

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

CIBELE CAROLINA DE SOUZA SÁ

Liberdade de Curvas Algébricas Planas

Campinas

2024

Cibele Carolina De Souza Sá

Liberdade de Curvas Algébricas Planas

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Cibele Carolina De Souza Sá e orientada pelo Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Sa1L Sá, Cibele Carolina de Souza, 1999-
Liberdade de curvas algébricas planas / Cibele Carolina de Souza Sá. –
Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Anéis polinomiais. 2. Álgebra comutativa. I. Jardim, Marcos Benevenuto,
1973-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Free plane algebraic curves

Palavras-chave em inglês:

Polynomial rings

Noncommutative algebras

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestra em Matemática

Banca examinadora:

Marcos Benevenuto Jardim [Orientador]

Zaqueu Alves Ramos

Alan do Nascimento Muniz

Data de defesa: 07-03-2024

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0008-4791-7509>

- Currículo Lattes do autor: <https://lattes.cnpq.br/9551427673033234>

**Dissertação de Mestrado defendida em 07 de março de 2024 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM

Prof(a). Dr(a). ZAQUEU ALVES RAMOS

Prof(a). Dr(a). ALAN DO NASCIMENTO MUNIZ

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado à minha família e aos meus amigos que sempre me apoiaram
nessa jornada.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me guiado até aqui e por fazer com que eu persistisse no meu sonho, mesmo com as adversidades no caminho.

Ao meu orientador, Marcos Benevenuto Jardim, por ter me guiado durante toda a minha pesquisa, contribuindo fortemente para o enriquecimento do meu conhecimento em matemática. Ao professor Abbas Nasrollah Nejad, por todo apoio prestado no desenvolvimeto da minha pesquisa.

À minha mãe, Sandra, por todo apoio emocional, todo acolhimento nos momentos difíceis e por fazer parte dessa conquista desde quando iniciei este sonho na Universidade Estadual de Campinas. Ao meu pai, Carlos, por ter me apoiado fortemente neste sonho, fazendo o possível para que ele se tornasse realidade e por fazer parte da minha trajetória. Aos meus irmãos, Caio e Sidney, por terem me apoiado, vibrado com minhas conquistas e por me incentivarem a ir cada vez mais longe. Ao meu namorado, Douglas, por todo suporte, apoio e palavras de carinho nas horas em que mais precisei e por tornar minha trajetória muito mais leve e especial.

A todos os meus amigos que me incentivaram a seguir esse sonho, em especial, ao meu amigo Gustavo, com quem dividi esses dois anos intensos lado a lado, enfrentando todos os obstáculos e comemorando as vitórias.

Ao corpo docente da Unicamp, por me possibilitar chegar até aqui com todo esse conhecimento adquirido.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001 e com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP, processo nº 2022/03283-2), que permite com que eu e vários outros estudantes se dediquem exclusivamente à pesquisa.

“Nada na vida deve ser temido, somente compreendido. Agora é hora de compreender mais para temer menos. (Marie Curie)”

Resumo

Neste trabalho apresentaremos os conceitos e algumas caracterizações clássicas de liberdade de curvas algébricas planas, estudo este que teve seu início na década de 80 pelo matemático japonês Kyoji Saito. Em um primeiro momento, discutiremos sobre alguns conceitos de Álgebra Comutativa como as sequências regulares, dimensão homológica, profundidade, o teorema de Hilbert-Burch e o teorema de Auslander-Buchsbaum. Também realizaremos uma breve abordagem sobre as curvas algébricas planas. Na sequência, trataremos do tema principal dessa dissertação, que são as derivações e o módulo de Saito de um polinômio homogêneo. Veremos aqui que um divisor é dito livre quando tal módulo é livre sobre um anel graduado de polinômios. Além disso, alguns critérios de liberdade e exemplos aplicando cada um deles serão apresentados. Por fim, apresentaremos um importante invariante numérico, o grau de Bourbaki de curvas planas, que é uma ótima ferramenta para testar a não liberdade das curvas.

Palavras-chave: Critério de Saito. Divisores livres. Grau de Bourbaki.

Abstract

In this work, we will present the concepts and some classical characterizations of the freeness of algebraic plane curves, a study that began in the 1980s by the Japanese mathematician Kyoji Saito. We will first discuss some concepts of Commutative Algebra such as regular sequences, homological dimension, depth, the Hilbert-Burch theorem and the Auslander-Buchsbaum theorem. We will also take a brief look into algebraic plane curves. Next, we will deal with the main topic of this dissertation: derivations and the Saito's module of a homogeneous polynomial. We will see here that a divisor is said to be free when this module is free over a graded ring of polynomials. In addition, some freeness criteria and examples applying each of them will be presented. Finally, we will present an important numerical invariant, the Bourbaki degree of plane curves, which is an excellent tool for testing the non-freeness of curves.

Keywords: Saito's Criterion. Free Divisors. Bourbaki Degree.

Lista de ilustrações

Figura 1	–	3-Arranjo: $f(x, y, z) = xyz(x + y)$	42
Figura 2	–	B3 Arranjo: $xyz(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)$	43
Figura 3	–	As 4 retas: $xy(x + y)(x + yz)$	43
Figura 4	–	3-Arranjo: $f(x, y, z) = xyz$	46
Figura 5	–	Cone + plano: $f = z(y^2 - xz)$	47
Figura 6	–	Arranjo de Ceva: $f(x, y, z) = xyz(x - y)(x - z)(y - z)$	54

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	14
1.1 Sequências Regulares	14
1.2 O Teorema de Hilbert-Burch	21
1.3 Anéis e Módulos Graduados	21
1.4 Curvas Algébricas Planas	24
1.4.1 Mudança de coordenadas afins e projetivas	25
1.4.2 Curvas Racionais Afins e Projetivas	29
1.5 Funções de Hilbert e Resoluções Livres Graduadas	31
1.6 Teoria de Esquemas	33
2 Divisores Livres Homogêneos	36
2.1 Derivações	36
2.2 Módulo de Saito	37
2.3 Curvas Livres em \mathbb{P}^2	44
2.3.1 Curvas Livres Irredutíveis	47
2.3.2 Curvas Livres e Autoesquemas	51
3 O Grau de Bourbaki de Curvas Planas Projetivas	55
3.1 O Ideal de Bourbaki de uma Curva Plana Projetiva	55
3.2 Cotas Superiores para o Grau de Bourbaki	59
REFERÊNCIAS	66

Introdução

A noção de *divisores livres* foi introduzida na década de 80, com a publicação do pioneiro e importante trabalho do matemático japonês Kyoji Saito, intitulado *Theory of Logarithmic Forms and Logarithmic Vector Fields* [21], que introduz toda a teoria no contexto complexo analítico em seu famoso artigo. Saito forneceu em seu artigo uma importante caracterização de liberdade, que hoje é conhecida como *Crítério de Saito*. Desde então, surgiram várias aplicações desse estudo na Teoria de Singularidades, Geometria Algébrica, Álgebra Comutativa, dentre outras áreas da Matemática.

Hiroaki Terao, Aron Simis e Stefan Tohaneanu são alguns nomes de destaque na teoria. A noção de divisor livre foi originalmente associada com a teoria de arranjos de hiperplanos, onde Terao, ex aluno de Saito, conjecturou que sobre um corpo de característica 0, a liberdade de um arranjo depende apenas da sua combinatória. Toda a teoria construída por Saito foi traduzida por Aron Simis em seu trabalho intitulado *Differential Idealizers and Algebraic Free Divisors* [24] para um contexto totalmente algébrico, do qual faremos uso neste trabalho. Em geral, curvas livres são difíceis de se encontrar e ainda é necessário muito estudo para a construção de famílias explícitas de divisores livres. Nesse viés, Aron Simis em [25] construiu uma família de divisores livres irredutíveis, chamada *séxticas de Cayley*. Na sequência, foi mostrado por Aron Simis e Stefan Tohaneanu em [26] que, em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ (sendo \mathbb{K} corpo algebricamente fechado), não existem divisores livres irredutíveis de grau 2 e 3. Além disso, um dos resultados sobre liberdade mais utilizados foi introduzido por Tohaneanu em *On Freeness of Divisors in \mathbb{P}^2* [28], baseado na existência de sizíguas regulares para o ideal jacobiano J_f de um dado polinômio f . Marcos Jardim, Abbas Nasrollah e Aron Simis em [12] realizaram um estudo sobre o ideal e as sequências de Bourbaki e relacionaram a questão da liberdade de uma curva com seu grau de Bourbaki.

A base do estudo dos divisores livres são as derivações e o módulo formado por elas. Dado um anel R e S uma R -álgebra, uma derivação de S em S sobre R é uma aplicação $\theta: S \rightarrow S$ que satisfaz $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$, $\theta(xy) = x\theta(y) + y\theta(x)$ e $\theta(a) = 0$, para todos $x, y \in S$ e $a \in R$. O conjunto formado por todas as derivações de S em S é denotado por $\text{Der}_R(S)$, sendo este conjunto um R -módulo. Neste trabalho, focaremos no anel de polinômios $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e, veremos que as derivadas parciais usuais $\frac{\partial}{\partial x_i}$, como mapas de R em R , são derivações \mathbb{K} -lineares e o conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ forma uma base para o R -módulo $\text{Der}_{\mathbb{K}}(R)$, sendo ele um R -módulo livre. Dado um ideal $I \subset R$, o módulo de derivações logarítmicas, denotado por $\text{Der}_I(R)$, é o conjunto $\text{Der}_I(R) = \{ \theta \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(R) \mid \theta(I) \subseteq I \}$ que, de acordo com [18], é o *idealizador tangencial* do ideal I . Em particular, o módulo $\text{Der}_f(R) = \{ \theta \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(R) \mid \theta(f) \in (f) \}$ é chamado de

módulo de Saito e, veremos neste trabalho, que um polinômio $f \in R$ é dito livre quando seu módulo de Saito é um R -módulo livre.

O objetivo principal desta dissertação é apresentar as principais definições acerca dos divisores livres, alguns critérios clássicos de liberdade, aplicar tais critérios em exemplos e caracterizar a não liberdade das curvas por um importante invariante numérico. Descreveremos, a seguir, os três capítulos em que a dissertação se divide.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos preliminares necessários para a compreensão de todo o trabalho. Nele foram abordados algumas definições e resultados de Álgebra Comutativa como as sequências regulares, profundidade de ideais, módulos livres e projetivos, dimensão homológica, Teorema de Auslander-Buchsbaum e o Teorema de Hilbert-Burch que caracteriza os ideais perfeitos de altura (codimensão) igual a 2. Na sequência, tratamos dos anéis e módulos graduados, fizemos um estudo sobre o principal objeto de estudo deste trabalho, que são as curvas algébricas planas e, para finalizar, realizamos uma breve abordagem sobre a teoria de esquemas, que é necessária para a compreensão do critério de liberdade baseado em autoesquemas apresentado no capítulo seguinte.

No Capítulo 2 iniciamos o tema principal da dissertação, tratando das derivações e do módulo de derivações. Posteriormente, definimos o módulo de Saito e apresentamos o primeiro critério de liberdade de curvas, chamado *Critério de Saito*. Em seguida, apresentamos um critério de liberdade muito utilizado baseado na dimensão homológica do ideal jacobiano do polinômio em questão. Na seção seguinte, focamos nas curvas livres em \mathbb{P}^2 . Nela, tratamos de um critério que se baseia na existência de uma sizígia regular para o ideal jacobiano de um dado polinômio. Além disso, estudamos as *curvas livres irredutíveis* em \mathbb{P}^2 e apresentamos exemplos, como as *séxticas de Cayley* apresentadas em [25]. Por fim, apresentamos a definição de *autoesquemas* e, como tratado originalmente em [30], mostramos uma nova caracterização de liberdade que usa os autoesquemas como ferramenta.

No Capítulo 3, tratamos de um importante invariante numérico chamado *grau de Bourbaki* de curvas planas projetivas, originalmente apresentado em [12]. Inicialmente, apresentamos um teorema base para os demais resultados, definimos o *ideal de Bourbaki* e a *sequência de Bourbaki* e fornecemos alguns exemplos. Em seguida, mostramos alguns resultados que tratam de cotas superiores para o grau de Bourbaki e relacionamos esse grau com as curvas livres e quase livres. Além disso, trouxemos uma forma de caracterizar as curvas não singulares por meio desse invariante numérico e um resultado que mostra, através do grau de Bourbaki, que não existem curvas livres irredutíveis de grau entre 2 e 4. Finalmente, fizemos uma breve abordagem sobre os divisores quase livres e tratamos de um resultado que relaciona as curvas com uma única singularidade, sendo ela nodal, com o grau de Bourbaki associado a essas curvas.

1 Preliminares

Neste capítulo, serão abordados conceitos básicos para a compreensão de todo o trabalho. Consideraremos sempre R como um anel comutativo com unidade e todos os R -módulos sendo finitamente gerados. As definições e resultados aqui apresentados podem ser consultados em [1], [3], [8], [13], [14], [15], [16] e [20].

1.1 Sequências Regulares

Considere R um anel e M um R -módulo. Denotaremos por $Z(M)$ o conjunto dos divisores de zero do R -módulo M , ou seja,

$$Z(M) := \{a \in R \mid \exists 0 \neq r \in M : ar = 0\}.$$

Definição 1.1. Sejam M_0 e M_1 submódulos do R -módulo M . Chamamos de *ideal quociente* do anel R o ideal que é dado por:

$$(M_0 :_R M_1) = \{a \in R \mid aM_1 \subseteq M_0\}.$$

Um caso particular de ideal colon é o ideal

$$\text{Ann}_R(M) := (0 :_R M) = \{a \in R \mid aM = 0\},$$

o qual é chamado de *anulador do R -módulo M* .

Definição 1.2. Seja M um R -módulo e $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ um ideal primo de R . O ideal \mathfrak{p} é chamado de *ideal primo associado* para o R -módulo M se ele é o anulador de um R -submódulo cíclico de M , ou seja, $\mathfrak{p} = (0 :_R x)$, para algum $0 \neq x \in M$. O conjunto dos primos associados de M será denotado por $\text{Ass}_R(M)$, ou seja

$$\text{Ass}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(M) \mid \exists 0 \neq x \in M : \mathfrak{p} = (0 :_R x)\}.$$

De modo geral, se R é um anel e M é um R -módulo, é conhecido que $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)} \mathfrak{p} \subseteq Z(M)$. Além disso, se o anel R é Noetheriano, então $Z(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$.

Um elemento $a \in R$ é dito M -regular ou regular em M se a não é um divisor de zero em M , isto é, $a \notin Z(M)$.

Definição 1.3. Uma sequência $\underline{a} = a_1, \dots, a_n$ de elementos de R é dita uma M -sequência regular se

1. $\underline{a}M \neq M$

$$2. a_i \notin Z\left(\frac{M}{(a_1, \dots, a_{i-1})M}\right), \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Exemplo 1.4. Sejam \mathbb{K} um corpo e $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios com coeficientes no corpo \mathbb{K} nas variáveis x_1, \dots, x_n . Assim, a sequência $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$ é uma R -sequência regular.

No exemplo seguinte veremos que, em geral, sequências regulares não se mantêm em permutações.

Exemplo 1.5. Sejam \mathbb{K} um corpo e $R = \mathbb{K}[x, y, z]$ o anel de polinômios com coeficientes no corpo \mathbb{K} nas variáveis x, y, z . A sequência $x, y(1-x), z(1-x)$ é sequência regular sobre R , mas $y(1-x), z(1-x), x$ não é regular sobre R . De fato, note que $z(1-x)$ não é um elemento regular sobre $R/(y(1-x))$, pois como $z(1-x)y = zy - zxy = zy - zy = 0$, sendo $y = xy$, temos que $z(1-x)y = 0$, para $y \neq 0$.

Além disso, seja $I \subset R$ um ideal. Dizemos que uma sequência $\underline{a} = a_1, \dots, a_n$ de elementos em I é chamada de M -sequência regular maximal em I , se ela é uma sequência regular sobre o R -módulo M e se não existe $a_{n+1} \in I \setminus \{\underline{a}\}$ tal que a_1, \dots, a_{n+1} seja uma sequência regular sobre M .

Lema 1.6. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano, e seja M um R -módulo finitamente gerado. Seja $\underline{a} = a_1, \dots, a_n$ uma M -sequência regular em \mathfrak{m} . Então qualquer permutação de \underline{a} é uma M -sequência regular.

Demonstração. Vide [20], página 137. □

Teorema 1.7. Sejam R um anel, $I \subset R$ um ideal, M um R -módulo finitamente gerado, com $IM \neq M$. Então todas as M -sequências regulares maximais de elementos no ideal I possuem o mesmo comprimento n , que é dado por

$$n = \inf \left\{ i \mid \text{Ext}_R^i \left(\frac{R}{I}, M \right) \neq 0 \right\}.$$

Demonstração. Vide [16], página 138. □

Definição 1.8. Sejam R um anel, $I \subset R$ um ideal, M um R -módulo finitamente gerado, com $IM \neq M$. Chamamos de *profundidade* de I em M o comprimento de qualquer M -sequência maximal com elementos em I , a qual será denotada por $\text{prof}(I, M)$.

Observação 1.9. Sejam R um anel, $I \subset R$ um ideal e M um R -módulo finitamente gerado tal que $IM \neq M$. Segue diretamente que se $I \subset Z(M) \Leftrightarrow \text{prof}(I, M) = 0$. Além disso, dado um elemento $a \in I$ regular em M , temos a seguinte igualdade: $\text{prof} \left(I, \frac{M}{aM} \right) = \text{prof}(I, M) - 1$. De fato, seja a_1, \dots, a_n uma M -sequência maximal em I . Desse modo,

temos que $\text{prof}(I, M) = n$. Como $\bar{k} = \bar{0} \Leftrightarrow k \in aM$, segue que $\text{prof}\left(I, \frac{M}{aM}\right) = n - 1 = \text{prof}(I, M) - 1$.

Proposição 1.10. Sejam R anel, $I \subset R$ um ideal e P, N, M R -módulos finitamente gerados e considere a seguinte sequência exata curta

$$0 \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Então,

1. $\text{prof}(I, M) \geq \min\{\text{prof}(I, P) - 1, \text{prof}(I, N)\}$
2. $\text{prof}(I, P) \geq \min\{\text{prof}(I, M) + 1, \text{prof}(I, N)\}$
3. $\text{prof}(I, N) \geq \min\{\text{prof}(I, P), \text{prof}(I, M)\}$.

Demonstração. Vide [20], página 142. □

Neste trabalho, estamos interessados em módulos que são denominados *módulos livres*. A seguir apresentaremos uma das maneiras de caracterizá-los.

Definição 1.11. Um R -módulo P é dito um módulo livre se $P = \bigoplus_i R_i$, onde $R_i \cong R$.

A partir disso, podemos apresentar os módulos projetivos.

Proposição 1.12. Um R -módulo P é dito projetivo, se qualquer uma das condições a seguir, as quais são equivalentes, for satisfeita:

1. Dada qualquer sequência exata à direita de R -módulos $M \rightarrow N \rightarrow 0$ e um R -homomorfismo $\phi : P \rightarrow N$, existe um R -homomorfismo $\psi : P \rightarrow M$, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \psi \swarrow & & \downarrow \phi \\ M & \xrightarrow{\rho} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

2. Toda sequência exata curta de R -módulos $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ cinde.
3. Existe um R -módulo livre K tal que $K = P \oplus Q$, para algum R -módulo Q .

A seguir, iremos realizar uma abordagem sobre a dimensão projetiva ou, analogamente, dimensão homológica de um R -módulo M .

Definição 1.13. Seja M um R -módulo e considere a seguinte resolução projetiva para M :

$$P_{\bullet} : 0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Nesse caso, dizemos que a resolução P_{\bullet} tem comprimento n .

Caso o R -módulo M admita resolução projetiva finita, define-se a dimensão projetiva (homológica) de M , a qual é dada por:

$$\text{dh}(M) = \inf \{n \geq 0 : n \text{ comprimento de uma resolução projetiva de } M\}.$$

Caso contrário, define-se $\text{dh}(M) = \infty$.

