UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

# PROPRIEDADES HOMOLÓGICAS E HOMOTÓPICAS DE SUBGRUPOS DE PRODUTOS DIRETOS DE GRUPOS

Vitória Aparecida Santos Ferreira

Campinas
2024

Vitória Aparecida Santos Ferreira

# Propriedades homológicas e homotópicas de subgrupos de produtos diretos de grupos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientadora: Dessislava Hristova Kochloukova

Este trabalho corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Vitória Aparecida Santos Ferreira e orientada pela Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova.

Campinas
2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F413p

Ferreira, Vitória Aparecida Santos, 2000-
Propriedades homológicas e homotópicas de subgrupos de produtos diretos de grupos / Vitória Aparecida Santos Ferreira. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Dessislava Hristova Kochloukova.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Homologia (Matemática). 2. Teoria dos grupos. 3. Grupos do tipo FPn. 4. Álgebra homológica. I. Kochloukova, Dessislava Hristova, 1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

**Título em outro idioma:** Homological and homotopical properties of subgroups of direct products of groups
**Palavras-chave em inglês:**
Homology theory
Group theory
Groups of type FPn
Homological algebra
**Área de concentração:** Matemática
**Titulação:** Mestra em Matemática
**Banca examinadora:**
Dessislava Hristova Kochloukova [Orientador]
Francismar Ferreira Lima
Kisnney Emiliano de Almeida
**Data de defesa:** 08-03-2024
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-1239-8717
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/0435313481231408

**Dissertação de Mestrado defendida em 08 de março de 2024 e aprovada**

**pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA**

**Prof(a). Dr(a). FRANCISMAR FERREIRA LIMA**

**Prof(a). Dr(a). KISNNEY EMILIANO DE ALMEIDA**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

# Agradecimentos

Neste trabalho, foi imprescindível a orientação da professora Dessislava, responsável por me cativar na Álgebra, apresentar oportunidades, ser compreensiva e exigente nas medidas mais adequadas. Não passei pelas disciplinas sozinha, contando com o auxílio de docentes pacientes em tirar dúvidas e colegas de sala a quem recorria todas as vezes em que não entendia algo. Ainda mais em retrocesso, não estou escrevendo este texto agora se não fossem por professores(as) de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio da rede pública de Campinas, que me mostraram a vastidão de possibilidades na área. Em todos estes momentos, estiveram os meus pais, a quem cabe agradecer pela infraestrutura propícia ao estudo e por serem exemplos de trabalhadores. Em específico, agradeço à minha mãe, que sempre reza por mim, e ao meu pai, que nunca questionou a escolha desta carreira.

A UNICAMP me deu o privilégio de vivenciar o Museu Exploratório de Ciências, dar aulas no PIC, conhecer mais da OMU e OBMEP, fazer estágio docente no ProFis, recepcionar alunos do Brasil inteiro na UPA e ter outras experiências que me enriqueceram muito. Obrigada pelo que me proporcionou até o momento.

Um obrigada à agência de fomento Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)[1], que apoiou a pesquisa sob processo de número 2022/04038-1. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

[1] As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade da autora e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

*É justo que muito custe o que muito vale.*
Santa Teresa D'Ávila

# Resumo

O projeto tem como objetivo a compreensão das propriedades de homologia e correspondentes na homotopia de subgrupos de produtos diretos de grupos. A atenção se deve ao fato de a estrutura dos subgrupos de um produto direto de grupos ainda não ser muito conhecida. Um dos questionamentos da área corresponde a saber se, dado $G < G_1 \times \cdots \times G_n$, com $G_i$ grupos finitamente apresentáveis, então $G$ é finitamente apresentável? Um dos subgrupos de produto direto de grupos que esteve sob análise foi o *produto fibra* de epimorfismos de grupos.

Mais especificamente, há interesse nos grupos de tipo homológico $(FP)_n$ e como esta condição é herdada pelo produto fibra associado a duas sequências exatas curtas de grupos admitidos com certas hipóteses.

**Palavras-chave:** homologia; teoria dos grupos; grupos do tipo $FP_n$; álgebra homológica.

# Abstract

This project aims to get the comprehension of the homological properties and their analogous in homotopy os subgroups of direct product of groups. The attention is due to the fact that the structure of the subgroups of a direct product of groups is still not well known. One of the questions that arises is if, given $G < G_1 \times \cdots \times G_n$, with $G_i$ finitely presented groups, then $G$ is itself finitely presented? One of the subgroups of direct products that was investigated was the *fiber product* of groups epimorphisms.

More precisely, there is interest in the groups of homological type $(FP)_n$ and how this condition is handed down by the fiber product associated to two short exact sequences of groups supposed with certain characteristics.


**Keywords:** homology theory; group theory; groups of type $FP_n$; homological algebra.

# Sumário

# 1 Introdução

Em ([3]), lê-se que "Finitely presented groups are clearly almost finitely presented over any ring $R$. Whether or not the converse holds is still an open question.". A equivalência das condições $(FP)_2$ e finitamente apresentável para grupos, cuja implicação finitamente apresentável $\Rightarrow (FP)_2$ já era conhecida na escrita de tal livro, foi mostrada falsa apenas em 1997, quando Bestvina e Brady provaram que há grupos de tipo $(FP)_2$ que são subgrupos de grupos finitamente apresentáveis, mas não são eles próprios finitamente apresentáveis ([2]).

Este texto se inicia com o estudo de conceitos clássicos da teoria combinatória de grupos, como grupos livres e apresentações de grupos usando geradores e relações. Neste tópico, ressaltam-se as versões do teorema da forma normal e as transformações de Tietze, que foram vistas seguindo ([5]).

Na sequência, usando ([10]), exibem-se resultados sobre a categoria de módulos. No decorrer do capítulo, alguns funtores são definidos, com maior interesse em $\otimes$ e *Hom*, usados para construir os funtores derivados *Tor* e *Ext*, respectivamente.

Afunilando-se rumo ao objeto de estudo, é necessário um conhecimento básico da noção de sequência espectral, um método de calcular mapas e objetos. Este assunto é seguido da classificação $(FP)_n$, primeiro em módulos e depois em grupos. Uma das definições equivalentes é que

**Teorema 1.0.0.1** ([3])**.** Um grupo $G$ é de tipo $(FP)_n$ sobre um anel $R$ se, e somente se, $G$ é finitamente gerado e $H_k(G, \prod RG) = 0, \forall\ 1 \leq k < n$.

Esta caracterização foi útil nas demonstrações em ([7]), que enuncia uma conjectura acerca do produto fibra associado às sequências exatas curtas

$$0 \to ker(f_1) \to G_1 \xrightarrow{f_1} Q \to 0 \qquad\qquad 0 \to ker(f_2) \to G_2 \xrightarrow{f_2} Q \to 0.$$

Designada **conjectura** $n-(n+1)-(n+2)$ **homológica**, ela advém de uma versão homotópica em ([8]). O principal que se demonstra em ([7]) é uma versão homológica (teorema A, 4.1.0.1) de um resultado técnico presente no referido trabalho prévio.

# 2 Estudo de algumas estruturas

Em cada subseção, são dadas definições que se constituíram como base de estudos preliminares para o tópico de pesquisa que intitula este projeto.

## 2.1 Grupos livres

**Definição 2.1.0.1.** Seja $i : X \to G$ uma função, onde $X$ é conjunto qualquer e $G$ é grupo. O par $(G, i)$ é **livre em X** se, para todo grupo $H$ e função $f : X \to H$, existir único homomorfismo de grupos $\varphi : G \to H$ tal que

$$f = \varphi \circ i.$$

**Exemplo 2.1.0.2.** $(\mathbb{Z}, i)$ é livre em cada conjunto unitário $X = \{x\}$, se $i(x) = 1$. De fato, dados $H$ grupo qualquer e $f : X \to H$ função, denote $f(x) := h \in H$. Assim,

$$h = f(x) = \varphi \circ i(x) = \varphi(1).$$

Por 1 ser gerador do grupo abeliano $\mathbb{Z}$, o homomorfismo $\varphi$ fica completamente determinado ao se conhecer $\varphi(1)$.

**Lema 2.1.0.3.** Dados $(G_1, i_1), (G_2, i_2)$ livres em $X$, existe isomorfismo $\varphi : G_1 \to G_2$ tal que $\varphi \circ i_1 = i_2$.

*Demonstração.* Por $(G_1, i_1)$ ser livre em $X$, considerando dados $G_2$ e $i_2 : X \to G_2$, existe $\varphi : G_1 \to G_2$ homomorfismo tal que se pode decompor $i_2$, isto é, $i_2 = \varphi \circ i_1$. De maneira semelhante, existe $\psi : G_2 \to G_1$ com $i_1 = \psi \circ i_2$. Pode-se escrever que

$$id_{G_1} \circ i_1 = i_1 = \psi \circ i_2 = \psi \circ (\varphi \circ i_1) = (\psi \circ \varphi) \circ i_1.$$

Da unicidade das duas funções, $\psi \circ \varphi = id_{G_1}$. O mesmo procedimento mostra que $\varphi \circ \psi = id_{G_2}$. Ou seja, tais homomorfismos de grupos são inverso um do outro e tem-se isomorfismo. □

A proposição abaixo prova que a função envolvida no par que define um grupo livre é injetora, o que caracteriza uma condição necessária para essa propriedade.

**Proposição 2.1.0.4.** Seja $(F, i)$ livre[2] em $X$. Vale que

a) Se existir $f : X \to G$ injetora, para $G$ determinado grupo, então $i$ é injetora.

b) Existe um grupo $G$ para o qual há função $f : X \to G$ injetora.

*Demonstração.* a) Pela definição de grupo livre, existe homomorfismo de grupos $\varphi : F \to G$ tal que $f = \varphi \circ i$. Suponha que $i(x_1) = i(x_2)$. Com isso,

$$\varphi(i(x_1)) = \varphi(i(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

pela injetividade de $f$. Tem-se a injetividade de $i$.

b) Denote por $\mathbb{Z}^X := \{\alpha : X \to \mathbb{Z} \mid \alpha \text{ é função}\}$. Se for atribuído a tal conjunto a operação $f + g : X \to \mathbb{Z}$ tal que $(f + g)(x) := f(x) + g(x), \forall\ x \in X$, então este é um

[2] A letra $F$ comumente é usada para grupos livres pela denominação no inglês, *free*.

grupo, pois há elemento neutro (a função identicamente nula), inverso e associatividade (decorrente da soma associativa de inteiros). Dado $y \in X$, defina $\alpha_y : X \to \mathbb{Z}$ por

$$\alpha_y(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Pode-se agora considerar $f : X \to \mathbb{Z}^X$ que associa $y \mapsto \alpha_y$. Note que

$$f(y_1) = f(y_2) \Leftrightarrow \alpha_{y_1} = \alpha_{y_2} \Leftrightarrow 1 = \alpha_{y_1}(y_1) = \alpha_{y_2}(y_1) \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

Ou seja, tal $f$ é injetora e pode-se tomar $G = \mathbb{Z}^X$. □

**Corolário 2.1.0.5.** Seja $(F, i)$ livre em $X$. Então, $i$ é injetora.

*Demonstração.* Usando b) da proposição 2.1.0.4, existe um grupo e uma função que verificam a). Tem-se, assim, a injetividade de $i$. □

### 2.1.1 Construção de um grupo livre

Construíremos um grupo livre que será de exploração futura.

Para um conjunto $X$, defina

$$M(X) := \{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \mid n \geq 1,\ x_{i_j} \in X, \forall\ 1 \leq j \leq n\} \cup (\ ).$$

Este é um conjunto de sequências, ao qual se pode vincular uma operação de concatenação:

$$(x_{i_1}, \ldots x_{i_n}) \cdot (x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}) := (x_{i_1}, \ldots x_{i_n}, x_{j_1} \ldots, x_{j_m}).$$

Vale que a concatenação é associativa; a sequência vazia ($n = 0$) é a identidade e $x \mapsto (x)$ é injetor. Com isso, simplificando a notação, cada elemento de $M(X)$ é unicamente representado por $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$. Dado este elemento, um **segmento** é um objeto da forma $x_{i_r} x_{i_{r+1}} \cdots x_{i_s}$, com $1 \leq r \leq s \leq n$. Se $r = 1$, é um **segmento inicial**; se $s = n$, é um **segmento final**. Se nenhuma dessas igualdades se verificar, o segmento é **próprio**.

Considere agora outro conjunto $\overline{X}$, tal que

(i) $X \cap \overline{X} = \emptyset$;

(ii) $X, \overline{X}$ estão em bijeção, representada por $x^1 \mapsto x^{-1}$.

Usando a notação introduzida acima, tome $M(X \cup \overline{X})$, cujos elementos são denominados **palavras em** $X$ e da forma

$$w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}.$$

Nesta expressão, $n$ é o **tamanho** de $w$. Denota-se $n = |w|$. Cada $x_{i_r}^{\varepsilon_r}$ é uma **letra** de $w$.

**Definição 2.1.1.1.** Uma palavra $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ é dita **reduzida** se $x_{i_j} \neq x_{i_{j+1}}^{-1}, \forall\ 1 \leq j \leq n-1$.

Convenciona-se que a palavra vazia é reduzida.

**Definição 2.1.1.2.** Uma **redução** é o processo pelo qual uma palavra não reduzida $w$ fica reduzida. No estado inicial, ocorre que existe $r$ tal que $i_{r+1} = i_r$ e $\varepsilon_{r+1} = -\varepsilon_r$. Seja $w'$ a palavra ao se remover de $w$ tais duas letras. Esta é uma **redução elementar**. Uma redução é constituída por sucessivas aplicações desse procedimento.

**Definição 2.1.1.3.** Escreve-se que $w \sim w'$ se $w = w'$ ou houver palavras $w_1, \dots, w_k$ onde a primeira é $w$, a última é $w'$ e, para cada $j < k$, ou $w_j$ ou $w_{j+1}$ veio da outra por redução elementar.

Esta é uma relação de equivalência, com o conjunto das classes de equivalência denotado por $\boxed{F(X)}$.

**Lema 2.1.1.4.** $F(X)$ é grupo se atribuída a operação binária $[u][v] := [uv]$.

*Demonstração.* Mostremos as propriedades de uma operação binária em um grupo.

- Boa definição: provemos que, se $u \sim u'$ e $w \sim w'$, então $uw \sim u'w'$. Vale que $w \sim w' \Rightarrow uw \sim uw'$ (o $u$ é fixado), pois, se $\{w_1, \dots, w_k\}$ são palavras com $w_1 = w, w_k = w'$ e palavras consecutivas geradas por redução elementar umas das outras, ocorre que $\{uw_1, \dots, uw_k\}$ é conjunto satisfazendo às condições da relação de equivalência. De maneira semelhante, $uw' \sim u'w'$. Por transitividade,

$$\begin{cases} uw \sim uw' \\ uw' \sim u'w' \end{cases} \Rightarrow uw \sim u'w'.$$

- Associatividade: ocorre porque a concatenação de sequências é associativa.
- Neutro: a sequência vazia.
- Inverso: dado $w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, tome $w^{-1} := x_{i_n}^{-\varepsilon_n} \cdots x_{i_1}^{-\varepsilon_1}$. Sejam $w_1 = ww^{-1}$, $w_2 = ww^{-1}$ suprimindo $x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{i_n}^{-\varepsilon_n}$, e assim por diante, com $w_j := w_{j-1}$ suprimindo $x_{i_{n+2-j}}^{\varepsilon_{n+2-j}} x_{i_{n+2-j}}^{-\varepsilon_{n+2-j}}$, onde $3 \leq j \leq n$; e $w_{n+1} = 1$. Assim, cada $w_j$ foi obtido de $w_{j-1}$ por redução elementar e $ww^{-1} \sim 1$. □

Conhecendo a natureza deste objeto, pode-se enunciar o

**Teorema 2.1.1.5.** Seja $i : X \to F(X)$ a função que leva $x$ em $[x]$. Então, $(F(X), i)$ é livre em $X$.

*Demonstração.* Usando a definição 2.1.0.1, considere $G$ grupo qualquer e $f : X \to G$ função qualquer. Como ocorreu a identificação de $x$ com $(x)$, $f$ pode ser estendida para ter domínio em $M(X \cup \overline{X})$, de forma que $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} \mapsto (f(x_{i_1}))^{\varepsilon_1} \cdots (f(x_{i_n}))^{\varepsilon_n}$. Seja $w'$ proveniente de $w$ por uma redução elementar. Considere $w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_j}^{\varepsilon_j} x_{i_j}^{-\varepsilon_j} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ e $w' = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_{j-1}}^{\varepsilon_{j-1}} x_{i_{j+1}}^{-\varepsilon_{j+1}} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$. Tem-se que

$$f(w) = (f(x_{i_1}))^{\varepsilon_1} \cdots (f(x_{in}))^{\varepsilon_n} = f(w'),$$

pois $(f(x_{i_j}))^{\varepsilon_j}, (f(x_{i_j}))^{-\varepsilon_j}$ são inversos em $G$.

Com isso, $w \sim w' \Rightarrow f(w) = f(w')$. Imponha que $f = \varphi \circ i$, sendo $\varphi : F(X) \to G$ dada por $[w] \mapsto f(w)$. Esta função está bem definida pela observação acima. E, ainda,

$$\varphi([u][w]) = \varphi([uw]) = f(uw) = (f(x_{i_1}))^{\varepsilon_1} \cdots (f(x_{i_n}))^{\varepsilon_n} (f(x_{j_1}))^{\delta_1} \cdots (f(x_{j_m}))^{\delta_m} =$$

$$f(u)f(w) = \varphi([u])\varphi([w]),$$

se $u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ e $w = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m}$.

Falta mostrar a unicidade do homomorfismo. Pela construção de $F(X)$ e do conceito de subgrupo gerado, tem-se que $F(X)$ é gerado por $i(X)$. Desse modo, ao conhecer um homomorfismo sobre $i(X)$, estamos determinando a única possibilidade para ele. □

Como é comum quando se estuda relações de equivalência, há representantes diversos para uma mesma classe. Porém, na teoria de grupos livres, garante-se que

**Teorema 2.1.1.6** (Teorema da forma normal para grupos livres)**.** Existe exatamente uma palavra reduzida em cada classe de equivalência.

*Demonstração.* A quantidade de palavras reduzidas em uma classe de equivalência é não zero porque, como o processo de redução diminui o tamanho de uma palavra, após reduções elementares até não haver mais como aplicá-las, consegue-se uma reduzida. Considere a função

$$\lambda : M(X \cup \overline{X}) \to M(X \cup \overline{X}),$$

dada indutivamente por

$$\lambda(1) = 1$$

$$\lambda(x^{\varepsilon}) = x^{\varepsilon},\ \varepsilon \in \{\pm 1\}$$

$$\lambda(ux^{\varepsilon}) = \begin{cases} \lambda(u)x^{\varepsilon}, & \text{se } \lambda(u) \text{ não terminar em } x^{-\varepsilon} \\ v, & \text{se } \lambda(u) = vx^{-\varepsilon} \end{cases}.$$

Provemos, por indução na quantidade de letras da palavra $w$, que $\lambda(w)$ é reduzida.
- Se $n = 0$: $\lambda(1) = 1$, que é reduzida.
- Se $n = 1$: $\lambda(x^{\varepsilon}) = x^{\varepsilon}$ e esta é reduzida pela definição de palavra reduzida.
- Suponha verdadeiro para palavras com $n-1$ letras e considere $w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ e $w' = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$. Pode-se escrever que $w = w' x_{i_n}^{\varepsilon_n}$. Pela hipótese de indução, $\lambda(w')$ é reduzida. Por construção,

$$\lambda(w) = \lambda(w' x_{i_n}^{\varepsilon_n}) = \begin{cases} \lambda(w')x_{i_n}^{\varepsilon_n}, & \text{se } \lambda(w') \text{ não terminar em } x_{i_n}^{-\varepsilon_n} \\ v, & \text{se } \lambda(w') = vx_{i_n}^{-\varepsilon_n} \end{cases}.$$

Como $\lambda(w')$ é reduzida, qualquer segmento é reduzido, em particular $v$ é reduzida. De $\lambda(w')$ reduzida, segue que $\lambda(w')x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ é reduzida, porque $\lambda(w') \neq vx_{i_n}^{-\varepsilon_n}$ e, assim, não se pode fazer cancelamentos no final. Com isso, $\lambda(w)$ é sempre reduzida. E, ainda, se $w$ já é reduzida,

$$\lambda(w) = w. \tag{1}$$

Suponha agora que $w'$ venha de $w$ por redução elementar. Como $\lambda(u)$ é reduzida,

$$\lambda(ux^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}) = \lambda(u), \forall\ u.$$

Assim, fixado $u$ e usando $v$ gradativamente maior,

$$\lambda(uv) = \lambda(ux^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}v), \forall\ v.$$

Em particular, $\lambda(w') = \lambda(w)$ e, de forma mais geral, se $w \sim w'$, vale que

$$\lambda(w) = \lambda(w'). \tag{2}$$

Das equações (1) e (2), quando $w, w'$ forem reduzidas e equivalentes,

$$w = \lambda(w) = \lambda(w') = w'.$$

Desse modo, tomadas duas palavras reduzidas na mesma classe de equivalência, da expressão acima, são iguais. □

O teorema 2.1.1.6 pode ser demonstrado de outras formas, como a que segue.

*Demonstração de van der Waerden:* seja $R$ o conjunto de todas as palavras reduzidas, $G$ o grupo de permutação de $R$ e $\varphi : F(X) \to G$ dada por $[w] \mapsto \sigma$, onde esta permutação $\sigma$ age na sequência vazia, ( ), devolvendo $w$, com $w \in R$. Com isso, se $w, w' \in R$ e $w \sim w'$,

$$[w] = [w'] \Rightarrow \varphi([w]) = \varphi([w']) \Rightarrow \varphi([w])((\,)) = \varphi([w'])((\,)) \Rightarrow w = w',$$

em que ( ) representa a sequência vazia. Provemos que $\varphi$ assim definida sobre $w \in R$ é um homomorfismo. Por se ter que $F(X)$ é livre em $X$, ao conhecer $f : X \to G$ apropriada, consegue-se definir $\varphi$ em toda classe de palavra. Usando o fato de $G$ ser grupo de permutação, considere

$$f(x) = \mu \in G, \text{ onde } \mu(w) = \begin{cases} xw, \text{ se } w \text{ não começar em } x^{-1} \\ u, \text{ se } w = x^{-1}u \end{cases}.$$

Para ver que $\mu$ é de fato um elemento de $G$, isto é, que é uma permutação do conjunto de palavras reduzidas $R$, defina

$$\tilde{\mu}(w) = \begin{cases} x^{-1}w, \text{ se } w \text{ não começar em } x \\ v, \text{ se } w = xv \end{cases}.$$

Desse modo, $\mu \circ \tilde{\mu} = id$ e $\tilde{\mu} \circ \mu = id$ e se tem a inversa de $\mu$. Com a definição de $f$, considere, assim, que, se $w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} \in R$, então $\varphi([w]) = \prod_{r=1}^{n}(f(x_{i_r}))^{\varepsilon_r}$. Usando indução no tamanho de $w$, consegue-se evidenciar que a permutação $\varphi([w])$ age na sequência vazia como anunciado.

Uma outra maneira de demonstrar o corolário 2.1.0.5 é dada no

**Corolário 2.1.1.7.** $i : X \to F(X)$ é injetora.

*Demonstração.* Tome $x, y \in X$ tais que $i(x) = i(y)$, ou seja, $[x] = [y]$ e, portanto, $x$ pertence à classe de equivalência de $y$. Mas ambas são palavras reduzidas e, do teorema, são iguais. □

Comecemos a análise de grupos livres finitamente gerados.

**Proposição 2.1.1.8.** Seja $F$ grupo livre. Então, para cada $w \in F \setminus \{e\}$, existe $N \triangleleft F$ tal que $w \notin N$ e $|F/N| < \infty$.

*Demonstração.* Tome $w \neq e$ uma palavra reduzida. Se $F$ é livre de base $X$, denote por $w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$. Construíremos homomorfismo $\varphi : F \to S_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, tal que $\varphi([w]) \neq id$. Com isso, usando o teorema do isomorfismo,

$$F/ker(\varphi) \simeq Im(S_{n+1}) \leq S_{n+1} \Rightarrow |F/ker(\varphi)| < \infty$$

e pode-se tomar $N := ker(\varphi)$. Defina, primeiro, $f : X \to S_{n+1}$ com $f(x) \in S_{n+1}$ tal que $\begin{cases} r \mapsto r+1, \text{ se } x_{i_r} = x \text{ e } \varepsilon_r = 1 \\ r+1 \mapsto r, \text{ se } x_{i_r} = x \text{ e } \varepsilon_r = -1 \end{cases}$. Esta $f$ está bem definida, ou seja, um valor tem apenas um correspondente no conjunto $\{1, \ldots, n+1\}$, pois, se $f(x) = \sigma$, $\sigma(r) = r+1$ e $\sigma(r) = r-1$, vale que $x_{i_r} = x, \varepsilon_r = 1$ e $x_{i_r} = x, \varepsilon_{r-1} = -1$. Então, aparece $w = \cdots x^{-1}x \cdots$ na palavra, contradizendo que esta é reduzida. Mostrando que $\sigma$ é injetora, tem-se uma função injetora de um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ para outro subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ e se pode estendê-la a $f(x) := \sigma \in S_{n+1}$. Segue que $\varphi : F \to S_{n+1}, [w] \mapsto \sigma$, é homomorfismo de grupos, com $\varphi([w]) \neq id$, pela construção de $\sigma$. □

A proposição 2.1.1.8 pode ser reescrita como, se $F$ é grupo livre, então

$$\bigcap_{N \triangleleft F,\ |F/N|<\infty} N = \{e\}.$$

Um grupo $G$ tal que, para cada $g \in G \setminus \{e\}$, exista subgrupo normal $N$ de índice finito que não possua $g$ é chamado de **residualmente finito**. A proposição prova, portanto, que um grupo livre é residualmente finito.

**Corolário 2.1.1.9.** Se $G$ é grupo livre finitamente gerado, qualquer endomorfismo sobrejetor de $G$ é automorfismo (isto é, $G$ é hopfiano).

*Demonstração.* Seja $\theta : G \to G$ endomorfismo sobrejetor de $G$ e considere $N \triangleleft G$ de índice finito. Se $\pi : G \to G/N$ é a projeção canônica, tem-se que

$$ker(\pi \circ \theta^n) = \theta^{-n}(N).$$

Pelo teorema do isomorfismo,

$$G/\theta^{-n}(N) \simeq G/N.$$

Como um homomorfismo é determinado ao se conhecer a imagem dos geradores, basta saber como se comportam os geradores de $G$. De $G/N$ ser finito, cada um dos geradores possui finitas possibilidades para assumir sob o mapa $\pi$ e, assim, o número de homomorfismos $\theta$ como se descreve é finito.

Por $\theta^{-n}$ ser kernel de um homomorfismo para qualquer $n$, existe algum $n$ e $m > n$ com $\theta^{-n}(N) = \theta^{-m}(N)$. Com isso,

$$N = \theta^n(\theta^{-n}(N)) = \theta^n(\theta^{-m}(N)) = \theta^{n-m}(N).$$

Portanto, se $\theta^{m-n}(g) \in N$, ocorre que $g \in N$. Em particular, se $\theta(g) = e$, vale que $g \in N$, isto é $ker(\theta) \subseteq N$.

Como $G$ é residualmente finito,

$$\cap_{|G/N|<\infty} N = \{e\} \Rightarrow ker(\theta) = \{e\} \Rightarrow \theta \text{ é injetor.}$$

□

**Lema 2.1.1.10.** Se $X$ é conjunto infinito, $|M(X \cup \overline{X})| = |X \cup \overline{X}| = |X|$.

Considere que dois conjuntos estão em bijeção se, e somente se, possuem mesma cardinalidade. Este fato será usado na

**Proposição 2.1.1.11.** $F(X) \simeq F(Y) \Leftrightarrow |X| = |Y|$.

*Demonstração.* Suponha, primeiro, que $|X| = |Y|$. Segue que existe bijeção $f : X \to Y$. Estenda $f$ a um homomorfismo $\varphi : F(X) \to F(Y)$ e $f^{-1}$ se estende para $\psi$. Ocorre que $\psi \circ \varphi : F(X) \to F(X)$ e $id_{F(X)}$ são ambas extensões de $id_X$. A definição de grupo livre assegura unicidade nesta e, portanto, $\psi \circ \varphi$ e $id_{F(X)}$ são iguais. De maneira semelhante, $\varphi \circ \psi = id_{F(Y)}$, provando-se que $\varphi$ é isomorfismo.

Agora, $F(X) \simeq F(Y)$. Há duas possibilidades:

- Se $X, Y$ forem finitos: a quantidade de homomorfismos de $F(X)$ em $\mathbb{Z}_2$ é igual ao número de funções de $X$ em $\mathbb{Z}_2$, que vale $2^{|X|}$, considerando que $|\mathbb{Z}_2| = 2$. Do isomorfismo suposto,

$$2^{|X|} = \text{n}^\circ \text{ de homomorfismos } X \to \mathbb{Z}_2 = \text{n}^\circ \text{ de homomorfismos } F(Y) \to \mathbb{Z}_2 = 2^{|Y|}.$$

Segue que $|X| = |Y|$.

- Se forem infinitos: como $F(X) = \{\text{classes de equivalência de } M(X \cup \overline{X})\}$, vale que $|F(X)| \leq |M(X \cup \overline{X})|$. Por outro lado, $X$ mergulha em $F(X)$ e, assim, $|X| \leq |F(X)|$. Usando o lema 2.1.1.10, $|X| = |F(X)|$. De maneira semelhante, $|Y| = |F(Y)|$. Como $F(X) \simeq F(Y)$, segue a igualdade $|X| = |Y|$. □

Olhemos para a base de um grupo livre. Se $G \simeq F(X)$ para algum $X$, este é um grupo livre. Dado $i : F(X) \to G$ isomorfismo de grupos, diz-se que $i(X)$ é **base de** $G$ e que $G$ é livre em $i(X)$.

**Lema 2.1.1.12.** A cardinalidade de uma base de um grupo livre é fixa e chamada de **posto**.

*Demonstração.* Suponha que $A, B$ sejam bases de $G$. Se $A = i(X)$ e $B = j(Y)$, com $i : F(X) \to G$ e $j : F(Y) \to G$ isomorfismos, então $F(X) \simeq F(Y)$. Pela proposição 2.1.1.11, $|X| = |Y| \Rightarrow |i(X)| = |j(Y)|$, pois $i, j$ são isomorfismos. Assim, $A$ e $B$ possuem mesma cardinalidade. □

**Exemplo 2.1.1.13.** Seja $F = F(x, y)$. Mostremos que $\{x^{-1}, x^2y\}$ é base de $F$. Defina $i : F \to F$ com $x \mapsto x^{-1}$, $y \mapsto x^2y$. Estende-se a definição de $i$ para os outros elementos do domínio de modo que seja homomorfismo. Dado $y \in F$,

$$y = (x^{-1})^2x^2y = (i(x))^2i(y) = i(x^2y).$$

E, ainda,

$$x = (x^{-1})^{-1} = (i(x))^{-1} = i(x^{-1}).$$

Portanto, $i$ é sobrejetor. Do corolário 2.1.1.9, $i$ é isomorfismo e, assim, o conjunto é base.

**Exemplo 2.1.1.14.** $\{yx, xy^2\}$ não é base de $F$. Se fosse, dada $w$ palavra reduzida, ocorreria que existiria $\psi : F(X) \to F(X)$ isomorfismo com $x \mapsto yx$, $y \mapsto xy^2$ e $\psi(w) = x$. Por outro lado, $\psi(w) = \tilde{w}$, com $\tilde{w}$ obtida de $w$ por substituição das letras desta pelas imagens correspondentes por $\psi$, isto é: os elementos que eram $x$ são trocados por $yx$; os que eram $y$ dão lugar a $xy^2$; as letras $x^{-1}$ recebem $x^{-1}y^{-1}$; e $y^{-1}$ é visto agora como $y^{-2}x^{-1}$. Por $w$ ser suposta palavra reduzida, observe que os segmentos compostos por duas letras são tais que

$$xy \mapsto (yx)(xy^2) = yx^2y^2 \qquad yx \mapsto (xy^2)(yx) = xy^3x \qquad x^2 \mapsto yxyx \qquad y^2 \mapsto xy^2xy^2$$

$$x^{-1}y^{-1} \mapsto (x^{-1}y^{-1})(y^{-2}x^{-1}) = x^{-1}y^{-3}x^{-1} \qquad y^{-1}x^{-1} \mapsto (y^{-2}x^{-1})(x^{-1}y^{-1}) = y^{-2}x^{-2}y^{-1}$$

$$xy^{-1} \mapsto (yx)(y^{-2}x^{-1}) = yxy^{-2}x^{-1} \qquad yx^{-1} \mapsto (xy^2)(x^{-1}y^{-1}) = xy^2x^{-1}y^{-1}$$

$$x^{-1}y \mapsto (x^{-1}y^{-1})(xy^2) = x^{-1}y^{-1}xy^2 \qquad y^{-1}x \mapsto (y^{-2}x^{-1})(yx) = y^{-2}x^{-1}yx.$$

$$x^{-2} \mapsto x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} \qquad y^{-2} \mapsto y^{-2}x^{-1}y^{-2}x^{-1}.$$

Ou seja, $\tilde{w}$ é reduzida e, ainda, $\tilde{w}$ possui tamanho no mínimo 2, se $w \neq e$. Absurdo, pois $\psi(w) = x$, que possui tamanho 1.

**Proposição 2.1.1.15.** $X \subseteq G$, com $G$ grupo. São equivalentes:

**(i)** $G$ é livre com base $X$.

**(ii)** Para cada $g \in G$, vale que existe única representação $g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}, n \geq 1, x_{i_r} \in X$ e $\varepsilon_r = \pm 1$, com $\varepsilon_{r+1} \neq -\varepsilon_r$, se $i_{r+1} = i_r$, ou $g$ é a palavra vazia.

**(iii)** $X$ gera $G$ e $1 \neq x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, onde $n \geq 1, x_{i_r} \in X$ e $\varepsilon = \pm 1, \varepsilon_{r+1} \neq -\varepsilon_r$, se $i_{r+1} = i_r$.

*Demonstração.* Provemos que (ii) e (iii) são equivalentes.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): da representação de cada $w \in G$ como produto de elementos em $X \cup X^{-1}$, tem-se que $X$ gera $G$. E, ainda, se $1 = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, com $n \geq 1$, valeria que $x_{i_1}^{-\varepsilon_1} = x_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} \Rightarrow n = 2$. Ou seja, $x_{i_1}^{-\varepsilon_1} = x_{i_2}^{\varepsilon_2}$, absurdo. Desse modo, $1 \neq x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ nas condições dadas.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): por $X$ gerar $G$, tem-se que qualquer $g \in G$ é da forma $g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}, n \geq 1, x_{i_r} \in X, \varepsilon = \pm 1, \varepsilon_{r+1} \neq -\varepsilon_r$, se $i_{r+1} = i_r$, ou $g$ é a palavra vazia. Se houvesse duas representações, dadas por

$$g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}, n \geq 0, x_{i_r} \in X, \varepsilon = \pm 1, \varepsilon_{r+1} \neq -\varepsilon_r, \text{ se } i_{r+1} = i_r$$

$$g = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m}, m \geq 0, x_{j_r} \in X, \delta = \pm 1, \delta_{r+1} \neq -\delta_r, \text{ se } j_{r+1} = j_r,$$

então

$$1 = ww^{-1} = (x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n})(x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m})^{-1}.$$

Fazendo os potenciais cancelamentos, tem-se um absurdo, pela afirmação (iii).

Agora, falta mostrar que (i) equivale a alguma dessas duas.

(i) $\Rightarrow$ (ii) e (iii): Suponha que $G$ seja livre com base $X$. Com isso, $G \simeq F(X)$ e, portanto, segue (ii) ou (iii), que são propriedades do grupo livre $F(X)$, como dado na definição de palavra reduzida e no teorema da forma normal para grupos livres.

(ii) e (iii) $\Rightarrow$ (i): por $X$ gerar $G$, existe um mergulho de $X$ em $G$. Este induz um mapa $i : F(X) \to G$, que está bem definido por (ii), é sobrejetor de $G$ ser gerado por $X$ e, ainda, é injetor, porque qualquer palavra reduzida não trivial não pode ser mapeada em $1 \in G$. □

**Corolário 2.1.1.16.** Suponha que $X$ gera $G$ e que $\varphi : G \to H$ é homomorfismo tal que $\varphi_{|X}$ é injetor e $\varphi(G)$ é livre com base $\varphi(X)$. Tem-se que $G$ é livre e possui base $X$.

*Demonstração.* Como $\varphi(G)$ é livre com base $\varphi(X)$, tem-se que a condição (i) da proposição 2.1.1.15 se verifica. Logo, vale (iii), isto é, $\varphi(X)$ gera $\varphi(G)$ e

$$1_H \neq y_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots y_{i_n}^{\varepsilon_n}, n \geq 1, y_{i_r} \in \varphi(X), \varepsilon_r = \pm 1, \varepsilon_{r+1} \neq \varepsilon_r, \text{ se } i_{r+1} = i_r. \tag{3}$$

Suponha que exista $n \geq 1$ tal que $1_G = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$. Portanto,

$$1_H = \varphi(1_G) = (\varphi(x_{i_1}))^{\varepsilon_1} \cdots (\varphi(x_{i_n}))^{\varepsilon_n}.$$

Contradição com (3). Segue que não existe este $n$ e vale (iii) para $1_G$. Como é equivalente a (i), tem-se o resultado. □

**Corolário 2.1.1.17.** Seja $G$ livre com base $X$ e $Y \subseteq X$. Ocorre que $\langle Y \rangle$ é livre com base $Y$.

