UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MULTIUNIDADES EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA INTRODUÇÃO DE CONTEÚDOS E CONCEITOS MATEMÁTICOS: UM OLHAR A PARTIR DAS QUESTÕES DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Campinas
2023

PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA INTRODUÇÃO DE CONTEÚDOS E CONCEITOS MATEMÁTICOS: UM OLHAR A PARTIR DAS QUESTÕES DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática, na Área de Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Drª Laura Letícia Ramos Rifo

O ARQUIVO DIGITAL CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA E ORIENTADA PELA PROFª DRª LAURA LETÍCIA RAMOS RIFO

Campinas
2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

Si38r

Silva, Paulo Henrique das Chagas, 1992-
A resolução de problemas na introdução de conteúdos e conceitos matemáticos : um olhar a partir das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas / Paulo Henrique das Chagas Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Laura Leticia Ramos Rifo.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. 2. Resolução de problemas. 3. Motivação. 4. Aprendizagem - Matemática. I. Rifo, Laura Leticia Ramos, 1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Problem solving in the introduction of mathematical contents and concepts : a look from the questions of the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools

Palavras-chave em inglês:
Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools
Problem solving
Motivation
Learning - Mathematica
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática
Titulação: Doutor em Ensino de Ciências e Matemática
Banca examinadora:
Laura Leticia Ramos Rifo [Orientador]
Samuel Rocha de Oliveira
Lucio Tunes dos Santos
Louise Reips
Rita Santos Guimarães
Data de defesa: 03-08-2023
Programa de Pós-Graduação: Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-8378-2022
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/3087009487821412

FOLHA DE APROVAÇÃO

COMISSÃO EXAMINADORA

Data: 03/08/2023

Profª. Drª. Laura Leticia Ramos Rifo (Presidente – Orientadora)

Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira (IMECC – UNICAMP)

Prof. Dr. Lucio Tunes dos Santos (IMECC – UNICAMP)

Profª. Drª. Louise Reips (UFSC – Campus Blumenau)

Profª. Drª. Rita Santos Guimarães (UFABC – Santo André)

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese à minha avó paterna Expedita Maria da Conceição *(in memoriam)*, ao meu pai José Francisco das Chagas Pinto *(in memoriam)* e à minha mãe Cosma Raimunda da Silva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por estar comigo em todos os momentos da minha vida, por sua misericórdia e amor, e por ter me possibilitado chegar onde cheguei.

À minha mãe, Cosma Raimunda, às minhas irmãs Daniele, Paula, Keila e Anne e ao meu sobrinho, Miguel. Obrigado por me amarem e compreenderem os meus períodos de ausência. Vocês são muito importantes para mim.

Aos meus amigos e amigas de longa data, pela paciência e companheirismo. Entre encontros e desencontros, foram vocês os que permaneceram. Em especial, ao Clubim dos 6 e ao Grupo Abeliano. Obrigado por me tirarem as risadas mais sinceras.

Aos amigos e amigas que a Ufersa me proporcionou. Em especial, a Bruno Fontes, José Wagner e Mônica Paula. Obrigado pela parceria e companheirismo.

Ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática (Pecim) da Unicamp, no que se refere ao corpo técnico, docente e discente. Sem dúvidas, foram anos de muito aprendizado e aperfeiçoamento.

À Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (Proppg) da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, pela parceria com a Unicamp, por meio do Dinter, e viabilidade de ingresso no Pecim.

A todos que fazem parte da Escola Estadual Dr. Joaquim Inácio, pela recepção e apoio na minha pesquisa. Em especial, aos professores Sueldo, Pedro e Vânia, e aos discentes que compõem o 1º Ano B, turma de 2022.

Aos membros da banca, pelas excelentes contribuições para o meu trabalho. Em especial, à minha orientadora, Laura Rifo, pela paciência e pelo acompanhamento da minha pesquisa. Tenho muita admiração por você.

RESUMO

A OBMEP possui, entre outros, o objetivo de contribuir para a melhoria da qualidade da educação, possibilitando que um maior número de estudantes de ensino básico possa ter acesso a material didático de qualidade. Na literatura da área, no entanto, há poucas evidências sobre o uso desse material como complemento na abordagem de conteúdos e conceitos matemáticos, e nem como elemento motivador na sala de aula. A partir da conjectura de que metodologias alternativas podem despertar o gosto por estudar matemática e desenvolver habilidades que auxiliem na resolução de situações-problema, um possível caminho é trabalhar as questões da OBMEP sob uma perspectiva de Resolução de Problemas. Nessa linha, este trabalho apresenta a seguinte questão norteadora: A utilização das questões da OBMEP, aliada a uma metodologia de Resolução de Problemas, constitui-se em um bom caminho para a construção de novos conteúdos e conceitos matemáticos? Para tentar responder a essa pergunta, este trabalho analisa a viabilidade e o potencial da utilização de questões da OBMEP na aprendizagem de novos conteúdos e conceitos relacionados ao tema Função, dentro do marco teórico da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A metodologia científica desta pesquisa é a Engenharia Didática, e foi levada a cabo com a aplicação de uma sequência didática sobre o tema Noções Gerais de Função em uma turma de 1º ano de Ensino Médio de uma escola da região do Alto Oeste Potiguar. Os instrumentos de coleta de dados foram o diário de campo, folhas de respostas de estudantes, questionários e fotografias. Os resultados mostraram ser possível desenvolver uma sequência didática com problemas da OBMEP, coerente com o currículo da Educação Básica. Tal aplicação, dentro do marco teórico escolhido, possibilitou a mobilização da noção intuitiva de função, influenciando na compreensão dos diferentes conceitos associados, na colaboração entre grupos, na autonomia e na atitude e predisposição para resolver problemas.

Palavras-chave: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Resolução de Problemas. Motivação. Aprendizagem - Matemática.

ABSTRACT

OBMEP has, among others, the objective of contributing to improving the quality of education, enabling a greater number of basic education students to have access to quality teaching material. In the area literature, however, there is little evidence about the use of this material as a complement in the approach to mathematical content and concepts, nor as a motivating element in the classroom. Based on the conjecture that alternative methodologies can awaken a taste for studying mathematics and developing skills that help in solving problem situations, a possible path is to work on OBMEP questions from a Problem Solving perspective. Along these lines, this work presents the following guiding question: Does the use of OBMEP questions, combined with a Problem Solving methodology, constitute a good way to construct new mathematical content and concepts? To try to answer this question, this work analyzes the feasibility and potential of using OBMEP questions in learning new content and concepts related to the theme Function, within the theoretical framework of the Mathematics Teaching-Learning-Assessment Methodology through Resolution of Problems. The scientific methodology of this research is Didactic Engineering, and was carried out with the application of a didactic sequence on the topic General Notions of Function in a 1st year high school class at a school in the Alto Oeste Potiguar region. The data collection instruments were the field diary, student response sheets, questionnaires and photographs. The results showed that it is possible to develop a didactic sequence with OBMEP problems, consistent with the Basic Education curriculum. Such application, within the chosen theoretical framework, enabled the mobilization of the intuitive notion of function, influencing the understanding of the different associated concepts, collaboration between groups, autonomy and attitude and predisposition to solve problems.

Keywords: Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools. Problem Solving. Motivation. Learning - Mathematica.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular
CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP – Comitê de Ética em Pesquisa
CGEE – Centro de Gestão e Estudos Estratégicos
DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais
DIREC – Diretoria Regional de Educação e Cultura
ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio
GTERP – Grupo de Trabalhos e Estudos em Resolução de Problemas
IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada
INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MCTI – Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações
MEC – Ministério da Educação
NCTM – Conselho Nacional dos Professores de Matemática
OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCN – Orientações Curriculares Nacionais
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
PIC – Programa de Iniciação Científica Jr.
PICME – Programa de Iniciação Científica e Mestrado
PISA – Programa Internacional de Avaliação de Alunos
POTI – Polo Olímpico de Treinamento Intensivo
RPM – Revista do Professor de Matemática
SBM – Sociedade Brasileira de Matemática
SEEC – Secretaria de Estado da Educação, da Cultura, do Esporte e do Lazer
TALE – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TCT – Teoria Clássica dos Testes
TRI – Teoria de Resposta ao Item

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

COMO CHEGUEI ATÉ AQUI

Quando me perguntam o porquê de ter tomado a decisão de ser professor, uma das primeiras coisas que me vem à cabeça é a sensação de ser útil aos outros, de saber que ajudei alguém a compreender algo, de que plantei a semente. De me sentir importante. Não um importante com traços arrogantes, mas como um reconhecimento por algo que eu ajudei a construir. É uma sensação única e, me parece, que a mera tentativa de transformar isso em palavras está fadada ao fracasso. É como relata Stephen King, no conto *O outono da inocência*, pertencente à coletânea *Quatro Estações*: “as coisas mais importantes são as mais difíceis de expressar. São coisas das quais você se envergonha, pois as palavras as diminuem – as palavras reduzem as coisas que pareciam ilimitáveis quando estavam dentro de você à mera dimensão normal quando são reveladas”.

