



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

GUILHERME CORSINI COSTA

**Caracterização Integral dos Mapas de Meio
Retorno de Poincaré e suas Aplicações**

Campinas

2023

Guilherme Corsini Costa

Caracterização Integral dos Mapas de Meio Retorno de Poincaré e suas Aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Douglas Duarte Novaes

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Guilherme Corsini Costa e orientada pelo Prof. Dr. Douglas Duarte Novaes.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C823c Costa, Guilherme Corsini, 2000-
Caracterização integral dos mapas de meio retorno de Poincaré e suas aplicações / Guilherme Corsini Costa. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Douglas Duarte Novaes.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Ciclos limite. 2. Sistemas planares diferenciais lineares por partes. 3. Mapas de meio retorno de Poincaré. 4. 16º problema de Hilbert. I. Novaes, Douglas Duarte, 1988-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Integral characterization of Poincaré half-maps and applications

Palavras-chave em inglês:

Limit cycles

Piecewise linear planar differential systems

Poincaré half-maps

16th Hilbert's problem

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Douglas Duarte Novaes [Orientador]

Ricardo Miranda Martins

Luis Fernando de Osório Mello

Data de defesa: 11-08-2023

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-7795-5425>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/9469078525280810>

**Dissertação de Mestrado defendida em 11 de agosto de 2023 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). DOUGLAS DUARTE NOVAES

Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS

Prof(a). Dr(a). LUIS FERNANDO DE OSÓRIO MELLO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, que trabalharam duro
para que eu chegasse até aqui.*

Agradecimentos

A Deus. Toda honra e glória seja dada a Ele.

Aos meus pais, Patricia e Eduardo, por me mostrarem qual o caminho a ser seguido e não medirem esforços para que eu pudesse chegar até aqui. Este trabalho e toda a minha carreira são frutos do seu amor e paciência.

Ao meu irmão e melhor amigo, Mateus, por todo o companheirismo e amor ao longo desses anos.

À minha linda noiva Rebecca, que tem me apoiado em cada decisão para que eu chegasse até aqui, cujo amor tem sido o combustível para todos os meus dias.

À toda minha família que tem confiado e oferecido suporte e carinho, mesmo eu estando longe devido às circunstâncias da vida.

Ao meu orientador, Professor Dr. Douglas Duarte Novaes, que com muita paciência e apoio me orientou com maestria nestes anos de mestrado.

Aos meus amigos e colegas, que sempre estiveram por perto e com muita paciência zelaram por mim.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“Entrega o teu caminho ao Senhor;
confia nele, e ele tudo fará”
(Bíblia Sagrada, Salmos 37, 5)*

Resumo

A segunda parte do 16º Problema de Hilbert diz respeito ao número de ciclos limites de um sistema diferencial planar polinomial. Embora não haja nenhuma resposta a esse problema, muitos avanços significativos foram realizados dentro da teoria dos sistemas dinâmicos.

Dentre esses avanços, destacamos o estudo dos ciclos limites e órbitas periódicas dos campos vetoriais planares lineares por partes. Mesmo não havendo ciclos limites para campos lineares planares, em se tratando de campos planares lineares por partes, podemos encontrar exemplos onde a existência desses objetos é verificada.

Assim, naturalmente, podemos estender a segunda parte do 16º problema de Hilbert para esses campos. O estudo deste problema neste cenário pode apresentar um extenso estudo caso a caso ligado, principalmente, ao espectro das matrizes do sistema. Uma forma de desviar dessa complicação se dá pela caracterização integral dos mapas de meio retorno de Poincaré amplamente discutida neste trabalho.

Como consequência desta caracterização, discutimos neste trabalho os avanços relacionados ao problema de Hilbert para esses campos. Mais especificamente, essa caracterização forneceu uma demonstração simples e curta para a Conjectura de Lum-Chua e permitiu melhorar a estimativa para uma cota uniforme para o número de ciclos limites de sistemas lineares planares por partes.

Palavras-chave: Sistemas planares lineares. Ciclos limites. Mapas de meio retorno de Poincaré. 16º Problema de Hilbert

Abstract

The second part of 16th Hilbert's Problem concerns about the number of limit cycles of a polynomial planar differential system. Although there is not an explicit answer to this problem, many significant advancements have been made within the field of dynamical systems theory.

Among these advances, we can highlight the study of limit cycles and periodic orbits of piecewise linear planar vector fields. Although limit cycles are not allowed in linear vector systems, there are examples of piecewise linear planar vector fields which the existence of these objects is verified.

Thus, it is possible to extend the 16th Hilbert's problem second part to these fields. The study of this problem in this scenario may involve an extensive case-by-case study related to the spectrum of the system's matrices. An way to avoid this study is given by an integral characterization of Poincaré half-maps that we discuss.

As a consequence of this characterization, we discuss many advancements related to Hilbert's problem to these fields. Specifically, this characterization provided a simple proof for Lum-Chua's Conjecture a improved the estimation for a uniform bound on limit cycles number for piecewise linear planar systems.

Keywords: Linear planar differential systems. Limit Cycles. Poincaré half-maps. 16th Hilbert's Problem.

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Objetivo	11
1.2	Estrutura dos tópicos apresentados	12
2	Preliminares	13
2.1	Campos Vetoriais Planares Lineares e Lineares por Partes	13
2.2	Mapas de Meio Retorno de Poincaré	14
2.3	Fator Integrante Inverso	15
2.4	Valor Principal de Cauchy	18
3	Caracterização Integral de Mapas de Meio Retorno de Poincaré para Sistemas Lineares Planares	19
3.1	Introdução	19
3.2	Mapas de Meio Retorno para sistemas lineares	19
3.3	Expressão Integral para Mapas de Meio Retorno de Poincaré	22
3.3.1	Fator integrante inverso para campos lineares planares	22
3.3.2	Relação integral para mapas de meio retorno de Poincaré associados a sistemas lineares	26
3.4	Análise da função do tipo índice	32
3.5	Mapas de Meio Retorno de Poincaré e o Tempo de Voo	42
4	Uma nova demonstração para a Conjectura de Lum-Chua	49
4.1	Introdução	49
4.2	Forma canônica de Liénard e mapas de meio retorno de Poincaré	50
4.3	Demonstração do Teorema 4.1	51
5	Cota uniforme para o número de ciclos limites de sistemas diferenciais lineares planares com duas zonas separados por uma reta	60
5.1	Introdução	60
5.2	Intersecção entre curvas suaves e soluções separantes	61
5.3	Demonstração do Teorema 5.1	63
6	Considerações Finais	77
	REFERÊNCIAS	78

1 Introdução

A segunda parte do 16^o problema de Hilbert diz respeito à relação entre o número de ciclos limites de um campo vetorial planar polinomial e o seu grau. Embora permaneça sem resposta, várias tentativas de resolução desse problema colaboraram significativamente no avanço da teoria de sistemas dinâmicos.

Esse problema pode ser estendido para o cenário dos campos vetoriais planares lineares por partes. Entretanto, muitas dificuldades surgem ao longo do estudo. Para isto, uma ferramenta muito útil para o estudo de ciclos limites são os mapas de Poincaré. Neste trabalho, estudaremos esses mapas bem como algumas aplicações e avanços feitos no estudo do problema.

1.1 Objetivo

Diversas ferramentas podem ser utilizadas para estudar-se a existência de órbitas periódicas e ciclos limites de campos vetoriais planares lineares por partes. Dentre elas, destacamos os mapas de Poincaré.

Neste trabalho, buscamos entender como o estudo desses mapas pode ser simplificado. Mais especificamente, em [1], verificou-se que para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Tx - y, \\ \dot{y} = Dx - a, \end{cases}$$

onde T , D e a são números reais as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) y_1 é a imagem de y_0 pelo mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré (veja (2) para uma definição);
- b) $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ satisfazem $y_0 y_1 \leq 0$ e

$$\int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{Dy^2 - aTy + a^2} dy = cT,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ depende dos parâmetros do sistema.

Com esta caracterização em mãos, buscamos entender algumas consequências desta simplificação em outros problemas, e discutimos uma nova demonstração para a Conjectura de Lum-Chua, demonstrada em [2] e posteriormente, estudamos como podemos encontrar uma cota uniforme para o número de ciclos limites de um sistema diferencial planar linear por partes [3].

1.2 Estrutura dos tópicos apresentados

Esta dissertação está dividida na seguinte forma:

- No Capítulo 2, discutimos alguns conceitos preliminares que serão úteis para as discussões nos capítulos a seguir. Dentre os conceitos, destacamos o Teorema 2.1 que, sob determinadas condições, nos fornece uma forma canônica de Liénard para sistemas planares lineares por partes.
- No Capítulo 3, discutimos amplamente os avanços realizados em [1] relacionados a uma caracterização integral dos mapas de meio retorno de Poincaré para sistemas lineares planares.
- No Capítulo 4, discutimos como esta caracterização integral implicou em uma nova, e mais simples, demonstração para a Conjectura de Lum-Chua, como demonstrado em [2].
- No Capítulo 5, discutimos como Carmona et al., em [3], encontraram uma nova cota superior uniforme para o número de ciclos limites de um sistema diferencial planar linear por partes, utilizando a caracterização integral dos mapas de meio retorno de Poincaré, discutidos no Capítulo 3.
- No Capítulo 6, comentamos algumas considerações finais e apontamos algumas possíveis direções futuras a serem seguidas.

2 Preliminares

Neste trabalho, estamos interessados em entender alguns problemas relacionados a ciclos limites de Campos Vetoriais Planares Lineares Por Partes. Para isso, buscaremos neste capítulo, introduzir algumas ferramentas que serão úteis para o desenvolvimento da teoria apresentada nos capítulos a seguir.

2.1 Campos Vetoriais Planares Lineares e Lineares por Partes

Considere, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, o sistema diferencial autônomo linear planar não homogêneo dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (2.1)$$

onde $M = (m_{ij})_{i,j=1,2}$ é uma matriz real e $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Embora pudéssemos estudar diretamente o sistema (2.1), gostaríamos de encontrar alguma maneira de reduzirmos o número de seus parâmetros. Além disso, uma vez que estamos interessados em estudar o comportamento de órbitas periódicas do sistema (2.1), procuraremos uma mudança de variáveis de forma que a seção $\Sigma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ seja invariante.

Proposição 2.1. *A fim de que o sistema (2.1) possua órbitas periódicas, é necessário que o coeficiente m_{12} da matriz M seja não nulo.*

Demonstração. Se $m_{12} = 0$, então o sistema (2.1) se torna desacoplado. Dessa forma, o sistema (2.1) não admite soluções periódicas.

De fato, a primeira coordenada da solução de (2.1) passando por (x, y) no tempo $t = 0$ é dada por

$$x_1(t) = -\frac{b_1}{m_{11}} + e^{m_{11}t}c,$$

onde

$$c = \frac{b_1 + m_{11}x}{m_{11}}.$$

Portanto, não existe $\tau \neq 0$ tal que $x_1(\tau) = x$. \square

De maneira mais geral, Freire et al em [4] demonstraram o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Considere o seguinte sistema diferencial planar linear por partes dado por:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_R\mathbf{x} + \mathbf{b}_R & \text{se } x_1 > 0 \\ A_L\mathbf{x} + \mathbf{b}_L & \text{se } x_1 < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $A_R = (a_{ij}^R)_{i,j=1,2}$, $A_L = (a_{ij}^L)_{i,j=1,2}$ e $\mathbf{b}_R = (b_1^R, b_2^R)$, $\mathbf{b}_L = (b_1^L, b_2^L)$ são vetores de \mathbb{R}^2 . Assuma que $a_{12}^R a_{12}^L > 0$. Considere o homeomorfismo $\tilde{\mathbf{x}} = h(\mathbf{x})$ dado por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^L & -a_{12}^L \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^L \end{pmatrix} \text{ se } x_1 \leq 0$$

e

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{a_{12}^R} \begin{pmatrix} a_{12}^L & 0 \\ a_{12}^L a_{22}^R & -a_{12}^L a_{12}^R \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^L \end{pmatrix} \text{ se } x_1 > 0.$$

Nestas novas variáveis, o sistema (2.2) é transformado na forma canônica

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_L \end{pmatrix} \text{ se } x_1 < 0$$

e,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} -b \\ a_R \end{pmatrix} \text{ se } x_1 > 0,$$

onde, $a_L = a_{12}^L b_2^L - a_{22}^L b_1^L$, $b = \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} b_1^R - b_1^L$ e $a_R = \frac{a_{12}^L}{a_{12}^R} (a_{12}^R b_2^R - a_{22}^R b_1^R)$.

Veremos nos capítulos a seguir, que o Teorema 2.1 será muito utilizado para estudarmos o comportamento das órbitas periódicas e ciclos limites de sistemas lineares do tipo (2.2).

2.2 Mapas de Meio Retorno de Poincaré

Para estudarmos a existência e o comportamento de órbitas periódicas e ciclos limites, buscamos entender a dinâmica do mapa de Poincaré associado à órbita periódica [5].

Neste trabalho, estudaremos o comportamento dos **Mapas de Meio Retorno de Poincaré** do sistema (2.2) associados à seção $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Nos capítulos posteriores, trabalharemos com os mapas esquerdos de meio retorno, devido a uma certa reflexividade. Portanto, focaremos na definição do mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré. Seja $(0, y_0) \in \Sigma$ para $y_0 \geq 0$ e seja

$$\psi(t; y_0) = (\psi_1(t; y_0), \psi_2(t; y_0)), \quad (2.3)$$

a órbita do sistema (2.2) tal que $\psi(0; y_0) = (0, y_0)$. Se existe um valor $\tau(y_0) > 0$ tal que $\psi_1(\tau(y_0); y_0) = 0$ e $\psi_1(t; y_0) < 0$ para todo $t \in (0, \tau(y_0))$, dizemos que $y_1 = \psi_2(\tau(y_0); y_0) \leq 0$ é a imagem de y_0 pelo mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré, onde $\tau(y_0)$ é dito ser o correspondente tempo de vôo à esquerda. De maneira análoga, podemos definir o mapa direito de meio retorno de Poincaré.

2.3 Fator Integrante Inverso

Outra ferramenta muito importante no estudo dos mapas de meio retorno de Poincaré do sistema (2.2) associados a Σ é o Fator Integrante Inverso associado ao campo vetorial do sistema (2.2).

Nesta seção, estudaremos algumas definições e propriedades relacionadas aos fatores integrantes e fatores integrantes inversos associados a campos vetoriais planares e, posteriormente, entenderemos seu comportamento no contexto de campos vetoriais planares lineares.

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial suave definido no aberto U , dado por $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, onde $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, e considere o sistema de equações diferenciais dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (2.4)$$

Definição 2.1. Dizemos que $R : U \rightarrow \mathbb{R}$, uma função suave, é **Fator Integrante** do sistema (2.4) se

$$\frac{\partial(Rf)}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial(Rg)}{\partial y}(x, y),$$

para todo $(x, y) \in U$.

Observação 2.1. Na Definição 2.1, temos que

$$Rf(x, y) = R(x, y)f(x, y).$$

De maneira análoga, temos para a função Rg .

Proposição 2.2. Uma função $R : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é fator integrante de (2.4) se, e somente se, R satisfaz

$$f(x, y)\frac{\partial R}{\partial x}(x, y) + g(x, y)\frac{\partial R}{\partial y}(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)R(x, y), \quad (2.5)$$

para todo $(x, y) \in U$.

Demonstração. Note que,

$$\frac{\partial(Rf)}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial(Rg)}{\partial y}(x, y), \quad (2.6)$$

se, e somente se,

$$f(x, y)\frac{\partial R}{\partial x}(x, y) + R(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -g(x, y)\frac{\partial R}{\partial y}(x, y) - R(x, y)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Rearranjando os termos da equação anterior, temos que a equação é equivalente a

$$f(x, y) \frac{\partial R}{\partial x}(x, y) + g(x, y) \frac{\partial R}{\partial y}(x, y) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right) R(x, y).$$

□

Observação 2.2. Note que a condição dada na Proposição 2.2 pode ser escrita na forma

$$\nabla R(x, y) \cdot F(x, y) = -R(x, y) \mathbf{div}(F(x, y)),$$

em que " \cdot " é o produto interno usual de \mathbb{R}^2 , e $\mathbf{div}(F(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$.

Definição 2.2. Uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é dita ser **Fator Integrante Inverso** do sistema (2.4) se as seguintes condições forem satisfeitas

- a) O conjunto $\text{int}(V^{-1}(\{0\}))$ não contém nenhum aberto não vazio;
- b) Para todo $(x, y) \in U$, temos que

$$\nabla V(x, y) \cdot F(x, y) = V(x, y) \mathbf{div}(F(x, y)). \quad (2.7)$$

Proposição 2.3. Sejam V_1 e V_2 fatores integrantes inversos associados ao sistema (2.4) e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, $V_1 + \lambda V_2$ é fator integrante inverso associado ao sistema (2.4).

Demonstração. Basta utilizarmos a linearidade da derivada em relação à soma e produto por escalar juntamente à bilinearidade do produto interno. □

Proposição 2.4. Seja $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então, V é fator integrante inverso de (2.4) se, e somente se, a função $R : U \setminus V^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por,

$$R(x, y) = \frac{1}{V(x, y)},$$

é fator integrante de (2.4).

Demonstração. Note que, para todo $(x, y) \in U \setminus V^{-1}(\{0\})$ temos que

$$\frac{\partial R}{\partial x}(x, y) = - \left(\frac{1}{(V(x, y))^2} \right) \frac{\partial V}{\partial x}(x, y),$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}(x, y) = - \left(\frac{1}{(V(x, y))^2} \right) \frac{\partial V}{\partial y}(x, y).$$

Assim, suponha que V é fator integrante inverso de (2.4). Então, para todo $(x, y) \in U \setminus V^{-1}(\{0\})$ temos que

$$\nabla R(x, y) \cdot F(x, y) = - \left(\frac{1}{(V(x, y))^2} \right) \nabla V(x, y) \cdot F(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\frac{1}{V(x, y)^2} \right) V(x, y) \mathbf{div}(F(x, y)) \\
&= - \left(\frac{1}{V(x, y)} \right) \mathbf{div}(F(x, y)) \\
&= -R(x, y) \mathbf{div}(F(x, y)).
\end{aligned}$$

Portanto, R é fator integrante do sistema (2.4).

Provemos a recíproca. Para isto, suponha que R é fator integrante do sistema (2.4). Então, temos que

$$\nabla R(x, y) \cdot F(x, y) = -R(x, y) \mathbf{div}(F(x, y)).$$

Isto implica que

$$V(x, y)^2 \nabla R(x, y) \cdot F(x, y) = -V(x, y) \mathbf{div}(F(x, y)).$$

Com isto, temos que

$$\nabla V(x, y) \cdot F(x, y) = V(x, y) \mathbf{div}(F(x, y)).$$

Assim, segue que V é fator integrante inverso do sistema (2.4). \square

Proposição 2.5. *Seja $\phi(t; p)$ a trajetória do sistema (2.4) tal que $\phi(0; p) = p$. Então, se V é um fator integrante inverso do sistema (2.4), temos que*

$$V(\phi(t; p)) = V(p) \exp \left(\int_0^t \mathbf{div}(F(\phi(s; p))) ds \right). \quad (2.8)$$

Demonstração. Se V é fator integrante inverso, segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(V(\phi(t; p))) &= \langle \nabla V(\phi(t; p)), F(\phi(t; p)) \rangle \\
&= V(\phi(t; p)) \mathbf{div}(F(\phi(t; p))).
\end{aligned}$$

Com isto, podemos considerar $\mu(t) := \exp \left(- \int_0^t \mathbf{div}(F(\phi(s; p))) ds \right)$. Assim, segue que

$$\frac{d}{dt}(V(\phi(t; p))\mu(t)) = 0,$$

e portanto, temos que,

$$V(\phi(t; p)) = k \exp \left(\int_0^t \mathbf{div}(F(\phi(s; p))) ds \right),$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante. Por outro lado, como $V(\phi(0; p)) = V(p)$, então,

$$V(\phi(t; p)) = V(p) \exp \left(\int_0^t \mathbf{div}(F(\phi(s; p))) ds \right),$$

como queríamos demonstrar. \square

Corolário 2.1. *O conjunto $V^{-1}(\{0\})$ é positivamente invariante pelo fluxo de F .*

Demonstração. Segue diretamente da derivada de $V(\phi(t; p))$ obtida na Proposição 2.8. \square

Proposição 2.6. *Sejam $R_1, R_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ fatores integrantes do sistema (2.4), tais que $R_2(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in U$. Então, o quociente R_1/R_2 é uma integral primeira do sistema (2.4).*

Demonstração. Seja $p = (x, y) \in U$ e $\phi(t; p)$ o fluxo do sistema (2.4) passando por p . Então, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1}{R_2}(\phi(t; p)) \right) &= \frac{1}{R_2(x, y)^2} (R_2(x, y) \nabla R_1(x, y) \cdot F(x, y)) \\ &\quad - R_1(x, y) \nabla R_2(x, y) \cdot F(x, y) \\ &= \frac{1}{R_2(x, y)^2} (R_2(x, y) R_1(x, y) \mathbf{div}(F(x, y)) \\ &\quad - R_1(x, y) R_2(x, y) \mathbf{div}(F(x, y))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, R_1/R_2 é constante nas trajetórias de F , e portanto, uma integral primeira de F . \square

Corolário 2.2. *A divisão de dois fatores integrantes inversos linearmente independentes é uma integral primeira de (2.4).*

2.4 Valor Principal de Cauchy

No Capítulo 3, trabalharemos com algumas relações integrais. Estas podem estar relacionadas a integrais impróprias e divergentes. Como veremos adiante, adotaremos a seguinte ferramenta para lidarmos com estas integrais.

Definição 2.3. *Seja h uma função contínua em $[\xi_1, \xi_2] \setminus \{0\}$ onde $\xi_1 < 0 < \xi_2$. O **Valor Principal de Cauchy (PV)** da integral $\int_{\xi_1}^{\xi_2} h(\xi) d\xi$ é o seguinte limite (se existir):*

$$PV \int_{\xi_1}^{\xi_2} h(\xi) d\xi = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left(\int_{\xi_1}^{-\xi} h(\xi) d\xi + \int_{\xi}^{\xi_2} h(\xi) d\xi \right).$$

Obviamente, se h também é contínua em 0, então, o Valor Principal de Cauchy da integral coincide com o valor da integral. Por convenção, adotaremos que

$$PV \int_{\xi_1}^{\xi_2} h(\xi) d\xi = -PV \int_{\xi_2}^{\xi_1} h(\xi) d\xi.$$

3 Caracterização Integral de Mapas de Meio Retorno de Poincaré para Sistemas Lineares Planares

3.1 Introdução

Diversos métodos foram desenvolvidos e são utilizados para o estudo com respeito à existência e comportamento de ciclos limites e órbitas periódicas associados a sistemas de equações diferenciais ordinárias. Dentre esses métodos, destacamos o estudo dos Mapas de Poincaré associados a uma seção transversal [5].

Para campos vetoriais suaves por partes, a análise das órbitas que cruzam as variedades de separação pode ser feita a partir do estudo dos Mapas de Meio Retorno de Poincaré entre essas variedades. Para campos vetoriais quaisquer, nem sempre o cálculo destes mapas pode ser dado explicitamente. Entretanto, em se tratando de campos lineares por partes, uma vez que a integração destes é factível, é possível encontrar explicitamente a forma dos mapas de meio retorno de Poincaré.