**Corolário 2.1.1.18.** Considere $F$ livre de base $\{x, y\}$ e $\varphi : F \to \mathbb{Z}$ homomorfismo com

$$x \mapsto 1, y \mapsto 0.$$

Nessas condições, $ker(\varphi)$ é livre e tem base $B := \{x^{-i}yx^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

**Definição 2.1.1.19.** Sejam $g, h \in F(X)$ duas palavras reduzidas. Então, $gh$ não precisa ser reduzida, mas, se o for, é dita **reduzida como escrita**[3]. A definição se estende para

[3] No original, *reduced as written*.

o produto de qualquer quantidade de palavras reduzidas.

**Lema 2.1.1.20.** a) $|gh| \leq |g| + |h|$, com igualdade se, e somente se, $gh$ for reduzida como escrita.

b) Ou a primeira letra de $gh$ coincide com a primeira letra de $g$ ou $g$ se cancela completamente em $gh$. Esta última configuração ocorre se, e somente se, $h = g^{-1}k$, com $k$ palavra reduzida.

c) Ou $gh$ termina com a última letra de $h$ ou $h$ se cancela completamente no produto. Este último quadro se constata se, e somente se, $g = kh^{-1}$, onde $k$ é palavra reduzida.

*Demonstração.* a) Sejam $\begin{cases} g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} \\ h = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m} \end{cases}$, onde $n = |g|$ e $m = |h|$. Com isso,

$$gh = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m} \Rightarrow |gh| \leq n + m = |g| + |h|.$$

- Se $i_n = j_1$: $x_{i_n}^{\varepsilon_n} y_{j_1}^{\delta_1} = \begin{cases} xx \ (I) \\ xx^{-1} \ (II) \\ x^{-1}x \ (II) \\ x^{-1}x^{-1} \ (I) \end{cases}$. Se vale (II), faz-se reduções e $|gh| < |g| + |h|$. Se vale (I), a palavra é reduzida como escrita e $|gh| = |g| + |h|$.

- Se $i_n \neq j_1$: não há reduções a fazer e a palavra é reduzida como escrita, com $|gh| = |g| + |h|$.

Admita, agora que $|gh| = |g| + |h|$. Com isso, ocorre (I) ou a situação acima e a palavra é reduzida como escrita.

b) Utilizando a notação do item a), suponha que a primeira letra de $gh$ não seja $x_{i_1}^{\varepsilon_1}$. Então, $x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ e $x_{j_1}^{\delta_1}$ se cancelam; $x_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$ e $x_{j_2}^{\delta_2}$; ... se cancelam; $x_{i_1}^{\varepsilon_1}$ e $x_{j_n}^{\delta_n}$ se cancelam ($n \leq m$). Portanto, $g$ é cancelada e

$$h = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m} = x_{i_n}^{-\varepsilon_n} \cdots x_{i_1}^{-\varepsilon_1} x_{j_{n+1}}^{\delta_{n+1}} \cdots x_{j_m}^{\delta_m} = g^{-1}k.$$

Suponha agora que $h = g^{-1}k$. Vale que $gh = g(g^{-1}k) = k$, ou seja, $g$ se cancela.

c) De maneira semelhante ao feito em b). □

**Definição 2.1.1.21.** Seja $g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ uma palavra reduzida. Se $i_n \neq i_1$ ou se $i_n = i_1$ e $\varepsilon_n = \varepsilon_1$, diz-se que $g$ é **ciclicamente reduzida**.

O nome ficará mais natural adiante, ao se mostrar uma propriedade relacionada a permutações cíclicas.

**Lema 2.1.1.22.** $g$ é ciclicamente reduzida se, e somente se, $gg$ é reduzida como escrita.

**Lema 2.1.1.23.** Se $g$ é ciclicamente reduzida, $g^n$ é ciclicamente reduzida como escrita (isto é, ciclicamente reduzida e reduzida como escrita) e $|g^n| = n|g|$.

**Proposição 2.1.1.24.** a) Qualquer $g \in F(X)$ é conjugado a uma palavra ciclicamente reduzida.

b) Cada permutação cíclica de uma palavra ciclicamente reduzida é ainda ciclicamente reduzida, onde esta permutação designa um rearranjo das letras de modo que $x_{i_1}^{\varepsilon_1}$ ocupar a posição $k$ significa que se tem $x_{i_{n-k+1}}^{\varepsilon_{n-k+1}} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$.

c) Duas palavras ciclicamente reduzidas são conjugadas se, e somente se, vieram uma da outra por uma permutação cíclica.

*Demonstração.* a) Se $g$ já for ciclicamente reduzida, então se escreve como $e^{-1}ge$. Considere $g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ reduzida, mas não ciclicamente, isto é, $i_n = i_1$ e $\varepsilon_n = -\varepsilon_1$. Tome $\tilde{g} = x_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$. Tem-se que $g = x_1^{\varepsilon_1} \tilde{g} x_{i_1}^{-\varepsilon_1}$. Se $\tilde{g}$ ainda não for ciclicamente reduzida, repete-se este passo, o qual tem final porque o tamanho da palavra tomada se reduz a cada etapa.

b) Usemos indução na posição que passa a ocupar $x_{i_n}$.

- Se for na entrada $k = 1$: $x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$ é reduzida. De fato, é preciso analisar apenas o segmento inicial formado pelas primeiras letras. Da hipótese de $g$ ser ciclicamente reduzida, vale que ou $i_n \neq i_1$ ou $i_n = i_1, \varepsilon_n \neq -\varepsilon_1$. Desse modo, nunca ocorre cancelamento. Tal palavra é ciclicamente reduzida porque, como $g$ é reduzida, as letras adjacentes respeitam a condição requerida, em particular o par $x_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$ e $x_{i_n}^{\varepsilon_n}$.

- Admita que seja válido se ocupar a entrada $k$, ou seja, a palavra ciclicamente reduzida é $x_{i_{n-k+1}}^{\varepsilon_{n-k+1}} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_{n-k}}^{\varepsilon_{n-k}}$, com $i_{n-k+1} \neq i_{n-k}$ ou, se iguais, $\varepsilon_{n-k+1} \neq -\varepsilon_{n-k}$. Considere agora a palavra onde $x_{i_n}$ está na $(k+1)$-ésima entrada, isto é,

$$x_{n-k}^{\varepsilon_{n-k}} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_{n-k-1}}^{\varepsilon_{n-k-1}}.$$

Por $g$ ser tomada ciclicamente reduzida, não se tem cancelamento na junção de $x_{i_n}$ e $x_{i_1}$. E, ainda, como eram consecutivas, ocorre que $i_{n-k-1} \neq i_{n-k}$ ou $i_{n-k-1} = i_{n-k}, \varepsilon_{n-k-1} \neq -\varepsilon_{n-k}$.

c) Primeiro, assuma que duas palavras ciclicamente reduzidas sejam permutações cíclicas uma da outra. Com isso,

$$g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

$$\tilde{g} = x_{i_r}^{\varepsilon_r} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}.$$

Pode-se escrever que

$$\tilde{g} = (x_{i_r}^{\varepsilon_r} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}) g (x_{i_r}^{\varepsilon_r} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n})^{-1},$$

isto é, são conjugadas.

Considere agora que $g, \tilde{g}$ sejam ciclicamente reduzidas e conjugadas, com $\tilde{g} = u^{-1}gu$. Se esta for reduzida como escrita, vale que não será ciclicamente reduzida, porque termina com a última letra de $u$ e se inicia com o inverso desta. Se $u^{-1}gu$ não for reduzida como escrita, $u$ começa em $x_{i_1}^{\varepsilon_1}$ - e se cancela em $u^{-1}g$ - ou em $x_{i_n}^{-\varepsilon_n}$ - e se cancela em $gu$. Em ambas as possibilidades, $u^{-1}gu = v^{-1}hv$, com $|v| < |u|$ e $h$ uma permutação cíclica de $g$. Procedendo desta forma, $u^{-1}gu = \tilde{h}$, onde $\tilde{h}$ é permutação cíclica de $g$. O processo tem final porque $|v|$ diminui a cada passo. □

Em álgebra abstrata, caracteriza-se um grupo como **livre de torção** se o único elemento de ordem finita for o neutro.

**Proposição 2.1.1.25.** Grupos livres são livres de torção.

*Demonstração.* Tome $F$ livre, $g \in F \setminus \{1\}$. Se $g$ não for ciclicamente reduzida, considere um conjugado que o seja (pela proposição 2.1.1.24). Usando o lema 2.1.1.23,

$$|g^n| = n|g| \neq 0 \Rightarrow g^n \neq 1.$$

□

**Proposição 2.1.1.26.** Se $F$ é grupo livre e $g^k = h^k, k \neq 0, g, h \in F$, então $g = h$.

*Demonstração.* Assuma $k \geq 0$ e que $g$ seja ciclicamente reduzida (a menos de conjugação). Do lema 2.1.1.23, $g^k$ é ciclicamente reduzida como escrita. Se $h$ não for ciclicamente reduzida, ocorre que $h^k$ não o é. De fato, a primeira e última letras de $h^k$ coincidem com as de $h$ (se não se cancelarem completamente). Assim, $g^k \neq h^k$. Suponha, então, que $h$ seja ciclicamente reduzida. Com isso, do lema 2.1.1.23, $h^k$ é ciclicamente reduzida como escrita. Por $g^k$ ser $k$ repetições de $g$ e $h^k$ ser $k$ repetições de $h$, tem-se que $g = h$. □

O lema abaixo tem caráter operacional.

**Lema 2.1.1.27.** Dados $F$ grupo livre, $u, v \in F$ e $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, então

a) $uv^n = v^n u \Rightarrow uv = vu$.

b) $u^m v^n = v^n u^m \Rightarrow uv = vu$.

*Demonstração.* a) $uv^n = v^n u \Rightarrow uv^n u^{-1} = v^n \Rightarrow (uvu^{-1})^n = v^n$. Pela proposição 2.1.1.26, $uvu^{-1} = v \Rightarrow uv = vu$.

b) $u^m v^n = v^n u^m \Rightarrow u^m = v^n u^m v^{-n} \Rightarrow u^m = (v^n u v^{-n})^m$. Pela proposição 2.1.1.26, $u = v^n u v^{-n} \Rightarrow uv^n = v^n u$. Do item a), $uv = vu$. □

**Proposição 2.1.1.28.** Seja $F$ grupo livre e $g, h \in F$. Se $gh = hg$, vale que $\langle\{g, h\}\rangle$ é cíclico, ou seja, $g = u^r, h = u^s$, para algum $u \in F, r, s \in \mathbb{Z}$.

*Demonstração.* Utilizemos indução em $|g| + |h|$.

- Se $|g| + |h| = 2$: ambos têm tamanho 1 e, assim, são a identidade e valem as afirmações.

- Assuma que $g$ seja ciclicamente reduzida (a menos de conjugação, o que não aumenta $|g| + |h|$, como demonstrado em a) da proposição 2.1.1.24).

Se $gh$ for reduzida como escrita, então, pelo lema 2.1.1.20, $|gh| = |g| + |h| = |hg| \Rightarrow hg$ também é reduzida como escrita. Assim, $g$ é um segmento inicial de $gh$ e $h$, inicial de $hg$. Pela igualdade no enunciado, $g$ ou $h$ é um inicial do outro, isto é, $g = hw$ ou $h = gv$. Supondo o primeiro,

$$hw = g \Rightarrow h^2 w = hg = gh = hwh \Rightarrow hw = wh.$$

Como $|w| + |h| < |g| + |h|$, pode-se usar a hipótese de indução para se ter que $\langle\{w, h\}\rangle$ é cíclico e $w = u^t, h = u^s$. Então,

$$g = hw = u^{s+t}.$$

Se $h = gv$, procede-se da mesma maneira.

Se $gh$ não for reduzida como escrita, ocorre que $g = vx^\varepsilon, h = x^{-\varepsilon}t$. De $g$ ser ciclicamente reduzida e terminar em $x^\varepsilon$, segue, da definição de ciclicamente reduzida, que $g$ não pode começar em $x^{-\varepsilon}$. Por $gh = hg$, então $gh$ tem mesma letra inicial que $hg$, a qual, pelo item b) do lema 2.1.1.20, é $x^{-\varepsilon}$ ou então $h$ se cancela completamente. Eliminada a primeira possibilidade, tem-se que $h$ se cancela completamente, isto é, $hg$ é apenas um segmento de $g$ e se pode escrever que $g = h^{-1}w$. Tem-se que

$$g = h^{-1}w \Rightarrow w = hg = gh = h^{-1}wh \Rightarrow hw = wh.$$

Como $|h| + |w| < |g| + |h|$, aplica-se a hipótese de indução para se ter o resultado. □

**Proposição 2.1.1.29.** Seja $G$ grupo qualquer. Então, $G \simeq F/N$, para $F$ livre.

*Demonstração.* Tome $i : G \to G$ a identidade. Pensando em $G$ apenas como conjunto, forma-se $F(G)$ e estende-se a função para $\varphi : F(G) \to G$ homomorfismo que é sobrejetor. Do teorema do isomorfismo,

$$F(G)/N \simeq G,$$

com $N := ker(\varphi)$. □

Os grupos livres aparecem nas apresentações de grupos, que se tratam de um método de se descrever um grupo utilizando alguns elementos (geradores) e condições sobre estes (relações).

### 2.1.2 Geradores e relações

**Definição 2.1.2.1.** Seja $G$ grupo qualquer e $X$ conjunto. Considere $\varphi : F(X) \to G$ epimorfismo. Então, $X$ é denominado um **conjunto de símbolos geradores para** $G$ **sob** $\varphi$ e $\varphi(X)$ é uma **família de geradores de** $G$.

Quando conveniente, os geradores são considerados elementos de $G$.

$ker(\varphi)$ é o conjunto de **relatores de** $G$ **sob** $\varphi$. Se

$$u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}, \qquad v = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m}$$

forem palavras não necessariamente reduzidas com $uv^{-1} \in ker(\varphi)$ e $\varphi(x_i) = a_i$, então

$$a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\varepsilon_n} = a_{j_1}^{\delta_1} \cdots a_{j_m}^{\delta_m}$$

é uma **relação em** $G$. Em particular, se $u \in ker(\varphi)$, a relação é $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\varepsilon_n} = 1$.

Seja $H$ grupo, $S \subseteq H$. O **conjunto de consequências de** $S$ **em** $H$ é definido como o fecho normal $\langle S \rangle^H := \langle S^H \rangle = \langle \{s^h \mid s \in S, h \in H\} \rangle \subseteq H$, isto é, o menor subgrupo normal de $H$ contendo $S$.

Se $ker(\varphi)$ é o conjunto de consequências de $R \subseteq F(X)$, chama-se $R$ um conjunto de **relatores definidores de** $G$ **sob** $\varphi$.

Uma **apresentação** de um grupo $G$ é uma expressão $\langle X; R \rangle^{\varphi}$, com $\varphi : F(X) \to G$ epimorfismo e $R$ um conjunto de relatores definidores. Denota-se $G = \langle X; R \rangle^{\varphi}$. É comum a omissão do homomorfismo.

Quando $X, R$ forem finitos, ocorre uma apresentação finita e $G$ é chamado de **finitamente apresentável**.

**Exemplo 2.1.2.2.** $F(X)$ possui apresentação $\langle X; R \rangle^{\varphi}$, onde $R = \{1\}$ e $\varphi = id_{F(X)}$.

Para entender melhor os próximos exemplos, esclarece-se as seguintes notações:

Cada relator $r \in R$ pode ser substituído pela relação $r = 1$ ou, então, por $u = v$, quando $r \in \{uv^{-1}, v^{-1}u\}$. Isso ocorre, por exemplo, quando $G = \langle X \rangle$ é abeliano. Com isso, $xy = yx$ é usado como relação, representando o relator $r = x^{-1}y^{-1}xy$.

**Exemplo 2.1.2.3.** $\langle x, y \mid xy^2 = y^3x, yx^2 = x^3y \rangle$ apresenta o grupo trivial. Para vê-lo, note que

$$xy^4x^{-1} = (xy^2x^{-1})^2 = (y^3)^2 = y^6.$$

Então,

$$x^2y^4x^{-2} = x(xy^4x^{-1})x^{-1} = xy^6x^{-1} = (xy^2x^{-1})^3 = (y^3)^3 = y^9.$$

Segue que

$$x^2y^4x^{-2} = y^9 = yy^9y^{-1} = \underbrace{yx^2}_{=x^3y.}\, y^4 \underbrace{x^{-2}y^{-1}}_{=y^{-1}x^{-3}.} = (x^3y)y^4(y^{-1}x^{-3}) = x^3y^4x^{-3} \Rightarrow$$

$$y^4x^{-2} = xy^4x^{-3} \Rightarrow y^4x = xy^4.$$

Com isso,

$$y^6 = xy^4x^{-1} = (y^4x)x^{-1} = y^4 \Rightarrow y^2 = 1.$$

Do enunciado, $xy^2 = y^3x \Rightarrow x = yx \Rightarrow y = 1$. Pela segunda relação,

$$yx^2 = x^3y \Rightarrow x^2 = x^3 \Rightarrow x = 1.$$

**Exemplo 2.1.2.4.** $\mathbb{Z}_n$ possui apresentação $\langle x \mid x^n \rangle$.

**Exemplo 2.1.2.5.** O grupo diedral de ordem $2n$ tem apresentações

$$D_n := \left\langle x, y \mid x^n, y^2, (xy)^2 \right\rangle,\ D_n := \left\langle x, y \mid x^n = y^2 = 1, xyx = y^{-1} \right\rangle.$$

**Teorema 2.1.2.6** (Teorema de von Dyck)**.** Seja $G = \langle X; R \rangle^{\varphi}$ e considere uma aplicação de conjuntos $f : X \to H, H$ grupo. Denotando por $\theta : F(X) \to H$ o homomorfismo de grupos que estende $f$, se $\theta(r) = 1, \forall\, r \in R$, existe homomorfismo $\psi : G \to H$ tal que

$$f(x) = \psi \circ \varphi(x), \forall\, x \in X.$$

*Demonstração.* Como, para o epimorfismo $\varphi : F(X) \to G$, $ker(\varphi)$ é o subgrupo normal gerado por $R$ e $R \subseteq ker(\theta)$, onde este último conjunto é um subgrupo de $F(X)$, logo fechado pelas operações de grupo, vale que $ker(\varphi) \subseteq ker(\theta)$. Como $\varphi$ é sobrejetor, dado $g \in G$, existe pelo menos um $w \in F(X)$ tal que $\varphi(w) = g$. Podemos formar $\psi : G \to H$ impondo que $\psi(g) = \theta(w)$. □

**Corolário 2.1.2.7.** Existe homomorfismo de $\langle X; R \rangle$ para $\langle X \cup Y; R \cup S \rangle, \forall\, S \subseteq F(X \cup Y)$.

**Corolário 2.1.2.8.** Seja $R \subseteq G$, com $G, H$ grupos. Se $\theta : G \to H$ é tal que $\theta(R) = \{1\}$, então existe homomorfismo de grupos $\psi : G/\langle R \rangle^G \to H$ que satisfaz que $\theta = \psi \circ \pi$, para $\pi : G \to G/\langle R \rangle^G$ a projeção canônica.

Um mesmo grupo pode possuir diferentes apresentações e, para relacioná-las, usamos os conceitos que se seguem.

**Definição 2.1.2.9.** Seja $\langle X; R \rangle^{\varphi}$ uma apresentação de $G$. Então, $\langle X; R \cup S \rangle^{\varphi}$ também o é, se $S \subseteq \langle R \rangle^{F(X)}$. Diz-se que $\langle X; R \cup S \rangle^{\varphi}$ vem de $\langle X; R \rangle^{\varphi}$ por uma **transformação de Tietze geral de tipo I** e que o sentido contrário é feito por uma **transformação de Tietze geral de tipo I'**. Se $|S| = 1$, há **transformações de Tietze simples**.

Considere $Y$ um conjunto disjunto de $X$ e $u_y \in F(X)$ associado a cada $y \in Y$. Então, $\left\langle X \cup Y \mid R \cup \{yu_y^{-1}\} \right\rangle^{\psi}$ é uma apresentação de $G$, com $\psi(x) = \varphi(x)$ e $\psi(y) = \varphi(u_y)$. De fato, seja $N$ o subgrupo normal de $F(X \cup Y)$ gerado por $R \cup \{yu_y^{-1}\}$. Com isso, $\psi$ induz homomorfismo sobrejetor $\pi : F(X \cup Y)/N \to G$, pois $\psi(R \cup \{yu_y^{-1}\}) = 1$. Pelo teorema de Von Dyck, há epimorfismo $\theta : G \to F(X \cup Y)/N$ tal que $\theta(\varphi(x)) = xN$. Segue que $\pi \circ \theta : G \to G$ é a identidade. E, ainda, de

$$\theta \circ \pi(yN) = \theta(\psi(y)) = \theta(\varphi(u_y)) = u_y N = yN,$$

vale que $\theta \circ \pi : F(X \cup Y)/N \to F(X \cup Y)/N$ é a identidade. A forma como se obtém esta apresentação começando de $\langle X; R\rangle^{\varphi}$ é uma **transformação de Tietze geral de tipo II**. Considerando o sentido contrário, tem-se uma **transformação de Tietze geral de tipo II'**. Se $|Y| = 1$, há **transformações de Tietze simples**.

**Teorema 2.1.2.10.** Quaisquer duas apresentações de um grupo podem ser obtidas uma da outra por uma sequência de transformações de Tietze gerais. Se ambas forem finitas, este procedimento pode ser realizado empregando apenas transformações de Tietze simples.

*Demonstração.* Sejam $\langle X; R\rangle^{\varphi}, \langle Y; S\rangle^{\psi}$ duas apresentações de $G$.

(i) Assuma que $X \cap Y = \emptyset$. Para cada $y \in Y$, tome $u_y \in F(X)$ dado por $\psi(y) = \varphi(u_y)$. De maneira semelhante, a cada $x \in X$, associa-se $v_x \in F(Y)$ tal que $\varphi(x) = \psi(v_x)$. Defina, ainda, $\theta : F(X \cup Y) \to G$ com $\begin{cases} \theta(x) = \varphi(x) \\ \theta(y) = \varphi(u_y) \end{cases}$. Tem-se, assim, uma apresentação $\left\langle X \cup Y \mid R \cup \{yu_y^{-1}\}\right\rangle^{\theta}$ de $G$, que adveio de $\langle X; R\rangle$ por uma transformação de Tietze geral de tipo II.

Pela construção de $\theta$, tem-se que $\theta(y) = \varphi(u_y) = \psi(y)$. Se $w \in F(Y)$, então se pode aplicar $\psi$ e se escrever que $\psi(w) = \theta(w)$. Em particular, $\begin{cases} \theta(s) = \psi(s) = 1 \\ \theta(v_x) = \psi(v_x) = \varphi(x) = \theta(x) \end{cases}$. Desse modo, a apresentação $\left\langle X \cup Y \mid R, S, \{yu_y^{-1}\}, \{xv_x^{-1}\}\right\rangle^{\theta}$ vem da anterior por uma transformação de Tietze geral de tipo I. De forma simétrica, esta é obtida de $\langle Y; S\rangle$ por uma de tipo II seguida de uma de tipo I. Inversamente, portanto, $\langle Y; S\rangle$ vem da última por I' seguida de II''.

(ii) Suponha que $X \cap Y \neq \emptyset$. Calcula-se $\tilde{X}$ tal que $\theta : X \to \tilde{X}$ seja bijeção e $\tilde{X} \cap (X \cup Y) = \emptyset$. Segue que $G$ é apresentado por $\left\langle \tilde{X}; \tilde{R}\right\rangle^{\tilde{\varphi}}$, onde $\tilde{R}$ vem de $R$ ao se trocar $x$ por $\theta(x)$, e o mesmo para $\tilde{\varphi}$. Do desenvolvido em (i), esta apresentação vem de qualquer outra por uma sequência de transformações de Tietze gerais.

(iii) Supondo que há finitos elementos nos conjuntos $X, Y, R, S$, cada transformação pode ser trocada por um número finito de transformações de Tietze simples. □

**Proposição 2.1.2.11.** Suponha $G$ finitamente gerado, $G = \langle Y; S\rangle^{\psi}$. Então, há um subconjunto finito de $Y$ que gera $G$.

*Demonstração.* Seja $X$ subconjunto de $G, |X| < \infty, G = \langle X\rangle$. Cada $x \in X$ é produto de um número finito de elementos de $\psi(Y) \cup \psi(Y)^{-1}$. Com isso, há $Y_1 \subseteq Y$ finito com $X \subseteq \langle \psi(Y_1)\rangle$. Como este último é fechado pela operação de grupo, contém o grupo gerado por $X$, isto é, $G$. Tem-se que $\psi(Y_1)$ gera $G$. □

O resultado acima trata do conjunto gerador para $G$. Mas, pode-se querer mudar o conjunto de relatores definidores, o que é feito pela

**Proposição 2.1.2.12.** Considere $G$ grupo com apresentação finita $\langle X; R\rangle^{\varphi}$ e outra apresentação $\langle Y; S\rangle^{\psi}$, $Y$ finito. Então, existe $S_1 \subseteq S$ finito com $G = \langle Y; S_1\rangle^{\psi}$.

*Demonstração.* Pelas notações no teorema, $G$ admite apresentação $\left\langle X \cup Y; T, \{xv_x^{-1}\}\right\rangle^{\theta}$, com $T := R \cup \{yu_y^{-1}\}$.

Denote por $\tilde{t}$ o correspondente de $t$ ao se trocar $x$ por $v_x$ e reúna-os em $\tilde{T} := \{\tilde{t} \mid t \in T\}$. Se $\pi : F(X \cup Y) \to F(X \cup Y)/N$ é a projeção canônica, para $N := \left\langle xv_x^{-1}\right\rangle^{F(X\cup Y)}$, então

$$\pi(v_x) = \pi(x) \Rightarrow \pi(\tilde{t}) = \pi(t).$$

Portanto, $\tilde{t}$ é consequência de $t$ e dos relatores $xv_x^{-1}$.

Desse modo, por uma transformação de Tietze geral de tipo I, tem-se apresentação $\left\langle X \cup Y; T, \tilde{T}, \{xv_x^{-1}\}\right\rangle^{\theta}$. Com uma de tipo I′, tem-se $\left\langle X \cup Y; \tilde{T}, \{xv_x^{-1}\}\right\rangle^{\theta}$.

Para a afirmação do enunciado, procede-se da forma: $v_x \in F(Y) \Rightarrow \tilde{T} \subseteq F(Y)$. Aplicando uma transformação de tipo II′, atinge-se $\left\langle Y; \tilde{T}\right\rangle^{\psi}$.

Mas ainda não se mostrou que o conjunto de relatores definidores pode ser extraído finito de $S$. Note que $\tilde{T}$ é finito porque foi construído usando $X, Y, R$, que são finitos. Como $\tilde{T} \subseteq \langle S\rangle^{F(X)}$, segue, da definição de fecho normal, que $\tilde{T}$ é produto de uma quantidade finita de conjugados de $S$ e seus inversos. Fixando uma expressão para cada $\tilde{t}$, defina $S_1 :=$ {elementos de $S$ na expressão}. Em particular, $|S_1| < \infty$. Por $\left\langle \tilde{T}\right\rangle^{F(Y)} = ker(\psi) = \langle S\rangle^{F(Y)}$, então $ker(\psi)$ é $\langle S_1\rangle^{F(Y)}$ e podemos usar $S_1$ na apresentação. □

### 2.1.3 Produtos livres

A seção é constituída de teoremas sobre existência e afirmações de propriedades dessas estruturas, com terminologias já tendo sido expostas antes.

**Definição 2.1.3.1.** Seja $\{G_\alpha\}$ uma família de grupos, $i_\alpha : G_\alpha \to G$ homomorfismos de grupos. Diz-se que $(G, \{i_\alpha\})$ é um **produto livre dos** $G_\alpha$ se, para quaisquer grupo $H$ e homomorfismos $f_\alpha : G_\alpha \to H$, ocorrer que existe único homomorfismo $f : G \to H$ com $f_\alpha = f \circ i_\alpha, \forall\, \alpha$.

O produto livre é único no sentido da

**Proposição 2.1.3.2.** Sejam $(G, \{i_\alpha\}), (H, \{j_\alpha\})$ dois produtos livres da família $\{G_\alpha\}$. Então, existe único isomorfismo $f : G \to H$ com $j_\alpha = f \circ i_\alpha, \forall\, \alpha$.

*Demonstração.* Da definição de produto livre, existem homomorfismos $f : G \to H$ com $j_\alpha = f \circ i_\alpha$ (por $(G, \{i_\alpha\})$ ser produto livre) e $\tilde{f} : H \to G$ tal que $i_\alpha = \tilde{f} \circ j_\alpha$ (por $(H, \{j_\alpha\})$ ser produto livre). Tem-se que

$$i_\alpha = \tilde{f} \circ j_\alpha = \tilde{f} \circ (f \circ i_\alpha) = (\tilde{f} \circ f) \circ i_\alpha$$

$$i_\alpha = id_G \circ i_\alpha.$$

Como existe único homomorfismo que decompõe $i_\alpha$, pode-se afirmar que $id_G = \tilde{f} \circ f$. De maneira semelhante, $f \circ \tilde{f} = id_H$ e ocorre o isomorfismo. □

**Proposição 2.1.3.3.** Considere $(G, \{i_\alpha\})$ produto livre dos $G_\alpha$. Então, $i_\alpha$ é injetor.

*Demonstração.* Provemos, primeiro, que, fixado $\alpha$, se existirem grupo $H$ e homomorfismos $f_\beta : G_\beta \to H, \forall\, \beta$, com $f_\alpha$ injetor, então $i_\alpha$ é injetor.

De fato, da definição de produto livre, existe homomorfismo $f : G \to H$ com $f_\alpha = f \circ i_\alpha$. Como $f_\alpha$ é injetor, tem-se a injetividade de $i_\alpha$.

Tomando $H := G_\alpha, f_\alpha = id_{G_\alpha}, f_\beta(G_\beta) = \{e_H\}, \forall\, \beta \neq \alpha$, vale a injetividade de $i_\alpha$. □

A unicidade do produto livre foi assegurada a menos de isomorfismo. Garante-se, ainda, a existência de algum.

**Teorema 2.1.3.4.** Qualquer família de grupos $G_\alpha$ possui um produto livre.

*Demonstração.* Tome uma apresentação $\langle X_\alpha; R_\alpha\rangle^{\varphi_\alpha}$ de $G_\alpha$. Se $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$, troque $X_\alpha$ por um conjunto em bijeção com este tal que valha a condição de serem dois a dois disjuntos. Seja $G := F(\cup_\alpha X_\alpha)/\langle \cup_\alpha R_\alpha\rangle^{F(\cup_\alpha X_\alpha)}$. Com isso, $G$ possui apresentação $\langle \cup_\alpha X_\alpha; \cup_\alpha R_\alpha\rangle^{\varphi}$, onde $\varphi : F(\cup_\alpha X_\alpha) \to G$ é a projeção (logo, sobrejetora). Pelo teorema de von Dyck, a inclusão $i : X_\alpha \to \cup_\alpha X_\alpha$ induz homomorfismo $i_\alpha : G_\alpha \to G$. Provemos que $(G, \{i_\alpha\})$ é produto livre.

Considere $f_\alpha : G_\alpha \to H$, que induzem $\psi_\alpha : F(X_\alpha) \to H$ com $\psi_\alpha(R_\alpha) = e_H$. Então, há $\psi : F(\cup_\alpha X_\alpha) \to H$ que estende $\psi_\alpha$, ou seja, que $\psi_{|X_\alpha} = \psi_\alpha$. Por $\psi(\cup_\alpha R_\alpha) = e_H$, então $\psi$ induz $f : G \to H$ com $\psi = f \circ \varphi$. E, ainda, se $x_\alpha \in X_\alpha$,

$$f \circ i_\alpha(\varphi_\alpha(x_\alpha)) = f(\varphi(x_\alpha)) = \psi(x_\alpha).$$

Como $\varphi_\alpha(X_\alpha)$ gera $G_\alpha$, então $f_\alpha = f \circ i_\alpha$.

A unicidade de $f$ ocorre porque $G$ é gerado por $\cup_\alpha i_\alpha(\varphi_\alpha(X_\alpha))$. □

Com esses resultados iniciais, estabelece-se a notação $\boxed{*G_\alpha}$ para o produto livre da família $G_\alpha$.

**Exemplo 2.1.3.5.** Dados dois grupos cíclicos de ordem 2, o produto livre deles tem apresentação $\langle a, b \mid a^2, b^2\rangle$. Este produto livre é isomorfo ao grupo diedral infinito, isto é, $D_\infty \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

**Teorema 2.1.3.6** (Teorema da forma normal)**.** Seja $(G, \{i_\alpha\})$ o produto livre dos $G_\alpha$. Então,

a) Cada $i_\alpha$ é homomorfismo injetor.

b) Tratando $i_\alpha$ como uma inclusão, cada $g \in G \setminus \{e\}$ tem única representação

$$g = g_1 \cdots g_n, g_i \in G_{\alpha_i} \setminus \{e\}, \alpha_r \neq \alpha_{r+1}, \text{se } r < n.$$

Portanto, os elementos de um produto livre de grupos são produtos alternados de elementos dos grupos originais.

*Demonstração.* a) Provado na proposição 2.1.3.3.

b) Para facilitar a escrita, considere $\tilde{g}_\alpha := i_\alpha(g_\alpha) \in G$. Como $G$ é gerado por $\cup_\alpha i_\alpha(G_\alpha)$, então todo $u \in G$ pode ser escrito como $\tilde{g}_1 \cdots \tilde{g}_n$, com $g_i \in G_{\alpha_i}$ e potencialmente $\alpha_r = \alpha_{r+1}$.

Se dois elementos adjacentes pertencerem ao mesmo grupo e $g_{r+1} \neq g_r^{-1}$, considere

$$u = \tilde{g}_1 \cdots \tilde{g}_{r-1}\tilde{h}\tilde{g}_{r+2} \cdots \tilde{g}_n,$$

onde $h := g_r g_{r+1} \in G_{\alpha_r} \setminus \{e\}$.

Se os elementos consecutivos estiverem no mesmo grupo e um for o inverso do outro, pode-se removê-los e, assim,

$$u = \tilde{g}_1 \cdots \tilde{g}_{r-1}\tilde{g}_{r+2} \cdots \tilde{g}_n.$$

Prosseguindo indutivamente, há no mínimo uma forma de escrever $u$ como pedido. A unicidade seguirá pelo método de van der Waerden (como no teorema 2.1.1.6). Seja

$S$ conjunto das sequências $(g_1, \dots, g_n), g_i \in G_{\alpha_i} \setminus \{e\}, \alpha_r \neq \alpha_{r+1}$ e contendo a sequência vazia.

Tome, para $\alpha$ fixado e $n \in \mathbb{N}$, $g_\alpha \in G_{\alpha_i} \setminus \{e\}$ e defina um mapa de $S$ em $S$ com

$$(g_1, \dots, g_n) \mapsto \begin{cases} (g_\alpha, g_1, \dots, g_n), \text{se } \alpha \neq \alpha_1 \\ (g_\alpha g_1, \dots, g_n), \text{se } \alpha = \alpha_1 \text{ e } g_\alpha g_1 \neq e \\ (g_2, \dots, g_n), \text{se } \alpha = \alpha_1 \text{ e } g_\alpha g_1 = e \end{cases} .$$

Com isso, tem-se uma função $\varphi_\alpha : G_\alpha \to B$, onde $B := \{f : S \to S \mid f \text{ é função}\}$ e $\varphi_\alpha(e) = id_S$. Vale que $\varphi_\alpha$ preserva o produto e, assim, é mapeado no grupo de permutações de $S$, denotado por $Perm(S)$. Este age à esquerda de $S$.

Considere agora $\varphi : G \to Perm(S)$ o homomorfismo a partir das $\varphi_\alpha$ tal que $\varphi \circ i_\alpha = \varphi_\alpha$. Tome $u \in G, u = h_1 \cdots h_m, h_i \in G_{\alpha_i} \setminus \{e\}, \alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Se a bijeção $\varphi(u)$ for aplicada à sequência vazia, tem-se $(h_1, \dots, h_m)$. Com isso, os $h_i$ determinam a única representação de $u$. □

**Proposição 2.1.3.7.** O produto livre de uma quantidade finita de grupos finitos é residualmente finito.

A afirmação adquire mais força com a versão abaixo, em que se exige menos.

**Corolário 2.1.3.8.** O produto livre $G$ de grupos residualmente finitos é residualmente finito.

*Demonstração.* Sejam $H, M$ grupos residualmente finitos e $g = h_1 m_1 h_2 m_2 \cdots h_n m_n \neq e$ um elemento de $G = H * M$. Por se supor $H, M$ livres, existem subgrupos normais $H_1 \subset H$ e $M_1 \subset M$ tais que $[H : H_1], [M : M_1] < \infty$ e $h_i \notin H_1$, $m_j \notin M_1$. De fato, pode-se ter um único grupo normal $H_1$ (e $M_1$) para todos os $h_i$ (e $m_j$) porque se toma a interseção dos grupos normais obtidos individualmente para cada elemento.

Considere as projeções canônicas $H \to H/H_1$ e $M \to M/M_1$. Elas induzem um homomorfismo $\varphi : H * M \to H/H_1 * M/M_1$ tal que $\varphi(g) \neq e$. Isso ocorre porque $\varphi(g) = \overline{h_1}\,\overline{m_1} \cdots \overline{h_n}\,\overline{m_n}$ é, por construção, elemento reduzido no produto livre $H/H_1 * M/M_1$, com todos os $\overline{h_i}, \overline{m_j}$ não triviais em $H/H_1, M/M_1$, respectivamente.

Agora, os contradomínios são finitos e se pode usar a proposição 2.1.3.7 para se ter que $H/H_1 * M/M_1$ é residualmente finito. Pela definição de residualmente finito, existe subgrupo normal $K \subset H/H_1 * M/M_1$ não contendo $\varphi(g)$ e com índice finito neste produto livre. Pensando no teorema do isomorfismo, existe um homomorfismo $\phi : H/H_1 * M/M_1 \to P$ tal que

$$Im(\phi) \simeq (H/H_1 * M/M_1)/K.$$

Em particular, $Im(\phi)$ é finita. E, ainda, $\varphi(g) \notin K \Rightarrow \phi(\varphi(g)) \neq e$.

