UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

PEDRO ÁLVARES MUIÑOS

Controlabilidade Exata a Trajetórias e Controlabilidade Aproximada para a Equação do Calor Semilinear

Campinas

2023

Pedro Álvares Muiños

Controlabilidade Exata a Trajetórias e Controlabilidade Aproximada para a Equação do Calor Semilinear

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Pedro Álvares Muiños e orientada pela Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M896c Muiños, Pedro Álvares, 1999-
Controlabilidade exata a trajetórias e controlabilidade aproximada para a equação do calor semilinear / Pedro Álvares Muiños. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Controlabilidade aproximada. 2. Controlabilidade exata. 3. Desigualdades de Carleman. 4. Observadores (Teoria do controle). 5. Equação do calor semilinear. 6. Equações diferenciais parciais. I. Calsavara, Bianca Morelli Rodolfo, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Exact controllability to trajectory and approximate controllability for semilinear heat equation
Palavras-chave em inglês:
Approximate controllability
Exact controllability
Carleman inequalities
Observers (Control theory)
Semilinear heat equation
Partial differential equations
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Bianca Morelli Rodolfo Calsavara [Orientador]
João Vitor da Silva
Maurício Cardoso Santos
Data de defesa: 22-09-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-5393-4702
- Currículo Lattes do autor: https://lattes.cnpq.br/3220830324142987

Dissertação de Mestrado defendida em 22 de setembro de 2023 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Prof(a). Dr(a). JOÃO VITOR DA SILVA

Prof(a). Dr(a). MAURÍCIO CARDOSO SANTOS

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço a toda a minha família. Em especial, à minha mãe Marília e meu pai Manuel pelo amor, carinho e apoio que foram essenciais para que eu pudesse percorrer minha trajetória até aqui. Ao meu irmão Igor pelo companheirismo ao longo dos anos.

À minha companheira Mariana agradeço pelo seu amor, amizadade e cuidado. Por ter partilhado comigo os bons e os maus momentos, sempre acreditando no meu potencial e me motivando para melhorar a cada dia.

Agradeço à minha orientadora Bianca pelo suporte e paciência ao longo da realização deste trabalho. Por ter me proporcionado tantas oportunidades desde a graduação até o presente momento.

Aos meus amigos João e Vinícius agradeço pelas ótimas lembranças que fiz durante o período que estive na UNICAMP. E aos amigos que fiz ao longo dos últimos anos, já no mestrado, Ismael, Yuri, Mateus e Gabriel agradeço pelos momentos de alegria e leveza.

Agradeço aos funcionários do IMECC que com seus serviços proporcionam um ambiente de qualidade para que os alunos possam desenvolver com tranquilidade suas atividades. Particularlarmente, agradeço aos professores que contribuiram diretamente na minha formação acadêmica e com os quais pude interagir durante a graduação e o mestrado.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) - Processo nº 2021/00196-9 agradeço pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Não sou nada.
Nunca serei nada.
Não posso querer ser nada.
À parte isso, tenho em mim todos os sonhos do mundo."
(Fernando Pessoa)

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo estudar a propriedade de controlabilidade para um sistema envolvendo uma equação diferencial parcial (EDP). De modo geral, um problema de controlabilidade sobre uma EDP consiste em agir sobre as soluções da equação (trajetórias) através de um controle (que pode ser a condição de fronteira ou a não homogeneidade da equação). Mais especificamente, fixados o tempo final e um dado inicial, procura-se um controle tal que a trajetória do sistema associada ao dado inicial satisfaça alguma condição desejada no tempo final.

Ao longo deste trabalho foi estudado um sistema de condição inicial e de fronteira envolvendo a equação do calor semilinear em que o controle está associado à não homogeneidade da equação. Foram provados resultados referentes a controlabilidade exata a trajetórias e aproximada para este sistema. As demonstrações de tais resultados consistiram em encontrar condições suficientes com respeito ao sistema, particularmente com respeito ao termo não linear da equação, para que o mesmo possua ou não a propriedade de controlabilidade exata a trajetórias ou aproximada.

Palavras-chave: Controlabilidade aproximada; Controlabilidade exata; Desigualdade de Carleman; Observabilidade; Equação do calor semilinear.

Abstract

This thesis aims to study a controllability property of a partial differential equation (PDE). In general, a controllability problem for PDE consists in acting on the solutions of the PDE (trajectories) through a control (that might be the boundary condition or the nonhomogeneous term of the equation). More specifically, for some final time and some initial value, a control is sought such that the trajectory of the initial value problem with initial data satisfies some desired condition for the final time.

Throughout this work it was studied an initial and boundary value problem for the semilinear heat equation where the control was applied on the the nonhomogeneous term of the equation. Results regarding the exact and approximate controllability of this system were obtained. Their proofs consisted in seeking enough conditions with respect to the system, particularly to the nonlinear term of the equation, such that it satisfies or not the property of exact/approximate controllability.

Keywords: Approximate controllability; Exact controllability; Carleman inequality; Observability; Semilinear heat equation.

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores reais de dimensão n
$B(c, r)$	Bola aberta de centro c e raio r em $\mathbb{R}^n$
C^k	Conjunto das funções de classe de diferenciabilidade k
C_0^k	Conjunto das funções de classe de diferenciabilidade k com suporte compacto
$C^{0,\alpha}$	Conjunto das funções Holderianas
$C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}$	Conjunto das funções Holderianas Parabólicas
L^p	Conjunto das funções integráveis a Lebesgue
L^p_{loc}	Conjunto das funções localmente integráveis a Lebesgue
$W^{k,p}$	Espaços de Sobolev
$W_0^{k,p}$	Fecho de C_c^∞ em $W^{k,p}$
H^k	Espaço de Sobolev $W^{k,2}$
H_0^k	Fecho de C_c^∞ em H^k
H^{-1}	Espaço dual de H_0^1
$\mathcal{D}'$	Espaço das distribuições
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das partes do conjunto X
$\operatorname{supp} f$	Suporte da função f
$\max f$	Máximo da função f
$\min f$	Mínimo da função f

$\sup f$	Supremo da função f
$\inf f$	Ínfimo da função f
$\operatorname{sup\,ess} f$	Supremo essencial da função f
$\operatorname{sgn} f$	Sinal da função f
$\operatorname{Norm}(f)$	Conjunto das funções sinais associadas à função f
f^*	Conjugada convexa da função f
∂f	Subdiferencial da função f
$\partial_t f$	Derivada com respeito ao tempo da função f
$\partial_i f$	Derivada com respeito a i-ésima coordenada espacial da função f
∇f	Gradiente da função f
Δf	Laplaciano escalar com respeito as coordenadas espaciais da função f
$D^\alpha f$	$D^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$ com respeito ao multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$
$f * g$	Convolução entre as funções f e g
$f \sim g$	Equivalência entre as funções f e g
$\rightharpoonup$	Convergência fraca
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	Convergência fraca-$*$
$(\cdot, \cdot)$	Produto interno
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Par de dualidade
$\hookrightarrow$	Imersão contínua
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Imersão compacta

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A teoria de controle baseia-se em atingir ou aproximar um determinado estado final de um sistema agindo sobre o mesmo através de um controle. Matematicamente falando, em geral, considera-se um sistema modelado através de uma equação de estado do tipo

$$T(y) = g(u),$$

em que y é a variável de estado que busca-se controlar através do controle u. O operador T representa uma equação que modela o sistema analisado e o operador g define a maneira como o controle u age sobre o sistema. Usualmente em um problema de controle sobre tal sistema procura-se encontrar um controle u de maneira que a solução da equação se aproxime de um estado final previamente estabelecido. Na indústria, o controle de ph em uma reação química com o controle associado a quantidade de reagente é um exemplo da teoria de controle em um contexto prático.

Determinar um período exato no qual a teoria de controle foi primeiramente desenvolvida é difícil. Isto se deve ao fato de que mesmo antes do desenvolvimento do ferramental matemático, como o mencionado anteriormente, suas ideias já se encontravam presentes. De fato, os conceitos de controle e otimização, assunto este profundamente conectado à teoria de controle, já se faziam presentes em construções e no transporte de água no Egito antigo e Império Romano (ver Fernández-Cara [13]).

No decorrer da história o campo de teoria de controle floresceu em especial com o avanço da engenharia, onde encontram-se suas maiores aplicações. Durante o século XX com o avanço da tecnologia, ocasionando em sistemas cada vez mais complexos, desenvolveu-se aquilo que pode ser chamada de teoria de controle moderna utilizando técnicas matemáticas. As aplicações da teoria de controle na engenharia encontram-se nos mais diversos sistemas ligados a indútria como por exemplo aquecimento/refrigeração em construções, controle de diversos aspectos na indústria quimíca, entre outros. Tal teoria também mostrou-se extremamente útil na automação de máquinas, ajudando na evolução dos processos industriais. Ainda no século XX diferentes estratégias foram desenvolvidas no que diz respeito à controlabilidade de sistemas. Uma destas abordagens foi o desenvolvimento da teoria de controle baseada em equações diferenciais, foco deste trabalho. Para uma discussão mais aprofundada a respeito da história, aplicabilidade e resultados importantes da teoria de controle, em especial associada à equações diferencias ordinárias (ou parciais), ver [13, 22, 28].

Um problema de controlabilidade associado a uma equação diferencial parcial pode ser elaborado, resumidamente, da seguinte maneira: considera-se um sistema envolvendo uma equação diferencial parcial no qual é possível agir sobre o mesmo por meio de um controle (a condição de fronteira, a não homogeneidade da equação, entre outros). Dados um tempo $T > 0$, uma condição inicial e um estado final desejado u_d busca-se encontrar um controle tal que a solução do sistema satisfaça a condição inicial em $t = 0$ e iguale-se ao (ou "aproxime-se"do) estado final desejado u_d no tempo $t = T$.

O estudo da controlabilidade para problemas parábolicos lineares e não lineares vem se desenvolvendo desde a metade final do século passado. Resultados neste sentido podem ser encontrados em [15, 20, 27] e nas referências dos mesmos. Nesta dissertação estuda-se do ponto de vista da teoria de controle o seguinte problema de condição inicial e fronteira envolvendo a equação do calor semilinear.

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = v1_\omega & \text{em Q}, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $0 < T < \infty$, $\mathrm{Q} = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$, $\omega \subset\subset \Omega$ é um aberto não vazio, 1_ω é a função característica sobre ω, $y = y(x,t)$ é a variável de estado, $v = v(x,t) \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ é a função de controle, $y_0 = y_0(x) \in L^2(\Omega)$ é condição inicial e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz satisfazendo

$$|f'(s)| \leq C(1 + |s|^p) \ q.t.p., \text{ para algum } p \leq 1 + \frac{4}{n}. \tag{1.2}$$

A condição (1.2) garante que o sistema (1.1) possui uma única solução local (ver Fernández-Cara [12]). Diversos são os resultados envolvendo a teoria de controle e a equação do calor. Particularmente, são muitos os resultados sobre a controlabilidade do sistema (1.1) na literatura dependendo das hipóteses sobre a função f (ver [1, 10]). Esta dissertação baseia-se nos resultados obtidos no artigo de Fernández-Cara [12].

São quatro os principais resultados obtidos ao longo deste trabalho. Os dois primeiros dizem respeito à propriedade de controlabilidade exata a trajetórias para o problema (1.1). E os dois últimos relacionam-se com a propriedade de controlabilidade aproximada para o problema (1.1).

Antes de enunciarmos os resultados principais, defininimos uma relação de equivalência entre funções reais.

Definição 1.1. *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Dizemos que* f *é equivalente a* g *quando* $x \to +\infty$ *se, e somente se,*

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

A mesma definição ainda é válida tomando outros limites.

Notação 1.2. *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Se* f *é equivalente a* g *escrevemos*

$$f \sim g.$$

A relação $\sim$ *é de fato uma relação de equivalência.*

Na sequência, seguindo o artigo de Fernández-Cara [12], definir-se-ão as propriedades de controlabilidade relativas ao problema (1.1) e enunciar-se-ão os quatro principais resultados anteriormente citados.

Definição 1.3. *Diz-se que o problema (1.1) possui a propriedade da controlabilidade exata a trajetórias no tempo* $T > 0$ *se, dadas* y^* *uma trajetória limitada e definida globalmente em* $[0, T]$ *(solução de (1.1) com respeito a uma condição inicial* y_0^* *e controle* v^**) e* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *uma condição inicial, existe um controle* $v \in L^\infty(\omega \times (0, T))$ *tal que a solução* y *de (1.1) com respeito a* y_0 *e* v *está definida globalmente em* $[0, T]$ *e*

$$y(\cdot, T) = y^*(\cdot, T) \text{ em } \Omega.$$

Teorema 1.4 (Falta de controlabilidade exata a trajetórias). *Existe* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *localmente Lipschitz tal que* $f(0) = 0$ *e*

$$|f(s)| \sim |s| \ln^p(1 + |s|) \text{ quando } |s| \to \infty,$$

com $p > 2$*, de maneira que o sistema (1.1) não possui a propriedade da controlabilidade exata a trajetórias para qualquer* $0 < T < \infty$*.*

Teorema 1.5 (Controlabilidade exata a trajetórias). *Seja* $T > 0$*. Se existe* y^* *uma solução limitada e globalmente definida do problema (1.1) com respeito a um controle* $v^* \in L^\infty(\omega \times (0, T))$*, condição inicial* $y_0^* \in L^2(\Omega)$ *e uma função* f *localmente Lipschitz que satisfaz (1.2) e*

$$\frac{f(s)}{|s| \ln^{\frac{3}{2}}(1 + |s|)} \to 0 \text{ quando } |s| \to \infty,$$

então o sistema (1.1) possui a propriedade da controlabilidade exata a trajetória no tempo T*.*

Definição 1.6. *Diz-se que o problema (1.1) possui a propriedade da controlabilidade aproximada no tempo* $T > 0$ *se, dadas condição inicial* $y_0 \in L^2(\Omega)$, *condição final* $y_1 \in L^2(\Omega)$ *e* $\varepsilon > 0$, *existe um controle* $v \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ *tal que a solução* y *do problema (1.1) com respeito a* y_0 *e* v *está definida globalmente em* $[0,T]$ *e*

$$||y(\cdot,T) - y_1||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Teorema 1.7 (Falta de controlabilidade aproximada). *Existe* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *localmente Lipschitz tal que* $f(0) = 0$ *e*

$$|f(s)| \sim |s| \ln^p(1+|s|) \text{ quando } |s| \to \infty,$$

com $p > 2$, *de maneira que o sistema (1.1) não possui a propriedade da controlabilidade aproximada para qualquer* $0 < T < \infty$.

Teorema 1.8 (Controlabilidade aproximada). *Seja* $T > 0$. *Se existe* y^* *uma solução limitada e globalmente definida do problema (1.1) com respeito a um controle* $v^* \in L^\infty(\omega \times (0,T))$, *condição inicial* $y_0^* \in L^2(\Omega)$ *e uma função* f *localmente Lipschitz que satisfaz (1.2) e*

$$\frac{f(s)}{|s| \ln^{\frac{3}{2}}(1+|s|)} \to 0 \text{ quando } |s| \to \infty,$$

então o sistema (1.1) possui a propriedade da controlabilidade aproximada no tempo T.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: no Capítulo 2 introduz-se definições e enunciam-se resultados importantes utilizados no decorrer da dissertação. Estas definições e resultados encontram-se divididas em seções nomeadas de análise funcional, espaços de funções reais, espaços L^p, espaços de Sobolev $W^{k,p}$, existência, unicidade e regularidade de solução para problemas envolvendo a equação do calor, aspectos da teoria de análise convexa e outros resultados pertinentes.

No Capítulo 3 demonstram-se os dois principais resultados relativos à controlabilidade exata a trajetórias do sistema (1.1). O primeiro resultado (Teorema 1.4) garante a existência de funções f para as quais (1.1) não é exatamente controlável a trajetórias para nenhum tempo $T > 0$. Já o segundo resultado (Teorema 1.5) afirma que o sistema (1.1) é exatamente controlável a trajetórias, para um tempo $T > 0$, caso f satisfaça certas hipóteses e exista uma solução limitada de (1.1). A demonstração do primeiro resultado segue um caráter construtivo a partir da construção de uma função f de maneira que (1.1) não é exatamente controlável a trajetórias, para cada tempo $T > 0$. Para provar o segundo resultado utiliza-se um resultado de controlabilidade envolvendo a equação do calor linear com potencial e um argumento de ponto fixo.

No Capítulo 4 provam-se os dois principais resultados relativos à controlabilidade aproximada do sistema (1.1). O primeiro resultado (Teorema 1.7) garante a existência de funções f para as quais (1.1) não é aproximadamente controlável para nenhum tempo $T > 0$. Sua demonstração segue a linha do Teorema 1.4. Já o segundo resultado (Teorema 1.8) afirma que o sistema (1.1) é aproximadamente controlável, para um tempo $T > 0$, caso f satisfaça certas condições e exista uma solução limitada de (1.1). A sua prova segue por uma aplicação do Teorema 1.5 e argumentos envolvendo existência e regularidade de soluções para problemas de condição inicial e fronteira.

Por fim, no Apêndice A encontra-se a demonstração de uma desigualdade de Carleman utilizada no Capítulo 3 (ver Proposição 3.5).

Capítulo 2

Resultados preliminares

Com a finalidade de facilitar a estruturação do texto apresentamos neste capítulo notações, definições e resultados utilizados ao longo da dissertação.

2.1 Análise funcional

Ao longo desta seção são utilizadas as definições usuais envolvendo aspectos da teoria de análise funcional (espaço dual, topologia fraca, topologia fraca-$*$, funcional linear, separabilidade, entre outros) do livro de Brezis [4].

Para isso, fixemos E um espaço de Banach com respeito à norma $||\cdot||_E$ e E' seu espaço dual com respeito à norma $||\cdot||_{E'}$.

Teorema 2.1 ([4, Proposition 3.13]). *Sejam $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência em E' e $f \in E'$. Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge para f com respeito à topologia fraca-$*$ em E', então $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é limitada em E' e*

$$||f||_{E'} \leq \liminf_{n\to\infty} ||f_n||_E.$$

Teorema 2.2 (Primeiro teorema de metrizabilidade, [4, Theorem 3.28]). *Seja E separável. Então, a bola unitária em E' denotada por $B_{E'}$ é um espaço metrizável com respeito à topologia fraca-$*$.*

Corolário 2.3 ([4, Corollary 3.30]). *Sejam E separável e $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência limitada em E'. Então, existe subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ convergente em E' com respeito à topologia fraca-$*$.*

Teorema 2.4 (Segundo teorema de metrizabilidade, [4, Theorem 3.29]). *Seja E espaço tal que E' é separável. Então, a bola B_E é um espaço metrizável com respeito à topologia fraca.*

Corolário 2.5 (Recíproca do teorema de Eberlein-Smulian, [4, Theorem 3.18]). *Sejam E reflexivo e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência limitada em E. Então, existe subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ convergente em E com respeito à topologia fraca.*

Definição 2.6 (Funções semicontínuas inferiormente, [4, Chapter 1, p. 10]). *Dizemos que f é semicontínua inferiormente se $\{x \in E \,|\, f(x) \leq r\}$ é fechado em E para todo $r \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.7 (Funções convexas, [2, Definition 2.1]). *Dizemos que $f : E \to [-\infty, +\infty]$ é convexa se*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),\ \forall x, y \in E,\ 0 \leq \lambda \leq 1,$$

quando o lado direito da desigualdade está bem definido. Caso a igualdade acima seja estrita para $0 < \lambda < 1$ e $x \neq y \in E$ tais que $f(x), f(y) < +\infty$ dizemos que f é estritamente convexa.

Teorema 2.8 ([4, Corollary 3.23]). *Sejam E reflexivo, $S \subseteq E$ um subconjunto não-vazio, convexo, fechado e $f : S \to (-\infty, +\infty]$ uma função semicontínua inferiormente, convexa tal que f não é identicamente igual a $+\infty$ e*

$$\lim_{\substack{x\in S \\ ||x||_E \to +\infty}} f(x) = +\infty.$$

Então, existe $x_m \in S$ tal que

$$f(x_m) = \min_S f.$$

Teorema 2.9 (Forma analítica de Hahn-Banach, [4, Theorem 1.1]). *Seja $p : E \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo*

$$\begin{cases} p(\alpha x) = \alpha p(x), & \forall x \in E \quad e \quad \forall \alpha > 0, \\ p(x+y) \leq p(x) + p(y), & \forall x, y \in E. \end{cases}$$

Sejam $V \subset E$ subespaço vetorial e $f : V \to \mathbb{R}$ funcional linear tais que

$$f(x) \leq p(x),\ \forall x \in V.$$

Então, existe $F : E \to \mathbb{R}$ funcional linear tal que

$$F(x) \leq p(x), \forall x \in E,$$

e F estende f, ou seja, $f(x) = F(x)$, $\forall x \in V$.

O teorema de ponto fixo enunciado abaixo é uma versão do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani que encontra-se no artigo de Glicksberg [16, p. 171].

Teorema 2.10 (Ponto fixo de Kakutani). *Sejam $C \subseteq E$ um subespaço não-vazio, convexo e compacto e $\Psi : C \to \mathcal{P}(C)$ uma aplicação satisfazendo as duas condições abaixo:*

(i) *$\Psi(x)$ é não-vazio, convexo e fechado, para todo $x \in C$;*

(ii) *se $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência em C convergindo a um $x \in C$ e $\{y_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência convergindo a um $y \in C$ de maneira que $y_n \in \Psi(x_n)$, para todo $n \geq 1$, então $y \in \Psi(x)$, ou seja, Ψ possui gráfico fechado.*

Então, existe $x^* \in C$ tal que $x^* \in \Psi(x^*)$, ou seja, Ψ possui pelo menos um ponto fixo.

Para finalizar esta seção definimos os conceitos de operador contínuo e compacto entre espaços de Banach, enunciamos algumas de suas propriedades e um resultado envolvendo imersões compactas.

Definição 2.11 (Operadores contínuos e imersões contínuas, [4, Chapter 2, p. 43]). *Sejam E_1, E_2 espaços de Banach com respeito às normas $||\cdot||_{E_1}$, $||\cdot||_{E_2}$ e seja $T : E_1 \to E_2$ um operador linear. Dizemos que T é um operador contínuo se existe constante $c \geq 0$ tal que*

$$||Tx||_{E_2} \leq c||x||_{E_1}, \forall x \in E_1.$$

No caso particular em que $E_1 \subseteq E_2$ e o operador inclusão entre E_1 e E_2 for contínuo dizemos que E_1 está continuamente imerso em E_2 e escrevemos $E_1 \hookrightarrow E_2$.

Definição 2.12 (Operadores compactos e imersões compactas, [4, Chapter 6, p. 157]). *Sejam E_1, E_2 espaços de Banach e $T : E_1 \to E_2$ um operador linear. Dizemos que T é um operador compacto se T é contínuo e $\overline{T(B_{E_1})}$ é compacto em E_2.*
No caso particular em que $E_1 \subseteq E_2$ e o operador inclusão entre E_1 e E_2 for compacto dizemos que E_1 está compactamente imerso em E_2 e escrevemos $E_1 \hookrightarrow\hookrightarrow E_2$.

Teorema 2.13. *Sejam E_1, E_2 espaços de Banach tais que $E_1 \hookrightarrow\hookrightarrow E_2$. Se uma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para x com respeito à topologia fraca em E_1, então $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para x com respeito à topologia forte em E_2.*

Demonstração:

Seja $\{x_n\}_{n\geq 1}$ sequência em E_1 convergindo fracamente para x em E_1. Para provar que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge fortemente para x em E_2 basta mostrar que toda subsequência de $\{x_n\}_{n\geq 1}$ admite uma subsequência que converge fortemente para x em E_2. Consideramos então $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ uma subsequência. Assim, $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ converge fracamente para x em E_1. Como a inclusão entre E_1 e E_2 é contínua (pois é compacta) temos que $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ converge fracamente para x em E_2. Por outro lado, pela convergência fraca $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ é limitada em E_1. Como a imersão é compacta inferimos que $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ admite subsequência $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\geq 1}$ convergindo fortemente em E_2 para algum x_0. De onde, segue que $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\geq 1}$ converge fracamente para x_0 em E_2. E pela unicidade do limite temos que $x_0 = x$. Ou seja, $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\geq 1}$ converge fortemenete em E_2 para x e chegamos ao resultado. ■

2.2 Espaços de funções reais

Fixemos $n \geq 1$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. A seguir enunciaremos as definições de alguns espaços de funções reais que serão úteis ao longo do texto.

Definição 2.14 ([6, **Definition** 1.1, **Definition** 1.4])**.** *Seja $0 \leq k < \infty$. Definimos os seguintes espaços de funções:*

- $C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, f$ *é k-vezes continuamente diferenciavel em* $\Omega\}$;
- $C^k(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\Omega) \,|\, D^\alpha f$ *é uniformemente contínua em* $\overline{\Omega}$ *para todo* $|\alpha| \leq k\}$;
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{j\geq 0} C^j(\Omega)$;
- $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{j\geq 0} C^j(\overline{\Omega})$.

Definição 2.15 (Suporte de uma função, [6, **Definition** 1.1])**.** *Definimos o suporte de uma função real $f : \Omega \to \mathbb{R}$ por:*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{s \in \Omega \,|\, f(s) \neq 0\}}.$$

Definição 2.16 (Funções com suporte compacto, [6, **Definition** 1.1, **Definition** 1.4])**.** *Seja $0 \leq k \leq \infty$. Definimos*

$$C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) \,|\, \operatorname{supp}(f) \text{ é um subconjunto compacto de } \Omega\}.$$

Definição 2.17 (Funções Lipschitz, [6, **Remark** 1.8, **Definition** 1.4])**.** *Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz se*

$$K = \sup_{x_1, x_2 \in \Omega} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} < \infty.$$

A constante $K \geq 0$ é dita a constante de Lipschitz da função f. A função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita localmente Lipschitz se a restrição de f para qualquer subconjunto compacto de Ω é uma função Lipschitz.

Teorema 2.18. *Sejam $r > 0$ e $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ função Lipschitz com constante de Lipschitz $K \geq 0$. Existe uma família $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^1([-r, r])$ tal que $f_\varepsilon \to f$ em $[-r, r]$ e K é constante de Lipschitz de f_ε, para cada $\varepsilon > 0$.*

Demonstração:

Estendemos f da seguinte maneira.

$$\begin{cases} f(x) = f(-r), & \forall x < -r, \\ f(x) = f(r), & \forall x > r. \end{cases}$$

Assim, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função de Lipschtz com constante K.

Consideramos agora a família regularizante σ_ε como na Definição 2.69. Definindo $f_\varepsilon = \sigma_\varepsilon * f$ temos pelo Teorema 2.70 que, para todo $\varepsilon > 0$, f_ε é C^1 e $f_\varepsilon \to f$ uniformemente em $[-r, r]$. Além disso,

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \sigma_\varepsilon(s) f(x-s) - \sigma_\varepsilon(s) f(y-s)\, ds \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \sigma_\varepsilon(s) |f(x-s) - f(y-s)|\, ds \\ &\leq K|x-y| \int_{\mathbb{R}} \sigma_\varepsilon(s)\, ds = K|x-y|, \; \forall x, y \in [-r, r]. \end{aligned}$$

Logo, K é constante de Lipschitz de f_ε. ■

Definição 2.19 (Funções Hölder contínuas, [6, Definition 1.7]). *Dizemos que $f \in C^0(\overline{\Omega})$ é uma função Hölder contínua com expoente $0 < \alpha < 1$ se*

$$[f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_{x_1, x_2 \in \overline{\Omega}} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} < \infty.$$

Denotamos por $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ o conjunto das funções Hölder contínuas com expoente α.

Teorema 2.20 (Espaços de Hölder como espaços de Banach, [6, Remark 1.8], [18, Section 8.5, p. 118]). *Seja $0 < \alpha < 1$. Então*

$$||f||_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| + [f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

é uma norma em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Além disso, $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ munido com a norma $|| \cdot ||_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$ é um espaço de Banach.

Teorema 2.21 (Densidade dos espaços de Hölder em $C^0(\overline{\Omega})$). *Seja $0 < \alpha < 1$. Se $f \in C^0(\overline{\Omega})$, então existe sequência $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ que converge uniformemente para f.*

Demonstração:

O resultado segue da aplicação do Teorema de Stone-Weierstrass. (Ver enunciado e demonstração do Teorema de Stone-Weierstrass no livro de Rudin [25, Theorem 7.32]). ■

Definição 2.22 (Funções Hölder contínuas parabólicas, [18, Section 8.5, p. 117]). *Dado $T > 0$ e fixando a notação $Q = \Omega \times (0, T)$ definimos o espaço das funções Hölder contínuas parabólicas com expoente $0 < \alpha < 1$ por*

$$C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}) = \{ f \in C^0(\overline{Q}) \mid [f]_{\alpha, \frac{\alpha}{2}, \overline{Q}} < \infty \}$$

em que

$$[f]_{C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})} = \sup_{(x_1,t_1),(x_2,t_2)\in\overline{Q}} \frac{|f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2)|}{(|x_1-x_2|+|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}})^{\alpha}}.$$

Teorema 2.23 (Espaços de Hölder parabólicos como espaços de Banach, [18, Section 8.5, p. 118]). *Seja* $0<\alpha<1$. *Então*

$$||f||_{C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})} = \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |f(x,t)| + [f]_{C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})}$$

é uma norma em $C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$. *Além disso,* $C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$ *munido com a norma* $||\cdot||_{C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})}$ *é um espaço de Banach.*

Teorema 2.24 (Imersão compacta de espaços de Hölder parabólicos em $C^0(\overline{Q})$). *Seja* $0<\alpha<1$. *Então,* $C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\overline{Q})$.

Demonstração:

O resultado segue da aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli. (Ver enunciado e demonstração do Teorema de Arzelà-Ascoli no livro de Dunford [7, Chapter IV, Section 6, Theorem 7]). ■

2.3 Espaços L^p

Iniciaamos esta seção introduzindo os conceitos de igualdade em quase todo ponto e classes de equivalências entre funções reais em um espaço de medida.

Definição 2.25 ([3, Chapter 3, p. 22]). *Sejam* $(X,\mathcal{X},\mu)$ *um espaço de medida e* $f,g : X\to\mathbb{R}$. *Dizemos que* f,g *são iguais, exceto em um conjunto de medida nula (ou em quase todo ponto), se existe* $N\subset X$ *tal que* $\mu(N)=0$ *e* $f(x)=g(x)$ *para todo* $x\in X\setminus N$. *Escrevemos então que* $f=g$ *são iguais q.t.p. em* X.

Definição 2.26 ([3, Definition 6.6]). *Sejam* $(X,\mathcal{X},\mu)$ *um espaço de medida e* $f,g : X\to\mathbb{R}$ *funções integráveis. Dizemos que* f,g *estão na mesma classe de equivalência se, e somente se, elas são iguais em quase todo ponto.*

Para discussões mais aprofundadas no contexto de teoria da medida e suas definições ver nos livros de Bartle [3] e Folland [14].

Agora definimos os espaços L^p. Para isso fixemos $(X,\mathcal{X},\mu)$ um espaço de medida.

Definição 2.27 (Espaços L^p, [3, Definition 6.8, Definition 6.15]). *Seja* $1\le p<\infty$. *Denotamos por* $L^p(X)$ *o espaço das (classes de) funções mensuráveis* $f : X\to\mathbb{R}$ *tais que*

$$||f||_{L^p(X)} = \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Quando $p = \infty$ *denotamos por* $L^\infty(X)$ *o espaço das (classes de) funções mensuráveis* $f : X \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$||f||_{L^\infty(X)} = \sup_X \text{ess}\, |f| = \inf\{k \in \mathbb{R} \,|\, |f| \leq k \; q.t.p. \text{ em } X\} < +\infty.$$

O resultado a seguir afirma que $|| \cdot ||_{L^p(X)}$ são normas nos espaços $L^p(X)$ e que com tais normas os espaços L^p são espaços de Banach. Para a demonstração do mesmo ver no livro de Folland [14, Theorem 6.6].

Teorema 2.28. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *As aplicações* $|| \cdot ||_{L^p(X)}$ *dadas na Definição 2.27 são normas em* $L^p(X)$. *Além disso, os espaços* $L^p(X)$ *munidos com tais normas são espaços de Banach.*

Para o caso em que $X = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto consideramos X munido com a medida de Lebesgue. Neste caso específico definimos ainda o seguinte conceito.

Definição 2.29 ([4, Chapter 4, p. 106]). *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aberto,* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Diz-se que* $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ *se* $f|_{1_K} \in L^p(\Omega)$ *para todo compacto* $K \subset \Omega$.

Os próximos dois teoremas constam no livro de Brezis [4, Corollary 4.24] e [4, Theorem 4.11]. O primeiro apresenta uma condição suficiente para que uma função localmente integrável seja nula em quase todo ponto. Já o segundo caracteriza os espaços duais de L^p.

Teorema 2.30 (Du Bois-Raymond). *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. *Então*

$$\int_\Omega fg\, dx = 0, \; \forall g \in C_0^\infty(\Omega),$$

se, e somente se, $f = 0$ *q.t.p. em* Ω.

Teorema 2.31 (Teorema de representação de Riesz). *Sejam* $1 \leq p < +\infty$, $1 < q \leq +\infty$, *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *e seja* $\phi \in (L^p(\Omega))'$, *com* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é aberto e limitado. Então existe única* $u \in L^q(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf\, dx,$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$. *Além disso,*

$$||u||_{L^q(\Omega)} = ||\phi||_{(L^p(\Omega))'}.$$

Observação 2.32. *Segue do Teorema 2.31 que* $(L^p(\Omega))'$ *é isometricamente isomorfo à* $L^q(\Omega)$.

Para finalizar esta seção enunciamos ainda quatro resultados da teoria dos espaços L^p que encontram-se no livro de Folland [14, Holder's Inequality 6.2], [14, Proposition 6.12], [14, Minkowski's Inequality for Integrals 6.19] e [14, Young's Inequality 8.7].

Teorema 2.33 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *espaço de medida,* $1 \leq p, q \leq +\infty$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*,* $f \in L^p(X)$ *e* $g \in L^q(X)$*. Então* $fg \in L^1(X)$ *e*

$$||fg||_{L^1(X)} \leq ||f||_{L^p(X)} ||g||_{L^q(X)}.$$

Corolário 2.34. *Sejam* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *espaço de medida tal que* $\mu(X) < \infty$ *e* $1 \leq p < q \leq +\infty$*. Então* $L^q(X) \subset L^p(X)$ *e*

$$||f||_{L^p(X)} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} ||f||_{L^q(X)}.$$

Teorema 2.35 (Desigualdade de Minkowski para integrais). *Consideramos os espaços de medida* σ*-finita* $(X_1, \mathcal{X}_1, \mu_1)$*,* $(X_2, \mathcal{X}_2, \mu_2)$*,* F *função mensurável em* $X_1 \times X_2$ *com respeito à medida produto* $\mu_1 \times \mu_2$ *e* $1 \leq p \leq +\infty$*. Se* $F(\cdot, x_2) \in L^p(X_1)$ *para q.t.p.* x_2 *e a função* $x_2 \mapsto ||F(\cdot, x_2)||_{L^p(X_1)}$ *está em* $L^1(X_2)$*, então* $F(x_1, \cdot) \in L^1(X_2)$ *para q.t.p.* x_1*, a função* $x_1 \mapsto \displaystyle\int_{X_2} F(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)$ *está em* $L^p(X_1)$ *e*

$$\left|\left| \int_{X_2} F(\cdot, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right|\right|_{L^p(X_1)} \leq \int_{X_2} ||F(\cdot, x_2)||_{L^p(X_1)}\, d\mu_2(x_2).$$

Teorema 2.36 (Desigualdade de Young para a convolução). *Sejam* $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$*,* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$*. Então* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$||f * g||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

2.4 Espaços de Sobolev $W^{k,p}$

No decorrer desta seção $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto.

Definição 2.37 (Derivadas fracas, [8, Chapter 5, p. 242]). *Sejam* $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *e* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *um multi-índice. Dizemos que* g *é a* α*-ésima derivada parcial fraca de* f *se*

$$\int_\Omega f \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\phi\, dx, \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Neste caso, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *é a ordem da derivada parcial fraca.*

Notação 2.38. *Sejam* $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *e* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *um multi-índice. Denotamos por* $D^\alpha f$ *a* α*-ésima derivada fraca de* f*.*

Definição 2.39 (Espaços de Sobolev $W^{k,p}$, [8, Chapter 5, p. 244]). *Sejam* $1 \leq k < +\infty$*,* $1 \leq p \leq \infty$*. Dizemos que uma função* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *em* $L^p(\Omega)$ *pertence ao espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *se todas suas derivadas fracas de ordem menor ou igual a* k *pertencem a* $L^p(\Omega)$*. Ou seja,*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \,|\, D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}.$$

O seguinte resultado consta no livro de Evans [8, Chapter 5, Section 5.2, Theorem 2] e afirma que o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Teorema 2.40. *Sejam $1 \leq k < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$. A aplicação*

$$||f||_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\beta| \leq k} ||D^\beta f||_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{caso } p \neq \infty, \\ \sum_{|\beta| \leq k} ||D^\beta f||_{L^\infty(\Omega)}, & \text{caso } p = \infty, \end{cases}$$

é uma norma no espaço $W^{k,p}(\Omega)$. Além disso, $W^{k,p}(\Omega)$ munido desta norma é um espaço de Banach.

Notação 2.41. *Sejam $1 \leq k < \infty$ e $1 \leq p \leq \infty$.*

(i) Denotamos o fecho das funções suaves com suporte compacto $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$ por $W_0^{k,p}(\Omega)$;

(ii) Para o caso em que $p = 2$ escrevemos $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$;

(iii) Utilizamos a notação $H^{-1}(\Omega)$ para o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$.

Os espaços de Sobolev são de extrema importância para resolução de problemas envolvendo equações diferenciais parciais. Para apresentações mais aprofundadas sobre o tema e sua aplicação na teoria de equações diferenciais parciais ver [4, 8]. Os dois próximos resultados encontram-se no livro de Brezis [4, Corollary 9.19] e [4, Theorem 9.16]. O primeiro apresenta uma estimativa para funções nos espaços $W_0^{1,p}$ e o segundo imersões compactas envolvendo espaços de Sobolev. Em ambos consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto limitado.

Teorema 2.42 (Desigualdade de Poincaré). *Dado $1 \leq p < \infty$, existe uma constante $\lambda = \lambda(p, \Omega) > 0$ satisfazendo*

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq \lambda ||\nabla f||_{L^p(\Omega)},$$

para toda $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.43 (Rellich-Kondrachov). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto limitado e $\partial\Omega$ de classe C^1. Então*

$$\begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall q \in [1, p^*), & \text{se } p < n, \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall q \in [p, \infty), & \text{se } p = n, \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega}), & \text{se } p > n, \end{cases}$$

em que $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$.
Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ para todo $p > 1$.

