UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

GUSTAVO DE SOUZA SILVA

# Um estudo de operadores pseudo-diferenciais

Campinas
2024

Gustavo de Souza Silva

# Um estudo de operadores pseudo-diferenciais

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Giuliano Angelo Zugliani

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Gustavo de Souza Silva e orientada pelo Prof. Dr. Giuliano Angelo Zugliani.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38e Silva, Gustavo de Souza, 1999-
Um estudo de operadores pseudo-diferenciais / Gustavo de Souza Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Giuliano Angelo Zugliani.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Operadores pseudodiferenciais. 2. Espaços de Schwartz. I. Zugliani, Giuliano Angelo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

**Título em outro idioma:** A study of pseudo-differential operators
**Palavras-chave em inglês:**
Pseudodifferential operators
Schwartz spaces
**Área de concentração:** Matemática
**Titulação:** Mestre em Matemática
**Banca examinadora:**
Giuliano Angelo Zugliani
Mahendra Prasad Panthee
Wagner Augusto Almeida de Moraes
**Data de defesa:** 22-03-2024
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0008-6625-9580
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/6630750162287982

**Dissertação de Mestrado defendida em 22 de março de 2024 e aprovada**

**pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). GIULIANO ANGELO ZUGLIANI**

**Prof(a). Dr(a). MAHENDRA PRASAD PANTHEE**

**Prof(a). Dr(a). WAGNER AUGUSTO ALMEIDA DE MORAES**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado a minha mãe,*
*Iêda Oliveira de Souza Silva*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por ter me sustentado neste processo e por permitir com que eu realizasse este sonho.

A toda a minha família que esteve me apoiando ao longo desses dois anos. Em especial, aos meus pais, Iêda Oliveira e Antonio Carlos, por todo suporte, amor, carinho e por sempre incentivarem meus estudos desde os níveis mais básicos. À minha irmã, Gesane, por estar sempre se preocupando comigo. Ao Nathan de Souza Faria do Carmo por ser o melhor sobrinho do mundo e ter trazido muitas alegrias mesmo em momentos difíceis.

Não poderia deixar de registrar meus agradecimentos às minhas tias Denise Aparecida, Teresa Vicente e Neide de Oliveira, que estiveram ao meu lado nos momentos alegres e também me cobrindo de orações, além da Pastora Marta por todo o suporte principalmente nesse último ano.

Ao Calebe Roberto pela amizade fraterna construída desde o Ensino Médio e por estar sempre vibrando perante todas as minhas conquistas. A Cibele Carolina por compartilhar a experiência de ter cursado a graduação e o mestrado comigo, além de todo o companheirismo construído ao longo desses 6 anos de convivência. Ao Rafael Zorzetto por todas conversas e pela sólida amizade desde que nos conhecemos na UFF até os dias atuais, mesmo não estando mais no mesmo curso. Aos demais amigos e colegas da UFF que apesar de terem seguido caminhos distintos, continuam presente nas recordações dos bons momentos que passamos juntos.

A todos os amigos do mestrado dos mais diferentes lugares do Brasil que tive o prazer de compartilhar diversos momentos. Ao Douglas Gonzaga, João Gabriel, Matheus Silveira, Vinícius José, Pedro Dragone e Matheus Revers pela amizade construída ao longo desses dois anos de mestrado. Mesmo se estiver distante, levarei em minha memória os momentos bons e ruins que passamos juntos.

Ao meu orientador, Giuliano Zugliani, por ter aceitado de prontidão essa orientação, mesmo sem ter nenhum conhecimento prévio sobre mim, e por ter proposto esse projeto de pesquisa, que, apesar de desafiador, me fez amadurecer bastante como matemático.

Às professoras Joana de Souza, Clarice de Freitas e Jayne Rosa por terem me dado todo o suporte necessário desde o Ensino Fundamental, permitindo com que eu pudesse trilhar um longo caminho até concluir este mestrado.

A todos os professores do Colégio Municipal Prefeito Marcello Drable e do Colégio Verbo Divino por permitirem que eu tivesse acesso a uma educação de qualidade.

Saibam que eu amo muito todos vocês.

A todo corpo docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal Fluminense de Volta Redonda, onde me graduei como Bacharel em Matemática com ênfase em Matemática Computacional, pelo excelente trabalho na formação de seus alunos e por estarem sempre à disposição. Em especial, meus agradecimentos aos professores Miguel Schnoor, Ivan Aguilar e Marina Sequeiros pela orientação na graduação e por incentivarem seus alunos a ingressar na pós-graduação.

À Unicamp pela oportunidade de cursar o mestrado.

Ao Professor Christian Olivera por todo apoio e pelas conversas que tivemos desde que nos conhecemos no curso de Análise Real I.

À secretária Magali pelo apoio dado no último mês com relação à documentação para o ingresso no doutorado.

Aos membros da banca pelas contribuições com o texto final da dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"Duvidar de tudo ou acreditar em tudo são duas soluções igualmente convenientes; ambas dispensam a necessidade de reflexão." (Henri Poincaré)*

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar algumas das propriedades acerca dos chamados *operadores pseudo-diferenciais* em espaços euclidianos com base na referência [12]. Tais operadores surgiram na segunda metade do século XX com o objetivo de servir como ferramenta para o estudo das Equações Diferenciais Parciais.

**Palavras-chave**: Operadores pseudo-diferenciais. Espaço de Schwartz. Símbolos.

# Abstract

This work's objective is to study some of the properties regarding the so-called *pseudo-differential operators* on Euclidean spaces based on the reference [12]. Such operators emerged in the second half of the 20th century with the aim of serving as a tool for the study of Partial Differential Equations.

**Keywords**: Pseudo-differential operators. Schwartz space. Symbols.

# Sumário

# Introdução

O estudo da *Teoria de Operadores Pseudo-Diferenciais* teve origem na década de 1950, mais especificamente entre os anos 1952 e 1956, com os trabalhos pioneiros dos matemáticos Alberto Calderón e Antoni Zygmund, que foram os responsáveis pelo desenvolvimento da chamada teoria de operadores singulares de Calderón-Zygmund. O ponto de partida dessa teoria se dava com um operador integral $T$ definido por

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)u(y)dy$$

com a condição de que $|K(x,y)| \leqslant A|x-y|^{-n}$ para $x \neq y$ e

$$\int_{|x-z|\geqslant 2\delta} |K(x,y) - K(x,z)|dx \leqslant A$$

se $|x-z| \leqslant \delta$, para todo $\delta > 0$. Além disso, supondo que $K$ seja escrita em função do que nomearemos de símbolos cuja notação usual é $a(x,\xi)$, com $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tais símbolos naquele momento correspondiam a funções positivamente homogêneas de grau zero na variável $\xi$ (ou seja, $a(x,t\xi) = a(x,\xi)$, para $t \neq 0, \xi \neq 0$), e possuíam infinitas derivadas contínuas e limitadas em relação à $\xi$.

No artigo [8], o nome "operadores pseudo - diferenciais" foi introduzido: Kohn e Niremberg consideraram símbolos que, num certo sentido, fossem somas infinitas de funções positivamente homogêneas de graus descrescentes tendendo a $-\infty$. Essa nomenclatura permanece até hoje e é universalmente aceita pela comunidade científica.

Esses primeiros passos foram elementares para o desenvolvimento desta teoria, dos quais não poderíamos deixar de mencionar, mas as grandes contribuições a essa área são atribuídas ao matemático Lars Hormander - que inclusive ganhou uma medalha Fields por conta de suas realizações na área de Operadores Diferenciais Lineares. Em 1965, Hormander introduziu uma classe de símbolos definidos por condições de crescimento nas derivadas que imitavam o comportamento das derivadas de uma função homogênea. Pouco tempo depois, em 1966, propôs uma nova classe de símbolos denotada por $S^m_{\rho,\delta}$, que será utilizada para os nossos propósitos.

Ao decorrer das décadas de 80 e 90, essa teoria também recebeu diversas contribuições. Matemáticos como Beals, Fefferman e Wely apresentaram em seus trabalhos classes mais gerais de símbolos. No entanto, essas generalizações podem acarretar na perda de algumas propriedades importantes. Na referência [13], o autor prova que todo símbolo $a \in S^0_{1,0}$ é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e mostra ainda que nem todo símbolo $a \in S^0_{1,1}$ possui essa propriedade.

Esta teoria também recebeu a contribuição de Jorge Hounie, em 1987, que escreveu o livro intitulado "Introdução aos operadores pseudo-diferenciais" para o 16° Colóquio Brasileiro de Matemática, que pode ser utilizado pelos ingressantes nesta área e, inclusive, será uma das principais referências para esta dissertação.

Atualmente, esta teoria vem ganhando destaque em artigos científicos na área de Equações Diferenciais Parciais. No artigo [2], publicado em 2021, por exemplo, os autores estudam a regularidade do sistema de operadores pseudo-diferenciais

$$L_j = D_{t_j} + c_j(t_j)P_j(D_x), t = (t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{T}^m, x \in \mathbb{T}^n,$$

onde $1 \leqslant j \leqslant n, c_j(t)$ é uma função $2\pi-$periódica, $D_{t_j} = i^{-1}\partial_{t_j}$ e $P_j(D_x)$ são operadores pseudo-diferenciais de ordem $m_j$ em $\mathbb{T}^n$.

Este trabalho visa apresentar as principais propriedades acerca desses operadores pseudo-diferenciais no espaço euclidiano, o que já propicia ao leitor um bom repertório sobre o assunto, tendo em vista que a maior parte dos resultados para outros espaços como o toro $\mathbb{T}^n$ e Grupos de Lie podem ser obtidos a partir das ideias desenvolvidas em $\mathbb{R}^n$.

Além disso, tais ferramentas são a base para a compreensão de diversas aplicações físicas na área de Equações Diferenciais Parciais. A título de exemplo, podemos considerar um problema da mecânica quântica relativística, em que Dirac obteve sua equação, fatorando o Laplaciano: para partículas sem massa, $E^2 = p^2c^2$, onde $E$ denota a energia, $p$ o momento e $c$ é a velocidade da luz. O momento $p$, no contexto físico abordado, pode ser definido como $p = -ih\sqrt{\Delta}$ de modo que $E = hc\sqrt{\Delta}$. O estudo a ser apresentado aqui fornece um conjunto de resultados - muitos especificamente do próprio Laplaciano - de modo que um problema como esse pode ser trabalhado pelos físicos e até mesmo pelos matemáticos.

No Capítulo 1, apresentamos definições e resultados fundamentais que antecedem o assunto principal de modo que um aluno no final da graduação ou início de mestrado possa acompanhar todo o texto desenvolvido. Os temas principais a serem abordados são Teoria de Medida e Integração, Análise Funcional, Análise de Fourier e Distribuições, mas resultados mais elementares que forem constantemente utilizados no texto principal também serão enunciados.

Nos Capítulos 2 e 3, com base nas referências[1] [7] e [12] , desenvolvemos a teoria de operadores pseudo-diferenciais - nosso principal objetivo. No Capítulo 2, apresentaremos as definições e resultados clássicos da teoria. Nossa intenção nesse capítulo é trabalhar com exemplos de forma mais detalhada e demonstrações um pouco mais aprofundadas com relação às referências disponíveis. De forma a completar nosso estudo, o Capítulo 3 será dedicado ao chamado cálculo de operadores pseudo-diferenciais. Nele, são apresentadas

[1] Demais bibliografias utilizadas de modo a enriquecer o texto serão referenciadas ao decorrer dos capítulos.

versões de resultados clássicos do Cálculo no contexto da teoria como a composição de operadores.

# 1 Preliminares

Neste capítulo, visamos apresentar resultados que serviram de base à construção desta dissertação, de modo que o leitor possa acompanhar o desenvolvimento sem recorrer, por muitas vezes, a outras bibliografias. Além disso, não forneceremos nenhuma demonstração nesta parte introdutória, pois fugiríamos do escopo do trabalho. No entanto, o leitor interessado pode consultar as referências [1], [4], [5], [10], [11] e [12] utilizadas como base à escrita do mesmo.

## 1.1 Um pouco de Teoria da Medida e Análise de Fourier

Esta seção tem por objetivo apresentar os espaços de funções em que desenvolveremos a teoria de operadores pseudo-diferenciais.

**Definição 1.1** (Notação multi-índice)**.** Sejam $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, com $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e entradas $\alpha_i \geqslant 0$. Definimos

$$\partial^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f(x).$$

Além disso,

(a) $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$;

(b) $x^\alpha = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$;

(c) $\alpha! = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j!$.

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ multi-índices, dizemos que $\alpha \leqslant \beta$ se $\alpha_j \leqslant \beta_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

**Definição 1.2.** Seja $\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^n$. O *suporte de uma função* $f$, em $\Omega$, a valores reais ou complexos é definido por

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

No contexto de Análise, é comum trabalharmos com situações em que consideramos o suporte compacto, seja devido a natureza do problema abordado, seja para demonstrar um caso particular de um teorema e, em seguida, formular a sua generalização, utilizando algum outro argumento, por exemplo a densidade dessas funções em espaços apropriados. Essa consideração nos motiva a definir dois importantes espaços que serão utilizados em nosso estudo.

**Definição 1.3.** Seja $\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^n$. O espaço, que denotaremos por $C_c^\infty(\Omega)$, consiste das funções $f$ infinitamente diferenciáveis que possuem suporte compacto.

**Definição 1.4.** O *Espaço de Schwartz*, que denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, consiste das funções $f$ tais que $f$ e todas as suas derivadas se anulam no infinito mais rápido do que qualquer potência de $|x|$. Mais precisamente,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty$$

para quaisquer $\alpha, \beta$ multi-índices não negativos.

Como consequência dessa definição, uma função $f$ está no espaço de Schwartz se e somente se para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $N \geqslant 0$ existe uma constante $C_{\alpha,N}$ tal que $|\partial^\alpha f(x)| \leqslant C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Se definirmos

$$||f||_{(N,\alpha)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^\alpha f(x)|, \tag{1.1}$$

então

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty; ||f||_{(N,\alpha)} < \infty \text{ para todo } N, \alpha\}.$$

**Observação 1.5.** O espaço de Schwartz é um exemplo de espaço de Fréchet - espaço vetorial topológico Hausdorff completo cuja topologia é induzida por uma família enumerável de seminormas dada por (1.1).

**Definição 1.6** (Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)**.** Dizemos que $\varphi_j \to \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to \infty$ se $\varphi_j, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e se

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha (\varphi_j - \varphi)(x)| \to 0 \tag{1.2}$$

quando $j \to \infty$, para quaisquer multi-índices $\alpha, \beta \geqslant 0$.

**Proposição 1.7.** Para quaisquer multi-índices $\alpha$ e $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$|x^\alpha| \leqslant |x|^{|\alpha|}.$$

**Teorema 1.8** (Fórmula de Leibniz)**.** Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então para qualquer $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \; \partial^\beta g,$$

onde $\displaystyle\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

**Proposição 1.9.** Para quaisquer multi-índices $\alpha$ e $\beta$,

$$\partial^\beta x^\alpha = \begin{cases} \beta! \displaystyle\binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta}, & \beta \leqslant \alpha, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Findada as considerações acerca da notação multi-índice com os resultados acima, podemos retomar a discussão sobre espaços de funções. Nosso objetivo agora é definir os espaços $L^p$ num conjunto $\Omega$. Assumiremos que o leitor já tenha familiaridade com o conceito de funções mensuráveis.

- Seja $1 \leqslant p < \infty$ e considere $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Dizemos $f \in L^p(\Omega)$ se

  *(i)* $f$ é mensurável;

  *(ii)* sua norma
  $$||f||_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\right)^{1/p}$$
  é finita.

  No caso $p = \infty$, dizemos que $f \in L^\infty(\Omega)$ se $f$ é mensurável e *essencialmente limitada*, ou seja, se
  $$||f||_{L^\infty(\Omega)} := \text{esssup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$
  é finita. Aqui $\text{esssup}_{x\in\Omega} |f(x)|$ é definido como o menor $M$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ q.t.p. $x \in \Omega$.

Os espaços $L^p$ são espaços de Banach, isto é, espaços normados completos com a norma $||f||_{L^p(\Omega)}$ para $1 \leqslant p < \infty$ e $||f||_{L^\infty(\Omega)}$ para $p = \infty$.

**Definição 1.10** (Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$)**.** Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos sua *transformada de Fourier* por
$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx.$$

Podemos definir também a *transformada de Fourier inversa* de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ por
$$\check{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(\xi)d\xi.$$

Outras notações usuais para a transformada de Fourier são $(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi)$ e $(\mathcal{F} f)(\xi)$. De forma similar, para a transformada de Fourier inversa, é comum a utilização das notações $(\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^n} f)(x)$ e $(\mathcal{F}^{-1} f)(x)$.

Claramente, $\check{f}(\bullet) = \hat{f}(-\bullet)$, ou seja, a Transformada de Fourier e sua inversa são iguais a menos de uma reflexão. Assim, as afirmações apresentadas para a Transformada de Fourier podem ser reescritas trivialmente para sua inversa.