Observação 1.14. Seja $\{P_i \mid i \in I\}$ uma família de R -módulos e seja $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$. Então P é um R -módulo projetivo se, e somente se, cada P_i é projetivo. Com efeito, suponha P projetivo. Então existe um R -módulo K tal que $F = P \oplus K$ é um R -módulo livre. Então, $F = P \oplus K = P_i \oplus (\bigoplus_{i \neq j} P_j \oplus K)$. Logo, cada P_i é projetivo. Reciprocamente, se cada P_i é projetivo, existe um R -módulo K_i de modo que $F_i = P_i \oplus K_i$ é um R -módulo livre. Assim, $F = \bigoplus_{i \in I} F_i = \bigoplus_{i \in I} (P_i \oplus K_i) \cong P \oplus (\bigoplus_{i \in I} K_i)$ é livre. Portanto, P é projetivo.

O resultado a seguir mostra uma forma de caracterizar os R -módulos projetivos com base na sua dimensão projetiva (homológica).

Proposição 1.15. A dimensão homológica de um R -módulo M é zero se, e somente se, M é um R -módulo projetivo.

Demonstração. Suponha que $\text{dh}(M) = 0$, isto é, dada uma resolução projetiva $0 \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, então $M \cong P$. Portanto, M é projetivo. Reciprocamente, suponha que M seja um R -módulo projetivo. Então

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{Id} M \rightarrow 0$$

é uma resolução projetiva para M . Logo, por definição, $\text{dh}(M) = 0$. □

Lema 1.16. Um anel R é um R -módulo projetivo.

Demonstração. Precisamos mostrar que o diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccccc} & & R & & \\ & & \downarrow f & & \\ N & \xleftarrow{g} & & \xrightarrow{h} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

pode ser completado por um R -homomorfismo $g : R \rightarrow N$, de modo a se tornar comutativo. Se $f(1) = y$, tome $x \in N$ tal que $h(x) = y$. Defina $g(r) = rx$. Então g está bem definida, é um R -homomorfismo e $f = h \circ g$. □

Proposição 1.17. Todo R -módulo livre M é projetivo.

Demonstração. Esse resultado é uma consequência imediata da condição 3 da Proposição 1.12. \square

Vimos que, de modo geral, todo módulo livre é projetivo. Veremos a seguir que a recíproca não vale necessariamente.

Exemplo 1.18. Seja $R = \mathbb{Z}_6$. Sabemos que R é um módulo livre de posto 1 sobre si mesmo. Além disso, $R = (\bar{2}) \oplus (\bar{3})$ e, conseqüentemente, $(\bar{2})$ e $(\bar{3})$ são R -módulos projetivos. Entretanto, $(\bar{2})$ e $(\bar{3})$ não são R -módulos livres. Com efeito, suponha que $(\bar{3})$ seja um R -módulo livre. Dessa forma, $(\bar{3})$ possui cardinalidade pelo menos 6, isto é, igual a 6^n , para algum $n \in \mathbb{N}$. Isso nos gera uma contradição, visto que $(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$. Analogamente, mostra-se que $(\bar{2})$ não é um R -módulo livre.

Se estivermos no contexto em que R é um anel local ou um domínio de ideais principais, dado M um R -módulo finitamente gerado, temos os seguintes resultados:

Teorema 1.19. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local, então um R -módulo projetivo M é um R -módulo livre.

Demonstração. Vide [16], página 9. \square

Teorema 1.20. Se R é um domínio de ideais principais e M é um R -módulo projetivo, então M é um R -módulo livre.

Demonstração. Como M é um R -módulo projetivo então existe um R -módulo K de modo que $M \oplus K$ é um R -módulo livre. Como um submódulo de um módulo livre sobre um domínio de ideais principais também é livre, M é um R -módulo livre. \square

Definição 1.21. Sejam R um anel e M um R -módulo finitamente gerado. Uma resolução projetiva de M

$$P_\bullet : \cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{\phi_n} P_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\phi_1} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

é uma *resolução livre* se cada R -módulo P_i é livre sobre R .

Considerando R um anel Noetheriano, um R -módulo M que é finitamente gerado por s geradores m_1, \dots, m_s admite um mapa sobrejetivo $R^s \rightarrow M$, onde (r_1, \dots, r_s) é mapeado para $r_1 m_1 + \dots + r_s m_s$. Em termos de seqüências exatas, isso pode ser escrito como

$$R^s \rightarrow M \rightarrow 0.$$

O núcleo do mapa $R^s \rightarrow M$ é chamado de *primeira sizígia* de M . Denotaremos o núcleo do mapa $R^s \rightarrow M$ por $\text{Syz}_1(M)$ e R^s por F_1 . Estamos no caso em que existe um mapa

sobrejetivo $\phi_1 : F_1 \rightarrow M$, sendo F_1 um módulo livre finitamente gerado. Consideraremos agora o núcleo do mapa $F_1 \rightarrow M$. Sabemos que o núcleo é um submódulo de R^s , sendo ele finitamente gerado. Logo, existe um mapa sobrejetivo $F_2 \rightarrow \text{Syz}_1(M)$, sendo F_2 um módulo livre finitamente gerado. Ao combinar o mapa $F_2 \rightarrow \text{Syz}_1(M)$ com a inclusão de $\text{Syz}_1(M)$ em F_1 temos o mapa $\phi_2 : F_2 \rightarrow F_1$ que não é nem sobrejetivo e nem injetivo, mas a sequência

$$F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

é exata. O núcleo do mapa $F_2 \rightarrow F_1$ é chamado de segunda sizígia de M , $\text{Syz}_2(M)$, uma vez que depende da escolha dos geradores de $\text{Syz}_1(M)$. Procedendo dessa maneira, obtemos uma resolução livre para M

$$\cdots \rightarrow F_{i+1} \rightarrow F_i \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

O núcleo do mapa $F_i \rightarrow F_{i-1}$ é chamado de i -ésima sizígia de M , que denotaremos por $\text{Syz}_i(M)$.

Lema 1.22. Seja (R, \mathfrak{m}) anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R -módulo finitamente gerado. Se $\text{prof}(R) = 0$ e $\text{dh}(M) < \infty$, então M é um R -módulo livre.

Demonstração. Suponha que $\text{dh}(M) \leq n$. Demonstraremos o resultado por indução sobre n . Para $n = 0$, o resultado segue pela Proposição 1.15. Suponha $n = 1$. Seja m_1, \dots, m_t um conjunto mínimo de geradores para M . Seja $f : R^t \rightarrow M$ dada por $f(x_1, \dots, x_t) = \sum_i x_i m_i$. Temos então que $K = \ker f \subset IR^t$ ([20], página 104 - Proposição 3.1.6). Além disso, temos a seguinte sequência exata de R -módulos

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{h} R^t \xrightarrow{f} M \rightarrow 0.$$

Como $n = 1$, K é um módulo projetivo e, pela Proposição 1.15, $K \cong R^s$, para algum s . Assim, podemos encontrar um homomorfismo injetivo $h : R^s \rightarrow R^t$ de modo que $\text{Im}(h) = K \subseteq IR^t$. Seja $\{e_1, \dots, e_s\}$ base canônica de R^s . Suponha que $s \neq 0$. Desse modo, h pode ser representado por uma matriz (a_{ij}) de ordem $t \times s$. As colunas dessa matriz são formadas por elementos de $K \subseteq IR^t$. Logo, $a_{ij} \in I$. Como, por hipótese, $\text{prof}(R) = 0$, isso significa que existe um elemento $0 \neq b \in R$ tal que $Ib = 0$. Sendo assim, temos então que $a_{ij}b = 0$, para todo i, j . Logo, $0 \neq be_1 \in \ker h = 0$, o que é uma contradição. Portanto, temos que f é um isomorfismo e M é um R -módulo livre. Suponha agora que $n > 1$ e que M não seja um R -módulo livre, ou seja, $\text{dh}(M) \geq 1$. Como, por hipótese, $\text{dh}(M) < \infty$ e da sequência exata

$$0 \rightarrow K \rightarrow R^s \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$$

sendo $K = \ker f \subseteq R^s$, segue que $\text{dh}(K) = \text{dh}(M) - 1 < n$. Logo, pela hipótese de indução, temos que K é livre. Da sequência exata, segue que $\text{dh}(M) \leq 1$ e pelo caso $n = 1$, temos que M é livre, contradição. Concluimos, portanto, que M é um R -módulo livre. \square

Teorema 1.23. (Auslander-Buchsbaum). Seja (R, \mathfrak{m}) anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R -módulo finitamente gerado. Se a dimensão homológica de M é finita, então

$$\mathrm{dh}(M) + \mathrm{prof}(M) = \mathrm{prof}(R).$$

Demonstração. Provaremos esse resultado por indução sobre $\mathrm{prof}(R)$.

Suponha que $\mathrm{prof}(R) = m$. Como, por hipótese, $\mathrm{dh}(M) = n < \infty$, M apresenta resolução livre minimal na forma

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Suponha que $\mathrm{prof}(R) = 0$. Desse modo, pelo Lema 1.22, segue que M é livre, ou seja, $\mathrm{dh}(M) = 0$ e $\mathrm{prof}(M) = \mathrm{prof}(R^n) = \mathrm{prof}(R) = 0$, em que a segunda igualdade segue da Proposição 1.10. Suponha que $\mathrm{prof}(R) > 0$. Se $\mathrm{prof}(M) > 0$, então como R é local, temos que $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_R(R)$ e $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_R(M)$ ([20], página 138). Assim, existe $a \in \mathfrak{m}$ que não é divisor do zero em R e M . Então, $\mathrm{prof}(R/xR) = \mathrm{prof}(R) - 1$ e $\mathrm{prof}(M/xM) = \mathrm{prof}(M) - 1$. Pela hipótese de indução, sobre $\mathrm{prof}(R)$, segue que

$$\mathrm{prof}(M/xM) + \mathrm{dh}(M/xM) = \mathrm{prof}(R/xR).$$

Como $\mathrm{dh}(M/xM) = \mathrm{dh}(M)$ ([20], página 143 - Lema 4.3.1), temos

$$\mathrm{prof}(M) - 1 + \mathrm{dh}(M) = \mathrm{prof}(R) - 1,$$

sendo válido o resultado. Logo, basta considerarmos apenas o caso $\mathrm{prof}(M) = 0$. Como $\mathrm{dh}(M) = n < \infty$, podemos considerar a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow K \rightarrow R^t \rightarrow M \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

de modo que $\mathrm{dh}(K) = \mathrm{dh}(M) - 1$ e $\mathrm{prof}(K) = 1$. Queremos mostrar que $\mathrm{dh}(K) = 1$. Pela Proposição 1.10 e pela sequência exata (1.1), temos que

$$\mathrm{prof}(K) \geq \min\{\mathrm{prof}(R^t), \mathrm{prof}(M) + 1\} = 1$$

e

$$0 = \mathrm{prof}(M) \geq \min\{\mathrm{prof}(K) - 1, \mathrm{prof}(R^t)\} = \mathrm{prof}(K) - 1,$$

consequentemente, $\mathrm{prof}(K) = 1$. Como estamos no caso já demonstrado em que $\mathrm{prof}(K) > 0$, temos

$$\mathrm{prof}(K) + \mathrm{dh}(K) = \mathrm{prof}(R),$$

assim

$$1 + \mathrm{dh}(M) - 1 = \mathrm{prof}(R).$$

Portanto, segue que

$$\mathrm{prof}(M) + \mathrm{dh}(M) = \mathrm{prof}(R)$$

como desejado. □

Seja R um anel não nulo. A *dimensão* de Krull do anel R , denotada por $\dim(R)$, é definida como

$$\dim(R) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ cadeia } P_0 \subsetneq P_1 \dots \subsetneq P_n \text{ com } P_i \in \text{Spec}(R), \forall i\}$$

Consideremos (R, \mathfrak{m}) um anel local. De acordo com a referência ([20], página 149), temos que, para um R -módulo M finitamente gerado, $\dim(M) \geq \text{prof}(M)$. Além disso, dizemos que um R -módulo M é Cohen-Macaulay se $\text{prof}(M) = \dim(M)$. O anel R é dito *Cohen-Macaulay* se for Cohen-Macaulay como R -módulo. Consideremos então o anel R sendo Cohen-Macaulay. Dizemos que um ideal $I \subset R$ é *perfeito* se $\text{dh}_R(R/I)$ se for igual a altura do ideal I , denotada por $\text{alt}(I)$. Pela fórmula de Auslander-Buchsbaum segue que I é perfeito se, e somente se, $\text{dh}(I) < \infty$ e o anel quociente $\frac{R}{I}$ é Cohen-Macaulay.

1.2 O Teorema de Hilbert-Burch

Sejam R um anel e \mathcal{M} uma matriz $m \times n$ com entradas em R . Denotamos por $I_r(\mathcal{M})$ o ideal gerado pelos menores $r \times r$ da matriz \mathcal{M} , para $r = 1, \dots, m$. Por convenção, $I_r(\mathcal{M}) = R$, se $r \leq 0$ e $I_r(\mathcal{M}) = 0$ se $r > m$. Dado um homomorfismo de R -módulos livres $\phi : M \rightarrow N$ de posto finito, sabemos que ϕ pode ser interpretada como uma matriz em relação às bases de M e N . Sendo assim, denotamos $I_r(\mathcal{M})$ por $I_r(\phi)$.

Teorema 1.24. (Hilbert-Burch). Seja R um anel Noetheriano e $I \subset R$ um ideal com resolução livre

$$P_\bullet : 0 \rightarrow R^n \xrightarrow{\phi} R^{n+1} \rightarrow I \rightarrow 0.$$

Então, existe um elemento R -regular a tal que $I = aI_n(\phi)$. Se I é projetivo, então $I = (a)$, e se $\text{dh}(I) = 1$, então $I_n(\phi)$ é perfeito de altura 2. Reciprocamente, se $\phi : R^n \rightarrow R^{n+1}$ é um mapa R -linear com $\text{alt}(I_n(\phi)) \geq 2$, então $I = I_n(\phi)$ tem resolução livre P_\bullet .

Demonstração. Vide [8], página 501. □

A matriz ϕ mencionada no teorema é chamada de *matriz de Hilbert-Burch* do ideal I .

1.3 Anéis e Módulos Graduados

Para introduzir o que vem a ser anéis graduados, considere, primeiramente, o anel R e o anel de polinômios $R[x]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x^n R = \{x^n a \mid a \in R\}$, onde $x^n R = 0$ para cada $n < 0$ e $x^0 = 1$. Desse modo, cada conjunto $x^n R$ é um subgrupo do grupo aditivo $R[x]$ e segue que $R[x] = \bigoplus_{\mathbb{Z}} x^n R$. Assim, cada polinômio $p(x) = a_0 + xa_1 + x^2 a_2 + \dots + x^n a_n$ em $R[x]$ pode ser escrito unicamente como a soma finita de elementos no conjunto de

subgrupos $\{x^n R\}_{\mathbb{Z}}$ e cada parcela $x^k a_k \in x^k R$ dessa soma é um polinômio homogêneo de grau k . Finalmente, temos que $(x^m R)(x^n R) \subseteq x^{m+n} R$, para cada $m, n \in \mathbb{Z}$.

Com tudo o que foi mencionado, temos uma motivação para a seguinte definição.

Definição 1.25. Um anel graduado é um anel R juntamente com um conjunto $\{R_n\}_{\mathbb{Z}}$ de subgrupos do grupo aditivo R de modo que $R = \bigoplus_{\mathbb{Z}} R_n$ e tal que $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

A família de subgrupos $\{R_n\}_{\mathbb{Z}}$ é chamada de graduação do anel A . Além disso, dizemos também que o anel R tem \mathbb{Z} como seu conjunto de graus. Um elemento não nulo $a \in R_n$ é chamado de elemento homogêneo de R de grau n . Para facilitar, se $\deg a = n$, denotaremos a por a_n para indicar que $a \in R_n$. É importante mencionar também que se $\{R_n\}_{\mathbb{Z}}$ é uma graduação do anel R , então nem todos os R_n precisam ser não nulos. Dizemos que R é fortemente graduado por $\{R_n\}_{\mathbb{Z}}$ se $R_m R_n = R_{m+n}$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Além disso, um anel graduado R é dito positivamente graduado se $R_n = 0$ para todo $n < 0$. Nesse caso, os subgrupos nulos R_n com $n < 0$ são suprimidos e escrevemos $\{R_n\}_{n \geq 0}$ para a graduação de R . De modo análogo, definimos o anel graduado R como sendo negativamente graduado.

Dado S um subanel de um anel graduado R de modo que $S_n = S \cap R_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, dizemos que S é um subanel graduado de R se $S = \bigoplus_{\mathbb{Z}} S_n$. Um ideal I de um anel graduado R é um ideal graduado de R se $I = \bigoplus_{\mathbb{Z}} I_n$, onde $I_n = I \cap R_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Se R é um anel graduado e se S é um subanel graduado de R , então temos que $(S \cap R_m)(S \cap R_n) \subseteq S \cap R_{m+n}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Assim, um subanel graduado S de R é um anel graduado. Além disso, se R é um anel graduado, então cada elemento não nulo $x \in R$ tem se expressa de forma única como a soma finita de elementos homogêneos não nulos de R . Se $x = \sum_{\mathbb{Z}} x_n$, cada x_n é chamado de componente homogênea de x . Observe também que se I é um ideal à direita graduado, então cada $x \in I$ pode ser escrito como uma soma finita de componentes homogêneas não nulas do anel R , sendo cada uma pertencente ao ideal I .

Observação 1.26. Se R é um anel graduado, então $0 \in R_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, logo nenhum grau é atribuído a 0.

Exemplo 1.27. (Graduação Trivial). Se tomarmos $R_0 = R$ e $R_n = 0$ para todo $n \neq 0$, então $\{R_n\}_{\mathbb{Z}}$ é uma graduação de do anel R chamada de graduação trivial. Logo, todo anel pode ser considerado um anel graduado.

Exemplo 1.28. (Anel de Polinômios). Durante nossa introdução ao assunto, vimos que todo anel de polinômios $R[x]$ é graduado positivamente com graduação $\{x^n R\}_{n \geq 0}$. De

modo mais geral, dado $p(x_1, x_2, \dots, x_K) \in R[x_1, \dots, x_K]$ então um termo $ax_1^{j_1}x_2^{j_2} \cdots x_k^{j_k}$ de $p(x_1, x_2, \dots, x_K)$ em $R[x_1, \dots, x_K]$ é dito de grau n se $j_1 + j_2 + \cdots + j_k = n$. Um polinômio $p(x_1, x_2, \dots, x_k)$ em $R[x_1, \dots, x_k]$ é chamado de polinômio homogêneo de grau n se todos os seus termos tem grau n . Se $n \geq 0$ e P_n representa o conjunto de todos os polinômios homogêneos de $R[x_1, \dots, x_k]$ de grau n juntamente com o polinômio nulo, então P_n é um subgrupo do grupo aditivo $R[x_1, \dots, x_k]$. Mais ainda, $R[x_1, \dots, x_k] = \bigoplus_{n \geq 0} P_n$, sendo um anel graduado positivamente.

Definição 1.29. Se A e B são anéis graduados, então um homomorfismo de anéis $f : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de anéis graduados se $f(A_n) \subseteq B_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.30. Seja R um anel graduado. Então um R -módulo M é dito R -módulo graduado se existe uma família $\{M_n\}_{\mathbb{Z}}$ de subgrupos de M de modo que $M = \bigoplus_{\mathbb{Z}} M_n$ e $R_n M_m \subseteq M_{m+n}$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Seja M um R -módulo graduado e N um submódulo de M . Dizemos que N é um submódulo graduado de M se $N = \bigoplus_{\mathbb{Z}} N_n$, onde $N_n = N \cap M_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Se M é um R -módulo graduado, então M é dito positivamente graduado se $M_n = 0$ para todo $n < 0$. De modo análogo, M é dito negativamente graduado se $M_n = 0$ para todo $n > 0$. Um elemento $x \in M_n$ não nulo é chamado de elemento homogêneo de M de grau n . Indicaremos x por x_n para dizer que $x \in M_n$.

