w_{k+2}| + \dots) \\ &= R_k, \end{aligned}$$

de modo que

$$|w_k| = \frac{R_k}{1 + R_{k+1}}.$$

Como, para $j \geq 0$

$$\frac{R_j}{1 + R_j} = 1 - \frac{1}{1 + R_j} \leq 1 - \frac{1}{1 + R_j} \leq 1 - \frac{1}{1 + K} = \frac{K}{1 + K},$$

então

$$\begin{aligned}|w_k \dots w_{k+n}| &= \frac{R_k}{1+R_{k+1}} \cdot \frac{R_{k+1}}{1+R_{k+2}} \cdots \frac{R_{k+n}}{1+R_{k+n+1}} \\ &= \frac{R_k}{1+R_{k+n+1}} \cdot \frac{R_{k+1}}{1+R_{k+1}} \cdots \frac{R_{k+n}}{1+R_{k+n}} \\ &\leq \frac{R_k}{1+R_{k+n+1}} \cdot \left(\frac{K}{1+K}\right)^n \leq K\left(\frac{K}{1+K}\right)^n,\end{aligned}$$

o que implica o resultado. □

Finalmente, obtemos as condições em que o operador B_w tem a propriedade de sombreamento.

Teorema 5.2.5 (Sombreamento)**.** *O operador B_w possui a propriedade de sombreamento se, e somente se vale uma das condições abaixo:*

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n}|^{1/n} < 1.$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n}|^{1/n} > 1.$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |w_{-k} \dots w_{-k-n}|^{1/n} < 1$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} |w_k \cdot \ldots \cdot w_{k+n}|^{1/n} > 1.$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Os casos $(A), (B)$ são os casos em que B_w é hiperbólico, e portanto, tem sombreamento. Já a condição (C) implica que B_w é hiperbólico generalizado, de modo que pelo Teorema 5.2.4, B_w possui a propriedade do sombreamento.

($\Rightarrow$) Se B_w possui a propriedade de sombreamento, então vamos mostrar que vale uma das seguintes condições

$$\text{(C1)} \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_k \dots w_{k+n}|^{1/n} < 1.$$

$$\text{(C2)} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\in\mathbb{N}} |w_k \dots w_{k+n}|^{1/n} > 1.$$

De fato, seja $\delta > 0$ associado a $\varepsilon = 1$ na definição de sombreamento. Supondo que a condição (C1) é falsa, então pelo Lema 5.2.2, existem $t, m_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{n=0}^{m_0} |w_t w_{t+1} \dots w_{t+n}| \geq \frac{1+\delta}{\delta^2}. \tag{5.13}$$

Fixado $m > m_0$, construímos uma δ-pseudo trajetória de B_w por

$$x_0 = e^{i\theta_0} e_{t+m}, x_k = B_w(x_{k-1}) + \delta e^{i\theta_k} e_{t+m-k}, k = 1, \dots, m$$

e

$$x_n = B_w(x_{n-1}), \forall n \geq m+1,$$

em que os ângulos $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m$ são escolhidos de forma que

$$e^{i\theta_k} w_t \ldots w_{t+m-k} = |w_t \ldots w_{t+m-k}|, 0 \leq k \leq m.$$

Por sombreamento, existe $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ tal que

$$||x_n - B_w^n(a)|| < 1, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{5.14}$$

Como $B_w e_k = w_k e_{k-1}$, vale que

$$x_1 = e^{i\theta_0} w_{t+m} e_{t+m-1} + \delta e^{i\theta_1} e_{t+m-1}$$

$$x_2 = e^{i\theta_0} w_{t+m} w_{t+m-1} e_{t+m-1} + \delta e^{i\theta_1} w_{t+m-1} e_{t+m-2} + \delta e^{i\theta_3} e_{t+m-2}$$

assim, para todo $k \in \mathbb{Z}$, a $(t-1)$-ésima coordenada de x_{m+1} é

$$e^{i\theta_0} w_t \ldots w_{t+m} + (e^{i\theta_1} w_t \ldots w_{t+m-1} + \ldots + e^{i\theta_m} w_t)\delta,$$

o que é equivalente a

$$|w_t \ldots w_{t+m}| + (|w_t \ldots w_{t+m-1}| + \ldots + |w_t|)\delta.$$

Tomando $\gamma = a_{t+m} - e^{i\theta_0}$, vale que $|\gamma| < 1$ e $(t-1)$-ésima cooordenada de $B_w^{m+1}(a)$ é

$$w_t w_{t+1} \ldots w_{t+m} \cdot (e^{i\theta_0} + \gamma).$$

Logo, (5.14) implica

$$|(|w_t \ldots w_{t+m-1}| + \ldots + |w_t|)\delta - w_t \cdot \ldots w_{t+m}\gamma| < 1. \tag{5.15}$$