Eu tinha 11 anos quando me senti importante pela primeira vez.

Tinha ido fazer uma atividade de matemática na casa de uma amiga. Éramos, em 2004, estudantes do 6º ano do ensino fundamental (antiga 5ª série). Sua mãe, vendo a forma como eu orientava a minha amiga na resolução das questões, convidou-me para ministrar aulas particulares à sua filha. E assim eu comecei a minha trajetória como *professor*: 5 dias por semana, uma hora por dia e um salário de 10 reais por mês.

Nove anos mais tarde já tinha quase 40 alunos e outros tantos na fila de espera. Todo esse tempo ministrando aulas particulares (que compreendia todas as disciplinas, inclusive até atividades do catecismo) só fez crescer em mim o desejo de lecionar. Formalizei isso ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN), em 2011, na cidade de Patu/RN, distante um pouco mais de 60 quilômetros da cidade em que residia, Martins/RN.

Apesar dos estágios, relatórios, monitorias, disciplinas (*ah, Análise Real!*), do trabalho como Assistente Administrativo (meu primeiro emprego formal) e da distância que tinha que percorrer diariamente, usando o ônibus cedido pela prefeitura, em nenhum momento da minha graduação eu pensei em desistir.

Isso veio um pouco mais tarde, em 2016, quando passei no concurso para professor efetivo do governo do Estado do Rio Grande do Norte.

Até então, eu acreditava que detinha quase toda a teoria que o curso exigia. Havia sido aprovado com boas notas nas disciplinas específicas e nas pedagógicas, com um índice de rendimento acadêmico acima de 9,0, conquistado três bolsas de monitoria, e sido bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid). Quanto à prática, achava também que a possuía. Mas, quando entrei na sala de aula como um Professor de Matemática, no 7º Ano B formado quase em sua totalidade por repetentes, na mesma escola em que havia estudado todo o segundo ciclo do ensino fundamental, eu nunca me senti tão pequeno. A mim não avisaram que além de professor, eu devia ser também psicólogo, médico, advogado, pai e irmão. Que muitos daqueles adolescentes que ali estavam vinham de lares desestruturados e que era minha função extrair o pouco do desejo pelos estudos que eles possuíam. Cada gota exigia de mim tamanho esforço que sim, eu pensei em desistir. O primeiro contato foi de rejeição da parte deles, e o meu foi de negação. Mas, como diz Lionel Shriver, em seu livro *Precisamos Falar sobre o Kevin*, "talvez seja possível granjear devoção quando se testa um antagonismo até o último limite" pois, depois de vários meses, eu passei a achar que pertencia àquele ambiente.

Em paralelo, exercia a função de professor substituto na universidade em que fiz a minha graduação. O contraste entre esses dois ambientes me fez imaginar como eu poderia me estabilizar nesse, sem deixar de lado aquele. A extensão e a pesquisa me proporcionaram isso.

Concluí o mestrado em 2017, pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Minha dissertação se propunha a fazer uma análise de conteúdo dos itens das provas da OBMEP e suas respectivas respostas, pautada nos pressupostos da Resolução de Problemas.

O primeiro contato que tive com a OBMEP foi justamente no ano de sua criação, em 2005. Era estudante do 7º ano do ensino fundamental e soube que iria participar da olimpíada poucos dias antes da data de aplicação. Isso se tornou frequente nos anos seguintes. Durante todo o restante do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, passei a enxergar a OBMEP como um momento de resolução de questões, em que, possivelmente, poderia me ofertar um certificado de menção honrosa. Não existia qualquer tipo de preparação ou um feedback das soluções e, o que me era mais frustrante, não conseguia enxergar a sua relação com os conteúdos que estava estudando. Na graduação, em conversa com os meus colegas, percebi que não estava sozinho.

Nos anos seguintes procurei investigar mais sobre a olimpíada. Enquanto bolsista do Pibid, participei do sub-projeto OBMEP onde ministrávamos aulas preparatórias para a competição. Como dito anteriormente, minha dissertação também foi sobre esse tema. Ao concluí-la, retornei à escola em que colhi os dados para a pesquisa, a mesma em que estudei e fui professor (nessa época, já era professor universitário efetivo), com o projeto de extensão *A resolução de problemas aplicada à OBMEP*. Além disso, fui membro de alguns projetos com propostas de olimpíadas. A saber: I Olimpíada Serrana de Matemática, I Olimpíada de

Matemática da UFERSA no Ensino Médio e a Olimpíada de Cálculo da Ufersa (que se encontra na sua IV edição).

Hoje vejo que as minhas frustrações em relação a OBMEP, enquanto estudante da Educação Básica, estavam mais concentradas em relação às metodologias utilizadas em sala de aula, à falta de tempo para se trabalhar com a OBMEP, à desvinculação com os conteúdos matemáticos estudados do que na olimpíada propriamente dita. Grande foi a minha surpresa, no processo de análise do Banco de Questões e das provas, com o filtro de procurar questões sobre o tema função, quando me deparo com uma miscelânia de temas que são trabalhados com frequência no currículo da Educação Básica.

Ainda sobre ser professor, ministrei aulas nos anos finais do Ensino Fundamental durante quase dois anos e, ao longo desse período, tive mais momentos bons do que ruins. Com o tempo fui sendo aceito pelos alunos e, alguns, tinham-me até como amigo. Procurei despertar neles o gosto por aprender e o desejo de prosseguir nos estudos. É com gratidão que lembro do dia em que me despedia das turmas por ter passado no concurso para professor universitário. Foi ali que eu compreendi o quanto eu precisei deles para me tornar o que sou. Hoje eu os vejo nos lugares e enxergo reconhecimento pelo que eu fiz. As provas, segundo eles, difíceis, são motivos de risadas e o sentimento de que dei a minha contribuição na formação de cada um é palpável.

Desde 2017 sou professor na Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O público-alvo é outro, as condições físicas são outras, o nível de exigência e dedicação aos estudos, projetos de extensão e pesquisa também são outros, mas ainda é forte dentro de mim aquela estranha sensação que tive pela primeira vez na casa da já falecida Chaguinha, a mãe de minha amiga: Eu continuo me sentindo importante.

1 INTRODUÇÃO[1]

A Educação Básica vem apresentando índices dignos de atenção nas últimas avaliações referentes à qualidade do ensino. O Ensino Médio, por exemplo, apesar de uma melhora em relação aos anos anteriores, obteve para o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), em 2021, a nota de 4,2, a mesma que possuía na última avaliação, realizada em 2019, época em que a meta era de 5,0 (Inep, 2022).

Outrossim, o desejo de aprender coisas novas, de saber se expressar de forma convincente frente aos problemas propostos em sala de aula ou fora dela é algo que deve ser estimulado nos alunos. Muitas vezes, no que se refere ao desenvolvimento de alguma atividade específica em certa disciplina, o “saber como”, “saber por quê” e o “saber utilizar” são tratados como sinônimos. A aprendizagem passa a ser rebaixada apenas à verificação de que o discente reproduziu de forma satisfatória as etapas que lhe foram apresentadas, chegando à solução do problema/atividade, sem levar em conta se tais etapas foram memorizadas de forma arbitrária e literal, ou se o discente relacionou ou não o novo conhecimento com os conceitos relevantes existentes na sua estrutura cognitiva.

A predisposição dos discentes para aprender é o que deve ser objetivado por aqueles que detêm o posto, muitas vezes superestimado, de “transmissores do conhecimento”. Talvez atualmente o maior desafio da Educação Básica seja justamente despertar no aluno esse interesse, de forma prazerosa.

Não é fato recente que diversas formas alternativas de ensinar são colocadas em prática e outras descartadas de tempos em tempos; as que dão bons resultados são chamadas de Tendências para a Educação Matemática (Flemming *et al.*, 2005). Entre elas se encontra a Resolução de Problemas.

Essa tendência vem ganhando cada vez mais espaço nas últimas décadas. Diversos autores (Schoenfeld, 1985; Carrillo, 1998; Pozo; Echeverría, 1998; Polya, 2006; Villa; Calejo, 2006; Dante, 2007; Onuchic *et al.*, 2014) apresentam uma definição própria sobre o que é um problema, mas se é unânime que o primeiro ponto que o caracteriza é a não apresentação de uma resposta imediata. A busca pela solução do problema requer uma reflexão superior à exigida por um exercício.

O ensino baseado nos pressupostos da Resolução de Problemas tira o aluno da sua zona de conforto e o faz buscar soluções não-triviais para as questões que lhe são apresentadas. A

[1] Parte desta introdução foi publicada por este autor nos anais do X Seminário Interno do Pecim.

atividade matemática passa a ser evidenciada quando os alunos desenvolvem estratégias de resolução. Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997) apontam a importância da Resolução de Problemas e a fundamenta em princípios, tais como:

> O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema; o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório; o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros *(problemas)*, o que exige transferências, retificações, rupturas; um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações; a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem. (Brasil, 1997, p. 32-33).