Se M é um R -módulo graduado e N é um submódulo graduado de M , então $R_n(N \cap M_m) \subseteq N \cap M_{m+n}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Desse modo, N é um R -módulo graduado com graduação $\{N \cap M_n\}_{\mathbb{Z}}$. Além disso, cada elemento não nulo $x \in M$ pode ser expresso de modo único como uma soma finita $x = \sum_{\mathbb{Z}} x_n$ de elementos homogêneos não nulos de M e cada parcela dessa soma é chamada de componente homogênea de x .

Observação 1.31. • Se $M = \bigoplus_{\mathbb{Z}} M_n$ é um R -módulo graduado, então $0 \in M_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e nenhum grau é atribuído a 0. Além disso, o submódulo nulo é considerado um submódulo graduado de todo módulo graduado. Assim como vimos anteriormente para os anéis, se $x \in M$ e x é não nulo, então o mesmo pode ser escrito como a soma finita de suas componente homogêneas, 0 não é um membro dessa decomposição de x .

- Se M é um R -módulo graduado, então M tem um conjunto de geradores homogêneos.
- Se R é um anel graduado com graduação trivial, então um R -módulo M é dito trivialmente graduado por $\{M_n\}_{\mathbb{Z}}$ se $M_0 = M$ e $M_n = 0$ para cada $n \neq 0$. Porém, é importante mencionar que se o anel R não é trivialmente graduado, então o R -módulo M não pode ser visto como trivialmente graduado. Com efeito, se $\{R_n\}_{\mathbb{Z}}$

é uma graduação não trivial do anel R e M é um R -módulo trivialmente graduado, então para $R_k \neq 0$ teríamos $R_k M = R_k M_0 \subseteq M_k = 0$. Entretanto, temos que em geral $R_k M \neq 0$, contradição.

Definição 1.32. Se M e N são R -módulos graduados e $f : M \rightarrow N$ é um mapa R -linear, então dizemos que f é um homomorfismo de R -módulos graduados de grau k se $f(M_n) \subseteq N_{n+k}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Um homomorfismo injetivo (sobrejetivo, bijetivo) de módulos graduados de grau zero é chamado de monomorfismo (epimorfismo, isomorfismo). Se M e N são R -módulos graduados e se existe um isomorfismo $f : M \rightarrow N$ de grau zero, então dizemos que M e N são isomorfos e escrevemos $M \cong N$. Homomorfismo entre módulos graduados sem a indicação do grau são considerados como de grau zero.

Exemplo 1.33. Sejam M um R -módulo graduado com graduação $\{M_n\}_{\mathbb{Z}}$ e k um inteiro fixado. Se $M_n(k) = M_{n+k}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, então $M = \bigoplus_{\mathbb{Z}} M_n(k)$ e $\{M_n(k)\}_{\mathbb{Z}}$ é uma graduação de M . Tal graduação é obtida por deslocar a graduação original $\{M_n\}_{\mathbb{Z}}$ de M por um fator de k . Dizemos que um R -módulo graduado M com a graduação deslocada por um fator de k é um R -módulo graduado deslocado e será denotado por $M(k)$.

Se $N = \bigoplus_{\mathbb{Z}} N_n$ é um R -módulo graduado, então $N(k)$ é graduado por $\{N_n(k)\}_{\mathbb{Z}}$. Sendo assim, se $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos graduados de grau k , então $f(M_n) \subseteq N_{n+k} = N_n(k)$ e $f' : M \rightarrow N(k)$ é um homomorfismo de R -módulos graduados de grau zero. Reciprocamente, se $f : M \rightarrow N(k)$ é um homomorfismo de R -módulos graduados de grau zero, então $f' : M \rightarrow N$ é considerado como um homomorfismo de R -módulos graduados de grau k .

Observação 1.34. É importante mencionar que, se $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo bijetor de grau k entre R -módulos graduados, não podemos escrever $M \cong N$ uma vez que f desloca a graduação de N por um fator de k e N e $N(k)$ são objetos distintos. Todavia, segue que $M \cong N(k)$ pois f fornece um homomorfismo bijetor entre tais módulos graduados $f : M \rightarrow N(k)$ de grau zero.

1.4 Curvas Algébricas Planas

Os objetos principais dos nossos estudos são as curvas algébricas planas afins e projetivas. Para as principais definições e resultados aqui apresentados, utilizaremos como base as referências [9] e [29].

Consideraremos sempre \mathbb{K} como um corpo algebricamente fechado e de característica zero nas definições e resultados que serão mencionados a seguir.

O ponto de partida do estudo sobre as curvas é ver que a equação $f = 0$ não está bem determinada pela curva, visto que $f = 0$ e $f^2 = 0$ admitem as mesmas soluções. Nos deparamos então com o primeiro resultado.

Proposição 1.35. Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$. Então $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ têm as mesmas soluções em \mathbb{K}^2 se, e somente se, os fatores irredutíveis de f e g são os mesmos.

Demonstração. Seja $q \in \mathbb{K}[x, y]$ um fator irredutível de f . Por hipótese, para cada $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, temos que $q(x, y) = 0$ implica em $g(x, y) = 0$. Provaremos que q divide g . Ao trocar x por y , se necessário, podemos supor que y ocorre efetivamente em q . Tomemos $R = \mathbb{K}[x]$, $L = \mathbb{K}(x)$ (corpo de frações). Sendo assim, pelo lema de Gauss, $q \in R[y]$ é irredutível em $L[y]$. Suponha, por absurdo, que $q \nmid g$. Desse modo, $\text{mdc}(q, g) = 1$. Assim,

$$1 = aq + bg,$$

em que $a, b \in L[y]$. Podemos escrever

$$a = a'/c, \quad b = b'/c,$$

com $a', b' \in R[y]$ e $c \in R, c \neq 0$. Temos então,

$$a'q + b'g = c.$$

Como y ocorre efetivamente em q , segue que, exceto para um número finito de valores de $x \in \mathbb{K}$, a equação $q(x, y) = 0$ tem solução, pois \mathbb{K} é algebricamente fechado. Concluimos então que existem infinitos valores de x para os quais $c(x) = 0$, donde $c = 0$, contradição. Portanto, $q \mid g$ em $L[y]$ e, pelo lema de Gauss, $q \mid g$ em $\mathbb{K}[x, y]$. \square

A partir dessa proposição, chegamos na seguinte definição de curva algébrica plana.

Definição 1.36. Uma *curva algébrica plana afim* é um ideal principal $I \subset \mathbb{K}[x, y]$.

Dizemos que o *traço* de uma curva é o conjunto das soluções da equação que a define, ou seja, é o conjunto $V(f) = \{p \in \mathbb{K}^2 : f(p) = 0\}$. Uma curva $I = (f)$ é *irredutível* quando o polinômio f é irredutível. Além disso, dizemos que uma curva é *reduzida* se o ideal (f) é radical, isto é, não existem polinômio g e $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n \mid f$.

A definição de curva que foi apresentada nos livra de ambiguidades, visto que embora $f = 0$ e $f^2 = 0$ possuam o mesmo traço, temos $(f^2) \subsetneq (f)$.

1.4.1 Mudança de coordenadas afins e projetivas

Um tópico de grande importância é sobre mudança de coordenadas afins.

Definição 1.37. Uma transformação afim ou afinidade em \mathbb{K}^2 é uma aplicação $T : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ composta de um isomorfismo linear com uma translação.

$$T(u, v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

A afinidade T induz um automorfismo $T_\bullet : \mathbb{K}[x, y] \rightarrow \mathbb{K}[x, y]$ que é dado por: $(T_\bullet f)(x, y) = f(T^{-1}(x, y))$, para todo $(x, y) \in \mathbb{K}^2$.

Proposição 1.38. Sejam f uma curva e T uma afinidade. Então o traço de $T_\bullet f$ é igual à imagem do traço de f por T , isto é, $V(T_\bullet f) = T(V(f))$.

Demonstração. Seja $(u, v) \in V(T_\bullet f)$. Então $0 = (T_\bullet f)(u, v) = f(T^{-1}(u, v)) \Leftrightarrow T^{-1}(u, v) \in V(f) \Leftrightarrow (u, v) \in T(V(f))$. \square

Dadas duas curvas (f) e (g) , dizemos que elas são equivalentes se existe uma afinidade T tal que $T_\bullet f = g$.

Lema 1.39. Sejam (f) e (g) duas curvas afins sem componentes em comum. Então existem $a, b \in \mathbb{K}[x, y]$, $c \in \mathbb{K}[x]$ ou $\mathbb{K}[y]$ tal que $af + bg = c$

Demonstração. Sejam $R = \mathbb{K}[x]$ e $L = \mathbb{K}(x)$ (corpo de frações). Como f e g não possuem fator comum em $\mathbb{K}[x, y] = R[y]$ então, como consequência do lema de Gauss, também não possuem fator comum em $L[y]$. Como $L[y]$ é domínio de ideais principais, segue que $(f, g) = (e)$. Além disso, por hipótese f e g não possuem fator comum, então $e = 1$. Assim, existem $r, s \in L[y]$ tais que

$$rf + sg = 1,$$

com $r = \frac{a(x, y)}{c_1(x)}$ e $s = \frac{b(x, y)}{c_2(x)}$. Eliminando os denominadores de r e s , obtemos a relação desejada, isto é,

$$af + bg = c_1(x) \cdot c_2(x) \in \mathbb{K}[x].$$

\square

Proposição 1.40. A interseção de duas curvas algébricas planas sem componentes em comum é finita.

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$ polinômios sem componentes em comum e apliquemos o Lema 1.39. Logo, temos as seguintes relações

$$af + bg = c(x),$$

$$uf + vg = w(y),$$

em que a, b, c, u, v, w são polinômios e $c(x), w(y)$ são não nulos. A partir dessas relações fica claro que toda solução de $f = g = 0$ tem como abscissa uma raiz de $c(x)$ e como ordenada uma raiz de $w(y)$, sendo ambas em número finito. \square

Seja f uma curva, e seja l uma reta de equação $y = ax + b$. Os pontos de $f \cap l$ podem ser obtidos eliminando y e resolvendo a equação

$$f_l(x) = f(x, ax + b) = 0.$$

Temos então as seguintes possibilidades:

1. $f_l(x)$ é identicamente nulo, caso em que a reta l é uma componente de f ;
2. $f_l(x)$ é igual uma constante não nula, quando $f \cap l = \emptyset$.
3. $f_l(x)$ é um polinômio não constante, que se decompõe da seguinte forma:

$$f_l(x) = \lambda \prod_{i=1}^r (x - x_i)^{m_i},$$

sendo λ uma constante e os x_i são as abscissas dos pontos de interseção (duas a duas distintas). Do mesmo modo procedemos quando l é da forma $x = cy + d$.

Definição 1.41. A *multiplicidade* ou *índice* de interseção de l, f no ponto p é dada por

$$(l, f)_p = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin l \cap f \\ \infty, & \text{se } p \in l \subset f \\ m_i, & \text{se } p = (x_i, ax_i + b) \end{cases}$$

Definição 1.42. Seja f uma curva e p um ponto de f . Definimos a multiplicidade do ponto p na curva f como sendo $m_p(f) = \min_{p \in l} \{(l, f)_p\} \geq 1$.

Definição 1.43. Uma reta l é tangente a curva f no ponto p se $(l, f)_p > m_p(f)$.

Dizemos que um ponto p de uma curva f é liso, não singular ou simples em f e que f é lisa, não singular ou simples em p se $m_p(f) = 1$. Caso contrário, dizemos que f é *singular*. Se $m_p(f) = 2, 3, \dots, m$, o ponto p é dito um ponto *duplo*, *triplo*, \dots , *m-uplo*. Um ponto m -uplo $p \in f$ é dito *ordinário* se f admitir m tangentes distintas no ponto p . Uma *cúspide* é um ponto duplo com tangentes coincidentes, já um *nó* é um ponto duplo ordinário.

Proposição 1.44. 1. Um ponto $P \in f$ é liso se e só se ao menos uma das derivadas parciais f_x, f_y não se anula em P .

2. Se $P = (a, b) \in f$ é liso então a (única) tangente a f em P é dada por

$$f_x(P)(x - a) + f_y(P)(y - b) = 0.$$

Demonstração. As afirmativas decorrem da fórmula de Taylor,

$$f(x + a, y + b) = f(a, b) + f_x(a, b)x + f_y(a, b)y + g(x, y),$$

em que todos os termos de g possuem grau maior ou igual a 2. □

Exemplo 1.45. A lemniscata, $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ possui um nó na origem e tangentes $y = x$ e $y = -x$.

Exemplo 1.46. A cissóide, $x^2 - y(y^2 + x^2) = 0$ possui uma cúspide na origem e uma tangente vertical $x = 0$.

Proposição 1.47. Se f é uma curva sem componentes múltiplas, então o conjunto dos pontos singulares de f é finito.

Demonstração. Pela Proposição 1.44, o conjunto dos pontos singulares de f é dado pelas seguintes equações

$$f = f_x = f_y = 0.$$

Ao menos uma das derivadas parciais, digamos f_y , não é identicamente nula. Afirmamos que $f = f_y = 0$ admite um número finito de soluções. Caso contrário, pela proposição 1.40, existiria uma componente irredutível q comum a f e f_x . Desse modo, teríamos que $q^2 \mid f$, contradição. \square

A seguir, nos concentraremos nas curvas algébricas planas projetivas.

Definição 1.48. Seja $f = \sum_{i=0}^d f_i$ onde cada $f_i \in \mathbb{K}[x, y]$ é homogêneo de grau i , $f_d \neq 0$. A homogeneização de f é o polinômio homogêneo de grau d ,

$$F(x, y, z) = \sum_{i=0}^d z^{d-i} f_i(x, y).$$

Definição 1.49. Uma curva algébrica plana projetiva é um ideal principal homogêneo (F) em $\mathbb{K}[x, y, z]$.

Definição 1.50. Seja $F \in \mathbb{K}[x, y, z]$ polinômio homogêneo que define uma curva projetiva. A *afinização* de F é o polinômio $f(x, y) = F(x, y, 1) \in \mathbb{K}[x, y]$.

Do mesmo modo em que vimos a mudança de coordenadas afins, temos também a mudança de coordenadas projetivas.

Definição 1.51. Seja $T : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ um isomorfismo linear. Visto que uma tal aplicação preserva retas de \mathbb{K}^3 passando pela origem, temos definida uma bijeção natural, ainda designada por $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, chamada de *projetividade* ou *mudança de coordenadas projetivas* em \mathbb{P}^2 .

Temos um K -isomorfismo induzido

$$T_{\bullet} : \mathbb{K}[x, y, z] \rightarrow \mathbb{K}[x, y, z]$$

tal que, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ e todo polinômio f ,

$$(T \bullet f)(x, y, z) = f(T^{-1}(x, y, z)).$$

Assim, dizemos que duas curvas F e G são projetivamente equivalentes se existe transformação $T \in GL(3)$ tal que $T \bullet F = G$. Além disso, se duas curvas afins f e g são equivalentes, então as suas homogeneizações F, G são projetivamente equivalentes.

Seja L uma reta e seja F uma curva de grau d . Suponhamos que $L = x$. Temos então que $P = (0 : y : z) \in L \cap F$ se, e só se, $F(0, y, z) = 0$. O polinômio $F(0, y, z)$ ou é identicamente nulo (no caso de $L \subset F$), ou é homogêneo de grau d e se decompõe da seguinte forma:

$$F(0, y, z) = \prod (z_i y - y_i z)^{m_i},$$

onde os pontos $P_i = (0 : y_i : z_i)$ são dois a dois distintos e constituem $L \cap F$. O expoente m_i é chamado de *multiplicidade de interseção* de L, F em P_i .

Dentre os resultados de grande importância, destaca-se o seguinte teorema que fala sobre o número de pontos na interseção de duas curvas planas projetivas dadas.

Teorema 1.52. (Teorema de Bézout). Sejam F e G curvas planas projetivas sem componentes em comum. Então o número de pontos na interseção $F \cap G$, contados com multiplicidade, é igual ao produto dos graus de F e G , isto é

$$\sum_{p_i \in F \cap G} (F, G)_{p_i} = \deg F \cdot \deg G.$$

Demonstração. Vide [9], página 57. □

1.4.2 Curvas Racionais Afins e Projetivas

Faremos uma breve abordagem sobre os conceitos de função regular e função racional sobre uma curva.

Definição 1.53. Dizemos que uma curva afim irredutível f é racional se existir um par de funções racionais $x(t), y(t)$, não ambas constantes, de modo que $f(x(t), y(t)) = 0$ em $K(t)$. O par $x(t), y(t)$ é chamado de *parametrização racional*.

Exemplo 1.54. Toda reta é racional, com parametrização da forma

$$\begin{cases} x(t) = at + b, \\ y(t) = ct + d, \end{cases}$$

em que $a \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Quando uma curva é racional, a cada valor atribuído ao parâmetro (salvo um número finito que anula o denominador) corresponde a um ponto bem definido da curva. Porém, pode ocorrer de cada ponto da curva ser atingido por valores distintos do parâmetro, como por exemplo $x = t^2, y = \frac{1}{t^2}$ repete duas vezes cada ponto da hipérbole.

Definição 1.55. Seja $C \subset \mathbb{A}^2$ uma curva afim irredutível com equação $f = 0$. Dizemos que uma aplicação $\phi : C \rightarrow \mathbb{A}^1$ é *regular* ou *polinomial* se for igual à restrição de uma função polinomial $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^1$, ou seja, se existir polinômio $p(x, y)$ de modo que $\phi(x, y) = p(x, y)$, para cada $(x, y) \in C$.

Denotamos por $A(C)$ o anel que é formado pelo conjunto das funções regulares de C . Por definição, temos o seguinte epimorfismo

$$\mathbb{K}[x, y] \twoheadrightarrow A(C)$$

o qual associa a cada polinômio, considerado como função $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^1$, sua restrição a C .

Lema 1.56. $A(C)$ é um domínio isomorfo a $\mathbb{K}[x, y]/(f)$.

Demonstração. Sabemos que um polinômio g se anula sobre a curva C se for múltiplo de f . Se g não for múltiplo de f , segue da Proposição 1.40 que a interseção é finita. Desse modo, o núcleo do epimorfismo definido por restrição é o ideal (f) , sendo este um ideal primo pois f é irredutível e $\mathbb{K}[x, y]$ é fatorial. \square

Exemplo 1.57. Se l é uma reta, então o anel $A(l)$ é isomorfo a um anel de polinômios em uma variável. De modo mais preciso, se l for dada por $y = ax + b$, a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x, y] &\rightarrow \mathbb{K}[x] \\ h &\mapsto h(x, ax + b) \end{aligned}$$

é um epimorfismo com núcleo (f) , sendo $f = y - (ax + b)$. Assim, $A(l) \simeq \mathbb{K}[x, y]/(f) \simeq \mathbb{K}[x]$.

Definição 1.58. O *corpo de funções racionais* de uma curva afim irredutível e reduzida C é o corpo de frações $\mathbb{K}(C)$ do domínio $A(C)$.

Definição 1.59. Uma aplicação $\psi : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^n$ é dita *regular* ou *polinomial* se existirem polinômios homogêneos de mesmo grau, $\psi_0, \dots, \psi_n \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ de modo que, para todo $P = (x_0 : \dots : x_m) \in \mathbb{P}^m$,

$$\psi(P) = (\psi_0(P) : \dots : \psi_n(P)).$$

Observe que os polinômios ψ_0, \dots, ψ_n não podem admitir zero em comum em $P \in \mathbb{P}^m$.

Definição 1.60. Uma curva projetiva reduzida e irredutível é *racional* se for igual à imagem de uma aplicação polinomial não constante $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$.

