UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

FELIPE CARVALHO SILVA

Medidas de Caos em Dimensão Infinita

Campinas

2024

Felipe Carvalho Silva

Medidas de Caos em Dimensão Infinita

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Felipe Carvalho Silva e orientada pelo Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38m

Silva, Felipe Carvalho, 2000-
Medidas de caos em dimensão infinita / Felipe Carvalho Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Caos (Sistemas dinâmicos). 2. Sistemas dinâmicos lineares. 3. Entropia topológica. I. Varão Filho, José Régis Azevedo, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Chaos measures in infinite dimension
Palavras-chave em inglês:
Chaos (Dynamical systems)
Linear dynamical systems
Topological entropy
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
José Régis Azevedo Varão Filho [Orientador]
Junilson Cerqueira da Silva
Mayara Braz Antunes
Data de defesa: 08-03-2024
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-8768-7711
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/6011101584883428

Dissertação de Mestrado defendida em 08 de março de 2024 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO

Prof(a). Dr(a). JUNILSON CERQUEIRA DA SILVA

Prof(a). Dr(a). MAYARA BRAZ ANTUNES

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Aos meus pais, Roseli e Vanderlei, por sempre me intruirem com base nos ideais de integridade, diligência e temperança e pelas contribuição para que eu me tornasse quem sou. Ao meu irmão, Daniel, e ao meu animal de estimação, Julin, pela ajuda com as imagens da subseção 2.1.3 e por toda fraternidade demonstrada ao longo desses anos. Provando-se meus melhores companheiros. Ao meu tio, Leonardo, por me inspirar a seguir essa carreira, "embora a superioriade de seu espírito o eleve muito acima do vulgo, você possui a arte de colocar-se ao alcance de todos, e sua bondade natural o faz ter prazer em exercê-la com frequência"[9] .

À minha parceira, Maria Fernanda, por me mostrar mais do que os prazeres da vida, mas a alegria que transcende a sensação imediata e dá-me sentido existencial. "[...] a felicidade não é dada por nenhuma experiência particular, mas sim pela consciência da direção que damos às nossas vidas"[8]. Na vasta paisagem da existência, não poderia vislumbrar um amanhã sem você.

Ao meu orientador, Professor Doutor Régis Varão, por me apresentar a beleza da matemática em 2014 no Programa Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) e me acompanhar nessa jornada desde então, com muita sabedoria e elucidação. Graças a seu empenho excepcional com diversos projetos de extensão fui capaz de conhecer a universidade e seu dever como uma instituição em benefício da sociedade.

Aos meus colegas, Vitória Aparecida, Vinicius Jameli, Nelson Prata, Henrique Tonello, Daniel Aguilar, Pedro de Mattos e Paulo Lupatini. Todos partes integrais no meu desenvolvimento acadêmico. Jamais consiguirei gratificá-los o suficiente por toda ajuda prestada ao longo dos últimos 6 anos. Cada um uma inspiração para mim com suas personalidades e talentos únicos.

Ao corpo docente e funcionarios do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas, por viabilizar cada uma das etapas desse Mestrado, conforme a excelência conhecida dessa universidade. Em particular, aos professores Giuliano Zugliane e Gabriel Ponce pela confiança em meu trabalho no desenvolvimento da Olimpíada de Matemática da Unicamp, assim como toda suas experiências compartilhadas comigo muito além de suas atribuições. Aos professores, Valdemir Leal e Ferdinando Lobo. Seus esforços com o ensino da matemática foram a gênese de tudo que se encontra aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho, estudam-se diferentes definições associadas a caos no contexto da Dinâmica de Operadores. Mais ainda, busca-se entender como essas características se relacionam, tendo como ponto central o chamado Critério de Hiperciclicidade Frequente. Em particular, busca-se descrever a conexão entre esse teorema e definições mais modernas relacionadas com caos, sendo essas a Propriedade de Especificação e a Entropia Topológica.

Palavras-chave: Dinâmica de Operadores Lineares. Caos Linear. Critério de Hiperciclicidade Frequente. Propriedade de Especificação. Entropia Topológica.

Abstract

In this work, we study different definitions associated with chaos in the context of Dynamics of Linear Operators. Furthermore, we seek to understand how these characteristics are related, with the central point being the so-called Frequent Hypercyclicity Criterion. In particular, we seek to describe the connection between this theorem and more modern definitions related to chaos, namely the Specification Property and Topological Entropy.

Keywords: Dynamics of Linear Operators. Linear Chaos. Frequent Hypercyclicity Criterion. Specification Property. Topological Entropy.

Lista de ilustrações

Lista de símbolos

$\#A$	Cardinalidade do conjunto A.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais ($0 \notin \mathbb{N}$).
$\mathbb{N}_0$	Conjunto dos inteiros não negativos ($0 \in \mathbb{N}_0$).
$\\|\cdot\\|_F$	F-norma definindo a topologia do espaço.
$HC(T)$	Conjunto dos vetores hipercíclicos de T.
$FHC(T)$	Conjunto dos vetores frequentemente hipercíclicos de T.
$\mathbb{T}^n$	Toro n-dimensional
$B(x,r)$	Bola aberta centrada em x de raio r.
$\overline{A}$	Fecho topológico do conjunto A.
$span(A)$	Subespaço vetorial gerado pelo conjunto A.
ℓ^p	Espaço das sequências reais p-somáveis.

Sumário

Introdução

Quando o tema de linearidade é abordado em discussões a respeito de Teoria do Caos, frequentemente é declarado que uma característica fundamental das dinâmicas caóticas é não serem lineares. Todavia, essa alegação viria a ser refutada em 1929, quando o matemático estadunidense George David Birkhoff produziu uma classe de exemplos de mapas lineares com sensibilidade a condições iniciais (Definição 2.6). Essa classe ficaria conhecida como operadores de Birkhoff, que agem no espaço das funções inteiras por $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + a)$, para um $a \neq 0$. Posteriormente, em 1969, Stefan Rolewicz daria origem a outra classe de operadores caóticos, também conhecidos por operadores de Rolewicz, que consistem em múltiplos escalares do *shift* para trás. Sendo esse último exemplo, um caso particular de uma classe de operadores célebres da dinâmica linear, os *shifts* com pesos, que terão suas propriedades categorizadas nesse texto.

À vista disso, a Dinâmica Linear é uma área da matemática que vem se expandindo amplamente nas últimas décadas, associando-se com áreas consagradas da matemática como a Análise Funcional, referente ao problema do subespaço invariante. Sendo que esse problema pode ser traduzido em termos da dinâmica linear da seguinte forma: um operador não possui subespaço invariante, fechado e não trivial se, e somente se, todo vetor não nulo é hipercíclico (Definição 2.2).

Paralelamente, o conceito de entropia (métrica) foi introduzida por Kolmogorov e Sinai na Teoria Ergódica como um invariante para sistemas dinâmicos. Em 1970, Ornstein provou que a entropia definida por Kolmogorov é, de fato, um invariante completo para os *shifts* de Bernoulli, isto é, dois *shifts* de Bernoulli têm a mesma entropia se, e somente se, eles são isomorfos. Já em 1965, R. L. Adler, A. G. Konheim e M. H. McAndrew adaptaram a definição de entropia métrica como uma medida da complexidade das órbitas de um sistema dinâmico, chamado de entropia topológica.

Este trabalho dedica-se a descrever algumas das noções de caos para dinâmica de operadores lineares, assim como estabelecer as relações conhecidas entre essas noções e apresentar os resultados centrais da área. Em especial, seu objetivo final será discutir os resultados obtidos em [7], bem como apontar um equívoco na prova do Teorema 3.2 desse artigo, um contraexemplo para o mesmo e uma sugestão de demonstração ainda em desenvolvimento.

No Capítulo 1, introduz-se as definições e teoremas essenciais para o entendimento do restante do texto. Entre elas, define-se F-espaços para que os teoremas futuros possam ser enunciados em suas formas mais gerais. No entanto, para um leitor menos familiarizado, vale notar que esses espaços se comportam de maneira análoga a espaços de

Banach, com o único cuidado de que uma F-norma não é necessariamente homogênea.

No Capítulo 2, inicialmente, apresenta-se os elementos fundamentais para o conceito de caos num contexto geral, tal como a definição mais usada para caos: caos no sentido de Devaney. Em seguida, aborda-se o caos linear, tendo como principal resultado o Critério de Hiperciclicidade Frequente, Teorema 2.8, que estabelece uma forma mais conveniente de mostrar que um operador é frequentemente hipercíclico, além de outras propriedades. Esse capítulo segue o excelente livro-texto [11] até a subseção 2.2.1 e, para a subseção 2.2.2, foram utilizados os artigos [7], [18] e, principalmente, [3] como base. É necessário destacar que a subseção 2.2.2 é indispensável para a elaboração dos resultados autorais do capítulo 3. Sendo a ideia proposta de demonstração para o Teorema 3.2 do artigo [7] uma aplicação da propriedade de especificação de forma diferente do usual: estudando operadores que possuem essa propriedade não somente no sentido usual, isto é, restritos a uma sequência de compactos, mas de forma mais ampla no espaço todo.

Em [3] (2016), na Observação 4, é mencionado ser improvável que um mapa pudesse ter a propriedade fora de compactos. Contudo, em [21] (2018), Proposição 4.1, é apresentado um operador que satisfaz essa hipótese em um espaço de Fréchet inteiro. Dessa forma, é perceptível a atualidade desses conceitos e o amplo espaço de evolução dessa área. Nesse sentido, ainda na subseção 2.2.2, o autor fornece um exemplo de um operador sobre um espaço de Banach que possui a propriedade de especificação exclusivamente sobre compactos, entretanto, quando considerado esse mesmo espaço como espaço de Fréchet, com uma escolha adequada de seminormas, o operador possui a propriedade em todo espaço. Por fim, esse exemplo se mostra relevante, tendo em mente que, mesmo alterando a métrica e topologia de um espaço, quando feito de forma intencional, ainda pode ser possível fazer inferências sobre a entropia de um mapa com respeito a métrica original.

Já no Capítulo 3, encontra-se uma exposição da noção de entropia topológica, assim como foi apresentada em [1] por Adler, Konheim e McAndrew: inicialmente, para espaços topológicos quaisquer, Subseção 3.1, e, em seguida, para espaços métricos, Subseção 3.2, onde se situa o interesse desse texto. Ademais, esse capítulo se conclui com a aplicação dos resultados desenvolvidos no Capítulo 2.2.2 para entropia topológica a fim de se aproximar de uma prova para o Teorema 3.2 de [7].

Finalmente, no Capítulo 4, são ratificadas as condições necessárias e suficientes para que um *shift* com peso apresente as propriedades mencionadas nos capítulos anteriores. Como também, é apresentado um exemplo de *shift* com pesos que possui entropia topológica infinita, mas não possui outras variações de caos, contido em [7]. Mostrando, assim, que para essa classe de operadores a entropia topológica é uma forma de caos mais fraca que hiperciclicidade frequente.

1 Conceitos Preliminares

Neste capítulo, as noções fundamentais para o desenvolvimento do trabalho serão apresentadas a fim de consolidar o entendimento do leitor. Inicialmente, as demonstrações gerais, relativas a espaços métricos e espaços topológicos, serão omitidas e bibliografias onde as mesmas podem ser encontradas serão apontadas. Posteriormente, propriedades de sistemas dinâmicos relacionadas com caos serão demonstradas com o intuito de aumentar a intuição do leitor.

1.1 Espaços Vetoriais Topológicos

O estudo de operadores lineares comumente se faz em espaços de Banach, que permite serem aplicados uma coleção de teoremas célebres da análise funcional. Contudo, para os resultados descritos nesse trabalho, vê-se que esse contexto pode ser substituído por espaços com estrutura muito mais geral. Sendo eles, espaços de Fréchet e F-espaços. Dessa forma, deve-se primeiro definir essas estruturas e suas propriedades notáveis.

Definição 1.1 (Espaço Métrico)**.** *Um espaço métrico é um par (X, d), em que X é um conjunto não vazio e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é tal que, para todos $x, y, z \in X$,*

- $d(x, y) \geqslant 0$; *[Não-negativa]*
- $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$; *[Coincidente]*
- $d(x, y) = d(y, x)$; *[Simétrica]*
- $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$. *[Desigualdade triangular]*

Definição 1.2 (Bola Aberta)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico. A bola aberta centrada em $x \in X$ e de raio r é o conjunto $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$.*

Definição 1.3 (F-espaço)**.** *Um F-espaço real é um espaço vetorial real X, munido de uma métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ invariante por translação, isto é,*

$$d(x + z, y + z) = d(x, y),$$

para todos $x, y, z \in X$, tal que as operações de soma e multiplicação por escalar são contínuas na topologia induzida por d e (X, d) é completo.

Um F-espaço real pode ser definido alternativamente como um espaço vetorial real munido de uma F-norma completa. Uma F-norma define uma métrica invariante por translação, $d(x, y) = \|x - y\|$, e, reciprocamente, existe uma métrica invariante por translação definindo a topologia de X tal que $d(x, 0) = \|x\|$ é uma F-norma.

Definição 1.4 (Diferença de conjuntos)**.** *Sejam X um F-espaço e A, B subconjuntos de X. Define-se a diferença de A e B por $A - B = \{a - b \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.*

Definição 1.5 (F-norma)**.** *Uma função $\|\cdot\|_F : X \to \mathbb{R}_+$ sobre um espaço vetorial X é dita uma F-norma se, para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

1. *$\|x\|_F = 0$ implica que $x = 0$;*
2. *$\lim\limits_{\lambda \to 0} \|\lambda x\|_F = 0$;*
3. *$\|\lambda x\|_F \leqslant \|x\|_F$, se $|\lambda| \leqslant 1$;*
4. *$\|x + y\|_F \leqslant \|x\|_F + \|y\|_F$.*

Dessa forma, uma F-norma possibilita a investigação de F-espaços de maneira similar a espaços de Banach com a cautela de que F-normas carecem da propriedade de homogeneidade das normas. Isto é, usualmente não vale que $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para uma F-norma. Deverão, então, ser usados F-espaços no lugar de espaços de Banach para atingir o potencial completo dos teoremas futuros.

Definição 1.6 (Convergência Incondicional)**.** *Uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ em um F-espaço é dita incondicionalmente convergente se, para toda bijeção $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge.*

Em outras palavras, uma série converge incondicionalmente quando o somatório de seus termos não depende da ordem em que se é somado. Contudo, mais que a definição acima, será empregado com frequência as equivalências dadas pelo teorema seguinte.

Teorema 1.1. *Se X é um F-espaço com F-norma $\|\cdot\|$. São equivalentes:*

1. *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente em X;*
2. *para toda sequência $(\varepsilon_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$,*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$$
converge em X;
3. *para qualquer sequência limitada de escalares $(\alpha_n)_n$,*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$
converge em X;

4. *para todo* $\varepsilon > 0$*, existe um* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo conjunto finito* $F \subset \{N, N+1, ...\}$,

$$\|\sum_{n\in F} x_n\| < \varepsilon;$$

5. *para todo* $\varepsilon > 0$*, existe um* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, para toda sequência* $(\varepsilon_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

$$\|\sum_{n\geqslant N} \varepsilon_n x_n\| < \varepsilon;$$

6. *para todo* $\varepsilon > 0$*, existe um* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, para toda sequência limitada de escalares* $(\alpha_n)_n$ *com* $\sup\limits_n |a_n| \leqslant 1$,

$$\|\sum_{n\geqslant N} \alpha_n x_n\| < \varepsilon.$$

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [13], teoremas 3.3.8 e 3.3.9, e [16], teorema 3.8.2 e página 153. □

Definição 1.7 (Base Incondicional)**.** *Seja* X *um F-espaço. Uma sequência* $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ *em* X *é dita base de Schauder se, para todo* $x \in X$*, existe uma única sequência de escalares* $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ *tais que* $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$*. Além disso, se a série anterior converge incondicionalmente para todo* $x \in X$*, diz-se que* $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ *é uma base incondicional para* X.

Definição 1.8 (Seminorma)**.** *Uma função* $p : X \to \mathbb{R}_+$ *sobre um espaço vetorial* X *é dita uma seminorma se satisfaz, para todos* $x, y \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;
2. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Além disso, uma sequência $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *de seminormas é dita separadora se possui a seguinte propriedade:* $p_n(x) = 0$*, para todo* n*, implica que* $x = 0$.

Definição 1.9 (Espaço de Fréchet)**.** *Um espaço de Fréchet é um espaço vetorial* X*, dotado de uma sequência separadora crescente de seminormas* $(p_n)_n$*, completo na topologia induzida pela métrica*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y)).$$

Exemplo 1.1. *Um exemplo conhecido de espaço de Fréchet se encontra na Análise Complexa. Quando se estuda funções analíticas, nota-se que a estrutura topológica do espaço das funções holomorfas precisa traduzir o conceito de convergência uniforme sobre* *compactos, para que sejam válidos teoremas essenciais como o Teorema de Weierstrass. Sendo assim, pode-se definir a topologia de $H(\mathbb{C})$, a partir da sequência de seminormas*

$$p_n(f) = \sup\{|f(z)| \mid |z| \leqslant n\}.$$

A sequência de seminormas acima dá estrutura de espaço de Fréchet para $H(\mathbb{C})$.

Em termos topológicos, a proposição a seguir caracacteriza a convergência e os abertos em X, a partir de suas seminormas. As propriedades subsequentes são resultado direto de como foi definida a métrica gerada por essas seminormas.

Proposição 1.1. *Seja X um espaço de Fréchet com respeito às seminormas (p_n). Sejam $x_k, x \in X$, para $k \in \mathbb{N}$, e $U \subset X$. Então,*

1. *$x_k \to x$ se, e somente se, $p_n(x_k - x) \to 0$, quando $k \to \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*
2. *(x_k) é sequência de Cauchy se, e somente se, $p_n(x_k - x_l) \to 0$, quando $(k, l) \to \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*
3. *U é uma vizinhança de x se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\{y \in X \mid p_n(y - x) < \varepsilon\} \subset U$.*

Definição 1.10. *Um espaço de sequências reais X é um subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \Pi_{i=1}^{\infty}\mathbb{R}$, tal que a inclusão de X em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é contínua. Denota-se os elementos de X por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ou apenas $(x_n)_n$, com ênfase no fato que nesse texto as sequências começarão no índice 0. Além disso, diz-se que uma sequência $(x_n)_n$ possui suporte finito, quando $x_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com exceção numa quantidade finita de valores de n.*

Proposição 1.2. *Seja X um F-espaço de sequências, em que $\{e_n\}_n$ é base incondicional, e seja $p : X \to X$ uma F-norma definindo a topologia de X. A função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ dada por*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k)\}.$$

define uma F-norma em X.