Tome $\phi \circ \varphi$. O kernel deste mapa é subgrupo normal de $H * M = G$ que possui índice finito neste e não contém $g$. Segue o resultado. □

**Proposição 2.1.3.9.** Se $G_\alpha$ são subgrupos de $G$, são equivalentes:

**(i)** $G$ é o produto livre dos $G_\alpha$.

**(ii)** Cada $g \in G \setminus \{e\}$ admite única escrita $g_1 \cdots g_n$, onde $g_i \in G_{\alpha_i} \setminus \{e\}$, $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

**(iii)** $G$ é gerado pelos $G_\alpha$ e $g_1 \cdots g_n \neq e$, $n > 0$, $g_i \in G_\alpha \setminus \{e\}$, $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

*Demonstração.* (i) $\Rightarrow$(ii): segue do teorema da forma normal.

(iii) $\Rightarrow$ (i): por haver homomorfismo $\varphi : *G_\alpha \to G$ com $\varphi_{|G_\alpha}$ a inclusão, ocorre, da hipótese de $G$ ser gerado pelos $G_\alpha$, que $\varphi$ é sobrejetor. Por $e$ não admitir escrita como dada em (iii), vale que o kernel é trivial, pois, se

$$g = h_1 \dots h_n \in ker(\varphi),\ n > 0 \Rightarrow e_G = \varphi(g) = \varphi(h_1) \cdots \varphi(h_n).$$

Contradição com (iii). Desse modo, tal $g$ não existe e $\varphi$ é isomorfismo.

A equivalência de (ii) e (iii) ocorre como na proposição 2.1.1.15. □

Sejam $u = g_1 \cdots g_n,\ v = h_1, \cdots, h_m \in *G_\alpha,\ g_i, h_i \in G_{\alpha_i} \setminus \{e\}$. Outros termos que possuem uma versão para o produto livre de grupos são

- **Reduzido:** se $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$, o produto é dito reduzido.
- **Reduzido como escrito:** dados $u, v$ produtos reduzidos, diz-se que $uv$ é reduzido como escrito se $g_n, h_1$ não estiverem no mesmo grupo.
- **Amalgamento:** ocorre quando $g_n, h_1$ estiverem no mesmo grupo e $g_n h_1 \neq e$.
- **Cancelamento:** se $g_n, h_1$ estiverem no mesmo grupo e $g_n h_1 = e$. Com isso,

$$|uv| \begin{cases} = |u| + |v|, & \text{se for reduzida como escrita} \\ = |u| + |v| - 1, & \text{se houver amalgamento} \\ < |u| + |v|, & \text{se houver cancelamento} \end{cases}.$$

- **Ciclicamente reduzida:** ocorre quando $u$ possui, na escrita acima, $n = 1$ ou se $\alpha_n \neq \alpha_1$. No produto livre de grupos, é válido o que se mostrou para elementos de grupos livres: cada um deles é conjugado de um ciclicamente reduzido.

**Definição 2.1.3.10.** Sejam $G_0, G_1, G_2$ grupos, com $i_k : G_0 \to G_j,\ k = 1, 2$, homomorfismos. Seja $G$ grupo e suponha $j_k : G_k \to G,\ k = 1, 2$, homomorfismos. Chama-se $(G, j_1, j_2)$ de **push-out de** $(i_1, i_2)$ se

**(i)** $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2 : G_0 \to G$. Desse modo, tem-se diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & G_1 \arrow[d, "j_1"] \\ G_2 \arrow[r, "j_2"] & G \end{tikzcd}$$

**(ii)** Para todo grupo $H$ e $\varphi_k : G_k \to H$ que verifique que $\varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2 : G_0 \to H$, exista único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que $\varphi_k = \varphi \circ j_k : G_k \to H$.

Note que, pela unicidade estabelecida na condição (ii), o push-out é único a menos de isomorfismo. A prova é como a feita no lema 2.1.0.3. De fato, suponha que $(\tilde{G}, \tilde{j}_1, \tilde{j}_2)$ seja outra tripla de push-out. Com isso, existe $\phi : G \to \tilde{G}$ tal que $\tilde{j}_k = \phi \circ j_k$. Por outro lado, existe $\psi : \tilde{G} \to G$ com $j_k = \psi \circ \tilde{j}_k$. Ou seja,

$$j_k = \psi \circ \tilde{j}_k = \psi \circ (\phi \circ j_k).$$

O mapa $id_G$ tem o mesmo papel que $\psi \circ \phi$ e, da unicidade em (ii), são iguais. O mesmo ocorre com $\phi \circ \psi = id_{\tilde{G}}$. Logo, $\phi$ é isomorfismo.

**Teorema 2.1.3.11.** Qualquer par $(i_1, i_2)$ possui push-out.

*Demonstração.* Considere $\langle X_k; R_k\rangle^{\theta_k}$ apresentação de $G_k$, com $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Seja $Y$ gerador de $G_0$ e, para cada $y \in Y$, denote por $w_{yk} \in F(X_k)$ o elemento que tem $\theta_k(w_{yk}) = i_k(y)$.

Defina $G$ o grupo com apresentação $\left\langle X_1 \cup X_2; R_1, R_2, \{w_{y1}^{-1} w_{y2}\}\right\rangle$. Com isso, há mapas $j_k : G_k \to G$ induzidos pelas inclusões de $X_k$ em $X_1 \cup X_2$, com $G$ gerado por $j_1(X_1) \cup j_2(X_2)$. Então, há no máximo um homomorfismo de $G$ com valores específicos nessa união.

Suponha que exista $\varphi_k : G_k \to H$ tal que $\varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2$ e defina $\psi_k : F(X_k) \to H$ usando $\varphi_k$ e impondo que seja trivial em $R_k$. Pelo teorema de von Dyck, o homomorfismo $\theta : F(X_1 \cup X_2) \to H$, com $\theta_{|X_k} = \psi_k$, define $\varphi : G \to H$. Por construção, $\varphi \circ j_k = \varphi_k$, que é a condição (ii) da definição de push-out. □

Algumas propriedades são enunciadas abaixo.

**Corolário 2.1.3.12.** Se $G_2 = \{e\}$, o push-out de $(i_1, i_2)$ é $G_1 / \langle i_1(G_0)\rangle^{G_1}$.

*Demonstração.* Tome $G_1 = \langle X_1; R_1\rangle$ e considere que $\{e\} = G_2 = \langle X_2; R_2\rangle$, onde $X_2 = R_2 = \{e\}$. Pela notação no teorema de existência, sejam $G_0 = \langle Y\rangle$ e $G = \left\langle X_1 \cup X_2; R_1, R_2, \{w_{y1}^{-1} w_{y2}\}\right\rangle$. Mas, $X_1 \cup X_2 = X_1$ e $w_{y2} = e$. Portanto, $G = \left\langle X_1; R_1, \{w_{y1}\}\right\rangle = G_1 / \left\langle \{w_{y1}\}\right\rangle^{G_1}$. Pela definição de $w_{yk}$ e de $G_0 = \langle Y\rangle$, tem-se que $\{w_{y1}\} = i_1(G_0)$. Segue o resultado. □

- Os mapas $j_1, j_2$ não precisam ser injetores. Por exemplo, seja $G_1$ grupo simples, isto é, que não possui subgrupo normal diferente de $\{e\}, G_1$. Considere que haja $i_1$ injetor e $i_2$ sobrejetor, mas não injetor. Tome $w \in G_0 \setminus \{e\}$ tal que $w \in ker(i_2)$ (existe porque este mapa não é injetor). Desse modo, $i_1(w) \neq e$, com

$$j_1 \circ i_1(w) = j_2 \circ i_2(w) = j_2(e) = e.$$

  Ou seja, $i_1(w) \in ker(j_1)$. Por $G_1$ ser simples e $ker(j_1) \triangleleft G_1$, tem-se que $ker(j_1) = G_1$. Portanto, este é o mapa trivial Da sobrejetividade de $i_2$, dado $g_2 \in G_2$, existe $z \in G_0$ tal que $i_2(z) = g_2$. Então,

$$j_2(g_2) = j_2(i_2(z)) = j_1(i_1(z)) = e \Rightarrow j_2 \text{ é trivial.}$$

  Portanto, o push-out é trivial.

- Se os homomorfismos iniciais $i_1, i_2$ forem injetores, diz-se que o push-out é o **produto livre amalgamado de** $G_1$ **e** $G_2$ **com** $G_0$ **amalgamado,** $\boxed{G_1 *_{G_0} G_2}$. Trata-se $G_0$ como subgrupo de $G_1, G_2$ e $i_1, i_2$ como inclusões. Será mostrado adiante que, nessa configuração, $j_1, j_2$ são injetores.

Para o produto livre amalgamado, tem-se uma versão do

**Teorema 2.1.3.13** (Teorema da forma normal)**.** Seja $G = A *_C B$. São válidas as afirmações
a) $j_A, j_B$ são monomorfismos e, portanto, pode-se pensar em inclusões, com $A, B \subseteq G$.
b) $j_A(A) \cap j_B(B) = j_A(C) = j_B(C)$.
c) Qualquer elemento de $G$ pode ser unicamente representado por

$$u_1 \cdots u_n c,\ n \geq 0,\ \ c \in C,\ u_1, \ldots, u_n \text{ alternados de } S \setminus \{e\}, T \setminus \{e\},$$

onde $S, T$ são transversais à esquerda de $C$ em $A$ e $B$, respectivamente (ou seja, são conjuntos que interseccionam cada classe lateral $aC, bC$ em exatamente um elemento).

*Demonstração.* A última igualdade em b) já é sabida, porque, pela definição de produto livre amalgamado ter $i_1, i_2$ injetores, vale que $C \simeq Im(i_A) = i_A(C)$ e $C \simeq Im(i_B) = i_B(C)$. Como, em um push-out qualquer, $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$, então

$$j_A(C) \simeq j_A(i_A(C)) = j_B((i_B(C)) \simeq j_B(C).$$

c) Provemos que, dado $g \in A *_C B$, há únicos $u_1, \ldots, u_n, c$ com $g = \overline{u}_1 \cdots \overline{u}_n \overline{c}$, onde $j_A(a) := \overline{a}$, $j_B(b) := \overline{b}$.

Cada $g$ pode ser escrito como $\overline{g}_1 \cdots \overline{g}_k$, $g_i \in (A \cup B)$. Se termos consecutivos estiverem no mesmo conjunto, reescreva

$$g = \overline{g}_1 \cdots \overline{g}_{i-1} \overline{h} \overline{g}_{i+2} \cdots \overline{g}_k, \ \overline{h} = \overline{g}_i \overline{g}_{i+1}.$$

Se continuarmos verificando a origem dos elementos adjacentes e fazendo estas alterações, ocorrerá que $g = \overline{c}$ ou o produto alternado de elementos de

$$A \setminus C, B \setminus C. \tag{4}$$

Aplica-se indução, com $\overline{g}_1 \cdots \overline{g}_{n-1} = \overline{u_1} \cdots \overline{u}_{n-1} \overline{c}$, $u_i \in (S \cup T) \setminus \{e\}$, $u_1 \in g_1 C$, $u_i \in C g_i C$, se $i > 1$, e onde $u_i$ é alternado de $S \setminus \{e\}, T \setminus \{e\}$. No passo indutivo, pode-se escrever que

$$g = \overline{u}_1 \cdots \overline{u}_{n-1} \overline{c g_n} = \overline{u}_1 \cdots \overline{u}_{n-1} \overline{h} = \overline{u}_1 \cdots \overline{u}_{n-1} \overline{u}_n \overline{d},$$

onde $h = c g_n$ pode ser trocado por algum $u_n d$, com $u_n \in (S \cup T)$.

De $u_n d = c g_n$, vale que $u_n = c g_n d^{-1} \in C g_n C$. Tem-se que $u_n$ não é o elemento neutro, porque, se o fosse, $d = u_n d = c g_n \Rightarrow g_n = c^{-1} d \in C$. Contradição com (4).

Falta provar a unicidade de c), que segue o método de van der Waerden (apresentado no teorema 2.1.1.6 e que pode ser lida em ([5])).

b) A igualdade $j_A(A) \cap j_B(B) = j_A(C)$ ocorre pela unicidade garantida no item c).

a) Suponha, por absurdo, que $j_A$ não seja injetor. Logo, existe $A \setminus \{e\}$ tal que $a \in ker(j_A)$. Escreva $a = uc$, onde $u \in S \setminus \{e\}$, $c \in C$. Vale que $a \in ker(j_A) \Rightarrow \overline{1_C} = 1_G = \overline{a} = \overline{uc}$. Da unicidade da forma normal, $1_C = uc$. Contradição com $a$ diferente do elemento neutro. O mesmo se usa para a injetividade de $j_B$. □

**Teorema 2.1.3.14** (Teorema da forma reduzida)**.** Se $G = A *_C B$, tratando $j_A, j_B$ como inclusões,

a) Qualquer $w \in G \setminus C$ é da forma $g_1 \cdots g_n$, $n \geq 1$, $g_i$ alternado de $A \setminus C, B \setminus C$.

b) Se válida a escrita de $w$ feita em a) e $w = h_1 \cdots h_m$, com elementos alternados, tem-se que $m = n$ e $h_1 \in g_1 C, h_n \in C g_n$, $h_i \in C g_i C, \forall\ 1 < i < n$.

c) $w \notin (A \cup B)$, se $n > 1$.

d) Um produto $g_1 \cdots g_n$, $n \geq 1$, $g_i$ alternado de $A \setminus C, B \setminus C$ não pode estar em $C$.

Dispõem-se algumas terminologias sobre o produto livre amalgamado que remetem ao estudo dos grupos livres.

- Se $w = g_1 \cdots g_n$, $g_i$ alternados, esta é a **forma reduzida** de $w$.
- O inteiro $n$ é o tamanho de $w$, dado por $|w|$. Este está bem definido pelo item b) do teorema da forma reduzida. Tem-se que

$$|w| = 1 \Leftrightarrow w \in (A \cup B) \setminus C.$$

$c \in C$ possui tamanho 0.

- Qualquer $w \notin C$ é conjugado de algum $g_1 \cdots g_n$ na forma reduzida, onde $g_1, g_n$ não estão ambos em $A \setminus C$ ou em $B \setminus C$, se $n \neq 1$.

**Proposição 2.1.3.15.** Sejam $A, B$ subgrupos de um grupo $G$ e considere $C := A \cap B$. Então, $G = A *_C B$ se, e somente se, para qualquer $w \in G \setminus \{C\}$, existirem $g_1, \ldots, g_n$, com $w = g_1 \cdots g_n$, todos eles alternados de $A \setminus \{C\}, B \setminus \{C\}$ e $g_1 \cdots g_n \neq e$.

*Demonstração.* Suponha que se tenha o produto livre amalgamado de $A$ e $B$ com $C$. Pelo teorema da forma normal, valem as propriedades enunciadas.

Se $G$ é o grupo com tais condições, as inclusões $A \hookrightarrow G, B \hookrightarrow G$ originam homomorfismo $\varphi : A *_C B \to G$, que é injetor e sobrejetor pelas condições do enunciado. □

**Proposição 2.1.3.16.** Seja $G = A *_C B, A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$, tais que

$$A_1 \cap C = B_1 \cap C := C_1.$$

Então, $\langle A_1, B_1 \rangle = A_1 *_{C_1} B_1$ e valem as interseções $\begin{cases} \langle A_1, B_1 \rangle \cap A = A_1 \\ \langle A_1, B_1 \rangle \cap B = B_1 \end{cases}$.

**Proposição 2.1.3.17.** Se $G = A *_C B$, com $G, C$ finitamente gerados, então $A, B$ o serão.

*Demonstração.* Escrevendo cada $g \in G$ como produto de um número finito de elementos em $A \cup B$, considere $A_1, B_1$ subgrupos de $A, B$, respectivamente, dados por

$$A_1 := \langle C, \{a \in A \mid a \text{ aparece na expressão de algum gerador de } G\} \rangle$$

$$B_1 := \langle C, \{b \in B \mid b \text{ aparece na expressão de algum gerador de } G\} \rangle.$$

Note que $A_1 \cap C = B_1 \cap C = C$. Pela proposição 2.1.3.16,

$$\langle A_1, B_1 \rangle = A_1 *_C B_1,\ A_1 = \langle A_1, B_1 \rangle \cap A.$$

Mas, por construção,

$$\langle A_1, B_1 \rangle = A *_C B = G \Rightarrow \langle A_1, B_1 \rangle \cap A = G \cap A = A.$$

Dessas duas igualdades, $A_1 = A$. Como $A_1$ foi formado finitamente gerado, $A$ também o é. O mesmo se faz para mostrar que $B_1 = B$. □

Para encerrar esta seção, é conveniente unir os conceitos de produto livre e de produto livre amalgamado, onde este último é um nome atribuído a um push-out com funções iniciais injetoras. Considere a família $\{G_\alpha\}$ e seja $G_0 = \{e\}$, com homomorfismos injetores $i_\alpha : G_0 \to G_\alpha$. Forma-se, então, o produto livre amalgamado $*_{G_0} G_\alpha := G$, que é o push-out $(G, \{j_\alpha\})$. Esta estrutura coincide com o produto livre dos $G_\alpha$ estabelecido na primeira definição da seção.

### 2.1.4 Subgrupos de grupos livres

O objetivo desta subseção é provar que subgrupos de um grupo livre são livres. Serão estipulados alguns termos a fim de chegar até isso.

**Definição 2.1.4.1.** Seja $F(X)$ grupo livre. $S \subseteq F(X)$ é dito **reduzido de Nielsen**[4] se

[4]No original, *Nielsen reduced*.

**(i)** $e \notin S$.

**(ii)** $|vw| \geq |v|, \forall\ v, w \in S \cup S^{-1}$ tal que $vw \neq e$.

**(iii)** $|uvw| > |u| + |w| - |v|, \forall\ u, v, w \in S \cup S^{-1}$, com $uv \neq e, vw \neq e$.

Em (ii), vale que $|w^{-1}v^{-1}| > |w^{-1}| \Rightarrow |vw| > |w|$.

**Definição 2.1.4.2.** Dado $v \in S \cup S^{-1}$, denote

$$\lambda(v) := \text{maior segmento inicial de } v \text{ que some na redução de } uv, \text{ com}$$

$$u \in S \cup S^{-1},\ uv \neq e.$$

$$\rho(v) := \text{maior segmento final de } v \text{ que se cancela na redução de } vw, \text{ com}$$

$$w \in S \cup S^{-1},\ vw \neq e.$$

Tem-se que

$$\lambda(v^{-1})^{-1} = \rho(v).$$

**Lema 2.1.4.3.** Seja $S$ um conjunto reduzido de Nielsen. Se $v \in S \cup S^{-1}$, então existe segmento de $v$ da forma $\mu(v) \neq e$ com

$$v = \lambda(v)\mu(v)\rho(v)$$

reduzida como escrita (como na definição 2.1.1.19).

**Lema 2.1.4.4.** Seja $S$ reduzido de Nielsen e $u_1, \ldots, u_n \in S \cup S^{-1}$, tais que $u_{i+1} \neq u_i^{-1}, \forall\ i < n$. Quando $u_1 \cdots u_n$ for reduzido, os cancelamentos não afetarão qualquer $\mu(u_i)$. E, ainda,

$$|u_1 \cdots u_n| \geq \begin{cases} |u_2 \cdots u_n| \\ |u_1 \cdots u_{n-1}| \end{cases}.$$

*Demonstração.* Usemos indução em $n$.

- Se $n = 2$: escreva

$$u_1u_2 = \lambda(u_1)\mu(u_1)\rho(u_1)\lambda(u_2)\mu(u_2)\rho(u_2).$$

O máximo que se remove é $\rho(u_1)$ e $\lambda(u_2)$;

- Hipótese de indução: admita provado para um produto de $n-1$ fatores $u_i$.

- Passo indutivo: pela H.I., os cancelamentos requeridos durante a redução de $u_2 \cdots u_n$ não afetam os $\mu(u_i), \forall\ i \in \{2, \ldots, n\}$. Desse modo, $u_2 \cdots u_n$ tem que começar em

$$\lambda(\mu_2)\mu(u_2).$$

Pela definição de $\rho(u_1)$ e de $\lambda(u_2)$, vale que, em $u_1u_2$, o cancelamento não pode afetar $\mu(u_1)$ ou $\mu(u_2)$, como argumentado no caso base. Por $u_2 \cdots u_n, u_2$ se iniciarem em $\lambda(u_2)\mu(u_2)$, tem-se que os cancelamentos em $u_1 \cdots u_n$ não atingem $\mu(u_1)$ ou $\mu(u_2)$. Não afeta, portanto, $\mu(u_i), i > 2$, por estarem à direita de $\mu(u_2)$.

Provemos agora as duas desigualdades do lema. Seja $S$ um conjunto reduzido de Nielsen. Dado $v \in S \cup S^{-1}$, tome $w \in S \cup S^{-1}$ tal que o segmento de $v$ cancelado na redução de $vw$ seja $\rho(v)$. Por ser um cancelamento também em $w$, então $|\lambda(w)| = |\rho(v)|$ e se tem que

$$vw = \lambda(v)\mu(v)\mu(w)\rho(w) \Rightarrow |w| \leq |vw| = |v| + |w| - 2|\rho(v)| \Rightarrow |v| \geq 2|\rho(v)|,$$

onde a primeira desigualdade advém da definição de reduzido de Nielsen.

Por esta desigualdade, ocorre que, na escrita de $u_1 \cdots u_n$, adiciona-se pelo menos $2\rho(u_1)$ em comparação com $u_2 \cdots u_n$. Assim, $|u_1 \cdots u_n| \geq |u_2 \cdots u_n|$. De maneira semelhante prova-se a outra desigualdade. □

**Corolário 2.1.4.5.** $|u_1 \cdots u_n| \geq \begin{cases} n \\ |u_i|, \forall\ i \end{cases}$.

**Corolário 2.1.4.6.** Se $S$ é reduzido de Nielsen, é base livre do grupo $\langle S\rangle$, ou seja, $\langle S\rangle$ é grupo livre com conjunto gerador $S$.

**Definição 2.1.4.7.** Atribua uma boa ordenação $<$ ao conjunto $X$, isto é, dois elementos quaisquer são comparáveis (ordenação total) e cada subconjunto não vazio admite menor elemento. Sejam $\begin{cases} w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} \\ v = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_n} \end{cases}$ palavras reduzidas. Escreve-se que $w << v$ quando uma das condições se verificar

1. $n < m$ ou

2. $n = m$ e existir $k$ tal que $i_r = j_r,\ \varepsilon_r = \delta_r, \forall\ r < k$ e, ainda, para o $k$-ésimo termo ocorrer que $(x_{i_k} < x_{j_k})$ ou $(i_k = j_k,\ \varepsilon_k = 1,\ \delta_k = -1)$.

Segue da definição, que

$$w << v \Rightarrow uw << uv,$$

se ambas forem reduzidas como escritas.

Esta é uma boa ordenação. Será usada na

**Definição 2.1.4.8.** Define-se a relação de ordem $<$ com $w < v$ se ocorre que

1. $|w| < |v|$ ou

2. $|w| = |v|$ e $h(w) << h(v)$ ou

3. $|w| = |v|$ e $h(w) = h(v)$ e, ainda, $h(w^{-1}) << h(v^{-1})$,

onde $h(w)$ é o segmento inicial de tamanho $n$ ou $n + 1$ em $w$, se $|w| = 2n$ ou $2n + 1$, respectivamente.

Esta é uma boa ordenação.

**Proposição 2.1.4.9.** Dados $G \leq F(X)$ e $a \in G$, defina $G_a := \langle\{g \in G \mid g < a\}\rangle$. Se $A := \{a \in G \mid a \notin G_a\}$, então, $A$ é um conjunto reduzido de Nielsen de geradores de $G$.

*Demonstração.* Provemos por indução transfinita que $G \subseteq \langle A\rangle$. Para isso, usaremos a última relação de ordem definida. Fixe $a \in G$ e suponha que se mostrou que, se $g \in G, g < a$, então $g \in \langle A\rangle$. Com isso, cada gerador de $G_a$ está em $\langle A\rangle \Rightarrow G_a \subseteq \langle A\rangle$.

- Se $a \in G_a$: como vale a inclusão acima, então $a \in \langle A\rangle$. Pela arbitrariedade de $a$ tomado em $G$, segue que $G \subseteq \langle A\rangle$.

- Se $a \notin G_a$: da definição de $A$, tem-se que $a \in A \Rightarrow a \in \langle A \rangle \Rightarrow G \subseteq \langle A \rangle$.

Vale que $A$ gera $G$.

Mostremos agora que é reduzido de Nielsen. Se $e \in A$, então $e \notin G_e$, onde, por definição, $G_e = \langle \{g \in G \mid g < e\} \rangle = \langle \emptyset \rangle$. Segue que $e \in G_e$. Contradição. Portanto, $e \notin A$. Tem-se a condição (i).

Admita que, para alguns $x, y \in A, x \neq y$, ocorra que $|x^\varepsilon y^\delta| < |y|, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$ escolhidos. Vale que $x \in \left\langle x^\varepsilon y^\delta, y \right\rangle, y \in \left\langle x^\varepsilon y^\delta, x \right\rangle$, mas

- Se $y < x$: por definição, $G_x = \langle \{g \in G \mid g < x\} \rangle \Rightarrow y \in G_x$. Como $x$ está em um grupo gerado por $y$ e outros elementos, ocorre que $x \in G_x \Rightarrow x \notin A$. Contradição.

- Se $x < y$: $G_y = \langle \{g \in G \mid g < y\} \rangle \Rightarrow x \in G_y$. Como $y$ está em um grupo gerado por $x$ e outros elementos, $y \in G_y \Rightarrow y \notin A$. Contradição.

Provou-se (ii). Para a última condição, note que ela é válida a menos que existam $x, y, z \in A, x \neq y^{-1} \neq z$ com

$$x^\varepsilon = up^{-1}$$
$$y^\delta = pq^{-1}$$
$$z^\eta = qv,$$

onde $\varepsilon, \delta, \eta \in \{\pm 1\}$, com $|p| = |q|, |p| \leq |u|, |p| \leq |v|$ e não se pode cancelar $p$ e $v$ ou $u$ e $q^{-1}$. Assuma, sem perda de generalidade, que $\delta = 1$. Como $y \in A$, então $y \notin \langle \{g \in G \mid g < y\} \rangle = G_y$. Segue que $y < y^{-1}$. Por definição,

$$p = h(y) << h(y^{-1}) = q.$$

- Se $\eta = 1$: então, $z = qv$ e, por $h(y) = p << q = h(z)$, tem-se que $y < z$. Assim, $y \in G_z$. E, ainda,

$$yz = (pq^{-1})(qv) = pv < qv = z.$$

Com isso, $yz \in G_z$. Dessas duas últimas inclusões, $z \in G_z$. Contradição com $z \in A$.

- Se $\eta = -1$: pode ocorrer apenas que $|z| = |y|$ ou que $|y| < |z|$. Supondo este último, então $y < z \Rightarrow y \in G_z$. Vale que

$$zy^{-1} = (v^{-1}q^{-1})(qp^{-1}) = v^{-1}p^{-1} < v^{-1}q^{-1} = z \Rightarrow zy^{-1} \in G_z.$$

Por essas duas inclusões, $z \in G_z$. Contradição com $z \in A$. Desse modo, $|y| = |z|$. Segue que $y = pq^{-1}, z = v^{-1}q^{-1}$ e, assim, $|p| = |v|$.

- Se $p << v^{-1}$, então $h(y) = p << v^{-1} = h(z)$ e, portanto, $y < z$. Pela definição do conjunto $G_z$, $y \in G_z$. E, ainda,

$$zy^{-1} = (v^{-1}q^{-1})(qp^{-1}) = v^{-1}p^{-1} < v^{-1}q^{-1} = z.$$

Com isso, $zy^{-1} \in G_z$.

De $y \in G_z$ e $zy^{-1} \in G_z$, segue que $z \in G_z$, que, como antes, é uma contradição com $z \in A$.

- Se $v^{-1} << p$: portanto, $h(z) << h(y) \Rightarrow z < y \Rightarrow z \in G_y$. Vale que

$$zy^{-1} = (v^{-1}q^{-1})(qp) = v^{-1}p < pq^{-1} = y,$$

ou seja, $zy^{-1} < y$ e, assim, $zy^{-1} \in G_y$.

Das duas últimas inclusões , $y \in G_y$. Contradição com $y \in A$.

Desse modo, nenhuma das possibilidades se concretiza e vale a terceira condição da definição (2.1.4.1). $\square$

Abaixo, o teorema da seção.

**Teorema 2.1.4.10.** Todo subgrupo de um grupo livre é livre.

*Demonstração.* Se $G \leq F(X)$, pela proposição 2.1.4.9, há base $A$ de $G$ que é reduzida de Nielsen. Do corolário 2.1.4.6, $A$ gera $\langle A \rangle$ livremente. Como $\langle A \rangle = G$, segue o resultado. □

## 2.2 Homologia

**Definição 2.2.0.1.** Dado $R$ anel associativo e com identidade $1_R$, um $R$**-módulo à esquerda** é definido por um grupo abeliano $A$ com notação aditiva e uma operação binária $\theta : R \times A \to A$ tal que, se $r, r' \in R,\ a, a' \in A$,

**(i)** $\theta(r, a + a') = \theta(r, a) + \theta(r, a')$.

**(ii)** $\theta(r + r', a) = \theta(r, a) + \theta(r', a)$.

**(iii)** $\theta(rr', a) = \theta(r, \theta(r', a))$.

**(iv)** $\theta(1_R, a) = a$.

Pelas propriedades (iii) e (iv), quando $R$ é corpo, então $\theta$ é uma ação do grupo multiplicativo de $R$ sobre o conjunto $A$.

Se $\theta(r, a) = 0_A, \forall\ r \in R, a \in A$, tem-se o **módulo trivial**.

É comum o uso da notação $\theta(r, a) := ra$.

De maneira análoga, um $R$-módulo à direita segue todas as afirmações acima menos (iii), que é estabelecida como

(iii') $\theta(rr', a) = \theta(r', \theta(r, a))$.

Pode-se ter um módulo à esquerda e à direita, isto é, $A$ $S$-módulo à esquerda e $R$-módulo à direita, com lei associativa

$$s(ar) = (sa)r, \forall\ a \in A, r \in R, s \in S.$$

Denota-se ${}_SA_R$ o chamado $(R - S)$**-bimódulo**.

**Definição 2.2.0.2.** Sejam $A, B$ $R$-módulos à esquerda. Uma função $f : A \to B$ é um $R$**-mapa** se

**(i)** $f(a + a') = f(a) + f(a')$. Isto é, $f$ é um homomorfismo entre os grupos abelianos definidos por $A, B$.

**(ii)** $f(\theta(r, a)) = \tilde{\theta}(r, f(a))$, em que $\theta : R \times A \to A$ e $\tilde{\theta} : R \times B \to B$.

**Definição 2.2.0.3.** Seja $A$ um $R$-módulo à esquerda. $A'$ é submódulo de $A$ se satisfizer que $A' \leq A$ e $\theta(r, A') \subseteq A', \forall\ r \in R$.

Quando não especificado no texto, $R$ denotará um anel associativo com unidade e os módulos considerados serão $R$-módulos à esquerda.

**Definição 2.2.0.4.** O conjunto quociente $A/A'$ recebe a caracterização de $R$-módulo quando atribuída a função $\tilde{\theta}(r, a + A') = \theta(r, a) + A'$, em que $\tilde{\theta} : R \times A/A' \to A/A'$ e $\theta : R \times A \to A$.

Como $A$ é um grupo aditivo abeliano, então cada subgrupo $A'$ é normal e, portanto, $A/A'$ já possui estrutura de grupo quociente abeliano bem definida.

**Definição 2.2.0.5.** Dada uma família $\{A_k \mid k \in K\}$ de $R$-módulos, $\prod_{k\in K} A_k$, chamado de **produto direto**, é um $R$-módulo associado ao produto cartesiano dos $A_k$, munido das operações

$$(a_k) + (b_k) = (a_k + b_k).$$

$$r(a_k) = (ra_k).$$

**Definição 2.2.0.6.** Se tomado o subconjunto de $\prod_{k\in K} A_k$ formado por todos os $(a_k)$ onde quase todas as coordenadas são nulas (todas nulas, a menos de uma quantidade finita delas), forma-se um submódulo, denotado por $\sum A_k$ e chamado de **soma direta**.

É imediato dessas duas definições que, se $|K| < \infty$, os módulos acima coincidem. Se $|K| = \infty$ e $A_k \neq 0$ para algum $k$, vale que $\sum A_k$ é submódulo próprio do produto direto.

**Definição 2.2.0.7.** Uma sequência de $R$-mapas

$$\cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \to \cdots$$

é dita **exata** se $Im(f_{n+1}) = ker(f_n), \forall\ n$.

Se exata da forma $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, é chamada de **sequência exata curta**.

**Definição 2.2.0.8.** Uma **categoria** $\mathfrak{C}$ consiste em:

**(i)** Uma classe de objetos, $obj\ \mathfrak{C}$.

**(ii)** Para cada par de objetos $A, B$, um conjunto de morfismos, $Hom(A, B)$.

**(iii)** Uma lei de composição de morfismos, com $Hom(A, B) \times Hom(B, C) \to Hom(A, C)$, em que $(f, g) \mapsto gf$.

Estes três dados estão submetidos aos axiomas:

**(iv)** A composição é associativa, ou seja, se

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D,$$

então $h(gf) = (hg)f$.

**(v)** Há morfismos identidade, isto é, para cada objeto $A$, existe $1_A \in Hom(A, A)$, com $1_A f = f,\ g1_A = g, \forall\ f \in Hom(B, A), g \in Hom(A, C)$.

**Exemplo 2.2.0.9.** Considere $\mathfrak{C}$ em que os objetos são os grupos, os morfismos são os homomorfismos de grupos e as composições entre estes são as composições usuais.

**Exemplo 2.2.0.10.** Se $R$ é anel, tome $\mathfrak{C}$:= $R$-módulos à esquerda, $R$-mapas e composições usuais. Esta categoria é ${}_R\mathfrak{M}$.

De maneira semelhante, $\mathfrak{M}_R$ denota a categoria quando se tem $R$-módulos à direita.

O conjunto de $R$-mapas da forma $f : A \to B$ dentro de alguma dessas categorias é reunido em $Hom_R(A, B)$.

**Definição 2.2.0.11.** Um morfismo $f : A \to B$ é um **isomorfismo** se houver $g : B \to A$ com $gf = 1_A,\ fg = 1_B$.

**Exemplo 2.2.0.12.** Na categoria de espaços topológicos, funções contínuas e lei usual de composição, os isomorfismos são homeomorfismos.

**Definição 2.2.0.13.** Um produto tensorial de $A \in \mathfrak{M}_R$ e $B \in {}_R\mathfrak{M}$ é um grupo abeliano $A \otimes_R B$ e uma função $R$-biaditiva $f : A \times B \to A \otimes_R B$, isto é, se $a \in A, b \in B, r \in R$,

$$f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$$

$$f(a, b + b') = f(a, b) + f(a', b)$$

$$f(ar, b) = f(a, rb),$$

que, para cada grupo abeliano $G$ e $h : A \times B \to G$ biaditiva, verificam que existe único homomorfismo $h' : A \otimes_R B \to G$ tal que $h' \circ f = h$.

**Teorema 2.2.0.14.** O produto tensorial de um $R$-módulo $A$ e um $R$-módulo $B$ existe e é único a menos de isomorfismo.

Antes do próximo objeto ser apresentado, considere que, em álgebra abstrata, um **grupo abeliano livre**, também chamado de $\mathbb{Z}$-módulo livre, é um grupo abeliano cujos elementos podem ser escritos de maneira única como combinação linear dos elementos de um subconjunto (denominado base) usando coeficientes inteiros e com apenas um número finito destes não zero.

*Demonstração.* Seja $F$ um grupo abeliano livre de base $A \times B$, ou seja, $F$ é grupo formado por combinações lineares sobre os inteiros de todos os pares $(a, b)$. Seja $S$ o subgrupo de $F$ gerado por

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b) \qquad (a, b + b') - (a, b) - (a, b') \qquad (ar, b) - (a, rb),$$

onde $a \in A, b \in B, r \in R$.

Defina, então, $A \otimes_R B := F/S$, denotando $a \otimes b := (a, b) + S$. Com isso, o mapa $f : A \times B \to A \otimes_R B,\ (a, b) \mapsto a \otimes b$ é $R$-biaditivo.

Seja agora $G$ grupo abeliano, com $h : A \times B \to G$ função $R$-biaditiva. Por $F$ ser livre em $A \times B$, existe único homomorfismo $\varphi : F \to G,\ \varphi((a, b)) = h((a, b))$.

Por $h$ ser $R$-biaditivo e pela construção de $S$, $S \subseteq ker(\varphi)$. Tem-se que $\varphi$ induz um homomorfismo $h' : F/S \to G,$ com $h'((a, b) + S) = \varphi((a, b)) = h((a, b))$, isto é, $h' \circ f = h$.

Provemos a unicidade de $h'$. Se houvesse outro homomorfismo $h''$ tal que $h'' \circ f = h$, em particular ocorreria que

$$h((a, b)) = h'' \circ f((a, b)) = h''(a \otimes b).$$

De maneira semelhante,

$$h((a, b)) = h'(a \otimes b).$$

Como $a \otimes b$ geram $A \otimes_R B$ e $h', h''$ coincidem sobre tais elementos, os homomorfismos são iguais.

Provemos a unicidade do produto tensorial a menos de isomorfismo.

Suponha $X$ grupo e $k : A \times B \to X$ outro mapa $R$-biaditivo tais que estes solucionem o problema de mapeamento universal de que, para cada grupo abeliano $G$ dado e $h : A \times B \to G$ função $R$-biaditiva, exista único homomorfismo $h' : X \to G$ para o qual $h' \circ k = h$.