1.5 Funções de Hilbert e Resoluções Livres Graduadas

Considere $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios sobre um corpo \mathbb{K} algebricamente fechado.

Definição 1.61. Seja $M = \bigoplus_{d=0}^{\infty} M_d$ um R -módulo graduado finitamente gerado. A *função de Hilbert* de M , denotada por $h_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, é definida por

$$d \mapsto \dim_{\mathbb{K}}(M_d).$$

Essa função está bem definida, pois cada componente homogênea M_d é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. A *Série de Hilbert* de M , a qual é denotada por $H_M(t)$ é definida por

$$H_M := \sum_{d \geq 0} h_M(d)t^d = \sum_{d \geq 0} (\dim_{\mathbb{K}} M_d)t^d.$$

Exemplo 1.62. Seja $j \geq 0$, então a série de Hilbert de $R(-j)$ é dada por:

$$\begin{aligned} H_{R(-j)}(t) &= \sum_{d \geq 0} (\dim_{\mathbb{K}} R(-j)_d)t^d \\ &= \sum_{d \geq 0} (\dim_{\mathbb{K}} R_{d-j})t^d \\ &= t^j \sum_{d \geq 0} (\dim_{\mathbb{K}} R_d)t^d \\ &= t^j \sum_{d \geq 0} \binom{n-1-d}{d} t^d \\ &= \frac{t^j}{(1-t)^n}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Definição 1.63. Seja M um R -módulo graduado finitamente gerado. Uma resolução graduada livre de M sobre o anel R é um complexo exato

$$F : 0 \rightarrow \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{l,j}} \xrightarrow{d_l} \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{l-1,j}} \xrightarrow{d_{l-1}} \dots \xrightarrow{d_2} \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{1,j}} \xrightarrow{d_1} \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0, \tag{1.3}$$

onde os mapas d_i são graduados de grau zero.

A resolução F é chamada de *resolução minimal* se, para $i \geq 1$, os mapas d_i são dados por matrizes cujas entradas são polinômios homogêneos no ideal maximal (x_1, \dots, x_n) de R . A resolução F é chamada de *resolução livre linear* se, para $i \geq 1$, os mapas d_i são dados por matrizes cujas entradas são elementos no \mathbb{K} -espaço vetorial (x_1, \dots, x_n) . No caso minimal, os números $\beta_{i,j}$ são chamados de *números de Betti graduados* do R -módulo M e são denotados por $\beta_{i,j}(M)$.

Observe na definição acima a soma direta sobre j é sempre finita pois M é um R -módulo finitamente gerado.

Teorema 1.64. (Teorema da Sizígia de Hilbert) Todo R -módulo graduado finitamente gerado possui uma resolução livre graduada de comprimento menor ou igual a n .

Demonstração. Vide [22], página 21. □

Veremos a seguir que a série de Hilbert de um R -módulo M pode ser obtida através de uma resolução livre graduada de M .

Teorema 1.65. Seja M um R -módulo graduado finitamente gerado com resolução livre graduada F como em (1.3). Então a série de Hilbert de M é dada por uma função racional:

$$H_M(t) = \frac{p(t)}{(1-t)^n},$$

onde $p(t) = \sum_{i=0}^l (-1)^i \left(\sum_{j \geq 0} \beta_{i,j} t^j \right) \in \mathbb{Z}[t]$.

Demonstração. Vide [4], página 10. □

Teorema 1.66. Seja $M = \bigoplus_{d=0}^{\infty} M_d$ um R -módulo graduado finitamente gerado de dimensão m . Então existe um polinômio $p_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de modo que $h_M(d) = p_M(d)$ para $d \gg 0$. Chamamos p_M de *polinômio de Hilbert* de M e escrevemos

$$p_M(x) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-1-i} a_{m-1-i} \binom{x+i}{i}.$$

Demonstração. Vide [27], página 2. □

Definição 1.67. Seja $M = \bigoplus_{d=0}^{\infty} M_d$ um R -módulo graduado finitamente gerado de dimensão m . Dado $p_M(x) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-1-i} a_{m-1-i} \binom{x+i}{i}$, o polinômio de Hilbert de M , definimos a *multiplicidade* de M como

$$e(M) = \begin{cases} a_0, & \text{se } m > 0 \\ l(M), & \text{se } m = 0. \end{cases}$$

A seguir, iremos relacionar o polinômio de Hilbert com o grau de uma variedade projetiva.

Definição 1.68. Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade projetiva de dimensão r , o *grau* de X é $r!$ vezes o coeficiente líder do polinômio de Hilbert $p_X(d)$.

Exemplo 1.69. Seja $X = V(F)$ uma hipersuperfície em \mathbb{P}^n intersectada por $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_r$, assim

$$p_X(d) = \frac{r}{(n-1)!} d^{n-1} + \dots$$

e $\dim X = n - 1$, então $\deg X = r$.

1.6 Teoria de Esquemas

Nesta seção, faremos uma breve abordagem sobre os esquemas afins e projetivos, a fim de apresentar no próximo Capítulo um critério de liberdade de curvas baseado em autoesquemas, que será definido mais adiante. As definições e resultados aqui apresentados podem ser consultados em [10] e [11].

Veremos que esquemas arbitrários são objetos gerados por colagem de esquemas afins do mesmo modo em que as variedades gerais são obtidas por colagem de variedades afins. Nos deparamos então com a primeira definição.

Definição 1.70. Seja R um anel. Chamamos de *espectro de R* o conjunto de todos os ideais primos de R . Denotamos esse conjunto por $\text{Spec}(R)$.

Exemplo 1.71. Sejam \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado e $R = \mathbb{K}[x]$. O espectro do anel R consiste dos pontos (0) e $(x - a)$, com $a \in \mathbb{K}$. Em contrapartida, $\text{Spec}(\mathbb{R}[x])$ contém pontos adicionais que não são dessa forma, como por exemplo $P = (x^2 + 1)$. Podemos pensar, geometricamente, em P como sendo o par de pontos conjugados $\{i, -i\}$ na extensão $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$.

Definição 1.72. Sejam R um anel e $P \in \text{Spec}(R)$ um ponto, ou seja, um ideal primo do anel R .

1. O corpo de frações do domínio de integridade R/P será denotado por $K(P)$ e é chamado de *corpo residual* de $\text{Spec}(R)$ em P .
2. Dado $f \in R$, definimos o valor de f no ponto P , $f(P)$, como sendo a imagem de f sob a composição de homomorfismos $R \rightarrow R/P \rightarrow K(P)$. Em particular, $f(P) = 0 \Leftrightarrow f \in P$.

Definição 1.73. Seja R um anel.

1. Para todo subconjunto $T \subset R$, definimos o *lugar de anulamento* de T como sendo o conjunto

$$V(T) := \{P \in \text{Spec}(R) \mid f(P) = 0, \forall f \in T\}.$$

Quando $T = \{f_1, \dots, f_n\}$ é um conjunto finito, denotamos o conjunto $V(T)$ por $V(f_1, \dots, f_n)$.

2. Dado $X \subset \text{Spec}(R)$, definimos o *ideal de X* como sendo

$$I(X) := \{f \in R \mid f(P) = 0, \forall P \in X\} \subset R.$$

Observação 1.74. Como $f(P) = 0 \Leftrightarrow f \in P$, temos que

$$V(T) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid f \in P, \forall f \in T\} = \{P \in \text{Spec}(R) \mid T \subset P\}$$

e

$$I(X) = \bigcap_{P \in X} P.$$

Munido das definições apresentadas, podemos definir a topologia de Zariski sobre $\text{Spec}(R)$.

Definição 1.75. Seja R um anel. A topologia de Zariski sobre $\text{Spec}(R)$ é a topologia cujos conjuntos fechados são os conjuntos $V(T) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid T \subset P\}$, para algum $T \subset R$.

Definição 1.76. Sejam R anel e $f \in R$. O conjunto $D(f) := \text{Spec}(R \setminus V(f)) = \{P \in \text{Spec}(R) : f \notin P\}$ é chamado de *aberto distinguido* vinculado a $f \in \text{Spec}(R)$.

Esses subconjuntos abertos distinguidos formam uma base para a topologia de $\text{Spec}(R)$.

Definição 1.77. Sejam R um anel e $U \subset \text{Spec}(R)$ um aberto. Uma *função regular* sobre U é uma família $\phi = (\phi_P)_{P \in U}$ com $\phi_P \in R_P$ para todo $P \in U$, de modo que vale a seguinte propriedade: Para todo $P \in U$, existem $f, g \in R$ com $f \notin P$ e

$$\phi_Q = \frac{g}{f} \in R_Q,$$

para todo Q em um subconjunto aberto U_P com $P \subset U_P \subset U$.

O conjunto de funções regulares é naturalmente um anel $\mathcal{O}_{\text{Spec}(R)}(U)$. Além disso, como a condição imposta sobre ϕ é local, segue que $\mathcal{O}_{\text{Spec}(R)}$ é um feixe chamado *feixe estrutural* $\text{Spec}(R)$.

Lema 1.78. (Hastes de funções regulares). Seja R um anel. Para cada ponto $P \in \text{Spec}(R)$, a *haste* $\mathcal{O}_{\text{Spec}(R),P}$ do feixe estrutural $\mathcal{O}_{\text{Spec}(R)}$ em P é isomorfo à localização R_P .

Demonstração. Vide [10], página 94. □

Definição 1.79. (Espaços localmente anelados). Um *espaço localmente anelado* é um espaço anelado (X, \mathcal{O}_X) de modo que cada stalk $\mathcal{O}_{X,P}$, com $P \in X$, é um anel local.

Definição 1.80. (Esquema afim). Seja R um anel. Um *esquema afim* é um espaço localmente anelado $(\text{Spec}(R), \mathcal{O}_{\text{Spec}(R)})$, sendo $\text{Spec}(R)$ um espaço topológico munido da topologia de Zariski e $\mathcal{O}_{\text{Spec}(R)}$ seu feixe estrutural.

Definição 1.81. (Subesquema afim). Um *subesquema afim* de um esquema afim $\text{Spec}(R)$ é um esquema $\text{Spec}(S)$ juntamente com um morfismo $i : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$, de modo que o homomorfismo de anéis correspondente $\phi : R \rightarrow S$ é sobrejetivo.

A seguir, definiremos esquemas de modo geral a partir de colagens de esquemas afins.

Definição 1.82. (Esquemas). Um *esquema* é um espaço localmente anelado que possui um recobrimento aberto por esquemas afins. Além disso, os morfismos de esquemas são apenas morfismos entre espaços localmente anelados.

Definição 1.83. (Subesquemas abertos e fechados). Seja X um esquema.

- Seja $Q \subset X$ um subconjunto aberto. Desse modo, Q admite um recobrimento aberto por subconjuntos abertos distinguidos, os quais são exemplos de esquemas afins. Portanto, Q é naturalmente um esquema chamado de *subesquema aberto* de X .
- Um *subesquema fechado* de X é um esquema Y juntamente com um morfismo $i : Y \rightarrow X$, tal que X possui um recobrimento aberto afim $\{U_k | k \in I\}$ de modo que cada restrição $i|_{i^{-1}(U_k)} : i^{-1}(U_k) \rightarrow U_k$ é um subesquema afim como definido em 1.81.

Na definição de subesquema fechado, a última condição é equivalente a exigir que $i|_{i^{-1}(U)} : i^{-1}(U) \rightarrow U$ é um subesquema afim, para todo aberto afim $U \subset X$.

Trataremos agora de uma classe importante de esquemas, construída a partir de anéis graduados, a qual é análoga às variedades projetivas. Seja R um anel graduado. Denotamos por R_+ o ideal $\bigoplus_{d>0} R_d$. Definimos o conjunto $\text{Proj}(R)$ como o conjunto de todos os ideais primos homogêneos \mathfrak{p} , que não contêm todo o R_+ . Se \mathfrak{m} é um ideal homogêneo do anel R , definimos o subconjunto $V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(R) \mid \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}\}$. Além disso, podemos definir uma topologia em $\text{Proj}(R)$ em que os subconjuntos fechados são subconjuntos da forma $V(\mathfrak{m})$.

A partir de agora, definiremos um feixe de anéis \mathcal{O} em $\text{Proj}(R)$. Para cada $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(R)$, consideremos o anel $R_{(\mathfrak{p})}$ de elementos de grau igual a zero na localização $T^{-1}R$, em que T é o sistema multiplicativo consistindo de todos os elementos homogêneos de R que não estão em \mathfrak{p} . Para um subconjunto aberto $U \subset \text{Proj}(R)$ arbitrário, definimos $\mathcal{O}(U)$ como sendo o conjunto das funções $h : U \rightarrow \bigsqcup R_{(\mathfrak{p})}$, de modo que para cada $\mathfrak{p} \in U$, $h(\mathfrak{p}) \in R_{(\mathfrak{p})}$ e, como h é localmente o quociente de elementos de R , temos que para cada $\mathfrak{p} \in U$ existe uma vizinhança V de \mathfrak{p} em U e elementos homogêneos $f, g \in R$ de mesmo grau, tal que para cada $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ e $h(\mathfrak{q}) = g/f$ em $R_{(\mathfrak{q})}$. Desse modo, temos que \mathcal{O} é um pré-feixe de anéis com as restrições naturais e, pela natureza local da definição, segue que \mathcal{O} é um feixe.

Definição 1.84. Seja R um anel graduado. Definimos $(\text{Proj}(R), \mathcal{O})$ como sendo um espaço topológico juntamente com o feixe de anéis construído anteriormente.

2 Divisores Livres Homogêneos

Neste capítulo, serão abordados os conceitos e os principais resultados sobre a liberdade de curvas algébricas planas. As definições aqui apresentadas podem ser consultadas nas referências [18], [17], [19], [23], [24], [25], [26], [28] e [30].

2.1 Derivações

Definição 2.1. Considere R um anel e M um R -módulo. Uma derivação de R com valores em M é uma aplicação $\theta : R \rightarrow M$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $\theta(a + b) = \theta(a) + \theta(b)$
2. $\theta(a \cdot b) = a \cdot \theta(b) + b \cdot \theta(a)$

para todo $a, b \in R$.

A segunda condição é conhecida como regra de Leibniz. Denotamos por $\text{Der}(R, M)$ o conjunto de todas as derivações de R tomando valores em M . Além disso, $\text{Der}(R, M)$ é um R -módulo com as operações:

$$(\theta_1 + \theta_2)(a) = \theta_1(a) + \theta_2(a)$$

$$(a\theta_1)(b) = a\theta_1(b),$$

para todos $\theta_1, \theta_2 \in \text{Der}(R, M)$ e $a, b \in R$. Vale mencionar também que quando $M = R$ apenas denotamos o conjunto de derivações por $\text{Der}(R)$.

Em qualquer anel R é possível definir uma derivação $d : R \rightarrow R$ dada por $d(a) = 0$, para todo $a \in R$. A essa derivação, atribuímos o nome de *derivação nula* ou também de *derivação trivial*. Suponha que R seja uma S -álgebra, com S anel, assim podemos considerar o submódulo $\text{Der}_S(R, M) = \{\theta \in \text{Der}(R, M) \mid \theta(x) = 0, \forall x \in S\}$. Além disso, os elementos de $\text{Der}_S(R, M)$ são chamados de S -derivações. Note que se $S = \mathbb{Z}$, então temos $\text{Der}(R, M) = \text{Der}_{\mathbb{Z}}(R, M)$. De fato, dado $\theta \in \text{Der}(R, M)$, temos $\theta(1) = \theta(1 \cdot 1) = 1 \cdot \theta(1) + 1 \cdot \theta(1)$, isto é, $\theta(1) = 0$ e, portanto, $\theta \in \text{Der}_{\mathbb{Z}}(R, M)$.

Sejam \mathbb{K} um corpo, $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios e M um R -módulo. Ao fixar elementos $m_1, \dots, m_n \in M$ arbitrários, temos que a aplicação $\theta : R \rightarrow M$ dada por $\theta(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} m_i$ é uma derivação de R em M . Quando temos $M = R$ e $m_i = x_i$ com $i \in \{1, \dots, n\}$, chamamos a derivação θ de derivação de Euler a qual denotamos por ϵ . Ademais, para cada i , $\frac{\partial}{\partial x_i} : R \rightarrow R$ dada por $\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ é uma \mathbb{K} -derivação de f .

Exemplo 2.2. Seja \mathbb{K} um corpo de característica zero. Se $f \in R$ é um polinômio homogêneo de grau $d > 0$, tem-se que $\epsilon(f) = d \cdot f$, isto é,

$$f = \frac{x_1}{d} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{x_n}{d} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Essa igualdade é conhecida como identidade de Euler.

Proposição 2.3. Sejam \mathbb{K} um corpo e $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios. Então $\text{Der}_{\mathbb{K}}(R)$ é um R -módulo livre de posto n e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ forma uma base para $\text{Der}_{\mathbb{K}}(R)$.

Demonstração. Seja $\theta \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(R)$. Defina $\bar{\theta} : R \rightarrow R$ como $\bar{\theta}(f) = \sum_{i=1}^n \theta(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}$. É imediato que $\bar{\theta} \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(R)$. Além disso, temos que $\bar{\theta}(x_j) = \theta(x_j)$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, $\bar{\theta} = \theta$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ geram $\text{Der}_{\mathbb{K}}(R)$. Agora, sejam $a_1, \dots, a_n \in R$ elementos tais que $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$. Desse modo, $0 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = a_j$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ são linearmente independentes. □

Com a proposição acima, podemos escrever

$$\text{Der}_{\mathbb{K}}(R) = \bigoplus_{i=1}^n R \frac{\partial}{\partial x_i} \cong R^{\oplus n}.$$

Sejam \mathbb{K} um corpo, $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios e $I = (f_1, \dots, f_n) \subset R$ um ideal de R . Definimos a matriz Jacobiana de I como sendo a matriz $m \times n$ $J = J(I) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$.

2.2 Módulo de Saito

Definição 2.4. Sejam \mathbb{K} um corpo, $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios e $I \subset R$ um ideal. Então o conjunto

$$\text{Der}_I(R) = \{ \theta \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(R) \mid \theta(I) \subset I \}$$

é o R -módulo de *derivações logarítmicas* do ideal I , também conhecido como *idealizador tangencial* do ideal I .

É imediato que $\text{Der}_I(R)$ é um R -submódulo de $\text{Der}_{\mathbb{K}}(R)$ pois $(a\theta_1 + \theta_2) \subset I$ para todos $\theta_1, \theta_2 \in \text{Der}_I(R)$ e $a \in R$.

Exemplo 2.5. Sejam \mathbb{K} um corpo, $R = \mathbb{K}[x, y, z]$ o anel de polinômios e $I \subset R$ ideal dado por $I = (xy, yz)$. Considere $\theta \in \text{Der}_I(R) \subset \text{Der}_{\mathbb{K}}(R) = R \frac{\partial}{\partial x} + R \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}$. Assim,

$$\theta = a \cdot \frac{\partial}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial}{\partial y} + c \cdot \frac{\partial}{\partial z}.$$

Além disso, note que $\theta(xy) = ay + bx \in I$ e $\theta(yz) = bz + cy \in I$. Assim, é fácil ver que $a, c \in (x, z)$ e $b \in (y)$. Como temos $(x, z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + (y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + (x, z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \subset \text{Der}_I(R)$, obtemos que

$$\text{Der}_I(R) = (x, z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \oplus (y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \oplus (x, z) \cdot \frac{\partial}{\partial z}.$$

Seja $I \subseteq R$ um ideal, podemos escrever

$$\text{Der}_I(R) = \left\{ \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(R) \mid \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in I, \forall f \in I \right\}.$$

Além disso, definimos o conjunto

$$\text{Der}_{\alpha}(R)^0 = \left\{ \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(R) \mid \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \forall j = 1, \dots, m \right\},$$

onde $\alpha = \{f_1, \dots, f_m\}$ é o conjunto de geradores do ideal I . Note que $\text{Der}_{\alpha}(R)^0$ é um R -submódulo de $\text{Der}_I(R)$.