O ensino/aprendizagem com base na Resolução de Problemas é uma forma de enriquecer as aulas tradicionais de matemática. Ela desenvolve a habilidade de gerenciar informações, de criticidade, de abstração e de ampliação de conceitos e procedimentos matemáticos.

> É possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar o raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem no seu dia a dia, na escola ou fora dela. (Dante, 2007, p. 11-12).

Dante (1998), ainda sugere que a Resolução de Problemas desenvolve o raciocínio e o pensamento produtivo do aluno, além de oportunizar a aplicação da matemática em diversas áreas do conhecimento. A tríade realidade – cotidiano – contextualização influenciada pelo ambiente de resolução de problemas contribui para tornar a matemática mais acessível, fator esse que não passa despercebido pelos discentes, tornando-a mais atrativa.

Dentro da sala de aula, diversas ferramentas podem ser analisadas sob o aspecto da Resolução de Problemas: situações cotidianas vividas pelos alunos, que envolvem algum tipo de matemática; uma questão mais elaborada para ser resolvida em grupo; a introdução de um novo conteúdo partindo de um problema específico da área. Os próprios livros didáticos já trazem em suas páginas questões melhor contextualizadas, fugindo um pouco do tradicional “calcule e determine”.

O domínio das técnicas de resolução de problemas aliado à predisposição do aluno para aprender são pontos importantes para o fortalecimento da aprendizagem, em especial da aprendizagem significativa. Resta agora fazer a verificação através da avaliação.

Dentre as avaliações em larga escala existentes no Brasil, podemos destacar: A Prova Brasil (um dos componentes para o cálculo do Ideb), o Exame Nacional do Ensino Médio – Enem (principal responsável pelo ingresso de estudantes no ensino superior) e a OBMEP (maior olimpíada de matemática do mundo, em números absolutos).

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma competição anual, criada em 2005, e voltada a estudantes do Ensino Fundamental (anos finais) e do Ensino Médio. Promovida pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), já se consolidou como a maior olimpíada do Brasil. Segundo sua página oficial[2], em 2022, a olimpíada registrou um total de 18.159.636 inscrições, contemplando 99,78% dos municípios brasileiros.

Por contemplar todos os anos do segundo ciclo do ensino fundamental e do ensino médio, ela está diretamente relacionada a indicadores que medem a qualidade da Educação Básica, influenciando-os positivamente, como é o caso do Ideb (Soares; Candian, 2011). Além disso, segundo o seu site oficial, a OBMEP é regida por objetivos que vão desde “estimular e promover o estudo da Matemática” e “contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica” até “promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento”.

Apesar disso, tem-se percebido pouca motivação dos alunos diante das questões apresentadas, seja devido ao nível de dificuldade da maioria das questões; seja, aparentemente, pela baixa relação que elas apresentam com os conteúdos contemplados pelo currículo da Educação Básica, conforme apontam pesquisas como as de Neves (2016) e Teixeira e Moreira (2021).

Esse fato (a desmotivação) se intensifica, ainda, quando o único objetivo do uso das questões da OBMEP em sala de aula se resume ao intuito de que os estudantes obtenham êxito nessa olimpíada, uma vez que o número de alunos premiados, incluindo as menções honrosas, não atinge 0,5% do total de alunos inscritos, segundo dados contidos no próprio site da olimpíada. Diversos trabalhos caminham na direção desse ponto como, por exemplo, Goes (2017), Monteiro (2017) e Cruz (2019). São pesquisas que apresentam, majoritariamente, uma proposta de uso das questões da OBMEP como uma forma de treinar os alunos participantes e produzir campeões nesta olimpíada, tendo como base a metodologia de Resolução de Problemas.

Inserir a Resolução de Problemas dentro desse contexto pode ser uma alternativa viável. Segundo Polya (2006), o professor deve ter em vista dois objetivos ao apresentar ao aluno um

[2] http://www.obmep.org.br/

problema: o primeiro é auxiliá-lo na resolução daquilo que lhe é proposto; o segundo é possibilitar que o aluno desenvolva a capacidade de resolver futuros problemas que lhe serão apresentados. Ainda sobre isso, Carrillo (1998) – baseado em Branca (1997) – diz que a Resolução de Problemas pode ser vista como uma meta, um processo ou uma habilidade básica. Quando vista pelo professor dessa última forma, o autor comenta que ela pode auxiliar na organização do ensino diário de habilidades, conceitos e resolução de problemas; entretanto, o docente muitas vezes pode ser induzido, erroneamente, a separar os alunos entre aqueles que, segundo seu ponto de vista, possuem a habilidade de resolver problemas rotineiros (exercícios) e aqueles, dito mais avançados, que ficariam a cargo de resolver os problemas reais.

Indo de encontro a esse fato, a pesquisa aqui apresentada visa discutir possibilidades de utilização das questões da OBMEP sob a ótica da Resolução de Problemas, através de uma Sequência Didática para o ensino do conteúdo Noções Gerais de Função, na sala de aula de uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola localizada na região do Alto Oeste Potiguar, a fim de que a mesma se constitua de elemento motivador na formação e desenvolvimento de conceitos e conteúdos matemáticos, e na aprendizagem matemática.

Sabemos que ao professor é atribuída a função de mediador entre o conhecimento que está presente na estrutura cognitiva do discente e o conhecimento que ele pode vir a adquirir, através de uma aprendizagem significativa. Então, trabalhar a OBMEP como uma aplicação da Resolução de Problemas pode vir a se tornar uma alternativa coerente para a aquisição do conhecimento matemático e, por consequência, desenvolvimento das habilidades necessárias para abordar os mais variados problemas.

Esta pesquisa está dividida em oito capítulos. O primeiro trata desta introdução. O segundo se constitui através da problemática da pesquisa, onde apresentamos uma revisão de literatura sobre os estudos brasileiros que tratam da Resolução de Problemas e da OBMEP e, posteriormente, o tema e objetivo desta investigação. O terceiro capítulo é composto pela fundamentação teórica, que abrange discussões sobre a Resolução de Problemas, a OBMEP e o conceito de Função. O quarto trata dos procedimentos metodológicos, com destaque para a apresentação das fases da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e das fases da Engenharia Didática. O quinto capítulo envolve a concepção e estruturação da Sequência Didática e do Questionário, ambos propostos nessa pesquisa. No sexto capítulo caracterizamos a escola em que a pesquisa foi realizada, bem como os sujeitos da pesquisa e os encontros realizados. Por fim, o sétimo e o oitavo capítulos se destinam aos detalhamentos dos encontros realizados e das considerações finais, respectivamente.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentaremos uma revisão de literatura sobre as pesquisas brasileiras que tratam da Resolução de Problemas e da OBMEP. Tal levantamento auxiliou na proposição do nosso problema de pesquisa e do nosso objetivo.

2.1 ENTENDIMENTOS E USOS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E DA OBMEP: O QUE INDICAM AS PESQUISAS BRASILEIRAS?

Com o intuito de compreender e aprofundar as discussões sobre a Resolução de Problemas e a OBMEP, fez-se uma revisão de literatura de pesquisas que tratam destes dois temas, em nível de dissertações de mestrado e/ou teses de doutorado, realizadas por pesquisadores em programas de pós-graduação brasileiros.

Segundo Noronha e Ferreira (2000, p. 191), os trabalhos de revisão de literatura são

> estudos que analisam a produção bibliográfica em determinada área temática, dentro de um recorte de tempo, fornecendo uma visão geral ou um relatório do estado-da-arte sobre um tópico específico, evidenciando novas idéias, métodos, subtemas que têm recebido maior ou menor ênfase na literatura selecionada.

Sendo assim, buscou-se neste capítulo expor um panorama geral de como os pesquisadores brasileiros utilizam e entendem a Resolução de Problemas no ambiente de sala de aula, por intermédio de práticas voltadas para OBMEP, sob diferentes enfoques. As pesquisas são direcionadas para a prática docente no Ensino Básico, que é o público-alvo desta olimpíada.

Para a análise dos dados, recorreu-se a elementos da análise de conteúdo. Sendo assim, contou com etapas como: a pré-análise; a exploração do material; e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação (Bardin, 2016). Ademais, a estrutura deste capítulo foi baseada nos trabalhos de Reis (2017) e Justulin e Noguti (2017).

2.1.1 Mapeamento das pesquisas

Primeiramente, realizou-se um mapeamento da discussão selecionando pesquisas por meio das seguintes palavras-chave: *Resolução de Problemas, OBMEP, olimpíada.* Destacando aquelas que eram voltadas para a Educação Básica e que discorressem tanto sobre a Resolução de Problemas quanto sobre a OBMEP. Para isso, foi utilizado o operador AND[3] nas buscas *Resolução de Problemas AND OBMEP* e *Resolução de Problemas AND olimpíada*, e suas variações.

Foram organizados dois movimentos de seleção de pesquisas: (1) pesquisas disponíveis no *site* da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações[4], no período de 2002 a 2020; e (2) pesquisas disponíveis no *site* Catálogo de Teses & Dissertações – Capes[5], no período de 2013 a 2020.