**Observação 1.11.** A transformada de Fourier $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear limitado de modo que
$$||\hat{f}||_{L^\infty} \leqslant ||f||_{L^1}.$$

**Proposição 1.12.** Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, valem as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$,

2. $(\partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f(x))(\xi)$,

3. $\mathcal{F}(e^{2\pi i x \cdot y} f(x))(\xi) = \hat{f}(\xi - y)$,

4. $\mathcal{F}(f(x-y))(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot y} \hat{f}(\xi)$.

**Exemplo 1.13.** Considere a equação de Laplace $\mathcal{L}u = f$, onde $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Tomando a transformada de Fourier em ambos os membros da igualdade e, usando o item 1 da Proposição 1.12, temos $-4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} = \hat{f}$. Isolando $\hat{u}$ e aplicando agora a Transformada de Fourier inversa, podemos encontrar a solução $u = -\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{4\pi^2|\xi|^2}\hat{f}\right)$.

**Proposição 1.14** ([4])**.** Valem os seguintes resultados sobre densidade de funções nos espaços $C_c^\infty, \mathcal{S}$ e $L^p$, para todo $1 \leqslant p < \infty$ :

(a) Os espaços $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são densos em $L^p(\mathbb{R}^n)$;
(b) O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

A condição $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leqslant p < \infty$, garante que a transformada de Fourier está bem-definida no espaço de Schwartz. Os próximos resultados envolvendo a Transformada de Fourier e o espaço de Schwartz também serão bem úteis para ao longo do texto.

**Proposição 1.15.** A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ é um isomorfismo.

**Proposição 1.16** (Identidade de Plancherel)**.** Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\hat{f}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\check{f}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Na Teoria de Medida e Integração, duas questões importantíssimas para a matemática são retratadas: uma delas se refere às condições necessárias para trocar a ordem de um limite e de uma integral e a outra diz respeito ao critério para trocar a ordem de integração com respeito às variáveis presentes no problema.

Para responder ao primeiro questionamento, há o resultado a seguir que será utilizado recorrentemente no decorrer do texto.

**Teorema 1.17** (Teorema da Convergência Dominada)**.** Seja $(f_n)$ uma sequência de funções integráveis que convergem qtp a uma função mensurável $f$. Se existe uma função integrável $g$ tal que $|f_n| \leqslant g$ para todo $n$, então $f$ é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

A segunda questão levantada anteriormente será respondida pelo resultado que apresentaremos a seguir.

**Teorema 1.18** (Teorema de Fubini [1])**.** Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida $\sigma-$finitos e seja a medida $\pi$ em $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ o produto de $\mu$ e $\nu$. Se a função $F$ de $Z = X \times Y$ para $\mathbb{R}$ é integrável com respeito a $\pi$, então as funções estendidas definidas qtp por

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\nu, \qquad g(y) = \int_X F_y \, d\mu, \tag{1.3}$$

tem integrais finitas e

$$\int_X \left( \int_Y F d\nu \right) d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y \left( \int_X F d\mu \right) d\nu. \tag{1.4}$$

A seguir, enunciaremos um importante resultado muito utilizado para provar afirmações de existência no contexto em que estamos inseridos.

**Teorema 1.19** (Lema de Urysohn $C^\infty$ [4])**.** Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $U$ é um conjunto aberto contendo $K$, então existe $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f = 1$ em $K$, e $\operatorname{supp}(f) \subset U$.

## 1.2 Tópicos de Análise no $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, apresentaremos resultados provenientes da Análise do $\mathbb{R}^n$, que serão aplicados na parte principal de nosso estudo.

Sejam $U$ e $V$ abertos de $\mathbb{R}^n$, e seja $f$ um difeomorfismo de $U$ em $V$. A *matriz jacobiana* da aplicação

$$\begin{aligned} f \colon U &\longrightarrow V \\ (x_1, \cdots .x_n) &\longmapsto (f(x_1), \cdots, f(x_n)) \end{aligned}$$

é dada por

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}.$$

**Definição 1.20.** A *bola aberta* de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r$ é definida por

$$\mathbb{B}(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}.$$

**Teorema 1.21** (Teorema de Mudança de Variáveis)**.** Seja $g : U \to V$ um difeomorfismo de conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$. Considere também $f : V \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f$ é integrável sobre $V$ se e somente se a função $f \circ g |\det J_g|$ é integrável sobre $U$. Nesse caso,

$$\int_V f = \int_U (f \circ g) |\det J_g|.$$

Os próximos dois resultados são de extrema importância para obtermos êxito em diversas demonstrações.

**Teorema 1.22** (Fórmula de Taylor)**.** A fórmula de Taylor para uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é a seguinte:

$$f(a+v) = f(a) + df(a) \cdot v + \frac{1}{2}d^2 f(a) \cdot v^2 + \cdots + \frac{1}{p!}d^p f(a) \cdot v^p + r_p(v).$$

Conforme as hipóteses feitas e os objetivos desejados, temos três situações principais:

1. **Fórmula de Taylor Infinitesimal.** Se $f$ é $p$ vezes diferenciável no ponto $a$, então $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{r_p(v)}{|v|^p} = 0$.

2. **Resto de Lagrange.** Supondo $[a, a+v] \subset U$, $f$ de classe $C^p$, $p+1$ vezes diferenciável no segmento aberto $(a, a+v)$, então existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$r_p(v) = \frac{1}{(p+1)!}d^{p+1} f(a+\theta v) \cdot v^{p+1}.$$

3. **Resto Integral.** Se $f$ é de classe $C^{p+1}$ e $[a, a+v] \subset U$ então

$$r_p(v) = \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p d^{p+1} f(a+tv) \cdot v^{p+1} dt.$$

Acima, para $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, escrevemos

$$d^2 f(a) \cdot v^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\alpha_i \alpha_j,$$

$$d^3 f(a) \cdot v^3 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a)\alpha_i \alpha_j \alpha_k,$$

Para a demonstração e detalhes sobre a notação acima, veja a referência [10].

Nesta dissertação, exceto quando estivermos trabalhando com exemplos, estaremos considerando sempre funções genéricas em um dos espaços apresentados neste capítulo. Faz-se necessário então termos de antemão algum critério que nos permita julgar se determinada integral converge ou não para podermos concluir algumas demonstrações. O resultado a seguir desempenha esse papel.

**Proposição 1.23** (Critério de Integrabilidade)**.** Valem as seguintes equivalências:

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^\rho} < \infty$ se e somente se $\rho > n$.

2. $\displaystyle\int_{|x| \leqslant 1} \frac{dx}{|x|^\rho} < \infty$ se e somente se $\rho < n$.

O próximo resultado sobre integrabilidade também é útil em alguns contextos.

**Teorema 1.24** ([4])**.** Se $f$ é uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$, não-negativa, ou integrável, tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função $g$ em $(0, \infty)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = w_{n-1} \int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr,$$

onde $\omega_{n-1}$ é área de superfície da esfera $(n-1)-$dimensional de raio 1.

A integração por partes é uma importante ferramenta para demonstrações, principalmente quando se pode desconsiderar na fórmula os termos de fronteira. No entanto, algumas condições específicas são necessárias, como veremos a seguir.

**Proposição 1.25** (Integração por partes)**.** Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então para qualquer multi-índice $\alpha$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x)g(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial^\alpha g(x)dx.$$

Para finalizar esta seção, enunciaremos o próximo resultado para um corpo $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ qualquer.

**Proposição 1.26** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Seja $X$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial munido de um produto interno. Então

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leqslant \langle f, f\rangle \cdot \langle g, g\rangle,$$

para toda $f, g \in X$.

## 1.3 Um básico sobre Distribuições

O intuito aqui é dar ênfase a um tipo específico de distribuições: *as distribuições temperadas.* Previamente então, faz-se necessário entender a convergência em $C_c^\infty$ e o que vem a ser uma distribuição.

**Definição 1.27.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\varphi_k, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_j \to \varphi$ em $C_c^\infty(\Omega)$ quando existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\sup\limits_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $\alpha$ multi-índice.

**Definição 1.28** (Distribuições $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$)**.** Uma *distribuição* $T$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$, ou seja,

$$\begin{aligned} T \colon C_c^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle T, \varphi\rangle, \end{aligned}$$

que satisfaz a condição de que para todo $K \subset \Omega$ compacto e toda sequência $\varphi_j \to \varphi$ em $C_c^\infty(\Omega)$, tem-se

$$\langle T, \varphi_j \rangle \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi \rangle$$

Denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço de todas as distribuições de $\Omega$.

Munimos $\mathcal{D}'(\Omega)$ da *topologia fraca-estrela*, ou seja, $\{T_n\} \subset D'(\Omega)$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ na topologia fraca-estrela se e somente se $\langle T_n, \varphi \rangle \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

**Definição 1.29** (Distribuições Temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$)**.** Definimos o *espaço de distribuições temperadas* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ como o espaço de todos os funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lembre que $\varphi_j \to \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de acordo com (1.2). Munimos $\mathcal{S}'(\Omega)$ da *topologia fraca-estrela*, ou seja, $\{T_n\} \subset S'(\Omega)$ converge a $T \in \mathcal{S}'(\Omega)$ na topologia fraca-estrela se e somente se $\langle T_n, \varphi \rangle \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$.

Os próximos resultados acerca de distribuições são bastante utilizados em argumentos que desenvolveremos a partir do próximo capítulo.

**Proposição 1.30** (Princípio de unicidade para distribuições)**.** Sejam $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e suponha que $\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, $u = v$.

**Proposição 1.31.** Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Se $f_k \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, então $f_k \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

## 1.4 Espaços de Sobolev

**Definição 1.32** (Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$)**.** Para cada $s \in \mathbb{R}$, *o espaço de Sobolev* $H^s(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

O espaço de Sobolev é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$

e norma dada por

$$||f||_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Para qualquer multi-índice $\alpha, \partial^\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ se estende de um mapa linear limitado de $H^s$ para $H^{s-|\alpha|}$. De fato, como $|\xi^\alpha| \leqslant (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|/2}$ para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$ e qualquer

$\alpha \in \mathbb{N}^n$, temos, para qualquer $f \in \mathcal{S}$, que

$$\begin{aligned} ||\partial^\alpha f||^2_{H^{s-|\alpha|}} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|} |(2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leqslant (2\pi)^{2|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{2|\alpha|} ||f||^2_{H^s}. \end{aligned}$$

**Proposição 1.33** ([4]). $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

**Proposição 1.34.** Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Se $f_k \to f$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$, então $f_k \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

# 2 Operadores pseudo-diferenciais no $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo e no Capítulo 3, com base em [12], apresentaremos uma versão detalhada sobre os operadores pseudo-diferenciais no espaço euclidiano. A fim de enriquecer a abordagem, as referências [3], [6], [7], [9], [13] e [14] também serão consultadas.

## 2.1 Conceitos iniciais

Nesta seção, nosso intuito é apresentar as primeiras definições e resultados sobre operadores pseudo-diferenciais, detalhar alguns exemplos que os ilustrem bem e apresentar propriedades satisfeitas por eles.

**Definição 2.1** (Classes de símbolos $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$)**.** Sejam $0 \leqslant \rho, \delta \leqslant 1$. Dizemos que $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ se $a = a(x,\xi)$ é suave em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e se a estimativa

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant A_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \tag{2.1}$$

vale para todo $\alpha, \beta$ multi-índice e todo $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. As constantes $A_{\alpha\beta}$ podem depender de $a, \alpha, \beta$ mas não de $x, \xi$.

Definimos o *operador pseudo-diferencial com símbolo $a$* por

$$a(X,D)f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi. \tag{2.2}$$

O operador $a(X,D)$ definido por (2.2) possui ordem $m$ e tipo $(\rho,\delta)$. A classe de operadores da forma (2.2) com símbolos de $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ é denotada por $\Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ou por $\operatorname{Op} S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

A classe de símbolos mais usual e simples é $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, que pode ser denotada por $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ou apenas por $S^m$.

**Observação 2.2.** Na literatura, as notações mais clássicas para operador pseudo-diferencial são $a(X,D), T_a$ e $A$. Em geral, utilizamos a notação da referência [12], mas, por uma questão de simplificação, quando trabalharmos com a fórmula de composição para operadores pseudo-diferenciais, optaremos por usar $T_a$.

**Exemplo 2.3** ([7])**.** Se $a(x,\xi) = a(\xi) = (1+|\xi|^2)^{m/2}$, então $a \in S^m$.

Com efeito, para verificar esse fato, basta que para cada $m \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ exista uma constante $C > 0$ tal que

$$\partial_\xi^\alpha (1+|\xi|^2)^{m/2} \leqslant C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \tag{2.3}$$

Para provar a desigualdade acima, procedemos por indução. O caso $|\alpha| = 0$ pode ser demonstrado a partir da desigualdade $1 + |\xi|^2 \leqslant (1 + |\xi|)^2$. Suponha agora que (2.3) vale para todo $m \in \mathbb{R}$ e todo multi-índice com comprimento menor ou igual a um certo $k \in \mathbb{N}$. Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice tal que $\alpha = \beta + \gamma$, com $|\beta| = k$ e $|\gamma| = 1$. Portanto,

$$\partial_\xi^\alpha (1 + |\xi|^2)^{m/2} = \partial_\xi^\beta \partial_\xi^\gamma (1 + |\xi|^2)^{m/2} = \partial_\xi^\beta \partial_{\xi_j} (1 + |\xi|^2)^{m/2},$$

para algum $j \in \{1, \cdots, n\}$. Como $\partial_{\xi_j}(1 + |\xi|^2)^{m/2} = m\xi_j(1 + |\xi|^2)^{(m-2)/2}$, temos

$$\begin{aligned}
|\partial_\xi^\alpha (1 + |\xi|^2)^{m/2}| = |\partial_\xi^\beta \partial_{\xi_j} (1 + |\xi|^2)^{m/2}| &= |\partial_\xi^\beta m\xi_j (1 + |\xi|^2)^{(m-2)/2}| \\
&\leqslant \sum_{\delta \leqslant \beta} \binom{\beta}{\delta} m |\partial_\xi^\delta \xi_j| |\partial_\xi^{\beta-\delta} (1 + |\xi|^2)^{(m-2)/2}| \\
&\leqslant m \sum_{\delta \leqslant \beta} C_{\beta\delta} (1 + |\xi|)^{1-|\delta|} (1 + |\xi|)^{m-2-|\beta-\delta|} \\
&\leqslant m \sum_{\delta \leqslant \beta} C_{\beta\delta} (1 + |\xi|)^{m-1-|\beta|} \\
&\leqslant C(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|},
\end{aligned}$$

completando a prova.

**Exemplo 2.4** ([7])**.** Se $a(x, \xi)$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ com suporte compacto com respeito a variável $x$ e positivamente homogênea de grau $m$ para $|\xi| \geqslant 1$, ou seja,

$$a(x, t\xi) = t^m a(x, \xi), |\xi| \geqslant 1, t \geqslant 1,$$

então $a \in S^m_{1,0} = S^m$.

Pela Regra da Cadeia, segue que

$$\frac{\partial}{\partial r} a\left(x, r\frac{\xi}{|\xi|}\right) = \sum_{i=1}^n (\partial_{\xi_i} a)\left(x, r\frac{\xi}{|\xi|}\right) \frac{\xi_i}{|\xi|}.$$

Aplicando a regra da cadeia repetidas vezes e avaliando em $r = |\xi|$, obtemos

$$\frac{\partial^N}{\partial r^N} a(x, r\frac{\xi}{|\xi|})|_{r=|\xi|} = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_N=1}^n (\partial_{\xi_{i_1}} \cdots \partial_{\xi_{i_N}} a)(x, \xi) \frac{\xi_{i_1}}{|\xi|} \cdots \frac{\xi i_N}{|\xi|}. \tag{2.4}$$

A condição de homogeneidade de $a$ garante então que

$$\frac{\partial^N}{\partial r^N} a(x, r\frac{\xi}{|\xi|}) = \frac{\partial^N (r^m)}{\partial r^N} a(x, \frac{\xi}{|\xi|}) = (m-1) \cdots (m-N+1) r^{m-N} a(x, \frac{\xi}{|\xi|}) \tag{2.5}$$

Como $\frac{\xi}{|\xi|} \in S^{n-1}$ e $a \in C^\infty$ com suporte compacto com respeito à variável $x$, $a(x, \frac{\xi}{|\xi|})$ em (2.5) pode ser limitado por alguma constante e, assim, tomando $r = |\xi|, N = |\alpha|$ e utilizando (2.4), obtemos

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant A_{m,|\alpha|}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},$$

onde $A_{m,|\alpha|}$ é uma constante que depende de $m$, $|\alpha|$ e das derivadas de $a$. Portanto, $a \in S^m$.

**Proposição 2.5.** Valem as seguintes propriedades sobre classes de símbolos:

(a) $S^m$ é um espaço vetorial.

(b) Se $a \in S^{m_1}$ e $b \in S^{m_2}$, então $ab \in S^{m_1+m_2}$.

(c) Se $a \in S^m$, então para quaisquer multi-índices $\alpha$ e $\beta$, $\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a \in S^{m-|\alpha|}$.

(d) Se $m_1 \leqslant m_2$, então $S^{m_1} \subset S^{m_2}$.

(e) Se $a \in S^m, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $b$ for definido por $b(x,\xi) = a(x,\xi)\varphi(x)$, então $b \in S^m$.

