Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

Rafael dos Santos Ongaratto

Wittgenstein x Gödel: reflexões sobre o Teorema da Incompletude

CAMPINAS

2023

Wittgenstein x Gödel: reflexões sobre o Teorema da Incompletude

Rafael dos Santos Ongaratto

Dissertação apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.
Orientador: Walter Alexandre Carnielli

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO RAFAEL DOS SANTOS ONGARATTO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. WALTER ALEXANDRE CARNIELLI.

CAMPINAS

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Neiva Gonçalves de Oliveira - CRB 8/6792

On3w	Ongaratto, Rafael dos Santos, 2000- Wittgenstein x Gödel : reflexões sobre o Teorema da Incompletude / Rafael dos Santos Ongaratto. – Campinas, SP : [s.n.], 2024. Orientador: Walter Alexandre Carnielli. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. 1. Wittgenstein, Ludwig, 1889-1951. 2. Gödel, Kurt, 1906-1978. 3. Teorema da incompletude. 4. Teorema de Gödel. I. Carnielli, Walter Alexandre, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Wittgenstein x Gödel : reflections on the Incompleteness Theorem
Palavras-chave em inglês:
Incompleteness theorems
Gödel theorem
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Mestre em Filosofia
Banca examinadora:
Walter Alexandre Carnielli [Orientador]
Itala Maria Loffredo D'Ottaviano
Mauro Luiz Engelmann
Data de defesa: 23-02-2024
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-5303-9054
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/4406877399355817

Rafael dos Santos Ongaratto

Wittgenstein x Gödel: reflexões sobre o Teorema da Incompletude

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Dissertação de Mestrado, composta pelos(as) Professores(as) Doutores(as) a seguir descritos, em sessão pública realizada em 23 de fevereiro de 2024, considerou o candidato Rafael dos Santos Ongaratto aprovado.

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli,
Universidade Estadual de Campinas

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano,
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Mauro Luiz Engelmann,
Universidade Federal de Minas Gerais

A Ata de Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertações/Teses e na Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

CAMPINAS, 2023.

Dedicado ao professor Paulo Francisco Estrella Faria,
cuja sugestão deu origem a esta dissertação.

Agradecimentos

Agradeço a FAPESP, de processo nº 2022/00703-0, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro durante o mestrado, ao meu orientador Walter Carnielli, por seu suporte e conselhos, à professora Sílvia Altmann, minha mentora intelectual em todos os aspectos, aos meus pais, por tornar tudo isso possível, e à Marina, amiga e namorada que me fez enxergar o mundo colorido novamente.

Ob etwas mit Recht der Satz genannt wird ”X ist unbeweisbar”, hängt davon ab, wie wir diesen Satz beweisen. Nur der Beweis zeigt, was als das Kriterium der Unbeweisbarkeit gilt. Der Beweis ist ein Teil des Systems von Operationen, des Spiels, worin der Satz gebraucht wird, und zeigt uns seinen ’Sinn’.

Ludwig Wittgenstein, *Grundlagen Der Mathematik*

Resumo

No Apêndice I de seus "Remarks on the Foundations of Mathematics"(Wittgenstein et al. 1990), Wittgenstein elabora uma interpretação diferente sobre o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel, ao qual passamos a nos referir como "Teorema de Gödel"ou "Teorema da Incompletude". Essa nomenclatura surge do reconhecimento que o chamado "Segundo Teorema da Incompletude" nada mais é do que um corolário do Primeiro. O filósofo pretende reavaliar a conclusão gödeliana segundo a qual há fórmulas verdadeiras, mas que não são demonstráveis em sistemas formais capazes de representar uma quantidade suficiente da teoria aritmética. De um lado, a reação inicial de Gödel e outros comentadores foi que Wittgenstein não havia entendido a prova. Por outro lado, comentadores recentes enxergam comentários valiosos nos escritos wittgensteinianos: alguns comentadores, como Juliet Floyd e Hilary Putnam, fazem uma distinção entre a prova matemática e a prosa filosófica que circunda o teorema, tornando possível entender as considerações de Wittgenstein. Por fim, as considerações de Wittgenstein são utilizadas para entender como o teorema de Gödel pode ocorrer em sistemas de lógica não-clássicos como a lógica paraconsistente.

Palavras-chave: Wittgenstein. Teorema da incompletude. Gödel.

Abstract

In the Appendix I of his "Remarks on the Foundations of Mathematics"(Wittgenstein et al. 1990), Wittgenstein elaborates a different interpretation of Gödel's First Incompleteness Theorem, which we have come to refer to as "Gödel's Theorem" or "Incompleteness Theorem". This nomenclature arises from the recognition that the so-called "Second Incompleteness Theorem" is essentially a corollary of the primary theorem. Wittgenstein aims to reassess Gödel's conclusion that there exist true formulas not demonstrable within formal systems capable of representing a sufficient amount of arithmetic theory. Gödel's initial reaction, as well as other commentators, was that Wittgenstein had not understood the proof. Nevertheless, recent commentators view worthy commentaries in wittgensteinian writings: some commentators, such as Juliet Floyd and Hilary Putnam, distinguish between mathematical proof and philosophical prose that surrounds the theorem, making it possible to understand Wittgenstein's remarks. Ultimately, Wittgenstein's observations serve as a lens through which Gödel's theorem can be reconsidered within the realm of non-classical logics, such as paraconsistent logic.

Keywords: Wittgenstein. Incompleteness theorem. Gödel.

Lista de abreviaturas e siglas

RFM: Remarks on the Foundations of Mathematics

PR: Philosophical Remarks

ZF: Zermelo-Fraenkel

PM: Principia Mathematica

LFI: Logics of Formal Inconsistencies

MS: Metalinguagem de S

fbf: fórmula bem formada

PEx: Princípio de Explosão

PA: Peano Arithmetic

MT: Máquina de Turing

IF: Investigações Filosóficas

LFM: Lectures on the Foundations of Mathematics

PNC: Princípio de não-Contradição

PI: Princípio de Identidade

PTE: Princípio do Terceiro Excluído

IA: Inteligência Artificial

NLP: Natural Language Processing

Lista de símbolos

$\bigvee$	Disjunção
$\bigwedge$	Conjunção
$\longrightarrow$	Condicional
$\neg$	Negação
$\forall$	Quantificador universal
$\exists$	Quantificador existencial
$\vdash$	Consequência dedutiva
$\models$	Consequência semântica
A^n_k	Letra de predicado A n-ária, com numeração k
f^n_k	Letra de função f n-ária, com numeração k
x’	Sucessor de x
$\bar{\text{k}}$	Denotação de k

Sumário

1 INTRODUÇÃO 14

2 O TEOREMA DA INCOMPLETUDE 19
2.1 O Programa de Hilbert 19
2.1.1 Uma Matemática Finitista 19
2.1.2 Uma Matemática Axiomática 21
2.2 Computabilidade 21
2.2.1 Máquinas de Turing 22
2.2.2 *Entscheindungsproblem* e a Tese de Church 23
2.2.3 Funções Recursivas Parciais 24
2.3 Sistema S de aritmética 25
2.4 Enumeração de Gödel 26
2.5 Lema Diagonal 27
2.6 Primeiro Teorema da Incompletude 28
2.7 Considerações 29
2.7.1 O Teorema de Gödel-Rosser 30
2.7.2 A Indefinibilidade da Verdade de Tarski 30
2.8 Segundo Teorema da Incompletude 32
2.9 Extensões ao Teorema 33

3 TURING E WITTGENSTEIN: QUAL SERIA O MAL DE UMA CONTRADIÇÃO? 34
3.1 O Desenvolvimento Filosófico de Wittgenstein 34
3.1.1 *Tractatus Logico-Philosophicus* 34
3.1.2 Wittgenstein Intermediário 35
3.1.3 Wittgenstein Tardio 36
3.2 *Lectures on the Foundations of Mathematics* 37
3.3 Paradoxos Lógicos 39
3.4 A Lógica e o Pensamento 42

4 WITTGENSTEIN SOBRE GÖDEL: UMA ANÁLISE INICIAL 44
4.1 A reação inicial e o espantalho de Wittgenstein 44
4.2 Interpretações contemporâneas sobre o apêndice I de RFM 46
4.2.1 Shanker 47
4.2.1.1 A trissecção do ângulo 47
4.2.1.2 O Programa de Hilbert 50

4.2.1.3 O Teorema de Gödel revisitado . . . 54
4.2.2 Floyd . . . 57
4.2.3 Mark Steiner e o não-revisionismo de Wittgenstein . . . 62
4.2.3.1 Semelhança de família e os conceitos matemáticos nas *Investigações Filosóficas* . 63
4.2.4 Rodych e Lampert . . . 64
4.2.4.1 Rodych e a dupla questão . . . 65
4.2.4.2 A interpretação de Rodych . . . 65
4.2.4.3 O Construtivismo Formalista de Wittgenstein . . . 66
4.2.4.4 Conclusão de Rodych . . . 68
4.2.4.5 Timm Lampert . . . 68
4.2.4.5.1 Provas Algorítmicas e Provas Metamatemáticas . . . 69
4.2.5 Resumo dos comentadores . . . 72

5 WITTGENSTEIN SOBRE GÖDEL: UMA ANÁLISE INICIAL II . . 73
5.1 A enigmática introdução linguística ao Apêndice I: §§ 1-4 . . . 73
5.2 A proposição do problema: §§ 5-6 . . . 74
5.3 O desenvolvimento do problema: §§ 7-9 . . . 75
5.4 Paradoxos e contradições: §§ 10-13 . . . 76
5.5 A geometria das provas: §§ 14-17 . . . 77
5.6 Proposição e uso: §§ 18-20 . . . 78
5.7 Wittgenstein: um semântico sem semântica . . . 79

6 CRÍTICAS A WITTGENSTEIN . . . 82
6.1 O Desenvolvimento da Semântica . . . 82
6.2 Casos Concretos de Proposições Indecidíveis . . . 85
6.3 Objeções . . . 86
6.3.1 A objeção rosseriana: a prova não requer suposição de ω-consistência . . . 86
6.3.2 A objeção de Steiner-Rodych: a prova não é autorreferencial . . . 88
6.3.3 A prova de Gödel x A Prova de Gödel . . . 89

7 WITTGENSTEIN E A LÓGICA PARACONSISTENTE . . . 90
7.1 Árvore Genealógica da Paraconsistência . . . 91
7.1.1 Os Predecessores: Jaśkowski e da Costa . . . 93
7.2 Considerações de Wittgenstein . . . 94
7.3 Lógicas de Inconsistência Formal e os Teoremas de Gödel . . . 98

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . 102

Referências . . . 105

APÊNDICE A – WITTGENSTEIN E A INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL 110

APÊNDICE B – JOGOS LÓGICOS NÃO-CLÁSSICOS: O PARADOXO DO MENTIROSO, A ILHA DAS TRÊS COROAS E O PROBLEMA LÓGICO MAIS DIFÍCIL DE TODOS 112

1 INTRODUÇÃO

Wittgenstein e Gödel são figuras eminentes na história da filosofia e da lógica, respectivamente. Ambos são considerados pensadores extraordinários e suas contribuições são duradouras e revolucionárias. Ainda que eles fossem contemporâneos, não há registro de conversas, trocas de cartas ou interações diretas entre eles: apenas uma vez se encontraram, na ocasião de uma palestra de Brouwer sobre o intuicionismo (Wang 1990, p. 49). Não obstante, Wittgestein tinha ciência do trabalho de Gödel sobre a Incompletude, e alguns comentários valiosos sobre as considerações de Wittgenstein podem ser encontradas no Apêndice I ao RFM (Wittgenstein et al. 1990).[1]

Os comentários de Wittgenstein sobre Gödel em RFM são voltados, essencialmente, para o seu Teorema da Incompletude, publicado em 1931 (Gödel 1992)[2]. De maneira resumida, apresentaremos o artigo de Gödel e seu contexto lógico-matemático para, em seguida, introduzir os comentários de Wittgenstein.

Em 1931, Kurt Gödel apresenta, em seu artigo intitulado "Sobre proposições formalmente indecidíveis de Principia Mathematica e sistemas relacionados", os Teoremas da Incompletude, cujo alcance inclui o sistema de PM e a teoria de conjuntos ZF, assim como suas extensões finitas (Gödel 1992, p. 38). De maneira resumida, podemos afirmar que Gödel prova que nestes sistemas é possível construir uma proposição ϕ que seja **indecidível**: não é o caso que $\vdash \phi$ nem $\vdash\neg \phi$. Como existe ϕ tal que $\nvdash \phi$ e $\nvdash \neg\phi$, então o sistema é **incompleto**: não é válido, para qualquer ϕ, que $\vdash \phi$ ou $\vdash \neg\phi$. Isto é, se o sistema fosse completo, então para toda proposição haveria alguma prova de sua afirmação ou de sua negação. A partir deste resultado, Gödel desenvolve como corolário consequências sobre a consistência desses sistemas, que concerne ao Segundo Teorema da Incompletude.

É importante enfatizar que os sistemas em questão são **consistentes** e **ω-consistentes**[3], características (que iremos abordar posteriormente) que são fundamentais na exposição formal do Primeiro Teorema da Incompletude: se S é inconsistente, então vale para algum ϕ que $\vdash_S\phi$ e $\vdash_S\neg\phi$, ou seja, S pode derivar uma contradição como teorema[4].

Seja K uma teoria com igualdade na linguagem L_A satisfazendo as

[1] Doravante, as citações de Wittgenstein de (Wittgenstein et al. 1990) serão abreviadas como da forma "RFM, I, Ap. 1.4", ou seja, a abreviação do livro, seguida da Parte, indicando se é o Apêndice ou não, e, por fim, o parágrafo referido.

[2] Mais especificamente, Wittgenstein comenta sobre o Primeiro Teorema da Incompletude. No entanto, colocamos o título dessa dissertação como abrangendo o Teorema da Incompletude em virtude do fato que o Segundo Teorema da Incompletude é um corolário do Primeiro. Ao nos referirmos ao Primeiro Teorema da Incompletude, iremos indistintamente utilizar "Primeiro Teorema de Gödel" ou "Teorema da Incompletude" ou "Teorema de Gödel".

[3] Na verdade, a característica essencial da construção de Gödel é a ω-consistência; conforme veremos posteriormente, um sistema ω-consistente também é consistente.

[4] A noção de $\omega-$consistência, por ser mais complexa, será abordada no capítulo 2.

> seguintes três condições:
>
> 1. K tem um conjunto de axiomas recursivo (isto é, PrAx(y) é recursivo).
>
> 2. $\vdash_K 0 \neq 1$.
>
> 3. Toda função recursiva é representável em K. [...] Seja K tal que K satisfaz condições 1-3. Então:
> (a) Se K é consistente, então não é o caso que $\vdash_K$ G.
> (b) Se K é w-consistente, então não é o caso que $\vdash_K \neg G$.
> Portanto, se K é w-consistente, G é uma proposição indecidível de K. (Mendelson 1997, p. 207, tradução nossa).

Conforme exposto por Mendelson acima, a prova do Primeiro Teorema da Incompletude requer a condição de ω-consistência e consistência. Voltando ao artigo de Gödel, sua exposição é dividida em uma introdução informal e um desenvolvimento formal dos teoremas. Na introdução, o autor vai além da questão sobre a indecidibilidade de uma proposição, e se expressa em termos de verdade e falsidade:

> Da observação de que [R(q);q] afirma sua própria indemonstrabilidade, segue-se imediatamente que [R(q);q] é correta, já que [R(q);q] é, certamente, indemonstrável (já que é indecidível). (Gödel 1992, p. 41, tradução nossa) [5,6]. (Gödel 1986, p. 150)

Em síntese, por um lado, a prova do Primeiro Teorema da Incompletude depende das noções de indecidibilidade, consistência e ω-consistência; por outro lado, Gödel, em sua exposição informal, fala em termos da corretude, ou seja, da verdade. O ponto de partida de Wittgenstein, desse modo, trata da junção destas duas discussões: ao passo que o Primeiro Teorema da Incompletude teria construído uma proposição **indecidível**, ela também é alegadamente **verdadeira**. Logo, Wittgenstein começa se perguntando "Existem proposições verdadeiras no sistema de Russell que não podem ser demonstradas em seu sistema?"(RFM I Ap. I.5, tradução nossa).

Dessa maneira, Wittgenstein coloca a questão em termos da relação entre verdade e demonstrabilidade: Gödel teria provado que há uma separação entre prova e verdade nos sistemas de PM e ZF, ou isso não é possível em princípio? *Prima facie*, Wittgenstein responde negativamente: "Sob que circunstâncias uma proposição é afirmada no jogo de Russell? - a resposta é: ao final de uma de suas provas"(RFM I Ap. I.6, tradução nossa). Isto é, Wittgenstein, por razões ainda não detalhadas, reduz a noção de ”verdadeiro em PM” à noção de ”demonstrável em PM”. Em resumo, por conta do colamento entre essas duas noções, ele caracteriza o Primeiro Teorema da Incompletude, cujo resultado é construir uma proposição verdadeira e indemonstrável, como uma contradição, comparando-no ao Paradoxo do Mentiroso (RFM I Ap. 1.12).

5 Texto original: "Aus der Bemerkung, daß[R(q); q] seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet, folgt sofort, daß[R(q);q] richtig 1st, denn [R(q)] ist ja unbeweisbar (da es unentscheidbar)".

6 Via de regra, reproduzirei o texto original dos escritos de Gödel e Wittgenstein após citação traduzida de ambos. Em relação aos demais autores e textos menos centrais, apenas reproduzirei a citação traduzida.

A reação inicial a esse questionamento de Wittgenstein foi a alegação de sua ignorância em relação ao debate: seus comentários foram rechaçados como erros e um pequeno deslize de sua obra genial: "Outras passagens também, particularmente as sobre consistência e o teorema de Gödel, são de baixa qualidade e contêm erros determinados."(Dummett 1978, p. 166, tradução nossa).

Até mesmo Gödel, em uma carta a Menger, reconhece que Wittgenstein não teria compreendido seus teoremas:

> Em relação ao que concerne ao meu teorema da incompletude, está, de fato, claro das passagens que você citou que Wittgenstein não o entendeu (ou fingiu não entender). Ele interpreta o teorema como um tipo de paradoxo lógico, enquanto o teorema é, de fato, o oposto, a saber, um teorema matemático dentro de uma parte absolutamente incontroversa da matemática (teoria finitária de números ou combinatória). (Wang 1990, p. 49, tradução nossa).

Por outro lado, comentadores recentes procuram reavaliar esse diagnóstico inicial de um fracasso completo de Wittgenstein. Shanker inaugurou esta nova perspectiva no debate (Shanker 2012), e o seu desenvolvimento com outros autores buscou relacionar os comentários de Wittgenstein sobre o Teorema da Incompletude com seus outros escritos:

> Os comentários de Wittgenstein sobre o Teorema de Gödel tem um paralelo direto com suas discussões das clássicas provas de impossibilidade do século XIX. Uma leitura atenta da última é essencial para o entendimento da primeira. (Floyd 1995, p. 386, tradução nossa).

Sendo assim, Floyd e Putnam, figuras importantes nesse debate, procuram mostrar como os comentários de Wittgenstein podem ser compreendidos a partir da diferenciação entre a discussão da **prosa filosófica** que circunda a **prova matemática** do Primeiro Teorema da Incompletude. Outros autores contemporâneos, como Steiner e Rodych, são mais críticos em relação aos comentários wittgensteinianos, procurando mostrar como Wittgenstein ataca diretamente a prova de Gödel (Steiner 2001), (Rodych 2003).

Assim, o objetivo da dissertação presente é investigar cuidadosamente os comentários crípticos de Wittgenstein em paralelo com a prova de Gödel, comparando interpretações recentes favoráveis e desfávoreis ao diagnóstico wittgensteiniano[7]. Desenvolvimentos posteriores de Rosser (Rosser 1936) e Tarski (Tarski 1983) também serão levados em conta para a análise da adequação dos escritos de Wittgenstein.

Por fim, pretendo aplicar o resultado do seu diagnóstico para entender como o Teorema da Incompletude se comporta em sistemas não-clássicos de lógica, em particular nas LFI's[8]. Também investigaremos a questão da paternidade da lógica paraconsistente: pode-se dizer que Wittgenstein é um precursor desta lógica?

---

[7] Entre eles, (Berto 2009; Kreisel 1958; Lampert 2018; Rodych 2003).

[8] Para uma introdução às LFI's, conferir trabalho de Walter Carnielli (Carnielli e Rodrigues 2019). Uma introdução mais abrangente se encontra em (Carnielli e Coniglio 2016)

O capítulo 2 serve de base lógico-matemática para entendermos o resultado matemático do Primeiro Teorema da Incompletude - para que, assim, estejamos menos sujeitos a fazer leituras filosóficas desinformadas. Assim, introduzirei não apenas o resultado de Gödel, mas também o contexto histórico do Programa de Hilbert e o desenvolvimento do formalismo nos primórdios do século XX, que, como veremos, é central para entendermos o papel do Teorema da Incompletude, pois é a partir da busca de uma matemática finitária que a noção de "computável" requer uma análise matemática rigorosa, sendo caracterizada por Gödel como as funções recursivas parciais. O capítulo 3 é um capítulo à parte, dedicado às discussões entre Turing e Wittgenstein sobre o uso de contradições na matemática. No panorama geral do texto, ele servirá para introduzir a filosofia da linguagem de Wittgenstein aplicada à matemática e à lógica e entendermos a metodologia filosófica do Wittgenstein de RFM e do final dos anos 1930. O capítulo 4 discute especificamente as interpretações principais sobre os comentários de Wittgenstein na literatura, e o capítulo 5 realiza uma análise própria detalhada dos comentários do Apêndice I. No capítulo 6, exploramos algumas objeções que podem ser colocadas à perspectiva de Wittgenstein, e no capítulo 7 consideramos as relações entre a filosofia de Wittgenstein e a lógica paraconsistente.

Ainda veremos como Wittgenstein articula a prova de Gödel de maneira detalhada, no entanto, ao realizar a leitura do capítulo 2, compare com a seguinte citação em que Wittgenstein reconstrói - ainda que essa não seja sua resposta final - o Primeiro Teorema da Incompletude:

> Eu imagino alguém me pedindo um conselho; ele diz: "Eu construí uma frase (usarei 'P' para designá-la) no simbolismo de Russell, e por meio de certas definições e transformações ela pode ser interpretada como afirmando "P não é demonstrável no sistema de Russell". Não devo eu dizer que ela é, por um lado, verdadeira, e, por outro lado, indemonstrável? Suponha que ela seja falsa; então, é verdade que ela é demonstrável. E isso certamente não pode ser o caso! E, se ela é demonstrável, então está demonstrado que ela não é demonstrável. Portanto, ela só pode ser verdadeira, mas indemonstrável."[9] (RFM I Ap. I. 8, tradução nossa)

No presente trabalho que segue, mostrarei como a comparação de RFM de Wittgenstein com outros textos importantes do mesmo período pode iluminar os comentários crípticos contidos no Ap. 1. A partir disso, pretendo mostrar como Wittgenstein está levantando um ponto importante que é deixado de lado por Gödel em um primeiro momento, a saber, o caráter ilegítimo do uso do conceito "verdadeiro" que Gödel oferece

[9] Texto original: "Ich stelle mir vor, es fragte mich Einer um Rat; er sagt: Ich habe einen Satz (ich will ihn mit 'P' bezeichnen) in Russell's Symbolen konstruiert, und den kann man durch gewisse Definitionen und Transformationen so deuten, daß er sagt: 'P ist nicht in Russell's System beweisbar'. Muß ich nun von diesem Satz nicht sagen: einerseits er sei wahr, anderseits er sei unbeweisbar? Denn angenommen, er wäre falsch, so ist es also wahr, daß er beweisbar ist! Und das kann doch nicht sein. Und ist er bewiesen, so ist bewiesen, daß er nicht beweisbar ist. So kann er also nur wahr, aber unbeweisbar sein".

em 1931. Isto é, ainda que a noção de "demonstrável em PM"estivesse bem estabelecida, Gödel ainda trabalhava com uma noção não matemática de "verdadeiro em PM".

Esta leitura será desenvolvida tendo como base (Marcos 2010), que caracteriza Wittgenstein como um "semântico sem semântica", isto é, alguém que já fazia intuitivamente uma distinção entre semântica e sintática, ainda não estabelecida na lógica de Frege e Russell, mas que classificava a semântica como um tópico *para além* da matemática. Isto é, como colocado por (Floyd 2001), Wittgenstein estava separando a prosa filosófica da prova matemática, que é parte da metodologia wittgensteiniana tardia conrforme reconstruído em (Engelmann 2009).

Nesse sentido, sustentarei que uma leitura atenta do Ap. 1, ainda que demande estarmos informados filosoficamente sobre outros escritos de Wittgenstein e do contexto lógico-matemático anterior de Frege e Russell, é suficiente para entender o que o autor aponta no Teorema da Incompletude, e seus comentários, em que o autor se propõe a dissipar a confusão filosófica do Teorema de Gödel, são valiosos para entendermos a ilegitimidade do passo de Gödel ao tratar de uma proposição verdadeira e indemonstrável.

2 O TEOREMA DA INCOMPLETUDE

Antes de uma análise dos comentários de Wittgenstein propriamente ditos, entretanto, é necessário uma breve introdução aos resultados matemáticos da prova da incompletude de Gödel. Por razões de elucidação e clareza, a exposição de Mendelson será seguida de perto em um momento inicial (Mendelson 1997).

O Teorema da Incompletude, não obstante, também é parte de um capítulo importante da história da matemática, que começa alguns antes com a exposição das ideias de David Hilbert e seu projeto formalista da matemática.

2.1 O Programa de Hilbert

No início do século XX, a matemática foi deixada com um legado importante: por um lado, Russell mostrou resultados paradoxais de se lidar com conjuntos infinitos; por outro lado, no século XIX, os matemáticos Bolyai e Lobachevsky demonstraram a independência do quinto postulado de Euclides:

> A estranheza dos resultados sobre o tamanho dos infinitos e a confusão engendrada pelo Paradoxo de Russell levou muitos matemáticos ao início do século XX a questionar a legitimidade de utilizar coleções infinitas na matemática. Uma situação similar tinha ocorrido no século anterior, quando Bolyai e Lobachevsky desenvolveram geometrias não-euclidianas. (Epstein e Carnielli 2000, p. 44, tradução nossa)

Tendo esse panorama em vista, Hilbert é uma figura na história da matemática que consegue unir esses legados em um programa, que ficou conhecido como o "Programa de Hilbert". A proposta de Hilbert é desenvolver uma matemática unificada que consiga, por um lado, domar o uso do infinito na matemática, impedindo o surgimento de paradoxos; por outro lado, essa matemática deve servir para caracterizar a pluralidade latente de sistemas matemáticos. Seu objetivo, sendo assim, é elaborar uma matemática com métodos **finitários** e **axiomatizada**.

2.1.1 Uma Matemática Finitista

O primeiro aspecto do Programa de Hilbert é que ele pretende desenvolver uma matemática com métodos de prova finitos. Segundo Hilbert, ainda há uma confusão matemática no que diz respeito à análise, a área da matemática que lida com cálculos diferenciais e integrais. Em um primeiro momento, Weierstrass ofereceu uma construção da análise que não necessitava da introdução do conceito de **infinitesimal**, ou seja, uma grandeza infinitamente pequena. No entanto, isso não foi o suficiente para livrar a análise de pressupor uma noção de infinito, a saber, na construção dos números reais:

> Apesar da fundamentação que Weierstrass ofereceu ao cálculo infinitesimal, disputas sobre os fundamentos da análise continuam.
>
> Essas disputas não terminaram porque o conceito de *infinito*, como aquele conceito utilizado na matemática, não foi completamente elucidado. [...] o infinito continua aparecendo na série numérica infinita que define os números reais e no conceito do sistema numérico real que é pensada como uma totalidade completada de uma só vez. (Benacerraf e Putnam 1964, p. 184, tradução nossa)

Em seguida, Hilbert expõe de maneira explícita sua tese finitista, segundo a qual em todos os contextos matemáticos infinitários deve ser possível reduzir as provas a métodos finitários, ou seja, "em geral, métodos dedutivos baseados no infinito devem ser substituídos por procedimentos finitos que levam aos mesmos resultados"(Benacerraf e Putnam 1964)[p. 183, tradução nossa].

A preocupação com o infinito tem origem quando tomamos a série infinita como série **completada**, ou seja, quando concebemos o infinito de maneira atual, e não apenas potencialmente. Ainda que pareça ser um compromisso forte adotar o infinito atual, essa análise está pressuposta até mesmo na análise dos quantificadores lógicos, quando, por exemplo, estamos oferecendo as condições de verdades para esses quantificadores.

Definição 1. $\vartheta(\forall x\ \phi) = 1 \leftrightarrow \vartheta(\phi[x/i]) = 1, \textit{para qualquer } i$

Isto é, no caso do quantificador universal, a verificação para que a fórmula ∀x ϕ seja verdadeira, é necessário percorrer uma infinidade de indivíduos *i*. O mesmo ocorre no caso do quantificador existencial, pois ele precisa percorrer a infinitude de indivíduos para garantir que não há nenhum elemento que satisfaça a condição, ou seja, o quantificador existencial continua buscando até encontrar um exemplo positivo. Assim, a matemática finitária proposta por Hilbert requer que utilizemos não apenas uma análise finitária numérica, mas também uma mudança no tratamento lógico dos conectivos. A maneira de tratar os conectivos de maneira finitária é contê-los a um número finito de indivíduos que eles precisam percorrer:

> Para um predicado P, definimos:
>
> ∃ y ≦ n P($\vec{x}$,y) $\equiv_{Def}$ existe um y ≦ n tal que P($\vec{x}$,y)
>
> e
>
> ∀ y ≦ n P($\vec{x}$,y) $\equiv_{Def}$ para todo y ≦ n, P($\vec{x}$,y) (Epstein e Carnielli 2000, p. 100, tradução nossa)

Dessa maneira, poderíamos utilizar estes quantificadores lógicos de maneira justificada, pois estaríamos nos baseando em métodos finitos de verificação. Hilbert oferece o exemplo da prova da infinitude de números primos. Nesse caso, garantimos a infinitude pelo fato de que é sempre possível, dado um número primo *p*, encontrar um primo maior do que *p*, mas que esteja limitado a ser menor ou igual a *p!+1*, ou seja, a expressão "∃ x P(x)", sendo *P* o predicado ser primo, limita a busca a partir de *p* até o número *p!+1*, portanto, não há necessidade de se percorrer uma infinitude de números (Benacerraf e Putnam 1964, p. 193).

2.1.2 Uma Matemática Axiomática

O segundo aspecto do Programa de Hilbert é seu caráter **formalista**: temos que fazer uma distinção entre matemática pura e aplicada; a primeira lida apenas com os símbolos matemáticos de um ponto de vista de suas relações formais entre si, ou seja, o sistema dedutivo em questão; a matemática aplicada, por outro lado, lida com a questão da correção dos sistemas, ou seja, de interpretá-los e oferecer um veredito em relação à conformidade com a realidade.

Para realizar esse sistema meramente formal, Hilbert propõe sistemas axiomáticos, que são sistemas que possuem axiomas, que são fórmulas que aceitamos sem demonstração, e regras para passar de fórmulas a outras fórmulas. Tendo isso, podemos deduzir os teoremas de maneira puramente formal, sem que haja necessidade de interpretar os axiomas como **verdadeiros** nem como significando algo. Hilbert, ao tomar esse caminho, consegue lidar de maneira magistral com as questões insurgentes de geometrias não-euclidianas: em um primeiro momento, não precisamos nos comprometer em determinar a verdade dos axiomas da geometria: se escolhermos um sistema sem o postulado das paralelas de Euclides, conseguimos gerar uma família de geometrias não-euclidianas.

Tendo em vista esse projeto de criar uma matemática livre de paradoxos e com mais rigor que consiga abarcar diferentes sistemas formais, Hilbert estabelece três condições para que possamos trabalhar de maneira segura com esses sistemas formais:

1. Consistência: o sistema deve conseguir demonstrar sua consistência.
2. Completude: o sistema deve ser completo.
3. Decidível: devemos poder decidir de maneira finitária se uma fórmula tem solução ou não. (Benacerraf e Putnam 1964, p. 201)

Ainda veremos de maneira detalhada como entender essas três noções de maneira formal. No entanto, o que podemos adiantar é que a história a seguir, que contarei resumidamente no que resta deste capítulo, é a derrocada deste projeto ambicioso.

2.2 Computabilidade

Conforme visto na seção anterior, o Programa de Hilbert propunha, através de sistemas formais axiomáticos, tornar a matemática mais rigorosa e capaz de resolver de maneira metódica suas próprias questões. O ponto crucial para que isso fosse bem sucedido, não obstante, é que o sistema deveria ter métodos de prova finitários, ou seja, o infinito como uma noção primitiva deveria ser expurgado.

É por conta disso que a primeira metade do século XX oferece uma variedade de propostas de se definir o que significa provar por meios finitários (Epstein e Carnielli 2000, p. 70). Assim, o fio condutor da presente discussão é a formalização da noção de **computabilidade**. Métodos de prova finitários são métodos computáveis, ou seja, construímos algoritmos que nos permitem, a partir de instruções finitas, demonstrar propriedades nos sistemas formais.

2.2.1 Máquinas de Turing

As Máquinas de Turing, um aparato técnico-teórico desenvolvido por Turing para resolver o Problema da Parada, são um candidato à formalização da noção de computabilidade. Assim, nesta proposta, ser computável é equivalente a ser calculável por uma Máquina de Turing. A maneira como Turing as introduz é exemplar e nos servirá para fazer a ligação entre o Programa de Hilbert e os esforços posteriores de Gödel com as funções recursivas parciais.

> Nenhuma tentativa ainda foi feita de mostrar que os números "computáveis" incluem todos os números que seriam considerados computáveis. Todos os argumentos que possam ser dados estão fadados a serem, fundamentalmente, apelos à intuição. A verdadeira questão em jogo é "Quais são os possíveis processos que podem ser levados a cabo ao se computar um número?"(Turing et al. 1936, p. 116, tradução nossa)

Turing, ao tentar responder à questão de quais números são computáveis, foca na questão de quais processos são computáveis, ou seja, o que uma máquina pode realizar. Ao realizar a construção de uma Máquina de Turing, não obstante, é interessante observar o aspecto finitista que remonta a Hilbert. Turing compara os estados da Máquina aos estados de uma mente calculando. Nesse sentido, ele limita a Máquina a uma **finitude** de símbolos que ela pode imprimir por vez e de símbolos que ela pode ler. O número de estados da Máquina também é finito, e suas ações são limitadas a ações simples: ela pode ler o símbolo em um estado e sobrescrever 1 ou deletar, escrevendo 0; ela também pode se mover para a direita ou para a esquerda. Assim, uma instrução para uma Máquina de Turing consiste em saber seu estado inicial q_i, o que deve ser lido nesse estado, S, a operação a ser realizada, Op, e o estado final q_j, ou seja, é uma quádrupla (q_i, S, Op, q_j), S $\in$ {0,1} e Op $\in$ {1,0,D,E} (Epstein e Carnielli 2000, p. 76).

Em síntese, temos uma sequência de 0's e 1's que podemos fazer transformações a partir das instruções contidas em cada Máquina. A representação de números, neste caso, é intuitiva: o *1* funciona como um palito, assim, um número é uma sequência de 1's, sendo o 0 apenas um palito, o 1 dois palitos, e assim por diante. Ao representar números em Máquinas de Turing, também podemos representar funções. Isto é, dado certo número inicial, passamos pela lista de instruções da Máquina e obtemos um outro número. Em outras palavras, temos uma regra que permite obter uma **saída** para determinada **entrada**. A equivalência entre a noção de cálculavel por uma máquina de Turing e computável é uma versão da *Tese de Church*, e veremos como outras propostas, em especial a de funções recursivas parciais geram classes de funções equivalentes às calculáveis por uma Máquina de Turing para a noção de computabilidade (Epstein e Carnielli 2000, p. 86).