A partir dessas buscas, realizadas no período de 24 a 27 de setembro de 2020, foram encontrados 94 trabalhos, sendo 93 dissertações e 1 tese. Do acesso a todos os trabalhos, foram realizadas outras filtragens, que apresentaram alguns processos de exclusão de pesquisas: (1) pesquisas que não apresentassem no título as palavras-chave supracitadas e cujo programa de pós-graduação não fosse na área de Ensino, Matemática e/ou Educação Matemática. Foram retidos 11 trabalhos; (2) pesquisas que não focassem na Resolução de Problemas e OBMEP, sendo excluídos os trabalhos que não apresentam qualquer discussão sobre tais tópicos. Foram retidos 32 trabalhos; (3) pesquisas que usassem o termo resolução de problemas como sinônimo de resolver problemas e utilizassem as questões da OBMEP em conjunto com outras questões, sem qualquer destaque dela. Foram retidos 24 trabalhos.

Dos 27 trabalhos resultantes, após uma leitura minuciosa, chegou-se a 15 trabalhos que constituem o *corpus*[6] desta pesquisa e que estão relacionadas na Tabela 01, a seguir:

---

[3] É um operador lógico que resulta na intersecção dos conjuntos de documentos que contiverem os termos usados.
[4] https://bdtd.ibict.br/vufind/
[5] https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/
[6] O conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos (Bardin, 2016, p. 126).

Tabela 01 – Pesquisas analisadas – 2002 a 2020.

Autor/Ano/Nível	Título	Instituição
Cordeiro (2009) Dissertação	Análise e classificação de erros de questões de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas	Unigranrio
Furlan (2011) Dissertação	MATIDA: tempo e espaço de atenção no olhar-experiência de uma professora	UFRGS
Fidelis (2014) Dissertação	A OBMEP sob uma perspectiva de Resolução de Problemas	UnB
Pena (2014) Dissertação	Experiências docente vivenciadas, dentro e fora da sala de aula, em tempos de OBMEP de 2005 a 2013	UFTM
Martins (2015) Dissertação	Um estudo sobre as estratégias de resolução de questões da OBMEP	UFRGS
Leitão (2015) Dissertação	Uma Proposta Pedagógica usando Resolução de Problemas Visando Melhorar a qualidade do Ensino Básico	UFPA
Faxina (2016) Dissertação	Uma sequência didática sobre porcentagem e tratamento da informação utilizando problemas das OBMEP	UFSCar
Valério (2017) Dissertação	Resolução de Problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula.	USP
Paz (2017) Dissertação	O Princípio Fundamental da Contagem através da metodologia de Resolução de Problemas, com foco nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas	Unesp
Ferreira (2017) Dissertação	Resolução de Problemas de Probabilidade no Ensino Médio: uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão	UFMA
Goes (2017) Dissertação	Desenvolvendo e aplicando a Matemática: um projeto para produzir vencedores na OBMEP e elevar os indicadores sociais do município de Branquinha – AL	UFAL
Monteiro (2017) Dissertação	Introdução ao Treinamento Olímpico: uma proposta para os alunos da rede pública estadual	UFES
Silva (2017) Dissertação	Análise e avaliação das questões dos níveis 1 e 2 da primeira fase da OBMEP sob uma perspectiva de Resolução de Problemas	UFERSA
Cruz (2019) Dissertação	Estudo de Caso: A OBMEP no colégio Tiradentes da polícia militar de MG – Unidade Governador Valadares	UFVJM
Silva (2019) Dissertação	Indução de estratégias de aprendizagem matemática nas questões das provas da OBMEP	UEPB

Fonte: O autor (2020).

A partir da leitura de todas as pesquisas identificadas, foi possível reconhecer interseções entre elas, onde a Resolução de Problemas e a OBMEP foram tratadas como uma abordagem metodológica, com diferentes focos. Sendo assim, realizou-se a construção das unidades de análise, que foram estruturadas em quatro eixos:

1) Descrição das pesquisas;
2) Fundamentação teórica utilizada em Resolução de Problemas e em OBMEP;
3) A forma de se trabalhar a Resolução de Problemas e a OBMEP;
4) Como os pesquisadores entendem a Resolução de Problemas.

A seguir, encontram-se as especificidades de cada um desses eixos.

2.1.2 Descrição das pesquisas

Através de um momento reflexivo da leitura das pesquisas, com o intuito de apresentar e discutir as propostas metodológicas, foram organizados três eixos norteadores de análise: uso da OBMEP na sala de aula, auxiliada pela metodologia de Resolução de Problemas, com vista na melhoria do ensino-aprendizagem; uso de estratégias de resolução de problemas com o intuito de melhorar o desempenho dos estudantes na OBMEP; e análise das respostas dos estudantes na OBMEP, sob uma perspectiva de Resolução de Problemas.

O primeiro eixo é constituído por pesquisas que utilizam ou sugerem utilizar as questões e/ou os materiais disponibilizados pela OBMEP na sala de aula, com ou sem adaptação, com vistas na melhoria do ensino, na mudança de prática do professor, na motivação dos discentes ou na formação de conceitos e do raciocínio matemático. São pesquisas que, em sua maioria, apresentam proposta de intervenção e defendem a utilização da OBMEP na sala de aula, para além do momento da aplicação das provas. O segundo eixo foca em pesquisas que possuem propostas de ensino que têm o intuito de produzir vencedores na OBMEP, a partir do treinamento ou desenvolvimentos de habilidades com destaque para a resolução de problemas. São, em geral, pesquisas de cunho quantitativo. O terceiro eixo é formado por pesquisas que procuram analisar as formas que os alunos resolvem os problemas da OBMEP a partir da análise dos erros cometidos por eles mesmos na referida prova, ou pesquisas que oferecem um estudo sobre a olimpíada em si, analisando descritores como o nível de dificuldade ou elaboração dos itens.

Tal classificação não implica, necessariamente, que pesquisas agrupadas em determinado eixo não possuem interseção alguma com os demais. Além disso, foi dado um maior destaque ao que foi desenvolvido ao longo da pesquisa, já que alguns trabalhos apresentam certas incoerências entre problema/objetivo da pesquisa e o que foi realmente feito no decorrer das páginas.

2.1.2.1 Uso da OBMEP na sala de aula, auxiliada pela metodologia de Resolução de Problemas, com vista na melhoria do ensino-aprendizagem

Este eixo dirige-se a pesquisas que desenvolveram práticas de ensino com foco prioritário para a sala de aula. Apresenta-se aqui uma divisão em três sub-eixos: pesquisas que apresentam possibilidades de utilização de materiais prontos oriundos da OBMEP e/ou plataformas de ensino com foco em olimpíadas; pesquisas que desenvolvem propostas de atividades voltadas para o ensino de matemática; e o discurso de pesquisadores que afirmam utilizar a OBMEP sob a perspectiva da Resolução de Problemas em sua prática docente.

2.1.2.1.1 Pesquisas que apresentam possibilidades de utilização de materiais prontos oriundos da OBMEP e/ou plataformas de ensino com foco em olimpíadas

Nesse sub-eixo encontram-se duas pesquisas: a de Fidelis (2014) e a de Leitão (2015).

O trabalho de Fidelis (2014) não possui um problema de pesquisa explícito, mas se pode inferir que a intenção do autor é debruçar-se sobre o seguinte questionamento: Como o material disponibilizado pela OBMEP pode melhorar o ensino de Matemática, através da estratégia de ensino com foco na Resolução de Problemas? Tendo isso em vista, o objetivo de sua pesquisa é "mostrar como o professor pode fazer bom uso do material didático disponibilizado pelo projeto para aumentar o interesse de seus alunos e conseguir a melhoria do ensino da Matemática" (Fidelis, 2014, p. 20-21).

A pesquisa de campo foi realizada com estudantes de uma escola localizada na Região Administrativa de Brazlândia, no Distrito Federal, divididos em dois grupos: uma turma do 2º ano do Ensino Médio e estudantes do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Para o primeiro grupo, foi aplicada uma atividade que consistia em três problemas da OBMEP, e tinha o objetivo de ajudar os discentes a desenvolverem a habilidade de resolver problemas e diagnosticar possíveis deficiências nesse processo. Para o segundo grupo, a atividade apresentada tinha o intuito de analisar os erros cometidos pelos alunos. Consistiu em três problemas dissertativos do banco de questões da OBMEP, e os estudantes foram incentivados a escrever seu modo de abordar os problemas, ainda que não chegassem propriamente na solução. Dos resultados, destaca-se a dificuldade dos alunos ao interpretar um texto. Notou-se também que alguns alunos pensam que encontrar uma solução é buscar um algoritmo, além de não conseguirem aplicar os conhecimentos prévios aos problemas. Tentando sanar as dificuldades de se trabalhar tais questões na sala de aula – relacionadas ao tempo –, o autor propõe o uso de novas tecnologias.