Com isso, tem-se o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "k"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, shift left, "k'"] \\ & X \arrow[ur, shift left, "f'"] & \end{tikzcd},$$

onde $k' \circ f = k, \qquad f' \circ k = f$.

Então, em $A \otimes_R B$, está definido o mapa identidade ou $f' \circ k'$, pois $f' \circ k' \circ f = f' \circ k = f$. Da unicidade, $id = f' \circ k'$. De maneira semelhante, $k' \circ f' = 1_X$ e se tem $k'$ isomorfismo de $A \otimes_R B$ e $X$. □

**Definição 2.2.0.15.** Um **funtor covariante** entre categorias, é da forma $F : \mathfrak{C} \to \tilde{\mathfrak{C}}$ tal que

**(i)** Se $A \in obj\ \mathfrak{C}$, então $F(A) \in obj\ \tilde{\mathfrak{C}}$.

**(ii)** Se $f : A \to B$ é morfismo em $\mathfrak{C}$, isto é, se $f \in Hom(A, B)$, então $F(f) : F(A) \to F(B)$ é morfismo em $\tilde{\mathfrak{C}}$.

**(iii)** Dados $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ morfismos em $\mathfrak{C}$, então $F(gf) = F(g)F(f) : F(A) \to F(C)$.

**(iv)** $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

**Definição 2.2.0.16.** Um **funtor contravariante** respeita as propriedades (i) e (iv) e inverte (ii) e (iii) no sentido de que,

**(ii')** Se $f : A \to B$, vale que $F(f) : F(B) \to F(A)$.

**(iii')** Dada $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ em $\mathfrak{C}$, vale que $F(gf) = F(f)F(g) : F(C) \to F(A)$.

**Exemplo 2.2.0.17.** Seja $F$ : grupos $\to$ conjuntos, onde $(G, \cdot) \mapsto G$ e $f \mapsto f$ (homomorfismo de grupos é levado em funções entre conjuntos). Este é um funtor covariante.

**Exemplo 2.2.0.18.** Se $A \in obj\ \mathfrak{C}$, então $F := Hom(A, \cdot) : \mathfrak{C} \to$ conjuntos é um funtor covariante tal que

$$F(B) = Hom(A, B)$$

e, se $g : B \to C$,

$$F(g) : Hom(A, B) \to Hom(A, C),\ f \mapsto g \circ f : A \to C.$$

**Exemplo 2.2.0.19.** Fixe um objeto $B$ em determinada categoria. Como feito acima, $F = Hom(\cdot, B) : \mathfrak{C} \to$ conjuntos é um funtor contravariante, com

$$F(A) = Hom(A, B)$$

e, se $f : A \to \tilde{A}$, então

$$F(f) : Hom(\tilde{A}, B) \to Hom(A, B),\ h \mapsto h \circ f.$$

Estes dois funtores serão de particular interesse quando $\mathfrak{C} = {}_R\mathfrak{M}$ ou $\mathfrak{M}_R$, para os quais os funtores tomam valores na categoria de grupos abelianos, $Ab$.

**Exemplo 2.2.0.20.** Seja $A$ um $R$-módulo à direita. Defina o funtor $F : {}_R\mathfrak{M} \to Ab$ por $B \mapsto A \otimes_R B,\ f \mapsto 1_A \otimes f$, onde $f : B \to B'$ é um $R$-mapa entre $R$-módulos à esquerda $B, B'$.

**Exemplo 2.2.0.21.** Seja $B$ um $R$-módulo à esquerda. Defina o funtor $F : \mathfrak{M}_R \to Ab$ por $A \mapsto A \otimes_R B$, $g \mapsto g \otimes 1_B$, onde $g : A \to A'$ é um $R$-mapa entre $R$-módulos à direita $A, A'$.

Considerando ${}_SB_R$ e ${}_SC$, pode-se munir $Hom_S(B, C)$ da estrutura de $R$-módulo à esquerda, onde

$$(rf)b := f(br).$$

Dados ${}_SB_R$ e ${}_RA$, tem-se que $B \otimes_R A$ é $S$-módulo à esquerda, com

$$s(b \otimes a) := (sb) \otimes a.$$

**Definição 2.2.0.22.** Um funtor $F : \mathfrak{C} \to \tilde{\mathfrak{C}}$ é dito aditivo se $F(f + g) = F(f) + F(g)$, onde as expressões acima fazem sentido se $Hom(A, B), Hom(\tilde{A}, \tilde{B})$ forem grupos abelianos aditivos e se as leis distributivas, quando definidas, forem válidas. Diz-se que a categoria em que essas duas propriedades são respeitadas é **pré-aditiva**.

**Exemplo 2.2.0.23.** Exemplos de categorias pré-aditivas são a de grupos abelianos, $Ab$, e a de $R$-módulos à esquerda, ${}_R\mathfrak{M}$.

**Definição 2.2.0.24.** Se $A = \prod A_k$ ou $A = \sum A_k$, define-se $\begin{cases} p_k : A \to A_k \\ i_k : A_k \to A \end{cases}$ a projeção e a inclusão, respectivamente.

Note que $p_k \circ i_k = 1_{A_k}$ e $p_j \circ i_k = 0$, se $j \neq k$.

**Teorema 2.2.0.25.** Dados $R$-módulos $A$ e $\{A_k\}$, então $A \simeq \sum A_k$ se, e somente se, existirem $i_k : A_k \to A$ tais que, dado qualquer módulo $X$ e homomorfismos $f_k : A_k \to X$, exista única $\phi : A \to X$ tal que $\phi \circ i_k = f_k, \forall\, k$.

*Demonstração.* Suponha que $A \simeq \sum A_k$ e considere $\{p_k : A \to A_k\}$ as projeções. Defina $\phi : A \to X$ por $\phi(a) := \sum f_k \circ p_k(a)$. Como quase todos os $p_k(a)$ são 0, a expressão para $\phi$ é uma soma finita e tem sentido. Se $j$ fixo,

$$\phi(i_j(a_j)) = \sum_k f_k \circ p_k \circ i_j(a_j) = \left( \sum_{k \neq j} f_k \circ p_k \circ i_j(a_j) \right) + f_j(p_j(i_j(a_j))) = f_j(a_j) \Rightarrow \phi \circ i_j = f_j.$$

Para a unicidade, admita que $\psi$ seja outro mapa com $\psi \circ i_k = f_k, \forall\, k$. Dado $a \in A$, escreva $a = \sum i_k(p_k(a))$. Assim,

$$\psi(a) = \psi\left(\sum i_k(p_k(a))\right) = \sum \psi(i_k(p_k(a))) = \sum f_k(p_k(a)) = \phi(a).$$

Tem-se a unicidade.

Assuma agora que existam as funções $i_k$ e única função $\psi$ com as condições do enunciado. Considere os mapas
$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[rr, "i_k"] \arrow[dr, "f_k"'] & & A \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & \sum A_k & \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} A_k \arrow[rr, "f_k"] \arrow[dr, "i_k"'] & & \sum A_k \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ & A & \end{tikzcd}.$$

Tomando $X = \sum A_k$, $\psi$ existe por suposição. Tem-se que

$$\phi \circ \psi \circ i_k = \phi \circ f_k = i_k.$$

Mas, $\phi \circ \psi : A \to A$ é único. Portanto, tem que ser $1_A$ e segue o isomorfismo de $A$ e $\sum A_k$. □

**Teorema 2.2.0.26.** Dados $R$-módulos $B$ e $\{A_k\}$, $Hom_R(\sum A_k, B) \simeq \prod Hom_R(A_k, B)$.

*Demonstração.* Defina $\theta : Hom_R(\sum A_k, B) \to \prod Hom_R(A_k, B)$ por $\varphi \mapsto (\varphi \circ i_k)$, onde $i_k : A_k \to \sum A_k$ é a inclusão. Então,

- $\theta$ é homomorfismo de grupos: sejam $\varphi, \phi \in Hom_R(\sum A_k, B)$. Tem-se que

$$\theta(\varphi + \phi)(a_k) = (\varphi + \phi) \circ i_k(a_k) = \varphi \circ i_k(a_k) + \phi \circ i_k(a_k) = \theta(\varphi)(a_k) + \theta(\phi)(a_k).$$

- $\theta$ é epimorfismo: seja $(f_k) \in \prod Hom_R(A_k, B)$. Então, cada $f_k$ é uma função $f_k : A_k \to B$ e, pelo teorema 2.2.0.26, existe única $\phi : \sum A_k \to B$ com $\phi \circ i_k = f_k$. Portanto,

$$\theta(\phi) = (\phi \circ i_k) = (f_k).$$

Da existência de $\phi$, segue a sobrejetividade.

- $\theta$ é monomorfismo: suponha que haja $\phi \in ker(\theta)$, isto é, que

$$0 = \theta(\phi) = (\phi \circ i_k) \Rightarrow \phi \circ i_k = 0, \forall\, k.$$

Desse modo, $\phi$ completa o diagrama que o mapa identicamente nulo também completa. Pela unicidade no último teorema, $\phi = 0$. □

Os dois próximos itens, presentes em ([10]), são análogos em enunciado e demonstração ao que foi feito nos dois anteriores.

**Teorema 2.2.0.27.** Sejam $A, \{A_k\}$ módulos dados. É válido que $A \simeq \prod A_k$ se, e somente se, existirem $p_k : A \to A_k$ tais que, para qualquer módulo $X$ e homomorfismos $f_k : X \to A_k$, exista único $\phi : X \to A$ tal que $p_k \circ \phi = f_k, \forall\, k$.

**Teorema 2.2.0.28.** $Hom_R(B, \prod A_k) \simeq \prod Hom_R(B, A_k)$.

**Teorema 2.2.0.29.** Dados $A, B$ com $i : A \to B$ monomorfismo, vale que $A$ é um somando direto de $B$ se, e somente se, existir $p : B \to A$ com $p \circ i = 1_A$.

*Demonstração.* Suponha $A$ somando direto de $B$. Com isso, $B = i(A) \oplus C$, onde $C$ é um submódulo de $B$. Considere $p : B \to A$ a projeção em $A$, com $ker(p) := C$. Desse modo, $p \circ i = 1_A$.

Seja $p : B \to A$ uma função tal que $p \circ i = 1_A$. Defina $C := ker(p)$.

Afirmação: $B = i(A) \oplus C$.

Se $b \in B$, escreva $b = i(p(b)) + (b - i(p(b)))$. A primeira parcela está em $i(A)$ e a segunda está em $C$, pois $p(b - i(p(b))) = p(b) - p \circ i(p(b)) = p(b) - p(b) = 0$. Portanto, $B$ é soma de $i(A)$ e $C$.

Se $c \in i(A) \cap C$,

$$c = i(a) \text{ e } p(c) = 0_A \Rightarrow p(i(a)) = 0_A \Rightarrow 1_A(a) = 0_A \Rightarrow a = 0_A.$$

Ou seja, $c = i(0_A) = 0_B$ e se tem a soma direta. □

**Definição 2.2.0.30.** Uma sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ **cinde**[5] se existir $j : C \to B$ tal que $p \circ j = 1_C$.

**Lema 2.2.0.31.** São equivalentes:

[5] No inglês, *the sequence splits*.

**(i)** A sequência cinde.

**(ii)** Existe $q : B \to A$ com $q \circ i = 1_A$.

**(iii)** Existe isomorfismo $h : B \to A \oplus C$ tal que $h \circ i$ é o mapa de inclusão de $A$ na soma direta e $p \circ h^{-1}$ é a projeção em $C$.

*Demonstração.* (ii) $\Rightarrow$ (iii): escreva $b = (b - i(q(b))) + i(q(b))$. Então, $i(q(b)) \in Im(i)$ e $q(b - i(q(b)) = q(b) - q(i(q(b)) = q(b) - q(b) = 0_A \Rightarrow b - i(q(b)) \in ker(q)$. Vale que $ker(q) \cap Im(i) = \{0\}$, pois, se há $b$ na intercessão,

$$0_A = q(b) = q(i(a)) = a.$$

Desse modo, $B$ é soma direta de $ker(q)$ e $Im(i)$, e, para cada $b \in B$, existe única expressão $b = i(a) + k,\ k \in ker(q)$.

Pela sequência ser exata, $p$ é sobrejetor. Com isso, cada $c \in C$ é da forma $c = p(b)$, onde $b \in B$.

Unindo as duas construções,

$$c = p(b) = p(i(a) + k) = p(k).$$

Segue que cada $c \in C$ é expresso como imagem por $p$ de algum elemento de $ker(q)$. Então, $p(ker(q)) = C$.

Se $p_{|ker(q)}(k) = 0$, tem-se que $k \in ker(p) = Im(i)$. Mas, $k \in ker(q)$ e $ker(q) \cap Im(i) = \{0\}$. Assim, $k = 0_B$. Com isso, $p_{|ker(q)}$ é um isomorfismo. Como a sequência é exata, $i$ é injetor. Portanto, $Im(i) \simeq A$ e se pode escrever que

$$B \simeq ker(q) \oplus Im(i) \simeq C \oplus A.$$

(i) $\Rightarrow$ (iii): segue como feito acima, mas usando que $p \circ j = 1_C$ no lugar de $q \circ i = 1_A$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) e (ii): Tome $q$ a projeção natural de $A \oplus C$ em A e $j$ a inclusão natural de $C$ em $A \oplus C$. $\square$

**Corolário 2.2.0.32.** Os funtores $Hom_R(A, \cdot)$, $Hom_R(\cdot, B)$ levam sequências exatas curtas que cindem em outras que cindem.

**Definição 2.2.0.33.** Um funtor covariante $F$ é **exato à esquerda** se

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \text{ exata} \Rightarrow 0 \to F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \text{ exata.}$$

**Definição 2.2.0.34.** Um funtor covariante $F$ é **exato à direita** se

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \text{ exata} \Rightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \to 0 \text{ exata.}$$

**Definição 2.2.0.35.** Um funtor contravariante $F$ é **exato à esquerda** se

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \text{ exata} \Rightarrow 0 \to F(C) \xrightarrow{F(\beta)} F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A) \text{ exata.}$$

**Definição 2.2.0.36.** Um funtor contravariante $F$ é **exato à direita** se

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \text{ exata} \Rightarrow F(C) \xrightarrow{F(\beta)} F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A) \to 0 \text{ exata.}$$

Um funtor é dito **exato** se é exato à esquerda e à direita.

**Proposição 2.2.0.37.** Considere a categoria de módulos.

a) Um funtor covariante $F$ é exato à esquerda se, e somente se, dado morfismo $\beta$,

$$F(ker(\beta)) \simeq ker(F(\beta)).$$

Em particular, $F$ preserva monomorfismos.

b) Um funtor covariante $F$ é exato à direita se, e somente se, dado morfismo $\alpha$,

$$F(coker(\alpha)) \simeq coker(F(\alpha)).$$

Em particular, $F$ preserva epimorfismos.

*Demonstração.* a) Dado $\beta : B \to C$, considere a sequência exata $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$, onde $\alpha$ é a inclusão de $A := ker(\beta)$ em $B$. Por hipótese, $0 \to F(A) \xrightarrow{f(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} C$ é exata. Queremos mostrar que $ker(F(\beta)) \simeq F(ker(\beta))$. Pela exatidão da segunda sequência, tem-se que

$$ker(F(\beta)) \simeq Im(F(\alpha)) \simeq F(A).$$

Ou seja, queremos que $F(A) \simeq F(ker(\beta))$, o que é verdade pela exatidão da primeira sequência.

Suponha que ocorra o isomorfismo do enunciado e seja $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ sequência exata. Vale que

$$ker(F(\alpha)) \simeq F(ker(\alpha)) \simeq F(0) = 0.$$

Portanto, $F(\alpha)$ é monomorfismo. E, ainda,

$$ker(F(\beta)) \simeq F(ker(\beta)) \simeq F(Im(\alpha)) \simeq F(A) \simeq F(A)/\{0\} = F(A)/ker(F(\alpha)) \simeq Im(F(\alpha)).$$

Ocorre, assim, a exatidão da sequência ao se aplicar o funtor.

b) Segue-se procedimento semelhante ao de a). □

**Teorema 2.2.0.38.** $Hom_R(M, \cdot)$ é funtor covariante exato à esquerda e $Hom_R(\cdot, N)$ é funtor contravariante exato à esquerda.

*Demonstração.* Provemos um segue de maneira similar o outro. Seja $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ exata. Queremos que $0 \to Hom_R(M, A) \xrightarrow{F(\alpha)} Hom_R(M, B) \xrightarrow{F(\beta)} Hom_R(M, C)$ seja exata, onde $(F(\alpha))(\phi) = \alpha \circ \phi$ e $(F(\beta))(\psi) = \beta \circ \psi$.

(i) $F(\alpha)$ é monomorfismo: seja $\phi \in ker(F(\alpha)) \Rightarrow \alpha \circ \phi = 0 \Rightarrow \alpha(\phi(m)) = 0, \forall\ m \in M$. Como $\alpha$ é injetor devido à exatidão da sequência, ocorre que $\phi(m) = 0, \forall\ m \in M$ e, assim, $\phi$ é o homomorfismo nulo. Por se ter $ker(F(\alpha))$ trivial, $F(\alpha)$ é injetor.

(ii) $Im(F(\alpha)) \subseteq ker(F(\beta))$: suponha que $\psi \in Im(F(\alpha))$. Da definição de $F(\alpha)$, $\psi = \alpha \circ \phi$, para algum $\phi \in Hom_R(M, A)$. Com isso,

$$(F(\beta))(\psi) = \beta \circ \psi = \beta \circ (\alpha \circ \phi) = (\beta \circ \alpha) \circ \phi = 0,$$

pois $Im(\alpha) = ker(\beta)$ pela exatidão garantida.

(iii) $ker(F(\beta)) \subseteq Im(F(\alpha))$: seja $\psi : M \to B$ e suponha que $F(\beta)(\psi) = 0$, isto é, $\psi \in ker(F(\beta))$. Se $m \in M$, então $\psi(m) \in \alpha(A)$, porque

$$0 = (F(\beta))(\psi) = (\beta \circ \psi)(m) \Rightarrow \psi(m) \in ker(\beta) = Im(\alpha).$$

Desse modo, $\alpha^{-1}(\psi(m))$ é não vazio e da injetividade de $\alpha$, existe único $a \in A$ tal que $\alpha(a) = \psi(m)$. Defina $\phi : M \to A$ por $\phi(m) = a$. Com isso,

$$(F(\alpha))(\phi) = \alpha \circ \phi = \psi \Rightarrow \psi \in Im(F(\alpha)).$$

□

**Teorema 2.2.0.39.** $M \otimes_R$ e $\otimes_R N$ são funtores covariantes exatos à direita.

*Demonstração.* Provemos o primeiro. Seja $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ exata e considere

$$M \otimes A \xrightarrow{1\otimes\alpha} M \otimes B \xrightarrow{1\otimes\beta} M \otimes C \to 0.$$

(i) $Im(1\otimes\alpha) \subseteq ker(1\otimes\beta)$: se mostrarmos que $(1\otimes\beta)(1\otimes\alpha) = 0$, então $Im(1\otimes\alpha) \subseteq ker(1\otimes\beta)$. Vale que

$$(1 \otimes \beta)(1 \otimes \alpha) = 1 \otimes (\beta \circ \alpha) = 1 \otimes 0 = 0.$$

(ii) $ker(1 \otimes \beta) \subseteq Im(1 \otimes \alpha)$: $\beta$ induz um mapa

$$\tilde{\beta} : (M \otimes B)/E \to M \otimes C, \ m \otimes b + E \mapsto m \otimes \beta(b),$$

onde $E := Im(1 \otimes \alpha)$. Do passo anterior, $E \subseteq ker(1 \otimes \beta)$ e, assim, $\tilde{\beta}$ está bem definida.

Se $\pi : M \otimes B \to (M \otimes B)/E$ é a projeção natural, tem-se que

$$\tilde{\beta} \circ \pi = 1 \otimes \beta. \tag{5}$$

Se provado que $\tilde{\beta}$ é isomorfismo, pode-se escrever que

$$ker(1 \otimes \beta) = ker(\tilde{\beta} \circ \pi) = ker(\pi) = E = Im(1 \otimes \alpha),$$

onde a primeira igualdade ocorre por (5), a segunda segue de $\tilde{\beta}$ ser injetor e a terceira advém da definição de $\pi$. Ou seja, segue a condição. Mostremos, assim, que $\tilde{\beta}$ é isomorfismo. Considere

$$f : M \times C \to M \otimes B/E, \ (m, c) \mapsto m \otimes b + E,$$

onde $b$ é tal que $\beta(b) = c$ ($\beta$ é sobrejetor pela exatidão da sequência).

Se $\beta(b) = \beta(\tilde{b}) = c$, então $(m, c) \overset{f}{\mapsto} m \otimes b + E$ e $(m, c) \overset{f}{\mapsto} m \otimes \tilde{b} + E$. Tem-se que

$$\beta(b) = \beta(\tilde{b}) \Rightarrow b - \tilde{b} \in ker(\beta) = Im(\alpha) \Rightarrow \alpha(a) = b - \tilde{b},$$

para algum $a \in A$. Com isso,

$$(1 \otimes \alpha)(m \otimes a) = m \otimes (b - \tilde{b}) \Rightarrow m \otimes b - m \otimes \tilde{b} \in E \Rightarrow m \otimes b + E = m \otimes \tilde{b} + E.$$

Este mapa está, assim, bem definido.

Por $f$ ser uma função biaditiva, segue, da propriedade universal do produto tensorial, que existe $\tilde{f} : M \otimes C \to M \otimes B/E$ tal que $\tilde{f}(m \otimes c) = m \otimes b + E$. Ocorre que

$$\tilde{f} \circ \tilde{\beta}(m \otimes b + E) = \tilde{f}(m \otimes \beta(b)) = m \otimes b + E.$$

$$\tilde{\beta} \circ \tilde{f}(m \otimes c) = \tilde{\beta}(m \otimes b + E) = m \otimes \beta(b) = m \otimes c.$$

Portanto, existe inverso e $\tilde{\beta}$ é isomorfismo.

(iii) $1 \otimes \beta$ é epimorfismo: tome $\sum m_i \otimes c_i \in M \otimes C$. Como $\beta$ é sobrejetor, existe $b_i \in B$ tal que $\beta(b_i) = c_i$. Assim,

$$(1 \otimes \beta)\left(\sum m_i \otimes b_i\right) = \sum m_i \otimes \beta(b_i) = \sum m_i \otimes c_i \Rightarrow 1 \otimes \beta \text{ é sobrejetor.}$$

□

Os teoremas acima deram exemplos de funtores exatos à direita ou à esquerda. Quando aparecem módulos à esquerda e à direita, tem-se o

**Teorema 2.2.0.40.** Dados ${}_RA$, ${}_SB_R$ e ${}_SC$, ocorre que $Hom_R(A, Hom_S(B,C)) \simeq Hom_S(B \otimes_R A, C)$.

*Demonstração.* Busquemos um isomorfismo

$$\tau_{A,B} : Hom_R(A, Hom_S(B,C)) \to Hom_S(B \otimes_R A, C).$$

Como $B$ é um $(S-R)$-bimódulo, então $B \otimes_R A$ é um $S$-módulo à esquerda e $Hom_S(B,C)$ é um $R$-módulo à esquerda e, portanto, a expressão no enunciado tem sentido.

Dada $f : B \otimes_R A \to C$ um $S$-mapa e $a \in A$, defina $f_a : B \to C$, $f_a(b) := f(b \otimes a)$. Com isso, a aplicação $a \mapsto f_a$ é um $R$-mapa de $A$ em $Hom_S(B,C)$, denotado por $\overline{f}$. Defina

$$\psi : Hom_S(B \otimes_R A, C) \to Hom_R(A, Hom_S(B,C)),\ f \mapsto \overline{f}.$$

Esta é um homomorfismo. Exibamos a inversa.

Dada $g : A \to Hom_S(B,C)$ um $R$-mapa, defina $\overline{g} : B \otimes_R A \to C$, $\overline{g}(b \otimes a) = g_a(b)$. Este é um $S$-mapa bem definido. Construa agora

$$\phi : Hom_R(A, Hom_S(B,C)) \to Hom_S(B \otimes_R A, C),\ \phi(g) = \overline{g}.$$

Então, $\psi, \phi$ são o inverso um do outro e ocorre isomorfismo. □

De modo a encurtar a notação, se $F = Hom(X, \cdot)$, usa-se $\boxed{F(f) := f_*}$ e, se $G = Hom(\cdot, X)$, introduz-se $\boxed{G(f) := f^*}$.

**Definição 2.2.0.41.** Sejam $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtores. O par ordenado $(G,F)$ é um **par adjunto** se, para cada $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$, existir $\tau_{A,B} : Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \to Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B)$ isomorfismo que faça os diagramas abaixo comutar para quaisquer $f : \tilde{A} \to A$ em $\mathcal{A}$ e $g : B \to \tilde{B}$ em $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\tau"] & Hom_{\mathcal{A}}(\tilde{A}, G(B)) \arrow[d, "\tau"] \\
Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) \arrow[r, "F(f)^*"] & Hom_{\mathcal{B}}(F(\tilde{A}), B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \arrow[r, "G(g)_*"] \arrow[d, "\tau"] & Hom_{\mathcal{A}}(A, G(\tilde{B})) \arrow[d, "\tau"] \\
Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) \arrow[r, "g_*"] & Hom_{\mathcal{B}}(F(A), \tilde{B})
\end{tikzcd}$$

**Teorema 2.2.0.42.** Dado ${}_SB_R$, $Hom_S(B, \cdot)$ e $B \otimes_R$ formam um par adjunto.

*Demonstração.* Seja $F = B \otimes_R$ e $G = Hom_S(B, \cdot)$. Pelo teorema 2.2.0.40, tem-se $\tau$. □

Usemos funtores para caracterizar a exatidão de uma sequência.

**Lema 2.2.0.43.** Suponha que $B' \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} B'' \to 0$ seja uma sequência que, para cada módulo $M$, tenha

$$0 \to Hom_R(B'', M) \xrightarrow{\beta^*} Hom_R(B, M) \xrightarrow{\alpha^*} Hom_R(B', M)$$

exata. Então, a sequência inicial é exata.

*Demonstração.* (i) $\beta$ é epimorfismo: seja $M := coker(\beta) = B''/Im(\beta)$. Se $f : B'' \to M$ é a projeção natural, vale que

$$\beta^*(f) = f \circ \beta : B \to M.$$

Mas, $f \circ \beta(b) = 0$, pois $\beta(b) \in Im(\beta) = ker(f)$. Com isso, $f \in ker(\beta^*)$, o qual é trivial pela exatidão suposta da sequência. Desse modo, $f \equiv 0$ e, por ser a projeção de $B''$ em $M := B''/Im(\beta)$, ocorre que $B'' = Im(\beta)$, ou seja, $\beta$ é sobrejetor.

(ii) $Im(\alpha) \subseteq ker(\beta)$: vale que $\alpha^* \circ \beta^*(f) = 0$, porque $Im(\beta^*) = ker(\alpha^*)$, pela exatidão da sequência. Em particular, se $M = B''$, $f = 1_{B''}$, tem-se que

$$0 = \alpha^*(\beta^*(f)) = f \circ \beta \circ \alpha \Rightarrow \beta \circ \alpha = 0,$$

pela definição de $f$. Desse modo, $Im(\alpha) \subseteq ker(\beta)$.

(iii) $ker(\beta) \subseteq Im(\alpha)$: defina $N := coker(\alpha) = B/Im(\alpha)$. Então, se $g : B \to N$ é a projeção,

$$\alpha^*(g) = g \circ \alpha : B' \to N$$

é o mapa nulo, pois $g_{|Im(\alpha)} = Im(\alpha) = 0_N$. Então, $g \in ker(\alpha^*) = Im(\beta^*)$, onde a igualdade é pela exatidão da sequência. Existe, portanto, $f \in Hom_R(B'', M)$ tal que $\beta^*(f) = g$, e, assim, $f \circ \beta = g$.

Se ocorresse que $Im(\alpha) \neq ker(\beta)$, haveria $b \in B$ com $\beta(b) = 0$, mas $b \notin Im(\alpha)$. Desse modo, $g(b) \neq 0_N$. Mas,

$$g(b) = f(\beta(b)) = f(0) = 0.$$

Portanto, tal $b$ não existe e ocorre a inclusão. □

Este lema possui versão em que se toma o 0 à esquerda na sequência inicial e se usa o funtor covariante $Hom_R(M, \cdot)$.

Uma condição necessária para funtores serem um par adjunto é dada no

**Teorema 2.2.0.44.** $F : {}_R\mathfrak{M} \to {}_S\mathfrak{M}$ e $G : {}_S\mathfrak{M} \to {}_R\mathfrak{M}$ com $(G, F)$ par adjunto. Então, $G$ é exato à esquerda e $F$ é exato à direita.

O conceito de *limite* na álgebra homológica será usado mais adiante no estudo de ([3]).

**Definição 2.2.0.45.** Sejam $I$ um conjunto quase-ordenado (possui relação binária reflexiva e transitiva, mas não necessariamente a antissimetria) e $\mathfrak{C}$ uma categoria. Um **sistema direto** em $\mathfrak{C}$ com conjunto de índices $I$ é um funtor $F : I \to \mathfrak{C}$.

Esta definição faz sentido porque se pode construir uma categoria definindo que, para cada $i \in I$, exista um objeto $F_i$ e morfismos

$$Hom(F_i, F_j) = \begin{cases} \{\varphi_j^i : F_i \to F_j\}, & i \leq j \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Se $i \leq j \leq k$, a composição é

$$\varphi_k^j \varphi_j^i = \varphi_k^i.$$

**Definição 2.2.0.46.** Seja $F = \{F_i, \varphi^i_j\}$ um sistema direto em $\mathfrak{C}$ e considere que exista um objeto $\varinjlim F_i$ e um conjunto de morfismos $\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i$ que solucionem o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi^i_j"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] &
\end{tikzcd},$$

onde são dados $X$ um objeto e $f_i : F_i \to X$ uma família de morfismos e se quer o único morfismo $\beta : \varinjlim F_i \to X$ que faça o diagrama comutar. Ao objeto e à família de morfismos que o solucionam, dá-se o nome de **limite direto**, denotado apenas por $\varinjlim F_i$.

**Teorema 2.2.0.47.** O limite direto de um sistema direto de módulos $\{F_i, \varphi^i_j\}$ existe.

*Demonstração.* Para cada $i \in I$, considere o mapa injetor $\lambda_i : F_i \to \sum F_i$. Tome $S$ o submódulo gerado por $\{\lambda_j \circ \varphi^i_j(a_i) - \lambda_i(a_i) \mid a_i \in F_i, i \leq j\}$. Defina

$$\varinjlim F_i := (\sum F_i)/S$$

e

$$\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i,\ a_i \mapsto \lambda_i(a_i) + S.$$

Este objeto e estes morfismos resolvem o diagrama. □

Considerando todos os funtores $I \to \mathfrak{C}$, tem-se uma categoria se definido que $Hom(F, G) = \{t : \{F_i, \varphi^i_j\} \to \{G_i, \psi^i_j\}\}$, onde $t$ é uma família de mapas $t_i : F_i \to G_i$ que, quando $i \leq j$, faz o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[r, "t_i"] \arrow[d, "\psi^i_j"] & G_i \arrow[d, "\psi^i_j"] \\
F_j \arrow[r, "t_j"] & G_j
\end{tikzcd}$$

comutar.

Denote tal categoria por $Dir(I)$.

**Proposição 2.2.0.48.** $\varinjlim F_i : Dir(I) \to {}_R\mathfrak{M}$ é um funtor.

*Demonstração.* Pelo que se mostrou no teorema 2.2.0.47,

$$\varinjlim(\{F_i, \varphi^i_j\}) = \left(\sum F_i\right)/S.$$

Dado $t : \{F_i, \varphi_j^i\} \to \{G_i, \psi_j^i\}$ morfismo entre dois sistemas diretos e denotando $\varinjlim(\{G_i, \psi_j^i\}) = (\sum G_i)/S'$, onde $S'$ segue definição análoga à de $S$, defina

$$\tilde{t} : \varinjlim F_i \to \varinjlim G_i, \ \sum \lambda_i(a_i) + S \mapsto \sum \lambda_i'(t_i(a_i)) + S'.$$

□

**Teorema 2.2.0.49.** Suponha que $I$ seja um conjunto quase-ordenado onde, para cada $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \leq k$, $j \leq k$ (isto é, um conjunto direcionado[6]). Assuma que haja morfismos $t, s$ entre sistemas diretos

$$\{A_i, \varphi_j^i\} \xrightarrow{t} \{B_i, \psi_j^i\} \xrightarrow{s} \{C_i, \theta_j^i\}$$

tais que, para qualquer $i \in I$,

$$0 \to A_i \xrightarrow{t_i} B_i \xrightarrow{s_i} C_i \to 0$$

seja uma sequência exata. Então,

$$0 \to \varinjlim A_i \xrightarrow{\tilde{t}} \varinjlim B_i \xrightarrow{\tilde{s}} \varinjlim C_i \to 0$$

é sequência exata de módulos.

Ou seja, sob essa condição adicional de $I$, o funtor limite direto é exato. A demonstração utiliza a nova hipótese para se mostrar que $\tilde{t}$ é monomorfismo.

**Teorema 2.2.0.50.** Se $B$ é um $R$-módulo à direita, o funtor $B \otimes_R$ preserva limites diretos, isto é, existe isomorfismo

$$\varinjlim B \otimes_R F_i \to B \otimes_R \varinjlim F_i.$$

**Definição 2.2.0.51.** Seja $I$ um conjunto quase-ordenado e $\mathfrak{C}$ uma categoria. Um **sistema inverso** em $\mathfrak{C}$ com conjunto de índices $I$ é um funtor contravariante $F : I \to \mathfrak{C}$.

Desse modo, para cada $i \in I$, existe objeto $F_i$ e, se $i \leq j$, então há morfismo $\psi_i^j : F_j \to F_i$, para o qual vale a lei de composição

$$\psi_i^j \circ \psi_j^k = \psi_i^k.$$

**Definição 2.2.0.52.** Seja $F = \{F_i, \psi_i^j\}$ um sistema inverso em $\mathfrak{C}$ e considere que exista um objeto $\varprojlim F_i$ e um conjunto de morfismos $\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i$ que solucionem o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
& F_i & \\
& F_j \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd},$$

[6]No inglês, *directed set*.

onde são dados $X$ um objeto e $f_i : X \to F_i$ uma família de morfismos e se quer o único morfismo $\beta : X \to \varprojlim F_i$ que faça o diagrama comutar. Ao objeto e à família de morfismos que o solucionam, dá-se o nome de **limite inverso**, denotado apenas por $\varprojlim F_i$.

**Teorema 2.2.0.53.** O limite inverso de um sistema inverso de módulos $\{F_i, \psi_i^j\}$ existe.

*Demonstração.* Dado $i \in I$, considere $p_i : \prod F_i \to F_i$ a projeção. Defina o submódulo

$$\varprojlim F_i := \{(a_i) \in \prod F_i \mid a_i = \psi_i^j(a_j), i \leq j\}$$

e

$$\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i,\ \alpha_i = p_{i|\varprojlim F_i}.$$

Este objeto e estes morfismos resolvem o diagrama. □

Pode-se mostrar que todos os sistemas inversos com conjunto de índices que é o quase-ordenado $I$ formam uma categoria, denotada por $Inv(I)$, onde os morfismos $t : \{F_i, \psi_i^j\} \to \{G_i, \varphi_i^j\}$ entre dois sistemas inversos é uma família de mapas $t_i : F_i \to G_i$ que, quando $i \leq j$, faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r, "t_i"] & G_i \\ F_j \arrow[u, "\psi_i^j"] \arrow[r, "t_j"] & G_j \arrow[u, "\varphi_i^j"'] \end{tikzcd}$$

comutar.

**Proposição 2.2.0.54.** $\varprojlim : Inv(I) \to {}_R\mathfrak{M}$ é um funtor.

*Demonstração.* Seja $t : \{F_i, \psi_i^j\} \to \{G_i, \varphi_i^j\}$ um morfismo entre dois sistemas inversos. Defina

$$\tilde{t} : \varprojlim F_i \to \varprojlim G_i,\ (a_i) \mapsto (t_i(a_i)).$$

□

**Teorema 2.2.0.55.** Se $B$ é um $R$-módulo à esquerda, o funtor $Hom_R(B, \cdot)$ preserva limites inversos, isto é, existe isomorfismo

$$\varprojlim Hom_R(B, F_i) \to Hom_R(B, \varprojlim F_i).$$

A relevância dos funtores $Hom_R, \otimes_R$ é ilustrada pelos resultados de Watts ([10]) sobre eles.

1. Se $F : \mathfrak{M}_R \to Ab$ é funtor aditivo e

   (i) É exato à direita;

   (ii) Preserva somas diretas,

   então $F = \otimes_R A$, onde $A$ é o grupo abeliano $F(R)$ visto como $R$-módulo à esquerda.

2. Se $F : {}_R\mathfrak{M} \to Ab$ é funtor aditivo e

   (i) Covariante;

   (ii) Preserva limites inversos,

   então $F = Hom_R(A, \cdot)$, onde $A$ é $R$-módulo à esquerda.

3. Se $F : {}_R\mathfrak{M} \to Ab$ é funtor aditivo e

   (i) Contravariante;

   (ii) Exato à esquerda;

   (iii) Converte soma em produto direto,

   então $F = Hom_R(\cdot, A)$, onde $A$ é o grupo abeliano $F(R)$ visto como $R$-módulo à direita.

Os módulos possuem algumas classificações. Comecemos com o mais simples.

**Definição 2.2.0.56.** Um $R$-módulo $A$ é **livre** se for soma de cópias de $R$. Quando um conjunto $\{a_k \mid k \in K\} \subseteq A$ satisfaz que

**(i)** $Ra_k \simeq R$;

**(ii)** $A = \sum_{k \in K} Ra_k$, diz-se que é uma **base de** $A$.

Nessa configuração, cada elemento de $A$ é unicamente expresso por $a = \sum_{k \in K} r_k a_k$, com $r_k \in R$ e quase todos os $r_k = 0$.