*Demonstração.* (a) É claro que $0 \in S^m$. Se $a, b \in S^m$, então para quaisquer multi-índices $\alpha$ e $\beta$, existem constantes $A_{\alpha\beta}$ e $B_{\alpha\beta}$ tais que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant A_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha b(x,\xi)| \leqslant B_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (a+b)(x,\xi)| &\leqslant |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| + |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha b(x,\xi)| \\ &\leqslant (A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta})(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Então, $a + b \in S^m$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (\lambda a)(x,\xi)| = |\lambda||\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant |\lambda| A_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

Então, $\lambda a \in S^m$. Portanto, $S^m$ é um espaço vetorial.

(b) Com efeito, pela desigualdade triangular e utilizando a fórmula de Leibniz duas vezes, obtemos que para quaisquer multi-índices $\alpha$ e $\beta$, vale que

$$\begin{aligned}|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (ab)(x,\xi)| &= \left|\partial_x^\beta \left(\sum_{\delta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\delta} \partial_\xi^\delta a(x,\xi) \partial_\xi^{\alpha-\delta} b(x,\xi)\right)\right| \\ &= \left|\sum_{\delta\leqslant\alpha}\sum_{\gamma\leqslant\beta} \binom{\alpha}{\delta}\binom{\beta}{\gamma} \partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta a(x,\xi) \partial_x^{\beta-\gamma} \partial_\xi^{\alpha-\delta} b(x,\xi)\right| \\ &\leqslant \sum_{\delta\leqslant\alpha}\sum_{\gamma\leqslant\beta} \binom{\alpha}{\delta}\binom{\beta}{\gamma} \left|\partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta a(x,\xi)\right| \left|\partial_x^{\beta-\gamma} \partial_\xi^{\alpha-\delta} b(x,\xi)\right|.\end{aligned}$$

Por hipótese, existem constantes $A_{\gamma\delta}$ e $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ tais que

$$|\partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta a(x,\xi)| \leqslant A_{\gamma\delta}(1+|\xi|)^{m_1-|\delta|}$$

$$|\partial_x^{\beta-\gamma}\partial_\xi^{\alpha-\delta}b(x,\xi)| \leqslant B_{\alpha\beta\gamma\delta}(1+|\xi|)^{m_2-|\alpha|+|\delta|}$$

Portanto, segue finalmente que

$$\begin{aligned}|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha(ab)(x,\xi)| &\leqslant \sum_{\delta\leqslant\alpha}\sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\alpha}{\delta}\binom{\beta}{\gamma}A_{\gamma\delta}B_{\alpha\beta\gamma\delta}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-|\alpha|} \\ &\leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-|\alpha|},\end{aligned}$$

onde

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{\delta\leqslant\alpha}\sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\alpha}{\delta}\binom{\beta}{\gamma}A_{\gamma\delta}B_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Assim, conclui-se que $ab \in S^{m_1+m_2}$.

(c) Primeiramente, consideremos $\alpha$ e $\beta$ arbitrários, porém fixados. Como $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, vale a desigualdade

$$\begin{aligned}|\partial_x^\gamma\partial_\xi^\delta(\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a)(x,\xi)| &= |\partial_x^{\beta+\gamma}\partial_\xi^{\alpha+\delta}a(x,\xi)| \\ &\leqslant C_{\beta+\gamma,\alpha+\delta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|-|\delta|}.\end{aligned}$$

Como $\alpha$ e $\beta$ estão fixados, $C_{\beta+\gamma,\alpha+\gamma}$ depende apenas de $\gamma$ e de $\delta$, o que, por definição, nos permite concluir que $\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a \in S^{m-|\alpha|}$.

(d) Essa propriedade segue diretamente da definição de $S^m$ e do fato de que $m_1 \leqslant m_2$ implica

$$(1+|\xi|)^{m_1-|\alpha|} \leqslant (1+|\xi|)^{m_2-|\alpha|}.$$

(e) Com efeito, como $\varphi \in \mathcal{S}$, para cada multi-índice $\gamma$ existe uma constante $D_\gamma$ tal que

$$|\partial_x^\gamma\varphi(x)| \leqslant D_\gamma,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Então, pela fórmula de Leibniz e pela definição de símbolo de um operador pseudo-diferencial, segue que

$$\begin{aligned}|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha b(x,\xi)| &\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}|\partial_x^\beta\varphi(x)||\partial_x^{\beta-\gamma}\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \\ &\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}D_\gamma C_{\beta-\gamma,\alpha}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \\ &= \tilde{C}_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{C}_{\alpha,\beta} = \sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}D_\gamma C_{\beta-\gamma,\alpha}.$$

Portanto, $b \in S^m$. □

**Exemplo 2.6** ([14])**.** Seja

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

com $x, \xi \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}$ e os coeficientes $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e as derivadas $\partial^\beta a_\alpha$ são limitadas para quaisquer multi-índices. Então $P \in S^m$.

Para quaisquer multi-índices $|\alpha| \leqslant m$ e $\beta$, seja $C_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \partial^\beta a_\alpha(x)$. Pela Proposição 1.9, obtemos que para quaisquer multi-índices $\beta$ e $\gamma$, valem as desigualdades

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma P(x,\xi)| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma (a_\alpha(x)\xi^\alpha)| &= \sum_{|\alpha|\leqslant m} |\partial^\beta a_\alpha(x)||\partial^\gamma \xi^\alpha| \\
&\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \gamma! \binom{\alpha}{\gamma} C_{\alpha,\beta} |\xi^{\alpha-\gamma}| \\
&\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \gamma! \binom{\alpha}{\gamma} C_{\alpha,\beta} |\xi|^{|\alpha|-|\gamma|} \\
&\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \gamma! \binom{\alpha}{\gamma} C_{\alpha,\beta} |\xi|^{m-|\gamma|} \\
&\leqslant \tilde{C}_{\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|},
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{C}_{\beta,\gamma} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \gamma! \binom{\alpha}{\gamma} C_{\alpha,\beta}.$$

Portanto, $P \in S^m$.

Nosso objetivo agora é mostrar que o espaço vetorial $S^m$ munido de uma semi-norma que definiremos a seguir é um espaço de Fréchet. Para quaisquer $\alpha$ e $\beta$ e para todo $a \in S^m$, podemos definir

$$P_{\alpha,\beta}^{(m)}(a) := \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}} \right| < \infty. \tag{2.6}$$

É claro que está bem-definida em virtude de (2.1) e é uma semi-norma em $S^m$.

**Proposição 2.7.** O espaço vetorial $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ com a topologia natural induzida pela família de seminormas $\{P_{\alpha,\beta}^{(m)}; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ é um espaço de Fréchet.

*Demonstração.* Para mostrar que a família de semi-normas $\{P_{\alpha,\beta}^{(m)}; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ separa pontos de $S^m$, sejam $a(x,\xi)$ e $b(x,\xi)$ dois símbolos distintos. Isso significa que existe um ponto $a(x_0,\xi_0) \neq b(x_0,\xi_0)$. O mesmo vale para as derivadas de $a(x,\xi)$ e $b(x,\xi)$. Seja então $\epsilon = |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x_0,\xi_0) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha b(x_0,\xi_0)| > 0$. Considere as semi-normas $P_{\alpha,\beta}^{(m)}$ associadas aos símbolos $a$ e $b$ neste ponto $(x_0,\xi_0)$ dadas, respectivamente, por

$$P_{\alpha,\beta}^{(m)}(a) = \sup_{(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x_0,\xi_0)}{(1+|\xi_0|)^{m-|\alpha|}} \right|$$

e

$$P^{(m)}_{\alpha,\beta}(b) = \sup_{(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha b(x_0,\xi_0)}{(1+|\xi_0|)^{m-|\alpha|}} \right|.$$

Basta observamos que $P^{(m)}_{\alpha,\beta}(a-b)$ não pode ser zero:

$$\begin{aligned}
|P^{(m)}_{\alpha,\beta}(a-b)| &= \sup_{(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_1(x_0,\xi_0) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\beta b(x_0,\xi_0)}{(1+|\xi_0|)^{m-|\alpha|}} \right| \\
&= \sup_{(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|\epsilon|}{(1+|\xi_0|)^{m-|\alpha|}} > 0,
\end{aligned}$$

que prova que o espaço $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ munido da topologia definida em (2.6) é Hausdorff. Além disso, essa família de semi-normas é enumerável, fato que nos permite afirmar que $S^m$ é metrizável.

A etapa menos trivial da demonstração será então mostrar a completude com respeito a essa topologia. Com efeito, seja $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S^m$ uma sequência de Cauchy. Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, para todo $a \in S^m$ e $K = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,\xi)\in K} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| &= \sup_{(x,\xi)\in K} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}} (1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \right| \\
&\leqslant \sup_{\xi\in K_1} |(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}| \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}} \right| \\
&= C_{K_1,\alpha} P^{(m)}_{\alpha,\beta}(a),
\end{aligned}$$

onde $C_{K_1,\alpha} = \sup_{\xi\in K_1} |(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}| < \infty$ por conta da compacidade de $K_1$.

Essa desigualdade mostra que qualquer sequência de Cauchy em $S^m$ é também uma sequência de Cauchy com respeito a topologia natural $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, fazendo com que o espaço seja de Fréchet. Dessa forma, existe $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $a_k \to a$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Em particular, para quaisquer $\alpha$ e $\beta$ multi-índices, vale a convergência $\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi) \to \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$ para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Finalmente, para obtermos que $a \in S^m$, basta observarmos que como $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $S^m$ então existe uma constante $A_{\alpha\beta} > 0$ (que não depende de $k \in \mathbb{N}$) tal que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)| \leqslant A_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ e todo $k \in \mathbb{N}$.

Para concluir o argumento, basta tomarmos então o limite quando $k \to \infty$ e o resultado segue. □

Findada essa parte introdutória, apresentaremos dois resultados importantes dentro de nosso estudo: o Teorema 2.8, que garante que $a(X,D)f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sempre que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e a Proposição 2.9, bastante utilizada para generalizar algum argumento nas demonstrações que serão apresentadas.

**Teorema 2.8** (Operadores pseudo-diferenciais em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)**.** Sejam $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $a(X, D)f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

*Demonstração.* Inicialmente, iremos mostrar que $a(X, D)f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, isto é, que para qualquer $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos $a(X, D)f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sempre que $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Para esse fim, devemos verificar que $\partial^\alpha a(X, D)f$ existem, escrevendo a derivada como um limite para aplicarmos o Teorema da Convergência Dominada 1.17.

Pela Proposição 1.15, dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, a Regra de Leibniz garante que

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha[e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)] &= \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial_x^\gamma e^{2\pi i x\cdot\xi} \partial_x^{\alpha-\gamma} a(x,\xi) \\
&= e^{2\pi i x\cdot\xi} \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (2\pi i\xi)^\gamma \partial_x^{\alpha-\gamma} a(x,\xi).
\end{aligned}$$

Como $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, temos a cota superior

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha[e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)]| &\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (2\pi\xi)^{|\gamma|} A_{\alpha\gamma} (1+|\xi|)^m \\
&\leqslant B_\alpha (1+|\xi|)^{m+|\alpha|} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

para algum $B_\alpha > 0$.

Primeiramente, tome $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multi-índice tal que $|\alpha| = 1$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sem perda de generalidade, assuma que $\alpha_1 = 1$. Com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha a(X,D)f(x) &= \lim_{x_1\to(x_0)_1} \frac{a(X,D)f(x) - a(X,D)f(x_0)}{x_1 - (x_0)_1} \\
&= \lim_{x_1\to(x_0)_1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{f}(\xi) - e^{2\pi i x_0\cdot\xi} a(x_0,\xi)\hat{f}(\xi)}{x_1 - (x_0)_1} d\xi \\
&= \lim_{x_1\to(x_0)_1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}(\xi)}{x_1 - (x_0)_1} (e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi) - e^{2\pi i x_0\cdot\xi} a(x_0,\xi)) d\xi. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Analisando o valor absoluto do integrando em (2.8) e utilizando a desigualdade encontrada em (2.7), concluímos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\hat{f}(\xi)}{x_1 - (x_0)_1}\right| \left|e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi) - e^{2\pi i x_0\cdot\xi} a(x_0,\xi)\right| &\leqslant \frac{2B_\alpha}{|x_1 - (x_0)_1|} (1+|\xi|)^m |\hat{f}(\xi)| \\
&= C_\alpha (1+|\xi|)^m |\hat{f}(\xi)|, \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

onde $C_\alpha$ é uma constante com respeito a $\xi$.

Como na equação (2.8), $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $C_\alpha(1+|\xi|)^m$ é um polinômio na variável $\xi$, então o termo à direita de (2.9) está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, o que permite aplicarmos o

Teorema da Convergência Dominada 1.17 e obter

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{x_1 \to (x_0)_1} \frac{e^{2\pi i x_1 \cdot \xi} a(x_1, \xi) \hat{f}(\xi) - e^{2\pi i (x_0)_1 \cdot \xi} a((x_0)_1, \xi) \hat{f}(\xi)}{x_1 - (x_0)_1} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha [e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi)] \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Suponha agora por indução que, para um certo multi-índice $\alpha'$ com $|\alpha'| = |\alpha| - 1$, vale a igualdade

$$\partial_x^{\alpha'} a(X, D) f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{\alpha'} [e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi)] \hat{f}(\xi)\, d\xi. \tag{2.10}$$

Nosso intuito será mostrar que a equação (2.10) vale também para o multi-índice $\alpha$. Sem perda de generalidade, assuma que $\alpha_1 > 0$. Podemos escrever então

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha a(X, D) f(x) &= \lim_{x_1 \to (x_0)_1} \frac{\partial_x^{\alpha'} a(X, D) f(x) - \partial_x^{\alpha'} a(X, D) f(x_0)}{x_1 - (x_0)_1} \\
&\overset{(2.10)}{=} \lim_{x_1 \to (x_0)_1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial_x^{\alpha'} [e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi)] \hat{f}(\xi) - \partial_x^{\alpha'} [e^{2\pi i x_0 \cdot \xi} a(x_0, \xi)] \hat{f}(\xi)}{x_1 - (x_0)_1} d\xi \\
&= \lim_{x_1 \to (x_0)_1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}(\xi)}{x_1 - (x_0)_1} \left( \partial_x^{\alpha'} [e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi)] - \partial_x^{\alpha'} [e^{2\pi i x_0 \cdot \xi} a(x_0, \xi)] \right) d\xi.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Analisando o valor absoluto do integrando em (2.11) e utilizando a desigualdade encontrada em (2.7), concluímos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\hat{f}(\xi)}{x_1 - (x_0)_1} \right| \left| \partial_x^{\alpha'} [e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi)] - \partial_x^{\alpha'} [e^{2\pi i x_0 \cdot \xi} a(x_0, \xi)] \right| &\leqslant \frac{2B_\alpha}{|x - x_0|} (1 + |\xi|)^{m + |\alpha'|} |\hat{f}(\xi)| \\
&= C_\alpha (1 + |\xi|)^{m + |\alpha'|} |\hat{f}(\xi)|,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $C_\alpha$ é uma constante com respeito a $\xi$.

Como na equação (2.12), $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $C_\alpha (1 + |\xi|)^{m + |\alpha'|}$ é um polinômio na variável $\xi$, então o termo à direita de (2.11) está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, o que permite aplicarmos o Teorema da Convergência Dominada 1.17 e obter

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{x_1 \to (x_0)_1} \frac{\partial_x^{\alpha'} [e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi)] \hat{f}(\xi) - \partial_x^{\alpha'} [e^{2\pi i x_0 \cdot \xi} a(x_0, \xi)] \hat{f}(\xi)}{x_1 - (x_0)_1} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha [e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi)] \hat{f}(\xi) d\xi$$

Como o resultado acima é válido para qualquer multi-índice $\alpha$, concluímos que $a(X, D) f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

O próximo passo consiste em definir um operador que nos permita obter uma propriedade de decaímento para $a(X, D) f$ e todas as suas derivadas. Sendo assim, considere o operador

$$L_\xi = (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-1} (I - \Delta_\xi) \tag{2.13}$$

(em que $\Delta_\xi$ é o operador Laplaciano com respeito às variáveis $\xi$) com a propriedade

$$L_\xi(e^{2\pi i x\cdot\xi}) = e^{2\pi i x\cdot\xi}. \tag{2.14}$$

Note que definir um operador com a propriedade (2.14) é bastante útil em nosso contexto, pois podemos inseri-lo diretamente na expressão (2.2) e, com a utilização da integração por partes, continuar a prova.