O trabalho de Leitão (2015) teve o objetivo de “fornecer ferramentas aos professores e alunos do ensino fundamental das Escolas Públicas do Estado do Pará sobre o ensino da matemática” (Leitão, 2015, p. 7). Para isso, elenca uma série de sites/materiais disponíveis na web que contemplasse todos os níveis de ensino e público, desde o aluno até o professor.

Além das sugestões de material didático, o autor apresenta as questões da 1ª e 2ª fases do nível 3 da OBMEP 2010, acompanhada de uma breve análise da prova, com foco na sua estrutura, conteúdo abordado e nível de dificuldade. É dito que foram gravados vídeos com todas as soluções das questões, mas não é feita qualquer discussão sobre tal processo, nem mencionado em que veículo tais vídeos estão disponíveis.

Nas conclusões, o autor ratifica que o material didático disponível na internet se configura como um forte aliado para o docente e discente. Sobre a análise das provas verificou-se “que os conteúdos aplicados na Primeira Fase são acessíveis aos alunos que participam de turmas regulares, sem um treinamento específico, o que possibilita ao professor trazer questões deste certame para suas turmas regulares” (Leitão, 2015, p. 48). Já a segunda fase exige uma maior dedicação. Finaliza afirmando que as resoluções em vídeos das questões se configuram como a contribuição do trabalho à sociedade.

2.1.2.1.2 Pesquisas que desenvolvem propostas de atividades voltadas para o ensino de matemática

Os trabalhos de Martins (2015), Faxina (2016), Valério (2017), Paz (2017) e Silva (2019) foram agrupados neste sub-eixo.

A dissertação de Martins (2015) teve como objetivo o desenvolvimento de uma proposta de elaboração de uma sequência de atividades ou material didático que evidenciem as estratégias de resolução dos alunos. Além disso, buscou-se responder a seguinte pergunta norteadora: “As estratégias desenvolvidas pelos alunos para a resolução das provas da OBMEP contribuem para a aprendizagem e para o desenvolvimento do raciocínio matemático?” (Martins, 2015, p. 22).

A pesquisa foi realizada com 52 alunos de duas escolas da rede estadual de ensino situadas no litoral norte do Rio Grande do Sul, dos quais 10 estavam classificados para a 2ª fase da olimpíada. Foram escolhidas questões discursivas da segunda fase da OBMEP, que contemplasse os três níveis e com foco nas questões transversais. As atividades tinham o objetivo de “observar as estratégias utilizadas no seu desenvolvimento, analisar e compreender como acontece a Aprendizagem e o Raciocínio dos alunos no processo educativo” (Martins, 2015, p. 39). Das análises, a pesquisadora expressa que a busca por solução dos problemas, a partir das estratégias registradas, ajuda na compreensão dos conceitos e conteúdos matemáticos. Além de auxiliar no desenvolvimento do raciocínio matemático e na aprendizagem.

O trabalho de Faxina (2016) contou com a colaboração de 56 alunos de duas turmas do 8º ano de uma escola municipal da cidade de Campinas, e consistiu na aplicação de uma sequência didática que contemplasse as quatro fases da Engenharia Didática, com problemas da OBMEP sobre os conteúdos Porcentagem e Tratamento da Informação. Seu objetivo foi o de “apresentar novas possibilidades na inserção de conteúdos, visando uma mudança na postura tanto dos professores quanto dos alunos, de forma a tornar a aprendizagem mais significativa” (Faxina, 2016, p. 14).

De forma geral, os alunos se mostraram empolgados com as atividades propostas e a pesquisadora afirma que muitas dificuldades puderam ser sanadas a partir das autoavaliações dos discentes. As avaliações foram aplicadas ao final de cada bloco e mostraram, para alguns problemas, que os alunos compreendiam o conteúdo de forma satisfatória. A autora destaca ainda uma certa evolução no resultado da 1ª fase da OBMEP dos alunos do 8º ano pesquisados. No comparativo dos alunos que realizaram o projeto com os que não realizaram, teve-se seis e dois alunos selecionados, respectivamente. A autora afirma uma evolução dos alunos ao longo das atividades. Ao final do primeiro bloco os discentes já eram mais autônomos nos processos de resolução das questões. A partir do segundo bloco, já conseguiam utilizar a linguagem matemática com mais propriedade e transferi-la para a escrita. Nos dois últimos blocos, os alunos adquiriram mais confiança ao realizar as atividades. Sendo assim, a partir desses resultados, “concluímos que a abordagem do tratamento da informação por meio da resolução de problemas da OBMEP motivou os alunos, despertando o seu interesse pela Matemática, e proporcionando uma melhor compreensão dos conceitos” (Faxina, 2016, p. 90).

O trabalho proposto por Valério (2017) possui a seguinte questão norteadora: “Quais as contribuições da Resolução de Problemas proposta por Polya ao utilizar questões da OBMEP em sala de aula?” (Valério, 2017, p. 11). Seu objetivo é centrado em “contribuir para evitar o fracasso do ensino aprendizagem em matemática” (Valério, 2017, p. 22). Para atingi-lo, a autora se propõe a apresentar uma atividade voltada para o auxílio no desenvolvimento de conceitos matemáticos em sala de aula.

Classifica sua pesquisa como pesquisa-ação qualitativa. Esta foi aplicada a 21 alunos do 8º ano B do Ensino Fundamental de uma escola de tempo integral da Rede Pública Estadual

Paulista, em um encontro único com duração de 100 minutos. A pesquisa foi centrada na resolução de um problema principal, retirado do banco de questões da OBMEP, que abordava o conteúdo área de regiões planas, utilizando recombinações das peças do Tangram, e tinha o objetivo de desenvolver habilidades relacionadas ao referido conteúdo, tais como a composição e decomposição de figuras planas, as suas representações e classificações.

Dentre os resultados obtidos, a autora destaca que os discentes se mostraram participativos e interessados quando confrontados com problemas desafiadores, auxiliados por problemas introdutórios e materiais manipulativos, e que isso facilitou a aprendizagem. Ela explicou que só foi revelado para a turma que o problema principal era da OBMEP após o final da atividade, evitando pré-conceitos e ansiedade. Destacou que o teor do problema facilitou o uso de material manipulável e, com isso, tornou a questão mais fácil de resolver.

O trabalho de Paz (2017) tem como tema uma abordagem sobre o Princípio Fundamental da Contagem usando questões da OBMEP, através da Metodologia de Resolução de Problemas. Seu problema de pesquisa, apesar de não explícito, caminha na direção do seguinte questionamento: Trabalhar o Princípio Fundamental da Contagem utilizando as questões da OBMEP, através da metodologia de Resolução de Problemas, pode fazer com que os alunos sejam capazes de construir o seu próprio conhecimento e elaborar suas próprias estratégias para resolver as questões? O objetivo da pesquisa centra-se em "apresentar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) através da metodologia de Resolução de Problemas, dando ênfase na prática pedagógica com questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)" (Paz, 2017, p. 7).

A autora aplicou a proposta de sua pesquisa a 20 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino do município de Bastos, interior de São Paulo. As atividades consistiram na elaboração e implementação de uma Sequência Didática, dividida em três etapas: avaliação diagnóstica, devolutiva das questões, e avaliação da aprendizagem.

Dos resultados obtidos, a autora destaca que os discentes conseguiram traçar estratégias e tomar decisões ao resolver os problemas. Houve também uma melhora na aprendizagem e um aumento na motivação dos alunos, o que justifica a abordagem do Princípio Fundamental da Contagem através da Resolução de Problemas. Os discentes se tornaram mais autônomos e mais confiantes diante dos desafios propostos e isso se deu, em parte, pelo reconhecimento das questões apresentadas nas atividades refletidas em situações do cotidiano.

A pesquisa de Silva (2019) parte do seguinte questionamento: "o uso, em sala de aula, de problemas que conduzam os alunos a criarem esquemas/estratégias de resolução, realmente contribui para a formação de conceitos e de elementos constituintes de campos conceituais?" (Silva, 2019, p. 13). O trabalho intenciona analisar possíveis contribuições que o uso da resolução de problemas presentes/adaptados na/da OBMEP pode ter para o ensino de matemática, como também na formação de conceitos matemáticos e elaboração de esquemas para resolução de problemas.

A pesquisa foi aplicada a 31 alunos do 7º ano de uma escola de ensino fundamental e médio localizada em Campina Grande, Paraíba. Consistiu em seis tarefas com questões voltadas para a preparação das turmas para Olimpíadas de Matemática, mais especificamente para a OBMEP.

Os resultados mostraram que houve, segundo o autor, exploração dos significados envolvidos nas tarefas, através das diferentes abordagens dos problemas, maturação dos esquemas ou adaptação de conhecimentos anteriores. Além do "desenvolvimento de habilidades, por parte dos alunos, para relacionar a aquisição do conhecimento e interagir com situações problemas valorizando as ações, utilização de estratégias e a pluralidade de ataques, quando colocados em confronto com tais situações" (Silva, 2019, p. 58). Foi observado também que, tanto nas respostas corretas como nas erradas, os alunos utilizaram os esquemas e estratégias relacionados ao conceito a se formar, criando esquemas de resolução. A linguagem (escrita ou falada) dos discentes também evoluiu durante as realizações e discussões das tarefas.