**Lema 2.2.0.57.** Se $X$ é um conjunto, existe um módulo livre $F$ que o tem como base.

*Demonstração.* Se $X = \emptyset$, tome $F = \emptyset$. Suponha, assim, que $X \neq \emptyset$ e considere $F$ a soma de $|X|$ cópias de $R$. Por haver este número de cópias, existe bijeção de $X$ e uma base para $F$. □

**Teorema 2.2.0.58.** Qualquer módulo é quociente de algum módulo livre.

*Demonstração.* Considere o conjunto associado ao módulo $A$, denotado por $\tilde{A}$. Seja $F$ o módulo livre que possui $\tilde{A}$ como base. Se $f : \tilde{A} \to A$ é a identidade, tome $g : F \to A$ que estende $f$. Por $f$ ser sobrejetora, $g$ é epimorfismo. Assim,

$$A \simeq F/ker(g).$$

□

**Teorema 2.2.0.59.** Seja $R$ anel comutativo e $A$ um $R$-módulo livre. Quaisquer duas bases têm mesma cardinalidade.

*Demonstração.* Pelo lema de Zorn, $R$ tem ideal maximal $M$. Seja $\{a_k\}$ uma base de $A$ e denote por $\overline{a_k}$ a imagem de $a_k$ no quociente $B_k := Ra_k/MRa_k \simeq R/M$. Afirma-se que $A/MA \simeq \sum_{k \in K} B_k$. Defina $i_k : B_k \to A/MA$ por $\overline{a_k} \mapsto a_k + MA$.

Por $A/MA$ ser $R$-módulo anulado por $M$, vale que $A/MA$ é um $R/M$-módulo. Da maximalidade de $M$, $R/M$ é corpo. Dessas duas características, tem-se que $A/MA$ é um espaço vetorial sobre $R/M$. Segue, pelo teorema 2.2.0.25, que $A/MA \simeq \sum_{k \in K} B_k$. Como espaço vetorial,

$$dim(A/MA) = |K|.$$

Com isso, quaisquer duas bases têm cardinalidade igual à $|K|$. □

**Definição 2.2.0.60.** Chama-se uma sequência exata de **resolução livre do módulo** $A$ se for da forma

$$\cdots F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \to A \to 0,$$

onde cada $F_i$ é livre.

Da exatidão, $Im(d_{n+1}) = ker(d_n) \Rightarrow d_n \circ d_{n+1} \equiv 0$.

**Teorema 2.2.0.61.** Qualquer módulo admite resolução livre.

*Demonstração.* Dado módulo $A$, pelo que já se mostrou, pode-se escrever que $A \simeq F_0/ker(f)$, em que $F_0$ é livre. Desse modo,

$$0 \to S_0 \to F_0 \xrightarrow{f} A \to 0$$

é exata, para $S_0 \simeq ker(f)$. Prosseguindo indutivamente, consegue-se $F_n$ livre e a exatidão de $0 \to S_n \to F_n \to S_{n-1} \to 0$. Em um diagrama com tais sequências e a nova dos $F_n$, usando $S_{-1} := A$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_3 \arrow[rr, "d_3"] \arrow[dr] & & F_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & F_0 \arrow[r, "f"] & A \arrow[r] & 0 \\
& & S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Por construção, $ker(d_i) = S_i$, $Im(d_i) = S_{i-1}$. Em particular, $ker(d_n) = S_n = Im(d_{n+1})$, condição que valida a exatidão da sequência superior. □

**Teorema 2.2.0.62.** Considere $\alpha : F \to C$ e $\beta : B \to C$ um epimorfismo. Se $F$ for livre, existe $\varphi : F \to B$ tal que $\beta \circ \varphi = \alpha$.

*Demonstração.* Considere $X = \{x_k\}$ base de $F$. Como $\beta$ é epimorfismo, para cada $k$, existe $b_k \in B$ com

$$\beta(b_k) = \alpha(x_k).$$

O axioma da escolha permite ter função $X \to B$ que leva $x_k$ em $b_k$. Como $F$ é gerado por $X$, pode-se estender tal função para um homomorfismo $\varphi : F \to B$ que respeite que $\varphi(x_k) = b_k$.

$$\beta \circ \varphi = \alpha \Leftrightarrow \beta \circ \varphi(x_k) = \alpha(x_k), \forall\, k \Leftrightarrow \beta(b_k) = \alpha(x_k).$$

A última condição é verdadeira por construção. □

Desse ponto em diante, considere, quando omitido, $Hom$ como $Hom_R$ e $\otimes$ como $\otimes_R$.

**Corolário 2.2.0.63.** Se $F$ é módulo livre, $Hom_R(F, \cdot)$ é exato.

*Demonstração.* A exatidão à esquerda desse funtor já foi mostrada. Suponha exata

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

e provemos que

$$Hom_R(F, B) \to Hom_R(F, C) \to 0$$

é exata, ou seja, que $Hom_R(F, B) \mapsto Hom_R(F, C)$ é sobrejetor, com cada $f \in Hom_R(F, C)$ admitindo $g \in Hom_R(F, B)$ tal que $f = \beta \circ g$. Mas isso é exatamente o que garante o teorema 2.2.0.62, sob a hipótese de que $\beta : B \to C$ seja epimorfismo, que é cumprida. □

A segunda classe de módulos a ser explorada contém os módulos livres.

**Definição 2.2.0.64.** Um módulo $P$ é **projetivo** se, dados $\alpha : P \to C$ homomorfismo de módulos e $\beta : B \to C$ um epimorfismo de módulos, existir $\varphi : P \to B$ homomorfismo de módulos tal que $\beta \circ \varphi = \alpha$.

**Teorema 2.2.0.65.** Um módulo $P$ é projetivo se, e somente se, $Hom_R(P, \cdot)$ é exato.

*Demonstração.* Se $P$ é projetivo, consegue-se decompor qualquer função usando um epimorfismo e se prova que $Hom_R(P, \cdot)$ é exato à direita como feito no corolário.

Seja $Hom_R(P, \cdot)$ exato e tome $\beta : B \to C$ epimorfismo. Assim, $B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ é exata. Por hipótese, $Hom_R(P, B) \to Hom_R(P, C) \to 0$ é exata. Desse modo, o primeiro mapa é sobrejetor e, dado $f \in Hom_R(P, C)$, existe $g \in Hom_R(P, B)$ tal que $f = \beta \circ g$. Ou seja, vale a definição de que $P$ é projetivo. □

Quando $P$ é projetivo e se tem um epimorfismo com contradomínio $P$, pode-se mostrar que ele é somando direto do módulo no domínio, como atesta o

**Teorema 2.2.0.66.** Seja $P$ projetivo e $\beta : B \to P$ epimorfismo. Então, $B = ker(\beta) \oplus P'$, $P' \simeq P$.

*Demonstração.* Dada $1_P : P \to P$, pela definição de módulo projetivo, existe $\varphi : P \to B$ tal que $1_P = \beta \circ \varphi$. Por admitir inverso à esquerda, $\varphi$ é injetora e se usa o teorema 2.2.0.29, para se escrever que

$$\beta = \varphi(P) \oplus ker(\beta).$$

Como $\varphi(P) \simeq P/ker(\varphi) = P$, tome $P' := \varphi(P)$. □

**Teorema 2.2.0.67.** $P$ é módulo projetivo se, e somente se, for somando de um módulo livre.

*Demonstração.* Cada módulo é quociente de um livre. Logo, defina $\beta : F \to P$ epimorfismo ($F/ker(\beta) \simeq Im(\beta) = P$).

Se $P$ for projetivo, então $P$ é somando de $F$ como atesta o teorema 2.2.0.66.

Seja $F = P \oplus C$ e note que existem mapas $i : P \to F$ a inclusão, $p : F \to P$ a projeção sobre $P$, com $p \circ i = 1_P$. Dada $f : P \to C$, considere $f \circ p : F \to C$. Este mapa é epimorfismo, pois $p$ é sobrejetor. Portanto, pela definição de projetivo, existe $\varphi : F \to B$ com $f \circ p = \beta \circ \varphi$.

Defina agora $\delta : P \to B$ por $\delta = \varphi \circ i$. Tem-se que

$$\beta \circ \delta = \beta \circ (\varphi \circ i) = (\beta \circ \varphi) \circ i = (f \circ p) \circ i = f \circ (p \circ i) = f \circ 1_P = f.$$

Tem-se a decomposição de $f$ usando o epimorfismo $\beta$ e, assim, $P$ é projetivo. □

**Corolário 2.2.0.68.** Qualquer somando de um módulo projetivo é projetivo.

**Exemplo 2.2.0.69.** Cada módulo livre é projetivo, pelo teorema 2.2.0.67. Porém, não se tem a recíproca. $\mathbb{Z}_2$, por exemplo, é um $\mathbb{Z}_6$-módulo projetivo, pois $R := \mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ (somando de um $R$ livre). Como qualquer livre não nulo tem que ter pelo menos 6 elementos, este não pode ser livre.

Outra definição equivalente de módulo projetivo é dada no

**Teorema 2.2.0.70.** Um módulo $P$ é projetivo se, e somente se, cada sequência exata curta $0 \to A \to B \to P \to 0$ cindir.

*Demonstração.* Suponha que cada sequência admita cisão e considere sequência onde $B$ seja livre. Com isso,

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} P \to 0$$

possui $j : P \to B$ tal que $\beta \circ j = 1_P$. Admitindo inverso à esquerda, $j$ é monomorfismo. Pelo teorema 2.2.0.29, $B = j(p) \circ ker(\beta)$. Mas, $j(P) \simeq P/ker(j) = P$. Assim, $P$ é somando de livre, logo projetivo.

Assuma que $P$ seja projetivo. Então, $B = ker(\beta) \oplus P$, com $\beta : B \to P$ epimorfismo. Dessa soma direta e usando que $ker(\beta) = Im(\alpha) \simeq A/ker(\alpha) = A$, tem-se, pelo lema 2.2.0.31, que a sequência cinde. □

**Teorema 2.2.0.71.** Seja $\{P_k\}$ família de módulos projetivos. Então, $\sum_{k\in K} P_k$ é projetivo.

Este resultado não vale para o produto. Por exemplo, $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo projetivo, mas $\prod_{k\in K} \mathbb{Z}$ não o é quando $|K| = \infty$.

**Definição 2.2.0.72.** Uma **resolução projetiva** de um módulo $A$ é uma sequência exata da forma $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$, onde cada $P_n, n \geq 0$, é projetivo.

O conceito de projetivo possui um dual, mostrado abaixo.

**Definição 2.2.0.73.** Um módulo $E$ é **injetivo** se, para quaisquer $B$ módulo e $A \subseteq B$ submódulo, o homomorfismo de módulos $f : A \to E$ puder ser estendido a $g : B \to E$. De maneira geral, dado $\alpha : A \to B$ monomorfismo, significa existir $g : B \to E$ com $g \circ \alpha = f$.

A demonstração do próximo teorema pode ser vista em ([10]).

**Teorema 2.2.0.74.** Um módulo $E$ é injetivo se, e somente se, $Hom_R(\cdot, E)$ for exato.

**Teorema 2.2.0.75.** Um módulo $E$ é injetivo se, e somente se, cada sequência exata curta $0 \to E \to B \to C \to 0$ cindir.

*Demonstração.* Será provado apenas um dos sentidos nesse momento. Suponha que $E$ seja injetivo e considere a sequência exata curta $0 \to E \xrightarrow{\alpha} B \to C \to 0$, onde $\alpha : E \to B$ é, portanto, monomorfismo. Pela definição de módulo injetivo, considerando $f = 1_E$, existe $p : B \to E$ tal que $p \circ \alpha = 1_E$. Pelo lema 2.2.0.31, a sequência cinde. □

**Teorema 2.2.0.76.** $\{E_k\}$ família de módulos. Então, $\prod_{k\in K} E_k$ é injetivo se, e somente se, cada $E_k$ for injetivo.

*Demonstração.* Suponha que o produto seja injetivo e fixe $k$. Seguindo a definição de módulo injetivo que se deseja chegar para $E_k$, tome homomorfismo de módulos $f : A \to E_k$ e monomorfismo $\alpha : A \to B$. Se $i : E_k \to \prod E_k$ é a inclusão, então $i \circ f : A \to \prod E_k$ e segue, por $\prod E_k$ ser injetivo, que existe $g : B \to \prod E_k$ estendendo $i \circ f$, isto é, $g \circ \alpha = i \circ f$. Defina $h : B \to E_k$ por $h := p \circ g$, com $p$ a projeção sobre $E_k$.Vale que

$$h \circ \alpha = (p \circ g) \circ \alpha = p \circ (g \circ \alpha) = p \circ (i \circ f) = (p \circ i) \circ f = f.$$

Dessa decomposição de $f$, $E_k$ é injetivo.

Suponha que cada $E_k$ seja injetivo e considere $\alpha : A \to B$ injetora, com $f : A \to \prod E_k$ qualquer. Para cada projeção $p_k : \prod E_k \to E_k$, ocorre que existe $g_k : B \to E_k$ que estende $p_k \circ f$, isto é, $g_k \circ \alpha = p_k \circ f$. Defina $h : B \to \prod E_k$ dada por $h(b) := (g_k(b))$. Assim,

$$(h \circ \alpha)(a) = h(\alpha(a)) = (g_k(\alpha(a))) = (p_k(f(a))) = f(a) \Rightarrow h \circ \alpha = f \Rightarrow \prod E_k \text{ é injetivo.}$$

□

**Definição 2.2.0.77.** Considere o diagrama $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \\ B & \end{tikzcd}$. Diz-se que $(X, \alpha, \beta)$ é uma **solução** se $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\ B \arrow[r, dashed, "\beta"] & X \end{tikzcd}$ for comutativo.

**Definição 2.2.0.78.** Um **push-out** é um diagrama comutativo como acima que é maximal no sentido de que, se $(X', \alpha', \beta')$ for outra solução, então existe único $h : X \to X'$ tal que $h \circ \alpha = \alpha',\ h \circ \beta = \beta'$.

Este objeto existe, como mostra o

**Teorema 2.2.0.79.** Um push-out existe para $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \\ B & \end{tikzcd}$.

*Demonstração.* Um candidato para $X$ é $B \oplus C$, com $\alpha, \beta$ funções injetoras. Porém, não se garante a comutatividade.

Tome, então, $S$ submódulo de $B \oplus C$ dado por $\{f(a) - g(a)\}$ e defina $X := (B \oplus C)/S$, com $\begin{cases} \alpha(c) := (0, c) + S \\ \beta(b) := (b, 0) + S \end{cases}$. Então, $(X, \alpha, \beta)$ é uma solução.

Seja $(X', \alpha', \beta')$ outra solução. Defina

$$h : X \to X',\ (b, c) + S \mapsto \alpha'(c) + \beta'(b).$$

- $h$ está bem definida: se $(b, c) + S = (d, e) + S$, então

$$(b - d, c - e) \in S \Rightarrow \begin{cases} f(a) = b - d \\ g(a) = c - e \end{cases} \Rightarrow \alpha'(c - e) + \beta'(b - d) = \alpha'(g(a)) - \beta'(f(a)) = 0,$$

pois o diagrama comuta. Com isso, $\alpha'(c) + \beta'(b) = \alpha'(e) + \beta'(d)$ e está provada a boa definição.

- $h \circ \alpha = \alpha'$: $h(\alpha(c)) = h((0, c) + S) = \alpha'(c) + \beta'(0) = \alpha'(c) \Rightarrow h \circ \alpha = \alpha'$.
- $h \circ \beta = \beta'$: $h(\beta(b)) = (h(b, 0) + S) = \alpha'(0) + \beta'(b) = \beta'(b) \Rightarrow h \circ \beta = \beta'$. □

O push-out é um caso particular de limite direto. De forma dual, existe a

**Definição 2.2.0.80.** Começando com $\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$, o **pullback** é uma solução $(X, \alpha, \beta)$, onde $\alpha : X \to C,\ \beta : X \to B$, tal que se tenha um quadrado comutativo minimal no sentido de que, se existir outra solução $(X', \alpha', \beta')$, então existe único $h : X' \to X$ tal que $\alpha \circ h = \alpha',\ \beta \circ h = \beta'$.

Este é um caso particular de limite inverso.

**Teorema 2.2.0.81.** Sempre existe um pullback.

*Demonstração.* Defina $X := \{(b,c) \in B \oplus C \mid f(b) = g(c)\}$ e construa $\begin{cases} \alpha((b,c)) := c \\ \beta((b,c)) := b \end{cases}$. Então,

$$g(\alpha(a,b)) = g(c) \text{ e } f(\beta(a,b)) = f(b),$$

ou seja, o diagrama comuta, pela definição de $X$. Esta é uma solução.

Se $(X', \alpha', \beta')$ for outra solução, defina $h : X' \to X$ por $(b,c) \mapsto (\beta'((b,c)), \alpha'((b,c)))$. Note que esta imagem está em $X$, pois, da comutatividade do digrama,

$$f(\beta'((b,c))) = g(\alpha'((b,c))).$$

Assim, está bem definida. E, ainda, por construção, valem as composições. □

**Proposição 2.2.0.82.** Nas condições da definição de pullback, se $f, g$ forem monomorfismos, trata-se $B, C$ como submódulos de $A$ e o pullback é, então, $B \cap C$.

*Demonstração.* Tem-se o diagrama $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & B \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C & \xrightarrow{g} & A \end{array}$. Tratando $f, g$ como inclusões, então $X = \{(b,c) \in B \oplus C \mid f(b) = g(c)\} = \{(b,c) \in B \oplus C \mid b = c\} \simeq B \cap C$. □

**Lema 2.2.0.83.** Em um push-out, se $g$ for injetor, $\beta$ o é.

*Demonstração.* Seja $b \in B$ tal que $\beta(b) = 0$. Por construção, $\beta(b) = (b, 0) + S$. Logo,

$$(b,0) \in S \Rightarrow (b,0) = (f(a), -g(a)),\ a \in A.$$

Desse modo, $a \in ker(g) \Rightarrow a = 0$, pois $g$ é injetor. Assim, $b = f(a) = f(0) = 0$. □

Com a construção feita, provemos o teorema 2.2.0.75.

**Teorema 2.2.0.84.** Se cada sequência exata curta $0 \to E \to B \to C \to 0$ cindir, $E$ é injetivo.

*Demonstração.* Considere $f : A \to E,\ g : A \to M$ monomorfismo. Tem-se o push-out $\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\beta} & X \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\alpha} \\ A & \xrightarrow{g} & M \end{array}$. Pelo lema 2.2.0.83, $\beta$ é monomorfismo. Como qualquer sequência exata curta cinde, em particular isso se aplica em $0 \to E \xrightarrow{\beta} X \to X/Im(\beta) \to 0$. Pelo lema 2.2.0.31, existe $q : X \to E$ tal que $q \circ \beta = 1_E$. Defina $\varphi : M \to E$ por $\varphi = q \circ \alpha$. Então,

$$\varphi \circ g = (q \circ \alpha) \circ g = q \circ (\beta \circ f) = f.$$

Ou seja, $E$ é injetivo. □

Se sabido um enunciado análogo ao de módulos projetivos no teorema 2.2.0.67, a demonstração do fato acima poderia ter sido feita como no teorema 2.2.0.70. De fato, a afirmação de que todo módulo pode ser mergulhado em um injetivo é verdadeira ([10]).

**Teorema 2.2.0.85.** $E$ é injetivo se, e somente se, cada $f : I \to E$ puder ser estendida para $R$, onde $I$ é ideal à esquerda de $R$.

*Demonstração.* Suponha $E$ injetivo. Como um ideal à esquerda é submódulo de $R$, tem-se, pela definição de injetivo, que vale a extensão.

Assuma $f : A \to E$ e $g : A \to B$ injetora (por conveniência, considere como inclusão). Seja $\mathcal{F} := \{(A', f') \mid A \subseteq A' \subseteq B, f' : A' \to E \text{ estende } f\}$. Vale que

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, porque o próprio par $(A, f)$ está.

- Atribuindo a ordenação parcial $(A', f') \leq (A'', f'')$ se ($A' \subseteq A''$ e $f''$ estender $f'$), tem-se, pelo lema de Zorn, que existe par maximal $(A_0, f_0)$.

Se $A_0 = B$, está provada a injetividade de $E$. Suponha, assim, que $A_0 \neq B$ e tome $x \in (B \setminus A_0)$. Defina ideal à esquerda de $R$ por $I = \{r \in R \mid rx \in A_0\}$ e o mapa $h : I \to E,\ r \mapsto f_0(rx)$. Pelo enunciado, existe $t : R \to E$ que estende $h$. Sejam

$$\begin{cases} A_1 := A_0 + Rx \\ f_1 : A_1 \to E,\ a_0 + rx \mapsto f_0(a_0) + rt(1) \end{cases}.$$

O mapa está bem definido, pois

$$a_0 + rx = a_0' + r'x \Rightarrow (r - r')x = a_0' - a_0 \in A_0.$$

Aplicando $f_0$,

$$f_0(a_0' - a_0) = f_0((r - r')x) = h(r - r') = t(r - r') = (r - r') \cdot t(1),$$

onde se usou que $r - r' \in I$. Portanto, $f_0(a_0) + r \cdot t(1) = f_0(a_0') +' r \cdot t(1)$. E, ainda, $f_1$ estende $f_0$. Desse modo, $(A_1, f_1) \in \mathcal{F}$ e tal par é maior que $(A_0, f_0)$. Contradição. Assim, $A_0 = B$ e $E$ é injetivo. □

**Definição 2.2.0.86.** Uma **resolução injetiva de um módulo** $A$ designa uma sequência exata $0 \to A \to E_0 \to E_1 \to \cdots$ tal que cada $E_n, n \geq 0$, seja injetivo.

Pode-se mostrar que cada módulo admite resolução injetiva ([10]).

**Definição 2.2.0.87.** Um $R$-módulo à direita $B$ é **plano** se o funtor $B \otimes_R$ for exato.

**Lema 2.2.0.88.** $B$ é plano se, e somente se, $f$ monomorfismo $\Rightarrow 1_B \otimes f$ monomorfismo.

*Demonstração.* Suponha que $B$ seja plano. Desse modo, o funtor $B \otimes_R$ é exato à esquerda. Considere, então, a sequência exata $0 \to A \xrightarrow{f} C$, que produz $0 \to B \otimes_R A \to B \otimes_R C$ exata. Com isso, o mapa $1_B \otimes f$ é injetor.

Admita agora a sequência exata $0 \to A \xrightarrow{f} C$. Se vale que $1_B \otimes f$ é monomorfismo, então a sequência $0 \to B \otimes_R A \to B \otimes_R C$ é exata e segue o resultado. □

**Teorema 2.2.0.89.** $\{B_k \mid k \in K\}$ família de $R$-módulos à direita. Então, $\sum_k B_k$ é plano se, e somente se, cada $B_k$ for plano.

*Demonstração.* Seja $0 \to A' \xrightarrow{f} A$ sequência exata. Com isso, forma-se o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} (\sum B_k) \otimes A' \arrow[r, "1\otimes f"] \arrow[d] & (\sum B_k) \otimes A \arrow[d] \\ \sum(B_k \otimes A') \arrow[r, "\sum(1_{B_k}\otimes f)"] & \sum(B_k \otimes A) \end{tikzcd}$$

, com as setas verticais indicando os isomorfismos usuais. Pela comutatividade do diagrama, $1 \otimes f$ é injetor se, e somente se, $\sum(1_{B_K} \otimes f)$ for injetor, o que vale se, e somente se, $1_{B_k} \otimes f$ for injetor.

Admita $B_k$ plano. Do lema 2.2.0.88 aplicado à $B_k$, cada $1_{B_k} \otimes f$ é injetor e se tem, das equivalências acima, que $1 \otimes f$ é injetor. Pelo lema mais uma vez, usado no sentido contrário, $\sum B_k$ é plano. Se suposto agora que $\sum B_k$ é plano, ocorre que $1 \otimes f$ é injetor e, pelas equivalências, $1_{B_k} \otimes f$ é injetor. Do lema, $B_k$ é plano. □

**Corolário 2.2.0.90.** Um módulo projetivo é plano.

*Demonstração.* $R$ próprio é plano. Pela definição de módulo livre e do teorema 2.2.0.89, cada módulo livre é plano. Tem-se que cada somando de um módulo plano é plano. Pelo teorema 2.2.0.67, cada projetivo é plano. □

**Definição 2.2.0.91.** Um $R$-módulo $A$ é chamado de **finitamente gerado** se existe conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset A$ tal que cada elemento de $A$ é combinação linear finita dos elementos de $\{a_i\}$ com coeficientes em $R$.

Equivalentemente, $A$ é finitamente gerado se, e somente se, existir $n \in \mathbb{N}$ e $R$-mapa sobrejetor $f : \sum_n R \to A$. Isto é, $A$ é quociente de um módulo livre de base finita.

**Definição 2.2.0.92.** Um $R$-módulo $A$ é **finitamente apresentável** se existirem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que se tenha sequência exata

$$\sum_m R \to \sum_n R \to A \to 0.$$

**Definição 2.2.0.93.** Um módulo $B$ é **finitamente relacionado** se existir sequência exata

$$0 \to K \to F \to B \to 0,$$

com $F$ livre e $F, K$ finitamente gerados.

**Teorema 2.2.0.94** (Lema de Schanuel). Dados $P_1, P_2$ projetivos e as sequências exatas curtas

$$0 \to K_1 \xrightarrow{i} P_1 \to B \to 0$$

$$0 \to K_2 \xrightarrow{j} P_2 \to B \to 0,$$

então $K_1 \oplus P_2 \simeq K_2 \oplus P_1$.

*Demonstração.* Dados $p : P_1 \to B$ e $q : P_2 \to B$ epimorfismo, existe $\beta : P_1 \to P_2$ tal que $q \circ \beta = p$, por $P_1$ ser projetivo. Segue, por uma análise de diagrama comutativo, que existe $\alpha : K_1 \to K_2$ com $j \circ \alpha = \beta \circ i$. Assim, para $\theta : K_1 \to P_1 \oplus K_2,\ k_1 \mapsto (i(k_1), \alpha(k_1)),\ \varphi : P_1 \oplus K_2 \to P_2,\ (p_1, k_2) \mapsto \beta(p_1) - j(k_2)$, a sequência

$$0 \to K_1 \xrightarrow{\theta} P_1 \oplus K_2 \xrightarrow{\varphi} P_2 \to 0$$

é exata. De fato, $\theta$ é injetor, porque

$$\theta(k_1) = \theta(k_1') \Rightarrow i(k_1) = i(k_1') \Rightarrow k_1 = k_1',$$

onde se usou a injetividade de $i$. E, ainda, $\varphi$ é sobrejetor. De $P_2$ ser projetivo, tem-se, pelo teorema 2.2.0.70, que a sequência acima cinde. Pelo lema 2.2.0.31, $P_1 \oplus K_2 \simeq K_1 \oplus P_2$. □

**Corolário 2.2.0.95.** Seja $B$ finitamente relacionado e $0 \to K' \to F' \to B \to 0$ exata, onde $F'$ é livre e finitamente gerado. Com isso, $K'$ é finitamente gerado.

*Demonstração.* Da hipótese sobre $B$, exite sequência exata $0 \to K \to F \to B \to 0$ com $F$ livre e $F, K$ finitamente gerados. Portanto, $F' \oplus K$ é finitamente gerado. Do teorema 2.2.0.94, $F' \oplus K \simeq F \oplus K'$. Desse modo, $K'$ pode ser visto como somando de um finitamente gerado e, assim, é finitamente gerado. □

### 2.2.1 Módulo de homologia

Nesta seção, apresenta-se o conceito de módulo de homologia e manipulações que o envolvem.

Serão considerados, como antes, apenas $R$-módulos à esquerda de um anel $R$ associativo e com identidade. Comecemos com a formalização de um termo que generaliza o conceito de sequência exata.

**Definição 2.2.1.1.** Um **complexo** $A$ é uma sequência de módulos e mapas

$$\cdots \to A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots,$$

com $d_n \circ d_{n+1} = 0, \forall\ n$. Vale, assim, que $Im(d_{n+1}) \subseteq ker(d_n)$. Os mapas $d_n$ são chamados de **diferenciais**.

**Definição 2.2.1.2.** Um **mapa cadeia** é uma família $\{f_n : A_n \to A'_n\}$ de mapas que fazem a conexão entre dois complexos, de forma que cada quadrado

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "d'_n"] & A'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comute.

A categoria formada pelos complexos e tais morfismos é denotada por *Comp*.

**Definição 2.2.1.3.** Seja $A$ um complexo. O **módulo de homologia de ordem** $n$ é dado por

$$H_n(A) := ker(d_n)/Im(d_{n+1}).$$

Cada elemento em $ker(d_n)$ é chamado de $n$**-ciclo** e, em $Im(d_{n+1})$, de $n$**-fronteira**. Encurtando a notação, denota-se

$$\boxed{ker(d_n) := Z_n,\ Im(d_{n+1}) := B_n},$$

e, portanto,

$$H_n(A) = Z_n/B_n.$$

Como funtor, $H_n$ pode ser aplicado em morfismos. Se $f : A \to A'$ é mapa cadeia, defina

$$H_n(f) : H_n(A) \to H_n(A'),\ z_n + B_n \mapsto f_n(z_n) + B'_n.$$

**Lema 2.2.1.4.** O complexo $A$ é uma sequência exata se, e somente se, $H_n(A) = 0, \forall\ n$.

*Demonstração.* $H_n(A)$ é trivial para todo $n$ se, e somente se, $Im(d_{n+1}) = ker(d_n)$ para todo $n$, isto é, se, e somente se, a sequência for exata. □

**Definição 2.2.1.5.** Seja $\{A^k\}$ família de complexos, onde cada $A^k$ é

$$A^k = \cdots \to A^k_n \xrightarrow{d^k_n} A^k_{n-1} \to \cdots$$

Define-se a soma direta desses como o complexo

$$\cdots \to \sum_k A^k_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \sum_k A^k_n \xrightarrow{d_n} \sum_k A^k_{n-1} \to \cdots,$$

com $d_n := \sum_k d^k_n : \sum_k a^k_n \mapsto \sum_k d^k_n(a^k_n)$, se $a^k_n \in A^k_n$.

**Lema 2.2.1.6.** Seja $\{A^k\}$ família de complexos. Vale que a $\sum_k A^k$ é um complexo cujo módulo de homologia satisfaz que

$$H_n\left(\sum_k A^k\right) \simeq G := \sum_k H_n(A^k).$$

*Demonstração.* Fixe $n$.

$$H_n\left(\sum A^k\right) = ker\left(\sum_k d_n^k\right)/Im\left(\sum_k d_{n+1}^k\right).$$

Defina $\varphi : ker(\sum_k d_n^k) \to G$ tal que

$$\sum_k a_n^k \mapsto \sum_k (a_n^k + Im(d_{n+1}^k)).$$

- $\varphi$ é homomorfismo:

$$\varphi(\sum a_n^k + \sum b_n^k) = \sum(a_n^k + b_n^k + Im(d_{n+1}^k)) = \sum(a_n^k + Im(d_{n+1}^k)) + \sum(b_n^k + Im(d_{n+1}^k)) =$$

$$\varphi(\sum a_n^k) + \varphi(\sum a_n^k).$$

- $\varphi$ é sobrejetor: dado $\sum(a_n^k + Im(d_{n+1}^k))$, tome $\sum a_n^k \in ker(\sum d_n^k)$.
- Cálculo de $ker(\varphi)$:

$$\varphi(\sum a_n^k) = 0_G \Leftrightarrow \sum(a_n^k + Im(d_{n+1}^k)) = \sum Im(d_{n+1}^k) \Leftrightarrow a_n^k \in Im(d_{n+1}^k).$$

Portanto, $ker(\varphi) = Im(\sum d_{n+1}^k)$.
- Pelo teorema do isomorfismo,

$$H_n\left(\sum A_k\right) = ker\left(\sum_k d_n^k\right)/Im\left(\sum_k d_{n+1}^k\right) = ker\left(\sum_k d_n^k\right)/ker(\varphi) \simeq Im(\varphi) = G.$$

□

**Definição 2.2.1.7.** Considere uma sequência de complexos $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$, com $f, g$ mapas cadeia. Esta é exata se, para cada $n$,

$$A'_n \xrightarrow{f_n} A_n \xrightarrow{g_n} A_n''$$

for exata.

**Teorema 2.2.1.8.** Seja $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$ uma sequência exata de complexos. Para cada $n$, existe homomorfismo

$$\partial_n : H_n(A'') \to H_{n-1}(A')$$

$$z'' + B_n(A'') \mapsto i_{n-1}^{-1} \circ d_n \circ p_n^{-1}(z'') + B_{n-1}(A').$$

*Demonstração.* Considere o diagrama comutativo com linhas exatas abaixo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r] \arrow[d, "d'"] & A_n \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & A''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r, "i"] & A_{n-1} \arrow[r] & A''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Seja $z'' \in A''_n$ tal que $d''(z'') = 0$. Como $p$ é sobrejetor, pode-se afirmar que, dado $z'' \in A_n''$, existe $a_n \in A_n$ tal que $p(a_n) = z''$. Considere agora $d(a_n) \in A_{n-1}$. Tem-se, pela comutatividade do diagrama, que, se $f_{n-1} : A_{n-1} \to A''_{n-1}$,

$$f_{n-1} \circ d(a_n) = d'' \circ p(a_n) = d''(z'') = 0 \Rightarrow d(a_n) \in ker(f_{n-1}) = Im(i),$$

onde tal kernel é exatamente $Im(i)$ pela exatidão da linha inferior. Desse modo, $i^{-1}(d(a_n)) \neq \emptyset$. E, da injetividade de $i$, este é um conjunto unitário, isto é, existe único $a'_{n-1} \in A'_{n-1}$ tal que $i(a'_{n-1}) = d(a_n)$.

Defina, assim, o mapa

$$Z_n(A'') \to A'_{n-1}/B_{n-1}(A'),\ z'' \mapsto a'_{n-1} + B_{n-1}(A').$$

Para provar a boa definição do mapa, suponha que mais uma vez tenha se passado de $z''$ para $\tilde{a}_n \in A_n$. Pelo que se fez acima, existe único $\tilde{a}'_{n-1} \in A'_{n-1}$ com $i(\tilde{a}'_{n-1}) = d(\tilde{a}_n)$.

$$0 = z'' - z'' = p(a_n) - p(\tilde{a}_n) \Rightarrow a_n - \tilde{a}_n \in ker(p).$$

Como este é exatamente $Im(f_n : A'_n \to A_n)$, pois a linha superior é exata, ocorre que existe $x'_n \in A'_n$ que verifica que

$$a'_{n-1} - \tilde{a}'_{n-1} = d'(x'_n) \in B_{n-1}(A').$$

Portanto, a função está bem definida.

Vale que $B_n(A'') \mapsto 0$ e que $i^{-1}(d(p^{-1}(z''))) = a_{n-1}''$ está em $ker(d)$. Com isso, a expressão do enunciado é de fato de um mapa com domínio $H_n(A'')$ e contradomínio $H_{n-1}(A')$. □

**Teorema 2.2.1.9** (Teorema da sequência exata longa)**.** Seja $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$ uma sequência exata de complexos. Então, existe sequência exata de módulos

$$\cdots \to H_n(A') \xrightarrow{i_*} H_n(A) \xrightarrow{p_*} H_n(A'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

*Demonstração.* A exatidão se realiza pelas igualdades:

$$Im(i_*) = ker(p_*);\ Im(p_*) = ker(\partial);\ Im(\partial) = ker(i_*).$$

- $Im(i_*) \subseteq ker(p_*)$:

$$p_* \circ i_* = (p \circ i)_* = 0_* = 0,$$

onde se usou a exatidão da primeira sequência.

- $ker(p_*) \subseteq Im(i_*)$: tome $z + B \in ker(p_*)$, isto é, $B'' = p_*(z + B) = p(z) + B''$. Desse modo, $p(z) \in B'' = Im(d'') \Rightarrow p(z) = d''(a'')$. Pela sobrejetividade de $p$, dado este $a'' \in A''$, existe $a \in A$ com $p(a) = a''$. Assim,

$$p(z) = d''(a'') = d''(p(a)) = p(d(a)) \Rightarrow p(z - d(a)) = 0 \Rightarrow z - d(a) \in ker(p).$$

Utiliza-se a exatidão inicial para se escrever que $z - d(a) \in Im(i) \Rightarrow z - d(a) = i(a')$. Tem-se que

$$i(d'(a')) = d(i(a')) = d(z - d(a)) = d(z) - d(d(a)) = 0,$$

porque $z \in ker(d)$. Então, $d'(a') \in ker(i)$ e $d'(a') = 0$, por $i$ ser injetor. Com isso, $a' \in ker(d') = B'$ e a expressão $a' + B'$ pode ser considerada em $H_n(A')$.

$$z + B = z - d(a) + B = i(a') + B = i_*(a' + B') \in Im(i_*).$$

- $Im(p_*) \subseteq ker(\partial)$:

$$\partial(p_*(z + B)) = \partial(p(z) + B'') = x' + B',$$

onde este $x'$ é tomado em $A'$ de forma que $i(x') = d(p^{-1}(p(z))) = d(z) = 0$. Mas, $i$ é monomorfismo. Então, $x' = 0 \Rightarrow p_*(z + B) \in ker(\partial)$.

- $ker(\partial) \subseteq Im(p_*)$: tome $z'' + B'' \in ker(\partial)$, ou seja, $\partial(z'' + B'') = B'' \Rightarrow x' := i^{-1}(d(p^{-1}(z''))) \in B'$. Da definição de $B' = Im(d')$, existe $a'$ com $x' = d'(a')$. Vale que

$$d(p^{-1}(z'')) = i(x') = i(d'(a')) = d(i(a')) \Rightarrow d(p^{-1}(z'') - i(a')) = 0 \Rightarrow p^{-1}(z'') - i(a') \in ker(d) := Z.$$

Assim,

$$z'' + B'' = p(p^{-1}(z'')) - p(i(a')) + B'' = p_*(p^{-1}(z'') - i(a') + B),$$

onde o último termo tem sentido porque se mostrou que $p^{-1}(z'') - i(a') \in Z$.