Dessa maneira, integrando por partes $N$ vezes, temos então

$$\begin{aligned} a(X,D)f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} L_\xi(e^{2\pi i x\cdot\xi}) a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} L_\xi^N[a(x,\xi)\hat{f}(\xi)]d\xi \end{aligned}$$

Para concluir o argumento, note inicialmente que $(1+4\pi^2|x|^2)^{-N} \leqslant (1+|x|)^{-2N}$. Em seguida, perceba que, aplicando o módulo na expressão anterior, temos

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha(a(X,D)f(x))| &\leqslant \frac{1}{(1+4\pi^2|x|^2)^N}\sum_{\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}|(I-\Delta_\xi)^N[(2\pi i\xi)^\gamma\partial_x^{\alpha-\gamma}a(x,\xi)\hat{f}(\xi)]|d\xi \\ &\leqslant (1+|x|)^{-2N}\sum_{\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}|(I-\Delta_\xi)^N[(2\pi i\xi)^\gamma\partial_x^{\alpha-\gamma}a(x,\xi)\hat{f}(\xi)]|d\xi. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Basta verificarmos então que o somatório em (2.15) é limitado por uma constante. De fato, para qualquer multi-índice $\gamma \leqslant \alpha$, a regra de Leibniz garante a validade da inclusão

$$(1-\Delta_\xi)^N[(2\pi i\xi)^\gamma\partial_x^{\alpha-\gamma}a(x,\xi)\hat{f}(\xi)] \subset \text{span}\{\partial_\xi^\delta\partial_x^{\alpha-\gamma}a(x,\xi)\partial_\xi^\theta[(2\pi\xi)^\gamma\hat{f}(\xi)],\ \text{onde } |\delta+\theta| \leqslant 2N\}$$

Como $a \in S^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, então

$$|\partial_\xi^\delta\partial_x^{\alpha-\gamma}a(x,\xi)| \leqslant D_{\delta,\alpha-\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\delta|},$$

para todo $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ e

$$\partial_\xi^\theta[(2\pi i\xi)^\gamma\hat{f}(\xi)] = (-i)^{|\gamma|}\partial_\xi^\theta\widehat{(\partial_x^\gamma f)}(\xi),$$

concluímos de (2.15) que, para cada $\gamma \leqslant \alpha$, vale que

$$|(I-\Delta_\xi)^N[(2\pi i\xi)^\gamma\partial_x^{\alpha-\gamma}a(x,\xi)\hat{f}(\xi)] \leqslant \sum_{|\delta+\theta|\leqslant 2N} D_{\delta,\alpha-\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\delta|}|\partial_\xi^\theta\widehat{(\partial_x^\gamma f)}(\xi). \tag{2.16}$$

Inserindo o resultado obtido na expressão (2.16) em (2.15), obtemos que

$$\begin{aligned} &|\partial_x^\alpha(a(X,D)f(x))| \leqslant \\ &\quad (1+|x|)^{-2N}\sum_{\substack{\gamma\leqslant\alpha \\ |\delta+\theta|\leqslant 2N}}\binom{\alpha}{\gamma}D_{\delta,\alpha-\gamma}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|(1+|\xi|)^{m-|\delta|+n+1}\partial_\xi^\theta\widehat{(\partial_x^\gamma f)}(\xi)\right|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|\xi|)^{n+1}}d\xi. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Note que o lado direito não depende de $x$, é finito e depende apenas de $N$, como queríamos. Usando o fato de que a diferenciação e transformada de Fourier são operações contínuas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, podemos reduzir a expressão à direita (2.17) a uma constante $C_N$ e obter

$$|\partial_x^\alpha(a(X,D)f(x)| \leqslant C_N(1+|x|)^{-2N},$$

completando a prova. □

**Proposição 2.9** (Critério de convergência para operadores pseudo-diferenciais)**.** Suponha que tenhamos uma sequência de símbolos $a_k \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ que satisfazem a estimativa uniforme simbólica

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)| \leqslant A_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

para todo $\alpha, \beta$, todo $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e todo $k \in \mathbb{N}$, com constantes $A_{\alpha\beta}$ independentes de $x, \xi$ e $k$. Suponha que $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ é tal que $a_k(x,\xi)$ e todas as suas derivadas convergem a $a(x,\xi)$ e suas derivadas, respectivamente, pontualmente quando $k \to \infty$. Então $a_k(X,D)f \to a(X,D)f$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

*Demonstração.* Pela expressão (2.2), temos

$$a_k(X,D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a_k(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Com isso, segue ainda que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a_k(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |a_k(x,\xi)||\hat{f}(\xi)|d\xi \leqslant A_{00}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^m\hat{f}(\xi)d\xi$$

Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pela Proposição 1.15, $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim, $(1+|\xi|)^m\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada 1.17, temos

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} a_k(X,D)f(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}a_k(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\left(\lim_{k\to\infty}a_k(x,\xi)\right)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}e^{2\pi i x\cdot\xi}a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \\ &= a(X,D)f(x)\end{aligned}$$

Para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice, temos

$$\begin{aligned}|\partial_x^\beta a_k(X,D)f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}(2\pi i\xi)^\beta\partial_x^\beta a_k(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|(2\pi i\xi)^\beta||\partial_x^\beta a_k(x,\xi)||\hat{f}(\xi)|d\xi \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{|\beta|}|\xi|^{|\beta|}C_\beta(1+|\xi|)^m|\hat{f}(\xi)|d\xi \\ &\leqslant A_\beta\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{m+|\beta|}|\hat{f}(\xi)|d\xi\end{aligned}$$

Dessa forma, segue então que $(1+|\xi|)^{m+|\beta|}|\hat{f}(\xi)| \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada 1.17, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \partial_x^\beta a_k(X,D)f(x) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}(2\pi i\xi)^\beta \partial_x^\beta a_k(x,\xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}(2\pi i\xi)^\beta \partial_x^\beta \left(\lim_{k\to\infty} a_k(x,\xi)\right) \hat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}(2\pi i\xi)^\beta \partial_x^\beta a_k(x,\xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= \partial_x^\beta a_k(X,D)f(x),
\end{aligned}$$

que completa a prova. □

## 2.2 Representação alternativa de operadores pseudo-diferenciais

Nesta seção, trabalharemos com uma representação alternativa de operadores pseudo-diferenciais e o resultado a seguir auxiliará a atingir esse próposito.

**Lema 2.10.** Seja $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ temos que $\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)$ converge em cada ponto $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Então existe $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $a_k \to a$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Além disso, para todo $m > m'$ temos $a_k \to a$ em $S^{m'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

*Demonstração.* A primeira etapa desta prova consiste em mostrar que a sequência $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com as condições dadas é uma sequência de Cauchy, ou seja, dados $\epsilon > 0, j \in \mathbb{N}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, mostraremos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{(x,\xi)\in\overline{\mathbb{B}(0,j)}} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_l(x,\xi)| < \epsilon \tag{2.18}$$

para todo $k, l > n_0$.

Como $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S^m$ é limitado, obtemos uma estimativa em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,\xi)\in\overline{\mathbb{B}(0,j)}} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)| &= \sup_{(x,\xi)\in\overline{\mathbb{B}(0,j)}} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}} (1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \right| \\
&\leqslant \sup_{\xi\in\overline{\mathbb{B}(0,j)}} \left|(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}\right| \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}} \right| \\
&= A_{\alpha\beta}^{(j)},
\end{aligned}$$

onde $A_{\alpha\beta}^{(j)} > 0$ é uma constante que depende de $j \in \mathbb{N}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, mas não de $k \in \mathbb{N}$.

Dados pontos $(x, \xi), (y, \eta) \in \overline{\mathbb{B}(0, j)}$, a fórmula de Taylor garante que

$$\begin{aligned}\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x, \xi) &= \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(y, \eta) \\ &\quad + \sum_{|\gamma|=1} [(x, \xi) - (y, \eta)]^\gamma \int_0^1 \partial^\gamma (\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k)(\theta y + (1-\theta)x, \theta\eta + (1-\theta)\xi) d\theta.\end{aligned}$$

Tomando então $C_{\alpha\beta}^{(j)} = 2n \cdot \max\{A_{\alpha'\beta'}^{(j)}; |\alpha'| \leqslant |\alpha| + 1, |\beta'| \leqslant |\beta| + 1\}$, concluímos que para quaisquer pares $(x, \xi), (y, \eta) \in \overline{\mathbb{B}(0, j)}$, temos

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x, \xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(y, \eta)| \leqslant |(x, \xi) - (y, \eta)| C_{\alpha\beta}^{(j)}.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ temos que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x, \xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(y, \eta)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$$

para todo $|(x, \xi) - (y, \eta)| \leqslant \dfrac{\epsilon}{3C_{\alpha\beta}^{(j)}}$ e $k \in \mathbb{N}$.

Fixe agora $r_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{3C_{\alpha\beta}^{(j)}}$ e considere a cobertura aberta

$$\overline{\mathbb{B}(0, j)} \subset \bigcup_{(x,\xi) \in \overline{\mathbb{B}(0,j)}} \mathbb{B}((x, \xi), r_\epsilon).$$

Como $\overline{\mathbb{B}(0, j)}$ é compacto, existe uma subcobertura finita satisfazendo

$$\overline{\mathbb{B}(0, j)} \subset \bigcup_{i=1}^N \mathbb{B}((x_i, \xi_i), r_\epsilon).$$

Isso mostra que para todo $(x, \xi) \in \overline{\mathbb{B}(0, j)}$ existe $1 \leqslant i \leqslant N$ tal que $(x, \xi) \in \mathbb{B}((x_i, \xi_i), r_\epsilon)$. Portanto, para todo $(x, \xi) \in \overline{\mathbb{B}(0, j)}$ e para todo $k, l \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x, \xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_l(x, \xi)| &\leqslant |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x, \xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x_i, \xi_i)| \\ &\quad + |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x_i, \xi_i) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_l(x_i, \xi_i| \\ &\quad + |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_l(x_i, \xi_i) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_l(x, \xi)|,\end{aligned}$$

o que fornece, para todo $(x, \xi) \in \overline{\mathbb{B}(0, j)}$, a desigualdade

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x, \xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha| \leqslant \frac{\epsilon}{3} + \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x_i, \xi_i) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_l(x_i, \xi_i)| + \frac{\epsilon}{3}.$$

Como para todo $1 \leqslant i \leqslant N$, a sequência $\left\{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x_i, \xi_i)\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x_i, \xi_i) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_l(x_i, \xi_i)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$$

para todo $k, l > n_i$. Tomando $n_0 := \max\{n_i; 1 \leqslant i \leqslant N\}$ segue que para quaisquer $(x, \xi) \in \mathbb{B}(0, j)$ e todo $k, l > n_0$, vale

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x, \xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_l(x, \xi)| < \epsilon.$$

Como a estimativa não depende de $(x,\xi) \in \overline{\mathbb{B}(0,j)}$, concluímos (2.18) tomando o supremo sobre $(x,\xi) \in \overline{\mathbb{B}(0,j)}$.

Logo, como $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, existe $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $a_k \to a$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e portanto para quaisquer $\alpha$ e $\beta$ multi-índices temos $\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi) \to \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$ para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Para verificar que $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, note que como $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitado em $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ com respeito à topologia definida em (2.6) temos para todo $\alpha, \beta$ multi-índices que existe uma constante $A_{\alpha\beta} > 0$ que não depende de $k \in \mathbb{N}$ e tal que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)| \leqslant A_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

para todo $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando $k \to \infty$, concluímos que $a \in S^m$.

Para provar a convergência em $S^{m'}$ para $m' > m$, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ e perceba que para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} P_{\alpha,\beta}^{(m')}(a-a_k) &= \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m'-|\alpha|}} \right| \\ &\leqslant \sup_{(x,\xi)\in\overline{\mathbb{B}(0,j)}} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m'-|\alpha|}} \right| \\ &+ \sup_{(x,\xi)\in\overline{\mathbb{B}(0,j)}^c} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}} (1+|\xi|)^{m-m'} \right| \end{aligned}$$

Como $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S^m$ é limitada e $a \in S^m$, então existe uma constante $B_{\alpha\beta} > 0$ que não depende de $k \in \mathbb{N}$ nem de $j \in \mathbb{N}$ e tal que

$$\sup_{(x,\xi)\in\overline{\mathbb{B}(0,j)}^c} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}} (1+|\xi|)^{m-m'} \right| \leqslant B_{\alpha\beta}(1+j)^{m-m'}.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que a estimativa acima seja menor que $\epsilon/2$.

Para tal $j_0 \in \mathbb{N}$, temos

$$\sup_{(x,\xi)\in\overline{\mathbb{B}(0,j_0)}} \left| \frac{\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{m'-|\alpha|}} \right| \leqslant$$

$$\left( \sup_{(x,\xi)\in\overline{\mathbb{B}(0,j_0)}} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi)| \right) \cdot \left( \sup_{(x,\xi)\in\overline{\mathbb{B}(0,j_0)}} (1+|\xi|)^{|\alpha|-m'} \right)$$

Então, como $a_k \to a$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, concluímos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que a expressão acima é menor ou igual a $\epsilon/2$ para todo $k > k_0$ e portanto

$$P_{\alpha,\beta}^{(m')}(a-a_k) < \epsilon$$

para todo $k > k_0$. $\square$

Utilizando a definição de transformada de Fourier na expressão (2.2), podemos reescrever o operador $a(X, D)$ como

$$a(X,D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)f(y)dy\,d\xi. \tag{2.19}$$

No entanto, um problema com essa fórmula é que a integral com respeito à $\xi$ não converge absolutamente mesmo para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para contornar essa dificuldade, utilizaremos a ideia de aproximar $a(x, \xi)$ por símbolos de suporte compacto. Para esse fim, vamos fixar uma $\Gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ de modo que $\Gamma = 1$ perto da origem. Vamos definir agora

$$a_\epsilon(x,\xi) = a(x,\xi)\Gamma_\epsilon(x,\xi), \tag{2.20}$$

com $0 < \epsilon \leqslant 1$ e de modo que $\Gamma_\epsilon(x,\xi) = \Gamma(\epsilon x, \epsilon\xi)$. Então, podemos verificar que $a_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e valem as seguintes afirmações:

**Afirmação 1.** Se $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, então $a_\epsilon \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ uniformemente em $0 < \epsilon \leqslant 1$ (isso significa que a constante $A_{\alpha\beta}$ na desigualdade simbólica da Definição 2.1 pode ser escolhida independentemente de $0 < \epsilon \leqslant 1$);

Para justificar essa afirmação, mostraremos que $\Gamma(\epsilon x, \epsilon\xi) \in S^0$ uniformemente em $0 < \epsilon \leqslant 1$. Para isso, fixemos então $0 < \epsilon \leqslant 1$. Pela Regra da Cadeia, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, temos

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\Gamma_\epsilon(x,\xi)\right| &= \left|\epsilon^{|\alpha|}\epsilon^{|\beta|}(\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\Gamma)(\epsilon x,\epsilon\xi)\right| \\ &\leqslant \epsilon^{|\alpha|+|\beta|}C_{\alpha\beta} \\ &\leqslant C_{\alpha,\beta},\end{aligned}$$

onde $C_{\alpha,\beta} := \sup\limits_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |(\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\Gamma)(x,\xi)|$, que existe pois $\gamma$ possui suporte compacto.

É claro então que $\sup\limits_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\Gamma(\epsilon x,\epsilon\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}$. Como o lado direito, nesse caso, não depende de $\epsilon$ concluímos que $\Gamma \in S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ uniformemente em $0 < \epsilon \leqslant 1$.

Pelo item (b) da Proposição 2.5, segue que

$$a(x,\xi)\Gamma(\epsilon x,\epsilon\xi) = a_\epsilon(x,\xi) \in S^m.$$

**Afirmação 2.** $a_\epsilon \to a$ pontualmente quando $\epsilon \to 0$, uniformemente em $0 < \epsilon \leqslant 1$. O mesmo é verdade para as derivadas de $a_\epsilon$ e $a$.

Para embasar a afirmação feita, podemos usar a continuidade da multiplicação pontual de símbolos para garantir que $\{a_\epsilon\}_{0<\epsilon\leqslant 1} \subset S^m$ é limitada. Como para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ vale a convergência $\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a_k(x,\xi) \to \partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$. A limitação de $\{a_\epsilon\}_{0<\epsilon\leqslant 1} \subset S^m$ e a Proposição 2.10 nos permite concluir que $a_\epsilon \to a$ em $S^{m'}$.