Todavia, embora haja esta facilidade de calcular esses mapas, a sua análise está fortemente relacionada aos autovalores e autovetores das matrizes do sistema, além do surgimento de uma nova variável, o tempo de vôo.

O objetivo deste capítulo é entender a ferramenta desenvolvida em [1] que simplificou o estudo dos mapas de meio retorno de Poincaré, evitando uma exaustiva análise caso-a-caso em função do espectro das matrizes, e com isso, estudar a existência e o comportamento das órbitas periódicas e ciclos limites de campos vetoriais planares lineares por partes.

3.2 Mapas de Meio Retorno para sistemas lineares

Considere, o sistema diferencial linear (2.1).

Como vimos no Capítulo 2, se $m_{12} \neq 0$, pelo Teorema (2.1), o sistema (2.1) pode ser transformado no seguinte sistema linear na forma de Liénard:

$$\begin{cases} \dot{x} = Tx - y \\ \dot{y} = Dx - a, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $T = \text{Tr}(M)$, $D = \det(M)$ e $a = m_{12}b_2 - m_{22}b_1$. Para isto, basta considerar a seguinte mudança de coordenadas $x = x_1$ e $y = m_{22}x_1 - m_{12}x_2 - b_1$. Note que, esta mudança de

coordenadas preserva a seção Σ , uma vez que $x = x_1$. Seja $L(x, y) = (Tx - y, Dx - a)$ o campo vetorial linear associado ao sistema ((3.1)).

Note que, a forma em que o sistema ((3.1)) está representado, nos fornece informações necessárias para entendermos o comportamento das suas órbitas próximas à seção Σ .

Proposição 3.1. *O fluxo do sistema (3.1) cruza Σ :*

- *do semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ para o semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$, se $y > 0$; e,*
- *do semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ para o semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, se $y < 0$.*

Mais ainda, o fluxo é tangente a Σ na origem.

Demonstração. De fato, defina $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha(x, y) = \nabla h(x, y) \cdot L(x, y),$$

onde $h(x, y) = x$. Note que, $\Sigma = h^{-1}(\{0\})$. Mais ainda,

$$\alpha(x, y) = Tx - y,$$

e para $(x, y) \in \Sigma$, temos que

$$\alpha(x, y) = -y.$$

Portanto, segue o resultado. □

Consideraremos, daqui em diante, a definição de Mapa de Meio Retorno associada a Σ dada no Capítulo 2. Uma vez que o sistema (3.1) é invariante sob a mudança de variáveis $(x, y, a) \longleftarrow (-x, -y, -a)$, o trabalho desenvolvido neste capítulo será utilizando mapa **esquerdo**. Entretanto, resultados análogos podem ser obtidos para o mapa direito de meio retorno de Poincaré.

Observação 3.1. *Seja P o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré. No caso em que $P(0)$ não pode ser definido como no Capítulo 2, mas para todo $\varepsilon > 0$ existe $y_0 \in (0, \varepsilon)$ e $y_1 \in (-\varepsilon, 0)$ tal que $P(y_0) = y_1$, o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré pode ser estendido para $P(0) = 0$. Este caso corresponde a um equilíbrio na origem ou a origem é uma tangência invisível para o campo L em relação ao semi-plano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$.*

Além disso, considere a seguinte hipótese:

Hipótese 3.1. Existem $y_0 \geq 0$ e $\tau(y_0) > 0$ tais que $\psi_1(\tau(y_0); y_0) = 0$ e $\psi_1(t; y_0) < 0$ para todo $t \in (0, \tau(y_0))$.

Sendo assim, tomando $y_1 = P(y_0)$, uma vez definida a curva

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad (3.2)$$

onde $\Gamma_1 = \{(0, y) : y \in (y_1, y_0)\}$ e $\Gamma_2 = \{\phi(t; y_0) : t \in [0, \tau(y_0)]\}$, os equilíbrios de ((3.1)) estão relacionados com sua posição em relação à curva Γ .

Assumindo a hipótese (3.1), o sistema ((3.1)) só pode ter no máximo um equilíbrio. De fato, encontrar equilíbrios de ((3.1)) equivale encontrar soluções de

$$\begin{cases} Tx - y = 0 \\ Dx = a. \end{cases}$$

Este sistema linear pode ser classificado como não possuindo solução, tendo uma única solução, ou tendo infinitas soluções. Caso o sistema tenha infinitas soluções, isto é, se $D^2 + a^2 = 0$, então a reta $Tx = y$ é formada de equilíbrios do sistema ((3.1)). Da hipótese (3.1), uma vez que $\psi_1(\tau(y_0); y_0) \leq 0$, a reta $Tx = y$ intercepta a curva Γ_2 , o que contradiz a unicidade de soluções das equações diferenciais ordinárias.

Além disso, definiremos as possíveis posições do equilíbrio em relação à Γ da seguinte forma:

Definição 3.1. *Seja $\text{int}(\Gamma)$ o interior da região em \mathbb{R}^2 delimitada pela curva Γ . Denotaremos os seguintes cenários que resumem a posição relativa do equilíbrio de ((3.1)) em relação à curva Γ como:*

(S_0) $\Gamma \cup \text{int}(\Gamma)$ não contém nenhum equilíbrio do sistema;

(S_1) Se existir, o equilíbrio é a origem ou pertence a Γ_1 ;

(S_2) Se existir, o ponto de equilíbrio pertence a $\text{int}(\Gamma)$.

Podemos descrever tais cenários como se segue. No cenário (S_2), o equilíbrio do sistema ((3.1)) está localizado no semi-plano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ e as únicas possíveis configurações do retrato de fase são um centro, um foco estável ou foco instável.

No cenário (S_1), o equilíbrio do sistema ((3.1)) está localizado na origem (ou em Γ_1), e as únicas possíveis configurações para o retrato de fase são um centro, um foco estável e um foco instável. Em todos estes casos, podemos estender o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré para a origem fazendo $P(0) = 0$.

Finalmente, o cenário (S_0) abrange vários diferentes casos (selas, nós, nós degenerados, foco, centro e situações degeneradas sem equilíbrio). Por outro lado, para todos eles, existe uma tangência invisível na origem e portando o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré pode ser estendido para $P(0) = 0$.

3.3 Expressão Integral para Mapas de Meio Retorno de Poincaré

3.3.1 Fator integrante inverso para campos lineares planares

No Capítulo 2, introduzimos o conceito de Fator Integrante Inverso associado a um campo vetorial. Com isto, passaremos a estudar os fatores integrantes inversos associados ao campo vetorial linear $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$L(x, y) = (Tx - y, Dx - a). \quad (3.3)$$

Seja A a matriz associada ao sistema ((3.1)), ie,

$$A = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, um fator integrante inverso associado a (3.3) é uma função suave definida em \mathbb{R}^2 satisfazendo

$$\nabla V(x, y) \cdot L(x, y) = TV(x, y),$$

onde " \cdot " corresponde ao produto interno usual de \mathbb{R}^2 .

Em [6], Chavarriga et al. demonstraram que para todo sistema linear homogêneo o fator integrante inverso é uma função quadrática. Se o sistema não for homogêneo mas possui um equilíbrio, então, uma simples translação será suficiente para determinarmos seu fator integrante inverso.

Proposição 3.2 (Proposição 3, [1]). *Seja \mathcal{V} o conjunto de todos os fatores integrantes inversos polinomiais $V(x, y)$ de grau menor ou igual a 2 para o sistema ((3.1)). Então \mathcal{V} é um espaço vetorial de dimensão finita cuja dimensão depende dos parâmetros a , T e D . De maneira explícita,*

a) *Se $a^2 + D^2 \neq 0$, então*

- *Se $T \neq 0$ então, $\mathcal{B}_1 = \{D^2x^2 - DTxy + Dy^2 + a(T^2 - 2D)x - aTy + a^2\}$ é base de \mathcal{V} .*
- *Se $T = 0$, então, $\mathcal{B}_2 = \{1, Dx^2 + y^2 - 2ax\}$ é base de \mathcal{V} .*

b) *Se $a^2 + D^2 = 0$, então*

- *Se $T \neq 0$, então $\mathcal{B}_3 = \{y^2 - Txy, y - Tx\}$ é base de \mathcal{V} .*
- *Se $T = 0$, então $\mathcal{B}_4 = \{1, y, y^2\}$ é base de \mathcal{V} .*

Demonstração. Da Proposição (2.3) segue que \mathcal{V} é um espaço vetorial, uma vez que, somar funções polinomiais de grau menor ou igual a 2 é uma operação fechada e multiplicar por um escalar real são operações fechadas em \mathcal{V} .

Provemos então caracterização das bases de \mathcal{V} em relação aos parâmetros a , D e T do sistema ((3.1)).

De fato, seja $V \in \mathcal{V}$, dado por

$$V(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij}x^i y^j,$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, para $i + j \in \{0, 1, 2\}$. Então, note

$$\nabla V(x, y) = (2a_{20}x + a_{11}y + a_{10}, 2a_{02}y + a_{11}x + a_{01}).$$

Portanto, temos que,

$$\begin{aligned} \nabla V(x, y) \cdot L(x, y) &= -aa_{01} \\ &+ (-aa_{11} + a_{01}D + a_{10}T_x + (-2aa_{02} - a_{10})y \\ &+ (-2a_{20} + 2a_{02}D + a_{11}T)xy \\ &+ (a_{11}D + 2a_{20}T)x^2 \\ &- a_{11}y^2. \end{aligned}$$

e assim,

$$\nabla V(x, y) \cdot L(x, y) = TV(x, y),$$

se, e somente se,

$$\left\{ \begin{array}{l} -aa_{01} - a_{00}T = 0 \\ -aa_{11} + a_{01}D + a_{10}T = 0 \\ -2a_{02} - a_{10} - a_{01}T = 0 \\ -2a_{20} + 2a_{02}D = 0 \\ a_{11}D + a_{20}T = 0 \\ -a_{11} - a_{02}T = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Se $a^2 + D^2 \neq 0$ e $T \neq 0$, então o conjunto de soluções do sistema (3.4) é gerado por

$$\{(a^2, a(-2D + T^2), -aT, -DT, D^2, D).\}$$

Neste caso,

$$\mathcal{B}_1 = \{D^2x^2 - DTxy + Dy^2 + a(T^2 - 2D)x - aTy + a^2\}$$

é base de \mathcal{V} .

Se $a^2 + D^2 \neq 0$ e $T^2 = 0$, segue que o conjunto das solução do sistema (3.4) é gerado por

$$\{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, -2a, 0, 0, D, 1)\}.$$

Dessa forma,

$$\mathcal{B}_2 = \{1, Dx^2 + y^2 - 2ax\}$$

é base de \mathcal{V} .

Por outro lado, se $a^2 + D^2 = 0$ e $T \neq 0$, segue que, o conjunto das soluções do sistema (3.4) é gerado por

$$\{(0, -T, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, -T, 0, 1)\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{B}_3 = \{y^2 - Txy, y - Tx\},$$

é base de \mathcal{V} .

Finalmente, se $a^2 + D^2 = 0$ e $T = 0$, então, o conjunto das soluções do sistema (3.4) é gerado por

$$\{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Assim,

$$\mathcal{B}_4 = \{1, y, y^2\}$$

é base de \mathcal{V} . □

Com exceção do caso em que $a^2 + D^2 \neq 0$ e $T \neq 0$, a dimensão de \mathcal{V} é maior que 1. Portanto, existem fatores integrantes inversos polinomiais que são linearmente independentes. Mais ainda, supondo que $a^2 + D^2 \neq 0$ e $T \neq 0$, $V(x, y) = 1$ é elemento da base de \mathcal{V} . Dessa forma, pelo Corolário (2.2), se $a^2 + D^2 \neq 0$ e $T \neq 0$, os fatores integrantes inversos do sistema ((3.1)) são constantes ao longo da trajetórias de L .

Se $T \neq 0$, o sistema ((3.1)) é reversível (basta notar que o sistema é invariante sob a mudança $y \leftrightarrow -y, t \leftrightarrow -t$). Além disto, como polinômios constantes são fatores integrantes inversos (pois $1 \in \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_4$ dadas pela Proposição 3.2). Logo, se $a^2 + D^2 \neq 0$, temos que qualquer fator integrante inverso é constante ao longo das trajetórias do sistema ((3.1)).

Além disso, note que, o único elemento de \mathcal{B}_1 pode ser obtido via combinação linear dos elementos de \mathcal{B}_2 , se permitirmos que T possa ser anulado. Logo, sob a condição

$$a^2 + D^2 \neq 0, \tag{3.5}$$

podemos escolher

$$V(x, y) = D^2x^2 - DTxy + Dy^2 + a(T^2 - 2D)x - aTy + a^2. \tag{3.6}$$

Daqui em diante, o estudo será direcionado levando em consideração as hipóteses feitas em (3.1), garantindo a existência $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ tais que $y_0 y_1 \leq 0$ com $P(y_0) = y_1$, onde P é o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré, e (3.5), garantindo a existência de no máximo um ponto de equilíbrio do sistema (3.1).

Assim, uma vez que escolhemos um fator integrante inverso adequado, como discutimos no Capítulo 2, é importante determinarmos o conjunto dos zeros de $V, V^{-1}(\{0\})$.

Proposição 3.3 (Proposição 5, [1]). *Seja V o fator integrante inverso do sistema (3.1) descrito em (3.6). Então, podemos descrever $V^{-1}(\{0\})$ como sendo:*

- $D = 0$ (caso sem equilíbrio)
 - $T = 0$, então, $V^{-1}(\{0\}) = \emptyset$;
 - $T \neq 0$, então, $V^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T^2 x - Ty + a = 0\}$.
- $D \neq 0$ (equilíbrio em $(x, y) = (a/D, aT/D)$)

- $T^2 - 4D > 0$, então

$$V^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2D(x - \frac{a}{D}) = (T \pm \sqrt{T^2 - 4D}) \left(y - \frac{aT}{D}\right)\};$$

- $T^2 - 4D = 0$, então

$$V^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2D \left(x - \frac{a}{D}\right) = T \left(y - \frac{aT}{D}\right)\};$$

- $T^2 - 4D < 0$, então $V^{-1}(\{0\}) = \{(a/D, aT/D)\}$.

Demonstração. Se $D = 0$, então pela condição (3.5), $a \neq 0$. Assim, o fator integrante inverso é dado por $V(x, y) = a(T^2 x - Ty + a)$. Logo, como $a \neq 0$, a conclusão segue.

Suponha que $D \neq 0$. Note que, o fator integrante inverso V , pode ser escrito como

$$V(x, y) = -D \det \left(A \begin{pmatrix} x - \frac{a}{D} \\ y - \frac{aT}{D} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x - \frac{a}{D} \\ y - \frac{aT}{D} \end{pmatrix} \right).$$

Assim, V se anula, se e somente se, o vetor $(x - a/D, y - aT/D)$ pertence a um auto espaço real associado à matriz A . Dessa forma, como os autovalores de A são dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{-4D + T^2}),$$

cujos respectivos autovetores associados são

$$v_{\pm} = \left(\frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2D}, 1 \right),$$

segue o resultado. De fato, suponha que $T^2 - 4D \geq 0$. Então, $(x - a/D, y - aT/D)$ é autovetor de A se, e somente se, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$x - a/D = \mu \left(\frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2D} \right),$$

e

$$y = \mu.$$

Com isto, segue o resultado para $T^2 - 4D \geq 0$. Se $T^2 - 4D < 0$, não existem autovetores reais. Logo, $(x - a/D, y - aT/D) = (0, 0)$ é o único vetor em \mathbb{R}^2 satisfazendo

$$A \cdot (x - a/D, y - aT/D) = (x - a/D, y - aT/D).$$

Com isto, $V^{-1}(\{0\}) = (a/D, aT/D)$, como queríamos demonstrar. \square

Observação 3.2. *A Proposição 3.3 nos diz que, dependendo dos parâmetros do sistema (3.1), assumindo a condição (3.5), o conjunto $V^{-1}(\{0\})$, para a função V dada em (3.6), pode ser um dos seguintes: vazio, um ponto (equilíbrio do sistema), uma reta (invariante pelo sistema), ou um par de retas concorrentes (separatrizes invariantes do ponto de equilíbrio do sistema).*

3.3.2 Relação integral para mapas de meio retorno de Poincaré associados a sistemas lineares

Seja $G : \mathbb{R}^2 \setminus V^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vetorial dado por

$$G(x, y) = \left(-\frac{Dx - a}{V(x, y)}, \frac{Tx - y}{V(x, y)} \right). \quad (3.7)$$

A fim de estabelecermos uma orientação, considere que, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y)^\perp = (-y, x).$$

Proposição 3.4. *O campo G , definido nas componentes simplesmente conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus V^{-1}(\{0\})$, é conservativo e ortogonal ao fluxo do sistema ((3.1)).*

Demonstração. Seja $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus V^{-1}(\{0\})$ uma componente simplesmente conexa. Sabemos que, G é conservativo em U se, e somente se, para todo $(x, y) \in U$, temos que

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y) = 0,$$

onde, $G = (G_1, G_2)$. Como V é fator integrante inverso do sistema ((3.1)), segue que

$$\nabla V \cdot L = TV,$$

o que implica que,

$$L^\perp \cdot \nabla V^\perp = TV.$$

Como $G = L^\perp/V$, então, segue que,

$$G \cdot \nabla V^\perp = T.$$

Assim, temos que, para todo $(x, y) \in U$,

$$(Dx - a) \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + (Tx - y) \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = TV(x, y).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{V(x, y)^2} \left(-(Dx - a) \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) - (Tx - y) \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \right. \\ &\quad \left. + TV(x, y) \right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, G é conservativo em U .

Como $G = \frac{L^\perp}{V}$, então G é ortogonal ao campo L . Portanto, segue que, G é ortogonal ao fluxo do sistema ((3.1)). \square

Seja $\Delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave por partes em \mathbb{R}^2 que não intersecta o conjunto $V^{-1}(\{0\})$. Pela Proposição (3.3), sabemos que Δ não intersecta nenhuma variedade invariante do sistema ((3.1)), se estas existirem.

Suponha que $4D - T^2 > 0$. Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = X + \frac{a}{D} \\ y = \alpha X + \beta Y + \frac{aT}{D}, \end{cases} \quad (3.8)$$

onde $\alpha = T/2$ e $\beta = \sqrt{4D - T^2}/2$. Esta mudança de coordenadas, transforma o fator integrante inverso V em

$$\tilde{V}(X, Y) = \frac{4D^2 - T^2D}{4}(X^2 + Y^2).$$

Seja $\tilde{\Delta}$, nas coordenadas (X, Y) , a imagem da curva Δ pela mudança de variáveis (3.8). Sejam $\tilde{\Delta}(a) = (X_a, Y_a)$ e $\tilde{\Delta}(b) = (X_b, Y_b)$.

Então, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} G \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\tilde{\Delta}} -\frac{1}{D(X^2 + Y^2)} \left(X dX - \frac{TX dY}{\sqrt{4D - T^2}} + Y dY + \frac{TY dX}{\sqrt{4D - T^2}} \right) \\ &= \frac{-1}{D} \int_{\tilde{\Delta}} \frac{X dX + Y dY}{X^2 + Y^2} + \int_{\tilde{\Delta}} \frac{1}{D(X^2 + Y^2)} \left(\frac{TX dY}{\sqrt{4D - T^2}} - \frac{TY dX}{\sqrt{4D - T^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{D} \int_{\tilde{\Delta}} \frac{XdX + YdY}{X^2 + Y^2} + \frac{T}{D\sqrt{4D - T^2}} \int_{\tilde{\Delta}} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\
&= \frac{-1}{D} \log(X^2 + Y^2) \Big|_{(X_a, Y_a)}^{(X_b, Y_b)} + \frac{T}{D\sqrt{4D - T^2}} \int_{\tilde{\Delta}} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}.
\end{aligned}$$

Se $V|_{\Delta}$ é constante ou Δ é uma curva fechada, então

$$\begin{aligned}
\oint_{\Delta} G \cdot d\mathbf{r} &= \frac{T}{D\sqrt{4D - T^2}} \int_{\tilde{\Delta}} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\
&= \frac{2\pi T}{D\sqrt{4D - T^2}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\Delta}} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \right),
\end{aligned}$$

ou seja, esta integral é $2\pi T (D\sqrt{4D - T^2})^{-1}$ multiplicado pelo índice da curva $\tilde{\Delta}$ em torno do ponto $(X, Y) = (0, 0)$, ou, equivalentemente, o índice da curva Δ em torno do ponto de equilíbrio.

Note que, se Δ for uma curva fechada e o equilíbrio do sistema pertencer ao interior de Δ , o conjunto $\text{int}(\Delta) \setminus V^{-1}(\{0\})$ não é simplesmente conexo. Por isto, não podemos afirmar diretamente que a integral de linha anterior é identicamente nula, uma vez que, não necessariamente o campo G será conservativo.

Para o caso em que $4D - T^2 \leq 0$, se Δ é uma curva fechada, devido a conservatividade do campo vetorial G , é claro que,

$$\oint_{\Delta} G \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Note que, este valor também pode ser interpretado como sendo o índice da curva Δ em torno do equilíbrio, se existe, ou em torno de qualquer ponto o qual Δ não o cerca.

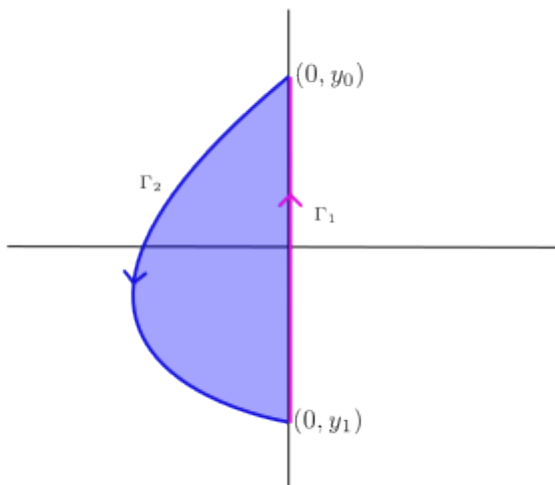
Com esta breve observação com respeito à integral de linha do campo G em relação a uma curva fechada Δ , temos o necessário para fornecermos uma relação integral entre um valor e sua imagem via o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré.

Teorema 3.2 (Teorema 8, [1]). *Assuma que valham a condição (3.5), que garante a existência de no máximo um ponto de equilíbrio do sistema ((3.1)), e a hipótese (3.1). Sejam $y_1 = P(y_0)$ a imagem de y_0 pelo mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré, V o fator integrante inverso dado na expressão (3.6), e Γ a curva de Jordan definida em (3.2) e (S_k) , para $k \in \{0, 1, 2\}$ dados na Definição (3.1). Então,*

$$PV \int_{y_0}^{y_1} \frac{-y}{V(0, y)} dy = d_k, \quad (3.9)$$

onde

$$d_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0, \\ \frac{k\pi T}{D\sqrt{4D - T^2}} & \text{se } k = 1, 2. \end{cases}$$

Figura 1 – Cenário S_0

Demonstração. Para demonstrarmos este resultado, calcularemos a integral de linha do campo G definido em (3.7) sobre a curva Γ , positivamente orientada. Veremos que este cálculo dependerá da posição relativa entre a curva Γ e o equilíbrio do sistema ((3.1)).