Assim, por (5.13),

$$\left| \left(\sum_{n=0}^{m_0} |w_t w_{t+1} \ldots w_{t+n} \right) \delta - w_t \cdot \ldots w_{t+m}\gamma \right| < 1$$

$$|w_t \ldots w_{t+m}| \geq 1 - \left(\frac{1+\delta}{\delta^2} \right) \delta = \frac{1}{\delta}.$$

E por (5.15),

$$(|w_t \ldots w_{t+m-1} + \ldots + |w_t|)\delta < 1 + |w_t \ldots w_{t+m}||\gamma|.$$

Dividindo ambos os lados por $|w_t \ldots w_{t+m}|\delta$, obtemos

$$\frac{1}{|w_{t+m}|} + \frac{1}{|w_{t+m} w_{t+m-1}|} + \ldots + \frac{1}{|w_{t+m} \ldots w_{t+1}|} < 1 + \frac{1}{\delta}.$$

Como isso é válido para qualquer $m > m_0$, obtemos do Lema 5.2.2 que vale a condição (C2).

Agora, o inverso de B_w é o shift bilateral

$$F_{w'} : (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X \mapsto (w'_{n-1}x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}} \in X$$

onde $w'_n = \dfrac{1}{w_{n+1}}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Como o isomorfismo isómetrico $\phi : (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X \mapsto (x_{-n})_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ estabelece uma conjugação entre $F_{w'}$ e $B_{w''}$, em que

$$w''_n = w'_{-n} = \frac{1}{w_{-n+1}}, \forall n \in \mathbb{Z};$$

segue que $B_{w''}$ também possui a propriedade de sombreamento e vale uma das condições:

(D1) $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\in\mathbb{N}} |w_{-k} \cdot w_{-k-1} \dots w_{-k-n}|^{1/n} > 1.$

(D2) $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_{-k} \cdot w_{-k-1} \dots w_{-k-n}|^{1/n} < 1.$

Logo, temos quatro possibilidades. Se valem (C1) e (D2), temos (A). Se valem (C2) e (D1), temos (B), enquanto que (C) é equivalente a (C2) e (D2). Afirmamos que não é possível que condições (C1) e (D1) sejam possíveis simultaneamente. De fato, suponha o contrário, e sejam ε, δ como acima. Construímos uma δ-pseudo trajetória por

$$y_0 = e_0, y_n = B_w(y_{n-1}) + \delta e_0, n \geq 1, y_n = B_w^{-1}(y_{n+1} + \delta e_0), n \leq -1.$$

Note que

$$y_n = w_0 \dots w_{-n+1}e_{-n} + \delta w_0 \dots w_{-n+2}e_{-n+1} + \dots + \delta w_0 e_{-1} + \delta e_0$$

e

$$y_{-n} = \frac{\delta+1}{w_1 \dots w_n}e_n + \frac{\delta}{w_1 \dots w_{n-1}}e_{n-1} + \dots \frac{\delta}{w_1}e_1,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Existe $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ tal que

$$||y_n - B_w^n(b)|| < 1, \forall n \in \mathbb{Z} \tag{5.16}$$

Para cada $k \geq 1$ e $n \geq 0$, a $(-k-(n+1))$-ésima coordenada de $B_w^{n+1}(b)$ é igual a $w_{-k-n} \dots w_{-k-1}w_{-k}b_{-k}$, e portanto (5.16) implica que

$$|w_{-k-n} \dots w_{-k-1}w_{-k}b_{-k}| < 1$$

Assim, (D1) implica que $b_{-k} = 0, \forall k \geq 1$. Analogamente, (C1) implica que $b_k = 0, \forall k \geq 1$. Mas então $b = b_0e_0$, o que contradiz (5.16). □

Um operador invertível em um espaço de Banach X é dito **fortemente estruturalmente estável** se, para cada $\gamma > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada função Lipschitziana $\phi \in C_b(X)$ com $||\phi||_\infty \leq \varepsilon$ e $\mathrm{Lip}(\phi) \leq \varepsilon$, existe um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h \circ T = (T + \phi) \circ h$ e $||h - I||_\infty \leq \gamma$.