2.2.2 *Entscheindungsproblem* e a Tese de Church

Na seção anterior, vimos que Turing desenvolvera as Máquinas de Turing com o propósito de formalizar a noção de um procedimento computável. A aplicação principal das MTs, não obstante, é para a resolução do Problema da Parada (*Entscheidungsproblem*):

> Eu proponho, assim, mostrar que não há processo geral para determinar se uma dada fórmula μ do cálculo funcional K é demonstrável, i.e., que pode não haver máquina que, sendo fornecida quaisquer uma destas fórmulas, eventualmente dirá se elas são demonstráveis. É preciso destacar que o que eu demonstrarei é diferente dos resultados bem conhecidos de Gödel. Gödel mostrou (no formalismo de Principia Mathematica) que existem proposições μ tais que nem μ nem $\neg\mu$ são demonstráveis. (Turing et al. 1936, p. 259, tradução nossa)

O Problema da Parada, dessa maneira, diz respeito à decidibilidade de nosso sistema, ou seja, se podemos decidir de maneira computável quais são as fórmulas demonstráveis e quais não são, um dos pilares do Programa de Hilbert. O resultado que Turing demonstrou é que **não** é possível resolver o Problema da Parada, ou seja, utilizando o paradigma das MTs, não há maneira de separar as fórmulas demonstráveis das não demonstráveis (Turing et al. 1936, p. 262).

Este resultado, no entanto, possui uma generalidade maior do que apenas aplicado às MTs. No mesmo artigo onde Turing demonstra a insolubilidade do Problema da Parada, o autor também demonstra a equivalência entre as MTs e a noção de "λ-calculabilidade" de Church, um paradigma paralelo da noção de computabilidade (Turing et al. 1936, p. 263).

Por um lado, as noções de λ-calculabilidade e Máquinas de Turing são formalizações que geram uma classe de funções, que neste caso são equivalentes. Por outro lado, o que queríamos - cujo objetivo é dar desenvolvimento ao Programa de Hilbert -, era conseguir especificar uma noção **informal**, que é a noção de computabilidade. De maneira informal, aquilo que é computável é aquilo que a mente humana consegue calcular, por isso, há analogias com mecanismos algorítmicos finitários.

Estabelecer a equivalência entre uma noção informal e uma formal, por sua vez, não é um processo tão direto quanto estabelecer uma equivalência entre duas noções formais. A equivalência entre a noção formal de calculabilidade efetiva e a noção informal de computabilidade é a Tese de Church, inicialmente considerada por Church como uma definição, posteriormente criticado por Post, que a tomou como uma hipótese acerca do funcionamento da mente humana (Epstein e Carnielli 2000, p. 224).

2.2.3 Funções Recursivas Parciais

Turing e Church publicaram de maneira independente seus artigos em 1936 sobre suas formalizações da noção de computabilidade (Turing et al. 1936; Church 1936), ambos se reportando ao *Entscheidungsproblem* de Hilbert. No entanto, alguns anos antes, em 1931, Gödel publicara seu artigo sobre os Teoremas da Incompletude, e lá ele oferecera uma terceira formalização da noção de computabilidade: as funções recursivas parciais.

A ideia básica das funções recursivas parciais é gerar uma classe de funções a partir de algumas funções básicas que possam, dada a aplicação de certas operações, gerar mais funções recursivas parciais. As funções recursivas parciais são outro paradigma possível à noção de computabilidade, e é um resultado estabelecido que a classe de funções geradas pelas recursivas parciais é equivalente às MTs e a λ-calculabilidade de Church (Epstein e Carnielli 2000, p. 148). As funções a seguir são as Funções Básicas:

1. Função zero: Z(n) = 0, para todo n
2. Função sucessor: S(n) = n', para todo n
3. Função projeção: $\mathrm{P}_i^k(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_i, ..., \mathrm{x}_k) = \mathrm{x}_i$.

As operações que podemos aplicar sobre as Funções Básicas para gerar outras Funções Recursivas Parciais, por sua vez, são as seguintes:

1. Composição: se g e h_i (i $\in$ {1, ..., m}) são recursivas parciais, então a função $\mathrm{f}(\vec{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{h}_1(\vec{x}), ..., \mathrm{h}_i(\vec{x}), ..., \mathrm{h}_m(\vec{x}))$ também é recursiva parcial (Epstein e Carnielli 2000, p. 92).
2. Recursão Primitiva: se g e h são funções recursivas parciais, então f definido por recursão primitiva em g e h também é (Epstein e Carnielli 2000, p. 93):
   $\mathrm{f}(0,\vec{x}) = \mathrm{g}(\vec{x})$.
   $\mathrm{f}(\mathrm{n}', \vec{x}) = \mathrm{h}(\mathrm{f}(\mathrm{n},\vec{x}))$
3. μ-operador: dada uma função f, buscamos o menor y que satisfaça um determinado valor m para f, apenas quando qualquer valor menor que y seja definido para f (Epstein e Carnielli 2000, p. 122):
   $\mu\mathrm{y}[\mathrm{f}(\vec{x},\mathrm{y}) = \mathrm{m}] = \mathrm{z}$ sse
   (i) $\mathrm{f}(\vec{x},\mathrm{y}) = \mathrm{m}$ e
   (ii) para todo y < z, $\mathrm{f}(\vec{x}, y)$ é definida e y > m.

Assim, definimos o conjunto de funções recursivas parciais:

> Nossas investigações até agora nos levaram a formular a seguinte definição: As funções *recursivas parciais* são a menor classe contendo a função zero,

> sucessor e projeção e fechadas sob composição, recursão primitiva e o μ-operador. (Epstein e Carnielli 2000, p. 124, tradução nossa)

Dessa maneira, conseguimos localizar o desenvolvimento de Gödel na narrativa que estivemos seguindo até agora: o Programa de Hilbert, com o requerimento de uma matemática finitária axiomática, desenvolveu-se com Gödel, Church e Turing a partir da especificação da noção de computabilidade, uma noção finitária e que captura a ideia de um processo mecânico. O que veremos em seguida, e que já ficou em evidência no Problema da Parada de Turing-Church, são as limitações dessa matemática exigida por Hilbert.

2.3 Sistema S de aritmética

O Teorema da Incompletude vale para uma coleção de sistemas formais que são extensões de ZF e PM. Na seção 2.9, veremos com maior detalhe para quais sistemas o Teorema da Incompletude é válido. Para uma apresentação esquemática e introdutória do teorema, não obstante, é mais simples adotar algum sistema e construi-lo nesse sistema. Mendelson adota o sistema aritmético S, uma teoria de primeira ordem com 9 axiomas acrescentados de modo que a aritmética possa ser um modelo desse sistema. A linguagem de S, L_a, contém uma única letra de predicado A_1^2, que na aritmética usual é interpretada como "x é igual a y", uma constante individual a_1, que é interpretada como "0", e três letras de funções f_1^1, f_1^2 e f_2^2, que são interpretadas como "sucessor de y", "x somado a y" e "x multiplicado com y", respectivamente, na aritmética usual (Mendelson 1997, p. 155). Acrescentando os 9 axiomas à L_a, temos um sistema cuja aritmética usual é modelo, ou seja, todos esses axiomas são verdadeiros se interpretados como dizendo respeito a números naturais:

> (S1) $x_1=x_2 \rightarrow (x_1=x_3 \rightarrow x_2=x_3)$
> (S2) $x_1=x_2 \rightarrow x'_1=x'_2$
> (S3) $0 \neq x'_1$
> (S4) $x'_1=x'_2 \rightarrow x_1=x_2$
> (S5) $x_1+0=x_1$
> (S6) $x_1+x'_2=(x_1+x_2)'$
> (S7) $x_1 \cdot 0 = 0$
> (S8) $x_1 \cdot (x_2)'=(x_1 \cdot x_2)+x_1$
> (S9)$\beta(0) \rightarrow (((\forall x)(\beta(x) \rightarrow \beta(x')) \rightarrow (\forall x)\beta(x)$ para qualquer fórmula bem formada $\beta(x)$ de S (Mendelson 1997, p.155, tradução nossa).

Desse modo, temos um sistema que é capaz de representar a relação de igualdade, a operação de soma e produto, e a de sucessor, assim como as "verdades" da aritmética usual[1], que são expressas como teoremas[2].

O passo seguinte para se enriquecer S é introduzir a noção de **representabilidade**: dada uma função numérica f que toma n argumentos para o valor $f(a_1,a_2, ...,a_n)$, queremos

[1] Ao se referir à "aritmética usual", trata-se de um modelo padrão para S, em que os símbolos são interpretados ordinariamente (Mendelson 1997, p. 160).

[2] Ainda não está em questão se este sistema é completo, ou seja, se ele expressa **todas** as proposições verdadeiras da aritmética.

expressar essa função em S. Assim, uma função f de n argumentos é representável em S se, e somente se,

> [...] existe uma fórmula $\beta(x_1, ..., x_n, y)$ de K com as variáveis livres x_1, ..., x_n, y, tal que, para quaisquer números naturais $k_1, ..., k_n, m$, o seguinte ocorre:
> (i) Se f(k_1, ...,k_n)=m, então $\vdash_S$ β($\bar{k}_1$,...,$\bar{k}_n$, $\bar{m}$)[3]
> (ii) $\vdash_S$ ($\exists$ y) β($\bar{k}_1$,...,$\bar{k}_n$, y). (Mendelson 1997, p. 171, tradução nossa)

Isto é, uma função f é representável em S se para cada sequência de argumentos k_1,k_2, ..., k_n, cujo valor aplicado a f é m, a fórmula $\beta(x_1, ..., x_n, y)$, com as variáveis $x_1, ..., x_n, y$ substituídas por $\bar{k}_1$,...,$\bar{k}_n$, $\bar{m}$, é um teorema em S. A partir disso, é possível gerar uma variedade de funções representáveis em S (Mendelson 1997, p. 172-3). Em outras palavras, uma função numérica cuja entrada é uma sequência s e obtém saída m é representada em S quando alguma fórmula A($\bar{s}$,$\bar{m}$) é teorema em S, e qualquer outra fórmula A($\bar{s}$,$\bar{k}$) não é.

O que é interessante sobre as funções representáveis em S é que elas são poderosas o suficiente para conseguir representar as funções recursivas parciais.

2.4 Enumeração de Gödel

Antes de desenvolver a relação entre as funções recursivas e representabilidade, Gödel possui mais uma ferramenta em seu arsenal lógico-matemático para enriquecer S: a **enumeração de Gödel**. De maneira resumida, o que se pretende obter com essa enumeração é uma correspondência 1-1 com determinados símbolos e uma sequência numérica.

Para ilustrar uma lista que obedeça aos critérios de uma enumeração de Gödel, podemos pensar na retirada de senhas de um posto de saúde: cada pessoa pega uma ficha, que é única, ou seja, contém um número exclusivo. Por outro lado, existe um método de decisão para descobrir de quem é determinado número (a recepção chama determinado número. Se ninguém responder, ninguém possui aquela ficha. Se uma pessoa responder, aquela ficha é dessa pessoa.). Por fim, existe um método para decidir o número de cada pessoa (perguntando a cada um "qual é a sua ficha?").[4]

Desse modo, uma enumeração requer que (i) a fórmulas distintas correspondam números distintos, (ii) exista um método efetivo para decidir, a partir de uma fórmula, o seu número associado, e (iii) exista um método efetivo para decidir, a partir de um número, se ele possui alguma fórmula associada, e, caso positivo, qual é a formula associada (Epstein e Carnielli 2000, p. 101).

---

[3] $\bar{k}$ é o numeral de k.

[4] Obviamente, essa enumeração só funcionaria na hipótese de que estaríamos lidando com seres humanos 'modelos', isto é, com audição impecável, incapazes de mentir ou omitir respostas, etc.

É possível elaborar diferentes enumerações que obedeçam aos critérios acima. No entanto, com o objetivo de entender os resultados posteriores, iremos introduzir a enumeração de Gödel proposta por Mendelson:

- Números ímpares são associados a cada símbolo: g(()=3, g())=5, g(,)=7, g(¬)=9, ... g(x_k)=13+8k, ..., onde 1 ≦ k.
- A partir dos símbolos, geramos uma expressão (sequência de símbolos) $\mu_1, \mu_2..., \mu_n$. Assim, g($\mu_1, \mu_2..., \mu_n$)= $2^{g(\mu_1)}3^{g(\mu_2)}...p_r^{g(\mu_r)}$, onde p_r é um número primo, 1 ≦ r. (Mendelson 1997, p. 191)

O que garante que essa enumeração seja uma enumeração de Gödel? O Teorema Fundamental da Aritmética: "qualquer número natural ≥ 2 pode ser representado como um único produto de primos, a menos da ordem dos fatores." (Epstein e Carnielli 2000, p. 101).

Tendo feito uma enumeração de S que associe a cada fórmula um número de Gödel, podemos expressar propriedades sobre o sistema formal no próprio sistema formal. Por exemplo, podemos pensar na expressão "x é o número de Gödel de uma expressão consistindo de uma variável". De acordo com a enumeração de Mendelson, a fórmula $(\exists z)_{z \lneq x}(1 \leq z \wedge x = 2^{13+8z})$ corresponde - no sistema S - a essa expressão da metalinguagem. Outras expressões da metalinguagem importantes para entender os resultados de Gödel são a função Pf(y,x) e a função diagonal:

- Pf(y,x): y é o número de Gödel de uma prova em S da fórmula com o número de Gödel x.
- D(u): o número de Gödel de $\beta(\bar{u})$, se u é o número de Gödel de uma fórmula $\beta(x_1)$ (Mendelson 1997, p. 196).

Tendo a enumeração de Gödel, conseguimos criar funções numéricas a partir de propriedades como "ser demonstrável em S", "ser ímpar", etc. Também sabemos que o sistema S é forte o suficiente para representar todas as funções recursivas parciais, ou seja, encontramos as funções recursivas parciais para representá-las em S.

2.5 Lema Diagonal

Em determinados sistemas de aritmética, como no caso particular de S, a função diagonal é recursiva[5]. Como toda função recursiva é representável em S[6], a função diagonal

[5] Ver proposição 3.27 (Mendelson 1997, p. 197)
[6] Ver proposição 3.24 (Mendelson 1997, p. 187)

pode ser representada em S. Em seguida, aplicaremos a função diagonal com o intuito de gerar a proposição indecidível G.

Definição 2. *Seja C uma expressão de S cujo número de Gödel é q. [C] significa o mesmo que $\bar{q}$.*

Em outras palavras, [C] é o nome de C na linguagem-objeto, pois $\bar{q}$ é o numeral de q.

Lema 1. $\vdash_S C \iff \phi([C])$*, onde* $\phi(x_1)$ *é uma fórmula contendo apenas* x_1 *como variável e C é uma fórmula fechada (Mendelson 1997, p. 204).*

No lema 1, que é o lema diagonal, demonstra-se que a fórmula **fechada** C - isto é, sem variáveis livres - é equivalente a uma fórmula ϕ([C]) qualquer, gerada a partir da substituição de x_1 por [C] na fórmula $\phi(x_1)$. Como a única restrição imposta a ϕ é que ela possua apenas uma variável livre, pode-se estipular que $\phi(x_1) = (\forall \mathrm{x}_2) \neg \mathrm{Pf}(x_2, x_1)$. Aplicando o lema 1, $\vdash_S$ C $\iff$ $(\forall \mathrm{x}_2) \neg \mathrm{Pf}(x_2, [C])$.

2.6 Primeiro Teorema da Incompletude

Definição 3. *ω-consistência := S é ω-consistente se para todo $\phi(x)$, se $\vdash_S \neg\phi(\bar{n})$ para todo número natural n, então não ocorre que $\vdash_S (\exists x)\phi(x)$.*

Teorema 1. [7] *Seja G a proposição de Gödel de S tal que* $\vdash_S G \iff (\forall x_2) \neg Pf(x_2, [G])$*. Se S é ω-consistente, então $\nvdash G$ e $\nvdash \neg G$.*[8]

O teorema 1, o Primeiro Teorema da Incompletude aplicado ao sistema S, afirma a **indecidibilidade** de S, ou seja, nem a proposição G nem sua negação pode ser demonstrada em S sem que esse sistema seja ω-inconsistente.

Conforme visto na definição 3, o requerimento de ω-consistência para S significa dizer que se uma determinada propriedade não é satisfeita por nenhum natural, então ela não pode ser satisfeita de maneira alguma. Através de uma esquematização da prova do teorema 1, mostraremos como a ω-consistência é aplicada.

Suponha que S é ω-consistente. Nesse caso, S é consistente. Se $\vdash_S$ G, então $\exists r Pf(r, [G])$. Por outro lado, pelo lema da diagonalização, $\vdash_S$ $(\forall \mathrm{x}_2)$ $\neg Pf(x_2,$ [G]) (contradição). Portanto, como S é consistente, não é o caso que $\vdash_S$ G. Caso contrário, $\vdash_S$

[7] Conferir a formulação de Mendelson do Primeiro Teorema de Gödel (enumerada como proposição 3.37) (Mendelson 1997, p. 206).

[8] É preciso apenas supor a ω-consistência, pois a consistência pode ser derivada dela, como mostrado na proposição 3.36 (Mendelson 1997, p. 205). Consistência := S é consistente se para todo ϕ(x), não ocorre que $\vdash \phi(x)$ e $\vdash \neg\phi$(x).

$\neg G$,. Assim, pela consistência, não ocorre que $\vdash_S$G, ou seja, Pf(n,[G]) não "é satisfeito por nenhum número natural"(Mendelson 1997, p. 206). No entanto, pelo lema diagonal, $\vdash_S$ $(\exists x_2)$ Pf(x_2,[G]), o que não é permitido pela hipótese de ω-consistência. Logo, não é o caso que $\vdash_S \neg G$. Portanto, G é indecidível.

O caminho para o Primeiro Teorema da Incompletude pode ser resumido do seguinte modo: em primeiro lugar, através do lema diagonal, constrói-se uma fórmula G que é equivalente a $\phi([G])$, ou seja, ocorre um tipo de 'diagonalização' de G. Em seguida, assumindo-se a ω-consistência do sistema S, mostra-se que G não é demonstrável em S, nem ¬G.

A partir da prova do teorema 1 esquematizada acima, é importante destacar alguns pontos:

1. A prova trata sobre a relação de demonstrabilidade em S, ou seja, a proposição é indecidível em termos dos métodos de prova de S.
2. A prova em si não se pronuncia em relação à **verdade** da proposição indecidível.
3. A prova - ao menos como apresentada acima - é de natureza condicional: é apenas na hipótese de ω-consistência que a indecidibilidade é derivada.

2.7 Considerações

No artigo de 1931, antes de expor de maneira formal a prova dos Teoremas da Incompletude, Gödel apresenta uma introdução informal à prova propriamente dita. Nessa exposição, Gödel utiliza noções intuitivas para explicar de maneira simplificada o que será desenvolvido matematicamente:

> Nós podemos encontrar uma fórmula F(v) de PM com uma única variável livre v (do tipo de uma sequência numérica) tal que F(v), interpretada de acordo com o significado dos termos de PM, diga: F(v) não é uma fórmula demonstrável. Agora, construímos uma proposição indecidível do sistema PM [...] Da observação que [R(q); q] diz sobre si mesma não ser demonstrável, segue-se diretamente que [R(q); q] é verdadeira, pois [R(q); q] é, de fato, indemonstrável (sendo indecidível).[9] (Gödel 1992, p. 41, tradução nossa)

Em outras palavras, o raciocínio de Gödel é o seguinte: primeiramente, dada uma fórmula $\phi(\mathrm{x}_1)$ - para colocarmos em termos da construção feita anteriormente -, podemos traduzi-la como afirmando 'x_1 não é uma fórmula demonstrável', haja vista que, conforme

[9] Texto original: [...] eine Formel F(v) aus PM mit einer freien. Variablen v (vom Typus einer Zahlenfolge) angeben, so daß F(v) inhaltlich interpretiert besagt: F(v) ist eine beweisbare Formel. Nun stellen wir einen unentscheidbaren Satz des Systems PM [...] Aus der Bemerkung, da [R(q); q] seine eigene Unbeweisbarkeit behaup- tet, folgt sofort, da [R(q);q] richtig 1st, denn [R(q)] ist ja unbeweisbar (weil unentscheidbar).

visto pelo teorema 1, a proposição G é equivalente a $(\forall x_2) \neg \mathrm{Pf}(x_2, [\mathrm{G}])$. Isto é, não há prova da fórmula cujo número de Gödel é [G]. Como a própria fórmula é equivalente a G, G afirma sobre si mesma não ser demonstrável. Conforme visto pelo teorema 1, G é indecidível, ou seja, $\nvdash_S$ G e $\nvdash_S \neg$ G. Portanto, G não é demonstrável, ou seja, apesar de não ser possível decidir a verdade de G **internamente** ao sistema S, é - alegadamente - possível decidir a verdade de G por meio de um raciocínio na metalinguagem, ou seja, **externamente**.

Conforme veremos no capítulo 3, os comentários de Wittgenstein debatem o quão garantida é esta tradução: sempre podemos parafrasear $(\forall\, x_2) \neg \mathrm{Pf}(x_2, [\mathrm{G}])$ como afirmando que "G não é uma fórmula demonstrável"? De (3), sabemos que a prova da incompletude é de natureza condicional: se S é ω-consistente, então G é indecidível. Em todos os cenários desse condicional podemos traduzir G como "G não é demonstrável"?

Anteriormente às respostas adequadas, no entanto, é necessário destacar alguns resultados posteriores que enriqueceram os resultados de 1931 de Gödel. Entre eles, destacarei o **Teorema de Gödel-Rosser** e o **Teorema da Indefinibilidade da Verdade de Tarski**.

2.7.1 O Teorema de Gödel-Rosser

Diferentemente do Teorema de Gödel, o Teorema de Gödel-Rosser não requer a hipótese de ω-consistência para derivar a indecidibilidade: com algumas mudanças formais, é possível gerá-la a partir da hipótese mais fraca de consistência.

Definição 4. *Consistência := S é consistente se* $(\forall\phi) \neg\ (\ \vdash_S\phi$ *e* $\vdash_S\neg\phi\ )$.

Teorema 2. *Se S é um sistema consistente, G' é indecidível* [10].

Ao contrário da noção de ω-consistência, "diremos que uma lógica é "simplesmente" consistente se não há fórmula A tal que tanto A quanto ¬A são demonstráveis."(Rosser 1936, p. 87, tradução nossa). De maneira mais formal,

2.7.2 A Indefinibilidade da Verdade de Tarski

Conforme visto na seção 2.4, o Teorema de Gödel opera com a relação de derivabilidade de uma proposição em um sitema, e não sua verdade. Conforme afirma Kreisel,

> A beleza da própria formulação de Gödel é que seu resultado pode ser separado da questão sobre verdade em aritmética. Ele encontrou uma fórmula (x)A(x), A sendo primitiva recursiva, que é formalmente

[10] G' é o equivalente à proposição G no Teorema de Gödel, no entanto, sua construção difere do teorema original. Para mais detalhes, ver proposição 3.38 (Mendelson 1997, p. 209)

> indecidível no dado sistema P se P é consistente. (Kreisel 1958, p. 154, tradução nossa)

Falar sobre a verdade ou falsidade de G deve ser realizado externamente ao sistema S, em uma metalinguagem adequada. Até o momento, no entanto, essa metalinguagem é apenas um termo obscuro para se referir a uma linguagem que fala sobre o sistema S. Denominemo-la MS. MS é simplesmente o discurso ordinário, ou seja, a prosa em português (no caso da presente dissertação), ou MS também é uma linguagem formalizada, em que é possível definir de maneira precisa o predicado 'verdadeiro'? Tarski se propõe a discutir essas questões em seu artigo de 1936 intitulado "O Conceito de Verdade em Linguagens Formalizadas"(Tarski 1983, p. 152-178). Em seu artigo, Tarski se propõe a construir formalmente o predicado "verdadeiro":

> O artigo presente é quase completamente devotado a um único problema - a definição de verdade. Sua tarefa é construir - com referência a uma determinada linguagem - uma definição materialmente adequada e formalmente correta do termo 'proposição verdadeira'. (Tarski 1983, p. 152, tradução nossa)

Durante o restante do artigo, Tarski discute as dificuldades de se definir o predicado 'verdadeiro' para linguagens coloquiais, o que inclui o surgimento de paradoxos semânticos[11], o que o leva a considerar linguagens formalizadas. Não é propósito da presente dissertação esmiuçar os passos de Tarski, mas sim destacar seu grande resultado: o Teorema da Indefinibilidade da Verdade. De maneira resumida, o Teorema de Tarski é uma limitação a sistemas aritméticos no que tange à sua semântica: o predicado "verdadeiro" não pode ser definido nesse sistema aritmético.

> Um conjunto B de números naturais é dito *aritmético* se existe uma fbf β(x) na linguagem L_a, com uma variável livre x, tal que, para todo número natural n, n $\in$ B se, e somente se, β(n) é verdadeira sob a interpretação padrão. [...] Seja Tr o conjunto de números de Gödel de fbf's de S que são verdadeiras sob a interpretação padrão. Tr não é aritmético. (Mendelson 1997, p. 217)

Assim, destaca-se que, embora Gödel tenha desenvolvido seus teoremas levando em conta conceitos *sintáticos*, Tarski realizou um esforço paralelo no domínio da *semântica*, ao introduzir seu resultado limitativo da indefinibilidade da verdade.

Embora Wittgenstein, em seus comentários sobre Gödel (Wittgenstein et al. 1990, p. 49-54), não tivesse conhecimento destes desenvolvimentos de Rosser e Tarski, é importante discuti-los para avaliar, posteriormente, a adequação das observações de Wittgenstein, embora também seja importante não se precipitar em anacronismos ao criticar Wittgenstein por resultados posteriores em lógica-matemática.

[11] Para uma discussão sobre o paradoxo do mentiroso em relação com o artigo de Tarski, conferir capítulo 1 de "O paradoxo do mentiroso: uma abordagem deflacionista"(Ongaratto 2021).

2.8 Segundo Teorema da Incompletude

Embora Wittgenstein comente diretamente sobre o Primeiro Teorema da Incompletude, compreender o Segundo Teorema da Incompletude também é necessário para a compreensão do papel que o Programa de Hilbert possui na construção do Teorema de Gödel, mesmo que apenas uma introdução breve. O Programa de Hilbert, como será visto no capítulo 3, é fonte de desacordos entre Wittgenstein e Gödel, e entendê-lo no contexto do Teorema da Incompletude é elucidativo.

Teorema 3. *Se S é consistente, então* $\nvdash_S Con_S$[12].

Conforme Mendelson define, Con_S é a fórmula que, na interpretação *standard*, afirma que S não deriva nenhuma contradição, ou seja, Con_S é uma fórmula que expressa a consistência de S em S (Mendelson 1997, p. 212). Assim, o Segundo Teorema da Incompletude afirma que se S é consistente, então a consistência de S não pode ser demonstrada em S. Isto é, os métodos de prova de S não são suficientes para responder a todas as questões que podem ser feitas *sobre* S.

O que vimos até aqui é uma narrativa sobre a ascensão e a queda do Programa de Hilbert: inicialmente, Hilbert propunha com otimismo uma matemática fundamentada por sistemas axiomáticos finitários, expurgada de conceitos confusos como a noção de infinito atual. Assim, um novo amanhecer dourado poderia surgir para a matemática, uma imagem em que os termos matemáticos estariam bem esclarecidos, e qualquer discussão em matemática poderia ser resolvida se bem tratada dentro dos sistemas formais. Esta visão do amanhecer, no entanto, teve morte prematura. A promessa de uma matemática **decidível**, **completa** e **consistente** foi revogada pelos resultados limitativos do Problema da Parada de Turing e dos Teoremas da Incompletude de Gödel.

Por um lado, o Primeiro Teorema da Incompletude garante que não é possível obter um sistema aritmético completo, pois há proposições indecidíveis neste sistema. O Segundo Teorema da Incompletude restringe a condição de consistência do sistema, pois o máximo que podemos fazer é assumir a consistência de S, mas não podemos, como esperava Hilbert, demonstrar a consistência de S a partir dos métodos finitários em que S se baseia. Por fim, Turing e Church acabaram de vez com as esperanças da construção de uma matemática aos moldes iniciais do Programa de Hilbert: não é possível construir uma função computável que decida, para cada fórmula do sistema aritmético, se tal fórmula é demonstrável ou não no sistema de S. Isto é, além de nem toda fórmula aritmética ser decidível, também não podemos decidir quais são demonstráveis e quais não são.

O amanhecer da matemática renasce cinza, e seu primogênito do século XX, o Programa de Hilbert, parece ter sido destruído pelos resultados limitativos da Incompletude

[12] (Mendelson 1997, p. 215)

e da Decisão. Nossa narrativa, no entanto, ainda continua. O Programa de Hilbert, ainda que em sua formulação original não tenha sido continuado, permaneceu pairando sobre a matemática como uma herança inevitável. O que veremos em seguida, ao introduzir nosso protagonista principal, Wittgenstein, será a tentativa de expurgo do legado do Programa de Hilbert.

2.9 Extensões ao Teorema

Por questões didáticas, o Teorema da Incompletude foi introduzido em um sistema específico, o sistema aritmético S. No entanto, ele vale para um conjunto de sistemas. Em resumo, a estratégia geral de determinação de sistemas é encontrar o sistema mais fraco em que a Incompletude seja válida, mas forte o suficiente para demonstrar o que esperamos conseguir demonstrar em um sistema aritmético. A partir disso, podemos determinar extensões desse sistema em que seja possível construir a Incompletude também.

Neste caso, iremos utilizar o sistema Q empregado por (Epstein e Carnielli 2000), que possui apenas 7 axiomas Q1-Q7 e as regras usuais de FOL (Epstein e Carnielli 2000, p. 181). Q é poderoso o suficiente para representar todas as funções recursivas parciais, ou seja, Q captura exatamente a noção de computável em seu sistema. No entanto, Q também é indecidível. A seguir introduzimos noções úteis para o prosseguimento dos resultados (Epstein e Carnielli 2000, p. 204)

Definição 5. *Teoria de* $T := \{A\colon \vdash_T A\}$

Definição 6. T *extende* $S := T \supseteq S$

Como resultado, temos que toda extensão de Q preserva sua característica de indecidibilidade, assim como toda teoria tão poderosa quanto Q:

Teorema 4. *"a. Toda teoria consistente Q em que as funções recursivas são representáveis é recursivamente indecidível. b. Toda teoria consistente que extende Q é recursivamente indecidível." (Epstein e Carnielli 2000, p. 205, tradução nossa)*

Podemos observar, dessa maneira, a generalidade do resultado de Gödel, que vale não apenas para PM e ZM, mas também para teorias consistentes em que capturam a noção de ser computável por meio da noção de representação.

3 Turing e Wittgenstein: qual seria o mal de uma contradição?

Antes de iniciar a discussão dos comentários de Wittgenstein sobre o Teorema da Incompletude, no entanto, farei um parêntese com o objetivo de discutir a posição de Wittgenstein em relação ao uso de contradições na matemática. Essa discussão servirá de exemplo para o entendimento acerca da filosofia da linguagem de Wittgenstein aplicada à matemática, cuja compreensão é importante para a leitura do Apêndice I de *Remarks on the Foundations of Mathematics*.

3.1 O Desenvolvimento Filosófico de Wittgenstein

Qualquer discussão sobre aspectos da filosofia de Wittgenstein deve levar em consideração o período em que a obra foi escrita, afinal, sua posição filosófica mudou radicalmente de sua primeira fase, cuja obra magna é o *Tractatus Logico-Philosophicus*, até sua segunda fase, cujo grande projeto se inicia nas *Investigações Filosóficas*, e se desenvolve até o final dos anos 30. O presente trabalho, cujo foco é entender os comentários de Wittgenstein contidos em RFM, insere-se no projeto das IF de uma "antropologização" do estudo dos fundamentos da matemática, cujo desenvolvimento está em RFM e LFM, parte do período tardio da filosofia da matemática de Wittgenstein. O que faremos no restante da seção é apresentar, de maneira resumida e sucinta, o desenvolvimento do pensamento de Wittgenstein sobre a matemática e sua relação com o pensamento filosófico.

3.1.1 *Tractatus Logico-Philosophicus*

No *Tractatus*[1], o problema do estatuto da matemática culmina em uma posição que reduz a matemática à lógica, no entanto, de maneira bem distinta daquilo que Frege e Russell primeiro pensaram: com efeito, o logicismo foi a tentativa de analisar de maneira lógica os enunciados matemáticos e rastrear sua origem em princípios lógicos, assim como ser capaz de definir os conceitos matemáticos através de conceitos lógicos. Wittgenstein, no entanto, procura mostrar como a redução da matemática à lógica proporciona à primeira uma generalidade de maior nível, e que os conceitos matemáticos são, portanto, conceitos formais:

> Que algo caia sob um conceito formal como seu objeto não pode ser expresso por uma proposição. Isso se mostra, sim, no próprio sinal desse objeto. [...] Com efeito, os conceitos formais não podem, como os conceitos propriamente ditos, ser representados por uma função. [...] A

[1] A citação de (Wittgenstein 2013) será abreviada por, por exemplo, TLP 6.02, ou seja, a proposição 6.02 do *Tractatus Logico-Philosophicus*.

> expressão do conceito formal, portanto, é uma variável proposicional em que apenas esse traço característico é constante. (TLP 4.126)

Assim, a solução de Wittgenstein é caracterizar os conceitos matemáticos não como expressando proposições, como tentam Frege e Russell, mas sim por meio de variáveis. Wittgenstein define, portanto, o conceito de número de maneira formal, ou seja, através da série formal [$\Omega^{0\prime}$x, $\Omega^{v\prime}$x, $\Omega^{v+1\prime}$x], ou seja, o termo *inicial* série - $\Omega^{0\prime}$x -, um termo qualquer - $\Omega^{v\prime}$x -, e a operação para transformar um termo qualquer da série - $\Omega^{v+1\prime}$x. Um número, desta maneira, é o "expoente de uma operação"(TLP 6.021), ou seja, a aplicação sucessiva da operação sucessor, e o "conceito de número nada é senão o que todos os números têm em comum, a forma geral de número"(TLP 6.022).

Por conta dessa classificação formal do número, não precisamos *defini-los*, pois eles são apenas a expressão de uma operação: "A teoria das classes é, na matemática, inteiramente supérflua. Isso está ligado a que a generalidade de que precisamos na matemática não é *casual.*"(TLP 6.031).

A perspectiva de número de Wittgenstein engendra uma certa concepção de infinito: com efeito, não pensamos o infinito como um conjunto completo, ou seja, **extensionalmente**, mas sim a partir da regra de geração dos números, ou seja, **intensionalmente**.

> Já no T, vale bem lembrar, o infinito dos números é dado por uma regra ou forma (intensionalmente) e o infinito atual (em extensão) não parece ter espaço. Números, no T, são expoentes de uma operação que pode ser reiterada indefinidamente (ver T 6.01-031) (Engelmann 2009, p. 168)

Assim, no *Tractatus*, por conta do tipo de redução que Wittgenstein faz da matemática à lógica, há um único sistema numérico dado pelo conceito formal de número, e o infinito é concebido apenas intensionalmente, ou seja, de acordo com a regra de ordenação da série dos números.

3.1.2 Wittgenstein Intermediário

No início dos anos 1930, Wittgenstein se voltou para seu trabalho anterior do *Tractatus* e iniciou uma crítica que culminaria nas *Investigações Filosóficas.* No entanto, durante este período ele defendeu teses radicais cujas consequências são caminhos tortuosos para se pensar a matemática. São duas as teses principais neste período: "À tese extensionalista de descobertas em matemática, Wittgenstein contrapõe a tese da completude da matemática e do sentido de qualquer proposição"(Engelmann 2009, p. 172). Essas duas teses podem ser entendidas a partir da perspectiva do matemático como um inventor: aquilo que é inventado não pode ter lacunas que descobrimos posteriormente, pois aquilo que teremos diante de nós é precisamente o que estipulamos que o objeto possui. Em segundo lugar, o sentido da proposição é completamente determinado: ou a proposição possui sentido - quando temos uma demonstração - ou a proposição é um contrassenso, afinal, não há garantia do que o objeto é a não ser aquilo que estipulamos através do sistema matemático em questão.