Note que, uma vez que a componente Γ_2 de Γ é um arco de uma trajetória do sistema (3.1), pela Proposição 3.4, temos que

$$\int_{\Gamma_2} G \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

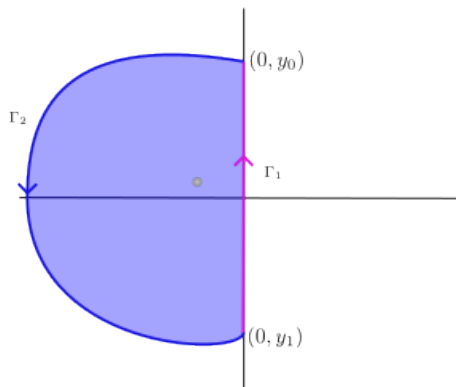
Começemos pelo cenário (S_0), isto é, $\Gamma \cup \text{int}(\Gamma)$ não contém nenhum equilíbrio do sistema. Logo, pela Proposição (3.3), o fator integrante V não se anula em $\Gamma \cup \text{int}(\Gamma)$. Logo, como o campo é conservativo a integral

$$\int_{\Gamma} G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} G \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} G \cdot d\mathbf{r}$$

se anula. Portanto, pelo comentário feito com respeito à integral de G sobre a componente Γ_2 , segue que

$$0 = \int_{\Gamma_1} G \cdot d\mathbf{r} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{-y}{V(0, y)} dy.$$

Com isto, provamos o cenário (S_0) (veja Figura 1).

Figura 2 – Cenário S_2

Considere, agora, o cenário (S_2). Neste caso, temos que o ponto de equilíbrio existe e pertence a $\text{int}(\Gamma)$, e mais ainda, pela Proposição (3.3) deve ser o único ponto em que o fator integrante V se anula.

Portanto,

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{-y}{V(0, y)} dy = \int_{\Gamma_1} G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} G \cdot d\mathbf{r}.$$

Pelo comentário sobre a integral de G sobre uma curva fechada qualquer em \mathbb{R}^2 , feito anteriormente, temos que

$$\oint_{\Gamma} G \cdot d\mathbf{r} = \frac{2\pi T}{D\sqrt{4D - T^2}},$$

pois,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = 1.$$

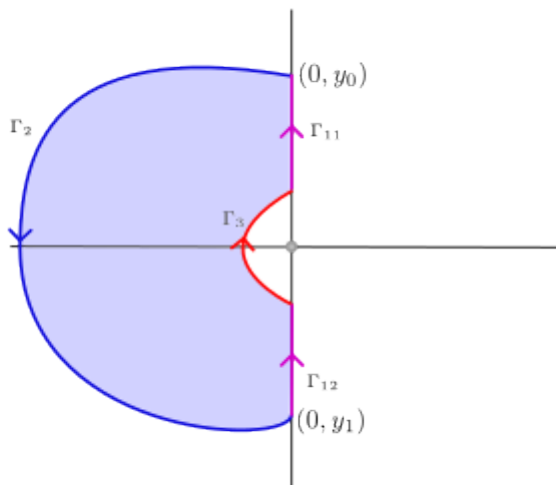
Assim, provamos a relação integral para o cenário (S_2) (veja Figura 2).

Finalmente, suponha que o equilíbrio, se existir, é a origem ou pertence a Γ_1 . Sem perda de generalidade, assumamos que o único ponto de equilíbrio é a origem. Neste caso, $a = 0$ e $D \neq 0$. Como vimos nos cenários anteriores,

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{-y}{V(0, y)} dy = \int_{\Gamma_1} G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} G \cdot d\mathbf{r}.$$

Entretanto, a integral

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{-y}{V(0, y)} dy = \int_{y_0}^{y_1} \frac{-1}{Dy} dy$$

Figura 3 – Cenário S_1

é divergente. Como o único equilíbrio do sistema está sobre a curva Γ , não poderemos proceder como anteriormente. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, defina a seguinte curva

$$\tilde{\Gamma}^\varepsilon = \Gamma_{11}^\varepsilon \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{12}^\varepsilon \cup \Gamma_3^\varepsilon,$$

onde,

$$\Gamma_{11}^\varepsilon = \{(0, y) \in \Gamma_1 : y \in [y_1, -\varepsilon]\},$$

$$\Gamma_{12}^\varepsilon = \{(0, y) \in \Gamma_1 : y \in [\varepsilon, y_0]\},$$

e

$$\Gamma_3^\varepsilon = (\partial B_\varepsilon((0, 0))) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\},$$

onde $\partial B_\varepsilon((0, 0))$ é a fronteira da bola centrada em $(0, 0)$ de raio ε (veja Figura 3). Com isto,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Gamma}^\varepsilon} G \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma_{11}^\varepsilon} G \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} G \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_{12}^\varepsilon} G \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_3^\varepsilon} G \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_\varepsilon^{y_0} \frac{-1}{Dy} dy + \int_{y_1}^{-\varepsilon} \frac{-1}{Dy} dy + \int_{\Gamma_3^\varepsilon} G \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Note que, como V se anula apenas na origem, então, G é conservativo em $\text{int}(\tilde{\Gamma}^\varepsilon)$. Portanto, a igualdade anterior implica que,

$$\int_\varepsilon^{y_0} \frac{-1}{Dy} dy + \int_{y_1}^{-\varepsilon} \frac{-1}{Dy} dy = - \int_{\Gamma_3^\varepsilon} G \cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi T}{D\sqrt{4D - T^2}}.$$

Tomando o limite para $\varepsilon \rightarrow 0$, segue o resultado para o valor de Cauchy da integral. Com isto, provamos o cenário (S_1) , e consequentemente, o teorema. \square

Observação 3.3. *Como verificamos anteriormente, uma vez que o sistema ((3.1)) é invariante via a mudança de coordenadas $(x, y, a) \leftrightarrow (-x, -y, -a)$, tomando y_0 como imagem de y_1 pelo mapa direito de meio retorno de Poincaré, a mesma expressão integral (3.9) pode ser obtida, trocando d_k por $-d_k$, em cada cenário.*

Portanto, note que, o estudo dos mapas de meio retorno de Poincaré não mais estão relacionados ao estudo caso-a-caso em função do espectro da matriz A . Doravante, o estudo destes mapas pode ser feito estudando as curvas de nível de uma única função,

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = \text{PV} \int_{y_0}^{y_1} \frac{-y}{V(0, y)} dy, \quad (3.10)$$

onde V é o fator integrante inverso dado em (3.6). Esta função recebe o nome de **Função do Tipo Índice**.

Note que, a informação qualitativa dos sistemas lineares estão atreladas ao espectro da matriz correspondente. Sendo assim, naturalmente, esperamos encontrar alguma relação entre a função do tipo índice e o espectro da matriz. Para isto, denotando \mathcal{P}_A o polinômio característico da matriz A , é fácil ver que, para todo $y \neq 0$, temos que,

$$V(0, y) = y^2 \mathcal{P}_A \left(\frac{a}{y} \right).$$

De fato, como

$$\mathcal{P}_A(x) = D - Tx + x^2,$$

então

$$y^2 \mathcal{P}_A \left(\frac{a}{y} \right) = a^2 - aTy + Dy^2 = V(0, y).$$

O próximo passo é estudar as curvas de nível da função \mathcal{F} e suas propriedades para obtermos informações com respeito dos mapas de meio retorno de Poincaré.

3.4 Análise da função do tipo índice

Como vimos na seção anterior, para y_0 e y_1 dados pela Hipótese (3.1), a função $\mathcal{F}(y_0, y_1)$ assume três valores a depender da posição relativa entre o equilíbrio do sistema ((3.1)) e a curva Γ .

Entretanto, gostaríamos de encontrar um domínio de definição da função \mathcal{F} , de forma que consigamos evitar os zeros não triviais de $V(0, y)$. Veremos que, embora a integral da função \mathcal{F} possa ser calculada nestes pontos via valor principal de Cauchy, os mapas de meio retorno de Poincaré não podem ser definidos.

Para tanto, defina

$$\mathcal{I} = \{y \in \mathbb{R} : (0, y) \in \text{int}(\mathcal{C} \cup \{(0, 0)\})\}, \quad (3.11)$$

onde \mathcal{C} é a única componente conexa maximal de $\mathbb{R}^2 \setminus V^{-1}(\{0\})$ que contem dois pontos $(0, \xi_1)$ e $(0, \xi_2)$ tais que $\xi_1 \xi_2 < 0$. Esclareçamos esta definição.

Proposição 3.5. *Seja V o fator integrante inverso do sistema ((3.1)) dado em (3.6). Então, existe um conjunto conexo maximal \mathcal{C} de $\mathbb{R}^2 \setminus V^{-1}(\{0\})$ tal que existem $(0, \xi_1), (0, \xi_2) \in \mathcal{C}$ tais que $\xi_1 \xi_2 < 0$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.3, o conjunto $V^{-1}(\{0\})$, para a função V dada em (3.6), pode ser um dos seguintes: vazio, um ponto (equilíbrio do sistema), uma reta (invariante pelo sistema), ou um par de retas concorrentes (separatrizes invariantes do ponto de equilíbrio do sistema).

De fato, se $D = 0$, então não existe equilíbrio do sistema e, ou $V^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, e portanto, $\mathcal{C} = \emptyset$, ou

$$V^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T^2x - Ty + a = 0\}.$$

Neste caso, como $D = 0$, a condição (3.5) implica que $a \neq 0$. Sendo assim, $(0, 0) \notin V^{-1}(\{0\})$. Logo, a depender do sinal de a , podemos escolher \mathcal{C} como sendo

- i) $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T^2x - Ty + a > 0\}$, se $a > 0$, ou
- ii) $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T^2x - Ty + a < 0\}$, se $a < 0$.

Suponha agora que $D \neq 0$. Logo, o único equilíbrio do sistema ((3.1)) é $(a/D, aT/D)$. Suponha que $a \neq 0$. Então, se $T^2 - 4D > 0$ tome \mathcal{C} como sendo o subconjunto conexo entre as separatrizes de A que contem a origem. Se $T^2 - 4D = 0$, então o conjunto $V^{-1}(\{0\})$ é uma reta invariante do sistema passando pelo equilíbrio. Como estamos supondo que $a \neq 0$, então, a origem não pertence a esta reta. Logo, podemos tomar \mathcal{C} como sendo o subconjunto conexo de \mathbb{R}^2 que não intercepta $V^{-1}(\{0\})$ que contem a origem. Finalmente, se $T^2 - 4D < 0$, então $V^{-1}(\{0\}) = \{(a/D, aT/D)\}$, e podemos tomar $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \setminus V^{-1}(\{0\})$.

Suponhamos que $a = 0$, ou equivalentemente, a origem é o único equilíbrio do sistema ((3.1)). Neste caso, se $T^2 - 4D \geq 0$, não podemos definir \mathcal{C} conexo satisfazendo as propriedades necessárias, uma vez que,

$$V^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2Dx = (T \pm \sqrt{T^2 - 4D})y\}, \text{ se } T^2 - 4D > 0,$$

ou

$$V^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2Dx = Ty\}, \text{ se } T^2 - 4D = 0.$$

Por outro lado, se $T^2 - 4D < 0$, temos que $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, pois $V^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$. \square

Pela Proposição 3.5, por um lado, se $a \neq 0$, então,

$$\mathcal{I} = \{y \in \mathbb{R} : (0, y) \in \text{int}(\mathcal{C})\},$$

uma vez que $(0, 0) \notin V^{-1}(\{0\})$. Por outro lado, se $a = 0$, então:

- Se a origem for um foco ou um centro, $\mathcal{I} = \mathbb{R}$;
- Se origem for sela ou nó, $\mathcal{I} = \emptyset$.

Observe que, o domínio \mathcal{I} é não vazio justamente nos casos em que podemos definir os mapas de meio retorno de Poincaré para o sistema ((3.1)).

Proposição 3.6. *Suponha que $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Então, se $a \neq 0$ (resp., $a = 0$), $V(0, y) > 0$ para todo $y \in \mathcal{I}$ (resp., $y \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$). Mais ainda, $I = (\mu_1, \mu_2)$ onde $-\infty \leq \mu_1 < 0 < \mu_2 \leq +\infty$. Além disso, se $-\infty < \mu_1$ (resp. $\mu_2 < +\infty$), então $V(0, \mu_1) = 0$ (resp. $V(0, \mu_2) = 0$).*

Demonstração. Se $a \neq 0$, então, $V(0, 0) = a^2 > 0$. Portanto, se existisse $y \in \mathcal{I}$ tal que $V(0, y) = 0$, deveria existir $y' \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$ tal que $V(0, y') = 0$. Isso implicaria que $(0, y') \in \mathcal{C}$, o que contradiz a definição de \mathcal{C} .

Suponha que $a = 0$. Então, como $\mathcal{I} \neq \emptyset$, temos que $T^2 - 4D < 0$. Isto implica que, $D > T^2/4 \geq 0$. Assim, temos que

$$V(0, y) = Dy^2 > 0, \forall y \in \mathcal{I} \setminus \{0\}.$$

Note que, da construção de \mathcal{I} , é claro que \mathcal{I} é um conjunto conexo. Logo, como $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, podemos escrever $\mathcal{I} = (\mu_1, \mu_2)$. Assim, da maximalidade de \mathcal{C} , temos que se $\mu_1 > -\infty$ (resp. $\mu_2 < +\infty$), $V(0, \mu_1) = 0$ (resp. $V(0, \mu_2) = 0$). \square

Seja h uma função definida em \mathcal{I} , se $a \neq 0$, e em $\mathcal{I} \setminus \{0\}$, se $a = 0$, dada por

$$h(y) = \frac{-y}{V(0, y)} = \frac{-y}{Dy^2 - aTy + a^2}. \quad (3.12)$$

Da Proposição 3.5, a função h é estritamente positiva para $y < 0$ e estritamente negativa se $y > 0$. Como, para $i = 1, 2$ os limites μ_i ou são infinitos ou $V(0, \mu_i) = 0$, qualquer integral de h envolvendo qualquer um desses pontos é imprópria, e mais ainda, divergente. De fato, para todo $a \neq 0$ e $z \in \mathcal{I}$, temos que

$$\int_z^{\mu_2} h(y)dy = -\infty \text{ e } \int_{\mu_1}^z h(y)dy = \infty. \quad (3.13)$$

Além disso, se $a = 0$, então $h(y) = \frac{-1}{Dy}$. Como $D \neq 0$, qualquer integral envolvendo $y = 0$ é também uma integral imprópria divergente.

A partir de agora, estudaremos a função \mathcal{F} restrita ao conjunto $\mathcal{I}^2 = \mathcal{I} \times \mathcal{I}$. O próximo resultado descreve a região de \mathcal{I}^2 na qual \mathcal{F} é analítica.

Lema 3.1 (Lema 12, [1]). *Assuma que $\mathcal{I} = (\mu_1, \mu_2) \neq \emptyset$. Então, \mathcal{F} dada em (3.10) é analítica em*

- a) \mathcal{I}^2 , se $a \neq 0$,
 b) $\mathcal{I}^2 \setminus \{(y_1, y_0) \in \mathbb{R}^2 : y_1 y_0 = 0\}$, se $a = 0$.

Demonstração. Suponha que $a \neq 0$. Então,

$$h(y) = \frac{-y}{Dy^2 - aTy + a^2},$$

é analítica em todo \mathcal{I} , uma vez que $V(0, y) > 0$ para todo $y \in \mathcal{I}$. Portanto,

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = \int_{y_1}^{y_0} h(y) dy$$

é analítica em todo \mathcal{I}^2 .

Se $a = 0$, então,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y_1, y_0) &= \text{PV} \int_{y_1}^{y_0} \frac{-1}{Dy} dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{y_1}^{-\varepsilon} \frac{-1}{Dy} dy + \int_{\varepsilon}^{y_0} \frac{-1}{Dy} dy \right) \\ &= \frac{1}{D} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \left| \frac{y_1}{\varepsilon} \right| - \log \left| \frac{\varepsilon}{y_0} \right| \right) \\ &= \frac{1}{D} \log \left| \frac{y_1}{y_0} \right|, \end{aligned}$$

que é analítica para todo $(y_1, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y_1 y_0 \neq 0$. □

Observação 3.4. *Pelo Lema 3.1, se $a = 0$ a função \mathcal{F} não pode ser definida no conjunto $\{(y_1, y_0) \in \mathbb{R}^2 : y_0 y_1 = 0\}$. Mais ainda, neste caso, podemos dizer que a expressão $\mathcal{F}(0, 0)$ pode assumir valores arbitrariamente grandes. De fato, note que, da expressão obtida para \mathcal{F} na demonstração do Lema 3.1, temos que*

$$\lim_{\substack{y_1 \rightarrow 0 \\ y_0 \neq 0}} \mathcal{F}(y_1, y_0) = -\text{sign}(D) \cdot \infty$$

e

$$\lim_{\substack{y_0 \rightarrow 0 \\ y_1 \neq 0}} \mathcal{F}(y_1, y_0) = \text{sign}(D) \cdot \infty.$$

Por outro lado, se considerarmos o caminho $y_1 = cy_0$ para $c \neq 0$, então

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \mathcal{F}(cy_0, y_0) = \frac{\log |c|}{D}.$$

Como vimos no Teorema (3.2), os mapas de meio retorno de Poincaré pertencem a alguma curva de nível da função \mathcal{F} . Sendo assim, o próximo resultado é dedicado ao estudo das curvas de nível de \mathcal{F} restrita a \mathcal{I}^2 . Mais ainda, veremos que essas curvas pode ser vistas como gráficos de funções reais analíticas definidas em \mathcal{I} .

Teorema 3.3 (Teorema 14, [1]). *Seja \mathcal{F} a função do tipo índice dada em (3.10) e V fator integrante inverso do sistema ((3.1)) dado em (3.6). Além disso, assuma que a condição (3.5) é verdadeira e o intervalo $\mathcal{I} = (\mu_1, \mu_2)$ é não vazio. Então, para cada $q \in \mathbb{R}$ existem duas funções reais analíticas distintas $\phi_q, \varphi_q : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ tal que a curva de nível $\mathcal{C}_q = \{(y_1, y_0) \in \mathcal{I} : \mathcal{F}(y_1, y_0) = q\}$ é a união dos gráficos de ϕ_q e φ_q . Mais ainda, ambas funções são soluções da seguinte equação diferencial*

$$y_1 V(0, y_0) dy_1 - y_0 V(0, y_1) dy_0 = 0 \quad (3.14)$$

em \mathcal{I} . Mais precisamente,

- Para $a = 0$, então $\mathcal{C}_q = \{(y_1, y_0) \in \mathcal{I}^2 : (y_1 - \phi_q(y_0))(y_1 - \varphi_q(y_0)) = 0\}$, onde $\phi_q(z) = e^{Dq}z$ e $\varphi_q(z) = -e^{Dq}z$ para $z \in \mathcal{I}$.
- Para $a \neq 0$ e $q = 0$ então

$$\mathcal{C}_0 = \{(y_1, y_0) \in \mathcal{I}^2 : (y_1 - \phi_q(y_0))(y_1 - \varphi_q(y_0)) = 0\},$$

onde $\phi_0 = id$, φ_0 é uma involução em \mathcal{I} e $\varphi_0(0) = 0$.

- Para $a \neq 0$ e $q \neq 0$, então

$$\mathcal{C}_q = \{(y_1, y_0) \in \mathcal{I}^2 : (y_1 - \phi_q(y_0))(y_1 - \varphi_q(y_0)) = 0\}, \text{ se } q > 0,$$

e

$$\mathcal{C}_q = \{(y_1, y_0) \in \mathcal{I}^2 : (y_0 - \phi_q(y_1))(y_0 - \varphi_q(y_1)) = 0\}, \text{ se } q < 0,$$

onde cada função φ_q é unimodal em \mathcal{I} , a função $\text{sign}(q)\varphi_q$ tem um máximo negativo estrito na origem e vale a equivalência, $\phi_q = \varphi_{-q}$. Mais ainda, as funções restritas

$$\begin{aligned} \varphi_q : [0, \mu_2) &\longrightarrow (\mu_1, \varphi_q(0)], \text{ para } q > 0 \\ \varphi_q : (\mu_1, 0] &\longrightarrow [\varphi_q(0), \mu_2), \text{ para } q < 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

são bijetivas.

Demonstração. Se $a = 0$, então pela Observação (3.4), a função \mathcal{F} não está definida no conjunto $\{(y_1, y_0) \in \mathbb{R}^2 : y_1 y_0 = 0\}$. Mais ainda, pelo Lema (3.1), sabemos que

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = \frac{1}{D} \log \left| \frac{y_1}{y_0} \right|.$$

Assim, seja $q \in \mathbb{R}$. Pela expressão anterior, temos que,

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = q \iff |y_1| = e^{Dq}|y_0|. \quad (3.16)$$

Por outro lado, como estamos supondo que $a = 0$, a equação diferencial (3.14) é equivalente a

$$y_1 y_0 (y_0 dy_1 - y_1 dy_0) = 0,$$

que é trivialmente satisfeita por retas passando pela origem. Assim, da expressão (3.16), tomamos $\phi_q(z) = e^{Dq}z$ e $\varphi_q(z) = -e^{Dq}z$ e portanto,

$$\mathcal{C}_q = \{(y_1, y_0) \in \mathcal{I}^2 : (y_1 - \phi_q(y_0))(y_1 - \varphi_q(y_0)) = 0\},$$

com ϕ_q e φ_q satisfazendo a equação diferencial ordinária (3.14).

A partir de agora, assumiremos que $a \neq 0$. Assim, na definição da função \mathcal{F} não precisamos incluir o valor principal de Cauchy, uma vez que $V(0, 0) \neq 0$. Assim, temos que as derivadas parciais de \mathcal{F} são

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1}(y_1, y_0) = \frac{y_1}{V(0, y_1)} \text{ e } \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_0}(y_1, y_0) = \frac{-y_0}{V(0, y_0)}. \quad (3.17)$$

Mais ainda, para todo $q \in \mathbb{R}$, qualquer função definida implicitamente pela equação $\mathcal{F}(y_1, y_0) = q$ satisfaz

$$0 = d\mathcal{F} = \frac{y_1}{V(0, y_1)} dy_1 - \frac{-y_0}{V(0, y_0)} dy_0,$$

que é equivalente à equação diferencial (3.14), uma vez que $V(0, y) > 0$ para todo $y \in \mathcal{I}$.

Provaremos a existência das funções ϕ_q e φ_q . De (3.17), para $y_0 \in \mathcal{I}$, temos que a função $\mathcal{F}(\cdot, y_0)$ satisfaz os seguintes itens:

- é estritamente decrescente em $(\mu_1, 0)$;
- é estritamente crescente em $(0, \mu_2)$.

Pelas expressões (3.13), temos que, para todo $y_0 \in \mathcal{I}$,

$$\lim_{y_1 \searrow \mu_1} \mathcal{F}(y_1, y_0) = \lim_{y_1 \nearrow \mu_2} \mathcal{F}(y_1, y_0) = +\infty.$$

Por fim, uma vez que $V(0, y) > 0$ para todo $y \in \mathcal{I}$, então $\mathcal{F}(0, y_0) < 0$ para todo $y_0 \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$. Mais ainda, $\mathcal{F}(0, 0) = 0$.

Afirmção 3.3.1. Seja $q = 0$. Para todo $y_0 \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$ existem dois valores distintos e únicos $\phi_0(y_0), \varphi_0(y_0) \in \mathcal{I}$ tais que $\mathcal{F}(\phi_0(y_0), y_0) = \mathcal{F}(\varphi_0(y_0), y_0) = 0$. Mais ainda, vale que $\phi_0(y_0)\varphi_0(y_0) < 0$.

Demonstração. Provaremos a existência de $\phi_0(y_0)$. Para $\varphi_0(y_0)$ é análogo.