Como exemplo de operador fortemente estruturalmente estável, temos o shift B_w. De fato, na demonstração do Teorema 5.2.3, mostramos que $h \circ B_w = (B_w + \phi) \circ h$, com $h = I + u$ e u ponto fixo da função G. Como

$$||u||_\infty = ||Gu||_\infty = ||F^{-1}(\alpha \circ (I + \phi)|| \leq ||F^{-1}|| \cdot ||\alpha|| \leq ||F||^{-1}\varepsilon,$$

podemos tomar $||u||_\infty$ tão pequeno quanto quisermos ao tomarmos ε pequeno o suficiente.

Proposição 5.2.1. *Se $B_w : X \to X$ é um operador expansivo e estruturalmente estável, então é hiperbólico.*

Demonstração. Se B_w é expansivo e extruturalmente estável, então é uniformemente expansivo pelo Teorema 4.3.3. Logo, pelo Teorema 5.2.3, vale uma das condições abaixo:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}} |w_{k+1} \dots w_{k+n}| = \infty$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}} |w_{k-n+1} \dots w_k|^{-1} = \infty$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} |w_{k+1} \dots w_{k+n}| = \infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\in-\mathbb{N}} |w_{k-n+1} \dots w_k|^{-1} = \infty$.

Af.: Se vale (a), então $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |w_{k+1} \dots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1$.

De fato, vale que

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}} |w_{k+1} \dots w_{k+n}| = \frac{1}{\sup_{k\in\mathbb{Z}} |w_{k+1} \dots w_{k+n}|^{-1}}$$

Logo, vale (a) se, e somente se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |w_{k+1} \dots w_{k+n}|^{-1} = 0.$$

Em particular, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |w_{k+1} \dots w_{k+n}|^{-1} \leq 1, \forall n \geq n_0.$$

Como $\inf\limits_{j\in\mathbb{Z}} ||w_j| > 0$, existe $r \in (0,1)$ com $|w_j| \geq r$. Assim, para $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} |w_k \dots w_{k+j}| &= |w_k \dots w_{k+n}| \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|w_{k+j} \dots w_{k+n}|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|w_{k+j} \dots w_{k+n}|} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r^{n-j+1}} = \frac{1}{r^{n+1}} \frac{1}{1-r}.\end{aligned}$$

Assim

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} |w_k \dots w_{k+n}| < \infty$$

e pelo Lema 5.2.2, concluímos o resultado. Analogamente, se vale (b), então

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{Z}}|w_{k-n+1}\dots w_k|^{1/n}<1.$$

Estes são justamente os casos em que B_w é hiperbólico. Suponha por contradição que vale (c). Em particular,

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{|w_1\dots w_i|}=\infty \text{ e } \lim_{i\to\infty}|w_{-i+1}\dots w_0|=\infty. \tag{5.17}$$

Seja $\varepsilon>0$ associado com $\gamma=1$ na definição de fortemente estruturalmente estável. Defina $\alpha\in C_b(X)$ por $\alpha(x)=\frac{\varepsilon}{2}e_0$. Note que ϕ é Lipschtiziano com $\mathrm{Lip}(\phi)=||\alpha||=\frac{\varepsilon}{2}$. Então existe $\phi\in C_b(X)$ com $||\phi||_\infty\le 1$ e satisfazendo $(I+\phi)\circ B_w=(B_w+\alpha)\circ(I+\phi)$, de modo que, para todo $x\in X$:

$$\begin{aligned}\phi(B_wx)-B_w\big(\phi(x)\big)=\alpha\big(x+\phi(x)\big)=\frac{\varepsilon}{2}e_0\\ \Rightarrow\phi_i(x)=\frac{\phi_0(B_w^ix)}{w_1\cdot w_i}-\frac{\varepsilon}{2w_1\dots w_i},\ \text{e}\\ \phi_{-i}(x)=w_{-i+1}\dots w_0\phi_0(B_w^{-i}x), i\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Como ϕ é limitada, temos por (5.17)