2.1.2.1.3 O discurso de pesquisadores que afirmam utilizar a OBMEP sob a perspectiva da Resolução de Problemas em sua prática docente

Duas pesquisas contemplam esse sub-eixo: a de Furlan (2011) e a de Pena (2014).

Furlan (2011) desenvolveu uma pesquisa com base em sua percepção como professora do ensino fundamental sobre *experiência* e *experimento*, através de um grupo de estudos denominado Matida (Matemática + Divertida). O trabalho descreve a formação da Matida e os relatos dos encontros, com destaque para algumas atividades, dentre elas a elaboração coletiva de um problema. Seu problema de pesquisa centra-se no seguinte questionamento:

> De que forma é possível nos expormos ao inusitado e percebermos sua ocorrência, nos dias de hoje, em que o excesso de trabalho, opinião e informação ocupam muito de nosso tempo, particularmente quando estamos inseridos num contexto escolar de estudo, formulação e resolução de problemas de matemática? (Furlan, 2011, p. 14).

A autora classifica sua pesquisa como um Estudo de Caso, constituído por 11 alunos das 5ª e 6ª séries (atuais 6º e 7º anos), dos quais 5 estavam classificados para a 2ª fase da OBMEP. Foi realizado um total de 9 encontros no contraturno das aulas.

Ao longo da pesquisa, a autora expõe que o objetivo dos alunos era estudar matemática; alguns, tendo como consequência, a preparação para a 2ª fase da OBMEP. Houve formulação e resolução de problemas de matemática, com destaque para os passos que levaram às soluções, além de aprimoramento da escrita matemática. Nas palavras da autora: “A Matida tornou-se um ambiente, no qual o coletivo dos alunos agia de forma cooperativa, colaborando, compartilhando e atuando simultaneamente para o mesmo fim: para resolver e formular problemas e para descrever o processo de resolução” (Furlan, 2011, p. 28).

A dissertação de Pena (2014) é o resultado das experiências vivenciadas na prática docente da autora com foco na Resolução de Problemas e na OBMEP, e tem o objetivo de fazer uma análise, seleção e compartilhamento das práticas pedagógicas presentes no componente curricular Matemática, com foco na metodologia de Resolução de Problemas no ambiente de OBMEP.

A pesquisa teve como público-alvo os estudantes da 2ª e 3ª séries do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino situada em Uberlândia, Minas Gerais. O material analisado foi selecionado do período de 2005 a 2013. Foi feita uma análise histórica da escola e sua participação na OBMEP, contando com pesquisas estatísticas, atividades em sala de aula e conversas informais com egressos. Dispuseram-se de filmagens, fotos, entrevistas, roteiros de homenagens da OBMEP e análise das escritas dos alunos nas atividades.

No período de 2005 a 2013 a escola contou com 4 medalhas de ouro, 19 medalhas de prata, 47 medalhas de bronze e 298 menções honrosas na 2ª fase da OBMEP. Os resultados são excelentes, e a autora ainda defende que a OBMEP deve ser para todos, não incentivando o caráter competitivo da olimpíada e assumindo o desafio de utilizar a OBMEP como um meio de promover a socialização e a aprendizagem dos alunos.

As atividades mostraram um novo olhar sobre a OBMEP e sobre a Matemática, fazendo com que os discentes percebessem a importância de se resolver um problema. Provocou, também, nos professores envolvidos, uma reflexão na sua prática docente, mobilizando-os a proporcionar aos discentes um ensino de qualidade. A autora ainda atribui à OBMEP a função de promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento, conforme expressa o seu regulamento.

2.1.2.2 Uso de estratégias de Resolução de Problemas com o intuito de melhorar o desempenho dos estudantes na OBMEP

Foram elencadas três pesquisas: a de Monteiro (2017), a de Goes (2017) e a de Cruz (2019).

O trabalho de Monteiro (2017) parte da elaboração e implementação de uma Sequência Didática com o intuito de melhorar o desempenho dos alunos na OBMEP. Com isso, é desenvolvida uma proposta de treinamento olímpico realizada com 20 alunos do Ensino Médio de uma escola da rede estadual do município de Serra, Espírito Santo, através de quatro sequências didáticas, desenvolvidas ao longo de 14 encontros, e auxiliadas por problemas oriundos das provas da OBMEP. Também foi aplicado um questionário sobre o que os alunos pensam sobre a avaliação da OBMEP e, em seguida, dois testes.

As análises dos encontros consistiram em o autor apresentar o problema proposto, expor o que era esperado que os discentes fizessem, apontar as dificuldades encontradas pelos alunos e interpretar as soluções obtidas, falando também do quantitativo de acertos. Em relação ao questionário, foi identificado que os alunos desconhecem as premiações da OBMEP, classificam a prova como muito difícil e afirmam que os docentes não oferecem qualquer preparação para a prova. Os testes indicaram que poucos alunos desenvolveram os cálculos ao responder determinado problema, deixando a questão por responder ou apenas assinalando a opção que achavam que era a correta.

Apesar disso, o autor expõe que houve envolvimento dos alunos nas atividades e que o interesse em participar da OBMEP foi acentuado. Os conteúdos trabalhados foram bem recebidos, havendo o compartilhamento do que cada discente já sabia sobre o assunto. Outro ponto é que as atividades foram desenvolvidas de forma gradual em relação à dificuldade, possibilitando notar a "existência do aprendizado" (Monteiro, 2017, p. 62). É dito também que os discentes passaram a se destacar nas aulas, "pois o medo de questionar já não existia mais" (Monteiro, 2017, p. 62).

A dissertação de Goes (2017) apresenta um projeto chamado *Desenvolvendo e Aplicando a Matemática*, cujo intuito era o de melhorar o desempenho dos alunos na OBMEP, produzindo discentes vencedores, e aplicado em quatorze escolas de Ensino Fundamental localizadas na cidade de Branquinha, Alagoas, durante os anos de 2015 e 2016.

O objetivo do estudo é, portanto,

> melhorar a qualidade no ensino-aprendizagem de matemática no município em questão, dando ênfase ao uso das questões da OBMEP no cotidiano escolar, visando alcançar resultados significativos dos alunos na referida competição, assim como nas avaliações a nível nacional, estadual e municipal. (Goes, 2017, p. 8).

O projeto foi dividido em três fases: na primeira fase foram realizadas formações pedagógicas com os professores, palestras motivacionais, entrevistas e questionários com os pais, professores e alunos. Foram também realizadas formações continuadas com os professores de Matemática com foco nos eixos temáticos da OBMEP. Além de aplicados simulados mensais aos alunos do 6º ao 9º ano do município. Na segunda fase, que ocorreu em três das quatorze escolas, foram realizados treinamentos, através de simulados e competições, com as questões da OBMEP. A terceira fase contemplou todas as quatorze escolas e foram ministrados aulões e simulados, além de atividades lúdicas.

Sobre os resultados obtidos, o autor expõe um maior interesse por parte dos alunos na aprendizagem matemática e um melhoramento no desempenho dos mesmos na sala de aula e na OBMEP, já que de 2005 a 2014 as escolas do município não ganharam sequer uma menção honrosa. Em 2015 foram 2 menções honrosas e em 2016 foram 6 menções honrosas e 2 medalhas de bronze. Além disso, houve um aumento no Ideb médio das escolas, que passou de 2,4 pontos em 2013 para 3,8 pontos em 2015.

Cruz (2019) buscou fazer uma análise do desempenho dos estudantes do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais, unidade de Governador Valadares, na OBMEP 2016 e 2017. Com isso, o objetivo do trabalho foi "investigar de que forma as estratégias aplicadas na preparação para a OBMEP do referido colégio teriam influenciado no bom desempenho dos estudantes" (Cruz, 2019, p. 7). Para isso, mostrou que a utilização de recursos tecnológicos como ferramenta de apoio pode fortalecer a preparação dos competidores. É realizada, também, uma análise dos vários programas e portais que tem como público-alvo os estudantes que participam de tais olimpíadas. O trabalho é considerado um Estudo de Caso, sendo o público-alvo os alunos que participaram da OBMEP na escola supracitada. São analisadas, segundo o autor, as metodologias utilizadas durante a preparação dos estudantes para a olimpíada, sendo que apresentaram excelentes resultados.

Essa preparação resultou, em 2016, em 14 premiações, sendo 1 medalha de prata, 3 medalhas de bronze e 10 menções honrosas. No ano de 2017, dos 37 estudantes participantes do projeto e selecionados 2ª fase da OBMEP, 30 receberam algum tipo de premiação, sendo 4 medalhas de prata, 7 medalhas de bronze e 19 menções honrosas.

2.1.2.3 Análise das respostas dos estudantes na OBMEP, sob uma perspectiva de Resolução de Problemas

Três pesquisas constituem esse eixo: a de Cordeiro (2009), a de Ferreira (2017) e a de Silva (2017).