Dedicamos a última parte desta seção ao conceito de espaços dependentes do tempo. Para isso fixemos E um espaço de Banach real com norma $||\cdot||_E$ e um tempo $T>0$.

Definição 2.44 **([8, Chapter** 5, **p.** 285]**).** *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p(0,T;E)$ o espaço das funções mensuráveis $f:[0,T]\to E$ tais que*

$$||f||_{L^p(0,T;E)} = \left(\int_0^T ||f(t)||_E^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ caso } 1 \leq p < \infty$$

e

$$||f||_{L^\infty(0,T;E)} = \sup_{t\in[0,T]} \text{ess}||f(t)||_E < \infty.$$

Definição 2.45 **([8, Chapter** 5, **p.** 285]**).** *Denotamos por $C([0,T],E)$ o espaço das funções contínuas $f:[0,T]\to E$ tais que*

$$||f||_{C([0,T],E)} = \max_{0\leq t\leq T}||u(t)||_E < \infty.$$

Definição 2.46 **([8, Chapter** 5, **p.** 285]**).** *Seja $f \in L^1(0,T;E)$. Dizemos que $g \in L^1(0,T;E)$ é a derivada fraca de f se*

$$\int_0^T \phi'(t)f(t)\,dt = \int_0^T \phi(t)g(t)\,dt,\ \forall\phi\in C_0^\infty(0,T).$$

Denotamos a derivada fraca por $g=f_t$.

Definição 2.47 **([8, Chapter** 5, **p.** 286]**).** *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $W^{1,p}(0,T;E)$ o espaço das funções $f\in L^p(0,T;E)$ tais que f_t existe no sentido fraco da Definição 2.46 e $f_t \in L^p(0,T;E)$. Além disso, definimos as normas*

$$||f||_{W^{1,p}(0,T;E)} = \begin{cases} \left(\int_0^T ||f(t)||_E^p + ||f_t(t)||_E^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1\leq p<\infty, \\ \sup\limits_{0\leq t\leq T}\text{ess}(||f(t)||_E + ||f_t(t)||_E), & \text{se } p=\infty. \end{cases}$$

Denotamos ainda $H^1(0,T;E) = W^{1,2}(0,T;E)$.

Para um estudo mais detalhado sobre a definição e propriedades dos espaços envolvendo o tempo como no resultado acima ver o livro de Evans [8, Chapter 5, Section 5.9].

O teorema a seguir consta no livro de Zheng [30, Theorem 3.1.1] e é um resultado importante na teoria de imersões compactas em espaços de Sobolev.

Teorema 2.48 (Lema de Aubins-Lions). *Sejam $T>0$ e E_0, E_1, E_2 espaços de Banach tais que E_0 e E_2 são reflexivos. Suponha que $E_0 \hookrightarrow\hookrightarrow E_1 \hookrightarrow E_2$. Então, dados $1<p,q<+\infty$, o espaço*

$$E = \{u\,|\,u\in L^p(0,T;E_0),\ u_t\in L^q(0,T;E_2)\}$$

munido da norma

$$||u||_E = ||u||_{L^p(0,T;E_0)} + ||u_t||_{L^q(0,T;E_2)}$$

é um espaço de Banach. Além disso, E é compactamente imerso em $L^p(0,T;E_1)$, ou seja, $E \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(0,T;E_1)$.

2.5 Existência, unicidade e regularidade de soluções para problemas envolvendo a equação do calor

Nesta seção fixemos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $0 < T < \infty$, $\mathrm{Q} = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ e $\omega \subset\subset \Omega$ aberto não vazio. O resultado abaixo segue do livro de Evans [8, Chapter 7, Section 7.1] e garante a existência e unicidade de solução para um problema de valor inicial e condição de fronteira envolvendo a equação do calor linear com potencial.

Teorema 2.49. *Sejam $f \in L^2(Q)$, $a = a(x,t) \in L^\infty(Q)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Então existe uma única solução fraca u do problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + au = f & em\ Q, \\ u = 0 & sobre\ \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) & em\ \Omega, \end{cases}$$

ou seja, existe única $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, com $u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, tal que

$$\begin{cases} \langle u_t, w\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (au, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2(\Omega)}\ q.t.p.\ em\ [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$, em que $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$ denotam o produto interno em $L^2(\Omega)$ e a dualidade entre os espaços $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente. Além disso, existe constante $C = C(\Omega, T, a) > 0$ tal que

$$||u||_{C([0,T],L^2(\Omega))} + ||u||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||u_t||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\Big(||u_0||_{L^2(\Omega)} + ||f||_{L^2(Q)}\Big).$$

O próximo teorema é adaptado do artigo de Saut [29, Corollary 1.2] e garante a unicidade de solução em $L^2(Q)$ para um problema com condição de fronteira tal que a solução é identicamente nula em um aberto de Q.

Teorema 2.50. *Sejam $a = a(x,t) \in L^2(Q)$ e $u \in L^2(Q)$ satisfazendo*

$$-u_t - \Delta u + au = 0\ em\ Q.$$

Se $u = 0$ em $\omega \times (0,T)$, então $u = 0$ em Q.

Agora, fazendo uso da teoria de semigrupos gerados por operadores lineares m-dissipativos (ver [5]) seguem três resultados. O primeiro encontra-se no livro de Cazenave [5, Proposition 3.5.7] e contém uma estimativa envolvendo o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ gerado pelo operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet.

Teorema 2.51. *Sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Então*

$$||S(t)u||_{L^q(\Omega)} \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}||u||_{L^p(\Omega)}, \ \forall t > 0.$$

O segundo resultado garante a existência e unicidade de solução local para um problema de valor inicial para a equação do calor semilinear e consta no livro de Cazenave [5, Proposition 4.3.3].

Teorema 2.52. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Então existe $\varepsilon > 0$ dependendo de $||u_0||_{L^2(\Omega)}$ e da constante de Lipschitz associada à função f tal que o problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + f(u) = 0 & \textit{em } \Omega \times (0,\varepsilon), \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega \times (0,\varepsilon), \\ u(x,0) = u_0(x) & \textit{em } \Omega, \end{cases}$$

admite única solução essencialmente limitada $u \in C([0,\varepsilon], L^2(\Omega))$.

O terceiro resultado estabelesce uma estimativa em $L^\infty(Q)$ para a solução de um problema de valor inicial e condição de fronteira envolvendo a equação do calor linear com potencial. Tal resultado é uma generalização do artigo de Fernández-Cara [10, Lemma 3.1].

Teorema 2.53. *Sejam $f \in L^\infty(Q)$, $a = a(x,t) \in L^\infty(Q)$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e u solução do problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + au = f & \textit{em } Q, \\ u = 0 & \textit{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) & \textit{em } \Omega. \end{cases}$$

Então u satisfaz

$$||u||_{L^\infty(Q)} \leq \exp(T||a||_{L^\infty(Q)})||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + T\exp(T||a||_{L^\infty(Q)})||f||_{L^\infty(Q)}. \tag{2.1}$$

Demonstração:

Sejam u^1 e u^2 soluções dos problemas abaixo

$$\begin{cases} u^1_t - \Delta u^1 + au^1 = 0 & \text{em } Q, \\ u^1 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u^1(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2_t - \Delta u^2 + au^2 = f & \text{em } Q, \\ u^2 = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u^2(x,0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

respectivamente. Logo, $u = u^1 + u^2$. A existência de tais soluções é garantida pelo Teorema 2.49.

Pelo artigo de Fernández-Cara [10, Lemma 3.1] temos que

$$||u^1||_{L^\infty(Q)} \leq \exp(T||a||_{L^\infty(Q)})||u_0||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Por outro lado, pela teoria de semigrupos segue que

$$u^2(\cdot,t) = \int_0^t S(t-s)(f - au^2)(\cdot,s)\,ds.$$

Portanto, pelos Teorema 2.35 e Teorema 2.51 obtemos que

$$\begin{aligned} ||u^2(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)} &\leq \int_0^t ||S(t-s)(f-au^2)(\cdot,s)||_{L^\infty(\Omega)}\,ds \\ &\leq \int_0^t ||(f-au^2)(\cdot,s)||_{L^\infty(\Omega)}\,ds \\ &\leq ||a||_{L^\infty(Q)} \int_0^t ||u^2(\cdot,s)||_{L^\infty(\Omega)}\,ds + T||f||_{L^\infty(Q)}. \end{aligned}$$

E aplicando a desigualdade de Gronwall concluímos que

$$||u^2(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)} \leq T\exp(T||a||_{L^\infty(Q)})||f||_{L^\infty(Q)}.$$

Portanto, pelas estimativas encontradas envolvendo u^1 e u^2 segue que

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty(\Omega)} = ||u^1 + u^2||_{L^\infty(\Omega)} &\leq ||u^1||_{L^\infty(\Omega)} + ||u^2||_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \exp(T||a||_{L^\infty(Q)})||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + T\exp(T||a||_{L^\infty(Q)})||f||_{L^\infty(Q)}. \end{aligned}$$

■

O próximo resultado garante uma regularidade para a solução de um problema de valor inicial e condição de fronteira envolvendo a equação do calor linear com potencial no qual a condição inicial encontra-se em um espaço de Hölder. Para a demonstração ver o livro de Ladyzhenskaja [19, Chapter III, Theorem 7.1, Theorem 10.1] e o artigo de Fernández-Cara [10, Lemma 3.3].

Teorema 2.54. *Sejam $f \in L^\infty(Q)$, $a = a(x,t) \in L^\infty(Q)$ e $u_0 \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$, com $0 < \beta < 1$. Então existe única solução $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ do problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + au = f & \textit{em } Q, \\ u = 0 & \textit{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) & \textit{em } \Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe $\alpha \in (0,\beta)$ dependendo de Ω, T e β tal que $u \in C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$ e existe função F crescente com respeito à última coordenada tal que

$$[u]_{C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})} \leq F(\Omega, T, \beta, \alpha, ||u_0||_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}, ||u||_{L^\infty(Q)}).$$

2.6 Aspectos da teoria de análise convexa

Ao longo desta seção fixemos E um espaço de Banach real. Primeiramente enunciamos um resultado clássico da teoria de funções convexas que encontra-se no livro de Rudin [26, Chapter 3, Theorem 3.3].

Teorema 2.55 (Desigualdade de Jensen). *Seja μ uma medida em uma σ-álgebra de um conjunto Ω tal que $\mu(\Omega) = 1$. Se $f : \Omega \to (a,b)$ é uma função $L^1(\Omega)$ com respeito à medida μ e g uma função convexa em (a,b), então*

$$g\Big(\int_\Omega f\,d\mu\Big) \leq \int_\Omega (g \circ f)\,d\mu.$$

Em seguida apresentamos a definição da conjugada convexa de uma função convexa.

Definição 2.56 (Conjugada convexa, [2, Chapter 2, p. 75]). *Seja $f : E \to [-\infty,+\infty]$ convexa. Chamamos de conjugada convexa de f a função $f^* : E' \to [-\infty,+\infty]$ definida abaixo:*

$$f^*(\phi) = \sup_{x\in E}\{\phi(x) - f(x)\},\ \forall \phi \in E'.$$

Dedicamos a segunda parte desta seção à definição e alguns resultados envolvendo conceitos de diferenciabilidade de funções em espaços de Banach reais.

Definição 2.57 (Subdiferencial, [24, Definition 1.9]). *Seja $f : E \to (-\infty,+\infty]$ função convexa tal que $f \not\equiv +\infty$. Definimos a subdiferencial da função f no ponto $x \in E$ como sendo o seguinte conjunto*

$$\partial f(x) = \{\phi \in E' \,|\, f(x) - f(y) \geq \phi(x-y),\ \forall y \in E\}.$$

Dizemos que f é subdiferenciável em x quando $\partial f(x) \neq \emptyset$.

O próximo resultado fornece uma caracterização alternativa para a subdiferencial de uma função contínua.

Teorema 2.58. *Seja $f : E \to (-\infty,+\infty]$ função convexa tal que $f \not\equiv +\infty$. Se $x \in E$ é tal que $f(x) < +\infty$ e f é contínua em x, então f é subdiferenciável em x e*

$$\partial f(x) = \left\{\phi \in E' \,\middle|\, \phi(y) \leq \lim_{r\to 0^+} \frac{f(x+ry) - f(x)}{r},\ \forall y \in E\right\}.$$

Defineimos abaixo a diferenciabilidade no sentido de Gâteaux.

Definição 2.59 (Diferenciabilidade no sentido de Gâteaux, [2, Chapter 2, p. 86]). *Sejam $f : E \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa tal que $f \not\equiv +\infty$ e $x \in E$ com $f(x) < +\infty$. Dizemos que f é Gâteaux diferenciável em x se a aplicação*

$$h \mapsto \lim_{r \to 0^+} \frac{f(x + rh) - f(x)}{r}$$

é um funcional linear contínuo em E. Equivalentemente dizemos que f é Gâteaux diferenciável em x se existe o limite abaixo para todo $h \in E$.

$$\lim_{r \to 0} \frac{f(x + rh) - f(x)}{r}.$$

Denotamos por $df(x)$ a derivada de Gâteaux de f no ponto x que é o elemento em E' tal que

$$df(x)(h) = \lim_{r \to 0} \frac{f(x + rh) - f(x)}{r}.$$

Agora enunciamos um teorema que estabelece uma conexão entre a subdiferencial e o diferencial de Gâteaux.

Teorema 2.60. *Seja $f : E \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa tal que f é Gâteaux diferenciável em x. Então*

$$\partial f(x) = \{df(x)\}.$$

A demonstração dos dois resultados anteriores encontram-se no livro de Barbu [2, Proposition 2.39] e [2, Proposition 2.40]. Antes de finalizar a seção enunciando o último resultado definimos o seguinte conceito.

Definição 2.61 (Domínio efetivo, [24, Definition 3.1]). *Seja $f : E \to (-\infty, +\infty]$. Chamamos o conjunto $\mathrm{dom}(f) = \{x \in E \,|\, f(x) < +\infty\}$ de domínio efetivo de f.*

O teorema abaixo fornece condições suficientes para expressar o subdiferencial da soma de duas funções como soma dos subdiferenciais e consta no livro de Phelps [24, Theorem 3.16].

Teorema 2.62. *Sejam $f, g : E \to (-\infty, +\infty]$ funções convexas, semicontínuas inferiormente tais que $f, g \not\equiv +\infty$. Se existe ponto em $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ no qual f (ou g) é contínua, então*

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x), \forall x \in \mathrm{dom}(f + g).$$

2.7 Outros resultados pertinentes

Para os dois resultados a seguir ver o livro de Evans [8, Appendix B, Cauchy's Inequality] e [8, Appendix C, Theorem 3]. O primeiro apresenta uma desigualdade envolvendo o produto de dois números não negativos quaisquer. Tal desigualdade é extremamente útil para estimar termos não lineares em EDP's. E o segundo é um resultado clássico em cálculo vetorial.

Teorema 2.63 (Desigualdade de Young). *Sejam $x, y \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Teorema 2.64 (Identidades de Green). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1. Se $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$, então*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \Delta f \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu} \, dS;$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega f \Delta g \, dx = -\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, dx + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS;$

(iii) $\displaystyle\int_\Omega f \Delta g - g \Delta f \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS.$

O teorema a seguir é uma consequência do Teorema do Divergente (ver o livro de Munkres [23, Theorem 38.8]).

Teorema 2.65. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1. Se $f \in C^1(\overline{\Omega})$ e F um campo vetorial continuamente diferenciável em Ω, então*

$$\int_\Omega f \nabla \cdot F \, dx = \int_{\partial\Omega} f F \cdot \nu \, dS - \int_\Omega \nabla f \cdot F \, dx,$$

em que ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Antes de enunciar o próximo resultado desta seção fixemos a notação $\mathcal{D}'(\Omega)$ para o espaço de distribuições sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto (ver o livro de Folland [14, Chapter 9] para mais detalhes) e definimos o conceito de função sinal.

Definição 2.66. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domínio e $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Denotamos por $\operatorname{sgn}(u)$ a função sinal de u definida por*

$$\operatorname{sgn} u(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x)}{|u(x)|}, & \textit{se } u \neq 0, \\ 0, & \textit{se } u = 0. \end{cases}$$

O resultado a seguir é conhecido como desigualdade de Kato e sua demonstração encontra-se no artigo de Horiuchi [17, Theorem 1.1].

Teorema 2.67 (Desigualdade de Kato). *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio e M um operador da forma*

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j)$$

tal que $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ e existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j \geq C|y|^2, \ \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ x \in \Omega.$$

Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é tal que $Mu \in L^1_{loc}(\Omega)$ então

$$M|u| \geq (Mu) \operatorname{sgn} u \ \ em \ \mathcal{D}'(\Omega).$$

O resultado a seguir diz respeito à existência de uma função no fecho de um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo determinadas condições. A existência desta função é particularmente importante para demonstrar estimativas de Carleman.

Lema 2.68. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domínio limitado e $\omega \subset\subset \Omega$ aberto não vazio. Então existe função $\eta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \eta \in C^2(\overline{\Omega}), \\ \eta > 0 \ \ em \ \Omega, \\ \eta = 0 \ \ sobre \ \partial\Omega, \\ |\nabla \eta| \neq 0 \ \ em \ \overline{\Omega \setminus \omega}. \end{cases}$$

No artigo de Fursikov [15, Chapter 1, Lemma 1.1] é provado a existência da função acima.

Por fim, para finalizar esta seção definimos o conceito de molificadores (ver o livro de Evans [8, Appendix C, Definitions, p. 629]) e apresentamos suas principais propriedades (ver o livro de Evans [8, Appendix C, Theorem 6]).

Definição 2.69 (Molificadores). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ e $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \,|\, dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.*

(i) Definimos $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$\sigma(x) := \begin{cases} C \exp(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}) & se \ |x| < 1, \\ 0 & se \ |x| \geq 1, \end{cases}$$

em que $C > 0$ é uma constante escolhida de maneira que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x)\, dx = 1$;

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\sigma_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \sigma(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Assim, σ_ε é C^∞ e satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_\varepsilon(x)\, dx = 1, \ \mathrm{supp}(\sigma_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon);$$

(iii) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localmente integrável. Definimos sua molificação por

$$f_\varepsilon := \sigma_\varepsilon * f$$

em Ω_ε.

Teorema 2.70 (Propriedades de molificadores). *(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$;*

(ii) $f_\varepsilon \to f$ q.t.p. quando $\varepsilon \to 0^+$;

(iii) Se $f \in C(\Omega)$, então $f_\varepsilon \to f$ uniformemente em compactos de Ω;

(iv) Se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, então $f_\varepsilon \to f$ em $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Capítulo 3

Controlabilidade exata a trajetórias

Ao longo deste capítulo é estudado o problema (1.1) do ponto de vista da controlabilidade exata a trajetória e são demonstrados dois resultados principais. O primeiro garante a existência de uma função f de maneira que, para cada $0 < T < \infty$, o problema (1.1) não possui a propriedade de controlabilidade exata a trajetórias. Já o segundo estabelece condições sobre a função f e sobre a existência de uma solução limitada e globalmente definida de (1.1) de maneira que este problema possui a propriedade de controlabilidade exata a trajetórias.

3.1 Um resultado sobre a falta de controlabilidade exata a trajetórias

Nesta seção demonstraremos o Teorema 1.4 que garante a não controlabilidade exata a trajetórias do problema (1.1) para uma família de funções f. Dividimos esta demonstração em duas partes. Primeiramente serão provados três resultados auxiliares e posteriormente concluiremos, usando tais resultados, que o Teorema 1.4 de fato é válido.

Em seguida serão provados os três resultados auxiliares. O primeiro define uma família de funções f satisfazendo certas condições e o terceiro garante a existência de uma função suave ρ que é utilizada na demonstração do Teorema 1.4. Já o segundo afirma que as funções f definidas no primeiro resultado auxiliar satisfazem uma relação de equivalência no sentido da Definição 1.1. Tal relação é importante para a demonstração do terceiro resultado.

Proposição 3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(s) := \int_0^{|s|} \ln^p(1+u)\, du, \tag{3.1}$$

para cada $p > 2$. Então f é localmente Lipschitz, $f(0) = 0$ e

$$|f(s)| \sim |s| \ln^p(1+|s|) \text{ quando } |s| \to \infty.$$

Demonstração:

Pela definição de f em (3.1) temos

$$f(0) = \int_0^0 \ln^p(1+u)\,du = 0.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo ([21, Capítulo IX, Teorema 8])

$$f'(s) = \ln^p(1+s), \text{ quando } s > 0.$$

E de maneira análoga,

$$f'(s) = -\ln^p(1-s), \text{ quando } s < 0.$$

Notemos ainda que $f'(0) = 0$. De fato,

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\frac{\int_0^{|h|}\ln^p(1+u)\,du}{|h|}.$$

Como ln é função crescente deduzimos que, para cada $u \in [0, |h|]$, $\ln^p(1+u) \leq \ln^p(1+|h|)$. Então concluímos que

$$0 \leq \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| \leq \lim_{h\to 0}\frac{\ln^p(1+|h|)\int_0^{|h|}\,du}{|h|} = \lim_{h\to 0}\ln^p(1+|h|) = 0 \Longleftrightarrow f'(0) = 0.$$

Logo, f é função diferenciável e

$$f'(s) = \begin{cases} -\ln^p(1-s) & \text{se } s \leq 0, \\ \ln^p(1+s) & \text{se } s > 0. \end{cases}$$

Portanto, $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Então f' é localmente limitada e segue, pelo Teorema do Valor Médio ([21, Capítulo $VIII$, Teorema 7]), que f é localmente Lipschitz.

Resta provar que f é equivalente a $|s|\ln^p(1+|s|)$ quando $|s| \to \infty$. Inicialmente, notamos que

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{f(s)}{|s|\ln^p(1+|s|)} = \lim_{|s|\to\infty}\frac{\int_0^{|s|}\ln^p(1+u)\,du}{|s|\ln^p(1+|s|)}. \tag{3.2}$$

Como ln é função crescente e não negativa em $[1,\infty)$ obtemos que

$$\begin{aligned}\lim_{|s|\to+\infty} f(s) &= \lim_{|s|\to+\infty}\int_0^{|s|}\ln^p(1+u)\,du \geq \lim_{|s|\to+\infty}\int_1^{|s|}\ln^p(1+u)\,du \geq \lim_{|s|\to+\infty}\ln^p 2\int_1^{|s|}\,du \\ &\geq \ln^p 2 \lim_{|s|\to+\infty}(|s|-1) = +\infty.\end{aligned}$$

Por outro lado, $\lim\limits_{|s|\to+\infty}|s|\ln^p(1+|s|) = +\infty$. Aplicando então a regra de l'Hôpital no último limite da igualdade (3.2) segue que

$$\lim_{|s|\to+\infty}\frac{\int_0^{|s|}\ln^p(1+u)\,du}{|s|\ln^p(1+|s|)} = \lim_{|s|\to+\infty}\frac{\ln^p(1+|s|)}{\ln^p(1+|s|)+\frac{p|s|\ln^{p-1}(1+|s|)}{1+|s|}} = \lim_{|s|\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{p|s|}{(1+|s|)\ln(1+|s|)}}.$$

Então, como

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{p|s|}{(1+|s|)\ln(1+|s|)} = p \lim_{|s|\to+\infty} \frac{|s|}{1+|s|} \cdot \lim_{|s|\to+\infty} \frac{1}{\ln^p(1+|s|)} = p\cdot, 0 = 0$$

concluímos que

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{\int_0^{|s|} \ln^p(1+u)\,du}{|s|\ln^p(1+|s|)} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{|s|\ln^p(1+|s|)} = 1,$$

ou seja, $|f(s)| \sim |s|\ln^p(1+|s|)$ quando $|s| \to \infty$. ∎

Lema 3.2. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por (3.1) e $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sua conjugada convexa. Então vale a seguinte equivalência*

$$f^*(s) \sim p|s|^{1-\frac{1}{p}} \exp\Big(|s|^{\frac{1}{p}}\Big) \text{ quando } s \to +\infty. \tag{3.3}$$

Demonstração:

Pela definição de conjugada convexa (ver Definição 2.56) temos

$$f^*(s) = \sup_{a\in\mathbb{R}}\{as - f(a)\}.$$

Inicialmente supomos que o supremo acima é atingido para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Então, para cada $s \in \mathbb{R}$, este supremo é atingido em um ponto crítico da função $a \mapsto as - f(a)$. Estes pontos críticos $a \in \mathbb{R}$ são tais que

$$s - f'(a) = 0. \tag{3.4}$$

Por outro lado, pela demonstração da Proposição 3.1

$$f'(s) = \begin{cases} -\ln^p(1-s) & \text{se } s \leq 0, \\ \ln^p(1+s) & \text{se } s > 0. \end{cases}$$

Logo, f' é uma bijeção e denotamos por $(f')^{-1}$ sua inversa. Como o supremo é atingido em um ponto satisfazendo (3.4) e f' é bijeção segue que o supremo é atingido em

$$a = (f')^{-1}(s).$$

Dessa maneira obtemos que

$$f^*(s) = (f')^{-1}(s) \cdot s - f((f')^{-1}(s)). \tag{3.5}$$

Pela expressão encontrada para f' inferimos que a seguinte igualdade é válida para $s > 0$

$$(f')^{-1}(s) = \exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big) - 1.$$

Substituindo a igualdade acima em (3.5) e usando a definição de f dada por (3.1) temos que

$$\begin{aligned}f^*(s) &= s\Big(\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)-1\Big) - f\Big(\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)-1\Big)\\ &= s\Big(\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)-1\Big) - \int_0^{\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)-1} \ln^p(1+u)\,du\end{aligned}$$

se $s>0$. Portanto,

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{f^*(s)}{p|s|^{1-\frac{1}{p}}\exp\Big(|s|^{\frac{1}{p}}\Big)} = \lim_{s\to+\infty}\frac{s\Big(\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)-1\Big) - \int_0^{\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)-1}\ln^p(1+u)\,du}{ps^{1-\frac{1}{p}}\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)}. \tag{3.6}$$

Notamos que o numerador e o denominador do limite a direita tendem a $+\infty$ quando $s\to+\infty$. De fato, como $p>1$ então $1-\dfrac{1}{p}>0$ e $\dfrac{1}{p}>0$. Logo,

$$\lim_{s\to+\infty} ps^{1-\frac{1}{p}}\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)\to+\infty.$$

Então o denominador do limite a direita em (3.6) tende a $+\infty$.

No caso do numerador deste limite, considerando a mudança de variável $v=\ln(1+u)$ chegamos em

$$\int_0^{\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)-1}\ln^p(1+u)\,du = \int_0^{s^{\frac{1}{p}}}\exp(v)v^p\,dv.$$

Integrando por partes obtemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)-1}\ln^p(1+u)\,du &= v^p\exp(v)\Big|_0^{s^{\frac{1}{p}}} - \int_0^{s^{\frac{1}{p}}} p\exp(v)v^{p-1}\,dv\\ &= s\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big) - \int_0^{s^{\frac{1}{p}}} p\exp(v)v^{p-1}\,dv.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to+\infty} s\Big(\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)-1\Big) - \int_0^{\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)-1}\ln^p(1+u)\,du\\ &\qquad= \lim_{s\to+\infty}\int_0^{s^{\frac{1}{p}}} p\exp(v)v^{p-1}\,dv - s.\end{aligned}$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo ([21, Capítulo IX, Teorema 8]) e o fato de $\exp(v)\geq v$, para todo $v\geq 0$, notamos ainda que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to+\infty}\int_0^{s^{\frac{1}{p}}} p\exp(v)v^{p-1}\,dv - s &= \lim_{s\to+\infty}\int_0^{s^{\frac{1}{p}}}\Big(p\exp(v)v^{p-1}-pv^{p-1}\Big)\,dv\\ &\geq \lim_{s\to+\infty}\int_0^{s^{\frac{1}{p}}}\Big(pv^p-pv^{p-1}\Big)\,dv\\ &= \lim_{s\to+\infty}\frac{p}{p+1}v^{p+1}-v^p\Big|_0^{s^{\frac{1}{p}}}\\ &= \lim_{s\to+\infty}\frac{p}{p+1}s^{1+\frac{1}{p}}-s=+\infty,\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{s\to+\infty} s\Big(\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)-1\Big)-\int_0^{\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)-1}\ln^p(1+u)\,du=+\infty.$$

Assim, o numerador do limite a direita em (3.6) tende a $+\infty$.

Podemos então aplicar a regra de l'Hôpital no limite em questão. Para isso calculamos as derivadas do numerador e denominador do limite a direita em (3.6).

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big(ps^{1-\frac{1}{p}}\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)\Big)&=p\left(1-\frac{1}{p}\right)s^{-\frac{1}{p}}\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)+\frac{1}{p}ps^{1-\frac{1}{p}}s^{\frac{1}{p}-1}\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)\\&=(p-1)s^{-\frac{1}{p}}\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)+\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\left(s\Big(\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)-1\Big)-\int_0^{\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)-1}\ln^p(1+u)\,du\right)\\&\qquad=\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)+\frac{1}{p}s^{\frac{1}{p}}\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)-1-\frac{1}{p}s^{\frac{1}{p}}\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)\\&\qquad=\exp\Big(s^{\frac{1}{p}}\Big)-1.\end{aligned}$$

E pela regra de l'Hôspital temos que

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)-1}{(p-1)s^{-\frac{1}{p}}\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)+\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)}=\lim_{s\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{\exp\left(s^{\frac{1}{p}}\right)}}{(p-1)s^{-\frac{1}{p}}+1}=1.$$

Substituindo a igualdade acima em (3.6) concluímos que

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{f^*(s)}{p|s|^{1-\frac{1}{p}}\exp\left(|s|^{\frac{1}{p}}\right)}=1,$$

ou seja, (3.3) é válida.

Resta provar que o supremo

$$\sup_{a\in\mathbb{R}}\{as-f(a)\}$$

é de fato atingido para todo $s\in\mathbb{R}$.

Para o caso em que $s=0$

$$\sup_{a\in\mathbb{R}}\{as-f(a)\}=\sup_{a\in\mathbb{R}}\{-f(a)\}=0=f(0)$$

pois f é não negativa e $f(0)=0$.

Já para o caso em que $s>0$ notamos que

$$\sup_{a\in\mathbb{R}}\{as-f(a)\}\geq 0 \tag{3.7}$$

uma vez que $a\mapsto as-f(a)$ se anula em $a=0$.

Por outro lado, como $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln^p(1+u)\,du = +\infty$, então

$$\lim_{a\to-\infty}(as - f(a)) = \lim_{a\to-\infty}\left(as - \int_0^{|a|} ln^p(1+u)\,du\right) = -\infty. \tag{3.8}$$

Temos ainda que

$$\lim_{a\to+\infty}(as - f(a)) = -\infty. \tag{3.9}$$

De fato,

$$\lim_{a\to+\infty}(as - f(a)) = \lim_{a\to+\infty}\left(as - \int_0^{a} \ln^p(1+u)\,du\right) = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a s - \ln^p(1+u)\,du. \tag{3.10}$$

Notando que $\ln^p(1+u) \geq 2s$ quando $u \geq \exp\left(2^{\frac{1}{p}}s^{\frac{1}{p}}\right) - 1$, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{a\to+\infty}\int_{\exp\left(2^{\frac{1}{p}}s^{\frac{1}{p}}\right)-1}^{a} s - \ln^p(1+u)\,du &\leq \lim_{a\to+\infty} -\int_{\exp\left(2^{\frac{1}{p}}s^{\frac{1}{p}}\right)-1}^{a} s\,du\\ &= \lim_{a\to+\infty} -s\int_{\exp\left(2^{\frac{1}{p}}s^{\frac{1}{p}}\right)-1}^{a} du = -\infty.\end{aligned}$$

Como esta integral diverge temos que

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a s - \ln^p(1+u)\,du = -\infty.$$

Conluímos então por (3.10) que a igualdade (3.9) é verdadeira. Logo, por (3.8) e (3.9) existe $M > 0$ tal que $as - f(a) < -1$ se $a \notin [-M, M]$. E por (3.7) deduzimos que

$$\sup_{a\in\mathbb{R}}\{as - f(a)\} = \sup_{a\in[-M,M]}\{as - f(a)\}.$$

Como $a \mapsto as - f(a)$ é função contínua, ela atinge seu supremo no intervalo $[-M, M]$. Concluímos então que o supremo é atingido se $s > 0$.

De maneira análoga, segue que o supremo é atingido no caso $s < 0$. ■

Até o presente momento a hipótese $p > 2$ ainda não foi utilizada (apenas utilizamos que $p > 1$). A necessidade de tal hipótese será esclarecida na demonstração do resultado a seguir.

Proposição 3.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $\omega \subset\subset \Omega$ um aberto não vazio e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por (3.1), para algum $p > 2$. Então existe $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ não negativa satisfazendo as condições*

$$\begin{cases}\rho|_\omega \equiv 0\\ \displaystyle\int_\Omega \rho(x)\,dx = 1\\ \rho f^*\left(2\dfrac{|\Delta\rho|}{\rho}\right) \in L^1(B)\end{cases} \tag{3.11}$$

em que $B := \{x \in \Omega \,|\, \rho(x) > 0\}$.

Demonstração:

Consideramos primeiramente que $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Sejam $B = (a,b) \subset \Omega \setminus \overline{\omega}$ um intervalo aberto limitado e $m > \dfrac{2}{p-2}$ qualquer. Definimos $\rho \equiv 0$ fora de B, $\rho = \exp(-(x-a)^{-m})$ suficientemente próximo a direita de a (ou seja, em um intervalo suficientemente pequeno $(a,\overline{a})$) e $\rho = \exp(-(b-x)^{-m})$ suficientemente próximo a esquerda de b (ou seja, em um intervalo suficientemente pequeno $(\overline{b},b)$) de maneira que $\displaystyle\int_{(a,\overline{a})\cup(\overline{b},b)} \rho < 1$. Então temos que ρ é função suave com suporte compacto definida em $\Omega \setminus [\overline{a},\overline{b}]$, não negativa e $\rho|_\omega \equiv 0$. Completando então sua definição em $[\overline{a},\overline{b}]$ de maneira que $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$, não negativa e $\displaystyle\int_\Omega \rho = 1$ segue que ρ satisfaz as duas primeiras condições de (3.11). Resta provar que

$$\rho f^*\left(2\frac{|\rho''|}{\rho}\right) \in L^1(B).$$

Notamos que próximo de a

$$\rho'(x) = m(x-a)^{-(m+1)}\exp(-(x-a)^{-m}),$$

$$\rho''(x) = (m^2(x-a)^{-(2m+2)} - m(m+1)(x-a)^{-(m+2)})\exp(-(x-a)^{-m}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{|\rho''(x)|}{\rho(x)} &= |m^2(x-a)^{-(2m+2)} - m(m+1)(x-a)^{-(m+2)}| \\ &\sim m^2(x-a)^{-(2m+2)} \text{ quando } x \to a^+.\end{aligned}$$

Pela equivalência acima e pelo Lema 3.2 deduzimos que

$$f^*\left(2\frac{|\rho''|}{\rho}\right) \sim p\Big(2m^2(x-a)^{-(2m+2)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} \exp\Big(m^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{1}{p}} (x-a)^{\frac{-(2m+2)}{p}}\Big) \tag{3.12}$$

quando $x \to a^+$.

Analogamente, próximo de b temos que

$$\rho'(x) = -m(b-x)^{-(m+1)}\exp(-(b-x)^{-m}),$$

$$\rho''(x) = (m^2(b-x)^{-(2m+2)} - m(m+1)(b-x)^{-(m+2)})\exp(-(b-x)^{-m}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{|\rho''(x)|}{\rho(x)} &= |m^2(b-x)^{-(2m+2)} - m(m+1)(b-x)^{-(m+2)}| \\ &\sim m^2(b-x)^{-(2m+2)} \text{ quando } x \to b^-.\end{aligned}$$

Pela equivalência acima e pelo Lema 3.2 deduzimos que

$$f^*\left(2\frac{|\rho''|}{\rho}\right) \sim p\Big(2m^2(b-x)^{-(2m+2)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} \exp\Big(m^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{1}{p}} (b-x)^{\frac{-(2m+2)}{p}}\Big) \tag{3.13}$$

quando $x \to b^-$.

Por (3.12), (3.13) e pelo fato de $\rho = \exp(-(x-a)^{-m})$ próximo de a e $\rho = \exp(-(b-x)^{-m})$ próximo de b concluímos que

$$\rho f^*\left(2\frac{|\rho''|}{\rho}\right) \sim p\Big(2m^2(x-a)^{-(2m+2)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} \exp\Big(m^{\frac{2}{p}}2^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{-(2m+2)}{p}} - (x-a)^{-m}\Big)$$

quando $x \to a^+$ e

$$\rho f^*\left(2\frac{|\rho''|}{\rho}\right) \sim p\Big(2m^2(b-x)^{-(2m+2)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} \exp\Big(m^{\frac{2}{p}}2^{\frac{1}{p}}(b-x)^{\frac{-(2m+2)}{p}} - (b-x)^{-m}\Big)$$

quando $x \to b^-$.

Por outro lado, como $m > \dfrac{2}{p-2}$, então $m > \dfrac{2m+2}{p}$. Inferimos então que

$$\lim_{x\to a^+} m^{\frac{2}{p}}2^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{-(2m+2)}{p}} - (x-a)^{-m} = -\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to a^+} p\Big(2m^2(x-a)^{-(2m+2)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} \exp\Big(m^{\frac{2}{p}}2^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{-(2m+2)}{p}} - (x-a)^{-m}\Big) = 0.$$

De maneira análoga, obtemos que

$$\lim_{x\to b^-} p\Big(2m^2(b-x)^{-(2m+2)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} \exp\Big(m^{\frac{2}{p}}2^{\frac{1}{p}}(b-x)^{\frac{-(2m+2)}{p}} - (b-x)^{-m}\Big) = 0.$$

Então $\rho f^*\left(2\dfrac{|\rho''|}{\rho}\right) \in L^1(B)$.

Consideramos agora que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$.