Para $y_0 \in \mathcal{I}$, temos que

$$\lim_{y_1 \searrow \mu_1} \mathcal{F}(y_1, y_0) = +\infty.$$

Portanto, existe $\tilde{y} \in (\mu_1, 0)$ tal que $\mathcal{F}(\tilde{y}, y_0) > 0$. Como $\mathcal{F}(0, y_0) < 0$, então, existe $\phi_0(y_0) \in (\mu_1, 0)$ tal que $\mathcal{F}(\phi_0(y_0), y_0) = 0$. Uma vez que $\mathcal{F}(\cdot, y_0)$ é estritamente decrescente em $(\mu_1, 0)$, então $\phi_0(y_0)$ é único. \square

Note que, sem perda de generalidade, podemos supor que $y_0\phi_0(y_0) > 0$. Mais ainda, se ϕ_0 e φ_0 pudessem ser estendidas para $y_0 = 0$, então teríamos que $\phi_0(0) = \varphi_0(0) = 0$, uma vez que $y_1 = 0$ é a única solução de $\mathcal{F}(y_1, 0) = 0$ em \mathcal{I} .

Portanto, como $y_0\phi_0(y_0) > 0$ e $\mathcal{F}(y_0, y_0) = 0$ para todo $y_0 \in \mathcal{I}$, temos que a função ϕ_0 é a identidade de \mathcal{I} . Mais ainda, existe uma função \mathcal{F}^* definida em \mathcal{I}^2 tal que $\mathcal{F}(y_1, y_0) = (y_1 - y_0)\mathcal{F}^*(y_1, y_0)$ tal que $\mathcal{F}^*(\varphi(y_0), y_0) = 0$ para todo $y_0 \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$, uma vez que $\mathcal{F}(\varphi(y_0), y_0) = 0$ e $\phi_0(y_0)\varphi_0(y_0) < 0$.

Como ϕ_0 é a função identidade, então é claro que ϕ_0 é analítica em \mathcal{I} . Note que, pelas derivadas parciais de \mathcal{F} calculadas em (3.17), sabemos que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1}(\varphi_0(y_0), y_0) \neq 0, \forall y_0 \in \mathcal{I} \setminus \{0\}.$$

Então, pelo Teorema da Função Inversa para funções reais analíticas, uma vez que \mathcal{F} é analítica em \mathcal{I}^2 , segue que, a função φ_0 é analítica em $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ (veja o Teorema 2.3.5 em [7]).

Provaremos que φ_0 pode ser analiticamente estendida para $y = 0$. Primeiramente, estudemos a seguinte relação entre as derivadas parciais de ordem superior da função \mathcal{F} .

Afirmção 3.3.2. Para $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^n \mathcal{F}}{\partial y_1^n}(y_0, y_1) = -\frac{\partial^n \mathcal{F}}{\partial y_0^n}(y_0, y_1), \forall (y_1, y_0) \in \mathcal{I}^2.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que, das expressões obtidas em (3.17), temos que as derivadas parciais mistas de F se anulam. Por outro lado, note que, para todo $(y_1, y_0) \in \mathcal{I}^2$, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1}(y_1, y_0) = \frac{y_1}{V(0, y_1)} = -\left(\frac{-y_1}{V(0, y_1)}\right) = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_0}(y_0, y_1).$$

Assim, fixado $\bar{y} \in \mathcal{I}$, defina $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\mathcal{G}_1(y) = \mathcal{F}(y, \bar{y}) \text{ e } \mathcal{G}_2(y) = \mathcal{F}(\bar{y}, y).$$

Portanto,

$$\mathcal{G}'_1(y) = -\mathcal{G}'_2(y), \forall y \in \mathcal{I}.$$

Dessa forma, para n inteiro positivo, segue que

$$\mathcal{G}_1^{(n)}(y) = -\mathcal{G}_2^{(n)}(y), \forall y \in \mathcal{I}.$$

Assim, dados $(y_1, y_0) \in \mathcal{I}^2$, tome $\bar{y} = y_0$ e defina as funções \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 como anteriormente. Portanto,

$$\mathcal{G}_1^{(n)}(y_0) = -\mathcal{G}_2^{(n)}(y_0),$$

o que prova o enunciado. \square

Portanto, \mathcal{F}^* é analítica numa vizinhança da origem. Mais ainda, como $\mathcal{F}(y_1, y_0) = (y_1 - y_0)\mathcal{F}^*(y_1, y_0)$, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1}(y_1, y_0) = \mathcal{F}^*(y_1, y_0) + (y_1 - y_0) \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial y_1}(y_1, y_0). \quad (3.18)$$

Logo,

$$\mathcal{F}^*(0, 0) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1}(0, 0) = 0.$$

Além disso, derivando (3.18) em relação a y_1 , temos que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y_1^2}(y_1, y_0) = \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial y_1}(y_1, y_0) + \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial y_1}(y_1, y_0) + (y_1 - y_0) \frac{\partial^2 \mathcal{F}^*}{\partial y_1^2}(y_1, y_0).$$

Portanto,

$$a^{-2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y_1^2}(0, 0) = 2 \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial y_1}(0, 0).$$

De maneira análoga, provamos para derivada parcial em relação a y_0 . Dessa forma, pelo Teorema da Função Implícita para funções reais analíticas aplicado a \mathcal{F}^* na origem, temos que φ_0 pode ser analiticamente estendida para $y_0 = 0$ e $\varphi_0(0) = 0$.

Finalmente, como

$$\mathcal{F}(y_0, y_1) = -\mathcal{F}(y_0, y_1),$$

então, segue que

$$0 = \mathcal{F}(\varphi_0(y_0), 0) = -\mathcal{F}(y_0, \varphi_0(y_0)).$$

Portanto, $\varphi_0(\varphi_0(y_0)) = y_0$ para todo $y_0 \in \mathcal{I}$. Logo, a função $\varphi_0 : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ é uma involução.

Seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $aq \neq 0$.

Afirmção 3.3.3. Suponha que $q > 0$. Então, para todo $y_0 \in \mathcal{I}$ existem dois valores distintos e únicos $\phi_q(y_0), \varphi_q(y_0) \in \mathcal{I}$ tais que $\mathcal{F}(\phi_q(y_0), y_0) = \mathcal{F}(\varphi_q(y_0), y_0) = q$. Mais ainda, vale que $\phi_q(y_0)\varphi_q(y_0) < 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que φ_q é uma função estritamente negativa.

Demonstração. Seja $y_0 \in \mathcal{I}$. Como observamos anteriormente, uma vez que

$$\lim_{y_1 \searrow \mu_1} \mathcal{F}(y_1, y_0) = +\infty,$$

existe $\tilde{y} \in (\mu_1, 0)$ tal que $\mathcal{F}(\tilde{y}, y_0) > q$. Por outro lado, temos que $\mathcal{F}(0, y_0) < 0$. Assim, existe $\phi_q(y_0) \in (\mu_1, 0)$ tal que $\mathcal{F}(\phi_q(y_0), y_0) = q$. Como a função $\mathcal{F}(\cdot, y_0)$ é estritamente decrescente em $(\mu_1, 0)$, então o valor $\phi_q(y_0)$ é único. De maneira análoga, prova-se a existência de um valor $\varphi_q(y_0) \in (0, \mu_2)$ tal que $\mathcal{F}(\varphi_q(y_0), y_0) = q$, de forma que $\varphi_q(y_0)$ seja único em $(0, \mu_2)$. \square

Se $q > 0$, então existem funções ϕ_q e φ_q tais que

$$\mathcal{F}(\phi_q(y_0), y_0) = \mathcal{F}(\varphi_q(y_0), y_0) = q, \forall y_0 \in \mathcal{I}.$$

Pelo Teorema da Função Implícita para funções reais analíticas, temos que as funções ϕ_q e φ_q são analíticas em todo \mathcal{I} , uma vez que \mathcal{F} é analítica em \mathcal{I}^2 e

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1}(y_1, y_0) = \frac{y_1}{V(0, y_1)} \neq 0, \forall (y_1, y_0) \in \mathcal{I} \setminus \{0\} \times \mathcal{I}.$$

Mais ainda, as funções ϕ_q e φ_q satisfazem as seguintes desigualdades

$$y_0 \frac{d\phi_q}{dy_0}(y_0) = \frac{y_0^2 V(0, \phi_q(y_0))}{\phi_q(y_0) V(0, y_0)} > 0, \quad y_0 \frac{d\varphi_q}{dy_0}(y_0) = \frac{y_0^2 V(0, \varphi_q(y_0))}{\varphi_q(y_0) V(0, y_0)} < 0, \quad (3.19)$$

para todo $y_0 \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$. De fato, note que, como a função φ_q satisfaz

$$\mathcal{F}(\varphi_q(y_0), y_0) = q,$$

então, temos que, para todo $y_0 \in \mathcal{I}$,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1}(\varphi_q(y_0), y_0) \frac{d\varphi_q}{dy_0}(y_0) + \frac{\mathcal{F}}{\partial y_0}(\varphi_q(y_0), y_0) = 0.$$

Assim,

$$\frac{d\varphi_q}{dy_0}(y_0) = \frac{y_0 V(0, \varphi_q(y_0))}{\varphi_q(y_0) V(0, y_0)}.$$

Analogamente, prova-se que, para todo $y_0 \in \mathcal{I}$, temos que

$$\frac{d\phi_q}{dy_0}(y_0) = \frac{y_0 V(0, \phi_q(y_0))}{\phi_q(y_0) V(0, y_0)}.$$

Dessa forma, como φ_q é estritamente negativa, e $\varphi_q(y_0)\phi_q(y_0) < 0$, seguem as desigualdades.

Mais ainda, de (3.19), para todo $y_0 \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$, temos que

$$\text{sign}(y_0) = \text{sign}\left(\frac{d\phi_q}{dy_0}(y_0)\right),$$

e portanto, ϕ_q é estritamente crescente em $(0, \mu_2)$ e estritamente decrescente em $(\mu_1, 0)$. Assim, ϕ_q é unimodal com ponto de mínimo em $y_0 = 0$. De maneira análoga, temos que, para todo $y_0 \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$,

$$\text{sign}(y_0) = -\text{sign}\left(\frac{d\phi_q}{dy_0}(y_0)\right),$$

e dessa forma, φ_q é estritamente decrescente em $(0, \mu_2)$ e estritamente crescente em $(\mu_1, 0)$. Portanto, φ_q é unimodal com ponto de máximo em $y_0 = 0$.

Para $q < 0$, podemos construir o mesmo argumento substituindo y_1 por y_0 e assumindo que φ_q é estritamente positiva. Além disso, uma vez que

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = -\mathcal{F}(y_0, y_1),$$

temos que $\phi_q = \varphi_{-q}$ para todo $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por fim, pela divergência das integrais em (3.13), segue que as funções φ_q dadas em (3.15) são bijetivas. □

Observação 3.5. *Note que, na demonstração dos dois primeiros itens do Teorema 3.3, escrevemos y_1 em função de y_0 . Entretanto, de maneira análoga, poderíamos escrever y_0 em função de y_1 .*

Observação 3.6. *Os gráficos das funções restritas dadas em (3.15) estão contidas no quarto quadrante, uma vez que, para $q > 0$, a função φ_q é estritamente negativa e estritamente decrescente em $(0, \mu_2)$, e para $q < 0$, a função φ_q é estritamente positiva e estritamente decrescente em $(\mu_1, 0)$. Note que, o quarto quadrante $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0 < x\}$ é onde podemos definir o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré.*

Corolário 3.1. *Seja $q \in \mathbb{R}$. Então toda curva de nível de \mathcal{F} em \mathcal{I}^2 é uma órbita do seguinte sistema planar polinomial cúbico*

$$\begin{cases} \dot{x} = yV(0, x) \\ \dot{y} = xV(0, y). \end{cases} \quad (3.20)$$

Reciprocamente, se $a \neq 0$, toda órbita de (3.20) em \mathcal{I}^2 é uma curva de nível de \mathcal{F} . Se $a = 0$, isto é válido com exceção dos eixos coordenados, que são preenchidos por pontos de equilíbrio do sistema.

Demonstração. Para verificarmos a ida, note que, quaisquer funções φ_q e ϕ_q satisfazem a equação diferencial (3.14) e portanto, satisfazem o sistema de equações diferenciais do enunciado.

Por outro lado, seja γ uma órbita do sistema (3.20). Se $a \neq 0$, então, temos que

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(\gamma(t)) = d\mathcal{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

Assim, γ pertence a uma curva de nível de \mathcal{F} . Este argumento é análogo se considerarmos uma curva γ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. \square

A análise das curvas de nível da função do tipo índice \mathcal{F} nos levou a funções bijetivas φ_q restritas ao quarto quadrante. Para valores concretos de q , estas funções (se $q \geq 0$) ou suas inversas (se $q < 0$) definirão o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré como veremos na seção a seguir.

3.5 Mapas de Meio Retorno de Poincaré e o Tempo de Voo

Nesta seção, utilizaremos os resultados obtidos na seção anterior para provarmos um resultado recíproco ao Teorema (3.2), isto é, mostraremos que, para certos valores dos parâmetros, a relação integral

$$\text{PV} \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{V(0, y)} dy = cT$$

define o Mapa de Meio Retorno de Poincaré.

Lema 3.2 (Lema 18, [1]). *Considere o fator integrante inverso V dado em (3.6) e a função do tipo índice definida em (3.10). Suponha que valha a condição (3.5) e que o intervalo aberto \mathcal{I} definido em (3.11) é não vazio. Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $y_0, y_1 \in \mathcal{I}$ tais que $\mathcal{F}(y_1, y_0) = cT$. Então,*

$$\log \left(\frac{V(0, y_1)}{V(0, y_0)} \right) = T \left(2Dc + \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{V(0, y)} dy \right). \quad (3.21)$$

Mais ainda, se $D \neq 0$, a equação (3.21) equivale a

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = cT.$$

Demonstração. Suponha que $D \neq 0$. Então, pela condição (3.5), temos que $a \neq 0$ e portanto, segue que

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} \frac{a}{V(0, y)} dy &= \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{-aTy + a^2} dy \\ &= \int_{y_1}^{y_0} \frac{1}{a - Ty} dy \\ &= \frac{1}{T} (-\log(a - Ty_0) + \log(a - Ty_1)) \\ &= \frac{1}{T} \log \left(\frac{V(0, y_1)}{V(0, y_0)} \right), \end{aligned}$$

o que prova a equação (3.21).

Suponha agora que $Da \neq 0$. Então, na definição de \mathcal{F} , não precisamos mais considerar o Valor Principal de Cauchy, ie,

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{V(0, y)} dy.$$

Note que,

$$cT = \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{V(0, y)} dy = \frac{-1}{2D} \int_{y_1}^{y_0} \frac{2Dy - aT}{Dy^2 - aTy + a^2} dy + \frac{1}{2D} \int_{y_1}^{y_0} \frac{-aT}{Dy^2 - aTy + a^2}.$$

Isto implica que

$$2DcT + T \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{V(0, y)} dy = - \int_{y_1}^{y_0} \frac{2Dy - aT}{Dy^2 - aTy + a^2} dy.$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{y_1}^{y_0} \frac{2Dy - aT}{Dy^2 - aTy + a^2} dy = \log \left(\frac{V(0, y_0)}{V(0, y_1)} \right),$$

o que prova a equação (3.21).

Finalmente, se $a = 0$, então $D \neq 0$, e

$$2DcT = 2DPV \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{V(0, y)} dy = 2 \log \left| \frac{y_1}{y_0} \right| = \log \left(\frac{V(0, y_1)}{V(0, y_0)} \right),$$

concluindo a demonstração. \square

Observação 3.7. A equação (3.21), quando analisada junto à equação (2.8), nos sugere que o tempo de vôo esquerdo seja

$$\tau(y_0) = 2Dc + \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{V(0, y)} dy,$$

uma vez que, $\Psi(\tau(y_0), y_0) = (0, y_1)$, onde Ψ é o fluxo do campo (3.3).

Teorema 3.4 (Teorema 19, [1]). *Seja V o fator integrante inverso do sistema ((3.1)) dado em (3.6) e \mathcal{F} função do tipo índice definida em (3.10). Assuma que valha a condição (3.5) e que o intervalo \mathcal{I} , definido em (3.11), é não vazio. Sejam $c \in \mathbb{R}$, $y_0, y_1 \in \mathcal{I}$ tais que $y_0 \geq 0$ e $y_1 \leq 0$ com*

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = cT. \quad (3.22)$$

Suponha que valham uma das seguintes situações:

- i. $c = 0$ e $a > 0$,
- ii. $c = \frac{\pi}{D\sqrt{4D - T^2}} \in \mathbb{R}$ e $a = 0$,
- iii. $c = \frac{2\pi}{D\sqrt{4D - T^2}} \in \mathbb{R}$ e $a < 0$.

Então, y_1 é a imagem de y_0 pelo mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré em relação à seção $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Mais ainda, o tempo de vôo esquerdo correspondente é

$$\tau(y_0) = 2Dc + \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{V(0, y)} dy. \quad (3.23)$$

Demonstração. O resultado é válido para os casos em que $y_0 = y_1 = 0$ e $(0, 0)$ é uma tangência invisível ou equilíbrio do sistema ((3.1)), ie, $y_0 = y_1 = 0$ e $a \geq 0$. De fato, se $(0, 0)$ é uma tangência invisível e $y_0 = y_1 = 0$, segue que $\tau(y)$ tende a 0 quando y tende a 0 e portanto, $\tau(0) = 0$. Entretanto, quando a origem é um ponto de equilíbrio do sistema, como a existência do mapa de Poincaré implica que $4D - T^2 > 0$, em [8] provou-se que $\tau(y_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{4D - T^2}}$ para qualquer $y_0 > 0$ e portanto, naturalmente, podemos escolher $\tau(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{4D - T^2}}$.

Daqui em diante, suponha que existem $y_0, y_1 \in \mathcal{I}$ tais que $y_0 \geq 0$ e $y_1 \leq 0$ satisfazendo (3.22). Assuma que um dos itens i., ii. ou iii. valham. Defina

$$\tilde{\tau} = 2Dc + \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{V(0, y)} dy,$$

e seja $\Psi(t, y_0) = (\Psi_1(t, y_0), \Psi_2(t, y_0))$ o fluxo do campo L passando por $(0, y_0)$ em $t = 0$. Sob estas hipóteses, provaremos que o teorema estará demonstrado se provarmos as seguintes afirmações:

$$(C1) \quad \tilde{\tau} > 0.$$

$$(C2) \quad \Psi_1(t, y_0) < 0 \text{ para todo } t \in (0, \tau).$$

$$(C3) \quad \Psi(\tilde{\tau}, y_0) = (0, y_1).$$

Afirmção 3.4.1. $\tilde{\tau} > 0$.

Demonstração. Assuma que $c = 0$ e $a > 0$. Então, como $y_0, y_1 \in \mathcal{I}$, $V(0, y) > 0$ e portanto,

$$\tilde{\tau} = \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{V(0, y)} dy > 0,$$

pois $y_0 > y_1$.

Suponha agora que $c = \frac{\pi}{D\sqrt{4D - T^2}}$ e $a = 0$. Então,

$$\tilde{\tau} = 2D \frac{\pi}{D\sqrt{4D - T^2}} > 0.$$

Finalmente, se $c = \frac{2\pi}{D\sqrt{4D - T^2}} \in \mathbb{R}$ e $a < 0$, então

$$0 \leq \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{V(0, y)} dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{V(0, y)} dy = \frac{2\pi}{\sqrt{4D - T^2}} = Dc.$$

Assim

$$\tilde{\tau} = 2Dc + \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{V(0, y)} dy > Dc + \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{V(0, y)} dy \geq 0.$$

□

Daqui em diante, assumiremos que $T \neq 0$. Uma vez provado o teorema para este caso, poderemos estender, via continuidade das soluções das EDOs e das integrais, para o caso $T = 0$.

Afirmção 3.4.2. $\Psi_1(\tilde{\tau}, y_0) \geq 0$ e $\Psi_1(t, y_0) < 0$ para todo $t \in (0, \tilde{\tau})$.

Demonstração. Assuma que exista $\tau^* \in (0, \tilde{\tau}]$ tal que $\Psi_1(\tau^*, y_0) = 0$ e $\Psi_1(t, y_0) < 0$ para todo $t \in (0, \tau^*)$. Logo, temos que $y_1^* := P(y_0) \leq 0$, e pelo Teorema (3.2), temos que

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = cT,$$

para o valor de c correspondente às situações i), ii) e iii) do enunciado. Pelo Teorema (3.3), as funções φ_{cT} são bijetivas quando $y_0 \geq 0$ e $y_1 \leq 0$. Portanto, como $\mathcal{F}(y_1, y_0) = cT$ por hipótese, segue que, $y_1^* = y_1$.

Note que, pela expressão (2.8), sabemos que

$$V(0, y_1^*) = \exp(T\tau^*)V(0, y_0).$$

Por outro lado, pela equação (2.8), temos que

$$V(0, y_1) = \exp(T\tilde{\tau})V(0, y_0).$$

Como estamos assumindo que $T \neq 0$ e sabendo que $V(0, y_0) > 0$, temos que $\tilde{\tau} = \tau^*$, o que conclui a demonstração da Afirmção. \square

Afirmção 3.4.3. $\Psi(\tilde{\tau}, y_0) = (0, y_1)$.

Demonstração. Considere o campo ortogonal ao fluxo G , definido em (3.7). Sejam

- $\tilde{\Gamma}_1 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (y_1, y_0)\}$,
- $\tilde{\Gamma}_2 = \{\Psi(t, y_0) : t \in [0, \tilde{\tau})\}$.

Seja $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Psi(\tilde{\tau}, y_0)$. Mais uma vez, usando as expressões (2.8) e (3.21), temos que

$$V(\tilde{x}, \tilde{y}) = V(\Psi(\tilde{\tau}, y_0)) = \exp(T\tilde{\tau})V(0, y_0) = V(0, y_1).$$

Assim, (\tilde{x}, \tilde{y}) e $(0, y_1)$ pertence à mesma curva de nível de V tal que $V(\tilde{x}, \tilde{y}) = V(0, y_1) > 0$, pois $y_1 \in \mathcal{I}$. Logo, considere $\tilde{\Gamma}_3$ tal que a curva

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2 \cup \tilde{\Gamma}_3$$

satisfaça as seguintes propriedades (veja Figura 4):

1. Para o caso i. do enunciado, $\tilde{\Gamma}$ não contém nenhum equilíbrio em seu interior.

2. Para o caso ii. do enunciado, o equilíbrio do sistema pertence a $\tilde{\Gamma}_1$ (o que é satisfeito trivialmente, neste caso).
3. Para o caso iii. do enunciado, o equilíbrio do sistema pertence ao interior da curva $\tilde{\Gamma}$.