Demonstração. Verificar que $\|\cdot\|$ é F-norma é um exercício elementar. As condições 1, 3 e 4, na definição 1.5, seguem de imediato de p ser F-norma. Para a condição 2, dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que

$$|\lambda| < \delta \Rightarrow p(\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k e_k) < \frac{\varepsilon}{2},$$

para $n = 1, ..., N$, em que $2^{-N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim, para $|\lambda| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p(\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k e_k)\} &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} p(\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k e_k) + 2^{-N} \\
&< \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-N} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2. *Seja X um espaço vetorial normado. Um operador linear $T : X \to X$ é contínuo se, e somente se, é limitado, no sentido que existe um $c > 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant c\|x\|$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Se T é um mapa linear e contínuo, então existe $0 < \delta < 1$ tal que $\|Tx\| < 1$, quando $\|x\| < \delta$. Logo, para um $x \in X$ qualquer e $\lambda = \dfrac{2\|x\|}{\delta}$, $\|Tx\| = \lambda\|T\dfrac{x}{\lambda}\| < \lambda$. Portanto, $\|Tx\| \leqslant c\|x\|$, para $c = \dfrac{2}{\delta}$.

Por outro lado, pela linearidade de T, a condição descrita no teorema é equivalente a T ser Lipschitz contínua. Isto é, $\|Tx - Ty\| \leqslant c\|x - y\|$. Em particular, T é contínua. □

Teorema 1.3 (Teorema da Categoria de Baire)**.** *Seja X um espaço métrico completo. Então, a interseção enumerável de abertos densos em X é densa em X.*

Demonstração. A prova desse teorema se encontra em [17], página 43. □

1.2 Sistemas Dinâmicos

Sistema dinâmico, na sua forma mais geral, é um par (X, T), em que X é um conjunto não vazio e T uma função definida de X para X, também chamada de dinâmica. Contudo, usualmente é exigido de X alguma estrutura, como compacidade ou estrutura de espaços métricos. Para o estudo de caos linear presente nos capítulos seguintes, X será tomado como um espaço vetorial topológico munido de uma métrica invariante por translação. Mais ainda, quando necessário também poderá ser presumida a estrutura de espaço de Fréchet ou Banach.

Notoriamente, a definição acima abrange uma grande quantidade de objetos de estudo, que podem ser classificados de acordo com as características do sistema. Diz-se que um sistema dinâmico é contínuo, se sua dinâmica fornece uma mudança gradual dos pontos no espaço, em contraste com sistemas dinâmicos discretos, cuja dinâmica descreve trajetórias, chamadas de órbitas, de forma abrupta. O interesse desse estudo está no segundo caso, em que, mais precisamente, cada ponto $x \in X$ descreve uma órbita por f da forma $Orb_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x), ...\}$, em que $f^n = f^{n-1} \circ f$ é o n-ésimo iterado de f. Naturalmente, se $f(x) = x$, diz-se que x é um ponto fixo e, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, diz-se que x é periódico. Quando o segundo caso acontece, o menor natural n para o qual $f^n(x) = x$ é chamado de período de x com relação a f

Exemplo 1.2. *Considere a rotação no círculo por um ângulo α. Denotando o círculo por $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pode-se definir a seguinte dinâmica:*

$$\begin{aligned} R_\alpha : \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ [x] &\mapsto [x + \alpha] \end{aligned}$$

Para $\alpha \in \mathbb{Q}$, é fácil ver que todo ponto do círculo tem órbita periódica sobre rotações por α. De fato, se $[x_0]$ um ponto do círculo e α um racional. α pode ser escrito na forma de fração irredutível, $\alpha = \dfrac{a}{b}$, com a e b inteiros e b não nulo. Assim, $R_\alpha^b([x_0]) = [x_0 + b.\alpha]$. E, como $b.\alpha = a \in \mathbb{Z}$, $R_\alpha^b([x_0]) = [x_0]$.

Por outro lado, todo ponto possui órbita infinita pela rotação de ângulo irracional. Por absurdo, suponha que exista um natural n tal que $R_\alpha^n([x_0]) = [x_0]$, para algum x_0; isto é, $R_\alpha^n([x_0]) = [x_0 + n.\alpha] = [x_0]$. Logo, $n.\alpha \in \mathbb{Z}$. Absurdo, pois α é irracional.

Assim como as demais áreas da matemática, faz-se necessário desenvolver uma maneira de identificar quando dois objetos são equivalentes do ponto de vista dinâmico. Essa atribuição é conferida à conjugação de sistemas dinâmicos.

Definição 1.11 (Conjugação)**.** *Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos. Diz-se que uma função $\pi : X \longrightarrow Y$ é uma semiconjugação de (X, f) para (Y, g), se π é contínua, tem imagem densa e satisfaz*

$$\pi \circ f = g \circ \pi,$$

isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Em particular, diz-se que g é um fator de f. E, caso π também seja um homeomorfismo, diz-se que π é uma conjugação.

Proposição 1.3. *Seja π uma semiconjugação de (X, f) para (Y, g). Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que $\pi \circ f^n = g^n \circ \pi$.*

Demonstração. Por indução, o caso $n = 1$ é trivial. Então, suponha que $\pi \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \pi$. Segue que

$$\pi \circ f^n = (\pi \circ f^{n-1}) \circ f = (g^{n-1} \circ \pi) \circ f$$

$$= g^{n-1} \circ (\pi \circ f) = g^{n-1} \circ (g \circ \pi)$$

$$= g^n \circ \pi.$$

□

Proposição 1.4. *Seja π uma semiconjugação de (X, f) para (Y, g) e seja X_0 um subconjunto denso de X. Então, $\pi(X_0)$ é denso em Y.*

Demonstração. Dado um aberto não vazio $U \subset Y$. Como a imagem de π é densa em Y, existe um $x \in X$ tal que $\pi(x) \in U$. Dessa forma, por continuidade, $\pi^{-1}(U)$ é um aberto não vazio de X. Assim, se X_0 é denso em X, então existe um $x_0 \in X_0$ tal que $x_0 \in \pi^{-1}(U)$. Portanto, $\pi(x_0) \in U$.

□

2 Teoria do Caos

O estudo da teoria do caos está relacionado, em termos populares, com o chamado "efeito borboleta". Sendo esse uma alegoria que descreve a possibilidade do bater de asas de uma borboleta em uma região do mundo causar algum tempo depois um tornado numa região distante. Essa natureza está associada a fenômenos físicos de complexidade elevada como, nesse caso, a meteorologia, ou a trajetória de um pêndulo duplo, cujos comportamentos aparentam ser aleatórios e pragmaticamente são imprevisíveis em longo prazo.

Notavelmente, essas características foram exploradas pela filosofia e cultura popular muito antes de se canonizarem na matemática e nas ciências naturais. O filósofo alemão Johann Gottlieb Fichte descreve o experimento mental em um trecho de seu livro sobre o desenvolvimento do conhecimento, "The Vocation of Man", de 1799 sobre como a mudança na posição de um único grão de areia pode acarretar numa mudança de temperatura em uma região que, por sua vez, resultaria na escassez de grãos e o perecimento de um de nossos antepassados. Sendo assim, Fichte conclui:

> *In every moment of her duration Nature is one connected whole; in every moment each individual part must be what it is, because all the others are what they are; and you could not remove a single grain of sand from its place, without thereby, although perhaps imperceptibly to you, altering something throughout all parts of the immeasurable whole. But every moment of this duration is determined by all past moments, and will determine all future moments; and you cannot conceive even the position of a grain of sand other than it is in the Present, without being compelled to conceive the whole indefinite Past to have been other than what it has been, and the whole indefinite Future other than what it will be. [10]*

Anos depois, o matemático e meteorologista Edward Norton Lorenz acidentalmente ratifica essa ideia na prática, quando observa que ao reinserir os dados de condições iniciais em seu modelo de previsão meteorológica com algumas casas decimais arredondadas em cerca de dois meses na simulação o resultado final foi completamente diferente [15].

2.1 Caos Topológico

Neste capítulo serão introduzidas as primeiras definições relacionadas com caos em um contexto geral, isto é, de dinâmica topológica. Tendo como destaque o Teorema de Transitividade de Birkhoff, que apresenta uma alternativa não construtiva para determinar a existência de pontos com órbita densa. Visto que para dinâmicas mais intrincadas a construção explícita de um ponto com órbita densa pode não ser uma opção acessível.

2.1.1 Transitividade Topológica

Uma das características de interesse que um sistema dinâmico pode apresentar é a chamada transitividade topológica que, assim como hiperciclicidade e mistura fraca, está relacionada à capacidade dos mapas de misturar pontos do espaço. Naturalmente, a ideia de um mapa que mistura todos os pontos do espaço se opõe a um conceito recorrente: conjuntos invariantes.

Um conjunto $Y \subset X$ é dito invariante por $f : X \to X$, se $f(Y) \subset Y$. Sendo assim, deve-se enunciar um teorema que se mostrará essencial para definição de mapas topologicamente transitivos.

Teorema 2.1. *Seja $f : X \to X$ uma dinâmica. São equivalentes:*

1. *X não pode ser escrito como união de dois conjuntos disjuntos com interior não vazio A e B tais que A é f-invariante.*
2. *Para todos U, V subconjuntos abertos não vazios de X, existe um natural n tal que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.*
3. *Para cada aberto não vazio $U \subset X$, $\cup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ é denso em X.*
4. *Para cada aberto não vazio $U \subset X$, $\cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ é denso em X.*

Demonstração. *(2) ⇔ (3)* segue por definição.

(2) ⇔ (4). Pode-se verificar que, se $x \in f^n(U) \cap V \neq \varnothing$, então $x \in V$ e $x = f^n(y)$, com $y \in U$. Logo, $y \in U \cap f^{-n}(V) \neq \varnothing$. Por outro lado, se $U \cap f^{-n}(V) \neq \varnothing$, tem-se que $\varnothing \neq f^n(U) \cap f^n(f^{-n}(V)) \supset f^n(U) \cap V$. Por sua vez, isso é equivalente a $\cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V)$ ser denso em X.

(1) ⇒ (4). Dado um aberto não vazio $U \subset X$, considere $A = \cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ e $B = X \backslash A$. Como $U \subset A$, A tem interior não vazio e A é f-invariante. Logo, por hipótese, B tem interior vazio. Portanto, $\cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ é denso em X.

(2) ⇒ (1). Suponha, por absurdo, que existam $A, B \subset X$ disjuntos com interior não vazio tais que A é f-invariante e $X = A \cup B$. Sejam $U = \mathrm{int}(A)$ e $V = \mathrm{int}(B)$. Então, $f^n(U) \subset A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, $f^{n_0}(U) \cap V = \varnothing$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Absurdo.

□

A propriedade *(2)*, em particular, recebe um destaque maior por ser usada com mais frequência e é como se define transitividade topológica.

Definição 2.1 (Transitividade Topológica)**.** *Um sistema dinâmico $f : X \to X$ é dito topologicamente transitivo se, para cada par $U, V \subset X$ abertos não vazios, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.*

Como primeiro exemplo, considere a rotação no círculo definida no Exemplo 1.2. Pode-se mostrar que esse mapa satisfaz a definição de transitividade topológica. Contudo, métodos mais simples de demonstrar que um mapa é topologicamente transitivo serão desenvolvidos posteriormente.

Exemplo 2.1. *A rotação por um ângulo irracional é topologicamente transitiva com respeito a métrica $d([x],[y]) = \min\{|\tilde{x} - \tilde{y}| \mid \tilde{x} \in [x], \tilde{y} \in [y]\}$.*

Demonstração. Dados α irracional e $U, V \subset \mathbb{S}^1$ abertos não vazios. Então, existem $[x_0] \in U$, $[y_0] \in V$ e $\varepsilon > 0$ tais que $B([x_0], \varepsilon) \subset U$ e $B([y_0], \varepsilon) \subset V$. Sabendo que a órbita de todo ponto é infinita e o círculo é compacto, desse modo devem existir $i, j \in \mathbb{N}$ distintos tais que

$$d(R_\alpha^i([0]), R_\alpha^j([0])) < \varepsilon.$$

Tome $\tilde{x} \in [R_\alpha^i([0])]$ e $\tilde{y} \in [R_\alpha^i([0])]$ tais que $d(R_\alpha^i([0]), R_\alpha^j([0])) = |\tilde{x} - \tilde{y}|$ e assuma que $\tilde{x} < \tilde{y}$. Nesse caso, $[\tilde{x} + (j-i)\alpha] = [\tilde{y}]$. As classes de equivalência dos intervalos encaixados

$$J_k = [\tilde{x} + k(j-i)\alpha, \tilde{y} + k(j-i)\alpha] \subset \mathbb{R},$$

para $k \in \mathbb{N}$, cobrem o círculo. Assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[\tilde{x} + k_0(j-i)\alpha] \in B([x_0], \varepsilon)$. Analogamente, J_k cobre o círculo, para $k > k_0$. Então, existe $k_1 > k_0$ tal que $[\tilde{x} + k_1(j-i)\alpha] \in B([y_0], \varepsilon)$.

$$\therefore R_\alpha^{k_1 - k_0}(U) \cap V \neq \varnothing.$$

□

Entretanto, é claro que, pelo Teorema 2.1, não é necessário se restringir a apenas à definição ao se tratar da transitividade topológica visto que essa é equivalente às proposições listadas anteriormente. Note também que a afirmação *(1)* revela a incompatibilidade da transitividade topológica e a existência de conjuntos invariantes com interior diferente de vazio, ao menos num sentido não degenerado. Desse modo, o teorema anterior destaca a relação entre transitividade topológica e a capacidade de misturar os pontos do espaço. Uma consequência imediata do Teorema 2.1 é a seguinte proposição.

Proposição 2.1. *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo. Então, f é topologicamente transitiva se, e somente se, f^{-1} é topologicamente transitiva.*

Demonstração. É imediato das equivalências 3 e 4 do Teorema 2.1. □

Teorema 2.2 (Teorema de Transitividade de Birkhoff)**.** *Seja X um espaço métrico completo, separável e sem pontos isolados e $f : X \to X$ uma dinâmica. São equivalentes:*

1. *f é topologicamente transitiva;*
2. *existe um ponto em X cuja órbita sobre f é densa em X.*

Em ambos os casos, o conjunto dos pontos com órbita densa em X é G_δ-denso.

Demonstração. Suponha que f é topologicamente transitiva. Como X é separável, existe um conjunto enumerável $\{x_i \in X \mid i \in \mathbb{N}\}$ denso em X. Dessa forma, as bolas abertas centradas em x_i e raio $\dfrac{1}{j}$ formam uma base enumerável da topologia de X. Em outras palavras, X é um espaço primeiro contável.

Seja $\{U_m \subset X \mid m \in \mathbb{N}\}$ essa base. Assim, para mostrar que $x \in X$ tem órbita densa, para cada $m \in \mathbb{N}$, deve existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U_m$. Isto é, x tem órbita densa se, e somente se,

$$x \in \bigcap_{m}^{\infty} \bigcup_{n}^{\infty} f^{-n}(U_m).$$

Sendo assim, se f é topologicamente transitiva, tem-se que $\bigcup_{n}^{\infty} f^{-n}(U_m)$ é um aberto denso em X. Dessa forma, pelo Teorema de Baire, a interseção enumerável de conjuntos abertos densos é densa em X. E, em particular, não vazia.

Para recíproca, seja $x \in X$ um ponto de órbita densa e U,V abertos não vazios de X. Então, existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $f^n(x) \in U$, $f^m(x) \in V$ e $n \leqslant m$. Logo, $x \in f^{-n}(U) \cap f^{-m}(V)$. Portanto, $f^m(x) \in f^{m-n}(U) \cap V \neq \varnothing$.

□

É importante notar que, na demonstração anterior, foi possível assumir que $n \leqslant m$ porque X não possui pontos isolados. Caso contrário, se $n \geqslant m$, pode-se considerar um novo aberto $V_1 = V \backslash \{f^m(x)\}$. E, como X não possui pontos isolados, $V_1 \neq \varnothing$. Assim, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{m_1}(x) \in V_1$. Visto que $m_1 \neq m$, repetindo esse procedimento, no máximo, n vezes, obtém-se um natural $M \leqslant n$ tal que $f^M(x) \in V$.

Dessa forma, tem-se do teorema anterior uma característica fundamental das dinâmicas topologicamente transitivas: a existência de órbitas densas. Contudo, em muitos dos textos básicos em sistemas dinâmicos, essa característica é abordada com nomes diferentes. Em [12] e [20], o nome transitividade topológica é reservado para funções com órbitas densas. Enquanto, no contexto da dinâmica linear, assim como no presente texto, é utilizado uma nomenclatura proveniente da álgebra:

Definição 2.2 (Hiperciclicidade)**.** *Um operador $T : X \to X$ é chamado de hipercíclico se existe um $x \in X$ cuja órbita sobre T é densa. Nesse caso, x é chamado de vetor hipercíclico e o conjunto dos vetores hipercíclicos de T é denotado por $HC(T)$.*

Um conceito existente no estudo do problema do subespaço invariante são os vetores cíclicos. Um vetor $x \in X$ é dito cíclico, se o conjunto

$$\operatorname{span}\{T^n x \mid n \in \mathbb{N}\}$$

é denso em X. Por outro lado, caso o conjunto

$$\{\lambda T^n x \mid n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

seja denso, diz-se que x é supercíclico. Naturalmente, chama-se um vetor x (assim como o operador T) de hipercíclico, quando o conjunto $\{T^n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X. Propriedades como essa serão examinadas no capítulo seguinte, sobre caos linear.

Retornando à transitividade topológica, para que essa propriedade possa ser considerada uma propriedade dinâmica, é necessário verificar que a mesma é preservada por conjugação.

Proposição 2.2. *Sejam $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ dinâmicas. Se $\phi : X \to Y$ é uma semiconjugação de f para g e f é topologicamente transitiva, então g é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Dado $U, V \subset Y$abertos não vazios. Como ϕ é contínua e tem imagem densa, $\phi^{-1}(U)$ e $\phi^{-1}(V)$ são abertos não vazios de X. Logo, existem $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ tais que $f^n(x) \in \phi^{-1}(U)$ e $x \in \phi^{-1}(V)$. Portanto, pela Proposição 1.3, $y = \phi(x) \in g^n(U) \cap V$. □

Em particular, $f \times g$ é semiconjugada a f e g através das projeções canônicas. Do qual tem-se o seguinte corolário.

Corolário 2.1. *Sejam $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ dinâmicas. Se $f \times g$ é topologicamente transitiva, então f e g são topologicamente transitivas.*

Naturalmente, o corolário anterior desperta a pergunta se f e g são topologicamente transitivas implica que $f \times g$ é topologicamente transitiva. Em tal caso, a resposta é não. Para que a recíproca do corolário anterior seja válida, será necessário definir uma propriedade mais forte que transitividade topológica, que são as dinâmicas fracamente misturadoras.

Exemplo 2.2. *Como visto no Exemplo 2.1, a rotação no círculo por um ângulo irracional α é topologicamente transitiva. Contudo, para $f = g = R_\alpha$, $f \times g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é a translação no toro pelo vetor (α, α), que não é topologicamente transitiva, como pode ser verificado com base no item 1 do Teorema 2.1.*

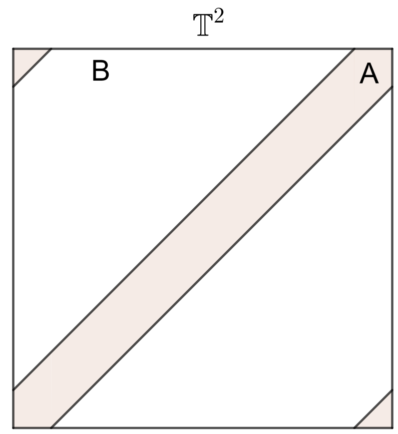


Figura 1 – Cisão do Toro em conjuntos disjuntos A e B com interior não vazio, invariantes pela translação $R_\alpha \times R_\alpha$.