Sejam $B = B(c,r) \subset \Omega \setminus \overline{\omega}$ a bola aberta de raio $r > 0$ e centro $c \in \Omega$ e $m > \dfrac{2}{p-2}$ fixado. Definimos $\rho \equiv 0$ fora de B e $\rho = \exp(-(r-|x-c|)^{-m})$ suficientemente próximo à fronteira da bola B (ou seja, em uma região $A = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \overline{r} < |x-c| < r\}$ tal que $\overline{r}$ é suficientemente próximo a r) de maneira que $\int_A \rho < 1$. Então temos que ρ é função suave com suporte compacto definida em $\Omega \setminus \overline{B(c,\overline{r})}$, não negativa e $\rho|_\omega \equiv 0$. Completando então sua definição em $\overline{B(c,\overline{r})}$ de maneira que $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$, não negativa e $\int_\Omega \rho(x)\,dx = 1$ segue que ρ satisfaz as duas primeiras condições de (3.11). Resta provar que

$$\rho f^*\left(2\frac{|\Delta\rho|}{\rho}\right) \in L^1(B).$$

Notamos que próximo à fronteira da bola B

$$\begin{aligned}\Delta\rho(x) = &\Big(m^2(r-|x-c|)^{-(2m+2)} + \frac{m(r-|x-c|)^{-(m+1)}}{|x-c|} - \frac{mn(r-|x-c|)^{-(m+1)}}{|x-c|}\\ &- m(m+1)(r-|x-c|)^{-(m+2)}|x-c|\Big)\exp(-(r-|x-c|)^{-m}).\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{|\Delta\rho(x)|}{\rho(x)} =& \Big| m^2(r-|x-c|)^{-(2m+2)} + \frac{m(r-|x-c|)^{-(m+1)}}{|x-c|} - \frac{mn(r-|x-c|)^{-(m+1)}}{|x-c|} \\
& - m(m+1)(r-|x-c|)^{-(m+2)}|x-c| \Big| \\
\sim & \, m^2(r-|x-c|)^{-(2m+2)} \text{ quando } |x-c| \to r^-.
\end{aligned}
$$

Pela equivalência acima e pelo Lema 3.2 deduzimos que

$$
f^*\left(2\frac{|\Delta\rho|}{\rho}\right) \sim p\Big(2m^2(r-|x-c|)^{-(2m+2)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} \exp\Big(m^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{1}{p}} (r-|x-c|)^{\frac{-(2m+2)}{p}}\Big)
$$

quando $|x-c| \to r^-$.

E como $\rho = \exp(-(r-|x-c|)^{-m})$ próximo à fronteira da bola B chegamos em

$$
\begin{aligned}
\rho f^*\left(2\frac{|\Delta\rho|}{\rho}\right) \sim & \, p\Big(2m^2(r-|x-c|)^{-(2m+2)}\Big)^{1-\frac{1}{p}} \\
& \times \exp\Big(m^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{1}{p}} (r-|x-c|)^{\frac{-(2m+2)}{p}} - (r-|x-c|)^{-m}\Big)
\end{aligned}
$$

quando $|x-c| \to r^-$. Agora, usando o fato que $m > \dfrac{2}{p-2}$ de maneira análoga à demonstração do caso $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ obtemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{|x-c|\to r^-} & p\Big(2m^2(r-|x-c|)^{-(2m+2)}|x-c|\Big)^{1-\frac{1}{p}} \\
& \times \exp\Big(m^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{1}{p}} (r-|x-c|)^{\frac{-(2m+2)}{p}} |x-c|^{\frac{1}{p}} - (r-|x-c|)^{-m}\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

Então $\rho f^*\left(2\dfrac{|\Delta\rho|}{\rho}\right) \in L^1(B)$. ■

Na sequência demonstraremos o Teorema 1.4 usando Proposição 3.1 e Proposição 3.3. Mais especificamente provaremos que o problema (1.1), associado às funções f definidas na Proposição 3.1, não é exatamente controlável a trajetórias para nenhum $0 < T < \infty$.

Demonstração do Teorema 1.4:

Sejam f dada por (3.1), $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ não negativa como na Proposição 3.3 satisfazendo (3.11), com $B = \{x \in \Omega \,|\, \rho(x) > 0\}$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $v \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ e y solução de (1.1) com respeito a y_0 e v.

Multiplicando a equação em (1.1) por ρ obtemos que

$$
\rho y_t - \rho\Delta y + \rho f(y) = v\rho 1_\omega \text{ em Q.}
$$

Como $\rho \equiv 0$ em ω, então

$$
\rho y_t - \rho\Delta y + \rho f(y) = 0 \text{ em Q.}
$$

Integrando a igualdade acima em Ω chegamos em

$$\int_\Omega \rho y_t \, dx - \int_\Omega \rho \Delta y \, dx + \int_\Omega \rho f(y) \, dx = 0.$$

Isolando a primeira integral da igualdade anterior obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho y \, dx = \int_\Omega \rho \Delta y \, dx - \int_\Omega \rho f(y) \, dx. \tag{3.14}$$

Agora, pelo Teorema 2.64 (Identidade de Green)

$$\int_\Omega \rho \Delta y \, dx = \int_\Omega \Delta \rho y \, dx + \int_{\partial\Omega} \rho \frac{\partial y}{\partial \nu} - y \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \, dS,$$

em que ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Mas como $y = 0$ em $\partial\Omega \times (0, T)$ por (1.1) deduzimos que

$$\int_{\partial\Omega} y \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \, dS = 0.$$

E pelo fato de ρ ter suporte compacto em Ω inferimos que

$$\int_{\partial\Omega} \rho \frac{\partial y}{\partial \nu} \, dS = 0.$$

Logo,

$$\int_\Omega \rho \Delta y \, dx = \int_\Omega \Delta \rho y \, dx.$$

Substituindo a igualdade acima em (3.14) e usando que $f(s) = f(|s|)$ segue que

$$\frac{d}{dt}\left(- \int_\Omega \rho y \, dx \right) = \int_\Omega \rho f(|y|) \, dx - \int_\Omega y \Delta \rho \, dx. \tag{3.15}$$

Por outro lado, pelas definições de supremo e de f^*, para cada $x \in B$,

$$f^*\left(2\frac{|\Delta\rho(x)|}{\rho(x)} \right) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left\{ 2a \frac{|\Delta\rho(x)|}{\rho(x)} - f(a) \right\} \geq 2|y(x,t)| \frac{|\Delta\rho(x)|}{\rho(x)} - f(|y(x,t)|), \, \forall t \in (0, T).$$

Então, para cada $x \in B$,

$$|y(x,t)| \frac{|\Delta\rho(x)|}{\rho(x)} \leq \frac{1}{2} f^*\left(2\frac{|\Delta\rho(x)|}{\rho(x)} \right) + \frac{1}{2} f(|y(x,t)|), \, \forall t \in (0, T). \tag{3.16}$$

Pela desigualdade (3.16) e pelo fato de $\rho|_{\Omega \setminus B} = 0$ deduzimos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega y \Delta \rho \, dx \right| &\leq \int_\Omega |y||\Delta\rho| \, dx = \int_B |y||\Delta\rho| \, dx = \int_B \frac{\rho|\Delta\rho|}{\rho} |y| \, dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_B \rho f^*\left(2\frac{|\Delta\rho|}{\rho} \right) dx + \frac{1}{2} \int_B \rho f(|y|) \, dx \\
&= k + \frac{1}{2} \int_\Omega \rho f(|y|) \, dx, \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

em que

$$k := \frac{1}{2} \int_B \rho f^*\left(2\frac{|\Delta\rho|}{\rho} \right) dx$$

é uma constante e pela Proposição 3.3 $k < +\infty$.

Substituindo (3.17) em (3.15) obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(-\int_\Omega \rho y\,dx\Big) &= \int_\Omega \rho f(|y|)\,dx - \int_\Omega y\Delta\rho\,dx \\ &\geq \int_\Omega \rho f(|y|)\,dx - \Big|\int_\Omega y\Delta\rho\,dx\Big| \\ &\geq \int_\Omega \rho f(|y|)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \rho f(|y|)\,dx - k \\ &\geq -k + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho f(|y|)\,dx. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Como f é convexa e ρ é não negativa tal que $\int_\Omega \rho(x)\,dx = 1$, pela Proposição 3.3, podemos aplicar o Teorema 2.55. De fato, considerando a medida definida por $\mu(E) = \int_E \rho(x)\,dx$ segue pelo Teorema 2.55 que

$$f\Big(\int_\Omega |y|\,d\mu\Big) \leq \int_\Omega f(|y|)\,d\mu.$$

Logo, usando a derivada de Radon-Nikodyn $d\mu = \rho(x)\,dx$ (ver o livro de Bartle [3, Proposition 3.9]) deduzimos que

$$f\Big(\int_\Omega \rho|y|\,dx\Big) \leq \int_\Omega \rho f(|y|)\,dx. \tag{3.19}$$

Por outro lado, como $f(s) = f(-s) = f(|s|)$ e f é crescente em $[0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} f\Big(\int_\Omega \rho|y|\,dx\Big) &\geq f\Big(\Big|\int_\Omega \rho y\,dx\Big|\Big) \\ &\geq f\Big(-\int_\Omega \rho y\,dx\Big). \end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade anterior em (3.19) temos que

$$\int_\Omega \rho f(|y|)\,dx \geq f\Big(-\int_\Omega \rho y\,dx\Big).$$

E substituindo a última desigualdade obtida em (3.18), chegamos em

$$\frac{d}{dt}\Big(-\int_\Omega \rho y\,dx\Big) \geq -k + \frac{1}{2} f\Big(-\int_\Omega \rho y\,dx\Big).$$

Denotando por

$$\begin{aligned} z(t) &:= -\int_\Omega \rho(x) y(x,t)\,dx, \\ z_0 &:= -\int_\Omega \rho(x) y_0(x)\,dx, \end{aligned}$$

concluímos que

$$\begin{cases} z'(t) \geq -k + \frac{1}{2} f(z(t)), \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Consideramos então um $y_0 \in L^2(\Omega)$ satisfazendo as seguintes condições

$$z_0 = -\int_\Omega \rho(x) y_0(x)\, dx > 0, \;\; f(z_0) > 2k.$$

Tal y_0 existe uma vez que $f(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$. Seja $z : [0, \overline{T}) \to \mathbb{R}$ solução de classe C^1 de (3.20), com $0 < \overline{T} < \infty$.

Notamos que z é crescente. De fato, pela desigualdade em (3.20)

$$z'(0) \geq -k + \frac{1}{2} f(z(0)) = -k + \frac{1}{2} f(z_0) > -k + \frac{1}{2} 2k = 0.$$

Suponhamos por absurdo que z não é crescente. Então, como z é C^1 e $z'(0) > 0$, existe $0 < T^* < \overline{T}$ tal que

$$\begin{aligned} &z'(T^*) = 0, \\ &z'(t) \geq 0, \;\; \text{em } [0, T^*). \end{aligned}$$

Assim, deduzimos que

$$0 < z_0 = z(0) < z(T^*).$$

Como f é crescente em $[0, +\infty)$ chegamos em

$$f(z_0) = f(z(0)) < f(z(T^*)).$$

Dessa maneira conluímos que

$$0 = -k + \frac{1}{2} 2k < -k + \frac{1}{2} f(z_0) < -k + \frac{1}{2} f(z(T^*)) \leq z'(T^*).$$

Chegamos então em uma contradição com o fato que $z'(T^*) = 0$. Logo, z é crescente.

Definindo a função

$$G(z_0; s) := \int_{z_0}^{s} \frac{2}{f(u) - 2k}\, du, \;\; \forall s \geq z_0,$$

temos por (3.20) que, para todo $t \in [0, \overline{T})$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(z_0; z(t)) = \frac{d}{ds} G(z_0; s)\Big|_{z(t)} \cdot z'(t) &= \frac{2z'(t)}{f(z(t)) - 2k} \\ &\geq \frac{2}{f(z(t)) - 2k} \Big(-k + \frac{1}{2} f(z(t)) \Big) \geq 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Notamos ainda que a integral

$$\int_{z_0}^{\infty} \frac{2}{f(u) - 2k}\, du$$

converge, ou seja,

$$G(z_0; \infty) := \int_{z_0}^{\infty} \frac{2}{f(u) - 2k}\, du < \infty. \tag{3.22}$$

De fato, como $u\ln^p(1+u) \to +\infty$ quando $u \to +\infty$, então existe $r \geq z_0$ tal que $u\ln^p(1+u) - 2k > 0$, para todo $u \geq r$. Assim, pela Proposição 3.1, $f(s) \sim s\ln^p(1+s)$ quando $s \to \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \frac{2}{f(u)-2k}\,du \text{ converge} &\Longleftrightarrow \int_r^\infty \frac{2}{u\ln^p(1+u)-2k}\,du \text{ converge} \\ &\Longleftrightarrow \int_r^\infty \frac{2}{u\ln^p(1+u)}\,du \text{ converge.} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Por outro lado, como $p > 1$, então

$$\int_r^\infty \frac{2}{u\ln^p(u)}\,du = 2\lim_{s\to\infty}\int_r^s \frac{1}{u\ln^p(u)}\,du = 2\lim_{s\to\infty}\frac{\ln^{1-p}(s)}{1-p} - 2\frac{\ln^p(r)}{1-p} = -2\frac{\ln^p(r)}{1-p}.$$

Logo, a integral

$$\int_r^\infty \frac{2}{u\ln^p(1+u)}\,du$$

converge. Então por (3.23) temos que

$$\int_r^\infty \frac{2}{f(u)-2k}\,du$$

converge. Dessa maneira concluímos que (3.22) é válida.

Em seguida, obtemos uma estimativa para o tempo $\overline{T}$. Pelo Teorema do Valor Médio ([21, Capítulo $VIII$, Teorema 7]), para cada $t \in (0,\overline{T})$, existe $\delta = \delta(t) \in (0,t)$ tal que

$$\frac{G(z_0;z(t)) - G(z_0;z(0))}{t-0} = \frac{d}{dt}G(z_0;z(\delta)).$$

Mas pela definição de $G(z_0;\cdot)$

$$G(z_0;z(0)) = \int_{z_0}^{z(0)} \frac{2}{f(u)-2k}\,du = \int_{z_0}^{z_0} \frac{2}{f(u)-2k}\,du = 0.$$

Portanto,

$$\frac{G(z_0;z(t))}{t} = \frac{d}{dt}G(z_0;z(\delta)).$$

Assim, substituindo (3.21) na igualdade anterior chegamos em

$$\frac{G(z_0;z(t))}{t} \geq 1,$$

ou seja,

$$G(z_0;z(t)) \geq t, \;\; \forall t \in [0,\overline{T}). \tag{3.24}$$

Caso z não seja limitada, então

$$\lim_{t\to\overline{T}^-} z(t) = \infty, \tag{3.25}$$

pois z é crescente. Por (3.24) temos que

$$\overline{T} = \lim_{t \to \overline{T}^-} t \leq \lim_{t \to \overline{T}^-} G(z_0; z(t)).$$

Considerando a mudança de variáveis $h = z(t)$ segue por (3.25) que

$$\overline{T} \leq \lim_{t \to \overline{T}^-} G(z_0; z(t)) = \lim_{h \to \infty} G(z_0; h) = G(z_0; \infty) = \int_{z_0}^{\infty} \frac{2}{f(u) - 2k}\, du.$$

Por outro lado, caso z seja limitada, então

$$\lim_{t \to \overline{T}^-} z(t) \text{ existe e é finito,}$$

pois z é crescente. Logo, pela desigualdade (3.24) deduzimos que

$$\overline{T} = \lim_{t \to \overline{T}^-} t \leq \lim_{t \to \overline{T}^-} G(z_0; z(t)) \leq G(z_0; \infty) = \int_{z_0}^{\infty} \frac{2}{f(u) - 2k}\, du.$$

Para obter a segunda desigualdade acima foi usado que $G(z_0; z(t))$ é crescente sobre $[0, \overline{T})$ em vista de (3.21).

Concluímos que a seguinte estimativa para o tempo $\overline{T}$ é válida

$$\overline{T} \leq \int_{z_0}^{\infty} \frac{2}{f(u) - 2k}\, du < \infty. \tag{3.26}$$

Então $\overline{T} \to 0$ quando $z_0 \to \infty$, ou seja, o tempo máximo de definição de z vai a zero quando $z_0 \to \infty$.

Seja $T > 0$ dado. Pela definição de z_0 existe $y_0 \in L^2(\Omega)$ de maneira que z_0 é suficientemente grande e satisfaz

$$\int_{z_0}^{\infty} \frac{2}{f(u) - 2k}\, du < T.$$

Consideramos então y solução do problema (1.1) com respeito a um controle arbitrário $v \in L^\infty(\omega \times (0, T))$ e a condição inicial y_0. Pela estimativa (3.26) o tempo máximo de definição $\overline{T}$ de

$$z(t) = -\int_\Omega \rho(x) y(x, t)\, dx$$

satisfaz a seguinte desigualdade

$$\overline{T} \leq \int_{z_0}^{\infty} \frac{2}{f(u) - 2k}\, du < T.$$

Logo, z não pode ser definida no tempo T. Concluímos então que y não pode ser definida globalmente em $[0, T]$. Portanto, o problema (1.1) não possui a propriedade de controlabilidade exata a trajetórias para nenhum tempo $T > 0$. ■

3.2 Um resultado afirmativo sobre controlabilidade exata a trajetórias

Em contrapartida ao Teorema 1.4, nesta seção provaremos o Teorema 1.5, um resultado afirmativo sobre a controlabilidade exata a trajetórias para o problema (1.1).

3.2.1 Desigualdade de Carleman e estimativas de observabilidade

De maneira geral, a controlabilidade exata a trajetórias de um problema linear está relacionada a uma desigualdade de observabilidade envolvendo o seu sitema adjunto. Neste caso, consideramos o sistema adjunto para o problema (1.1) linearizado

$$\begin{cases} -u_t - \Delta u + au = 0 & \text{em Q}, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x,T) = u_T(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.27}$$

em que $a = a(x,t) \in L^\infty(Q)$ e $u_T = u_T(x) \in L^2(\Omega)$. Dedicamos esta seção à demonstração de uma desigualdade de observabilidade apropriada para o sistema (3.27).

O primeiro resultado a ser apresentado relativo ao problema (3.27) é uma desigualdade de Carleman. Contudo, antes de enunciá-lo, fixemos $\eta = \eta(x)$ como no Lema 2.68 e as seguintes definições.

Definição 3.4. *Denotamos por K uma constante positiva tal que*

$$K \geq 5 \max_{\overline{\Omega}} \eta - 6 \min_{\overline{\Omega}} \eta.$$

Definimos as seguintes funções auxiliares

$$\begin{cases} \tau = \eta + K, \\ \overline{\tau} = \dfrac{5}{4} \max_{\overline{\Omega}} \tau, \\ \rho = \exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau), \\ \phi = \dfrac{\rho}{t(T-t)}, \\ \Phi = \exp(\phi), \end{cases}$$

em que $\alpha = \alpha(\Omega, \omega) > 0$ é constante a ser determinada posteriormente.

Enunciamos então a seguinte desigualdade de Carleman, cuja demonstração encontra-se no Apêndice A.

Proposição 3.5 (Desigualdade de Carleman global). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e $\omega \subset\subset \Omega$ um aberto não vazio. Existem constantes*

$\overline{C} > 0$ *e* $s_1 > 0$ *tais que*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\iint_Q \Phi^{-2s} t(T-t)(|f_t|^2 + |\Delta f|^2)\, dx\, dt \\
&\qquad + s\iint_Q \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-1}|\nabla f|^2\, dx\, dt + s^3\iint_Q \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}|f|^2\, dx\, dt \\
&\qquad \leq \overline{C}\left(\iint_Q \Phi^{-2s}|f_t + \Delta f|^2\, dx\, dt + s^3 \iint_{\omega\times(0,T)} \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}|f|^2\, dx\, dt\right),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

para toda $f \in A = \{f \in C^2(\overline{Q}) \mid f = 0$ *sobre* $\Sigma\}$ *e* $s \geq s_1$. *Além disso,*

$$\begin{cases} \overline{C} = \overline{C}(\Omega,\omega), \\ s_1 = \kappa(\Omega,\omega)(T+T^2) \end{cases}$$

em que $\kappa > 0$.

Utilizando a Proposição 3.5 podemos estabelecer a primeira estimativa de observabilidade para o problema (3.27).

Proposição 3.6 (Estimativa de observabilidade). *Existe uma constante positiva* $C = C(\Omega,\omega)$ *satisfazendo*

$$||u(\cdot,0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp\left(C\left(1 + \frac{1}{T} + T||a||_{L^\infty(Q)} + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\right)\right)\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\, dx\, dt\right)^2,$$

para todo $u_T \in L^2(\Omega)$ *e* $T > 0$, *em que* u *é a solução de (3.27) com respeito à condição final* u_T.

Demonstração:

Dado $u_T \in L^2(\Omega)$, seja u solução de (3.27) com respeito à condição final u_T. Como a solução u pode ser aproximada por elementos do espaço A definido na Proposição 3.5 podemos aplicar a desigualdade (3.28) para u. Dessa maneira temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\iint_Q \Phi^{-2s} t(T-t)(|u_t|^2 + |\Delta u|^2)\, dx\, dt \\
&\qquad + s\iint_Q \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-1}|\nabla u|^2\, dx\, dt + s^3\iint_Q \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}|u|^2\, dx\, dt \\
&\qquad \leq \overline{C}\left(\iint_Q \Phi^{-2s}|u_t + \Delta u|^2\, dx\, dt + s^3 \iint_{\omega\times(0,T)} \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}|u|^2\, dx\, dt\right),
\end{aligned}$$

para $s \geq s_1$.

Pela Definição 3.4 sabemos que $\Phi > 0$. Então o primeiro termo da esquerda na desigualdade acima é não negativo. Percebemos ainda que $u_t + \Delta u = au$ pois u é solução de (3.27). Logo,

$$\begin{aligned}
&s\iint_Q \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-1}|\nabla u|^2\, dx\, dt + s^3\iint_Q \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}|u|^2\, dx\, dt \\
&\qquad \leq \overline{C}\left(\iint_Q \Phi^{-2s}|au|^2\, dx\, dt + s^3 \iint_{\omega\times(0,T)} \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}|u|^2\, dx\, dt\right),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

para $s \geq s_1$.

Agora, para todo $t \in (0,T)$, temos que $4t^2 - 4Tt + T^2 \geq 0$. Então

$$\frac{T^6}{2^6} = \left(\frac{T^2}{4}\right)^3 \geq (Tt - t^2)^3 = t^3(T-t)^3$$

e

$$\frac{\Phi^{-2s}T^6||a||^2_{L^\infty(Q)}|u|^2}{2^6t^3(T-t)^3} \geq \Phi^{-2s}||a||^2_{L^\infty(Q)}|u|^2 \geq \Phi^{-2s}|au|^2 \text{ q.t.p. em } Q.$$

Integrando a desigualdade anterior obtemos

$$\iint_Q \Phi^{-2s}|au|^2\,dx\,dt \leq \frac{T^6||a||^2_{L^\infty(Q)}}{2^6}\iint_Q \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}|u|^2\,dx\,dt.$$

Se

$$s \geq s_2 := \max\left\{s_1, \overline{C}^{\frac{1}{3}}\frac{T^2}{2^2}||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\right\},$$

então segue que

$$\begin{aligned} s^3\iint_Q \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}|u|^2\,dx\,dt &\geq \overline{C}\frac{T^6||a||_{L^\infty(Q)}}{2^6}\iint_Q \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}|u|^2\,dx\,dt \\ &\geq \overline{C}\iint_Q \Phi^{-2s}|au|^2\,dx\,dt. \end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (3.29) obtemos que

$$\iint_Q \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-1}|\nabla u|^2\,dx\,dt \leq \overline{C}s^2\iint_{\omega\times(0,T)} \Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}|u|^2\,dx\,dt, \tag{3.30}$$

para cada $s \geq s_2$.

Na sequência estimamos os termos $\Phi^{-2s}(t(T-t))^{-1}$ e $\Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}$. Com esta finalidade definimos, para cada $x \in \Omega$,

$$f_x(t) = t^3(T-t)^3\exp\left(\frac{2s\rho(x)}{t(T-t)}\right) = t^3(T-t)^3\Phi(x,t)^{2s},\ t \in (0,T).$$

De onde segue que

$$\frac{1}{f_x(t)} = \Phi(x,t)^{-2s}(t(T-t))^{-3}. \tag{3.31}$$

Considerando a mudança de variável $v(t) = t(T-t)$, com $t \in (0,T)$, temos que $v \in \left(0, \frac{T^2}{4}\right]$. De fato, notamos que o máximo de $v(t) = t(T-t)$ ocorre em $t = T/2$, ou seja, o máximo de v é $\frac{T^2}{4}$. Além disso, $v(t)$ é estritamente maior que zero em $(0,T)$ e $v(t) \to 0$ quando $t \to 0+$. Logo, $v \in \left(0, \frac{T^2}{4}\right]$.

Definimos ainda, para cada $x \in \Omega$,

$$g_x(v) = v^3\exp\left(\frac{2s\rho(x)}{v}\right),\ v \in \left(0, \frac{T^2}{4}\right].$$

Logo,

$$f_x(t) = (t(T-t))^3 \exp\left(\frac{2s\rho(x)}{t(T-t)}\right) = v^3 \exp\left(\frac{2s\rho(x)}{v}\right) = g_x(v).$$

Portanto,

$$\inf_{t\in(0,T)}\{f_x(t)\} = \inf_{v\in\left(0,\frac{T^2}{4}\right]}\{g_x(v)\}.$$

Por outro lado, notamos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}g_x(v) &= 3v^2\exp\left(\frac{2s\rho(x)}{v}\right) - 2s\rho(x)v\exp\left(\frac{2s\rho(x)}{v}\right)\\ &= v\exp\left(\frac{2s\rho(x)}{v}\right)(3v - 2s\rho(x)).\end{aligned}$$

Assim, para $v > 0$, temos que

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dv}g_x(v) = 0, & \text{se } v = \dfrac{2}{3}s\rho(x),\\ \dfrac{d}{dv}g_x(v) < 0, & \text{se } v < \dfrac{2}{3}s\rho(x),\\ \dfrac{d}{dv}g_x(v) > 0, & \text{se } v > \dfrac{2}{3}s\rho(x).\end{cases}$$

Analisando então o sinal da derivada de g_x deduzimos que $\dfrac{2}{3}s\rho(x)$ é um ponto de mínimo de g_x. Assim,

$$\begin{aligned}\inf_{t\in(0,T)}\{f_x(t)\} &= \inf_{v\in\left(0,\frac{T^2}{4}\right]}\{g_x(v)\}\\ &= \begin{cases} g_x\left(\dfrac{2}{3}s\rho(x)\right), & \text{se } \dfrac{T^2}{4} > \dfrac{2}{3}s\rho(x),\\ g_x\left(\dfrac{T^2}{4}\right), & \text{se } \dfrac{T^2}{4} \le \dfrac{2}{3}s\rho(x)\end{cases}\\ &= \begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}s\rho(x)\right)^3\exp(3), & \text{se } \dfrac{T^2}{4} > \dfrac{2}{3}s\rho(x),\\ \dfrac{T^6}{2^6}\exp\left(\dfrac{8s\rho(x)}{T^2}\right), & \text{se } \dfrac{T^2}{4} \le \dfrac{2}{3}s\rho(x).\end{cases}\end{aligned} \tag{3.32}$$

Se

$$s \ge s_3 := \max\left\{s_2, 3T^2\left(8\min_{\overline{\Omega}}\rho(x)\right)^{-1}\right\},$$

como $\rho > 0$ em $\overline{\Omega}$, segue que

$$\frac{2}{3}s\rho(x) \ge \frac{2}{3}s_3\rho(x) \ge \frac{2}{3}3T^2\left(8\min_{\overline{\Omega}}\rho(x)\right)^{-1}\rho(x) = \frac{T^2}{4}\frac{\rho(x)}{\min\limits_{\overline{\Omega}}\rho(x)} \ge \frac{T^2}{4}.$$

Logo, temos por (3.32) que

$$\inf_{t\in(0,T)}\{f_x(t)\} = \frac{T^6}{2^6}\exp\left(\frac{8s\rho(x)}{T^2}\right) \ge \frac{T^6}{2^6}\exp\left(\frac{8s\min\limits_{\overline{\Omega}}\rho(x)}{T^2}\right),$$

se $s \geq s_3$.

Definindo a constante positiva

$$C_1 = 8 \min_{\overline{\Omega}} \rho(x)$$

concluímos que

$$\inf_{t \in (0,T)} \{f_x(t)\} \geq \frac{T^6}{2^6} \exp\Big(\frac{C_1 s}{T^2}\Big),$$

se $s \geq s_3$. A constante C_1 definida é positiva pois $\rho > 0$ em $\overline{\Omega}$ e $\overline{\Omega}$ é compacto.

Pela desigualdade acima e por (3.31) obtemos que

$$||\Phi^{-2s}(t(T-t))^{-3}||_{L^\infty(Q)} = \left|\left|\frac{1}{f_x(t)}\right|\right|_{L^\infty(Q)} \leq \frac{2^6}{T^6} \exp\Big(-\frac{C_1 s}{T^2}\Big), \tag{3.33}$$

se $s \geq s_3$.

Por outro lado, notamos que

$$\begin{aligned} s_3 &= \max\bigg\{s_2, 3T^2\Big(8 \min_{\overline{\Omega}} \rho(x)\Big)^{-1}\bigg\} \\ &= \max\bigg\{\max\Big\{s_1, \overline{C}T^2||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big\}, 3T^2\Big(8 \min_{\overline{\Omega}} \rho(x)\Big)^{-1}\bigg\} \\ &= \max\bigg\{s_1, \overline{C}T^2||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}, 3T^2\Big(8 \min_{\overline{\Omega}} \rho(x)\Big)^{-1}\bigg\}. \end{aligned}$$

Definindo a constante positiva

$$C_2 = \max\bigg\{\kappa, \overline{C}, 3\Big(8 \min_{\overline{\Omega}} \rho(x)\Big)^{-1}\bigg\}$$

temos que

$$s_4 := C_2\Big(T + \Big(1 + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)T^2\Big) \geq s_3. \tag{3.34}$$

Aplicando a desigualdade (3.33), para $s = s_4$, chegamos na seguinte estimativa para o termo $\Phi^{-2s_4}(t(T-t))^{-3}$.

$$||\phi^{-2s_4}(t(T-t))^{-3}||_{L^\infty(Q)} \leq \frac{2^6}{T^6} \exp\Big(-C_1 C_2\Big(1 + \frac{1}{T} + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big). \tag{3.35}$$

Estimamos agora o termo $\phi^{-2s}(t(T-t))^{-1}$. Com esta finalidade definimos, para cada $x \in \Omega$,

$$h_x(t) = t(T-t) \exp\Big(\frac{2s\rho(x)}{t(T-t)}\Big) = t(T-t)\Phi(x,t)^{2s},\ t \in \Big[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\Big].$$

De onde, segue que

$$\frac{1}{h_x(t)} = \Phi(x,t)^{-2s}(t(T-t))^{-1}. \tag{3.36}$$

Considerando a mudança de variável $v(t) = t(T-t)$ com $t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$ temos que $v \in \left[\frac{3T^2}{16}, \frac{T^2}{4}\right]$. De fato, notamos que $v'(t) = T - 2t$. Logo, $v'(t) > 0$ em $\left[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right)$, $v'(t)$ em $\left(\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}\right]$ e $v'\left(\frac{T}{2}\right) = 0$. Assim, $v(t)$ atinge seu máximo em $\frac{T}{2}$, $v\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{T^2}{4}$. Já seu mínimo é atingido em um dos extremos do intervalo. Como $v\left(\frac{T}{4}\right) = v\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{3T^2}{16}$, segue que $v \in \left[\frac{3T^2}{16}, \frac{T^2}{4}\right]$.

Definimos ainda, para cada $x \in \Omega$,

$$j_x(v) = v \exp\left(\frac{2s\rho(x)}{v}\right), \, v \in \left[\frac{3T^2}{16}, \frac{T^2}{4}\right].$$

Logo,

$$h_x(t) = t(T-t)\exp\left(\frac{2s\rho(x)}{t(T-t)}\right) = v\exp\left(\frac{2s\rho(x)}{v}\right) = j_x(v).$$

Portanto,

$$\sup_{t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]} \{h_x(t)\} = \sup_{v \in \left[\frac{3T^2}{16}, \frac{T^2}{4}\right]} \{j_x(v)\}.$$

Por outro lado, notamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} j_x(v) &= \exp\left(\frac{2s\rho(x)}{v}\right) - \frac{2s\rho(x)}{v}\exp\left(\frac{2s\rho(x)}{v}\right) \\ &= \frac{1}{v}\exp\left(\frac{2s\rho(x)}{v}\right)(v - 2s\rho(x)). \end{aligned}$$

Assim, para $v > 0$, temos que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dv} j_x(v) = 0, & \text{se } v = 2s\rho(x), \\ \dfrac{d}{dv} j_x(v) < 0, & \text{se } v < 2s\rho(x), \\ \dfrac{d}{dv} j_x(v) > 0, & \text{se } v > 2s\rho(x). \end{cases}$$

Se $s \geq T^2\left(8 \min\limits_{\overline{\Omega}} \rho(x)\right)^{-1}$, então segue que

$$2s\rho(x) \geq \frac{T^2}{4} \frac{\rho(x)}{\min\limits_{\overline{\Omega}} \rho(x)} \geq \frac{T^2}{4}.$$

Logo, $\frac{d}{dv} j_x(v) \leq 0$ em $\left[\frac{3T^2}{16}, \frac{T^2}{4}\right]$ se $s \geq T^2\left(8 \min\limits_{\overline{\Omega}} \rho(x)\right)^{-1}$. De onde, segue que

$$\sup_{t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]} \{h_x(t)\} = \sup_{v \in \left[\frac{3T^2}{16}, \frac{T^2}{4}\right]} \{j_x(v)\} = j_x\left(\frac{3T^2}{16}\right) = \frac{3T^2}{16}\exp\left(\frac{32s\rho(x)}{3T^2}\right),$$

se $s \geq T^2\Big(8\min\limits_{\overline{\Omega}}\rho(x)\Big)^{-1}$.

Pela igualdade acima e por (3.36) temos que

$$\Phi(x,t)^{-2s}(t(T-t))^{-1} = \frac{1}{h_x(t)} \geq \frac{16}{3T^2}\exp\Big(-\frac{32s\rho(x)}{3T^2}\Big) \text{ em } \Omega\times\Big[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\Big],$$

se $s \geq T^2\Big(8\min\limits_{\overline{\Omega}}\rho(x)\Big)^{-1}$.

Definindo a constante positiva

$$C_3 = \frac{32}{3}\max_{\overline{\Omega}}\rho(x)$$

obtemos que

$$\Phi^{-2s}(t(T-t))^{-1} \geq \frac{16}{3T^2}\exp\Big(-\frac{C_3 s}{T^2}\Big) \text{ em } \Omega\times\Big[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\Big], \tag{3.37}$$

se $s \geq T^2\Big(8\min\limits_{\overline{\Omega}}\rho(x)\Big)^{-1}$. Notamos ainda que

$$s_4 \geq s_3 \geq T^2\Big(8\min_{\overline{\Omega}}\rho(x)\Big)^{-1}.$$

Aplicando a desigualdade (3.37), para $s = s_4$, obtemos a seguinte estimativa para o termo $\Phi^{-2s_4}(t(T-t))^{-1}$

$$\Phi^{-2s_4}(t(T-t))^{-1} \geq \frac{16}{3T^2}\exp\Big(-C_3C_2\Big(1+\frac{1}{T}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big) \tag{3.38}$$

em $\Omega\times\Big[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\Big]$.

Utilizando as estimativas (3.35) e (3.38) deduzimos que

$$\begin{aligned}
&\iint_{\omega\times(0,T)}\Phi^{-2s_4}(t(T-t))^{-3}|u|^2\,dx\,dt\\
&\qquad\leq \frac{2^6}{T^6}\exp\Big(-C_1C_2\Big(1+\frac{1}{T}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)\iint_{\omega\times(0,T)}|u|^2\,dx\,dt
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\iint_Q \Phi^{-2s_4}(t(T-t))^{-1}|\nabla u|^2\,dx\,dt &\geq \iint_{\Omega\times[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}]}\Phi^{-2s_4}(t(T-t))^{-1}|\nabla u|^2\,dx\,dt\\
&\geq \frac{16}{3T^2}\exp\Big(-C_3C_2\Big(1+\frac{1}{T}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)\\
&\quad\times\iint_{\Omega\times[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}]}|\nabla u|^2\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas desigualdades em (3.30) temmos que

$$\begin{aligned}
&\frac{2^4}{3T^2}\exp\Big(-C_3C_2\Big(1+\frac{1}{T}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)\iint_{\Omega\times[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}]}|\nabla u|^2\,dx\,dt\\
&\qquad\leq \iint_Q \Phi^{-2s_4}(t(T-t))^{-1}|\nabla u|^2\,dx\,dt\\
&\qquad\leq \overline{C}s_4^2\iint_{\omega\times(0,T)}\Phi^{-2s_4}(t(T-t))^{-3}|u|^2\,dx\,dt\\
&\qquad\leq \overline{C}s_4^2\frac{2^6}{T^6}\exp\Big(-C_1C_2\Big(1+\frac{1}{T}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)\iint_{\omega\times(0,T)}|u|^2\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Assim, isolando a integral a esquerda obtemos que

$$\iint_{\Omega\times\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right]} |\nabla u|^2\,dx\,dt \leq 12\overline{C}\frac{s_4^2}{T^4}\exp\Big(C_2(C_3-C_1)\Big(1+\frac{1}{T}+||a||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Big)\Big)$$
$$\times \iint_{\omega\times(0,T)} |u|^2\,dx\,dt.$$

E utilizado que $x \leq \exp(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\iint_{\Omega\times\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right]} |\nabla u|^2\,dx\,dt \leq \frac{s_4^2}{T^4}\exp\Big(C_2(C_3-C_1)\Big(1+\frac{1}{T}+||a||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Big)+12\overline{C}\Big)$$
$$\times \iint_{\omega\times(0,T)} |u|^2\,dx\,dt.$$

Definindo a constante positiva

$$C_4 = (C_3-C_1)C_2 + 12\overline{C}$$

concluímos que

$$\iint_{\Omega\times\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right]} |\nabla u|^2\,dx\,dt \leq \frac{s_4^2}{T^4}\exp\Big(C_4\Big(1+\frac{1}{T}+||a||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Big)\Big)\iint_{\omega\times(0,T)} |u|^2\,dx\,dt. \qquad (3.39)$$

Por outro lado, pela definição de s_4 em (3.34) e pelo fato de $x \leq \exp(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, percebemos que

$$\begin{aligned}
\frac{s_4^2}{T^4} &= \Big(C_2\Big(1+\frac{1}{T}+||a||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Big)\Big)^2\\
&\leq \Big(\exp\Big(C_2\Big(1+\frac{1}{T}+||a||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Big)\Big)\Big)^2\\
&\leq \exp\Big(2C_2\Big(1+\frac{1}{T}+||a||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (3.39) chegamos em

$$\iint_{\Omega\times\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right]} |\nabla u|^2\,dx\,dt \leq \exp\Big((C_4+2C_2)\Big(1+\frac{1}{T}+||a||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Big)\Big)\iint_{\omega\times(0,T)} |u|^2\,dx\,dt.$$

Definindo a constante positiva

$$C_5 = C_4 + 2C_2$$

temos que

$$\iint_{\Omega\times\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right]} |\nabla u|^2\,dx\,dt \leq \exp\Big(C_5\Big(1+\frac{1}{T}+||a||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Big)\Big)\iint_{\omega\times(0,T)} |u|^2\,dx\,dt. \qquad (3.40)$$

Por outro lado, multiplicando por u a equação em (3.27) e integrando em Ω,

$$-\int_\Omega u u_t\,dx - \int_\Omega u\Delta u\,dx + \int_\Omega a|u|^2\,dx = 0.$$

Notamos que

$$-\int_\Omega u u_t \, dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 \, dx$$

e como $u = 0$ sobre Σ por (3.27), então

$$-\int_\Omega u \Delta u \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Logo,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega a|u|^2 \, dx = 0.$$

Isolando a primeira integral a esquerda obtemos a seguinte desigualdade

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 \, dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega a|u|^2 \, dx \, dt \leq ||a||_{L^\infty(Q)} \int_\Omega |u|^2 \, dx.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 \, dx + ||a||_{L^\infty(Q)} \int_\Omega |u|^2 \, dx \geq 0.$$

E como

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\exp(2t||a||_{L^\infty(Q)}) \int_\Omega |u|^2 \, dx\Big) \\
&\qquad = 2\exp(2t||a||_{L^\infty(Q)})\Big(||a||_{L^\infty(Q)} \int_\Omega |u|^2 \, dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 \, dx\Big),
\end{aligned}$$

então segue que

$$\frac{d}{dt}\Big(\exp(2t||a||_{L^\infty(Q)}) \int_\Omega |u|^2 \, dx\Big) \geq 0. \tag{3.41}$$

Seja $t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$, integrando a desigualdade acima em $\left[\frac{T}{4}, t\right]$ obtemos

$$\exp(2t||a||_{L^\infty(Q)}) \int_\Omega |u(x,t)|^2 \, dx - \exp\Big(\frac{T}{2}||a||_{L^\infty(Q)}\Big) \int_\Omega \Big|u\Big(x, \frac{T}{4}\Big)\Big|^2 \, dx \geq 0.$$

Isolando a primeira integral a esquerda e usando que $t \geq \dfrac{3T}{4}$ deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x,t)|^2 \, dx &\geq \exp\Big(\Big(\frac{T}{2} - 2t\Big)||a||_{L^\infty(Q)}\Big) \int_\Omega \Big|u\Big(x, \frac{T}{4}\Big)\Big|^2 \, dx \\
&\geq \exp(-T||a||_{L^\infty(Q)}) \int_\Omega \Big|u\Big(x, \frac{T}{4}\Big)\Big|^2 \, dx,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

para cada $t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$.