A posição do Wittgenstein, dessa maneira, culmina em uma matemática com vários sistemas completos e independentes: não faz sentido falar de problemas matemáticos universais, apenas de proposições internamente a sistemas matemáticos.

> Deste modo, sentenças matemáticas não podem fazer sentido se não existe um método de prova. "Só há um problema" matemático, diz Wittgenstein, "onde há um método de solução" (PB §149). Portanto, fora de sistemas matemáticos com métodos de prova, um problema matemático e a 'sentença' matemática que dá resposta ao mesmo, não fazem sentido. (Engelmann 2009, p. 174)

3.1.3 Wittgenstein Tardio

A posição de Wittgenstein do final dos 1930 é facilmente confundida, em uma exposição rápida, com a posição intermediária, exposta na subseção anterior. No entanto, há uma diferença fundamental: no início dos anos 1930, Wittgenstein ainda buscava se *posicionar* filosoficamente em relação à oposição intensionalismo/extensionalismo em matemática, defendendo uma posição intensionalista. Ao final dos anos 1930, no entanto, Wittgenstein tomou um rumo diferente de suas posições filosóficas anteriores. Conforme visto, no *Tractatus* e no início dos anos 1930 Wittgenstein defendia versões do intensionalismo em matemática. No entanto, sua abordagem se tornou mais metodológica: sua exposição em discussões sobre matemática serviam não para defender teses sobre posições em filosofia da matemática, mas sim para mostrar erros oriundos de uma conceção errônea da matemática. O método consagrado para isso ficou conhecido como **método genético**:

> 1) o interesse de Wittgenstein é investigar problemas filosóficos que são o produto de falsas analogias (imagens, símiles) e raciocínios enganosos;
> 2) a função de um filósofo (Wittgenstein) é indicar estas analogias e mostrar os raciocínios enganosos que geram problemas filosóficos;
> 3) o leitor pode, assim, ver suas próprias tendências como que em um espelho;
> 4) a investigação de Wittgenstein dever ser desenvolvida, então, em um nível pré-filosófico e neutro, pois não objetiva solucionar os problemas, mas dissolvê-los em sua gênese. (Engelmann 2009, p. 179)

Essa consideração será melhor apreciada ao lermos LFM e RFM, duas obras que se enquadram no período tardio. A divisão entre o início dos anos 1930 e o final poderá parecer, em alguns momentos, supérflua, e que Wittgenstein está defendendo as mesmas teses. No entanto, há uma diferença metodológica: no Wittgenstein Intermediário, o intensionalismo é defendido como uma **tese** em oposição ao extensionalismo. No caso do Wittgenstein Tardio, o intensionalismo é uma posição filosófica para ser comparada ao realismo matemático, e o objetivo disso é mostrar como é enganoso adotar uma posição ou outra de um ponto de vista matemático.

3.2 *Lectures on the Foundations of Mathematics*

Uma boa maneira de entender a posição de Wittgenstein sobre a aparição de contradições na matemática é por meio de suas discussões com Alan Turing, ocorridas em uma série de palestras dadas por Wittgenstein em Cambridge (Wittgenstein e Bosanquet 1989)[2]. O livro no qual tais discussões estão registradas é resultado das notas de aulas de alguns de seus alunos, dentre os quais estavam presentes **Alan Turing**, Rush Rhees, Alastair Watson, John Wisdom e G. H. Von Wright. Turing participou ativamente de diversas discussões durante as aulas, e um ponto de destaque diz respeito ao debate sobre como se posicionar frente ao surgimento de contradições e paradoxos na matemática.

Por um lado, Turing se posiciona de maneira conservadora em relação ao uso de contradições: "Penso que com o tipo de regras ordinárias que utilizamos em lógica, caso se possa chegar a contradições, então se chega a problemas."(LFM XXII.56). Wittgenstein, por outro lado, a todo momento busca esclarecer a razão pela qual Turing realmente teme o uso de contradições: "Isso significa que com contradições é obrigatório chegar em problemas? Ou você quer dizer que contradições possam tentá-lo a chegar em problemas?"[3] (LFM XXII.57).

Tradicionalmente, pensa-se que contradições, dentro de um sistema lógico-matemático, funcionam como um organismo nocivo que contamina todo o corpo, ou seja, a existência de contradições em um cálculo o torna inutilizável. A associação desta imagem no contexto lógico-matemático se deve em grande parte ao comprometimento *clássico* ao *ex falso sequitur quodlibet*[4], também conhecido contemporaneamente como **Princípio de Explosão**, pois a existência de uma contradição trivializa o sistema.

$$\text{(PEx)}\ (\forall p \forall q)\ \{p, \neg p\} \vdash q$$

Por outro lado, contradições também são vistas como inviáveis no caso de ordens e pedidos: se eu disser para alguém "Pegue um suco e não pegue um suco", certamente essa pessoa ficará confusa e não saberá o que fazer (LFM XVIII.20).

Assim, no caso de contradições dentro da matemática, o 'problema' é que podemos derivar qualquer outra proposição a partir de um par contraditório. No caso de contradições fora da matemática, o 'problema' é que uma contradição parece não direcionar a nenhuma ação determinada.

---

2 Para facilitar a citação, abreviarei a citação de (Wittgenstein e Bosanquet 1989) como "LFM X.4", por exemplo, para designar o parágrafo 4 da aula X de *Wittgenstein's Lectures on The Foundations of Mathematics*.

3 Texto original: "But does this mean that with contradictions one must get into trouble? Or do you mean the contradiction may tempt one into trouble?".

4 Uma análise detalhada deste princípio pode ser encontrada em (D'Ottaviano e Gomes 2020).

Poderíamos, no entanto, pensar em um jogo de linguagem no qual uma das reações desejadas a uma ordem fosse deixar aquele que recebe a ordem atônito[5]. Nesse caso, a contradição funciona dentro desse jogo.

> ...*que* nós excluímos a contradição e normalmente não a atribuímos nenhum significado é característico do nosso uso da linguagem como um todo, e de uma tendência a não considerar, por exemplo, uma ação hesitante, ou um comportamento duvidoso, como estando na mesma série de ações daquelas que preenchem ordens da forma "Faça isto e não faça aquilo"(LFM XVIII.58)

Como explicamos, no entanto, que uma contradição não funciona no caso de uma proposição lógica?

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Ao representar p ∧ q por meio de suas permutações de seu valor de verdade, parece ficar claro por que uma contradição não funciona, pois p ∧ ¬ p gera uma proposição cujo valor de verdade é sempre F:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

De um ponto de vista *lógico*, no entanto, poderíamos montar um cálculo cujo objetivo fosse a busca por contradições, contrariamente à busca por tautologias[6]. Isto é, poderíamos querer construir um mecanismo de 3 rodas que não se move, ou fazer um jogo de linguagem como a amarelinha, onde contradições fazem parte de alguns movimentos do jogo.

> Em lógica, lida-se com tautologias - proposições como $'\neg(p \wedge \neg p)'$. No entanto, poder-se-ia igualmente lidar com contradições ao invés daquilo, de tal modo que o Principia Mathematica fosse não uma coleção de tautologias, mas uma coleção de contradições. (LFM XIX.40)

Turing, por outro lado, insiste que, da maneira como naturalmente utilizamos a linguagem, contradições não funcionam, ou seja, seria natural querer que a roda se mova. Nesse caso, o impedimento do movimento seria um fracasso de uma tentativa de ação. Isto é, o problema da contradição não está matematicamente determinado, mas sim na

[5] No jogo de crianças amarelinha, poder-se-ia ordenar para o jogador 'ir para frente e ir para trás', ou seja, ordenar uma regra contraditória. O jogador, sem saber o que fazer, ficaria parado no mesmo lugar. Se esse era o objetivo do mandante com sua ordem, então a contradição tem um uso nesse jogo de linguagem.

[6] De fato, este tema foi explorado posteriormente. Conferir, por exemplo, o trabalho de Carnielli sobre lógicas clássicas complementares (Carnielli e Pulcini 2015).

sua aplicação: "O verdadeiro perigo [de uma contradição] não aparecerá a não ser que haja uma aplicação, caso no qual uma ponte pode cair ou algo do tipo."(LFM XXI.74).

O ponto de Turing pode ser resumido assim: suponhamos que haja uma contradição na linguagem. Nesse caso, pelo PEx, podemos afirmar que 8x4 = 789. Utilizando essa multiplicação para planejar a construção de uma ponte, obtemos algum resultado fisicamente inadequado que resulte na queda da ponte. Qual a causa da queda da ponte? Evidentemente, alguma conta estava errada no domínio da física.

Suponhamos a seguinte situação: desenvolvemos um novo método para gerar o resultado de multiplicações a partir de um jogar de dados. Se o sistema físico resultante obter os mesmos valores que o sistema físico de sucesso, então ambos são a maneira como multiplicamos, pois o sentido da multiplicação é dado pelo uso. No caso de utilizarmos o sistema de Russell para multiplicar e afirmarmos que 8x4 = 789, não estaríamos dispostos a chamar isso de multiplicar, pois não poderíamos usar essa multiplicação da mesma maneira que utilizamos uma multiplicação usual.

Assim, no caso da queda da ponte, não há um erro *lógico* proveniente da contradição, mas sim apenas erros no domínio da *física*:

> A questão é: Por que as pessoas estão com medo de contradições? É fácil entender porquê elas deveriam temer contradições em ordens, descrições, etc., fora da matemática. A questão é: Por que elas deveriam ter medo de contradições dentro da matemática? Turing diz, "Porque algo pode dar errado com a aplicação." Mas nada precisa dar errado. E se algo de fato dá errado - se a ponte cai - então seu erro foi do tipo de utilizar de maneira errônea uma lei natural. (LFM XXII.38)

O outro aspecto importante a ser considerado desta discussão é Wittgenstein enfatiza que as contradições envolvidas são contradições **ocultas**, ou seja, o problema é como ter garantia de que determinado cálculo não tenha contradições e que durante a aplicação eu descubra tal contradição?

Neste caso, Wittgenstein analisa a gramática de uma contradição "escondida" para mostrar que isso não faz sentido. Isto é, não faz sentido se estipular um cálculo em que contradições estejam ocultas sem que haja uma técnica para descobri-las; e se há uma técnica para descobri-las, significa que esse cálculo não nos é útil (LFM XXI), ou seja, também não faz sentido temer contradições do ponto de vista lógico.

3.3 Paradoxos Lógicos

A desavença popular em relação ao aparecimento de contradições se manifesta exemplarmente no caso de paradoxos, conforme Turing expressa: "O que é intrigante é que geralmente se usa uma contradição como um critério para ter feito algo errado. Mas nesse caso [i.e. paradoxos], não se pode encontrar nada feito errado."(LFM XXI.46).

Assim, o paradoxo do Mentiroso, por exemplo, gera sua perplexidade no fato de raciocionarmos (supostamente) de maneira correta, mas ainda assim concluindo proposições contraditórias. Dada uma frase autorreferencial que afirme sua própria falsidade, é possível gerar uma contradição: seja (p) p é falsa. Suponhamos que p seja verdadeira. Nesse caso, o que p afirma é verdadeiro, ou seja, p é falsa. Por outro lado, se p é falsa, então o que ela afirma não é o caso, ou seja, p não é falsa. Em um cenário clássico, isso implica que p é verdadeira. Logo p é verdadeira se, e somente se, p é falsa. Portanto, pelo Princípio de Bivalência, p é verdadeira e falsa. De maneira esquematizada:

> Dessa maneira, a derivação do paradoxo na linguagem natural pode ser montada da seguinte forma:
> (1) ‘1’ é falsa [de (I)]
> (2) ‘1’ é verdadeira sse 1 [esquema-T informal]
> (3) ‘1’ é verdadeira sse ‘1’ é falsa [1, 2, substituição 1/’1’ é falsa]
> (4) ‘1’ é verdadeira ou ‘1’ é falsa [Princípio do Terceiro Excluído]
> (5) ‘1’ é verdadeira e ‘1’ é falsa [3, 4, lógica proposicional]
> (6) O papai noel existe [5, Princípio de Explosão]. (Ongaratto 2021, p. 11)

Em síntese, a partir de princípios válidos conseguimos derivar uma contradição. Qual o problema disso? Um lógico clássico consideraria inaceitável chegarmos em (5), e ele buscaria maneiras de rejeitar alguma das premissas, seja rejeitando a possibilidade de construção de frases autorreferenciais, seja restringindo o uso do esquema-T. O problema, no entanto, está na passagem de (5) para (6), ou seja, na *trivialização* do cálculo. Pelo PEx, podemos derivar qualquer outra proposição a partir de (5). O real perigo de uma contradição, assim, é tornar o cálculo inutilizável *para nossos propósitos.* No entanto, nada nos impede de buscar contradições em um cálculo; nesse caso, não encontrá-las é que tornaria o cálculo inutilizável.

> Nós podemos dizer: "A contradição é inofensiva se ela pode ser isolada"? No entanto, o que nos impede de isolá-la? O fato de não sabermos o que fazer [don’t know our way about/wir uns im Kalkül nicht auskennen] no cálculo. Isto, então, é o perigo. E é isso que se quer dizer quando se diz: a contradição indica que há algo de errado com nosso cálculo. É meramente um sintoma (local) de uma doença do corpo todo. O corpo só está doente, no entanto, se não sabemos o que fazer [don’t know our way about]. [7] (RFM II.80)

Assim, ao considerar o raciocínio envolvido no paradoxo do mentiroso como fazendo parte de um jogo de linguagem sobre a proposição (1), não há nada de errado em aceitar que esse raciocínio envolva uma contradição. "O que está errado? Nada. Exceto que ela isso não é de utilidade nenhuma; é apenas um jogo de linguagem inútil, e por que qualquer pessoa deveria estar empolgada?"(LFM XXI.42).

[7] Texto original: "Kann man sagen: "Der Widerspruch ist unschädlich, wenn er abgekapselt werden kann"? Was aber hindert uns, ihn abzukapseln? Daß wir uns im Kalkül nicht auskennen. Das also ist der Schaden. Und das ist es, was man meint, wenn mann sagt: der Widerspruch zeige an, daß etwas in unserem Kalkül nicht in Ordnung sei. Er sei bloß das lokale Symptom einer Krankheit des ganzen Körpers. Aber der Körper ist nur krank, wenn wir uns nicht auskennen.".

Há dois tópicos implícitos nessa resposta ao paradoxo do mentiroso: em primeiro lugar, supõe-se que a noção de jogos de linguagem é aplicável nesse contexto; em segundo lugar, supõe-se que o uso dos termos em (1) é distinto, por exemplo, de um uso cotidiano desses termos.

A noção central que Wittgenstein utiliza para justificar sua tolerância ao paradoxo do mentiroso, assim como sistemas envolvendo contradições, é a noção de jogos de linguagem.

> Quantos tipos de frases são possíveis? Digamos, asserção, pergunta e comando? Há incontáveis tipos; incontáveis tipos diferentes de usos de todas as coisas que chamamos de "símbolos", "palavras", "frases". E esta diversidade não é algo fixo, dado de uma vez por todas; ao invés disso, novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem, como poderíamos dizer, passam a existir, e outros se tornam obsoletos e são esquecidos. (Podemos ter uma imagem aproximada disso das mudanças na matemática.)
> **A palavra "jogo de linguagem" é utilizada aqui para enfatizar o fato de que o falar de uma linguagem é parte de uma atividade, ou de uma forma de vida.** (Wittgenstein 2010, p. 15, tradução nossa)

Como podemos observar, a existência de jogos de linguagem é dinâmica e indeterminada, ou seja, não há uma quantidade e qualidade limitada de jogos previamente definida, e novos jogos podem ser criados e outros abandonados no decorrer do uso da linguagem. A caracterização de um jogo de linguagem, por sua vez, depende da maneira como utilizamos a linguagem, portanto, o uso de determinado termo irá determinar em que jogo de linguagem ele encaixa. Assim, Wittgenstein, ao discutir o paradoxo do mentiroso e descartá-lo como um jogo de linguagem inútil, sugere que o uso da proposição (1) é distinto do uso cotidiano, e isso nos deixa livres de preocupação, pois é apenas um jogo isolado de nossas práticas.

De fato, tal linha de resposta já foi previamente explorada por outros autores, por exemplo, por uma abordagem deflacionista do predicado "ser verdadeiro" denominada **eliminativismo**, defendida em (Ongaratto 2021). O ônus do defensor, nesse caso, é mostrar que há uma diferença entre o uso cotidiano e o uso específico dos termos envolvidos na construção do paradoxo:

> Dessa maneira, o problema da frase do mentiroso está localizado no uso substancial da noção de verdade pressuposto na autorreferência. Ao se entender isso, é possível entender que as demais frases bloqueadas pelo eliminativismo, ainda que não derivem contradições, sofrem do mesmo problema: elas estendem o uso do predicado "é verdadeiro" para um uso substancial. Pelo véu do cotidiano, esquecemos a diferença fundamental entre os predicados substanciais como "é azul", "é pequeno", e o predicado "é verdadeiro", e montamos pequenas ilhas isoladas na linguagem em que se pode aplicar "é verdadeiro" como se fosse um predicado substancial - às vezes, isso não gera problemas, como no caso veraz. Outras vezes, no entanto, nossa leviandade pode causar consequências catastróficas, como no caso do paradoxo do mentiroso. (Ongaratto 2021, p. 45)

Isto é, dado que o uso do predicado "ser verdadeiro" diferencia-se nos casos cotidianos e nos casos de autorreferência, não há problema em sustentar que no último caso haja contradição, pois esse uso está descolado de nossas práticas, indicado pela caracterização da verdade como sendo não-substancial, ou seja, o predicado "é verdadeiro" não representa uma propriedade do objeto que está sendo predicado, pois, conforme explicita o autor, a verdade foi *deflacionada*, isto é, deve ser possível sempre reduzir frases contendo o predicado "é verdadeiro" a frases que não contenham esse predicado.

3.4 A Lógica e o Pensamento

Uma consequência interessante vem à tona ao considerar cálculos lógicos como jogos de linguagem: de fato, utilizamos determinados sistemas que se encaixam aos nossos propósitos atuais. No entanto, o que dizer de outros propósitos *possíveis* cujo uso exigiria cálculos distintos? Segundo a lógica erigida por Frege e Russell, tais usos são ilegítimos do ponto de vista do pensamento puro, pois a lógica clássica cumpre um papel universal: qualquer pensamento que se pretenda científico deve obedecer, por exemplo, ao Princípio de não-Contradição. Assim, segundo Frege, seu sistema não era apenas *calculus ratiocionator* como era a lógica proposicional algébrica de Boole: ao introduzir quantificadores, sua linguagem era uma *lingua characteristica* (Heijenoort 1967, p. 440). A oposição entre essas duas concepções é paralela à diferença entre a lógica proposicional e a lógica quantificacional: a última possui uma universalidade que a primeira não consegue expressar[8].

Wittgenstein, por outro lado, ao considerar sistemas lógicos como jogos de linguagem, enfatiza sua arbitrariedade e especificidade em relação ao seu uso: caso fosse útil para nós, poderíamos, por exemplo, criar um cálculo em que contradições não levem à trivialização do cálculo.

> Em lógica, lida-se com tautologias - proposições como $'\neg(p \wedge \neg p)'$. No entanto, poder-se-ia lidar igualmente bem, ao invés disso, com contradições, de tal modo que o Principia Mathematica fosse não uma coleção de tautologias, mas uma coleção de contradições. Deveria se dizer, nesse caso, que as contradições são verdadeiras? Ou se diria que "verdadeiro" está sendo usado em um sentido diferente? (LFM XIX.39)

Dessa maneira, a ideia de uma lógica única é abandonada em favor de uma concepção que permita a adoção de diferentes sistemas lógicos para diferentes usos. Em síntese, Wittgenstein, ao considerar os diferentes sistemas matemáticos assim como a lógica matemática de Frege e Russel como jogos de linguagens, *antropocentriza* sua explicação sobre os fundamentos da matemática, pois o fato de utilizarmos determinado cálculo

[8] Subjacente à ideia de uma *lingua characteristica*, está a ideia da lógica como sendo a base de todas as demais disciplinas científicas: "Em que sentido a lógica é sublime? Pois a lógica parecia ter uma profundidade peculiar, uma significatividade universal. A lógica estava, parecia, nos fundamentos de todas as ciências [...]" (Wittgenstein 2010, p. 46-7, tradução nossa).

como utilizamos diz algo sobre a utilidade que extraímos desse cálculo, e não sobre uma realidade abstrata imutável (Arrington 1969, p. 38). Assim, em alguns jogos de linguagem, contradições podem servir a algum uso, tendo, assim, algum sentido determinado naquele cálculo. Em outro cálculo, contradições podem não ser toleradas. "É por motivos práticos, e não teóricos, que a desordem é evitada"(Wittgenstein et al. 1990, p. 107, tradução nossa).

No entanto, conforme visto na seção 3.1, a posição de Wittgenstein é mais complexa do que aparenta em um primeiro momento. Durante toda a discussão sobre contradições em LFM, Wittgenstein não teve por objetivo sustentar alguma tese, muito menos levantar posições filosóficas em discordância de seus interlocutores:

> Ocasionalmente, produzirei novas interpretações, não para sugerir que elas estejam corretas, mas para mostrar como a interpretação antiga e a nova são igualmente arbitrárias. Apenas inventarei uma nova interpretação para colocá-la lado a lado com a antiga e dizer, "Aqui, escolha, selecione uma posição". Apenas jogarei gás para expelir gás antigo. (LFM I.6)

Assim, os diferentes sistemas lógicos visados por Wittgenstein servem ao propósito de mostrar como, de um ponto de vista lógico, contradições não são necessariamente um problema: por um lado, o significado de "$\neg$" varia de acordo com as regras utilizadas; por outro lado, contradições ocultas são uma quimera do ponto de vista lógico, se com isto pensamos uma contradição que não temos nenhuma técnica para acessá-la.

4 WITTGENSTEIN SOBRE GÖDEL: UMA ANÁLISE INICIAL

Tendo realizado uma exposição breve sobre os resultados formais estabelecidos por Gödel, cujo conteúdo já faz parte do cânone da lógica-matemática, e uma breve introdução à filosofia da matemática wittgensteiniana, iremos nos debruçar sobre os comentários bem menos consensuais de Wittgenstein sobre os resultados limitativos dos Teoremas de Gödel. É compreensível que Wittgenstein, neste contexto, tenha sido rechaçado e acusado de "conte[r] erros determinados" (Dummett 1978, p. 166, tradução nossa). Em primeiro lugar, Wittgenstein se expressa de maneira informal, remetendo-se ao texto de Gödel de maneira pouco precisa. Em segundo lugar, o autor envolve sua discussão por afirmações e questionamentos filosóficos, como fica claro no início do apêndice:

> É fácil pensar em uma linguagem em que não há uma forma para perguntas ou comandos, mas em que perguntas e comandos sejam expressos na forma enunciativa, e.g. em formas correspondendo ao nosso: "Eu gostaria de saber se...", "Meu desejo é que..."[1] (RFM I Ap. I.1)

À primeira vista, a prova de Gödel não parece ter relação com questões linguísticas, no entanto, nós próximos dois capítulos iremos investigar como entender as afirmações wittgensteinianas enigmáticas.

4.1 A reação inicial e o espantalho de Wittgenstein

No Apêndice I de RFM, Wittgenstein se remete indiretamente ao resultado de Gödel apenas na 5ª seção, em termos de **verdade** e **demonstrabilidade**:

> Há proposições verdadeiras no sistema de Russell, que não podem ser demonstradas em seu sistema? - O que é chamado uma proposição verdadeira no sistema de Russell, então? [2] (Wittgenstein et al. 1990, p. 50, tradução nossa)

Wittgenstein se pergunta se é possível haver um descolamento da noção de verdade e demonstrabilidade *no sistema PM de Russell*. Como visto no capítulo 2, a prova de Gödel opera apenas no domínio da demonstrabilidade, gerando uma proposição indecídivel. Logo, esse questionamento inicial não está - necessariamente - recusando a validade da prova da incompletude, mas apenas colocando em pauta o raciocínio de Gödel utilizado para mostrar que a proposição indecidível é verdadeira (Gödel 1992, p. 41).

[1] Texto original: "Man kann sich leicht eine Sprache denken, in der es keine Frageund keine Befehlsform gibt, sondern in der Frage und Befehl in der Form der Behauptung ausgedrückt wird, in Formen z.B., entsprechend unserem: "Ich möchte wissen, ob..."und "Ich wünsche, daß..".".

[2] Texto original: "Gibt es wahre Sätze in Russell's System, die nicht in seinem System zu beweisen sind? - Was nennt man denn einen wharen Satz in Russell's System?".

Em seguida, Wittgenstein se pergunta o que *significa* dizer que uma proposição é verdadeira em PM. Sua resposta consiste em exaurir a noção de verdade na noção de asserção: "'p' é verdadeiro = p" (RFM I Ap. I.6).

Não obstante estas nuances no raciocínio de Wittgenstein, os contemporâneos de Wittgenstein não receberam seus comentários de maneira favorável, conforme atesta Dawson Jr.:

> Diversos comentadores discutiram as observações de Wittgenstein em detalhe (ver, por exemplo, os artigos de A.R. Anderson, Michael Dummett, e Paul Bernays, pp. 418-512 de Benacerraf e Putnam (1964)), e quase todos eles consideraram os comentários como vergonhosos para o trabalho de um grande filósofo. (Dawson 1984, p. 88, tradução nossa).

Assim, o diagnóstico inicial sobre os comentários de Wittgenstein é que ele - de maneira equívoca - **rejeitou** os resultados de Gödel:

> O que eu farei é discutir seu tratamento, relacionado intimamente com sua rejeição do "logicismo", do Teorema de Gödel, como ilustrativa de uma concepção errônea dos programas logicistas e formalistas. (Anderson 1958, p. 451, tradução nossa)

Alan Anderson não comenta os trechos iniciais do Apêndice I de RFM; ao invés disso, ele começa discutindo a partir a seção 8, em que Wittgenstein está alegadamente reconstruindo a prova de Gödel. É na resposta a essa construção, contudo, que as críticas se focam:

> Assim como perguntamos: "'demonstrável' em que sistema?", também devemos perguntar "'verdadeiro' em que sistema?". 'Verdadeiro no sistema de Russell' significa, como foi dito: demonstrado no sistema de Russell; e 'falso no sistema de Russell' significa: o oposto foi demonstrado no sistema de Russell.[3] (RFM I Ap. I.8)

Wittgenstein é conciso em sua análise: 'verdade' é um conceito local, ou seja, um conceito que requer a especificação de um determinado sistema - assim como a noção de derivabilidade é local, ou seja, o que é demonstrável em S pode não ser demonstrável em PM ou ZM. No caso de PM, um sistema axiomático-dedutivo, as proposições legitimamente afirmadas são aquelas que compõem a conclusão de uma prova, ou seja, são as fórmulas derivadas como teoremas[4]. Por esse raciocínio, conclui-se que 'verdadeiro' e 'demonstrável' não são separáveis em PM, justamente por sua natureza axiomática-dedutiva.

Alan Anderson, no entanto, ao recolocar a questão em termos de sintaxe e semântica, objeta ao argumento wittgensteiniano: no contexto lógico-matemático, as proposições são demonstráveis de acordo com a *sintaxe*. As proposições verdadeiras, por outro lado,

[3] Texto original: "So wie wir fragen: "in welchem System 'beweisbar'?", so müssen wir auch fragen: "in welchem System 'wahr'?". 'In Russell's System wahr' heißt, wie gesagt: in Russell's System bewiesen; und 'in Russell's System falsch' heißt: das Gegenteil sei in Russell's System bewiesen.".

[4] Mesmo os axiomas são validados por este critério, haja vista que cada um possui uma prova - a saber, uma única linha contendo o axioma a ser demonstrado.

são verdadeiras *sob uma interpretação*, ou seja, o sistema requer uma interpretação para atribuir valor de verdade às fórmulas. Posteriormente a esses dois momentos - primeiro, definir a sintaxe; segundo, construir a semântica -, existe uma questão que deve ser respondida: a sintaxe corresponde a semântica?[5] Isto é, todas fórmulas demonstráveis são verdadeiras, e todas as fórmulas verdadeiras são demonstráveis? Ao corresponder trivialmente 'ser verdadeiro em PM' a 'ser demonstrável em PM', Wittgenstein parece ignorar a complexidade por trás da formação de um sistema lógico-matemático, cuja união da sintaxe e da semântica é o passo final para um bom sistema (Anderson 1958, p. 452).

A conclusão de Alan Anderson é que Wittgenstein tenta participar de uma discussão ultrapassada, em que ainda se buscava o equivalente de um sistema mecânico contido em si próprio, ou seja, um sistema em que sua semântica fosse equivalente ao modo como se opera sintaticamente com os símbolos. No entanto, "a linha não é mais limitada onde ela uma vez fora" (Anderson 1958, p. 457, tradução nossa). Dessa maneira, o Teorema de Gödel, segundo a leitura de Alan Anderson, contribuiu para a superação da 'tendência axiomática' do final do século XIX, e a falta de compreensão de Wittgenstein sobre essa transição teria sido justamente aquilo que fez com que ele não pudesse avançar no debate, continuando a defender o colapso entre verdade e demonstrabilidade.

Dawson, por outro lado, reconhece o caráter críptico dos comentários wittgensteinianos, fator que contribuiu para uma forte oposição inicial:

> Certamente, é difícil levar à sério tais objeções como 'Por que as proposições... da física... não podem ser escritas no simbolismo de Russell?'; ou 'A contradição que surge quando alguém afirma "Estou mentindo"... é de interesse apenas porque ela atormentou as pessoas; ou 'A proposição "P não é demonstrável"tem um sentido diferente daquele que tinha antes de ser demonstrada' [...] Se há algum *insight* filosófico que subjaz esses comentários aparentemente debochados, isso deve ser deixado para os estudiosos de Wittgenstein discutirem [...] (Dawson 1984, p. 89).

Em síntese, a situação não parece favorável para Wittgenstein: se seus comentários são interpretados como supondo não haver uma separação entre sintaxe e semântica *sem mais*, a conclusão é que o autor tinha uma suposição ilegítima. Assim, os intérpretes de Wittgenstein devem encontrar uma explicação razoável para esta sua suposição ou adotar rotas interpretativas distintas.

4.2 Interpretações contemporâneas sobre o apêndice I de RFM

Conforme visto na seção anterior, a reação inicial aos comentários wittgensteinianos foi que o autor não entendeu a prova ou que suas observações eram demasiado confusas

[5] "Questões sobre completude surgem naturalmente no curso de estudo de sistemas formais; tais questões estão, de fato, *no coração da lógica-matemática*. Wittgenstein, no entanto, parece querer legislar essa classe de questões fora de existência, e por métodos particularmente anti-wittgensteinianos."(Anderson 1958, p. 453, tradução e ênfase nossas).

para contribuir ao debate sobre o Teorema da Incompletude. Intérpretes recentes, no entanto, procuram integrar esses comentários a outros escritos de Wittgenstein, realizando uma leitura - alegadamente - mais sofisticada e informada [6].

4.2.1 Shanker

Shanker, assim como Dawson, reconhece que os comentários de Wittgenstein, *prima facie*, são passíveis de confusão. No entanto, Shanker busca entendê-los a partir de uma análise de sua base filosófica (Shanker 2012, p. 155). Assim, a discussão principal que Shanker identifica nos comentários de Wittgenstein é procurar entender se há, e qual é, a importância *filosófica* - extra-matemática - do Teorema da Incompletude: "Wittgenstein confessou que seu objetivo "não é falar (e.g.) sobre a prova de Gödel, mas perpassá-la"." (Shanker 2012, p. 155, tradução nossa).

Um aspecto importante da prova da Incompletude, ainda não explorado em detalhe, é que ela é uma prova de *impossibilidade*, ou seja, é uma prova cuja conclusão é mostrar que certa construção não é possível - no caso, mostrar que *não é possível* derivar G nem $\neg$G como consequências de S.

A perspectiva de Wittgenstein sobre provas de impossibilidade é que elas são como muros interpostos ao desenvolvimento de determinada subárea da matemática, que funcionam como avisos de que não é recomendado seguir por aquele caminho, cujo objetivo é "fechar um capítulo na evolução do pensamento matemático" (Shanker 2012, p. 162, tradução nossa):

> Tudo que uma prova matemática que um heptágono regular não pode ser construído com régua e compasso atinge é nos dar boas razões para excluir a expressão 'construção do heptágono' de nossa notação. (LFM IV.60)

O exemplo paradigmático desta ideia wittgensteiniana que iremos explorar com detalhe é a prova da impossibilidade da trissecção do ângulo com régua e compasso, um problema grego que permaneceu sem solução por mais de 2000 anos. O mais surpreendente de sua resposta, conforme o espírito wittgensteiniano, é que sua solução, por Pierre Wantzel, foi um "anti-clímax, ao invés de um triunfo"(Shanker 2012, p. 163, tradução nossa). Isto é, Pierre Wantzel, com sua demonstração de que não é possível trisseccionar o ângulo com régua e compasso, apenas serviu como um aviso àqueles que ainda buscavam fazê-lo: 'os seus esforços serão em vão'.

4.2.1.1 A trissecção do ângulo

O problema da trissecção do ângulo toma forma no contexto da geometria grega, em que as construções geométricas de figuras planas se limitavam às construções possíveis

[6] Conferir, por exemplo, (Floyd e Putnam 2001; Berto 2009; Lampert 2018; Shanker 2012; Rodych 2003; Steiner 2001).

por régua e compasso. No caso de bisseccionar o ângulo, ou seja, dividir um ângulo pela metade, sempre é possível fazê-lo com régua e compasso, conforme garante a proposição 9 dos *Elementos*:

> Seja o ângulo retilíneo dado o sob BAC; é preciso, então, cortá-lo em dois.
>
> Fique tomado sobre a AB o ponto D, encontrado ao acaso. e fique subtraída da AC a AE igual à AD, e fique ligada a DE, e fique construído sobre a DE o triângulo equilátero DEF, e fique ligada a AF; digo que o ângulo sob BAC foi cortado em dois pela reta AF.
>
> Pois, como a AD é igual à AE, e a AF é comum, então, as duas DA, AF são iguais às duas EA, AF, cada uma a cada uma. Também a base DF é igual à base EF; portanto, o ângulo sob DAF é igual ao ângulo sob EAF.
>
> Portanto, o ângulo retilíneo dado, o sob BAC, foi cortado em dois pela reta AF; o que era preciso fazer. (Bicudo 2009, p. 105)

Conforme a prova de Euclides *mostra*, a pergunta 'É possível bisseccionar um ângulo qualquer?' na geometria grega é respondida de uma maneira construtiva, ou seja, exibimos como gerar, dado um ângulo BAC qualquer, a bissecção de BAC, ou seja, BAD = DAC, e BAC = BAD + DAC. Daí surge a dificuldade de se responder à outra questão, a saber, 'É possível trisseccionar um ângulo qualquer?'. Nesse caso, se tomamos como paradigma a prova da bissecção, teríamos que construir um método de trissecção para um ângulo qualquer. Na geometria grega euclidiana, aquilo que se pode demonstrar é aquilo que se pode construir com régua e compasso. Dessa maneira, provas de impossibilidade se tornam complicadas de uma perspectiva *interna* ao sistema: como podemos mostrar que algo não pode ser construído se as únicas ferramentas de prova que temos são maneiras de construir figuras? Da mesma maneira, podemos começar a entender as perplexidades de Wittgenstein em relação à prova da incompletude: como é possível mostrar que algo não pode ser demonstrado em um sistema em que as únicas ferramentas de prova são demonstrações em teoremas?

> "[...]"Sob que circunstâncias uma frase é asserida no jogo de Russell?"a resposta é: ao fim de uma de suas provas, ou como uma 'lei fundamental'(Pp.). Não há outro modo nesse sistema de empregar frases asseridas no simbolismo de Russel.[7] (Wittgenstein et al. 1990, p. 50, tradução nossa).