Como procedemos na demonstração do Teorema (3.2), sabemos que,

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = \oint_{\tilde{\Gamma}} G \cdot d\mathbf{r}.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{F}(y_1, y_0) = \text{PV} \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{V(0, y)} dy.$$

Assim, como G é ortogonal ao fluxo de L ,

$$\int_{\tilde{\Gamma}_2} G \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Portanto,

$$\int_{\tilde{\Gamma}_3} G \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Como $V|_{\tilde{\Gamma}_3}$ é constante, considere uma parametrização de $\tilde{\Gamma}_3$ dada por $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ para $s \in [s_0, s_1]$ de forma que

$$\mathbf{r}'(s) = \nabla V(x(s), y(s))^\perp, \quad \forall s \in [s_0, s_1].$$

Portanto,

$$0 = \int_{\tilde{\Gamma}_3} G \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_0}^{s_1} G(x(s), y(s)) \cdot \nabla V(x(s), y(s))^\perp ds = T(s_1 - s_0).$$

Como $T \neq 0$, segue que $s_0 = s_1$, e portanto, $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, y_1)$. Logo, $\Psi(\tilde{\tau}, y_0) = (0, y_1)$, o que prova a afirmação. \square

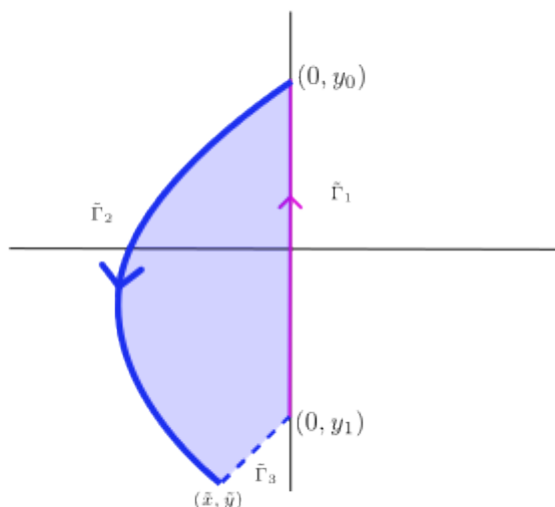
Assim, fica provado o teorema. \square

Uma conclusão imediata dos Teoremas 3.2 e 3.4 é o seguinte corolário:

Corolário 3.2 (Corolário 21, [1]). *Suponha que valha a condição (3.5) e que o intervalo $\mathcal{I} = (\mu_1, \mu_2)$ definido em (3.11) é não vazio. Sejam φ_q , para $q \in \mathbb{R}$, as funções dadas pelo Teorema (3.3). Assuma que $c \in \mathbb{R}$ satisfaça alguma das condições i., ii., iii. dadas no enunciado do Teorema (3.4).*

Então, se $T \geq 0$, o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré do sistema ((3.1)) relacionado à seção Σ é $\varphi_{cT} : [0, \mu_2) \rightarrow (\mu_1, \varphi_{cT}(0)]$.

Se $T < 0$, então o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré do sistema ((3.1)) relacionado à seção Σ é $\varphi_{cT}^{-1} : [\varphi_{cT}(0), \mu_2) \rightarrow (\mu_1, 0]$.

Figura 4 – Curva Γ no Teorema (3.4)

Outra conclusão que podemos obter do Teorema 3.4, juntamente com o Corolário 3.2 e com o Teorema 3.3, se relaciona à analiticidade do mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré.

Corolário 3.3 (Corolário 24, [1]). *Seja P o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré do sistema ((3.1)). Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $P(0) = 0$ então P é uma involução e, mais ainda, é analítica em seu domínio de definição.*
2. *Se $P(0) < 0$, então P é analítica em seu domínio de definição e P^{-1} é analítica no interior do seu domínio de definição.*
3. *Se $P^{-1}(0) > 0$, então P é analítica no interior de seu domínio de definição e P^{-1} é analítica em seu domínio de definição.*

Observação 3.8. *O Teorema 3.4 e os Corolários 3.2 e 3.3 podem se estendidos para o Mapa Direito de Meio Retorno de Poincaré.*

Os resultados obtidos neste capítulo serão amplamente utilizados nos capítulos a seguir. Para isto, consideraremos uma única notação e estruturaremos os resultados que dizem respeito à caracterização integral dos mapas de Poincaré e o comportamento destes em um único teorema.

Teorema 3.5 (Teorema 1, [9]). *Considere o sistema ((3.1)) e defina o polinômio*

$$W(y) = Dy^2 - aTy + a^2.$$

O mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré, y_L , está bem definido se, e somente se, $a \geq 0$ e $4D - T^2 > 0$ ou $a < 0$. Neste caso, seu intervalo de definição $I_L = (\mu_1^L, \mu_2^L) \subset [0, +\infty)$ é não vazio e seguem as seguintes afirmações:

- (a) *O limite direito, μ_2^L , do intervalo I_L é a menor raiz positiva do polinômio W , se existir. Caso contrário, $\mu_2^L = +\infty$.*
- (b) *O limite esquerdo, μ_1^L , do intervalo I_L é estritamente positivo se, e somente se, $a < 0$, $4D - T^2 > 0$ e $T < 0$. Neste caso, $y_L(\mu_1^L) = 0$.*
- (c) *O limite esquerdo do intervalo $y_L(I_L)$ é a maior raiz estritamente negativa do polinômio W , se existir. Caso contrário, este limite esquerdo é igual a $-\infty$.*
- (d) *O limite direito do intervalo $y_L(I_L)$, isto é, $y_L(\mu_1^L)$, é estritamente negativo, se e somente se, $a < 0$ e $4D - T^2 > 0$ e $T > 0$. Neste caso, $\mu_1^L = 0$.*
- (e) *O polinômio W satisfaz $W(y) > 0$ para todo $y \in \text{ch}(I_L \cup y_L(I_L))$, onde $\text{ch}(\cdot)$ é o fecho convexo de um conjunto.*
- (f) *O mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré y_L é a única função $y_L : I_L \subset [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$ que satisfaz, para $y_0 \in I_L$,*

$$PV \int_{y_L(y_0)}^{y_0} \frac{-y}{W(y)} dy = q_L(a, T, D),$$

onde

$$q_L(a, T, D) = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 0, \\ \frac{\pi T}{D\sqrt{4D - T^2}} & \text{se } a = 0, \\ \frac{2\pi T}{D\sqrt{4D - T^2}} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

- (g) *O gráfico do mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré, orientado no sentido em que y_0 cresce, é a porção incluída no quarto quadrante de \mathbb{R}^2 de uma órbita particular do campo vetorial cúbico*

$$X(y_0, y_1) = -(y_1W(y_0), y_0W(y_1)).$$

Equivalentemente, o mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré é uma solução da equação diferencial

$$y_1W(y_0)dy_1 - y_0W(y_1)dy_0 = 0.$$

- (h) *O mapa esquerdo de meio retorno de Poincaré é analítico em $\text{int}(I_L)$. Mais ainda, y_L é analítico em I_L se, e somente se, $\mu_1^L = 0$.*

4 Uma nova demonstração para a Conjectura de Lum-Chua

4.1 Introdução

O estudo de ciclos limites em sistemas de equações diferenciais lineares por partes remontam desde 1937, com os estudos de Andronov et al [10]. Desde então, estes sistemas tem recebido muita atenção da comunidade científica principalmente por conta das diversas aplicações nas ciências.

O seguinte sistema de equações diferenciais lineares por partes com duas zonas separadas por uma reta é a configuração mais simples possível para este tipo de sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_L \mathbf{x} + \mathbf{b} & \text{se } x_1 \leq 0, \\ A_R \mathbf{x} + \mathbf{b} & \text{se } x_1 \geq 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $A_L = (a_{ij}^L)_{2 \times 2}$, $A_R = (a_{ij}^R)_{2 \times 2}$, com $a_{12}^L = a_{12}^R = a_{12}$ e $a_{22}^L = a_{22}^R = a_{22}$, e $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T \in \mathbb{R}^2$.

Um ciclo limite, no contexto de sistemas planares (de equações) diferenciais lineares por partes, é uma órbita fechada não trivial isolada. Em 1991, após experimentos computacionais, Lum e Chua [11] conjecturaram o seguinte:

Conjectura 1 (Conjectura de Lum-Chua). Um sistema planar diferencial linear por partes e contínuo com duas zonas separados por uma reta tem no máximo um ciclo limite. Caso exista um ciclo limite, este deve ser atrator ou repulsor.

Apesar deste resultado ja ter sido demonstrado por Freire et al [8] em 1998, sua demonstração foi dividida em vários estudos caso-a-caso que dependiam de cada uma das configurações dadas pelos autovalores das matrizes A_R e A_L , além de lidar com o tempo de vôo como uma nova variável implícita. Mais adiante, em 2013, Libre et al [12] utilizando a aproximação de Massera [13], provou um caso particular da Conjectura 1, quando $\det(A_L) > 0$ e $\det(A_R) \geq 0$.

Neste capítulo, discutiremos uma nova (e simples) demonstração para a Conjectura 1 demonstrada em [2]. Esta demonstração utiliza as ferramentas provenientes da caracterização integral do mapa de meio retorno de Poincaré estudadas no Capítulo 3, evitando estudos caso-a-caso e sem ter de lidar com o tempo de vôo como uma nova variável implícita. Além disso, em [2], provou-se que, caso o ciclo limite exista, é hiperbólico e, conseqüentemente, ou atrator ou repulsor. Mais ainda, conseguiu-se uma simples condição para determinar a estabilidade do ciclo limite.

Dessa forma, o objetivo principal deste capítulo é provar o seguinte teorema:

Teorema 4.1 (Teorema 1, [2]). *O sistema (4.1) tem no máximo um ciclo limite, que é hiperbólico, se existir. Além disso, nesse caso, $(a_{12}b_2 - a_{22}b_1) \operatorname{Tr}(A_L) \neq 0$ e o ciclo limite é atrator (resp. repulsor) se $(a_{12}b_2 - a_{22}b_1) \operatorname{Tr}(A_L) < 0$ (resp. $(a_{12}b_2 - a_{22}b_1) \operatorname{Tr}(A_L) > 0$), onde Tr é o traço da matriz.*

4.2 Forma canônica de Liénard e mapas de meio retorno de Poincaré

Como observamos no Capítulo 2, a condição $a_{12} \neq 0$ é necessária para garantir a existência de soluções periódicas do sistema (4.1). Consideraremos aqui, como feito no Teorema 2.1 do Capítulo 2, a mudança de coordenadas $(x, y) = (x_1, a_{22}x_1 - a_{12}x_2 - b_1)$, transformando o sistema (4.1) no seguinte sistema na forma de Liénard (também discutida em 2):

$$(S_L) \begin{cases} \dot{x} = T_L x - y, \\ \dot{y} = D_L x - a \end{cases} \quad \text{para } x < 0, \quad (S_R) \begin{cases} \dot{x} = T_R x - y, \\ \dot{y} = D_R x - a \end{cases} \quad \text{para } x \geq 0, \quad (4.2)$$

onde $T_L = \operatorname{Tr}(A_L)$, $T_R = \operatorname{Tr}(A_R)$, $D_R = \det(A_R)$, $D_L = \det(A_L)$, e $a = a_{12}b_2 - a_{22}b_1$. Além disso, como discutimos em 3, qualquer ciclo limite do sistema (4.2) está orientado positivamente (no sentido anti-horário) e cruza o conjunto $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ duas vezes.

Além disso, consideraremos a caracterização integral dos mapas de meio retorno de Poincaré que foram estudados no Capítulo 3. Ou seja, considere o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = Tx - y, \\ \dot{y} = Dx - a, \end{cases} \quad (4.3)$$

e considere o conjunto $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Como vimos no Capítulo 3, o mapa de meio retorno de Poincaré *para frente* y_F do sistema (4.3) associado à seção Σ leva um valor $y_0 \in [0, +\infty)$ a um valor $y_1 \in (-\infty, 0]$, onde y_1 é o primeiro retorno a Σ da trajetória futura iniciando em $(0, y_0)$. Analogamente, definimos o mapa de meio retorno de Poincaré *para trás* y_B .

Como provamos no Capítulo 3, os gráficos dos mapas de meio retorno de Poincaré são órbitas do campo vetorial cúbico

$$X(y_0, y_1) = -(y_1(Dy_0^2 - aTy_0 + a^2), y_0(Dy_1^2 - aTy_1 + a^2)), \quad (4.4)$$

que mantém a mesma orientação à medida que $y_0 > 0$ cresce. Mais ainda, provamos no Capítulo 3 que a existência do mapa de meio retorno de Poincaré para frente (resp. para

trás) para qualquer valor de y_0 implica que a função $W(y) = Dy^2 - aTy + a^2$ é estritamente positiva no intervalo $[y_F(y_0), y_0]$ (resp. $[y_B(y_0), y_0]$). Em particular, no domínio dos mapas de meio retorno, a função W é estritamente positiva.

4.3 Demonstração do Teorema 4.1

Como os sistemas (S_R) e (S_L) são lineares, os ciclos limites de (4.2) não podem estar completamente contidos nos semiplanos fechados $\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ e $\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$.

Dessa forma, seja Γ uma curva de Jordan em \mathbb{R}^2 . Considere as seguintes definições:

- $\text{int}_L(\Gamma) := \text{int}(\Gamma) \cap \{x < 0\}$,
- $\text{int}_R(\Gamma) := \text{int}(\Gamma) \cap \{x > 0\}$,
- $A\Gamma_L := \text{area}(\text{int}_L(\Gamma))$,
- $A\Gamma_R := \text{area}(\text{int}_R(\Gamma))$.

Proposição 4.1 (Proposição 6, [8]). *Se o sistema (4.2) possui uma curva fechada invariante Γ , então*

$$\int \int_{\text{int}_L(\Gamma)} T_L dx dy + \int \int_{\text{int}_R(\Gamma)} T_R dx dy = T_L A\Gamma_L + T_R A\Gamma_R = 0.$$

Demonstração. Considere a 1-forma $X_1 dy - X_2 dx$, onde

$$X_1(x, y) = \begin{cases} T_L x - y & x < 0 \\ T_R x - y & x > 0, \end{cases} \quad X_2(x, y) = \begin{cases} D_L x - a & x < 0 \\ D_R x - a & x > 0 \end{cases}$$

e seja Γ uma órbita periódica de (4.2). Então, esta 1-forma calculada em Γ é

$$X_1 dy - X_2 dx = 0,$$

pois Γ é solução.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int \int_{\text{int}(\Gamma)} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} \right) dx dy &= \int \int_{\text{int}(\Gamma)} \frac{\partial X_1}{\partial x} dx dy + \int \int_{\text{int}(\Gamma)} \frac{\partial X_2}{\partial y} dx dy \\ &= \int \int_{\text{int}_L(\Gamma)} T_L dx dy + \int \int_{\text{int}_R(\Gamma)} T_R dx dy \\ &= T_L A\Gamma_L + T_R A\Gamma_R. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Green, $T_L A\Gamma_L + T_R A\Gamma_R = 0$. □

Observação 4.1. Note que, para que o sistema (4.1) tenha um ciclo limite, é necessário que $a_{12} \neq 0$ (veja o Teorema (2.1)).

Proposição 4.2 (Proposição 7, [8]). Se Γ é um ciclo limite de (4.2), então $\Gamma \cap \Sigma^+ \neq \emptyset$ e $\Gamma \cap \Sigma^- \neq \emptyset$. Além disso, $T_R T_L < 0$.

Demonstração. Se $T_L T_R > 0$, pela Proposição 4.1, o sistema (4.2) não admite soluções periódicas. Então, $T_L T_R \leq 0$.

Como observamos no início da Seção 4.3, seja Γ é um ciclo limite então temos que $\Gamma \cap \Sigma^+ \neq \emptyset$ e $\Gamma \cap \Sigma^- \neq \emptyset$. Se $T_L T_R = 0$, então, da Proposição 4.1, segue que $T_L = T_R = 0$.

Neste caso, considere \mathcal{F}_L e \mathcal{F}_R as funções do tipo índice utilizadas na caracterização integral do mapa de meio retorno de Poincaré, discutida no Capítulo 3. Dessa forma, segue que

$$\mathcal{F}_L(y_0, y_1) = cT_L = 0 \implies \text{PV} \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 + a^2} dy = 0. \quad (4.5)$$

Note que, a função

$$h_L(y) = \frac{-y}{D_L y^2 + a^2} \quad (4.6)$$

é ímpar. Portanto, como $y_0 y_1 \leq 0$ (veja as considerações sobre a direção do fluxo do sistema (4.3) no Capítulo 2), segue de (4.5) que $y_1 = -y_0$. Este resultado segue de forma análoga para \mathcal{F}_R .

Dessa forma, se $T_L T_R = 0$, as trajetórias periódicas formam um anel de órbitas periódicas. Logo, o sistema (4.2) não admite ciclo limite.

Portanto, se Γ é um ciclo limite de (4.2), segue que $T_L T_R < 0$. \square

Observação 4.2. Note que, se $a = 0$, não há ciclos limite. De fato, neste caso, o sistema (4.2) será linear e homogêneo. Desta forma, dada uma órbita periódica, poderemos construir um anel de órbitas periódicas que a contém. Logo, quando $a = 0$, não há órbitas periódicas isoladas.

A partir de agora, consideraremos $a \neq 0$ e $T_L T_R < 0$.

Sejam y_L , o mapa de meio retorno de Poincaré para frente do campo vetorial linear de (S_L) e y_R , o mapa de meio retorno de Poincaré para trás do campo vetorial associado ao sistema (S_R) , como definidos na Seção (4.2), e sejam I_L e I_R seus respectivos intervalos de definição.

Note que, se $I_R \cap I_L = \emptyset$, o sistema (4.2) não admite órbitas periódicas. Assuma então que $I_R \cap I_L \neq \emptyset$.

Definição 4.1. Seja $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$, para $I := I_R \cap I_L$, dada por

$$\delta(y_0) = y_R(y_0) - y_L(y_0).$$

Esta função é chamada de **displacement map**.

Proposição 4.3. Seja $y_0^* \in I$. Então, $\delta(y_0^*) = 0$ se, e somente se, existe órbita periódica passando por $(0, y_0^*)$ e $(0, y_1^*)$, onde $y_1^* = y_R(y_0^*) = y_L(y_0^*)$. Neste caso, se esta órbita periódica for um ciclo limite, então, $y_0^* > 0$ e $y_1^* < 0$.

Demonstração. A volta segue diretamente da Definição (4.1). Seja $y_0^* \in I$ tal que $\delta(y_0^*) = 0$. Então, segue que, $y_L(y_0^*) = y_R(y_0^*)$. Seja $y_1^* = y_L(y_0^*) = y_R(y_0^*)$.

Sejam ψ_R e ψ_L as soluções dos sistemas em (4.2). Então, como $y_L(y_0^*) = y_1^*$, temos que, existe $\tau_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \psi_L(\tau_1; (0, y_0^*)) &= (0, y_1^*), \\ \pi_1 \circ \psi_L(t; (0, y_0^*)) &< 0, \forall t \in (0, \tau_1). \end{aligned}$$

Analogamente, como $y_R(y_0^*) = y_1$, temos que, existe $\tau_2 < 0$ tal que

$$\begin{aligned} \psi_L(\tau_2; (0, y_1^*)) &= (0, y_0^*), \\ \pi_1 \circ \psi_L(t; (0, y_1^*)) &> 0, \forall t \in (\tau_2, 0). \end{aligned}$$

Dessa forma, considerando Ψ como sendo a concatenação das órbitas ψ_R e ψ_L , segue que Ψ é uma órbita periódica de (4.2) passando por $(0, y_0^*)$ e $(0, y_1^*)$.

Note que, como a origem é um ponto de tangência a Σ , não se pode ter que uma órbita periódica passando por $(0, 0)$ esteja nas duas zonas (Σ^+ e Σ^-), cruzando Σ exatamente duas vezes. Logo, nenhuma órbita periódica passando pela origem pode ser um ciclo limite do sistema (4.2). \square

Proposição 4.4. Se existe um ciclo limite passando por $(0, y_0)$, então, este será hiperbólico se, e somente se, $\delta'(y_0^*) \neq 0$. Neste caso, o ciclo limite será atrator (resp. repulsor) se $\delta'(y_0^*) < 0$ (resp. $\delta'(y_0^*) > 0$).

Demonstração. Seja π o mapa de Poincaré do sistema (4.2) associado à variedade Σ . Neste caso, temos que

$$\pi \circ y_R = y_L,$$

onde y_R e y_L são os mapas de meio retorno de Poincaré, definidos anteriormente. Note que,

$$(\pi' \circ y_R)y_R' = y_L'.$$

Sendo assim, como $\delta(y) = y_R(y) - y_L(y)$, para $y \in I$, segue que

$$\delta'(y) = (1 - \pi'(y))y'_R(y). \quad (4.7)$$

Note que, se o ciclo limite passando por $(0, y_0^*)$ é não hiperbólico, então $\pi'(y_0) = 1$. Dessa forma, de (4.7), segue que $\delta'(y_0^*) = 0$. Portanto, se $\delta'(y_0^*) \neq 0$, o ciclo limite passando por $(0, y_0^*)$ é hiperbólico.

Para provarmos a recíproca, note que, se o ciclo limite passando por $(0, y_0^*)$ é hiperbólico, então, podemos supor, sem perda de generalidade, que é atrator, ie, $0 < \pi'(y_0^*) < 1$. Logo, temos que y_R será decrescente numa vizinhança de y_0^* . Portanto, segue que $y'_R(y_0^*) < 0$. Assim, de (4.7), segue que $\delta'(y_0^*) < 0$. É análogo para o caso em que o ciclo limite passando por $(0, y_0^*)$ é repulsor. \square

Seja $y_0^* \in I$, $y_0^* > 0$ tal que $\delta(y_0^*) = 0$ e $y_1^* = y_R(y_0^*) = y_L(y_0^*) < 0$, ou seja, suponha que existe órbita periódica do sistema (4.2) passando por $(0, y_0^*)$ e $(0, y_1^*)$ que cruza transversalmente Σ .

Considere \mathcal{F}_L e \mathcal{F}_R as funções do tipo índice associadas aos sistemas (S_L) e (S_R) , respectivamente, como vimos no Capítulo 3. Supriremos os subíndices para enunciarmos uma propriedade geral dessas funções, proveniente do Teorema (3.5). Note que, por este resultado, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{F}(y_J(y_0^*), y_0^*) = cT, \quad (4.8)$$

onde T é o traço da matriz associada ao sistema e y_J é o mapa de meio retorno para frente ou para trás.

Isso implica que,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1}(y_J(y_0^*), y_0^*) \frac{dy_L}{dy_0}(y_0^*) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_0}(y_J(y_0^*), y_0^*) = 0. \quad (4.9)$$

Como temos que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1}(y_J(y_0^*), y_0^*) = \frac{y_1^*}{V(0, y_1^*)}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_0}(y_J(y_0^*), y_0^*) = \frac{-y_0^*}{V(0, y_0^*)},$$

onde V é o fator integrante inverso do campo vetorial linear associado ao sistema (veja os Capítulos 2 e 3), segue que

$$\frac{dy_J}{dy_0}(y_0^*) = \frac{y_0^* W(y_1^*)}{y_1^* W(y_0^*)}. \quad (4.10)$$

Denote $W_L(y) = V_L(0, y)$ e $W_R(y) = V_R(0, y)$ onde V_L e V_R são os fatores integrantes inversos associados aos sistemas (S_L) e (S_R) , respectivamente. Então, de (4.10), segue que

$$\frac{dy_L}{dy_0}(y_0^*) = \frac{y_0^* W_L(y_1^*)}{y_1^* W_L(y_0^*)}, \quad (4.11)$$

e,

$$\frac{dy_R}{dy_0}(y_0^*) = \frac{y_0^* W_R(y_1^*)}{y_1^* W_R(y_0^*)}. \quad (4.12)$$

Note que, do Capítulo 3, temos que se $y \in I$, então $V_L(0, y) > 0$. Logo, segue que $W_L(y) > 0, \forall y \in I$.