Cordeiro (2009) desenvolveu uma pesquisa cujo intuito era analisar, identificar, classificar e quantificar os erros mais frequentes nas questões da 1ª fase OBMEP, com foco nos itens de geometria, a partir das análises e classificações dos erros. O objetivo geral do trabalho foi, portanto, "analisar as resoluções e tentativas de resoluções de alunos do ensino médio em geometria plana nas questões da OBMEP" (Cordeiro, 2009, p. 38).

Quanto à metodologia, o autor considera o trabalho como uma investigação de natureza mista, com aspectos quantitativos e qualitativos. Ela foi aplicada a 28 alunos do ensino médio de uma escola do município de Nova Iguaçu, dos quais 25 haviam sido selecionados para a 2ª fase da OBMEP, e consistiu em etapas como aplicação de provas, entrevista e análise e classificação dos erros cometidos.

De acordo com o autor, as maiores dificuldades que entraram em evidência foram problemas com interpretação de texto e a deficiência em conhecimentos prévios. Os erros relacionados à dificuldade com a linguagem matemática corresponderam a 59% do total, já os devido à deficiência de pré-requisitos foi de 22%.

Ferreira (2017) desenvolveu sua dissertação com o intuito de identificar, analisar e classificar os principais erros cometidos por estudantes do ensino médio do estado do Maranhão em questões de probabilidade contidas no nível 3 OBMEP, nos anos de 2015 e 2016. Sendo assim, seu trabalho parte de questionamentos e percepções resumidas, por este pesquisador, no seguinte problema: conhecer as dificuldades dos alunos, a partir da análise dos erros nas questões de probabilidade da OBMEP, pode oferecer subsídios com vista na melhoria do processo de ensino e aprendizagem?

Segundo o autor, a pesquisa é classificada tanto exploratória e explicativa como bibliográfica e documental. Foi analisada a sexta questão de 50 provas da 2ª fase da OBMEP dos anos supracitados e escolhidas dentre as provas de 102 municípios do estado do Maranhão.

Os resultados foram apresentados por meio de gráficos e tabelas, além do percentual de erros correspondente a cada categoria elencada. Eis algumas: erros de interpretação na leitura, erros na definição dos casos favoráveis, erros na definição do espaço amostral, erros no uso de alguma definição auxiliar a solução, erros na redação da solução, erros em operações aritméticas. O autor destaca que a maioria dos alunos compreende a definição clássica de probabilidade, porém, há uma deficiência em saber como aplicá-la na resolução dos problemas. Além disso, destacou a dificuldade existente em organizar e apresentar as etapas de solução, além da deficiência de interpretação.

O intuito do trabalho de Silva (2017) foi fazer uma análise e avaliação das questões da OBMEP respondidas por estudantes de uma escola de ensino fundamental, sob uma perspectiva de Resolução de Problemas. O objetivo geral da dissertação é "fazer uma análise de conteúdo dos itens das provas da OBMEP e suas respectivas respostas, pautada nos pressupostos da Resolução de Problemas" (Silva, 2017, p. 13).

Sobre os procedimentos metodológicos, a pesquisa contou com a análise e avaliação das provas da primeira fase da OBMEP, nos níveis 1 e 2 do ano de 2016, por intermédio dos gabaritos de 184 alunos de uma escola do município da região interiorana do estado do Rio Grande do Norte, sendo 120 do nível 1 e 64 do nível 2. A pesquisa se fundamenta nos dois primeiros parâmetros da Teoria Clássica dos Testes (TCT), para a análise geral dos gabaritos, a saber: o índice de dificuldade da questão e o índice de discriminação.

O autor ainda evidencia a necessidade da primeira fase da OBMEP ser mais acessível aos discentes, uma vez que os resultados mostraram que nenhuma das quarenta questões analisadas foi classificada como fácil. Além disso, foram identificados problemas na elaboração das questões, já que muitas delas foram classificadas como deficientes, devendo ser rejeitadas.

2.1.3 A fundamentação teórica utilizada em Resolução de Problemas e em OBMEP

Ao se analisar as referências bibliográficas dos trabalhos que constituem o *corpus* desta revisão de literatura, pode-se verificar que 13 dos 15 trabalhos analisados citam o livro *How to Solve It*[7], do matemático húngaro George Polya (1887 – 1895), originalmente publicado em 1945 e que se tornou, ao longo dos anos, a principal referência em Resolução de Problemas. Outro trabalho seu, *O ensino por meio de problemas*, publicado pela Revista do Professor de Matemática (RPM), também aparece entre as fontes mais citadas, com três menções.

Logo em seguida vem o livro do pesquisador brasileiro Luiz Roberto Dante, *Didática da resolução de problemas de matemática*, em diferentes edições e que foi citado em 9 trabalhos. O pesquisador, conhecido nacionalmente por seus livros didáticos de matemática voltados para a Educação Básica, ainda possui outro livro, *Formulação e resolução de problemas de matemática*, citado em 3 trabalhos.

[7] *Como resolver*, em tradução livre. A versão brasileira ganhou o título de *A arte de resolver problemas.*

A pesquisadora brasileira Lourdes de la Rosa Onuchic também é um nome frequente em trabalhos voltados para a Resolução de Problemas. Através do GTERP[8], ela vem desenvolvendo pesquisas com foco nessa metodologia de ensino, com destaque para os processos de Ensino, Aprendizagem e Avaliação. Seu artigo *Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*, escrito em parceria com a pesquisadora brasileira Norma Suely Gomes Allevato, é referenciado em 5 trabalhos. Seu artigo intitulado *Ensino-aprendizagem de Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas* é citado em 3 trabalhos.

A Tabela 02, a seguir, traz um resumo dos principais trabalhos em Resolução de Problemas que constituíram o arcabouço teórico das pesquisas analisadas, sendo elencados aqueles que possuíram três citações ou mais.

[8] Grupo de Trabalhos e Estudos em Resolução de Problemas, criado em 1992 pela pesquisadora.

Tabela 02 – Principais trabalhos referenciados em Resolução de Problemas.

Trabalho	Citado por
POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de janeiro: Interciência, Edições: 1985, 1986, 1995, 2006.	Furlan (2011), Fidelis (2014), Pena (2014), Leitão (2015), Martins (2015), Faxina (2016), Ferreira (2017), Goes (2017), Monteiro (2017)*, Paz (2017), Silva (2017), Valério (2017) e Silva (2019).
DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática.** São Paulo: Ática, Edições:1989, 1991, 1994, 1995, 1998, 2005, 2007, 2010.	Cordeiro (2009), Fidelis (2014), Martins (2015), Faxina (2016), Paz (2017), Silva (2017), Valério (2017), Cruz (2019) e Silva (2019).
ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N.S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas In:2. BICUDO, Maria Aparecida Viggiane; Borba, Marcelo de Carvalho(Org.) **Educação matemática:** pesquisa em movimento. Cortez editora. 2004.p.213-230.	Cordeiro (2009), Fidelis (2014), Paz (2017), Silva (2017) e Valério (2017).
POZO, J. L.; ECHEVERRÍA, M. P. P.; CASTILLO, J. D.; CRESPO, M. A. G.; ANGÓN, Y. P. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** Porto Alegre: ArtMed, 1998.	Martins (2015), Paz (2017), Silva (2017), Valério (2017).
POLYA, G. O ensino por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática**, n. 7, p. 11-16, 2º sem. 1985.	Leitão (2015), Paz (2017) e Valério (2017).
DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** teoria e prática. São Paulo: Ática, 2010, 191 p.	Furlan (2011), Martins (2015) e Goes (2017).
ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999.	Martins (2015), Paz (2017), Silva (2019).

* O trabalho de Monteiro (2017) cita o livro do Polya no corpo da pesquisa, mas não o menciona nas referências bibliográficas.

Fonte: O autor (2020).

De maneira geral, as pesquisas em Resolução de Problemas que constituíram as referências bibliográficas dos trabalhos analisados, tratam de diferentes aspectos sobre essa tendência em Educação Matemática. Sem a intenção de rotulá-los predominantemente em alguma abordagem, há aquelas que propõem procedimentos sistemáticos para se resolver um problema (Dante, 1989; Pozo, et. al., 1998; Polya, 2006; Tao, 2013; Allevato; Onuchic, 2014), aquelas com propostas voltadas para a sala de aula (Polya, 1985; Onuchic, 1999; Pires; Gomes, 2001; Vila; Callejo, 2006; Allevato; Onuchic, 2009; Dante, 2010; Romanatto, 2012), aquelas voltadas para formação (inicial e/ou continuada) de professores (Palhares, 2004; Szczepaniak, 2015); aquelas que situam historicamente a Resolução de Problemas (Onuchic; Allevato, 2004; Onuchic; Allevato, 2011); dentre outros.

A respeito da OBMEP, todos os pesquisadores utilizaram o site da olimpíada em suas pesquisas. Seja para reproduzir alguns trechos do regulamento (tais como objetivos, descrição dos níveis e fases e listagem das premiações), para o acesso mais rápido a estudos sobre OBMEP, para ter acesso aos demais programas e portais (PIC[9], Portal da OBMEP, Portal Clubes de Matemática, Poti[10], PICME[11], Programa OBMEP na Escola, dentre outros) ou para ter acesso ao material didático (Provas e soluções, Banco de Questões, Apostilas do PIC, Simulados, Vídeos etc.).