É por essa razão que, quando Pierre Wantzel finalmente demonstrou a impossibilidade da trissecção[8], sua prova foi realizada em um contexto algébrico, e não geométrico: "A prova de Wantzel se baseia em uma substituição do pano de fundo geométrico que foi origem das frustações dos gregos com uma abordagem algébrica."(Shanker 2012, p. 164, tradução nossa).

Shanker explora aqui um caminho que posteriormente será desenvolvido por Floyd, isto é, a comparação do Teorema de Gödel com outras provas de impossibilidade: "Os

[7] Texto original: "Unter welchen Umständen behauptet man in Russell's Spiel einen Satz?", so ist die Antwort: Am Ende eines seiner Beweise, oder als 'Grundgesetz' (Pp.). Anders werden in diesem System Behauptungssätze in den Russellschen Symbolen nicht verwendet.".

[8] Para conferir a prova em maior detalhe, (Cajori 1918).

comentários de Wittgenstein sobre o Teorema de Gödel fazem um paralelo direto com suas discussões das provas de impossibilidade clássicas do século XIX."(Floyd 1995, p. 386, tradução nossa)

Em síntese, Wittgenstein utiliza como paradigmas de provas de impossibilidade as provas de 'fechamento', ou seja, provas cujo resultado é a desistência da busca daquilo que é provado não ser possível. Em alguns casos, essa busca resultará no completo abandono de uma disciplina, no entanto, em outros casos, pode ser o catalisador para o desenvolvimento de uma nova área.

No caso do Teorema da Incompletude, é surpreendente que essa prova não se limitou a uma prova de fechamento, mas também foi interpretada de modo a estimular o desenvolvimento de novos paradigmas filosóficos.

> ... filósofos são seres energéticos se nada mais, e das preocupações estreitas de um exercício altamente técnico e obscuro em lógica matemática surgiram prósperas construções nas filosofias da linguagem e da mente. (Shanker 2012, p. 169, tradução nossa)

Que construções na filosofia da linguagem e da mente Shanker tem em mente ao se referir ao Teorema da Incompletude? Ele se refere ao *platonismo* matemático resultante dessa exploração filosófica sobre a prova de Gödel. Segundo Gödel, o que restringiu seus contemporâneos de desenvolver a matemática como ele conseguira, isto é, introduzindo métodos não-finitários de prova, foram suas atitudes epistemológicas em relação à matemática, conforme Hao Wang cita:

> Esta cegueira (ou preconceito, ou o que quer que você chame isso) dos lógicos é, de fato, surpreendente. Contudo, penso que a explicação não é difícil de encontrar. Ela se baseia em uma falta disseminada, naquele tempo, da atitude epistemológica requirida em relação à metamatemática e raciocínios não-finitários.
>
> Os raciocínios não-finitários na matemática foram amplamente considerados significativos apenas na medida em que eles pudessem ser 'interpretados' ou 'justificados' em termos de uma metamática finitária. (Wang 1990, p. 8, tradução nossa)

Esquematicamente, a posição de Gödel pode ser denominada 'platonista' por conta de sua oposição em relação à posição filosófica segundo a qual a matemática é uma construção humana: se a matemática é uma *invenção* dos matemáticos, então faz sentido adicionar elementos puramente não-finitários ao raciocínio? Que sentido possuiria uma invenção que não compreendemos? Por outro lado, se a matemática é *descoberta*, então é possível que haja elementos não-finitários, ainda que o ser humano, como um ser finito limitado, não seja capaz de compreendê-los inteiramente.

Por exemplo, imagine que existem duas imagens: a primeira é a imagem de uma sala vazia com uma porta à esquerda. A segunda imagem é um porão fechado por alçapão. Sobre a primeira imagem, eu pergunto: 'o que há atrás daquela porta?'. Sobre a segunda imagem, sendo curioso, eu ainda pergunto: 'o que há atras daquele alçapão?'. Em seguida, eu descubro que a primeira foto é uma imagem de uma casa em Porto Alegre; após descobrir seu endereço, eu consigo saber o que há atrás daquela porta. No entanto, descubro que a segunda imagem é uma pintura ultrarrealista. Nesse caso, eu exclamo 'que bobo fui de perguntar sobre o alçapão!'. Imediatamente, minha busca por algo que esteja atrás do alçapão é cessada.

Por que, no primeiro caso, fui levado a buscar o que estava atrás da porta, mas, no segundo caso, desisti imediatamente da busca? No caso de uma fotografia, a imagem foi tirada por alguém em algum lugar do mundo, ou seja, supõe-se que há uma ordem subjacente à estrutura da imagem: se há uma porta, deve haver uma saída dali para outro lugar[9]. Por outro lado, não há uma ordem subjacente independente da invenção, no caso de uma pintura. Isto é, não faz sentido perguntar se há algo atrás da porta, pois isso seria inteiramente arbitrário.

Assim como a estrutura da imagem, no caso da pintura, é dependente do modo como o pintor criá-la[10], também a matemática, *caso* seja uma invenção, depende do modo como os matemáticos a criam. Como estamos supondo que a matemática faz sentido, não seria possível basear a matemática enquanto invenção em métodos não-finitários. Por outro lado, se a matemática tratasse de objetos independentes da criação humana, poderia ser o caso que alguns métodos fossem opacos para nós. Para entendermos melhor a razão de Gödel destacar a importância de métodos não-finitários, contudo, precisamos dar um passo atrás, de volta aos primórdios do século XX, e retomar o Programa de Hilbert.

4.2.1.2 O Programa de Hilbert

David Hilbert foi um matemático eminente do século XX, responsável por ser o motor de muitas novas descobertas - ou invenções? - na matemática. Grande parte disso se deve ao fato de que ele iniciou o que ficou conhecido como o Programa de Hilbert: um programa matemático que listava problemas até então sem solução na matemática que seriam de interesse aos futuros matemáticos.

A origem do programa, conforme visto no capítulo 2, se baseia em um projeto de uma matemática *finitária*, ou seja, uma matemática fundada sobre métodos finitários de prova. Segundo Hilbert, a noção de infinito na matemática era a causadora dos problemas e paradoxos que a matemática vinha enfrentando:

> Assim como nos procedimentos de limite do cálculo infinitesimal, o infinito no sentido do infinitamente grande e o infinitamente pequeno mostraram-se apenas figuras de linguagem, também devemos perceber que o infinito no sentido de uma totalidade completa, onde ainda encontramos usada

[9] Estamos ignorando os casos atípicos de portas que não cumprem a função de uma porta: a saber, portas que não levam a lugar algum.

[10] Nesse caso, estou falando apenas do ato de criação do pintor; a experiência estética de alguém que observa uma pintura pode levá-la a ver a pintura de um modo distinto da intenção de seu pintor

> nos métodos dedutivos, é uma ilusão. (Benacerraf e Putnam 1964, p. 184, tradução nossa).

Dessa maneira, o projeto se baseia na substituição de métodos que utilizem a noção de 'infinito enquanto totalidade' por métodos finitos. Se isso fosse possível, então todo problema matemático genuíno poderia ser respondido com uma prova finita; logo, todo problema matemático seria, em princípio, decidível. "O objetivo de meu método é estabelecer... a certeza dos métodos matemáticos."(Benacerraf e Putnam 1964, p. 184, tradução nossa).

Ao falar de uma infinitude por totalidade, Hilbert está constrastando dois modos de pensar o infinito: o infinito *atual*, que é esta infinitude "quando nós consideramos os pontos de um intervalo como uma totalidade de coisas que existem todas de uma vez"(Benacerraf e Putnam 1964, p. 188, tradução nossa), e o infinito *potencial*, que é quando lidamos com o infinito apenas "como conceito limitante, como algo tornando-se, acontecendo..."(Benacerraf e Putnam 1964, p. 188, tradução nossa), ou seja, o infinito potencial não requer uma totalidade completa, mas sim uma totalidade que muda indeterminadamente. Conforme explica Wittgenstein sobre o conceito de aplicações sucessivas, que é intimamente ligado ao conceito de infinitude potencial: "O conceito de aplicações sucessivas de uma operação é equivalente ao conceito 'e assim por diante'."(Wittgenstein 2013, p. 51)

Na matemática axiomatizada finitariamente de Hilbert, ele propõe que podemos responder à questão 'Todos os problemas matemáticos são solucionáveis?', pois a teoria da prova fornecida para a matemática se torna

> ... não apenas capaz de fornecer uma base sólida para os fundamentos da matemática, eu acredito, mas oferece um método geral para o tratamento de questões fundamentais da matemática que os matemáticos até então não foram capazes de lidar ... a matemática se tornou uma corte de julgamento, um tribunal para decidir questões fundamentais. (Benacerraf e Putnam 1964, p. 200 tradução nossa)

Por fim, no sistema de Hilbert, o infinito funciona apenas como uma ideia da razão no sentido kantiano[11], ou seja, um conceito que serve apenas para dar inteligibilidade ao pensamento da experiência (Benacerraf e Putnam 1964, p. 201).

Em síntese, Gödel interpreta que seus resultados no campo da lógica-matemática não foram antecipados por conta de uma atitude epistemológica errônea que levou Hilbert e seus seguidores a adotarem uma perspectiva estritamente finitária na matemática, reduzindo o infinito atual a uma função ideal.

A atitude epistemológica de Hilbert de uma matemática infalível e garantida, que sirva como parâmetro último do conhecimento humano, é uma resposta ao ceticismo

[11] (Guyer e Wood 1998).

provocado pelo surgimento de paradoxos no final do século XIX e início do século XX, que abalou fortemente a discussão dos fundamentos da matemática. Frege, em uma carta a Russell após ser informado do paradoxo de Russell[12], comenta: "A sua descoberta da contradição me causou a maior surpresa e, eu quase diria, consternação, já que ela mexeu com as bases sob as quais eu pretendia construir a aritmética."(Heijenoort 2002, p. 127, tradução nossa)

Assim, como uma maneira de 'blindar' a matemática de paradoxos, Hilbert buscou refúgio em uma matemática finitária. Conforme expressa Shanker,

> Para os matemáticos do século XIX, a relevância imediata de seu trabalho para a filosofia - e vice-versa - era óbvio: a matemática era abrigada como o paradigma de um conhecimento *a priori*. Era uma posição que ninguém estava preparado para abandonar sem esforço. Portanto, quando o primeiro golpe dessa estatura foi aplicado era natural para os matemáticos responderem dentro da estrutura desta concepção. (Shanker 2012, p. 179, tradução nossa)

Assim, a matemática no século XIX era concebida como o conhecimento independente da experiência, que podemos capturar de maneira garantida por mero pensamento. Kant, em sua obra monumental do final do século XVIII, fundamentara a concepção de uma matemática que viria a perdurar no século XIX, ou seja, uma matemática *a priori*:

> O conhecimento filosófico é o conhecimento racional por conceitos, e o matemático aquele por construção de conceitos. Construir um conceito, porém, significa expor a intuição *a priori* a ele correspondente... Desse modo, eu construo um triângulo ao exibir um objeto correspondente a este objeto... completamente *a priori*... (Guyer e Wood 1998, p. 630, tradução nossa)

Prima facie, o Teorema de Gödel, conforme interpretado por Gödel, seria a derrocada final do Programa de Hilbert, pois o Segundo Teorema da Incompletude mostrou que nenhum sistema aritmético consistente pode provar sua própria consistência utilizando métodos finitários. Logo, os métodos finitários não são suficientes responder a todas as questões matemáticas.

Wittgenstein, por outro lado, com seu objetivo de dissolução do Programa de Hilbert, seria apoiador dos resultados de Gödel. No entanto, há, segundo Shanker, uma diferença entre os modos de resposta de Wittgenstein e Gödel: enquanto o último responde *dentro* da estrutura epistemológica mantida por Hilbert, Wittgenstein pretende mostrar como a pergunta é *sem sentido*, ou seja, que não há necessidade de buscar uma resposta para ela. Portanto, enquanto Gödel interpreterá seus resultados como uma prova de transição, Wittgenstein insiste em interpretá-la como uma prova de fechamento, o fim de uma busca por uma resposta para uma pergunta sem sentido (Shanker 2012, p. 178).

[12] (Heijenoort 2002, p. 124-125).

Uma comparação entre o ateu e o agnóstico pode ser elucidativa nesse caso. Frente à questão 'Deus existe', o ateu responde 'Não'; o agnóstico, por outro lado, responde 'Essa questão não pode ser respondida'[13], ou seja, o agnóstico tem razões para acreditar que a pergunta em si é mal formulada - por exemplo, ele poderia dizer que o conceito de Deus é mal formado em princípio, por conta de sua peculiar natureza. Suponhamos que o ateu, contudo, seja muito esperto, e consiga vir a provar que Deus não existe. Em um primeiro momento, ele se junta ao agnóstico e comemora: 'finalmente mostramos que os teístas estão errados!'. O agnóstico, no entanto, fica muito consternado: se o ateu realmente provou que Deus não existe, então a questão faz sentido, mas possui uma resposta negativa. No entanto, o agnóstico quer sustentar que não é possível oferecer resposta alguma. Do mesmo modo, Wittgenstein quer mostrar que o Programa de Hilbert não faz sentido em princípio, enquanto Gödel oferece uma resposta negativa. Portanto, Wittgenstein tem motivações para suspeitar da interpretação de Gödel sobre sua própria prova.

Segundo esta interpretação de Shanker, portanto, Wittgenstein difere de Gödel em um ponto *anterior* à sua prova: ele considera o Programa de Hilbert um projeto de matemática que não faz sentido. Por conta disso, Wittgenstein afirma que seu objetivo não é "falar sobre a prova de Gödel, mas perpassá-la", citado em (Shanker 2012, p. 155, tradução nossa). Isto é, Wittgenstein considera que sua disputa com a interpretação de Gödel ocorre no domínio *filosófico*. Para Shanker, isso fica ainda mais claro em PR, ao comparar outros textos de Wittgestein que não mencionam o Teorema de Gödel, mas que expressam as mesmas ideias por trás do Apêndice I de RFM:

> O sistema de regras determinando um cálculo determina o 'significado' de seus símbolos também. Se eu mudar as regras, então eu mudo a forma, o significado. - Em matemática, não podemos falar de sistemas em geral, mas apenas dentro de sistemas. (Wittgenstein 1980, p. 29, tradução nossa)

Comparando ao lado do §8 de RFM, Shanker vê semelhança: "Assim como perguntamos: "'demonstrável' em que sistema?", também devemos perguntar: "'verdadeiro' em que sistema?". 'Verdadeiro' no sistema de Russell significa, como foi dito: demonstrado no sistema de Russell." (RFM I Ap. I.8)

Assim, Shanker localiza a divergência entre Wittgenstein e Gödel em uma divergência em relação ao projeto de Hilbert. Mas o quê, exatamente, Wittgenstein vê como inadequado nesse Programa? A precipitação de Shanker, no entanto, mostra-se a partir de suas comparações de RFM com obras wittgensteinianas do período intermediário. Como podemos concluir da citação acima de PR, o significado dos símbolos matemáticos são determinados por suas operações no sistema particular em que eles estão. Assim, a tentativa de 'traduzir' um símbolo em determinado sistema para outro é ilegítima, pois seu significado só pode ser capturado internamente. Estas teses, no entanto, fazem parte do Wittgenstein do início dos anos 1930, conforme visto no capítulo 3. Conforme Wittgenstein afirma, sendo citado por Shanker:

[13] Existem muitas possibilidades de agnosticismo. Para o exemplo atual, trataremos daquele agnóstico que vê a própria questão da existência de Deus como uma pergunta agramatical, ou seja, sem sentido

> Você não pode dizer que p pertence ao sistema S; você não pode perguntar a qual sistema p pertence; você não pode buscar pelo sistema de p. Compreender p significa compreender seu sistema. Se p parece ir de um sistema para outro, então p, na realidade, mudou seu significado. (Shanker 2012, p. 193, tradução nossa)

Desse modo, o ponto em que Wittgenstein se separa do Programa de Hilbert é na noção de *metamatemática*: a ideia de uma linguagem que possa falar sobre sistemas matemáticos, em que possam ser demonstrados fatos sobre os sistemas (Benacerraf e Putnam 1964, p. 200). Ao passar de um sistema para outro, mudamos automaticamente o significado da expressão sendo utilizada, de modo que a metamatemática, sendo um caso particular que engloba todos os sistemas matemáticos, falha em sua tentativa de falar 'sobre' sistemas matemáticos. Logo, o Programa de Hilbert fracassa por razões filosóficas, e não, como Gödel pretende ter mostrado, pela existência de questões indecidíveis.

4.2.1.3 O Teorema de Gödel revisitado

Ainda que seja aceito o raciocínio que Wittgenstein realiza para desqualificar o Programa de Hilbert, os comentários sobre Gödel ainda permanecem obscuros. Que outra interpretação Wittgenstein tem a oferecer para explicar o Teorema de Gödel? Segundo Shanker, o problema da interpretação de Gödel sobre seu próprio teorema se localiza no uso que ele faz da enumeração de Gödel: conforme visto na seção 2.2, a enumeração de Gödel estabelece uma correspondência um-a-um entre fórmulas e números, relacionando, dessa maneira, dois cálculos. O que é inaceitável da perspectiva de Wittgenstein é a tentativa de englobar um cálculo em outro, ou seja, 'aritmetizar a metamatemática':

> ... é o próximo passo no argumento - a 'aritmetização da metamatemática' - que traz a primeira das objeções de Wittgenstein. A premissa operando aqui é que, dada a aritmetização de um cálculo, um enunciado metamatemático sobre as expressões em um cálculo objeto pode ser lido ao mesmo tempo como um enunciado sobre as relações aritméticas que ocorrem entre os correspondentes números de Gödel. (Shanker 2012, p. 216, tradução nossa)

Por que Wittgenstein pensaria que a aritmetização da metamatemática não é uma possibilidade? Se pudermos estabelecer uma enumeração de Gödel conforme os requisitos de 2.2, teremos uma correspondência um-a-um entre fórmulas e números (assim como sequências de fórmulas), logo, podemos relacionar as relações invariantes de determinados números como correspondendo a relações entre fórmulas. Conforme fica claro em PR 327, no entanto, isso não seria mais do que reproduzir o próprio cálculo com uma roupagem diferente, conforme citado por Shanker:

> O que é conhecido como a 'teoria do xadrez' não é uma teoria descrevendo algo, mas é um tipo de geometria. É, claro, por sua vez, um cálculo e não uma teoria... Quando eu faço os movimentos e provo sua possibilidade, eu estou, novamente, movendo-me dentro do jogo, não dentro de um metajogo. Cada passo no cálculo corresponde a um movimento no jogo, e toda a diferença consiste apenas no movimento físico de uma peça de madeira. (Shanker 2012, p. 214, tradução nossa)

O que Wittgenstein está propondo, em sua imagem do jogo de xadrez, não é uma ideia trivial: se o que ele afirma é verdadeiro, então não existe uma teoria do xadrez propriamente dita, se se entende por 'teoria' uma lista de proposições que fundamentam o xadrez. Na verdade, a teoria do xadrez não pode ser *dita*, mas ela se *mostra* no jogo pelo modo como jogamos. Se alguém propor uma teoria do xadrez, uma de duas coisas está acontecendo: ele está jogando o *mesmo* jogo, ou um jogo *diferente*. Jogadores avançados de xadrez, por exemplo, conseguem jogar discursivamente, ou seja, falando a posição que querem jogar a cada rodada. Isso não significa que não seja xadrez, pois o essencial nesse caso é a combinação de jogadas possíveis - e não a superfície material, ou o formato das peças utilizadas. Por outro lado, ao mudar o modo como jogamos, também podemos, acidental ou propositalmente, mudar o jogo que estamos jogando. Suponha que alguns garotos jogando futebol sintam calor em um campo de gramado e decidam comprar uma bola mais leve e jogar na areia, perto do mar. Como eles não conseguem correr tanto, eles decidem fazer dribles com a bola no ar. Um deles olha para a rede de volêi e pergunta 'Por que não tentamos jogar por cima da rede?'. Quando menos esperam, eles estão jogando fut-volêi.

Nesse sentido, a ideia de uma metamatemática não irá funcionar na perspectiva de Wittgenstein: ou a metamatemática é apenas mais um cálculo - nesse caso, ela não é sobre a matemática, mas sobre seus próprios objetos -, ou ela é uma reprodução do próprio cálculo que ela procura 'falar sobre', ou a metamemática não é um cálculo - nesse caso, não podemos provar nada sobre a matemática no sentido rigoroso requerido aos matemáticos.

O problema com a interpretação de Gödel, no entanto, é que a existência da metamatemática é *assumida* pela prova, ou seja, ele supõe que seja possível diferenciar matemática e metamatemática. Essa suposição, no entanto, não é trivial? A afirmação '¬P é a negação de P', por exemplo, é uma formulação *em prosa* da regra para o operador '¬'. Poderíamos, alternativamente, mostrar a regra de maneira esquematizada:

$\neg$	
T	F
F	T

O que a formulação em prosa da negação afirma é o mesmo que a regra do operador de negação mostra, ou seja, elas são apenas formulações diferentes da *mesma* regra (Shanker 2012, p. 220). Da mesma maneira que a teoria do xadrez, conforme citado acima, nada mais é do que o próprio xadrez, a suposta afirmação 'sobre' o sistema lógico-matemático nada mais é do que uma reformulação da regra inicial.

Gödel, no entanto, pretende mostrar não apenas que a matemática finitária não é capaz de decidir todos os problemas matemáticos, mas também estabelecer de uma vez por todas a legimitidade da metamatemática:

> Longe de legitimizar a concepção de Hilbert da distinção entre matemá-

> tica e metamátematica, a interpretação de Gödel se baseia na premissa que a demarcação de Hilbert é autoevidente... Gödel estava consciente do impacto *negativo* de seu teorema no Programa de Hilbert, mas ainda mais importante para ele era o papel *positivo* que ele esperava que sua prova faria: se genuinamente bem sucedida, ele utilizaria 'a progenia metamatemática de Hilbert' para revitalizar o platonismo... (Shanker 2012, p. 225, tradução nossa)

Em que ponto da prova de Gödel, no entanto, as considerações filosóficas sobre a existência da metamatemática influenciam na sua interpretação? Segundo Shanker, a ilegitimidade do raciocínio de Gödel ocorre ao estabelecer a numeração de Gödel, em que são supostos diferentes níveis de linguagem; não apenas isso, mas também que é possível 'espelhar' um nível da linguagem (a linguagem objeto, no caso, a aritmética) a outro nível (as afirmações sobre a aritmética) de modo que, ainda que os cálculos não sejam idênticos, é possível reproduzir um em outro (Shanker 2012, p. 221). Tendo essa suposição em vista, Gödel interpreta sua prova como mostrando que existem proposições indecidíveis no sistema aritmético que podem ser decididas metamatematicamente, ou seja, sua prova assume a forma de uma prova de transição, legitimizando o estudo de uma nova área da matemática, a saber, a metamatemática.

Em síntese, Shanker localiza a divergência filosófica de Wittgenstein e Gödel na interpretação de sua *numeração de Gödel*: ao passo que Gödel interpreta que a enumeração consegue *espelhar* uma fórmula do sistema objeto com uma expressão metamatemática, já está claro que Wittgenstein não aceita essa passagem (Shanker 2012, p. 229), pois assumir que é possível preservar o sentido de proposições através de diferentes sistemas matemáticos significaria supor que não há uma relação intrínseca entre uma proposição e o sistema de regras no qual ela está inserida.

O que está em jogo na interpretação gödeliana é a identidade da proposição indecidível G, pois é apenas se for possível preservar a identidade de G ao longo dos sistemas será possível dizer que G é verdadeira, mas não demonstrável. Se não houver identidade entre G e G*, a fórmula correspondente de G na metalinguagem, então não será possível atribuir a verdade de G com base na verdade de G* - nesse caso, não há problema em dizer que G é indemonstrável e G* é verdadeira, pois são proposições distintas.

> Gödel, portanto, foi barrado em virtude da gramática lógica das proposições matemáticas de alegar que ele tinha construído versões idênticas da mesma proposição matemática em dois sistemas diferentes. O máximo que ele poderia ter concluído justificadamente é que ele tinha construído proposições matemáticas paralelas. Nesse caso, contudo, não há nada errado em descobrir que um membro do par não é demonstrável em seu sistema enquanto o outro é verdadeiro. (Shanker 2012, p. 229, tradução nossa)

No Apêndice I de RFM, Wittgenstein marcadamente se opõe à tentativa de Gödel de transitar por diferentes sistemas lógicos com uma única proposição ao discutir o que significa para uma proposição ser verdadeira. Nesse caso, ele afirma "'p' é verdadeiro =

p"(RFM I Ap. I.6), ou seja, as condições de verdade de p são equivalentes as condições de asserção de p. As condições de asserção de p, por sua vez, variam de sistema para sistema: existem proposições que podemos afirmar na geometria euclidiana, por exemplo, que são falsas em outras geometrias (Wittgenstein et al. 1990, p. 49). Portanto, a verdade matemática é um conceito *local*: só faz sentido perguntar se uma proposição é verdadeira *em um sistema.*

No entanto, Shanker ainda peca em comparar RFM com as obras de um período anterior, pois a metodologia tardia de Wittgenstein presente em RFM, contrariamente às obras anteriores, é a de não sustentar teses filosóficas. Além disso, Shanker não oferece suporte textual suficiente para uma análise mais detalhada do Ap. I de RFM, o que ainda torna sua interpretação desprovida de força interpretativa.

4.2.2 Floyd

Floyd, seguindo na direção interpretativa de Shanker, também busca integrar diferentes textos de Wittgenstein para entender os comentários sobre Gödel. Em *Prose versus proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth*(Floyd 2001), Floyd busca diferenciar dois momentos no texto de Gödel: por um lado, há a prosa filosófica envolvida nos comentários sobre a relação entre demonstração e verdade; por outro lado, há a prova matemática, puramente sobre a noção de demonstrabilidade. Os críticos iniciais de Wittgenstein teriam interpretado os comentários de Wittgenstein como sendo sobre a prova de Gödel; nesse caso, sendo a prova correta, Wittgenstein teria se enganado ao divergir de Gödel. No entanto, conforme Floyd procura mostrar, Wittgenstein foca na prosa filosófica de Gödel, com o objetivo de dissipar a especulação metafísica e o renascimento de um platonismo matemático em volta do Teorema da Incompletude:

> Wittgenstein focou na questão, 'O que faz a prova do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel uma prova genuína?' - ele perguntou essa questão, contudo, por razões filosóficas, e não céticas. (Floyd 2001, p. 287, tradução nossa)

Isto é, Wittgenstein não estava duvidando de que a prova de Gödel era uma prova, mas sim sobre de que modo devemos interpretá-la. Em *On saying what you really want to say: Wittgenstein, Gödel, e a trisecção do ângulo*, Floyd se aprofunda na questão de como devemos interpretar a prova de Gödel ao compará-la com outras provas de impossibilidade, em particular a prova da impossibilidade da trissecção do ângulo por régua e compasso.

> Os comentários de Wittgenstein sobre o Teorema de Gödel tem paralelo direto com suas discussões de provas de impossibilidade clássicas do século XIX. Uma leitura atenta das últimas é essencial para um entendimento dos primeiros. (Floyd 1995, p. 386, tradução nossa)

Tendo em vista que Floyd localiza a divergência entre os autores no domínio filosófico, é mister se perguntar em que, exatamente, Wittgenstein divergia de Gödel. Conforme visto anteriormente, Wittgenstein não compactuava com o Programa de Hilbert. No entanto, há discordâncias ainda mais abstratas e fundamentais entre esses autores:

> Gödel estava convencido de que a filosofia deveria e precisa defender teorias sobre a realidade dos objetos matemáticos e conceitos matemáticos, enquanto Wittgenstein via essas conversas alegadamente metafísicas como sem sentido. Gödel defendia que a lógica matemática,'uma ciência anterior a todas as outras', revela muito da estrutura de conceitos e objetos matemáticos, enquanto Wittgenstein questionava o uso da lógica matemática como um *organon* para a filosofia. (Floyd 2001, p. 288, tradução nossa)

Em síntese, Wittgenstein procura dissipar o tipo de realismo matemático insurgente no século XX, ou seja, a tese segundo a qual os objetos matemáticos são entidades que existem independentes em alguma medida da construção humana. Começando com Russell e sua visão de que os objetos matemáticos e lógicos tratam da mesma coisa, a saber, objetos abstratos metafísicos, Gödel considera que os resultados de incompletude e outros resultados limitativos na matemática reforçam essa visão de que deve haver verdades autoevidentes, ou algum tipo de percepção imediata dos objetos matemáticos que nos leve a ver sua verdade, cuja base é o realismo matemático (Benacerraf e Putnam 1964, p. 449).

De que modo, não obstante, a prova da impossibilidade de trissecção do ângulo pode ajudar Wittgenstein a dissipar o mal entendimento sobre a prova de Gödel? Conforme visto na seção 3.2.1, a prova da trissecção do ângulo é uma prova de impossibilidade de *fechamento*, ou seja, uma prova que nos mostra que não é necessário perseguir o que foi mostrado impossível. Gödel, no entanto, toma seu teorema como uma prova de transição para estimular uma nova área da matemática, a saber, a metamatemática.

Floyd, no entanto, vai mais longe: a prova da impossibilidade de trissecção do ângulo mostra como as provas matemáticas dependem de como configuramos o sistema no qual estamos montando o problema, ou seja, a impossibilidade é sempre uma impossibilidade dentro de certas condições. De fato, o problema da impossibilidade de trissecção do ângulo apenas se torna um problema se nos restringirmos aos métodos de régua e compasso, pois já se conhecia, mesmo na geometria antiga, outros métodos de trissecção (Floyd 1995, p. 389).

Ao restringir os modos de construção da geometria euclidiana desse modo, no entanto, o sistema de Euclides é feito de modo que aquilo que podemos demonstrar são as figuras que podemos construir com régua e compasso, ou seja, dentro do sistema de Euclides a pergunta 'é possível trisseccionar o ângulo?' pode ser respondida apenas com a construção da trissecção de um ângulo qualquer. Caso isso não seja possível, não há modo de provar que o problema com a trissecção é que ela é impossível, e não que ainda não encontramos o método adequado. Por isso, a prova de impossibilidade de Pierre Wantzel, conforme visto em 3.2.1.1, é formulada dentro do sistema de teoria das equações.

> O problema [da trissecção] é reduzido para um problema na teoria das equações. Ele é resolvido pela caracterização matemática das restrições que nós colocamos para qualquer solução de um problema de construção. (Floyd 1995, p. 391, tradução nossa)

Em outras palavras, o problema da trisecção é solucionado ao simular o sistema de Euclides em um cálculo mais abstrato, onde existem outros movimentos além dos movimentos por régua e compasso. A partir da determinação dos movimentos possíveis da geometria euclidiana, podemos localizar que a trissecção não se encontra nesse conjunto - no caso da teoria das equações, não há raiz racional para as equações correspondentes. A solução algébrica, no entanto, constrói um sistema análogo ao de Euclides: não é possível dizer que provamos, no sistema de Euclides, que não é possível trisseccionar o ângulo - 'nós nos colocamos *outro* problema' (Floyd 1995, p. 392, tradução nossa).

Ao tratar dos comentários wittgensteinianos acerca de Gödel, Floyd enfatiza a centralidade da noção de *proposição*. Segundo Floyd, a noção de proposição caracterizada por Wittgenstein faz com que ele "não pudesse ter interpretado Gödel senão do modo como o interpretou"(Floyd 1995, p. 395, tradução nossa).

O ponto de partida de Wittgenstein no Apêndice I de RFM é observar que nem tudo que afirmamos cai sob o conceito de um enunciado declarativo, ou seja, uma afirmação que é verdadeira ou falsa. Podemos transformar certas afirmações em proposições declarativas, no entanto, elas próprias não são:

> É fácil pensar numa linguagem em que não há uma forma para perguntas ou comandos, mas em que perguntas e comandos são expressos na forma de enunciados, e.g. em formas correspondendo ao nosso: "Eu gostaria de saber se..."e "Meu desejo é que...".
>
> Ninguém diria de tal questão (e.g. se está chovendo na rua) que ela é verdadeira ou falsa. Claro, faz parte do português [English] dizer tal coisa sobre uma proposição como "Eu quero saber se..."(RFM I Ap. I.1)

Para Floyd, é importante Wittgenstein tocar neste ponto em sua análise do Teorema de Gödel, pois, assim como a prova da impossibilidade da trissecção do ângulo, o estatuto linguístico da proposição a ser provada está em jogo. Isto é, ao realizarmos a tentativa de trisseccionar o ângulo, construímos uma frase que *pretende* ser verdadeira ou falsa. No entanto, como ainda é apenas uma conjectura, ela não possui o valor de uma proposição. Como afirma Floyd, a proposição sobre a trissecção do ângulo "diz (como um comando), "Vá e faça uma busca matemática!(Floyd 1995, p. 396). Assim como os comandos não são essencialmente declarativos, as conjecturas matemáticas também não podem ser tratadas como tal.

O segundo movimento de Wittgenstein é considerar os enunciados declarativos, ou seja, as afirmações que são verdadeiras ou falsas.

> A grande maioria dos enunciados que nós afirmamos, escrevemos e lemos são enunciados declarativos.
>
> E - você diz - esses enunciados são verdadeiros ou falsos. Ou, como eu também poderia dizer, o jogo de funções de verdade é jogado com eles, pois a asserção não é algo que é adicionado à proposição, mas uma

> característica essencial do jogo que nós jogamos com ela. [14] (RFM I Ap. I.2)

O que Wittgenstein afirma neste trecho requer um pouco de contexto. Frege, um dos mentores intelectuais de Wittgenstein, em sua obra *Begriffsschrift*, propos-se a montar um sistema simbólico que fosse a expressão mais pura do pensamento científico (Heijenoort 2002, p. 7). Em sua introdução, Frege distingue entre o julgar de uma proposição e seu conteúdo, e as separa. Isto é, uma proposição A pode ser considerada somente como um conteúdo "A", mas podemos tentar transformá-la em um juízo, cujo símbolo para Frege é |—, resultando em |—A. De acordo com Frege, |— funciona como um "predicado comum a todos os juízos"(Heijenoort 2002, p. 13), que afirma "É o caso que A". Claramente, Wittgenstein é contrário à ideia fregeana da separação entre o conteúdo do juízo e o julgar. É parte essencial do jogo com uma proposição declarativa que o ser verdadeiro ou falso esteja envolvido ao pensá-la, conforme Wittgenstein já antecipa em suas *Investigações Filosóficas*:

> Claro, temos o direito de utilizar um símbolo de asserção em contraste com uma interrogação, por exemplo, ou se queremos distinguir uma asserção de uma ficção ou uma suposição. Isso apenas é um erro se se pensa que a asserção consiste de duas ações, o pensar e o asserir (atribuir um valor de verdade, ou algo do tipo). (Wittgenstein 2010, p. 11, tradução nossa)

Assim, Wittgenstein discorda de Frege em um ponto pivotal de sua lógica-matemática: a definição dos conceitos de *proposição*, *verdade* e *prova*. Apenas já tendo aceito esses conceitos básicos, a prova de Gödel se torna filosoficamente interessante:

> Para aqueles que tomam que a lógica matemática representa claramente nossos conceitos de "prova", "verdade", e "matemática", o resultado de Gödel é um grande passo a frente, mostrando definitivamente que nós não podemos simplesmente identificar "verdade matemática"e "prova matemática". (Floyd 1995, p. 400, tradução nossa)

Em síntese, Wittgenstein está utilizando os conceitos de verdade e prova matemática da maneira como são utilizados na matemática. Em paralelo com o sistema de Euclides, as questões que podemos fazer no sistema de Russell é "*mostrar* a demonstrabilidade"(Floyd 1995, p. 400, tradução nossa), assim como no sistema de Euclides a pergunta sobre a possibilidade de trissecção era uma pergunta sobre a possibilidade *efetiva* de se trisseccionar um ângulo qualquer, ou seja, se possuíamos a construção de uma trissecção indeterminada.