Com a construção feita e munido das Afirmações 1 e 2 devidamente fundamentadas, temos os requisitos para aplicarmos o Critério de Convergência para operadores pseudo-diferenciais dado pela Proposição 2.9, segue que $a_\epsilon(X, D)f \to a(X, D)f$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon \to 0$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Aqui $a(X, D)f$ é definido como em (2.2). Neste momento, a fórmula 2.19 faz sentido para $a_\epsilon \in C_c^\infty$, logo podemos definir a integral dupla em (2.2) como o limite em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de $a_\epsilon(X, D)f$, ou seja, tomamos

$$a(X, D)f(x) := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} a_\epsilon(x, \xi) f(y)\, dy\, d\xi, \tag{2.21}$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

## 2.3 Kernel de um operador pseudo-diferencial

Lembrando a definição de $a_\epsilon$ apresentada em (2.20), podemos expressar um operador pseudo-diferencial de diferentes maneiras:

$$\begin{aligned} a(X, D)f(x) &\overset{(2.2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \overset{(2.21)}{=} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} a_\epsilon(x, \xi) f(y) dy d\xi \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i z\cdot\xi} a_\epsilon(x, \xi) f(x - z) dz d\xi \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} k_\epsilon(x, z) f(x - z) dz \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} K_\epsilon(x, y) f(y) dy, \end{aligned}$$

com kernels

$$K_\epsilon(x, y) = k_\epsilon(x, x - y), \quad k_\epsilon(x, z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i z\cdot\xi} a_\epsilon(x, \xi) d\xi. \tag{2.22}$$

Se $x \neq y$ e, como em (2.13), definindo $L_\xi = (-4\pi^2 |x - y|^2)^{-1} \Delta_\xi$, temos

$$L_\xi(e^{2\pi i \xi\cdot(x-y)}) = e^{2\pi i \xi\cdot(x-y)}.$$

Inserindo esse operador $N$ vezes na expressão de $K_\xi$ e integrando por partes $2N$ vezes, obtemos

$$|K_\epsilon(x, y)| \leqslant \frac{1}{(-4\pi^2 |x - y|^2)^N} \int_{\mathbb{R}^n} |(\Delta_\xi)^N (a_\epsilon(x, \xi)]| d\xi.$$

Como $\{a_\xi\}_{0<\epsilon\leqslant 1} \subset S^m$ é uma sequência limitada, existe então uma constante, que denotaremos por $C_N$ tal que

$$|(\Delta_\xi)^N [a_\epsilon(x, \xi)]| \leqslant C_N (1 + |\xi|)^{m-2N}$$

para todo $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Em particular, se tomarmos $2N > m + n$, podemos encontrar uma constante $B_N$ satisfazendo a condição

$$|K_\epsilon(x,y)| \leqslant \frac{1}{(4\pi^2|x-y|^2)^N}\int_{\mathbb{R}^n} |(\Delta_\xi)^N a_\epsilon(x,\xi)]|d\xi \leqslant \frac{B_N}{|x-y|^{2N}}.$$

Mais especificamente, se tivermos também a condição $x \notin \operatorname{supp} f$, obtemos

$$|a(X,D)f(x)| \leqslant B_N \int_{\operatorname{supp} f} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{2N}} dy \tag{2.23}$$

**Observação 2.11.** Assim como na prova do Teorema 2.8, podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada 1.17 e obter $k(x,z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i z\cdot\xi} a(x,\xi)d\xi$. Por consequência, $K(x,y) = k(x, x-y)$.

**Teorema 2.12** (Kernel de um operador pseudo-diferencial)**.** Seja $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Então o kernel $K(x,y)$ de um operador pseudo-diferencial $a(X,D)$ satisfaz

$$|\partial^\beta_{x,y} K(x,y)| \leqslant C_{N\beta}|x-y|^{-N}$$

para $N > m + n + |\beta|$ e $x \neq y$. Portanto, para $x \neq y$, o kernel $K_\epsilon(x,y)$ é uma função suave, decrescendo rapidamente quando $|x-y| \to \infty$.

*Demonstração.* Inicialmente, perceba que $k(x,\cdot)$, definido por (2.12), é a transformada de Fourier inversa de $a(x,\cdot)$. Segue daí então que $(-2\pi i z)^\alpha \partial^\beta_z k(x,z)$ é a transformada de Fourier inversa com relação à $\xi$ da derivada $\partial^\alpha_\xi[(2\pi i\xi)^\beta a(x,\xi)]$, ou seja,

$$(-2\pi i z)^\alpha \partial^\beta_z k(x,z) = \mathcal{F}^{-1}_\xi(\partial^\alpha_\xi[(2\pi i\xi)^\beta a(x,\xi)])(z).$$

Pela Proposição 2.5, como $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $(2\pi i\xi)^\beta \in S^{|\beta|}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, segue então que $(2\pi i\xi)^\beta a(x,\xi) \in S^{m+|\beta|}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, o que garante a validade da desigualdade

$$|\partial^\alpha_\xi[(2\pi i\xi)^\beta a(x,\xi)]| \leqslant C_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{m+|\beta|-|\alpha|},$$

onde $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$.

Portanto, $\partial^\alpha_\xi[(2\pi i\xi)^\beta a(x,\xi)]$ está em $L^1(\mathbb{R}^n_\xi)$ com respeito a $\xi$, se $|\alpha| > m + n + |\beta|$. Por consequência, vide Observação 1.11, sua transformada de Fourier inversa é limitada, isto é,

$$(-2\pi i z)^\alpha \partial^\beta_z k(x,z) \in L^\infty(\mathbb{R}^n_z)$$

para $|\alpha| > m + n + |\beta|$. □

**Definição 2.13** (Operadores de suavização)**.** Definimos *símbolos de ordem* $-\infty$ colocando $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, de modo que $a \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ se $a \in C^\infty$ e se

$$|\partial^\beta_x \partial^\alpha_\xi a(x,\xi)| \leqslant A_{\alpha\beta N}(1+|\xi|)^{-N}$$

vale para todo $N$, e todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. As constantes $A_{\alpha\beta N}$ podem depender de $a, \alpha, \beta, N$, mas não de $x, \xi$. Operadores pseudo-diferenciais com símbolos em $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ são chamados de operadores pseudo-diferenciais de suavização.

Analogamente, definimos os símbolos de ordem $\infty$ colocando $S^{\infty}_{\rho,\delta} = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m_{\rho,\delta}$, satisfazendo as mesmas condições da definição acima.

**Proposição 2.14.** Valem as seguintes propriedades sobre classes de símbolos de ordem $-\infty$ :

(a) Se $a \in S^m$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $b$ for definido por $b(x,\xi) = a(x,\xi)\varphi(\xi)$, então $b \in \bigcap_{k\in\mathbb{R}} S^k$.

(b) Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $b$ for definido por $b(x,\xi) = \varphi(\xi)$, então $b \in \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m$.

(c) Se $a \in \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m$, então para qualquer $x$ fixado, a função $\varphi_x(\xi) = a(x,\xi)$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(d) Se $a$ tem suporte compacto com relação à variável $\xi$, então $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{R}} S^k$.

*Demonstração.* (a) Seja $k \in \mathbb{R}$. Para quaisquer multi-índices $\alpha$ e $\beta$, a fórmula de Leibniz garante que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha b(x,\xi)| \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a(x,\xi)||\partial_\xi^{\alpha-\gamma}\varphi(\xi)|.$$

Como $a \in S^m$, existe uma constante $A_{\beta,\gamma}$ tal que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a(x,\xi)| \leqslant A_{\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}.$$

Por outro lado, sendo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante $B_{\alpha,\gamma}$ tal que

$$(1+|\xi|)^{m+|\alpha|-|\gamma|-k}|\partial_\xi^{\alpha-\gamma}\varphi(\xi)| \leqslant B_{\alpha,\gamma}.$$

Por fim, podemos concluir que

$$\begin{aligned}|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha b(x,\xi)| &\leqslant \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} A_{\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}(1+|\xi|)^{k+|\gamma|-|\alpha|-m}B_{\alpha,\gamma} \\ &= C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{k-|\alpha|}\end{aligned}$$

em que

$$C_{\alpha,\beta} = \sum_{\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} A_{\beta,\gamma}B_{\alpha,\gamma}.$$

Então, fica provado que $b \in S^k$. Como, inicialmente, $k$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $b \in \bigcap_{k\in\mathbb{R}} S^k$.

(b) Essa afirmação é um caso particular do item (a) para $a = 1$.

(c) Como $a \in \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m$, existe para todo $m \in \mathbb{R}$ e todo multi-índice $\alpha$ uma constante $C_{m,\alpha}$ tal que

$$|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant C_{m,\alpha}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \leqslant C_{m,\alpha}(1+|\xi|)^m.$$

Por outro lado, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha$ multi-índice, tomando $m = -k$, obtemos

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^k|\partial_\xi^\alpha \varphi_x(\xi)| &= (1+|\xi|)^k|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \\ &\leqslant (1+|\xi|)^k C_{-k,\alpha}(1+|\xi|)^{-k} \\ &= C_{-k,\alpha}.\end{aligned}$$

Pela definição do espaço de Schwartz, podemos concluir então que $\varphi_x \in \mathcal{S}$.

(d) Inicialmente, fixe $k \in \mathbb{R}$. É claro que o suporte de toda derivada de $a$ está contido no suporte de $a$. Sendo assim, a compacidade do suporte de $a$ com respeito à variável $\xi$ nos garante que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$(1+|\xi|)^{m-k} \leqslant M,$$

para todo $(x,\xi) \in \operatorname{supp}(a)$. Além disso, como $a \in S^m$, então para quaisquer multi-índices $\alpha$ e $\beta$, vale

$$\begin{aligned}|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} &= C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-k}(1+|\xi|)^{k-|\alpha|} \\ &\leqslant C_{\alpha,\beta}M(1+|\xi|)^{k-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Então, $a \in S^k$. Como $k$ foi escolhido arbitrariamente, $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{R}} S^k$, o que completa a prova. □

## 2.4 Limitação em $L^2(\mathbb{R}^n)$

O objetivo desta seção é provar que os operadores pseudo-diferenciais com símbolos em $S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ são limitados em $L^2(\mathbb{R}^n)$. A próxima proposição será fundamental para o êxito de nossos própositos e, por isso, além de enunciá-la, também apresentaremos uma prova detalhada da mesma.

**Proposição 2.15.** Seja $A\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo tal que $A(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ e tal que existe $C$ para o qual a estimativa

$$||Af||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{2.24}$$

vale para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $A$ se estende a um operador linear limitado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ para $L^2(\mathbb{R}^n)$ e a estimativa (2.24) vale para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ com a mesma constante $C$.

*Demonstração.* Pela Proposição 1.14, dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos construir uma sequência de funções $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \to f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, utilizando a estimativa (2.24) para $f_k - f_m$, temos

$$||A(f_k - f_m)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||f_k - f_m||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

logo $Af_k$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pela completude de $L^2(\mathbb{R}^n)$, existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $Af_k \to g$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Como $f_k \to f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pela Proposição 1.31, segue que $f_k \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. A continuidade do operador $A$ garante então que $Af_k \to Af$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pelo princípio de unicidade na Proposição 1.30, obtemos então que $Af = g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Passando ao limite em (2.24) aplicado a $f_k$, temos

$$\lim_{k\to\infty} ||Af_k||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \lim_{k\to\infty} ||f_k||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Por consequência, obtemos então a desigualdade

$$||Af||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

com a mesma constante $C$, como desejávamos. □

Munido do resultado acima e dos demais desenvolvidos ao longo deste texto, podemos trabalhar com o resultado central da seção.

**Teorema 2.16** (Limitação $L^2$ de operadores pseudo-diferenciais)**.** Seja $a \in S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Então $a(X, D)$ se estende a um operador linear limitado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ para $L^2(\mathbb{R}^n)$.

*Demonstração.* Como $\mathcal{S} \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow \mathcal{S}'$ são inclusões densas e contínuas, basta utilizarmos a proposição anterior, com $A = a(X, D)$ apenas para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com a mesma constante $C$ independente da escolha de $f$.

**Passo 1. (Para símbolos com suporte compacto).** Vamos assumir que $a(x, \xi)$ tem suporte compacto com respeito a $x$ e que seu suporte é independente de $\xi$, ou seja, existe um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos $\operatorname{supp}_x a(\cdot, \xi) \subset K$. (Vale também, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $\operatorname{supp}_x \partial_x^\alpha a(\cdot, \xi) \subset \operatorname{supp}_x a(\cdot, \xi) \subset K$).

Isso irá nos permitir usar a transformada de Fourier com respeito a $x$, em particular as fórmulas

$$a(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\lambda} \hat{a}(\lambda, \xi) d\lambda, \quad \hat{a}(\lambda, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\lambda} a(x, \xi) dx,$$

com integrais absolutamente convergentes. Iremos usar o fato de que $a(\cdot, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de modo que $a(\cdot, \xi)$ esteja no espaço de Schwartz na primeira variável. Consequentemente, temos $\hat{a}(\cdot, \xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uniformemente em $\xi$. Para ver a uniformidade, perceba que

$$(2\pi i\lambda)^\alpha \hat{a}(\lambda, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\lambda} \partial_x^\alpha a(x, \xi) d\xi,$$

e então

$$\begin{aligned}|(2\pi i\lambda)^\alpha \hat{a}(\lambda,\xi)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha a(x,\xi)|dx\\ &\leqslant \int_K |\partial_x^\alpha a(x,\xi)|dx\\ &\leqslant A_{\alpha 0}\int_K dx = C_\alpha,\end{aligned}$$

logo $|(2\pi i\lambda)^\alpha \hat{a}(\lambda,\xi)| \leqslant C_\alpha$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Segue que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{a}(x,\xi)| \leqslant C_N(1+|\lambda|)^{-N} \tag{2.25}$$

para todo $N$. Agora podemos escrever

$$\begin{aligned}a(X,D)f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}e^{2\pi i x\cdot\lambda}\hat{a}(\lambda,\xi)\hat{f}(\xi)d\lambda d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (Sf)(\lambda,x)d\lambda,\end{aligned}$$

em que

$$(Sf)(\lambda,x) = e^{2\pi i x.\cdot\lambda}(\hat{a}(\lambda,D)f)(x).$$

e

$$(\hat{a}(\lambda,D)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{a}(\lambda,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\hat{a}(\lambda,\xi)\hat{f}(\xi)). \tag{2.26}$$

Em outras palavras, $\hat{a}(\lambda,D)f$ é um multiplicador de Fourier com símbolo $\hat{a}(\lambda,\xi)$ independente de $x$, logo pela Identidade de Plancherel (Proposição 1.16) obtemos

$$\begin{aligned}||\hat{a}(\lambda,D)f||_{L^2} = ||\mathcal{F}(\hat{a}(\lambda,D)f||_{L^2} &\overset{(2.26)}{=} ||\hat{a}(\lambda,\cdot)\hat{f}||_{L^2}\\ \leqslant \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\hat{a}(\lambda,\xi)|||\hat{f}||_{L^2} &\overset{(2.25)}{\leqslant} C_N(1+|\lambda|)^{-N}||f||_{L^2}\end{aligned}$$

para todo $N \geqslant 0$. Então obtemos

$$\begin{aligned}||a(X,D)f||_{L^2} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} ||Sf(\lambda,\cdot)||_{L^2}d\lambda\\ &\leqslant C_N\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\lambda|)^{-N}||f||_{L^2}d\lambda \leqslant C||f||_{L^2},\end{aligned}$$

se tomarmos $N > n$.

**Passo 2 (Caso Geral).** Vamos provar agora o caso em que os símbolos não possuem necessariamente suporte compacto com relação a $x$. Para isso, iremos utilizar a desigualdade

$$\int_{|x-x_0|\leqslant 1} |a(X,D)f(x)|^2dx \leqslant C_N\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^2}{(1+|x-x_0|)^N}dx, \tag{2.27}$$

que vale para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e todo $N \geqslant 0$, com constante $C_N$ independente de $x_0$ e depende apenas das constantes nas desigualdades simbólicas.

Sendo assim, a fim de verificar que a desigualdade acima prova o resultado almejado, inicialmente consideremos $\mathcal{X}_{|x-x_0|\leqslant 1}$ a função característica da bola de raio 1 centrada em $x_0$. Fixemos $N > n$ e então integramos (2.27) com respeito a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ para obtermos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{X}_{|x-x_0|\leqslant 1}|a(X,D)f(x)|^2dx\right)dx_0 \leqslant C_N\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^2}{(1+|x-x_0|^N}dx\right)dx_0.$$

Aplicando o teorema de Tonelli–Fubini para trocar a ordem de integração, obtemos então que

$$\mathrm{vol}(B(0,1))\int_{\mathbb{R}^n}|a(X,D)f(x)|^2dx \leqslant C_N\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x-x_0|)^N}\right)dx.$$

Basta observar agora que como $N > n$, podemos definir

$$C'_N := \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x-x_0|)^N}dx_0$$

e daí, definindo a constante $C''_N := \dfrac{C_N C'_N}{\mathrm{vol}(\mathbb{B}(0,1))}$, segue então que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|a(X,D)f(x)|^2dx \leqslant C''_N\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx,$$

como queríamos demonstrar.

**Passo 3 (Prova da fórmula 2.27).** Nesta etapa, consideraremos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto arbitrário, porém fixado. Tome $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leqslant \phi \leqslant 1, \operatorname{supp}\phi \subset \mathbb{B}(x_0,3)$ e $\phi \equiv 1$ em $\mathbb{B}(x_0,2)$. Então para $f \in \mathcal{S}$, podemos escrever

$$f = \phi f + (1-\phi)f := f_1 + f_2.$$

Como $a(X,D)$ é um operador linear, temos $a(X,D)f(x) = a(X,D)f_1(x) + a(X,D)f_2(x)$ e, portanto, vale a desigualdade

$$|a(X,D)f(x)|^2 \leqslant 2(|a(X,D)f_1(x)|^2 + |a(X,D)f_2(x)|^2.$$

Considere $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leqslant \eta \leqslant 1, \operatorname{supp}\eta \subset \mathbb{B}(x_0,2)$ e $\eta \equiv 1$ em $\mathbb{B}(x_0,1)$. Então $\eta(x)a(X,D)f_1 = (\eta a)(X,D)f_1$, que é um operador pseudo-diferencial de ordem $m$ cujo símbolo tem suporte compacto na variável $x$, de modo que o resultado provado no Passo 1 pode ser aplicado.