Sejam \mathbb{K} um corpo e $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios. Para $f \in R$ não nulo, definimos o *ideal gradiente* do polinômio f como sendo $I_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, e o *ideal Jacobiano* como sendo $J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, f \right) = (I_f, f)$. Para o caso em que $f \in I_f$, chamamos o polinômio f de *euleriano* ou de *quase-homogêneo*. Cabe observar que quando $f \in R$ é homogêneo de grau $n > 0$, então f é euleriano. De fato, pela identidade de Euler vista anteriormente, temos que

$$f = \frac{x_1}{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \frac{x_n}{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} \in I_f.$$

Definição 2.6. Seja $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $I \subset R$ um ideal. Se I é um ideal principal, isto é, $I = (f)$, então $\text{Der}_I(R)$ é chamado de *módulo de Saito* do polinômio f , e será denotado por $\text{Der}_f(R)$.

Como, neste caso, o conjunto de geradores do ideal I é $\alpha = \{f\}$, denotaremos $\text{Der}_{\alpha}(R)^0$ por $\text{Der}_f(R)^0$.

Definição 2.7. Um polinômio $f \in R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é dito um *divisor livre* se seu módulo de Saito $\text{Der}_f(R)$ é um R -módulo livre.

Para identificar se determinada curva é livre, Saito forneceu um critério analítico em seu artigo [21] que, quando traduzido algebricamente, tem o seguinte enunciado:

Teorema 2.8. (Critério de Saito) Sejam $f \in R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um polinômio reduzido e homogêneo de grau d e

$$\theta_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para $j = 1, \dots, n$ as derivações em $\text{Der}_f(R)$. Então f é um divisor livre e $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ é uma base para $\text{Der}_f(R)$ se, e somente se, o determinante da matriz $S = (g_{ij})$ é da forma λf , para algum $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. A matriz S é chamada de matriz de Saito do polinômio f .

Exemplo 2.9. Seja $f(x, y, z) = xyz \in R = \mathbb{C}[x, y, z]$ e considere as derivações $\theta_1 = x \frac{\partial}{\partial x}$, $\theta_2 = y \frac{\partial}{\partial y}$ e $\theta_3 = z \frac{\partial}{\partial z}$. Note que $\theta_j(f) = f$ para $j = 1, 2, 3$. Desse modo, temos que $\theta_j \in \text{Der}_f(R)$. Além disso, a matriz de Saito de f é dada por:

$$S = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix},$$

de modo que $\det(S) = 1 \cdot f$. Pelo Critério de Saito, f é um divisor livre e, conseqüentemente, obtemos que o módulo de Saito de f é dado por:

$$\text{Der}_f(R) = R\theta_1 \oplus R\theta_2 \oplus R\theta_3 \cong R^3.$$

Ao escrever uma derivação \mathbb{K} -linear como $\theta = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ temos que, após a identificação $\text{Der}_{\mathbb{K}}(R) \cong R^n$ através do mapeamento ordenado das derivadas parciais para a base canônica de R^n , $\text{Der}_f(R)^0$ se torna o R -módulo $\text{Syz}_1(J_f)$ de primeiras sizígias do ideal jacobiano J_f . Com essa identificação natural, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.10. Sejam \mathbb{K} um corpo, $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $f = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in I_f$ um polinômio euleriano de grau d , onde $g_i \in R$. Tome $\epsilon_f = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \text{Der}_f(R)$. Se a característica de \mathbb{K} não divide d , então

$$\text{Der}_f(R) = \text{Syz}_1(I_f) \oplus R \cdot \epsilon_f.$$

Demonstração. Por hipótese, $I_f \cap (f) = (f)$. Temos a seguinte seqüência exata

$$0 \rightarrow \text{Syz}_1(I_f) \rightarrow \text{Der}_f(R) \xrightarrow{\tau} (f) \rightarrow 0,$$

com $\tau(\theta) = \theta(f)$, para todo $\theta \in \text{Der}_f(R)$, que admite a cisão $\tau' : (f) \rightarrow \text{Der}_f(R)$ dada naturalmente por $hf \mapsto h\epsilon_f$, para todo $h \in R$. Portanto, $\text{Der}_f(R) = \text{Syz}_1(I_f) \oplus \text{Im}(\tau') = \text{Syz}_1(I_f) \oplus R\epsilon_f$. \square

Uma consequência do resultado do Teorema 2.10 é o cálculo da profundidade do módulo de Saito de um polinômio não nulo f .

Corolário 2.11. Seja $f \in R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo com ideal gradiente próprio, não nulo e não principal. Então

$$\text{prof}(\text{Der}_f(R)) = \text{prof}\left(\frac{R}{I_f}\right) + 2.$$

Demonstração. Tomemos as seguintes sequências exatas:

$$0 \rightarrow \text{Syz}_1(J_f) \rightarrow R^n \rightarrow J_f \rightarrow 0$$

e

$$0 \rightarrow J_f \rightarrow R \rightarrow R/J_f \rightarrow 0.$$

Desse modo, segue que $\text{dh}(J_f) = \text{dh}(\text{Syz}_1(J_f)) + 1$ e $\text{dh}(R/J_f) = \text{dh}(J_f) + 1$. Utilizando o Teorema 2.10, temos que $\text{dh}(R/J_f) = \text{dh}(\text{Der}_f(R)) + 2$. Além disso, pelo Teorema 1.23, $\text{dh}(\text{Der}_f(R)) + \text{prof}(\text{Der}_f(R)) = \text{prof}(R) = n$ e $\text{dh}(R/J_f) + \text{prof}(R/J_f) = \text{prof}(R) = n$. Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} \text{prof}(\text{Der}_f(R)) &= n - \text{dh}(\text{Der}_f(R)) \\ &= n - \text{dh}(R/J_f) + 2 \\ &= n - n + \text{prof}(R/J_f) + 2 \\ &= \text{prof}(R/J_f) + 2. \end{aligned}$$

□

Apresentaremos a seguir um resultado conhecido de Álgebra Comutativa: Se $I \subset R$ é um ideal homogêneo com $\text{alt}(I) \geq 2$, então $\text{dh}(I) = 1$ se, e somente se, I é perfeito com $\text{alt}(I) = 2$. Com efeito, suponha que I é perfeito de altura 2. Então $\frac{R}{I}$ é Cohen-Macaulay. Pelo Teorema de Auslander-Buchsbaum, temos que

$$\text{dh}\left(\frac{R}{I}\right) + \text{prof}\left(\frac{R}{I}\right) = \text{prof}(R) = n,$$

ou seja, $\text{dh}\left(\frac{R}{I}\right) = n - \text{prof}\left(\frac{R}{I}\right) = n - (n - 2) = 2$. Assim, pelo diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R^{n-1} & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & R \longrightarrow \frac{R}{I} \longrightarrow 0 \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & & I \longrightarrow 0 \end{array}$$

obtemos que $\text{dh}(I) = 1$. Reciprocamente, suponha que $\text{dh}(I) = 1$. Assim, $2 = \text{dh}\left(\frac{R}{I}\right) = \text{prof}(R) - \text{prof}\left(\frac{R}{I}\right) = n - \text{prof}\left(\frac{R}{I}\right)$. Logo, $n - 2 = \text{prof}\left(\frac{R}{I}\right) \leq \dim\left(\frac{R}{I}\right) = n - \text{alt}(I) \leq n - 2$. Portanto, $\text{alt}(I) = 2$ e $\text{prof}\left(\frac{R}{I}\right) = \dim\left(\frac{R}{I}\right)$, como desejado.

Teorema 2.12. Seja $f \in R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um polinômio reduzido, homogêneo de grau maior ou igual a 2. Então f é livre se, e somente se, J_f é perfeito de codimensão 2 (isto é, $\text{dh}(J_f) = 1$).

Demonstração. Pelo Teorema 2.10, temos a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Syz}_1(J_f) \rightarrow \text{Der}_f(R) \rightarrow R \cdot \epsilon_f \rightarrow 0.$$

Suponha f livre. Então $\text{Der}_f(R)$ é um R -módulo livre. Novamente pelo Teorema 2.10, temos que $\text{Syz}_1(J_f)$ é um R -módulo projetivo. Portanto, a sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Syz}_1(J_f) \rightarrow R^n \rightarrow J_f \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

é uma resolução projetiva, o que significa que $\text{dh}(J_f) = 1$. Reciprocamente, suponha que $\text{dh}(J_f) = 1$. Então, da sequência (2.1), segue que $\text{Syz}_1(J_f)$ é livre. Pelo Teorema 2.10, segue que $\text{Der}_f(R)$ é um R -módulo livre e, conseqüentemente, f é um divisor livre. \square

Exemplo 2.13. Seja $f = xyz(x + y) \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Temos que $J_f = (2xyz + y^2z, x^2z + 2xyz, x^2y + xy^2)$. Pelo programa Macaulay2 [2], temos que J_f possui uma resolução graduada livre minimal da forma

$$0 \rightarrow R^2 \xrightarrow{\phi} R^3 \rightarrow J_f \rightarrow 0,$$

cuja matriz de Hilbert-Burch é dada por

$$\phi = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & xy + y^2 \\ -3z & -xz - 2yz \end{pmatrix}.$$

Logo, $\text{dh}(J_f) = 1$ e, conseqüentemente, segue que f é um divisor livre.

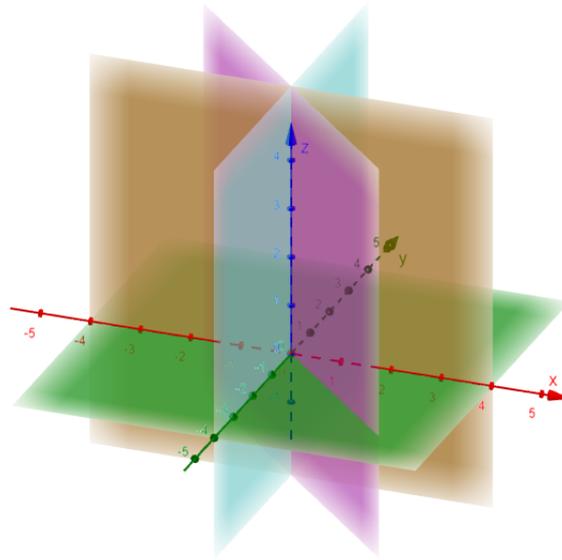


Figura 1 – 3-Arranjo: $f(x, y, z) = xyz(x + y)$

Exemplo 2.14. Seja $f = xyz(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2) \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Fazendo uso do programa Macaulay2 [2], segue que J_f possui uma resolução graduada livre minimal da forma

$$0 \rightarrow R^2 \xrightarrow{\phi} R^3 \rightarrow J_f \rightarrow 0,$$

cuja matriz de Hilbert-Burch é dada por

$$\phi = \begin{pmatrix} 4x^3 - 5xy^2 - 5xz^2 & 5xy^4 - 22xy^2z^2 + 5xz^4 \\ -5x^2 + 4y^3 - 5yz^2 & 9x^2y^3 - 4y^5 - 27x^2yz^2 + 5y^3z^2 + 5yz^4 \\ -5x^2z - 5y^2z + 4z^3 & -27x^2y^2z + 5y^4z + 9x^2z^3 + 5y^2z^3 - 4z^5 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\text{dh}(J_f) = 1$ e, pelo Teorema 2.12, f é um divisor livre.

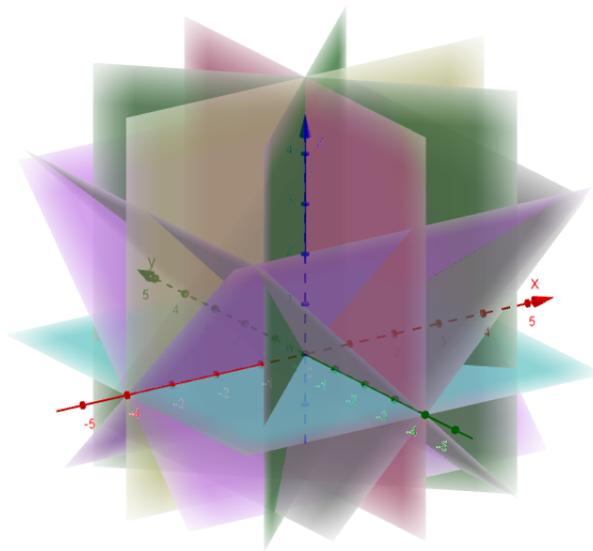


Figura 2 – B3 Arranjo: $xyz(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)$

Exemplo 2.15. Seja $f = xy(x + y)(x + yz) \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Pelo programa Macaulay2 [2], segue que J_f possui uma resolução graduada livre minimal da forma

$$0 \rightarrow R^4 \rightarrow R^5 \rightarrow J_f \rightarrow 0,$$

cuja matriz de Hilbert-Burch de J_f é dada por

$$\phi = \begin{pmatrix} xy & 2x^2 + 5xy & -2xyz - x^2 - 3xy \\ y^2 & -6xy - 3y^2 & -2y^2z + 3xy + y^2 \\ -4yz - 4x & 8xz + 4yz - 4x & 8yz^2 + 4xz + 4x \end{pmatrix}.$$

Logo, $\text{dh}(J_f) = 1$ e, conseqüentemente, f é um divisor livre.

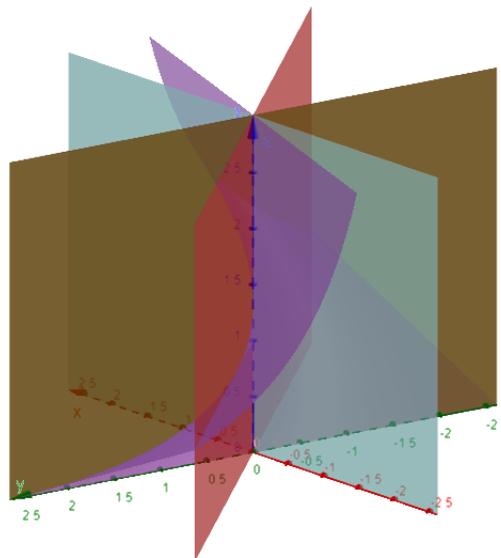


Figura 3 – As 4 retas: $xy(x + y)(x + yz)$

Veremos no próximo exemplo que dadas duas curvas livres, o produto entre elas não necessariamente resulta em uma curva livre.

Exemplo 2.16. Os polinômios $f(x, y, z) = xyz$ e $g(x, y, z) = x + y + z$ são divisores livres em $R = \mathbb{C}[x, y, z]$. Entretanto, o produto $h = fg = x^2yz + xy^2z + xyz^2$ não é um divisor livre. De fato, novamente fazendo uso do programa Macaulay2 [2], temos que J_h possui uma resolução graduada livre minimal da forma

$$0 \rightarrow R \rightarrow R^3 \rightarrow R^3 \rightarrow J_h \rightarrow 0,$$

cujas matriz de Hilbert-Burch é dada por

$$\phi = \begin{pmatrix} xy - xz & x^2 + 3xz & 0 \\ y^2 + 3yz & -y^2 - 3yz & xy + y^2 + 2yz \\ -3yz - z^2 & -2xz + 2yz & -xz - 2yz - z^2 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\text{dh}(J_h) = 2$ e, conseqüentemente, f não é um divisor livre.

2.3 Curvas Livres em \mathbb{P}^2

Seja $R = \mathbb{C}[x, y, z]$ e $I \subset R$ um ideal. Assuma que I tem codimensão 2 e é gerado por três polinômios homogêneos todos com o mesmo grau, isto é, $I = (f_1, f_2, f_3)$. Dizemos que $(a_1, a_2, a_3) \in R^3$ é uma sizígia para o ideal I se

$$a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 = 0.$$

Além disso, dizemos que uma sizígia $(a_1, a_2, a_3) \in R^3$ do ideal I é *regular* se $\{a_1, a_2, a_3\}$ é uma seqüência regular (equivalentemente, se $V(a_1, a_2, a_3) = \emptyset$ como um conjunto em \mathbb{P}^2).

Para os próximos resultados, considere $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^2$ uma curva reduzida de grau $d + 1$. Além disso, sejam $J_f = (f_x, f_y, f_z)$ o ideal jacobiano associado de f e $\text{Syz}(J_f)$ o módulo de sizígias de J_f .

Lema 2.17. Sejam $R = \mathbb{K}[x, y, z]$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ e $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ elementos de $\text{Syz}(J_f)$. Então existe um polinômio $h \in R$ tal que $I_2 \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \right) = h \cdot J_f$.

Demonstração. Como α e β são sizígias para o ideal jacobiano J_f , temos que

$$\begin{cases} \alpha_1f_x + \alpha_2f_y + \alpha_3f_z = 0 \\ \beta_1f_x + \beta_2f_y + \beta_3f_z = 0 \end{cases}.$$

Então, ao multiplicar a primeira linha por β_3 , a segunda linha por α_3 e, por fim, igualar ambas as linhas, temos

$$\alpha_1\beta_3f_x + \alpha_2\beta_3f_y + \alpha_3\beta_3f_z - \beta_1\alpha_3f_x - \beta_2\alpha_3f_y - \beta_3\alpha_3f_z = 0.$$

Daí, segue que

$$(\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3)f_x + (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)f_y = 0.$$

Como a curva X é reduzida, segue que $\gcd(f_x, f_y) = 1$. Então, existe $h \in R$ tal que

$$\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3 = hf_y,$$

$$\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3 = hf_x.$$

É fácil concluir que $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = hf_z$. Portanto, concluímos que

$$I_2 \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \right) = h \cdot (f_x, f_y, f_z).$$

□

Proposição 2.18. Seja $X = V(f)$ uma curva reduzida de grau $d + 1$. Se $\text{Syz}(J_f)$ admite

sizígias α e β tais que $\text{mdc} \left(\bigwedge^2 M \right) = 1$, onde $M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$, então X é um divisor livre.

Demonstração. A matriz M define uma mapa R -linear $R^2 \xrightarrow{M} R^3$. Note que, pelo Lema 2.17, $\text{alt}(I_2(M)) = \text{alt}(hJ_f) = \text{alt}(J_f) \geq 2$. Pela recíproca do Teorema 1.2, $I_2(M) = J_f$ possui a resolução livre

$$0 \rightarrow R^2 \xrightarrow{M} R^3 \rightarrow J_f \rightarrow 0.$$

Concluímos, portanto, que X é um divisor livre. □

Proposição 2.19. Se $\text{Syz}(J_f)$ admite alguma sizígia regular, então $X = V(f)$ é um divisor livre.

Demonstração. Seja $u = (u_1, u_2, u_3) \in \text{Syz}(J_f)$ uma sizígia regular. Então, $u_1f_x + u_2f_y + u_3f_z = 0$. Pela definição de sequência regular, temos que $f_x \in (u_2, u_3)$, isto é, $f_x = au_2 + bu_3$, onde $a, b \in R$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= u_1(au_2 + bu_3) + u_2f_y + u_3f_z \\ &= u_2(au_1 + f_y) + u_3(bu_1 + f_z) \end{aligned}$$

e isso nos fornece que $au_1 + f_y = \lambda u_3$ e $bu_1 + f_z = -\lambda u_2$, onde $\lambda \in R$. Portanto, os 2-menores da matriz

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & \lambda \\ u_2 & -b \\ u_3 & a \end{bmatrix}$$

são $f_x, -f_y, f_z$. Isso significa que R/J_f possui uma resolução graduada de Hilbert-Burch do tipo

$$0 \rightarrow R^2 \xrightarrow{M} R^3 \rightarrow J_f \rightarrow 0.$$

Concluimos, portanto, que X é livre. □

Esse resultado pode ser expresso pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 R(-a) & \xlongequal{\quad} & R(-a) & & \\
 \downarrow \bar{\nu} & & \downarrow \nu & \xrightarrow{\quad \nabla_f \quad} & \\
 \text{Syz}(J_f) & \hookrightarrow & R^3 & \twoheadrightarrow & J_f(d) \hookrightarrow R(d) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 \text{coker}(\bar{\nu}) & \hookrightarrow & M & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & J_f(d)
 \end{array}$$

Exemplo 2.20. Vimos no Exemplo 2.9 que, fazendo uso do critério de Saito, $f(x, y, z) = xyz \in R = \mathbb{C}[x, y, z]$ é um divisor livre. Usaremos agora o critério das sizígias regulares para mostrar este fato. Sabemos o que o ideal jacobiano de f é $J_f = (yz, xz, xy)$. Além disso, como $\{x, y, -2z\}$ é uma sequência regular e

$$x \cdot yz + y \cdot xz + (-2z) \cdot xy = 0,$$

segue que $(x, y, -2z)$ é uma sizígia regular para J_f e, pela Proposição 2.19, f é um divisor livre.