A interpretação de Floyd, no entanto, é mais especificada em *A Note on Wittgenstein's "Notorious Paragraph"about the Gödel Theorem*, em que Floyd comenta o §8 de

[14] Texto original: "Die große Mehrzahl der Sätze, die wir aussprechen, schreiben und lesen, sind Behauptungssätze.

Und - sagst du - diese Sätze sind wahr oder falsch. Oder, wie ich auch sagen könnte, mit ihnen wird das Spiel der Wahrheitsfunktionen gespielt. Denn die Behauptung ist nicht etwas, was zu dem Satz hinzutritt, sondern ein wesentlicher Zug des Spiels, das wir mit ihm spielen.".

RFM I Ap. I. Neste paragráfo, Wittgenstein faz uma de suas argumentações principais em relação ao Teorema de Gödel. Seu ponto é o seguinte: "verdadeiro em PM"significa "demonstrável em PM". Agora, pensemos o que significa para a proposição de Gödel ser verdadeira em PM. Como a proposição G é traduzida metamatematicamente como "eu não sou demonstrável", então a suposição de que G é verdadeira, ou seja, demonstrável em PM significa que temos que abandonar a tradução de G como "eu não sou demonstrável". Se a negação de G é verdadeira, então significa que a negação de G foi demonstrada, ou seja, temos que abandonar novamente a tradução de G como "eu não sou demonstrável"(RFM Ap. I.8)

A interpretação de Floyd, conjuntamente com Putnam, no entanto, é que Wittgenstein, ao considerar a possibilidade de G ser falsa em PM, está considerando a possibilidade do cálculo ser ω-inconsistente, ou seja, ele está considerando a possibilidade do sistema aritmético ter uma interpretação não-*standard*. Neste caso, não podemos interpretar as proposições desse sistema da maneira usual.

> Para ver que Wittgenstein está em algo aqui, imaginemos que uma prova de ¬P foi de fato descoberta. Suponha, por ora, que o sistema de Russell (doravante PM) não é *inconsistente*, entretanto. Então, pelo Primeiro Teorema da Incompletude, sabemos que PM é ω-inconsistente. No entanto, o que a ω-inconsistência mostra? ω-inconsistência mostra que um sistema *não tem modelo, em que o predicado que estivemos interpretando como* "x é um número natural"*possui uma extensão que é isomórfica aos números naturais.* (Floyd e Putnam 2000, p. 625, tradução nossa).

Esta interpretação de Floyd, no entanto, não é decisiva: de fato, Wittgenstein não se pronuncia diretamente sobre a ω-consistência neste parágrafo nem em seus comentários sobre o Teorema de Gödel. Em segundo lugar, as evidências que temos do conhecimento de Wittgenstein sobre interpretações não-*standard* da aritmética são, no máximo, circunstanciais, provindas de rememorações e conversas entre seus alunos e colegas (Floyd e Putnam 2000, p. 626). À parte a interpretação de Floyd sobre ω-consistência, no entanto, sua distinção entre **prosa filosófica** e **prova matemática** é central para entendermos o papel de Wittgenstein como um filósofo frente a resultados matemáticos como o Teorema de Gödel. Como visto no capítulo 3, a filosofia tardia de Wittgenstein não propunha teses filosóficas, mas sim um método capaz de dissipar confusões oriundas de concepções filosóficas errôneas através da análise gramatical dos termos. Assim, no caso do Teorema da Incompletude, Wittgenstein está preocupado em dissipar a prosa filosófica em torno das noções de prova, verdade, entre outras noções gerais que são matematizadas a partir dos trabalhos de Frege e Russell.

> Wittgenstein, desse modo, não deve ser reconstruído afirmando que o Teorema de Gödel é meramente um paradoxo formal ou lógico, como Gödel sugeriu que ele fez. Ao invés disso, ele está investigando as provas de Gödel para enfatizar aspectos de nossa noção de prova matemática que ele vê que está sendo interpretada incorretamente por tipos como Frege, Russell, Hilbert e Gödel. É verdade que motivações metafísicas levaram estes filósofos a desenvolver seus trabalhos matemáticos. [...] Wittgenstein pensa, no entanto, que suas questões metafísicas não podem ser

> resolvidas satisfatoriamente apenas por meios matemáticos. (Floyd 2001, p. 294, tradução nossa)

4.2.3 Mark Steiner e o não-revisionismo de Wittgenstein

Mark Steiner também começa sua investigação pelo denominado 'paragráfo notório' de Floyd e Putnam, o §8. Steiner, ao contrário de Floyd e Shanker, "não pretend[e] defender os comentários de Wittgenstein"(Steiner 2001, p. 258, tradução nossa), mas sim esclarecê-los, e mostrar como sua posição sobre o Primeiro Teorema da Incompletude é incompatível com o restante de sua filosofia da matemática (Steiner 2001, p. 258, tradução nossa).

Um aspecto pouco explorado até o momento da filosofia de Wittgenstein, presente a partir das *Investigações Filosóficas*, é seu forte anti-revisionismo na filosofia. Isto é, a filosofia deve descrever os conceitos que utilizamos como utilizamos, explorá-los e destrinchá-los, no entanto, não é papel do filósofo propor novos conceitos e novos sistemas filosóficos que procurem, dessa maneira, alterar a maneira como utilizamos os termos e conceitos da linguagem:

> A filosofia não deve interferir de maneira alguma com o uso de fato da linguagem, então, no fim das contas, ela pode apenas descrevê-la. [...] A filosofia apenas coloca tudo diante de nós, e não explica nem deduz nada. (Wittgenstein 2010, p. 55, tradução nossa).

Portanto, por conta da posição anti-revisionista de Wittgenstein na filosofia, não pode ser o caso que seus comentários sobre o Teorema da Incompletude pretendam prescrever qualquer aspecto da *prova* matemática de Gödel, pois isso significaria que Wittgenstein propõe mudanças no modo como a matemática está sendo, de fato, realizada. Conforme a metodologia tardia wittgensteiniana com seu método **genético**, Wittgenstein pretende apenas elucidar os conceitos matemáticos utilizados a partir de uma análise do uso desses termos.

Steiner, ao contrário de Floyd, interpreta que Wittgenstein tenha entendido o Primeiro Teorema da Incompletude de maneira errônea, e, por conseguinte, sua refutação é contra a *prova* de Gödel, e não sua interpretação filosófica:

> Wittgenstein tenta refutar o teorema, naquilo que ele pensa ser a própria prova de Gödel! [...] A versão do Teorema de Gödel - e sua prova - que Wittgenstein levanta é essa: temos uma proposição da matemática, P, que pode ser interpretada: P não é demonstrável. Se P é falsa, então temos uma proposição falsa, mas demonstrável, o que é impossível; então, ela deve ser verdadeira, mas indemonstrável. (Steiner 2001, p. 261, tradução nossa)

O erro de Gödel, nesse caso, seria considerar uma proposição falsa e demonstrável como algo incompatível, pois, conforme afirma Wittgenstein, "O que conta como "perder" no xadrez pode constituir a vitória em outro jogo"(RFM I Ap. I.2). Assim, a proposição P pode ser demonstrável em PM, logo, verdadeira em PM, mas falsa em outro sentido, isto é, falsa em outro sistema. "Desse modo, a prova de Gödel se baseia em um erro elementar" (Steiner 2001, p. 261, tradução nossa)

Steiner objeta ao raciocínio de Wittgenstein do seguinte modo: de fato, há uma maneira de definir "'verdadeiro' em PM"de maneira matemática, a saber, a definição de verdade como "satisfatibilidade por todas sequências de números naturais"(Steiner 2001, p. 264, tradução nossa). Nesse caso, "o teorema de Gödel, então, tem o corolário que há proposições verdadeiras de PA (ou ao menos Tarski-verdadeiras) que não são demonstráveis no sistema de Russell."(Steiner 2001, p. 267, tradução nossa). Pelo Teorema da Correção, por outro lado, não é possível que haja uma proposição Tarski-falsa que seja demonstrável em PM, ou seja, o raciocínio de Wittgenstein é desinformado.

Teorema da Correção 1. $\forall\phi \vdash_{PA} \phi \longrightarrow \phi$ *é Tarski-verdadeiro*

Segundo Steiner, em síntese, Wittgenstein poderia ter feito um uso bem mais proveitoso dos resultados de Gödel que corroborassem com suas observações sobre a natureza dos conceitos de "número", "verdade matemática", entre outros conceitos matemáticos vagos que são agrupados por *semelhança de família.*

4.2.3.1 Semelhança de família e os conceitos matemáticos nas *Investigações Filosóficas*

De acordo com Wittgenstein, os conceitos matemáticos mais gerais como "verdade matemática", "prova", são conceitos agrupados por semelhança de família. Para explicar o que significa uma semelhança de família, podemos comparar com um agrupamento por meio de uma definição. Ao agruparmos elementos diferentes em um grupo Γ por meio de uma definição K, o que fazemos é atribuir a cada elemento x que pertence a Γ a propriedade K. Por exemplo, podemos estipular que "Estilosos de Barão":= Aqueles que se vestem de vermelho e preto. Nesse caso, podemos delimitar exatamente quem são os Estilosos de Barão, pois é uma questão de verificar se a definição se aplica ou não individualmente. No entanto, tal conceito é artificial, pois o grupo das pessoas estilosas de Barão Geraldo não contém somente os que se vestem de vermelho e preto (e nem todos que se vestem de vermelho e preto são estilosos).

Uma estratégia de resolução desse problema seria procurar uma definição que se adequasse melhor à utilização do termo. Nesse caso, ainda que não tenhamos uma definição adequada, todos os estilosos de Barão Geraldo possuem uma propriedade em comum que os unifica nesse grupo. A noção de semelhança de família, no entanto, rejeita exatamente essa suposição. Ela parte da ideia de que não há uma única propriedade que agrupe todos os membros aos quais determinado termo se aplica, mas sim semelhanças internas entre membros individuais que não necessariamente é uma relação satisfeita por quaisquer membros entre si. Imaginemos que há 3 bolas, cada uma pintada de duas cores. A bola 1 está pintada de azul e amarelo, a bola 2 de amarelo e vermelho, e a bola 3 de vermelho e azul. De fato, todas as bolas possuem semelhanças consideradas dois-a-dois. No entanto, não há uma única cor que seja comum a todas as bolas.

> Considere, por exemplo, as atividades que chamamos de "jogos". Quero dizer jogos de tabuleiro, jogos de cartas, jogos com bolas, atletismo, e assim por diante. O que é comum a todos eles? Não diga: "Eles devem ter algo em comum, ou eles não seriam chamados de 'jogos"', mas olhe e veja se todos eles têm algo em comum. Se você observá-los, não verá algo que é comum a todos, mas similaridades, afinidades... (Wittgenstein 2010, p. 36, tradução nossa)

Assim, ao contrário da noção de agrupamento por definição, o agrupamento por semelhança de família é muito mais flexível, adaptando-se ao modo como usamos de fato os termos em questão. Steiner oferece três razões pelas quais, tendo em vista a noção de semelhança de família, Wittgenstein deveria corroborar sem ressalvas os resultados do Teorema de Gödel.

- O Teorema de Gödel mostra que "a noção de verdade matemática admite flexibilidade"(Steiner 200 p. 261, tradução nossa), pois ele mostra que uma fórmula que não é 'verdadeira em PM' pode ser verdadeira em outro sentido (nesse caso, Tarski-verdadeira).
- O Teorema de Gödel oferece razões para que "o conceito de número, como aquele de jogos, não tenha uma 'essência'"(Steiner 2001, p. 261, tradução nossa), pois um conjunto enumerável recursivo de axiomas não é capaz de capturar o sistema aritmético completamente.
- O Teorema de Gödel oferece suporte para a tese de que a matemática não pode ser formalizada de uma única maneira (i.e., de maneira recursiva enumerável) (Steiner 2001, p. 261).

Em síntese, caso Wittgenstein aceitasse a prova de Gödel sem ressalvas, além de manter sua posição não-revisionista da filosofia, também poderia manter suas teses em relação aos termos matemáticos 'verdade', 'número', e 'prova'.

4.2.4 Rodych e Lampert

Anteriormente, vimos o caso da interpretação de Shanker, um autor notadamente favorável ao diagnóstico de Wittgenstein, no sentido de que seus comentários não foram rechaçados como fracassos de sua obra. Em seguida, analisamos os esforços de Floyd e Putnam em separar o discurso filosófico de uma crítica matemática dos comentários wittgensteinianos. Por fim, Steiner rejeita a diferenciação feita por Floyd e Putnam, mostrando como Wittgenstein ataca a prova de Gödel e sua própria posição filosófica com suas observações. Os dois próximos autores que veremos (Rodych 2003; Rodych 2002; Lampert 2018) possuem mais ressalvas a fazer em relação aos comentários wittgensteinianos.

Rodych, que veremos a seguir, discute de maneira detalhada a posição de Floyd, procurando mostrar como seus esforços em separar a discussão filosófica da matemática falham em obter suporte textual suficiente.

4.2.4.1 Rodych e a dupla questão

A posição de Rodych começa por criticar a maneira como Floyd, a autora que vimos acima, retrata os comentários de Wittgenstein. Conforme visto, Floyd procura mostrar que o §8 do Apêndice I pode ser interpretado como uma antecipação de Wittgenstein de aritméticas ω-inconsistentes, cuja consequência seria que a frase de Gödel não poderia ser 'traduzida' para a linguagem natural como 'G não é demonstrável' (Floyd e Putnam 2001, p. 257-258).

Rodych, no entanto, chama atenção para uma diferenciação importante entre duas questões: (i) Wittgenstein tinha conhecimento das implicações que a ω-inconsistência causa na aritmética dos números naturais, e (ii) no §8, é realmente a ω-inconsistência que ele tem em mente para justificar sua interpretação do Teorema de Gödel (Rodych 2003, p. 283)?

Responder afirmativamente a (i) não significa que (ii) também foi respondida afirmativamente, pois é necessário determinar evidências razoáveis para que possamos dizer que Wittgenstein tinha (i) em mente ao levantar dúvidas sobre a tradução da frase de Gödel para a linguagem natural. Conforme Rodych argumenta, Floyd comete o erro de atribuir (ii) com base em (i):

> É assim que a evidência é oferecida: é oferecida como evidência para uma e única afirmação (i.e. a Tese Floyd-Putnam), a saber, 'que Wittgenstein realmente entendeu - "com notável *insight*", - que "variáveis devem necessariamente tomar valores distintos dos números naturais".' Essa afirmação, *em si própria*, apenas responde à Questão 1 - ela diz respeito *apenas* sobre a questão de se Wittgenstein poderia ter o entendimento contido "na afirmação"... Contudo, se Wittgenstein tinha um entendimento atribuído a ele por Goodstein *é uma questão completamente diferente* de se "a afirmação" está contida em (§8) ou em qualquer outro lugar de RFM. (Rodych 2003, p. 284, tradução nossa)

4.2.4.2 A interpretação de Rodych

Tendo criticado Floyd e Putnam pela interpretação errônea de §8, é ônus de Rodych mostrar como ler §8 de maneira distinta e mais condizente com o texto. Enquanto Floyd e Putnam procuram mostrar como Wittgenstein não está discordando da prova matemática de Gödel, mas sim de sua interpretação filosófica, Rodych constrói Wittgenstein como crítico direto da prova de Gödel:

> "... o raciocínio Gödeliano de Wittgenstein em (§§8, 10, 11, 17, 18) 'deriva' erroneamente contradições ao 'interpretar' 'P' como significando "P não é demonstrável no sistema de Russell"(§8); Wittgenstein pensa *erroneamente* que tal interpretação é essencial para a prova de Gödel. (Rodych 2003, p. 286, tradução nossa)

Rodych constrói §8 da seguinte maneira: a frase de Gödel não pode ser interpretada como 'G não é demonstrável', pois 'G' ser demonstrável significa que ela é verdadeira, e se ela é verdadeira então ela é demonstrável, dada a conexão entre verdade e demonstrabilidade em PM. Portanto, seria incompatível construir 'G' como 'G não é demonstrável' (Rodych 2003, p. 288). Assim, Wittgenstein está, de fato, negando os resultados de Gödel com base em sua noção de verdade matemática já exposta nos parágrafos anteriores do Apêndice I.

4.2.4.3 O Construtivismo Formalista de Wittgenstein

Um aspecto importante da discussão acerca dos comentários de Wittgenstein, conforme visto no início do capítulo 3, é a caracterização da filosofia da matemática wittgensteiniana durante o período de escrita de RFM. Para entender a posição que Rodych atribui a Wittgenstein, é interessante analisar um exemplo inicial. Ao estudarmos lógica de primeira ordem, deparamo-nos com os símbolos $\longleftrightarrow$, $\longrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Esses símbolos são operadores de proposições A, B, C, etc., no caso da lógica proposicional, ou seja, eles são aplicados sobre proposições, gerando outras proposições.

Em uma aula de lógica introdutória, esses símbolos são comparados a expressões da linguagem natural. Por exemplo, diz-se que 'A→B' é equivalente à expressão 'se ...,então ...'. No entanto, ao estudar o sistema dedutivo associado aos operadores, dissipa-se a ideia de uma familiaridade com o significado desses símbolos e é exigido que se atente tão somente às regras de introdução e eliminação de tais símbolos no cálculo. Isto é, o significado de tais termos depende única e exclusivamente das regras de aplicação no cálculo. Mudam-se as regras, muda-se o significado do termo. Vejamos o exemplo do conectivo '∨', um conectivo binário que normalmente é traduzido por 'ou'.

(i)

$$\frac{\text{A}}{A \vee B}$$

(ii)

$$\frac{\text{B}}{A \vee B}$$

(iii)

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$$

O conectivo '∨' possui duas regras de introdução - (i) e (ii) - e uma regra de introdução (iii). Para realizar as deduções, *tudo* que devemos considerar sobre esse

conectivo são essas regras, ou seja, o comportamento do $\vee$ é circunscrito pelas regras (i)-(iii). Caso alteremos alguma regra, mesmo que de maneira sutil, o significado de '$\vee$' pode ser comprometido. Por exemplo, caso adotemos a regra (iv) em troca da regra (ii), não seria possível mostrar a comutividade de '$\vee$', ou seja, não seria possível mostrar que $(A \vee B) \longleftrightarrow (B \vee A)$.
(iv)

$$\frac{\mathrm{B}}{B \vee A}$$

Portanto, como o comportamento de $\vee$ seria diferente nesse caso, estaríamos lidando com outro significado, pois ele deriva regras distintas do $\vee$ inicial[15].

Generalizando essa ideia para a matemática como um todo, temos um tipo de formalismo: os termos matemáticos obtém seu significado de maneira inteiramente *sintática*, ou seja, para compreender o que determinado termo matemático significa, devemos olhar apenas para suas operações e aplicações matemáticas. Não obstante, Wittgenstein também sustenta que a matemática é criada, e não descoberta, portanto, o significado dos termos matemática dependem das regras que *nós* estipulamos para eles. "Fala-se de descobertas matemáticas. Tentarei repetidamente mostrar que o que é chamado de descoberta matemática seria muito melhor ser chamada de invenção matemática."(Wittgenstein e Bosanquet 1989, p. 22, tradução nossa). Em relação ao formalismo de Wittgenstein, Rodych comenta:

> Esse é o núcleo do formalismo duradouro de Wittgenstein. Quando demonstramos um teorema ou decidimos acerca de uma proposição, operamos de maneira puramente formal, sintática. (Rodych 2018, tradução nossa)

Assim, a imagem de Wittgenstein da matemática é altamente anti-Platônica: a ideia de que os objetos matemáticos existem de maneira independente em algum nível abstrato da realidade, e que devemos descobrir as propriedades de tais objetos é descartada, e a imagem que surge é a da matemática como um jogo de linguagem: inventamos operações com sinais, e a cada passo novo que é dado, extendamos mais um pouco o sistema. Se modificarmos algumas regras, pode ser que o jogo seja modificado a ponto de se tornar outro jogo, e certos jogos podem ser abandonados[16].

A ideia principal a ser absorvida, em síntese, é que a noção de 'verdade matemática' não é uma noção *absoluta*, ou seja, os matemáticos não descobrem coisas que são verdadeiras independentemente da construção humana. Na realidade, as verdades matemáticas são relativas aos sistemas matemáticos construídos, ou seja, uma proposição matemática nunca é verdadeira *simpliciter*, mas sim verdadeira *dado algum sistema*:

---

15 Em matemática, tal diferença de sentido entre termos aparentemente próximos é evidenciada por anexações de símbolos ao símbolo principal. Por exemplo, ao tratar de diferentes usos da negação, recomenda-se utilizar $\neg_c$ para a negação clássica e $\neg_i$ para a negação intuicionista, evidenciando que, apesar de semelhantes, tais termos são *distintos*.

16 Esse trecho pode ser lido à luz do §23 das *Investigações Filosóficas* (Wittgenstein 2010, p. 15).

> Pode haver frases verdadeiras na linguagem de Euclides, que não são demonstráveis seu sistema, mas são verdadeiras? - Ora, há até mesmo frases que são demonstráveis em Euclides, mas que são *falsas* em outro sistema. [17] (RFM I Ap. I.7)

4.2.4.4 Conclusão de Rodych

A conclusão de Rodych, dessa maneira, é que Floyd e Putnam atribuem de maneira precipitada a tese de que Wittgenstein estaria, no §8, antecipando aritméticas ω-inconsistentes. A maneira como Rodych lê os comentários wittgensteinianos, por sua vez, é à luz dos §§5-7, onde Wittgenstein expõe sua tese sobre verdade na matemática de maneira explícita. Isto é, a conclusão de Wittgenstein em §8 advém de considerar "verdadeiro em PM"como "demonstrado em PM", uma tese característica de sua filosofia da matemática.

Assim, Rodych procura mostrar como é falsa a distinção feita entre a prosa filosófica e a prova matemática proposta por Floyd e Putnam, pois Wittgenstein, com base em "motivos construtivistas/formalistas"(Rodych 2003, p. 312), mantém juntas a noção de verdade e demonstrabilidade matemática, de modo a tornar a construção da frase de Gödel um mero jogo de palavras: "E como você poderia tornar a verdade da asserção plausível para mim, já que você não tem outro uso dela exceto por esses truques?"(RFM I Ap. I.19). Veremos, no entanto, que não é por conta de **teses** filosóficas que Wittgenstein cola a noção de verdade e demonstrabilidade, mas sim por conta de uma análise neutra e pré-filosófica do sistema de PM.

4.2.4.5 Timm Lampert

Conforme visto anteriormente, de acordo com Rodych, Wittgenstein oferece um contraponto à prova de Gödel, e não aos seus comentários filosóficos. *Prima facie*, isso já significaria a derrocada de Wittgenstein, pois (i) um filósofo questionando uma prova matemática bem estabelecida com base em argumentos discursivos não seria levado seriamente no contexto matemático, e (ii) a atitude de Wittgenstein não é revisionista em relação à matemática: "De fato, de acordo com sua perspectiva 'não-revisionista' segundo a qual a filosofia não pode influenciar a matemática, Wittgenstein não possui interesse em refutar a prova de Gödel."(Steiner 2001, p. 258, tradução nossa). Lampert, no entanto, procura mostrar como tal interpretação pode ser melhor explorada (Lampert 2018, p. 324).

O ponto de partida de Lampert é diferenciar-se de Steiner e Rodych: enquanto os últimos autores invalidam os comentários de Wittgenstein por conta do desentendimento

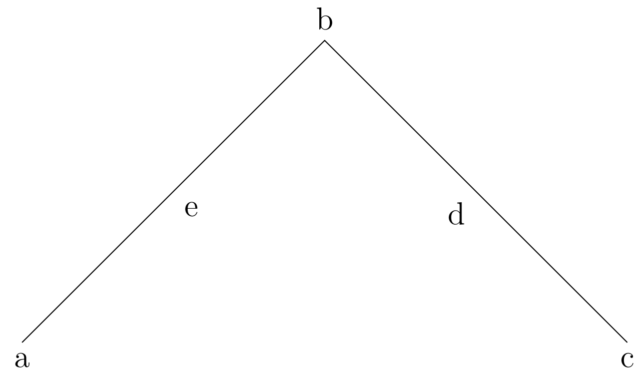
[17] Texto original: "Kann es wahre Sätze in Euklids Sprache geben, die in seinen System beweisbar, aber wahr sind? - Aber es gibt ja sogar Sätze, die in Euklids System beweisbar, aber in einem andern System *falsch* sind.".

de Wittgenstein em acreditar que a prova de Gödel depende, em última instância, de uma interpretação autorreferencial de "P", cuja importância é reduzida pela aritmetização de gödeliana (Lampert 2018, p. 326), Lampert explora os comentários wittgensteinianos por meio da interpretação metamatemática de "P", conforme afirma Lampert: "Contudo, eu argumento que da perspectiva de Wittgenstein, a prova de Gödel não é uma prova matemática. Ao invés disso, ela é uma prova que se baseia na 'prosa' no sentido de interpretações metamatemáticas."

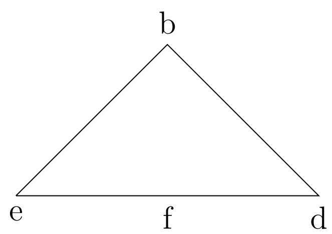
4.2.4.5.1 Provas Algorítmicas e Provas Metamatemáticas

Para entendermos a posição de Lampert, que pretende mostrar como a prova de Gödel pode ser entendida como uma prova metamatemática, temos que diferenciar entre uma prova puramente algorítmica e uma prova metamatemática. Provas algorítmicas, conforme caracterizado por Wittgenstein, são aquelas provas que podem ser decidíveis 'sintaticamente', ou seja, questões que podem ser resolvidas tão somente com a manipulação das regras do sistema formal em questão. Como um exemplo disso, podemos pensar na prova de bissecção de um ângulo qualquer na geometria euclidiana.

Seja ab e bc linhas construídas tal que não é o caso que ab//bc. Tome-se os segmentos de reta be e bd, tais que be = bd.



Agora, façamos uma linha que una os pontos e e d, gerando a linha ed. A partir dessa linha, seja f um ponto tal que ef = df, e tracemos uma linha de b a f. Nesse caso, podemos verificar que o triângulo ebd é um triângulo isósceles, ou seja, um triângulo com dois lados iguais.



Nesse caso, os ângulos opostos aos lados congruentes são iguais, ou seja, BED = BDE. Como o triângulo bef e o triângulo bfd possuem três lados iguais - be = bd, ef = fd e bf = bf - e um ângulo equivalente, então bef e bdf são triângulos congruentes, ou seja, EBF = DBF. Logo, EBF = DBF = EBD ÷ 2. Desse modo, conseguimos, a partir de construções euclidianas, mostrar como bissecionar um ângulo - ou seja, dividir em dois ângulos iguais - de maneira generalizada.

Por que a bissecção é um exemplo paradigmático de uma prova matemática algorítmica? Conforme pudemos observar, cada passo da prova geométrica requer que atentemos às regras de construção dispostas no *sistema* euclidiano e de teoremas obtidos anteriormente da mesma maneira, e não em considerações sobre a interpretação das proposições matemáticas. No casos de provas de impossibilidade, temos uma situação que queremos mostrar que certa construção não é possível em determinado sistema. "No mundo d'Os Elementos de Euclides não posso perguntar pela trisecção do ângulo mais do que posso procurá-la. Ela não é mencionada"(Wittgenstein 2005, p. 387, tradução nossa) Nesse caso, para essa ser uma prova algorítmica, é necessário que encontremos um sistema mais amplo que permita *decidir* essa questão de maneira algorítmica, como é o caso do problema da impossibilidade de trissecção do ângulo: sua solução não é uma solução no sistema de Euclides, mas sim uma solução na teoria de equações (Floyd 1995, p. 391). Conforme expressa Lampert,

> Provas de não-demonstrabilidade, ou provas de impossibilidade em geral, na forma de provas algorítmicas demonstram que alguns problemas não solúveis de acordo com *dadas* regras aplicadas a algumas formas de expressão. No contexto de provas de não-demonstrabilidade algorítmicas, os 'critérios de não-demonstrabilidade' são critérios de decisão puramente sintáticos. (Lampert 2018, p. 329, tradução nossa)

As provas de indecidibilidade, por sua vez, 'limitam o alcance de provas algorítmicas, desafiando a concepção de prova algorítmica de Wittgenstein' (Lampert 2018, p. 329, tradução nossa). Wittgenstein, dada sua filosofia da matemática, entende que a matemática genuína é feita através de provas algorítmicas, ou seja, os problemas matemáticos genuínos são aqueles problemas matemáticos decidíveis de maneira puramente sintática:

> Uma pergunta apenas faz sentido em um cálculo que nos dê um método para sua solução; e um cálculo pode muito bem nos dar a solução para responder uma pergunta sem nos dar um método para responder outra. Por exemplo, Euclides não nos mostra como procurar pelas soluções de seus problemas; ele nos dá as soluções e, em seguida, demonstra que elas são soluções. (Wittgenstein 2005, p. 387, tradução nossa)

Em síntese, o argumento de Lampert é que, tendo em vista que a prova de Gödel não é uma prova algorítmica, Wittgenstein possui base para rejeitá-la sem alterar sua atitude não-revisionista em filosofia (Lampert 2018, p. 331). Provas metamatemáticas, dessa maneira, dependem de interpretações das fórmulas matemáticas, ou seja, de uma tradução das expressões para a linguagem natural.

Como Wittgenstein considera as provas algorítmicas como as provas matemáticas genuínas, a demonstrabilidade de G definirá as interpretações metamatemáticas possíveis de G, e não o contrário. Isto é, se é possível demonstrar que G não é demonstrável em PM, então G não pode ser parafraseada por 'G não é demonstrável'.

> De acordo com Wittgenstein, é óbvio que a mera suposição da demonstrabilidade de G não pode ser reduzida ao absurdo com base em interpretações metamatemáticas. Ao invés disso, ele reverte a relação: a demonstrabilidade de G restringe as interpretações metamatemáticas em questão, como, por exemplo, a interpretação de G como enunciando sua própria indemonstrabilidade, ao absurdo. (Lampert 2018, p. 336, tradução nossa)

Em seguida, Lampert mostra como a suposição de uma prova metamatemática ocorre na prova de Gödel - tanto sua versão semântica quanto a prova sintática propriamente dita. Seja $\tau_M(\phi)$ a interpretação metamatemática de ϕ, e $\tau_A(\phi)$ a interpretação aritmética de ϕ. Nesse caso, Wittgenstein nega que haja necessariamente uma equivalência entre as interpretações, ao passo que Gödel supõe tal equivalência em sua prova. Conforme expressa Lampert, Wittgenstein rejeita a suposição seguinte (Lampert 2018, p. 337):

$$\text{(i) } \tau_M(G) = \text{T sse } \tau_A(G) = \text{T}$$

Isto é, rejeitando a suposição acima, existe a possibilidade da interpretação de G ser verdadeira aritmeticamente, mas falsa metamatematicamente. A conclusão de Lampert é que a prova de Gödel, ao supor a defininibilidade da noção de 'provabilidade' no sistema PM, utiliza (i) para provar (ii), um resultado que diz respeito a PM:

$$\text{(ii) } \tau_A(G) = \text{T sse} \nvdash \text{G}$$

Assim, conforme afirma Lampert, a prova de Gödel, envolvendo interpretações metamatemáticas sobre o sistema PM, é inadequada enquanto uma prova de impossibilidade genuína, conforme a prova de impossibilidade da trissecção do ângulo:

> De acordo com Wittgenstein, no entanto, apenas provas algorítmicas são incontroversas. Consequentemente, ele é forçado a não desistir da busca por provas algorítmicas com base em uma prova que envolve suposições relativas à interpretação de expressões formais [...] (Lampert 2018, p. 342, tradução nossa)

Assim como no caso de Rodych, o erro de Lampert é atribuir a Wittgenstein uma **tese** filosófica: a natureza das provas matemáticas. No entanto, o que Wittgenstein realiza em RFM I Ap. I, como veremos no capítulo 5, é que ele está apenas diagnosticando o modo como o sistema de PM opera **de fato**, ou seja, não há uma tese geral sobre provas matemáticas.

4.2.5 Resumo dos comentadores

Kienzler, por fim, sumariza bem as posições principais descritas anteriormente:

> ... nós podemos distinguir três tipos de abordagens principais: primeiro, seguir Wittgenstein ao questionar a interpretação de Gödel da frase de Gödel (como defendido, por exemplo, por Stuart Shanker (1988)); segundo, tentar compatibilizar, de alguma maneira, a interpretação de Wittgenstein com a de Gödel (como defendido, por exemplo, por Juliet Floyd (1995)); e, terceiro, a abordagem que faz Wittgenstein criticar e atacar a própria prova do Gödel, ao invés de 'meramente' o que esses comentadores consideram ser sua interpretação (como defendido, por exemplo, por Victor Rodych (1999)) ... (Kienzler e Grève 2016, p. 76-77, tradução nossa)

Dessa maneira, aproveitando para resumir as interpretações anteriores, Shanker pretende mostrar como a interpretação de Gödel sobre sua frase de Gödel leva a um passo inválido em sua prova, da transição da noção de mapeamento para a noção de espelhamento. Floyd, por outro lado, procura separar o resultado matemático da prosa filosófica dos escritos de Gödel, sendo a crítica de Wittgenstein direcionada tão somente à prosa, portanto, a prova não perde sua legitimidade. Steiner, por outro lado, afirma que Wittgenstein ataca diretamente a prova de Gödel, culminando em uma incompatibilidade com seu método não-revisionista em filosofia. Rodych, nessa linha, nega a distinção entre a prosa filósofica e a prova matemática do Teorema de Gödel, e mostra como Wittgenstein, a partir de sua noção formalista construtivista de verdade matemática, está em desacordo direto com a prova de Gödel. Lampert, por fim, mostra como Wittgenstein está confrontando diretamente a prova de Gödel; no entanto, ele também procura mostrar como essa posição é defensável. Abaixo, apresento uma tabela contendo informações básicas sobre a posição de cada comentador em relação aos comentários de Wittgenstein:

Comentadores	W. atacou PTI?	W. entendeu PTI?	A posição de W. é consistente?
Shanker	Não	Sim	Sim
Floyd	Não	Sim	Sim
Rodych	Sim	Não	Não
Steiner	Sim	Não	Não
Lampert	Sim	Sim	Sim

5 WITTGENSTEIN SOBRE GÖDEL: UMA ANÁLISE INICIAL II

Dentre tamanha variedade de interpretações sobre o Apêndice I ao RFM, conforme visto no capítulo 3, é necessário dar um passo atrás e analisar diretamente o texto de Wittgenstein.

5.1 A enigmática introdução linguística ao Apêndice I: §§ 1-4

Ao leitor desinformado de Wittgenstein, as considerações iniciais do Apêndice I podem parecer deslocadas. Afinal, por que Wittgenstein começa seus comentários ao Teorema da Incompletude com considerações linguísticas? No §1, Wittgenstein começa imaginando diferentes tipos de linguagens, em que a forma das frases fosse sempre reduzida a formas de frases enunciativas. Uma pergunta, desse modo, seria substituída pela forma ”Eu gostaria de saber se ...”. O ponto de Wittgenstein, nesse caso, é que, mesmo que fizessemos essa tradução de perguntas em frases enunciativas, não faria sentido perguntar se a frase é verdadeira ou falsa, pois utilizamos ela como uma pergunta, e não como uma afirmação: ”Ninguém diria de tal pergunta (e.g., se está chovendo na rua) que ela é verdadeira ou falsa” (RFM I Ap. I.1).

Tais afirmações fazem mais sentido ao compará-las com o início das *Investigações Filosóficas*, onde Wittgenstein faz suas considerações sobre as relações de uma linguagem e seu uso:

> Quantos tipos de frases existem? Digamos, asserção, perguntas, e comandos? - Existem inúmeros tipos: inúmeros tipos diferentes de usos do que nós chamamos ”símbolos”, ”palavras”, ”proposições”. E essa multiplicidade não é algo fixo, dado de uma vez por todas [...] Aqui o termo ”jogo de linguagem” busca evidenciar o fato que falar uma linguagem é parte de uma atividade, ou de uma forma de vida. (Wittgenstein 2010, p. 11, tradução nossa)

Desse modo, uma pergunta, mesmo que formulada com a forma de uma frase assertiva, não é utilizada como uma frase assertiva, mas sim como uma pergunta.