Tendo o conhecimento prévio de que $0 \leqslant |\phi(x)|^2 \leqslant 1$ e como $\dfrac{4}{1+|x-x_0|} \geqslant 1$ para $x \in \operatorname{supp}\phi \subset \mathbb{B}(x_0,3)$, vale então a desigualdade

$$|\phi(x)|^2 \leqslant \left(\frac{4}{1+|x-x_0|}\right)^N \tag{2.28}$$

para todo $N \geqslant 0$.

Munido então das condições discutidas acima e utilizando o Passo 1, podemos determinar uma estimativa para $f_1$ dada por

$$\begin{aligned}
\int_{|x-x_0|\leqslant 1} |a(X,D)f_1(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\eta(x)|^2 |a(X,D)f_1(x)|^2 dx \\
&\leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^2 dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x) f(x)|^2 dx \\
&\overset{(2.28)}{\leqslant} C \int_{\mathbb{B}(x_0,3)} \left( \frac{4}{1+|x-x_0|} \right)^N |f(x)|^2 dx \\
&\leqslant 4^N C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{(1+|x-x_0|)^N} dx,
\end{aligned}$$

que satisfaz (2.27).

Para a estimativa $f_2$, em primeira instância, afirmamos que supp $f_2 \subset \mathbb{B}(x_0,2)^c$. De fato supp $f_2 = \text{supp}(1-\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; 1-\phi(x) \neq 0\}} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) \neq 1\}} \subset \mathbb{B}(x_0,2)^c$. Sendo assim, para todo $x \in \mathbb{B}(x_0,1)$, segue que a fórmula (2.23) vale para $2N > n$.

Evidentemente, $|f_2(y)| \leqslant |f(y)|$. Além disso, para todo $y \in \mathbb{B}(x_0,2)^c$ e $x \in \mathbb{B}(x_0,1)$ temos

$$|y-x_0| \leqslant |y-x| + |x-x_0| \leqslant 2|y-x|$$

e, portanto, já temos as condições necessárias para estimar $a(X,D)f_2$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
|a(X,D)f_2(x)| &\leqslant C_1 \int_{\mathbb{B}(x_0,2)^c} \frac{|f_2(y)|}{|x-y|^{2N}} dy \\
&\leqslant 4^N C_1 \int_{\mathbb{B}(x_0,2)^c} \frac{|f_2(y)|}{|y-x_0|^{2N}} dy \\
&\leqslant C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{(1+|y-x_0|)^{N/2}} \frac{1}{(1+|y-x_0|)^{3N/2}} dy \\
&\leqslant C_2 \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{(1+|y-x_0|)^N} dy \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|y-x_0|)^{3N}} dy \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

em que usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter a última desigualdade e podemos então definir $C_3 = C_2 \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y-x_0|)^{3N}} dy \right)^{1/2} < \infty$ para $3N > n$.

Elevando ao quadrado e integrando a desigualdade acima em $\mathbb{B}(x_0,1)$ obtemos a desigualdade

$$\int_{\mathbb{B}(x_0,1)} |a(X,D)f_2(x)|^2 dx \leqslant C \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{(1+|y-x_0|)^N} dy \right),$$

que é a estimativa exigida para $f_2$.

Por fim, observe que ambas as constantes encontradas nas estimativas para $a(X,D)f_1$ e $a(X,D)f_2$ não dependem do ponto escolhido $x_0 \in \mathbb{R}^n$, concluímos a prova. □

É possível obtermos uma extensão análoga da Proposição 2.15 para Espaços de Sobolev.

**Proposição 2.17.** Seja $A\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo tal que $A(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ e tal que existe $C$ para o qual a estimativa

$$||Af||_{H^{s-m}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||f||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \tag{2.29}$$

vale para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $A$ se estende a um operador linear limitado de $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ para $H^s(\mathbb{R}^n)$ e a estimativa (2.29) vale para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com a mesma constante $C$.

*Demonstração.* Pela Proposição 1.33, dada $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, podemos construir uma sequência de funções $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \to f$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Assim, usando a estimativa (2.29) para $f_k - f_l$, temos

$$||A(f_k - f_l)||_{H^{s-m}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||f_k - f_l||_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

logo $Af_k$ é uma sequência de Cauchy em $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$. Pela completude de $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$, existe $g \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ tal que $Af_k \to g$ em $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$.

Como $f_k \to f$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$, pela Proposição 1.34 segue que $f_k \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. A continuidade do operador $A$ garante então que $Af_k \to Af$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pelo príncipio da unicidade na Proposição 1.30, obtemos então que $Af_k = g \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$. Passando ao limite em (2.29) aplicado a $f_k$, temos

$$\lim_{k\to\infty} ||Af_k||_{H^{s-m}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \lim_{k\to\infty} ||f_k||_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Consequentemente, obtemos a desigualdade

$$||Af||_{H^{s-m}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||f||_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

com a mesma constante $C$, como desejávamos. □

Em decorrência da Proposição 2.17, podemos formular um resultado sobre limitação em Espaços de Sobolev, tópico que será trabalhado no resultado a seguir.

**Teorema 2.18** (Limitação em Espaços de Sobolev)**.** Suponha que $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Então para qualquer $s \in \mathbb{R}$ dado o operador $a(X,D)$, inicialmente definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se estende de um operador linear limitado de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$.

*Demonstração.* Em decorrência da Proposição 2.17, é suficiente mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$||a(X,D)f||_{H^{s-m}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||f||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \tag{2.30}$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, sabemos de (2.3) que $(1+|\xi|^2)^{t/2} \in S^t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo podemos definir um operador pseudo-diferencial $\Lambda_t : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ dado por

$$\Lambda_t f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}(1+|\xi|^2)^{t/2}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Como $(1+|\xi|^2)^{t/2}\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}$, temos $(\widehat{\Lambda_t f})(\xi) := (1+|\xi|^2)^{t/2}\hat{f}(\xi)$ e que $\Lambda_t \circ \Lambda_{-t} = I$. Além disso, o Teorema de Plancherel garante que $||f||_{H^s(\mathbb{R}^n)} = ||\Lambda_s f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $s \in \mathbb{R}$.

Escrevendo $A_{s,m} = \Lambda_{s-m} \circ a(X,D) \circ \Lambda_{-s}$, temos pelo Teorema 3.1 que $A_{s,m}$ é um operador pseudo-diferencial de ordem 0. Portanto, pelo Teorema 2.16 existe $C > 0$ tal que

$$||A_{s,m}f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Isso implica que para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
||a(X,D)f||_{H^{s-m}(\mathbb{R}^n)} &= ||\Lambda_{s-m}a(X,D)f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= ||\Lambda_{s-m}a(X,D)\Lambda_{-s}\Lambda_s f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant C||\Lambda_s f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= C||f||_{H^s(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

concluindo (2.30). $\square$

Para finalizar este capítulo, deixemos claro um fato: dada uma classe de símbolos em $S^m_{\rho,\delta}$, com $0 \leqslant \rho, \delta \leqslant 1$, nem sempre vale a limitação em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Um exemplo desse fato pode ser encontrado na referência [13], mas não será desenvolvido neste trabalho.

# 3 Cálculo de operadores pseudo-diferenciais

Este capítulo é dedicado a apresentar ferramentas para o cálculo de operadores pseudo-diferenciais. Nossa abordagem aqui dará ênfase à composição de operadores.

## 3.1 Composição de operadores pseudo-diferenciais

No decorrer do Capítulo 2, adotamos a notação $a(X, D)$ como padrão para trabalhar com operadores pseudo-diferenciais. Nesta seção, optaremos pela notação $T_a$. O motivo para isso ficará claro nas próximas páginas: a demonstração do resultado a seguir nos induz a trabalhar com muitos símbolos e índices e trabalhar com $T_a$ deixa a prova visualmente mais fácil de ser lida.

**Teorema 3.1** (Composição de operadores pseudo-diferenciais)**.** Seja $a \in S^{m_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $b \in S^{m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Então existe $c \in S^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$T_c = T_a \circ T_b.$$

Além disso, vale a fórmula assintótica

$$c \sim \sum_{\alpha} \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha a)(\partial_x^\alpha b),$$

que significa que para todo $N > 0$ temos

$$c - \sum_{|\alpha|<N} \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha a)(\partial_x^\alpha b) \in S^{m_1+m_2-N}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n). \tag{3.1}$$

*Demonstração.* **Passo 1 (Introdução ao caso particular $b \in S^{m_2}$ com suporte compacto).** Iremos provar, inicialmente, esse resultado para o caso particular em que $a \in S^{m_1}$ é qualquer e considerando que $b \in S^{m_2}$ tem suporte compacto em $x$ e que esse suporte é independente de $\xi$, ou seja, existe um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos $\operatorname{supp}_x b(\cdot, \xi) \subset K$.

Sejam $a_\epsilon(x, \eta) = a(x, \eta)\Gamma(\epsilon x, \epsilon\eta)$ e $b_\epsilon(x, \xi) = b(x, \xi)\Gamma(\epsilon x, \epsilon\xi)$, como em (2.20). Então para $f \in \mathcal{S}$ podemos escrever

$$T_{b_\epsilon} f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi(y-z)} b_\epsilon(y, \xi) f(z) dz d\xi.$$

Aplicando então $T_{a_\epsilon}$ na expressão acima obtemos

$$(T_{a_\epsilon} T_{b_\epsilon} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi\cdot(y-z)} b_\epsilon(y, \xi) f(z) dz d\xi \right) e^{2\pi i\eta\cdot(x-y)} a_\epsilon(x, \eta) dy d\eta. \tag{3.2}$$

Pelo Teorema de Fubini e usando o fato de que

$$e^{2\pi i\eta\cdot(x-y)}e^{2\pi i\xi\cdot(y-z)} = e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)}e^{2\pi i(x-z)\cdot\xi},$$

temos

$$(T_{a_\epsilon}T_{b_\epsilon}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c_\epsilon(x,\xi)e^{2\pi i(x-z)\cdot\xi}f(z)dzd\xi,$$

com

$$\begin{aligned} c_\epsilon(x,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)}a_\epsilon(x,\xi)b_\epsilon(y,\xi)dyd\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ix\cdot(\eta-\xi)}a_\epsilon(x,\xi)\widehat{b_\epsilon}(\eta-\xi,\xi)dyd\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ix\cdot\eta}a_\epsilon(x,\xi+\eta)\widehat{b_\epsilon}(\eta,\xi)d\eta, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $\widehat{b_\epsilon}(\cdot,\xi)$ é a transformada de Fourier de $b_\epsilon(\cdot,\xi)$ como uma função de $y \in \mathbb{R}^n$. Note que, para cada $0 < \epsilon \leqslant 1$, obtemos então a igualdade

$$(T_{a_\epsilon}T_{b_\epsilon}f)(x) = T_{c_\epsilon}f(x), \tag{3.4}$$

para toda $f \in \mathcal{S}$.

**Passo 2 (Fórmula assintótica).** Estamos assumindo que $b \in S^{m_2}$ tem suporte compacto em $x$ e, assim, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixado, temos $b_\epsilon(\cdot,\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que, pela Proposição 1.15, implica que $\hat{b_\epsilon}(\cdot,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, para cada multi-índice $\alpha$ e cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos

$$(2\pi i\eta)^\alpha\widehat{b_\epsilon}(\eta,\xi) = \widehat{\partial_x^\alpha b_\epsilon}(\eta,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi ix\cdot\eta}\partial_x^\alpha b_\epsilon(x,\xi)dx.$$

Usando o fato de que $\operatorname{supp}_x \partial_x^\alpha b_\epsilon(x,\xi) \subset \operatorname{supp}_x b_\epsilon(x,\xi) \subset K$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \left|(2\pi i\eta)^\alpha\widehat{b_\epsilon}(\eta,\xi)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi ix\cdot\eta}\partial_x^\alpha b_\epsilon(x,\xi)dx\right| \\ &\leqslant \int_K |\partial_x^\alpha b_\epsilon(x,\xi)|dx \\ &\leqslant A_\alpha(1+|\xi|)^{m_2}\operatorname{vol}(K). \end{aligned}$$

Em particular, isso implica que para todo $M \in \mathbb{N}$ existe uma constante, que denotaremos por $A_M$, tal que

$$|\hat{b_\epsilon}(\eta,\xi)| \leqslant A_M(1+|\xi|)^{m_2}(1+|\eta|)^{-M}. \tag{3.5}$$

Vamos analisar agora o lado direito de (3.3). Usando a fórmula de Taylor, podemos escrever

$$a_\epsilon(x,\xi+\eta) = \sum_{|\alpha|\leqslant N}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_\epsilon(x,\xi)\eta^\alpha + R_N^\epsilon(x,\xi,\eta), \tag{3.6}$$

em que

$$R_N^\epsilon(x,\xi,\eta) = \sum_{|\alpha|=N} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_\xi^\alpha a_\epsilon(x,\xi+\theta\eta)d\theta.$$

Inserindo (3.6) em (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} c_\epsilon(x,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} a_\epsilon(x,\xi+\eta)\hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)d\eta \\ &= \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\partial_\xi^\alpha a_\epsilon(x,\xi)\eta^\alpha \hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)d\eta + \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)\hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)d\eta. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Observe que

$$\frac{1}{\alpha!}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\alpha a_\epsilon(x,\xi)\eta^\alpha \hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)e^{2\pi i x\cdot\eta}d\eta = \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_\epsilon(x,\xi)\int_{\mathbb{R}^n}(2\pi i)^{|\alpha|}\eta^\alpha \hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)e^{2\pi i x\cdot\eta}d\eta,$$

que usando a fórmula de inversão de Fourier em $(2\pi i)^{|\alpha|}\eta^\alpha \hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)$ nos dá

$$\frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_\epsilon(x,\xi)\cdot\partial_x^\alpha b_\epsilon(x,\xi),$$

e esse é o termo correspondente a cada $\alpha$ na fórmula (3.1), exceto que ele varia em $0<\epsilon\leqslant 1$. O último termo da soma em (3.7) será tratado no Passo 3.

**Passo 3 (Resto da Fórmula de Taylor).** Nesta etapa, o objetivo é mostrar que o segundo termo no lado direito de (3.7) pertence a $S^{m_1+m_2-N-1}$ uniformemente em $0<\epsilon\leqslant 1$, ou seja, nosso intuito é mostrar que para quaisquer multi-índices $\gamma,\beta$ dados, existe uma constante $A_{\gamma\beta}>0$ tal que

$$\left|\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)\hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)d\eta\right| \leqslant A_{\gamma\beta}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-1-|\beta|} \tag{3.8}$$

para todo $x,\xi\in\mathbb{R}^n$, uniformemente em $0<\epsilon\leqslant 1$.

Perceba que a diferenciação sobre a integral acima nos dá

$$\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta[e^{2\pi i x\cdot\xi}R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)\hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)]d\eta$$

Pela Regra de Leibniz, temos

$$\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta[e^{2\pi i x\cdot\eta}R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)\hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)] \subset \operatorname{span}\{e^{2\pi i x\cdot\eta}\eta^\delta\partial_\xi^\sigma\hat{b}_\epsilon(x,\eta)\partial_x^{\gamma-\delta}\partial_\xi^{\beta-\sigma}R_N^\epsilon(x,\xi,\eta) : \delta\leqslant\gamma,\sigma\leqslant\beta\}.$$

Como

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\eta^\delta\partial_\xi^\sigma\hat{b}_\epsilon(x,\eta)\partial_x^{\gamma-\delta}\partial_\xi^{\beta-\sigma}R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|\eta|^{|\delta|}|\partial_\xi^\sigma\hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)||\partial_x^{\gamma-\delta}\partial_\xi^{\beta-\sigma}R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)d\eta,$$

obtemos (3.8) mostrando que existe uma constante $C_{\gamma\beta\delta\sigma}>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\eta|^{|\delta|}|\partial_\xi^\sigma\hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)||\partial_x^{\gamma-\delta}\partial_\xi^{\beta-\sigma}R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)|d\eta \leqslant C_{\gamma\beta\delta\sigma}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-1-|\beta|} \tag{3.9}$$

para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ e uniformemente em $0 < \epsilon \leqslant 1$. Vamos provar a desigualdade acima.

Primeiramente, observe que para quaisquer multi-índices $\gamma', \beta'$ temos

$$\partial_x^{\gamma'} \partial_\xi^{\beta'} R_N^\epsilon(x, \xi, \eta) = \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_x^{\gamma'} \partial_\xi^{\alpha+\beta'} a_\epsilon(x, \xi + \theta\eta) d\theta.$$

Portanto, podemos encontrar uma constante $C_{N\gamma'\beta'} > 0$ que não depende de $0 < \epsilon \leqslant 1$, e tal que

$$\begin{aligned} |\partial_x^{\gamma'} \partial_\xi^{\beta'} R_N^\epsilon(x, \xi, \eta)| &\leqslant \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{|\eta|^{N+1}}{\alpha!} \max\{|\partial_x^{\gamma'} \partial_\xi^{\alpha+\beta'} a_\epsilon(x, \zeta)| : |\xi| \leqslant |\zeta| \leqslant |\xi + \eta|\} \\ &\leqslant C_{N\gamma'\beta'} |\eta|^{N+1} \max\{(1+|\zeta|)^{m_1 - N - 1 - |\beta'|} : |\xi| \leqslant |\zeta| \leqslant |\xi + \eta|\}, \quad (3.10) \end{aligned}$$

para todo $x, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Munido da desigualdade (3.10), considere os seguintes casos para nossa estimativa.