Como $\delta(y_0^*) = y_R(y_0^*) - y_L(y_0^*)$, segue que

$$\begin{aligned} \delta'(y_0^*) &= \frac{y_0^* W_R(y_1^*)}{y_1^* W_R(y_0^*)} - \frac{y_0^* W_L(y_1^*)}{y_1^* W_L(y_0^*)} \\ &= C(y_0^*, y_1^*) F(y_0^*, y_1^*), \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde

$$C(y_0, y_1) = \frac{-y_0(y_0 - y_1)}{y_1 W_R(y_0) W_L(y_0)}, \quad (4.14)$$

$$F(y_0, y_1) = \frac{W_L(y_1) W_R(y_0) - W_L(y_0) W_R(y_1)}{y_0 - y_1}. \quad (4.15)$$

Como $W_L(y_0^*) > 0$ e $W_R(y_0^*) > 0$, então de (4.13), temos que $\text{sign}(\delta'(y_0^*))$ depende de $\text{sign}(F(y_0^*, y_1^*))$.

Fazendo as devidas substituições, temos que

$$F(y_0, y_1) = a^3(T_L - T_R) + a(D_L T_R - D_R T_L) y_0 y_1 + a^2(D_R - D_L)(y_0 + y_1), \quad (4.16)$$

que é uma função quadrática. Defina

$$\gamma = \{(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2 : F(y_0, y_1) = 0\}. \quad (4.17)$$

Então, γ descreve uma hipérbole, possivelmente degenerada. Seja

$$Q = \{(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq 0 \leq y_0\}. \quad (4.18)$$

Proposição 4.5. γ divide o conjunto $Q \setminus \gamma$ em dois conjuntos conexos disjuntos R_+ e R_- , onde

$$R_{\pm} = \{(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2 : \text{sign}(F(y_0, y_1)) = \pm \text{sign}(aT_L)\}. \quad (4.19)$$

Demonstração. Para encontrarmos as assíntotas de γ , basta definirmos y_1 em função de y_0 e vice-versa. Isto é, y_1 pode ser definido em função de y_0 como sendo

$$y_1 = \frac{a(aT_L - aT_R - D_L y_0 + D_R y_0)}{aD_L - aD_R + D_R T_L y_0 - D_L T_R y_0}.$$

De maneira análoga, definimos

$$y_0 = \frac{a(aT_L - aT_R - D_L y_1 + D_R y_1)}{aD_L - aD_R + D_R T_L y_1 - D_L T_R y_1}.$$

Com isto, as assíntotas de γ são descritas pelas retas

$$y_0 = \frac{aD_L - aD_R}{-D_R T_L + D_L T_R}$$

e

$$y_1 = \frac{aD_L - aD_R}{-D_RT_L + D_LT_R}.$$

Assim, o centro da hipérbole dada por γ é

$$(y_0^c, y_1^c) = \left(\frac{aD_L - aD_R}{-D_RT_L + D_LT_R}, \frac{aD_L - aD_R}{-D_RT_L + D_LT_R} \right).$$

Ou seja, o centro da hipérbole descrita por γ se encontra sob a reta

$$\{(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2 : y_0 = y_1\}$$

. Portanto, (y_0^c, y_1^c) ou está na origem, ou no primeiro ou no terceiro quadrante de \mathbb{R}^2 . Com isto, temos que γ divide o conjunto $Q \setminus \gamma$ em dois subconjuntos conexos

$$Q \setminus \gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-,$$

onde

$$\gamma^\pm = \{(y_0, y_1) \in Q : \text{sign}(F(y_0, y_1)) = \pm 1\}.$$

Note que, $R_+ \neq \emptyset$. De fato, uma vez que $F(0, 0) = a^3(T_L - T_R)$ e $T_L T_R < 0$, segue que $\text{sign}(F(0, 0)) = \text{sign}(aT_L)$. Isso ocorre pois,

$$F(0, 0) \cdot T_L = a^3 T_L (T_L - T_R) \tag{4.20}$$

$$= a^3 (T_L^2 - T_R T_L). \tag{4.21}$$

Como $(T_L^2 - T_R T_L) \geq 0$, temos que $\text{sign}(F(0, 0)) = \text{sign}(aT_L)$. Portanto, $(0, 0) \in R_+$.

Assim, como $F(0, 0) \neq 0$, então, $(0, 0) \in R_+ \cup R_-$. Daqui em diante, assumiremos que $(0, 0) \in \gamma^+$ (o caso $(0, 0) \in \gamma^-$ é análogo). Então $\text{sign}(F(0, 0)) = 1$, e portanto, $\text{sign}(aT_L) = \text{sign}(F(0, 0)) = 1$. Logo, se $(y_0, y_1) \in \gamma^+$, $\text{sign}(F(y_0, y_1)) = \text{sign}(F(0, 0)) = \text{sign}(aT_L)$, e portanto $(y_0, y_1) \in R_+$. De maneira análoga, se $(y_0, y_1) \in R_+$, então $\text{sign}(F(y_0, y_1)) = \text{sign}(aT_L) = \text{sign}(F(0, 0)) = 1$, o que implica que $(y_0, y_1) \in \gamma^+$. Dessa forma, $\gamma^+ = R_+$.

Mais ainda, se $(y_0, y_1) \in \gamma^-$, então $\text{sign}(F(y_0, y_1)) = -\text{sign}(F(0, 0)) = -\text{sign}(aT_L)$, ou seja, $(y_0, y_1) \in R_-$. Por outro lado, se $(y_0, y_1) \in R_-$, então $\text{sign}(F(y_0, y_1)) = -\text{sign}(aT_L) = -\text{sign}(F(0, 0))$. Portanto, $(y_0, y_1) \in \gamma^-$. Portanto, $\gamma^- = R_-$, o que prova o resultado. \square

A seguir, iremos mostrar que $(y_0^*, y_1^*) \in R_+$.

Proposição 4.6. $(y_0^*, y_1^*) \in R_+$.

Demonstração. Se $R_- = \emptyset$, então, $(y_0^*, y_1^*) \in R_+$ e o resultado segue. Suponha que $R_- \neq \emptyset$. Para $J \in \{L, R\}$, considere as curvas $\gamma_J : I_J \rightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por

$$\gamma_J(y) = (y, y_J(y)). \tag{4.22}$$

Note que, as suas imagens estão contidas em Q . Além disso, como a órbita passando por $(0, y_0^*)$ e $(0, y_1^*)$ é periódica, segue que, (y_0^*, y_1^*) são pontos das curvas γ_L e γ_R .

Como vimos no Capítulo (3), γ_R e γ_L são órbitas dos seguintes campos vetoriais cúbicos, respectivamente,

$$X_L(y_0, y_1) = -(y_1 W_L(y_0), y_0 W_L(y_1)), \quad (4.23)$$

$$X_R(y_0, y_1) = -(y_1 W_R(y_0), y_0 W_R(y_1)). \quad (4.24)$$

Considere, a partir de agora, que as curvas γ_L e γ_R estão munidas da orientação dada por cada campo vetorial correspondente.

Vamos estudar estes campos vetoriais sob a curva $\gamma = F^{-1}(\{0\})$ para $(y_0, y_1) \in \text{int}(Q)$.

Se $(y_0, y_1) \in \text{int}(Q)$, então $y_0 - y_1 \neq 0$. Dessa forma,

$$F(y_0, y_1) = \frac{W_L(y_1)W_R(y_0) - W_L(y_0)W_R(y_1)}{y_0 - y_1} = 0 \quad (4.25)$$

$$\iff W_L(y_1)W_R(y_0) = W_L(y_0)W_R(y_1). \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em $\langle \nabla F(y_0, y_1), X_L(y_0, y_1) \rangle$ e em $\langle \nabla F(y_0, y_1), X_R(y_0, y_1) \rangle$, usando a expressão (4.16), segue que

$$\begin{aligned} G_L(y_0, y_1) &= \langle \nabla F(y_0, y_1), X_L(y_0, y_1) \rangle \Big|_{(y_0, y_1) \in \gamma} \\ &= W_L(y_1)a(T_L W_R(y_0) - T_R W_L(y_0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_R(y_0, y_1) &= \langle \nabla F(y_0, y_1), X_R(y_0, y_1) \rangle \Big|_{(y_0, y_1) \in \gamma} \\ &= W_R(y_1)a(T_L W_R(y_0) - T_R W_L(y_0)), \end{aligned}$$

respectivamente. Como $T_L T_R < 0$, concluímos que

$$\text{sign}(G_L(y_0, y_1)) = \text{sign}(G_R(y_0, y_1)) = \text{sign}(aT_L), \forall (y_0, y_1) \in \gamma. \quad (4.27)$$

De fato, isso segue do fato de que

$$G_L(y_0, y_1)T_L = W_L(y_1)a(T_L^2 W_R(y_0) - T_L T_R W_L(y_0)). \quad (4.28)$$

Uma vez que, para $i \in \{0, 1\}$, $W_L(y_i) > 0$, $W_R(y_0) > 0$ e $T_L T_R < 0$, então, $\text{sign}(G_L) = \text{sign}(aT_L)$. Este argumento é análogo para G_R .

Afirmção 4.1.1. Cada curva γ_L e γ_R intercepta γ no máximo uma vez em $\text{int}(Q)$, e se esta intersecção existir, ela deve cruzar γ de R_- para R_+ .

Demonstração. De fato, defina $\alpha_L(y_0) := F(\gamma_L(y_0))$ e $\alpha_R(y_0) := F(\gamma_R(y_0))$. Então, se y_0 é tal que $\gamma_L(y_0) \in \gamma$, segue que

$$\alpha'_L(y_0) = G(\gamma_L(y_0)) = \langle \nabla F(y_0, y_1), X_L(y_0, y_1) \rangle. \quad (4.29)$$

Isso implica que, $\text{sign}(\alpha'_L(y_0)) = \text{sign}(aT_L)$. Analogamente, prova-se que,

$$\text{sign}(\alpha'_R(y_0)) = \text{sign}(aT_L).$$

Se $aT_L > 0$, então α_L é crescente, e portanto, como, para $p \in R_-$ e $q \in R_+$ quaisquer, temos que $F(p) < F(q)$, então, γ_L vai de R_- para R_+ . Da mesma forma, se $aT_L < 0$, então α_L é decrescente, e portanto, como, para $p \in R_-$ e $q \in R_+$ quaisquer, temos que $F(p) > F(q)$, então, γ_L vai de R_- para R_+ . Analogamente, prova-se que γ_R vai de R_- para R_+ . \square

Afirmção 4.1.2. A origem é um ponto de tangência quadrática para o sistema (4.2).

Demonstração. Sejam

$$\begin{cases} Z_L(x, y) = (T_Lx - y, D_Lx - a), \\ Z_R(x, y) = (T_Rx - y, D_Rx - a), \end{cases} \quad (4.30)$$

os campos lineares do sistema (4.2) e $h(x, y) = x$. Note que $\Sigma = h^{-1}(\{0\})$. Defina $Z_Lh = Z_L \cdot \nabla h$ e $Z_L^2h = Z_L \cdot \nabla Z_Lh$. De forma análoga, podemos definir Z_Rh e Z_R^2h . Então,

$$Z_Lh = T_Lx - y \implies Z_Lh(0, 0) = 0. \quad (4.31)$$

Mais ainda, como $a \neq 0$, segue que

$$Z_L^2h(x, y) = T_L(T_Lx - y) - (D_Lx - a) \implies Z_L^2h(0, 0) = a \neq 0. \quad (4.32)$$

De maneira análoga, prova-se que $Z_Rh(0, 0) = 0$ e $Z_R^2h(0, 0) \neq 0$. Dessa forma, segue que a origem é um ponto de tangência quadrática do sistema (4.2). \square

Logo, como observamos no Capítulo 3, pelo menos um mapa de meio retorno de Poincaré pode ser definido para $y_0 > 0$ e pode ser continuamente estendido para $y_0 = 0$, com imagem $y_1 = 0$. Conseqüentemente, o gráfico deste mapa de meio retorno de Poincaré contém a origem. Como $(0, 0) \in R_+$, então este gráfico não pode interceptar γ .

De fato, sem perda de generalidade, suponha que $(0, 0) \in \gamma_L$. Então, para qualquer $y_0 > 0$ em I , segue que, $(y_0, \gamma_L(y_0)) \notin R_-$. Caso contrário, pelo Teorema do Valor Intermediário, existiria $(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1) \in \gamma \cap \gamma_L$ tal que

$$\text{sign}(G_L(y_0, y_1)) = -\text{sign}(aT_L),$$

o que contradiz a Afirmação 4.1.2.

Logo, como o ponto $(y_0^*, y_1^*) \in \text{int}(Q)$ pertence à mesma curva γ_J que a origem (pois $(y_0^*, y_1^*) \in \gamma_L \cap \gamma_R$), então segue que $(y_0^*, y_1^*) \in R_+$, ou seja, $F(y_0^*, y_1^*) \neq 0$ e $\text{sign}(F(y_0^*, y_1^*)) = \text{sign}(aT_L)$. \square

Proposição 4.7. *A órbita periódica passando por $(0, y_0^*)$ e $(0, y_1^*)$ é um ciclo limite hiperbólico cuja estabilidade depende de $\text{sign}(aT_L) \neq 0$, isto é, se $\text{sign}(aT_L) > 0$, então é ciclo limite repulsor e se $\text{sign}(aT_L) < 0$, é ciclo limite atrator.*

Demonstração. Da Proposição (4.6), segue que $(y_0^*, y_1^*) \in R_+$. Pela Proposição (4.7) e da Observação (4.2), segue que

$$\text{sign } \delta'(y_0^*) = \text{sign } F(y_0^*, y_1^*) = \text{sign}(aT_L) \neq 0. \quad (4.33)$$

Dessa forma, esta órbita periódica é um ciclo limite. Mais ainda, este ciclo limite é único.

De fato, se existissem duas órbitas periódicas isoladas cruzando Σ transversalmente, a saber, uma passando por $(0, y_0^*)$ e $(0, y_1^*)$ e a outra, $(0, y_0^{**})$ e $(0, y_1^{**})$, então, pelo resultado que acabamos de provar, estes ciclos limites seriam hiperbólicos com o mesmo tipo de estabilidade. Isso implicaria na existência de um terceiro ciclo, passando por $(0, \tilde{y}_0)$ e $(0, \tilde{y}_1)$, com estabilidade oposta. Neste caso, teríamos que $F(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1) = -\text{sign}(aT_L)$, o que contradiz (4.33). Logo, segue que, o ciclo limite hiperbólico passando por $(0, y_0^*)$ é único. \square

Assim, fica provado o Teorema (4.1).

5 Cota uniforme para o número de ciclos limites de sistemas diferenciais lineares planares com duas zonas separados por uma reta

5.1 Introdução

A segunda parte do 16º desafio de Hilbert aborda equações diferenciais polinomiais no plano. De maneira sucinta, a segunda parte do 16º problema de Hilbert pode ser resumida como [14]:

Problema 1. O que pode ser dito sobre o número e a localização de ciclos limites de um campo vetorial polinomial planar de grau n ? De maneira mais abrangente:

1. É verdade que um campo vetorial polinomial planar tem um número finito de ciclos limites?
2. É verdade que o número de ciclos limites de um campo vetorial polinomial planar de grau n é limitado por uma constante dependendo do n , a notar, $H(n)$?

Como sistemas lineares não admitem ciclos limites, então $H(1) = 0$. Todavia, ainda não sabemos responder se $H(n)$ é finito, mesmo para o caso $n = 2$.

Até o presente momento, permanece sem resolução, mesmo quando aplicado a polinômios quadráticos. Entretanto, esse problema serviu de motivação para notáveis avanços na teoria geométrica de equações diferenciais planares polinomiais, assim como na teoria de bifurcação, formas normais, folheações e alguns tópicos de relevância na geometria algébrica [14].

Este mesmo problema pode ser abordado para campos polinomiais planares lineares por partes separados por uma reta. Para isso, considere o seguinte sistema de equações diferenciais lineares por partes com duas zonas separadas por uma reta

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_L \mathbf{x} + \mathbf{b}_L & \text{se } x_1 \leq 0, \\ A_R \mathbf{x} + \mathbf{b}_R & \text{se } x_1 \geq 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $A_L = (a_{ij}^L)_{2 \times 2}$, $A_R = (a_{ij}^R)_{2 \times 2}$, $\mathbf{b}_L = (b_1^L, b_2^L)^T \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{b}_R = (b_1^R, b_2^R)^T \in \mathbb{R}^2$.

Como vimos no Capítulo 4, assumindo certas condições de continuidade, isto é, $a_{12}^L = a_{12}^R$, $a_{22}^L = a_{22}^R$ e $\mathbf{b}_L = \mathbf{b}_R$, o Sistema (5.1) possui no máximo um ciclo limite.

Relaxando estas hipóteses, provou-se que existem sistemas como (5.1) que possuem pelo menos 3 ciclos limites [15] [16].

Com a caracterização discutida no Capítulo 3, juntamente com uma extensão da Teoria de Khovanskii, em [3], Carmona et al, demonstraram a existência de uma cota superior para número de ciclos limites em um sistema diferencial linear planar por partes.

Teorema 5.1 (Teorema 1, [3]). *Existe um número natural $L^* \leq 8$ tal que qualquer campo vetorial planar polinomial como (5.1) tem no máximo L^* ciclos limites.*

5.2 Intersecção entre curvas suaves e soluções separantes

Para provarmos o Teorema 5.1, estudaremos o número de pontos de intersecção entre curvas suaves e um tipo particular de órbita de campos vetoriais.

Definição 5.1. *Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial suave. Uma órbita de X é dita ser uma **solução separante** se ou é um ciclo, ou corresponde a uma trajetória não compacta que vem e vai para o infinito.*

No resultado a seguir, Khovanski limita o número de pontos de intersecção isolados entre uma curva suave e qualquer órbita de um campo vetorial que é solução separante em função do número de pontos de contato (ie, pontos da curva em que o campo vetorial é tangente à curva nesses pontos) entre essa curva e o campo vetorial.

Teorema 5.2 (Corolário da Seção 2.1, [17]). *Considere um campo vetorial suave $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Seja uma curva suave $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ com no máximo N componentes conexas não compactas e no máximo k pontos de contato com o campo X . Então, existem no máximo $N + k$ pontos de intersecção isolados entre γ e qualquer órbita de X que é uma solução separante.*

A seguir, estudaremos uma maneira de estender esse resultado para campos vetoriais definidos em subconjunto abertos de \mathbb{R}^2 que são simplesmente conexos, uma vez que qualquer subconjunto aberto e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ é difeomorfo a \mathbb{R}^2 . Para isso, estenderemos inicialmente a Definição 5.1 de solução separantes.

Definição 5.2. *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial suave definido em $U \subset \mathbb{R}^2$, um subconjunto aberto e simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 . Uma órbita \mathcal{O} de X é dita ser uma solução separante se ou é um ciclo, ou uma trajetória não compacta satisfazendo $\bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O} \subset \partial U$, onde $\bar{\mathcal{O}}$ é o fecho do conjunto \mathcal{O} e ∂U é a fronteira de U com respeito a topologia de \mathbb{R}^2 .*

Observação 5.1. *Observe que a definição anterior concorda com a definição de solução separante dada em 5.1. De fato, seja $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo entre U e \mathbb{R}^2 . Considere*

$\phi_*X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o pullback do campo X pelo difeomorfismo ϕ , ie,

$$\phi_*X(p) = d\phi(\phi^{-1}(p))X(\phi^{-1}(p)).$$

Se \mathcal{O} é uma órbita periódica de X , então, $\phi(\mathcal{O})$ é uma órbita periódica de ϕ_*X . Por outro lado, se \mathcal{O} é uma trajetória não compacta, segue que, \mathcal{O} é a imagem em U de um intervalo aberto por uma função injetora. Portanto, a condição $\bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O} \subset \partial U$ implica que $\phi(\mathcal{O})$ é uma órbita de ϕ_*X que vem e vai ao infinito. Logo, $\phi(\mathcal{O})$ é uma solução separante de ϕ_*X no sentido da Definição 5.1.

Com isso, podemos estender o Teorema 5.2 para campos vetoriais suaves definidos em subconjuntos abertos simplesmente conexos de \mathbb{R}^2 .

Teorema 5.3 (Teorema 4, [3]). *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial suave definido em um subconjunto aberto e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Seja $\gamma \subset U$ uma curva suave com no máximo N componentes conexas compactas e no máximo k pontos de contato com X . Então, existem no máximo $N + k$ pontos de intersecção isolados entre γ e qualquer solução separante de X .*

Demonstração. Para demonstrarmos esse resultado, procederemos como na Observação 5.1. Sejam $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, difeomorfismo entre U e \mathbb{R}^2 e $\gamma \subset U$ uma curva suave com no máximo N componentes conexas compactas e no máximo k pontos de contato com o campo X .

Mostraremos que $\phi(\gamma)$ satisfaz as mesmas hipóteses para o campo ϕ_*X . De fato, uma vez que ϕ é um difeomorfismo, segue que $\phi(\gamma)$ é uma curva em \mathbb{R}^2 com no máximo N componentes conexas compactas.

Suponha que γ seja parametrizada por $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, e seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y = \alpha(t_0)$ seja um ponto de contato entre γ e o campo X . Então, temos que

$$\alpha'(t_0) = X(\alpha(t_0)).$$

Uma vez que γ é parametrizada por α , segue que, como ϕ é difeomorfismo, $\phi(\gamma)$ é parametrizada por $\phi(\alpha(t))$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \phi(\alpha(t)) \right|_{t=t_0} &= d\phi(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \Big|_{t=t_0} \\ &= d\phi(\alpha(t_0)) \cdot X(\alpha(t_0)) \\ &= d\phi(\phi^{-1}(\phi(\alpha(t_0)))) \cdot X(\phi^{-1}(\phi(\alpha(t_0)))) \\ &= \phi_*X(\phi(\alpha(t_0))). \end{aligned}$$

Portanto, $\phi(\alpha(t_0))$ é um ponto de contato de entre $\phi(\gamma)$ e o campo ϕ_*X . Uma vez que ϕ é um difeomorfismo, de forma análoga, podemos provar que, se z é um ponto de contato

entre a curva $\phi(\gamma)$ e o campo ϕ_*X , então, $\phi^{-1}(z)$ é um ponto de contato entre a curva γ e o campo X .

Logo, se γ tem no máximo k pontos de contato com o campo X , a curva $\phi(\gamma)$ tem no máximo k pontos de contato com o campo ϕ_*X .

Pelo Teorema 5.2, existem no máximo $N + k$ pontos de intersecção isolados entre a curva $\phi(\gamma)$ e qualquer solução separante do campo ϕ_*X . Pela Observação 5.1, sabemos que ϕ é uma correspondência bijetiva entre as soluções separantes do campo X e do campo ϕ_*X .

Se existissem pelo menos $N + k + 1$ pontos de intersecção isolados entre γ e uma solução separante de X , então, existiriam pelo menos $N + k + 1$ pontos de intersecção isolados entre $\phi(\gamma)$ e uma solução separante de ϕ_*X , o que contradiz o Teorema 5.2.

Logo, existem no máximo $N + k$ pontos de intersecção isolados entre a curva γ e qualquer solução separante do campo X . \square

5.3 Demonstração do Teorema 5.1

Dedicaremos esta seção à demonstração do Teorema (5.1). Para isso, utilizaremos a caracterização desenvolvida no Capítulo 3 juntamente com o Teorema (5.3) e o Teorema de Bezout para curvas algébricas.

Iniciaremos estabelecendo um lema técnico que garante uma cota uniforme para o número de zeros isolados de uma família de funções analíticas a um parâmetro, assumindo condições adequadas com respeito à monotonicidade em relação ao parâmetro.