No §2-3, Wittgenstein trata propriamente das frases assertivas. O ponto do autor é que, em uma frase assertiva, não há uma *adição* do valor de verdade à frase, ou seja, o julgar não é separável do conteúdo do juízo. ”A asserção não é algo adicionado à proposição, mas uma característica essencial do jogo que jogamos” (Wittgenstein et al. 1990, p. 49). Novamente, tal afirmação pode ser lida à luz das *Investigações Filosóficas*, em que o autor rejeita a tese fregeana sobre a separação entre o julgar e o conteúdo do juízo.

> A ideia de Frege que toda asserção contém um suposição, que é a coisa que é asserida, baseia-se realmente na possibilidade encontrada em nossa linguagem de escrever toda proposição na forma: "É asserido que tal e tal é o caso." - "que tal e tal é o caso" não é uma frase na nossa linguagem - na medida em que ela não é um movimento no jogo de linguagem. E se eu escrever, ao invés de "É asserido que ...", "É asserido: tal e tal é o caso", as palavras "É asserido" tornam-se simplesmente supérfluas. (Wittgenstein 2010, p. 10, tradução nossa)

Assim, ao esclarecer os tipos possíveis de frases possíveis a partir de seus usos, Wittgenstein separa as frases assertivas de tal modo que evidenciá-las como uma frase assertiva ou não - "É asserido: tal e tal é o caso" - é supérfluo, pois, como visto, podemos transformar perguntas e comandos em proposições dessa forma, mas isso não as torna assertivas. Concomitantemente, frases assertivas não perdem seu caráter assertivo ao serem escritas como "Tal e tal é o caso", ou seja, retirando o excerto "É asserido". A partir dessa discussão, ele fornece um exemplo iluminador: no xadrez, ganhar não é um movimento a mais no jogo: o ganhar consiste em realizar em um cheque-mate (inversamente, perder consiste em receber um cheque-mate). Da mesma maneira, no jogo das frases assertivas, afirmar a proposição já envolve propô-la como verdadeira.

E no caso das frases aritméticas? No §4, Wittgenstein mostra como frases aritméticas, ainda que não pareçam em um primeiro momento, são semelhantes a frases assertivas, pois consentimos ou dissentimos de equações. No entanto, essa familiaridade logo é dissipada, pois, por exemplo, em comandos também se pode consentir ou dissentir.

> Talvez não seria possível de realizar aritmética sem ter a ideia de enunciar *frases* aritméticas, e nunca ficando surpreso pela similaridade entre uma multiplicação e uma proposição? Não deveríamos sacudir a cabeça, no entanto, como fazemos quando alguém nos diz que está chovendo, quando não está chovendo? - Sim; e aqui ocorre um ponto de conexão. No entanto, também fazemos gestos para parar nosso cachorro, e.g., quando ele se comporta da maneira que não desejamos. (Wittgenstein et al. 1990, p. 49)

O ponto de Wittgenstein nesses parágrafos iniciais é o de levantar dúvidas acerca do uso que fazemos de proposições aritméticas: há diferentes tipos de proposições (§1), e um deles são as frases assertivas (§§2-3). Apesar da semelhança com as frases assertivas, devemos ser cautelosos ao analisá-las e considerar como elas são utilizadas para determinar seu tipo de proposição (§4).

5.2 A proposição do problema: §§ 5-6

Na §5, Wittgenstein finalmente formula a questão respondida por Gödel afirmativamente: "Existem frases verdadeiras no sistema de Russell que não podem ser demonstradas em seu sistema?" (Wittgenstein et al. 1990, p. 50, tradução nossa). Sua proposta é analisar o conceito de **verdade** em vigor no sistema de Russell. Isto é, Wittgenstein pretende investigar o modo como esse conceito está sendo utilizado. Conforme visto, é possível criar diferentes jogos de linguagem, mesmo a partir de conceitos semelhantes em alguns aspectos.

Semelhantemente à linguagem natural, verdade e asserção estão conectadas - " 'p' é verdadeiro = p" (Wittgenstein et al. 1990, p. 50, tradução nossa). No entanto, no caso do sistema de Russell, existe a noção de **asserção legítima**, isto é, como o sistema de Russell é um sistema cujo objetivo é obter teoremas, as asserções legítimas são asserções de teoremas. Teoremas, por sua vez, sempre estão ao fim de alguma cadeia de prova finita cujos membros anteriores são eles próprios teoremas ou derivados de teoremas.

> Assim, nós queremos perguntar algo como: sob que circunstâncias asserimos uma frase? Ou: como a asserção é utilizada no jogo de linguagem? ... Se, então, nós perguntamos neste sentido: "Sob que circunstâncias uma frase é asserida no jogo de Russell?" a resposta é: ao final de uma de suas provas, ou como uma 'lei fundamental'. (Wittgenstein et al. 1990, p. 50)

Isto é, em PM buscamos teoremas. Para introduzirmos novos teoremas em PM, no entanto, devemos nos limitar a introduzir as 'leis fundamentais' ou fórmulas derivadas de 'leis fundamentais' a partir de regras dedutivas. Portanto, a noção de asserção em PM está intrinsecamente associada à noção de ser dedutível a partir de alguma prova.

5.3 O desenvolvimento do problema: §§ 7-9

O próximo passo de Wittgenstein é levantar a possibilidade do conjunto de verdades do sistema aritmético de PM não coincidir com o conjunto de fórmulas demonstráveis, ou seja, o caso em que existam proposições verdadeiras indecidíveis. "Talvez não poderia haver proposições verdadeiras, **que são escritas neste simbolismo**, mas que não são demonstráveis no sistema de Russell?" (Wittgenstein et al. 1990, p. 50, tradução e ênfase nossas). Conforme visto, as proposições verdadeiras em PM são as proposições asseríveis legitimamente, ou seja, escritas em alguma de suas provas.

Já fica claro, nesso ponto, a *localidade* do conceito de verdade: como as proposições verdadeiras são as que podem ser afirmadas em determinado jogo de linguagem, as frases verdadeiras dependem do jogo de linguagem em questão. Assim, as frases verdadeiras em PM são as frases demonstráveis em PM. " 'Proposições verdadeiras', portanto, proposições que são verdadeiras em *outro* sistema, i.e., podem ser asseridas corretamente em outro jogo." (Wittgenstein et al. 1990, p. 50, tradução nossa).

Vejamos como esse conceito de verdade local se comporta no contexto do Teorema da Incompletude, em que se busca uma proposição verdadeira que não pode ser demonstrada. O raciocínio de Wittgenstein no §8 parte da frase de Gödel, aqui denominada 'P', ser autorreferencial, pois ela afirma 'P não é demonstrável'. Pode P ser falsa? Ora, se P for falsa, então $\neg$ P é demonstrável. Se a tradução de P fosse 'P não é demonstrável', então demonstrar ¬ P implica que P é demonstrável, ou seja, 'você irá agora presumivelmente desistir da interpretação que ela não é demonstrável' (Wittgenstein et al. 1990, p. 51, tradução nossa). O que acontece, por outro lado, se P for demonstrável? Nesse caso, pela localidade do conceito de verdade, P é verdadeira. Se P é verdadeira e demonstrável, então também temos que abandonar a tradução de P como 'P não é demonstrável' [1].

5.4 Paradoxos e contradições: §§ 10-13

Depois de retomar o raciocínio do §9, no §11 Wittgenstein descreve o Primeiro Teorema da Incompletude como um paradoxo:

> Suponhamos que eu demonstrei a indemonstrabilidade (no sentido de Russell) de P; dessa forma, por essa prova, demonstrei P. Agora, se essa prova ocorresse no sistema de Russell - eu teria, nesse caso, demonstrado de uma vez que ela pertencia e não pertencia ao sistema de Russell. - É isso que temos ao construir essas proposições. - Há uma contradição aqui! - Bem, então há uma contradição aqui. Ela causa algum dano aqui?[2] (Wittgenstein et al. 1990, p. 51, tradução nossa)

Vamos explorar de maneira detalhada esse parágrafo. Primeiramente, Wittgenstein supõe a demonstração da indemonstrabilidade de P, ou seja, no sistema de Russel, P não é demonstrável. Logo, a proposição 'P não é demonstrável' é verdadeira no sistema de Russel. Portanto, P, que é equivalente a 'P não é demonstrável', é demonstrável em PM. Assim, temos uma contradição: P é demonstrável em PM e P não é demonstrável em PM. Desse modo, Wittgenstein está tratando o Teorema da Incompletude de maneira análoga ao paradoxo do mentiroso, que é mencionado no parágrafo imediatamente posterior, o §12: "Há algum perigo na contradição que surge quando alguém diz: "Estou mentindo. - Então, não estou mentindo. - Então, estou mentindo. - etc."? ... É um jogo de linguagem com alguma similaridade ao jogo de luta de dedão." (Wittgenstein et al. 1990, p. 51, tradução nossa).

Como Wittgenstein trata o paradoxo do mentiroso e, em geral, o surgimento de contradições em geral na matemática? Conforme visto em 3.1, Wittgenstein não dá caráter absoluto às leis lógicas, portanto, pode haver sistemas em que contradições são permitidas. Não há perigo em aceitar contradições e paradoxos em um sistema lógico, a não ser pelo fato de não sabermos o que fazer com esse sistema - ou seja, ele é inútil para nossos propósitos. Portanto, conforme Wittgenstein afirma imediatamente depois, no §13, "Tal contradição

1 Repare que a minha interpretação do 'parágrafo notório' de Wittgenstein - como denominado por Floyd e Putnam - consegue dar sentido ao texto sem precisar de suposições adicionais, como a atribuição de um diagnóstico matemático sobre sistemas ω-inconsistentes da parte de Wittgenstein.

2 Texto original: "Nehmen wir an, ich beweise die Unbeweisbarkeit (in Russell's System) von P; so habe ich mit diesem Beweis P bewiesen. Wenn nun dieser Beweis einer in Russell's System wäre, - dann hätte ich also zu gleicher Zeit seine Zugehörigkeit und Unzugehörigkeit zum Russell'schen System bewiesen. - Das kommt davon, wenn mann solche Sätze bildet. - Aber hier ist ja ein Widerspruch! - Nun so ist hier ein Widerspruch. Schadet er hier etwas?".

só é de interesse porque ela atormentou as pessoas...” (Wittgenstein et al. 1990, p. 52, tradução nossa), isto é, a contradição em si não possui interesse, pois ela faz parte de um jogo do qual não sabemos o que fazer.

5.5 A geometria das provas: §§ 14-17

No §14, Wittgenstein caracteriza o que seria uma prova de impossibilidade. Nesse caso, é enfatizado que provas de impossibilidade servem para nos fazer desistir da busca - daquilo que é demonstrado ser impossível obter. A comparação com a impossibilidade de trisecção do ângulo tem o objetivo de mostrar como uma prova de impossibilidade *deve* se comportar, ou seja, é necessário que haja uma prova que nos determine a parar a busca. No caso do Teorema de Gödel, no entanto, se há uma contradição, então ela não se comporta como uma prova de impossibilidade genuína, pois ”[u]ma contradição é inutilizável como tal previsão” (Wittgenstein et al. 1990, p. 52).

No §15, Wittgenstein comenta sobre a noção de ’demonstrabilidade’, e como ela está atrelada ao sistema matemático no qual ela é utilizada:

> Se algo é chamado corretamente da proposição ”X é indemonstrável” depende de como nós demonstramos essa proposição. A prova ela própria mostra o que conta como o critério de indemonstrabilidade. A prova é parte do sistema de operações, do jogo, no qual a proposição é utilizada, e nos mostra seu ’sentido’. [3] (Wittgenstein et al. 1990, p. 52, tradução nossa)

Essa seção, embora não tão explorada, é tão importante quanto as observações de Wittgenstein sobre a *localidade* do conceito de verdade. Assim como no caso de ’verdadeiro’, ’demonstrável’ é uma noção *local*, ou seja, faz sentido apenas definir ’demonstrável em PM’. Além disso, o que irá mostrar o sentido de ’demonstrável em PM’ é puramente *sintático*, ou seja, são os passos possíveis em PM que mostram aquilo que não é possível obter em PM.

Dessa maneira, fica claro o seguimento do raciocínio de Wittgenstein no §16:

> A frase ”P é indemonstrável” tem um sentido diferente depois - em relação a antes de demonstrada.
>
> Se ela foi demonstrada, então ela é o padrão terminal na prova de indemonstrabilidade. - Se ela não foi demonstrada, então *o quê* conta como critério de sua verdade ainda não está *claro*, e - podemos dizer - seu

[3] Texto original: "Ob etwas mit Recht der Satz genannt wird ”X ist unbeweisbar”, hängt davon ab, wie wir diesen Satz beweisen. Nur der Beweis zeigt, was als das Kriterium der Unbeweisbarkeit gilt. Der Beweis ist ein Teil des Systems von Operationen, des Spiels, worin der Satz gebraucht wird, und zeigt uns seinen ’Sinn’.".

> sentido ainda está velado. [4] (Wittgenstein et al. 1990, p. 52, tradução nossa)

Por que o sentido da proposição muda depois de ser demonstrada? Ora, o sentido da proposição é dado sintaticamente, pelas regras de transformação utilizadas para chegar até ela; logo, seu sentido só será esclarecido depois de, de fato, elaborar a prova que define os termos com os quais a proposição irá lidar. Por outro lado, se ela não foi demonstrada, isso significa que as regras a que essa proposição - e, portanto, a prova dessa proposição - está submetida ainda não foram definidas, ou seja, não há um sistema que englobe essa prova. Em síntese, Wittgenstein conclui:

> Uma vez que a prova tenha sido construída, isso criou uma *nova situação*: e agora temos que decidir se nós chamaremos *isso* de prova, (uma prova *adicional*), ou se ainda chamaremos *esse* como o enunciado de indemonstrabilidade. (Wittgenstein et al. 1990, p. 53, tradução nossa)

Isto é, ao demonstrar que P não é demonstrável, há uma decisão que precisa ser feita: ou chamamos a nova prova de uma prova em PM, e, nesse caso, alteramos o significado de P em PM, ou mantemos o significado de P, e, nesse caso, a prova de não-demonstrabilidade não é uma 'prova' no sentido estabelecido por PM. Uma terceira via, que seria manter o significado de P e integrar a prova de não-demonstrabilidade a PM culmina em uma contradição, caso no qual Wittgenstein também não vê problemas posteriores, apenas "o medo superticioso e o temor dos matemáticos frente às contradições" (Wittgenstein et al. 1990, p. 53, tradução nossa).

Sendo assim, o problema da prova como exposta por Gödel está em ele não considerar as diferentes possibilidades de interpretação de seu teorema: visto da maneira como Wittgenstein elabora, não podemos fazer uso da proposição G "a não ser por esses truques" (Wittgenstein et al. 1990, p. 53, tradução nossa).

5.6 Proposição e uso: §§ 18-20

Nos §§18-20, Wittgenstein reforça seu ponto sobre a localidade da noção de prova matemática, utilizando uma analogia iluminadora:

> Você diz: "..., então, P é verdadeira e indemonstrável". Isso, presumivelmente, significa: "Portanto, P.". Isto não é problema para mim - contudo, com que propósito você escreve essa 'afirmação'? (É como se alguém extraísse a partir de certos princípios sobre formas naturais e estilos arquitetônicos a ideia que no Monte Everest, onde ninguém pode morar, pertencia um chalé no estilo Barroco). [5] (Wittgenstein et al. 1990, p. 53, tradução nossa)

[4] Texto original: "Der Satz "P ist unbeweisbar" hat einen andern Sinn, nachdem - als ehe er bewiesen ist. Ist er bewiesen, so ist er die Schlußfigur des Unbeweisbarkeitsbeweises.- Ist er unbewiesen, so ist ja noch nicht *klar*, *was* als Kriterium seiner Wahrheit zu gelten hat, und sein Sinn ist - kann man sagen - noch verschleiert.".

[5] Texto original: "Du sagst: "..., also ist P wahr und unbeweisbar," Das heißt wohl: "Also P". Von mir aus - aber zu welchem Zweck schreibst du diese 'Behauptung' hin? (Das ist, als hätte jemand aus

Isto é, dado que 'verdadeiro' é um conceito local, ou seja, 'verdadeiro' deve ser indexado sempre por 'verdadeiro em ϕ', então o que significa dizer que 'P é verdadeiro' *simpliciter*? Da mesma maneira que não faz sentido desconsiderar o local de instalação de uma casa ao considerar seu estilo, não faz sentido dizer que uma proposição é verdadeira sem localizá-la em um sistema matemático específico. É importante enfatizar novamente, não estamos atribuindo a Wittgenstein uma tese filosófica sobre a relatividade da verdade: seu *insight* sobre a localidade da verdade é apenas baseado em uma análise de como "ser verdadeiro"se comporta em PM, ou seja, ele está se baseando na lógica de Russell.

Em síntese, a leitura detalhada do Apêndice I ao RFM mostra que os comentários de Wittgenstein são melhor apreciados ao compará-los com obras como *Investigações Filosóficas*, e possuindo cautela ao atribuir teses filosóficas a Wittgenstein. Temos que ter em mente que Wittgenstein procura realizar uma análise pré-filosófica e neutra do Teorema da Incompletude, e para isso ele se baseia em uma análise do comportamento do sistema lógico PM. Por fim, a lição de Wittgenstein é que Gödel, utilizando a noção de "verdadeiro", incorreu em um erro ao utilizar este conceito de maneira diferente de como ele é utilizado em PM, ou seja, ele utilizou "ser verdadeiro" de maneira ilegítima.

5.7 Wittgenstein: um semântico sem semântica

Para finalizar nossa leitura do Apêndice I de RFM, desenvolverei a interpretação de (Marcos 2010), uma solução simples, mas que captura um aspecto pouco explorado dentre os demais comentadores: o aspecto de que Wittgenstein não pretende defender teses filosóficas, mas sim analisar de maneira neutra o status quo da lógica-matemática, o *Principia Mathematica.* Conforme visto, Wittgenstein procura enfatizar os aspectos locais dos termos "verdade", "demonstrável", "número", entre outros conceitos matemáticos em PM. A explicação para isso é que Wittgenstein, baseando-se na lógica-matemática de Russell e Frege, ainda não possui uma distinção formalizada entre **sintática** e **semântica**. Isto é, a lógica desenvolvida até então era puramente uma sintática, ao passo que a dita "semântica"seria um passo além do sistema matemático, e envolveria noções que não estamos autorizados a utilizar, pois os termos matemáticos são definidos de maneira puramente sintática.

Assim, o que Wittgenstein está fazendo é uma análise gramatical e colocando os termos matemáticos no seu devido lugar: a semântica, neste contexto, é "inefável"(Marcos 2010, p. 26), ou seja, não há maneira alguma de pensar "ser verdadeiro em PM", por exemplo, a não ser que tomemos verdadeiro = demonstrável. Não estamos supondo uma **equivalência** entre duas noções distintas (Marcos 2010, p. 26), pois isso seria uma petição de princípio por parte de Wittgenstein; o que ele realiza, de fato, é analisar que tipo de proposições matemática podemos afirmar legitimamente: neste caso, *sobre* PM só é legítimo afirmar o

gewissen Prinzipien über Naturformen und Baustil abgeleitet, auf den Mount Everest wo niemand wohnen kann, gehöre ein Schlößchen im Barockstile.)".

que demonstramos em PM, ou seja, aquilo que adquire sentido através da sintaxe de PM, e não a partir de uma suposta análise semântica, que iria além da sintaxe de PM.

> Tudo que lhe resta afirmar então é que a interpretação de G, como a de qualquer outra proposição matemática, extrai o seu significado de sua própria demonstração, pois, "em matemática, processo e resultado são equivalentes."(Foundations I-82; cf. também Tractatus, 6.1261). Uma primeira recomendação de Wittgenstein surge no sentido de que nos esforcemos por tornar mais claro o que queremos dizer com "ser demonstrável". (Marcos 2010, p. 26)

Dessa maneira, podemos reunir as observações *prima facie* incongruentes sobre a proposição que afirma sua própria indemonstrabilidade. Em um primeiro momento, em RFM I Ap. I.1-4, Wittgenstein levanta dúvidas sobre o modo como devemos encarar as proposições matemáticas: podemos estar simplesmente enganados ao tentar traduzir a proposição matemática G como uma **asserção** que afirma "não sou demonstrável", e possa ser tomada como verdadeira ou falsa, afinal, a única relação permitida para G é "ser demonstrável em PM". Por outro lado, em RFM I Ap. I.7-9, Wittgenstein considera a possibilidade de G não ser demonstrável em PM, mas ser verdadeira em outro sistema. Ora, dada a inefabilidade da semântica, a única maneira que podemos falar *sobre* G é através da sintaxe de PM, ou seja, pela relação de demonstrabilidade. Logo, ao afirmar que G é verdadeira em outro sistema, simplesmente estamos tratando de outro jogo, e a identidade de G não é garantida, pois as regras do jogo são diferentes, logo, o sentido de G é diferente.

Por fim, Wittgenstein considera a possibilidade de G ser demonstrável em PM em RFM I Ap. I.10-13. Neste caso, teríamos uma versão semelhante ao Paradoxo do Mentiroso, pois, como visto, verdade e demonstrabilidade são colapsados em PM. Assim, PM seria um sistema contraditório. Sendo um sistema contraditório, as regras de PM seriam alteradas, logo, o sentido de G seria alterado também (Marcos 2010, p. 26).

Em síntese, Wittgenstein está chamando a atenção a um aspecto importante da lógica-matemática de Frege e Russell, em que a semântica não possui um lugar matemático desenvolvido. À matemática cabe apenas a análise sintática dos sistemas lógicos. Desse modo, Gödel, ainda que sua prova esteja correta, cometeu um deslize ao buscar noções semânticas inalcançáveis ao seu sistema e supor ter encontrado uma proposição que fosse verdadeira, mas não demonstrável em PM.

Agora podemos entender porque Wittgenstein pensa que há lugar para uma análise filosófica para o Teorema da Incompletude. Ainda que a prova matemática permaneça como estava no início, a terapia filosófica que Wittgenstein desenvolve permite dissolver concepções errôneas sobre a prova. Também Rodych, Steiner e Lampert, ao interpretarem Wittgenstein como sustentando teses filosóficas robustas, não capturaram o fato de que Wittgenstein realiza uma análise de PM, e não de sua alegada filosofia da matemática, para afirmar a igualdade entre verdade e demonstrabilidade em PM.

O desenvolvimento da lógica, no entanto, mostrou como podemos "domesticar" as noções semânticas de maneira formalizada, e como o Teorema da Incompletude é instanciado por proposições menos controversas que a proposição G. O capítulo a seguir contará a história destes desenvolvimentos e veremos, à luz desses resultados, se Wittgenstein realmente consegue permanecer matematicamente neutro.

6 CRÍTICAS A WITTGENSTEIN

Podemos pensar em algumas objeções que podem ser levantadas contra a perspectiva de Wittgenstein. O que veremos ao analisar tais críticas é que muitas vezes não é simples separar a **prosa filosófica** da **prova matemática**, e alguns resultados lógico-matemáticos posteriores podem nos fazer reavaliar as conclusões wittgensteinianas.

6.1 O Desenvolvimento da Semântica

A primeira objeção que podemos formular à construção wittgensteiniana da prova da incompletude se baseia nos resultados posteriores do desenvolvimento da semântica da lógica de primeira ordem. Conforme visto anteriormente, Gödel ainda trabalhava com noções sintáticas de **demonstrabilidade**, **consistência**, etc. Por outro lado, **verdade** não é uma noção formalizada por Gödel, e sua conclusão é que a proposição indecidível é verdade por considerações metamatemáticas, ou seja, um conceito de verdade não formalizado. Tarski, algum tempo depois, iniciou o desenvolvimento da semântica: seu objetivo era formalizar o conceito de verdade.

> O presente artigo dedica-se quase inteiramente a um único problema: *a definição de verdade*. Sua tarefa é construir - com referência a uma dada linguagem - uma *definição materialmente adequada e formalmente correta da expressão "sentença verdadeira"*. (Tarski 2007, p. 19)

Assim, vale a pena fazer uma regressão ao contexto tarskiano e analisarmos o caminho pelo qual ele fez essa formalização e chegou ao Teorema da Indefinibilidade da Verdade, em que ele mostrou que não é possível **definir** a noção de verdade aritmética nos sistemas formais indecidíveis, ou seja, é possível formalizar a noção "verdadeiro em PM", e esta noção não é a mesma que "demonstrável em PM". Por conta disso, conforme a objeção pode seguir, Wittgenstein falhou ao pensar que nao há distinção entre "verdadeiro em PM"e "demonstrável em PM", pois foi demonstrado que essas duas noções não podem coincidir.

A investigação sobre as condições para uma proposição ser verdadeira, e, de maneira geral, o que é verdadeiro, é uma investigação que remonta à filosofia grega e é uma investigação que envolve não apenas lógica, mas também ontologia. Nossa história, no entanto, começa muito tempo depois: a proposta de formalizar esse conceito, e tratá-lo de maneira matemática surge com força no século XX, iniciado pelos trabalhos de Alfred Tarski.

A motivação inicial disso está relacionada com o Teorema da Incompletude: conforme visto, há um paralelo entre o Paradoxo do Mentiroso e a proposição indecidível de

Gödel: por um lado, o Paradoxo do Mentiroso pode ser formulado como "Eu não sou verdadeira"; por outro lado, o Teorema da Incompletude, ao traduzi-lo para a metalinguagem, seria uma afirmação do tipo "Eu não sou demonstrável".

No caso da frase "Eu não sou verdadeira", no entanto, precisamos ter cautela: facilmente, ao permitir que afirmemos a Frase do Mentiroso, geramos um paradoxo: a frase é verdadeira, se, e somente, ela não é verdadeira. Pelo princípio da bipolaridade, uma frase é ou verdadeira ou falsa. Logo, deduzimos uma contradição: a frase é verdadeira e falsa. Tarski se viu diante de tal antinomia ao tentar formular uma definição de verdade na linguagem natural, e buscou evitá-la com os aparatos formais que a lógica clássica tem a oferecer (Tarski 2007, p. 25).

Assim, ele deu o primeiro passo para uma **matematização** da noção de verdade. Com efeito, na linguagem natural afirmamos, por exemplo "O que João afirmou é verdadeiro", e não qualificamos a expressão "ser verdadeiro". Esta **universalidade** provoca as antinomias (Tarski 2007, p. 32), e Tarski busca resolvê-las ao tornar o conceito de "verdadeiro"um conceito local, ou seja, o conceito matemático relevante de "ser verdadeiro"deve ser tal que só se possa afirmar qualificadamente: "é verdadeiro *em PM*", assim como no caso de "ser demonstrável", temos que especificar o sistema no qual a proposição é demonstrável. Assim, após considerar a linguagem coloquial e mostrar que ela é inconsistente, Tarski afirma

> Pelas razões apresentadas na seção precedente, abandono agora a tentativa de resolver nosso problema para a linguagem cotidiana e restrinjo-me, daqui em diante, inteiramente às *linguagens formalizadas*. (Tarski 2007, p. 33)

Ao considerar a definição formal de verdade, no entanto, Tarski se depara com a mesma discussão em que Wittgenstein discordara de Gödel: devemos definir "ser verdadeiro em K"como sendo igual a "ser demonstrável em K"? Tarski rejeita categoricamente tal proposta:

> À primeira vista, pode parecer que, no presente estágio de nossa discussão, o problema possa ser resolvido sem dificuldades adicionais, que "sentença verdadeira"com respeito à linguagem de uma ciência dedutiva formalizada não signifique nada além de "teorema demonstrável"[...] Porém, uma reflexão mais atenta mostra que essa concepção deve ser rejeitada pelas seguintes razões: nenhuma definição de sentença verdadeira que esteja de acordo com o uso ordinário da linguagem que esteja de acordo com o uso ordinário da linguagem deve ter quaisquer consequências que contradigam o Princípio do Terceiro Excluído. Esse princípio, contudo, não é válido no domínio das sentenças demonstráveis. (Tarski 2007, p. 54)

Assim, a resposta de Tarski pode ser resumida do seguinte modo: a noção de verdade obedece incodicionalmente ao Princípio do Terceiro Excluído, ou seja, uma sentença é verdadeira ou sua negação é verdadeira - não pode ser o caso que uma sentença e sua negação sejam ambas falsas (Tarski 2007, p.66). Por outro lado, o conjunto de sentenças demonstráveis não obedece ao Princípio do Terceiro Excluído em virtude da existência de proposições indecidíveis (Tarski 2007, p. 67). Logo, estes conjuntos não podem ser o mesmo, pois a classe de proposições verdadeiras é maior do que a classe de proposições demonstráveis. Em outras palavras, o conjunto das fórmulas aritméticas é consistente é completo, ao passo que a classe de fórmulas é consistente mas não é completo.

Assim, Tarski consegue demonstrar a partir de uma análise semântica formal que o conjunto de fórmulas demonstráveis não é o mesmo que o conjunto de fórmulas verdadeiras. O resultado semântico principal que Tarski introduz é o *Teorema da Indefinibilidade da Verdade*, segundo o qual "Nenhuma extensão consistente de Q contém seu próprio predicado verdade"(Cardoso 2018, p. 196).

Em síntese, Tarski conseguiu formalizar o conceito de ser verdadeiro para sistemas aritméticos finitos e infinitos, e obteve a partir disso a versão semântica do Teorema de Gödel, segundo a qual não se pode *definir* o predicado verdade na própria linguagem-objeto sem que isso tenha como consequência um sistema inconsistente. Conforme afirma Guilherme,

> Assim, diferentemente dos resultados anteriores (indecidibilidade e incompletude), o Teorema da Indefinibilidade impõe um limite sobre uma noção semântica, a noção de definibilidade.
>
> Note que a indefinibilidade atinge as teorias aritméticas consistentes de cima para baixo, da mais forte até a mais fraca [...] Por outro lado, o teorema da indecidibilidade diz respeito a todas as teorias de primeira ordem, portanto, atinge todas as extensões consistentes de Q (de baixo para cima). (Cardoso 2018, p. 196)

Dessa maneira, a objeção que pode ser feita a Wittgenstein é que ao afirmar que "verdadeiro = demonstrável", Wittgenstein comete um erro ao pensar que a noção de verdade não poderia ser formalizada, e que, por isso, a única noção matemática legítima para ocupar a posição de fórmula verdadeira seria a de fórmula demonstrável. O desenvolvimento da semântica formal, portanto, mostrou que o argumento de Gödel, que em um primeiro momento utilizou uma noção informal de verdade, não era supérfluo nem inútil, pois Tarski foi capaz de mostrar que a noção de ser verdadeiro não é, de fato, definível na linguagem aritmética, ao passo que ser demonstrável sim, de acordo com o *Teorema da Indefinibilidade da Verdade*.

Wittgenstein, no entanto, consegue manter sua posição firme frente a tal objeção: conforme visto, ele equipara verdadeiro em PM = demonstrável em PM por conta da localidade dos conceitos matemáticos: o sentido das fórmulas dependerá de suas regras de construção no sistema em questão (PM), ou seja, não faz sentido afirmar que uma fórmula que não é demonstrável em PM seja verdadeira (de acordo com quais critérios ela será verdadeira?). Assim, mesmo que Tarski tenha mostrado que é possível definir "ser verdadeiro em PM", a noção legímita de "ser verdadeiro em PM", segundo Wittgenstein, é a noção puramente sintática de "ser demonstrável", pois o *sentido* em que a proposição é verdadeira por critérios distintos dos métodos demonstrativos de PM é outro sentido daquele sentido legítimo de verdade como asserção.

> "Mas não haverá frases verdadeiras que são escritas nesse simbolismo, mas que não são demonstráveis no sistema de Russell?- "Frases verdadeiras", portanto, frases que são verdadeiras em outro sistema, i.e. podem ser corretamente afirmadas em outro jogo. [...] e uma frase que não pode ser demonstrada no sistema de Russell é "verdadeira"ou "falsa"em um sentido distinto de uma frase do *Principia Mathematica*. (RFM I Ap. I.7)

O argumento de Tarski, no entanto, mostrou que o conjunto das sentenças verdadeiras é estritamente maior do que o conjunto das sentenças demonstráveis. Para Wittgenstein rejeitar este resultado, ele teria que rejeitar a suposição de que o conjunto das sentenças verdadeiras é completo ou a prova da proposição aritmética indecidível, que são resultados consolidados em lógica-matemática. Na seção seguinte, veremos casos que não envolvem autorreferencialidade de proposições indecidíveis, e, em seguida, analisaremos com detalhe o Lema Diagonal para verificar se é necessário supor algum tipo de autorreferencialidade nesta prova.

6.2 Casos Concretos de Proposições Indecidíveis

A segunda objeção a Wittgenstein se baseia em casos concretos de proposições indecidíveis nos sistemas aritméticos consistentes capazes de representar funções recursivas. Com efeito, Wittgenstein critica a interpretação de G como "Eu não sou demonstrável", e isso é utilizado como argumento para mostrar que tal proposição não possui uso, uma autorreferencialidade artificial. O que dizer, no entanto, de proposições que não são autorreferenciais, pelo contrário, são proposições que dizem respeito a propriedades numéricas, mas são indecidíveis?

Já possuímos, de fato, exemplos de Teoremas indecidíveis na matemática que são enunciados usuais de propriedades matemáticas: o Teorema de Paris-Harrington é um exemplo consagrado.

> O Teorema de Paris-Harrington é uma pequena variação do Teorema de Ramsey. De acordo com o Teorema de Ramsey, se você tem um conjunto infinito e você designar uma cor, digamos, azul ou vermelho, arbitrariamente para cada um dos pares dos membros do conjunto, então você pode encontrar um subconjunto infinito, dos quais todos os pares são azuis ou todos os pares são vermelhos. [...] Paris e Harrington desenvolveram uma versão finita do Teorema de Ramsey. (Kolata 1982, p. 779, tradução nossa)

Como podemos observar o Teorema de Paris-Harrington é indecidível nos sistemas finitários em que Gödel demonstrou a Incompletude, no entanto, este Teorema não é nada como a proposição indecidível de Gödel: seu conteúdo diz respeito à análise combinatória, e não possui caráter paradoxal nenhum. A objeção que pode ser formulada, nesta direção, é que Wittgenstein, ao alegar que a proposição G depende de sua construção autorreferencial artificial para demonstrar sua indecidibilidade, então outros casos de proposições indecidíveis mostra que isso não é essencial para obtermos os resultados limitativos.

A resposta a isso envolve retomarmos a argumentação de Wittgenstein em RFM I Ap. I: com efeito, Wittgenstein não quer questionar a prova matemática de Gödel, mas sim sua prosa filosófica em torna da prova. A prosa filosófica gira em torno de tomarmos a proposição de Gödel como verdadeira ou não e decidirmos metamatematicamente por sua correção. É isto que Wittgenstein questiona. No entanto, ao analisar o Teorema de Paris-Harrington, o que se faz é simplesmente demonstrar sua indecidibilidade; não se busca mostrar "por considerações metamatemáticas"que o Teorema é verdadeiro. Casos concretos de proposições indecidíveis, portanto, não são problemas para Wittgenstein, mas sim fornecem mais evidência da anomalia da proposição G: é apenas sobre ela que podemos decidir metamatematicamente sua verdade?

6.3 Objeções

6.3.1 A objeção rosseriana: a prova não requer suposição de ω-consistência

Conforme visto no capítulo 2, podemos descartar a noção de ω-consistência e supor apenas a consistência do sistema. Uma das interpretações de RFM I Ap. I, no entanto, é que Wittgenstein está mostrando como a rejeição da suposição de ω-consistência nos leva a um sistema aritmético não *standard*, de modo que interpretar as proposições aritméticas em seu sentido usual já não nos é mais autorizado.