Por outro lado, como $u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$ para todo $t \in [0, T]$, podemos aplicar a desigualdade de Poincaré (Teorema 2.42) para $u(\cdot, t)$. Então existe constante $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ tal que

$$\iint_{\Omega \times [\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}]} |\nabla u|^2 \, dx \, dt \geq \lambda \iint_{\Omega \times [\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}]} |u|^2 \, dx \, dt.$$

Substituindo a desigualdade acima em (3.40) temos que

$$\lambda \iint_{\Omega\times\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right]} |u|^2\,dx\,dt \leq \exp\Big(C_5\Big(1+\frac{1}{T}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)\iint_{\omega\times(0,T)}|u|^2\,dx\,dt. \tag{3.43}$$

Integrando (3.42) em $\left[\dfrac{T}{4},\dfrac{3T}{4}\right]$ e multiplicando ambos os lados por λ obtemos

$$\begin{aligned}\lambda \iint_{\Omega\times\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right]} |u|^2\,dx\,dt &\geq \lambda\exp(-T||a||_{L^\infty(Q)})\int_\Omega\Big|u\Big(x,\frac{T}{4}\Big)\Big|^2\,dx\int_{\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right]}dt\\ &= \lambda\frac{T}{2}\exp(-T||a||_{L^\infty(Q)})\int_\Omega\Big|u\Big(x,\frac{T}{4}\Big)\Big|^2\,dx.\end{aligned}$$

Substituindo (3.43) na desigualdade anterior e usando que $x \leq \exp(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned}\lambda\frac{T}{2}\exp(-T||a||_{L^\infty(Q)})\int_\Omega\Big|u\Big(x,\frac{T}{4}\Big)\Big|^2\,dx &\leq \exp\Big(C_5\Big(1+\frac{1}{T}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)\\ &\quad\times\iint_{\omega\times(0,T)}|u|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Isolando a integral a esquerda concluímos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega\Big|u\Big(x,\frac{T}{4}\Big)\Big|^2\,dx \leq{}& \frac{2}{\lambda T}\exp\Big(C_5\Big(1+\frac{1}{T}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)+T||a||_{L^\infty(Q)}\Big)\\ &\times\iint_{\omega\times(0,T)}|u|^2\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Por outro lado, integrando a desigualdade (3.41) em $\left[0,\dfrac{T}{4}\right]$ obtemos que

$$||u(\cdot,0)||^2_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x,0)|^2\,dx \leq \exp\Big(\frac{T}{2}||a||_{L^\infty(Q)}\Big)\int_\Omega\Big|u\Big(x,\frac{T}{4}\Big)\Big|^2\,dx.$$

Substituindo (3.44) na desigualdade anterior e usando que $x \leq \exp(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}||u(\cdot,0)||^2_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{2}{\lambda T}\exp\Big(C_5\Big(1+\frac{1}{T}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)+\frac{3}{2}T||a||_{L^\infty(Q)}\Big)\iint_{\omega\times(0,T)}|u|^2\,dx\,dt\\ &\leq \exp\Big(C_5\Big(1+\frac{1}{T}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)+\frac{3}{2}T||a||_{L^\infty(Q)}+\frac{2}{\lambda T}\Big)\iint_{\omega\times(0,T)}|u|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Definindo a constante positiva $C = C(\Omega,\omega)$ por

$$C = C_5+\frac{3}{2}+\frac{2}{\lambda}$$

temos que

$$||u(\cdot,0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp\Big(C\Big(1+\frac{1}{T}+T||a||_{L^\infty(Q)}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)\iint_{\omega\times(0,T)}|u|^2\,dx\,dt.$$

∎

Na sequência refinaremos a estimativa encontrada na Proposição 3.6.

Proposição 3.7 (Estimativa de observabilidade aprimorada). *Existe uma constante $C = C(\Omega, \omega) > 0$ satisfazendo*

$$||u(\cdot,0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp\Big(C\Big(1 + \frac{1}{T} + T + (T^{\frac{1}{2}} + T)||a||_{L^\infty(Q)} + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big) \times \Big(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\, dxdt\Big)^2,$$

para todo $u_T \in L^2(\Omega)$ e $T > 0$, em que u é solução de (3.27).

Demonstração:

Para $\omega' \subset\subset \omega$ não vazio, podemos aplicar a desigualdade de observabilidade (Proposição 3.6) em $\omega' \times \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\right)$ obtendo assim

$$\Big\|u\Big(\cdot, \frac{T}{3}\Big)\Big\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp\Big(C\Big(1 + \frac{3}{T} + \frac{T}{3}||a||_{L^\infty(Q)} + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big) \times \iint_{\omega'\times(\frac{T}{3},\frac{2T}{3})} |u|^2\, dxdt. \tag{3.45}$$

Por outro lado, pela desigualdade (3.41) obtida na demonstração da Proposição 3.6 sabemos que

$$\frac{d}{dt}\Big(\exp(2t||a||_{L^\infty(Q)}) \int_\Omega |u|^2\, dx\Big) \geq 0.$$

Integrando a desigualdade acima em $\left[0, \frac{T}{3}\right]$ obtemos que

$$||u(\cdot,0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp\Big(\frac{2T}{3}||a||_{L^\infty(Q)}\Big)\Big\|u\Big(\cdot, \frac{T}{3}\Big)\Big\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Substituindo (3.45) na desigualdade acima concluímos que

$$||u(\cdot,0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp\Big(\frac{2T}{3}||a||_{L^\infty(Q)} + C\Big(1 + \frac{3}{T} + \frac{T}{3}||a||_{L^\infty(Q)} + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big) \times \iint_{\omega'\times(\frac{T}{3},\frac{2T}{3})} |u|^2\, dxdt.$$

Definindo a constante positiva

$$C_1 = \max\{1, 3C\},$$

temos que

$$||u(\cdot,0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp\Big(C_1\Big(1 + \frac{1}{T} + T||a||_{L^\infty(Q)} + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big) \times \iint_{\omega'\times(\frac{T}{3},\frac{2T}{3})} |u|^2\, dxdt. \tag{3.46}$$

Na segunda parte da demonstração, fixemos ω_0, ω_1 conjuntos abertos não vazios, λ_0, λ_1 parâmetros e p_0, p_1 expoentes tais que

$$\begin{cases} \omega' \subset \omega_0 \subset\subset \omega_1 \subset \omega, \\ 0 \le \lambda_1 < \lambda_0 < \dfrac{T}{2}, \\ 1 \le p_1 < p_0 < +\infty, \\ \left(\dfrac{n}{2}+1\right)\left(\dfrac{1}{p_1}-\dfrac{1}{p_0}\right) < \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.47}$$

Agora, escolhemos $\theta \in C_0^\infty(\omega_1 \times (\lambda_1, T-\lambda_1))$ tal que $0 \le \theta \le 1$ e $\theta \equiv 1$ em $\omega_0 \times (\lambda_0, T-\lambda_0)$.

Definindo $\varphi = \theta u$, usando que u é solução de (3.27) e $\operatorname{supp}\theta \subset \omega_1 \times (\lambda_1, T-\lambda_1)$ temos que φ é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \varphi_t + \Delta\varphi = a\theta u + (\theta_t + \Delta\theta)u + 2\nabla\theta\cdot\nabla u & \text{em } Q, \\ \varphi = \theta u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,T) = \theta(x,T)u(x,T) = \theta(x,T)u_T(x) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Invertendo o sentido do tempo a partir da mudança de variável $t \mapsto T-t$ e definindo

$$\overline{\varphi}(x,t) = \varphi(x,T-t), \overline{u}(x,t) = u(x,T-t), \overline{\theta}(x,t) = \theta(x,T-t), \overline{a}(x,t) = a(x,T-t),$$

obtemos que $\overline{\varphi}$ é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \overline{\varphi}_t - \Delta\overline{\varphi} = -\overline{a}\overline{\theta}\overline{u} + (\overline{\theta}_t - \Delta\overline{\theta})\overline{u} - 2\nabla\overline{\theta}\cdot\nabla\overline{u} & \text{em } Q, \\ \overline{\varphi} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \overline{\varphi}(x,0) = \varphi(x,T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Denotando por $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ o semigrupo gerado pelo operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet, temos que

$$\overline{\varphi}(\cdot,t) = \int_0^t S(t-s)(-\overline{a\varphi} + (\overline{\theta}_t - \Delta\overline{\theta})\overline{u} - 2\nabla\overline{\theta}\cdot\nabla\overline{u})(\cdot,s)\,ds.$$

Aplicando o Teorema 2.35 na integral anterior deduzimos que

$$||\overline{\varphi}(\cdot,t)||_{L^{p_0}(\Omega)} \le \int_0^t ||S(t-s)(-\overline{a\varphi} + (\overline{\theta}_t - \Delta\overline{\theta})\overline{u} - 2\nabla\overline{\theta}\cdot\nabla\overline{u})(\cdot,s)||_{L^{p_0}(\Omega)}\,ds,$$

para todo $t \in (\lambda_1, T-\lambda_1)$. Pelo Teorema 2.51 segue que

$$\begin{aligned} ||\overline{\varphi}(\cdot,t)||_{L^{p_0}(\Omega)} &\le C(n,p_0,p_1) \\ &\quad\times \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} ||(-\overline{a\varphi} + (\overline{\theta}_t - \Delta\overline{\theta})\overline{u} - 2\nabla\overline{\theta}\cdot\nabla\overline{u})(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\Omega)}\,ds. \end{aligned}$$

Usando que $\operatorname{supp}\overline{\theta} \subseteq \omega_1 \times (\lambda_1, T-\lambda_1)$ obtemos

$$\begin{aligned} ||\overline{\varphi}(\cdot,t)||_{L^{p_0}(\Omega)} &\le C(n,p_0,p_1) \\ &\quad\times \int_{\lambda_1}^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} ||(-\overline{a}\overline{\theta}\overline{u} + (\overline{\theta}_t - \Delta\overline{\theta})\overline{u} - 2\nabla\overline{\theta}\cdot\nabla\overline{u})(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}\,ds. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade triangular para a norma $||\cdot||_{L^1(\omega_1)}$ e absorvendo as normas $||\cdot||_{L^\infty(\omega_1\times(\lambda_1,T-\lambda_1))}$ dos termos $\overline{\theta}$, $\overline{\theta}_t$, $\Delta\overline{\theta}$ e $\nabla\overline{\theta}$ pela constante C chegamos em

$$
\begin{aligned}
&||\overline{\varphi}(\cdot,t)||_{L^{p_0}(\Omega)}\\
&\quad\leq C(n,p_0,p_1,\lambda_0,\lambda_1,\omega_0,\omega_1)\Bigg(||a||_{L^\infty(Q)}\int_{\lambda_1}^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)}||\overline{u}(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}\,ds\\
&\quad+\int_{\lambda_1}^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)}||\overline{u}(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}\,ds+\int_{\lambda_1}^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)}||\nabla\overline{u}(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}\,ds\Bigg).
\end{aligned}
$$

E segue pelo artigo de Fernández-Cara [12, p. 599, desigualdade (3.11)] que

$$
\begin{aligned}
&||\overline{\varphi}(\cdot,t)||_{L^{p_0}(\Omega)}\\
&\leq C(n,p_0,p_1,\lambda_0,\lambda_1,\omega_0,\omega_1)\Bigg((1+||a||_{L^\infty(Q)})\int_{\lambda_1}^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)}||\overline{u}(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}\,ds\\
&+\int_{\lambda_1}^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)-\frac{1}{2}}||\overline{u}(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}\,ds\Bigg)\\
&\leq C(n,p_0,p_1,\lambda_0,\lambda_1,\omega_0,\omega_1)\Bigg((1+||a||_{L^\infty(Q)})\int_{\lambda_1}^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}||\overline{u}(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}\,ds\\
&+\int_{\lambda_1}^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)-\frac{1}{2}}||\overline{u}(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}\,ds\Bigg)\\
&\leq C(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))\Bigg(\int_{\lambda_1}^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)-\frac{1}{2}}||\overline{u}(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}\,ds\Bigg).
\end{aligned}
$$

Notamos pela desigualdade acima que

$$
\begin{aligned}
||\overline{\varphi}||_{L^{p_0}(\Omega\times(\lambda_1,T-\lambda_1))}&=\left(\int_{\lambda_1}^{T-\lambda_1}||\overline{\varphi}(\cdot,t)||_{L^{p_0}(\Omega)}^{p_0}\,dt\right)^{\frac{1}{p_0}}\leq CT^{-1}(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))\\
&\times\left(\int_{\lambda_1}^{T-\lambda_1}\left(\int_{\lambda_1}^t (t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)-\frac{1}{2}}||\overline{u}(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}\,ds\right)^{p_0}dt\right)^{\frac{1}{p_0}}.
\end{aligned}
$$

Denotando por $h_1(s)=s^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)-\frac{1}{2}}$ e $h_2(s)=||\overline{u}(\cdot,s)||_{L^{p_1}(\omega_1)}$ temos que

$$
\begin{aligned}
||\overline{\varphi}||_{L^{p_0}(\Omega\times(\lambda_1,T-\lambda_1))}&\leq CT^{-1}(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))\left(\int_{\lambda_1}^{T-\lambda_1}(h_1*h_2(t))^{p_0}\,dt\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&=CT^{-1}(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))||h_1*h_2||_{L^{p_0}(\lambda_1,T-\lambda_1)}
\end{aligned}
$$

Aplicando o Teorema 2.36 para as funções h_1, h_2 e expoentes p_0, p_1 e p tais que $\dfrac{1}{p}=$

$\dfrac{1}{p_0}-\dfrac{1}{p_1}+1$ concluímos que

$$\begin{aligned}
||\overline{\varphi}||_{L^{p_0}(\Omega\times(\lambda_1,T-\lambda_1))} &\leq C(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))||h_1||_{L^{p}(\lambda_1,T-\lambda_1)}||h_2||_{L^{p_1}(\lambda_1,T-\lambda_1)}\\
&= C(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))\left(\int_{\lambda_1}^{T-\lambda_1}\left(t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)-\frac{1}{2}}\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times ||u||_{L^{p_1}(\omega_1\times(\lambda_1,T-\lambda_1))}\\
&\leq C\left(\frac{(T-\lambda_1)^{p\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)-\frac{1}{2}\right)+1}}{p\Big(-\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\Big)-\frac{1}{2}\Big)+1}\right)^{\frac{1}{p}}(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))\\
&\times ||u||_{L^{p_1}(\omega_1\times(\lambda_1,T-\lambda_1))}. \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

Usando que $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{p_0}-\dfrac{1}{p_1}+1$ e as condições sobre p_0 e p_1 em (3.47) chegamos em

$$\begin{aligned}
p\Big(-\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\Big)-\frac{1}{2}\Big)+1 &> p\Big(\Big(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\Big)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Big)+1\\
&= -\frac{1}{p}p+1=0.
\end{aligned}$$

Assim, a constante positiva C pode absorver o denominador da desigualdade (3.48) obtendo dessa maneira

$$\begin{aligned}
||\overline{\varphi}||_{L^{p_0}(\Omega\times(\lambda_1,T-\lambda_1))} &\leq CT^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))||u||_{L^{p_1}(\omega_1\times(\lambda_1,T-\lambda_1))}\\
&= CT^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}+1}(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))\\
&\times ||u||_{L^{p_1}(\omega_1\times(\lambda_1,T-\lambda_1))}\\
&= CT^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)+\frac{1}{2}}(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))||u||_{L^{p_1}(\omega_1\times(\lambda_1,T-\lambda_1))}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\theta\equiv 1$ em $\omega_0\times(\lambda_0,T-\lambda_0)$, então

$$||u||_{L^{p_0}(\omega_0\times(\lambda_0,T-\lambda_0))}=||\theta u||_{L^{p_0}(\omega_0\times(\lambda_0,T-\lambda_0))}\leq||\varphi||_{L^{p_0}(\Omega\times(\lambda_1,T-\lambda_1))}=||\overline{\varphi}||_{L^{p_0}(\Omega\times(\lambda_1,T-\lambda_1))}.$$

Portanto,

$$||u||_{L^{p_0}(\omega_0\times(\lambda_0,T-\lambda_0))}\leq CT^{\delta}(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))||u||_{L^{p_1}(\omega_1\times(\lambda_1,T-\lambda_1))} \qquad (3.49)$$

com $C=C(\Omega,\omega_0,\omega_1,\lambda_0,\lambda_1,p_0,p_1,n)>0$ e $\delta=\delta(p_0,p_1,n)=-\Big(\dfrac{n}{2}+1\Big)\Big(\dfrac{1}{p_1}-\dfrac{1}{p_0}\Big)+\dfrac{1}{2}$. A constante δ é positiva pela última condição apresentada em (3.47).

Agora, definimos a família descrescente de expoentes da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
&p_0=2,\\
&\frac{1}{p_i}=\frac{i}{2(n+2)}+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Notamos então que

$$p_{n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{2(n+2)} + \frac{1}{2}} > \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1,$$

$$p_{n+2} = \frac{1}{\frac{n+2}{2(n+2)} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{1}{p_{i+1}} - \frac{1}{p_i}\right) = \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}, \text{ para } 0 \leq i \leq n+1.$$

Considerando $\varepsilon > 0$ tal que $\left[\frac{T}{3} - (n+2)\varepsilon, \frac{2T}{3} + (n+2)\varepsilon\right] \subset [0,T]$ e uma família crescente de abertos

$$\omega' = \omega_0 \subset\subset \omega_1 \subset\subset \cdots \subset\subset \omega_{n+1} \subset\subset \omega_{n+2} = \omega$$

podemos aplicar, para cada $0 \leq i \leq n+1$, a desigualdade (3.49) com respeito aos abertos ω_i, ω_{i+1}, parâmetros $\lambda_i = (i+1)\varepsilon$, $\lambda_{i+1} = i\varepsilon$ e expoentes p_i, p_{i+1}. Assim, para $0 \leq i \leq n+1$, obtemos

$$||u||_{L^{p_i}(\omega_i \times ((i+1)\varepsilon, T-(i+1)\varepsilon))} \leq C_i T^{\delta_i}(1 + T^{\frac{1}{2}}(1 + ||a||_{L^\infty(Q)}))||u||_{L^{p_{i+1}}(\omega_{i+1} \times (i\varepsilon, T - i\varepsilon))}.$$

com $C_i = C_i(\Omega, \omega_i, \omega_{i+1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}, p_i, p_{i+1}, n) > 0$ e

$$\delta = \delta(p_i, p_{i+1}, n) = -\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{1}{p_{i+1}} - \frac{1}{p_i}\right) + \frac{1}{2} > 0.$$

Logo, aplicando consecutivamente a desigualdade obtida temos que

$$||u||_{L^{p_0}(\omega_0 \times (\varepsilon, T-\varepsilon))} \leq \prod_{i=0}^{n+1} C_i T^{\delta_i}(1 + T^{\frac{1}{2}}(1 + ||a||_{L^\infty(Q)}))^{n+2}||u||_{L^{p_{n+2}}(\omega_{n+2} \times ((n+1)\varepsilon, T-(n+1)\varepsilon))}.$$

Além disso, como $p_0 = 2$, $\omega_0 = \omega'$, $p_{n+2} = 1$ e $\omega_{n+2} = \omega$, então

$$||u||_{L^2\left(\omega' \times \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\right)\right)} \leq \prod_{i=0}^{n+1} C_i T^{\delta_i}(1 + T^{\frac{1}{2}}(1 + ||a||_{L^\infty(Q)}))^{n+2}||u||_{L^1(\omega \times (0,T))}.$$

Portanto,

$$\int_{\omega' \times \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\right)} |u|^2 \, dxdt \leq CT^{\delta}(1 + T^{\frac{1}{2}}(1 + ||a||_{L^\infty(Q)}))^{\beta}\left(\int_{\omega \times (0,T)} |u| \, dxdt\right)^2,$$

em que

$$\begin{cases} C = C(\Omega, \omega, n) = \left(\displaystyle\prod_{i=0}^{n+1} C_i\right)^2 > 0, \\ \delta = 2\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \delta_i > 0, \\ \beta = 2(n+2) > 0. \end{cases}$$

Agora, substituindo a desigualdade acima em (3.46) concluímos que

$$
\begin{aligned}
||u(\cdot,0)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq CT^{\delta}(1+T^{\frac{1}{2}}(1+||a||_{L^\infty(Q)}))^{\beta}\exp\Big(C_1\Big(1+\frac{1}{T}+T||a||_{L^\infty(Q)}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big) \\
&\times\left(\int_{\omega\times(0,T)}|u|\,dxdt\right)^2 \\
&\leq \exp\Big(C\Big(1+\frac{1}{T}+T+(T^{\frac{1}{2}}+T)||a||_{L^\infty(Q)}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)\left(\iint_{\omega\times(0,T)}|u|\,dx\,dt\right)^2,
\end{aligned}
$$

em que $C = C(\Omega,\omega) > 0$ é uma constante. ■

3.2.2 Controlabilidade da equação do calor linear com potencial

Antes de proceder com a demonstração do Teorema 1.5 é necessário um estudo a respeito da controlabilidade exata a trajetórias da equação do calor linear com potencial. Para isso consideraremos o seguinte problema

$$
\begin{cases}
y_t - \Delta y + ay = v1_\omega & \text{em } Q,\\
u = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\
y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega,
\end{cases}
\tag{3.50}
$$

em que $a \in L^\infty(Q)$.

Dizemos que o sistema (3.50) é controlável a zero no tempo T se, dada uma condição inicial $y_0 \in L^2(\Omega)$, existe controle $v \in L^\infty(\omega\times(0,T))$ tal que a solução y de (3.50) com respeito a y_0 e v satisfaz

$$y(\cdot,T) = 0 \,\text{em}\; \Omega.$$

Pela Definição 1.3 e pela linearidade do problema acima segue que (3.50) é exatamente controlável a trajetórias no tempo $T > 0$ se, e somente se, o sistema (3.50) é controlável a zero no tempo T. O resultado a seguir afirma que de fato o problema (3.50) é controlável a zero para qualquer $T > 0$ e apresenta uma estimativa sobre o controle v.

Teorema 3.8. *Sejam $T > 0$, $a \in L^\infty(Q)$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$. Então o probelma (3.50) é controlável a zero no tempo T, isto é, existe controle $v \in L^\infty(\omega\times(0,T))$ tal que a solução y de (3.50) com respeito a y_0 e v satisfaz*

$$y(\cdot,T) = 0 \; em \; \Omega.$$

Além disso, podemos tomar v tal que

$$||v||_{L^\infty(\omega\times(0,T))} \leq \exp\Big(C\Big(1+\frac{1}{T}+T+(T^{\frac{1}{2}}+T)||a||_{L^\infty(Q)}+||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)||y_0||_{L^2(\Omega)},$$

em que $C = C(\Omega,\omega) > 0$ é uma constante.

Visando demonstrar o Teorema 3.8 fixemos $T > 0$, $a \in L^\infty(Q)$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos o funcional $J_\varepsilon : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\varepsilon(u_T) = \frac{1}{2}\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\, dxdt\right)^2 + \varepsilon||u_T||_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega u(x,0)y_0(x)\, dx, \tag{3.51}$$

em que $u_T \in L^2(\Omega)$ é dado e u é a solução do problema (3.27) com respeito a u_T. Em seguida provaremos três proposições utilizadas para a demonstração de um teorema auxiliar. E a partir deste teorema segue o Teorema 3.8. Nestas demonstrações utilizaremos argumentos similares aos empregados ao longo do artigo de Fabre [9].

Proposição 3.9. *O funcional J_ε definido em (3.51) é estritamente convexo, contínuo e satisfaz*

$$\lim_{||u_T||_{L^2(\Omega)}\to\infty} J_\varepsilon(u_T) = +\infty. \tag{3.52}$$

Demonstração:

(i) J_ε é estritamente convexo:

Seja $0 < \lambda < 1$. Sejam $u, \overline{u}$ soluções de (3.27) com dados finais $u_T, \overline{u}_T \in L^2(\Omega)$ distintos, respectivamente. Pela linearidade do problema (3.27) segue que $\lambda u + (1-\lambda)\overline{u}$ é solução do problema (3.27) com respeito ao dado final $\lambda u_T + (1-\lambda)\overline{u}_T$. Logo, pela definição do funcional J_ε temos que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\lambda u_T + (1-\lambda)\overline{u}_T) = {} & \frac{1}{2}\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |\lambda u + (1-\lambda)\overline{u}|\, dxdt\right)^2 + \varepsilon||\lambda u_T + (1-\lambda)\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)} \\ & + \int_\Omega (\lambda u(x,0) + (1-\lambda)\overline{u}(x,0))y_0(x)\, dx. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Agora, estimaremos os dois primeiros termos a direita da igualdade acima. Inicialmente fixemos a notação

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\omega\times(0,T)} |u|\, dxdt, \\ I_2 &= \iint_{\omega\times(0,T)} |\overline{u}|\, dxdt. \end{aligned}$$

Então notamos que

$$\lambda(1-\lambda)(I_1 - I_2)^2 \geq 0$$

com a igualdade sendo válida se, e somente se, $I_1 = I_2$.

Pela condição acima percebemos ainda que

$$\begin{aligned} & \lambda(1-\lambda)I_1^2 - 2\lambda(1-\lambda)I_1I_2 + \lambda(1-\lambda)I_2^2 \geq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (\lambda - \lambda^2)I_1^2 - 2\lambda(1-\lambda)I_1I_2 + ((1-\lambda) - (1-\lambda)^2)I_2^2 \geq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \lambda I_1^2 + (1-\lambda)I_2^2 \geq \lambda^2 I_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)I_1I_2 + (1-\lambda)^2 I_2^2 \\ \Longleftrightarrow\ & \lambda I_1^2 + (1-\lambda)I_2^2 \geq (\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2)^2, \end{aligned}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $I_1 = I_2$.

Logo, aplicando a desigualdade triangular, usando a última equivalência obtida anteriormente e a definição de I_1 e I_2 concluímos que

$$\begin{aligned}\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |\lambda u + (1-\lambda)\overline{u}|\, dxdt\right)^2 &\leq \left(\lambda \iint_{\omega\times(0,T)} |u|\, dxdt + (1-\lambda)\iint_{\omega\times(0,T)} |\overline{u}|\, dxdt\right)^2\\ &\leq \lambda\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\, dxdt\right)^2\\ &\quad + (1-\lambda)\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |\overline{u}|\, dxdt\right)^2 \end{aligned} \tag{3.54}$$

satisfazendo a igualdade na última desigualdade se, e somente se,

$$\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\, dxdt = \iint_{\omega\times(0,T)} |\overline{u}|\, dxdt. \tag{3.55}$$

Na sequência estimaremos o segundo termo a direita da igualdade (3.53). Denotando por $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ o produto interno em $L^2(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}&||\lambda u_T + (1-\lambda)\overline{u}_T||^2_{L^2(\Omega)} - (\lambda||u_T||_{L^2(\Omega)} + (1-\lambda)||\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)})^2\\ &\qquad\qquad = 2\lambda(1-\lambda)((u_T,\overline{u}_T)_{L^2(\Omega)} - ||u_T||_{L^2(\Omega)}||\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz deduzimos que

$$(u_T,\overline{u}_T)_{L^2(\Omega)} - ||u_T||_{L^2(\Omega)}||\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)} \leq 0$$

com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se, $\overline{u}_T = 0$ ou $u_T = \dfrac{||u_T||_{L^2(\Omega)}}{||\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)}}\overline{u}_T$. Então concluímos que

$$||\lambda u_T + (1-\lambda)\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)} \leq \lambda||u_T||_{L^2(\Omega)} + (1-\lambda)||\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)} \tag{3.56}$$

valendo a igualdade se, e somente se,

$$\overline{u}_T = 0 \text{ ou } u_T = \frac{||u_T||_{L^2(\Omega)}}{||\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)}}\overline{u}_T. \tag{3.57}$$

Substituindo as desigualdades (3.54) e (3.56) na igualdade (3.53) obtemos que

$$J_\varepsilon(\lambda u_T + (1-\lambda)\overline{u}_T) \leq \lambda J_\varepsilon(u_T) + (1-\lambda)J_\varepsilon(\overline{u}_T)$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, são verdadeiras as condições (3.55) e (3.57).

Portanto, para concluir que J_ε é estritamente convexo basta mostrar que tais condições são equivalentes à $u_T = \overline{u}_T$.

Se $u_T = \overline{u}_T$, então claramente as condições são válidas.

Por outro lado, consideremos que (3.55) e (3.57) são satisfeitas. Caso $\overline{u}_T = 0$, então a solução $\overline{u}$ é nula, ou seja, $\overline{u} = 0$. Assim,

$$\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\,dxdt = \iint_{\omega\times(0,T)} |\overline{u}|\,dxdt = 0.$$

Pelo Teorema 2.50 temos que $u = 0$ em Q. Logo, $u_T = 0 = \overline{u}_T$. E caso $\overline{u}_T \neq 0$, segue pela condição (3.57) que $u_T = \dfrac{||u_T||_{L^2(\Omega)}}{||\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)}}\overline{u}_T$. De onde obtemos que $u = \dfrac{||u_T||_{L^2(\Omega)}}{||\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)}}\overline{u}$ e pela condição (3.55) deduzimos que $||u_T||_{L^2(\Omega)} = ||\overline{u}_T||_{L^2(\Omega)}$. Portanto, $u_T = \overline{u}_T$ e, de fato, as condições (3.55) e (3.57) são equivalentes à $u_T = \overline{u}_T$.

(ii) J_ε é contínuo:

Seja $u_T \in L^2(\Omega)$. Para provar que J_ε é contínuo basta mostrar que

$$\lim_{||v_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} |J_\varepsilon(u_T+v_T) - J_\varepsilon(u_T)| = 0. \tag{3.58}$$

Denotemos por u, v as soluções de (3.27) com dados finais u_T, v_T, respectivamente. Então

$$\begin{aligned}|J_\varepsilon(u_T+v_T) - J_\varepsilon(u_T)| = \Bigg|\frac{1}{2}\Bigg(\Bigg(\iint_{\omega\times(0,T)} |u+v|\,dxdt\Bigg)^2 - \Bigg(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\,dxdt\Bigg)^2\Bigg)\\ +\varepsilon(||u_T+v_T||_{L^2(\Omega)} - ||u_T||_{L^2(\Omega)}) + \int_\Omega v(x,0)y_0(x)\,dx\Bigg|.\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}|J_\varepsilon(u_T+v_T) - J_\varepsilon(u_T)| \leq{}& \frac{1}{2}\Big|||u+v||^2_{L^1(\omega\times(0,T))} - ||u||^2_{L^1(\omega\times(0,T))}\Big|\\ &+ \varepsilon\Big|||u_T+v_T||_{L^2(\Omega)} - ||u_T||_{L^2(\Omega)}\Big| + \Big|(v(\cdot,0),y_0)_{L^2(\Omega)}\Big|.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Se cada termo a direita da desigualdade (3.59) tende a zero quando $||v_T||_{L^2(\Omega)} \to 0$ concluímos que (3.58) é verdadeira. Então resta mostrar que de fato tais termos tendem a zero quando $||v_T||_{L^2(\Omega)} \to 0$.

Aplicando a desigualdade triangular para o segundo termo a direita de (3.59) obtemos que

$$\lim_{||v_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} \varepsilon\Big|||u_T+v_T||_{L^2(\Omega)} - ||u_T||_{L^2(\Omega)}\Big| \leq \lim_{||v_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} \varepsilon||v_T||_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Já para o primeiro termo a direita de (3.59) temos pelo Teorema 2.49 que existe constante $C = C(\Omega, T, a) > 0$ tal que

$$||v||_{C([0,T],L^2(\Omega))} \leq C||v_T||_{L^2(\Omega)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}||v||_{L^1(\omega\times(0,T))} &= \int_0^T ||v(\cdot,t)||_{L^1(\omega)}\,dt \leq \int_0^T ||v(\cdot,t)||_{L^1(\Omega)}\,dt \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \int_0^T ||v(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)}\,dt\\ &\leq T|\Omega|^{\frac{1}{2}}||v||_{C([0,T],L^2(\Omega))} \leq T|\Omega|^{\frac{1}{2}}C||v_T||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo, $||v||_{L^1(\omega\times(0,T))} \to 0$ quando $||v_T||_{L^2(\Omega)} \to 0$. Concluímos então pela continuidade da norma que

$$\lim_{||v_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} \frac{1}{2}\Big|||u+v||^2_{L^1(\omega\times(0,T))} - ||u||^2_{L^1(\omega\times(0,T))}\Big| = 0.$$

Para o último termo a direita de (3.59) aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\lim_{||v_T||_{L^2(\Omega)}\to 0}\Big|(v(\cdot,0),y_0)_{L^2(\Omega)}\Big| \leq \lim_{||v_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} ||v(\cdot,0)||_{L^2(\Omega)}||.y_0||_{L^2(\Omega)}.$$

E temos novamente pelo Teorema 2.49 que

$$\lim_{||v_T||_{L^2(\Omega)}\to 0}\Big|(v(\cdot,0),y_0)_{L^2(\Omega)}\Big| = 0.$$

Concluímos então que o limite (3.58) é de fato verdadeiro.

(iii) J_ε satisfaz (3.52):

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\int_\Omega u(x,0)y_0(x)\,dx = (u(\cdot,0),y_0)_{L^2(\Omega)} \geq -\Big|(u(\cdot,0),y_0)_{L^2(\Omega)}\Big| \geq -||u(\cdot,0)||_{L^2(\Omega)}||y_0||_{L^2(\Omega)}.$$

Por outro lado, pela Proposição 3.7 temos que

$$||u(\cdot,0)||_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\,dxdt\right),$$

em que $C = C(\Omega,\omega,T,a) > 0$ é uma constante. Deduzimos então que

$$\int_\Omega u(x,0)y_0(x)\,dx \geq -C\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\,dxdt\right)||y_0||_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto, para todo $u_T \in L^2(\Omega)$

$$J_\varepsilon(u_T) \geq \left(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\,dxdt\right)\left(\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\,dxdt\right) - C||y_0||_{L^2(\Omega)}\right) + \varepsilon||u_T||_{L^2(\Omega)}.$$

Concluímos então que

$$\lim_{||u_T||_{L^2(\Omega)}\to\infty} J_\varepsilon(u_T) = +\infty.$$

■

Notação 3.10. *Pela Proposição 3.9 e pelo Teorema 2.8 o funcional J_ε atinge seu mínimo em $L^2(\Omega)$ e este é único, pois J_ε é estritamente convexo. Denotemos por $\hat{u}^\varepsilon_T \in L^2(\Omega)$ tal mínimo. A solução do problema (3.27) com respeito a $\hat{u}^\varepsilon_T$ é denotada por $\hat{u}^\varepsilon$. Por fim, escrevemos $\overline{y} = y(\cdot,T) \in L^2(\Omega)$, sendo y a solução do problema (3.50) com $v = 0$.*

Dado $u_T \in L^2(\Omega)$ e u a solução do problema (3.27) com respeito a u_T temos que

$$-u_t - \Delta u + au = 0.$$

Multiplicando a igualdade acima por y e integrando sobre Q segue que

$$-\iint_Q yu_t\,dxdt - \iint_Q y\Delta u\,dxdt + \iint_Q ayu\,dxdt = 0.$$

Integrando por partes na variável temporal a primeira integral, aplicando o Teorema 2.64 na segunda integral e usando que $u = 0$ sobre Σ obtemos que

$$\iint_Q u(y_t - \Delta y + ay)\,dxdt + \int_\Omega y_0(x)u(x,0)\,dx - \int_\Omega y(x,T)u_T(x)\,dx = 0.$$

Como y é solução do problema (3.50) com $v = 0$ e $\overline{y} = y(\cdot, T)$ concluímos que

$$\int_\Omega y_0(x)u(x,0) = \int_\Omega \overline{y}(x)u_T(x)\,dx.$$

Logo,

$$J_\varepsilon(u_T) = \frac{1}{2}\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\,dxdt\right)^2 + \varepsilon||u_T||_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \overline{y}(x)u_T(x)\,dx. \tag{3.60}$$

Proposição 3.11. *Dado $\varepsilon > 0$ segue que $\hat{u}_T^\varepsilon = 0$ se, e somente se, $||\overline{y}||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$.*

Demonstração:

($\Longleftarrow$) Suponha que $||\overline{y}||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Por (3.60) e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u_T) &\geq \varepsilon||u_T||_{L^2(\Omega)} - |(\overline{y}, u_T)_{L^2(\Omega)}| \\ &\geq \varepsilon||u_T||_{L^2(\Omega)} - ||\overline{y}||_{L^2(\Omega)}||u_T||_{L^2(\Omega)} \\ &\geq ||\overline{y}||_{L^2(\Omega)}||u_T||_{L^2(\Omega)} - ||\overline{y}||_{L^2(\Omega)}||u_T||_{L^2(\Omega)} = 0, \end{aligned}$$

para todo $u_T \in L^2(\Omega)$. Como $J(0) = 0$ concluímos pela unicidade do mínimo que $\hat{u}_T^\varepsilon = 0$.
($\Longrightarrow$) Suponha que $\hat{u}_T^\varepsilon = 0$.