Considerando o conjunto $A = \{[(x, y)] \in \mathbb{T}^2 \mid x - \frac{1}{10} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{10}\}$. É um exercício simples verificar que A tem interior não vazio, assim como seu complementar B, e ambos são invariantes por $R_\alpha \times R_\alpha$.

2.1.2 Misturas

Satisfazem uma descrição mais forte que a transitividade topológica mapas que são capazes de enviar abertos U_1 em V_1 e U_2 em V_2 na mesma iteração. Em seguida, vê-se que essa característica acarreta em diversas propriedades ausentes na transitividade topológica.

Definição 2.3 (Mistura Fraca)**.** *Uma dinâmica $T : X \to X$ é fracamente misturadora se $T \times T : X \times X \to X \times X$, dado por $(T \times T)(x, y) = (T(x), T(y))$, é topologicamente transitivo.*

Ainda mais, os abertos da forma $U \times V$, onde U e V são abertos de X, formam uma base para a topologia de $X \times X$. Logo, uma dinâmica T é fracamente misturadora se, dados U_1, U_2, V_1, V_2 abertos de X, existe um inteiro não-negativo n tal que $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing$ e $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$. Outra forma conveniente de entender essa propriedade é através dos conjuntos de retorno entre dois abertos.

Definição 2.4 (Conjunto de Retorno)**.** *Seja $T : X \to X$ uma dinâmica e $U, V \subset X$ abertos. O conjunto de retorno de U para V, denotado por $N(U,V)$, é dado como*

$$N(U,V) = \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(U) \cap V \neq \varnothing\}.$$

Nessa nova notação, T é topologicamente transitiva se, e somente se, $N(U,V) \neq \varnothing$, para todos U,V abertos, e é fracamente misturadora se, e somente se, $N(U_1,V_1) \cap N(U_2,V_2) \neq \varnothing$, para todos U_1, V_1, U_2, V_2 abertos. Em seguida, enuncia-se dois teoremas que serão necessários para demonstração do Teorema 2.4.

Proposição 2.3. *Uma dinâmica $T : X \to X$ é fracamente misturadora se, e somente se, para cada U, V_1, V_2 abertos não vazios de X, $N(U,V_1) \cap N(U,V_2) \neq \varnothing$.*

Lema 2.1 (Truque dos 4 Conjuntos)**.** *Seja $T : X \to X$ uma dinâmica e sejam U_1, U_2, V_1, V_2 abertos não vazios de X. Se existe um mapa contínuo $S : X \to X$ que comuta com T tal que $S(U_1) \cap U_2 \neq \varnothing$ e $S(V_1) \cap V_2 \neq \varnothing$, então existem abertos não vazios $U_1' \subset U_1$ e $V_1' \subset V_1$ tais que $N(U_1', V_1') \subset N(U_2, V_2)$.*

Demonstração. Pela continuidade de S, existem abertos não vazios $U_1' \subset U_1$ e $V_1' \subset V_1$ tais que $S(U_1') \subset U_2$ e $S(V_1') \subset V_2$. Nomeadamente, $U_1' = U_1 \cap S^{-1}(U_2)$ e $V_1' = V_1 \cap S^{-1}(V_2)$. $S(U_1) \cap U_2 \neq \varnothing$ e $S(V_1) \cap V_2 \neq \varnothing$ implica que ambos são não vazios. Agora, se $n \in N(U_1', V_1')$, então existe um $x \in U_1'$ tal que $T^n(x) \in V_1'$. Assim, $T^n(S(x)) = S(T^n(x)) \in V_2$ e $S(x) \in U_2$. Portanto, $n \in N(U_2, V_2)$.

Em particular, se T é topologicamente transitiva, isso implica que $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \varnothing$. □

Teorema 2.3 (Furstenberg)**.** *Seja $T : X \to X$ uma dinâmica fracamente misturadora. O produto $\Pi_{i=1}^n T$ é fracamente misturador, para todo $n \geqslant 2$.*

Demonstração. Para mostrar que $\Pi_{i=1}^n T$ é fracamente misturador, precisa-se mostrar que $\Pi_{i=1}^{2n} T$ é topologicamente transitiva. Assim, mostra-se que, se T é fracamente misturador, então $\Pi_{i=1}^n T$ é topologicamente transitiva, para todo $n \geqslant 2$, por indução.

O caso $n = 2$ é trivial por definição. Então, assuma que $\Pi_{i=1}^n T$ é topologicamente transitiva e tome U_k, V_k abertos não vazios de X, para $k = 1, ..., n+1$. Como T é fracamente misturador, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(U_n) \cap U_{n+1} \neq \varnothing$ e $T^m(V_n) \cap V_{n+1} \neq \varnothing$. então, pelo Truque dos 4 Conjuntos, existem $U_n' \subset U_n$ e $V_n' \subset V_n$ tais que $N(U_n', V_n') \subset N(U_n, V_n) \cap N(U_{n+1}, V_{n+1})$. Portanto, por hipótese de indução,

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} N(U_k, V_k) \supset \bigcap_{k=1}^{n-1} N(U_k, V_k) \cap N(U_n', V_n') \neq \varnothing.$$

□

Retomando o Exemplo 1.2, foi visto que $R_\alpha \times R_\alpha$ não é topologicamente transitiva e, em particular, não é fracamente misturadora. Assim, pelo Teorema de Furstenberg, R_α é um exemplo de dinâmica topologicamente transitiva que não é fracamente misturadora.

Ademais, o Teorema de Furstenberg revela uma característica inesperada das dinâmicas fracamente misturadoras: um mapa ser capaz de levar um par de abertos em outro par de abertos é equivalente a esse mesmo mapa ser capaz de levar qualquer n-upla de abertos em outra n-upla de abertos. O teorema a seguir explora algumas implicações disso a respeito do tamanho dos conjuntos de retorno de um mapa fracamente misturador.

Teorema 2.4. *Seja $T : X \to X$ uma dinâmica. São equivalentes:*

1. *T é fracamente misturador;*
2. *para todo par U,V de abertos não vazios de X, $N(U, V)$ contém intervalos de comprimento arbitrariamente grande;*
3. *para toda sequência sindética $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, no sentido de que (n_k) é estritamente crescente e*
$$\sup_{k\in\mathbb{N}}(n_{k+1} - n_k) < \infty,$$
a sequência $(T^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é topologicamente transitiva.

Aqui, diz-se que uma sequência de mapas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é topologicamente transitiva se, dado dois abertos não vazios U, V, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Dado um $p \in \mathbb{N}$ e U,V abertos não vazios, pela continuidade de T, tem-se que $T^{-k}(V)$ é aberto para cada $k = 1, ..., m$. Além disso, pelo Teorema de Furstenberg, $\Pi_{i=1}^{m} T$ é fracamente misturador e, em particular, topologicamente transitiva. Logo, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap T^{-k}(V) \neq \varnothing$, para $k = 1, ..., m$. Segue que $T^{n+k}(U) \cap V \neq \varnothing$, para todo k. Portanto, o intervalo $[n + 1, n + 2, ..., n + m]$ está contido em $N(U, V)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Dados U, V_1, V_2 abertos não vazios, pela Proposição 2.3, basta mostrar que $N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \varnothing$. Como tem-se que $N(V_1, V_2) \neq \varnothing$, então existe um $n \in N(V_1, V_2)$ tal que $T^n(V_1) \cap V_2$. Considere o aberto não vazio $V \subset V_1$ tal que $T^n(V) \subset V_2$. Por hipótese, existe um $m \in N(U, V)$ tal que $m + k \in N(U, V)$, para $k = 0, 1, ..., n$, e

$$T^{m+n}(U) \cap V_2 \supset T^{m+n}(U) \cap T^n(V) \supset T^n(T^m(U) \cap V) \neq \varnothing.$$

Portanto, $m + n \in N(U, V_1) \cap N(U, V_2)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Dados U, V abertos não vazios. Seja m o menor natural maior que $\sup_{k \in \mathbb{N}}(n_{k+1} - n_k)$. Se $N(U,V)$ contém um intervalo de comprimento m, então $T^{n_k}(U) \cap V \neq \varnothing$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $N(U,V)$ não contém intervalos arbitrariamente longos, $\mathbb{N} \backslash N(U,V)$ forma uma sequência sindética que não é topologicamente transitiva.

$\square$

A propriedade fracamente misturadora resolve o problema de ser preservada pela soma direta de operadores e, como visto acima, pode ser entendida com base no tamanho do conjunto de retorno. Evidentemente, o nome fracamente misturador origina-se de uma forma mais fraca da propriedade misturadora, que pode também ser entendida a partir do conjunto de retorno. Precisamente, quando $N(U,V)$ é cofinito, para todos os abertos U, V não vazios.

Definição 2.5. *Um sistema dinâmico $T : X \to X$ é misturador, se, para qualquer par de abertos não vazios U, V, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$T^n(U) \cap V \neq \varnothing, \text{ para todo } n \geqslant N.$$

2.1.3 Caos de Devaney

Para definir matematicamente o que se deve esperar de um sistema dinâmico caótico, Edward N. Lorenz afirma:

> *In fact, in some dynamical systems it is normal for two almost identical states to be followed, after a sufficient time lapse, by two states bearing no more resemblance than two states chosen at random from a long sequence. Systems in which this is the case are said to be sensitively dependent on initial conditions.* [15]

Definição 2.6. *Seja (X, d) um espaço métrico sem pontos isolados. Diz-se que um sistema dinâmico $T : X \to X$ tem dependência sensível a condições iniciais se existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe um $y \in X$ satisfazendo $d(x,y) < \varepsilon$ e, para algum $n \in \mathbb{N}$, $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$.*

Inicialmente, a definição de Caos para o matemático Robert L. Devaney seria um sistema dinâmico topologicamente transitivo com dependência sensível a condições iniciais e um conjunto denso de pontos periódicos. Contudo, essa definição apresenta um problema: se X é um espaço topológico, a definição dada acima depende da escolha da métrica definindo a topologia de X.

Exemplo 2.3. *Considere o mapa $f : (1, \infty) \to (1, \infty)$, dado por $f(x) = 2x$. Com respeito a métrica usual de $\mathbb{R}$, f é claramente sensivelmente dependente a condições iniciais. De fato, satisfaz a definição 2.6 para todo $\delta > 0$. Por outro lado, como a função* $\log : (1,\infty) \to (1,\infty)$ *é uniformemente contínua, a métrica $d(x,y) = |\log(x) - \log(y)|$ define a topologia usual* *de* $(1, \infty)$*, mas* f *é uma isometria com respeito a essa métrica. Portanto, não pode ter dependência sensível a condições iniciais.*

Esse problema pode ser prontamente evitado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.5 (Banks–Brooks–Cairns–Davis–Stacey)**.** *Seja* (X, d) *um espaço métrico sem pontos isolados e* $T : X \to X$ *um sistema dinâmico topologicamente transitivo e com um conjunto denso de pontos periódicos. Então,* T *possui dependência sensível a condições iniciais com respeito a qualquer métrica definindo a topologia de* X*.*

Demonstração. Como X não possui pontos isolados, X não pode ser uma única órbita periódica. Sendo assim, sejam p_1 e p_2 dois pontos periódicos com órbitas disjuntas. Defina

$$\eta = \frac{1}{2} \inf\{d(T^n(p_1), T^m(p_2)) \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Assim, fixados $x \in X$ e $0 < \varepsilon < \eta/4$, sabe-se que $d(x, T^n(p_1)) > \eta$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $d(x, T^n(p_2)) > \eta$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $p \in \{p_1, p_2\}$ o ponto que satisfaz a desigualdade anterior. Por hipótese, existe um ponto periódico q tal que $d(x, q) < \min\{\varepsilon, \frac{\eta}{4}\}$. Seja N o período de q. Como T é contínua, existe um $\varepsilon' > 0$ tal que

$$d(p, y) < \varepsilon' \Rightarrow d(T^n(p), T^n(y)) < \frac{\eta}{4}, \text{ para } n = 0, 1, ..., N.$$

Por fim, como T é topologicamente transitiva, existem $z \in X$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $d(x, z) < \varepsilon$ e $d(T^k(z), p) < \varepsilon'$. Então, para um $j \in \mathbb{N}$ com $k \leqslant jN < k + N$,

$$\begin{aligned}
d(T^{jN}(z), T^{jN}(q)) &= d(T^{jN}(z), q) \\
&\geqslant -d(T^{jN-k}T^k(z), T^{jN-k}(p)) + d(T^{jN-k}(p), x) - d(x, q) \\
&> -\frac{\eta}{4} + \eta - \frac{\eta}{4} \\
&= \frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

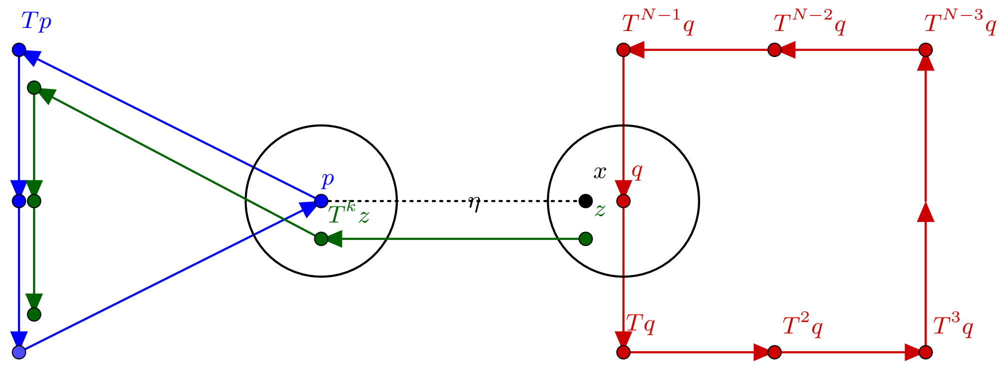


Figura 2 – Transitividade Topológica e um conjunto denso de pontos periódicos implica em sensibilidade a condições iniciais.

Portanto, $d(T^{jN}(x), T^{jN}(q)) \geqslant \dfrac{\eta}{4}$ ou $d(T^{jN}(z), T^{jN}(x)) \geqslant \dfrac{\eta}{4}$. Em ambos os casos, $d(x, z) < \varepsilon$ e $d(x, q) < \varepsilon$. Logo, segue que T é sensivelmente dependente a condições iniciais. $\square$

Agora sim, pode-se definir corretamente caos no sentido de Devaney.

Definição 2.7. *Um sistema dinâmico $T : X \to X$ é dito caótico no sentido de Devaney, ou caótico, quando T é topologicamente transitiva e possui um conjunto denso de pontos periódicos.*

Exemplo 2.4. *Seja $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, o espaço das sequências com dois símbolos com a topologia produto. Considere o shift de Bernoulli nesse espaço, $\sigma(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Então, dado dois abertos $U, V \subset \Sigma_2$, existem abertos básicos $U' = \{a_1\} \times ...\{a_i\} \times \{0, 1\} \times ... \subset U$ e $V' = \{b_1\} \times ...\{b_j\} \times \{0, 1\} \times ... \subset V$. Logo, a sequência $\xi = (b_1, ..., b_j, a_1, ..., a_i, 0, ...)$ satisfaz:*

$$\xi \in \sigma^j(U') \cap V' \subset \sigma^j(U) \cap V \neq \varnothing.$$

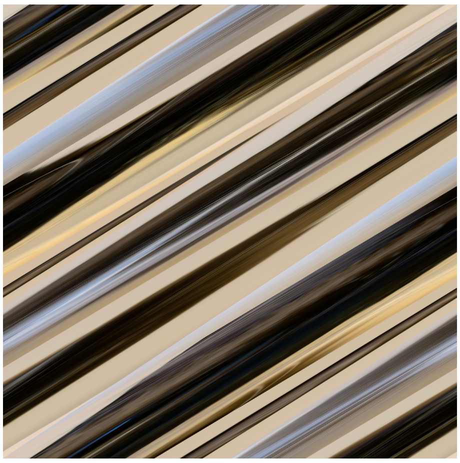
Sendo assim, σ é topologicamente transitivo. Além disso, dado um aberto básico $U = \{a_1\} \times ...\{a_i\} \times \{0, 1\} \times ...$, a sequência $(a_1, ..., a_i, a_1, ..., a_i, a_1, ...) \in U$ é periódica com respeito a σ. Assim, σ possui um conjunto denso de pontos periódicos. Portanto, σ é caótico no sentido de Devaney.

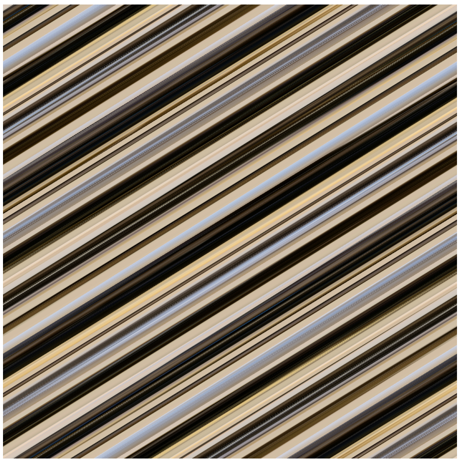
Outro mapa profundamente conhecido por suas propriedades caóticas é o chamado *Arnold's Cat Map*. Nomeado pelo matemático soviético Vladimir Igorevich Arnold, esse mapa se destaca pela possibilidade de expor visualmente os elementos que compõe caos no sentido de Devaney. Para isso, se $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ é o toro plano, *Cat Map* é o mapa induzido no toro pela transformação linear $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Isto é, $[x] \mapsto [Ax]$.

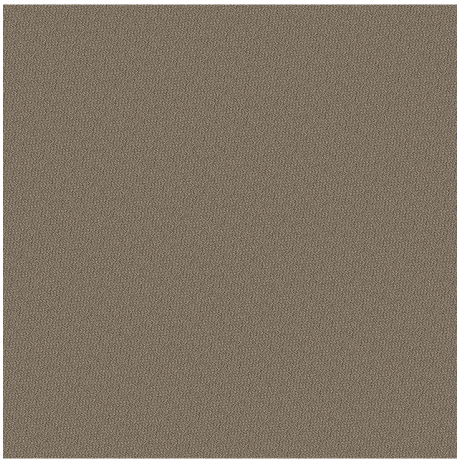
O nome *Cat Map* foi motivado pela aplicação dessa dinâmica à imagem do gato de estimação de Vladimir Arnold. Dado uma imagem digital, pode-se atribuir uma coordenada para cada um de seus pixels e visualizar aproximadamente a ação dessa dinâmica, aplicando-a a cada pixel da imagem. As imagens a seguir foram feitas pelo autor com seu animal de estimação, no mesmo espírito das imagens originais de Vladimir Arnold.