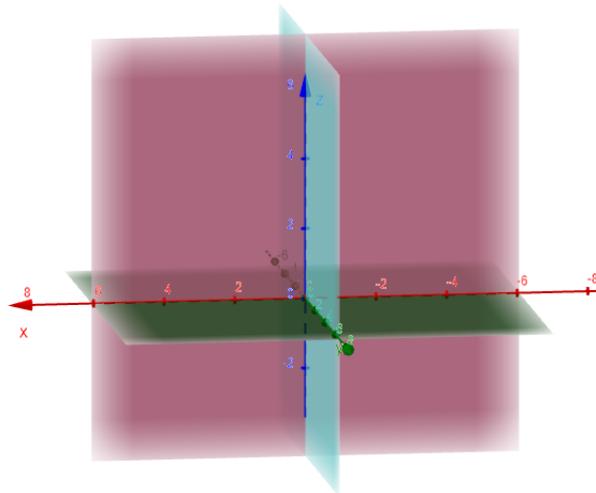


Figura 4 – 3-Arranjo: $f(x, y, z) = xyz$

Exemplo 2.21. Seja $R = \mathbb{C}[x, y, z]$ e considere a cúbica homogênea $f(x, y, z) = y(x^2 + yz) \in R$. Sabemos o que o ideal jacobiano de f é $J_f = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$. Como $\{-\frac{x}{2}, y, -2z\}$ é uma sequência regular e

$$-\frac{x}{2} \cdot (2xy) + y \cdot (x^2 + 2yz) - 2z \cdot (y^2) = 0,$$

segue da Proposição 2.19 que f é um divisor livre.

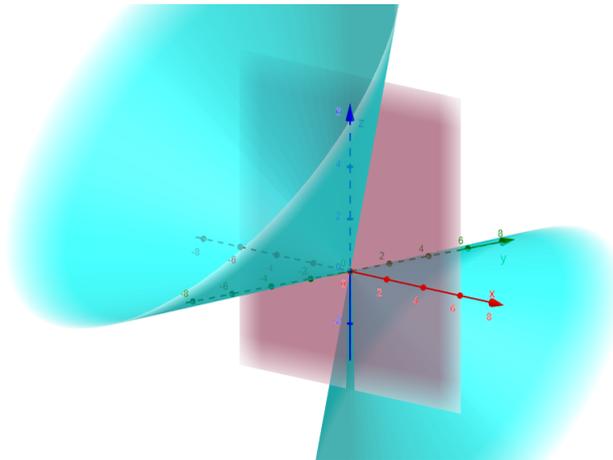


Figura 5 – Cone + plano: $f = z(y^2 - xz)$

Exemplo 2.22. Seja $f(x, y, z) = z(y^2 - xz) \in R = \mathbb{C}[x, y, z]$. Sabemos o que o ideal jacobiano de f é $J_f = (-z^2, 2yz, y^2 - 2xz)$. Pelo programa Macaulay2 [2], temos que J_f possui uma resolução graduada livre na forma

$$0 \rightarrow R^2 \xrightarrow{\phi} R^3 \rightarrow J_f \rightarrow 0,$$

cuja matriz de Hilbert-Burch é dada por

$$\phi = \begin{pmatrix} 2y & 4x \\ z & y \\ 0 & -2z \end{pmatrix}.$$

Note que o segundo vetor coluna da matriz forma uma sequência regular e é uma sizígia para J_f . De fato, temos que

$$4x(-z^2) + y(2yz) + (-2z)(y^2 - 2xz) = 0.$$

Pela Proposição 2.19, segue que f é um divisor livre. Além disso, temos também que $\text{dh}(J_f) = 1$, podendo também ser usado o critério mencionado no Teorema 2.12 para obtermos a mesma conclusão.

Cabe observar que a recíproca da Proposição 2.19 não é válida. Para ver isso, note que no Exemplo 2.15 $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ é um divisor livre mas J_f não admite sizígia regular.

2.3.1 Curvas Livres Irredutíveis

A seguir, serão apresentados alguns resultados estudados sobre a liberdade de curvas irredutíveis e estaremos considerando sempre \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado.

Proposição 2.23. Seja $f \in R = \mathbb{K}[x, y, z]$ homogêneo e irredutível com $\deg(f) \leq 3$. Então f é um divisor livre se, e somente se, $\deg(f) = 1$.

Demonstração. Se $\deg(f) = 1$, então temos uma reta $f = ax + by + cz$, com $a \neq 0$. Como $a = \frac{\partial}{\partial x} \in J_f$, temos que $J_f = R$ e f é trivialmente livre. Se $\deg(f) = 2$, então $V(f)$ é o conjunto vazio, ou seja, $f = x^2 + y^2 + z^2$. Pelo programa *Macaulay2*, $\text{dh}(J_f) = 2$. Logo, f não é livre. Se $\deg(f) = 3$, então $V(f)$ é uma curva não singular, uma curva com singularidade nodal ou uma cúspide, ou seja, $f \in \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1 = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz$, $f_2 = y^2z - x^3 - x^2z$ e $f_3 = zy^2 - x^3$. Sendo f uma curva não singular, temos que $\text{alt}(J_{f_1}) = 3$, logo f_1 não seria livre. Para o caso da curva com uma singularidade nodal ou cuspidal, note que $xz\mathfrak{m} \subset J_{f_2} = (-3x^3 - 2xz, 2yz, y^2 - x^2)$ e $xy\mathfrak{m} \subset J_{f_3} = (-3x^2, 2yz, y^2)$, porém $xz \notin J_{f_2}$ e $xy \notin J_{f_3}$. Assim, os conjuntos dos elementos $\frac{R}{J_{f_2}}$ -regulares em \mathfrak{m} e $\frac{R}{J_{f_3}}$ -regulares em \mathfrak{m} são vazios. Logo, $\text{prof}\left(\frac{R}{J_{f_2}}\right) = \text{prof}\left(\frac{R}{J_{f_3}}\right) = 0$ mas $\dim\left(\frac{R}{J_{f_2}}\right) \neq 0$ e $\dim\left(\frac{R}{J_{f_3}}\right) \neq 0$. Portanto, $\frac{R}{J_{f_2}}$ e $\frac{R}{J_{f_3}}$ não são Cohen-Macaulay e, conseqüentemente, f não é divisor livre. \square

Suponha que o polinômio irredutível f tem grau 4. No artigo [26], Simis e Tohaneanu mostram que f não deveria ser um divisor livre. No mesmo artigo, eles construíram uma família de divisores livres irredutíveis de grau $d \geq 5$, dada por

$$F = y^{d-1}z + a_1x^d + a_2x^2y^{d-2} + a_3xy^{d-1} + a_4y^d \in \mathbb{K}[x, y, z],$$

com $a_1, a_2 \neq 0$.

A família acima foi generalizada em 2014 por Nanduri em seu artigo [19]. Foi provado que, para $d \geq 5$,

$$F = x^{d-\alpha}F_1(x, y) + y^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + \alpha + 1}F_2(x, y) + x^\beta y^{d-\beta-1}z$$

é um divisor livre irredutível em $\mathbb{K}[x, y, z]$ se

- $\alpha, \beta \geq 0$ e $0 \leq \alpha + \beta \leq \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor$
- $F_1(x, y)$ é homogêneo de grau α e $x \nmid F_1, y \nmid F_1$
- $F_2(x, y)$ é homogêneo de grau $d - \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - \alpha - 1$ e $x \nmid F_2, y \nmid F_2$.

Além disso, uma matriz de Saito de F é dada por

$$S = \begin{pmatrix} x & x^{\beta+1}y^{\gamma+2}\frac{\partial F_1}{\partial y} & H_1 + x^\beta y^{\gamma+1}z\frac{\partial F_1}{\partial y}E \\ y & -x^{\beta+1}y^{\gamma+2}\left(x\frac{\partial F_1}{\partial x} + (d-\alpha)F_1\right) & H_3 - x^{\beta-1}y^{\gamma+1}z\left(x\frac{\partial F_1}{\partial x} + (d-\alpha)F_1\right) \\ z & G_3 - x^\beta y^{\gamma+1}zW & H_5 + H_6z - x^{\beta-1}y^\gamma z^2EW \end{pmatrix}.$$

Consideremos o seguinte critério de irreduzibilidade:

Lema 2.24. Seja $p(y, z) = z^3 + f_1(y)f_2(y)z^2 + cf_1(y)^2z + df_1(y)^3 \in \mathbb{K}[y, z]$ com $f_1(y), f_2(y) \in \mathbb{K}[y]$ com $\deg(f_1(y)) = \deg(f_2(y)) = 2$ e $c, d \in \mathbb{K} - \{0\}$. Então $p(y, z)$ é irreduzível em $\mathbb{K}[y, z]$.

Demonstração. Suponha que o polinômio $p(y, z)$ é redutível. Dessa forma, podemos escrevê-lo como

$$p(y, z) = (z + g(y))(z^2 + h_1(y)z + h_2(y)),$$

onde $g(y), h_1(y), h_2(y) \in \mathbb{K}[y]$. Expandindo esse produto, temos

$$p(y, z) = z^3 + (h_1(y) + g(y))z^2 + (h_2(y) + h_1(y)g(y))z + h_2(y)g(y). \quad (2.2)$$

Ao observar que $f_1(y)$ é um fator comum de todos os y -coeficientes de $p(y, z)$, exceto o primeiro, segue que um fator primo de $f_1(y)$ divide todos os três $g(y), h_1(y)$ e $h_2(y)$ ao comparar com a equação (2.2). Note que $h_1(y) \neq 0$ pois, caso contrário, $g(y)$ e $h_2(y)$ deveriam ambos possuir grau 4 para completar os graus de $p(y, z)$, o que é impossível já que o produto deles tem grau 6. Portanto, segue que $\deg(h_1(y)) \geq 1$. Isso exclui a possibilidade de $\deg(g(y)) \geq 4$ pois, caso contrário, $\deg(h_2(y)) \leq 2$, o que sugeriria que o y -coeficiente de z em $p(y, z)$ possuiria grau errado. Sendo assim, temos que $1 \leq \deg(g(y)) \leq 3$, pois $g(y)$ tem um fator primo. Nessa faixa, temos que necessariamente $\deg(h_1(y)) = 4$, a fim de completar o grau do y -coeficiente de z^2 no polinômio $p(y, z)$. Portanto, $5 \leq \deg(g(y)h_1(y)) \leq 7$. Para que ocorra um cancelamento no y -coeficiente de z em $p(y, z)$, precisamos ter que $\deg(h_2(y)) \geq 5$. Assim, a única maneira de isso ocorrer seria ter $\deg(g(y)) = 1$ e $\deg(h_2(y)) = 5$. Nesse caso, não há contradição aparente em relação aos graus. Observe que, necessariamente, $g(y)$ é um fator de h_1 e h_2 , então existem $h'_1(y), h'_2(y) \in \mathbb{K}[y]$ tais que $h_1(y) = g(y)h'_1(y)$ e $h_2(y) = g(y)h'_2(y)$. Substituindo na equação (2.2), segue que

$$p(y, z) = z^3 + g(y)(h'_1(y) + 1)z^2 + g(y)(h'_2(y) + h'_1(y)g(y))z + h'_2(y)g(y)^2. \quad (2.3)$$

Temos que $f_1(y) = g(y)g'(y)$, para $g'(y) \in \mathbb{K}[y]$. Ao comparar as equações, concluímos que $g(y)^2h'_2(y) = g(y)h_2(y) = df_1(y)^3 = dg(y)^3g'(y)^3$, isto é, $h'_2(y) = dg(y)g'(y)^3$. Por um lado, temos

$$\begin{aligned} cg(y)^2g'(y)^2 &= cf_1(y)^2 \\ &= g(y)(h'_2(y) + h'_1(y)g(y)) \\ &= g(y)(dg(y)g'(y)^3 + h'_1(y)g(y)) \\ &= g(y)^2(h'_1(y) + dg'(y)^3). \end{aligned}$$

Assim, isolando $h'_1(y)$, temos que $cg'(y) - dg'(y)^2g'(y) = h'_1(y)$, ou seja, $g'(y) \mid h'_1(y)$. Por outro lado,

$$f_2(y)g(y)g'(y) = f_1(y)f_2(y) = g(y)(h'_1(y) + 1).$$

Logo, $f_2(y)g'(y) = h'_1(y) + 1$, ou seja, $g'(y) \mid 1 + h'_1(y)$, contradição. \square

A seguir, será feita uma descrição de uma família de divisores livres homogêneos irreduzíveis de grau 6 em $\mathbb{K}[x, y, z]$, as Sexticas de Cayley, que pode ser encontrada em [25].

Considere o anel $S = \mathbb{K}[u, v, x, y, z]$ e a seguinte equação cúbica $h(T) = T^3 - pT + q$, onde p e q são polinômios fixados no anel S dados por $p = x^2 + vy^2 + uxz$ e $q = u(x^2 + vy^2)z$. Temos que $h(T)$ é um polinômio quase-homogêneo de grau 6, onde estamos tomando os graus:

$$\text{grau}(u) = 1, \text{ grau}(x) = 2$$

$$\text{grau}(v) = 2, \text{ grau}(y) = 1$$

$$\text{grau}(T) = 2, \text{ grau}(z) = 1.$$

O discriminante de $h(T)$ é dado por

$$F(u, v, x, y, z) = 4(x^2 + vy^2 + uxz)^3 - 27u^2(x^2 + vy^2)^2z^2,$$

um polinômio quase-homogêneo de grau 12. Para cada par $(a, b) \in \mathbb{A}^2$, com $ab \neq 0$, a fibra $f_{a,b} = F(a, b, x, y, z)$ é a chamada *sêxtica de Cayley* e o conjunto formado por essas fibras

$$\Gamma = \{f_{a,b} \in \mathbb{K}[x, y, z]; (a, b) \in \mathbb{A}^2, ab \neq 0\}$$

é a *família de Cayley*, onde redefinimos a graduação das variáveis para $\text{grau}(x) = \text{grau}(y) = z = 1$.

Teorema 2.25. Seja $f \in \Gamma$ uma *sêxtica de Cayley*. Então f é um divisor livre irreduzível.

Demonstração. É suficiente mostrar a irreduzibilidade de f na parte afim $x = 1$ para obter o resultado. Fazendo as devidas substituições, temos:

$$\begin{aligned} f_{a,b}(1, y, z) &= 4(1 + by^2 + az)^3 - 27a^2(1 + by^2)z^2 \\ &= 4 + 12b^2y^4 - 15a^2z^2 + 12az + 24aby^2z + 4b^3y^6 - 42a^2by^2z^2 + 12ab^2y^4z + 4a^3z^3 \\ &\quad - 27a^2b^2y^4z^2 \\ &= 4a^3z^3 - (15a^2 + 42a^2by^2 + 27a^2b^2y^4)z^2 + (12a + 24aby^2 + 12ab^2y^4)z \\ &\quad + (4 + 12b^2y^4 + 12by^2 + 4b^3y^6) \\ &= z^3 - \frac{3}{4}(9by^2 + 5) \left(\frac{b}{a}y^2 + \frac{1}{a} \right) z^2 + 3 \left(\frac{b}{a} + \frac{1}{a} \right)^2 z + \left(\frac{b}{a}y^2 + \frac{1}{a} \right)^3 \end{aligned}$$

Ao tomar $f_1(y) = \frac{b}{a}y^2 + \frac{1}{a}$ e $f_2(y) = -\frac{3}{4}(9by^2 + 5)$, pelo Lema 2.24 temos que $f_{a,b}$ é irreduzível. Fazendo uso do programa Macaulay2 [2], temos que o ideal jacobiano $J_{f_{a,b}}$ é

perfeito de codimensão 2, ou seja, $\text{dh}(J_{f_{a,b}}) = 1$. Além disso, a matriz de Hilbert-Burch para esse ideal é dada por

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{8b}{5a}y^2 - xz + \frac{a}{5}z^2 & -x^2y - by^3 + axyz - \frac{a^2}{2} \\ \frac{8b}{5a}xy - \frac{b}{5}yz & x^3 + bxy^2 - \frac{a}{2}x^2z + \frac{ab}{2}y^2z \\ x^2 + by^2 + 3axz - a^2z^2 & h(u)yz^2 \end{pmatrix},$$

onde $h(u) \in \mathbb{C}[u]$. Portanto, pelo Teorema 2.12, segue que a sêxtica de Cayley $f \in \Gamma$ é um divisor livre irreduzível. \square

2.3.2 Curvas Livres e Autoesquemas

A partir de agora, descreveremos um novo método para construir curvas livres em \mathbb{P}^2 através de uma ferramenta chamada *autoesquema* combinada com a interpretação do critério de Saito. As definições e resultados aqui apresentados podem ser consultados em [30].

Definição 2.26. Seja $R = \mathbb{K}[x, y, z]$. O autoesquema associado aos três polinômios (p_1, p_2, p_3) em R de mesmo grau $n \geq 1$ é o subesquema fechado $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ definido pelos menores 2×2 da matriz

$$M = \begin{pmatrix} x & p_1 \\ y & p_2 \\ z & p_3 \end{pmatrix}.$$

Quando $V(p_1, p_2, p_3)$ contém uma curva, esta curva também pertence ao autoesquema. Note que mesmo se $V(p_1, p_2, p_3)$ é um conjunto finito de pontos ou vazio, o autoesquema pode ser de codimensão 1: por exemplo, se

$$p_1 = xf + gq_1,$$

$$p_2 = yf + gq_2,$$

$$p_3 = zf + gq_3,$$

então o autoesquema de (p_1, p_2, p_3) contém $V(g)$.

Mostraremos agora como esse autoesquema está associado com a noção de liberdade das curvas.

Vimos que um polinômio reduzido f (ou curva reduzida $V(f) \subset \mathbb{P}^2$) é livre se, e somente se, $\text{Der}_f(R)$ é um R -módulo livre. Então f é livre se, e somente se, $\text{Der}_f(R) = R(-1) \oplus R(-a) \oplus R(-b)$. Nesse caso, dizemos que f é livre com expoentes (a, b) .

Seja $X = V(f)$ uma curva plana reduzida de grau d . De acordo com Saito, a curva X é livre com expoentes (a, b) se, e somente se, existem duas derivações

$$\begin{aligned}\theta &= p_1 \frac{\partial}{\partial x} + p_2 \frac{\partial}{\partial y} + p_3 \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho &= q_1 \frac{\partial}{\partial x} + q_2 \frac{\partial}{\partial y} + q_3 \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

de grau a e b , respectivamente, pertencentes a $\text{Der}_f(R)$ tais que

$$\det \begin{pmatrix} x & p_1 & q_1 \\ y & p_2 & q_2 \\ z & p_3 & q_3 \end{pmatrix} = cf,$$

com $c \in \mathbb{K} - \{0\}$.

Definição 2.27. Seja $\theta = p_1 \frac{\partial}{\partial x} + p_2 \frac{\partial}{\partial y} + p_3 \frac{\partial}{\partial z}$ uma derivação não nula irredutível de grau $a \geq 1$. O módulo graduado de polinômios homogêneos com θ como derivação tangente: $K(\theta) = \bigoplus_{d \geq 0} K(\theta)_d = \{f \in R \mid \theta(f) \subset (f)\}$ é chamada de núcleo da derivação θ .