**Caso 1:** Quando $|\eta| \leqslant |\xi|/2$, temos $|\zeta| \leqslant 3|\xi|/2$ e portanto existe uma constante $A_{N\gamma'\beta'} > 0$ tal que

$$|\partial_x^{\gamma'} \partial_\xi^{\beta'} R_N^\epsilon(x, \xi, \eta)| \leqslant A_{N\gamma'\beta'} |\eta|^{N+1} (1 + |\xi|)^{m_1 - N - 1 - |\beta'|}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

**Caso 2.1:** Quando $|\eta| > |\xi|/2$ e $m_1 - N - 1 - |\beta'| > 0$, usamos o fato de que $|\zeta| \leqslant |\xi| + |\eta| \leqslant 3|\eta|$ para obter uma constante $A_{N\gamma'\beta'} > 0$ tal que

$$|\partial_x^{\gamma'} \partial_\xi^{\beta'} R_N^\epsilon(x, \xi, \eta)| \leqslant A_{N\gamma'\beta'} |\eta|^{N+1} (1 + |\eta|)^{m_1 - N - 1 - |\beta'|}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

**Caso 2.2:** Quando $|\eta| > |\xi|/2$ e $m_1 - N - 1 - |\beta'| \leqslant 0$, obtemos uma constante $A_{N\gamma'\beta'} > 0$ tal que

$$|\partial_x^{\gamma'} \partial_\xi^{\beta'} R_N^\epsilon(x, \xi, \eta)| \leqslant A_{N\gamma'\beta'} |\eta|^{N+1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sob as mesmas condições impostas para encontrar a fórmula (3.11), segue que

$$\begin{aligned} |(2\pi i\eta)^\alpha \hat{b}_\epsilon(\eta, \xi)| &\leqslant \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \eta} \partial_\xi^\sigma b_\epsilon(x, \xi) dx \right| \\ &\leqslant \int_K |\partial_\xi^\sigma b_\epsilon(x, \xi)| dx \\ &\leqslant A_\sigma (1 + |\xi|)^{m_2 - |\sigma|} \operatorname{vol}(K). \end{aligned}$$

Isso implica, em particular, que para todo $M \in \mathbb{N}$ existe uma constante $A_{M\sigma}$ tal que

$$|\partial_\xi^\sigma \hat{b}_\xi(\eta, \xi)| \leqslant A_{M\sigma} (1 + |\xi|)^{m_2 - |\sigma|} (1 + |\eta|)^{-M}. \quad (3.11)$$

Munido dos argumentos acima, podemos reescrever a integral no lado esquerdo de (3.9) de modo a aplicar os casos 1 e 2 discutidos anteriormente. Sendo assim, temos

$$\int_{\eta \leqslant |\xi|/2} |\eta|^{|\delta|} |\partial_\xi^\sigma \hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)||\partial_x^{\gamma-\delta}\partial_\xi^{\beta-\sigma} R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)|d\eta + \int_{|\eta|>|\xi|/2} |\eta|^{|\delta|} |\partial_\xi^\sigma \hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)||\partial_x^{\gamma-\delta}\partial_\xi^{\beta-\sigma} R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)|d\eta.$$

Para a primeira integral, usamos o Caso 1 e a expressão (3.11) para obter uma constante $A > 0$, que depende de $\gamma, \beta, \delta, \sigma, M$ e $N$, mas não depende de $0 < \epsilon \leqslant 1$, e tal que

$$\int_{\eta \leqslant |\xi|/2} |\eta|^{|\delta|} |\partial_\xi^\sigma \hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)||\partial_x^{\gamma-\delta}\partial_\xi^{\beta-\sigma} R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)|d\eta \leqslant A(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-1-|\beta|}\int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^{N+1+|\delta|}(1+|\eta|)^{-M}d\eta.$$

Para obtermos a desigualdade desejada, basta tomarmos então $M > n + N + 1 + |\delta|$.

Para concluir essa etapa da prova, basta analisarmos a segunda integral usando o Caso 2. Mais especificamente, podemos nos restringir apenas ao caso 2.2, pois o caso 2.1 segue de um cálculo similar.

$$\begin{aligned}\int_{|\eta|>|\xi|/2} |\eta|^{|\delta|} |\partial_\xi^\sigma \hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)||\partial_x^{\gamma-\delta}\partial_\xi^{\beta-\sigma} R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)|d\eta & \\ &\leqslant B(1+|\xi|)^{m_2-|\sigma|}\int_{|\eta|>|\xi|/2} |\eta|^{N+1+|\delta|}(1+|\eta|)^{-M}d\eta \\ &\leqslant B(1+|\xi|)^{m_2-|\sigma|}\int_{|\eta|>|\xi|/2} (1+|\eta|)^{N+1+|\delta|-M}d\eta.\end{aligned}$$

Note que se $M > N + 1 + |\delta| + n$, então a última integral é absolutamente convergente. No entanto, essa não é ainda a limitação desejada de acordo com a expressão (3.8). Para resolver esse problema, perceba que como o integrando acima é uma função radial, podemos usar coordenadas esféricas (Teorema 1.24) para obter

$$\int_{|\eta|>|\xi|/2} (1+|\xi|)^{N+1+|\delta|-M}d\eta = \omega_{n-1}\int_{|\xi|/2}^{\infty} (1+|r|)^{N+|\delta|+n-M}dr,$$

onde $\omega_{n-1}$ denota a área de superfície da esfera $(n-1)-$dimensional de raio 1. Definindo então $M > N + |\delta| + n + k + 1$, onde $k \in \mathbb{N}$ será ainda determinado, obtemos

$$\omega_{n-1}\int_{|\xi|/2}^{\infty} (1+|r|)^{N+|\delta|+n-M}dr \leqslant \omega_{n-1}\int_{|\xi|/2}^{\infty} (1+|r|)^{-k-1}dr = \frac{\omega_{n-1}}{k}(1+|\xi|/2)^{-k.}$$

Então, existe uma constante $C > 0$, que não depende de $0 < \epsilon \leqslant 1$ e tal que

$$\int_{|\eta|>|\xi|/2} |\eta|^{|\delta|} |\partial_\xi^\sigma \hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)||\partial_x^{\gamma-\delta}\partial_\xi^{\beta-\sigma} R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)|d\eta \leqslant C(1+|\xi|)^{m_2-|\sigma|-k}.$$

Como $k \in \mathbb{N}$ pode ser escolhido arbitrariamente grande, podemos limitar a expressão acima por uma constante vezes $(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-1-|\beta|}$.

Agora que verificamos que (3.8) é válida, podemos prosseguir para o último passo da prova do teorema para o cenário em que $b \in S^{m_2}$ tem suporte compacto com respeito a $x$.

**Passo 4 (Símbolo $c \in S^{m_1+m_2}$).** Combinando os resultados provados até aqui, concluímos que $c_\epsilon \in S^{m_1+m_2}$ uniformemente em $0 < \epsilon \leqslant 1$ e que para todo $N \in \mathbb{N}$ podemos escrever explicitamente $c_\epsilon$ como

$$\begin{aligned} c_\epsilon(x,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} a_\epsilon(x,\eta+\xi)\hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)d\eta \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant N} \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_\epsilon(x,\xi)\cdot\partial_x^\alpha b_\epsilon(x,\xi) + \int_{\mathbb{R}^n} R_N^\epsilon(x,\xi,\eta)\hat{b}_\epsilon(\eta,\xi)d\eta. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Como $\{a_\epsilon\}_{0<\epsilon\leqslant 1} \subset S^m$ é uma sequência limitada, como visto na Seção 2.2 e $\hat{b}_\epsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue então que o valor absoluto do integrando em (3.12) pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, aplicando o limite quando $\epsilon \to 0$ e utilizando o Teorema da Convergência Dominada 1.17, segue que existe $c \in S^{m_1+m_2}$ tal que $c_\epsilon \to c$ pontualmente e em $S^{m'}$ para todo $m' > m_1+m_2$. Além disso, podemos escrever $c(x.\xi)$ explicitamente como

$$\begin{aligned} c(x,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} a(x,\xi+\eta)\hat{b}(\eta,\xi)d\eta \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant N} \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\cdot\partial_x^\alpha b(x,\xi) + \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} R_N(x,\xi,\eta)\hat{b}(\eta,\xi) \end{aligned}$$

Finalmente, tomando o limite quando $\epsilon \to 0^+$ em (3.4) e usando a Proposição 2.9 obtemos a seguinte igualdade

$$(T_aT_bf)(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+}(T_{a_\epsilon}T_{b_\epsilon}f)(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} T_{c_\epsilon}f(x) = T_cf(x)$$

para toda $f \in \mathcal{S}$ e isso completa a prova para o caso em que $b \in S^{m_2}$ tem suporte compacto com respeito a $x$.

**Passo 5 (Caso Geral).** Vamos considerar o caso em que não assumimos que $b \in S^{m_2}$ tem suporte compacto com respeito a $x$. Inicialmente, consideremos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto arbitrário, porém fixado. Pelo Lema de Urysohn, podemos construir $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leqslant \phi \leqslant 1, \operatorname{supp}\phi \subset \mathbb{B}(x_0,2)$ e $\phi = 1$ em $\mathbb{B}(x_0,1)$. Além disso, podemos escrever $b = \phi b + (1-\phi)b := b_1 + b_2$. É claro que $b_1, b_2 \in S^{m_2}$ e que

$$T_aT_bf(x) = T_aT_{b_1}f(x) + T_aT_{b_2}f(x)$$

para toda $f \in \mathcal{S}$.

Como $\operatorname{supp} b_1 \subset \mathbb{B}(x_0, 2)$, segue pelo Passo 1 que existe $c_1 \in S^{m_1+m_2}$ tal que $T_aT_{b_1} = T_{c_1}$ e

$$c_1 - \sum_{|\alpha|<N} \frac{(2\pi i)^{-|\alpha}}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha a) \cdot (\partial_x^\alpha b_1) \in S^{m_1+m_2-N-1} \tag{3.13}$$

para todo $N \geqslant 0$.

Nosso objetivo agora é mostrar a existência de um símbolo $c_2$ tal que $T_aT_{b_2} = T_{c_2}$ e tal que para todo $x \in \mathbb{B}(x_0, 1/2)$ temos que, para quaisquer $\gamma, \beta$ multi-índices, existe uma constante $C_{N\gamma\beta}$ tal que

$$|\partial_x^\gamma \partial_\xi^\beta c_2(x,\xi)| \leqslant C_{N\gamma\beta}(1 + |\xi|)^{m_1+m_2-N-1-|\beta|} \tag{3.14}$$

para todo $N \geqslant 0$.

Para encontrarmos isso, fixamos $0 < \epsilon \leqslant 1$ e consideramos os símbolos $a_\epsilon$ e $b_2^\epsilon$ (aqui $b_2^\epsilon$ e $c_2^\epsilon$ são as aproximações definidas em (2.20)). Sendo assim, vale que $T_{a_\epsilon}T_{b_2^\epsilon} = T_{c_2^\epsilon}$ com

$$\begin{aligned} c_2^\epsilon(x,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)} a_\epsilon(x,\eta) b_2^\epsilon(y,\xi) dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{B}(0,1)^c} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)} a_\epsilon(x,\eta) b_2^\epsilon(y,\xi) dy d\xi \end{aligned}$$

Na integral acima, perceba que $|x - y| \geqslant |x_0 - y| - 1/2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{B}(x_0, 1/2)$. Definimos então

$$L_\eta = (-4\pi^2|x-y|^2)^{-1}\Delta_\eta,$$

onde $\Delta_\eta = \dfrac{\partial^2}{\partial\eta_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial\eta_n^2}$ e portanto

$$L_\eta(e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)}) = e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)}.$$

Inserindo esse operador $N_1$ vezes na integral acima e integrando por partes $2N_1$ vezes com respeito à variável $\eta$, obtemos

$$c_2^\epsilon(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{B}(x_0,1)^c} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)} \frac{\Delta_\eta^{N_1} a_\epsilon(x,\eta)}{(-4\pi^2|x-y|^2)^{N_1}} b_2^\epsilon(y,\xi) dy d\eta.$$

Em seguida, definimos

$$L_y = (1 + 4\pi^2|\xi-\eta|^2)^{-1}(1 - \Delta_y),$$

onde $\Delta_y = \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial y_n^2}$. Inserindo esse operador $N_2$ vezes na integral acima e integrando por partes $2N_2$ vezes com respeito à variável $y$ usando a identidade

$$L_y(e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)}) = e^{2\pi(x-y)\cdot(\eta-\xi)},$$

temos

$$c_2^\epsilon(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{B}(x_0,1)^c} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)} \frac{\Delta_\eta^{N_1} a_\epsilon(x,\eta)}{(1+4\pi^2|\xi-\eta|^2)^{N_2}} (1-\Delta_y)^{N_2}\left[\frac{b_2^\epsilon(y,\xi)}{(-4\pi^2|x-y|^2)^{N_1}}\right] dyd\eta. \tag{3.15}$$

Como $a \in S^{m_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $b \in S^{m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, valem as desigualdades

$$|\Delta_\eta^{N_1} a_\epsilon(x,\eta)| \leqslant A_{N_1}(1+|\eta|)^{m_1-2N_1}, \tag{3.16}$$

e

$$\left|(1-\Delta_y)^{N_2}\left[\frac{b_2^\epsilon(y,\xi)}{(-4\pi^2|x-y|^2)^{N_1}}\right]\right| \leqslant A_{N_1N_2}\frac{(1+|\xi|)^{m_2}}{|x-y|^{2N_1}}. \tag{3.17}$$

Além disso, como

$$1+|\xi| \leqslant 1+|\xi-\eta|+|\eta| \leqslant (1+|\xi-\eta|)(1+|\eta|),$$

vale que

$$\frac{1}{1+4\pi^2|\xi-\eta|^2} \leqslant \frac{1+4\pi^2|\eta|^2}{1+2\pi|\xi|^2}.$$

Aplicando as desigualdades acima em (3.15), segue então que existe uma constante $B_{N_1N_2} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|c_2^\epsilon(x,\xi)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{B}(x_0,1)^c} \frac{|\Delta_\eta^{N_1} a_\epsilon(x,\eta)|}{(1+4\pi^2|\xi-\eta|^2)^{N_2}}\left|(1-\Delta_y)^{N_2}\left[\frac{b_2^\epsilon(y,\xi)}{(-4\pi^2|x-y|^2)^{N_1}}\right]\right| dyd\eta \\ &\leqslant B_{N_1N_2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{B}(x_0,1)^c} (1+|\eta|)^{m_1-2N_1}\frac{(1+4\pi^2|\eta|^2)^{N_2}}{(1+2\pi^2|\xi|^2)^{N_2}}\frac{(1+|\xi|)^{m_2}}{|x-y|^{2N_1}} dyd\eta.\end{aligned}$$

Como $|x-y| \geqslant |x_0-y| - 1/2$ para todo $x \in \mathbb{B}(x_0,1/2)$, segue que existe uma constante $C_{N_1N_2} > 0$ tal que

$$|c_2^\epsilon(x,\xi)| \leqslant C_{N_1N_2}(1+|\xi|)^{m_2-2N_2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta|)^{m_1+2N_2-2N_1}d\eta\right)\left(\int_{\mathbb{B}(0,1)^c}\frac{1}{(|z|-1/2)^{2N_1}}dz\right)$$

Com a desigualdade acima, fica claro que se tomarmos $N_2$ suficientemente grande e $2N_1 > \max\{n, m_1+n+2N_2\}$ obtemos (3.14) para $c_2^\epsilon(x,\xi)$ quando $\gamma=\beta=0$.

Para obter (3.14) para quaisquer $\gamma$ e $\beta$ multi-índices, devemos derivar a expressão (3.15) com respeito a $x$ e a $\xi$, aplicar a Regra de Leibniz várias vezes e, a partir daí, utilizar desigualdades similares às apresentadas em (3.16) e (3.17) para limitar a expressão obtida por um termo da forma $C_{N\gamma\beta}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-1-|\beta|}$. Nesta etapa, deve-se também utilizar o Teorema da Convergência Dominada 1.17 para justificar a troca de ordem da derivada com a integral como feito em (2.10). Por fim, como estamos trabalhando com a $\epsilon-$aproximação $c_2^\epsilon$, devemos aplicar o Lema 2.10 e concluir que $\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta c_2^\epsilon(x,\xi) \to \partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta c_2(x,\xi)$ quando $\epsilon \to 0$, obtendo a desigualdade desejada para $c_2(x,\xi)$ e todas as suas derivadas.