Lema 5.1 (Lema 5, [3]). *Sejam $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos abertos e considere uma função suave $\delta : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que:*

1. *para cada $b \in J$, a função $\delta(\cdot, b)$ é analítica;*
2. *existe um número natural N tal que para cada $b \in J$, o número de zeros simples da função $\delta(\cdot, b)$ não ultrapassa N ; e*
3. *$\frac{\partial \delta}{\partial b}(u, b) > 0$, para todo $(u, b) \in I \times J$.*

Então, para cada $b \in J$, a função $\delta(\cdot, b)$ tem no máximo N zeros isolados.

Demonstração. Seja $\bar{b} \in J$ e $\bar{u} \in I$ um zero isolado de $\delta(\cdot, \bar{b})$.

Afirmção 1. Para \bar{b} e \bar{u} fixados anteriormente, considere os seguintes cenários: (O) quando \bar{k} é ímpar; (E^+) quando \bar{k} é par e $\bar{a} > 0$; e, (E^-) quando \bar{k} é par e $\bar{a} < 0$. Então,

- Se \bar{u} satisfaz (O) , então existe $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que a função $\delta(\cdot, b)$ tem um ramo contínuo de zeros, $u_0 : (\bar{b} - \eta, \bar{b} + \eta) \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ que são simples para $b \neq \bar{b}$ e $u_0(\bar{b}) = \bar{u}$;
- Se \bar{u} satisfaz (E^+) , então existe $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que a função $\delta(\cdot, b)$ tem dois ramos contínuos de zeros, $u_1, u_2 : (\bar{b} - \eta, \bar{b}] \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ que são simples para $b \neq \bar{b}$ e $u_1(\bar{b}) = u_2(\bar{b}) = \bar{u}$; e
- Se \bar{u} satisfaz (E^-) , então existe $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que a função $\delta(\cdot, b)$ tem dois ramos contínuos de zeros, $u_1, u_2 : [\bar{b}, \bar{b} + \eta] \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ que são simples para $b \neq \bar{b}$ e $u_1(\bar{b}) = u_2(\bar{b}) = \bar{u}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $(\bar{u}, \bar{b}) = (0, 0)$.

Considere a série de Taylor truncada de $\delta(u, b)$ em torno de $b = 0$, ie,

$$\delta(u, b) = \delta(u, 0) + \frac{\partial \delta}{\partial b}(u, 0)b + b^2 \tilde{R}(u, b), \quad (5.2)$$

onde \tilde{R} é tal que $\tilde{R}(u, b)/\|(u, b)\| \rightarrow 0$, se $(u, b) \rightarrow (0, 0)$. Como $\delta(\cdot, 0)$ é analítica, existem $\bar{a} \neq 0$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}$ e R uma função analítica tal que

$$\delta(u, 0) = \bar{a}u^{\bar{k}} + u^{\bar{k}+1}R(u). \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) em (5.2), temos que

$$\delta(u, b) = \bar{a}u^{\bar{k}} + u^{\bar{k}+1}R(u) + \frac{\partial \delta}{\partial b}(u, 0)b + b^2 \tilde{R}(u, b).$$

Expandindo $\frac{\partial \delta}{\partial b}(u, 0)$ em torno de $u = 0$ e tomando $L = \frac{\partial \delta}{\partial b}(0, 0)$, temos que

$$\delta(u, b) = \bar{a}u^{\bar{k}} + u^{\bar{k}+1}R(u) + Lb + ub\rho(u) + b^2 \tilde{R}(u, b), \quad (5.4)$$

onde $\rho(u)/|u| \rightarrow 0$, se $u \rightarrow 0$. Podemos reescrever a equação (5.4), levando em consideração os termos infinitesimais, ie,

$$\delta(u, b) = \bar{a}u^{\bar{k}} + Lb + o(u^{\bar{k}+1}) + o(ub) + o(b^2). \quad (5.5)$$

Seja $\mu = -\text{sign}\left(\frac{L}{\bar{a}}\right)$ e defina a seguinte função

$$\begin{aligned} \Delta(x, \varepsilon) &= \frac{\delta(\varepsilon x, \varepsilon^{\bar{k}} \mu)}{\varepsilon^{\bar{k}}} \\ &= \frac{\bar{a}\varepsilon^{\bar{k}} x^{\bar{k}} + L\varepsilon^{\bar{k}} \mu + \varepsilon^{\bar{k}+1} o(x^{\bar{k}+1}) + \varepsilon^{\bar{k}+1} o(1) + \varepsilon^{2\bar{k}} o(1)}{\varepsilon^{\bar{k}}} \\ &= \bar{a}x^{\bar{k}} + L\mu + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}\Delta(x, 0) = 0 &\iff \bar{a}x^{\bar{k}+1} + L\mu = 0 \\ &\iff x^{\bar{k}} = -\frac{L\mu}{\bar{a}} = \left| \frac{-L}{\bar{a}} \right|.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Note que, as soluções de (5.6) dependem da paridade de \bar{k} . De fato, estas soluções são

$$\bar{x} = \begin{cases} \sqrt[\bar{k}]{\left| \frac{-L}{\bar{a}} \right|} & \text{se } \bar{k} \text{ é ímpar,} \\ \pm \sqrt[\bar{k}]{\left| \frac{-L}{\bar{a}} \right|} & \text{se } \bar{k} \text{ é par.} \end{cases}$$

Mais ainda, temos que

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x}(\bar{x}, 0) = (\bar{k} + 1)\bar{a}\bar{x}^{\bar{k}} \neq 0.$$

Para aplicarmos o Teorema da Função Implícita em Δ , estudaremos os casos em que \bar{k} é par e \bar{k} é ímpar.

Caso 5.3.1. \bar{k} ímpar.

Pelo Teorema da Função Implícita, existem $\eta > 0$ suficientemente pequeno e uma única função suave $y : (-\eta, \eta) \rightarrow V$, onde V é uma vizinhança em torno de \bar{x} , tal que, $y(0) = \bar{x}$ e

$$\Delta(y(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \forall \varepsilon \in (-\eta, \eta).$$

Note que

$$\Delta(y(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \iff \delta(\varepsilon y(\varepsilon), \mu \varepsilon^{\bar{k}}) = 0.$$

Seja $b = \mu \varepsilon^{\bar{k}} = -\text{sign}\left(\frac{L}{\bar{a}}\right)\varepsilon^{\bar{k}}$. Resolvendo para ε , temos que

$$\varepsilon = \sqrt[\bar{k}]{-\text{sign}\left(\frac{L}{\bar{a}}\right)b}.$$

Portanto, para $\omega > 0$ suficientemente pequeno, defina $u_0 : (-\omega, \omega) \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$u_0(b) = \sqrt[\bar{k}]{\mu b} \cdot y(\sqrt[\bar{k}]{\mu b}).$$

Assim, temos que

$$\delta(u_0(b), b) = 0, \text{ para todo } b \in J \text{ suficientemente pequeno.}$$

Mais ainda, para cada $b \neq 0$, $u_0(b)$ é um zero simples de $\delta(\cdot, b)$. De fato, note que,

$$\varepsilon^{\bar{k}} \Delta(x, \varepsilon) = \delta(\varepsilon x, \varepsilon^{\bar{k}} \mu).$$

Isso implica que

$$\varepsilon^{\bar{k}} \frac{\partial \Delta}{\partial x}(y(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial \delta}{\partial x}(\varepsilon y(\varepsilon), \varepsilon^{\bar{k}} \mu).$$

Pelo Teorema da Função Implícita utilizado anteriormente, temos que,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x}(y(\varepsilon), \varepsilon) \neq 0.$$

Assim, como estamos tomando $b \neq 0$, segue que $\varepsilon \neq 0$, e portanto,

$$\frac{\partial \delta}{\partial x}(\varepsilon y(\varepsilon), \varepsilon^{\bar{k}} \mu) \neq 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial \delta}{\partial x}(u_0(b), b) \neq 0, \forall b \in J \setminus \{0\}.$$

Caso 5.3.2. \bar{k} par

Pelo Teorema da Função Implícita existem $\eta > 0$ suficientemente pequeno e funções suaves $y_{\pm} : (-\eta, \eta) \rightarrow V$, onde V é uma vizinhança de \bar{x} , tais que $y_{\pm}(0) = \bar{x}$, e

$$\Delta(y_{\pm}(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \forall \varepsilon \in (-\eta, \eta).$$

Note que

$$\Delta(y(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \iff \delta(\varepsilon y(\varepsilon), \mu \varepsilon^{\bar{k}}) = 0.$$

Seja $b = \mu \varepsilon^{\bar{k}} = -\text{sign}\left(\frac{L}{\bar{a}}\right) \varepsilon^{\bar{k}}$. Note que,

1. Se $\bar{a} > 0$:

Para $b < 0$, temos que

$$\varepsilon_{\pm} = \pm \sqrt[\bar{k}]{-\text{sign}\left(\frac{L}{\bar{a}}\right) b}.$$

Assim, para $\omega > 0$ suficientemente pequeno defina $u_1 : (-\omega, 0] \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u_1(b) = \sqrt[\bar{k}]{\mu b} \cdot y(\sqrt[\bar{k}]{\mu b}),$$

e defina, $u_2 : (-\omega, 0] \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u_2(b) = -\sqrt[\bar{k}]{\mu b} \cdot y(-\sqrt[\bar{k}]{\mu b}).$$

Procedendo como anteriormente, pode-se verificar que para cada $b \in (-\omega, 0]$, $u_i(b)$ é um zero simples de $\delta(\cdot, b)$.

2. Se $\bar{a} < 0$:

Procedendo como o item anterior, para $\omega > 0$ suficientemente pequeno, podemos definir funções $u_1, u_2 : [0, \omega) \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ como as anteriores de forma que, para cada $b \in [0, \omega)$, $u_i(b)$ é um zero simples de $\delta(\cdot, b)$.

□

Agora, assumamos por absurdo que exista $b^* \in J$ tal que $\delta(\cdot, b^*)$ tenha mais de N zeros isolados. Seja D um conjunto de $N + 1$ zeros isolados de $\delta(\cdot, b^*)$. Sejam o , e^+ e e^- o número de zeros isolados em D que satisfazem os casos O , E^+ e E^- da Afirmação anterior, respectivamente. Claramente, $o + e^+ + e^- = N + 1$.

Sem perda de generalidade, assumamos que $e^+ \geq e^-$. Pelos casos da Afirmação anterior, podemos escolher o menor $\eta > 0$ tal que para todo $b \in (b^* - \eta, b^*) \subset J$, a função $\delta(\cdot, b^*)$ tenha ao menos $o + 2e^+ \geq N + 1$ zeros simples. Isso contradiz a hipótese de que para todo $b \in J$, o número de zeros simples da função $\delta(\cdot, b)$ é menor ou igual a N . Isto conclui a demonstração. □

Antes de demonstrarmos o Teorema 5.1, relembremos alguns conceitos e resultados que desenvolvemos no Capítulo 3.

Sob a hipótese de que $a_{12}^L a_{12}^R > 0$, que é necessária para a existência de ciclos limites, pelo Teorema 2.1, o sistema (5.1) é transformado, via um homeomorfismo que preserva a reta de separação $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, no seguinte sistema na forma de Liénard:

$$\begin{cases} \dot{x} = T_L x - y \\ \dot{y} = D_L x - a_L \end{cases}, \text{ para } x > 0; \quad \begin{cases} \dot{x} = T_R x - y + b \\ \dot{y} = D_R x - a_R \end{cases}, \text{ para } x < 0, \quad (5.7)$$

onde $a_L = a_{12}^L b_2^L$, $a_R = a_{12}^R b_2^R$, $b = (a_{12}^L b_1^R) / a_{12}^R - b_1^L$, e T_L , T_R e D_L , D_R são, respectivamente, os traços e determinantes das matrizes A_L e A_R .

Como vimos no Capítulo 3, o comportamento periódico do sistema (5.7) pode ser analisado em termos de dois mapas de meio retorno de Poincaré associados a Σ , a notar, o *mapa de meio retorno de Poincaré* $y_L : I_L[0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$ e o *mapa de meio retorno de Poincaré* $y_R^b : I_R^b \subset [b, +\infty) \rightarrow (-\infty, b]$.

O comportamento desses mapas, bem como a caracterização integral de y_L , foi amplamente discutido no Capítulo 3. Mais ainda, o mapa y_R^b também pode ser caracterizado integralmente apenas considerando uma mudança de variáveis e parâmetros. Além disso, observe que, $y_R^b(y_0) = y_R^0(y_0 - b) + b$ e $I_R^b = I_R^0 + b$, onde $y_R^0 : I_R^0 \subset [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$ é o *Meio Mapa de Poincaré Passado* de (5.7) para $b = 0$. Para não carregarmos a notação, denotaremos $y_R^0 = y_R$ e $I_R^0 = I_R$.

Dentre as propriedades dos mapas y_L e y_R discutidas no Capítulo 3, algumas propriedades importantes são obtidas dos seguintes polinômios

$$W_L(y) = D_L y^2 - a_L T_L y + a_L^2 \text{ e } W_R(y) = D_R y^2 - a_R T_R y + a_R^2. \quad (5.8)$$

De fato, os gráficos de y_L e y_R , orientados na direção em que y_0 cresce, são, respectivamente, partes das órbitas no quarto quadrante dos seguintes campos vetoriais cúbicos

$$X_L(y_0, y_1) = -(y_1 W_L(y_0), y_0 W_L(y_1)) \text{ e } X_R(y_0, y_1) = -(y_1 W_R(y_0), y_0 W_R(y_1)). \quad (5.9)$$

Mais ainda, as curvas $y_L(y_0)$ e $y_R(y_0)$ são, respectivamente, soluções das equações diferenciais

$$\frac{dy_1}{dy_0} = \frac{y_0 W_L(y_1)}{y_1 W_L(y_0)} \text{ e } \frac{dy_1}{dy_0} = \frac{y_0 W_R(y_1)}{y_1 W_R(y_0)}. \quad (5.10)$$

Além disso, os polinômios em (5.8) também nos fornece informação sobre os intervalos de definição de y_L e y_R , respectivamente, I_L e I_R . A menor raiz positiva de W_L , se houver, é o limite superior do intervalo I_L . Analogamente, a maior raiz negativa de W_L , se houver, é o limite inferior de $y_L(I_L)$.

Quando $4D_L - T_L^2 > 0$, como o polinômio W_L não tem raízes, os intervalos I_L e $y_L(I_L)$ são ilimitados com $y_L(y_0)$ tendendo a $-\infty$ quando $y_0 \rightarrow +\infty$. O polinômio W_L é estritamente positivo em $[y_L(y_0), 0) \cup (0, y_0]$ para $y_0 \in I_L$. As mesmas conclusões podem ser obtidas para y_R .

Utilizaremos o seguinte resultado, discutido em [18] que diz respeito à posição do gráfico do Meio Mapa de Poincaré Futuro e a bissetriz do quarto quadrante.

Proposição 5.1 (Proposição 5, [18]). *Para todo $y_0 \in I_L \setminus \{0\}$, vale a relação*

$$\text{sign}(y_0 + y_L(y_0)) = -\text{sign}(T_L).$$

Agora, prosseguiremos para a demonstração do Teorema (5.1). Assim como vimos no Capítulo 4, as soluções periódicas cruzantes (ie, que vão de $\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ para $\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$, ou vice-versa) são estudadas via uma função do tipo *displacement map* δ_b , que está definida no intervalo $I_b := I_L \cap (I_R + b)$, dada por

$$\delta_b(y_0) = y_R(y_0 - b) + b - y_L(y_0). \quad (5.11)$$

Como vimos antes, os zeros de (5.11) em $\text{int}(I_b)$ estão em uma correspondência bijetiva com as soluções periódicas cruzantes de (5.7), e os zeros simples de (5.11) em $\text{int}(I_b)$ estão em correspondência bijetiva com os ciclos limites hiperbólicos de (5.7).

Utilizando o Lema (5.1), mostraremos que para cada $b \in \mathbb{R}$, o número de zeros simples de δ_b não é maior que 8.

Como sabemos que y_L e y_R são soluções das equações diferenciais (5.10), temos também informação com respeito às suas derivadas. Sendo assim, temos que, se $y_0^* \in \text{int}(I_b)$ satisfaz $\delta_b(y_0^*) = 0$, então

$$\delta'_b(y_0) = \frac{y_0^* - y_1^*}{y_1^*(y_1^* - b)W_L(y_0^*)W_R(y_0^* - b)} F_b(y_0^*, y_1^*), \quad (5.12)$$

onde $y_1^* = y_R(y_0^* - b) + b = y_L(y_0^*) < \min(0, b)$ e F_b é um polinômio de grau 4 dado por

$$F_b(y_0^*, y_1^*) = m_0 + m_1(y_0 + y_1) + m_2 y_0 y_1 + m_3(y_0^2 + y_1^2) + m_4(y_0 y_1^2 + y_0^2 y_1) + m_5 y_0^2 y_1^2,$$

onde,

$$m_0 = a_L^2 a_R^2 b + a_L^2 b^3 D_R + a_L^2 a_R b^2 T_R,$$

$$m_1 = -2a_L^2 b^2 D_R - a_L^2 a_R b T_R,$$

$$m_2 = -a_R^2 b D_L + 3a_L^2 b D_R - b^3 D_L D_R - a_L a_R^2 T_L + a_L b^2 D_R T_L + a_L^2 a_R T_R - a_R b^2 D_L T_R,$$

$$m_3 = a_L^2 b D_R,$$

$$m_4 = a_R^2 D_L - a_L^2 D_R + b^2 D_L D_R - a_L b D_R T_L + a_R b D_L T_R,$$

$$m_5 = -b D_L D_R + a_L D_R T_L - a_R D_L T_R.$$

Observação 5.2. Observe que, $\text{sign}(\delta'_b(y_0^*)) = \text{sign}(F_b(y_0^*, y_1^*))$. De fato, como discutimos anteriormente, sabemos que $W_L(y_0^*)W_R(y_0^* - b) > 0$. Mais ainda, $y_1^*(y_1^* - b)(y_0^* - y_1^*) > 0$ pois,

- $y_0^* > y_L(y_0^*) = y_1^*$,
- $y_1^* < \min(0, b)$.

Isto significa que o conjunto de zeros de F_b , $\gamma_b = F_b^{-1}(\{0\})$, "separa" os ciclos limites atratores, dos ciclos limites repulsores. Assim, como entre dois ciclos limites de mesma estabilidade, existe um ciclo limite de estabilidade oposta, o número de ciclos limites, e portanto, o número de zeros simples de δ_b é limitado pelo número de pontos isolados de intersecção entre γ_b e uma das curvas $y_1 = y_L(y_0)$ ou $y_1 = y_R(y_0 - b) + b$, para $y_0 \in \text{int}(I_b)$, acrescentado de 1.

De fato, para uma órbita periódica de (5.7) passando por $(0, y_0)$ e $(0, y_1)$ ser ciclo limite, deve-se ter que $F_b(y_0, y_1) \neq 0$ e $y_1^* = y_L(y_0^*) = y_R(y_0^* - b)$. Ou seja, cada intersecção entre as curvas $y_1 = y_L(y_0)$ e $y_1 = y_R(y_0 - b)$ é uma órbita periódica, e se essa intersecção acontecer fora de γ_b , então, será um ciclo limite. Observe que, a cada duas intersecções entre as curvas $y_1 = y_L(y_0)$ e $y_1 = y_R(y_0 - b)$ fora de γ_b , existe pelo menos uma intersecção entre γ_b e $y_1 = y_L(y_0)$ e uma intersecção entre γ_b e $y_1 = y_R(y_0 - b)$. Assim, podemos limitar o número de zeros simples de δ_b como propusemos.

Focaremos na curva $\mathcal{O}_b = \{(y_0, y_L(y_0)) : y_0 \in \text{int}(I_b)\}$. Pela Proposição (5.1), segue que:

i. Se $T_L = 0$, então, $\mathcal{O}_b \subset \{(y_0, -y_0) : y_0 > 0\}$, pois,

$$y_0 + y_L(y_0) = 0;$$

ii. Se $T_L < 0$, então, $\mathcal{O}_b \subset B^+ := \{(y_0, y_1) : -y_0 < y_1 < 0\}$, pois

$$y_0 + y_L(y_0) > 0;$$

iii. Se $T_L > 0$, então, $\mathcal{O}_b \subset B^+ := \{(y_0, y_1) : -y_1 > y_0 > 0\}$, pois

$$y_0 + y_L(y_0) < 0.$$

No que segue, mostraremos que o número de pontos isolados de intersecção entre γ_b e \mathcal{O}_b é no máximo 7. Para isso, definiremos algumas ferramentas, amplamente discutidas em [19], que serão de suma importância para demonstrar esse resultado.

Definição 5.3. O plano projetivo \mathbb{RP}^2 é o conjunto das retas em \mathbb{R}^3 que passam pela origem, isto é,

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim,$$

onde \sim é seguinte relação de equivalência: $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,

$$x \sim y \iff \exists \lambda \neq 0, x = \lambda y.$$

Identificaremos os pontos de \mathbb{RP}^2 como $(x : y : z)$ onde $(x : y : z)$ é a classe de equivalência do ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Definição 5.4. Seja $f = \sum_{i=0}^d f_i \in \mathbb{R}[X, Y]$, onde $\mathbb{R}[X, Y]$ é o anel dos polinômios nas variáveis X e Y , e cada f_i é homogêneo em $\mathbb{R}[X, Y]$, com $f_d \neq 0$. A **homogeneização** de f é o polinômio homogêneo de grau d dado por

$$f^h(X, Y, Z) = \sum_i Z^{d-i} f_i(X, Y).$$

Definição 5.5. Uma curva projetiva é uma classe de equivalência de polinômios homogêneos não constantes, $F \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$, módulo a relação de equivalência que identifica dois polinômios se um for múltiplo de outro por uma constante.

Definição 5.6. Sejam $p, q \in \mathbb{R}[X, Y]$ e considere o sistema polinomial planar

$$\begin{cases} p(X, Y) = 0, \\ q(X, Y) = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Considere p^h e q^h a homogeneização desses polinômios. Dizemos que o sistema (5.13) possui solução no infinito se existe solução para o sistema

$$\begin{cases} p^h(X, Y, 0) = 0, \\ q^h(X, Y, 0) = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

As soluções do sistema

$$\begin{cases} p^h(X, Y, 1) = 0, \\ q^h(X, Y, 1) = 0, \end{cases} \quad (5.15)$$

são ditas ser soluções finitas.

As Definições 5.3-5.6 nos dá condições para utilizar o seguinte Teorema na demonstração do Teorema 5.1.

Teorema 5.4 (Teorema de Bezout). *Se F e G são curvas planas projetivas sem componentes em comum então o número de pontos na intersecção $F \cap G$, contados com multiplicidade, é igual a $\deg F \cdot \deg G$.*

Quando $T_L = 0$, temos que \mathcal{O}_b é um segmento de reta. Portanto, pelo Teorema de Bezout, o número de intersecções isoladas entre γ_b e \mathcal{O}_b é no máximo 4.

Daqui em diante, assuma que $T_L \neq 0$. Neste caso,

Afirmção 2. Se $T_L \neq 0$, então \mathcal{O}_b é solução separante do campo vetorial

$$\widehat{X}_L = X_L|_U \text{ com } U = B \cap \text{int}(I_b \times (y_L(I_b) \cap y_R^b(I_b))), \quad (5.16)$$

onde X_L é dado por (5.9), e, a depender dos casos ii) e iii), B é igual a B^+ ou B^- .

Demonstração. Como I_b , $y_L(I_b)$ e $y_R^b(I_b)$ são intervalos, então U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 simplesmente conexo contido no quarto quadrante $Q = \{(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2 : y_1 < 0 < y_0\}$.