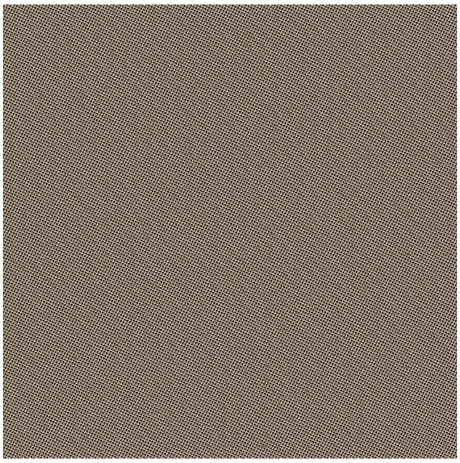
Original

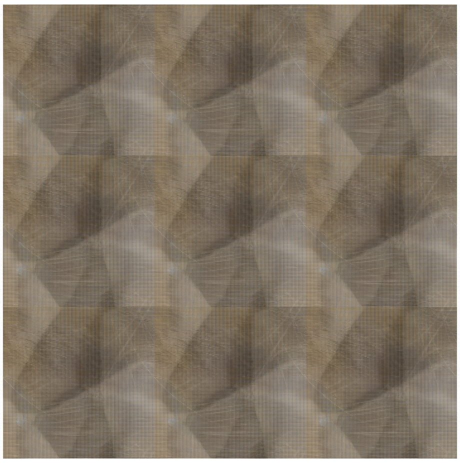
1 iteração

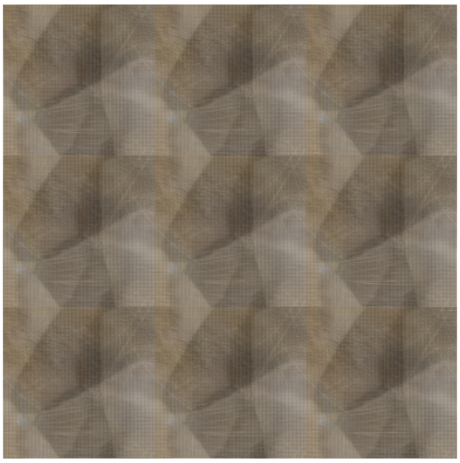

2 iterações

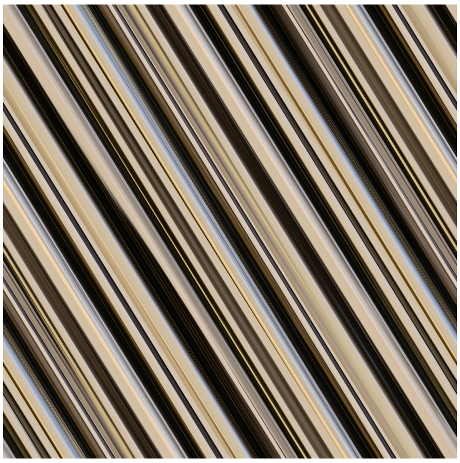

3 iterações


10 iterações

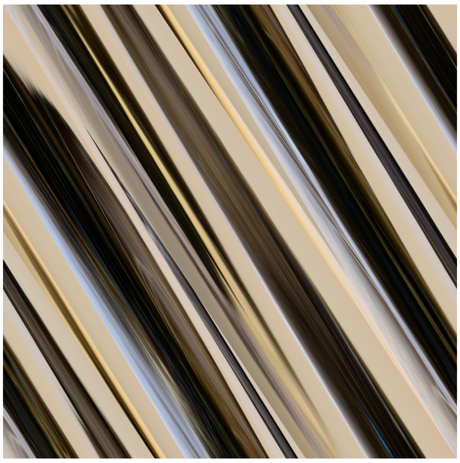

178 iterações


297 iterações


316 iterações



393 iterações



394 iterações

395 iterações

396 iterações

Figura 3 – Transformação de uma imagem pelo *Arnold's Cat Map*.

A primeira característica marcante das dinâmicas caóticas, vista nas imagens acimas, é a densidade dos pontos periódicos. Para o *Cat Map*, em particular, todo ponto com coordenadas racionais é periódico e, devido à imagem terem um número finito de pixels, todos os pontos são periódicos. Dessa forma, após iterações suficientes a imagem original sempre retornará e o tempo com que isso acontece depende excluivamente da resolução da imagem, o que, por sua vez, determina a coordenada dos pixels. Outra peculiaridade apresentada está na ênfase com que os pixels são misturados pela imagem. Esse fato se dá pelo segundo pré-requisito de caos, transitividade topológica; como visto no Teorema 2.5.

2.2 Caos Linear

A mudança de definição de caos (no sentido de Devaney) discutida acima mostra-se fundamental quando busca-se por fenômenos que apresentam alguma riqueza. Intuitivamente, não condiz considerar funções como $x \in \mathbb{R} \mapsto 2x \in \mathbb{R}$ caótica, mesmo que essa possua dependência sensível a condições iniciais. Notoriamente, essa sensibilidade advém de todas as órbitas "explodirem"com o tempo. Sem dúvidas, como esperado, não existem transformações lineares caóticas em dimensão finita. No entanto, os espaços de dimensão infinita são regularmente desconsiderados. Resultando em uma ampla disseminação indevidamente da ideia de que sistemas caóticos são por natureza não lineares. *"Chaotic systems not only exhibit sensitive dependence, but two other properties as well: they are deterministic, and they are nonlinear"* [19]. Essa seção irá não só contestar esse entendimento, como também expandir as noções anteriores de caos para sistemas dinâmicos lineares. Sendo assim, a partir dessa seção o termo sistemas dinâmicos lineares será utilizado para se referir ao par (X, T), em que X é um F-espaço separável e $T : X \to X$ é um operador em X, isto é, um mapa linear contínuo em X.

2.2.1 Hiperciclicidade

Anteriormente, foi-se mencionado o nome dado para operadores que possuem um ponto com órbita densa, hipercíclicos.

Exemplo 2.5. *Considere $\sigma : \ell^2 \to \ell^2$, dado por $\sigma(x_1, x_2, x_3, ...) = (2x_2, 2x_3, 2x_4...)$, duas vezes o shift em ℓ^2. Segue a demonstração de que σ é hipercíclico.*

Considere o conjunto A de todas as sequência de números racionais em ℓ^2 que possuem uma quantidade finita de coordenadas não-nulas. Como A é enumerável, tome uma enumeração $A = \{a^{(i)} | i \in \mathbb{N}\}$ e defina n_i como o menor natural tal que $a_j^{(i)} = 0$, para todo $j > n_i$. Seja $\tau : \ell^2 \to \ell^2$, dado por $\tau(x) = (0,\ 2^{-1}x_1,\ 2^{-1}x_2,\ 2^{-1}x_3,\ ...)$, uma inversa a direita de σ, e seja N_i tal que

- $N_i \geqslant N_{i-1} + n_i$ *e*
- $2^{N_i} \geqslant 2^i \|a^{(i)}\|$.

Resta verificar que $\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \tau^{N_i}(a^{(i)})$ pertence a ℓ^2 e tem órbita densa. De fato, $\|\xi\| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-N_i} \|a^{(i)}\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$. Logo, ξ é 2-somável e pertence a ℓ^2. Além disso, dados $a^{(i)}$ e $\epsilon > 0$, considere $a^{(i)} + 2^{-k} e_{n_i+k}$, para $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-k} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Uma vez que $a^{(i)} + 2^{-k} e_{n_i+k}$ é uma sequência de suporte finito com entradas racionais, $a^{(i)} + 2^{-k} e_{n_i+k} = a^{(i_k)}$. Assim, *dado que os índices i_k não se repetem, existe k grande o bastante tal que $2^{-i_k} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Dessa forma,*

$$d(\sigma^{N_{i_k}}(\xi), a^{(i)}) \leqslant 2^{-k} + \sum_{j=i_k+1}^{\infty} 2^{-N_j} \|a^{(j)}\| = 2^{-k} + 2^{-i_k} < \epsilon.$$

Portanto, o fecho da órbita de ξ contém A e A é denso em ℓ^2, segue que a órbita de ξ é densa em ℓ^2.

Uma forma notável de avaliar se um operador é hipercíclico é o conhecido Critério de Hiperciclicidade. Em contrassenso com seu nome, o Critério de Hiperciclicidade é uma condição equivalente a um operador ser fracamente misturador. Devendo, então, ser entendido como uma condição suficiente, mas não necessária para um operador ser hipercíclico. Como será visto no Capítulo 4, pode-se facilmente construir um operador que é hipercíclico, mas não satisfaz o critério de hiperciclicidade e não é fracamente misturador.

Teorema 2.6 (Critério de Hiperciclicidade)**.** *Se existem subconjuntos $X_0, Y_0 \subset X$, sequência $(n_k)_k$ de inteiros positivos e funções $S_k : Y_0 \to X$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tal que, para todos $x \in X_0$ e $y \in Y_0$,*

1. $T^{n_k} x \to 0$;
2. $S_{n_k} y \to 0$;
3. $T^{n_k} S_{n_k} y \to y$.

Então, T é fracamente misturador e, em particular, hiperciclico.

Demonstração. Ver [11], Teorema 3.12 página 74. □

Teorema 2.7 (Bès–Peris)**.** *Um operador T satisfaz o critério de hiperciclicidade se, e somente se, é fracamente misturador.*

Demonstração. Ver [11], Teorema 3.15 página 76. □

Muito pode ser dito sobre operadores hipercíclicos e seus conjuntos de vetores hipercíclicos, sendo estes até mesmo relacionados com o problema do subespaço invariante. Um operador admite um subespaço fechado, invariante e não trivial se, e somente se, todo vetor não nulo é hipercíclico. Contudo, o foco dessa dissertação está em outra direção. Operadores hipercíclicos possuem um vetor cuja órbita visita todos os abertos do espaço, todavia, existe uma condição adicional que será necessária para o desenvolvimento das seções seguintes. Alguns operadores apresentam vetores cuja órbita não somente atinge todos os abertos, como também o fazem com frequência positiva.

Definição 2.8. *Um operador $T : X \to X$ é dito frequentemente hipercíclico, se existe $x \in X$ tal que, para todo aberto não vazio $U \subset X$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\#\{0 \leqslant n \leqslant N \mid T^n x \in U\}}{N+1} > 0.$$

Nesse caso, diz-se que x é um vetor frequentemente hipercíclico. Além disso, define-se a frequência de um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ por

$$freq(A) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\#\{0 \leqslant n \leqslant N \mid n \in A\}}{N+1}.$$

Equivalentemente, $T : X \to X$ é frequentemente hipercíclico se, e somente se, existe um $x \in X$ tal que, para todo aberto $U \subset X$, existe uma sequência de naturais, $(n_k)_{k\in\mathbb{A}}$, estritamente crescente de ordem k tal que $T^{n_k}x \in U$. Aqui, $(n_k)_{k\in\mathbb{A}}$ tem ordem k, quando $(\frac{n_k}{k})_{k\in\mathbb{A}}$ é limitada. Em particular, nesse caso, a frequência com que x visita U é $\liminf_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}$. Apesar disso, para mostrar a existência de operadores frequentemente hipercíclicos primeiramente será elaborado uma condição necessária para que um operador o seja.

Lema 2.2. *Existem subconjuntos de $\mathbb{N}$, $A(\alpha, \beta)$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, dois a dois disjuntos com frequência positiva tais que, para qualquer $n \in A(\alpha, \beta)$ e $m \in A(\alpha', \beta')$, vale que*

$$n \geqslant \alpha \text{ e } |n - m| \geqslant \beta + \beta', \text{ para } m \neq n.$$

Demonstração. Para cada natural, considere $(a_0, a_1, ...)$ sua representação binária. Isto é, para $a_i \in \{0, 1\}$,

$$(a_0, a_1, ...) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i.$$

Defina $I(\alpha, \beta)$ como o conjunto de naturais cuja representação acima começa com $\alpha - 1$ zeros, seguidos de β uns e um zero. Ou seja, $(a_0, a_1, ...) \in I(\alpha, \beta)$ se, e somente se,

$$(a_0, a_1, ...) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\beta}, 0, a_{\alpha+\beta}, ...).$$

Todo número natural está em exatamente um conjunto da forma $I(\alpha, \beta)$. Agora, defina $\delta_k = \beta$, quando $k \in I(\alpha, \beta)$, para algum $\alpha \in \mathbb{N}$, e

$$n_i = 2\sum_{k=1}^{i-1} \delta_k + \delta_i, \text{ para } i \in \mathbb{N}.$$

Será argumentado que $A(\alpha, \beta) = \{n_i \mid i \in I(\alpha, \beta)\}$ satisfaz o enunciado. Primeiramente, como (n_i) é uma sequência estritamente crescente e cada $I(\alpha, \beta)$ é disjunto dos demais, os conjuntos $A(\alpha, \beta)$ também são dois a dois disjuntos. Além disso, se $n_i \in A(\alpha, \beta)$, então $n_i \geqslant \delta_i = \beta$. Por outro lado, se $n_i \in A(\alpha, \beta)$ e $n_j \in A(\alpha', \beta')$, com $n_i \neq n_j$ e $i > j$, então

$$n_i - n_j = 2 \sum_{k=j+1}^{i-1} \delta_k + \delta_i + \delta_j \geqslant \delta_i + \delta_j \geqslant \beta + \beta'.$$

Cada δ_i vale β, quando $i \in I(\alpha, \beta)$, e se $\alpha + \beta \leqslant N + 2$, então o número de elementos de $I(\alpha, \beta)$ menores ou iguais a 2^N é $2^{N+2-\alpha-\beta}$. Além disso, caso $\alpha + \beta > N+2$, todos elementos de $I(\alpha, \beta)$ são maiores que 2^N. Dessa forma, para todo $k \in \mathbb{N}$, com $2^{N-1} \leqslant k < 2^N$, tem-se que

$$n_k \leqslant n_{2^N} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{2^N} \delta_k \leqslant 2 \sum_{\alpha+\beta \leqslant N+2} 2^{N+2-\alpha-\beta}\beta \leqslant 2^N (8 \sum_{\alpha,\beta \geqslant 1} \frac{\beta}{2^{\alpha+\beta}})$$

Sendo assim, existe um $M > 0$ tal que

$$n_k \leqslant n_{2^N} \leqslant M 2^N \leqslant 2Mk.$$

Por fim, por construção, os conjuntos $I(\alpha, \beta)$ tem frequência positiva. De fato, $frac[I(\alpha, \beta)] = 2^{-\alpha-\beta}$. Assim, se (k_j) são os elementos de $I(\alpha, \beta)$ enumerados em ordem crescente, então existe um $K > 0$ tal que $k_j \leqslant Kj$. Portanto, $A(\alpha, \beta) = \{n_{k_j}\}$ e $n_{k_j} \leqslant M k_j \leqslant MKj$.

$\square$

Teorema 2.8 (Critério de Hiperciclicidade Frequente)**.** *Seja $T : X \to X$ um operador num F-espaço separável X. Se existe um subconjunto $X_0 \subset X$ denso e uma sequência de mapa $S_n : X_0 \to X_0$ tal que, para todo $x \in X_0$,*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ *converge incondicionalmente;*
2. $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x$ *converge incondicionalmente;*
3. $T^n S_n x = x$ *e* $T^m S_n x = S_{n-m} x$*, para todo* $n > m$.

Então, T é frequentemente hipercíclico.

Demonstração. Seja $\| \cdot \|$ uma F-norma definindo a topologia de X. Como X é separável, existe uma sequência (y_j) em X_0 densa em X. Pelas hipóteses 1 e 2, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um $N_k \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $j \leqslant k$ e $F \subset \{N_k, N_k + 1, ...\}$ finito, tem-se que

$$\| \sum_{n \in F} T^n y_j \| < \frac{1}{k 2^k} \tag{2.1}$$

$$\| \sum_{n \in F} S_n y_j \| < \frac{1}{k 2^k} \tag{2.2}$$

Seja $A(\alpha, \beta) \subset \mathbb{N}$ como no Lema 2.2 e seja $A = \cup_{k=1}^{\infty} A(k, N_k)$. Defina $z_n = y_k$, quando $k \in A(k, N_k)$, e defina $x = \sum_{n \in A} S_n z_n$. Para mostrar que essa série converge incondicionalmente, tome um $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$ e $F \subset \{N_k, N_{k+1}, ...\}$ finito, então

$$\sum_{\substack{n \in A \\ n \in F}} S_n z_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in A(j, N_j) \\ n \in F}} S_n z_n = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{n \in A(j, N_j) \\ n \in F}} S_n y_j + \sum_{j=k+1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in A(j, N_j) \\ n \in F}} S_n y_j.$$

Então, por (2.2), tem-se que

$$\begin{aligned} \| \sum_{\substack{n \in A \\ n \in F}} S_n z_n \| &\leqslant \sum_{j=1}^{k} \| \sum_{\substack{n \in A(j, N_j) \\ n \in F}} S_n y_j \| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \| \sum_{\substack{n \in A(j, N_j) \\ n \in F}} S_n y_j \| \\ &< \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k 2^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j 2^j} \\ &< \frac{1}{2^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Resta apenas mostrar que x é frequentemente hipercíclico. Novamente, fixe um $k \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in A(k, n_k)$, vale que

$$T^m x - y_k = \sum_{\substack{n \in A \\ n > m}} T^m S_n z_n + \sum_{\substack{n \in A \\ n < m}} T^m S_n z_n + T^m S_m z_m - y_k.$$

Além disso, para qualquer $M \geqslant m$, pode-se aplicar (2.2) no primeiro somatório e obter

$$\| \sum_{\substack{n \in A \\ m < n < M}} T^m S_n z_n \| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \| \sum_{\substack{n \in A(j, N_j) \\ m < n < M}} S_{n-m} y_j \| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \| \sum_{\substack{n \in A(j, N_j) \\ m < n < M}} S_{n-m} y_j \| \tag{2.3}$$

$$< \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k 2^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j 2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{2.4}$$

Como (2.4) vale para todo $M \geqslant m$, tem-se que $\| \sum_{\substack{n \in A \\ m < n}} T^m S_n z_n \| < \frac{1}{2^{k-1}}$. Analogamente, aplicando 2.1 no segundo somatório, segue que

$$\|\sum_{\substack{n\in A\\ n<m}} T^m S_n z_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|\sum_{\substack{n\in A(j,N_j)\\ n<m}} T^{m-n} y_j\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\sum_{\substack{n\in A(j,N_j)\\ n<m}} T^{m-n} y_j\| \tag{2.5}$$

$$< \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k2^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{2.6}$$

Em conclusão, por (3), tem-se que $T^m S_m z_m = z_m = y_k$. Dessa forma, a partir de (2.4) e (2.6), obtém-se que $\|T^m x - y_k\| < \frac{1}{2^{k-2}}$. Portanto, como (y_k) é denso em X e $A(k, N_k)$ tem frequência positiva, x é um vetor frequentemente hipercíclico de T.

□

O seguinte teorema revela a abrangência do Critério de Hiperciclicidade Frequente. Operadores que satisfazem o Critério são, além de frequentemente hipercíclico, misturadores e caóticos. A demonstração desse fato para propriedade misturadora envolve um teorema semelhante ao Critério de Hiperciclicidade, conhecido como Critério de Kitai, que é uma condição suficiente para um operador ser misturador. Esse Critério pode ser encontrado em [11], teorema 3.2 da página 71, e, para uma demonstração do Critério, basta observar a demonstração da segunda parte do teorema seguinte.