$$\phi_0(x)=\frac{\phi_{-i}(B_w^ix)}{w_{-i+1}\dots w_0}\to 0,\ \text{quando } i\to\infty,$$

de modo que $\phi_0\equiv 0$. Mas então, novamente por (5.17)

$$\phi_i(x)=-\frac{\varepsilon}{2w_1\dots w_i}\to\infty.$$

Contradição. $\square$

6 Considerações finais

Nessa dissertação, encontramos resultados específicos que mostram as implicações de certas propriedades em relação ao shift posterior, como o fato de que expansividade e estabilidade estrutural implicam hiperbolicidade, conforme Proposição 5.2.1. Porém, para um sistema dinâmico qualquer $f : X \to X$, com X um espaço métrico, e f uma função contínua, a seguinte questão ainda permanece em aberto:

Questão 1: Que condições devemos impor em f para que expansividade implique expansividade positiva?

Além disso, vimos que a propriedade de sombreamento implica sombreamento positivo. Uma pergunta natural a se fazer é encontrar um contra-exemplo que mostre que a recíproca não é verdadeira:

Questão 2: Encontrar um contra-exemplo em que f é um homeomorfismo com propriedade de sombreamento positivo, mas sem a propriedade de sombreamento.

Com base no que se foi exposto, encontrar propriedades dinâmicas dos shifts ponderados se resume a propriedades de sequências nos números complexos. No Teorema 5.2.5, encontramos as condições para que o shift ponderado tenha propriedade de sombreamento. Ao conseguirmos encontrar condições para o sombreamento positivo, podemos ter uma ideia de contra-exemplo para responder a questão anterior:

Questão 3: Existe alguma caracterização de sombreamento positivo do shift ponderado?

Em 2002, foi mostrado em [5] que no caso compacto, as duas noções de sombreamento coincidem, conforme mostrado na Proposição 4.3.1. No caso em que X é um espaço métrico reflexivo, o Teorema de Banach-Alaoglu, que pode ser encontrado em [8], garante que a bola unitária em X é compacta na topologia fraca*. Com isso, surge a seguinte indagação:

Questão 4: Podemos adaptar a Proposição 4.3.1 para mostrar que o resultado também é verdadeiro no caso em que X é um espaço reflexivo?

Como pudemos ver, há diversos resultados interessantes acerca dos sistemas dinâmicos lineares, e o estudo do shift ponderado no espaço das sequências nos ajuda a encontrar exemplos e contra-exemplos de inúmeros resultados em dinâmica linear.

Referências

[1] Backes, L.; Dragičević, D. A generalized Grobman-Hartman theorem for nonautonomous dynamics. *Collect. Math. 73*, 3 (2022), 411–431.

[2] Bayart, F; Matheron, E. *Dynamics of linear operators*, vol. 179 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[3] Bernardes, J.; Nilson C.; Messaoudi, A. Shadowing and structural stability for operators. *Ergodic Theory Dynam. Systems 41*, 4 (2021), 961–980.

[4] Bernardes, J. *et al.* Expansivity and shadowing in linear dynamics. *J. Math. Anal. Appl. 461*, 1 (2018), 796–816.

[5] Good, C. *et al.* expansivity and unique shadowing. *Proc. Amer. Math. Soc. 149*, 2 (2021), 671–685.

[6] Grosse-Erdmann, Karl-G.; Peris Manguillot, A. *Linear chaos.* Universitext. Springer, London, 2011.

[7] Hedlund, J. H. Expansive automorphisms of Banach spaces. II. *Pacific J. Math. 36* (1971), 671–675.

[8] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[9] Liu, J. On the Riesz space decomposition theorem. *Math. Æterna 4*, 3-4 (2014), 425–430.

[10] Ombach, J. The simplest shadowing. *Ann. Polon. Math. 58*, 3 (1993), 253–258.

[11] Stein, Elias M.; Shakarchi, R. *Complex analysis*, vol. 2 of *Princeton Lectures in Analysis.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.