Observação 2.28. Note que $f \in K(\theta) \Leftrightarrow \theta \in \text{Der}_f(R)$.

Apresentaremos a seguir um novo critério de liberdade baseado nos autoesquemas.

Teorema 2.29. Seja $\theta = p_1 \frac{\partial}{\partial x} + p_2 \frac{\partial}{\partial y} + p_3 \frac{\partial}{\partial z}$ uma derivação não nula irredutível de grau $a \geq 1$ tal que seu autoesquema Γ_θ é um esquema finito. Seja $f \in K(\theta)_{d \geq a+1}$, então a curva plana $V(f)$ é livre com expoentes $(a, d - a - 1)$ se, e somente se, $\Gamma_\theta \subset V(f)$.

Demonstração. Suponha, primeiramente, que $V(f)$ é uma curva livre com expoentes $(a, d - a - 1)$, assim a derivação θ pode ser escolhida como uma geradora do módulo $\text{Der}(f)$. Denotemos por $\rho = q_1 \frac{\partial}{\partial x} + q_2 \frac{\partial}{\partial y} + q_3 \frac{\partial}{\partial z}$ um gerador de grau $d - 1 - a$. Assim, pelo critério de Saito, temos

$$\det \begin{pmatrix} x & p_1 & q_1 \\ y & p_2 & q_2 \\ z & p_3 & q_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot f, \quad \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}.$$

Ou seja, $(xp_2 - yp_1)q_3 - (xp_3 - zp_1)q_2 + (yp_3 - zp_2)q_1 = \lambda f$, isto prova que $\Gamma_\theta \subset V(f)$. Reciprocamente, suponha que $V(f)$ contém o autoesquema Γ_θ . Por ([30], Lema 2.2), existem três polinômios $(q_1, q_2, q_3) \in R_{d-a-1}^3$ tais que

$$\det \begin{pmatrix} x & p_1 & q_1 \\ y & p_2 & q_2 \\ z & p_3 & q_3 \end{pmatrix} = f.$$

Para utilizar o critério de Saito a fim de concluir a prova, nos resta verificar que a derivação correspondente $\rho = q_1 \frac{\partial}{\partial x} + q_2 \frac{\partial}{\partial y} + q_3 \frac{\partial}{\partial z}$ pertence ao módulo $\text{Der}_f(R)$. Seja

$S = \begin{pmatrix} x & p_1 & q_1 \\ y & p_2 & q_2 \\ z & p_3 & q_3 \end{pmatrix}$ e CoS^T a transposta da matriz de cofatores de S . Denotemos por c_x, c_y, c_z, c_{p_i} e c_{q_i} os cofatores de x, y, z, p_i e q_i , respectivamente. Lembremos que

$$S \cdot CoS^T = CoS \cdot S^T = f \cdot Id.$$

Multiplicando a igualdade acima por ∇_f , temos

$$CoS \cdot S^T \cdot \nabla_f = CoS \cdot \begin{pmatrix} df \\ Pf \\ \rho(f) \end{pmatrix} = f \cdot \nabla_f,$$

pois $x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z = df$ e $\theta(f) = p_1\partial_x + p_2\partial_y + p_3\partial_z = Pf$ para algum polinômio P , uma vez que $f \in K(\theta)$. Isso nos fornece o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} c_{q_1}\rho(f) = f(\partial_x f - dc_x - Pc_{p_1}) \\ c_{q_2}\rho(f) = f(\partial_y f - dc_y - Pc_{p_2}) \\ c_{q_3}\rho(f) = f(\partial_z f - dc_z - Pc_{p_3}). \end{cases}$$

Se $\rho \notin \text{Der}_f(R)$, então f não divide $\rho(f)$ e isso significa que existe um fator irredutível h de f , o qual não é um fator irredutível de $\rho(f)$. Pelo lema de Gauss, o fator h divide c_{q_i} , para $i = 1, 2, 3$. Entretanto, os c_{q_i} são os geradores do ideal I_{Γ_θ} , o que contradiz a finitude de Γ_θ . Concluimos, portanto, que $\rho \in \text{Der}_f(R)$ e, pelo critério de Saito, $V(f)$ é livre. \square

Observação 2.30. É importante observar que fixar os expoentes é necessário para que o Teorema 2.29 seja válido. Para notar isso, considere, por exemplo, uma curva livre de grau 5 com expoentes (2, 2). Sejam μ e ρ duas derivações de grau 2 que geram o seu módulo logarítmico. Seja $\theta = x\mu + y\rho$ uma derivação de grau 3. Desse modo, $f \in K(\theta)_5$ é livre mas seus expoentes não são (3, 1). Ademais, se $f \in K(\theta)_d$ com $d \leq a$, então f pode ser livre mas, por razões de grau, a derivação θ não será um gerador do seu módulo de derivações logarítmicas.

Como exemplos conhecidos de arranjos livres, temos:

Exemplo 2.31. O arranjo de Ceva

$$xyz(x - y)(x - z)(y - z) = 0$$

é um arranjo livre com expoentes (2, 3).

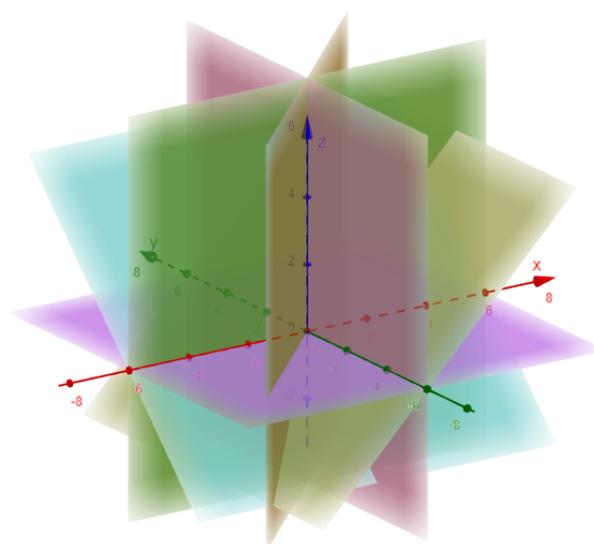


Figura 6 – Arranjo de Ceva: $f(x, y, z) = xyz(x - y)(x - z)(y - z)$

Exemplo 2.32. O arranjo de Fermat

$$(x^n - y^n)(x^n - z^n)(y^n - z^n) = 0$$

é um arranjo livre com expoentes $(n + 1, 2n - 2)$.

3 O Grau de Bourbaki de Curvas Planas Projetivas

Neste capítulo, estudaremos um importante invariante numérico chamado *grau de Bourbaki* de uma curva plana projetiva. As definições e resultados aqui apresentados podem ser encontrados na referência [12].

Seja \mathbb{K} um corpo perfeito infinito com característica suficientemente grande e $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ o anel graduado de polinômios. Vimos, anteriormente, que o conjunto de derivações \mathbb{K} -lineares de R em R é denotado por $\text{Der}_{\mathbb{K}}(R)$. Como o anel de polinômios R é graduado, temos que $\text{Der}_{\mathbb{K}}(R)$ admite uma graduação natural, onde

$$\text{Der}_{\mathbb{K}}(R)_n = \sum_{i=1}^m R_n \partial_{x_i}, \quad n \in \mathbb{N},$$

em que R_n é o \mathbb{K} -espaço vetorial gerado pelos polinômios homogêneos de grau n .

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^2$ uma curva plana projetiva reduzida de grau $d + 1$. Para este capítulo, consideraremos \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado de modo que sua característica não divide $d + 1$ valendo, assim, o Teorema 2.10.

3.1 O Ideal de Bourbaki de uma Curva Plana Projetiva

Iremos definir o ideal de Bourbaki associado a uma curva plana projetiva de uma forma puramente algébrica. Para isso, tome uma sizígia $\alpha \in \text{Syz}(J_f)$ de grau e . Esta inclusão induz uma aplicação homogênea injetiva $R(-e) \xrightarrow{\alpha} \text{Syz}(J_f)$, que se apresenta na seguinte sequência exata de R -módulos

$$0 \rightarrow R(-e) \xrightarrow{\alpha} \text{Syz}(J_f) \rightarrow \text{coker}(\alpha) \rightarrow 0$$

Ao tomar $C_\alpha = \text{coker}(\alpha)$, temos o seguinte diagrama comutativo de R -módulos graduados:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & R(-e) & \xlongequal{\quad} & R(-e) & & \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \bar{\alpha} & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Syz}(J_f) & \longrightarrow & R^3 & \xrightarrow{\theta_f} & J_f(d) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow u & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & C_\alpha & \longrightarrow & R^3/\text{Im}(\bar{\alpha}) & \longrightarrow & J_f(d) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

O teorema a seguir é de grande importância pois é utilizado nos demais resultados que serão apresentados.

Teorema 3.1. Seja $\alpha \in \text{Syz}(J_f)$ um gerador minimal homogêneo de grau $e \geq 1$. Então valem as seguintes afirmações:

1. C_α é livre se, e somente se, f é um divisor livre. Nesse caso, $\deg(R/J_f) = d^2 + e(e - d)$
2. Se f não é um divisor livre, C_α é isomorfo a um ideal homogêneo próprio $I_\alpha \subset R$ de codimensão 2, tal que o isomorfismo induzido $C_\alpha \cong I_\alpha(e - d)$ é um mapa homogêneo de grau 0. Além disso, para tal ideal I_e , segue que

$$\deg(R/I_\alpha) = \begin{cases} d^2 + e(e - d) - \deg(R/J_f), & \text{se } f \text{ é singular} \\ d^2 + e(e - d), & \text{se } f \text{ é suave} \end{cases} \quad (3.1)$$

3. Se f não é um divisor livre, escolha um conjunto completo de geradores homogêneos minimais do R -módulo $\text{Syz}(J_f)$, incluindo α , e seja

$$0 \rightarrow F_1 \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} \rightarrow R(-e) \oplus F_0 \xrightarrow{(\alpha, \psi)} \text{Syz}(J_f) \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

uma resolução graduado livre minimal baseada nesses geradores. Então uma resolução graduado livre minimal para I_α é dada por

$$0 \rightarrow F_1(d - e) \xrightarrow{\phi} F_0(d - e) \xrightarrow{u \circ \psi} I_\alpha \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Em particular, o ideal I_α é perfeito de codimensão 2.

Demonstração. Vide [12], página 6. □

Chamamos de *sequência de Bourbaki* associada a curva plana projetiva $X = V(f)$, a sequência exata $0 \rightarrow R(-e) \rightarrow \text{Syz}(J_f) \rightarrow I_\alpha(e-d) \rightarrow 0$, sendo e o grau da sizígia geradora. O ideal $I_\alpha(e-d)$ é o *ideal de Bourbaki* da curva e o mesmo depende da escolha de um gerador minimal de um determinado grau. Se a curva é livre, então o ideal de Bourbaki é trivialmente o anel $R(e-d)$, considerado como ideal. Definimos o *grau inicial* de um módulo graduado $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ sobre um anel Noetheriano \mathbb{N} -graduado como sendo $\text{indeg}(M) := \min\{i \mid M_i \neq 0\}$.

Definição 3.2. O *grau de Bourbaki* do polinômio f é definido como sendo o co-grau do ideal de Bourbaki I_α do módulo de sizígias $\text{Syz}(J_f)$ com respeito a um gerador minimal α de grau inicial padrão. Em outras palavras, dizemos que ele é o grau (multiplicidade) do R -módulo R/I_α .

Uma observação importante a ser feita é que o grau de Bourbaki não depende da escolha do gerador minimal do módulo de sizígias $\text{Syz}(J_f)$, desde que seja de grau inicial. Por essa independência, denotamos o grau de Bourbaki de f por $\text{Bour}(f)$. Ao tomar $X = V(f)$, temos o esquema projetivo associado $\text{Proj}(R/I_\alpha)$ chamado de *esquema de Bourbaki* e escrevemos $\text{Bour}(f) = \text{Bour}(X)$. Se $X = V(f)$ é uma curva livre, vimos que I_α é identificado trivialmente como o próprio anel R . Desse modo, segue que $\text{Bour}(X) = 0$.

Observação 3.3. O Teorema 3.1 nos leva a seguinte fórmula para qualquer curva plana reduzida singular $X = V(f) \subset \mathbb{P}^2$:

$$\text{Bour}(X) = d^2 + e(e-d) - \text{deg}(R/J_f) \quad (3.4)$$

Pensando de forma geométrica, essa fórmula continua valendo quando X é uma curva suave, desde que pensemos no $\text{deg}(R/J_f)$ como o grau geométrico de $\text{Proj}(R/J_f)$, o qual é zero.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de como obter esse grau fazendo uso do Teorema 3.1.

Exemplo 3.4. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^2$ uma quártica com um nó simples definida por $f = xyz^2 + x^4 + y^4 + x^3y + xy^3 + x^2y^2 + x^3z + y^3z$. Fazendo uso do programa Macaulay2, podemos observar que $\text{Syz}(J_f)$ é minimamente gerado por três sizígias de grau 3 e uma sizígia de grau 4. Além disso, o módulo de sizígias $\text{Syz}(J_f)$ possui a seguinte resolução graduada minimal

$$0 \rightarrow R^2(-5) \xrightarrow{\rho} R(-3) \oplus (R^2(-3) \oplus R(-4)) \xrightarrow{M_1} \text{Syz}(J_f) \rightarrow 0,$$

onde ρ é a matriz de relação entre as sizígias e M_1 é a matriz formada pelas sizígias geradoras do módulo $\text{Syz}(J_f)$. Tomando α_1 como o primeiro termo em um conjunto ordenado de

geradores minimais do módulo $\text{Syz}(J_f)$, temos pelo Teorema 3.1 que a resolução graduada minimal do ideal de Bourbaki I_{α_1} é dada por

$$0 \rightarrow R^2(-5) \rightarrow R^2(-3) \oplus R(-4) \rightarrow I_{\alpha_1} \rightarrow 0.$$

Pela sequência exata acima, temos que a série de Hilbert de R/I_{α_1} é dada por

$$\text{HS}_{R/I_{\alpha_1}}(t) = \frac{1 - 2t^3 - t^4 + 2t^5}{(1-t)^3} = \frac{1 + 2t + 3t^2 + 2t^3}{(1-t)}.$$

Logo, $\text{Bour}(X) = 8 = d^2 - 1$ e $\deg(R/J_f) = 1$.

Exemplo 3.5. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ uma quártica com uma tangente de multiplicidade 3 definida pelo polinômio $f = xy^3z + x^5 + y^5 + x^4y + x^3y^2$. Novamente, pelo programa Macaulay2, é possível ver que o módulo $\text{Syz}(J_f)$ é minimamente gerado por quatro sizíguas de grau 3. Logo, $\text{Syz}(J_f)$ possui uma resolução graduada minimal da forma

$$0 \rightarrow R^2(-4) \xrightarrow{\phi} R(-3) \oplus R^3(-3) \xrightarrow{M_2} \text{Syz}(J_f) \rightarrow 0,$$

onde ϕ é a matriz de relação entre as sizíguas e M_2 é a matriz formada pelas sizíguas geradoras do módulo $\text{Syz}(J_f)$. Tomando α_1 como o primeiro termo em um conjunto ordenado de geradores minimais do módulo $\text{Syz}(J_f)$, temos pelo Teorema 3.1 que o ideal de Bourbaki I_{α_1} apresenta uma resolução graduada minimal na forma:

$$0 \rightarrow R^2(-3) \rightarrow R^3(-2) \rightarrow I_{\alpha_1} \rightarrow 0.$$

Pela sequência exata acima, temos que a série de Hilbert de R/I_{α_1} é dada por

$$\text{HS}_{R/I_{\alpha_1}}(t) = \frac{1 - 3t^2 + 2t^3}{(1-t)^3} = \frac{1 + 2t}{(1-t)}.$$

Logo, $\text{Bour}(X) = 3$ e $\deg(R/J_f) = 10$.

Exemplo 3.6. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ uma sêxtica definida pelo polinômio $f = xy^4z + x^6 + y^6$. Fazendo uso do programa Macaulay2, temos que $\text{Syz}(J_f)$ é gerado pelos vetores coluna da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -6y^3z & -6y^4 \\ xy & 9x^4 + y^2z^2 & y^3z \\ -6y^2 - 4xz & -54x^3y - 4yz^3 & 36x^4 - 4y^2z^2 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, $\text{Syz}(J_f)$ possui a seguinte resolução graduada minimal

$$0 \rightarrow R(-5) \begin{pmatrix} 9x^3 \\ -y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow R(-2) \oplus R^2(-4) \rightarrow \text{Syz}(J_f) \rightarrow 0.$$

Tomando α como o único vetor coluna de grau 2, pelo Teorema 3.1 segue que a resolução graduada minimal para o ideal de Bourbaki I_α é dada por

$$0 \rightarrow R(-2) \begin{pmatrix} z \\ -y \end{pmatrix} \rightarrow R^2(-1) \rightarrow I_\alpha \rightarrow 0.$$

Logo, o esquema de Bourbaki $\text{Proj}(R/I_\alpha)$ é uma interseção completa reduzida e irredutível de grau 1. Assim, $\text{Bour}(X) = 1$ e, pelo Teorema 3.1, segue que $\deg(R/J_f) = 18$. Este é um exemplo que cai na classe das curvas chamadas quase livres, as quais veremos mais adiante.

3.2 Cotas Superiores para o Grau de Bourbaki

O resultado a seguir fornece uma cota superior para o grau de Bourbaki de uma curva em termos do grau inicial das sizígias do ideal jacobiano.

Teorema 3.7. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^2$ uma curva singular de grau $d + 1$ e seja e o grau inicial do módulo de sizígias $\text{Syz}(J_f)$. Então

$$\text{Bour}(X) \leq e^2. \quad (3.5)$$

Demonstração. Vide [12], página 12. □

Definição 3.8. Dizemos que uma curva reduzida $X = V(f) \subset \mathbb{P}^2$ de grau $d + 1$ é *quase livre* se R/J_f possui resolução graduada livre minimal da forma

$$0 \rightarrow R(-d - a_2 - 1) \rightarrow R(-d - a_1) \oplus R^2(-d - a_2) \rightarrow R^3(-d) \rightarrow R \rightarrow R/J_f \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

onde a_1 e a_2 são inteiros e $1 \leq a_1 \leq a_2$.

Os deslocamentos apresentados na resolução acima são chamados de *expoentes* da curva $X = V(f)$ e satisfazem $a_1 + a_2 = d + 1$.

Corolário 3.9. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^2$ uma curva singular de grau $d + 1$ e seja e o grau inicial do módulo de sizígias $\text{Syz}(J_f)$. Se $e = 1$ então X é um divisor livre ou quase livre.

Demonstração. Pelo Teorema 3.7, temos apenas duas possibilidades, sendo elas $\text{Bour}(X) = 0$ ou $\text{Bour}(X) = 1$. Como comentado anteriormente, esses valores caracterizam os dois tipos de curvas, respectivamente. □

Veremos a seguir uma relação entre o grau de Bourbaki e as curvas suaves.

Proposição 3.10. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^2$ uma curva reduzida de grau $d + 1 \geq 2$. Então $\text{Bour}(X) = d^2$ se, e somente se, X é uma curva suave.

Demonstração. Se a curva $X = V(f)$ é suave, então o ideal jacobiano associado é gerado por uma sequência regular e, conseqüentemente, o módulo de sizígias $\text{Syz}(J_f)$ é gerado pelas relações de Koszul. Logo, $e = d$ e, neste caso, por (3.1) o resultado segue. Suponha agora que a curva $X = V(f)$ é singular e $\text{Bour}(X) = d^2$. Sendo assim, fazendo as devidas substituições em (3.1), temos que $\deg(R/J_f) = e(e - d)$. Como, por hipótese, e é o grau inicial de $\text{Syz}(J_f)$, então $e \leq d$ e, novamente por (3.1), segue que $\deg(R/J_f) \leq 0$, o que é uma contradição pois assumimos que $\deg(R/J_f) \geq 1$. \square

Temos ainda alguns resultados para o caso em que a curva $X = V(f)$ não é suave e é irredutível.