Por fim, tomando $c_{x_0} = c_1 + c_2$, obtemos que $T_{c_{x_0}} = T_a T_b$ e, como $b_1 = b$ para $x \in \mathbb{B}(x_0, 1/2)$, segue que

$$c_{x_0} - \sum_{|\alpha| \leqslant N} \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha a) \cdot (\partial_x^\alpha b) \tag{3.18}$$

satisfaz desigualdades similares como um elemento de $S^{m_1+m_2-N-1}$ para todo $N \geqslant 0$, mas uniformemente apenas em $x \in \mathbb{B}(x_0, 1/2)$. Como $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e o Teorema 3.4 garante que um operador pseudo-diferencial define seu símbolo unicamente, segue que existe um único símbolo $c \in S^{m_1+m_2}$ tal que $T_a T_b = T_c$ e tal que (3.1) vale para todo $N \geqslant 0$. □

## 3.2 Amplitude de um operador pseudo-diferencial

No Capítulo 2, apresentamos a definição de símbolo, que passamos a denotar por $a$ e associado a esse símbolo escrevemos o operador $a(X, D)$ em (2.2). Nesse momento, iremos definir um novo objeto, chamado *amplitude* de um operador e nos questionaremos se existe alguma relação entre um símbolo $a$ e uma amplitude $c$.

**Definição 3.2** (Amplitude)**.** Escrevemos $c = c(x, y, \xi) \in \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ se $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e se, para $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ e $0 \leqslant \delta < 1$, vale

$$|\partial_y^\gamma \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha c(x, y, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta(|\beta| + |\gamma|)}$$

vale para todo $(x, y, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e para todo multi-índice $\alpha, \beta, \gamma$. As constantes $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ podem depender de $c, \alpha, \beta, \gamma$, mas não de $x, y, \xi$. O operador correspondente $c(X, Y, D)$ é definido por

$$c(X, Y, D) f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} c(x, y, \xi) f(y) dy d\xi. \tag{3.19}$$

O operador $c(X, Y, D)$ é chamado de *operador amplitude* com amplitude $c = c(x, y, \xi)$. A classe de operadores $c(X, Y, D)$ com $c \in \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ será denotada por $Op(\mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n))$.

A classe de amplitudes mais usual e simples é $\mathcal{A}^m_{1,0}(\mathbb{R}^n)$, que pode ser denotada por $\mathcal{A}^m(\mathbb{R}^n)$ ou apenas por $\mathcal{A}^m$.

Assim como em (2.20), podemos justificar (3.19) considerando

$$c_\epsilon(x, y, \xi) = c(x, y, \xi) \Gamma(\epsilon x, \epsilon \xi),$$

com a mesma $\Gamma$ considerada lá. Então $c_\epsilon \to c$ pontualmente (também com a convergência pontual de derivadas), uniformemente em $\mathcal{A}^m(\mathbb{R}^n)$ para $0 < \epsilon \leqslant 1$, de modo que $c_\epsilon(X, Y, D) f \to c(X, Y, D) f$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por uma extensão sutil da Proposição 2.9. Portanto, $c(X, Y, D)$ está bem-definida e é contínuo como um operador de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $c \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^n)$ ou se $c \in \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ para $0 \leqslant \rho < 1$.

**Teorema 3.3** (Símbolos de operadores amplitude)**.** Seja $c \in \mathcal{A}^m(\mathbb{R}^n)$ uma amplitude. Então existe um símbolo $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $a(X, D) = c(X, Y, D)$. Além disso, vale a expansão assintótica para $a$ dada por

$$a(x, \xi) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \partial_y^\alpha c(x, y, \xi)|_{y=x} \in S^{m-N}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),$$

para todo $N \geqslant 0$.

*Demonstração.* A demonstração desse fato é similar a da fórmula de composição para operadores pseudo-diferenciais no Teorema 3.1. Para mais detalhes, veja o Teorema 2.5.8 na referência [12]. □

## 3.3 Quantização de operadores

Nesta seção, motivaremos a Definição 2.1 de operador pseudo-diferencial e apresentaremos a seguir um operador diferencial clássico nas literaturas, que nos permite compreender a terminologia "quantização".

**Teorema 3.4** (Quantização de operadores)**.** Um operador linear contínuo $T \colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é um operador pseudo-diferencial com símbolo $a(x, \xi)$ se e somente se

$$a(x, \xi) = e^{-2\pi i x\cdot\xi} T(e^{2\pi i x\cdot\xi}) \in S^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Em particular, um operador $T \in \Psi^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ define seu símbolo $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ unicamente, de modo que $T = a(X, D)$.

Para a prova deste teorema, utilizaremos o seguinte resultado.

**Lema 3.5** ([3])**.** Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $0 < l \leqslant 1$, defina $f_l \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$f_l(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot kl} \hat{f}(kl) l^n$$

Então, $f_l \to f$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ quando $l \to 0^+$. Além disso, $f_l \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

*Demonstração do Teorema 3.4.* Como $S^\infty = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m$, iremos mostrar que se $a \in S^m$, então $T(e^{2\pi i x\cdot\xi}) = e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x, \xi)$. Com efeito, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixado e cada $0 < \epsilon \leqslant 1$, definimos $f_\epsilon(x) = e^{2\pi i x\cdot\xi}\psi(\epsilon x)$, em que a função $\psi$ é tal que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $0 \leqslant \psi \leqslant 1, \psi = 1$ em $\mathbb{B}(0, 1)$ e $\operatorname{supp}\psi \subset \mathbb{B}(0, 2)$ - assim como no Lema de Urysohn. É claro que $f_\epsilon \in \mathcal{S}$ e é tal que $f_\epsilon(x) \to e^{2\pi i x\cdot\xi}$ pontualmente e em $\mathcal{S}'$ quando $\epsilon \to 0^+$. Daí, fica bem-definida a transformada de Fourier de $f_\epsilon$ dada por

$$\hat{f}_\epsilon(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\eta} e^{2\pi i x\cdot\xi}\psi(\epsilon x) = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i w\cdot\left(\frac{\xi-\eta}{\epsilon}\right)}\psi(w)dw = \frac{1}{\epsilon^n}\hat{\psi}\left(\frac{\eta-\xi}{\epsilon}\right).$$

A continuidade do operador $T$ de $\mathcal{S}'$ em $\mathcal{S}'$ garante que

$$\begin{aligned} T(e^{2\pi i x\cdot\eta}) = \lim_{\epsilon\to 0^+} T(f_\epsilon) &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} a(x,\eta)\hat{f}_\epsilon(\eta)d\eta \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} a(x,\eta)\hat{\psi}\left(\frac{\eta-\xi}{\epsilon}\right)d\eta \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot(\xi+\epsilon z)} a(x,\xi+\epsilon z)\hat{\psi}(z)dz, \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde fizemos a mudança de variáveis $\dfrac{\eta-\xi}{\epsilon}\mapsto z$. Note que essa igualdade vale pontualmente e em $\mathcal{S}'$. Como, por hipótese, $a\in S^m$, existe então uma constante $A>0$ tal que

$$|a(x,\eta+\epsilon z)|\leqslant A(1+|\eta+\epsilon z|)^m.$$

Se $m\leqslant 0$, então $|a(x,\xi+\epsilon z)|\leqslant A$. Se, no entanto, $m>0$, então $|a(x,\xi+\epsilon x)|\leqslant A(1+|\xi|+|z|)^m$ e como $\xi\in\mathbb{R}^n$ está fixado, $a(x,\xi+\epsilon z)$ tem crescimento no máximo polinomial na variável $z$ (independente de $\xi$).

Observe agora que o valor absoluto do integrando na igualdade (3.20) é limitado por um termo da forma $A(1+|\xi|+|z|)^m|\hat{\psi}(z)|$. Pela Proposição 1.14, $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, assim, $\hat{\psi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vide Proposição 1.15. Portanto, em módulo, esse integrando em (3.20) é limitado por uma função em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos aplicar então o Teorema da Convergência Dominada 1.17 e obter

$$\begin{aligned} T(e^{2\pi i x\cdot\xi}) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot(\xi+\epsilon z)}a(x,\xi+\epsilon z)\hat{\psi}(z)dz &= e^{2\pi i x\cdot\xi}a(x,\xi)\overbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\psi}(z)dz}^{\psi(0)} \\ &= e^{2\pi i x\cdot\xi}a(x,\xi). \end{aligned}$$

Suponha agora que $T:\mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$ é um operador contínuo que satisfaz a condição $T(e^{2\pi i x\cdot\xi})=e^{2\pi i x\cdot\xi}a(x,\xi)$, para algum $a\in S^m$. Então, para qualquer $f\in\mathcal{S}$, temos

$$\begin{aligned} T(f)(x) = \lim_{l\to 0^+} T(f_l)(x) &= \lim_{l\to 0^+}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} T(e^{2\pi i x\cdot kl})\hat{f}(kl)l^n \\ &= \lim_{l\to 0^+}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot kl}a(x,kl)\hat{f}(kl)l^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

□

O próximo exemplo ilustra uma aplicação do Teorema 3.4 em um operador clássico no contexto de Equações Diferenciais Parciais.

**Exemplo 3.6.** Considere o operador Laplaciano $\Delta=\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ com símbolo $a$ dado por $a(x,\xi)=-4\pi^2|\xi|^2$.

(a) Se $\Delta$ é um operador pseudo-diferencial, então $\Delta(e^{2\pi ix\cdot\xi}) = e^{2\pi ix\cdot\xi}(-4\pi^2|\xi|^2) = e^{2\pi ix\cdot\xi}a(x,\xi)$. Assim, $a(x,\xi) = e^{-2\pi ix\cdot\xi}\Delta(e^{2\pi ix\cdot\xi}) \in S^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$;

(b) Seja agora $T$ um operador diferencial linear que age em funções de variável $x$ e satisfaz a condição

$$-4\pi^2|\xi|^2 = e^{-2\pi ix\cdot\xi}T(e^{2\pi ix\cdot\xi}) \in S^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \tag{3.21}$$

então, aplicando $T$ a uma função no espaço de Schwartz, que pode ser escrita como $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$, e, usando a linearidade de $T$, segue que

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} T(e^{2\pi ix\cdot\xi})\hat{f}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ix\cdot\xi}(-4\pi^2|\xi|^2)\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Assim, T é um operador pseudo-diferencial de ordem 2. Mais ainda, a relação apresentada em (3.21) com as condições exigidas para $T$ mostram que $T = a(X,D) = \Delta$. Em particular, o operador $\Delta$ define seu símbolo de forma única.

## 3.4 Uma breve discussão sobre somas assintóticas

**Proposição 3.7** (Somas assintóticas)**.** Seja $a_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, em que a sequência $m_j$ de ordens satisfaz $m_0 > m_1 > m_2 > \cdots$ e $m_j \to -\infty$ quando $j \to \infty$. Então existe um símbolo $a \in S^{m_0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$a - \sum_{j=0}^{k-1} a_j \in S^{m_k}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

*Demonstração.* Com efeito, fixemos uma função $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, de modo que $\phi(\xi) = 1$ para todo $|\xi| \geqslant 1$ e tal que $\phi(\xi) = 0$ para todo $|\xi| \leqslant 1/2$. Então, para alguma sequência $\tau_j$ crescendo suficientemente rápido e a ser escolhida depois em (3.25), definimos

$$a(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\xi)\phi\left(\frac{\xi}{\tau_j}\right).$$

Perceba que essa soma está bem-definida pontualmente porque ela é localmente finita, já que $\phi\left(\dfrac{\xi}{\tau_j}\right) = 0$ para $|\xi| < \tau_j/2$. A fim de mostrar que $a \in S^{m_0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, tomamos primeiro uma sequência $\tau_j$ tal que a desigualdade

$$\left|\partial_x^{\beta}\partial_{\xi}^{\alpha}[a_j(x,\xi)\phi\left(\frac{\xi}{\tau_j}\right)]\right| \leqslant 2^{-j}(1+|\xi|)^{m_j+1-|\alpha|} \tag{3.22}$$

é satisfeita para todo $|\alpha|, |\beta| \leqslant j$.

Afirmamos que a função $\xi^\alpha \partial_\xi^\alpha \phi\left(\frac{\xi}{\tau_j}\right)$ é uniformemente limitada em $\xi$ para cada $j$. De fato, temos

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\alpha \phi\left(\frac{\xi}{\tau_j}\right) = \begin{cases} 0, & |\xi| < \tau_j/2, \\ \text{limitado por C} \left|\left(\frac{\xi}{\tau_j}\right)^\alpha\right|, & \tau_j/2 \leqslant |\xi| \leqslant \tau_j\ , \\ 0, & \tau_j < |\xi|, \end{cases}$$

onde $C := \sup\left|\partial_\xi^\alpha \phi\right| < \infty$, que existe, pois $\partial_\xi^\alpha \phi$ como definida tem suporte compacto.

Dessa forma, segue que $\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\alpha \phi\left(\frac{\xi}{\tau_j}\right)\right| \leqslant C$ é uniformemente limitado para todo $\xi$, para qualquer $j$. Consequentemente, essa desigualdade nos permite concluir que

$$\left|\partial_\xi^\alpha \phi\left(\frac{\xi}{\tau_j}\right)\right| \leqslant (1+|\xi|)^{-|\alpha|}. \tag{3.23}$$

Usando esse fato, podemos estimar também

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha [a_j(x,\xi)]\phi\left(\frac{\xi}{\tau_j}\right)\right| &= \left|\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} c_{\alpha_1\alpha_2} \partial_x^\beta \partial_\xi^{\alpha_1} a_j(x,\xi) \partial_\xi^{\alpha_2}\phi\left(\frac{\xi}{\tau_j}\right)\right| \\ &\overset{(3.23)}{\leqslant} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} |c_{\alpha_1\alpha_2}|(1+|\xi|)^{m_j-|\alpha_1|}(1+|\xi|)^{-|\alpha_2|} \\ &\leqslant C(1+|\xi|)^{m_j-|\alpha|} \qquad (3.24) \\ &= [C(1+|\xi|)^{-1}](1+|\xi|)^{m_j+1-|\alpha|}. \end{aligned}$$

O lado direito de (3.22) é zero para $|\xi| < \tau_j/2$, logo podemos assumir que $|\xi| \geqslant \tau_j/2$. Com isso, podemos ter as desigualdades

$$C(1+|\xi|)^{-1} \leqslant C(1+|\tau_j/2|)^{-1} < 2^{-j}, \tag{3.25}$$

se tomarmos $\tau_j$ suficientemente grande. Isso nos mostra que podemos aplicar o somatório às derivadas de $a(x,\xi)$, conforme definido no início da prova. Esse fato e a expressão (3.22) implicam que $a \in S^{m_0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, vide item (d) da Proposição 2.5.

Finalmente, para mostrar a fórmula assintótica, podemos escrever

$$a - \sum_{j=0}^{k-1} a_j = \sum_{j=k}^{\infty} a_j(x,\xi)\phi\left(\frac{\xi}{\tau_j}\right) \tag{3.26}$$

e então, em decorrência da ordem $m_k$ ser a maior que aparece no lado direito de (3.26) e da desigualdade (3.24), segue que

$$\left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \left[a - \sum_{j=0}^{k-1} a_j\right]\right| \leqslant C(1+|\xi|)^{m_k-|\alpha|}.$$

Nesse argumento, fixamos $\alpha$ e $\beta$ primeiro, e então usamos as estimativas para $j \geqslant |\alpha|, |\beta|$. Isso mostra que $a - \sum_{j=0}^{k-1} a_j \in S^{m_k}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. □

# Referências


[1] BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley & Sons, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 19.

[2] DE ÁVILA SILVA, F., AND DE MEDEIRA, C. Global hypoellipticity for a class of overdetermined systems of pseudo-differential operators on the torus. *Ann. Mat. Pura Appl. (4) 200*, 6 (2021), 2535–2560. Citado na página 13.

[3] DE OLIVEIRA ANDRADE, A. H. Commutator characterization of pseudo-differential operators on compact manifolds, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 57.

[4] FOLLAND, G. B. *Real analysis*, second ed. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. Citado 5 vezes nas páginas 15, 18, 19, 21 e 23.

[5] GRAFAKOS, L., ET AL. *Classical fourier analysis*, vol. 2. Springer, 2008. Citado na página 15.

[6] HÖRMANDER, L. Pseudo-differential operators. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators* (2007), 63–179. Citado na página 24.

[7] HOUNIE, J. *Introdução aos operadores pseudo-diferenciais.* 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas. 1987. Citado 3 vezes nas páginas 13, 24 e 25.

[8] KOHN, J. J., AND NIRENBERG, L. An algebra of pseudo-differential operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics 18*, 1-2 (1965), 269–305. Citado na página 12.

[9] LERNER, N. *A first course on pseudo-differential operators.* Disponível *online*. 2017. Citado na página 24.

[10] LIMA, E. L. Curso de analise vol. 2. *Projeto Euclides IMPA* (2009). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 20.

[11] MUNKRES, J. R. *Analysis on manifolds.* CRC Press, 2018. Citado na página 15.

[12] RUZHANSKY, M., AND TURUNEN, V. *Pseudo-differential operators and symmetries*, vol. 2 of *Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. Background analysis and advanced topics. Citado 6 vezes nas páginas 9, 10, 13, 15, 24 e 57.

[13] Stein, E. M., and Murphy, T. S. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, vol. 3. Princeton University Press, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 12, 24 e 47.

[14] Torstadius, D. *Pseudo-differential operators and their properties.* Uppsala University, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 28.