Teorema 2.9. *Um operador num F-espaço separável que satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente é também caótico e misturador.*

Demonstração. Se T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente, então T é hipercíclico e topologicamente transitivo. Logo, para mostrar que T é caótico, basta mostrar que T possui um conjunto denso de pontos periódicos. Pelas condições 1 e 2, para todo $x \in X_0$ e $N \in \mathbb{N}$,

$$y_{x,N} = \sum_{i=1}^{\infty} S_{iN} x + x + \sum_{i=1}^{\infty} T^{iN} x,$$

converge em X e $y_{x,N} \to x$, quando $N \to \infty$. Além disso, pela condição 3, cada $y_{x,N}$ é periódico com período N. Portanto, T é caótico.

Agora, seja $\|\cdot\|$ uma F-norma definindo a topologia de X. Dados dois abertos U, V não vazios, pela densidade de X_0, existem $x \in U \cap X_0$ e $y \in V \cap X_0$. Além disso, existem $\varepsilon, \delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset U$ e $B(y, \varepsilon) \subset V$. Pelas condições 1 e 2, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T^n x\| < \varepsilon \text{ e } \|S_n y\| < \delta,$$

para qualquer $n \geqslant N$. Logo, $z = x + S_n y \in U$ e, pela condição 3, $T^n z = T^n x + y \in V$. Assim, $\{N, N+1, N+2, ...\} \subset N(U, V)$. Portanto, T é misturador. □

O capítulo 4 dedica-se a estudar as propriedades de caos nos *shifts* com pesos. Para esses operadores em espaços em que $\{e_n\}$ é base incondicional, o Critério de Hiperciclicidade Frequente é equivalente a hiperciclicidade frequente. Porém, um exemplo importante de espaço de sequências, em que $\{e_n\}$ não é base incondicional, é c_0 - espaço das sequências reais com limite igual a 0. Bayart and Grivaux, em [4] corolário 5.2 e 5.3, investigam um exemplo de *shift* com pesos em c_0 frequentemente hipercíclico que não é misturador, nem caótico. Dessa forma, tem-se que o Critério de Hiperciclicidade Frequente não é equivalente a um operador ser frequentemente hipercíclico, no geral.

2.2.2 Propriedade de Especificação

Nessa subseção, explora-se a propriedade de especificação uma noção de caos mais forte que caos no sentido de Devaney e semelhante a propriedade de sombreamento, enunciada em [14], Teorema 18.1.2, com respeito a capacidade de um mapa aproximar órbitas. Mais especificamente, uma função contínua possui a propriedade de especificação se é capaz de aproximar uniformemente qualquer quantidade de trechos de órbitas pela órbita de um ponto periódico. Deve-se, então, examinar como essa propriedade se relaciona com as demais, definidas anteriormente.

Definição 2.9. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e seja $f : X \to X$ uma função contínua. Dizemos que f tem a propriedade de especificação se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $s \in \mathbb{N}$, $y_1, ..., y_s \in X$ e inteiros $0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2 < ... < a_s \leqslant b_s$ satisfazendo $a_{i+1} - b_i \geqslant N$, para $i = 1, ..., s-1$, existe um ponto $x \in X$ tal que $f^{b_s+N}(x) = x$ e, para cada $i = 1, ..., s$ e inteiro n, com $a_i \leqslant n \leqslant b_i$, temos que $d(f^n(x), f^n(y_i)) < \varepsilon$.*

Naturalmente, a definição anterior pode ser estendida para F-espaços a partir de uma exaustão por compactos. Isto é:

Definição 2.10. *Seja X um F-espaço separável. Dizemos que um operador $T : X \to X$ possui a propriedade de especificação para operadores se existe uma sequência crescente $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compactos T-invariantes com $0 \in K_1$ e*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n} = X$$

tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T|_{K_n}$ tem a propriedade de especificação.

Em [3], é discutido sobre a não exigência dos conjuntos K_n serem compactos na definição anterior. Contudo, queremos que a propriedade de especificação para operadores seja preservada por semiconjugação e, para que isso valha, é necessário que a semiconjugação entre os operadores seja uniformemente contínua, como será visto no Teorema 2.4. Para evitar alterações no conceito de semiconjugação, optamos por incluir a compacidade dos conjuntos K_n e, assim, obter a continuidade uniforme de qualquer semiconjugação sobre esses compactos.

Exemplo 2.6. *Seja $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ o shift de Bernoulli em $\Sigma_m = \{0, ..., m-1\}^{\mathbb{N}}$. Vamos mostrar que σ possui a propriedade de especificação.*

Demonstração. Dados $s \in \mathbb{N}$, $x^i = (x^i_n)_n \in \Sigma_m$, para $i = 1, .., s$, e $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < \varepsilon$.

Então, para quaisquer $0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2 < ... < a_s \leqslant b_s$ satisfazendo $a_{i+1} - b_i \geqslant N$, para $i = 1, ..., s-1$, considere $z = (z_n)_n$ dado por

$$z_n = \begin{cases} x_n^i & \text{se } a_i \leqslant n < b_i + N; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, denotando por τ o *shift* para direita que fixa 0 na primeira entrada, vale que $\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{k(b_2+N)} z$ é $b_2 + N$ periódica e $\sigma^n \xi$ e $\sigma^n x^i$ têm ao menos as N primeiras entradas iguais, para $a_i \leqslant n \leqslant b_i$. Logo,

$$d(\sigma^n \xi, \sigma^n x^i) \leqslant \frac{1}{2^N} < \varepsilon, \text{ para } a_i \leqslant n \leqslant b_i.$$

$\square$

Por outro lado, é pertinente notar que uma função contínua pode satisfazer a propriedade de especificação num conjunto não compacto, assim como mostrado em [21], Proposição 4.1. Esse fato será indispensável para as discussões futuras sobre entropia infinita. Nesse âmbito, a seguir é enunciado um exemplo amplamente conhecido de um mapa com a propriedade de especificação para operadores, os *shifts* com pesos que satisfazem o Critério de Hiperciclicidade Frequente. Para o melhor do conhecimento do autor, esse fato já foi demonstrado na literatura utilizando o Teorema 2.13 ou construindo semiconjugações entre o *shift* com pesos, restritos a compactos, e os *shifts* de Bernoulli. Ambos os métodos seriam igualmente simples, após o Teorema 2.13 ser provado. Contudo, o autor optou por fornecer uma demonstração direta desse fato, visto que os detalhes dessa demonstração sugestionam como podemos construir um exemplo de operador com a propriedade de especificação em todo o espaço.

No exemplo anterior, foi possível provar que a função dada tem a propriedade de especificação de forma construtiva. Contudo, fazer o mesmo para a propriedade de especificação para operadores adiciona uma nova dificuldade, enquanto depende da construção de uma sequência densa de compactos invariantes. Devido a isso, vamos demonstrar um fato que se fará útil na abordagem desse obstáculo para os *shifts* com peso.

Lema 2.3. *Seja X um F-espaço de sequência real, em que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é base incondicional. Se $a = (a_n)_n \in X$, então $K_a = \{(x_n)_n \in X \mid |x_n| \leqslant a_n\}$ é compacto em X.*

Demonstração. Considere a função $F : [-1,1]^{\mathbb{N}} \to X$, dada por $F(\alpha_n)_n = (\alpha_n a_n)_n$. A convergência incondicional de $\sum_n a_n e_n$ e $|\alpha_n| \leqslant 1$ garante que $(\alpha_n a_n)_n$ é uma sequência de X. Mais ainda, $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ é compacto com a topologia induzida pela métrica

$$d[(x_n)_n, (y_n)_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}}.$$

Dessa forma, dado um $\varepsilon > 0$, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\| \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n a_n e_n \| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $(\lambda_n)_n \in [-1, 1]^{\mathbb{N}}$. Assim, para $\delta < 2^{-k}$, temos que

$$d[(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n] < \delta \Rightarrow \|F(\alpha_n)_n - F(\beta_n)\| = \| \sum_{n=k}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) a_n e_n \| < \varepsilon.$$

Portanto, F é contínua e segue que $F([-1, 1]^{\mathbb{N}}) = K_a$ é compacto.

$\square$

Mais ainda, suponha que K_a é não vazio. Então, os conjuntos $mK_a \doteq \{(x_n)_n \in X \mid |x_n| \leqslant m a_n\}$ têm união densa em X. De fato, se $(x_n)_n \in X$, então as somas parciais $\sum_{n=1}^{k} x_n e_n$ convergem para $(x_n)_n$. Isso implica que o conjunto das sequências com suporte finito é denso em X e, dado uma sequência da forma, $(x_1, ..., x_k, 0, 0, ...)$, pela propriedade de Arquimedes, existem $m_i \in \mathbb{N}$ tais que $|x_i| \leqslant m_i a_i$. Logo, $(x_1, ..., x_k, 0, 0, ...) \in mK_a$, para $m = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} m_i$.

Exemplo 2.7. *Vamos mostrar que o operador de Rolewicz $T = 2B$ em ℓ^2 possui a propriedade de especificação para operadores. Para isso, considere o compacto T-invariante $K_m = \{(x_n)_n \in \ell^2 \mid |x_n| \leqslant m2^{-n}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome um $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < \varepsilon/2m$. Dados $x^i \in X$, com $x^i = (x_n^i)_n$, para $i = 1, ..., s$, e $0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 < ... < a_s \leqslant b_s$, com $a_{i+1} - b_i \geqslant N$. Podemos construir uma sequência $z = (z_n)_n$ de forma que ela contenha trechos de x^i nas posições e com os coeficientes corretos para que $T^n z$ e $T^n x^i$ tenham ao menos as N primeiras entradas iguais, para $a_i \leqslant n \leqslant b_i$.*

$$z_n = \begin{cases} x_n^i & \textit{se } a_i \leqslant n < b_i + N; \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, considere $\xi = \sum_{k=0}^{\infty} S^{k(b_s+N)} z$ a $b_s + N$-periodização de z, em que $S(x_n) = (0, 2^{-1}x_1, 2^{-1}x_2, ...)$ é uma inversa a direita de T. Faz-se necessário mostrar que ξ é 2-somável. De fato,

$$\|\xi\| = \| \sum_{k=0}^{\infty} S^{k(b_s+N)} z \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|S^{k(b_s+N)} z\| = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(b_s+N)} \|z\| < \|z\| < \infty$$

Além disso, fixado $a_i \leqslant n \leqslant b_i$, se $y = T^n \xi - T^n x^i$, então y possuem as N primeiras entradas iguais 0 e $y \in K_m - K_m = K_{2m}$. Portanto,

$$\|y\| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} (2m) 2^{-k} = (2m) 2^{-N} < \varepsilon.$$

O exemplo anterior faz-se proveitoso à medida que explicita a dependência de N por ε e m. Precisamente, $N(\varepsilon, m) \approx -\log_2(\varepsilon) + \log_2(m) + 1$. O que indica que T não possui a propriedade de especificação em todo ℓ^2. Evidentemente, se um operador T possui a propriedade de especificação em todo o espaço X e X é um espaço de Banach, então, dado um $x \in B(0,1)$, podemos aplicar a propriedade para $\varepsilon = 1$ e os trechos de órbita de x e λx, com $a_1 = b_1 = 0$, $a_2 = b_2 = N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer. Dessa forma, variando λ, tem-se que T não é limitado. Absurdo, supõe-se que T é contínuo.

Teorema 2.10. *Não existem operadores (contínuos) que satisfazem a propriedade de especificação em todo um espaço de Banach.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que um operador T possui a propriedade de especificação em todo o espaço X e X é um espaço de Banach. Então, fixado um $x \in B(0,1)$, podemos aplicar a propriedade para $\varepsilon = 1$ e os trechos de órbita de x e λx, com $a_1 = b_1 = 0$, $a_2 = b_2 = N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer. Então, exite um $y \in B(0,2)$ tal que $\|T^N y\| \geqslant |\lambda| \cdot \|T^N x\|$. Dessa forma, variando λ, tem-se que T não é limitado. Absurdo, supõe-se que T é contínuo. $\square$

Todavia, a partir do exemplo anterior, pode-se intuir que um operador num espaço de Fréchet ou F-espaço pode satisfazer a propriedade de especificação em todo o espaço, caso a métrica desse espaço seja adequada para tal. No caso dos *shifts* com pesos, é necessário que a métrica utilizada seja pouco sensível às entradas de índice grande. Antes disso, o teorema seguinte generaliza o exemplo anterior com a exigência de poucas adaptações.

Teorema 2.11. *Seja X um F-espaço de sequências reais, em que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é base incondicional. Se $(v_n)_n \in X$, para $v_n = \prod_{i=1}^{n} w_i^{-1}$, então o shift com pesos $\omega = (\omega_n)_n$, B_w, possui a propriedade de especificação para operadores. Em que B_w é dado por $B_w(x_n)_n = (w_{n+1}x_{n+1})_n$. (Ver Capítulo 4).*

Demonstração. Analogamente, considere o compacto B_w-invariante $K_m = \{(x_n)_n \in X \mid |x_n| \leqslant m v_n\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|2m \sum_{k=N+1}^{\infty} v_n\| < \varepsilon$. Dados $x^i \in X$, com $x^i = (x^i_n)_n$, para $i = 1, ..., s$, e $0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 < ... < a_s \leqslant b_s$, com $a_{i+1} - b_i \geqslant N$. Defina $z = (z_n)_n$ por

$$z_n = \begin{cases} x^i_n & \text{se } a_i \leqslant n < b_i + N; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, considere $\xi = \sum_{k=0}^{\infty} F_w^{k(b_s+N)} z$ a $(b_s + N)$-periodização de z, em que

$$F_w(x_n) = (0, w_1^{-1}x_0, w_2^{-1}x_1, ...)$$

é uma inversa a direita de B_w. Faz-se necessário mostrar que $\sum_{k=0}^{\infty} F_w^{k(b_s+N)} z$ converge incondicionalmente. De fato, z possui suporte finito, logo, basta mostrar que $\sum_{k=0}^{\infty} F_w^{k(b_s+N)} e_j$ converge incondicionalmente, para um j qualquer. Por hipótese, tem-se que $\sum_{k=0}^{\infty} v_k e_k$ converge incondicionalmente e $F_w^{k(b_s+N)} e_j = \frac{v_{k(b_s+N)}}{v_j} e_{j+k(b_s+N)}$. Desse modo, $\sum_{k=0}^{\infty} F_w^{k(b_s+N)} e_j = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k v_k e_k$, em que α_k é igual a $\frac{1}{v_j}$ ou 0. Portanto, $\sum_{k=0}^{\infty} F_w^{k(b_s+N)} e_j$ converge incondicionalmente.

Além disso, fixado $a_i \leqslant n \leqslant b_i$, para $y = B_w^n \xi - B_w^n x^i$, tem-se que $y \in K_{2m}$ e y possuem as N primeiras entradas iguais 0. Portanto,

$$\|y\| \leqslant \|2m \sum_{k=N+1}^{\infty} v_n\| < \varepsilon.$$

$\square$

Para que a propriedade de especificação para operadores possa ser considerada uma propriedade dinâmica, é necessário que a mesma seja invariante por semiconjugação. A demonstração desse fato contém a demonstração de que a propriedade de especificação para mapas definidos em compactos é preservada por semiconjugação. Dessa forma, apenas uma demonstração precisa ser fornecida e um leitor atento perceberá essa conjuntura.

Proposição 2.4. *Sejam $T : X \to X$ e $S : Y \to Y$ operadores em F-espaços separáveis. Suponha que exista $\phi : X \to Y$ contínua e com imagem densa tal que $\phi \circ T = S \circ \phi$. Se T tem a propriedade de especificação para operadores, então S também tem.*

Demonstração. Seja $\psi(x) = \phi(x) - \phi(0)$. Temos que ψ é contínua, tem imagem densa e $S \circ \phi(0) = \phi \circ T(0) = \phi(0)$, então

$$(\psi \circ T)(x) = (\phi \circ T)(x) - \phi(0) = (S \circ \phi)(x) - \phi(0) = (S \circ \psi)(x).$$

Como T tem a propriedade de especificação para operadores, existe uma sequência de conjuntos T-invariantes $(K_m)_m$ satisfazendo a Definição 2.10. Então, considere $L_m = \psi(K_m)$. Assim, como $\psi(0) = 0$ e ψ tem imagem densa, temos que

$$0 \in L_1 \text{ e } \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n} = Y.$$

Dado um $\varepsilon > 0$, como ψ é uniformemente contínua em K_m, existe $\delta > 0$, tal que, para todos $u, v \in X$,

$$d(u,v) < \delta \Rightarrow d(\psi(u), \psi(v)) < \varepsilon.$$

Além disso, pela propriedade de especificação de T, existe um $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $s \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_s \in K_m$ e inteiros $0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2 < ... < a_s \leqslant b_s$ satisfazendo $a_{i+1} - b_i \geqslant N_\delta$, para $i = 1, ..., s-1$, existe um ponto $x \in X$ tal que $T^{b_s+N_\delta}(x) = x$ e, para cada $i = 1, ..., s$ e $a_i \leqslant n \leqslant b_i$, temos que $d(T^n(x), T^n(x_i)) < \delta$.

Então, para esse ε dado, todos $s \in \mathbb{N}$, $y_1, ..., y_s \in L_m$ e inteiros $0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2 < ... < a_s \leqslant b_s$ satisfazendo $a_{i+1} - b_i \geqslant N_\delta$, para $i = 1, ..., s-1$, temos que $y_1 = \psi(x_1), ..., y_s = \psi(x_s)$ e, pela propriedade de especificação de T, existe um ponto $x \in X$ tal que $T^{b_s+N_\delta}(x) = x$ e, para cada $i = 1, ..., s$ e $a_i \leqslant n \leqslant b_i$, temos que $d(T^n(x), T^n(x_i)) < \delta$. Assim, $y = \psi(x)$ satisfaz:

$$S^{b_s+N}(y) = S^{b_s+N}(\psi(x)) = \psi(T^{b_s+N}(x)) = \psi(x) = y$$

e, para cada $i = 1, ..., s$ e inteiro n, com $a_i \leqslant n \leqslant b_i$, temos que

$$d(T^n(x), T^n(x_i)) < \delta \Rightarrow d(\psi(T^n(x)), \psi(T^n(x_i))) = d(S^n(y), S^n(y_i)) < \varepsilon.$$

□

Estabelecido o cenário geral da propriedade de especificação, naturalmente surgem as perguntas sobre como essa propriedade se relaciona com as demais variações de caos em sistemas dinâmicos. Não é difícil intuir, a partir da definição de especificação, que essa propriedade é mais forte que todas vistas até aqui. Para a hiperciclicidade frequente, essa demonstração é extensa e complicada, presente em [3]. Segue a demonstração dos demais casos.

Teorema 2.12. *Se $T : X \to X$ possui a propriedade de especificação para operadores, então:*

(i) os pontos periódicos por T são densos em X;

(ii) T é misturador;

(iii) T é caótico;

(iv) T é frequentemente hipercíclico.