- $Im(\partial) \subseteq ker(i_*)$:

$$i_*(\partial(z'' + B'')) = i(x') + B,$$

com $i(x') = d(p^{-1}(z'')) \in Im(d) = B$. Portanto, $i(x') + B = B = 0_{H_{n-1}(A)}$.

- $ker(i_*) \subseteq Im(\partial)$: se $z' + B' \in ker(i_*)$, então

$$B = i_*(z' + B) = i(z') + B \Rightarrow i(z') \in B = Im(d) \Rightarrow i(z') = d(a).$$

Vale que

$$d''(p(a)) = p(d(a)) = p(i(z')) = 0 \Rightarrow p(a) \in Z''.$$

Ocorre que $p(a) + B'' \in H_n(A'')$ e se pode escrever que

$$\partial(p(a) + B'') = x' + B',$$

com $i(x') = d(p^{-1}(p(a)) = d(a) = i(z')$. Da injetividade de $i$, $x' = z'$ e se pode escrever que $z' + B' = x' + B' = \partial(p(a) + B'') \in Im(\partial)$. □

Dentro da teoria de categorias, dados funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \tilde{\mathfrak{C}}$, tem-se que uma transformação natural $\eta$ de $F$ para $G$ é uma família de morfismos tal que cada objeto $X$ de $\mathfrak{C}$ está associado com algum morfismo $\eta_X : F(X) \to G(X)$ e, se $f : X \to Y$ é morfismo em $\mathfrak{C}$, então $\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$.

**Teorema 2.2.1.10.** Dado um diagrama comutativo com linhas exatas de complexos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha'"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "j"] & C \arrow[r, "q"] & C'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

existe diagrama comutativo com linhas exatas de módulos da forma

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\alpha'_*"] & H_n(A) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_n(A'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha''_*"] & H_{n-1}(A') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(C') \arrow[r, "j_*"] & H_n(C) \arrow[r, "q_*"] & H_n(C'') \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(C') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

*Demonstração.* Primeiro, note que as linhas serem exatas é a afirmação do teorema 2.2.1.9. Dois dos três quadrados acima comutam porque $H_n$ é funtor, com

$$j_* \circ \alpha'_* = \alpha_* \circ i_*$$

$$q_* \circ \alpha_* = \alpha''_* \circ p_*$$

A comutatividade do terceiro é verificada pelas definições dos mapas envolvidos. □

### 2.2.2 Funtores derivados

Nesta seção, será explorada a obtenção de funtores a partir de um funtor dado, processo que será aprofundado no estudo de dois deles, *Tor* e *Ext*. A utilidade deste procedimento é usar os funtores derivados para analisar o próprio funtor que os originou.

**Definição 2.2.2.1.** Considere $A$ um módulo e seja $\cdots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to A \to 0$ um complexo. Denomina-se $X_A := \cdots X_2 \to X_1 \to X_0 \to 0$ o **complexo deletado** correspondente.

Observe que a designação é coerente, pois a estrutura se conserva um complexo. Estes complexos deletados podem ser extraídos, por exemplo, de resoluções projetivas ou injetivas de um módulo.

**Teorema 2.2.2.2** (Teorema de comparação)**.** Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed] & X_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X'_2 \arrow[r, "d'_2"] & X'_1 \arrow[r, "d'_1"] & X'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$

cujas linhas são complexos. Suponha que

**(i)** Cada $X_i$ na linha superior seja módulo projetivo.

**(ii)** A linha de baixo seja exata.

Então, há mapa cadeia $\overline{f} : X_A \to X'_A$ entre os dois complexos deletados correspondentes que faz o diagrama comutar. E, ainda, quaisquer dois mapas cadeia dessa forma, $\overline{f}, g$, são homotópicos, isto é, o mapa $\overline{f} - g := h$ é homotópico-nulo, o que é caracterizado por existir

$$s_n : X_n \to X'_{n+1}$$

tal que

$$h_n = d'_{n+1} \circ s_n \circ d_n, \forall\, n.$$

*Demonstração.* - Existência de $\overline{f}$: usemos indução em $n$. Se $n = 0$, segue, do fato (ii), que $\varepsilon'$ é epimorfismo e, por (i), $X_0$ é projetivo. Assim, pela definição de módulo projetivo, existe $\gamma : X_0 \to X'_0$ tal que o diagrama comuta. Ou seja,

$$\varepsilon' \circ \gamma = f \circ \varepsilon.$$

Tome $\overline{f}_0 := \gamma$.

Para o passo indutivo, assuma o diagrama
$$\begin{array}{ccccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_n} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_{n-1}} \\ X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & X'_n & \xrightarrow{d'_n} & X'_{n-1} \end{array}$$
. Provemos que

$$Im(\overline{f}_n \circ d_{n+1}) \subseteq Im(d'_{n+1}).$$

Pela exatidão da segunda linha,

$$Im(d'_{n+1}) = ker(d'_n).$$

Pode-se mostrar que

$$d'_n(\overline{f}_n(d_{n+1}(x))) = 0, \forall\, x.$$

Isso se verifica pois

$$(d'_n \circ \overline{f}_n) \circ d_{n+1} = (\overline{f}_{n+-1} \circ d_n) \circ d_{n+1} = \overline{f}_{n-1} \circ (d_n \circ d_{n+1}) = 0,$$

onde a primeira igualdade se deve à hipótese de indução e a última ocorre da definição de complexo.

Com tal demonstração, vale o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & X_{n+1} & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_n \circ d_{n+1}} & & \\ X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & Im(d'_{n+1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por (i), $X_{n+1}$ é projetivo. Pela definição, existe $\overline{f}_{n+1} : X_{n+1} \to X'_{n+1}$ tal que

$$d'_{n+1} \circ \overline{f}_{n+1} = \overline{f}_n \circ d_{n+1}.$$

Está provado o passo indutivo e o resultado vale por indução.

- Unicidade: sejam $\overline{f}, g$ dois mapas cadeia com $g - \overline{f}$ homotópico-nulo. Defina os $s_n$ indutivamente, com

$$s_{-1} : X_{-1} \to X'_0 : \text{mapa identicamente nulo, pois se convenciona que } X_{-1} = 0.$$

Desse modo, provemos que

$$Im(g_{n+1} - \overline{f}_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) \subseteq Im(d'_{n+2}).$$

Por (ii),

$$Im(d'_{n+2}) = ker(d'_{n+1}).$$

Com isso, mostremos que

$$d'_{n+1}(g_{n+1}-\overline{f}_{n+1}-s_n\circ d_{n+1})=0 \Leftrightarrow d'_{n+1}(g_{n+1}-\overline{f}_{n+1})-\underbrace{d'_{n+1}\circ s_n}_{=g_n-\overline{f}_n-s_{n-1}\circ d_n,\ \text{pela H.I.}}\circ d_{n+1}=0 \Leftrightarrow$$

$$d'_{n+1}(g_{n+1}-\overline{f}_{n+1})-(g_n-\overline{f}_n-s_{n-1}\circ d_n)\circ d_{n+1}=0 \Leftrightarrow d'_{n+1}(g_{n+1}-\overline{f}_{n+1})-(g_n-\overline{f}_n)\circ d_{n+1}=0,$$

onde essa última igualdade é verdadeira porque $g,\overline{f}$ são mapas cadeia.

Assim, ocorre o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X_{n+1} \arrow[d, "g_{n+1}-\overline{f}_{n+1}-s_n\circ d_{n+1}"] & \\ X'_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"] & Im(d'_{n+2}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por (i), $X_{n+1}$ é projetivo e existe $s_{n+1}:X_{n+1}\to X'_{n+2}$ que satisfaz a equação desejada. □

**Definição 2.2.2.3.** Considere $T$ um funtor. Para cada módulo $A$, escolha uma resolução projetiva de $A$,

$$\cdots\to P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}A\to 0,$$

e tome o correspondente complexo deletado $P_A$ (como na definição 2.2.2.1). Aplicando $T$, tem-se ainda um complexo

$$\cdots\to T(P_2)\xrightarrow{T(d_2)}T(P_1)\xrightarrow{T(d_1)}T(P_0)\to 0.$$

Define-se um funtor $L_nT$ tal que

$$(L_nT)(A):=H_n(T(P_A))=ker(T(d_n))/Im(T(d_{n+1})).$$

Falta expressar a ação de $L_nT$ em morfismos. Pelo teorema de comparação, dado $f:A\to B$, existe mapa cadeia $\overline{f}:P_A\to P_B$ sobre $f$, isto é, com $f\varepsilon=\varepsilon'\overline{f}_0$. Define-se

$$(L_nT)(f):(L_nT)(A)\to(L_nT)(B)\text{ como }H_n(T(\overline{f})).$$

Ou seja, tomando elemento $z_n\in ker(T(d_n))$, tem-se que $z_n+Im(d_{n+1})$ é levado em $T(\tilde{f}_n)z_n+Im(T(d'_{n+1}))$, onde os diferenciais $d'_i$ aparecem em $P_B$.

**Definição 2.2.2.4.** Seja $T:=\otimes_R B$. Define-se

$$\boxed{Tor_n^R(\cdot,B):=L_nT.}$$

Em particular,

$$Tor_n^R(A,B)=(L_nT)(A)=H_n(P_A\otimes_R B)=ker(d_n\otimes 1)/Im(d_{n+1}\otimes 1),$$

onde tais funções $d_i$ estão na resolução projetiva de $A$

$$\cdots\to P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\to A\to 0.$$

É preciso mostrar que a estrutura acima está bem definida, isto é, se tomada outra resolução projetiva, o objeto calculado é, em algum sentido, o mesmo.

**Definição 2.2.2.5.** Considere $F, \tilde{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ dois funtores. Eles são designados **naturalmente equivalentes** se, dado $A \in obj(\mathfrak{C})$, existir $t_A : F(A) \to \tilde{F}(A)$ isomorfismo tal que, para qualquer $g : A \to B$,

$$\tilde{F}(g) \circ t_A = t_B \circ F(g),$$

onde $t_B : F(B) \to \tilde{F}(B)$ é isomorfismo.

**Exemplo 2.2.2.6.** $Hom_R(R, \cdot)$, $R \otimes_R$ são naturalmente equivalentes a $I_R$ (funtor identidade na categoria ${}_R\mathfrak{M}$).

**Teorema 2.2.2.7.** Para qualquer funtor $T$, os funtores $L_n(T), \tilde{L}_n(T)$ , obtidos por resoluções projetivas distintas de $A$, são naturalmente equivalentes. Em particular,

$$(L_n(T))(A) \simeq (\tilde{L}_n(T))(A).$$

Ou seja, tais grupos são independentes da escolha da resolução projetiva de $A$.

*Demonstração.* Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \big\downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \tilde{P}_2 & \longrightarrow & \tilde{P}_1 & \longrightarrow & \tilde{P}_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

com a primeira linha é a resolução projetiva de $A$ usada para definir $L_n(T)$ e a linha inferior, usada em $\tilde{L}_n(T)$.

Pelo teorema de comparação, existe um mapa cadeia $t : P_A \to \tilde{P}_A$ sobre $1_A$ (único a menos de homotopia).

Aplicando $T$,

$$T(t) : T(P_A) \to T(\tilde{P}_A)$$

é mapa cadeia sobre $1_{T(A)}$. Ele induz mapas $T(t)_* : (L_n(T))(A) \to (\tilde{L}_n(T))(A)$, que são isomorfismos com inversas $s_*$, obtidas de maneira semelhante, isto é, pode-se inverter o diagrama e usar o teorema de comparação para ter mapa cadeia $s : \tilde{P}_A \to P_A$.

Vale que $s \circ t : P_A \to P_A$ é um mapa cadeia sobre $1_A$. Mas, o identidade também é. Com isso,

$$s \circ t \text{ e a identidade são homotópicos e } s_* t_* = 1.$$

Repetindo tais passos, $t_* s_* = 1$. Portanto, $t_*$ é isomorfismo.

Como $s \circ t$ e a identidade são homotópicos, $T(s \circ t)$ é homotópico a $T(id) = id$. Mas, $T(s \circ t) = T(s) \circ T(t)$ e, assim, $T(s) \circ T(t) = id$. Com isso, $T(s)_* \circ T(t)_* = id$. Por valer a volta de maneira semelhante, tem-se que $T(t)_*$ é isomorfismo.

Seja $f : A \to B$ qualquer e provemos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} (L_n(T))(A) & \xrightarrow{T(t_*)} & (\tilde{L}_n(T))(A) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (L_n(T))(B) & \xrightarrow{T(t_*)} & (\tilde{L}_n(T))(B) \end{array}.$$

1°: Comecemos pela disposição

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \tilde{P}_1 \arrow[r] & \tilde{P}_0 \arrow[r] & A \arrow[d, "f"] & \\
\cdots \arrow[r] & \tilde{Q}_1 \arrow[r] & \tilde{Q}_0 \arrow[r] & B &
\end{tikzcd}.$$

Pelo teorema de comparação, existe mapa cadeia $P_A \to \tilde{Q}_B$ sobre $f \circ 1_A : A \to B = f$.

2°: De maneira semelhante, existe mapa cadeia $\tilde{P}_A \to \tilde{Q}_B$ com $1_B \circ f = f : A \to B$.

3°: Aplica-se $T$ aos mapas dados e se tem $T(P_A) \to T(\tilde{Q}_B)$ mapas cadeia sobre $T(f)$. Estes são homotópicos porque os originais o eram.

Os mapas induzidos são iguais e o diagrama de fato comuta. Por definição, isso mostra que $Ln(T)$ e $\tilde{L}_n(T)$ são naturalmente equivalentes. □

**Corolário 2.2.2.8.** $Tor_n^R(A, B)$ independe da resolução projetiva de $A$ tomada.

*Demonstração.* Do teorema 2.2.2.7, $L_n(T)(A) \simeq \tilde{L}_n(T)(A)$. Por definição, $Tor_n^R(\cdot, B) = L_n(T)$, e, portanto, este funtor derivado independe da resolução projetiva de $A$. □

Uma questão que poderia aparecer agora é que a construção acima foi feita partindo de $\otimes_R B$. Em específico, começando-se de $A \otimes_R$, ocorreria outra definição de $Tor_n^R(A, B)$, a qual será atestada coincidente com a anterior mais à frente. Agora, será desenvolvida a noção de funtores derivados à direita, com uma distinção quando utilizados $T$ covariantes e contravariantes.

**Definição 2.2.2.9.** Dado um módulo $A$, tome resolução injetiva de $A$ (vista como um complexo)

$$0 \to A \to E_0 \xrightarrow{d_0} E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} E_{-2} \to \cdots$$

Note que os índices são decrescentes a partir do 0 e, assim, negativos. Para evitá-los, reescreveremos em ordem crescente na forma

$$0 \to A \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \cdots$$

Considere a resolução deletada, $E_A$. Se $T$ for funtor covariante, os funtores derivados à direita são dados por

$$(R^n T)(A) := H^n(T(E_A)) = ker(T(d^n))/Im(T(d^{n-1})).$$

O dual do teorema de comparação assegura que existe mapa cadeia $\overline{f} : E_A \to E_B$, que é único a menos de homotopia. Assim, existe único $H^n(T(E_A)) \to H^n(T(E_B))$ induzidos por $T(\overline{f})$. Define-se

$$(R^n T)(f) : R^n T(A) \to R^n T(B) \text{ como } H^n(T(\overline{f})).$$

**Definição 2.2.2.10.** Seja $T := Hom_R(C, \cdot)$. Define-se

$$\boxed{Ext_R^n(C, \cdot) := R^n T.}$$

Em particular,

$$Ext_R^n(C, A) = (R^n T)(A) = H^n(Hom_R(C, E_A)) = ker(Hom(C, d^n))/Im(Hom(C, d^{n-1})),$$

onde $0 \to A \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \cdots$ é a resolução injetiva escolhida para $A$.

Como feito para os funtores derivados à esquerda, a construção dos funtores derivados à direita permite que dois deles sejam naturalmente equivalentes.

**Teorema 2.2.2.11.** Seja $\tilde{R}^nT$ tomado com resolução injetiva diferente. Vale que $R^nT$ e $\tilde{R}^nT$ são naturalmente equivalentes.

**Corolário 2.2.2.12.** Os funtores $Ext^n_R(C, A)$ independem da resolução injetiva de $A$.

Para definirmos os funtores derivados à direita de funtores contravariantes, note que, nos dois tratamentos anteriores, primeiro se teve que os complexos $T(P_A)$ seguiram infinitos para a **esquerda** - nos funtores derivados à **esquerda** - e $T(E_A)$ continuaram para a **direita** - nos funtores derivados à **direita** de $T$ covariante. Agora, usaremos resoluções projetivas para funtores derivados à direita de funtores contravariantes para conservarmos a concordância acima.

**Definição 2.2.2.13.** Dada resolução projetiva de $A$ da forma

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to A \to 0,$$

aplica-se $T$ contravariante à resolução deletada $P_A$,

$$0 \to T(P_0) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_1) \xrightarrow{T(d_2)} T(P_2) \to \cdots$$

Quando $T$ é contravariante, define-se

$$(R^nT)(A) := ker(T(d_{n+1}))/Im(T(d_n)).$$

Se $f : A \to B$, pelo teorema de comparação, existe mapa cadeia $\overline{f} : P_A \to P_B$ sobre $f$. Define-se

$$(R^nT)(f) : (R^nT)(A) \to (R^nT)(B) \text{ como } H_n(T(\overline{f})).$$

**Teorema 2.2.2.14.** Se $T$ é contravariante e forem usadas resoluções projetivas distintas, $R^nT$ e $\tilde{R}^nT$ são naturalmente equivalentes.

**Definição 2.2.2.15.** Seja $T := Hom_R(\cdot, A)$. Define-se

$$\boxed{Ext^n_R(\cdot, A) := R^nT.}$$

Em particular,

$$Ext^n_R(C, A) = (R^nT)(C) = H^n(Hom_R(P_C, A)) = ker(Hom(d_{n+1}, A))/Im(Hom(d_n, A)),$$

onde $\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to C \to 0$ é a resolução projetiva escolhida para $C$.

Com isso, tem-se duas definições para $Ext^n_R(C, A)$, que produzem estruturas isomorfas ([10]).

**Corolário 2.2.2.16.** $Ext^n_R(C, A)$ independe da resolução projetiva de $C$.

**Lema 2.2.2.17** (*Five lemma*)**.** Seja

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & A_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & A_3 & \xrightarrow{\gamma_3} & A_4 & \xrightarrow{\gamma_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_4} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_5} \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$

diagrama comutativo de linhas exatas. Vale que

a) Se $\alpha_2, \alpha_4$ forem epimorfismos e $\alpha_5$ for monomorfismo, então $\alpha_3$ é epimorfismo.

b) Se $\alpha_2, \alpha_4$ forem monomorfismos e $\alpha_1$ for epimorfismo, então $\alpha_3$ é monomorfismo.

*Demonstração.* Cada um dos itens utiliza quatro pares de módulos. Assim, em a) não serão usados $A_1, B_1$ e, em b), não serão usados $A_5, B_5$.

a) Como queremos mostrar a sobrejetividade de $\alpha_3$, considere $b_3 \in B_3$. Por $\alpha_4$ ser sobrejetor, existe $a_4 \in A_4$ tal que $\alpha_4(a_4) = \beta_3(b_3)$. Pelo último quadrado ser comutativo,

$$\beta_4 \circ \alpha_4 = \alpha_5 \circ \gamma_4.$$

Em particular, $\beta_4(\beta_3(b_3)) = \beta_4(\alpha_4(a_4)) = \alpha_5(\gamma_4(a_4))$. Como a linha inferior é exata, tem-se que $Im(\beta_3) = ker(\beta_4)$ e, da cadeia de igualdades anterior,

$$\alpha_5(\gamma_4(a_4)) = 0.$$

Do enunciado de a), $\alpha_5$ é injetor e, assim, $\gamma_4(a_4) = 0 \Rightarrow a_4 \in ker(\gamma_4) = Im(\gamma_3)$, pois a linha superior é exata. Com isso, existe $a_3 \in A_3$ com $a_4 = \gamma_3(a_3)$. Pela comutatividade do penúltimo quadrado, tem-se que

$$\beta_3 \circ \alpha_3 = \alpha_4 \circ \gamma_3.$$

Então, $\beta_3(b_3) = \alpha_4(a_4) = \alpha_4(\gamma_3(a_3)) = \beta_3(\alpha_3(a_3)) \Rightarrow \alpha_3(a_3) - b_3 \in ker(\beta_3) = Im(\beta_2)$. Portanto, existe $b_2 \in B_2$ com $\beta_2(b_2) = \alpha_3(a_3) - b_3$. Da sobrejetividade admitida de $\alpha_2$, existe $a_2 \in A_2$ tal que $\alpha_2(a_2) = b_2$. Comutando o segundo quadrado do diagrama,

$$\beta_2 \circ \alpha_2 = \alpha_3 \circ \gamma_2.$$

Com isso, $\alpha_3(\gamma_2(a_2)) = \beta_2(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(b_2) = \alpha_3(a_3) - b_3 \Rightarrow \alpha_3(a_3 - \gamma_2(a_2)) = b_3$. Tem-se a sobrejetividade de $\alpha_3$.

b) Para provar que $\alpha_3$ é injetor, considere $\alpha_3(a_3) = 0$. Da comutatividade do terceiro quadrado, vale que $0 = \beta_3(0) = \beta_3(\alpha_3(a_3)) = \alpha_4(\gamma_3(a_3))$. Pela injetividade de $\alpha_4$, segue que $\gamma_3(a_3) = 0$, isto é, $a_3 \in ker(\gamma_3) = Im(\gamma_2)$, da exatidão da primeira linha. Assim, existe $a_2 \in A_2$ tal que $\gamma_2(a_2) = a_3$. Comutando o segundo quadrado,

$$0 = \alpha_3(a_3) = \alpha_3(\gamma_2(a_2)) = \beta_2(\alpha_2(a_2)) \Rightarrow \alpha_2(a_2) \in ker(\beta_2) = Im(\beta_1),$$

pela exatidão da segunda linha. Desse modo, existe $b_1 \in B_1$ com $\beta_1(b_1) = \alpha_2(a_2)$. Utilizando a sobrejetividade suposta para $\alpha_1$, existe $a_1 \in A_1$ com $\alpha_1(a_1) = b_1$. Portanto,

$$\alpha_2(\gamma_1(a_1)) = \beta_1(\alpha_1(a_1)) = \beta_1(b_1) = \alpha_2(a_2) \Rightarrow a_2 = \gamma_1(a_1),$$

onde se usou a comutatividade do primeiro quadrado e a injetividade assumida de $\alpha_2$. Então,

$$a_3 = \gamma_2(a_2) = \gamma_2(\gamma_1(a_1)).$$

Como a primeira linha é exata, $Im(\gamma_1) = ker(\gamma_2)$ e $a_3 = 0$, ou seja, $\alpha_3$ é injetor. □

**Corolário 2.2.2.18.** Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ forem isomorfismos, então $\alpha_3$ é isomorfismo.

**Definição 2.2.2.19.** Dados $(A, d), (A', d')$ complexos, define-se

$$(A \otimes A')_n := \sum_{i+j=n} A_i \otimes A'_j.$$

$$\Delta_n : (A \otimes A')_n \to (A \otimes A')_{n-1},\ a_i \otimes a'_j \mapsto d(a_i) \otimes a'_j + (-1)^i a_i \otimes d'(a'_j).$$

Com tais complexos e tais mapas cadeia, tem-se um novo complexo, chamado de **produto tensorial** de $A, A'$, denotado por $A \otimes A'$.

**Teorema 2.2.2.20.** Sejam

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$
$$\cdots \to Q_1 \to Q_0 \to B \to 0$$

duas resoluções projetivas. Então,

$$H_n(A \otimes_R Q_B) \simeq H_n(P_A \otimes_R Q_B) \simeq H_n(P_A \otimes_R B), \forall\, n \geq 0.$$

**Corolário 2.2.2.21.** Se $A$ é $R$-módulo à direita e $T = A\otimes_R$, tem-se que o funtor derivado à esquerda $Tor_n^R(A, \cdot) := L_nT$ é tal que ocorre isomorfismo da construção de $Tor_n^R(A, B)$ por este e da feita anteriormente começando do funtor $\otimes_R B$ e se calculando o derivado $Tor_n^R(\cdot, B)$.

**Teorema 2.2.2.22.** Sejam $\cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ e $0 \to B \to E^0 \to E^1 \to \cdots$ resoluções projetiva de $A$ e injetiva de $B$, respectivamente. Então,

$$H^n(Hom_R(A, E_B)) \simeq H^n(Hom_R(P_A, E_B)) \simeq H^n(Hom_R(P_A, B)), \forall\, n \geq 0.$$

**Corolário 2.2.2.23.** $Ext_R^n$ possui mesmo valor em $(A, B)$ pelas duas construções.

**Lema 2.2.2.24.** Se $P$ é módulo projetivo e $n \geq 1$, então $Tor_n^R(P, B) = 0$.

*Demonstração.* Mostrou-se que $Tor_n^R(P, B)$ independe da resolução projetiva de $P$ tomada. Assim, pode-se considerar, em particular,

$$\cdots \to 0 \to 0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} P \to 0,$$

onde $P_0 = P,\ \varepsilon = id_P$. □

**Teorema 2.2.2.25.** Se $A$ é plano, então $Tor_n^R(A, B) = 0, \forall\, n \geq 1$ e módulo $B$.

*Demonstração.* Usemos indução em $n$. Seja $P$ um módulo projetivo e considere a sequência exata $0 \to K \xrightarrow{i} P \to B \to 0$.

Se $n = 1$: $\cdots \to \underbrace{Tor_1^R(A, P)}_{=0, P \text{ projetivo.}} \to Tor_1^R(A, B) \xrightarrow{\varphi} A \otimes K \xrightarrow{1\otimes i} A \otimes P$ é sequência exata. Da suposição de $A$ ser plano, $1 \otimes i$ é monomorfismo e, portanto,

$$Tor_1^R(A, B) \simeq Tor_1^R(A, B)/\{0\} = Tor_1^R(A, B)/ker(\varphi) \simeq Im(\varphi) = ker(1 \otimes i) = \{0\}.$$

Suponha provado para $n$. Como $P$ é projetivo, pelo lema 2.2.2.24, $Tor_{n+1}^R(A, P) = 0$. Usando a hipótese de indução, $Tor_n^R(A, K) = 0$. Considere a sequência exata

$$0 = Tor_{n+1}^R(A, P) \xrightarrow{\theta} Tor_{n+1}^R(A, B) \xrightarrow{\phi} Tor_n^R(A, K) = 0.$$

Então,

$$Tor_{n+1}^R(A, B) \simeq Tor_{n+1}^R(A, B)/\{0\} = Tor_{n+1}^R(A, B)/Im(\theta) = Tor_{n+1}^R(A, B)/ker(\phi) \simeq Im(\phi) = 0.$$

Está provado o resultado. □

## 2.3 Sequência espectral

Esta estrutura é empregada em demonstrações de ([7]) e, assim, foi alvo de um estudo básico.

Uma sequência exata curta de complexos dá origem a uma sequência exata longa em homologia. Uma generalização dessas sequências exatas curtas de complexos são as filtrações de complexos, às quais se associa uma generalização da sequência exata longa, que é denominada sequência espectral e auxilia a calcular de maneira aproximada a homologia do complexo.

**Definição 2.3.0.1.** Um **módulo graduado** é uma sequência de módulos $\mathcal{M} := \{M_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$.

**Definição 2.3.0.2.** Sejam $M = \{M_p\}, N = \{N_p\}$ dois módulos graduados e $a \in \mathbb{Z}$. Então, a sequência de homomorfismos $f = \{f_p : M_p \to N_{p+a}\}$ é um **mapa de grau** $a$. Denota-se $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

**Exemplo 2.3.0.3.** Um complexo $C = \cdots \to C_p \xrightarrow{d_p} C_{p-1} \to \cdots$ determina o módulo graduado $C = \{C_p\}$. O mapa $d : C \to C$ possui grau -1.

**Exemplo 2.3.0.4.** Considere $H_*C := \{H_p(C)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ a sequência de homologias de um complexo. Este é um módulo graduado.

**Definição 2.3.0.5.** Um **módulo bigraduado** é uma família duplamente indexada de $R$-módulos, $\mathcal{M} := \{M_{p,q}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

**Definição 2.3.0.6.** Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ módulos bigraduados. Um **mapa é bigraduado de bigrau** $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se for uma família de homomorfismos de $R$-módulos, denotada por $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, onde $f := \{f_{p,q} : M_{p,q} \to N_{p+a,q+b}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

**Definição 2.3.0.7.** Um módulo bigraduado diferencial é um par ordenado $(\mathcal{M}, d)$, onde $\mathcal{M}$ é módulo bigraduado e $d : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é mapa bigraduado tal que $d \circ d = 0$. Este é chamado de **diferencial**.

**Definição 2.3.0.8.** Dado $(\mathcal{M}, d)$, com $d$ de bigrau $(a, b)$, define-se a **homologia**, denotada por $H(\mathcal{M}, d)$, como o módulo bigraduado cujo termo de ordem $(p, q)$ é

$$H(\mathcal{M}, d)_{p,q} := \frac{ker(d_{p,q})}{Im(d_{p-a,q-b})}.$$

**Definição 2.3.0.9.** Uma **filtração de um $R$-módulo** $M$ é uma família $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de submódulos de $M$ tais que

$$\cdots \subset M_{p-1} \subseteq M_p \subseteq M_{p+1} \subseteq \cdots$$

Para cada $p$, $M_p/M_{p-1}$ é um **fator** da filtração.

O **módulo graduado associado** é definido por

$$G_pM := M_p/M_{p-1}.$$

**Definição 2.3.0.10.** Uma **filtração de um complexo** $(C, d)$ é uma família $(F^pC)_{p\in\mathbb{Z}}$ de subcomplexos com

$$\cdots F^{p-1}C \subseteq F^pC \subseteq F^{p+1}C \subseteq \cdots,$$

isto é, para cada $n$, $(F^pC)_n$ é submódulo de $C_n$ e $d_n : (F^pC)_n \to (F^pC)_{n-1}, \forall\ n, p$, ou seja, o diferencial preserva a filtração, $d_n((F^pC)_n) \subset (F^pC)_{n-1}$.

Com isso, induz-se um diferencial $d : (G_pC)_n \to (G_pC)_{n-1}$, que está bem definido entre os módulos graduados associados. Tem-se, assim, um complexo graduado associado. Se o objetivo for computar a homologia do complexo inicial e for mais simples calcular a do complexo graduado associado, pode-se pensar na homologia deste e usá-la para ter a homologia do complexo inicial. Esta relação será abordada na construção das sequências espectrais.

Considerando que os mapas horizontais são inclusões e os verticais são restrições de $d$ a $(F^pC)_n$, tem-se o diagrama cuja $n$-ésima linha é uma filtração de $C_n$.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & (F^{p-1}C)_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & (F^pC)_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & (F^{p+1}C)_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & (F^{p-1}C)_{n} \arrow[r] \arrow[d] & (F^pC)_{n} \arrow[r] \arrow[d] & (F^{p+1}C)_{n} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & (F^{p-1}C)_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & (F^pC)_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & (F^{p+1}C)_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Antes de apresentar a definição do tema anunciado, seja $(F_pC_*, d)$ uma filtração de um complexo, com módulo graduado associado

$$E^0_{p,q} := G_pC_{p+q} = F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}.$$

Denote o diferencial induzido por

$$d_0 : E^0_{p,q} \to E^0_{p,q-1}$$

e seja a homologia do associado igual a

$$E^1_{p,q} := H_{p+q}(G_pC_*),$$

o que pode ser pensado como uma aproximação de primeira ordem para a homologia de $C_*$. Pode-se continuar este processo. Admita, assim, uma aproximação de $r$-ésima ordem definida por

$$E^r_{p,q} := \frac{\{x \in F_pC_{p+q} \mid dx \in F_{p-r}C_{p+q-1}\}}{F_{p-1}C_{p+q} + d(F_{p+r-1}C_{p+q+1})}.$$

**Definição 2.3.0.11.** Uma filtração $\{F^pH\}$ de um módulo graduado $H$ é **limitada** se, para cada $n$, existirem inteiros $s(n), t(n)$ tais que

$$F^{s(n)}H_n = 0, \qquad F^{t(n)}H_n = H_n.$$

Com estas duas definições, tem-se o

**Lema 2.3.0.12.** Seja $(F_pC_*, d)$ uma filtração de um complexo. Então,

a) $d$ induz um mapa bem definido

$$d^r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$$

e tal que $d^r \circ d^r = 0$.

b) $E^{r+1}$ é a homologia de $(E^r, d^r)$, onde $d^r$ tem bigrau $(-r, r-1)$, isto é,

$$E^{r+1}_{p,q} = \frac{ker(d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1})}{Im(d^r_{p+r,q-r+1} : E^r_{p+r,q-r+1} \to E^r_{p,q})}. \tag{6}$$

c) $E^1_{p,q} = H_{p+q}(G_pC_*)$.

d) Se, para cada $n$, a filtração de $C_n$ for limitada, então, para todo $p, q$, existe $r$ suficientemente grande tal que

$$E^r_{p+q} = G_pH_{p+q}(C_*).$$

**Definição 2.3.0.13.** Uma **sequência espectral** é uma sequência $(E^r, d^r)_{r\geq 1}$ de módulos bigraduados diferenciais tais que

$$E^{r+1} = H(E^r, d^r), \forall\ r,$$

ou seja, vale (6).

Dado $r \geq 1$ fixado, diz-se que o módulo $E^r$ é a $r$-ésima página da sequência espectral e cada página é a homologia da anterior.

**Proposição 2.3.0.14.** A filtração $\{F^pC\}$ de um complexo $C$ determina uma sequência espectral.

*Demonstração.* Para cada $p$, existe sequência exata curta de complexos

$$0 \to F^{p-1}C \to F^pC \to F^pC/F^{p-1}C \to 0.$$

A sequência longa de homologia associada é

$$\cdots \to H_{p+q}(F^{p-1}C) \xrightarrow{\alpha} H_{p+q}(F^pC) \xrightarrow{\beta} H_{p+q}(F^pC/F^{p-1}C) \xrightarrow{\gamma} H_{p+q-1}(F^{p-1}C) \to \cdots$$

Tem-se dois tipos de termos, a homologia de algum $F^pC$ e de algum quociente $F^pC/F^{p-1}C$. Defina, então,

$$D_{p,q} := H_{p+q}(F^pC), \qquad E_{p,q} := H_{p+q}(F^pC/F^{p-1}C).$$

Reescreve-se, assim,

$$\cdots \to D_{p-1,q+1} \xrightarrow{\alpha} D_{p,q} \xrightarrow{\beta} E_{p,q} \xrightarrow{\gamma} D_{p-1,q} \to \cdots$$

Os mapas $\alpha, \beta, \gamma$ podem ter bigraus atribuídos iguais a $(1, -1), (0, 0), (-1, 0)$, respectivamente. Em diagrama,

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd},$$

onde se tem exatidão em cada vértice, isto é, há mapas

$$\gamma_{i,j} : E_{i,j} \longrightarrow D_{i+i_0,j+j_0}$$

$$\alpha_{i+i_0,j+j_0} : D_{i+i_0,j+j_0} \longrightarrow D_{i+i_0+i_1,j+j_0+j_1}$$
$$\beta_{i+i_0+i_1,j+j_0+j_1} : D_{i+i_0+i_1,j+j_0+j_1} \longrightarrow E_{i+i_0+i_1,j+j_0+j_1}$$

e

$$Im(\gamma_{i,j}) = ker(\alpha_{i+i_0,j+j_0}).$$

Produz-se o que se denomina **par exato**[7].

Este par exato produz outro, ao se estabelecer que

$$d^1 : E_{p,q} \longrightarrow E_{p,q},\ d^1 := \beta \circ \gamma.$$

De $Im(\beta) = ker(\gamma)$, tem-se que $\gamma \circ \beta = 0$. Assim, $d^1 \circ d^1 = 0$ e os grupos de homologia são $E^2 := H(E, d^1) = ker(d^1)/Im(d^1)$. Se usada a notação $E^2 := H(E, d^1)$ e que este é um módulo bigraduado, ocorre que

$$d^1_{p,q} : E_{p,q} \xrightarrow{\gamma} D_{p-1,q} \xrightarrow{\beta} E_{p-1,q} \Rightarrow \text{bigrau } (-1, 0).$$

$$E^2_{p,q} = ker(d^1_{p,q})/Im(d^1_{p+1,q}).$$

Considere agora um segundo módulo bigraduado, $D^2 := Im(\alpha)$. Por este ter bigrau (1,-1), segue, da definição de imagem bigraduada, que

$$D^2_{p,q} = \alpha_{p-1,q+1}[D_{p-1,q+1}] = Im(\alpha_{p-1,q+1}) \subset D_{p,q}.$$

Defina, ainda, $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ por

$$\alpha^2 := \alpha_{|Im(\alpha)}.$$

$$\beta^2 : D^2 \to E^2,\ \beta^2(y) := [\beta \circ \alpha^{-1}(y)],$$

que é a classe de homologia, isto é, se $y \in D^2_{p,q}$, então, da definição de $D^2$, tem-se que $y = \alpha_{p-1,q+1}(x_{p-1,q+1})$. Estabeleça que

$$\beta^2_{p,q} := \beta_{p-1,q+1} \circ \alpha^{-1}_{p-1,q+1}(y).$$

Seja agora

$$\gamma^2_{p,q}[z_{p,q}] := \gamma_{p,q}(z_{p,q}) \in D_{p-1,q}.$$

Com tais definições,

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

[7] No inglês, *exact couple*.

é um par exato.

Formou-se, portanto, $(D^2, E^2, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$, um par exato derivado de $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$. Tal construção pode ser iterada para se ter uma sequência de pares exatos.