Se podemos reconstruir o argumento de Gödel sem a hipótese de ω-consistência, no entanto, qual a força dessa reconstrução de Wittgenstein? Em primeiro lugar, devemos entender como tal reconstrução ocorre. Conforme visto no capítulo 2, o Lema Diagonal gera uma proposição G tal que $\vdash$ G $\leftrightarrow\neg\exists$ Prf(x,[G]). Na aritmética standard, interpretamos Prf(x,y) como "x é o código da prova da fórmula de código y", assim, a sentença G pode ser traduzida como "não existe prova de G"; logo, ela afirma de si própria "eu não sou demonstrável". Para gerar o Primeiro Teorema da Incompletude a partir dessa diagonalização, no entanto, é preciso supor que a teoria é ω-consistente para poder mostrar que a sentença G não é refutável (7, p. 288). O ponto de Wittgenstein, no entanto, parece ser que ao considerarmos a possibilidade de G ser refutável, estamos abandonando a interpretação de G como "G não é demonstrável":

> Agora o que o seu "suponha que é falso"significa? *No sentido de Russell* significa "suponha que o oposto foi demonstrado no sistema de Russell"; *se esta é sua suposição*, você presumivelmente abandonará a interpretação que ela é indemonstrável. (RFM I Ap. I.8)

Rosser, no entanto, apresenta uma outra proposição R, que não necessita da noção de ω-consistência, que iremos reconstruir a partir da relação "Ref(x,y)", que pode ser traduzida como "x é o código da prova da refutação da fórmula de código y"(7, p. 286):

$$\vdash \mathrm{R} \leftrightarrow \forall \mathrm{y}((\mathrm{Prf}\ (\mathrm{y}, [\mathrm{R}]) \rightarrow \exists_{z<y}\ \mathrm{Ref}(\mathrm{z}, [\mathrm{R}]))$$

No caso da proposição de Rosser R, ela já não afirma o mesmo que G: de fato, ela afirma que se há prova de R, então há prova da refutação de R:

> Assim, uma sentença de Gödel "diz de si mesma"que ela é indemonstrável, e uma sentença de Rosser "diz de si mesma que", se houver uma testemunha de sua demonstrabilidade, então há uma testemunha anterior de sua refutabilidade. (7, p. 286)

Assim, a objeção que poderia ser feita a Wittgenstein é que sua análise, ao considerar uma situação que não é necessária para gerar a indecidibilidade, precipitou-se em sua conclusão de que o Teorema de Gödel é semelhante ao Paradoxo do Mentiroso (RFM I Ap. I.12)

No entanto, a argumentação de Wittgenstein se volta para a relação entre a afirmação de uma proposição (em PM) e sua demonstrabilidade (em PM), de modo que ainda seria possível levantar o mesmo problema de G para R:

> Suponhamos que eu tenha demonstrado a indemonstrabilidade (no sistema de Russell) de P[G]; então, por esta prova, demonstrei P[G]. Agora, se esta prova fosse uma no sistema de Russell - eu teria demonstrado de uma só vez que ela pertence e não pertence ao sistema de Russell. - É isso que acontece ao criarmos tais frases. - Mas há uma contradição aqui! Bem, então há uma contradição aqui. Ela causa algum dano aqui? (RFM I Ap. I.11)

Assim, no caso de G, denominado de P por Wittgenstein, que é traduzido por "eu não sou demonstrável", se for demonstrado que P não é demonstrável, então a proposição P pode ser asserida em PM, pois foi demonstrado que P. Logo, o que está em jogo neste momento posterior é apenas a noção de contradição, e não a noção de ω-inconsistência.

No caso de R, no entanto, que é traduzido como "se eu sou demonstrável, então eu sou refutável", a suposição da indemonstrabilidade de R em PM não gera tal paradoxo *prima facie*, pois a indemonstrabilidade seria apenas a negação do antecedente.

Provas alternativas do Teorema da Incompletude complexificam a discussão sobre os comentários de Wittgenstein e nos incitam a estipular como Wittgenstein responderia a tais objeções. No entanto, os resultados de Rosser e Tarski ainda não tinham sido apropriados por Wittgenstein no período de escrita de RFM, portanto, uma construção destes argumentos ainda fica no plano especulativo. No entanto, uma noção que Wittgenstein já trabalhava em relação ao Teorema da Incompletude diz respeito à autorreferência, um aspecto muito importante para o Paradoxo do Mentiroso, que investigaremos em seguida se também possui um papel importante no caso do Teorema de Gödel.

6.3.2 A objeção de Steiner-Rodych: a prova não é autorreferencial

Uma outra objeção recorrente nos comentadores de Wittgenstein sobre a Incompletude diz respeito à autorreferencialidade da prova: conforme eles reconstroem Wittgenstein, seu argumento *contra* o Teorema de Gödel pressupõe que a prova se trate de uma proposição autorreferencial. Podemos mostrar, no entanto, como o Teorema da Incompletude não depende da autorreferencialidade e sim do Lema Diagonal. Neste caso, quão relevantes são os comentários de Wittgenstein? O Lema Diagonal ainda pressupõe algum tipo de autorreferencialidade?

Para responder a esta questão, temos que determinar se o Lema Diagonal é uma prova puramente sintática, ou se envolve noções semânticas: a autorreferencialidade, sendo um caso particular de referência, é uma noção semântica. Sendo assim, se o Lema Diagonal for uma prova puramente sintática, a prova de Gödel não envolve autorreferencialidade.

Vejamos novamente o Lema Diagonal envolvido na prova de Gödel:

> Seja Σ uma extensão qualquer de Q. Assim, para qualquer fórmula B(y) na linguagem de Σ em que apenas a variável y ocorre livre, existe uma sentença G, tal que, $\Sigma \vdash$ G $\leftrightarrow B([G])$.(Cardoso 2018, p.171)

A prova do Lema Diagonal, neste caso, não pressupõe autorreferencialidade, pois ela faz, antes, uma equivalência entre duas fórmulas da linguagem:

> Uma primeira observação a respeito do Lema Diagonal Fraco é que justamente aquela que justifica o termo "fraco"na sua denominação. [...] no caso Lema Fraco, temos uma equivalência material entre as sentenças G e A([G]). No Lema Fraco não temos, a rigor, autorreferência, pois não temos uma sentença que diz algo de si mesmo, que refere-se a si mesma, mas apenas uma sentença que equivale a outra sentença que se refere à primeira. (Cardoso 2018, p. 173-4)

Portanto, como a prova não pressupõe autorreferência, Wittgenstein estaria errado ao compará-la ao Paradoxo do Mentiroso e pressupor que a prova depende da interpretação de G na metalinguagem como afirmando "eu não sou demonstrável".

Há outras versões do Teorema da Incompletude que também não pressupõem autorreferencialidade. O primeiro caso é a prova de Kleene. Stephen Cole Kleene propôs uma prova bastante elegante de uma versão do Primeiro Teorema de Gödel, apresentando-o como um corolário de seu Teorema da Forma Normal (Epstein e Carnielli 2000, p.183-4). A prova envolve diagonalização, mas não autorreferência. Peter Smith explica esta conexão em duas páginas em (44). Segundo Peter Smith, é a diagonalização, e não a autorreferência, que pode ser considerada característica de provas de incompletude típicas (embora não todas).

> Há uma derivação familiar do Teorema de Gödel a partir da prova da diagonalização da insolubilidade do Problema da Parada. Aquela prova, no entanto, ainda envolve um tipo de truque autorreferencial, já que, com efeito, construímos uma sentença que afirma 'o algoritmo que busca

> por uma prova de mim não para'. É importante destacar, então, que alguns dos resultados principais na teoria das funções recursivas parciais derivam diretamente o Teorema da Incompletude de Gödel sem quaisquer outros truques autorreferenciais. (44, p. 1, tradução nossa)

Saul Kripke deu uma prova alternativa do Primeiro Teorema de Gödel em 1984. Esta prova usa pouca teoria de recursão, em vez disso usa modelos não-standard. Hilary Putnam publicou esta prova em (Putnam 2000), e Kripke não gostou nada[1]. Kripke deu uma outra versão dessa prova no CLE no Workshop "Semantics and Meaning"em 2005, mas pediu a Carnielli que não fosse publicada. Esta prova contém argumentos inéditos, mas por ora permanece privada.

6.3.3 A prova de Gödel x A Prova de Gödel

Tais desenvolvimentos da lógica parecem desafiadores à análise de Wittgenstein sobre o Teorema da Incompletude. No entanto, uma das virtudes da minha interpretação é a de poder respondê-las - ainda que não seja possível resolvê-las imediatamente - a partir de uma única consideração: ora, o que Wittgenstein realiza é uma análise de como o Teorema de Gödel se comporta em PM **de acordo com a prova de Gödel publicada em 1931**. Isto é, sua análise pré-filosófica se baseia nos pressupostos da prova original de Gödel. Resultados posteriores como o desenvolvimento da semântica não estão no escopo da análise de Wittgenstein, afinal, ele não pretende legislar nada na matemática. Portanto, a questão a ser respondida é: *nos termos da prova original de Gödel*, a diagonalização pressupõe autorreferência? A proposição G é a única indecidível? A prova utiliza que conceito de consistência?

Em síntese, a prova de Gödel é rica em desenvolvimentos posteriores e a situação se complexificou ainda mais com resultados adicionais. No entanto, a Prova de Gödel de 1931 permanece como estava, e é uma questão adicional, que não será respondida aqui, estabelecer quais aspectos que foram apontados posteriormente à publicação de 1931 já estavam, ainda que não explícitos, na Prova de 1931.

[1] Comunicação pessoal a Walter Carnielli.

7 WITTGENSTEIN E A LÓGICA PARACONSISTENTE

Wittgenstein foi um precursor da lógica paraconsistente? Esta pergunta deve nortear o presente capítulo. Para responder a este questionamento, devemos esclarecer o que queremos dizer com a expressão "lógica paraconsistente". Conforme exposto por Carnielli e Coniglio, "A paraconsistência é o estudo de sistemas lógicos nos quais a presença de uma contradição não implica trivialidade, isto é, sistemas lógicos com uma negação não-explosiva: um par de proposições A e $\neg A$ não trivializa (sempre) o sistema."(Carnielli e Coniglio 2016, p. viii).

Em síntese, lógicas paraconsistentes evitam a validade universal do Princípio de Explosão (PEx). Assim, do ponto de vista lógico há um descolamento entre as noções de **contradição** e **trivialidade**. Na lógica clássica, podemos perceber que há uma equivalência entre um determinado sistema T ser **inconsistente** e **trivial**: suponha que T é trivial, ou seja, para toda fórmula ϕ, $\vdash_T \phi$. Nesse caso, em particular, $\vdash_T$ A e $\vdash_T$ ¬A, ou seja, T é inconsistente. Por outro lado, se T é inconsistente, então para algum A vale que $\vdash_T$ A e $\vdash_T$ ¬A. Ora, na lógica clássica vale o PEx, segundo o qual A, ¬A $\vdash$ β, para qualquer β. Assim, supondo que T é inconsistente, poderíamos demonstrar qualquer fórmula β, ou seja, T é trivial.

Não é de menor importância fazer o descolamento entre trivialidade e contradição, conforme mostra Curry. O paradoxo de Curry é uma via alternativa à trivialização: ainda que não haja uma contradição, o sistema é trivializado.

Assim, ao descolar a noção de contradição de trivialidade, o que efetivamente fazemos é modificar que tipo de negação estamos trabalhando, ou seja, há uma diferença no modo de entender a negação clássica e a negação paraconsistente. Conforme expressa João Marcos,

> Mas o que há de especial em lógicas paraconsistentes [...] No mínimo, o que entendemos pelo símbolo de negação aqui deve diferir do que entendemos no caso clássico. Um artifício comum à semântica de diversas lógicas paraconsistentes é de tomar o operador de negação mais ou menos como um operador modal: sua saída não é função da entrada, de modo tal que possamos interpretar como verdadeiras tanto uma fórmula α quanto sua negação, $\neg\alpha$. (Marcos 2010, p. 7)

Dessa maneira, para responder à questão da posição de Wittgenstein em relação à lógica paraconsistente, temos que investigar suas discussões sobre contradições e verificar se há uma atitude adequada que justifique chamá-lo de precursor da lógica paraconsistente.

7.1 Árvore Genealógica da Paraconsistência

Uma direção interessante de explorarmos antes de observar os comentários de Wittgenstein é analisar os precursores e predecessores consagrados da lógica paraconsistente: que contribuições eles trouxeram para o debate, e de que maneira sua contribuição trouxe algo de novo para o debate de sistemas lógicos.

Tratando-se da temática da lógica paraconsistente, podemos destacar três figuras: em primeiro lugar, sendo uma lógica não-clássica, Vasil'ev abriu caminho para a negação dos princípios lógicos clássicos; em segundo lugar, Jaśkowski e da Costa, de maneira independente, desenvolveram sistemas lógicos que podemos realmente dizer que são sistemas paraconsistentes (Marcos 2010, p. 16).

No caso da lógica paraconsistente, devemos justificar e motivar o uso de lógicas não-clássicas, um exercício dificultado pelos séculos de arraigamento na tradição lógica aristotélica.

Como exemplo ilustrativo, analisaremos brevemente Lukasiewicz, uma figura que enfrenta diretamente a questão da hegemonia da lógica clássica aristotélica ao questionar a alegada prova aristotélica do Princípio de não-Contradição (PNC). Ainda que Lukasiewicz não possa ser chamada de precursor da lógica paraconsistente, pois ele negava apenas o PNC, e não o PEx, ele contribuiu para o cenário intelectual da época. Seu propósito é realizar com a lógica o mesmo tipo de mudança que a geometria sofreu no século XIX fica claro desde o início do texto:

> Assim como ao longo do século XIX um exame mais atento do postulado das paralelas de Euclides levou a novos sistemas não-euclidianos de geometria, também a conjectura não seria inteiramente descabível de que uma revisão fundamental das leis básicas (*Grundgesetze*) da lógica de Aristóteles possa levar a novos sistemas de lógica não-aristotélicos. (Lukasiewicz e Wedin 1971, p. 486, tradução nossa)

De maneira resumida, Aristóteles se propõe, em Metafísica Γ, a demonstrar a necessidade do PNC. Para isso, no entanto, é preciso realizar uma prova distinta das demonstrações usuais, pois, como estamos tratando de um princípio tão geral, qualquer demonstração usual seria uma petição de princípio. Em outras palavras, não podemos utilizar as regras de derivação e princípios básicos que utilizamos para demonstrar outras proposições, pois o PNC se pretende ser o princípio mais geral do pensamento. Assim, o único método de demonstração adequado para tal princípio é a demonstração refutativa, ou *elenctica*:

> Para que o argumento não incorra em petição de princípio, ele deve estabelecer o seu resultado se o adversário (quem quer que pretnda não aceitar que "não é possível dizer verdadeira e simultaneamente que o mesmo é homem e não é homem- 1006b28-34) satisfizer uma única condição, a saber, se ele "apenas falar algo"[...] (Zillig 2007, p. 107)

Assim, o argumento aristotélico pretende ter resolvido de uma vez por todas a questão da validade do PNC: de fato, se alguém quiser falar alguma proposição com sentido, esta pessoa deve assumir a validade do PNC; caso contrário, ela não seria mais do que uma planta (Met Γ 1006a11).

Lukasiewicz, no entanto, procura mostrar que o PNC não é o princípio lógico mais fundamental: na lógica simbólica, temos o Princípio de Identidade (PI), um princípio que não envolve "os conceitos de *negação* e *multiplicação lógica*"(Lukasiewicz e Wedin 1971, p. 493, tradução nossa). De maneira geral, existem outros princípios lógicos independentes do PNC:

> Na minha perspectiva, *devemos abandonar a perspectiva falsa, embora amplamente disseminada, de que o princípio de contradição é o maior princípio de todas demonstrações!* Ele vale apenas para provas *indiretas*; para as *diretas*, isto não é verdade. (Lukasiewicz e Wedin 1971, p. 504, tradução nossa)

Em seguida, Lukasiewicz se volta para a refutação aristotélica, e conclui que "Aristóteles não demonstrou o princípio de contradição"(Lukasiewicz e Wedin 1971, p. 499, tradução nossa). Dessa maneira, Lukasiewicz é uma figura importante nesse contexto da história da lógica, pois a partir dele se pode pensar as lógicas não-clássicas de um ponto de vista lógico legítimo: o valor de supor a validade universal do PNC ou outros princípios lógicos não está em seu caráter lógico incondicional - de fato, não há tal incondicionalidade -, mas sim em seu valor de um ponto de vista prático (Lukasiewicz e Wedin 1971, p. 509). À parte as considerações filosóficas do PNC, Lukasiewicz foi responsável pelo desenvolvimento de lógicas polivalentes.

Vasiliev, por outro lado, foi um precursor da lógica paraconsistente. Seus trabalhos são construções de lógicas em que os princípios clássicos do Terceiro Excluído e da Contradição não são válidos.

> No período compreendido entre 1910 e 1913, Vasiliev publicou seus trabalhos lógicos mais importantes relacionados com a derrogação da lei do terceiro excluído e da contradição. [...] Para Vasiliev, todo sistema lógico é composto de duas partes: a *Metalógica* - onde estariam as leis relacionadas com o pensamento, leis que não podem ser eliminadas de um sistema sem que este deixe de ser lógico; e a parte que chamaremos de parte *ontológica da lógica* - onde estariam as leis que dependem das propriedades dos objetos. (Arruda 1990, p. 10)

Assim, Vasiliev, além de oferecer a possibilidade lógica de múltiplos sistemas lógicos não-clássicos, também oferece uma explicação filosófica dessa possibilidade: com efeito, as lógicas determinam ontologias que pode servir para modelar diferentes objetos - uma proto-ideia de compromissos ontológicos.[1]

O papel de predecessor da paraconsistência, no entanto, ainda não pode ser atribuído a Vasiliev:

---

1 Uma análise mais recente da contribuição de Vasiliev para a lógica paraconsistente encontra-se em (D'Ottaviano e Gomes 2018).

> Vasiliev não esclareceu quais as leis de sua metalógica nem, tão pouco, da lógica que tenta construir, discutindo apenas a lei da contradição e da não-autocontradição. (Arruda 1990, p. 11)

7.1.1 Os Predecessores: Jaśkowski e da Costa

Jaśkowski e da Costa, por outro lado, podem legitimamente ser chamados de predecessores da lógica paraconsistente. Com efeito, eles apresentaram cálculos paraconsistentes e, até certa medida, uma semântica para eles. Costuma-se dizer que Jaśkowski apresentou uma semântica paraconsistente adequada, e Newton da Costa apresentou uma sintática mais robusta e adequada da lógica paraconsistente um cálculo paraconsistente mais geral.

Jaśkowski, em 1948, apresentou seu cálculo para raciocinar com sistemas contraditórios. No caso deste autor, um discípulo de Lukasiewicz, a ideia de uma lógica paraconsistente parte da análise do Princípio da Contradição e seu suposto caráter de um princípio universal. Jaśkowski, no entanto, alerta-nos com uma ressalva ao transpor este princípio da lógica aristotélica para a lógica contemporânea:

> A transferência do princípio da contradição de Aristóteles para a lógica contemporânea gera um possível desentendimento. Como é sabido, em lógica matemática a referência é feita a proposições e termos, e não a juízos e conceitos, como era feito por Aristóteles. [...] não seria correto formular o princípio da contradição de Aristóteles como: "Duas proposições contraditórias não podem ser ambas verdadeiras". Temos que acrescentar: "na mesma linguagem"[...] (Jaśkowski 1969, p. 144, tradução nossa)

Assim, a referência na lógica contemporânea depende de especificarmos uma determinada **linguagem**, ou seja, pode haver sistemas que não sejam concordantes por conta de os termos serem interpretados de maneiras distintas. Oferecendo exemplos das ciências empíricas, no entanto, Jaśkowski mostra como elas necessitam trabalhar com a junção de sistemas que nem sempre são concordantes, seja como uma *hipótese de trabalho* ou uma hipótese que sabemos ser falsa, mas que funcione para nossos devidos propósitos. Neste caso, estamos lidando com teorias inconsistentes mas não triviais (Jaśkowski 1969, p. 144).

O ponto de Jaśkowski é que queremos poder trabalhar com sistemas dedutivos contraditórios, como é visto nas ciências empíricas, mas que esses sistemas não podem ser *sobre-completos*, que é sua denominação para sistemas triviais:

> Um sistema em que qualquer fórmula significativa é uma tese pode ser denominado de *sobre-completo*. Isso desvia da terminologia aceita até agora: na metodologia das ciências dedutivas tais sistemas foram chamados de contraditórios, mas para o propósito da análise apresentada neste artigo é necessário fazer uma distinção entre dois diferentes significados do termo "um sistema contraditório"[...] (Jaśkowski 1969, p. 145, tradução nossa)

Jaśkowski, desse modo, estava claramente no caminho da construção de um sistema paraconsistente. Após introduzir um sistema dedutivo baseado em lógica modal, ele oferece uma interpretação filosófica para esse sistema: o **sistema discursivo**, conforme ele cunha, serve para formalizar um discurso entre duas ou mais pessoas, em que pode haver, por exemplo, discordância entre uma pessoa e outra.

A aplicação da lógica modal nesse caso fica mais explícita: o conjunto de crenças de uma determinada pessoa é um mundo possível, e nesse mundo não pode haver contradição. No entanto, ao considerar diferentes mundos possíveis, pode haver casos em que uma proposição é verdadeira em um mundo e a negação desta proposição é verdadeira em outro mundo. Isto não implica, no entanto, trivialidade, pois estamos tratando de possibilidade (Jaśkowski 1969, p. 149).

Jaśkowski encontrou uma aplicação interessante no caso da lógica discursiva à paraconsistência. Newton da Costa, por outro lado, apresentou de maneira mais robusta uma família de lógicas paraconsistentes, os *Sistemas de Inconsistência Formais*, quen não servem apenas para formalizar a lógica da dialética. Também em Newton da Costa, conseguimos encontrar a diferenciação entre inconsistência e trivialidade:

> Um sistema formal S é dito inconsistente se há uma fórmula A de S tal que A e sua negação, ¬ A, são ambos teoremas deste sistema. [...] um sistema dedutivo é dito ser trivial se todas suas fórmulas são teoremas. (Costa 1974, p. 497, tradução nossa)

Da Costa, no entanto, pretende construir uma família de lógicas paraconsistentes Cn baseada em um sistema axiomático, e para isso introduz A$^{\text{o}}$:= $\neg(A \wedge \neg A)$. Nas lógicas Cn, também não vale o PEx, nem as instâncias de $\neg(A \wedge \neg A)$.

7.2 Considerações de Wittgenstein

Os dois textos de Wittgenstein para a análise da questão principal deste capítulo serão RFM (Wittgenstein et al. 1990) e LFM (Wittgenstein e Bosanquet 1989), que representam o período wittgensteiniano em que suas atitudes sobre contradições tomaram um caminho diferente. O Wittgenstein do *Tractatus*, em comparação, ainda defendia uma perspectiva tradicional frente às contradições: "A verdade da tautologia é certa; a da proposição é possível; a da contradição, impossível"(TLP 4.464).

RFM e LFM, por outro lado, são fruto da segunda filosofia de Wittgenstein das *Investigações Filosóficas*. Seu objetivo nessa segunda fase é investigar os fundamentos da matemática; no entanto, não podemos nos enganar com essa expressão e pensar que Wittgenstein está realizando um tipo de investigação semelhante aos intuitos de Frege e Russell ao estabelecer um programa logicista para a matemática. Frege e Russell, cada qual a sua maneira, embarcaram no projeto de derivar a matemática a partir de princípios lógicos, ou seja, eles buscaram fundamentar a matemática por meio de uma redução lógica, ou seja, por meio de outro cálculo.

Wittgenstein não se propõe a isso, mas a outro tipo de investigação dos fundamentos da matemática, a saber, de uma perspectiva **externa**, e não **interna**, à matemática:

> É possível conduzir uma investigação para a Matemática, completamente análoga à nossa investigação da Psicologia. Será tão pouco uma investigação *matemática* como a outra foi uma investigação *psicológica*. Nela *não* haverá cálculos, não é por exemplo, Logística. Podia merecer o nome de uma investigação dos "Fundamentos da Matemática". (IF II.xiv.2)

Assim, Wittgenstein pretende falar sobre a matemática de maneira não matemática, ou seja, ele pretende analisar o uso ordinário dos termos "prova", "fundamentos", e outros termos matemáticos. Na abertura de LFM, Wittgenstein afirma seu projeto de lidar com os fundamentos da matemática:

> Ocasionalmente, produzirei novas interpretações, não para sugerir que elas estão certas, mas para mostrar que a interpretação antiga e a nova são igualmente arbitrárias. Inventarei uma nova interpretação apenas para colocá-la lado a lado com a antiga e dizer, "Aqui, escolha, faça sua decisão". Apenas produzirei gases para dispersar gases antigos. (LFM I.6)

Assim, temos que ter em mente que Wittgenstein, ao explorar o tema da contradição, irá explorá-lo de uma perspectiva matemática *externa* e não comprometida com a efetividade dessa ideia, pois, como visto na citação anterior, os exemplos alternativos que Wittgenstein fornece servem para Wittgenstein reforçar seu ponto da **arbitrariedade** da matemática.

Podemos comparar este ponto de uma análise externa da matemática à argumentação que Wittgenstein inicia nas IF, em que seu ponto é mostrar que a concepção da linguagem agostiniana não é a mais correta. Após citar Santo Agostinho, Wittgenstein afirma:

> Com essas palavras, parece-me, obtemos uma determinada imagem da essência da linguagem humana. A saber, esta: as palavras da linguagem nomeiam objetos - as frases são conexões de tais nomeações. - Nessa imagem da linguagem, encontramos as raízes da ideia: cada palavra tem um significado. Esse significado está correlacionado à palavra. Ele é o objeto no lugar do qual a palavra está. (IF I.1)

O objetivo inicial de Wittgenstein em IF, assim, é mostrar que a concepção de linguagem agostiniana é limitada, baseada em um tipo de jogo possível. O que ele fará é apresentar diferentes modos de usar a linguagem que não se limitam ao uso descrito por Santo Agostinho, para mostrar a arbitrariedade desta concepção. Desta maneira, o tipo de análise na matemática que Wittgenstein pretende na matemática ao considerar sistemas formais alternativos deve ser tomada também deste ponto de vista.

Apesar das ressalvas de Wittgenstein, há muitos momentos lúcidos em que o autor propõe ideias interessantes. Por exemplo, o *insight* inicial do programa paraconsistente, a saber, a rejeição do PEx, já é expressa por Wittgenstein:

> Alguém poderia dizer, "De uma contradição tudo se segue". A resposta a isso é: bem, então não tire quaisquer conclusões de uma contradição; **faça disso uma regra**. Você pode colocar dessa maneira: Sempre há tempo de lidar com uma contradição quando chegarmos a ela. Quando chegarmos a ela, nós não deveríamos simplesmente dizer, "Isso não tem uso algum - e não vamos tirar quaisquer conclusões disso"? (LFM XXI)

Nesta citação, Wittgenstein formula em prosa a condição inicial que gerará a família de lógicas paraconsistentes, que é a rejeição do PEx. Como vimos inicialmente e com os pais da lógica paraconsistente, isto não é o suficiente para colocar Wittgenstein entre os filósofos da paraconsistência. Com efeito, a lição inicial que permite elaborar sistemas formais paraconsistentes é o descolamento entre a noção de **contradição** e **trivialidade**. Não fica claro se Wittgenstein está pedindo que ignoremos as contradições (e com isso o sistema trivializado em que ela está) ou se Wittgenstein está pedindo para fazermos uma quarentena sobre a contradição em relação ao resto do sistema, desse modo, evitando que da contradição o sistema seja trivializado. De qualquer modo, Wittgenstein elabora em linhas gerais a primeira parte daquilo que será formalizado posteriormente. Um dos exemplos de sistemas lógicos paraconsistentes são as LFIs. Como podemos perceber, elas também introduzem esse aspecto de rejeição do PEx no que ficou conhecido como o *Princípio de Explosão Gentil*: "$\alpha, \neg\alpha \nvdash_{L\ FI} \beta$, enquanto $\circ\,\alpha, \alpha, \neg\alpha \vdash_{L\ FI} \beta$"(Carnielli e Coniglio 2016, p. 9, tradução nossa).

Além disso, Wittgenstein não construiu de maneira propriamente dita um sistema lógico paraconsistente como Jaśkowski ou da Costa. Segundo D'Ottaviano, a posição de Wittgenstein de desconfiança em relação à lógica-matemática o impediria de elaborar tal lógica, e, desse modo, sua posição não é a de um precursor, mas sim de uma figura independente na história da lógica (Gomes e D'Ottaviano 2017, p. 348), seguindo Priest e Routley:

> Wittgenstein é uma figura isolada no desenvolvimento do pensamento paraconsistente. Embora seu trabalho tinha, inevitavelmente, um contexto histórico, [...] os desenvolvimentos contemporâneos do programa paraconsistente, assim como movimentos anteriores (exceto pelo idealismo alemão), parecem ter tido pouco ou nenhuma influência em sua obra. (Priest et al. 1989, p. 44)

Vejamos em que aspectos Wittgenstein se aproximou e se distanciou de uma possível paternidade da lógica paraconsistente. Conforme visto no cap. 3, Wittgenstein discute extensivamente o uso de contradições na matemática nas discussões com Turing em LFM. No entanto, seu ponto principal é mostrar como não faz sentido dizer que há contradições **ocultas** em determinado cálculo, ou que a contradição faz parte de um jogo de linguagem inútil como no caso do Paradoxo do Mentiroso. Apesar disso, sua lição principal é que não podemos recusar de maneira *a priori* o uso de contradições, e podemos imaginar situações, ainda que contraintuitivas, em que a contradição tivesse algum uso (Marcos 2010, p. 11).

Ao analisar os precursores da lógica paraconsistente, no entanto, o que pudemos observar que há de relevante em suas posições de modo a estarmos legitimados a classificá-los como tal?

1. Lukasiewicz questionou a supremacia do PNC como o princípio lógico mais fundamental, e, de maneira geral, a supremacia de qualquer princípio lógico. Vasiliev, por outro lado, imaginou como seriam sistemas lógicos em que negássemos o PNC ou o PTE. Assim, um requisito básico para ser um precursor da paraconsistência é a rejeição da autoevidência de princípios lógicos, e, nesse caso, Wittgenstein caminha na mesma direção.
2. O segundo ponto necessário para a paraconsistência, após reconhecida a arbitrariedade dos princípios lógicos, é pensar situações em que eles não são válidos. Neste caso, Wittgenstein também pede para considerarmos situações lógicas não-clássicas.

> A primeira importante lição que podemos depreender do trabalho destes lógicos é que princípios são tão evidentes quanto as leis da geometria - isto é, eles não tem evidência algum. Wittgenstein faria observação semelhante, em suas palestras sobre a matemática, e acrescentaria: "Afirmar que a lógica é auto-evidente, quereno dizer que ela produz uma impressão particular, não nos ajuda em nada."(Lectures XVIII, p. 174). O filósofo assume que podemos negar o princípio da Não-Contradição e o do Terceiro Excluído [...] (Marcos 2010, p. 17)

3. Por fim, como visto, por exemplo, em relação a Vasiliev e Newton da Costa, a paraconsistência funciona ao adotarmos comprometimentos ontológicos sobre determinados tipos de objetos, ou seja, que o modelo paraconsistente representa a **ontologia** dos tipos de objetos estudados. Wittgenstein, no entanto, imagina lógicas não-clássicas como parte de sua metolodogia para dissipar confusões filosóficas, e não defender a viabilidade dessas teorias lógicas em detrimento de outras.

> Por outro lado, da Costa abre espaço para o aparecimento de diferentes ontologias baseadas em diferentes tipos de lógica, analogamente ao que acontecera no século XIX com o aparecimento das diferentes geometrias baseadas em diferentes conjuntos de axiomas. Isto nos afasta radicalmente da visão wittgensteiniana acerca da matemática: ao que tudo indica, o filósofo dificilmente aceitaria a ideia de que os jogos que definem a matemática, mesmo que pudessem ser múltiplos, requeressem qualquer espécie de “comprometimento ontológico”. (Marconi 1984, p. 19-20)

Wittgenstein, desse modo, chega o mais próximo da paraconsistência que sua filosofia permite. A noção de jogos de linguagem e seus desdobramentos na filosofia da matemática wittgensteiniana permite acomodar de maneira não-prolemática a ideia do desenvolvimento de lógicas que abandonem certos princípios considerados 'canônicos' do pensamento, ou seja, Wittgenstein está de acordo com a primeira parte da proposta paraconsistente - a rejeição de princípios lógicos como imutáveis, e a consideração de sistemas não-clássicos. Ele também sugere de maneira explícita como tais sistemas lógicos poderiam se comportar, em especial aqueles em que contradições são toleráveis. No entanto, não se pode atribuir a Wittgenstein o status de precursor da paraconsistência, pois Wittgenstein não permitiria que a matemática fosse tomada por uma diversidade de ontologias.

7.3 Lógicas de Inconsistência Formal e os Teoremas de Gödel

De maneira geral, como visto, lógicas paraconsistentes são aquelas que rejeitam a validade irrestrita do PEx. Há uma família de lógicas paraconsistentes, no entanto, que é interessante circunscrever e analisar detalhadamente: as LFI's, ou *Lógicas de Inconsistência Formal*, são um desenvolvimento das lógicas Cn de Newton da Costa (Costa 1974). As LFI's introduzem o operador $\circ$, que, ao operar sobre uma proposição, em $\circ$A, afirma que "A é consistente". A ideia intuitiva das LFI's é que há certos fatos que podem ser ditos consistentes, ou seja, bem estabelecidos, ao passo que outras afirmações podem envolver contradições sem que haja necessidade de trivializar o sistema:

> **LFI's** são de tal modo construídas que algumas contradições causarão explosão dedutiva: contradições *consistentes* levam à trivialidade - intuitivamente, pode-se entender a noção de de uma 'contradição consistente' como uma contradição envolvendo fatos bem estabelecidos [...] (Carnielli e Coniglio 2016, p. ix, tradução nossa)

A novidade introduzida pelas LFIs é que, ao introduzir o operador de consistência, elas podem realizar uma distinção entre **contradição** e **consistência** na linguagem-objeto.

O que queremos investigar, por fim, é como o Teorema da Incompletude se comporta no caso de lógicas paraconsistentes, ou seja, lógicas em que contradições são toleráveis. No caso de Wittgenstein, como já visto, ao tratar a sentença G como um paradoxo, teríamos como resultado um sistema contraditório, e ele não vê problema nisso, a não ser que devemos abandonar a interpretação de G como "Eu não sou demonstrável"(RFM I Ap. I.11).

Vejamos, no entanto, como o Teorema da Incompletuda funciona de fato sistemas dedutivos contraditórios. Há maneira de reproduzir os resultados limitativos tomando como exemplo as LFIs? O primeiro aspecto que temos que levar em conta das LFIs é que elas são uma família de lógicas construídas a partir da suposição inicial da rejeição do PEx e da introdução do operador $\circ$ que é intolerante à contradição - isto é, o sistema volta a explodir na hipótese de $\circ$A, A e $\neg A$. Assim, podemos escolher a LFI mais básica para reproduzirmos os resultados do Teorema de Gödel: a mbC. Conforme visto anteriormente, a lógica paraconsistente pode ser entendida também como um estudo sobre um tipo de negação distinta da negação clássica, uma negação mais fraca. Assim, o que diferencia a lógica paraconsistente da clássica diz respeito às regras envolvendo a negação: de fato, as regras da lógica clássica positiva (em que não há introdução do operador $\neg$) ainda são válidas (Carnielli e Fuenmayor 2020, p. 9). As duas regras adicionais de mbC são

$$\text{(i) } \alpha \vee \neg\, \alpha$$

$$\text{(ii) } \circ\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\, \alpha \rightarrow \beta))$$

Para reproduzirmos o Teorema de Gödel, no entanto, ainda é necessário extender mbC para que se ela se torne uma lógica com um operador de demonstrabilidade: tal lógica é a RmbC⊕K, que contém mais duas regras de substituição adicionais (Carnielli e Fuenmayor 2020, p. 11) e um operador de demonstrabilidade $\Box$:

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta}$$

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\circ\,\alpha \leftrightarrow \circ\,\beta}$$

Tendo fortalecido a lógica o suficiente para podermos expressar demonstrabilidade em nossa própria linguagem paraconsistente, podemos construir o Teorema de Gödel nesse contexto. É interessante observar, antes de continuarmos construindo a lógica RmbC, que é possível definir os operadores clássicos, e, assim, expressar a negação clássica e o absurdo clássico nas LFIs:

Definição 7. $\perp_\alpha := \circ\alpha \wedge \alpha \wedge \neg\alpha$

Definição 8. $\neg_\gamma\alpha := \alpha \rightarrow \perp_\gamma$

Podemos dizer que essas noções são clássicas, pois elas validam as leis de negação e absurdo clássicos, ou seja, para todo β, $\perp_\alpha \vdash_{mbC} \beta$, e a negação respeita as leis da negação clássicas: $\vdash_{mbC} \alpha \vee \neg\alpha$ e $\alpha, \neg\alpha \vdash_{mbC} \beta$ (Carnielli e Fuenmayor 2020, p. 10).