Demonstração. Para (i), dado um aberto $U \subset X$ não vazio, existem $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in U$, com $B(x_0, \varepsilon) \subset U$, a bola aberta centrada em x_0 de raio ε. Assim, pela propriedade de especificação de T, existe $N \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ tal que $d(x, x_0) < \varepsilon$ e $T^N x = x$. Isto é, x é um ponto periódico pertencente a U. Portanto, o conjunto dos pontos periódicos é denso em X.

Por outro lado, para (ii), dado dois abertos não vazios $U, V \subset X$, tomamos $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $B(x_1, \varepsilon_1) \subset U$ e $B(x_2, \varepsilon_2) \subset V$. Aplicando a propriedade de especificação para $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $n > N$, existe um $x \in X$ para o qual $d(x, x_1) < \varepsilon$ e $d(T^n x, T^n x_2) < \varepsilon$. Dessa forma, temos que, para todo $n > N$, $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$. Em particular, T é topologicamente transitiva e, por (i), é caótica. Então, vale (iii).

Para (iv), ver [3], Teorema 13. □

Por outro lado, ainda há uma hipótese que se mantém mais forte que a propriedade de especificação. Sendo ela o Critério de Hiperciclicidade Frequente. Como será construído, é possível mostrar que o Critério de Hiperciclicidade Frequente permite construir uma semiconjugação entre o operador restrito a alguns compactos e os *shifts* de Bernoulli. Assim, herdando as propriedades dinâmicas desses mapas.

Teorema 2.13. *Seja $T : X \to X$ um operador num F-espaço separável X. Se existe um subconjunto $X_0 \subset X$ denso e uma sequência de mapa $S_n : X_0 \to X_0$ tal que, para todo $x \in X_0$,*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ *converge incondicionalmente;*
2. $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x$ *converge incondicionalmente;*
3. $T^n S_n x = x$ *e* $T^m S_n x = S_{n-m} x$*, para todo* $n > m$.

Então, T tem a propriedade de especificação para operadores.

Demonstração. Seja $\|\cdot\|$ uma F-norma definindo a topologia de X. Como X é separável, podemos tomar $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_0$ subconjunto enumerável de X_0 denso em X, com $x_1 = 0$. Além disso, como não é necessário nem mesmo que S_n sejam contínuas, podemos assumir que $S_n 0 = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, caso contrário bastaria redefinir essas funções alterando seus valores no 0 e as condições (ii) e (iii) ainda valeriam. Agora, por (i) e (ii), existe sequência de naturais $(N_n)_n$ com $N_{n+2} - N_{n+1} > N_{n+1} - N_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\Big\| \sum_{k > N_n} T^k x_{m_k} \Big\| < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ e } \Big\| \sum_{k > N_n} S_k x_{m_k} \Big\| < \frac{1}{2^{n+1}}, \tag{2.7}$$

em que $m_k \in \{1, 2, ..., n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\Sigma_n = \{1, 2, ..., n\}^{\mathbb{Z}}$, defina $\Phi : \cup_{n=1}^{\infty}\Sigma_n \to X$ por

$$\Phi[(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}] = \sum_{k<0} S_{-k}x_{m_k} + x_{m_0} + \sum_{k>0} T^k x_{m_k}.$$

Por (3.1), temos que $\sum_{k<0} S_{-k}x_{m_k}$ e $\sum_{k>0} T^k x_{m_k}$ convergem. Então, Φ está bem definida.

Mais ainda, Φ é contínua em Σ_n, para cada $n \in \mathbb{N}$: dado um $\varepsilon > 0$, sejam $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ e N_n dado por (3.1). Nesse caso, se $d[(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (b_k)_{k\in\mathbb{Z}}] < \dfrac{1}{2^{N_n}}$, então $a_k = b_k$, para $-N_n \leqslant k \leqslant N_n$.

$$\Rightarrow \|\Phi[(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}] - \Phi[(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}]\| = \| \sum_{k>N_n} S_k x_{a_k} - \sum_{k>N_n} S_k x_{b_k} + \sum_{k>N_n} T^k x_{a_k} - \sum_{k>N_n} T^k x_{b_k}\|.$$

$$\Rightarrow \|\Phi[(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}] - \Phi[(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}]\| \leqslant \frac{4}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

Por outro lado, definindo $K_n = \Phi(\Sigma_n)$, temos que K_m é um compacto T-invariante, com $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n} \supset \overline{\{x_n\}}_{n\in\mathbb{N}} = X$, e $\Phi|_{\Sigma_n}$ é uma semiconjugação entre $T|_{K_m}$ e o *shift* para frente em Σ_n. Portanto, pelo Teorema 2.4, T tem a propriedade de especificação para operadores. $\square$

Teorema 2.14. *Seja X um F-espaço de sequências, em que $(e_n)_n$ é base incondicional, e seja B_w o shift com pesos (w_n) em X. Suponha que $v_n = \prod_{i=1}^{n} w_i^{-1}$ é uma sequência em X. Se $\|\cdot\|_0$ é uma F-norma definindo a topologia de X, então B_w possui a propriedade de especificação para operadores. Além disso, se $\pi_i : X \to X$ é definido, para $x = (x_n)_n$, por*

$$\pi_i x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_i, 0, 0, ...),$$

então B_w possui a propriedade de especificação em todo X e não somente em compactos, com respeito a F-norma

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \min\{1, \|\pi_i x\|_0\}, \textit{ para } x \in X.$$

Antes da demonstração, vale notar que foi provado a primeira parte desse teorema no Teorema 2.11, mas, para a segunda parte, sabemos do Teorema 2.10 que o resultado não é válido para espaços de Banach. Conclui-se, então, que em um espaço de Banach essa nova F-norma não é topologicamente equivalente a norma original. De fato, se $X = \ell^2$, por exemplo, os vetores $\{e_n\}$ formam uma sequência divergente com respeito a norma usual, contudo, essa sequência tende a 0 com respeito a F-norma introduzida aqui. Em particular, se $n \leqslant m$, $\|e_m - e_n\| = 2^{-n+1}$.

Demonstração. Resta apenas mostrar a segunda afirmação. Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$, tome um $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < \varepsilon$. Para todos $x^i \in X$, com $x^i = (x^i_n)_n$, $i = 1, ..., s$, e $0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 < ... < a_s \leqslant b_s$, com $a_{i+1} - b_i \geqslant N$, considere $z = (z_n)_n$, como anteriormente, dado por

$$z_n = \begin{cases} x^i_n & \text{se } a_i \leqslant n < b_i + N; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, $\xi = \sum_{k=0}^{\infty} F_w^{k(b_s+N)} z$ é $(b_s + N)$-periódica e, para cada $a_i \leqslant n \leqslant b_i$, $B^n_w \xi - B^n_w x^i$ tem ao menos as N primeiras entradas iguais. Portanto, para $a_i \leqslant n \leqslant b_i$,

$$\|B^n_w \xi - B^n_w x^i\| = \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, \|\pi_n(B^n_w \xi - B^n_w x^i)\|_0\} < \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-N} < \varepsilon.$$

$\square$

Nesse caso, é evidente a necessidade de se fazer distinção entre a propriedade de especificação e a propriedade de especificação para operadores. O teorema anterior mostra que B_w possui a propriedade de especificação em X, munido da métrica indicada. Isto é, não depende de uma sequência de compactos, como na definição 2.10. É essencial, ainda, reconhecer que essa afirmação não segue do Teorema 2.11, dado que o $N(\varepsilon, m)$ obtido tende a infinito, quando $m \to \infty$. No geral, se um mapa possui a propriedade de especificação para operadores com respeito a uma sequência de compactos K_m e satisfaz a definição de especificação para $N(\varepsilon, m)$ em K_m, para que esse operador possua a propriedade de especificação em todo seu domínio, é suficiente que $N(\varepsilon, m)$ seja limitado com respeito a m, para todo ε.

3 Entropia Topológica

A palavra entropia é encontrada em diversas áreas do conhecimento, referindo-se a diferentes conceitos com significados convergindo para "conteúdo de transformação". Proveniente da Termodinâmica, esse conceito seria primeiramente introduzido na Matemática por Claude Elwood Shannon, conhecido como pai da Teoria da Informação. Pouco tempo depois, Andrey Kolmogorov e Yakov Sinai definiram entropia para Teoria Ergódica, o que viria a inspirar R. L. Adler, A. G. Konheim e M. H. McAndrew a criarem o conceito de entropia topológica de um sistema dinâmico, em [1].

3.1 Entropia em Espaços Topológicos

Para definir a entropia topológica de um mapa, inicialmente define-se a entropia de uma cobertura. Posteriormente, a entropia de um mapa estará relacionada com a maneira que esse mapa altera a entropia da cobertura, a partir da habilidade dessa função refinar os abertos da cobertura.

Definição 3.1. *Sejam X um espaço topológico compacto e $\mathscr{A}$ uma cobertura de X por abertos. Denota-se por $N(\mathscr{A})$ o menor número de abertos que uma subcobertura de $\mathscr{A}$ possui. A compacidade de X garante que $N(\mathscr{A})$ é sempre finito. Dessa forma, define-se a entropia de $\mathscr{A}$ por $H(\mathscr{A}) = \log N(\mathscr{A})$.*

Nesse sentido, a entropia de um cobertura deve ser maior, quanto mais refinada seja essa cobertura; isto é,

Definição 3.2. *Diz-se que uma cobertura $\mathscr{A}$ é um refinamento da cobertura $\mathscr{B}$, e denota-se $\mathscr{B} \prec \mathscr{A}$, quando todo elemento de $\mathscr{A}$ está contido em um elemento de $\mathscr{B}$.*

Proposição 3.1. *Se $\mathscr{B} \prec \mathscr{A}$, então $H(\mathscr{B}) \leqslant H(\mathscr{A})$.*

Demonstração. Seja $\{A_1, ..., A_{N(\mathscr{A})}\}$ subcobertura de $\mathscr{A}$. Então, para cada A_i, existe um $B_i \in \mathscr{B}$ tal que $A_i \subset B_i$. Logo, $\{B_1, ..., B_{N(\mathscr{A})}\}$ é subcobertura de $\mathscr{B}$. Portanto, $N(\mathscr{B}) \leqslant N(\mathscr{A})$ e, como log real é uma função não decrescente, $H(\mathscr{B}) \leqslant H(\mathscr{A})$. $\square$

Além disso, dado duas coberturas, logicamente, pode-se criar uma terceira cobertura que refina as anteriores a partir da interseção dos abertos de cada cobertura.

Definição 3.3. *Dadas duas coberturas $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ de X. Define-se a operação binária $\wedge$ por*

$$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}.$$

Observação 3.1. *É imediato que* $\mathscr{A} \prec \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ *e* $\mathscr{B} \prec \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$*. Além disso, se* $\mathscr{A} \prec \mathscr{A}'$ *e* $\mathscr{B} \prec \mathscr{B}'$*, então* $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \prec \mathscr{A}' \wedge \mathscr{B}'$*.*

Proposição 3.2. $H(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \leqslant H(\mathscr{A}) + H(\mathscr{B})$.

Demonstração. Sejam $\{A_1, ..., A_{N(\mathscr{A})}\}$ e $\{B_1, ..., B_{N(\mathscr{B})}\}$ subcoberturas de $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, respectivamente. Então,

$$\{A_i \cap B_j | i = 1, ..., N(\mathscr{A}), j = 1, ..., N(\mathscr{B})\}$$

é subcobertura de $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ com $N(\mathscr{A})N(\mathscr{B})$ elementos. Portanto, $N(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \leqslant N(\mathscr{A})N(\mathscr{B})$e segue que $H(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \leqslant H(\mathscr{A}) + H(\mathscr{B})$. □

Pode-se reparar também que, conhecida a identidade $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, segue da definição que, se $f : X \to X$ é contínua,

$$f^{-1}(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) = f^{-1}(\mathscr{A}) \wedge f^{-1}(\mathscr{B}).$$

Proposição 3.3. *Seja* $f : X \to X$ *uma função contínua. Então,* $H(\mathscr{A}) \geqslant H(f^{-1}(\mathscr{A}))$*.*

Demonstração. Seja $\{A_1, ..., A_{N(\mathscr{A})}\}$ subcobertura de $\mathscr{A}$. Então, $\{f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_{N(\mathscr{A})})\}$ é subcobertura de $f^{-1}(\mathscr{A})$. Portanto, $N(\mathscr{A}) \geqslant N(f^{-1}(\mathscr{A}))$ e $H(\mathscr{A}) \geqslant H(f^{-1}(\mathscr{A}))$.

□

Finalmente, com as ferramentas desenvolvidas, pode-se definir a entropia de uma função com respeito a uma cobertura.

Definição 3.4. *Seja* $f : X \to X$ *um mapa contínuo. A entropia de* f *com respeito a cobertura* $\mathscr{A}$ *é*

$$h(f, \mathscr{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigwedge_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A})\right)$$

Teorema 3.1. *O limite anterior existe.*

Demonstração. Escrevendo $H_n = H(\mathscr{A} \wedge ... \wedge f^{-n+1}(\mathscr{A}))$. Pelas Proposições 3.2 e 3.3, respectivamente,

$$\begin{aligned}
H_{m+n} &= H(\mathscr{A} \wedge ... \wedge f^{-m-n+1}(\mathscr{A})) \\
&= H(\mathscr{A} \wedge ... \wedge f^{-m+1}(\mathscr{A}) \wedge f^{-m}(\mathscr{A} \wedge ... \wedge f^{-n+1}(\mathscr{A}))) \\
&\leqslant H(\mathscr{A} \wedge ... \wedge f^{-m+1}(\mathscr{A})) + H(f^{-m}(\mathscr{A} \wedge ... \wedge f^{-n+1}(\mathscr{A}))) \\
&\leqslant H(\mathscr{A} \wedge ... \wedge f^{-m+1}(\mathscr{A})) + H(\mathscr{A} \wedge ... \wedge f^{-n+1}(\mathscr{A})) \\
&= H_m + H_n.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\frac{1}{n}H_n \leqslant H_1$ e, pela Proposição 3.1 e Observação 3.1, H_n é uma sequência crescente. Assim, fixando $q \in \mathbb{N}$, cada $n \in \mathbb{N}$ pode ser escrito como $n = pq + i$, com $0 \leqslant i < q$.

$$\frac{H_n}{n} \leqslant \frac{H_i}{kp} + \frac{H_p}{p}$$
$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{H_n}{n} \leqslant \frac{H_p}{p}$$
$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{H_n}{n} \leqslant \inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{H_p}{p}$$

Por outro lado, sempre vale que $\inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{H_p}{p} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{H_n}{n}$. Portanto, $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{H_n}{n}$ existe e é igual a $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{H_n}{n}$. □

Definição 3.5. *Define-se a entropia de $f : X \to X$ como número real estendido dado pelo supremo de $h(f, \mathscr{A})$ sobre todas as coberturas $\mathscr{A}$ de X e denota-se $h(f) = \sup_{\mathscr{A}} h(f, \mathscr{A})$.*

No entanto, calcular a entropia de um mapa com respeito a todas as coberturas não é funcional. Nessas circunstâncias, o teorema seguinte dispõe uma forma mais simples de efetuar esse cálculo.

Proposição 3.4. *Seja $\{\mathscr{A}_n | n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de coberturas de X tal que $\mathscr{A}_n \prec \mathscr{A}_{n+1}$ e, para toda cobertura $\mathscr{B}$, existe um $n \in \mathbb{N}$ para o qual $\mathscr{B} \prec \mathscr{A}_n$. Então, $h(f) = \lim_{n\to\infty} h(f, \mathscr{A}_n)$.*

Demonstração. Dado uma cobertura $\mathscr{B}$ de X, existe n tal que $\mathscr{B} \prec \mathscr{A}_n$. Pela Proposição 3.1,

$$h(f, \mathscr{B}) \leqslant h(f, \mathscr{A}_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} h(f, \mathscr{A}_n).$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} h(f, \mathscr{A}_n)$ é cota superior de $\{h(f, \mathscr{A})\}_{\mathscr{A}}$.

Além disso, se $h(f, \mathscr{B})$ é cota superior de $\{h(f, \mathscr{A})\}_{\mathscr{A}}$, então $h(f, \mathscr{B}) \geqslant h(f, \mathscr{A}_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim_{n\to\infty} h(f, \mathscr{A}_n) \leqslant h(f, \mathscr{B})$ é a menor cota superior. Portanto, $h(f) = \sup_{\mathscr{A}} h(f, \mathscr{A}) = \lim_{n\to\infty} h(f, \mathscr{A}_n)$. □

Exemplo 3.1. *Dado um $N \in \mathbb{N}$, considere o espaço topológico das sequências $X^{\mathbb{N}}$ com entrada em $X = \{0, ..., N-1\}$, em que um subconjunto é dito aberto se é da forma $A = \Pi_{i=1}^{\infty} A_i$, com $A_i = X$, para todo i, exceto em uma quantidade finita de índices. Isto é, a topologia de $X^{\mathbb{N}}$ é dada pela topologia produto e a topologia discreta em X.*

Considere o shift de Bernoulli, $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$, dado por $\sigma[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Então, σ tem entropia igual a $\log(N)$.

Demonstração. Considere a cobertura $\mathscr{A}_n$ formada pelos abertos da forma $\Pi_{i=1}^{\infty} A_i$ tais que $A_i = \{a_i\}$ é um conjunto unitário, para $i \leqslant n$ e $A_i = X$, para $i > n$. É fácil ver que $N(\mathscr{A}_n) = N^n$. Logo, $H(\mathscr{A}_n) = n \log N$. Por outro lado, se

$$A = \{a_1\} \times \cdots \times \{a_n\} \times X \times \cdots,$$

então

$$\sigma^{-1}(A) = X \times \{a_1\} \times \cdots \times \{a_n\} \times X \times \cdots.$$

Sendo assim, tem-se que $\mathscr{A}_n \wedge \sigma^{-1}(\mathscr{A}_n) = \mathscr{A}_{n+1}$, a menos do conjunto vazio, e, pelo mesmo argumento, $\mathscr{A}_n \wedge \sigma^{-1}(\mathscr{A}_n) \wedge \ldots \wedge \sigma^{-m}(\mathscr{A}_n) = \mathscr{A}_{n+m}$.

Dessa forma, pode-se calcular

$$\begin{aligned} h(f, \mathscr{A}_n) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H\left(\bigwedge_{k=0}^{m-1} f^{-k}(\mathscr{A}_n)\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H(\mathscr{A}_{n+m}) \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{n+m}{m} \log N \\ &= \log N. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 3.4, $h(\sigma) = \lim_{n\to\infty} h(\sigma, \mathscr{A}_n) = \log N$.

□

3.2 Entropia em Espaços Métricos

A seguir, introduz-se a definição de entropia dada por Rufus Bowen para espaços métricos, presente em [5] e [6]. Frequentemente, essa definição é mais simples de ser computada que a anterior e será o método principal de cálculo da entropia topológica neste capítulo. Posteriormente, será examinado o Teorema 3.2 de [7], que declara que todo operador que satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente possui entropia topológica infinita. Será apontado um equívoco em sua demonstração, incluindo um contraexemplo para o mesmo e as ideias iniciais para um demonstração desse teorema, ambos construídos pelo autor. Antes disso, primeiramente, essa seção dedica-se por apresentar a nova definição de entropia intuitivamente a partir da definição já estabelecida.