Os termos $E^2, E^3, \ldots, E^r, \ldots$ formam uma sequência espectral. □

**Lema 2.3.0.15.** Em uma filtração limitada, pode-se extrair uma cadeia finita.

*Demonstração.* Pelas propriedades da filtração, $F^{p-1}H \subset F^pH, \forall\ p$. Supondo $\{F^pH\}$ limitada, então, para cada $p \leq s(n)$, ocorre que $F^pH_n = 0$ e, para cada $p \geq t(n)$, vale que $F^pH_n = H_n$. A cadeia finita é, então,

$$0 = F^sH_n \subset F^{s+1}H_n \subset \cdots \subset F^tH_n = H_n.$$

□

**Definição 2.3.0.16.** Uma sequência espectral $\{E^r\}$ converge para um módulo graduado $H$ se existir uma filtração limitada $\{\Phi^pH\}$ de $H$ tal que

$$E^\infty_{p,q} \simeq \Phi^pH_n/\Phi^{p-1}H_n, \forall\ p, q, n = p + q.$$

Escreve-se que $E^2_{p,q} \Rightarrow_p H_n$.

Uma sequência espectral convergente é um algoritmo para calcular um $R$-módulo graduado iniciando-se de um outro e fazendo sucessivos cômputos de homologia. Porém, não se tem fórmulas para os diferenciais, o que faz esta técnica ser útil sob algumas condições conhecidas.

**Teorema 2.3.0.17.** Seja $\{F^pC\}$ uma filtração limitada de um complexo $C$ e $\{E^r\}$ a sequência espectral que ela determina. Então,

a) Para cada $p, q$, $E^\infty_{p,q} = E^r_{p,q}$, para algum $r$ grande dependendo de $p, q$.

b) $E^2_{p,q} \Rightarrow_p H_n(C)$.

*Demonstração.* a) Como a filtração é limitada, existem $s(n), t(n)$ da forma definida antes. Se $p > t(n)$, então

$$F^p = F^{p-1} \Rightarrow F^p/F^{p-1} = 0, \qquad E_{p,q} = H_{p+q}(F^p/F^{p-1}) = 0.$$

Desse modo, como $E^r_{p,q}$ é dado por $E_{p,q}$, tem-se que $E^r_{p,q} = 0, \forall\ r$ e $p \geq t(n)$. De maneira semelhante, se $p < s(n)$, $E^r_{p,q} = 0, \forall\ r$.

Tome quaisquer $p, q$. Pelo diferencial $d^r$ ter bigrau $(-r, r-1)$, a imagem dele é tal que $d^r(E^r_{p,q}) \subset E^r_{p-r,q+r-1}$. Se $r$ suficientemente grande, $p - r$ será pequeno e, como visto no final da parte acima, $E^r_{p-r,q+r-1} = 0$. Com isso,

$$d^r(E^r_{p,q}) \subset 0 \Rightarrow E^r_{p,q} = ker(d^r_{p,q}).$$

Como $E^{r+1}_{p,q} = ker(d^r_{p,q})/Im(d^r_{p+r,q-r+1})$, olhemos para a imagem. Tem-se que, se $r$ grande, $p + r$ é grande e, como feito na primeira parte, $E^r_{p+r,q-r+1} = 0$. Então,

$$Im(d^r_{p+r,q-r+1}) = d^r(E^r_{p+r,q-r+1}) = 0.$$

Segue que $E^{r+1}_{p,q} = E^r_{p,q}$ para $r$ grande dependendo de $p, q$ e se tem o resultado.

b) A inclusão $F^pC \to C$ induz um mapa $\varphi : H_n(F^pC) \to H_n(C)$. Considere a filtração

$$\Phi^p H_n(C) := Im(\varphi).$$

Pela filtração do enunciado ser limitada, $\Phi^p H_n(C)$ é limitada, com

$$0 = \Phi^s H_n(C) \subset \Phi^{s+1} H_n(C) \subset \cdots \subset \Phi^t H_n(C) = H_n(C).$$

Considere o $r$-ésimo par derivado, $(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$, que se mostrou formado indutivamente começando de uma filtração na demonstração da proposição 2.3.0.14. Em seguida, tome a sequência exata que este par forma,

$$\cdots \to D^r_{p+r-2,q-r+2} \xrightarrow{\alpha^r} D^r_{p+r-1,q-r+1} \xrightarrow{\beta^r} E^r_{p,q} \xrightarrow{\gamma^r} D^r_{p-1,q} \to \cdots$$

Usando que os bigraus de $\alpha, \beta, \gamma$ são, respectivamente, $(1,-1), (0,0), (-1,0)$, então

$$D_{p+r-1,q-r+1} = \underbrace{\alpha \circ \cdots \circ \alpha}_{r-1}(D_{p,q}) = Im(H_{p+q}(F^p) \to H_{p+q}(F^{p+r-1})).$$

Fixados $p, q$, pela hipótese de limitação da filtração, tem-se que $F^{p+r-1}C = C$, para $r$ suficientemente grande. Desse modo,

$$D_{p+r-1,q-r+1} = \Phi^p H_{p+q}(C).$$

Com um raciocínio semelhante, $D^r_{p+r-2,q-r+2} = \Phi^{p-1} H_{p+q}(C)$. Para $r$ grande, $D^r_{p-1,q} = 0$. Substituindo na sequência exata tomada,

$$\cdots \to \Phi^{p-1} H_{p+q}(C) \xrightarrow{\alpha^r} \Phi^p H_{p+q}(C) \xrightarrow{\beta^r} E^r_{p,q} \xrightarrow{\gamma^r} 0 \to \cdots$$

Pela exatidão, pode-se escrever que

$$\Phi^p H_{p+q}(C)/\Phi^{p-1} H_{p+q}(C) \simeq E^r_{p,q} \underbrace{=}_{\text{por a).}} E^\infty_{p,q}.$$

$\square$

**Exemplo 2.3.0.18.** Suponha que exista $r_s$ tal que todos os diferenciais desta e depois dessa página zeram, ou seja, $d^r = 0, \forall\ r \geq r_s$. Com isso, $\{E^{r_s}\}_{p,q}$ é um termo limite para esta sequência espectral e se diz que ela **degenera** em $r_s$.

De fato, como o mapa é identicamente nulo, tem-se que $ker(d^r_{p,q}) = E^r_{p,q}, \forall\ p, q$ e $Im(d^r_{p,q}) = 0, \forall\ p, q$. Assim,

$$E^{r+1}_{p,q} = ker(d^r_{p,q})/Im(d^r_{p+r,q-r+1}) \simeq E^r_{p,q}, \forall\ r \geq r_s.$$

**Exemplo 2.3.0.19.** Assuma que, para uma sequência espectral, exista $r_s \geq 2$ tal que a $r_s$-página está concentrada em uma única linha ou coluna. Com isso, esta página é o limite da sequência e se conceitua que a sequência **colapsa** nesta página.

Para vê-lo, avaliemos, com respeito a $r$, o mapa $d^r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$.

Se $r = 0$: domínio e contradomínio coincidem.

Se $r = 1$: domínio e contradomínio na mesma linha.

Se $r \geq 2$: os diferenciais possuem domínio e contradomínio ocupando diferentes linhas e colunas.

Assim, se todas as linhas (ou colunas) com exceção de alguma se anulam, então o mesmo ocorre com os diferenciais, se $r \geq 2$.

O próximo teorema apresenta um exemplo de sequência espectral, o qual é clássico, e terá sua aplicação explorada mais do que sua construção.

**Definição 2.3.0.20.** O **anel de grupo** de um grupo $G$ sobre um anel $R$ é denotado por $R[G] := RG$ e dado pelo conjunto dos mapas $f : G \to R$ tais que $f(x) \neq 0$ apenas para um número finito de $x \in G$. A soma e produto por escalar são dadas como habituais. O produto de $f_1, f_2 \in RG$ é considerado

$$f_1 \cdot f_2(x) := \sum_{uv=x} f_1(u) f_2(v) = \sum_{u \in G} f(u) f(u^{-1}x).$$

Tal soma é finita porque $f_1, f_2$ são como definidas acima. É comum se adotar a notação de combinações lineares formais de elementos de $G$ com coeficientes em $R$,

$$\sum_{g \in G} r_g g, \; r_g \in R,$$

onde quase todos os $r_g$ são 0. É válido que $RG$ contém um subanel isomorfo a $R$ e que o conjunto dos elementos invertíveis de $RG$ possui um subgrupo isomorfo a $G$.

**Definição 2.3.0.21.** Seja $G$ um grupo, $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda e $\mathbb{Z}$ considerado como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Define-se o **$n$-ésimo grupo de homologia de** $G$ como

$$H_n(G, M) := Tor_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M).$$

**Teorema 2.3.0.22** (Sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre (LHS))**.** Sejam dados $1 \to N \to G \to Q \to 1$ uma sequência exata curta de grupos e $A$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então, existe uma sequência espectral de homologias, onde

$$E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(N, A)),$$

que converge a $H_{p+q}(G, A)$.

# 3 Propriedade $(FP)_n$

Considere o resultado que usa o que já foi citado e será útil à frente.

**Proposição 3.0.0.1.** Seja $G$ um grupo e $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo livre à esquerda. Com isso, $H_n(G, M) = 0, \forall\, n \geq 1$.

*Demonstração.* Por $M$ ser livre, é plano. Pelo teorema 2.2.2.25, $Tor_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) = 0$. □

**Proposição 3.0.0.2.** Considere $A, B$ grupos, com $A \subset B$ e seja $M$ um $\mathbb{Z}B$-módulo livre. Nessas condições, $H_n(A, M) = 0, \forall\, n \geq 1$.

*Demonstração.* É suficiente mostrar que $M$ é $\mathbb{Z}A$-módulo livre. Com isso, pela proposição 3.0.0.2, segue a nulidade. Como $M$ é livre sobre $\mathbb{Z}B$, ocorre que $M = \oplus \mathbb{Z}B$. Escrevendo $B = U_{t \in \Gamma} At$, onde $\Gamma$ é uma transversal e a união é disjunta, tem-se que $\mathbb{Z}B = \oplus_{t \in \Gamma} \mathbb{Z}At$. Desse modo, $M = \oplus \oplus_{t \in \Gamma} \mathbb{Z}At \Rightarrow M$ é $\mathbb{Z}A$-módulo livre. □

Primeiro será feita a teoria para módulos.

## 3.1 Módulos de tipo $(FP)_n$

Este tópico contém o que foi estudado em ([3]).

**Definição 3.1.0.1.** Considere $A$ um $R$-módulo. Este é de tipo $(FP)_n$ se existir resolução projetiva de $A$

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0,$$

com cada um dos $P_i$ finitamente gerado para $i \leq n$. É de tipo $(FP)_\infty$ se todos os módulos projetivos forem finitamente gerados.

**Lema 3.1.0.2.** *$A$ é de tipo $(FP)_0$ se, e somente se, $A$ é finitamente gerado.*

*Demonstração.* Suponha $A$ módulo finitamente gerado. Com isso, como todo módulo é quociente de algum livre, pode-se tomar $F_0$ módulo livre finitamente gerado. Tem-se a sequência exata

$$F_0 \to A \to 0$$

e, portanto, $A$ é de tipo $(FP)_0$.

Se $A$ for de tipo $(FP)_0$, então existe sequência exata

$$P_0 \xrightarrow{\alpha} A \to 0,$$

onde $P_0$ é módulo projetivo finitamente gerado. Assim,

$$A = Im(\alpha) \simeq P_0/ker(\alpha).$$

Como $P_0$ é finitamente gerado, o quociente $P_0/ker(\alpha)$ é finitamente gerado e vale o resultado pelo isomorfismo acima. □

**Lema 3.1.0.3.** *$A$ é de tipo $(FP)_1$ se, e somente se, $A$ é finitamente apresentável.*

*Demonstração.* Se $A$ é finitamente apresentável, pela definição 2.2.0.92, existem inteiros $m, n$ tais que se tem sequência exata $R^m \to R^n \to A \to 0$. Tome $P_0 := R^n, P_1 := R^m$, que são módulos projetivos finitamente gerados. Ou seja, $A$ é de tipo $(FP)_1$.

Admita que $A$ seja de tipo $(FP)_1$. Com isso, existe sequência exata

$$P_1 \to P_0 \to A \to 0,$$

onde $P_0, P_1$ são módulos projetivos finitamente gerados. Como $P_0$ é projetivo finitamente gerado, é somando direto de um módulo livre de posto finito (base de cardinalidade finita), isto é, existe $Q$ finitamente gerado tal que $P_0 \oplus Q = F_0$. Forma-se, ao somar a sequência acima com $Q \to Q \to 0 \to 0$, a sequência exata

$$P_1 \oplus Q \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\beta} A \to 0.$$

Por $P_1, Q$ serem finitamente gerados, então $Im(\alpha)$ é finitamente gerado pelas imagens dos geradores de $P_1, Q$ sob $\alpha$. Da exatidão, $ker(\beta)$ é finitamente gerado e se pode escrevê-lo como quociente de um módulo livre finitamente gerado. Assim, $A$ possui sequência exata $R^m \to R^n \to A \to 0$, ou seja, é finitamente apresentável. □

**Definição 3.1.0.4.** Denomina-se **dimensão projetiva** de uma resolução projetiva o menor tamanho de uma resolução projetiva de um módulo.

Desse modo, um módulo possui dimensão projetiva 0 se, e somente se, for projetivo. E dimensão infinita quando não admitir resolução dessa forma.

**Lema 3.1.0.5.** Se $A$ é de tipo $(FP)_n$, existe uma resolução livre que é finitamente gerada em dimensão no máximo $n$.

*Demonstração.* Seja $\cdots \to P_2 \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to A \to 0$ resolução projetiva e suponha $P_0$ finitamente gerado. Assim, $P_0$ é somando direto de $P_0 \oplus Q$, que é livre. Trocando $P_0$ por esta soma direta e $P_1$ por $P_1 \oplus Q$, pode-se estender o mapa $d_1$ usando $id_Q$. Com isso, a nova resolução é finitamente gerada e livre em dimensão 0. Repetindo o processo e usando a definição de $(FP)_n$ ter todos os $P_i$ finitamente gerados, $1 \leq i \leq n$, vale o enunciado. □

Esclarece-se que

1. O **limite** de um sistema inverso $M_*$, denotado por $\lim M_*$, é outra designação para o limite inverso.

2. O **colimite** de um sistema direto $M_*$, dado por colim $M_*$, é o limite direto[8].

O resultado principal para módulos ([3]) é dado pelo

**Teorema 3.1.0.6.** São equivalentes quando $A$ é um $R$-módulo à esquerda

**(i)** $A$ é de tipo $(FP)_n$.

**(ii)** - Para qualquer limite exato, o mapa natural $Tor_k^R(\lim M_*, A) \to \lim Tor_k^R(M_*, A)$ é um isomorfismo se $k < n$ e um epimorfismo se $k = n$.

- Para qualquer colimite exato, o mapa natural

$$\text{colim } Ext_R^k(A, M_*) \to Ext_R^k(A, \text{colim } M_*)$$

é um isomorfismo se $k < n$ e um monomorfismo se $k = n$.

**(iii)** - Para um produto direto $\prod R$, o mapa natural $Tor_k^R(\prod R, A) \to \prod Tor_k^R(R, A)$ é um isomorfismo se $k < n$ e um epimorfismo se $k = n$.

- Para um sistema direcionado de $R$-módulos $\{M_*\}$, onde $\varinjlim M_* = 0$, ocorre que $\varinjlim Ext_R^k(A, M_*) = 0, \forall\, k \leq n$.

*Demonstração.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Pela observação feita, pode-se considerar uma resolução livre $\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \to A \to 0$, onde cada $F_i$ é finitamente gerado se $k \leq n$. Como limite é um funtor aditivo, comuta com somas diretas finitas. Assim, o homomorfismo natural $(\lim M_*) \otimes_R F_k \to \lim(M_* \otimes_R F_k)$ é um isomorfismo se $k \leq n$. Pela exatidão, pode-se escrever que o funtor limite comuta com o funtor homologia e segue a primeira afirmação em (ii).

[8]Os termos "limite direto"e "limite inverso"datam de uma época antes de a terminologia da teoria das categorias ter sido estabelecida e ainda são empregados.

Como $Hom_R(A,\cdot)$ comuta com somas diretas finitas, o mapa natural

$$\text{colim } Hom_R(F_k, M_*) \to Hom_R(F_k, \text{colim} M_*)$$

é isomorfismo se $k \leq n$. Pela exatidão, tem-se a segunda afirmação em (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Valem porque são a mesma descrição.

(iii) $\Rightarrow$ (i): prova-se que cada uma das frases têm como consequência $A$ de tipo $(FP)_n$. Prosseguimos por indução em $n$.

Seja $n = 0$. Pela hipótese, o mapa natural $\mu : (\prod R) \otimes_R A \to \prod A$ é um epimorfismo. Pela sobrejetividade, existe $b \in (\prod R) \otimes_R A$ tal que $\prod_{a \in A} a \in Im(\mu) \Rightarrow \mu(b) = \prod_{a\in A} a$. Como $b \in (\prod R) \otimes_R A$, então é da forma

$$b = \sum_{i=1}^{m} \prod_{a} b_i^a \otimes a_i,$$

onde cada $b_i^a \in R$ e $a_i \in A$. Pela definição do mapa natural,

$$\prod_{a\in A} a = \mu(b) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{a} b_i^a a_i = \prod_{a} \sum_{i=1}^{m} b_i^a a_i.$$

Da descrição acima, para qualquer $a \in A$, pode-se escrever que $a = \sum_{i=1}^{m} b_i^a a_i$, ou seja, $A$ é módulo gerado por $\{a_i\}_{i=1}^{m}$ e está provado o resultado.

Seja agora $n \geq 1$ qualquer e admita o resultado válido para $n-1$. Como procedido antes, mostra-se que $A$ é finitamente gerado. Tome sequência exata curta de $R$-módulos $0 \to K \to F \to A \to 0$, onde $F$ é módulo livre finitamente gerado, a qual pode ser tomada lema (3.1.0.5). Desse modo, constrói-se o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots Tor_n^R(\prod R, F) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Tor_n^R(\prod R, A) \arrow[r] \arrow[d, "s_n"] & Tor_{n-1}^R(\prod R, K) \arrow[r] \arrow[d] & Tor_{n-1}^R(\prod R, F) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Tor_{n-1}^R(\prod R, A) \arrow[d, "\simeq"] \\
\cdots \prod Tor_n^R(R, F) \arrow[r] & \prod Tor_n^R(R, A) \arrow[r] & \prod Tor_{n-1}^R(R, K) \arrow[r] & \prod Tor_{n-1}^R(R, F) \arrow[r] & \prod Tor_{n-1}^R(R, A)
\end{tikzcd},$$

onde $s_n$ denota o epimorfismo da hipótese.

Pelo lema 2.2.2.17, $Tor_k^R(\prod R, K) \to \prod Tor_k^R(R, K)$ é um isomorfismo se $k < n-1$ e epimorfismo se $k = n-1$. Portanto, da hipótese de indução aplicada neste módulo $K$, ele é de tipo $(FP)_{n-1}$. Com isso, $A$ é de tipo $(FP)_n$.

A segunda afirmação de (iii) pode ser usada para mostrar que $A$ é de tipo $(FP)_n$ e repetimos o raciocínio indutivo. Se $n = 0$, tome o sistema direto $\{A/A'\}$, onde $A'$ percorre todos os submódulos de $A$ que sejam finitamente gerados. Com isso,

$$\lim_{\to} A/A' = 0 \Rightarrow \lim_{\to} Hom_R(A, A/A') = 0.$$

Em particular, é 0 quando se usa a projeção canônica $\pi : A \to A/A'$. Ou seja, o mapa é identicamente nulo para algum $A'$. Com isso, $A \simeq Im(\pi) = A'$ e $A$ é finitamente gerado.

Admita agora que $n \geq 1$. Pelo que se provou, $A$ é finitamente gerado. Tome sequência exata curta de $R$-módulos $0 \to K \to F \to A \to 0$, onde $F$ é módulo livre finitamente gerado e suponha que $M_*$ seja um sistema direto de $R$-módulos para o qual o limite direto seja 0. Com isso,

$$\lim_{\rightarrow} Ext_R^k(K, M_*) = 0, \forall\, k \leq n-1.$$

Usando a hipótese de indução neste módulo $K$, tem-se que ele é de tipo $(FP)_{n-1}$ e, assim, $A$ é de tipo $(FP)_n$. □

Uma das etapas da demonstração acima é generalizada na

**Proposição 3.1.0.7.** Seja $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ uma sequência exata curta de $R$-módulos. Vale que

a) $A'$ de tipo $(FP)_{n-1}$ e $A$ de tipo $(FP)_n \Rightarrow A''$ de tipo $(FP)_n$.

b) $A', A''$ de tipo $(FP)_n \Rightarrow A$ de tipo $(FP)_n$.

c) $A$ de tipo $(FP)_{n-1}$ e $A''$ de tipo $(FP)_n \Rightarrow A'$ de tipo $(FP)_{n-1}$.

*Demonstração.* Considerando as equivalências do teorema 3.1.0.6, pode-se caracterizar os módulos acima por (iii). Aplicam-se os funtores $Tor$ ou $Ext$ para formar sequências exatas longas. □

**Proposição 3.1.0.8.** Seja $A$ um $R$-módulo de tipo $(FP)_n$ e considere que $P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_0$ sejam os primeiros $n$ termos de uma resolução projetiva de $A$. Se todos eles forem finitamente gerados, então o kernel do mapa $d_{n-1} : P_{n-1} \to P_{n-2}$ é finitamente gerado.

*Demonstração.* Se $n = 0$, tome sequência exata curta $0 \to K_0 \to P_0 \to A \to 0$, onde $P_0$ é $R$-módulo projetivo e finitamente gerado. Se $A$ é finitamente apresentável, isto é, de tipo $(FP)_1$, pode-se formar sequência exata curta $0 \to K \to F \to A \to 0$ tal que $F$ seja $R$-módulo livre e $F, K$ sejam finitamente gerados. Por c) da proposição 3.1.0.7, tem-se que $K_0$ é de tipo $(FP)_0$. Construa, então, sequência exata curta $0 \to K_1 \to P_1 \to K_0 \to 0$, com $P_1$ projetivo e finitamente gerado. Se $A$ for de tipo $(FP)_2$, ocorre que $K_0$ é $(FP)_1$ e, portanto, $K_1$ é de tipo $(FP)_0$. Este raciocínio pode ser repetido para $A$ de tipo $(FP)_n$. □

## 3.2 Grupos de tipo $(FP)_n$

Continuemos com o estudo de ([3]).

**Definição 3.2.0.1.** Um grupo $G$ é de tipo $(FP)_n$ sobre $R$ se o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $R$ for de tipo $(FP)_n$ como um $RG$-módulo.

**Lema 3.2.0.2.** Se $G$ é de tipo $(FP)_n$ sobre $\mathbb{Z}$, então o é sobre qualquer anel $R$.

**Lema 3.2.0.3.** Qualquer grupo é de tipo $(FP)_0$ sobre $R$.

*Demonstração.* Ocorre porque $R$ é finitamente gerado como $RG$-módulo. □

O termo abaixo será usado na demonstração que o segue.

**Definição 3.2.0.4.** O ideal de aumento de um grupo $G$, denotado por $Aug(G)$, é o kernel do epimorfismo $RG \to R$.

**Proposição 3.2.0.5.** Um grupo $G$ é de tipo $(FP)_1$ sobre $R$ se, e somente se, $G$ é finitamente gerado.

*Demonstração.* Suponha $G$ finitamente gerado e considere o ideal de aumento de $G$, $I_G$. Este é finitamente gerado como um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda e, portanto, existe resolução livre $\cdots \to \oplus_{\text{geradores}}\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$. Ou seja, $G$ é de tipo $(FP)_1$ sobre qualquer anel.

Admita agora que $G$ seja de tipo $(FP)_1$ sobre $R$. Considere o epimorfismo $RG \to R$ e defina $H := ker(RG \to R)$. Como $RG$-módulo, este é finitamente gerado por um conjunto de elementos $(1 - x_i)$, $x_i \in G$. Isto é, pode ser escrito da forma

$$H = \sum_{i=1}^{n} RG(1 - x_i).$$

Sejam $S := \langle\{x_i\}\rangle$ e $\gamma := ker(RS \to R)$. De maneira semelhante ao feito para $H$, ocorre que

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} RS(1 - x_i).$$

Dessas duas expressões, $H = RG\gamma$. Tome a sequência exata curta

$$0 \to \gamma \to RS \to R \to 0.$$

Aplicando o funtor exato $RG\otimes_{RS}$, tem-se que

$$0 \to RG \otimes_{RS} \gamma \to RG \otimes_{RS} RS \to RG \otimes_{RS} R \to 0.$$

Vale que $RG = \oplus_{t\in\tau} tRS$, em que $\tau$ denota uma transversal de $S$ em $G$. Assim, $RG$ é um $RS$-módulo livre à direita, com $RG\otimes_{RS}$ funtor exato. Analisando os três módulos nesta sequência, ocorre que

$$RG \otimes_{RS} R \simeq R[G/S],$$

pois se considera o mapa $x \otimes r \mapsto r \cdot xs$.

$$RG \otimes_{RS} \gamma \simeq RG\gamma = H,$$

pelo mapa $x \otimes (s - 1) \mapsto x \cdot (s - 1)$.

$$RG \otimes_{RS} RS \simeq RG,$$

com $x \otimes y \mapsto xy$. Desse modo, a sequência exata curta acima pode ser reescrita por

$$0 \to H \xrightarrow{i} RG \xrightarrow{\pi} R[G/S] \to 0,$$

onde $i$ denota a inclusão e $\pi(rg) = r(gS)$.

Em particular, se $x \in G$ é qualquer, ocorre que $x - 1_G \in H = ker(\pi)$. Mas,

$$x - 1_G \in ker(\pi) \Leftrightarrow \pi(x) - \pi(1_G) = 0 \Leftrightarrow xS - S = 0 \Leftrightarrow xS = S \Leftrightarrow x \in S.$$

Da arbitrariedade de $x$, tem-se que $G = S$, o qual, por construção, satisfaz ser finitamente gerado. □

**Definição 3.2.0.6.** Seja $R$ um anel. Um grupo $G$ é **quase finitamente apresentável** se houver sequência exata curta de grupos $0 \to K \to F \to G \to 0$, onde $F$ é finitamente gerado e $R \otimes K/[K, K]$ é finitamente gerado como $RG$-módulo.

Tem-se que $F$ age sobre $K$ por conjugação. Isso induz ação trivial de $F$ sobre o quociente $K/[K, K]$. Esta induz ação de $G \simeq F/K$ sobre $K/[K, K]$.

**Lema 3.2.0.7.** Um grupo $G$ finitamente apresentável é quase finitamente apresentável.

*Demonstração.* Seja $G = F/K$ finitamente apresentável, com $F$ um grupo livre de base livre $X$.

Por $G$ ser finitamente apresentável, existe $S \subseteq K$ que é finito e tal que $K = \langle S \rangle^F := \langle S^F \rangle = \langle F^S \rangle$. O quociente de $K$ pelo comutador dele, $K/[K, K]$, possui uma operação aditiva induzida pela operação de grupo em $K$ e, assim, é um grupo abeliano.

O grupo $F$ age à esquerda sobre $K/[K, K]$ por conjugação, isto é, dado $k[K, K] \in K/[K, K]$, tem-se que $fk[K, K] := fkf^{-1}[K, K]$.

Devido a isso, $K/[K, K]$ é $\mathbb{Z}F$-módulo à esquerda. Pela definição de $G$, $K/[K, K]$ possui estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda.

Tem-se que $K/[K, K] = \langle f^s[K, K] \mid f \in F, s \in S \rangle$, cujos elementos foram obtidos de $s[K, K]$ usando a ação de $f \in F$ à esquerda. Desse modo, $\langle s[K, K] \mid s \in S \rangle$ gera $K/[K, K]$ como $\mathbb{Z}F$-módulo e, então, como $\mathbb{Z}G$-módulo. Por $S$ ser finito, $K/[K, K]$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}F$-módulo e $\mathbb{Z}G$-módulo. Com isso, dado $R$ anel qualquer, $R \otimes K/[K, K]$ é finitamente gerado como $RG$-módulo. $\square$

**Proposição 3.2.0.8.** Um grupo $G$ é de tipo $(FP)_2$ sobre um anel $R$ se, e somente se, é quase finitamente apresentável sobre $R$.

Portanto, finitamente apresentável é uma classe na classe $(FP)_2$. A inclusão é estrita pois há grupos de tipo $(FP)_2$ que não são finitamente apresentáveis ([2]).

O próximo enunciado se baseia no que foi feito no teorema 3.1.0.6.

**Proposição 3.2.0.9.** Um grupo $G$ é de tipo $(FP)_n$ sobre $R$ se, e somente se, $G$ é finitamente gerado e $H_k(G, \prod RG) = 0, \forall\ 1 \leq k < n$.

Apresenta-se agora uma versão da proposição 3.1.0.7 para grupos ([9]).

**Proposição 3.2.0.10.** Seja $1 \to A \to B \to C \to 1$ sequência exata curta de grupos e $n$ inteiro não negativo.

a) Se $A$ é de tipo $(FP)_n$ e $B$ é de tipo $(FP)_{n+1}$, então $C$ é de tipo $(FP)_{n+1}$.

b) Se $A, C$ são de tipo $(FP)_n$, então $B$ é de tipo $(FP)_n$.

*Demonstração.* a) Se $n = 0$, por hipótese, $A$ é de tipo $(FP)_0$ e $B$ é de tipo $(FP)_1$. Pela proposição 3.2.0.5, $B$ é finitamente gerado. Da exatidão da sequência, $C \simeq B/A$ e, então, $C$ é finitamente gerado. Aplicando de novo o resultado, $C$ é de tipo $(FP)_1$.

Seja agora $n \geq 1$. Como $B$ é de tipo $(FP)_{n+1}$, então é de tipo $(FP)_1$ e, portanto, da proposição 3.2.0.5, é finitamente gerado. Pelo primeiro caso, $C$ é finitamente gerado. Da proposição 3.2.0.9, se mostrado que $H_k(C, \prod_\alpha (\mathbb{Z}C)_\alpha) = 0, \forall\ 1 \leq k \leq n$, tem-se o resultado.

Pela convergência da sequência LHS, tem-se convergência da sequência espectral

$$E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_\alpha (\mathbb{Z}B)_\alpha)) \Rightarrow_p H_{p+q}(B, \prod_\alpha (\mathbb{Z}B)_\alpha).$$

Por $A$ ser de tipo $(FP)_n$, ocorre a comutatividade do funtor *Tor* com o produto direto (como estabelecido no teorema 3.1.0.6 para módulos). Se $I$ é conjunto enumerável de índices, tem-se que

$$H_q(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha) \simeq \prod_{\alpha \in I} H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha), 0 \leq q \leq n-1.$$

De $A$ ser subgrupo de $B$, então $\mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}A$-módulo livre. Pela proposição 3.0.0.2, $H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) = 0, q \geq 1$.

Ocorre, para qualquer $\alpha \in I$, que

$$H_0(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} (\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}B \simeq \mathbb{Z}(B/A) \simeq \mathbb{Z}C.$$

Com isso,

$$E^2_{p,q} \simeq \begin{cases} 0, \text{ se } 1 \leq q \leq n-1, n \geq 2 \\ H_p(C, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha), \text{ se } q = 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Fixe $p + q = s$, onde $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Com isso e das duas igualdades acima,

$$E^2_{p,q} = 0, \text{ se } 1 \leq q \leq n-1, n \geq 2,$$

$$E^2_{s,0} \simeq H_s(C, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha),$$

$$E^2_{0,n} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}C} H_n(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha).$$

Então,

$$E^2_{p,q} = 0, \text{ com } p + q = s \text{ e } p \neq 0, s, \text{ onde } s \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow E^\infty_{p,q} = 0,$$

pois $E^\infty_{p,q}$ é um subquociente de $E^2_{p,q}$.

Consideremos agora os dois diferenciais

$$E^i_{s+i,1-i} \xrightarrow{d^i_{s+i,1-i}} E^i_{s,0} \xrightarrow{d^i_{s,0}} E^i_{s-i,i-1}.$$

Se $i \geq 2$, vale que $1 - i < 0$ e, se $i > n$, então $s - i < 0$. Portanto, $E^i_{s+1,1-i} = 0$ e $E^i_{s-i,i-1} = 0$.

Quando $n \geq 2$ e $2 \leq i \leq n$, então $1 \leq i - 1 \leq n - 1$ e tem-se, por (7), que $E^2_{s-i,i-1} = 0$. Desse modo, reescreve-se

$$0 \xrightarrow{d^i_{s+i,1-i}} E^i_{s,0} \xrightarrow{d^i_{s,0}} 0, i \geq 2.$$

Segue que

$$E^{i+1}_{s,0} = ker(d^i_{s,0})/Im(d^i_{s+i,1-i}) = E^i_{s,0}/\{0\} \simeq E^i_{s,0}, i \geq 2.$$

Da identificação de $E^2_{s,0}$ feita antes, tem-se que

$$E^\infty_{s,0} \simeq H_s(C, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha).$$

Dado $s$, da convergência acima, existe filtração limitada de $H_s := H_s(B, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$ dada por

$$0 = F^{r(s)}H_s \subseteq F^{r(s)+1}H_s \subseteq \cdots \subseteq F^{t(s)-1}H_s \subseteq F^{t(s)}H_s = H_s,$$

com $r(s), t(s) \in \mathbb{Z}$.

Desse modo,

$$E^\infty_{p,q} \simeq F^pH_s/F^{p-1}H_s, p, q \in \mathbb{Z}, p + q = s.$$

Por $B$ ser de tipo $(FP)_{n+1}$, pela proposição 3.2.0.9, $H_k(B, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) = 0, \forall\, 1 \leq k \leq n$.

Como $E^\infty_{s,0}$ é subquociente de $H_s = H_s(B, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$, então $E^\infty_{s,0} = 0$, onde $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Comparando os dois valores do objeto, segue que $H_s(C, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha) = 0, \forall\ 1 \le s \le n$ e tem-se o resultado.

b) Se $n = 0$, não há o que provar, porque qualquer grupo é de tipo $(FP)_0$.

Seja $n = 1$. Então, da proposição 3.2.0.5, $A, C$ são finitamente gerados. Da exatidão da sequência, $C \simeq B/A$ e, assim, $B$ é finitamente gerado, o que, pela mesma proposição, mostra que $B$ é de tipo $(FP)_1$.

Considere agora $n \ge 2$. De $A, C$ serem de tipo $(FP)_n$, em particular são de tipo $(FP)_1$. Do que foi provado, $B$ é finitamente gerado. Usando a proposição 3.2.0.9, se $I$ é conjunto enumerável de índices, mostremos que $H_k(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) = 0, \forall\ 1 \le k \le n-1$.

Por $A$ ser de tipo $(FP)_n$, tem-se as mesmas etapas do primeiro item, até (7).

Como $C$ é de tipo $(FP)_n$, da proposição 3.2.0.9,

$$H_p(C, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha) = 0, \forall\ 1 \le p \le n-1.$$

Sejam $p, q$ fixados tais que $p + q = s, s \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Desse modo,

$$E^2_{p,q} = 0, 1 \le q \le n-1$$

$$E^2_{s,0} \simeq H_s(C, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha) = 0, \forall\ 1 \le s \le n-1.$$

Dessas duas identidades, se $p + q = s$,

$$E^2_{p,q} = 0 \Rightarrow E^\infty_{p,q} = 0,$$

pois $E^\infty_{p,q}$ é subquociente de $E^2_{p,q}$.

Usando uma filtração de $H_s(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$, então $H_s(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) = 0, \forall\ 1 \le s \le n-1$, o que termina a demonstração. □

**Proposição 3.2.0.11.** Seja $1 \to N \to G \to Q \to 1$ sequência exata curta de grupos. Se $N$ for de tipo $(FP)_\infty$ sobre $R$, ocorre que $G$ é $(FP)_n$ se, e somente se, $Q$ o é.

*Demonstração.* Utiliza-se a sequência espectral de Lyndon–Hochschild–Serre (LHS) que, sob a hipótese de $N$, colapsa, originando um isomorfismo entre os k-ésimos grupos de homologia de $Q$ e $G$. □

# 4 O produto fibra e sua apresentação finita

Tendo base na teoria anterior de homologia e grupos de tipo $(FP)_n$, o ponto de interesse central da pesquisa será abordado neste momento, com a conjectura exposta em ([7]). O objeto sobre a qual esta se debruça é o produto fibra, o qual é pertinente neste estudo por ser um subgrupo do produto direto de grupos.

**Definição 4.0.0.1.** Dados $f_1 : G_1 \to Q, f_2 : G_2 \to Q$ epimorfismos de grupos, o **produto fibra de** $f_1, f_2$ é

$$P := \{(g, h) \in G_1 \times G_2 \mid f_1(g) = f_2(h)\}.$$

**Conjectura 4.0.0.2** (Versão homológica da conjectura $n-(n+1)-(n+2)$)**.** Sejam dadas $1 \to N_1 \to G_1 \xrightarrow{f_1} Q \to 1$ e $1 \to N_2 \to G_2 \xrightarrow{f_2} Q \to 1$ duas sequências exatas curtas de grupos, com $Q$ de tipo $(FP)_{n+2}$, $G_1$ e $G_2$ de tipo $(FP)_{n+1}$ e $N_1$ de tipo $(FP)_n$. Então, o produto fibra de $f_1, f_2$ é de tipo $(FP)_{n+1}$.

O enunciado que a baseou, em ([8]), trata da classificação homotópica $F_n$. Uma das caracterizações é que um grupo $G$ possui tipo homotópico $F_n, n \geq 2$, se, e somente se, é finitamente apresentável e de tipo $(FP)_n$.

**Conjectura 4.0.0.3.** Sejam $1 \to N_1 \to \Gamma_1 \xrightarrow{\pi_1} Q \to 1$ e $1 \to N_2 \to \Gamma_2 \xrightarrow{\pi_2} Q \to 1$ duas sequências exatas curtas de grupos e

$$P := \{(\gamma_1, \gamma_2) \mid \pi_1(\gamma_1) = \pi_2(\gamma_2)\}$$

o produto fibra associado a elas. Se $N$ é de tipo $F_n$, $\Gamma_1, \Gamma_2$ são de tipo $F_{n+1}$ e $Q$ é de tipo $F_{n+2}$, então $P$ é de tipo $F_{n+1}$.