Assim, tendo o operador $\circ$ em nosso sistema, conseguimos recuperar a classicalidade de nossas proposições, e é por esse caminho que reconstruiremos o Teorema de Gödel. Resta mais um ingrediente, no entanto: conforme visto no capítulo 2, o Teorema de Gödel pressupõe uma teoria **consistente** e **ω-consistente**. Uma das lições do desenvolvimento da lógica-matemática, no entanto, foi que podemos reproduzir os resultados limitativos utilizando outras noções de consistência:

> Como sabemos, os resultados dos Teoremas da Incompletude de Gödel dizem respeito a sistemas formais (expressivos o bastante) que são consistentes. No entanto, o que significa uma teoria ser consistente (i) classicamente, e (ii) sob a perspectiva paraconsistente? Como veremos, podemos identificar (pelos menos) cinco maneiras de responder (i) no contexto das provas de Gödel. Em relação a (ii), há menos opções. (Carnielli e Fuenmayor 2020, p. 16, tradução nossa)

Dessa maneira, (Carnielli e Fuenmayor 2020) apresenta cinco definições de consistência distintos que podem ser utilizados para a análise dos Teoremas da Incompletude. Não cabe aqui reproduzir as definições, mas sim o fato de que *há* diferentes maneiras de definir consistência, e elas convergem para o resultado da Incompletude:

> **Teorema 6.1** (Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel) Suponha que F é um sistema formal consistente que contém a Aritmética de Peano. Seja G_F uma fórmula tal que $\vdash_F G_F \leftrightarrow \sim Pr_F([G_F])$, temos:
>
> • $\nvdash_F G_F$ (não-demonstrável)
>
> • sob uma premissa adicional, $\nvdash_F \sim G_F$
>
> [...] A premissa adicional no Teorema 6.1 acima corresponde a um tipo de requerimento de *consistência*: para [EC08, Ch. 24], isto é ω-consistência (como na variação original de Gödel), e para [Raa18], isto é a condição mais fraca de 1-consistência.

Esse requerimento de consistência de RmbC$\oplus$K é o requerimento que as proposições G_F e $\Box G_F$ sejam consistentes, ou seja, $\vdash_{mbC} \circ G_F$ e $\vdash_{mbC} \circ\Box\, G_F$ (Carnielli e Fuenmayor 2020, p. 32).

Em resumo, dada a análise de estudos inicais de como o Teorema de Gödel se comporta em lógicas não-clássicas, podemos dizer que ele pode ser reproduzido em outros contextos. Ao contrário da análise wittgensteiniana segundo a qual a proposição G perderia o sentido se fosse tratada em um contexto paraconsistente, o tratamento de G nas LFIs mostra que o Teorema de Gödel pode manter seu caráter um resultado limitativo mesmo em lógicas paraconsistentes. O preço de fazer isso, no entanto, é que precisamos recuperar a classicalidade dentro do sistema paraconsistente, ao supor que a proposição G é consistente.

Outro aspecto estranho a Wittgenstein nesta análise é em relação à recuperação do sistema clássico em um sistema paraconsistente. Como visto, mbC é formado a partir da lógica clássica positiva (CPL^+) e a adição do PTE e do PEx Gentil. Com o operador $\circ$, no entanto, podemos recuperar o PEx clássico para a negação forte.

No caso de Wittgenstein, no entanto, o que é verdadeiro em um sistema é aquilo que podemos demonstrar neste sistema (RFM I Ap. I.4). Como podemos, neste caso, dizer que G_{mbC} e G_C, ou seja, a proposição G na lógica paraconsistente e na clássica, são verdadeiras no mesmo sentido? Com efeito, como as regras de mbC e da lógica clássica são distintas, "ser verdadeiro em mbC"e "ser verdadeiro na lógica clássica"são noções completamente estranhas umas às outras (RFM I Ap. I.2).

Em síntese, Wittgenstein contribuiu para os passos iniciais de se pensar lógicas não-clássicas. No entanto, a lógica paraconsistente fez sua própria trilha a partir disso: os precursores da lógica paraconsistente pensaram em um sistema que pudesse *modelar* tipos de objetos em que a contradição seria permitida, e com isso introduziram a ideia de compromissos ontológicos na lógica.

Por outro lado, as considerações paraconsistentes são fortemente voltadas para a comparação entre uma negação fraca paraconsistente e uma negação forte clássica, e, conforme visto pela análise do Teorema de Gödel, lógicas como LFIs permitem reproduzir a classicalidade dentro de sistemas paraconsistentes e até mesmo resultados limitativos clássicos. Diferentemente do diagnóstico de Wittgenstein, no entanto, introduzir a proposição diagonalizada G em um sistema paraconsistente não significa que esta proposição perderá seu sentido, como pensa Wittgenstein (RFM I Ap. I.10).

8 Considerações Finais

A narrativa que estivemos contando chega ao fim. O Programa de Hilbert, que começou como uma proposta de uma matemática finitária axiomatizada, foi desenvolvida por autores como Gödel, Church e Turing, em suas investigações sobre a formalização da noção de computabilidade. Church e Turing, de maneira independente, produziram resultados limitativos sobre o cálculo lambda e as MTs, que também dizem respeito às funções recursivas parciais de Gödel. Não obstante, Gödel também produziu resultados limitativos significativos no Programa de Hilbert a partir de seus Teoremas da Incompletude: o requisito de completude, consistência e decidibilidade não puderam ser sustentados.

Assim, a partir de uma análise da prova do Primeiro Teorema da Incompletude, no capítulo 2, esclarecemos qual a sua formulação adequada de um ponto de vista sintático: a proposição G é indecidível, ou seja, nem G nem sua negação são deriváveis em PM ou extensões aritméticas em que o teorema continua válido. A versão semântica da prova da incompletude, por sua vez, pode ser caracterizada pela noção de verdade formalizada de Tarski.

No capítulo 3, apresentamos a perspectiva excêntrica de Wittgenstein ao compará-lo com a posição de Turing: ao leitor que nos acompanhou até aqui, a razão pela qual este capítulo foi introduzido está clara, pois os seguimentos posteriores mostram o quão importante é se atentar à filosofia de matemática subjacente aos comentários de Wittgenstein.

No capítulo 4, que compõe grande parte do texto, expomos e discutimos as diferentes interpretações sobre o Apêndice I de RFM. Shanker, inaugurando o debate, procura mostrar como Wittgenstein, ao rejeitar o Programa de Hilbert e a ideia da construção de uma metamatemática, está em uma posição privilegiada para objetar à possibilidade de construção do Teorema da Incompletude e para esclarecer os limites da enumeração de Gödel. Floyd e Putnam, apesar de construírem uma discussão importante sobre o §8 e introduzirem comparações com outras provas de impossibilidade na matemática, não conseguem elaborar uma interpretação satisfatória sobre os comentários de Wittgenstein, colocando muito peso em observações transversais de Alister Watson e Goodstein em relação a ω-consistência que são, no máximo, circunstanciais. Rodych e Steiner, por sua vez, enfatizam o fato de Wittgenstein interpretar a proposição P como autorreferencial, ou seja, Wittgenstein teria ignorado a prova em si e focado na explicação metamatemática. Contudo, segundo Rodych e Steiner, a prova de Gödel é autossuficiente, ou seja, não é necessário supor uma interpretação de G metamatemática autorreferencial para ser capaz de derivar a indecidibilidade. Por fim, Lampert, *à la Shanker*, mostra como há suposições sobre a relação entre a interpretação aritmética das fórmulas de PM e a interpretação metamatemática, e podemos construir os comentários de Wittgenstein como chamando a atenção para essa suposição. Esses intérpretes, no entanto, caem sob o mesmo erro: atribuir a Wittgenstein teses filosóficas que explicam a junção entre verdade e demonstrabilidade em PM.

Assim, no capítulo 5, analisamos de maneira alternativa os comentários de Wittgenstein. A lição inicial extraída de tal leitura é que ele propõe uma análise dos conceitos matemáticos em PM. Ou seja, os comentários de Wittgenstein podem ser melhor entendidos ao levarmos a sério sua análise dos conceitos matemáticos de 'prova', 'número', e 'verdade': tais conceitos formam jogos de linguagem, e seu sentido é determinado pelo uso em cada sistema matemático específico. A partir de uma leitura de (Marcos 2010), elaboramos a posição que defendemos nesta monografia: Wittgenstein, sendo ensinado em um contexto lógico-matemático de Frege e Russell, analisa a lógica de maneira puramente sintática, o que o obriga a caracterizar a semântica como inatingível. Wittgenstein, assim, possui um papel importante em **relembrar** a Gödel o paradigma lógico em que ambos estavam inseridos: a lógica-matemática não tinha ainda formalizado noções semânticas.

No capítulo 6, consideramos as objeções principais que podem ser levantadas contra Wittgenstein à luz de resultados posteriores em lógica-matemática. Em especial, o desenvolvimento da semântica formalizada fornece um questionamento para a nossa interpretação de Wittgenstein: qual a relevância dos comentários de Wittgenstein em uma lógica que não é puramente sintática? Assim, vimos que uma análise completa do Teorema da Incompletude mostra que as questões apontadas por Wittgenstein são mais complexas do que seus comentários mostram: com efeito, a questão não é resolvida meramente por uma análise da proposição G autorreferencial, pois o Lema Diagonal envolvido não pressupõe autorreferência; existem casos de proposições indecidíveis concretas como o Teorema de Paris-Harrington, e há maneiras diferentes de construir o Teorema da Incompletude que não utilizam a noção de ω-consistência. A lição que retiramos deste capítulo, à luz do capítulo 5, é que Wittgenstein não estava sustentando teses sobre a prova de Gödel, mas sim analisando o contexto lógico em que ambos estavam inseridos, logo, não é correto criticá-lo com base em resultados posteriores.

No capítulo 7, retomamos a discussão de Wittgenstein sobre contradições e relacionamos seus comentários com o desenvolvimento da lógica paraconsistente. Em um primeiro momento, identificamos os precursores, Lukasiewicz e Vasiliev, da lógica paraconsistente e seus fundadores, Jaskowski e Newton da Costa. Em seguida, comparamos com os escritos de Wittgenstein, e destacamos pontos de confluência e divergência com a tradição paraconsistente: em conclusão, Wittgenstein, por um lado, utiliza os exemplos de sistemas lógicos não-clássicos como parte de sua metodologia filosófica tardia, ao passo que a tradição paraconsistente afirma compromissos positivos ao se considerar sistemas lógicos não-clássicos. É o exemplo da lógica discussiva de Jaskowski, que procura modelar o contexto dialético de argumentação, assim como as *Lógicas de Evidência e Verdade* de Carnielli, que procuram modelar a noção de informação.

Por fim, podemos concluir que os comentários de Wittgenstein ao Teorema da Incompletude, longe de serem meros fragmentos de curiosidade aos aficcionados, oferecem um vislumbre ao leitor contemporâneo de um período importantíssimo para o desenvolvimento da lógica, que foi o período de pré-desenvolvimento da semântica formal. O Programa de Hilbert, ao buscar sistemas formalizados cada vez mais poderosos, levou ao limite o que podemos fazer com vias puramente sintáticas, e Wittgenstein insurge para deter a quimera ascendente de uma matemática com uma cauda filosófica. Seu temor que Gödel estivesse utilizando expressões ilegítimas na matemática ao tratar de uma proposição que afirmasse "eu não sou demonstrável", sendo verdadeira e não demonstrável, foi confirmado posteriormente pelo expurgo da noção de verdade intuitiva por (Tarski 1983). Além disso, Wittgenstein conseguiu separar aquilo que é *matemático* do que é *filosófico* no texto de Gödel: como visto, a prova de Gödel opera no domínio sintático a partir da noção de demonstrabilidade, e em momento algum a noção de verdade é formalizada. Logo, não estamos legitimados - ao menos neste momento anterior à gênese da semântica formal - a tratar de uma proposição matemática como verdadeira, a não ser em termos do próprio sistema matemático, e, neste caso, a única noção legítima que possuímos é a de ser demonstrável.

Os nós que começamos nos capítulos anteriores, desta maneira, podem ser fechados: os comentários de Wittgenstein sobre o Teorema da Incompletude se inserem no final dos anos 1930, um período em que a metodologia wittgensteiniana é não defender teses filosóficas, mas apenas dissipar a confusão gerada pelo emprego errado dos termos, ou seja, uma análise gramatical, neste caso dos termos matemáticos. O que Wittgenstein se propõe a realizar, portanto, em RFM I Ap. I, é distinguir a prosa filosófica da prova matemática da Incompletude, como aponta (Floyd 2001). No entanto, Wittgenstein realiza isso não apontando a interpretações não-*standard* de aritmética, mas sim a partir de uma análise da prova de Gödel como sendo uma prova sintática, em que não é possível rastrear uma análise do predicado "ser verdadeiro"de maneira formal, afinal, esta prova se baseou na lógica-matemática de Frege e Russell. Portanto, falar de verdades matemáticas de fora do sistema matemático faz parte da prosa filosófica que Wittgenstein quer separar da prova matemática.

Referências

ANDERSON, A. R. Mathematics and the "language game". *The Review of Metaphysics*, Philosophy Education Society Inc., Washington, v. 11, n. 3, p. 446–458, 1958.

ARRINGTON, R. L. Wittgenstein on contradiction. *The Southern Journal of Philosophy*, John Wiley Sons, Inc., v. 7, n. 1, p. 37–43, 1969.

ARRUDA, A. I. *N. A. Vasiliev e a Lógica Paraconsistente*. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1990.

BENACERRAF, P.; PUTNAM, H. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. USA: Cambridge University Press, 1964.

BERTO, F. The Gödel paradox and Wittgenstein's reasons. *Philosophia Mathematica*, Oxford University Press, v. 17, n. 2, p. 208–219, 2009.

BICUDO, I. *Os Elementos*. São Paulo: Unesp, 2009.

BOOLOS, G.; BURGESS, J. P.; JEFFREY, R. C. *Computabilidade e Lógica*. São Paulo: Unesp, 2012.

CAJORI, F. Pierre laurent wantzel. *Bulletin of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 24, n. 7, p. 339–347, 1918.

CARDOSO, G. *O Paradoxo do Mentiroso: uma introdução*. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2018.

CARNIELLI, W. Making the 'hardest logic puzzle ever' a bit harder. In: *Raymond Smullyan on Self Reference*. Berlim: Springer, 2017. p. 181–190.

CARNIELLI, W.; FUENMAYOR, D. Gödel blooming: the Incompleteness Theorems from a paraconsistent perspective. *CLE e-Prints*, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, v. 19, n. 4, p. 1–37, 2020.

CARNIELLI, W.; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. *Synthese*, Springer, Berlim, v. 196, n. 9, p. 3789–3813, 2019.

CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E. *Paraconsistent Logic: Consistency, contradiction and negation*. Berlim: Springer, 2016. v. 40.

CARNIELLI, W. A.; PULCINI, G. Cuts and cut-elimination for complementary classical logic. *CLE e-Prints*, Universidade Estadual de Campinas, v. 15, n. 6, 2015.

CHURCH, A. A note on the *Entscheidungsproblem*. *The Journal of Symbolic Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, v. 1, n. 1, p. 40–41, 1936.

COSTA, N. da. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre dame journal of formal logic*, Duke University Press, Durham, v. 15, n. 4, p. 497–510, 1974.

DAWSON, J. W. The reception of Gödel's Incompleteness Theorems. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*. Cambridge, 1984. v. 1984, n. 2, p. 252–271.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; GOMES, E. L. Gerland's dialectica and paraconsistency. *Edukacja Filozoficzna*, Uniwersytet Warszawski, Polônia, v. 70, p. 143–170, 2020.

DUMMETT, M. *Truth and other enigmas*. Cambridge: Harvard University Press, 1978.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; GOMES, E. L. Vasiliev's ideas for non-aristotelian logics: insight towards paraconsistency. In: *The Logical Legacy of Nikolai Vasiliev and Modern Logic*. Berlim: Springer, 2018.

ENGELMANN, M. As filosofias da matemática de Wittgenstein: intensionalismo sistêmico e a aplicação de um novo método (sobre o desenvolvimento da filosofia da matemática de Wittgenstein). *Dois Pontos*, UFPR, v. 6, n. 2, 2009.

EPSTEIN, R.; CARNIELLI, W. *Computability: computable functions, logic, and the foundations of mathematics*. 2. ed. Ohio: Wadsworth Publ. Co., 2000.

FLOYD, J. On saying what you really want to say: Wittgenstein, Gödel, and the trisection of the angle. In: *From Dedekind to Gödel*. Berlim: Springer, 1995. p. 373–425.

FLOYD, J. Prose versus proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and truth. *Philosophia mathematica*, OUP, Nova York, v. 9, n. 3, p. 280–307, 2001.

FLOYD, J.; PUTNAM, H. A note on Wittgenstein's "notorious paragraph" about the Gödel Theorem. *The Journal of philosophy*, Columbia University Press, Nova York, p. 624–632, 2000.

FLOYD, J.; PUTNAM, H. Wittgenstein's "notorious" paragraph about the Gödel Theorem: recent discussions. *Philosophia Mathematica*, OUP, Nova York, v. 9, p. 257–279, 2001.

GÖDEL, K. *Kurt Gödel: collected works: volume I: publications 1929-1936*. Nova York: Oxford University Press, 1986. v. 1.

GÖDEL, K. *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems*. Massachussets: Courier Corporation, 1992.

GOMES, E. L.; D'OTTAVIANO, I. M. L. *Para além das Colunas de Hércules, uma história da paraconsistência: de Heráclito a Newton da Costa*. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2017.

GUYER, P.; WOOD, A. W. Critique of pure reason. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

HEIJENOORT, J. V. Logic as calculus and logic as language. In: SPRINGER. *Proceedings of the Boston Colloquium for the Philosophy of Science 1964/1966: In Memory of Norwood Russell Hanson*. Berlim, 1967. p. 440–446.

HEIJENOORT, J. V. *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 2002.

JAŚKOWSKI, S. Propositional calculus for contradictory deductive systems (communicated at the meeting of march 19, 1948). *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, Sringer, Berlim, v. 24, p. 143–160, 1969.

KIENZLER, W.; GRÈVE, S. S. Wittgenstein on gödelian 'incompleteness', proofs and mathematical practice: Reading remarks on the foundations of mathematics, part i, appendix iii, carefully. *Wittgenstein and the Creativity of Language*, Springer, Berlim, p. 76–116, 2016.

KOLATA, G. Does Gödel's Theorem matter to mathematics? the recent discovery of two natural but undecidable statements indicates that Godel's theorem is more than just a logician's trick. *Science*, American Association for the Advancement of Science, Washington, v. 218, n. 4574, p. 779–780, 1982.

KREISEL, G. Wittgenstein's remarks on the foundations of mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science*, University of Chicago Press, Chicago, 1958.

LAMPERT, T. Wittgenstein and Gödel: an attempt to make 'Wittgenstein's objection' reasonable. *Philosophia Mathematica*, Oxford University Press, Nova York, v. 26, n. 3, p. 324–345, 2018.

LUKASIEWICZ, J.; WEDIN, V. On the principle of contradiction in Aristotle. *The Review of Metaphysics*, Philosophy Education Society Inc., Washington, p. 485–509, 1971.

MARCONI, D. Wittgenstein on contradiction and the philosophy of paraconsistent logic. *History of Philosophy Quarterly*, University of Illinois Press, Illinois, v. 1, n. 3, p. 333–352, 1984.

MARCOS, J. Wittgenstein & paraconsistência. *Principia: an international journal of epistemology*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, v. 14, n. 1, p. 135–173, 2010.

MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. 4. ed. Londres: Chapman and Hall/CRC, 1997.

MOLINO, P.; TAGLIABUE, J. Wittgenstein's influence on artificial intelligence. In: *Centenario del Silencio: Wittgenstein en la cultura contemporánea 100 años después del "Tractatus"*. Espanha: Libros de la Caverna, 2022.

ONGARATTO, R. *O Paradoxo do Mentiroso: uma abordagem deflacionista*. 50 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — UFRGS, Porto Alegre, 2021.

SMITH, P. Kleene's proof of Gödel's Theorem. Notas de Aula.

PRIEST, G.; SYLVAN, R.; NORMAN, J.; ARRUDA, A. I. *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*. Munique: Philosophia Verlag, 1989.

PUTNAM, H. Nonstandard models and kripke's proof of the gödel theorem. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Duke University Press, v. 41, n. 1, p. 53–58, 2000.

RODYCH, V. Wittgenstein on Gödel: the newly published remarks. *Erkenntnis (1975-)*, Springer, Berlim, v. 56, n. 3, p. 379–397, 2002.

RODYCH, V. Misunderstanding Gödel: new arguments about Wittgenstein and new remarks by Wittgenstein. *Dialectica*, Wiley Online Library, Londres, v. 57, n. 3, p. 279–313, 2003.

RODYCH, V. Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2018. Califórnia: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

ROSENHOUSE, J. Knights, knaves, normals, and neutrals. *The College Mathematics Journal*, Taylor & Francis, Oxfordshire, v. 45, n. 4, p. 297–306, 2014.

ROSENHOUSE, J. Fuzzy knights and knaves. *Mathematics Magazine*, Taylor & Francis, Oxfordshire, v. 89, n. 4, p. 268–280, 2016.

ROSSER, B. Extensions of some theorems of Gödel and Church. *The Journal of Symbolic Logic*, Cambridge University Press, Nova York, v. 1, n. 3, p. 87–91, 1936.

SHANKER, S. G. *Gödel's theorem in focus*. Massachussets: Routledge, 2012.

SMULLYAN, R. *What is the Name of this Book?* Chicago: Touchstone Books, 1986.

SMULLYAN, R. M. *Gödel's incompleteness theorems*. Nova York: Oxford University Press on Demand, 1992.

SMULLYAN, R. M. *Satan, Cantor, and infinity: And other mind-boggling puzzles*. Nova York: Knopf, 1992.

SMULLYAN, R. M. *To Mock a Mockingbird: and other logic puzzles including an amazing adventure in combinatory logic*. Nova York: Oxford University Press, 2000.

SMULLYAN, R. M. *The lady or the tiger?: and other logic puzzles*. Massachussets: Courier Corporation, 2009.

SMULLYAN, R. M. *Forever undecided: a puzzle guide to Gödel*. Nova York: Oxford University Press, 2012.

STEINER, M. Wittgenstein as his own worst enemy: The case of Gödel's theorem. *Philosophia Mathematica*, OUP, Nova York, v. 9, n. 3, p. 257–279, 2001.

TARSKI, A. *Logic, semantics, metamathematics: papers from 1923 to 1938*. Indianapólis: Hackett Publishing, 1983.

TARSKI, A. *A concepção semântica da verdade*. São Paulo: UNESP, 2007.

TURING, A. M. et al. On computable numbers, with an application to the *Entscheidungsproblem*. *Journal of Math*, v. 58, n. 345-363, p. 5, 1936.

WANG, F.-Y.; ZHANG, J. J.; ZHENG, X.; WANG, X.; YUAN, Y.; DAI, X.; ZHANG, J.; YANG, L. Where does alphago go: from Church-Turing thesis to alphago thesis and beyond. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, v. 3, n. 2, p. 113–120, 2016.

WANG, H. *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge: MIT Press, 1990.

WITTGENSTEIN, L. *Philosophical Remarks*. Chicago: University of Chicago Press, 1980.

WITTGENSTEIN, L. *Philosophical Grammar*. Califórnia: University of California Press, 2005.

WITTGENSTEIN, L. *Philosophical Investigations*. Nova York: John Wiley & Sons, 2010.

WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-philosophicus*. Oxfordshire: Routledge, 2013.

WITTGENSTEIN, L.; BOSANQUET, R. *Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics, Cambridge, 1939*. Chicago: University of Chicago Press, 1989.

WITTGENSTEIN, L.; RHEES, R.; ANSCOMBE, G.; WRIGHT, G. H. V. Remarks on the foundations of mathematics. MIT Press, Cambridge, 1990.

ZILLIG, R. Significação e não contradição. *Analytica*, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, v. 11, n. 1, p. 107–126, 2007.

APÊNDICE A – Wittgenstein e a Inteligência Artificial

Um tema concorrente aos comentários de Wittgenstein sobre a matemática são a influência de seus comentários sobre inteligência artificial. Vamos elucidar brevemente que tipo de contribuição a análise wittgensteiniana da linguagem pode contribuir para o debate em IAs. O que está em jogo ao discutirmos inteligência artificial atualmente, de maneira resumida, é mais do que apenas saber se uma máquina é capaz de performar alguma atividade específica de maneira excelente, como é o caso da *Deep Blue*, um programa desenvolvido para o xadrez, que conseguiu, de fato, derrotar um campeão de xadrez, Kasparov, em 1997 (Wang et al. 2016). As IAs atuais, como é o caso do GPT-4, Gemini, Microsoft Co-pilot, entre outros, são programas de **processamento da linguagem natural**, ou seja, eles recebem como entrada determinada expressão linguística e devem retornar alguma expressão linguística que também faça sentido.

Se a linguagem humana fosse simples como a linguagem atribuída a Santo Agostinho por Wittgenstein no inicio das *Investigações Filosóficas*, ou seja, se cada símbolo da linguagem fosse um nome e houvesse um objeto único correspondente a este nome, invariante de contexto, então a linguagem humana seria menos complexa de se modelar. A dificuldade, neste caso, seria estabelecer o objeto que corresponde a cada nome, que pode ser algo que demande bastante espaço informacional. No entanto, estabelecido isso, não haveria maneira de um programa se equivocar: se ele recebe como entrada uma expressão ϕ, então ele deve interpretar ϕ como significando ψ, o objeto que corresponde a ϕ.

O problema das IAs pode ser comparado com o problema de se tentar definir a linguagem humana no início das IF: ao tentar realizar uma definição, como se propõe Santo Agostinho, o que se realiza de fato é uma captura de *parte* da linguagem, ou seja, aquela parte a que a definição se aplica:

> É como se alguém explicasse: "Jogar consiste em empurrar coisas sobre uma superfície de acordo com certas regras...- e nós lhe respondemos: Parece que você está pensando nos jogos de tabuleiro; mas esses não são todos os jogos. Você pode corrigir sua explicação limitando-a expressamente a esses jogos. (IF I.3)

No caso de uma IA, queremos que ela saiba desempenhar a atividade para a qual ela foi pensada. No entanto, como desenvolver um algoritmo que a ensine a jogar todos os jogos de linguagem humanos a partir de uma regra geral? O caso atual é semelhante ao exemplo de Wittgenstein ao considerar uma pessoa que comanda o funcionamento de um trem: de fato, as manivelas que o fazem locomover são homogêneas, pois elas devem ser manuseadas. No entanto, o funcionamento interno de cada uma é totalmente específico à sua função (IF I.12). Uma IA generalizada deve receber entradas homogêneas - uma *string* linguística - e compreender a função por trás dessa expressão.

Após discutir os exemplos de jogos de linguagem, Wittgenstein afirma, no famigerado §23 das *Investigações Filosóficas*, a sua imagem da linguagem humana: há "incontáveis tipos"de usos de linguagem associados a suas respectivas "forma[s] de vida". Isto é, não é possível **antecipar** todos os usos - e, portanto, os tipos de frases - da linguagem, assim como cada tipo linguístico é associado a uma comunidade extra-linguística, que determina seu significado pelo uso.

Desta maneira, as lições que Wittgenstein extrai sobre a linguagem no contexto da atividade humana também devem se aplicar no caso de IAs que se pretendem *universais*, no sentido de imitar uma conversa humana. Piere Molino e Jacopo Tagliabue resumem de maneira excelente o presente estado da discussão sobre IA, e a contribuição que Wittgenstein pode trazer no debate[1]:

> Enquanto a maior parte do sucesso prático do NLP recente é devido a modelos intra-linguísticos, a comunidade está começando a reconhecer a importância de fundamentar a linguagem em uma realidade extra-linguística [BHT+20, BGT21]. Aplicando a lição das IF a esse campo fundamental significa não apenas reconhecer a importância do mundo exterior para o conceito de significado, mas também tentar entender comunicação no contexto das atividades humanas: estudos formais tendem a focar na linguagem descritiva (i.e. páginas de Wikipedia), mas IF deixou claro que possivelmente a maioria da linguagem utilizada é não-descritiva [...] (Molino e Tagliabue 2022, tradução nossa, p. 3)

[1] A sigla "NLP"quer dizer "Natural Language Processing", ou seja, "Processamento da Linguagem Natural".

APÊNDICE B – Jogos Lógicos não-clássicos: o paradoxo do mentiroso, a ilha das três coroas e o problema lógico mais difícil de todos

Conforme exposto em 7.1 e 3.2, a posição de Wittgenstein é bastante favorável ao desenvolvimento de cenários lógicos não-clássicos - por exemplo, em sua discussão sobre lógicas em que o Princípio de Explosão não é aceito. Tendo em vista essa perspectiva wittgensteiniana, pretendo desenvolver futuramente um projeto voltado para o desenvolvimento de *puzzles* lógicos não-clássicos. Por enquanto, oferecerei alguns exemplos ilustrativos de *puzzles* não-clássicos, e discutirei o que está em jogo ao utilizá-los da maneira como penso que podem ser utilizados.

Primeiramente, o que são enigmas lógicos? Enigmas lógicos são problemas que nos inclinam a raciocinar rigorosamente de maneira exemplar, sendo sua solução, muitas vezes, fruto do esclarecimento do pensamento sobre suas inferências possíveis. Tradicionalmente, os *puzzles* são pensados tendo como base a lógica clássica, seguindo a trilha de nosso raciocínio natural. No entanto, o desenvolvimento de lógicas não-clássicas permitiu a adaptação do pensamento a diferentes sistemas de raciocínio, cobrindo diferentes situações.

Sendo assim, *puzzles* lógicos são enigmas que podem ser resolvidos com o uso de princípios lógicos. Um tipo bastante recorrente se refere aos puzzles da Ilha dos Cavaleiros e dos Bandidos: uma ilha em que há apenas Cavaleiros, que falam somente a verdade, e bandidos, que falam somente o falso: "[...] Temos três pessoas, A, B, C, cada uma das quais é ou um cavaleiro ou um bandido. A e B afirmam o seguinte: A: Todos nós somos bandidos. B: Apenas um de nós é um cavaleiro. O que são A, B, C?" (Smullyan 1986). O puzzle acima exemplifica o uso de um princípio clássico fundamental: o **Princípio de Bivalência**. Para resolvermos, consideramos cada uma das situações possíveis das afirmações de A e B, ou seja, os seguintes casos:

A	B
T	F
T	T
F	T
F	F

O único caso possível nessa situação é que aquilo que A afirma seja falso e aquilo que B afirma seja verdadeiro, ou seja, A é bandido, B é cavaleiro e C é bandido. Assim, o enigma foi resolvido considerando as combinações possíveis do valor de verdade das afirmações de A e B restringidas pelo Princípio de Bivalência.

Puzzles também são ótimas maneiras de se ilustrar teoremas complicados da lógica como o Primeiro Teorema da Incompletude: Suponha que uma pessoa vai à ilha dos Cavaleiros e Bandidos e concorda com as regras da ilha. Ele encontra um nativo que afirma: "Você nunca irá acreditar que eu sou um cavaleiro." (Smullyan 1986). O que a pessoa que está conhecendo a ilha pode afirmar? Por um lado, ela não pode acreditar que o nativo é um cavaleiro, pois isso implica que o que ele afirma é verdadeiro, ou seja, o visitante da ilha nunca irá acreditar que o nativo é um cavaleiro. Por outro lado, o estrangeiro não pode acreditar que o nativo é um bandido, pois isso implica que o que ele afirma é falso, ou seja, o visitante, de fato, irá acreditar que o nativo é um cavaleiro. Portanto, o visitante não pode nem acreditar que o nativo é um cavaleiro nem um bandido. No entanto, *a fortiori*, o que o nativo afirma é verdadeiro.

Embora *puzzles* tenham sido bastante explorados no contexto clássicos (Smullyan 1986; Smullyan 1992; Smullyan 1992; Smullyan 2000; Smullyan 2012; Smullyan 2009), pouco foi feito na direção de utilizar puzzles lógicos em contextos não-clássicos. Um exemplo paradigmático de tal uso se encontra em (Carnielli 2017), em que o problema mais lógico difícil de todos recebe uma versão ainda mais difícil em lógicas paraconsistentes, e Jason Rosenhouse também ofereceu alguns exemplos (Rosenhouse 2014; Rosenhouse 2016). A seguir, proponho um exemplo simplificado de um *puzzle* não-clássico.

- A Ilha das Três Coroas: em uma ilha distante, além dos horizontes da ilha dos Cavaleiros e Bandidos, há três coroas: a coroa real, pertencente ao rei, que força seu portador a falar somente a verdade; a coroa falsa, pertencente ao súdito, que força seu portador a falar somente o falso; por fim, a coroa imaginária, que força seu portador a falar indeterminadamente. Um estrangeiro, embarcando em tal ilha, se depara com 3 pessoas, cada um portando uma das coroas. Perguntando a eles sobre suas identidades, eis o que eles afirmam:
  A: B é o rei.
  B: Eu não sou o rei.
  A partir dessas informações, quem é A, B e C?

Conforme enunciado, não está determinado completamente que lógica utilizar. Apenas se exige que haja um valor indeterminado. Jason Rosenhouse, por exemplo, utiliza uma versão deste enigma em uma lógica paracompleta (Rosenhouse 2014). Não obstante, iremos considerar, na resolução do problema, a LFI1, uma lógica paraconsistente desenvolvida por Walter Carnielli e João Marcos (Carnielli 2017). Na *Logic of Formal Inconsistencies 1*, há um valor de verdade entre o verdadeiro (1) e o falso (0), o indeterminado (1/2). Além disso, embora não entre diretamente na resolução do problema atual, um novo operador é adicionado: '$\circ$A' indica que a proposição A é consistente, ou seja, ela respeita o Princípio de Explosão:

$$\text{(PEx Restrito) } (\forall A, \forall B) A, \neg A, \ \circ \mathrm{A} \vdash B.$$

No entanto, na LFI1 não vale o Princípio de Explosão clássico (PEx), o que a torna uma lógica paraconsistente. Por sua vez, não seria possível solucionar o enigma das três coroas na lógica clássica. Veja como é a solução para o enigma: suponha que B é o rei. Nesse caso, aquilo que ele afirma é verdadeiro, ou seja, ele não é o rei; logo, ele não pode ser o rei (o rei somente afirma o verdadeiro). Suponha que B é o súdito. Nesse caso, aquilo que B afirma é falso, ou seja, B é o rei. Logo, ele também não pode ser o súdito. Portanto, B é o bobo da corte. Assim, aquilo que A afirma é falso, logo, A é o súdito. Por exclusão, C é o rei.

Na solução do enigma paraconsistente, eliminaram-se as possibilidades de B falar a verdade e a falsidade, pois sua afirmação era indeterminada. Em contraste, na lógica clássica, não seria possível considerar essa terceira possibilidade e solucionar o enigma.