Assim, lembrando que $\hat{u}_T^\varepsilon$ é o mínimo de J_ε, pela Notação 3.10 segue que

$$J_\varepsilon(u_T) \geq J_\varepsilon(0) = 0,\ \forall u_T \in L^2(\Omega).$$

Observamos então que para $r > 0$

$$\frac{J_\varepsilon(-ru_T)}{r} \geq 0,\ \forall u_T \in L^2(\Omega).$$

E usando (3.60) temos que para $r > 0$

$$\frac{r}{2}\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |u|\,dxdt\right)^2 + \varepsilon||u_T||_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \overline{y}(x)u_T(x)\,dx = \frac{J_\varepsilon(-ru_T)}{r} \geq 0,\ \forall u_T \in L^2(\Omega).$$

Tomando $r \to 0^+$ obtemos que

$$\varepsilon ||u_T||_{L^2(\Omega)} \geq (\overline{y}, u_T)_{L^2(\Omega)},\ \forall u_T \in L^2(\Omega).$$

Por fim, como $\overline{y} = y(\cdot, T) \in L^2(\Omega)$ podemos substituir $u_T = \overline{y}$ na igualdade anterior. Concluímos então que

$$\varepsilon ||\overline{y}||_{L^2(\Omega)} \geq (\overline{y}, \overline{y})_{L^2(\Omega)} = ||\overline{y}||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo, $||\overline{y}||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$. ■

Como o funcional J_ε é convexo, contínuo e só assume valores reais segue que J_ε é subdiferenciável em todo ponto. Em seguida encontramos a subdiferencial do funcional J_ε para todo $u_T \in L^2(\Omega)$ não nulo.

Definição 3.12. *Seja $u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Denotamos por* $\mathrm{Norm}(u)$ *o seguinte conjunto*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Norm}(u)\\ &= \left\{ v : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R} \,\middle|\, v(x,t) = \frac{u(x,t)}{|u(x,t)|} \textit{ se } u(x,t) \neq 0 \textit{ e } |v(x,t)| \leq 1 \textit{ se } u(x,t) = 0 \right\}.\end{aligned}$$

Por vezes denotaremos por $\mathrm{sgn}^*(u)$ *um elemento de* $\mathrm{Norm}(u)$*, ou seja,* $\mathrm{sgn}^*(u) \in \mathrm{Norm}(u)$*.*

Proposição 3.13. *Sejam $u_T \in L^2(\Omega)$ não nulo e u solução de (3.27) com respeito a u_T. Então*

$$\begin{aligned}\partial J_\varepsilon(u_T) = \Bigg\{ \phi \in L^2(\Omega) \,\Bigg|\, &\exists v \in \mathrm{Norm}(u) 1_\omega \textit{ tal que } \int_\Omega \phi \theta_T \, dx = \left(\iint_{\omega \times (0,T)} |u| \, dxdt \right) \\ &\times \left(\iint_{\omega \times (0,T)} v\theta \, dxdt \right) + \varepsilon \int_\Omega \frac{u_T}{||u_T||_{L^2(\Omega)}} \theta_T \, dx + \int_\Omega y_0 \theta(x,0) \, dx,\ \forall \theta_T \in L^2(\Omega) \Bigg\},\end{aligned}$$

em que θ é solução do problema (3.27) com dado final θ_T.

Demonstração:

Definindo os funcionais $j_i : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, por

$$\begin{cases} j_1(u_T) = \dfrac{1}{2} \left(\displaystyle\iint_{\omega \times (0,T)} |u| \, dxdt \right)^2, \\ j_2(u_T) = \varepsilon ||u_T||_{L^2(\Omega)} + \displaystyle\int_\Omega y_0 u(x,0) \, dx, \end{cases}$$

temos que $J_\varepsilon = j_1 + j_2$.

Pelo Teorema 2.62 segue que $\partial J_\varepsilon(u_T) = \partial j_1(u_T) + \partial j_2(u_T)$, para todo $u_T \in L^2(\Omega)$.

Além disso, j_2 é Gâteaux diferenciável em todo ponto $u_T \in L^2(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\frac{j_2(u_T + r\theta_T) - j_2(u_T)}{r} &= \lim_{r\to 0}\frac{\varepsilon(||u_T + r\theta_T||_{L^2(\Omega)} - ||u_T||_{L^2(\Omega)}) + r\int_\Omega y_0\theta(x,0)\,dx}{r}\\
&= \lim_{r\to 0}\frac{\varepsilon(||u_T + r\theta_T||^2_{L^2(\Omega)} - ||u_T||^2_{L^2(\Omega)})}{r(||u_T + r\theta_T||_{L^2(\Omega)} + ||u_T||_{L^2(\Omega)})} + \int_\Omega y_0\theta(x,0)\,dx\\
&= \lim_{r\to 0}\frac{\varepsilon(2r(u_T,\theta_T)_{L^2(\Omega)} + r^2||\theta_T||^2_{L^2(\Omega)})}{r(||u_T + r\theta_T||_{L^2(\Omega)} + ||u_T||_{L^2(\Omega)})} + \int_\Omega y_0\theta(x,0)\,dx\\
&= \lim_{r\to 0}\frac{2\varepsilon(u_T,\theta_T)_{L^2(\Omega)} + r\varepsilon||\theta_T||^2_{L^2(\Omega)}}{||u_T + r\theta_T||_{L^2(\Omega)} + ||u_T||_{L^2(\Omega)}} + \int_\Omega y_0\theta(x,0)\,dx\\
&= \frac{\varepsilon(u_T,\theta_T)_{L^2(\Omega)}}{||u_T||_{L^2(\Omega)}} + \int_\Omega y_0\theta(x,0)\,dx\\
&= \varepsilon\int_\Omega \frac{u_T}{||u_T||_{L^2(\Omega)}}\theta_T\,dx + \int_\Omega y_0\theta(x,0)\,dx,
\end{aligned}$$

para todo $\theta_T \in L^2(\Omega)$. Logo, j_2 é Gâteaux diferenciável e

$$dj_2(u_T)(\theta_T) = \varepsilon\int_\Omega \frac{u_T}{||u_T||_{L^2(\Omega)}}\theta_T\,dx + \int_\Omega y_0\theta(x,0)\,dx,\ \forall\theta_0 \in L^2(\Omega). \tag{3.61}$$

Concluímos então pelo Teorema 2.60 que

$$\partial j_2(u_T) = \{dj_2(u_T)\}. \tag{3.62}$$

Agora, encontramos a subdiferencial $\partial j_1(u_T)$ para todo $u_T \in L^2(\Omega)$ não nulo. Inicialmente, como j_1 é convexo e contínuo segue pelo Teorema 2.58 que j_1 é subdiferenciável em todo $u_T \in L^2(\Omega)$. Dado $\phi \in \partial j_1(u_T)$ temos, ainda pelo Teorema 2.58, que

$$\phi(\theta_T) \le \lim_{r\to 0^+}\frac{j_1(u_T + r\theta_T) - j_1(u_T)}{r},\ \forall\theta_T \in L^2(\Omega).$$

A partir do Teorema 2.31 concluímos que $(L^2(\Omega))'$ é isometricamente isomorfo a $L^2(\Omega)$. Identificando então ϕ com o seu representante em $L^2(\Omega)$ obtemos que

$$(\phi,\theta_T)_{L^2(\Omega)} \le \lim_{r\to 0^+}\frac{j_1(u_T + r\theta_T) - j_1(u_T)}{r},\ \forall\theta_T \in L^2(\Omega). \tag{3.63}$$

Agora, notamos que

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{j_1(u_T + r\theta_T) - j_1(u_T)}{r} = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0^+}\frac{\left(\iint_{\omega\times(0,T)}|u + r\theta|\,dxdt\right)^2 - \left(\iint_{\omega\times(0,T)}|u|\,dxdt\right)^2}{r}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\iint_{\omega\times(0,T)}|u + r\theta|\,dxdt\right)^2}{r} &= r\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}}|\theta|\,dxdt\right)^2 - \frac{\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}|u|\,dxdt\right)^2}{r}\\
&+ 2\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}}|\theta|\,dxdt\right)\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}|u + r\theta|\,dxdt\right).
\end{aligned}$$

Deduzimos então que

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+}\frac{j_1(u_T+r\theta_T)-j_1(u_T)}{r} &= \left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}}|\theta|\,dxdt\right)\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}|u|\,dxdt\right)\\ &+\frac{1}{2}\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\left(\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}|u+r\theta|\,dxdt\right)^2\right.\\ &\left.-\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}|u|\,dxdt\right)^2\right).\end{aligned}$$

Denotando por L o limite a direita deduzimos que

$$\begin{aligned}L &= \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}|u+r\theta|-|u|\,dxdt\right)\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}|u+r\theta|+|u|\,dxdt\right)\\ &= 2\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}|u|\,dxdt\right)\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}|u+r\theta|-|u|\,dxdt\right)\\ &= 2\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}|u|\,dxdt\right)\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}\operatorname{sgn}^*(u)\theta\,dxdt\right).\end{aligned}$$

A última igualdade foi obtida usando que a função sinal é a derivada da função módulo, para todo ponto não nulo. Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+}\frac{j_1(u_T+r\theta_T)-j_1(u_T)}{r} &= \left(\iint_{\omega\times(0,T)}|u|\,dxdt\right)\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}}|\theta|\,dxdt\right.\\ &\left.+\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}\operatorname{sgn}^*(u)\theta\,dxdt\right).\end{aligned}\tag{3.64}$$

E por (3.63) chegamos em

$$\begin{aligned}(\phi,\,\theta_T)_{L^2(\Omega)} \leq &\left(\iint_{\omega\times(0,T)}|u|\,dxdt\right)\left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}}|\theta|\,dxdt\right.\\ &\left.+\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}}\operatorname{sgn}^*(u)\theta\,dxdt\right).\end{aligned}\tag{3.65}$$

Agora, definimos a aplicação

$$\begin{aligned}g : L^2(\Omega) &\to L^1(\omega\times(0,T))\\ \theta_T &\mapsto \theta 1_{\omega\times(0,T)}\end{aligned}$$

em que θ é solução do problema (3.27) com respeito a θ_T. E definimos o funcional linear

$$\begin{aligned}G : g(L^2(\Omega)) &\to \mathbb{R}\\ g(\theta_T) &\mapsto (\phi,\theta_T)_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Verificaremos a seguir que G está bem definido e é linear.

<u>G **está bem definido**</u>: Sejam $\theta_T^1, \theta_T^2 \in L^2(\Omega)$ tais que $g(\theta_T^1) = g(\theta_T^2)$. Pela definição de g obtemos que $\theta^1 1_{\omega\times(0,T)} = \theta^2 1_{\omega\times(0,T)}$, sendo θ^1, θ^2 as soluções de (3.27) com dados finais θ_T^1, θ_T^2, respectivamente.

Logo, $\theta = \theta^1 - \theta^2$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\theta_t - \Delta\theta + a\theta = 0 & \text{em } Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \end{cases}$$

satisfazendo $\theta = 0$ em $\omega \times (0, T)$.

Pelo Teorema 2.50 temos que $\theta^1 - \theta^2 = \theta = 0$. Portanto, $\theta_T^1 = \theta_T^2$. Concluímos então que

$$G(g(\theta_T^1)) = (\phi, \theta_T^1)_{L^2(\Omega)} = (\phi, \theta_T^2)_{L^2(\Omega)} = G(g(\theta_T^2)).$$

<u>G **é linear**</u>: Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\theta_T^1, \theta_T^2 \in L^2(\Omega)$. Pela lineraridade do problema (3.27) temos que $g(\theta_T^1) + \lambda g(\theta_T^2) = g(\theta_T^1 + \lambda\theta_T^2)$. Então

$$\begin{aligned} G(g(\theta_T^1) + \lambda g(\theta_T^2)) &= G(g(\theta_T^1 + \lambda\theta_T^2)) = (\phi, \theta_T^1 + \lambda\theta_T^2)_{L^2(\Omega)} \\ &= (\phi, \theta_T^1)_{L^2(\Omega)} + \lambda(\phi, \theta_T^2)_{L^2(\Omega)} \\ &= G(g(\theta_T^1)) + \lambda G(g(\theta_T^2)). \end{aligned}$$

Notamos ainda por (3.65) que

$$\begin{aligned} G(g(\theta_T)) \leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \Bigg(&\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |g(\theta_T)| \, dxdt \\ &+ \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \operatorname{sgn}^*(u) g(\theta_T) \, dxdt \Bigg), \end{aligned}$$

para todo $\theta_T \in L^2(\Omega)$.

Pelo Teorema 2.9 existe um funcional linear $\overline{G} : L^1(\omega \times (0, T)) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{G}(\psi) \leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |\psi| \, dxdt + \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \operatorname{sgn}^*(u)\psi \, dxdt \right)$$

e $\overline{G}$ estende G, ou seja,

$$\overline{G}(\theta 1_{\omega\times(0,T)}) = \overline{G}(g(\theta_T)) = G(g(\theta_T)) = (\phi, \theta_T)_{L^2(\Omega)}, \; \forall \theta_T \in L^2(\Omega).$$

Pela desigualdade acima segue que $\overline{G}$ é contínuo. Logo, $\overline{G} \in (L^1(\omega \times (0, T)))'$. Pelo Teorema 2.31 temos que $(L^1(\omega\times(0, T)))'$ é isometricamente isomorfo a $L^\infty(\omega\times(0, T))$.

Identificando $\overline{G}$ com o seu representante em $L^\infty(\omega \times (0, T))$ temos que, para todo $\psi \in L^1(\omega \times (0, T))$,

$$\begin{aligned} \iint_{\omega\times(0,T)} \overline{G}\psi \, dxdt \leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \Bigg(&\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |\psi| \, dxdt \\ &+ \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \operatorname{sgn}^*(u)\psi \, dxdt \Bigg) \end{aligned} \tag{3.66}$$

e

$$\iint_{\omega\times(0,T)} \overline{G}\theta\, dxdt = (\phi, \theta_T)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \phi\theta_T\, dx,\ \forall\theta_T \in L^2(\omega). \tag{3.67}$$

Pela desigualdade (3.66) segue que, para todo $\psi \in L^1(\omega\times(0,T))$ com suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}$,

$$\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \overline{G}\psi\, dxdt \leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \operatorname{sgn}^*(u)\psi\, dxdt.$$

Por outro lado, ψ possui suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}$ se, e somente se, $-\psi$ possui suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}$. Portanto, a desigualdade anterior vale com $-\psi$ no lugar de ψ, ou seja, para todo $\psi \in L^1(\omega\times(0,T))$ com suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}$,

$$\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \overline{G}(-\psi)\, dxdt \leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \operatorname{sgn}^*(u)(-\psi)\, dxdt$$
$$\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \overline{G}\psi\, dxdt \geq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \operatorname{sgn}^*(u)\psi\, dxdt.$$

Logo, para todo $\psi \in L^1(\omega\times(0,T))$ com suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}$,

$$\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \overline{G}\psi\, dxdt = ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \operatorname{sgn}^*(u)\psi\, dxdt.$$

Concluímos então pela igualdade anterior e pela Definição 3.12 que

$$\overline{G} = ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))}\frac{u}{|u|},\ \text{q.t.p. em } (\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}.$$

Agora, observamos pela desigualdade (3.66) que, para todo $\psi \in L^1(\omega\times(0,T))$ com suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}$,

$$\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} \overline{G}\psi\, dxdt \leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |\psi|\, dxdt.$$

Se ψ possui suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}$, então $\operatorname{sgn}^*(\overline{G})\psi$ possui suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}$. Logo, podemos substituir ψ por $\operatorname{sgn}^*(\overline{G})\psi$ na desigualdade anterior. Então, para todo $\psi \in L^1(\omega\times(0,T))$ com suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}$,

$$\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} \overline{G}\operatorname{sgn}^*(\overline{G})\psi\, dxdt \leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |\operatorname{sgn}^*(\overline{G})\psi|\, dxdt$$
$$\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |\overline{G}|\psi\, dxdt \leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |\psi|\, dxdt.$$

Para obter a segunda desigualdade acima foi usado que $\overline{G}\operatorname{sgn}^*(\overline{G}) = |\overline{G}|$ e $|\operatorname{sgn}^*(\overline{G})| \leq 1$. Mas ψ possui suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}$ se, e somente se, $|\psi|$ possui suporte contido em $(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}$. Então podemos substituir ψ por $|\psi|$ na última desigualdade obtida. Assim, para todo $\psi \in L^1(\omega \times (0,T))$ com suporte contido em $(\omega \times (0,T)) \cap \{u = 0\}$,

$$\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |\overline{G}||\psi|\, dxdt \leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |\psi|\, dxdt.$$

Concluímos pela desigualdade anterior que

$$|\overline{G}| \leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))}, \text{ q.t.p. em } (\omega \times (0,T)) \cap \{u = 0\}.$$

Portanto, $\overline{G} = ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} v$ para algum

$$v \in \mathrm{Norm}(u) 1_\omega.$$

Pela condição (3.67) e por $\overline{G} = ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} v$ temos que

$$\int_\Omega \phi\theta_T\, dx = \iint_{\omega\times(0,T)} \overline{G}\theta\, dxdt = ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{\omega\times(0,T)} v\theta\, dxdt,\ \forall \theta_T \in L^2(\Omega).$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \partial j_1(u_T) \subseteq \Bigg\{ \phi \in L^2(\Omega) \,\Bigg|\, & \exists v \in \mathrm{Norm}(u)1_\omega \text{ tal que} \\ & \int_\Omega \phi\theta_T\, dx = ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{\omega\times(0,T)} v\theta\, dxdt,\ \forall \theta_T \in L^2(\Omega) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Para obtermos a inclusão contrária consideramos $\phi \in L^2(\Omega)$ e $v \in \mathrm{Norm}(u)1_\omega$ tais que

$$\int_\Omega \phi\theta_T\, dx = ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{\omega\times(0,T)} v\theta\, dxdt,\ \forall \theta_T \in L^2(\Omega).$$

Assim, escrevendo $v = \mathrm{sgn}^*(u)1_\omega$ obtemos que

$$\begin{aligned} (\phi, \theta_T)_{L^2(\Omega)} &= ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} v\theta\, dxdt + \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} v\theta\, dxdt \right) \\ &\leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} v\theta\, dxdt + \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |v||\theta|\, dxdt \right) \\ &\leq ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \left(\iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u\neq 0\}} \mathrm{sgn}^*(u)\theta\, dxdt + \iint_{(\omega\times(0,T))\cap\{u=0\}} |\theta|\, dxdt \right). \end{aligned}$$

Para obter a última desigualdade acima foi usado que $|v| = |\mathrm{sgn}^*(u)1_\omega| \leq 1$. Mas, substituindo (3.64) na desigualdade anterior, concluímos que

$$(\phi, \theta_T)_{L^2(\Omega)} \leq \lim_{r\to 0^+} \frac{j_1(u_T + r\theta_T) - j_1(u_T)}{r},\ \forall \theta_T \in L^2(\Omega).$$

Logo, $\phi \in \partial j_1(u_T)$ e segue que

$$\begin{aligned} \partial j_1(u_T) \supseteq \Bigg\{ \phi \in L^2(\Omega) \,\Bigg|\, & \exists v \in \mathrm{Norm}(u)1_\omega \text{ tal que} \\ & \int_\Omega \phi\theta_T\, dx = ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{\omega\times(0,T)} v\theta\, dxdt,\ \forall \theta_T \in L^2(\Omega) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Portanto, por esta última inclusão e por (3.68), temos que

$$\partial j_1(u_T) = \Big\{ \phi \in L^2(\Omega) \,\Big|\, \exists v \in \text{Norm}(u)1_\omega \text{ tal que}$$
$$\int_\Omega \phi\theta_0 \, dx = ||u||_{L^1(\omega\times(0,T))} \iint_{\omega\times(0,T)} v\theta \, dxdt, \; \forall \theta_T \in L^2(\Omega) \Big\}.$$

Pela igualdade acima, (3.61) e (3.62) obtemos que

$$\partial J_\varepsilon(u_T) = \Big\{ \phi \in L^2(\Omega) \,\Big|\, \exists v \in \text{Norm}(u)1_\omega \text{ tal que} \int_\Omega \phi\theta_T \, dx = \Big(\iint_{\omega\times(0,T)} |u| \, dxdt \Big)$$
$$\times \Big(\iint_{\omega\times(0,T)} v\theta \, dxdt \Big) + \varepsilon \int_\Omega \frac{u_T}{||u_T||_{L^2(\Omega)}} \theta_T \, dx + \int_\Omega y_0\theta(x,0) \, dx, \; \forall \theta_T \in L^2(\Omega) \Big\},$$

em que θ é solução do problema (3.27) com respeito a θ_T. ■

Ainda antes da demonstração do Teorema 3.8, aplicando a Proposição 3.11 e a Proposição 3.13, provaremos o seguinte resultado.

Teorema 3.14. *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $v^\varepsilon \in ||\hat{u}^\varepsilon||_{L^1(\omega\times(0,T))} \,\text{Norm}(\hat{u}^\varepsilon)1_\omega$ de maneira que a solução y^ε do problema*

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon - \Delta y^\varepsilon + a y^\varepsilon = v^\varepsilon 1_\omega & \textit{em } Q, \\ y^\varepsilon = 0 & \textit{sobre } \Sigma, \\ y^\varepsilon(x,0) = y_0(x) & \textit{em } \Omega, \end{cases}$$

satisfaz $||y^\varepsilon(\cdot,T)||_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon$.

Demonstração:

Seja $\overline{y}$ como na Notação 3.10. Suponhamos inicialmente que $||\overline{y}||_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon$. Assim, segue pela Proposição 3.11 que $\hat{u}_T^\varepsilon = 0$. Neste caso a solução de (3.27) com dado final $\hat{u}_T^\varepsilon = 0$ é tal que $\hat{u}^\varepsilon = 0$. Tomando

$$v^\varepsilon = 0 \in ||\hat{u}^\varepsilon||_{L^1(\omega\times(0,T))} \,\text{Norm}(\hat{u}^\varepsilon)1_\omega$$

temos que y^ε é solução de

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon - \Delta y^\varepsilon + a y^\varepsilon = 0 & \text{em } Q, \\ y^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y^\varepsilon(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Pela definição de $\overline{y}$ (ver Notação 3.10) obtemos que $\overline{y} = y^\varepsilon(\cdot,T)$. Logo, $||y^\varepsilon(\cdot,T)||_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon$.

Suponhamos agora que $||\overline{y}||_{L^2(\Omega)} > \varepsilon$. Então segue pela Proposição 3.11 que $\hat{u}_T^\varepsilon \neq 0$. Agora, como J_ε atinge seu mínimo em $\hat{u}_T^\varepsilon$ temos que $0 \in \partial J_\varepsilon(\hat{u}_T^\varepsilon)$. De fato,

$$J_\varepsilon(\hat{u}_T^\varepsilon) - J_\varepsilon(u) \ge 0, \, \forall u \in L^2(\Omega).$$

E pela Definição 2.57 segue que $0 \in \partial J_\varepsilon(\hat{u}_T^\varepsilon)$. Então, pela Proposição 3.13, existe $v^\varepsilon \in ||\hat{u}^\varepsilon||_{L^1(\omega\times(0,T))}\,\mathrm{Norm}(\hat{u}^\varepsilon)1_\omega$ tal que

$$0 = \iint_{\omega\times(0,T)} v^\varepsilon \theta\, dxdt + \varepsilon \int_\Omega \frac{\hat{u}_T^\varepsilon}{||\hat{u}_T^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}} \theta_T\, dx + \int_\Omega y_0 \theta(x,0)\, dx,\ \forall \theta_T \in L^2(\Omega). \tag{3.69}$$

Por outro lado, como θ é solução de (3.27) com respeito a θ_T então

$$-\theta_t - \Delta\theta + a\theta = 0.$$

Logo, multiplicando ambos os lados da última equação por y^ε e integrando em Q chegamos em

$$-\int_Q \theta_t y^\varepsilon\, dxdt - \int_Q y^\varepsilon \Delta\theta\, dxdt + \int_Q a\theta y^\varepsilon\, dxdt = 0.$$

Para a primeira integral aplicamos integração por partes na variável temporal. E na segunda utilizamos o Teorema 2.64 junto com o fato de $y^\varepsilon = \theta = 0$ sobre Σ.

$$-\int_\Omega (\theta_T y^\varepsilon(x,T) - \theta(x,0)y_0)\, dx + \iint_Q \theta(y_t^\varepsilon - \Delta y^\varepsilon + a y^\varepsilon)\, dxdt = 0.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \theta_T y^\varepsilon(x,T) - \theta(x,0)y_0\, dx = \iint_{\omega\times(0,T)} \theta v^\varepsilon\, dxdt,\ \forall \theta_T \in L^2(\Omega).$$

Agora, substituindo a igualdade acima em (3.69) temos que

$$0 = \int_\Omega \theta_T y^\varepsilon(x,T) - \theta(x,0)y_0\, dx + \varepsilon \int_\Omega \frac{\hat{u}_T^\varepsilon}{||\hat{u}_T^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}} \theta_T\, dx + \int_\Omega y_0\theta(x,0)\, dx,\ \forall \theta_T \in L^2(\Omega).$$

Simplificando e reorganizando os termos obtemos, para todo $\theta_T \in L^2(\Omega)$, que

$$(y^\varepsilon(\cdot,T),\theta_T)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \theta_T y^\varepsilon(x,T) = -\varepsilon \int_\Omega \frac{\hat{u}_T^\varepsilon}{||\hat{u}_T^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}} \theta_T\, dx \le \frac{\varepsilon}{||\hat{u}_T^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}} |(\hat{u}_T^\varepsilon, \theta_T)_{L^2(\Omega)}|.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$(y^\varepsilon(\cdot,T),\theta_T)_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon ||\theta_T||_{L^2(\Omega)},\ \forall \theta_T \in L^2(\Omega).$$

Concluímos então que $||y^\varepsilon(\cdot,T)||_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon$. ■

A seguir demonstraremos o Teorema 3.8 por uma aplicação do Teorema 3.14. A ideia geral desta demonstração reside em analisar a convergência das famílias $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ e $\{y^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ obtidas a partir do Teorema 3.14 para encontrar v e y que satisfazem o Teorema 3.8.

Demonstração do Teorema 3.8:

Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Pelo Teorema 3.14 existe

$$v^\varepsilon \in ||\hat{u}^\varepsilon||_{L^1(\omega\times(0,T))}\,\mathrm{Norm}(\hat{u}^\varepsilon)1_\omega$$

tal que a solução y^ε do problema

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon - \Delta y^\varepsilon + a y^\varepsilon = v^\varepsilon 1_\omega & \text{em } Q, \\ y^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y^\varepsilon(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.70}$$

satisfaz $||y^\varepsilon(\cdot,T)||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Como J_ε atinge seu mínimo em $\hat{u}_T^\varepsilon$, então

$$J_\varepsilon(\hat{u}_T^\varepsilon) \leq J_\varepsilon(0) = 0.$$

Logo, pela definição do funcional J_ε temos que

$$\frac{1}{2}\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |\hat{u}^\varepsilon|\, dxdt\right)^2 \leq -\int_\Omega \hat{u}^\varepsilon(x,0) y_0\, dx \leq |(\hat{u}^\varepsilon(x,0), y_0)_{L^2(\Omega)}|.$$

Além disso, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\frac{1}{2}\left(\iint_{\omega\times(0,T)} |\hat{u}^\varepsilon|\, dxdt\right)^2 \leq ||\hat{u}^\varepsilon(x,0)||_{L^2(\Omega)} ||y_0||_{L^2(\Omega)}. \tag{3.71}$$

Pela Proposição 3.7 existe $C = C(\Omega,\omega) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} ||\hat{u}^\varepsilon(x,0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp&\left(C\left(1 + \frac{1}{T} + T + (T^{\frac{1}{2}} + T)||a||_{L^\infty(Q)} + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\right)\right) \\ &\times \left(\iint_{\omega\times(0,T)} |\hat{u}^\varepsilon|\, dxdt\right)^2. \end{aligned}$$

Agora, substituindo a última desigualdade em (3.71) obtemos que

$$\iint_{\omega\times(0,T)} |\hat{u}^\varepsilon|\, dxdt \leq \exp\left(C\left(1 + \frac{1}{T} + T + (T^{\frac{1}{2}} + T)||a||_{L^\infty(Q)} + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\right)\right)||y_0||_{L^2(\Omega)},$$

em que $C = C(\Omega,\omega) > 0$ é uma constante.

Observamos ainda que

$$||v^\varepsilon||_{L^\infty(\omega\times(0,T))} = \iint_{\omega\times(0,T)} |\hat{u}^\varepsilon|\, dxdt,$$

pois $v^\varepsilon \in ||\hat{u}^\varepsilon||_{L^1(\omega\times(0,T))} \operatorname{Norm}(\hat{u}^\varepsilon) 1_\omega$. Portanto,

$$||v^\varepsilon||_{L^\infty(\omega\times(0,T))} \leq \exp\left(C\left(1 + \frac{1}{T} + T + (T^{\frac{1}{2}} + T)||a||_{L^\infty(Q)} + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\right)\right)||y_0||_{L^2(\Omega)}.$$

Ou seja, $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uma família uniformemente limitada em $L^\infty(\omega\times(0,T))$.

Assim, pelo Corolário 2.3 existem uma subsequência, ainda denotada por $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, e uma função $v \in L^\infty(\omega\times(0,T))$ tais que $v^\varepsilon \to v$ fraco-$*$ em $L^\infty(\omega\times(0,T))$ quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, pelo Teorema 2.1 segue que

$$\begin{aligned} ||v||_{L^\infty(\omega\times(0,T))} &\leq \liminf ||v^\varepsilon||_{L^\infty(\omega\times(0,T))} \\ &\leq \exp\left(C\left(1 + \frac{1}{T} + T + (T^{\frac{1}{2}} + T)||a||_{L^\infty(Q)} + ||a||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\right)\right)||y_0||_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.72}$$

em que $C = C(\Omega, \omega) > 0$ é uma constante.

Por outro lado, pelo Teorema 2.49 obtemos a seguinte estimativa.

$$||y^\varepsilon||_{C([0,T],L^2(\Omega))} + ||y^\varepsilon||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||y_t^\varepsilon||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\Big(||y_0||_{L^2(\Omega)} + ||v^\varepsilon||_{L^2(\omega\times(0,T))}\Big).$$

Agora, usando a inclusão $L^\infty(\omega \times (0,T)) \hookrightarrow L^2(\omega \times (0,T))$, junto com a estimativa (3.72) para $||v^\varepsilon||_{L^\infty(\omega\times(0,T))}$ deduzimos que

$$||y^\varepsilon||_{C([0,T],L^2(\Omega))} + ||y^\varepsilon||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||y_t^\varepsilon||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C||y_0||_{L^2(\Omega)}.$$

Então, pelas limitações acima descritas e pelo Corolário 2.5, existem uma subsequência ainda denotada por $\{y^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ e uma função $y \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$, com $y_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, tais que $y^\varepsilon \to y$ e $y_t^\varepsilon \to y_t$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, respectivamente, quando $\varepsilon \to 0$.

Resumindo temos que

$$\begin{cases} v^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v & \text{em } L^\infty(\omega \times (0,T)), \\ y^\varepsilon \rightharpoonup y & \text{em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ y_t^\varepsilon \rightharpoonup y_t & \text{em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{cases} \tag{3.73}$$

Como y^ε é solução fraca de (3.70), para cada $\varepsilon > 0$, segue pela definição de solução fraca que

$$\int_0^T \Big(\langle y_t^\varepsilon, w\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\nabla y^\varepsilon, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (ay^\varepsilon, w)_{L^2(\Omega)}\Big)\, dt = \int_0^T (v^\varepsilon 1_\omega, w)_{L^2(\Omega)}\, dt, \tag{3.74}$$

para todo $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Pelas convergências (3.73), passando ao limite $\varepsilon \to 0^+$ em (3.74) temos que

$$\int_0^T \Big(\langle y_t, w\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\nabla y, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (ay, w)_{L^2(\Omega)}\Big)\, dt = \int_0^T (v 1_\omega, w)_{L^2(\Omega)}\, dt, \tag{3.75}$$

para todo $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Logo,

$$\langle y_t, w\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\nabla y, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (ay, w)_{L^2(\Omega)} = (v1_\omega, w)_{L^2(\Omega)} \text{ q.t.p. em } [0,T],$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Portanto, para conluir que y é solução fraca do problema (3.50) com condição inicial y_0 e controle v resta provar que y satisfaz a condição inicial, ou seja, $y(0) = y_0$.

Por (3.74),

$$\int_0^T \Big(-\langle w_t, y^\varepsilon\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\nabla y^\varepsilon, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (ay^\varepsilon, w)_{L^2(\Omega)}\Big)\, dt = \int_0^T (v^\varepsilon 1_\omega, w)_{L^2(\Omega)}\, dt \\ + (y^\varepsilon(\cdot,0), w(\cdot,0))_{L^2(\Omega)},$$

para toda $w \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$ com $w(\cdot,T) = 0$. Usando que $y^\varepsilon(\cdot,0) = y_0$ e as convergências em (3.73) podemos passar ao limite $\varepsilon \to 0^+$ na igualdade acima, obtendo

$$\int_0^T \Big(-\langle w_t, y\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\nabla y, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (ay, w)_{L^2(\Omega)} \Big)\, dt = \int_0^T (v1_\omega, w)_{L^2(\Omega)}\, dt + (y_0, w(\cdot,0))_{L^2(\Omega)},$$

para toda $w \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$ com $w(\cdot,T) = 0$.

Observamos ainda por (3.75) que

$$\int_0^T \Big(-\langle w_t, y\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\nabla y, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (ay, w)_{L^2(\Omega)} \Big)\, dt = \int_0^T (v1_\omega, w)_{L^2(\Omega)}\, dt + (y(\cdot,0), w(\cdot,0))_{L^2(\Omega)},$$

para toda $w \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$, com $w(\cdot,T) = 0$.

Comparando as duas igualdades anteriores temos que

$$(y_0, w(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} = (y(\cdot,0), w(\cdot,0))_{L^2(\Omega)},$$

para toda $w \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$ com $w(\cdot,T) = 0$. Portanto, $y(\cdot,0) = y_0$ pelo Teorema 2.30.

Logo, y é solução fraca do problema (3.50) com respeito a y_0 e v tal que

$$||v||_{L^\infty(\omega\times(0,T))} \leq \exp\Big(C\Big(1 + \frac{1}{T} + T + (T^{\frac{1}{2}} + T)||a||_{L^\infty(Q)} + ||a||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Big)\Big)||y_0||_{L^2(\Omega)}.$$

Finalizamos a demonstração provando que $y(\cdot,T) = 0$ em Ω.

Segue por (3.74) que

$$\int_0^T \Big(-\langle w_t, y^\varepsilon\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\nabla y^\varepsilon, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (ay^\varepsilon, w)_{L^2(\Omega)} \Big)\, dt = \int_0^T (v^\varepsilon 1_\omega, w)_{L^2(\Omega)}\, dt - (y^\varepsilon(\cdot,T), w(\cdot,T))_{L^2(\Omega)},$$

para toda $w \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$, com $w(\cdot,0) = 0$. Como $||y^\varepsilon(\cdot,T)||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$, então $y^\varepsilon(\cdot,T) \to 0$ em $L^2(\Omega)$. Usando este fato e as convergências (3.73) podemos fazer $\varepsilon \to 0^+$ na igualdade acima obtendo

$$\int_0^T \Big(-\langle w_t, y\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\nabla y, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (ay, w)_{L^2(\Omega)} \Big)\, dt = \int_0^T (v1_\omega, w)_{L^2(\Omega)}\, dt,$$

para toda $w \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$, com $w(\cdot,0) = 0$.

Por outro lado, temos por (3.75) que

$$\int_0^T \Big(-\langle w_t, y\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\nabla y, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (ay, w)_{L^2(\Omega)} \Big)\, dt = \int_0^T (v1_\omega, w)_{L^2(\Omega)}\, dt - (y(\cdot,T), w(\cdot,T))_{L^2(\Omega)},$$

para toda $w \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$, com $w(\cdot,0) = 0$.

Comparando as duas igualdades anteriores obtemos que

$$(y(\cdot,T), w(\cdot,T))_{L^2(\Omega)} = 0,$$

para toda $w \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$, com $w(\cdot,0) = 0$.

Portanto, $y(\cdot,T) = 0$ pelo Teorema 2.30. ■

3.2.3 Método do ponto fixo para a controlabilidade exata

Uma vez finalizado o estudo sobre a controlabilidade da equação do calor linear com potencial poderemos provar o Teorema 1.5. Para isso inicialmente consideraremos o seguinte resultado auxiliar do qual o Teorema 1.5 segue como consequência.

Lema 3.15. *Seja $T > 0$ fixado. Se as hipóteses do Teorema 1.5 são satisfeitas e $u_0 \in L^2(\Omega)$ é dado, existe $\hat{v} \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ tal que a solução u do problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + f(y^* + u) - f(y^*) = \hat{v}1_\omega & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.76}$$

está definida globalmente e

$$u(\cdot,T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Demonstraremos o Lema 3.15 a partir de uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani (Teorema 2.10) e do Teorema 3.8.

Demonstração da Lema 3.15:

Sejam $T > 0$, y^* e f satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.5. Como y^* é limitada existe constante $k^* > 0$ tal que

$$|y^*| \leq k^* \text{ em } Q.$$

Denotemos por $M(k^*)$ o máximo da função f no intervalo $[-k^*, k^*]$, ou seja,

$$M(k^*) = \max_{|s| \leq k^*} |f(s)|$$

A seguir, dividimos a demonstração em três casos.
Primeiro caso: $u_0 \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ para algum $\beta \in (0,1)$ e $f \in C^1([-k^*, k^*])$.

Definindo $g : [-k^*, k^*] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(s,h) = \begin{cases} \dfrac{f(s+h) - f(s)}{h} & \text{se } h \neq 0, \\ f'(s) & \text{se } h = 0, \end{cases}$$

segue que g é contínua pois $f \in C^1([-k^*, k^*])$.