Definição 3.6. *Seja X um espaço métrico compacto com métrica d. Define-se o diâmetro de uma cobertura $\mathscr{A}$ por $d(\mathscr{A}) = \sup_{A\in\mathscr{A}} d(A)$, em que $d(A)$ é o diâmetro de A. Se existe $r > 0$ tal que, para todo $B \subset X$ aberto com $d(B) < r$, existe um $A \in \mathscr{A}$ para o qual $B \subset A$. Diz-se que r é o número de Lebesgue da cobertura $\mathscr{A}$.*

Lema 3.1 (Lema de Recobrimento de Lebesgue)**.** *Toda cobertura aberta de um espaço métrico compacto admite número de Lebesgue.*

Desse modo, pode-se reformular a Proposição 3.4 como: se $\{\mathscr{A}_n\}$ é uma sequência de coberturas de X tal que $\mathscr{A}_n \prec \mathscr{A}_{n+1}$ e $d(\mathscr{A}_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, então $h(f) = \lim_{n\to\infty} h(f, \mathscr{A}_n)$. Mais ainda, sempre pode-se cobrir X por bolas abertas de raio tendendo a 0 para obter uma sequência de coberturas que satisfaz essas propriedades. Com base nisso, reformula-se a definição anterior de forma a carregar as noções topológicas do espaço a partir da métrica dada.

Definição 3.7. *Seja X um espaço métrico e $K \subset X$ um compacto. Dados $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, diz-se que um conjunto $S \subset K$ é (n, ε)-separado se, para todos $x, y \in S$ com $x \neq y$,*

$$\max_{0 \leqslant i < n} \{f^i(x), f^i(y)\} > \varepsilon.$$

Denota-se a maior cardinalidade de um conjunto (n, ε)-separado por $s_{n,\varepsilon}(f, K)$.

Observação 3.2. *Se X é um espaço métrico, o mínimo de bolas abertas de diâmetro ε necessárias para cobrir X é igual ao máximo de pontos em X que distam, dois a dois, ao menos ε. Isto é, $s_{1,\varepsilon}(f, K) = N(\mathscr{A})$, em que $\mathscr{A} = \{B(x, \frac{\varepsilon}{2}) | x \in K\}$. Da mesma forma, a menor quantidade de abertos em $\mathscr{A} \wedge f^{-1}(\mathscr{A}) \wedge ... \wedge f^{-m}(\mathscr{A})$ que cobrem X é igual ao maior número de pontos de X cujos m primeiros pontos de suas órbitas distam dois a dois ao menos ε.*

Definição 3.8. *A entropia topológica de f com respeito a K é*

$$h(f, K) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_{n,\varepsilon}(f, K).$$

E define-se a entropia de f como $h(f) = \sup\{h(f, K) \mid K \subset X$ é compacto$\}$.

Exemplo 3.2. *Considere o shift para frente no espaço das sequências bilaterais com N símbolos, $\Sigma_N = \{0, 1, ..., N-1\}^{\mathbb{Z}}$. Pode-se considerar a topologia de Σ_N como a topologia dada pela métrica*

$$d[(x_i)_i, (y_i)_i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}} \delta(x_i, y_i),$$

onde $\delta(x_i, y_i) = 0$, se $x_i = y_i$ e $\delta(x_i, y_i) = 1$, caso contrário.

Nesse caso, para que duas sequências estejam a uma distância maior que 2^{-i} é necessário e suficiente que elas tenham uma entrada diferente entre as entradas i e $-i$. Assim, a maior quantidade de pontos em Σ_N que distam ao menos 2^{-i} é $s_{1,\frac{1}{2^i}}(\sigma, \Sigma_N) = N^{2i+1}$. Analogamente, para que a distância entre os n primeiros elementos da órbita de dois pontos seja maior que 2^{-i} é necessário e suficiente que alguma das entradas $-i-n, ..., i$ sejam diferentes. Logo, $s_{n,\frac{1}{2^i}}(\sigma, X) = N^{2i+n+1}$. Portanto, tem-se que

$$h(\sigma_N) = \lim_{i\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N^{2i+n+1}.$$

$$h(\sigma_N) = \lim_{i\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{2i+n+1}{n}\log N.$$

$$h(\sigma_N) = \log N.$$

Teorema 3.2. *A entropia topológica é um invariante por conjugação.*

Demonstração. Essa demosntração pode ser encontrada em [12], Corolário 8.2.3, para entropia de espaços métricos e em [1] Teorema 1, para entropia por coberturas. □

Exemplo 3.3. *Considere o espaço das sequências 2-somáveis ℓ^2 e o operador de Rolewicz, $B_2 : \ell^2 \to \ell^2$, $B_2(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (2x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$.*

Pode-se definir $\Phi_N : \{0, ..., N-1\}^{\mathbb{N}} \to \ell^2$, dada por

$$\Phi_N[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = (x_n 2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dessa forma, Φ_N é injetora e $\Phi_N \circ \sigma_N = (x_{n+1}2^{-n+1})_{n\in\mathbb{N}} = B_2 \circ \Phi_N$.

Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k}^{\infty} 2^{-2i} < \frac{\varepsilon^2}{(N-1)^2}.$$

Tome $\delta = 2^{-k}$. Se $|(x_n)_n - (y_n)_n| < \delta$, então $x_n = y_n$, para $n = 1, ..., k$. Portanto,

$$|(x_n)_n - (y_n)_n| < \delta \Rightarrow \|\Phi_N[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] - \Phi_N[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]\|^2 \leqslant \sum_{i=k}^{\infty}(N-1)^2 2^{-2i} < \varepsilon^2.$$

Sendo assim, Φ_N é contínua, possui domínio compacto e contradomínio Hausdorff, logo, Φ_N é homeomorfismo sobre sua própria imagem. Então, se K_N é a imagem de Φ_N,

$$h(B_2, K_N) = h(\sigma_N) = \log(N).$$

$$\therefore h(B_2) = \infty.$$

Novamente, o exemplo anterior para o operador de Rolewicz ou *shift* com pesos constantes pode ser facilmente generalizado para um *shift* com pesos quaisquer em um F-espaço, desde que $\{e_n\}$ aja como base incondicional nesse espaço.

Teorema 3.3. *Seja X um F-espaço de sequência no qual $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é base incondicional e seja $B_\omega : X \to X$ o shift com pesos $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Assuma que a sequência $\left(\prod_{i=1}^{n}\omega_n^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a X. Então, $h(B_\omega) = \infty$.*

Demonstração. Pode-se definir $\Phi_N : \{0, ..., N-1\}^{\mathbb{N}} \to X$, dada por

$$\Phi_N[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = \left(x_n \prod_{i=1}^{n}\omega_n^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dessa forma, Φ_N é injetora e $\Phi_N \circ \sigma_N = (x_{n+1}\prod_{i=1}^{n}\omega_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}} = B_\omega \circ \Phi_N$.

Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| \sum_{n=k}^{\infty}(N-1)\left(\prod_{i=1}^{n}\omega_n\right)e_n\| < \varepsilon.$$

Tome $\delta = 2^{-k}$. Se $|(x_n)_n - (y_n)_n| < \delta$, então $x_n = y_n$, para $n = 1, ..., k$. Portanto,

$$|(x_n)_n - (y_n)_n| < \delta \Rightarrow \|\Phi_N[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] - \Phi_N[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]\| \leqslant \| \sum_{n=k}^{\infty}(N-1)\left(\prod_{i=1}^{n}\omega_n\right)e_n\| < \varepsilon.$$

Sendo assim, Φ_N é contínua, possui domínio compacto e contradomínio Hausdorff, logo, Φ_N é homeomorfismo sobre sua própria imagem.

$$\Rightarrow h(B_\omega, K_N) = h(\sigma_N) = \log(N).$$

$$\therefore h(B_\omega) = \infty.$$

□

Teorema 3.4. *$h(f^k) = kh(f)$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Por um lado, vale que $s_{kn,\varepsilon}(f, K) \geqslant s_{n,\varepsilon}(f^k, K)$. Logo,

$$\begin{aligned} h(f, K) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{kn}\log s_{kn,\varepsilon}(f, K) \\ &\geqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{kn}\log s_{n,\varepsilon}(f^k, K) \\ &= \frac{1}{k}h(f^k, K). \end{aligned}$$

Assim, $h(f^k) \leqslant kh(f)$.

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon, \text{ para } i = 0, 1, ..., k-1.$$

Em particular, se $d(f^i(x), f^i(y)) \geqslant \varepsilon$, para algum i entre 0 e $k-1$, então $d(x, y) \geqslant \delta$. Logo, $s_{kn,\varepsilon}(f, K) \leqslant s_{n,\delta}(f^k, K)$. Portanto, $h(f^k) \geqslant kh(f)$. □

Vale também que, se f é um homeomorfismo, então $h(f^k) = |k|h(f)$, para $k \in \mathbb{Z}$. Mas esse resultado não será necessário nesse texto. Um leitor interessado pode encontrar essa demonstração em [12], Proposição 8.2.9.

Enfim, com as ferramentas expressas até aqui, é possível escrutinar o Teorema 3.2 do artigo [7]. Para isso, apresenta-se o Teorema e sua demonstração assim como no artigo.

Teorema 3.5 (Preliminar)**.** *Seja $T : X \to X$ um operador num F-espaço separável X. Se existe um subconjunto $X_0 \subset X$ denso e uma sequência de mapa $S_n : X_0 \to X$ tal que, para todo $x \in X_0$,*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ *converge incondicionalmente;*
2. $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x$ *converge incondicionalmente;*
3. $T^n S_n x = x$ *e* $T^m S_n x = S_{n-m} x$*, para todo* $n > m$.

Então, T tem entropia infinita.

Seguindo [7]. Como X é separável, pode-se tomar $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_0$ subconjunto enumerável de X_0 denso em X, com $x_1 = 0$. Assume-se que $S_n 0 = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por (i) e (ii), existe sequência de naturais $(N_n)_n$ com $N_{n+2} - N_{n+1} > N_{n+1} - N_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|\sum_{k>N_n} T^k x_{m_k}\| < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ e } \|\sum_{k>N_n} S_k x_{m_k}\| < \frac{1}{2^{n+1}}, \tag{3.1}$$

em que $m_k \in \{1, 2, ..., n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\Sigma_n = \{1, 2, ..., n\}^{\mathbb{Z}}$, defina $\Phi : \cup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n \to X$ por

$$\Phi[(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}] = \sum_{k<0} S_{-k} x_{m_k} + x_{m_0} + \sum_{k>0} T^k x_{m_k}.$$

Por (3.1), tem-se que Φ está bem definida e é contínua em Σ_n, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, $K_n = \Phi(\Sigma_n)$ é um compacto T-invariante e $\Phi|_{\Sigma_n}$ é uma conjugação entre $T|_{K_n}$ e o *shift* para frente em Σ_n. Assim, segue que $h(T) \geqslant \log(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $h(T) = \infty$. □

O erro na demonstração anterior, como indicado, está em considerar Φ uma conjugação, sendo esse mapa é apenas uma semiconjugação. Os exemplos a seguir evidenciam diferentes formas, entre muitas, que Φ pode falhar em ser uma conjugação. No caso do segundo exemplo, vê-se que isso acontece até mesmo para mapas injetores.

Exemplo 3.4. *Considere $B : \ell^2 \to \ell^2$ o shift para trás com pesos iguais a 2. B satisfaz o critério de hiperciclicidade frequente para X_0 conjunto das sequências racionais com suporte finito e $S_n = F^n$, em que $F(x_n) = (0, 2^{-1}x_1, 2^{-1}x_2, ...)$.*

De fato, a órbita de todo ponto de X_0 por B é eventualmente constante igual 0 e $\|Fx\| = \dfrac{1}{2}\|x\|$. Além disso, F é uma inversa a direita de B. Assim, todas as condições do Critério são satisfeitas.

Contudo, se $X_0 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é uma enumeração de X_0 com $x_1 = (1, 0, 0, ...)$ e $x_2 = (2, 0, 0, ...)$, então $Bx_1 = Bx_2 = 0$ e

$$\begin{aligned}\Phi[(..., 0, \underline{0}, 1, 0, 0, ...)] &= \sum_{k=1}^{\infty} F^k x_0 + x_0 + \sum_{k=2}^{\infty} B^k x_0 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F^k x_0 + x_0 + \sum_{k=2}^{\infty} B^k x_0 \\ &= \Phi[(..., 0, \underline{0}, 2, 0, 0, ...)].\end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se que Φ não é injetora e, assim, não é conjugação.

Exemplo 3.5. *Seja $\ell^2_{\mathbb{Z}}$ o espaço das sequências bilaterais reais 2-somáveis e considere $B_\omega : \ell^2_{\mathbb{Z}} \to \ell^2_{\mathbb{Z}}$ o shift com peso $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dado por $w_n = 2$, se $n \geqslant 0$, e $w_n = \dfrac{1}{2}$, se $n < 0$.*

B_ω satisfaz o critério de hiperciclicidade frequente para X_0 conjunto das sequências racionais com suporte finito e $S_n = B^n_\nu$, em que $\nu_n = \omega_n^{-1}$.

Contudo, se $X_0 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é uma enumeração de X_0 com $x_0 = 0$, $x_1 = (..., 0, \underline{2}, 0, 0, ...)$ e $x_2 = (..., 0, \underline{0}, 1, 0, ...)$, então $B_\omega x_2 = x_1$ e

$$\Phi[(..., 0, \underline{1}, 0, 0, ...)] = x_1 = \Phi[(..., 0, \underline{0}, 2, 0, ...)].$$

Dessa forma, tem-se que Φ também não é injetora.

Consequentemente, o argumento final da demonstração não é válido. Visto que, uma semiconjugação preserva entropia da seguinte forma: se g é um fator de f, então $h(g) \leqslant h(f)$ (Ver Proposição 8.2.9, [12]). Dessa forma, tem-se que $h(T, K_n) \leqslant \log(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e nada pode ser concluído. Mais ainda, uma possível causa para esse engano encontra-se no fato dessa demonstração ser adaptada da demonstração do Teorema 2.13, presente em [2]. No texto em questão, o mapa Φ é chamado de conjugação, possivelmente se referindo ao que define-se aqui como semiconjugação. Vale notar que, para a demonstração do Teorema 2.13, isso é tudo que é necessário.

Não obstante, pode-se mostrar que mapas com a propriedade de especificação possuem entropia positiva. O autor dessa dissertação adaptou o teorema seguinte a partir do Teorema 4.12 de [6], onde é mostrado que um fato similar para fluxos satisfazendo o Axioma A de Smales.

Teorema 3.6. *Seja $T : X \to X$ um operador com a propriedade de especificação que comporta ao menos dois pontos fixos. Então, T tem entropia positiva ou é identicamente nulo. Em particular, se $x_1, ..., x_m \in X$ são pontos fixos distintos de T, então a entropia de T é maior que $c\log(m)$, para algum $c > 0$.*

Demonstração. Seja $\delta = \min_{i \neq j}\{\frac{d(x_i, x_j)}{3}\}$. Pela propriedade de especificação, existe um $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que, para cada n-upla $a = (a_0, ..., a_{n-1})$, com $a_i \in \{x_1, ..., x_m\}$, existe um $x_a \in X$ tal que

$$d(T^j x_a, a_i) < \delta, \text{ para } n = j(N+1) \text{ e } i = 0, ..., n-1.$$

Dessa forma, o conjunto $\{x_a \mid a \in \{x_1, ..., x_m\}^n\}$ tem m^n elementos e é $((n-1)(N+1), \varepsilon)$-separado, para todo $0 < \varepsilon < \delta$ e $n \in \mathbb{N}$.

$$\therefore h(T) \geqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{n\log(m)}{(n-1)(N+1)} = \frac{\log(m)}{N+1}$$

□

É importante reparar que usualmente o cálculo da entropia depende apenas de uma escolha de ε pequeno o suficiente, no lugar do limite de ε tendendo a zero. Aqui, como busca-se apenas uma cota inferior para a entropia e a cardinalidade de um conjunto (n, ε)-separado não decresce com $\varepsilon \to 0$, tomar apenas o limite superior sobre n foi suficiente. Além disso, pode-se reparar que a constante c obtida no teorema anterior é dada pela propriedade de especificação de T. Sendo assim, depende apenas da distância entre os pontos fixos escolhidos. O que significa que, encontrando uma quantidade ilimitada de pontos fixos tais que o ínfimo das distâncias entre dois deles é positivo, pode-se provar que esse operador terá entropia infinita.

Conjectura 3.1. *Seja $T : X \to X$ um operador num F-espaço separável X. Se existe um subconjunto $X_0 \subset X$ denso e uma sequência de mapa $S_n : X_0 \to X_0$ tal que, para todo $x \in X_0$,*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ *converge incondicionalmente;*
2. $\sum_{n=0}^{\infty} S^n x$ *converge incondicionalmente;*
3. $T^n S_n x = x$ *e* $T^m S_n x = S_{n-m} x$, *para todo* $n > m$.

Então, T tem entropia infinita, a menos que T seja identicamente nulo e $X = \{0\}$.

(Assumindo que T possui a propriedade de especificação em todo X.) Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um subconjunto denso de X_0 como na demonstração do Teorema 2.13. Suponha que T não é identicamente nula. Então,

$$y_{x,M} = \sum_{k<0} S_{-kM}x + x + \sum_{k>0} T^{kM}x$$

converge, para cada $x \in X_0$ e $M \in N$. Mais ainda, $y_{x,M} \to x$, quando $M \to \infty$. Assim, $\{y_{x,M} \mid x \in X_0, M \in \mathbb{N}\}$ é denso em X_0 e, por consequência, denso em X. Em particular, se $X \neq \{0\}$, existe pelo menos um $y_{x,M} \neq 0$.

Dessa forma, $y_{x,M}$ é um ponto fixo de T^M. Além disso, $\{\lambda y_{x,M} \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto de pontos fixos de T^M dois a dois distando ao menos $d(0, y_{x,M})$. Portanto, pelo Teorema 3.6, $h(T^M) = \infty$ e, pelo Teorema 3.4, segue que $h(T) = \infty$.

Não é válido que operadores que satisfazem o Critério de Hiperciclicidade Frequente possuem a propriedade de especificação em todo o espaço, como visto anteriormente. No entanto, o Teorema 2.14 revela que uma mudança na métrica do espaço pode ser suficiente para obter a propriedade desejada. Equivalentemente, todos os *shifts* de Bernoulli possuem os mesmos quantificadores na propriedade de especificação. Dessa forma, atentando-se a demonstração da Proposição 2.4, pode-se observar que a única maneira pela qual o quantificador N, no Teorema 2.13, depende do compacto K_n é devido a necessidade da continuidade uniforme da conjugação em 2.4. Sendo assim, se Φ é uniformemente contínua com respeito a uma métrica d', então T satisfaz a propriedade de especificação em todo (X, d'). Mais ainda, se $d' \leqslant Md$, para algum $M > 0$, então $s'_{n,\varepsilon}(T, K) \leqslant s_{n,\frac{\varepsilon}{M}}(T, K)$, em que $s'_{n,\varepsilon}(T, K)$ e $s_{n,\frac{\varepsilon}{M}}(T, K)$ são as máximas cardinalidades de um conjunto (n, ε)-separável com respeito a d' e $(n, \dfrac{\varepsilon}{M})$-separável com respeito a d, respectivamente. Assim, somado ao Teorema 3.6, tem-se que $\infty \leqslant h_{d'}(T) \leqslant h_d(T)$.