A "versão assimétrica do teorema 1-2-3", que foi exibida em ([4]), é o caso $n = 1$ da conjectura homotópica.

**Teorema 4.0.0.4** (Teorema 1-2-3 assimétrico)**.** Sejam $f_1 : G_1 \to Q, f_2 : G_2 \to Q$ dois homomorfismos sobrejetores de grupos. Suponha que $G_1, G_2$ sejam finitamente apresentáveis, que $Q$ seja de tipo $F_3$ e pelo menos um entre $ker(f_1), ker(f_2)$ seja finitamente gerado. Então, o produto fibra de $f_1, f_2$ é finitamente apresentável.

O nome "$1-2-3$" se fundamenta na escolha dos grupos em serem $F_1$ (equivalente a finitamente gerado), $F_2$ (por ser finitamente apresentável) e $F_3$ (como suposto explicitamente) e a designação *assimétrico* ocorre porque existe a versão onde $G_1 = G_2$ e $f_1 = f_2$, que pode ser vista em ([1]). Em ([4]), há uma classificação que será usada como critério de finitamente apresentável.

**Definição 4.0.0.5.** Considere $S \subset G_1 \times \cdots \times G_n$ subgrupo de um produto direto de grupos. $S$ diz-se **virtualmente sobrejetor em pares (VSP)** se

$$[G_i \times G_j : p_{ij}(S)] < \infty,$$

onde $p_{ij} : S \to G_i \times G_j$ denota a projeção canônica, quando $i \neq j$.

O conceito acima é aplicável a qualquer subgrupo $S$, mas, quando cada $G_i$ é finitamente apresentável, ele se torna útil para o escopo desta pesquisa.

**Teorema 4.0.0.6.** ([4]) Seja $S \subset G_1 \times \cdots \times G_n$ um subgrupo de um produto direto de grupos $G_i$ que são finitamente apresentáveis. Se $S$ for virtualmente sobrejetor em pares (VSP), então $S$ é finitamente apresentável.

Ser finitamente apresentável é uma propriedade homotópica e a demonstração deste resultado emprega métodos geométricos não abordados no projeto.

Não ocorre a recíproca, isto é, existem subgrupos finitamente apresentáveis de produtos diretos de grupos finitamente apresentáveis, mas que não satisfazem a definição de VSP. Uma forma de vê-lo é considerar $G$ finitamente gerado, livre de torção e nilpotente, mas não cíclico. Definindo $\phi : G \times G \to \mathbb{Z}$ um homomorfismo tal que

$$\phi(G \times \{1\}) \neq \{0\},$$

$$\phi(\{1\} \times G) \neq \{0\},$$

pode-se tomar $S := ker(\phi)$. $G \times G$ é nilpotente e finitamente gerado. Então, S é nilpotente e finitamente gerado e, portanto, finitamente apresentável.

Voltemos a atenção agora a uma classe de grupos que têm um papel relevante e foi explorada em ([4]).

**Definição 4.0.0.7.** Um grupo $G$ é **residualmente livre** se, para cada $g \in G \setminus e$, existir homomorfismo de grupos $\phi_g : G \to F_g$ tal que $\phi(g) \neq 1_{F_g}$, onde $F_g$ é um grupo livre.

**Teorema 4.0.0.8.** Um grupo $G$ é residualmente livre se, e somente se, $G \simeq H$, com $H$ subgrupo de um produto direto irrestrito[9] de grupos livres.

*Demonstração.* Considere o conjunto $\{\varphi : G \to F \mid F \text{ é livre e } \varphi \text{ é homomorfismo de grupos}\}$. Tem-se que o mapa $\theta := \prod \varphi : G \to \prod F$ é tal que

$$ker(\theta) = \cap_{\varphi} ker(\varphi).$$

Desse modo,

$$\theta \text{ é injetor} \Leftrightarrow ker(\theta) = e_G \Leftrightarrow \cap ker(\varphi) = e_G,$$

o que ocorre se, e somente se, dado qualquer $g \in G \setminus e_G$, existe um desses homomorfismos para o qual $g \notin ker(\varphi)$.

Ou seja, $\theta$ é injetor se, e somente se, $G$ é residualmente livre. Pelo teorema do isomorfismo, portanto, tem-se o resultado. □

**Exemplo 4.0.0.9.** Os grupos abelianos $\mathbb{Z}^n$ são residualmente livres.

**Definição 4.0.0.10.** Um grupo $G$ é **completamente residualmente livre** se, para cada $A \subset G$ finito, existir grupo livre $F_A$ e um homomorfismo de grupos $\phi_A : G \to F_A$ tal que $\phi_{|A}$ seja injetor.

Seja $G$ completamente residualmente livre e considere $g \in G$ elemento qualquer. Tomando $A := \{g, e\}$, tem-se que existe $\phi_A : G \to F_A$ tal que $\phi_A(g) \neq \phi_A(e) = e_{F_A}$ e, portanto, $G$ é residualmente livre.

**Definição 4.0.0.11.** Um grupo $G$ é um **grupo limite** se for finitamente gerado e completamente residualmente livre.

A designação acima foi cunhada em um contexto geométrico em estudos passados e se provou que grupos finitamente gerados e completamente residualmente livres são finitamente apresentáveis ([6]).

**Definição 4.0.0.12.** Um subgrupo de um produto direto de grupos é chamado de **produto subdireto** se a projeção sobre cada fator for sobrejetora.

**Exemplo 4.0.0.13.** Considerando a sequência exata curta

$$1 \to ker(\pi) \to G \xrightarrow{\pi} Q \to 1,$$

onde $\pi$ é a projeção canônica, tem-se o produto fibra

$$P = \{(g, h) \in G \times G \mid \pi(g) = \pi(h)\}.$$

Por esta definição, a diagonal $\Delta := \{(g, g) \in G \times G\}$ está em $P$. Com isso, se $p_1 : G \times G \to G,\ p_1((g, h)) = g$ e $p_2 : G \times G \to G,\ p_2((g, h)) = h$ são as projeções com respeito ao primeiro e ao segundo fator, respectivamente, então $G = p_i(\Delta) \subseteq p_i(P),\ i = 1, 2$, e, assim, vale a definição de produto subdireto.

A conjectura indicada no início desta seção será mais explorada em uma subseção própria.

[9]Designa o produto direto de uma família potencialmente infinita de grupos.

## 4.1 A versão homológica da conjectura $n-(n+1)-(n+2)$

Este resultado foi enunciado em ([7]), consistindo em uma versão homológica e com abordagens técnicas puramente homológicas para o que foi sugerido e demonstrado em ([8]).

Validou-se a conjectura $n-(n+1)-(n+2)$ nas circunstâncias ([7]):

**(i)** Se a segunda sequência cindir.

**(ii)** Se provado para quando $G_2$ for livre e finitamente gerado, então vale no enunciado original.

Tais constatações seguiram do

**Teorema 4.1.0.1.** Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere as sequências exatas curtas

$$1 \to A \to B \to C \to 1$$

e

$$1 \to A \to B_0 \to C_0 \to 1,$$

onde $A$ é de tipo $(FP)_n$, $C, B_0$ são de tipo $(FP)_{n+1}$ e $\theta : B_0 \to B$ é homomorfismo de grupos com $\theta_{|A} = id_A$. Nessas condições, $B$ é de tipo $(FP)_{n+1}$.

A demonstração deste teorema usará como auxiliar o próximo, o qual, por sua vez, fará uso recorrente do teorema 3.1.0.6, que é reescrito abaixo de maneira ligeiramente diferente.

**Lema 4.1.0.2.** Seja $R$ anel associativo com identidade e $n$ natural. São equivalentes para um $R$-módulo $A$:

**(i)** $A$ é de tipo $(FP)_n$.

**(ii)** O produto direto de cópias de $R$ é tal que $Tor_k^R(\prod R, A) = 0, \forall\ 1 \leq k \leq n-1$ e $A$ é finitamente apresentável como $R$-módulo.

**(iii)** O funtor $Tor_k^R(\cdot, A), 0 \leq k \leq n-1$, comuta com o produto direto $\prod R$.

**Teorema 4.1.0.3.** Seja $I$ um conjunto de índices, $n \in \mathbb{N}$, $1 \to A \to B \to C \to 1$ sequência exata curta de grupos, onde $A$ é de tipo $(FP)_n$ e $B$ é de tipo $(FP)_{n+1}$. Se $M$ é um $\mathbb{Z}B$-módulo livre, considere a sequência espectral LHS dada por

$$E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha))$$

convergindo para $H_{p+q}(B, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha)$, com cada fator $M_\alpha = M$. Sob estas condições,

$$E^{n+1}_{n+1,0} = E^2_{n+1,0} = H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha)),\ E^{n+1}_{0,n} = E^2_{0,n} = H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha)),$$

e o diferencial

$$d^{n+1}_{n+1,0} : H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha)) \to H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha))$$

é sobrejetor.

*Demonstração.* Se $n = 1$, tem-se que $d^2_{2,0} : E^2_{2,0} \to E^2_{0,1}$. Como $B$ é de tipo $(FP)_2$, ocorre que, para qualquer produto direto de $M$,

$$Tor_1^{\mathbb{Z}B}(\prod M_\alpha, \mathbb{Z}) = 0.$$

Desse modo,

$$H_1(B, \prod M_\alpha) = \prod H_1(B, M_\alpha) = 0.$$

Pela convergência da sequência LHS, $E^\infty_{0,1} = 0$.
Se $r \geq 2$, todos os diferenciais são 0 e, portanto,

$$0 = E^\infty_{0,1} = E^3_{0,1} = E^2_{0,1}/Im(d^2_{2,0}).$$

Com isso, estes dois objetos no quociente coincidem, isto é, $d^2_{2,0}$ é sobrejetor.
Seja agora $n \geq 2$. Pelo item a) da proposição 3.2.0.10, $A$ de tipo $(FP)_n$ e $B$ de tipo $(FP)_{n+1}$ produzem $C$ de tipo $(FP)_{n+1}$.
Como $A$ é de tipo $(FP)_n$, o funtor $Tor_k^{\mathbb{Z}A}(\cdot, \mathbb{Z})$ comuta com o produto direto arbitrário para $0 \leq k \leq n-1$. Assim,

$$H_q(A, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} H_q(A, M_\alpha), \forall\ 0 \leq q \leq n-1.$$

Como se tem $M_\alpha = M$ um módulo livre sobre $\mathbb{Z}B$, então $H_q(A, M_\alpha) = 0, \forall\ q \geq 1$ e

$$M \simeq \bigoplus_{\beta\in J} (\mathbb{Z}B)_\beta, J \text{ conjunto de índice e } (\mathbb{Z}B)_\beta = \mathbb{Z}B.$$

Da comutatividade da soma direta com o produto tensorial,

$$H_0(A, M_\alpha) \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} \left( \bigoplus_{\beta\in J} (\mathbb{Z}B)_\beta \right) \simeq \bigoplus_{\beta\in J} (\mathbb{Z}(B/A))_\beta \simeq \bigoplus_{\beta\in J} (\mathbb{Z}C)_\beta := \tilde{M},\ (\mathbb{Z}C)_\beta = \mathbb{Z}C.$$

Pela definição de $E^2_{p,q}$, ocorre que

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} 0, 1 \leq q \leq n-1 \\ H_p(C, \prod_{\alpha\in I} \tilde{M}_\alpha), q = 0, \tilde{M}_\alpha = \tilde{M} \end{cases}.$$

Como $C$ é de tipo $(FP)_{n+1}$, pode-se usar a mesma propriedade acima para se ter o isomorfismo

$$H_p(C, \prod_{\alpha\in I} \tilde{M}_\alpha) \simeq \prod_{\alpha\in I} H_p(C, \tilde{M}_\alpha), \forall\ 0 \leq p \leq n.$$

De $\tilde{M}$ ser módulo livre sobre $\mathbb{Z}C$, tem-se que

$$H_p(C, \tilde{M}_\alpha) = 0, \forall\ p \geq 1.$$

Das duas últimas expressões,

$$H_p(C, \prod_{\alpha\in I} \tilde{M}_\alpha) = 0, \forall\ 1 \leq p \leq n.$$

Escrevendo o objeto da sequência espectral,

$$E^2_{p,q} = 0, 1 \leq q \leq n-1 \text{ ou } q = 0, 1 \leq p \leq n. \tag{8}$$

Procedamos com atenção aos diferenciais

$$E^i_{i,n+1-i} \xrightarrow{d^i_{i,n+1-i}} E^i_{0,n} \xrightarrow{d^i_{0,n}} E^i_{-i,n+i-1} = 0,$$

onde este último termo é nulo porque $-i < 0$. Da definição dos $E^r_{p,q}$,

$$E^{i+1}_{0,n} = \frac{ker(d^i_{0,n})}{Im(d^i_{i,n+1-i})} = \frac{E^i_{0,n}}{Im(d^i_{i,n+1-i})}.$$

Usando (8),

$$E^2_{i,n+1-i} = 0, \forall\ 2 \leq i \leq n.$$

Tem-se que $n+1-i < 0 \Leftrightarrow i \geq n+2$. Assim, $E^2_{i,n+1-i} = 0, \forall\ i \geq n+2$. Pelo que se mostrou, portanto,

$$E^i_{i,n+1-i} = 0, \forall\ i \geq 2, i \neq n+1 \Rightarrow Im(d^i_{i,n+1-i}) = 0, \forall\ i \geq 2, i \neq n+1.$$

Desta imagem na expressão de $E^{i+1}_{0,n}$, tem-se que

$$E^{i+1}_{0,n} = E^i_{0,n}/\{0\} = E^i_{0,n}, \forall\ i \geq 2, i \neq n+1.$$

Ou seja,

$$E^2_{0,n} = E^3_{0,n} = \cdots = E^n_{0,n} = E^{n+1}_{0,n}$$
$$E^{n+2}_{0,n} = E^{n+3}_{0,n} = \cdots = E^\infty_{0,n}.$$

Com isso, $d^{n+1}_{n+1} : E^{n+1}_{n+1,0} \to E^{n+1}_{0,n}$ tem, como contradomínio, o objeto

$$E^2_{0,n} = H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha)). \tag{9}$$

Está provada a primeira parte do enunciado do teorema.

Fixando $(p,q) = (n+1, 0)$, consideremos $r = n+1$ e mostremos que $E^{n+1}_{n+1,0} = E^2_{n+1,0}$. Considere os diferenciais

$$E^i_{n+1+i,1-i} \xrightarrow{d^i_{n+1+i,1-i}} E^i_{n+1,0} \xrightarrow{d^i_{n+1,0}} E^i_{n+1-i,i-1}.$$

Se $i \geq 2$, então $1-i < 0$ e, assim, $E^i_{n+1+i,1-i} = 0$, com $Im(d^i_{n+1+i,1-i}) = 0$. Da definição de $E^{i+1}_{n+1,0}$,

$$E^{i+1}_{n+1,0} = \frac{ker(d^i_{n+1,0})}{Im(d_{n+1+i,1-i})} = ker(d^i_{n+1,0}).$$

Por (8), segue que $ker(d^i_{n+1,0}) = E^i_{n+1,0}, \forall\ 2 \leq i \leq n$. Da igualdade acima, portanto,

$$E^2_{n+1,0} = E^3_{n+1,0} = \cdots = E^n_{n+1,0} = E^{n+1}_{n+1,0}.$$

Em particular,

$$E^{n+1}_{n+1,0} = E^2_{n+1,0} = H_{n+1}\left(C, H_0(A, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha)\right).$$

Considere agora a notação $H_n := H_n(B, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha)$ e a filtração

$$0 = F^{-1}H_n \subseteq F^0 H_n \subseteq \cdots \subseteq F^{n-1}H_n \subseteq F^n H_n = H_n,$$

para a qual

$$E^\infty_{p,q} \simeq F^p H_n / F^{p-1} H_n, p+q=n.$$

De (8),

$$E^2_{p,q} = 0, p+q=n, p\neq 0.$$

Com isso,

$$E^\infty_{p,q} = 0, p+q=n, p\neq 0.$$

Voltando à filtração, vale que

$$0 = F^{-1}H_n \subseteq F^0 H_n = \cdots = F^{n-1}H_n = F^n H_n = H_n.$$

Então,

$$E^\infty_{0,n} \simeq F^0 H_n / F^{-1} H_n = H_n. \tag{10}$$

Das hipóteses do enunciado, usou-se o fato da sequência ser exata curta, e os tipos homológicos de $A$ e $C$. Utilizando que $B$ é de tipo $(FP)_{n+1}$, ocorre, pelo lema 4.1.0.2, que

$$H_n(B, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha) \simeq \prod_{\alpha\in I} H_n(B, M_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} 0 = 0,$$

onde a penúltima igualdade ocorre por $M_\alpha = M$ é módulo livre sobre $\mathbb{Z}B$. Desse modo,

$$E^{n+2}_{0,n} = E^{n+3}_{0,n} = \cdots = E^\infty_{0,n} = H_n = 0.$$

Considere os diferenciais

$$E^{n+1}_{n+1,0} \xrightarrow{d^{n+1}_{n+1,0}} E^{n+1}_{0,n} \xrightarrow{d^{n+1}_{0,n}} E^{n+1}_{-n-1,2n} = 0,$$

pois $-n-1<0$. Por definição,

$$0 = E^{n+2}_{0,n} = \frac{ker(d^{n+1}_{0,n})}{Im(d^{n+1}_{n+1,0})} = \frac{E^{n+1}_{0,n}}{Im(d^{n+1}_{n+1,0})} \Rightarrow Im(d^{n+1}_{n+1,0}) = E^{n+1}_{0,n}.$$

O mapa é, assim, sobrejetor e se provou a segunda parte do teorema. □

Fora este teorema, utilizaremos, ao final da demonstração do teorema 4.1.0.1, a

**Proposição 4.1.0.4.** Seja $B$ um grupo e $A \triangleleft B$, tal que $A$ seja de tipo $(FP)_n$ e $B/A$ seja de tipo $(FP)_{n+1}$. Ocorre que $B$ é de tipo $(FP)_{n+1}$ se, e somente se, para qualquer produto direto, o mapa

$$d^{n+1}_{n+1,0} : H_{n+1}(C, H_0(A, \prod(\mathbb{Z}B)) \to H_0(C, H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B))$$

for sobrejetor, onde $d^{n+1}_{n+1,0}$ é o diferencial da sequência espectral apresentada no último enunciado, com $M_\alpha = \mathbb{Z}B$.

*Demonstração.* Assumindo que $B$ é de tipo $(FP)_{n+1}$, está provado o resultado, pelo teorema 4.1.0.3. Desse modo, seja $d^{n+1}_{n+1,0}$ sobrejetor.

Pelo lema 4.1.0.2, de $B$ ser de tipo $(FP)_{n+1}$, então $Tor_k^{\mathbb{Z}B}(\prod \mathbb{Z}B, \mathbb{Z}) = 0, \forall\ 1 \leq k \leq n-1$. Por (10),

$$E^{\infty}_{0,n} = H_n(B, \prod M_\alpha).$$

Dessas duas propriedades, $B$ é de tipo $(FP)_{n+1}$ se, e somente se, $E^{\infty}_{0,n} = 0$. Como $E^{n+2}_{0,n} = E^{\infty}_{0,n}$, tem-se que $B$ é de tipo $(FP)_{n+1}$ se, e somente se, $E^{n+2}_{0,n} = 0$. Para ver que esta igualdade equivale à sobrejetividade do mapa $d^{n+1}_{n+1,0}$, considere $d^{n+1}_{0,n} : E^{n+1}_{0,n} \to E^{n+1}_{-n-1,2n}$, que é identicamente nulo pela contradomínio ser 0 $(-n-1 < 0)$. Desse modo,

$$E^{n+2}_{0,n} = ker(d^{n+1}_{0,n})/Im(d^{n+1}_{n+1,0}) = E^{n+1}_{0,n}/Im(d^{n+1}_{n+1,0}).$$

Este é o grupo trivial se, e somente se, $Im(d^{n+1}_{n+1,0}) = E^{n+1}_{0,n} \Leftrightarrow d^{n+1}_{n+1,0} : E^{n+1}_{n+1,0} \to E^{n+1}_{0,n}$ for sobrejetor. □

Provemos agora o teorema 4.1.0.1.

*Demonstração.* (do teorema 4.1.0.1) Tome a sequência espectral LHS dada para a sequência exata curta $1 \to A \to B_0 \to C_0 \to 1$ e para o $\mathbb{Z}B_0$-módulo $\mathbb{Z}B$, com ação por $\theta$.

$$E^2_{p,q} := H_p(C_0, H_q(A, \mathbb{Z}B)) \Rightarrow H_{p+q}(B_0, \mathbb{Z}B).$$

Como $\mathbb{Z}B$ é livre sobre $\mathbb{Z}A$, tem-se que

$$H_q(A, \mathbb{Z}B) = 0, \forall\ q \geq 1.$$

Vale, ainda, que

$$H_0(A, \mathbb{Z}B) \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}B \simeq \mathbb{Z}(B/A) \simeq \mathbb{Z}C. \tag{11}$$

Tomando as duas últimas expressões com $q = 0$, pode-se escrever que os objetos da sequência espectral tomada são

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} 0, \ q \geq 1. \\ H_p(C_0, \mathbb{Z}C), \ q = 0 \end{cases}.$$

Com isso, a sequência colapsa, com

$$E^{\infty}_{n,0} = E^2_{n,0} = H_n(C_0, \mathbb{Z}C), \forall\ n \geq 0.$$

Por convergir, usando a notação $H_n := H_n(B_0, \mathbb{Z}B)$, existe uma filtração

$$0 = F^{-1}H_n \subseteq F^0 H_n \subseteq \cdots \subseteq F^{n-1}H_n \subseteq F^n H_n = H_n,$$

tal que

$$E^{\infty}_{p,q} \simeq F^n H_n / F^{n-1} H_n, p + q = n.$$

Com isso, todas as inclusões - a menos de $F^{n-1}H_n \subseteq F^n H_n$ - são garantidas como igualdades. Segue que

$$H_n(C_0, \mathbb{Z}C) = E^{\infty}_{n,0} \simeq F^p H_n / F^{p-1} H_n = H_n/0 \simeq H_n = H_n(B_0, \mathbb{Z}B).$$

Desse modo, existe isomorfismo $\varphi : H_n(B_0, \mathbb{Z}B) \to H_n(C_0, \mathbb{Z}C), n \geq 0$. Este é induzido pelos mapas

$$\begin{cases} \pi_0 : B_0 \to C_0 \\ \pi_* : \mathbb{Z}B \to \mathbb{Z}C \end{cases}.$$

Tome a sequência espectral referente à sequência exata curta $1 \to A \to B_0 \to C_0 \to 1$, com $\mathbb{Z}B$ um $\mathbb{Z}B_0$-módulo por $\theta$.

$$\epsilon^2_{p,q} := H_p(C_0, H_q(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \Rightarrow H_{p+q}(B_0, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha),$$

onde o produtório possui cópias de $\mathbb{Z}B$.

Por $A$ ser de tipo $(FP)_n$, utilizando o lema 4.1.0.2, vale que

$$H_q(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)) = \prod H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha), \forall\ 0 \leq q \leq n-1.$$

De $\mathbb{Z}B$ ser módulo livre sobre $\mathbb{Z}A$, ocorre que a homologia $H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) = 0, \forall\ q \geq 1$. Desse modo,

$$\epsilon^2_{p,q} = 0, \forall\ 1 \leq q \leq n-1 \Rightarrow \epsilon^\infty_{p,q} = 0, \forall\ 1 \leq q \leq n-1. \tag{12}$$

De $A, B_0$ serem de tipo $(FP)_n, (FP)_{n+1}$, respectivamente, tem-se que $C_0$ é de tipo $(FP)_{n+1}$. Ocorre que

$$\epsilon^2_{n,0} = H_n(C_0, H_0(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \underbrace{\simeq}_{A \text{ é finitamente gerado.}} H_n(C_0, \prod H_0(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha)) \underbrace{\simeq}_{C_0 \text{ é de tipo } (FP)_{n+1}.}$$

$$\prod H_n(C_0, H_0(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha)) \underbrace{\simeq}_{\text{de (11).}} \prod H_n(C_0, (\mathbb{Z}C)_\alpha).$$

Considere agora os diferenciais

$$\underbrace{\epsilon^i_{n+i,1-i}}_{=0,\ 1-i<0.} \xrightarrow{\delta^i_{n+1,1-i}} \epsilon^i_{n,0} \xrightarrow{\delta^i_{n,0}} \underbrace{\epsilon^i_{n-i,i-1}}_{=0,\ 2\leq i\leq n \text{ de (12); } =0,\ i>n.}.$$

Com essas identificações dos objetos, tem-se que

$$\epsilon^{i+1}_{n,0} = ker(\delta^i_{n,0})/Im(\delta^i_{n+i,1-i}) \simeq ker(\delta^i_{n,0}) = \epsilon^i_{n,0},\ i \geq 2.$$

Segue que

$$\epsilon^\infty_{n,0} = \epsilon^2_{n,0} \simeq H_n(C_0, \prod(\mathbb{Z}C)).$$

Usando a convergência da sequência espectral e a notação $H_n := H_n(B_0, \prod(\mathbb{Z}B))$, existe uma filtração

$$0 = G^{-1}H_n \subseteq G^0H_n \subseteq \cdots \subseteq G^{n-1}H_n \subseteq G^nH_n = H_n,$$

de modo que

$$\epsilon^\infty_{p,q} \simeq G^pH_n/G^{p-1}H_n,\ p+q = n.$$

De (12), se $1 \leq q \leq n-1$,

$$0 = \epsilon^\infty_{p,q} \Rightarrow G^pH_n = G^{p-1}H_n, p+q = n.$$

Na filtração, portanto, há igualdade assegurada a menos de $G^{-1}H_n \subseteq G^0H_n$ e $G^{n-1}H_n \subseteq G^nH_n$. Assim,

$$\epsilon^{\infty}_{0,n} \simeq G^0H_n/G^{-1}H_n = G^0H_n/\{0\} \simeq G^0H_n = G^{n-1}H_n.$$

$$\epsilon^{\infty}_{n,0} \simeq G^nH_n/G^{n-1}H_n = H_n/G^{n-1}H_n \simeq H_n/\epsilon^{\infty}_{0,n}.$$

Com essas igualdades, faz-se a sequência exata curta de grupos

$$0 \to \epsilon^{\infty}_{0,n} \xrightarrow{\gamma} H_n \to \epsilon^{\infty}_{n,0} \to 0,$$

com este último mapa induzido pelos epimorfismos

$$\begin{cases} \pi_0 : B_0 \to C_0 \\ \pi_* : \mathbb{Z}B \to \mathbb{Z}C \end{cases}.$$

Este mapa, denotado por $\hat{\theta}$, é um isomorfismo de $H_n(B_0, \prod(\mathbb{Z}B))$ em $H_n(C_0, \prod(\mathbb{Z}C))$. Como a sequência é exata, garante-se que $\hat{\theta}$ é sobrejetor. Tem-se que o isomorfismo $\varphi : H_n(B_0, \mathbb{Z}B) \to H_n(C_0, \mathbb{Z}C), n \geq 0$ induz isomorfismo

$$\prod \varphi : \prod H_n(B_0, (\mathbb{Z}B)) \to \prod H_n(C_0, (\mathbb{Z}C)).$$

Da hipótese de $B_0$ ser $(FP)_{n+1}$ e como, por consequência, $C_0$ o ser, ocorre que os funtores $H_n(B_0, \cdot), H_n(C_0, \cdot)$ comutam com o produto direto, o que produz o isomorfismo de grupos $\hat{\theta}$. Em particular, $ker(\hat{\theta}) = \{0_{H_n}\}$. Da exatidão da sequência,

$$\epsilon^{\infty}_{0,n} \simeq \epsilon^{\infty}_{0,n}/\{0\} = \epsilon^{\infty}_{0,n}/ker(\gamma) \simeq Im(\gamma) = ker(\hat{\theta}) = \{0\}. \tag{13}$$

Se $i \geq 0$, analisemos os mapas

$$\epsilon^{i}_{i,n+1-i} \xrightarrow{d^{i}_{i,n+1-i}} \epsilon^{i}_{0,n} \xrightarrow{d^{i}_{0,n}} \epsilon^{i}_{-i,n+i-1}.$$

De (12), se $i \geq 2$, então $q = n+1-i \leq n-1$ e, assim, $\epsilon^{i}_{i,n+1-i} = 0, \forall\ 2 \leq i \leq n$. E, para $i \geq n+2$, ocorre que $n+1-i < 0 \Rightarrow \epsilon^{i}_{i,n+1-i} = 0$. Dessas duas caracterizações,

$$\epsilon^{i+1}_{0,n} = ker(\delta^{i}_{0,n})/Im(\delta^{i}_{i,n+1-i}) = ker(\delta^{i}_{0,n})/\{0\} \simeq ker(\delta^{i}_{0,n}) \simeq \epsilon^{i}_{0,n}, i \geq 2,\ i \neq n+1.$$

Desse isomorfismo, ocorre que

$$\epsilon^{2}_{0,n} \simeq \epsilon^{3}_{0,n} \simeq \cdots \simeq \epsilon^{n}_{0,n} \simeq \epsilon^{n+1}_{0,n} \qquad \epsilon^{n+2}_{0,n} \simeq \epsilon^{n+3}_{0,n} \simeq \cdots \simeq \epsilon^{\infty}_{0,n}.$$

Por (13), tem-se que $\epsilon^{n+2}_{0,n} \simeq \epsilon^{\infty}_{0,n} = 0$. O procedimento feito acima será replicado com os diferenciais

$$\epsilon^{n+1}_{n+1,0} \xrightarrow{d^{n+1}_{n+1,0}} \epsilon^{n+1}_{0,n} \xrightarrow{d^{n+1}_{0,n}} \epsilon^{n+1}_{-n-1,2n}.$$

Como $-n-1 < 0$, então $\epsilon^{n+1}_{-n-1,2n} = 0 \Rightarrow ker(\delta^{n+1}_{0,n}) = \epsilon^{n+1}_{0,n}$. Portanto,

$$0 = \epsilon^{n+2}_{0,n} = ker(\delta^{n+1}_{0,n})/Im(\delta^{n+1}_{n+1,0}) = \epsilon^{n+1}_{0,n}/Im(\delta^{n+1}_{n+1,0}) \Rightarrow Im(\delta^{n+1}_{n+1,0}) = \epsilon^{n+1}_{0,n}.$$

Este mapa $\delta^{n+1}_{n+1,0} : \epsilon^{n+1}_{n+1,0} \to \epsilon^{n+1}_{0,n}$ é, assim, sobrejetor.

Como feito em (9), tem-se que $\delta^{n+1}_{n+1,0} : \epsilon^{2}_{n+1,0} = \epsilon^{n+1}_{n+1,0} \to \epsilon^{n+1}_{0,n} = \epsilon^{2}_{0,n}$.

Considere o mapa $\tilde{\theta} : C_0 \to C$ induzido por $\theta : B_0 \to B$, dado no enunciado. O novo mapa induz outros $\mu_1 : H_{n+1}(C_0, H_0(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \to H_{n+1}(C, H_0(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha))$ e $\mu_2 : H_0(C_0, H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \to H_0(C, H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha))$. Dada a sequência exata curta $1 \to A \to B \to C \to 1$, associa-se a sequência espectral LHS

$$H_p(C, H_q(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \to_p H_{p+q}(B, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha),$$

com $\psi^{-}_{-,-}$ o diferencial desta.

Da naturalidade da sequência espectral LHS, ocorre o diagrama comutativo com grupos

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(C_0, H_0(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \arrow[r, "\delta^{n+1}_{n+1,0}"] \arrow[d, "\mu_1"] & H_0(C_0, H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \arrow[d, "\mu_2"] \\
H_{n+1}(C, H_0(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \arrow[r, "\psi^{n+1}_{n+1,0}"] & H_0(C, H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)).
\end{tikzcd}$$

Vale que

$$H_0(C_0, H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \simeq H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)/[Aug(\mathbb{Z}C_0)H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)] =$$

$$H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)/[Aug(\mathbb{Z}(Im(\tilde{\theta})))H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)],$$

com $Aug(\cdot)$ o ideal de aumento de alguma álgebra de grupos e $H_n(A, \prod(\mathbb{Z}B)_\alpha)$ um $\mathbb{Z}C_0$-módulo pelo $\tilde{\theta}$. Com isso, $\mu_2$ é sobrejetor e, pela comutatividade do diagrama, com $\delta^{n+1}_{n+1,0}, \mu_2$ sobrejetores, vale que $\psi^{n+1}_{n+,0}$ é sobrejetor. Da proposição 4.1.0.4, $B$ é de tipo $(FP)_{n+1}$. □

Além da conjectura 4.0.0.2, estabelece-se em ([7]), a

**Conjectura 4.1.0.5.** Sejam $G_1, G_2, \ldots, G_k$ grupos de tipo homológico $(FP)_n$, $2 \leq n \leq k$. Se $P$ é um subgrupo de $G_1 \times \cdots \times G_k$ que é virtualmente sobrejetor sobre todo conjunto de $n$ fatores, então $P$ é de tipo $(FP)_n$.

A respeito desta, tem-se o

**Teorema 4.1.0.6.** Se a versão homológica da conjectura $n-(n+1)-(n+2)$, $n \geq 2$, valer quando $Q$ for virtualmente nilpotente, então a conjectura acima é verdadeira.

O termo *virtualmente* é usado no sentido de que existe um subgrupo de índice finito que possui a propriedade que acompanha o termo. Em específico, $Q$ admite subgrupo $H$, com $[Q : H] < \infty$ e $H$ nilpotente.

Como este resultado utiliza alguns fatos demonstrados em trabalhos anteriores, omite-se a prova dele, mas se ressalta que o enunciado possibilita a relação das duas conjecturas.

Tendo demonstrado o foco principal de ([7]), há alguns corolários apresentados no artigo.

**Corolário 4.1.0.7.** Sejam $1 \to N_1 \to G_1 \to Q \to 1$ e $1 \to N_2 \to G_2 \to Q \to 1$ duas sequências exatas curtas, com $N_1$ de tipo $(FP)_n$, $G_1, G_2$ de tipo $(FP)_{n+1}$ e tal que a segunda cinda. Então, o produto fibra $P$ associado a elas é de tipo $(FP)_{n+1}$.

Ou seja, prova-se a versão homológica da conjectura $n-(n+1)-(n+2)$ sob uma hipótese adicional.

**Corolário 4.1.0.8.** Se a versão homológica da conjectura $n-(n+1)-(n+2)$ for provada para quando $G_2$ é grupo livre finitamente gerado, então vale sob o enunciado original.

*Demonstração.* Considere $1 \to N_1 \to G_1 \xrightarrow{\pi_1} Q \to 1$ e $1 \to N_2 \to G_2 \xrightarrow{\pi_2} Q \to 1$ duas sequências exatas curtas, $N_1$ de tipo $(FP)_n$, $G_1, G_2$ de tipo $(FP)_{n+1}$ e $Q$ de tipo $(FP)_{n+2}$.

Considere o produto fibra

$$P := \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 \mid \pi_1(g_1) = \pi_2(g_2)\}.$$

Pela hipótese de $G_2$, existe um grupo livre finitamente gerado $F$ e $p : F \to G_2$ homomorfismo sobrejetor. Tome agora uma terceira sequência exata curta, dada por

$$0 \to ker(\pi_2 \circ p) \to F \xrightarrow{\pi_2 \circ p} Q \to 0.$$

Com esta, determina-se um novo produto fibra,

$$P' := \{(g_1, f) \in G_1 \times F \mid \pi_1(g_1) = \pi_2 \circ p(f)\}.$$

Como se supôs válida a conjectura quando o grupo intermediário da sequência é livre finitamente gerado, ocorre que $P'$ é de tipo $(FP)_{n+1}$.

Se $p_2 : P \to G_2$ é $p_2((g_1, g_2)) := g_2$ e $p_2' : P' \to F$ é $p_2'((g_1, f)) := f$, forma-se o diagrama comutativo de linhas iguais a sequências exatas curtas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_1 \times 1 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & P' \arrow[r, "p_2'"] \arrow[d, "id_{G_1} \times p"] & F \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \times 1 \arrow[r] & P \arrow[r, "p_2"] & G_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Com isso, pelo teorema 4.1.0.1, $P$ é de tipo $(FP)_{n+1}$. □

# Referências

[1] G. Baumslag, M. R. Bridson, C. F. Miller III, and H. Short. Fibre products, non-positive curvature, and decision problems. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 75:457–477, 2000.

[2] M. Bestvina and N. Brady. Morse theory and finiteness roperties of groups. *Invent. Math.*, (129):445–470, 1997.

[3] R. Bieri. *Homological dimension of discrete groups*. Queen Mary College mathematics notes, 2nd edition, 1976.

[4] M. R. Bridson, J. Howie, C. F. Miller, and H. Short. On the finite presentation of subdirect products and the nature of residually free groups. *American Journal of Mathematics*, 135(4):891–933, 2013.

[5] Daniel E. Cohen. *Combinatorial group theory: a topological approach*. Cambridge university press, 1st edition, 1989.

[6] V. Guirardel. Limit groups and groups acting freely on $\mathbb{R}^n$-trees. 2003.

[7] D. Kochloukova and F. Lima. Homological finiteness properties of fibre products. *Q. J. Math*, 69(3):835–854, 2018.

[8] B. Kuckcuck. Subdirect products of groups and the $n-(n+1)-(n+2)$ conjecture. *The Quartely Journal of Mathematics,65*, 4:1293–1318, 2014.

[9] Francismar Ferreira Lima. *$\Sigma$-invariantes de grupos e conjectura $n-(n+1)-(n+2)$ homológica*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2016.

[10] Joseph J. Rotman. *Notes on homological algebra*. Litton educational publishing, Inc., 1st edition, 1970.