Observamos que, para cada $\xi > 0$, existe uma constante $C_\xi = C_\xi(k^*, f) > 0$ tal que

$$|g(y^*(x,t),h)|^{\frac{2}{3}} \leq C_\xi + \xi \ln(1+|h|), \; \forall\, (x,t) \in Q, \; h \in \mathbb{R}. \tag{3.77}$$

De fato, como por hipótese

$$\lim_{|h|\to\infty} \frac{f(h)}{|h| \ln^{\frac{3}{2}}(1+|h|)} = 0,$$

existe $h(\xi)$ tal que $h(\xi) \geq k^* + 1 > 0$ e

$$\left|\frac{f(h)}{h}\right| \leq \frac{2\xi^{\frac{3}{2}}}{3} \ln^{\frac{3}{2}}(1+|h|), \; \forall\, |h| \geq h(\xi). \tag{3.78}$$

Seja $L(k^* + 2h(\xi))$ constante de Lipschitz de f no intervalo $[-k^* - 2h(\xi), k^* + 2h(\xi)]$. Assim, pela definição de g temos que

$$|g(y^*(x,t),h)| \leq L(k^* + 2h(\xi)), \; \forall\, (x,t) \in Q, \; |h| \leq 2h(\xi). \tag{3.79}$$

Por outro lado, para cada $|h| > 2h(\xi)$, utilizando que $h(\xi) \geq k^* + 1$ e que $M(k^*) \geq |f(s)|$, para todo $s \in [-k^*, k^*]$, temos que

$$\begin{aligned}
|g(y^*(x,t),h)| &= \left|\frac{f(y^*(x,t)+h) - f(y^*(x,t))}{h}\right| \\
&\leq \left|\frac{f(y^*(x,t)+h)}{h}\right| + \frac{1}{2h(\xi)}|f(y^*(x,t))|.
\end{aligned}$$

Utilizando que $h(\xi) \geq k^* + 1$ e que $M(k^*) \geq |f(s)|$, para todo $s \in [-k^*, k^*]$, temos que

$$|g(y^*(x,t),h)| \leq \max_{\frac{|h|}{2} \leq |a| \leq |h|+k^*} \left|\frac{f(a)}{h}\right| + \frac{1}{2k^*} M(k^*), \; \forall\, (x,t) \in Q, \; |h| > 2h(\xi).$$

Observamos ainda que

$$\begin{cases} |a| \leq |h| + k^*, \\ |h| > 2h(\xi). \end{cases} \implies |a| < |h| + h(\xi) < |h| + \frac{1}{2}|h| = \frac{3}{2}|h|.$$

Logo,

$$|g(y^*(x,t),h)| \leq \frac{3}{2} \max_{\frac{|h|}{2} \leq |a| \leq |h|+k^*} \left|\frac{f(a)}{a}\right| + \frac{1}{2k^*} M(k^*), \; \forall\, (x,t) \in Q, \; |h| > 2h(\xi).$$

Substituindo (3.78) na última desigualdade deduzimos que

$$\begin{aligned}
|g(y^*(x,t),h)| &\leq \xi^{\frac{3}{2}} \max_{\frac{|h|}{2} \leq |a| \leq |h|+k^*} |\ln^{\frac{3}{2}}(1+|a|)| + \frac{1}{2k^*} M(k^*) \\
&\leq \xi^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{3}{2}}(1+|h|+k^*) + \frac{1}{2k^*} M(k^*), \; \forall\, (x,t) \in Q, \; |h| > 2h(\xi).
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Definindo a constante

$$\overline{C}_\xi = \max\left\{L(k^* + 2h(\xi)), \frac{1}{2k^*}M(k^*)\right\}$$

concluímos por (3.79) e (3.80) que

$$|g(y^*(x,t),h)| \leq \overline{C}_\xi + \xi^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{3}{2}}(1+|h|+k^*),\ \forall\,(x,t)\in Q,\ h\in\mathbb{R}.$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}|g(y^*(x,t),h)|^{\frac{2}{3}} &\leq (\overline{C}_\xi + \xi^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{3}{2}}(1+|h|+k^*))^{\frac{2}{3}}\\ &\leq \overline{C}_\xi^{\frac{2}{3}} + \xi\ln(1+|h|+k^*)\\ &\leq \overline{C}_\xi^{\frac{2}{3}} + \xi k^* + \xi\ln(1+|h|)\\ &\leq C_\xi + \xi\ln(1+|h|),\ \forall\,(x,t)\in Q,\ h\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

com $C_\xi = \overline{C}_\xi^{\frac{2}{3}} + \xi k^*$ dependendo somente de ξ, k^* e f. Portanto, (3.77) é válido.

Denotemos por $R>0$ uma constante a ser fixada posteriormente e $T_R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função truncamento

$$T_R(s) = \begin{cases} s & \text{se } |s|\leq R,\\ R\,\mathrm{sgn}(s) & \text{se } |s|>R.\end{cases}$$

Assim, para cada $z\in L^\infty(Q)$, consideramos o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + g(y^*, T_R(z))u = \hat{v}1_\omega & \text{em } Q,\\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega.\end{cases} \tag{3.81}$$

Pela definição da função truncamento, T_R, e por (3.77) segue que $g(y^*, T_R(z))\in L^\infty(Q)$.

Definindo

$$T_z^* = \min\left\{T, ||g(y^*,T_R(z))||_{L^\infty(Q)}^{-\frac{2}{3}}, ||g(y^*,T_R(z))||_{L^\infty(Q)}^{-\frac{1}{3}}\right\} \tag{3.82}$$

e aplicando o Teorema 3.8 com $T=T_z^*$, $a=g(y^*,T_R(z))$ e $y_0=u_0$ obtemos um controle $v_z\in L^\infty(\omega\times(0,T_z^*))$ tal que

$$\begin{aligned}||v_z||_{L^\infty(\omega\times(0,T_z^*))} \leq \exp\Bigg(C\Bigg(1 + \frac{1}{T_z^*} + T_z^* + ((T_z^*)^{\frac{1}{2}} + T_z^*)||g(y^*,T_R(z))||_{L^\infty(Q)}\\ + ||g(y^*,T_R(z))||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Bigg)\Bigg)||u_0||_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.83}$$

e a solução u do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + g(y^*, T_R(z))u = v_z 1_\omega & \text{em } \Omega\times(0,T_z^*),\\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega\times(0,T_z^*),\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega,\end{cases} \tag{3.84}$$

satisfaz $u(\cdot, T_z^*) = 0$ em Ω.

Para cada $z \in L^\infty(Q)$, definimos $A(z) \subset L^\infty(\omega \times (0,T))$ o conjunto das extensões a zero dos controles v_z no intervalo $[0,T]$. Assim, dado $v_z \in A(z)$, temos pela definição de T_z^* em (3.82) e pela estimativa (3.83) que existe constante positiva $C^* = C^*(\Omega, \omega, T)$ tal que

$$||v_z||_{L^\infty(\omega\times(0,T))} \leq \exp\Big(C^*\Big(1 + ||g(y^*, T_R(z))||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)||u_0||_{L^2(\Omega)}. \tag{3.85}$$

Agora, definimos $\mathcal{A}(z) \subset Z$ o conjunto das soluções do problema (3.81) associados aos controles $v_z \in A(z)$. Portanto, se $u_z \in \mathcal{A}(z)$, então $u_z = 0$ em $\Omega \times (T_z^*, T)$. Particularmente,

$$u_z(\cdot, T) = 0 \text{ em } \Omega. \tag{3.86}$$

Visando aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : L^\infty(Q) &\to \mathcal{P}(L^\infty(Q)) \\ z &\mapsto \mathcal{A}(z) \end{aligned}$$

e provaremos os seguintes fatos:

(i) Para todo $z \in L^\infty(Q)$, $\mathcal{A}(z)$ é não vazio, convexo e fechado.

(ii) Existe $K \subseteq L^\infty(Q)$ não vazio, convexo e compacto tal que $\mathcal{A}(z) \subseteq K$, para todo $z \in K$.

(iii) Ψ possui gráfico fechado.

Primeiramente, provaremos o item (i).

Dado $z \in L^\infty(Q)$ temos que $\mathcal{A}(z)$ é não vazio por definição.

Agora, sejam $\lambda \in [0,1]$ e $u_z^1, u_z^2 \in \mathcal{A}(z)$ associados aos controles $v_z^1, v_z^2 \in A(z)$, respectivamente. Então, pela linearidade do problema (3.81), $u_z = (1-\lambda)u_z^1 + \lambda u_z^2$ é solução de (3.81) associado ao controle $v_z = (1-\lambda)v_z^1 + \lambda v_z^2$. Caso $v_z \in A(z)$ concluímos que $(1-\lambda)u_z^1 + \lambda u_z^2 = u_z \in \mathcal{A}(z)$ e portanto $\mathcal{A}(z)$ é convexo.

Basta então provar que $v_z \in A(z)$. Observamos que uma vez que ambos v_z^1 e v_z^2 satisfazem a estimativa (3.83) segue pela desigualdade triangular que v_z satisfaz (3.83). Além disso, sejam u^1 e u^2 as soluções do problema (3.84) associadas a v_z^1 e v_z^2, respectivamente. Então $u^1(\cdot, T_z^*) = u^2(\cdot, T_z^*) = 0$ em Ω. Assim, $u = (1-\lambda)u^1 + \lambda u^2$ é a solução de (3.84) associada a $(1-\lambda)v_z^1 + \lambda v_z^2 = v_z$ e satisfaz $u(\cdot, T_z^*) = (1-\lambda)u^1(\cdot, T_z^*) + \lambda u^2(\cdot, T_z^*) = 0$ em Ω. Logo, $v_z \in A(z)$.

Por fim, demonstraremos que $\mathcal{A}(z)$ é fechado. Seja $\{u_z^n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}(z)$ uma sequência convergindo em $L^\infty(Q)$ para algum u. Se $\{v_z^n\}_{n\geq 1} \subset A(z)$ é a sequência dos controles associados, deduzimos que tal sequência é limitada pela desigualdade (3.85). Então pelo Corolário 2.3 existem uma subsequência ainda denotada por $\{v_z^n\}_{n\geq 1}$ e uma função $v \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ tais que $v_z^n \to v$ fraco-$*$ em $L^\infty(\omega \times (0,T))$.

Por outro lado, pelo Teorema 2.49 temos que

$$\{u_z^n\}_{n\geq 1} \subset \{u \,|\, u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\} =: E$$

e a sequência $\{u_z^n\}_{n\geq 1}$ é limitada em E. Então pelo Corolário 2.5 existem uma subsequência ainda denotada por $\{u_z^n\}_{n\geq 1}$ e $w \in E$ tais que $u_z^n \to w$ fraco em E. Como consequência do Teorema 2.43, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$. Logo, aplicando o Teorema 2.48 com $E_0 = H_0^1(\Omega)$, $E_1 = L^2(\Omega)$ e $E_2 = H^{-1}(\Omega)$ obtemos que $E \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$. Portanto, $\{u_z^n\}_{n\geq 1}$ converge fortemente para w em $L^2(Q)$ pelo Teorema 2.13.

Resumindo

$$\begin{cases} v_z^n \overset{*}{\rightharpoonup} v & \text{em } L^\infty(\omega \times (0,T)), \\ u_z^n \to w & \text{em } L^2(Q). \end{cases}$$

Assim, procedendo de maneira análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.8 a partir de (3.73) deduzimos w é solução de (3.81) associada ao controle v. Pelas convergências da sequência $\{u_z^n\}_{n\geq 1}$ temos que $u = w$ q.t.p..

Logo, para concluir que $\mathcal{A}(z)$ é fechado basta provar que $w \in \mathcal{A}(z)$. Mas como w é solução do problema (3.81) associado ao controle v resta mostrar que $v \in A(z)$. De fato, v satisfaz a estimativa (3.83) pois pelo Teorema 2.1 segue que

$$||v||_{L^\infty(\omega\times(0,T))} \leq \liminf_{n\to\infty} ||v_z^n||_{L^\infty(\omega\times(0,T))}$$

e cada v_z^n satisfaz a estimativa (3.83) pois $\{v_z^n\}_{n\geq 1} \subseteq A(z)$. Denotando por $\overline{u}^n$ a solução do problema (3.84) associada ao controle v_z^n e procedendo novamente como na demonstração do Teorema 3.8 obtemos que

$$\begin{cases} v_z^n \overset{*}{\rightharpoonup} v & \text{em } L^\infty(\omega \times (0,T_z^*)), \\ \overline{u}^n \rightharpoonup \overline{u} & \text{em } L^2(0,T_z^*;H_0^1(\Omega)), \\ \overline{u}_t^n \rightharpoonup \overline{u}_t & \text{em } L^2(0,T_z^*;H^{-1}(\Omega)), \end{cases}$$

em que $\overline{u}$ é solução de (3.84) associada ao controle v.

Pela definição de solução fraca para o problema (3.84) associado ao controle v_z^n temos que

$$\int_0^{T_z^*} \langle \overline{u}_t^n, \overline{w}\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\Delta\overline{u}^n, \Delta\overline{w})_{L^2(\Omega)} + (g(y^*, T_R(z))\overline{u}^n, \overline{w})_{L^2(\Omega)} = \int_0^{T_z^*} (v_z^n 1_\omega, \overline{w})_{L^2(\Omega)}, \tag{3.87}$$

para toda $\overline{w} \in L^2(0,T_z^*;H_0^1(\Omega))$. E pela definição de solução fraca para o problema (3.84) associado ao controle v, deduzimos que

$$\int_0^{T_z^*} \langle \overline{u}_t, \overline{w}\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\Delta\overline{u}, \Delta\overline{w})_{L^2(\Omega)} + (g(y^*, T_R(z))\overline{u}, \overline{w})_{L^2(\Omega)} = \int_0^{T_z^*} (v 1_\omega, \overline{w})_{L^2(\Omega)}, \tag{3.88}$$

para toda $\overline{w} \in L^2(0, T_z^*; H_0^1(\Omega))$.

Agora, integrando por partes o primeiro termo da integral a esquerda nas igualdades (3.87) e (3.88) segue que

$$\begin{aligned}\int_0^{T_z^*} -\langle \overline{w}_t, \overline{u}^n \rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\Delta \overline{u}^n, \Delta \overline{w})_{L^2(\Omega)} + (g(y^*, T_R(z))\overline{u}^n, \overline{w})_{L^2(\Omega)} \\ = \int_0^{T_z^*} (v_z^n 1_\omega, \overline{w})_{L^2(\Omega)} - (\overline{u}^n(\cdot, T_z^*), \overline{w}(\cdot, T_z^*))_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{T_z^*} -\langle \overline{w}_t, \overline{u} \rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\Delta \overline{u}, \Delta \overline{w})_{L^2(\Omega)} + (g(y^*, T_R(z))\overline{u}, \overline{w})_{L^2(\Omega)} \\ = \int_0^{T_z^*} (v 1_\omega, \overline{w})_{L^2(\Omega)} - (\overline{u}(\cdot, T_z^*), \overline{w}(\cdot, T_z^*))_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.90}$$

para toda $\overline{w} \in L^2(0, T_z^*; H_0^1(\Omega))$ com $\overline{w}(\cdot, 0) = 0$.

Como $v_z^n \in A(z)$, então $\overline{u}^n(\cdot, T_z^*) = 0$. Agora, substituindo $\overline{u}^n(\cdot, T_z^*) = 0$ em (3.89) deduzimos que

$$\int_0^{T_z^*} -\langle \overline{w}_t, \overline{u}^n \rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\Delta \overline{u}^n, \Delta \overline{w})_{L^2(\Omega)} + (g(y^*, T_R(z))\overline{u}^n, \overline{w})_{L^2(\Omega)} = \int_0^{T_z^*} (v_z^n 1_\omega, \overline{w})_{L^2(\Omega)},$$

para toda $\overline{w} \in L^2(0, T_z^*; H_0^1(\Omega))$ com $\overline{w}(\cdot, 0) = 0$. E passando o limite $n \to \infty$ na igualdade acima concluímos que

$$\int_0^{T_z^*} -\langle \overline{w}_t, \overline{u} \rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + (\Delta \overline{u}, \Delta \overline{w})_{L^2(\Omega)} + (g(y^*, T_R(z))\overline{u}, \overline{w})_{L^2(\Omega)} = \int_0^{T_z^*} (v 1_\omega, \overline{w})_{L^2(\Omega)},$$

para toda $\overline{w} \in L^2(0, T_z^*; H_0^1(\Omega))$ com $\overline{w}(\cdot, 0) = 0$.

Comparando a última igualdade com (3.90) obtemos que

$$(\overline{u}(\cdot, T_z^*), \overline{w}(\cdot, T_z^*))_{L^2(\Omega)} = 0,$$

para toda $\overline{w} \in L^2(0, T_z^*; H_0^1(\Omega))$ com $\overline{w}(\cdot, 0) = 0$. De onde segue que $\overline{u}(\cdot, T_z^*) = 0$, ou seja, $v \in A(z)$ e finalizamos a demonstração do item (i).

Na sequência provaremos o item (ii).

Seja $z \in L^\infty(Q)$. Para todo $u_z \in \mathcal{A}(z)$, associado a um $v_z \in A(z)$, podemos substituir a desigualdade (3.85) na estimativa (2.1) do Teorema 2.53 obtendo

$$||u_z||_{L^\infty(Q)} \leq \exp\Big(C\Big(1 + ||g(y^*, T_R(z))||_{L^\infty(Q)} + ||g(y^*, T_R(z))||_{L^\infty(Q)}^{\frac{2}{3}}\Big)\Big).$$

Por outro lado, temos por (3.77) e pela definição da função truncamento T_R que

$$|g(y^*, T_R(z))|^{\frac{2}{3}} \leq C_\xi + \xi \ln(1 + R) \text{ em } Q.$$

Portanto, pelas duas últimas desigualdades

$$||u_z||_{L^\infty(Q)} \leq \exp\Big(C\Big(1 + (C_\xi + \xi \ln(1+R))^{\frac{3}{2}} + C_\xi + \xi \ln(1+R)\Big)\Big).$$

De onde, existe $r > 0$ que não depende de z tal que

$$||u_z||_{L^\infty(Q)} \leq r.$$

Logo, $u_z \in \overline{B}(0,r)$ para qualquer $z \in L^\infty(Q)$. Concluímos então que $\mathcal{A}(z) \subseteq \overline{B}(0,r)$, para todo $z \in L^\infty(Q)$.

Por outro lado, pela regularidade parabólica dada pelo Teorema 2.54 segue que $\displaystyle\bigcup_{z \in \overline{B}(0,r)} \mathcal{A}(z)$ é limitada em um espaço $C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$, para algum $0 < \alpha < \beta$. E como consequência do Teorema 2.24, $C^{0,\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^\infty$. Assim, deduzimos que existe um compacto $K_0 \subseteq L^\infty(Q)$ tal que

$$\bigcup_{z \in \overline{B}(0,r)} \mathcal{A}(z) \subseteq K_0.$$

Definindo $K = \overline{B}(0,r) \cap K_0$ concluímos que K é não vazio, convexo e compacto tal que $A(z) \subseteq K$ para todo $z \in K$.

Por fim, demonstraremos o item (iii).

Seja $\{z_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência convergindo fortemente para um z em $L^\infty(Q)$ e $\{u_z^n\}_{n\geq 1}$ uma sequência convergindo para um u em $L^\infty(Q)$ tal que $u_z^n \in \Psi(z_n) = \mathcal{A}(z_n)$, para todo $n \geq 1$. Consideramos $v_z^n \in A(z_n)$ os controles associados a u_z^n.

Para concluir a demonstração do item (iii) basta provar que $u \in \Psi(z) = \mathcal{A}(z)$.

Observamos que a sequência $\{g(y^*, T_R(z_n))\}_{n\geq 1}$ é limitada em $L^\infty(Q)$ pela estimativa (3.77). Assim, segue pelo Corolário 2.3 que existe subsequência ainda denotada por $\{g(y^*, T_R(z_n))\}_{n\geq 1}$ e $G \in L^\infty(Q)$ tal que $g(y^*, T_R(z_n)) \to G$ fraco-$*$ em $L^\infty(Q)$. Então, pela continuidade de g e pelo fato de $z_n \to z$ q.t.p., temos que $G = g(y^*, T_R(z))$. Ou seja, $g(y^*, T_R(z_n)) \to g(y^*, T_R(z))$ fraco-$*$ em $L^\infty(Q)$. Agora, procedendo de maneira análoga ao que foi feito no item (i) concluímos que $u \in \mathcal{A}(z) = \Psi(z)$.

Por (i), (ii) e (iii) a aplicação Ψ restrita a K satisfaz todas as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani. Logo, existe um ponto fixo $u \in L^\infty(Q)$, ou seja, $u \in \Psi(u) = \mathcal{A}(u)$. A seguir demonstraremos que existe $R > 0$ tal que todo ponto fixo u de Ψ satisfaz a seguinte desigualdade

$$||u||_{L^\infty(Q)} \leq R. \tag{3.91}$$

Seja u ponto fixo de Ψ associado a um controle $v \in A(u)$. Pelo Teorema 2.53,

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty(Q)} \leq{}& \exp\Big(T_u^*||g(y^*, T_R(u))||_{L^\infty(Q)}\Big)||u_0||_{L^\infty(\Omega)} \\ &+ T_u^* \exp\Big(T_u^*||g(y^*, T_R(u))||_{L^\infty(Q)}\Big)||v||_{L^\infty(\omega\times(0,T))}. \end{aligned}$$

Utilizando (3.82) e a última desigualdade obtemos que

$$\begin{aligned}||u||_{L^\infty(Q)} &\leq \exp\Big(T||g(y^*,T_R(u))||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big(||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + T||v||_{L^\infty(\omega\times(0,T))}\Big)\\ &\leq \exp\Big(C\Big(1+||g(y^*,T_R(u))||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)\Big(||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + ||v||_{L^\infty(\omega\times(0,T))}\Big),\end{aligned}$$

em que $C = C(\Omega,\omega,T) > 0$ é uma constante.

Substituindo a estimativa (3.85) na desigualdade anterior temos que

$$||u||_{L^\infty(Q)} \leq \exp\Big(C\Big(1+||g(y^*,T_R(u))||^{\frac{2}{3}}_{L^\infty(Q)}\Big)\Big)||u_0||_{L^\infty(\Omega)},$$

em que $C = C(\Omega,\omega,T) > 0$ é uma constante.

Usando a desigualdade (3.77) e o fato de $|T_R| \leq R$ deduzimos que

$$\begin{aligned}||u||_{L^\infty(Q)} &\leq \exp(C(1+C_\xi+\xi\ln(1+T_R(u))))||u_0||_{L^\infty(\Omega)}\\ &\leq \exp(C(1+C_\xi+\xi\ln(1+R)))||u_0||_{L^\infty(\Omega)}\\ &= \exp(C(1+C_\xi))(1+R)^{\xi C}||u_0||_{L^\infty(\Omega)},\end{aligned}$$

em que $C = C(\Omega,\omega,T) > 0$ é uma constante.

Tomando $\xi > 0$ pequeno o suficiente tal que $\xi C < 1$ podemos definir

$$R := \max\left\{1, 2^{\frac{\xi C}{1-\xi C}}\exp\left(\frac{C(1+C_\xi)}{1-\xi C}\right)||u_0||^{\frac{1}{1-\xi C}}_{L^\infty(\Omega)}\right\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}||u||_{L^\infty(Q)} &\leq \exp(C(1+C_\xi))(1+R)^{\xi C}||u_0||_{L^\infty(\Omega)}\\ &\leq \exp(C(1+C_\xi))||u_0||_{L^\infty(\Omega)}(2R)^{\xi C}\\ &\leq \frac{1}{2^{\xi C}}R^{1-\xi C}(2R)^{\xi C} = R.\end{aligned}$$

Portanto, existe $u \in L^\infty(Q)$ tal que a estimativa (3.91) é satisfeita. Ou seja, existe $\hat{v} \in A(u) \subseteq L^\infty(\omega \times (0,T))$ tal que u é solução do problema (3.81). Mas, pela estimativa (3.91) e as definições de g e T_R, segue que u é solução do problema (3.76). E pela condição (3.86) concluímos que

$$u(\cdot,T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Assim, o resultado segue neste primeiro caso.

Observação 3.16. *A constante R definida anteriormente depende somente de Ω, ω, $||u_0||_{L^\infty(\Omega)}$, $f|_{\mathbb{R}\setminus(-k^*,k^*)}$, $M(k^*)$, $L(k^*+1)$ e T. Logo, as estimativas encontradas envolvendo as normas $||u||_{L^\infty(Q)}$ e $||\hat{v}||_{L^\infty(\omega\times(0,T))}$ dependem somente destes termos.*

Segundo caso: $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ e f é localmente Lipschitz

Pelo Teorema 2.18 existe uma sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de funções localmente Lipschitz tais que $f_n \in C^1([-k^*, k^*])$, $f = f_n$ em $\mathbb{R} \setminus (-k^* - 1, 1 + k^*)$, f e as f_n possuem a mesma constante de Lipschitz em $[-k^* - 1, 1 + k^*]$ e

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n,$$

sendo que o limite é uniforme em $\mathbb{R}$.

Como $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ podemos aplicar o Teorema 2.21 para obter $\beta \in (0,1)$ e funções $u_0^n \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ tais que

$$u_0 = \lim_{n\to\infty} u_0^n,$$

sendo que o limite é uniforme em $\overline{\Omega}$.

Dessa maneira, cada par (f_n, u_0^n) satisfaz as condições do primeiro caso já demonstrado. Então existem $\hat{v}_n \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ tais que as soluções u_n dos problemas

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n + f_n(y^* + u_n) - f_n(y^*) = \hat{v}_n 1_\omega & \text{em } Q, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u_n(x,0) = u_0^n(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

satisfazem

$$u_n(\cdot, T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Pelas estimativas (3.85) e (3.91), as definições das funções f_n, u_0^n e a Observação 3.16 obtemos que $||\hat{v}_n||_{L^\infty(\omega\times(0,T))}$ e $||u_n||_{L^\infty(Q)}$ são uniformemente limitadas. Mais uma vez utilizando o mesmo procedimento usado na demonstração do Teorema 3.8 e do item (i) no primeiro caso encontramos $\hat{v} \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ e u solução do problema (3.76) associado ao controle $\hat{v}$ satisfazendo

$$u(\cdot, T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Portanto, o resultado é válido neste caso.

Terceiro caso: $u_0 \in L^2(\Omega)$ e f é localmente Lipschitz

Pelo Teorema 2.52 existe $0 < \varepsilon < T$ tal que o problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + f(y^* + w) - f(y^*) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,\varepsilon), \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\varepsilon), \\ w(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

admite única solução em $C([0,\varepsilon], L^2(\Omega))$.

Definindo $\hat{v}_1 \equiv 0$ em $\omega \times (0, \varepsilon)$ temos que o problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + f(y^* + w) - f(y^*) = \hat{v}_1 1_\omega & \text{em } \Omega \times (0, \varepsilon), \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \varepsilon), \\ w(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

admite única solução w em $C([0, \varepsilon], L^2(\Omega))$.

Por outro lado, $w(\cdot, \varepsilon) \in C^0(\overline{\Omega})$ pela regularidade parabólica (Teorema 2.54). Consideremos então o problema

$$\begin{cases} \overline{w}_t - \Delta \overline{w} + f(y^* + \overline{w}) - f(y^*) = \hat{v}_2 1_\omega & \text{em } \Omega \times (\varepsilon, T), \\ \overline{w} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (\varepsilon, T), \\ \overline{w}(x, \varepsilon) = w(x, \varepsilon) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Como $w(\cdot, \varepsilon) \in C^0(\overline{\Omega})$, podemos aplicar o resultado obtido no segundo caso.

Então existe controle $\hat{v}_2 \in L^\infty(\omega \times (\varepsilon, T))$ tal que a solução $\overline{w}$ do problema acima satisfaz

$$\overline{w}(\cdot, T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Assim, dado o controle $\hat{v} \in L^\infty(\omega \times (0, T))$ definido por

$$\hat{v} = \begin{cases} \hat{v}_1, & \text{se } t \in (0, \varepsilon), \\ \hat{v}_2, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

temos que

$$u = \begin{cases} w, & \text{se } t \in (0, \varepsilon), \\ \overline{w}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é solução do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + f(y^* + u) - f(y^*) = \hat{v} 1_\omega & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e satisfaz

$$u(\cdot, T) = \overline{w}(\cdot, T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Concluindo a demonstração do terceiro caso e da Lema 3.15. ■

E para finalizar o capítulo demonstraremos o Teorema 1.5. A ideia da demonstração é a partir de uma mudança de variável transformar o sistema (1.1) em um sistema como o do Lema 3.15.

Demonstração do Teorema 1.5:

Pelas hipóteses do Teorema 1.5 existe y^* uma solução limitada e globalmente definida do problema (1.1) com respeito a um controle $v^* \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ e condição inicial $y_0^* \in L^2(\Omega)$. Definindo a mudança de variável $u = y - y^*$ temos que y é uma solução de (1.1) se, e somente se, u é solução do problema (3.76) em que $\hat{v} = v - v^* \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ e $u_0 = y_0 - y_0^* \in L^2(\Omega)$.

Assim, dado $y_0 \in L^2(\Omega)$, observamos que $u_0 = y_0 - y_0^* \in L^2(\Omega)$. Então, pelo Lema 3.15, existe $\hat{v} \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ tal que a solução u de (3.76) está definida globalmente e

$$u(\cdot, T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Logo, $y = u + y^*$ é solução do problema (1.1) definida globalmente com controle $v = \hat{v} + v^* \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ e condição inicial $y_0 = u_0 + y_0^* \in L^2(\Omega)$. Notamos ainda que

$$y(\cdot, T) = u(\cdot, T) + y^*(\cdot, T) = y^*(\cdot, T) \text{ em } \Omega.$$

Portanto, o sistema (1.1) possui a propriedade da controlabilidade exata a trajetórias no tempo T. ■

Capítulo 4

Controlabilidade aproximada

Ao longo deste capítulo estudaremos o problema (1.1) do ponto de vista da controlabilidade aproximada e demonstraremos dois resultados principais. O primeiro garante a existência de funções f de maneira que, para cada $0 < T < \infty$, o problema (1.1) não possui a propriedade de controlabilidade aproximada. Já o segundo estabelece condições sobre a função f e sobre a existência de uma solução limitada e globalmente definida de (1.1) de maneira que o problema (1.1) possui a propriedade de controlabilidade aproximada.

4.1 Um resultado sobre a falta de controlabilidade aproximada

Esta seção é dedicada a demonstração do Teorema 1.7 que garante a não controlabilidade aproximada do problema (1.1) para uma classe de funções f. Sua demonstração é baseada nas contruções feitas ao longo da demonstração do Teorema 1.4 e a principal ideia da mesma é encontrar uma limitação uniforme para os estados finais do problema (1.1).

Demonstração do Teorema 1.7:

Definemos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \int_0^s \ln^p(1 + |u|)\, du, \tag{4.1}$$

com $p > 2$. Consideremos $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função não negativa satisfazendo as condições em (3.11) dada pela Proposição 3.3.

Procedendo de maneira análoga ao que foi realizado na primeira parte da demonstração da Proposição 3.1 observamos que $f(0) = 0$ e f é localmente Lipschitz. Além disso, como a aplicação $s \to f(|s|)$ coincide com a função definida em (3.1) temos que

$$|f(s)| \sim |s| \ln^p(1 + |s|) \text{ quando } |s| \to \infty.$$

Portanto, f satisfaz as hipóteses do Teorema 1.7.

Dados $y_0 \in L^2(\Omega)$ e $v \in L^\infty(\omega \times (0,T))$, denotemos por y a solução do problema (1.1) associada à função f, o controle v e a condição inicial y_0. Multiplicando a equação em (1.1) por $\rho\,\mathrm{sgn}(y)$, integrando sobre Ω, usando que $\rho = 0$ em ω por (3.11) e que $\mathrm{sgn}(y)f(y) = f(|y|)$ pela definição da função f em (4.1) obtemos

$$\int_\Omega \rho\,\mathrm{sgn}(y) y_t\,dx - \int_\Omega \rho\,\mathrm{sgn}(y)\Delta y\,dx + \int_\Omega \rho\,\mathrm{sgn}(y) f(y)\,dx = \int_\Omega \rho\,\mathrm{sgn}(y) v 1_\omega\,dx$$
$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho|y|\,dx = \int_\Omega \rho\,\mathrm{sgn}(y)\Delta y\,dx - \int_\Omega \rho f(|y|)\,dx. \tag{4.2}$$

Por outro lado, aplicando o Teorema 2.67 sobre o operador $\Delta(\cdot)$ e y, obtemos a seguinte desigualdade.

$$\int_\Omega \rho\,\mathrm{sgn}(y)\Delta y\,dx \leq \int_\Omega \rho\Delta(|y|)\,dx.$$

Substituindo a desigualdade acima em (4.2) temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho|y|\,dx \leq \int_\Omega \rho\Delta(|y|)\,dx - \int_\Omega \rho f(|y|)\,dx.$$

Aplicando a terceira identidade de Green (Teorema 2.64) na primeira integral do lado direito, usando que $y = 0$ em Σ pois é solução de (1.1) e que $\rho = 0$ em $\partial\Omega$ pois $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ chegamos em

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho|y|\,dx \leq \int_\Omega |y|\Delta\rho\,dx - \int_\Omega \rho f(|y|)\,dx. \tag{4.3}$$

A aplicação $s \mapsto f(|s|)$ coincide com a função definida na Proposição 3.1 por (3.1). Denotando por $\overline{f}$ a conjugada convexa da aplicação $s \mapsto f(|s|)$ segue pela demonstração do Teorema 1.4, mais especificamente pela desigualdade (3.17), que

$$\int_\Omega |y|\Delta\rho\,dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \rho f(|y|)\,dx + \frac{1}{2}\int_B \rho\overline{f}\left(\frac{2|\Delta\rho|}{\rho}\right)dx.$$

Então, substituindo a última desigualdade em (4.3), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho|y|\,dx \leq \frac{1}{2}\int_B \rho\overline{f}\left(\frac{2|\Delta\rho|}{\rho}\right)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \rho f(|y|)\,dx.$$

Mas como ρ satisfaz as condições em (3.11) a primeira integral do lado direito da desigualdade acima é finita. Logo,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho|y|\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho f(|y|)\,dx \leq C,$$

com $C = C(\Omega, \omega, p) < \infty$.

Como $s \mapsto f(|s|)$ é convexa e ρ é não negativa e tal que $\int_\Omega \rho(x)\,dx = 1$, pois satisfaz (3.11), então podemos aplicar o Teorema 2.55, obtendo

$$f\left(\int_\Omega \rho|y|\,dx\right) \leq \int_\Omega \rho f(|y|)\,dx.$$

Portanto, pelas duas últimas desigualdades temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho|y|\,dx + \frac{1}{2}f\Big(\int_\Omega \rho|y|\,dx\Big) \leq C.$$

Definindo $z(t) = \displaystyle\int_\Omega \rho(x)|y(x,t)|\,dx$ segue que

$$z'(t) + \frac{1}{2}f(z(t)) \leq C.$$

Por outro lado, pela definição de z e pelo fato de ρ ser não negativa obtemos que $z(t) \geq 0$, para todo t. Então, pela definição de f dada em (4.1), $f(z(t)) \geq 0$, para todo t. Concluímos que

$$z'(t) \leq C.$$

Integrando em ambos os lados sobre $(0,T)$ obtemos que

$$\int_\Omega \rho(x)|y(x,T)|\,dx = z(T) \leq CT - z(0) = CT - \int_\Omega \rho(x)|y_0(x)|\,dx = C', \tag{4.4}$$

com $C'(\Omega,\omega,T)$ constante que não depende do controle v.

Logo, fixando $y_0 \in L^2(\Omega)$ e $\Omega_0 \subset \Omega \setminus \overline{\omega}$ compacto tal que $\rho|_{\Omega_0}$ não se anula temos pela desigualdade (4.4) que

$$||y(\cdot,T)||_{L^1(\Omega_0)} \leq C_0,$$

com $C_0(\Omega,\omega,T,\rho)$ constante que não depende do controle v. Ou seja, o conjunto dos estados finais restritos ao compacto Ω_0 é uniformemente limitado em $L^1(\Omega_0)$.

Consideramos então $\varepsilon > 0$ dado. Tomando $y_1 \in L^2(\Omega)$ tal que $||y_1||_{L^1(\Omega_0)} > |\Omega_0|^{\frac{1}{2}}\varepsilon + C_0$ deduzimos que, para qualquer y solução de (1.1) associada a y_0 fixado e um controle $v \in L^\infty(\omega \times (0,T))$,

$$\begin{aligned}
||y(\cdot,T) - y_1||_{L^2(\Omega)} &\geq ||y(\cdot,T) - y_1||_{L^2(\Omega_0)} \\
&\geq |\Omega_0|^{-\frac{1}{2}}||y(\cdot,T) - y_1||_{L^1(\Omega_0)} \\
&\geq |\Omega_0|^{-\frac{1}{2}}(||y_1||_{L^1(\Omega_0)} - ||y(\cdot,T)||_{L^1(\Omega_0)}) \\
&> |\Omega_0|^{-\frac{1}{2}}(|\Omega_0|^{\frac{1}{2}}\varepsilon + C_0 - C_0) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Para obter a segunda desigualdade acima foi usado o Corolário 2.34. Portanto, o problema (1.1) não possui a propriedade da controlabilidade aproximada para o tempo $T > 0$. ■

4.2 Um resultado afirmativo sobre controlabilidade aproximada

Em contrapartida ao Teorema 1.7, nesta seção provaremos o Teorema 1.8, que é um resultado afirmativo sobre a controlabilidade aproximada para o problema (1.1). A ideia da demonstração é simples e segue a partir de aplicações do Teorema 1.5.

Demonstração do Teorema 1.8:

Por hipótese temos que

$$\frac{f(s)}{|s|\ln^{\frac{3}{2}}(1+|s|)} \to 0 \text{ quando } |s| \to \infty.$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C(1 + |s|\ln^{\frac{3}{2}}(1+|s|))), \tag{4.5}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Caso 1: Consideremos neste caso que $y_0 \in L^2(\Omega)$, $y_1 \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\varepsilon > 0$ são dados. Definimos ainda o problema auxiliar

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega \times (T-\delta, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (T-\delta, T), \\ u(x, T-\delta) = y_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Segue do Teorema 2.52 que o problema (4.6) possui uma única solução $u \in C([T-\delta, T], L^2(\Omega))$ essencialmente limitada para algum $\delta > 0$ que depende de $||y_1||_{L^2(\Omega)}$ e da constante C em (4.5). Usando que $u \in C([T-\delta, T], L^2(\Omega))$ é essecialmente limitada podemos escolher δ suficientemente pequeno de maneira que

$$||u(\cdot, T) - y_1||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon, \tag{4.7}$$

com δ dependendo de Ω, $||y_1||_{L^2(\Omega)}$, C e ε. Fixamos então δ e u de maneira que u é solução de (4.6) satisfazendo (4.7).