Em suma, para completar a demonstração proposta pelo autor, resta encontrar uma métrica em que a função Φ é uniformemente contínua. Contudo, essa tarefa não é trivial e desencadeia uma noção matemática igualmente complexa. Por um lado, dado uma função $f : X \to Y$, em que Y é um espaço topológico, é simples definir em X uma topologia para que f seja contínua. Basta tomar a topologia gerada pela pré-imagem dos abertos de Y. Por outro lado, o mesmo não é tão simples se tratando de continuidade uniforme, visto que esse conceito nem mesmo pode ser traduzido em termos topológicos de maneira direta. Para isso, foi desenvolvida uma noção chamada de Espaço Uniforme, que generaliza a topologia e permite tratar a continuidade uniforme em termos dos subconjuntos do espaço. Esse aparenta ser um caminho promissor para completar essa demonstração.

4 *Shifts* com Pesos

Como visto anteriormente, um espaço de sequências unilaterais reais (ou complexas) X é um subconjunto de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, em que o mapa de inclusão de X em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é contínuo, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Isto é, X recebe uma topologia mais fina que a topologia de subespaço. Sendo assim, convergência em X implica convergência coordenada por coordenada e tem-se que as funções coordenadas $\pi : X \to \mathbb{K}$, $\pi_n[(x_m)_m] = x_n$, são contínuas. Analogamente, um espaço de sequências bilaterais é um subconjunto de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ com as mesmas propriedades listadas acima.

Uma família de operadores de importância vasta para os assuntos explorados nesse texto foram os *shifts* com pesos, que têm como protótipo o *shift* para trás $B : X \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,

$$B(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...).$$

Mais ainda, se x_n é uma sequência convergindo para x em X, então Bx_n converge coordenada por coordenada para Bx. Logo, pelo teorema do gráfico fechado, B é contínua. Dessa forma, se X é um F-espaço de sequências, B define um operador em X desde que a imagem de B esteja contida em X.

Considere as sequências da forma $e_n = (\delta_{i,n})_i$, em que $\delta_{i,n} = 1$, se $i = n$, e $\delta_{i,n} = 0$, caso contrário. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base (de Schauder) para X se cada e_n pertence a X e, para todo $x \in X$, existe uma única sequência de escalares $(x_n)_n$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Em especial, $(e_n)_n$ é base de ℓ^p, para $1 \leqslant p < \infty$, e é base de c_0.

Teorema 4.1. *Sejam X, Y F-espaços e $(T_n)_n$ uma sequência de operadores de X para Y. Se $\{T_n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ é limitado para cada $x \in X$, então a sequência $(T_n)_n$ é equicontínua.*

Demonstração. Ver [17], teorema 2.5 da página 44. □

Teorema 4.2. *Seja X um F-espaço de sequências no qual $(e_n)_n$ é base. Suponha que o shift para trás B é um operador em X. Então, são equivalentes:*

1. *B é hipercíclico;*
2. *B é fracamente misturador;*
3. *existe uma sequência crescente de inteiros positivos $(n_k)_k$ tal que $e_{n_k} \to 0$ em X, quando $k \to \infty$.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (iii)$. Vamos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$, existe um $n > N$ tal que $\|e_n\| < \varepsilon$.

Para todo $x \in X$, como $(e_n)_n$ é uma base, tem-se que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, para uma sequência de escalares $(x_n)_n$. Então, $x_n e_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Aplicando o teorema 4.1 para $T_n(x) = x_n e_n$, segue que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$,

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|x_n e_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Além disso, como convergência em X implica convergência coordenada por coordenada, existe $\eta > 0$ tal que

$$\|x\| < \eta \Rightarrow |x_1| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{4.2}$$

Por hipótese, B é hipercíclico e, portanto, topologicamente transitivo. Logo, existe um $n > N$ e $x \in X$ tais que $\|x\| < \delta$ e $\|B^{n-1}x - e_1\| < \eta$. Assim, de 4.1 e 4.2, tem-se que $\|x_n e_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|x_n - 1| \leqslant \frac{1}{2}$. Em particular, a segunda desigualdade implica que $|1 - x_n^{-1}| \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|e_n\| &= \|(x_n^{-1} - 1)x_n e_n + x_n e_n\| \\
&\leqslant \|(x_n^{-1} - 1)x_n e_n\| + \|x_n e_n\| \\
&\leqslant \|x_n e_n\| + \|x_n e_n\| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Aplicando o Critério de Hiperciclicidade para $X_0 = Y_0$ o espaço das sequências com suporte finito e $S_n = F^n$, em que

$$F(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...).$$

Então, $B^n x \to 0$, quando $n \to \infty$, e $BFx = x$, para todo $x \in X$. Para segunda condição do critério, sabemos que existe uma sequência crescente $(n_k)_k$ de inteiros positivos tal que $e_{n_k} \to 0$. E, pela continuidade de B,

$$e_{n_k - j} = B^j e_{n_k} \to 0,$$

para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Logo, existe um $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $N_k \geqslant k + 2$ e

$$\|e_{N_k - j}\| < \frac{1}{k}, \text{ para } j = 1, ..., k.$$

Assim, tomamos $m_k = N_k - k - 1$, temos que

$$\|e_{m_k + j}\| \leqslant \frac{1}{k}, \text{ para } j = 1, ..., k.$$

Portanto, $F^{m_k} e_j \to 0$, quando $k \to \infty$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, $F^{m_k} x \to 0$, para todo $x \in X_0$. E segue do Critério de Hiperciclicidade que B é fracamente misturador.

Por fim, $(ii) \Rightarrow (i)$ vale para todo operador em F-espaços separáveis.

$\square$

Teorema 4.3. *Seja X um F-espaço de sequências no qual $(e_n)_n$ é base. Suponha que o shift para trás B é um operador em X. Então, são equivalentes:*

1. *B é misturador;*
2. *$e_n \to 0$ em X, quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Para mostrar que $(i) \Rightarrow (ii)$, podemos repetir o mesmo argumento e obter que, dado $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$, $\|e_n\| < \varepsilon$. Mais ainda, para $(ii) \Rightarrow (i)$, basta aplicar o critério de Kitai, no lugar do Critério de Hiperciclicidade.

□

Teorema 4.4. *Seja X um F-espaço de sequências no qual $(e_n)_n$ é base incondicional. Suponha que o shift para trás B é um operador em X. Então, são equivalentes:*

1. *B é caótico;*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ converge em X;*
3. *a sequência constante pertence a X;*
4. *B possui um ponto periódico não trivial.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (iv)$. É imediato da definição.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Seja $x = (x_n)_n \neq 0$ uma sequência periódica. Então, existem $j, N \in \mathbb{N}$ tais que $x_j \neq 0$ e $x_{j+kN} = x_j$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, como $(e_n)_n$ é base incondicional, $y = \sum_{k=1}^{\infty} x_{j+kN} e_{j+kN} \in X$. Assim, $y + By + ... + B^{N-1}y \in X$ é uma sequência constante.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Segue de imediato.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Pelo teorema 4.2, temos que $(ii) \Rightarrow B$ hipercíclico. E, pela convergência incondicional de $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$, toda sequência periódica pertence a X. Resta mostrar que o conjunto das sequências periódicas é denso em X.

Dado $(x_n)_n \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\sum_{n=N}^{\infty} x_n e_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular, a série periódica associada $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+kN}$ converge incondicionalmente. Logo, existe $m \geqslant 1$ tal que

$$\|\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} x_n \varepsilon_{n+kN} e_{n+kN}\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para toda sequência $(\varepsilon_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

$$\Rightarrow \| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} x_n e_{n+kmN} \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto, $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} x_n e_{n+kmN}$ está a uma distância de $\frac{\varepsilon}{2}$ de $\sum_{n=1}^{N} x_n e_n$, que está a uma distância de $\frac{\varepsilon}{2}$ de x. □

Podemos transferir os resultados obtidos para *shifts* com peso

$$B_w(x_1, x_2, x_3, ...) = (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, ...),$$

em que $(w_n)_n$ é uma sequência de escalares não nulos e convencionamos $w_1 = 1$. Sejam

$$v_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{w_k}$$

e

$$X_v = \{(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid (v_n x_n)_n \in X\}.$$

O mapa $\phi_v : X_v \to X$, dado por $\phi[(x_n)_n] = (v_n x_n)_n$, é um isomorfismo e uma conjugação entre $B_w : X \to X$ e $B : X_v \to X_v$, se incluirmos em X_v a topologia induzida por ϕ. Então, o seguinte teorema procede dos resultados anteriores:

Teorema 4.5. *Seja X um F-espaço de sequências no qual $(e_n)_n$ é base. Suponha que o shift com pesos B_w é um operador em X.*

1. *São equivalentes:*

    a) *B_w é hipercíclico;*

    b) *B_w é fracamente misturador;*

    c) *existe uma sequência crescente de inteiros positivos $(n_k)_k$ tal que*

    $$\left(\prod_{i=1}^{n_k} w_i\right)^{-1} e_{n_k} \to 0$$

    em X, quando $k \to \infty$.

2. *São equivalentes:*

    a) *B_w é misturador;*

b) Vale que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} w_i\right)^{-1} e_n \to 0$$

em X, quando $n \to \infty$.

3. Suponha que $(e_n)_n$ é base incondicional. Então, são equivalentes:

a) B_w é caótico;

b) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} w_i\right)^{-1} e_n$$

converge em X;

c) A sequência

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i}\right)_n$$

pertence a X;

d) B_w possui um ponto periódico não trivial;

e) B_w possui a propriedade de especificação.

Em suma, o diagrama a seguir ilustra as propriedades discutidas nesse texto, marcando com linha contínua as implicações válidas para todo operador e com linha tracejada as que valem apenas para *shifts* com pesos. Ao que se refere por "Propriedade de Especificação", deve-se entender por "Propriedade de Especificação para Operadores"a fim de poupar espaço. Essa distinção é expressiva devido às discussões presentes no Capítulo 2.2.2.

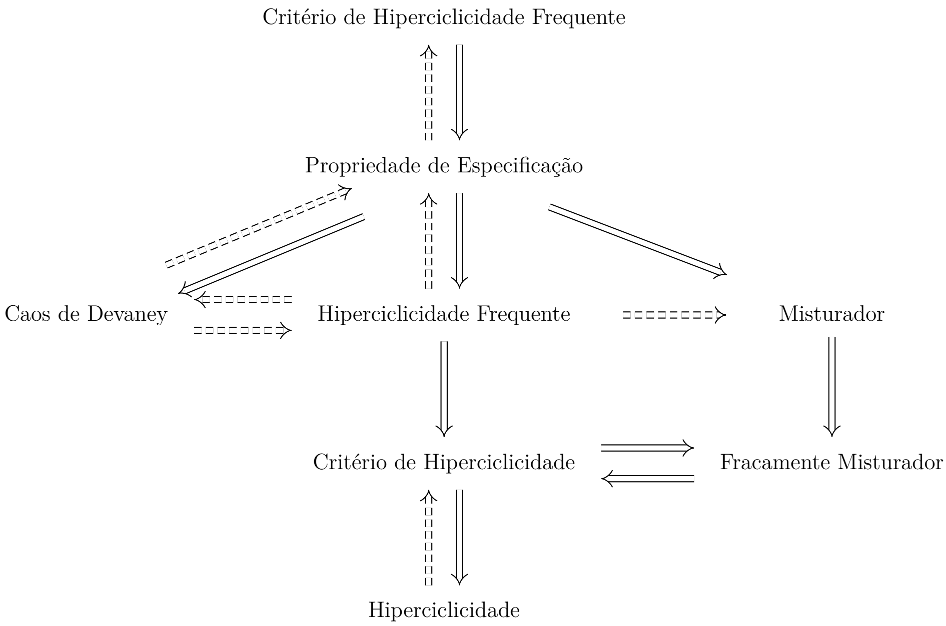


Figura 4 – Relação entre as medidas de caos presentes no texto.

Por fim, observa-se um exemplo elaborado por [7] que mostra que, para os *shifts* com peso, a entropia topológica é uma medida de caos mais fraca que caos de Devaney e suas equivalências.

Exemplo 4.1. *Sejam* $P_1 = \{1\}$ *e* $Q_1 = \{2, 3, ..., 10\}$*. Se* $q_k = \max Q_k$*, definimos* P_{k+1} *e* Q_{k+1}*, por indução, como os intervalos de inteiros*

$$P_{k+1} = \left[q_k + 1, q_k + (k+1)^2\right],$$

$$Q_{k+1} = \left[q_k + (k+1)^2 + 1, q_k + 10(k+1)^2\right].$$

Isto é, $P_2 = [11, 14]$*,* $Q_2 = [15, 50]$*,* $P_3 = [51, 59]$*,* $Q_3 = [60, 140]$*. Dessa forma,*

$$\frac{\#\left(\bigcup_{k=1}^{N} Q_k\right)}{q_N} = 0,9.$$

Definimos $P = \cup_{n=1}^{\infty} P_n$*,* $Q = \cup_{n=1}^{\infty} Q_n$ *e* $(v_n)_n$ *por*

$$v_n = \begin{cases} 1/k^2, & se\ n \in P; \\ v_{n-1}/2, & se\ n \in Q. \end{cases}$$

Agora, considere o shift com peso $B_w : \ell^1 \to \ell^1$*, em que* $w_1 = 1$ *e* $w_n = v_{n-1}/v_n$*. Equivalentemente,* $v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{w_k}$.

Assim, como $\max_{n\in\mathbb{N}} w_n = \max_{n\in\mathbb{N}} v_{n-1}/v_n = 2$*,* B_w *é contínuo em* ℓ^1*. Além disso,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} w_k\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in P_n} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in P_n} n^2(1/n^2) = \infty.$$

Logo, pelo Teorema 4.5, B_w não é caótico no sentido de Devaney, não possui a propriedade de especificação de operadores e não é misturador. Por outro lado, dado $M \in \mathbb{N}$, considere o compacto

$$K_M = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 \mid x_n = 0, \text{ se } n \in P, \text{ e } x_n \in \{0, ..., (M-1)v_n\}, \text{ se } n \in Q\}.$$

Se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in K_M$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leqslant (M-1)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in Q_n} v_k \leqslant (M-1)\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty.$$

Dados $x = (v_n x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (v_n y_n)_{n=1}^{\infty} \in K_M$,

$$\max_{0\leqslant n\leqslant q_k} \|B_w^n x - B_w^n y\| \geqslant \max_{0\leqslant n\leqslant q_k} |x_{n+1} - y_{n+1}|.$$

Assim, se $0 < \varepsilon < 1$, x_n e y_n diferem, para algum $1 \leqslant n \leqslant q_k$, então x e y estão (q_k,ε)-separados. Seja $r_k = \#\left(\cup_{n=1}^{k} Q_n\right)$. Então, $s_{q_k,\varepsilon}(B_w, K_M) \geqslant M^{r_k}$ e, como $\dfrac{r_k}{q_k} = 0,9$, temos que

$$\begin{aligned} h(B_w, K_M) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{q_k}\log s_{q_k,\varepsilon}(B_w, K_M) \\ &\geqslant 0,9\log M. \end{aligned}$$

Portanto, $h(B_w) \geqslant 0,9\log M$, para todo $M \in \mathbb{N}$. Logo, $h(B_w) = \infty$.

Referências

[1] Adler, R. L., Konheim, A. G., and McAndrew, M. H. Topological entropy. *Transactions of the American Mathematical Society 114*, 2 (1965), 309–319. Citado 3 vezes nas páginas 12, 50 e 55.

[2] Bartoll, S., Martínez-Giménez, F., Murillo-Arcila, M., and Peris, A. Cantor sets, bernoulli shifts and linear dynamics. In *Descriptive Topology and Functional Analysis* (2014), Springer International Publishing, pp. 195–207. Citado na página 58.

[3] Bartoll, S., Martínez-Giménez, F., and Peris, A. Operators with the specification property. *J. Math. Anal. Appl. 436*, 1 (2016), 478–488. Citado 4 vezes nas páginas 12, 41, 46 e 47.

[4] Bayart, F., and Grivaux, S. Invariant gaussian measures for operators on banach spaces and linear dynamics. *Proceedings of the London Mathematical Society 94*, 1 (2007), 181–210. Citado na página 40.

[5] Bowen, R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc. 153* (1971), 401–414. Citado na página 53.

[6] Bowen, R. Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc. 154* (1971), 377–397. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 59.

[7] Brian, W. R., Kelly, J. P., and Tennant, T. The specification property and infinite entropy for certain classes of linear operators. *J. Math. Anal. Appl. 453*, 2 (2017), 917–927. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 53, 57 e 66.

[8] de La Taille, Y. *Moral e Ética: Dimensões Intelectuais e Afetivas*. Biblioteca Artmed: Psicologia do Desenvolvimento, Infância e Adolescência. Artmed, 2006. Citado na página 5.

[9] de Rotterdam, E., and Neves, P. *Elogio da Loucura*. L&PM Editores, 2003. Citado na página 5.

[10] Fichte, J., and Preuss, P. *The Vocation of Man*. Hackett Classics. Hackett Publishing Company, Incorporated, 1987. Citado na página 20.

[11] Grosse-Erdmann, K., and Manguillot, A. P. *Linear chaos*. Springer Science & Business Media, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 12, 35 e 39.

[12] Hasselblatt, B., and Katok, A. *A First Course in Dynamics: with a Panorama of Recent Developments*. Cambridge University Press, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 24, 55, 57 e 58.

[13] Kamthan, P., and Gupta, M. *Sequence Spaces and Series*. Lecture notes in pure and applied mathematics. M. Dekker, 1981. Citado na página 15.

[14] Katok, A., Katok, A., and Hasselblatt, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1995. Citado na página 41.

[15] Lorenz, E. *The Essence Of Chaos*. Jessie and John Danz lectures. Taylor & Francis, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 28.

[16] Rolewicz, S. *Metric Linear Spaces*. Mathematics and its applications (D. Reidel Publishing Company).: East European series. D. Reidel, 1985. Citado na página 15.

[17] Rudin, W. *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 61.

[18] Sigmund, K. On dynamical systems with the specification property. *Trans. Amer. Math. Soc. 190* (1974), 285–299. Citado na página 12.

[19] Smith, L. *Chaos: A Very Short Introduction*. Very Short Introductions. OUP Oxford, 2007. Citado na página 34.

[20] Walters, P. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000. Citado na página 24.

[21] Yin, Z., and Wei, Y. Recurrence and topological entropy of translation operators. *J. Math. Anal. Appl. 460*, 1 (2018), 203–215. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 42.