Proposição 3.11. Sejam $R = \mathbb{K}[x, y, z]$ e $f \in R$ um polinômio homogêneo irredutível de grau $d + 1 \geq 2$. Seja $e = \text{indeg}(\text{Syz}(J_f))$. Então, temos

1. Se f não é um divisor livre, então $\text{Bour}(X) \geq e(e - d) + d$
2. Se f é divisor livre, então $e \geq 2$ e $d \geq 4$. Isso nos diz em particular que não há divisores livres irredutíveis de grau $2 \leq d + 1 \leq 4$. Além disso, se $d + 1 = 5$, então $e = 2$.
3. Se $d \geq 2$ e $\text{Bour}(X) = 1$, então $e < d$.

Demonstração. 1. Temos que $\deg(R/J_f) = \tau(X) \leq \mu(X) \leq d(d - 1)$, em que a última desigualdade é mostrada na referência ([5], capítulo 4, seção 4, (4.5)). Assim, aplicando (3.1), segue que $\text{Bour}(X) = d^2 + e(e - d) - \deg(R/J_f) \geq d^2 + e(e - d) - d(d - 1) = e(e - d) + d$.

2. Suponha que f é um divisor livre. Dessa forma, pelo Teorema 3.1 item (1), segue que $\deg(R/J_f) = d^2 + e(e - d)$. Além disso, como no item acima, temos $\deg(R/J_f) \leq d(d - 1)$. Logo, para que a desigualdade seja válida, devemos ter que $e \geq 2$. Além disso, podemos verificar que para $d \leq 3$ temos uma contradição com a desigualdade $e(e - d) + d \leq 0$. Portanto, não há divisores livres irredutíveis de grau entre 2 e 4.
3. Como, por hipótese, $\text{Bour}(X) = 1$, temos que f não é um divisor livre valendo assim o primeiro item demonstrado, ou seja, $1 \geq e(e - d) + d$. Supondo que $e \geq d$ (sendo $e = d$) e usando a hipótese de que $d \geq 2$, temos uma contradição. Portanto, $e < d$.

\square

Observação 3.12. Como mostramos por meio de alguns critérios de liberdade, a cúbica $f = xyz$ é um divisor livre. Sendo assim, o item (2) da Proposição 3.11 pode falhar se não houver a hipótese de f ser irredutível.

A seguir, mostraremos uma forma de caracterizar as curvas quase livres através do grau de Bourbaki.

Proposição 3.13. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^2$ uma curva reduzida de grau $d + 1$. Então $\text{Bour}(X) = 1$ se, e somente se, a curva X é quase livre.

Demonstração. Suponha que $\text{Bour}(X) = 1$. Tome $\alpha \in \text{Syz}(J_f)$ uma sizígia de grau $e = \text{indeg}(\text{Syz}(J_f))$. Como o ideal de Bourbaki é perfeito de codimensão 2, então o ideal I_α do módulo $\text{Syz}(J_f)$ é uma interseção completa, ou seja, é gerado por duas formas lineares e possui resolução graduada livre minimal da forma

$$0 \rightarrow R(-2) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array} R(-1) \oplus R(-1) \rightarrow I_\alpha \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Pelo item (3) do Teorema 3.1, segue que a resolução para o módulo de sizígias é dada por

$$0 \rightarrow R((e-d)-2) \rightarrow R^2((e-d)-1) \oplus R(-e) \rightarrow \text{Syz}(R/J_f) \rightarrow 0,$$

Sendo e o grau inicial de $\text{Syz}(J_f)$, devemos ter que $d - e + 1 \geq e$. Desse modo, temos a seguinte resolução para R/J_f

$$0 \rightarrow R(-d-(d-e+1)-1) \rightarrow R(-d-e) \oplus R^2(-d-(d-e+1)) \rightarrow R^3(-d) \rightarrow R \rightarrow R/J_f \rightarrow 0.$$

Portanto, por definição, $X = V(f)$ é uma curva quase livre. Reciprocamente, suponha que $X = V(f)$ seja quase livre com expoentes a_1 e a_2 de modo que $a_1 \leq a_2$. Como X é quase livre, temos que a resolução graduada livre minimal para R/J_f é dada por (3.6). Desse modo, temos a seguinte resolução graduada minimal para o módulo $\text{Syz}(J_f)$

$$0 \rightarrow R(-a_2-1) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} g \\ l_1 \\ l_2 \end{array} R(-a_1) \oplus R^2(-a_2) \rightarrow \text{Syz}(R/J_f) \rightarrow 0,$$

em que l_1 e l_2 são formas lineares. Com esta resolução, podemos escolher o único gerador α do módulo de sizígias de grau padrão a_1 e fazer uso do Teorema 3.1 para encontrar a resolução graduada minimal de I_α , que é dada por

$$0 \rightarrow R(-a_2 - (a_1 - d) - 1) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array} R^2(-a_2 - (a_1 - d)) \rightarrow I_\alpha \rightarrow 0.$$

Como o ideal de Bourbaki I_α é perfeito de codimensão 2, devemos ter que $a_2 + (a_1 - d) = 1$. Logo, I_α é gerado por duas formas lineares e, portanto, $\text{Bour}(X) = \text{deg}(R/I_\alpha) = 1$. \square

Vimos que a definição de curvas quase livres está baseada no formato da resolução livre para R/J_f e associamos essa classe de curvas com o grau de Bourbaki igual 1. Sendo assim, podemos imaginar que os valores maiores do grau de Bourbaki estão associados a certos formatos de resoluções assim como acabamos de ver para as curvas quase livres, onde $\text{Bour}(X) = 1$. O próximo resultado mostra essa relação.

Proposição 3.14. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^2$ uma curva singular de grau $d + 1$ e seja $e = \text{indeg}(\text{Syz}(J_f))$. Então $\text{Bour}(X) = 2$ se, e somente se, R/J_f possui resolução graduada livre minimal da forma

$$0 \rightarrow R(-(d + (d - e + 3))) \rightarrow R(-(d + (d - e + 2))) \oplus R(-(d + (d - e + 1))) \oplus R(-(d + e)) \\ \xrightarrow{\psi} R^3(-d) \rightarrow R \rightarrow R/J_f \rightarrow 0,$$

sendo $e \leq d + \frac{1}{2}$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, que R/J_f possui resolução graduada minimal como enunciada. Sendo assim, o módulo de sizígias $\text{Syz}(J_f) = \text{Im}(\psi)$ possui a seguinte resolução graduada livre minimal

$$0 \rightarrow R(-(d - e + 3)) \rightarrow R(-(d - e + 2)) \oplus R(-(d - e + 1)) \oplus R(-e) \rightarrow \text{Syz}(J_f) \rightarrow 0.$$

Pelo item (3) do Teorema 3.1, o ideal de Bourbaki I_α possui resolução graduada minimal da forma

$$0 \rightarrow R(-3) \rightarrow R(-2) \oplus R(-1) \rightarrow I_\alpha \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Portanto, a série de Hilbert de R/I_α é dada por

$$\text{HS}_{R/I_\alpha}(t) = \frac{1 - t - t^2 + t^3}{(1 - t)^3} = \frac{1 + t}{(1 - t)}.$$

Logo, $\text{deg}(R/I_\alpha) = \text{Bour}(X) = 2$. Reciprocamente, suponha que $\text{Bour}(X) = 2$. Para este grau, o ideal de Bourbaki que é perfeito e de codimensão 2 é gerado por uma forma linear e uma forma quadrática. Logo, temos a seguinte resolução graduada livre minimal para I_e

$$0 \rightarrow R^3(-(d - e + 3)) \rightarrow R(-(d - e + 2)) \oplus R(-(d - e + 1)) \rightarrow I_\alpha(e - d) \rightarrow 0,$$

o que faz com que tenhamos $e \leq \frac{d + 1}{2}$. Pelo Teorema 3.1 item (3), essa resolução fornece uma resolução para $\text{Syz}(J_f)$, a qual se estende para a resolução enunciada de R/J_f deslocando-a por $-d$. \square

Se tomarmos inteiros arbitrários d e e , temos a seguinte desigualdade $d^2 + e(e - d) > d^2 - 2ed + e^2 = (d - e)^2 \geq 0$. Daí, a expressão (3.1) do Teorema 3.1 nos mostra que $d^2 + e(e - d)$ é uma cota superior para o grau de um ideal de Bourbaki, o qual está associado a escolha de um gerador minimal qualquer do módulo de sizígias $\text{Syz}(J_f)$. Sendo

assim, tomando uma curva plana projetiva de grau $d + 1$ e $e = \text{indeg}(\text{Syz}(J_f))$, seu grau de Bourbaki é limitado superiormente por $d^2 + e(e - d)$.

Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ uma curva singular reduzida de grau $d + 1 \geq 2$ e $p \in \text{Sing}(X)$. Por uma transformação projetiva, podemos assumir que $p = [0 : 0 : 1]$. Considere a carta afim $U_z = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ com anel de coordenadas $A = \mathbb{K}[x/z, y/z] = \mathbb{K}[T_1, T_2]$. A equação de f nesta carta afim é $F(T_1, T_2) := f(x/z, y/z, 1)$. Além disso, temos que $I_F = (F_{T_1}, F_{T_2})$ é o ideal gradiente de F e $J_F = (F, F_{T_1}, F_{T_2})$ é o ideal jacobiano de F em $\mathbb{K}[T_1, T_2]$. Denote por $\mathfrak{p} = (T_1, T_2)$ o ideal maximal associado ao ponto singular $p \in \text{Sing}(X)$.

Definição 3.15. O número de Milnor $\mu_{\mathfrak{p}}(F)$ e o número de Tjurina $\tau_{\mathfrak{p}}(F)$ de $F \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$ em \mathfrak{p} são $\dim_{\mathbb{K}} A_{\mathfrak{p}}/(I_F)_{\mathfrak{p}}$ e $\dim_{\mathbb{K}} A_{\mathfrak{p}}/(J_F)_{\mathfrak{p}}$, respectivamente. Geralmente escrevemos como $\mu_{\mathfrak{p}}(X)$ e $\tau_{\mathfrak{p}}(X)$, respectivamente.

Definimos a álgebra local de Milnor e a álgebra local de Tjurina em \mathfrak{p} como sendo $M_{\mathfrak{p}}(F) := A_{\mathfrak{p}}/(I_F)_{\mathfrak{p}}$ e $T_{\mathfrak{p}}(F) := A_{\mathfrak{p}}/(J_F)_{\mathfrak{p}}$, respectivamente. O número total de Milnor e o número total de Tjurina são dados por

$$\mu(X) = \sum_{p \in \text{Sing}(X)} \mu_{\mathfrak{p}}(F), \quad \tau(X) = \sum_{p \in \text{Sing}(X)} \tau_{\mathfrak{p}}(F).$$

Proposição 3.16. Seja \mathbb{K} algebricamente fechado e suponha que $\text{car}(\mathbb{K})$ não divide $d + 1$. Seja $f \in R$ um polinômio reduzido de grau $d + 1$ que define uma curva singular. Então,

$$\deg(R/J_f) = \tau(X). \quad (3.9)$$

Demonstração. Vide [12], página 17. □

Teorema 3.17. Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ uma curva singular reduzida de grau $d + 1$ e $e = \text{indeg}(\text{Syz}(J_f))$. Então,

$$d(d - e) \leq \tau(X) \leq d^2 + e(e - d).$$

Demonstração. Como, por hipótese, $X = V(f)$ é singular, vale a Proposição 3.16. Por 3.1 do Teorema 3.1, basta substituir $\deg(R/J_f)$ por $\tau(X)$ e segue a cota superior. A cota inferior segue do Teorema 3.7. □

Veremos a seguir como calcular o grau de Bourbaki de uma curva em termos dos graus de Bourbaki de suas componentes.

Proposição 3.18. Sejam $X_1 = V(f_1)$ e $X_2 = V(f_2)$ duas curvas suaves que se intersectam transversalmente. Então,

$$\text{Bour}(X_1 \cup X_2) = \text{Bour}(X_1) + \text{Bour}(X_2) + (\deg f_1 - 1)(\deg f_2 - 1).$$

Demonstração. Como X_1 e X_2 se intersectam transversalmente, segue que a multiplicidade de interseção de ambas as curvas em qualquer ponto é igual a 1. Pelo Teorema 1.52 e pela Proposição 3.16, temos que $\deg(R/J_{f_1, f_2}) = \deg f_1 \cdot \deg f_2$. Por outro lado, os pontos singulares de $X_1 \cup X_2$ são nós. Para uma curva nodal não irredutível $V(h)$, o grau inicial de $\text{Syz}(J_h)$ é $\deg f - 2$ ([6], Exemplo 2.2 (i)]). O resultado segue pelo Teorema 3.1. \square

Vimos que um polinômio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é dito *Euleriano* quando pertence a seu ideal gradiente I_f . Além disso, apresentamos a igualdade de Euler, em que a mesma diz que um polinômio homogêneo cujo grau não divide a característica do corpo é Euleriano.

Definição 3.19. Um polinômio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é dito *quase-homogêneo* se

$$\lambda f = \sum_{i=1}^n w_i x_i f_{x_i},$$

em que $\lambda > 0$ é um inteiro que não divide $\text{car}(\mathbb{K})$ e $w_i > 0$ são inteiros cujo mdc é igual a 1.

Os inteiros w_i são chamados de *pesos inteiros*, enquanto w_i/λ são chamados de *pesos racionais*. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ uma curva singular reduzida. Um ponto singular $p \in \text{Sing}(X)$ é chamado de *singularidade quase-homogênea* se os números locais de Milnor e Tjurina forem iguais, isto é, $\mu_p(X) = \tau_p(X)$. Se a curva possui apenas singularidades quase-homogêneas, então o número total de Milnor e Tjurina são iguais, ou seja, $\mu(X) = \tau(X)$. Os exemplos mais conhecidos de singularidades quase-homogêneas são as singularidades simples.

A seguir, apresentaremos um resultado que caracteriza curvas uma única singularidade, sendo ela nodal, pelo grau de Bourbaki. O Exemplo 3.4 ilustra esse resultado.

Teorema 3.20. Seja $X = V(f)$ uma curva irredutível de grau $d+1$. Então $\text{Bour}(X) = d^2 - 1$ se, e somente se, X possui um único ponto singular e esse ponto é um nó.

Demonstração. Suponha, primeiramente, que $\text{Bour}(X) = d^2 - 1$. Suponha, por absurdo, que a curva possua mais de uma singularidade. Desse modo, $\tau(X) > 1$ e, pela Observação 3.3 e por (3.9) da Proposição 3.16, segue que

$$d^2 - 1 = \text{Bour}(X) = d^2 + e(e - d) - \tau(X) < d^2 + e(e - d) - 1,$$

assim devemos ter que $e(e - d) > 0$, o que é uma contradição uma vez que $e \leq d$. Portanto, concluímos que a curva $X = V(f)$ possui apenas uma singularidade, caso contrário, teríamos que $\text{Bour}(X) = d^2$ pela Proposição 3.10. Suponha agora que essa singularidade não é nodal, ou seja, que $\tau(X) > 1$. Novamente, pela Observação 3.3 e usando a hipótese de que $\text{Bour}(X) = d^2 - 1$, segue que

$$2 \leq \tau(X) = e(e - d) + d^2 - (d^2 - 1) = e(e - d) + 1,$$

ou seja, $e(e - d) \geq 1$, o que é uma contradição visto que $e \leq d$. Concluimos, portanto, que a única singularidade da curva é um nó. Reciprocamente, suponha que a curva $X = V(f)$ possua uma única singularidade e que esse ponto singular é um nó. Dessa forma, $\mu(X) = \tau(X) = 1$. Por ([6], Exemplo 2.2 (i) e [7], Teorema 4.1), temos que o grau inicial e de $\text{Syz}(R/J_f)$ coincide com d . Assim, por (3.1) do Teorema 3.1, temos que

$$\text{Bour}(X) = e(e - d) + d^2 - \tau(X) = d^2 - \mu(X) = d^2 - 1.$$

□

Referências

- [1] ATIYAH, M. *Introduction to commutative algebra*. CRC Press, 2018.
- [2] BAYER, D., AND STILLMAN, M. Macaulay: a computer algebra system for algebraic geometry. *Macaulay version 3* (1994).
- [3] BLAND, P. E. *Rings and their modules*. Walter de Gruyter, 2011.
- [4] CHEN, R.-X. *Hilbert functions and free resolutions*. 2011.
- [5] DIMCA, A. *Singularities and topology of hypersurfaces*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [6] DIMCA, A., AND SERNESI, E. Syzygies and logarithmic vector fields along plane curves. *Journal de l'École polytechnique—Mathématiques 1* (2014), 247–267.
- [7] DIMCA, A., AND STICLARU, G. Koszul complexes and pole order filtrations. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 58*, 2 (2015), 333–354.
- [8] EISENBUD, D. *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, vol. 150. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] FULTON, W. Algebraic curves. *An Introduction to Algebraic Geom 54* (2008).
- [10] GATHMANN, A. Algebraic geometry. *Notes for a class taught at the University of Kaiserslauten (2021/22) available at <https://agag-gathmann.math.rptu.de/class/alggeom-2021/alggeom-2021.pdf>* (2021).
- [11] HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*, vol. 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [12] JARDIM, M., NEJAD, A. N., AND SIMIS, A. The bourbaki degree of plane projective curves. *arXiv preprint arXiv:2308.11467* (2023).
- [13] KAPLANSKY, I. Commutative rings. In *Conference on Commutative Algebra: Lawrence, Kansas 1972* (2006), Springer, pp. 153–166.
- [14] KUNZ, E. *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Springer Science & Business Media, 1985.
- [15] MATSUMURA, H. *Commutative algebra*, vol. 120. WA Benjamin New York, 1970.
- [16] MATSUMURA, H. *Commutative ring theory*. Cambridge university press, 1989.

- [17] MIRANDA-NETO, C. B. Graded derivation modules and algebraic free divisors. *Journal of Pure and Applied Algebra* 219, 12 (2015), 5442–5466.
- [18] MIRANDO NETO, C. B. *Teoria dos módulos idealizadores diferenciais*. Universidade Federal de Pernambuco, 2006.
- [19] NANDURI, R. A family of irreducible free divisors in \mathbb{P}^2 . *Journal of Algebra and Its Applications* 14, 07 (2015), 1550105.
- [20] PÉREZ, V. Introdução a álgebra homológica e módulos cohen-macaulay. *notas para um minicurso apresentado no XI workshop de verão da Universidade de Brasília disponível em <https://mat.unb.br/verao2019/documentos/Victor.pdf>* (2019).
- [21] SAITO, K. Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math* 27, 2 (1980), 265–291.
- [22] SALMAN, R. Hilbert’s syzygy theorem. B.S. thesis, 2021.
- [23] SILVA, M. P. D. *Sobre divisores livres homogêneos*. Universidade Federal da Paraíba, 2015.
- [24] SIMIS, A. Differential idealizers and algebraic free divisors. In *Commutative algebra*. CRC Press, 2005, pp. 233–248.
- [25] SIMIS, A. The depth of the jacobian ring of a homogeneous polynomial in three variables. *Proceedings of the American Mathematical Society* 134, 6 (2006), 1591–1598.
- [26] SIMIS, A., AND TOHANEANU, Ş. O. Homology of homogeneous divisors. *Israel Journal of Mathematics* 200 (2014), 449–487.
- [27] STEVENSON, M. *Hilbert Polynomials*. 2015.
- [28] TOHANEANU, Ş. O. On freeness of divisors on \mathbb{P}^2 . *Communications in Algebra* 41, 8 (2013), 2916–2932.
- [29] VAINSENER, I. *Introdução às curvas algébricas planas*. Impa, 1979.
- [30] VALLÈS, J., DI GENNARO, R., ILARDI, G., MIRO-ROIG, R., AND SCHENCK, H. Free curves, eigenschemes and pencils of curves.