Agora, pelo Teorema 1.5 existe controle $v_1 \in L^\infty(\omega \times (0, T-\delta))$ tal que a solução do problema

$$\begin{cases} y^1_t - \Delta y^1 + f(y^1) = v_1 1_\omega & \text{em } \Omega \times (0, T-\delta), \\ y^1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T-\delta), \\ y^1(x, 0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

satisfaz

$$y^1(\cdot, T-\delta) = y^*(\cdot, T-\delta) \text{ em } \Omega.$$

Novamente pelo Teorema 1.5 existe controle $v_2 \in L^\infty(\omega \times (T-\delta, T))$ tal que a solução do problema

$$\begin{cases} y^2_t - \Delta y^2 + f(y^2) = v_2 1_\omega & \text{em } \Omega \times (T-\delta, T), \\ y^2 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (T-\delta, T), \\ y^2(x, T-\delta) = y^*(x, T-\delta) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

satisfaz

$$y^2(\cdot, T) = u(\cdot, T) \text{ em } \Omega.$$

A aplicação do Teorema 1.5 nestes dois casos é possível pois $y^*|_{\Omega\times(0,T-\delta)}$ e $y^*|_{\Omega\times(T-\delta,T)}$ são soluções limitadas dos problemas anteiores associadas às condições iniciais y_0^* e $y^*(\cdot, T-\delta)$ e aos controles $v^*|_{\omega\times(0,T-\delta)}$ e $v^*|_{\omega\times(T-\delta,T)}$, respectivamente.

Assim, definindo o controle $v \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ por

$$v = \begin{cases} v_1 & \text{se } t \in (0, T-\delta), \\ v_2 & \text{se } t \in (T-\delta, T), \end{cases}$$

segue que

$$y = \begin{cases} y^1 & \text{se } t \in (0, T-\delta), \\ y^2 & \text{se } t \in (T-\delta, T), \end{cases}$$

é solução do problema (1.1) associado à condição inicial y_0 e controle v. Além disso,

$$y(\cdot, T) = y^2(\cdot, T) = u(\cdot, T) \text{ em } \Omega.$$

Concluímos por (4.7) e pela igualdade anterior que

$$||y(\cdot, T) - y_1||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Portanto, o resultado de controlabilidade aproximada foi provado para o caso em que $y_1 \in C^1(\overline{\Omega})$.

Caso 2: Consideremos agora que $y_0 \in L^2(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ são dados. Usando que $C^1(\overline{\Omega})$ é denso em $L^2(\Omega)$ existe $\overline{y}_1 \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$||y_1 - \overline{y}_1||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas pelo primeiro caso existe controle $v \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ tal que a solução do problema (1.1) associada à condição inical y_0 e controle v satisfaz

$$||y(\cdot, T) - \overline{y}_1||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deduzimos então pelas duas últimas desigualdades que

$$||y(\cdot, T) - y_1||_{L^2(\Omega)} \leq ||y_1 - \overline{y}_1||_{L^2(\Omega)} + ||y(\cdot, T) - \overline{y}_1||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Logo, o problema (1.1) possui a propriedade da controlabilidade aproximada no tempo T. ■

Capítulo 5

Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo principal estudar as propriedades de controlabilidade exata a trajetórias e controlabilidade aproximada do problema (1.1). No decorrer da dissertação foram encontradas condições suficientes, em especial sobre a função f, para que o sistema (1.1) possua ou não tais propriedades. A partir disto foram demonstrados quatro principais resultados que dizem respeito às propriedades de controlabilidade do problema (1.1). Sendo dois destes resultados de controlabilidade (Teorema 1.4 e Teorema 1.7) e dois de não controlabilidade (Teorema 1.5 e Teorema 1.8).

Precisamente, segue do Teorema 1.4 e do Teorema 1.7 que existem funções f satisfazendo a relação de equivalência

$$|f(s)| \sim |s| \ln^p(1+|s|) \text{ quando } |s| \to \infty, \tag{5.1}$$

com $p > 2$, tais que o sistema (1.1) não é exatamente controlável a trajetórias e não é aproximadamente controlável, para cada $0 < T < \infty$. No artigo de Fernández-Cara [12, Section 6.2] é discutida a questão da equvalência (5.1) nos casos $p \leq 2$ e o motivo pelo qual, nestes casos, as demonstrações do Teorema 1.4 e Teorema 1.7 não podem ser estendidas.

Por outro lado, pelo Teorema 1.5 e pelo Teorema 1.8, dado $0 < T < \infty$ e y^* uma trajetória limitada e globalmete definida de (1.1), se f satisfaz a condição de crescimento

$$\frac{f(s)}{|s| \ln^{\frac{3}{2}}(1+|s|)} \to 0 \text{ quando } |s| \to \infty, \tag{5.2}$$

então o sistema (1.1) é exatamente controlável a trajetórias e é aproximadamente controlável. A hipótese de existência de uma solução limitada e globalmente definida é necessária uma vez que, caso contrário, sem uma solução global a Definição 1.3 e a Definição 1.6 perdem o sentido.

Considerando f satisfazendo a condição (5.1), com $p < \dfrac{3}{2}$, f satisfaz também (5.2). Portanto, para funções f respeitando a relação de equivalência (5.1) e supondo que o problema (1.1) possui uma trajetória limitada pode-se concluir que (1.1) é exatamente (e aproximadamente) controlável se $p < \frac{3}{2}$ e não é exatamente (e aproximadamente) controlável se $p > 2$. Neste caso não é possível afirmar algo em relação a controlabilidade do sistema (1.1) a partir dos resultados apresentados anteriormente se $\frac{3}{2} \leq p \leq 2$, sendo este um problema em aberto no momento.

Além do caso em aberto para $\frac{3}{2} \leq p \leq 2$ é interessante discutir extensões destes resultados de controlabilidade para modelos semi-lineares mais gerais. Ou seja, buscar entender se os resultados aqui obtidos podem ser estendidos para problemas do tipo

$$\begin{cases} y_t - div(A(x,t)\nabla y) + g(x,t,u) = f(x,t) & \text{em Q}, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

com A uniformemente elíptico e g Lipschitz. Outras possíveis extensões dizem respeito a controlabilidade associada a condição de fronteira, condições iniciais em espaços L^q para $q \neq 2$, entre outras.

Referências

[1] Barbu, V. Exact controllability of the superlinear heat equation. *Applied Mathematics and Optimization 42* (2000), 73–89. Citado na página 13.

[2] Barbu, V., and Precupanu, T. *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, fourth ed. Springer Dordrecht, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 18, 30 e 31.

[3] Bartle, R. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library. Wiley, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 45.

[4] Brezis, H. *Function Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York, NY, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 19, 23 e 25.

[5] Cazenave, T., Haraux, A., and Martel, Y. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford Lecture Mathematics and. Clarendon Press, 1998. Citado na página 28.

[6] Dacorogna, B. *Introduction to the Calculus of Variations*. Imperial College Press, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

[7] Dunford, N., and Schwartz, J. *Linear Operators, Part 1: General Theory*. Wiley Classics Library. Wiley, 1988. Citado na página 22.

[8] Evans, L. *Partial Differential Equations*, vol. 19 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 24, 25, 26, 27, 32 e 33.

[9] Fabre, C., Puel, J.-P., and Zuazua, E. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics 125*, 1 (1995), 31–61. Citado na página 65.

[10] Fernández-Cara, E. Null controllability of the semilinear heat equation. *ESAIM: COCV 2* (1997), 87–103. Citado 3 vezes nas páginas 13, 28 e 29.

[11] Fernández-Cara, E., and Zuazua, E. The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case. *Advances in Differential Equations 5*, 4-6 (2000), 465–514. Citado na página 108.

[12] Fernández-Cara, E., and Zuazua, E. Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire 17*, 5 (2000), 583–616. Citado 4 vezes nas páginas 13, 14, 61 e 97.

[13] Fernández-Cara, E., and Zuazua, E. Control theory: History, mathematical achievements and perspectives. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 26 (2003), 79–140. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

[14] Folland, G. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* A Wiley-Interscience publication. Wiley, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 32.

[15] Fursikov, A., and Imanuvilov, O. *Controllability of Evolution Equations.* No. 34 in Lecture Notes Series - Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center. Seoul National University, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 33.

[16] Glicksberg, I. L. A further generalization of the kakutani fixed point theorem, with application to nash equilibrium points. *Proceedings of the American Mathematical Society 3*, 1 (1952), 170–174. Citado na página 18.

[17] Horiuchi, T. Some remarks on kato's inequality. *Journal of Inequalities and Applications 6* (2001), 29–36. Citado na página 32.

[18] Krylov, N. V. *Lecture on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*, vol. 12 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

[19] Ladyzhenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., and Ural'ceva, N. N. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, vol. 23 of *Translations of mathematical monographs.* American Mathematical Society, 1968. Citado na página 29.

[20] Lebeau, G., and Robbiano, L. Contróle exact de léquation de la chaleur. *Communications in Partial Differential Equations 20*, 1-2 (1995), 335–356. Citado na página 13.

[21] Lima, E. L. *Curso de Análise*, 12 ed., vol. 1 of *Projeto Euclides.* IMPA, Rio de Janeiro, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 36, 38 e 47.

[22] Micu, S., and Zuazua, E. An introduction to the controllability of partial differential equations. *Collection Travaux en Cours* (2005). Citado na página 13.

[23] Munkres, J. R. *Analysis on manifolds.* Advanced Book Program. Addision-Wesley Publishing Company, 1991. Citado na página 32.

[24] Phelps, R. R. *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, 2 ed. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

[25] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976. Citado na página 21.

[26] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill, 1987. Citado na página 30.

[27] Russell, D. L. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in Applied Mathematics 52*, 3 (1973), 189–211. Citado na página 13.

[28] Russell, D. L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open questions. *SIAM Review 20*, 4 (1978), 639–739. Citado na página 13.

[29] Saut, J.-C., and Scheurer, B. Unique continuation for some evolution equations. *Journal of Differential Equations 66*, 1 (1987), 118–139. Citado na página 27.

[30] Zheng, S. *Nonlinear evolution equations*. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Chapman & Hall/CRC, 2004. Citado na página 26.

APÊNDICE A

Desigualdade de Carleman global

Nesta seção demonstraremos a desigualdade de Carleman global (Proposição 3.5). Para isso, consideramos as notações da Definição 3.4. Além disso, utilizaremos a seguinte notação de Einstein para as derivadas parciais com respeito às coordenadas espaciais.

Notação A.1 (Notação de Einstein). *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função suave. Denotaremos por $\partial_i f$ a somatória das derivadas parciais da função f, ou seja,*

$$\partial_i f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Demonstração da Proposição 3.5:

Ao longo desta demonstração utilizaremos as definições de τ, $\overline{\tau}$, ρ, ϕ e Φ dadas na Definição 3.4.

Sejam $f \in A$ e $s > 0$. Definindo as seguintes funções auxiliares $\psi = \Phi^{-s} f$, $h = \partial_t f + \Delta f$ e $g = \Phi^{-s} h$ obtemos a seguinte igualdade

$$\Phi^{-s}(\partial_t(\Phi^s \psi) + \Delta(\Phi^s \psi)) = \Phi^{-s}(\partial_t f + \Delta f) = \Phi^{-s} h = g.$$

Pela igualdade acima podemos escrever

$$T_1\psi + T_2\psi = g - s\psi\Delta\phi, \tag{A.1}$$

sendo os operadores T_1 e T_2 definidos por

$$\begin{cases} T_1\psi = \partial_t\psi + 2s\nabla\phi \cdot \nabla\psi, \\ T_2\psi = \Delta\psi + s^2|\nabla\phi|^2\psi + s\psi\partial_t\phi. \end{cases} \tag{A.2}$$

De fato, temos que

$$\begin{cases} \partial_t \Phi^s = \partial_t(\exp(s\phi)) = s\exp(s\phi)\partial_t\phi = s\Phi^s\partial_t\phi, \\ \partial_i \Phi^s = \partial_i(\exp(s\phi)) = s\exp(s\phi)\partial_i\phi = s\Phi^s\partial_i\phi, \\ \partial_i^2 \Phi^s = \partial_i(s\partial_i\phi\Phi^s) = s\Phi^s\partial_i^2\phi + s^2\Phi^s(\partial_i\phi)^2, \\ \nabla\Phi^s = s\Phi^s\nabla\phi, \\ \Delta\Phi^s = s\Phi^s\Delta\phi + s^2\Phi^s|\nabla\phi|^2. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g - s\psi\Delta\phi =& \Phi^{-s}h - s\psi\Delta\phi = \Phi^{-s}(\partial_t f + \Delta f) - s\psi\Delta\phi \\ &= \Phi^{-s}(\partial_t(\psi\Phi^s) + \Delta(\psi\Phi^s)) - s\psi\Delta\phi \\ &= \Phi^{-s}(\Phi^s\partial_t\psi + s\psi\Phi^s\partial_t\phi + \Phi^s\Delta\psi + 2s\Phi^s\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \psi\Phi^s(s\Delta\phi + s^2|\nabla\phi|^2)) \\ &- s\psi\Delta\phi \\ &= \partial_t\psi + s\psi\partial_t\phi + \Delta\psi + 2s\nabla\phi\cdot\nabla\psi + s\psi\Delta\phi + s^2\psi|\nabla\phi|^2 - s\psi\Delta\phi \\ &= \partial_t\psi + s\psi\partial_t\phi + \Delta\psi + 2s\nabla\phi\cdot\nabla\psi + s^2\psi|\nabla\phi|^2 \\ &= \partial_t\psi + 2s\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \Delta\psi + s\psi\partial_t\phi + s^2\phi|\nabla\phi|^2 \\ &= T_1\psi + T_2\psi. \end{aligned}$$

Pela igualdade (A.1) segue que

$$||g - s\psi\Delta\phi||^2_{L^2(Q)} = ||T_1\psi + T_2\psi||^2_{L^2(Q)} = ||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + 2(T_1\psi, T_2\psi) + ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)}, \quad \text{(A.3)}$$

em que $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno em $L^2(Q)$.

Usando a definição do produto interno em $L^2(Q)$ temos que

$$\begin{aligned} (T_1\psi, T_2\psi) &= \int_Q T_1\psi\cdot T_2\psi \\ &= \int_Q \Delta\psi\partial_t\psi + \int_Q s^2|\nabla\phi|^2\psi\partial_t\psi + \int_Q s\psi\partial_t\psi\partial_t\phi + \int_Q 2s\Delta\psi(\nabla\phi\cdot\nabla\psi) \\ &+ \int_Q 2s^3|\nabla\phi|^2\psi(\nabla\phi\cdot\nabla\psi) + \int_Q 2s^2\psi\partial_t\phi(\nabla\phi\cdot\nabla\psi) \\ &= I_1 + 2sI_2 + s^2I_3 + 2s^3I_4 + sI_5 + 2s^2I_6, \end{aligned} \quad \text{(A.4)}$$

com

$$\begin{cases} I_1 = \int_Q \Delta\psi(\partial_t\psi), \\ I_2 = \int_Q \Delta\psi(\nabla\phi\cdot\nabla\psi), \\ I_3 = \int_Q |\nabla\phi|^2\psi(\partial_t\psi), \\ I_4 = \int_Q |\nabla\phi|^2\psi(\nabla\phi\cdot\nabla\psi) \\ I_5 = \int_Q \psi(\partial_t\psi\partial_t\phi), \\ I_6 = \int_Q \psi(\partial_t\phi)(\nabla\phi\cdot\nabla\psi). \end{cases}$$

Aplicando a primeira identidade do Teorema 2.64 na integral I_1 e usando que $\psi = \Phi^{-s} f \equiv 0$ em Σ, pois $f \in A$, deduzimos que

$$I_1 = \int_Q \Delta\psi(\partial_t\psi) = -\int_Q \nabla\psi \cdot \nabla(\partial_t\psi) + \int_\Sigma (\partial_t\psi)\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = -\frac{1}{2}\int_Q \partial_t|\nabla\psi|^2 = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\psi|^2\Big|_{t=0}^{t=T}.$$

Por outro lado,

$$\nabla\psi = f\nabla(\Phi^{-s}) + \Phi^{-s}\nabla f = f\nabla(\exp(-s\phi)) + \exp(-s\phi)\nabla f = \exp(-s\phi)(\nabla f - sf\nabla\phi).$$

Como $\phi = \dfrac{\rho}{t(T-t)}$ então $|\nabla\psi|^2 \to 0$ quando $t \to 0$ ou $t \to T$. Logo,

$$I_1 = 0. \tag{A.5}$$

Integrando por partes sobre a variável temporal a integral I_3 chegamos em

$$I_3 = \int_Q |\nabla\phi|^2\psi(\partial_t\psi) = \frac{1}{2}\int_Q \partial_t(|\psi|^2)|\nabla\phi|^2 = -\frac{1}{2}\int_Q |\psi|^2\partial_t(|\nabla\phi|^2) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\psi|^2|\nabla\phi|^2\Big|_{t=0}^{t=T}.$$

Por um argumento similar ao utilizado em I_1 obtemos que $|\psi|^2|\nabla\phi|^2 \to 0$ quando $t \to 0$ ou $t \to T$. Portanto,

$$I_3 = -\frac{1}{2}\int_Q |\psi|^2\partial_t(|\nabla\phi|^2). \tag{A.6}$$

Novamente integrando por partes sobre a variável temporal a integral I_5 obtemos

$$I_5 = \int_Q \psi(\partial_t\psi\partial_t\phi) = \frac{1}{2}\int_Q \partial_t(|\psi|^2)\partial_t\phi = -\frac{1}{2}\int_Q |\psi|^2\partial_t^2\phi + \frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_t\phi)|\psi|^2\Big|_{t=0}^{t=T}.$$

E mais uma vez segue por um argumento análogo ao que foi aplicado em I_1 que $(\partial_t\phi)|\psi|^2 \to 0$ quando $t \to 0$ ou $t \to T$. Logo,

$$I_5 = -\frac{1}{2}\int_Q |\psi|^2\partial_t^2\phi. \tag{A.7}$$

Aplicando o Teorema 2.65 na integral I_4 deduzimos que

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_Q |\nabla\phi|^2\psi(\nabla\phi\cdot\nabla\psi) = \int_Q \Big(|\nabla\phi|^2\nabla\phi\cdot\frac{1}{2}\nabla\psi^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\int_Q (|\nabla\phi|^2\nabla\phi\cdot\nabla\psi^2) = -\frac{1}{2}\int_Q \psi^2\nabla\cdot(|\nabla\phi|^2\nabla\phi) + \int_\Sigma \psi^2|\nabla\phi|^2\nabla\phi\cdot\nu. \end{aligned}$$

A última integral do lado direito se anula pois $\psi \equiv 0$ em Σ. Logo,

$$I_4 = -\frac{1}{2}\int_Q \psi^2\nabla\cdot(|\nabla\phi|^2\nabla\phi).$$

Calculando o divergente acima usando a notação de Einstein temos que

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(|\nabla\phi|^2\nabla\phi) &= \partial_j(|\nabla\phi|^2\partial_j\phi) \\ &= \partial_j((\partial_i\phi)^2\partial_j\phi) \\ &= 2\partial_i\partial_j\phi\partial_i\phi\partial_j\phi + (\partial_i\phi)^2\partial_j^2\phi \\ &= 2\partial_i\partial_j\phi\partial_i\phi\partial_j\phi + |\nabla\phi|^2\Delta\phi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_4 = -\int_Q \Big(\partial_i \partial_j \phi \partial_i \phi \partial_j \phi + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \Delta \phi \Big) |\psi|^2 = \int_Q \Big(-\partial_i \partial_j \phi - \frac{1}{2} \delta_{ij} \Delta \phi \Big) \partial_i \phi \partial_j \phi |\psi|^2. \quad \text{(A.8)}$$

Mais uma vez usando o Teorema 2.65, desta vez em I_6, segue que

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_Q \psi (\partial_t \phi)(\nabla \phi \cdot \nabla \psi) \\ &= \int_Q \Big((\partial_t \phi) \nabla \phi \cdot \frac{1}{2} \nabla \psi^2 \Big) \\ &= \frac{1}{2} \int_Q ((\partial_t \phi) \nabla \phi \cdot \nabla \psi^2) = -\frac{1}{2} \int_Q \psi^2 \nabla \cdot ((\partial_t \phi) \nabla \phi) + \frac{1}{2} \int_\Sigma \psi^2 (\partial_t \phi) \nabla \phi \cdot \nu. \end{aligned}$$

A última integral do lado direito acima se anula, pois $\psi \equiv 0$ em Σ. Logo,

$$I_6 = -\frac{1}{2} \int_Q \psi^2 \nabla \cdot ((\partial_t \phi) \nabla \phi).$$

Calculando o divergente acima usando a notação de Einstein obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ((\partial_t \phi) \nabla \phi) &= \partial_i ((\partial_t \phi) \partial_i \phi) \\ &= \partial_i (\partial_t \phi) \partial_i \phi + (\partial_t \phi) \partial_i^2 \phi \\ &= \partial_i (\partial_t \phi) \partial_i \phi + (\partial_t \phi) \Delta \phi. \end{aligned}$$

Concluímos então que

$$I_6 = -\frac{1}{2} \int_Q (\partial_i (\partial_t \phi) \partial_i \phi + (\partial_t \phi) \Delta \phi) |\psi|^2. \quad \text{(A.9)}$$

Por fim, aplicando o Teorema 2.64 em I_2 temos que

$$I_2 = \int_Q \Delta \psi (\nabla \phi \cdot \nabla \psi) = -\int_Q \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \psi) \cdot \nabla \psi + \int_\Sigma (\nabla \phi \cdot \nabla \psi) \frac{\partial \psi}{\partial \nu}.$$

Como $\psi \equiv 0$ sobre Σ, então $\partial_i \psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} \nu_i$ sobre Σ, em que ν_i é a i-ésima coordenada de ν. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\Sigma (\nabla \phi \cdot \nabla \psi) \frac{\partial \psi}{\partial \nu} &= \int_\Sigma (\nabla \phi \cdot (\partial_1 \psi, \cdots, \partial_n \psi)) \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \\ &= \int_\Sigma \Big(\nabla \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \nu \Big) \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \\ &= \int_\Sigma (\nabla \phi \cdot \nu) \Big| \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|^2 \\ &= \int_\Sigma \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big| \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$I_2 = -\int_Q \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \psi) \cdot \nabla \psi + \int_\Sigma \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big| \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|^2.$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\int_Q \nabla(\nabla\phi\cdot\nabla\psi)\cdot\nabla\psi &= \int_Q \partial_j(\nabla\phi\cdot\nabla\psi)\partial_j\psi \\
&= \int_Q \partial_j(\partial_i\phi\partial_i\psi)\partial_j\psi \\
&= \int_Q (\partial_j\partial_i\phi\partial_i\psi + \partial_i\phi\partial_j\partial_i\psi)\partial_j\psi \\
&= \int_Q \partial_j\partial_i\phi\partial_i\psi\partial_j\psi + \partial_i\phi\partial_j\partial_i\psi\partial_j\psi.
\end{aligned}
$$

De onde segue que

$$
I_2 = -\int_Q \partial_j\partial_i\phi\partial_i\psi\partial_j\psi + \partial_i\phi\partial_j\partial_i\psi\partial_j\psi + \int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2. \tag{A.10}
$$

Usando mais uma vez a primeira identidade do Teorema 2.64 na integral abaixo segue que

$$
\begin{aligned}
\int_Q (\Delta\phi\delta_{ij})\partial_i\psi\partial_j\psi &= \int_Q \Delta\phi(\nabla\psi\cdot\nabla\psi) \\
&= -\int_Q \nabla\phi\cdot\nabla(\nabla\psi\cdot\nabla\psi) + \int_\Sigma (\nabla\psi\cdot\nabla\psi)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}.
\end{aligned}
$$

Como $\partial_i\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu}\nu_i$ sobre Σ temos que

$$
\int_\Sigma (\nabla\psi\cdot\nabla\psi)\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = \int_\Sigma \left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = \int_\Sigma \left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2\frac{\partial\phi}{\partial\nu}.
$$

Concluímos então que

$$
\int_Q (\Delta\phi\delta_{ij})\partial_i\psi\partial_j\psi = -\int_Q \nabla\phi\cdot\nabla(\nabla\psi\cdot\nabla\psi) + \int_\Sigma \left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2\frac{\partial\phi}{\partial\nu}.
$$

Notamos ainda que

$$
\begin{aligned}
\int_Q \nabla\phi\cdot\nabla(\nabla\psi\cdot\nabla\psi) &= \int_Q \partial_i\phi\partial_i(\nabla\psi\cdot\nabla\psi) \\
&= \int_Q \partial_i\phi\partial_i(\partial_j\psi\partial_j\psi) \\
&= 2\int_Q \partial_i\phi\partial_i\partial_j\psi\partial_j\psi.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\int_Q (\Delta\phi\delta_{ij})\partial_i\psi\partial_j\psi = -2\int_Q \partial_i\phi\partial_i\partial_j\psi\partial_j\psi + \int_\Sigma \left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2\frac{\partial\phi}{\partial\nu}.
$$

Isolando o primeiro termo a direita obtemos que

$$
-\int_Q \partial_i\phi\partial_i\partial_j\psi\partial_j\psi = \frac{1}{2}\int_Q (\Delta\phi\delta_{ij})\partial_i\psi\partial_j\psi - \frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2\frac{\partial\phi}{\partial\nu}.
$$

Substituindo a igualdade anterior em (A.10) chegamos em

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_Q -\partial_i\partial_j\phi\partial_i\psi\partial_j\psi + \frac{1}{2}(\Delta\phi\delta_{ij})\partial_i\psi\partial_j\psi + \frac{1}{2}\int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 \\
&= \int_Q (-\partial_i\partial_j\phi + \frac{1}{2}(\Delta\phi\delta_{ij}))\partial_i\psi\partial_j\psi + \frac{1}{2}\int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2. \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

E substituindo as igualdades (A.5), (A.6), (A.7), (A.8), (A.9) e (A.11) em (A.4) temos que

$$
\begin{aligned}
(T_1\psi, T_2\psi) &= I_1 + 2sI_2 + s^2 I_3 + 2s^3 I_4 + sI_5 + 2s^2 I_6 \\
&= 2s\int_Q (-\partial_i\partial_j\phi + \frac{1}{2}(\Delta\phi\delta_{ij}))\partial_i\psi\partial_j\psi + s\int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 - \frac{s^2}{2}\int_Q |\psi|^2\partial_t(|\nabla\phi|^2) \\
&+ 2s^3\int_Q \Big(-\partial_i\partial_j\phi - \frac{1}{2}\delta_{ij}\Delta\phi\Big)\partial_i\phi\partial_j\phi|\psi|^2 - \frac{s}{2}\int_Q |\psi|^2\partial_t^2\phi \\
&- s^2\int_Q (\partial_i(\partial_t\phi)\partial_i\phi + (\partial_t\phi)\Delta\phi)|\psi|^2.
\end{aligned}
$$

Substituindo a igualdade acima em (A.3) deduzimos que

$$
\begin{aligned}
||g - s\psi\Delta\phi||^2_{L^2(Q)} &= ||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + 4s\int_Q \Big(-\partial_i\partial_j\phi + \frac{1}{2}(\Delta\phi\delta_{ij})\Big)\partial_i\psi\partial_j\psi \\
&+ 4s^3\int_Q \Big(-\partial_i\partial_j\phi - \frac{1}{2}\delta_{ij}\Delta\phi\Big)\partial_i\phi\partial_j\phi|\psi|^2 - s^2\int_Q |\psi|^2\partial_t(|\nabla\phi|^2) \\
&- 2s^2\int_Q (\partial_i(\partial_t\phi)\partial_i\phi + (\partial_t\phi)\Delta\phi)|\psi|^2 + 2s\int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 - s\int_Q |\psi|^2\partial_t^2\phi
\end{aligned}
$$

Simplificando e reorganizando os termos

$$
\begin{aligned}
||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} &+ ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + 4s^3\int_Q -\partial_i\partial_j\phi\partial_i\phi\partial_j\phi|\psi|^2 + 2s\int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 \\
&= ||g - s\psi\Delta\phi||^2_{L^2(Q)} + 2s^2\int_Q (\partial_i(\partial_t\phi)\partial_i\phi + (\partial_t\phi)\Delta\phi)|\psi|^2 + 4s\int_Q \partial_i\partial_j\phi\partial_i\psi\partial_j\psi \\
&+ s\int_Q (\partial_t^2\phi)|\psi|^2 - 2\int_Q (s|\nabla\psi|^2 - s^3|\nabla\phi|^2|\psi|^2)\Delta\phi. \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\nabla\phi = -\frac{\nabla(\exp(\alpha\tau))}{t(T-t)} = -\frac{\alpha\exp(\alpha\tau)\nabla\alpha}{t(T-t)} = -\frac{\alpha\exp(\alpha\tau)}{t(T-t)}\nabla\eta.
$$

Notamos ainda que $\dfrac{\partial\eta}{\partial\nu} \leq 0$ sobre $\partial\Omega$ pois $\eta > 0$ em Ω e $\eta = 0$ sobre $\partial\Omega$. Assim,

$$
\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = \nabla\phi\cdot\nu = -\frac{\alpha\exp(\alpha\tau)}{t(T-t)}\nabla\eta\cdot\nu = -\frac{\alpha\exp(\alpha\tau)}{t(T-t)}\frac{\partial\eta}{\partial\nu} \geq 0,
$$

sobre Σ. Portanto,

$$
\int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 \geq 0.
$$

Então segue pela desigualdade acima e por (A.12) que

$$\begin{aligned}
||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + 4s^3 \int_Q -\partial_i\partial_j\phi\partial_i\phi\partial_j\phi|\psi|^2 \\
\leq ||g - s\psi\Delta\phi||^2_{L^2(Q)} - 2\int_Q (s|\nabla\psi|^2 - s^3|\nabla\phi|^2|\psi|^2)\Delta\phi \\
+ 2s^2\int_Q (\partial_i(\partial_t\phi)\partial_i\phi + (\partial_t\phi)\Delta\phi)|\psi|^2 + 4s\int_Q \partial_i\partial_j\phi\partial_i\psi\partial_j\psi + s\int_Q (\partial_t^2\phi)|\psi|^2.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Definindo a função auxiliar $\beta = \dfrac{\exp(\alpha\tau)}{t(T-t)}$ temos que

$$\nabla\beta = -\nabla\phi = \frac{\alpha\exp(\alpha\tau)}{t(T-t)}\nabla\eta.$$

Agora as integrais em (A.13) serão estimadas. Segue pelo artigo de Fernández-Cara [11, p. 508] que existem $\alpha_0(\Omega,\omega) \geq 1$ e $C(\Omega,\omega) > 0$ tais que

$$-\partial_i\partial_j\phi\partial_i\phi\partial_j\phi \geq C\alpha|\nabla\beta|^3 \text{ em } (\Omega\setminus\omega)\times(0,T),\ \forall\alpha\geq\alpha_0. \tag{A.14}$$

Como

$$\partial_i^2\phi = -\frac{\partial_i^2(\exp(\alpha\tau))}{t(T-t)} = -\frac{\alpha\exp(\alpha\tau)\partial_i^2\tau + \alpha^2\exp(\alpha\tau)(\partial_i\tau)^2}{t(T-t)},$$

então concluímos que

$$\begin{aligned}
|\Delta\phi|^2 = \frac{\exp(2\alpha\tau)}{t^2(T-t)^2}|\alpha\Delta\tau + \alpha^2|\nabla\tau|^2|^2 = \frac{\alpha^4\exp(2\alpha\tau)}{t^2(T-t)^2}\left|\frac{1}{\alpha}\Delta\eta + |\nabla\eta|^2\right|^2 \\
\leq \frac{\alpha^4\exp(2\alpha\tau)}{t^2(T-t)^2}\left(\frac{1}{\alpha}|\Delta\eta| + |\nabla\eta|^2\right)^2.
\end{aligned}$$

Tomando $\alpha \geq 1$ temos que a desigualdade abaixo é verdadeira

$$|\Delta\phi|^2 \leq \frac{\alpha^4\exp(2\alpha\tau)}{t^2(T-t)^2}\Big(|\Delta\eta| + |\nabla\eta|^2\Big)^2 \leq \frac{C(\Omega,\omega)\alpha^4\exp(2\alpha\tau)}{t^2(T-t)^2}.$$

Percebemos que $\exp(\alpha\tau(x)) \geq 1$ para todo $x\in\Omega$ e que $\dfrac{T^2}{t(T-t)} \geq 1$ para todo $t\in(0,T)$. Assim,

$$|\Delta\phi|^2 \leq \frac{C(\Omega,\omega)\alpha^4T^2\exp(3\alpha\tau)}{t^3(T-t)^3} = CT^2\alpha^4\beta^3 \text{ em } \Omega\times(0,T),\ \forall\alpha\geq\alpha_0. \tag{A.15}$$

Agora, notamos que

$$\partial_i(\partial_t\phi) = -\partial_t\left(\frac{1}{t(T-t)}\right)\partial_i(\exp(\alpha\tau)) = \frac{\alpha(\partial_i\tau)\exp(\alpha\tau)(T-2t)}{t^2(T-t)^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}|\partial_i(\partial_t\phi)\partial_i\phi| &= \frac{\alpha^2(\partial_i\tau)^2\exp(2\alpha\tau)|T-2t|}{t^3(T-t)^3} = \frac{\alpha^2\exp(2\alpha\tau)|T-2t|}{t^3(T-t)^3}|\nabla\tau|^2\\ &\leq \frac{\alpha^2\exp(3\alpha\tau)|T-2t|}{t^3(T-t)^3}|\nabla\eta|^2 \leq C(\Omega,\omega)\alpha^2\beta^3|T-2t|.\end{aligned}$$

De onde segue que

$$|\partial_i(\partial_t\phi)\partial_i\phi| \leq CT\alpha^2\beta^3 \text{ em } \Omega\times(0,T),\ \forall\alpha\geq\alpha_0. \tag{A.16}$$

Calculando $\partial_t\phi$ obtemos

$$\partial_t\phi = -\frac{(T-2t)(\exp(\alpha\overline{\tau})-\exp(\alpha\tau))}{t^2(T-t)^2}.$$

Dessa maneira chegamos em

$$\begin{aligned}|(\partial_t\phi)\Delta\phi| &= \frac{|T-2t|(\exp(\alpha\overline{\tau})-\exp(\alpha\tau))\exp(\alpha\tau)}{t^3(T-t)^3}|\alpha\Delta\tau+\alpha^2|\nabla\tau|^2|\\ &\leq \frac{T\alpha^2(\exp(\alpha\overline{\tau})-\exp(\alpha\tau))\exp(\alpha\tau)}{t^3(T-t)^3}\left(\frac{1}{\alpha}|\Delta\eta|+|\nabla\eta|^2\right)\\ &\leq \frac{T\alpha^2\exp(\alpha\overline{\tau})\exp(\alpha\tau)}{t^3(T-t)^3}(|\Delta\eta|+|\nabla\eta|^2)\\ &\leq \frac{C(\Omega,\omega)T\alpha^2\exp(\alpha\overline{\tau})\exp(\alpha\tau)}{t^3(T-t)^3}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}2\overline{\tau}-3\tau \leq 2\overline{\tau}-3\min_{\overline{\Omega}}\tau &= \frac{5}{2}\max_{\overline{\Omega}}\tau-3\min_{\overline{\Omega}}\tau = \frac{1}{2}\left(5\max_{\overline{\Omega}}\tau-6\min_{\overline{\Omega}}\tau\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(5\max_{\overline{\Omega}}\eta-6\min_{\overline{\Omega}}\eta+5K-6K\right) \leq \frac{1}{2}(K-K)=0.\end{aligned}$$

Portanto, $\exp(\alpha\overline{\tau}) \leq \exp\left(\frac{3}{2}\alpha\tau(x)\right)$, para todo $x\in\Omega$. Logo,

$$\begin{aligned}|(\partial_t\phi)\Delta\phi| &\leq \frac{CT\alpha^2\exp(\frac{3}{2}\alpha\tau)\exp(\alpha\tau)}{t^3(T-t)^3} = \frac{CT\alpha^2\exp(\frac{5}{2}\alpha\tau)}{t^3(T-t)^3}\\ &\leq \frac{CT\alpha^2\exp(3\alpha\tau)}{t^3(T-t)^3} = CT\alpha^2\beta^3\end{aligned} \tag{A.17}$$

em $\Omega\times(0,T)$, $\forall\alpha\geq\alpha_0$.