O gráfico de $y_L|_{I_b}$ é uma parte da órbita do campo X_L que está no quarto quadrante. Para verificarmos que é solução separante, precisamos verificar se \mathcal{O}_b é uma trajetória não compacta tal que $\bar{\mathcal{O}}_b \setminus \mathcal{O}_b \subset \partial U$.

De fato, por definição, \mathcal{O}_b é não compacta. Mais ainda, como \mathcal{O}_b é gráfico, então, não é órbita periódica. Por fim, os pontos de $\bar{\mathcal{O}}_b \setminus \mathcal{O}_b$ estão em ∂U , pois, os pontos de acumulação de $(y_0, y_L(y_0))$ acontecem em ∂I_b , uma vez que \mathcal{O}_b está orientada no sentido em que y_0 cresce. \square

Gostaríamos de aplicar o Teorema 5.3 no campo \widehat{X}_L e na curva γ_b , para encontrarmos um limitante para o número de pontos de intersecção isolados entre γ_b e \mathcal{O}_b ,

que é uma solução separante de \widehat{X}_L . Para isso, precisamos estimar o número de pontos de contato entre γ_b e \widehat{X}_L . Portanto, definamos

$$G_b(y_0, y_1) = \langle \nabla F_b(y_0, y_1), X_L(y_0, y_1) \rangle.$$

Note que G_b é uma função polinomial de grau 6 dada por

$$\begin{aligned} G_b(y_0, y_1) = & n_1(y_0 + y_1) + n_2y_0y_1 + n_3(y_0^2 + y_1^2) + n_4(y_0^2y_1 + y_0y_1^2) + n_5(y_0^3 + y_1^3) \\ & + n_6y_0^2y_1^2 + n_7(y_0^3y_1 + y_0y_1^3) + n_8(y_0^3y_1^2 + y_0^2y_1^3) + n_9y_0^3y_1^3, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} n_1 &= a_L^4 b(2bD_R + a_RT_R), \\ n_2 &= -2a_L^3 b(2D_R(a_L + bT_L) + a_RT_L T_R), \\ n_3 &= a_L^2 (b^3 D_L D_R + a_R^2 (bD_L + a_L T_L) - a_L b D_R (3a_L + bT_L) \\ &\quad + a_R (-a_L^2 + b^2 D_L) T_R), \\ n_4 &= a_L (2a_L^3 D_R + a_L^2 T_L (7bD_R + a_RT_R) - bD_L T_L (a_R^2 + b^2 D_R + a_R b T_R) \\ &\quad - a_L (-b^2 D_R T_L^2 + a_R^2 (2D_L + T_L^2) + a_R b D_L T_R)), \\ n_5 &= a_L^2 (-a_R^2 D_L + D_R (a_L^2 - b^2 D_L + a_L b T_L) - a_R b D_L T_R), \\ n_6 &= 2(a_R^2 D_L (bD_L + 3a_L T_L) + D_R (b^3 D_L^2 - 2a_L^3 T_L + a_L b^2 D_L T_L - a_L^2 b (3D_L + 2T_L^2)) \\ &\quad + a_R D_L (-a_L^2 + b^2 D_L + 2a_L b T_L) T_R), \\ n_7 &= a_L (a_R^2 D_L T_L + D_R T_L (b^2 D_L - a_L (3a_L + bT_L)) + a_R D_L (2a_L + bT_L) T_R), \\ n_8 &= -3a_R^2 D_L^2 + D_R (-3b^2 D_L^2 + a_L b D_L T_L + a_L^2 (3D_L + 2T_L^2)) \\ &\quad - a_R D_L (3bD_L + 2a_L T_L) T_R, \\ n_9 &= 4D_L (bD_L D_R - a_L D_R T_L + a_R D_L T_R). \end{aligned}$$

Portanto, o número de pontos de contato entre γ_b e \widehat{X}_L é limitado pelo número de soluções isoladas do sistema polinomial

$$\begin{cases} F_b(y_0, y_1) = 0, \\ G_b(y_0, y_1) = 0, \end{cases} \quad (5.17)$$

para $(y_0, y_1) \in U$, uma vez que $\gamma_b = F_b^{-1}(\{0\})$.

Como estamos interessados apenas em soluções do sistema (5.17) em U , considere a seguinte função $\phi : Q \rightarrow \mathbb{H}_-$, dada por

$$\phi(y_0, y_1) = (y_0 + y_1, y_0 y_1),$$

onde $\mathbb{H}_- = \{(Y_0, Y_1) \in \mathbb{R}^2 : Y_1 < 0\}$.

Proposição 5.2. *A função $\phi : Q \rightarrow \mathbb{H}_-$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Como ϕ é polinomial, é claro que é também diferenciável. Provaremos que ϕ é bijetora e que sua inversa é diferenciável.

Sejam $(y_0, y_1), (x_0, x_1) \in U$ tais que $\phi(y_0, y_1) = \phi(x_0, x_1)$. Então, temos que

$$\begin{cases} y_0 + y_1 = x_0 + x_1 \\ y_0 y_1 = x_0 x_1 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação para y_0 e aplicando na segunda chegamos em

$$-y_1^2 + (x_0 + x_1)y_1 - x_0 x_1 = 0.$$

Note que, esta equação tem por discriminante $\Delta = (x_0 - x_1)^2$. Uma vez que $(x_0, x_1) \in U \subset Q$, então temos que, as únicas opções para y_1 solução da equação anterior são x_1 ou x_0 . Entretanto, como $(y_0, y_1) \in U \subset Q$, segue que, $y_1 < 0$. Isso nos mostra que $y_1 = x_1$. Portanto, segue que, $(y_0, y_1) = (x_0, x_1)$, e assim ϕ é injetora.

Sejam $(Y_0, Y_1) \in \mathbb{H}_-$. Tome

$$y_0 = \frac{Y_0 + \sqrt{Y_0^2 - 4Y_1}}{2} \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{Y_0 - \sqrt{Y_0^2 - 4Y_1}}{2}.$$

Então, como $Y_1 < 0$, segue que $(y_0, y_1) \in Q$. Mais ainda, é fácil ver que

$$\phi(y_0, y_1) = (Y_0, Y_1).$$

Isto prova que ϕ é bijetora.

Mais ainda, $\phi^{-1} : \mathbb{H}_- \rightarrow Q$ é dada por

$$\phi^{-1}(Y_0, Y_1) = \left(\frac{Y_0 + \sqrt{Y_0^2 - 4Y_1}}{2}, \frac{Y_0 - \sqrt{Y_0^2 - 4Y_1}}{2} \right).$$

Note que, como a curva $Y_0^2 = 4Y_1$ não está em \mathbb{H}_- , pois $Y_1 < 0$, segue que ϕ^{-1} é diferenciável em \mathbb{H}_- . Logo, ϕ é um difeomorfismo entre Q e \mathbb{H}_- . \square

Observe que a mudança de variáveis ϕ transforma o sistema (5.17) no sistema polinomial

$$\begin{cases} \tilde{F}_b(Y_0, Y_1) = 0 \\ \tilde{G}_b(Y_0, Y_1) = 0, \end{cases} \quad (5.18)$$

onde

$$\tilde{F}_b = m_0 + m_1 Y_0 + (m_2 - 2m_3) Y_1 + m_3 Y_0^2 + m_4 Y_0 Y_1 + m_5 Y_1^2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_b = & n_1 Y_0 + (n_2 - 2n_3) Y_1 + n_3 Y_0^2 + (n_4 - 3n_5) Y_0 Y_1 + (n_6 - 2n_7) Y_1^2 \\ & + n_5 Y_0^3 + n_7 Y_0^2 Y_1 + n_8 Y_0 Y_1^2 + n_9 Y_1^3. \end{aligned}$$

Afirmção 3. Assumindo que $T_L \neq 0$, o sistema (5.18) tem no máximo 5 soluções finitas em $\phi(U)$.

Demonstração. Pelo Teorema (5.4), o sistema (5.18) tem no máximo 6 soluções (finitas ou não).

Note que se $D_L = 0$, o sistema tem pelo menos uma solução no infinito. De fato, neste caso, as equações do sistema (5.18) ficam

$$\begin{aligned} \tilde{G}_b(Y_0, Y_1) &= a_L^4 b(2bD_R + a_R T_R)Y_0 + a_L^2(a_L a_R^2 T_L - a_L b D_R(3a_L + bT_L) - a_L^2 a_R T_R)Y_0^2 \\ &\quad + a_L^2 D_R(a_L^2 + a_L b T_L)Y_0^3 + (a_L^4 b(2bD_R + a_R T_R) \\ &\quad - 2a_L^2(a_L a_R^2 T_L - a_L b D_R(3a_L + bT_L) - a_L^2 a_R T_R))Y_1 + (-3a_L^2 D_R(a_L^2 + a_L b T_L) \\ &\quad + a_L(2a_L^3 D_R - a_L(a_R^2 T_L^2 - b^2 D_R T_L^2) + a_L^2 T_L(7bD_R + a_R T_R)))Y_0 Y_1 \\ &\quad - a_L^2 D_R T_L(3a_L + bT_L)Y_0^2 Y_1 + (2a_L^2 D_R T_L(3a_L + bT_L) \\ &\quad + 2D_R(-2a_L^3 T_L - 2a_L^2 b T_L^2))Y_1^2 + 2a_L^2 D_R T_L^2 Y_0 Y_1^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{F}_b(Y_0, Y_1) &= a_L^2 a_R^2 b + a_L^2 b^3 D_R + a_L^2 a_R b^2 T_R + (-2a_L^2 b^2 D_R - a_L^2 a_R b T_R)Y_0 \\ &\quad + a_L^2 b D_R Y_0^2 + (a_L^2 b D_R - a_L a_R^2 T_L + a_L b^2 D_R T_L \\ &\quad + a_L^2 a_R T_R)Y_1 + (-a_L^2 D_R - a_L b D_R T_L)Y_0 Y_1 + a_L D_R T_L Y_1^2. \end{aligned}$$

A homogeneização desses polinômios é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{G}_b^h(Y_0, Y_1, Z) &= D_R Y_0(a_L Y_0 + b T_L Y_0 - 2 T_L Y_1)(a_L Y_0 - T_L Y_1) \\ &\quad - (a_L^2 Y_0(3b D_R Y_0 + a_R T_R Y_0 + D_R Y_1) - a_L T_L((a_R^2 - b^2 D_R)Y_0^2 \\ &\quad + (4b D_R + a_R T_R)Y_0 Y_1 + 2 D_R Y_1^2) \\ &\quad + T_L^2 Y_1(a_R^2 Y_0 + b D_R(-b Y_0 + 2 Y_1)))Z + a_L(a_L b(2b D_R + a_R T_R)Y_0 \\ &\quad + (-2a_R^2 T_L + 2b D_R(a_L(3 + b) + b T_L) + a_L a_R(2 + b)T_R)Y_1)Z^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{F}_b^h(Y_0, Y_1, Z) &= a_L(D_R(b Y_0 - Y_1)(a_L Y_0 - T_L Y_1) - a_L b(2b D_R + a_R T_R)Y_0 Z \\ &\quad + (-a_R^2 T_L + b D_R(a_L + b T_L) + a_L a_R T_R)Y_1 Z \\ &\quad + a_L b(a_R^2 + b^2 D_R + a_R b T_R)Z^2). \end{aligned}$$

Assim, para encontramos as soluções no infinito, basta tomarmos $Z = 0$, e portanto estas soluções devem satisfazer

$$\begin{cases} D_R Y_0(a_L Y_0 + b T_L Y_0 - 2 T_L Y_1)(a_L Y_0 - T_L Y_1) = 0 \\ a_L D_R(b Y_0 - Y_1)(a_L Y_0 - T_L Y_1) = 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Com isto, temos que uma solução deste sistema é dada pela reta $Y_1 = \frac{a_L Y_0}{T_L}$, e portanto, um representante para uma classe de equivalência de soluções no infinito é $[T_L; a_L; 0]$.

Logo, no caso em que $D_L = 0$, o sistema (5.18) tem no máximo 5 soluções finitas em $\phi(U)$.

Suponha que $D_L \neq 0$. Considere o ponto $(Y_0^*, Y_1^*) = \left(\frac{a_L T_L}{D_L}, \frac{a_L^2}{D_L} \right)$. Então, pode-se observar que (Y_0^*, Y_1^*) é uma solução do sistema (5.18).

Vamos provar que $(Y_0^*, Y_1^*) \notin \phi(U)$. De fato, uma vez que já estamos considerando $T_L \neq 0$, temos os seguintes casos:

- j) Se $T_L > 0$, então $\phi(U) \subset \{(Y_0, Y_1) : Y_0 < 0, Y_1 < 0\}$. Isto ocorre pois, para $T_L < 0$, temos que $U \subset B^+ = \{(y_0, y_1) : -y_0 < y_1 < 0\}$. Portanto, se $(y_0, y_1) \in U \subset B^+$, então $Y_0 = y_0 + y_1 < 0$.
- jj) Se $T_L < 0$, então $\phi(U) \subset \{(Y_0, Y_1) : Y_0 > 0, Y_1 < 0\}$. Isto ocorre pois, para $T_L < 0$, temos que $U \subset B^- = \{(y_0, y_1) : -y_1 > y_0 > 0\}$. Portanto, se $(y_0, y_1) \in U \subset B^-$, então $Y_0 = y_0 + y_1 > 0$.

Além disso, para estudarmos a posição entre (Y_0^*, Y_1^*) e $\phi(U)$, estudaremos as seguintes relações entre D_L e a_L . Note que:

- Se $D_L > 0$ ou $a_L = 0$, segue que $Y_1^* \geq 0$. Portanto, $(Y_0^*, Y_1^*) \notin \phi(U)$;
- Se $D_L < 0$ e $a_L < 0$, segue que

$$\text{sign}(Y_0^*) = \text{sign}(T_L).$$

Entretanto, isso contradiz o que observamos mais acima, uma vez que em ambos casos, $\text{sign}(Y_0) = -\text{sign}(T_L)$, assim, $(Y_0^*, Y_1^*) \notin \phi(U)$.

- Se $D_L < 0$ e $a_L > 0$, o polinômio

$$W_L(y) = D_L y^2 - a_L T_L y + a_L^2$$

tem duas raízes distintas, $y_1^* < 0 < y_0^*$. De fato, como estamos supondo $D_L < 0$ e $a_L > 0$, temos que

$$\Delta = a_L^2 T_L^2 - 4D_L a_L^2 > 0.$$

Portanto, as soluções de $W_L(y) = 0$ são

$$y_0^* = \frac{a_L(T_L + \sqrt{-4D_L + T_L^2})}{D_L} \text{ e } y_1^* = \frac{a_L(T_L - \sqrt{-4D_L + T_L^2})}{D_L}.$$

Mais ainda, $\phi(y_0^*, y_1^*) = (Y_0^*, Y_1^*)$. Por outro lado, como y_0^* é a maior raiz positiva de W_L e y_1^* é a menor raiz de W_L , então segue que $y_0^* \notin \text{int}(I_b)$ e $y_1^* \notin \text{int}(y_L(I_b))$. Portanto, $(y_0^*, y_1^*) \notin U$. Assim, $(Y_0^*, Y_1^*) \notin \phi(U)$.

Logo, existem no máximo 5 soluções finitas do sistema (5.18) em $\phi(U)$.

□

Portanto, da Afirmação 3, segue que a curva γ_b tem no máximo 5 pontos de contato com o campo \widehat{X}_L . Para aplicarmos o Teorema 5.3, precisamos encontrar uma cota superior para o número de componentes conexas de γ_b . Como $\gamma_b = F^{-1}(\{0\})$, e $\deg F_b = 2$, então, γ_b tem no máximo 2 componentes conexas não compactas em U .

Assim, pelo Teorema 5.3, segue que γ_b e \mathcal{O}_b tem no máximo $5 + 2 = 7$ pontos de intersecção isolados. Portanto, o sistema diferencial (5.7) tem no máximo $7 + 1 = 8$ ciclos limites hiperbólicos (veja Observação 5.2), e conseqüentemente, o número de zeros simples de δ_b é menor ou igual a 8.

Note que, nesta situação, ainda não podemos aplicar o Lema 5.1 para encontrarmos uma cota superior para o número de zeros isolados de δ_b . Isso acontece porque o domínio de cada δ_b depende de b . Portanto, procederemos por contradição.

Afirmação 4. Para todo $b \in \mathbb{R}$, δ_b tem no máximo 8 zeros isolados.

Demonstração. Suponha por absurdo que exista $b^* \geq 0$ tal que δ_{b^*} tenha mais de 8 zeros isolados. Seja $I \subset \text{int}(I_{b^*})$ um intervalo aberto que contenha todos os zeros isolados de δ_{b^*} em seu interior.

Como, para cada b , $I_b = I_R^0 + b$, podemos encontrar um intervalo J contendo b^* tal que, para todo $b \in J$, $I \subset \text{int}(I_b)$. Do anterior, sabemos que, para cada $b \in J$, o número de zeros simples de $\delta_b|_I$ é menor ou igual a 8. Mais ainda, para todo $b \in J$ temos que

$$\frac{\partial}{\partial b} \delta_b(y_0) = -y'_R(y_0 - b) + 1 > 0, \forall y_0 \in I.$$

Assim, pelo Lema (5.1), segue que, para todo $b \in J$, a função $\delta_b|_I$ tem no máximo 8 zeros isolados. Isso implicaria que $\delta_{b^*}|_I$ tem no máximo 8 zeros isolados, contradizendo a nossa hipótese de absurdo.

Portanto, para todo $b \in \mathbb{R}$, δ_b tem no máximo 8 zeros isolados. □

Assim, para todo $b \in \mathbb{R}$, o número de ciclos limites do sistema (5.7) não é maior que 8. Com isso, provamos o Teorema (5.1).

6 Considerações Finais

Como vimos no Capítulo 3, a caracterização integral dos mapas de meio retorno de Poincaré permitiu que evitássemos um extenso estudo caso-a-caso relacionado ao espectro da matriz do sistema linear. Para isto, analisamos o comportamento da função do tipo índice \mathcal{F} , obtida através da integral de linha de um certo campo ortogonal ao fluxo, escrito em termos de um fator integrante inverso adequado. Com isto, encontramos uma forma de expressar os mapas de meio retorno de Poincaré.

Esta nova técnica pode ser replicada para campos vetoriais planares não lineares, basta encontrar um fator integrante inverso adequado.

Utilizando a caracterização do Capítulo 3, entendemos alguns avanços feitos no estudo da adaptação da segunda parte do 16º Problema de Hilbert, que busca entender se existe um número máximo de ciclos limites de um sistema planar diferencial linear por partes.

De fato, verificamos no Capítulo 4, que a demonstração da Conjectura de Lum-Chua pode ser significativamente simples e curta, sem ter de lidar com extensos estudos relacionados ao espectro das matrizes. Além disso, no Capítulo 5, provamos que a cota superior uniforme do número de ciclos limites pode ser melhorada para $L^* \leq 8$. Além disso, alguns trabalhos buscaram estudar, utilizando as caracterizações integrais dos mapas de meio retorno de Poincaré, a unicidade de ciclos limites para campos vetoriais lineares planares sem região de deslize.

Para trabalhos futuros, sugerimos o estudo de sistemas diferenciais lineares por partes separados por um gráfico de uma função de um valor real a um valor real, avançando para sistemas diferenciais lineares por partes separados por uma variedade algébrica.

Referências

- 1 CARMONA, V.; FERNANDEZ-SANCHEZ, F. Integral characterization for poincaré half-maps in planar linear systems. *Journal of Differential Equations*, v. 305, p. 319–346, 2021. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039621006227>. Citado 12 vezes nas páginas 11, 12, 19, 22, 25, 28, 35, 36, 42, 43, 46 e 47.
- 2 CARMONA, V.; FERNANDEZ-SANCHEZ, F.; NOVAES, D. D. A new simple proof for lum–chua’s conjecture. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, v. 40, 2021. ISSN 1751570X. Citado 4 vezes nas páginas 11, 12, 49 e 50.
- 3 _____. Uniform upper bound for the number of limit cycles of planar piecewise linear differential systems with two zones separated by a straight line. *Applied Mathematics Letters*, v. 137, 2023. ISSN 18735452. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 61, 62 e 63.
- 4 FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. Canonical discontinuous planar piecewise linear systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, v. 11, 2012. ISSN 15360040. Citado na página 13.
- 5 SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 1979. 327 p. (Projeto Euclides). Citado 2 vezes nas páginas 14 e 19.
- 6 CHAVARRIGA, J.; GIACOMINI, H.; GINE, J.; LLIBRE, J. On the integrability of two-dimensional flows. *Journal of Differential Equations*, v. 157, 1999. ISSN 00220396. Citado na página 22.
- 7 KRANTZ, S. G.; PARKS, H. R. *Multivariable Calculus of Real Analytic Functions*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2002. 25–66 p. ISBN 978-0-8176-8134-0. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8134-0_2. Citado na página 38.
- 8 FREIRE, E.; PONCE, E.; RODRIGO, F.; TORRES, F. Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, v. 8, 1998. ISSN 02181274. Citado 4 vezes nas páginas 44, 49, 51 e 52.
- 9 CARMONA, V.; FERNANDEZ-SANCHEZ, F.; NOVAES, D. D. Uniqueness and stability of limit cycles in planar piecewise linear differential systems without sliding region. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 123, p. 107257, 2023. ISSN 1007-5704. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570423001752>. Citado na página 48.
- 10 ANDRONOV, A.; VITT, A.; KHAIKIN, S.; KHAHIKIN, S.; FISHWICK, W.; IMMIRZI, F. *Theory of Oscillators*. [S.l.]: Dover, 1987. (Dover Books on Electrical Engineering Series). ISBN 9780486655086. Citado na página 49.
- 11 LUM, R.; CHUA, L. O. Global properties of continuous piecewise linear vector fields. part i: Simplest case in 2. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, v. 19, 1991. ISSN 1097007X. Citado na página 49.

- 12 LLIBRE, J.; ORDONEZ, M.; PONCE, E. On the existence and uniqueness of limit cycles in planar continuous piecewise linear systems without symmetry. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 14, 2013. ISSN 14681218. Citado na página 49.
- 13 MASSERA, J. Sur un théorème de g. sansone sur l'équation di liénard. *Boll. Unione Mat. Ital. (3)*, v. 9, p. 367–369, 1954. Citado na página 49.
- 14 ILYASHENKO, Y. Centennial history of hilbert's 16th problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 39, 2002. ISSN 02730979. Citado na página 60.
- 15 LLIBRE, J.; PONCE, E. Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms*, v. 19, 2012. ISSN 14928760. Citado na página 61.
- 16 HUAN, S. M.; YANG, X. S. On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems of node-node types. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 411, 2014. ISSN 0022247X. Citado na página 61.
- 17 KHOVANSKII, A. *Fewnomials*. American Mathematical Society, 1991. (Translations of mathematical monographs). ISBN 9781470445003. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=a8jhtwEACAAJ>. Citado na página 61.
- 18 CARMONA, V.; SANCHEZ, F. F.; GARCIA-MEDINA, E.; NOVAES, D. D. Properties of poincaré half-maps for planar linear systems and some direct applications to periodic orbits of piecewise systems. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, v. 2023, p. 1–18, 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2109.12673>. Citado na página 68.
- 19 VAINSENER, I. *Introdução às curvas algébricas planas*. IMPA, 1996. (Coleção matemática universitária). ISBN 9788524401022. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=VT83AAAACAAJ>. Citado na página 70.