Agora, calculando $\partial_t^2\phi$ temos que

$$\begin{aligned}
\partial_t^2\phi &= (\exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau))\partial_t^2\left(\frac{1}{t(T-t)}\right)\\
&= -(\exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau))\frac{-2t^2(T-t)^2 - (T-2t)(2T^2t - 6Tt^2 + 4t^3)}{t^4(T-t)^4}\\
&= (\exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau))\frac{2t(T-t)^2 + (T-2t)(2T^2 - 6Tt + 4t^2)}{t^3(T-t)^4}\\
&= (\exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau))\frac{2(-3t^3 + 6t^2T - 4tT^2 + T^3)}{t^3(T-t)^4}\\
&= (\exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau))\frac{2(T-t)(T^2 - 3Tt + 3t^2)}{t^3(T-t)^4}\\
&= \frac{2(T^2 - 3Tt + 3t^2)(\exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau))}{t^3(T-t)^3},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\partial_t^2\phi| = \frac{2|T^2 - 3Tt + 3t^2|}{t^3(T-t)^3}(\exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau)) \leq \frac{2|T^2 - 3Tt + 3t^2|}{t^3(T-t)^3}\exp\left(\frac{3}{2}\alpha\tau\right).$$

Mas, para $t \in (0,T)$, temos que $|T^2 - 3Tt + 3t^2| \leq T^2$. Então

$$|\partial_t^2\phi| \leq \frac{C(\Omega,\omega)T^2}{t^3(T-t)^3}\exp(3\alpha\tau) \leq CT^2\beta^3 \text{ em } \Omega\times(0,T),\ \forall\alpha\geq\alpha_0. \tag{A.18}$$

Pelas desigualdades (A.14)-(A.18) podemos estimar as integrais em (A.13), obtendo

$$\begin{aligned}
&||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + Cs^3\alpha\int_{(\Omega\backslash\omega)\times(0,T)}|\nabla\beta|^3|\psi|^2\\
&\leq ||g - s\psi\Delta\phi||^2_{L^2(Q)} + s\int_Q|\partial_t^2\phi||\psi|^2 + 2s^2\int_Q(|\partial_i(\partial_t\phi)\partial_i\phi| + |(\partial_t\phi)\Delta\phi|)|\psi|^2\\
&+ 4s\int_Q(\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi - 2\int_Q(s|\nabla\psi|^2 - s^3|\nabla\phi|^2|\psi|^2)\Delta\phi\\
&\leq ||g - s\psi\Delta\phi||^2_{L^2(Q)} + Cs^2T\alpha^2\int_Q|\beta|^3|\psi|^2 + CsT^2\int_Q|\beta|^3|\psi|^2\\
&- 2\int_Q(s|\nabla\psi|^2 - s^3|\nabla\phi|^2|\psi|^2)\Delta\phi + 4s\int_Q(\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi,\ \forall\alpha\geq\alpha_0.
\end{aligned}$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
||g - s\psi\Delta\phi||^2_{L^2(Q)} &\leq (||g||_{L^2(Q)} + ||s\psi\Delta\phi||_{L^2(Q)})^2 \leq 2||g||^2_{L^2(Q)} + 2||s\psi\Delta\phi||^2_{L^2(Q)}\\
&= 2||g||^2_{L^2(Q)} + 2s^2\int_Q|\Delta\phi|^2|\psi|^2 \leq 2||g||^2_{L^2(Q)} + CT^2s^2\alpha^4\int_Q|\beta|^3|\psi|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + Cs^3\alpha\int_{(\Omega\backslash\omega)\times(0,T)}|\nabla\beta|^3|\psi|^2\\
&\leq 2||g||^2_{L^2(Q)} + CsT^2\int_Q|\beta|^3|\psi|^2 + Cs^2(T^2\alpha + T\alpha^2)\int_Q|\beta|^3|\psi|^2\\
&- 2\int_Q(s|\nabla\psi|^2 - s^3|\nabla\phi|^2|\psi|^2)\Delta\phi + 4s\int_Q(\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi,
\end{aligned} \tag{A.19}$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Por outro lado,

$$|\nabla \beta| \geq C\alpha\beta \text{ em } (\Omega \setminus \omega) \times (0,T), \, \forall \alpha \geq \alpha_0. \tag{A.20}$$

De fato, como $|\nabla \eta| > 0$ em $\overline{\Omega \setminus \omega}$ segue que

$$|\nabla \beta| = \alpha\beta|\nabla \tau| = \alpha\beta|\nabla \eta| \geq C(\Omega,\omega)\alpha\beta.$$

Caso $\alpha \geq \alpha_0$ e $s \geq \kappa_0(\Omega,\omega)(T^2+T)$ pela desigualdade (A.20) deduzimos que

$$\begin{aligned}
C(s^2(T^2\alpha^4 + T\alpha^2) + sT^2) \int_{(\Omega\setminus\omega)\times(0,T)} |\beta|^3|\psi|^2 &\leq C\alpha^4((T^2+T)s^2 + T^2 s) \\
&\quad \times \int_{(\Omega\setminus\omega)\times(0,T)} |\beta|^3|\psi|^2 \\
&\leq C\alpha s^2\Big((T^2+T) + \frac{T}{\kappa_0}\Big) \\
&\quad \times \int_{(\Omega\setminus\omega)\times(0,T)} \alpha^3\beta^3|\psi|^2 \\
&\leq \frac{1}{C^2}\alpha s^3\Big(\frac{1}{\kappa_0} + \frac{1}{\kappa_0^2}\Big) \int_{(\Omega\setminus\omega)\times(0,T)} |\nabla\beta|^3|\psi|^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
C(s^2(T^2\alpha^4 + T\alpha^2) + sT^2) \int_{\omega\times(0,T)} |\beta|^3|\psi|^2 &\leq C\alpha^4 s^2\Big((T^2+T) + \frac{T}{\kappa_0}\Big) \int_{\omega\times(0,T)} |\beta|^3|\psi|^2 \\
&\leq C\alpha^4 s^3\Big(\frac{1}{\kappa_0} + \frac{1}{\kappa_0^2}\Big) \int_{\omega\times(0,T)} |\beta|^3|\psi|^2.
\end{aligned}$$

Então, substituindo as duas últimas desigualdades em (A.19) e reorganizando os termos, segue que

$$\begin{aligned}
||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + \Big(C - \frac{1}{C^2}\Big(\frac{1}{\kappa_0} + \frac{1}{\kappa_0^2}\Big)\Big) s^3\alpha \int_{(\Omega\setminus\omega)\times(0,T)} |\nabla\beta|^3|\psi|^2 \\
\leq 2||g||^2_{L^2(Q)} + C\Big(\frac{1}{\kappa_0} + \frac{1}{\kappa_0^2}\Big)\alpha^4 s^3 \int_{\omega\times(0,T)} |\beta|^3|\psi|^2 \\
- 2\int_Q (s|\nabla\psi|^2 - s^3|\nabla\phi|^2|\psi|^2)\Delta\phi + 4s\int_Q (\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi,
\end{aligned}$$

para $\alpha \geq \alpha_0$ e $s \geq \kappa_0(\Omega,\omega)(T^2+T)$.

Para κ_0 suficientemente grande existe constante $C = C(\Omega,\omega) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + Cs^3\alpha \int_{(\Omega\setminus\omega)\times(0,T)} |\nabla\beta|^3|\psi|^2 \\
&\quad \leq 2||g||^2_{L^2(Q)} + C\alpha^4 s^3 \int_{\omega\times(0,T)} |\beta|^3|\psi|^2 - 2\int_Q (s|\nabla\psi|^2 - s^3|\nabla\phi|^2|\psi|^2)\Delta\phi \\
&\quad + 4s\int_Q (\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi,
\end{aligned} \tag{A.21}$$

para $\alpha \geq \alpha_0$ e $s \geq \kappa_0(\Omega, \omega)(T^2 + T)$.

Para estimar a segunda integral a direita definimos

$$I = \int_Q (s|\nabla\psi|^2 - s^3|\nabla\phi|^2|\psi|^2)\Delta\phi.$$

Percebemos então que

$$\begin{aligned}
I &= s\int_Q \Delta\phi|\nabla\psi|^2 + s\int_Q -s^2|\nabla\phi|^2\psi\psi\Delta\phi \\
&= s\int_Q \Delta\phi|\nabla\psi|^2 + s\int_Q (-T_2\psi + \Delta\psi + s(\partial_t\phi)\psi)\psi\Delta\phi \\
&= s\int_Q \Delta\phi|\nabla\psi|^2 + s\int_Q (T_1\psi + \Delta\psi + s(\partial_t\phi)\psi - g + s\psi\Delta\phi)\psi\Delta\phi \\
&= s\int_Q (|\nabla\psi|^2 + \psi(\Delta\psi))\Delta\phi + s^2\int_Q \partial_t\phi|\psi|^2\Delta\phi + s\int_Q (T_1\psi - g + s\psi\Delta\phi)\psi\Delta\phi.
\end{aligned}$$

Para obter a segunda e a terceira igualdade acima utilizamos (A.2) e (A.1), respectivamente.

Aplicando o Teorema 2.65 e a primeira identidade do Teorema 2.64 nas integrais abaixo, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_Q (|\nabla\psi|^2 + \psi\Delta\psi)\Delta\phi &= \int_Q (\Delta\phi)\nabla\cdot(\psi\nabla\phi) \\
&= -\int_Q \nabla(\Delta\phi)\cdot(\psi\nabla\psi) + \int_\Sigma \psi\Delta\phi\nabla\psi\cdot\nu \\
&= -\frac{1}{2}\int_Q \nabla(\Delta\phi)\cdot\nabla\psi^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_Q \Delta^2\phi|\psi|^2 - \frac{1}{2}\int_\Sigma |\psi|^2\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\nu} \\
&= \frac{1}{2}\int_Q \Delta^2\phi|\psi|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{s}{2}\int_Q \Delta^2\phi|\psi|^2 + s^2\int_Q \partial_t\phi|\psi|^2\Delta\phi + s\int_Q (T_1\psi - g + s\psi\Delta\phi)\psi\Delta\phi \\
&= s\int_Q (T_1\psi - g)\psi\Delta\phi + s^2\int_Q (|\Delta\phi|^2 + (\partial_t\phi)\Delta\phi)|\psi|^2 + \frac{s}{2}\int_Q \Delta^2\phi|\psi|^2.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema 2.63 para estimar a integral I temos que

$$\begin{aligned}
|I| &\leq s\int_Q (|T_1\psi| + |g|)|\psi\Delta\phi| + s^2\int_Q (|\Delta\phi|^2 + |(\partial_t\phi)\Delta\phi|)|\psi|^2 + \frac{s}{2}\int_Q |\Delta^2\phi||\psi|^2 \\
&= \int_Q |(\sqrt{2})^{-1}T_1\psi||\sqrt{2}s\psi\Delta\phi| + \int_Q |\sqrt(2)g||(\sqrt{2})^{-1}s\psi\Delta\phi| \\
&+ s^2\int_Q (|\Delta\phi|^2 + |(\partial_t\phi)\Delta\phi|)|\psi|^2 + \frac{s}{2}\int_Q |\Delta^2\phi||\psi|^2 \\
&\leq \frac{1}{4}\int_Q |T_1\psi|^2 + s^2\int_Q |\psi\Delta\phi|^2 + \int_Q |g|^2 + \frac{s^2}{4}\int_Q |\psi\Delta\phi|^2 + s^2\int_Q (|\Delta\phi|^2 + |(\partial_t\phi)\Delta\phi|)|\psi|^2 \\
&+ \frac{s}{2}\int_Q |\Delta^2\phi||\psi|^2 \\
&\leq \frac{1}{4}||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||g||^2_{L^2(Q)} + 3s^2\int_Q (|\Delta\phi|^2 + |(\partial_t\phi)\Delta\phi|)|\psi|^2 + \frac{s}{2}\int_Q |\Delta^2\phi||\psi|^2. \quad \text{(A.22)}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|\Delta^2\phi| \leq C\alpha^4 T^4 \beta^3 \text{ em } Q. \tag{A.23}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
|\Delta^2\phi| &= \frac{1}{t(T-t)}|\Delta^2(\exp(\alpha\tau))| = \frac{1}{t(T-t)}|\Delta(\exp(\alpha\tau)[\alpha\Delta\tau + \alpha^2|\nabla\tau|^2])| \\
&= \frac{1}{t(T-t)}|\alpha\Delta(\exp(\alpha\tau)\Delta\tau) + \alpha^2\Delta(\exp(\alpha\tau)|\nabla\tau|^2)| \\
&= \frac{1}{t(T-t)}|\alpha(\Delta(\exp(\alpha\tau))\Delta\tau + 2\nabla(\exp(\alpha\tau))\cdot\nabla(\Delta\tau) + \exp(\alpha\tau)\Delta^2\tau) \\
&+ \alpha^2(\Delta(\exp(\alpha\tau))|\nabla\tau|^2 + 2\nabla(\exp(\alpha\tau))\cdot\nabla(|\nabla\tau|^2) + \exp(\alpha\tau)\Delta(|\nabla\tau|^2))| \\
&= \frac{1}{t(T-t)}|\Delta(\exp(\alpha\tau))(\alpha\Delta\tau + \alpha^2|\nabla\tau|^2) + 2\nabla(\exp(\alpha\tau))\cdot(\alpha\nabla(\Delta\tau) + \alpha^2\nabla(|\nabla\tau|^2)) \\
&+ \exp(\alpha\tau)(\alpha\Delta^2\tau + \alpha^2|\nabla\tau|^2)| \\
&= \frac{1}{t(T-t)}|\exp(\alpha\tau)(\alpha\Delta\tau + \alpha^2|\nabla\tau|^2)^2 + 2\alpha\exp(\alpha\tau)\nabla\tau\cdot(\alpha\nabla(\Delta\tau) + \alpha^2\nabla(|\nabla\tau|^2)) \\
&+ \exp(\alpha\tau)(\alpha\Delta^2\tau + \alpha^2|\nabla\tau|^2)| \\
&\leq \frac{\exp(\alpha\tau)}{t(T-t)}|(\alpha\Delta\tau + \alpha^2|\nabla\tau|^2)^2 + 2\alpha\nabla\tau\cdot(\alpha\nabla(\Delta\tau) + \alpha^2\nabla(|\nabla\tau|^2)) + \alpha\Delta^2\tau \\
&+ \alpha^2|\nabla\tau|^2| \\
&\leq \frac{\alpha^4\exp(\alpha\tau)}{t(T-t)}((|\Delta\eta| + |\nabla\eta|^2)^2 + 2|\nabla\eta\cdot(\nabla(\Delta\eta) + \nabla(|\nabla\eta|^2))| + |\Delta^2\eta| + |\nabla\tau|^2) \\
&\leq \frac{C(\Omega,\omega)\alpha^4\exp(3\alpha\tau)}{t(T-t)}.
\end{aligned}$$

Como $t^2(T-t)^2 \leq T^4$ para $t \in (0,T)$ segue que

$$|\Delta^2\phi| \leq \frac{C\alpha^4 T^4 \exp(3\alpha\tau)}{t^3(T-t)^3} = C\alpha^4 T^4 \beta^3.$$

Substituindo as desigualdades (A.15), (A.17) e (A.23) em (A.22) chegamos na seguinte estimativa para a integral I

$$\begin{aligned}
|I| &\leq s\int_Q (|T_1\psi| + |g|)|\psi\Delta\phi| + s^2\int_Q(|\Delta\phi|^2 + |(\partial_t\phi)\Delta\phi|)|\psi|^2 + \frac{s}{2}\int_Q |\Delta^2\phi||\psi|^2 \\
&\leq \frac{1}{4}||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||g||^2_{L^2(Q)} + 3s^2C(T^2\alpha^4 + T\alpha^2)\int_Q \beta^3|\psi|^2 + \frac{s}{2}CT^4\alpha^4\int_Q\beta^3|\psi|^2.
\end{aligned}$$

Pela estimativa acima e (A.21) concluímos que

$$\begin{aligned}
&||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + Cs^3\alpha\int_{(\Omega\backslash\omega)\times(0,T)} |\nabla\beta|^3|\psi|^2 \\
&\qquad \leq 2||g||^2_{L^2(Q)} + 2\Big(\frac{1}{4}||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||g||^2_{L^2(Q)} + 3s^2C(T^2\alpha^4 + T\alpha^2)\int_Q\beta^3|\psi|^2 \\
&\qquad + \frac{s}{2}CT^4\alpha^4\int_Q\beta^3|\psi|^2\Big) + C\alpha^4 s^3\int_{\omega\times(0,T)}|\beta|^3|\psi|^2 + 4s\int_Q(\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi,
\end{aligned}$$

para $\alpha \geq \alpha_0$ e $s \geq \kappa_0(\Omega, \omega)(T^2 + T)$.

Reorganizando os termos e usando que $s \geq \kappa_0(T + T^2)$ temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} &+ ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + Cs^3\alpha \int_{(\Omega\backslash\omega)\times(0,T)} |\nabla\beta|^3|\psi|^2 \\
&\leq 4||g||^2_{L^2(Q)} + 4s\int_Q (\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi + C\alpha^4 s^3 \int_{\omega\times(0,T)} |\beta|^3|\psi|^2 \\
&+ 6s^2C(T^2\alpha^4 + T\alpha^2)\int_Q \beta^3|\psi|^2 + sCT^4\alpha^4\int_Q \beta^3|\psi|^2 \\
&\leq 4||g||^2_{L^2(Q)} + 4s\int_Q (\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi + C\alpha^4 s^3 \int_{\omega\times(0,T)} |\beta|^3|\psi|^2 \\
&+ \frac{C}{\kappa_0^2}s^3\alpha^4\int_Q |\beta|^3|\psi|^2 + 6\frac{C}{\kappa_0}s^3\alpha^4\int_Q |\beta|^3|\psi|^2.
\end{aligned}
$$

E utilizando a desigualdade (A.20), como foi feito anteriormente para deduzir (A.21), obtemos que, para κ_0 suficientemente grande,

$$
\begin{aligned}
||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} &+ ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + Cs^3\alpha \int_{(\Omega\backslash\omega)\times(0,T)} |\nabla\beta|^3|\psi|^2 \\
&\leq C||g||^2_{L^2(Q)} + C\alpha^4 s^3 \int_{\omega\times(0,T)} |\beta|^3|\psi|^2 + Cs\int_Q (\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi,
\end{aligned}
$$

para $\alpha \geq \alpha_0$ e $s \geq \kappa_0(\Omega, \omega)(T^2 + T)$, com $C = C(\Omega, \omega) > 0$ constante.

Aplicando a desigualdade (A.20) novamente deduzimos que

$$
\begin{aligned}
||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} &+ ||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + Cs^3\alpha^4 \int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\
&\leq C||g||^2_{L^2(Q)} + C\alpha^4 s^3 \int_{\omega\times(0,T)} \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}\psi|^2 \\
&+ Cs\int_Q (\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi,
\end{aligned}
\tag{A.24}
$$

para $\alpha \geq \alpha_0$ e $s \geq \kappa_0(\Omega, \omega)(T^2 + T)$, com $C = C(\Omega, \omega) > 0$ constante.

Estimando o termo $||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + Cs^3\alpha^4 \int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2$ chegamos em

$$
||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + Cs^3\alpha^4 \int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \geq \frac{C}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)|\Delta\psi|^2, \tag{A.25}
$$

para $\alpha \geq \alpha_0$ e $s \geq \kappa_0(\Omega, \omega)(T^2 + T)$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)|\Delta\psi|^2 &= \frac{1}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)|T_2\psi - s^2|\nabla\phi|^2\psi - s(\partial_t\phi)\psi|^2 \\
&\leq \frac{1}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)(|T_2\psi| + s^2|\nabla\phi|^2|\psi| + s|\partial_t\phi||\psi|)^2 \\
&\leq \frac{3}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)(|T_2\psi|^2 + s^4|\nabla\phi|^4|\psi|^2 \\
&+ s^2|\partial_t\phi|^2|\psi|^2).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$|\nabla\phi| = \frac{1}{t(T-t)}|\nabla(\exp(\alpha\tau))| = \frac{\alpha\exp(\alpha\tau)}{t(T-t)}|\nabla\tau| \leq \frac{C\alpha\exp(\alpha\tau)}{t(T-t)},$$

$$|\partial_t\phi| = \frac{|\exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau)|}{t^2(T-t)^2}|T-2t| \leq \frac{CT\exp(2\alpha\tau)}{t^2(T-t)^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)|\Delta\psi|^2 \\
&\qquad \leq \frac{C}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)|T_2\psi|^2 + C\alpha^4 s^3\int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\
&\qquad + CsT^2\int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\
&\qquad \leq \frac{CT^2}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)|T_2\psi|^2 + C\alpha^4 s^3\int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\
&\qquad + CsT^2\int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2.
\end{aligned}$$

Como $\exp(-\alpha\tau) \leq 1$ em Q, $\alpha \geq 1$ e $s \geq \kappa_0(T^2+T)$, então

$$\frac{1}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)|\Delta\psi|^2 \leq C||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} + C\alpha^4 s^3\int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2$$

e (A.25) segue.

Agora, provamos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)|\Delta\psi|^2 + s^3\alpha^4\int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2& \\
\geq Cs\alpha^2\int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^3,&
\end{aligned} \tag{A.26}$$

para $\alpha \geq \alpha_0$ e $s \geq \kappa_0(\Omega,\omega)(T^2+T)$.

De fato, segue por uma aplicação do Teorema 2.65 que

$$\begin{aligned}
2s\alpha^3\int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}(\nabla\tau\cdot\nabla\psi)\psi &= s\alpha^2\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\nabla(\exp(\alpha\tau))\cdot\nabla\psi^2 \\
&= -s\alpha^2\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(\alpha\tau)\nabla\cdot(\nabla\psi^2) \\
&+ s\alpha^2\int_\Sigma t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(\alpha\tau)\nabla\psi^2\cdot\nu.
\end{aligned}$$

Como $\psi \equiv 0$ em Σ e

$$\nabla\cdot(\nabla\psi^2) = \partial_i(2\psi\partial_i\psi) = 2(\partial_i\psi)^2 + 2\psi\partial_i^2\psi = 2|\nabla\psi|^2 + 2\psi\Delta\psi,$$

então

$$\begin{aligned}
2s\alpha^3\int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}(\nabla\tau\cdot\nabla\psi)\psi &= -2s\alpha^2\int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 \\
&- 2s\alpha^2\int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}\psi\Delta\psi.
\end{aligned}$$

Isolando o primeiro termo a direita obtemos

$$
\begin{aligned}
2s\alpha^2 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 &= -2s\alpha^3 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}(\nabla\tau\cdot\nabla\psi)\psi \\
&\quad - 2s\alpha^2 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}\psi\Delta\psi. \qquad (A.27)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, usando uma vez mais o Teorema 2.65 temos que

$$
\begin{aligned}
2s\alpha^3 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}(\nabla\tau\cdot\nabla\psi)\psi &= s\alpha^2 \int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\nabla(\exp(\alpha\tau))\cdot\nabla\psi^2 \\
&= -s\alpha^2 \int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\psi^2\nabla\cdot(\nabla(\exp(\alpha\tau))) \\
&\quad + s\alpha^2 \int_\Sigma t^{-1}(T-t)^{-1}\psi^2\nabla(\exp(\alpha\tau))\cdot\nu.
\end{aligned}
$$

Como $\psi \equiv 0$ em Σ e

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla(\exp(\alpha\tau))) &= \partial_i(\alpha\exp(\alpha\tau)\partial_i\tau) = \alpha\exp(\alpha\tau)\partial_i^2\tau + \alpha^2\exp(\alpha\tau)(\partial_i\tau)^2 \\
&= \alpha\exp(\alpha\tau)\Delta\tau + \alpha^2\exp(\alpha\tau)|\nabla\tau|^2,
\end{aligned}
$$

então

$$
\begin{aligned}
2s\alpha^3 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}(\nabla\tau\cdot\nabla\psi)\psi &= -s\alpha^3 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}\Delta\tau|\psi|^2 \\
&\quad - s\alpha^4 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\tau|^2|\psi|^2.
\end{aligned}
$$

Substituindo a igualdade acima em (A.27) chegamos em

$$
\begin{aligned}
2s\alpha^2 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 &= s\alpha^3 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}\Delta\tau|\psi|^2 \\
&\quad + s\alpha^4 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\tau|^2|\psi|^2 \\
&\quad - 2s\alpha^2 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}\psi\Delta\psi. \qquad (A.28)
\end{aligned}
$$

Agora, estimamos os termos a direita da igualdade (A.28). Como $\tau \in C^2(\overline{Q})$, $\dfrac{T^4}{t^2(T-t)^2} \geq 1$ em $(0,T)$ e $s \geq \kappa_0(T+T^2)$, segue que

$$
\begin{aligned}
s\alpha^4 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\tau|^2|\psi|^2 &\leq CsT^4\alpha^4 \int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\
&\leq Cs^3\alpha^4 \int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2, \qquad (A.29)
\end{aligned}
$$

estimando assim o segundo termo a direita da igualdade (A.28).

De maneira similar obtemos que

$$
\begin{aligned}
s\alpha^3 \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}\Delta\tau|\psi|^2 &\leq CsT^4\alpha^4 \int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\
&\leq Cs^3\alpha^4 \int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2, \qquad (A.30)
\end{aligned}
$$

estimando assim o primeiro termo a direita da igualdade (A.28).

Para o último termo a direita da igualdade (A.28) reparamos que pelo Teorema 2.63

$$
\begin{aligned}
-2s\alpha^2 & \int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}\psi\Delta\psi \\
&= \int_Q \left(\sqrt{2}s^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha\tau}{2}\right)t^{\frac{1}{2}}(T-t)^{\frac{1}{2}}(-\Delta\psi)\right)\left(\sqrt{2}s^{\frac{3}{2}}\alpha^2\exp\left(\frac{3\alpha\tau}{2}\right)t^{-\frac{3}{2}}(T-t)^{-\frac{3}{2}}\psi\right) \\
&\leq s^{-1}\int_Q \exp(\alpha\tau)t(T-t)|\Delta\psi|^2 + s^3\alpha^4\int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2. \qquad \text{(A.31)}
\end{aligned}
$$

Substituindo (A.29), (A.30) e (A.31) em (A.28) obtemos (A.26).

Pelas desigualdades (A.25) e (A.26) concluímos que

$$
\begin{aligned}
||T_2\psi||^2_{L^2(Q)} &+ Cs^3\alpha^4\int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\
&\geq \frac{C}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)|\Delta\psi|^2 + Cs\alpha^2\int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2. \qquad \text{(A.32)}
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi &= -\exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}(\alpha^2\partial_i\tau\partial_j\tau + \alpha\partial_i\partial_j\tau)\partial_i\psi\partial_j\tau \\
&= -\alpha\exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}(\alpha\partial_i\tau\partial_i\psi\partial_j\tau\partial_j\psi + \partial_i\partial_j\tau\partial_i\psi\partial_j\psi) \\
&= -\alpha\exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}(\alpha(\nabla\tau\cdot\nabla\psi)^2 + \partial_i\partial_j\tau\partial_i\psi\partial_j\psi) \\
&\leq -\alpha\exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}((\nabla\tau\cdot\nabla\psi)^2 + \partial_i\partial_j\tau\partial_i\psi\partial_j\psi) \\
&\leq \alpha\exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\tau|^2|\nabla\psi|^2 \\
&+ \alpha\exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}(|\partial_i\partial_j\tau||\partial_i\psi||\partial_j\psi|) \\
&\leq C\alpha\exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2.
\end{aligned}
$$

De onde segue que

$$
Cs\int_Q (\partial_i\partial_j\phi)\partial_i\psi\partial_j\psi \leq Cs\alpha\int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2. \qquad \text{(A.33)}
$$

Portanto, substituindo (A.32) e (A.33) em (A.24) chegamos em

$$
\begin{aligned}
||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} &+ \frac{C}{s}\int_Q \exp(-\alpha\tau)t(T-t)|\Delta\psi|^2 + Cs\alpha^2\int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 \\
&+ Cs^3\alpha^4\int_Q \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-1}|\psi|^2 \\
&\leq C||g||^2_{L^2(Q)} + Cs^3\alpha^4\int_{\omega\times(0,T)} \exp(3\alpha\tau)t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 \\
&+ Cs\alpha\int_Q \exp(\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2,
\end{aligned}
$$

para $\alpha \geq \alpha_0$ e $s \geq \kappa(\Omega,\omega)(T^2+T)$, com $C = C(\Omega,\omega) > 0$ constante.

Notamos ainda que existe $\alpha_1(\Omega, \omega)$ tal que

$$Cs\alpha^2 \int_Q \exp(\alpha\tau) t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 \geq 2Cs\alpha \int_Q \exp(\alpha\tau) t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2,$$

para $\alpha \geq \alpha_1 \geq 1$.

De fato, para que a desigualdade ocorra basta que $\alpha_1 \geq 2$. Então, fixando $\alpha = \alpha_1(\Omega, \omega)$, temos que

$$||T_1\psi||^2_{L^2(Q)} + \frac{C}{s}\int_Q t(T-t)|\Delta\psi|^2 + Cs\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 + Cs^3 \int_Q t^{-3}(T-t)^{-1}|\psi|^2$$
$$\leq C\left(||g||^2_{L^2(Q)} + s^3 \int_{\omega\times(0,T)} t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2\right), \quad \text{(A.34)}$$

para todo $s \geq \kappa_0(T^2 + T)$.

Por outro lado, segue pela definição de T_1 que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\int_Q t(T-t)|\partial_t\psi|^2 &= \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)|T_1\psi - 2s\nabla\phi\cdot\nabla\psi|^2 \\
&\leq \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)|T_1\psi|^2 + 4s\int_Q t(T-t)|\nabla\phi\cdot\nabla\psi|^2 \\
&\leq \frac{T^2}{s}\int_Q |T_1|^2 + 2s\int_Q t(T-t)|\nabla\phi|^2|\nabla\psi|^2 \\
&= \frac{T^2}{s}||T_1||^2_{L^2(Q)} + Cs\alpha^2\int_Q \exp(2\alpha\tau)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\tau|^2|\nabla\psi|^2.
\end{aligned}$$

Usando que $s \geq \kappa_0 T^2$ deduzimos que

$$\frac{1}{s}\int_Q t(T-t)|\partial_t\psi|^2 \leq C||T_1||^2_{L^2(Q)} + Cs\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2, \quad \text{(A.35)}$$

com $C = C(\Omega, \omega)$. Então segue por (A.34) e (A.35) que

$$\frac{1}{s}\int_Q t(T-t)(|\partial_t\psi|^2 + |\Delta\psi|^2) + s\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 + s^3\int_Q t^3(T-t)^3|\psi|^2$$
$$\leq C\left(||g||^2_{L^2(Q)} + s^3\int_{\omega\times(0,T)} t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2\right). \quad \text{(A.36)}$$

Notamos que $\psi = \Phi^{-s}f = \exp(-s\phi)f$ e

$$\begin{cases}
\partial_t\psi = \exp(-s\phi)(\partial_t f - s(\partial_t\phi)f), \\
\nabla\psi = \exp(-s\phi)\nabla f - s(\nabla\phi)f, \\
\Delta\psi = \exp(-s\phi)(\Delta f - 2s\nabla\phi\cdot\nabla f + s^2|\nabla\phi|^2 f - s(\Delta\phi)f).
\end{cases}$$

Dessa maneira estimamos inferiormente os termos a esquerda da desigualdade (A.36).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\int_Q t(T-t)|\partial_t\psi|^2 &= \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)|\exp(-s\phi)(\partial_t f - s(\partial_t\phi)f)|^2 \\
&\geq \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)(|\partial_t f| - s|\partial_t\phi||f|)^2 \\
&= \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)(|\partial_t f|^2 - 2s|\partial_t f||\partial_t\phi||f| + s^2|\partial_t\phi|^2|f|^2) \\
&= \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t f|^2 \\
&- 2\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t f||\partial_t\phi||f| \\
&+ s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t\phi|^2|f|^2 \\
&\geq \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t f|^2 - \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t f|^2 \\
&- 2s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial\phi|^2|f|^2 \\
&+ s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t\phi|^2|f|^2 \\
&= \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t f|^2 - s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t\phi|^2|f|^2 \\
&= \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t f|^2 \\
&- s\int_Q |\exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau)|^2|2t-T|^2 t^{-3}(T-t)^{-3}\exp(-2s\phi)|f|^2 \\
&\geq \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t f|^2 \\
&- sT^2\int_Q |\exp(\alpha\overline{\tau}) - \exp(\alpha\tau)|^2 t^{-3}(T-t)^{-3}\exp(-2s\phi)|f|^2.
\end{aligned}$$

Para deduzir a segunda desigualdade acima usamos o Teorema 2.63.

Como $s \geq \kappa_0 T$, existe constante $C_1 = C_1(\Omega,\omega)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\int_Q t(T-t)|\partial_t\psi|^2 \geq \frac{1}{2s}\int_Q & t(T-t)\exp(-2s\phi)|\partial_t f|^2 \\
&- C_1 s^3\int_Q t^{-3}(T-t)^{-3}\exp(-2s\phi)|f|^2.
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito para chegar na estimativa (A.37) obtemos

$$\begin{aligned}
s\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 &= s\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|\nabla f - s(\nabla\phi)f|^2 \\
&\geq s\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)(|\nabla f| - s|\nabla\phi||f|)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 \geq\ & s\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|\nabla f|^2\\
&- 2s^2\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|\nabla f||\nabla\phi||f|\\
&+ s^3\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|f|^2|\nabla\phi|^2\\
&\geq s\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|\nabla f|^2\\
&- \frac{s}{2}\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|\nabla f|^2\\
&- 2s^3\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|f|^2|\nabla\phi|^2\\
&+ s^3\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|f|^2|\nabla\phi|^2\\
&= \frac{s}{2}\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|\nabla f|^2\\
&- s^3\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|f|^2|\nabla\phi|^2\\
&= \frac{s}{2}\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|\nabla f|^2\\
&- \alpha^2 s^3\int_Q t^{-3}(T-t)^{-3}\exp(-2s\phi)\exp(2\alpha\tau)|\nabla\tau|^2|f|^2\\
&\geq \frac{s}{2}\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|\nabla f|^2\\
&- C_2 s^3\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-3}(T-t)^{-3}|f|^2,
\end{aligned}
\tag{A.38}
$$

em que $C_2 = C_2(\Omega,\omega)$ é uma constante. Para obter a segunda desigualdade acima usamos o Teorema 2.63.

Novamente procedendo de maneira similar ao que foi feito para obter a desigualdade (A.37) chegamos em

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\int_Q t(T-t)|\Delta\psi|^2\\
&= \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\Delta f - 2s\nabla\phi\cdot\nabla f + s^2|\nabla\phi|^2 f + s(\Delta\phi)f|^2\\
&\geq \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)(|\Delta f| - |-s^2|\nabla\phi|^2 f + 2s\nabla\phi\cdot\nabla f + s(\Delta\phi)f|)^2\\
&= \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)(|\Delta f|^2 - 2|\Delta f||-s^2|\nabla\phi|^2 f + 2s\nabla\phi\cdot\nabla f + s(\Delta\phi)f|\\
&+ |-s^2|\nabla\phi|^2 f + 2s\nabla\phi\cdot\nabla f + s(\Delta\phi)f|^2)\\
&\geq \frac{1}{s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)\Big(\frac{1}{2}|\Delta f|^2 - |-s^2|\nabla\phi|^2 f + 2s\nabla\phi\cdot\nabla f + s(\Delta\phi)f|^2\Big)\\
&= \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\Delta f|^2\\
&- s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|-s|\nabla\phi|^2 f + 2\nabla\phi\cdot\nabla f + f\Delta\phi|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\int_Q t(T-t)|\Delta\psi|^2\\
&\quad \geq \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\Delta f|^2\\
&\quad - s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)(|2\nabla\phi\cdot\nabla f| + |f(s|\nabla\phi|^2-\Delta\phi)|)^2\\
&\quad = \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\Delta f|^2 - s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)(4|\nabla\phi\cdot\nabla f|^2\\
&\quad + 4|\nabla\phi\cdot\nabla f||f||s|\nabla\phi|^2-\Delta\phi| + |f|^2|s|\nabla\phi|^2-\Delta\phi|^2)\\
&\quad \geq \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\Delta f|^2\\
&\quad - s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)(6|\nabla\phi\cdot\nabla f|^2 + 3|f|^2|s|\nabla\phi|^2-\Delta\phi|^2)\\
&\quad \geq \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\Delta f|^2 - 6s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\nabla\phi|^2|\nabla f|^2\\
&\quad - 3s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|f|^2|s|\nabla\phi|^2-\Delta\phi|^2\\
&\quad \geq \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\Delta f|^2\\
&\quad - 6\alpha^2 s\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)\exp(2\alpha\tau)|\nabla\tau|^2|\nabla f|^2\\
&\quad - 3s\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|f|^2|(t^{-2}(T-t)^{-2})(s\alpha^2\exp(2\alpha\tau)|\nabla\tau|^2\\
&\quad - (t(T-t))(\alpha^2|\nabla\tau|^2\exp(\alpha\tau) + \alpha(\Delta\tau)\exp(\alpha\tau)))|^2\\
&\quad \geq \frac{1}{2s}\int_Q t(T-t)\exp(-2s\phi)|\Delta f|^2 - C_3 s\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|\nabla f|^2\\
&\quad - C_4 s^3\int_Q t^{-3}(T-t)^{-3}\exp(-2s\phi)|f|^2, \qquad (A.39)
\end{aligned}
$$

em que $C_3 = C_3(\Omega,\omega)$ e $C_4 = C_4(\Omega,\omega)$ são constantes.

Definimos as constantes

$$0 < b < \min\left\{1, \frac{1}{2C_2}\right\},\ 0 < a < \min\left\{1, \frac{1}{2(C_1+C_4)}, \frac{b}{2C_3}\right\}.$$

Segue pelas desigualdades (A.37) e (A.39) que

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{s}\int_Q t(T-t)(|\partial_t\psi|^2 + |\Delta\psi|^2)\\
&\quad \geq \frac{a}{2s}\int_Q \exp(-2s\phi)t(T-t)|\partial_t f|^2 - aC_1 s^3\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-3}(T-t)^{-3}|f|^2\\
&\quad + \frac{a}{2s}\int_Q \exp(-2s\phi)t(T-t)|\Delta f|^2 - aC_3 s\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla f|^2\\
&\quad - aC_4 s^3\int_Q t^{-3}(T-t)^{-3}\exp(-2s\phi)|f|^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{s}\int_Q t(T-t)(|\partial_t\psi|^2+|\Delta\psi|^2) \geq \frac{a}{2s}\int_Q &\exp(-2s\phi)t(T-t)(|\partial_t f|^2+|\Delta f|^2)\\ &- a(C_1+C_4)s^3\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-3}(T-t)^{-3}|f|^2\\ &- aC_3 s\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{A.40}$$

Por outro lado, pela desigualdade (A.38) temos que

$$\begin{aligned}bs\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 \geq \frac{bs}{2}\int_Q &t^{-1}(T-t)^{-1}\exp(-2s\phi)|\nabla f|^2\\ &- bC_2 s^3\int_Q t^{-3}(T-t)^{-3}\exp(-2s\phi)|f|^2. \end{aligned} \tag{A.41}$$

Notamos ainda pela definição $\psi = \Phi^{-s}f = \exp(-s\phi)f$ que

$$s^3\int_Q t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2 = s^3\int_Q t^{-3}(T-t)^{-3}\exp(-2s\phi)|f|^2. \tag{A.42}$$

Combinando (A.40), (A.41) e (A.42) chegamos em

$$\begin{aligned}\frac{a}{s}\int_Q t(T-t)(|\partial_t\psi|^2+|\Delta\psi|^2) + bs\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 + s^3\int_Q t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2\\ \geq \frac{a}{2s}\int_Q \exp(-2s\phi)t(T-t)(|\partial_t f|^2+|\Delta f|^2)\\ + \left(\frac{b}{2}-aC_3\right)s\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla f|^2\\ + (1-a(C_1+C_4)-bC_2)s^3\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-3}(T-t)^{-3}|f|^2.\end{aligned}$$

Logo, pela definição de a e b, existe $C_5 = C_5(\Omega,\omega) > 0$ constante tal que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s}\int_Q \exp(-2s\phi)t(T-t)(|\partial_t f|^2+|\Delta f|^2)\\ &+ s\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla f|^2 + s^3\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-3}(T-t)^{-3}|f|^2\\ &\leq C_5\Big(\frac{1}{s}\int_Q t(T-t)(|\partial_t\psi|^2+|\Delta\psi|^2) + s\int_Q t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\psi|^2 + s^3\int_Q t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2\Big).\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (A.36) deduzimos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s}\int_Q \exp(-2s\phi)t(T-t)(|\partial_t f|^2+|\Delta f|^2)\\ &+ s\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla f|^2 + s^3\int_Q \exp(-2s\phi)t^{-3}(T-t)^{-3}|f|^2\\ &\leq C\left(||g||^2_{L^2(Q)} + s^3\int_{\omega\times(0,T)} t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2\right),\end{aligned}$$

em que $C = C(\Omega,\omega) > 0$ é uma constante.

Lembrando que $g = \Phi^{-s}h = \Phi^{-s}(\partial_t f + \Delta f)$ e $\Phi = \exp(\phi)$ concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\int_Q \Phi^{-2s} t(T-t)(|\partial_t f|^2 + |\Delta f|^2) \\
&+ s\int_Q \Phi^{-2s} t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla f|^2 + s^3 \int_Q \Phi^{-2s} t^{-3}(T-t)^{-3}|f|^2 \\
&\leq C\left(\int_Q \Phi^{-2s}|\partial_t f + \Delta f|^2 + s^3 \int_{\omega\times(0,T)} t^{-3}(T-t)^{-3}|\psi|^2\right).
\end{aligned}$$

■