O documento intitulado *Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP)* do Centro de Gestão e Estudos Estratégicos (CGEE) foi citado em 3 pesquisas, que toma como base os objetivos da OBMEP e, a partir disso, sugere algumas melhorias para o aprimoramento desta política pública (CGEE, 2011). Os capítulos que o constitui trazem discussões voltadas para a análise dos resultados da OBMEP, da visão da gestão escolar sobre ela, das condições de sucesso das escolas premiadas, além da contribuição da olimpíada para a melhoria da qualidade da Educação Básica.

O trabalho intitulado *Análise da prova da primeira fase da OBMEP como subsídio para orientar a prática docente* de Costa (2015) foi citado por 3 pesquisadores. Tinha o objetivo de fazer uma análise das questões da prova da OBMEP como uma forma de subsidiar a prática docente de professores de matemática.

A Tabela 03, a seguir, traz um resumo dos principais trabalhos sobre a OBMEP, que constituíram o arcabouço teórico das pesquisas analisadas, sendo elencados aqueles que possuíram três citações ou mais.

[9] Programa de Iniciação Científica Jr.
[10] Polo Olímpico de Treinamento Intensivo.
[11] Programa de Iniciação Científica e Mestrado.

Tabela 03 – Principais trabalhos referenciados em OBMEP.

Trabalho	Citado por
Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP | Somando novos talentos para o Brasil. Disponível em: <http://www.OBMEP.org.br/>.	Todos os pesquisadores*
CGEE, Centro de Gestão e Estudos Estratégicos. **Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP)**. Brasília, 2011. Disponível em: <http://server22.OBMEP.org.br:8080/media/servicos/recursos/251395.o>.	Fidelis (2014), Silva (2017) e Cruz (2019)
COSTA, R. Q. G. de C. **Análise da prova da primeira fase da OBMEP como subsídio para orientar a prática docente.** 2015. 201 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2015.	Ferreira (2017), Silva (2017) e Silva (2019)

* Apesar de citar o site da OBMEP e utilizar seus problemas, as pesquisas de Faxina (2016), Goes (2017), Silva (2017), Valério (2017) e Silva (2019) não citam a olimpíada nas referências.

Fonte: O autor (2020).

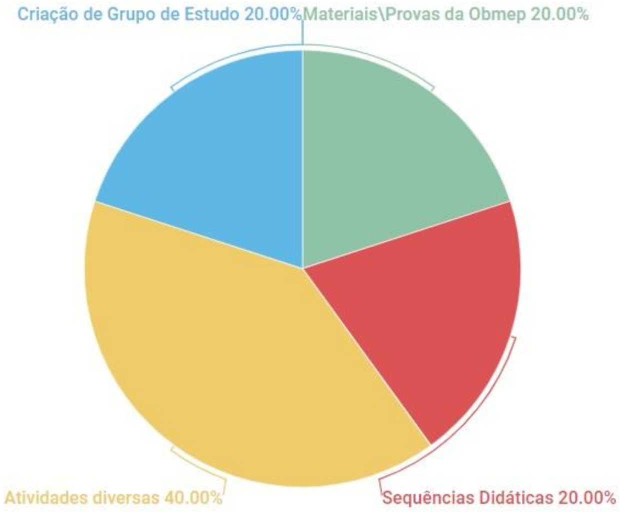
As demais referências ainda continuam as discussões sobre o impacto da OBMEP nas avaliações educacionais (Biondi *et al.*, 2009; OCED, 2012; Soares, 2014) e na qualidade da educação (Marciel, 2009; Alves, 2010; Druck, 2011; Biondi, 2012).

2.1.4 A forma de se trabalhar Resolução de Problemas e OBMEP

As dissertações analisadas possuem quatro cenários principais: as pesquisas que trabalham exclusivamente com a prova da OBMEP e/ou materiais contidos no site da olimpíada, sem necessariamente ter a intenção de intervir no processo de ensino-aprendizagem de determinado grupo de estudantes; as que dizem utilizar Sequências Didáticas, com etapas bem definidas; as que desenvolveram grupos de estudos com objetivos que muitas vezes extrapolam o de apenas resolver problemas; e as pesquisas que não focaram em apenas uma forma de ensino/avaliação, dispondo de diferentes instrumentos de coletas de dados.

O Gráfico 01 apresenta esses principais cenários e a parte do total, em porcentagem, que este representa em relação aos quinze trabalhos analisados:

Gráfico 01 – Cenários em que foram trabalhados a Resolução de Problemas e a OBMEP.



Fonte: O autor (2020).

De todas as dissertações, apenas três não trabalharam diretamente com os estudantes da Educação Básica. Leitão (2015) expôs uma série de sites/materiais didáticos disponíveis na web e que poderiam auxiliar os professores e alunos no ensino e aprendizagem, respectivamente; além disso, gravou as soluções da prova do nível 3 de 2010, nas fases 1 e 2. Ferreira (2017) analisou uma amostra de 50 provas da 2ª fase da OBMEP, nos anos de 2015 e 2016, no estado do Maranhão. Silva (2017) analisou e avaliou a 1ª fase da OBMEP do ano de 2016, níveis 1 e 2, com base nos gabaritos dos estudantes de uma escola da região interiorana do Rio Grande do Norte.

Os demais trabalhos trazem uma abordagem voltada para a sala de aula, com diferentes destaques. Faxina (2016), Paz (2017), Monteiro (2017) afirmam trabalhar com o desenvolvimento e aplicação de uma Sequência Didática, contemplando (a) as fases da Engenharia Didática, (b) com etapas como avaliação diagnóstica, devolutiva das questões e avaliação da aprendizagem e (c) com etapas voltadas para a orientação da tarefa, resolução dos problemas e compartilhamento das ideias, respectivamente. Entretanto, das leituras dos referidos trabalhos, infere-se que há variações sobre o entendimento do que caracteriza uma Sequência Didática. Monteiro (2017), por exemplo, apresenta sua SD com uma apresentação do conteúdo, seguida de exercícios. Apesar disso, o pesquisador Zabala (1998, p.18) define uma Sequência Didática como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

Os trabalhos de Furlan (2011), Pena (2014) e Goes (2017) criaram grupos de estudos e ampliaram o público, ouvindo outras esferas que constituem o ambiente escolar. O foco do trabalho de Furlan (2011) é a Matida, sua concepção e estruturação e as atividades voltadas para a resolução de problemas. Pena (2014) criou um grupo de resolução de problemas e fez uma análise histórica da participação da escola na OBMEP, contando com atividades em sala de aula, entrevistas e depoimentos de egressos; enquanto Goes (2017) criou um projeto chamado *Desenvolvendo e Aplicando a Matemática* que contou com a participação dos alunos, professores, pais, diretores e comunidade externa de 14 escolas.

Cordeiro, (2009), Fidelis (2014), Martins (2015), Valério (2017), Silva (2019) e Cruz (2019) apresentam uma série de atividades na sala de aula. Cordeiro (2009) aborda aspectos quantitativos e qualitativos em sua pesquisa, aplicando algumas provas e entrevista, com vista em classificar os erros dos discentes. Fidelis (2014) trabalha com dois grupos de estudantes, por intermédio de um material didático. Um grupo resolveu um conjunto de problemas, com o intuito de desenvolver as suas habilidades; já a atividade do segundo grupo buscava analisar os erros cometidos pelos alunos. Martins (2015) elaborou uma sequência de 22 atividades, que evidenciasse as estratégias de resolução dos alunos. Valério (2017) classifica sua pesquisa como pesquisa-ação, e deu destaque à resolução de um problema principal e outros secundários, utilizando algumas vezes materiais manipulativos. Silva (2019) aplicou seis tarefas voltadas para a preparação dos discentes para a OBMEP, discutindo as respostas e estratégias significativas. Cruz (2019) focou na preparação dos estudantes para a OBMEP, resolvendo problemas e utilizando recursos tecnológicos e programas e portais de preparação para a olimpíada.

As pesquisas mostraram as diferentes formas de se abordar a Resolução de Problemas no ambiente de OBMEP, destacando práticas mais voltadas para o conhecimento do material utilizado quando se trabalha esta olimpíada, e através de propostas de intervenção com foco, principalmente, na aprendizagem do aluno. Algumas delas não dão tanto destaque às atividades propostas (Fidelis, 2014; Goes, 2017), outras focam em alguns itens em detrimento de outros (Valério, 2017), e outras não exploram de forma mais profunda as respostas dos alunos (Cordeiro, 2009; Paz, 2017). Apesar disso, a maioria apresenta propostas consistentes, com resultados significativos, ao longo do trabalho.

2.1.5 Como os pesquisadores entendem a Resolução de Problemas

Branca (1997) considera que a formulação e resolução de problemas pode ser vista como uma meta, um processo ou uma habilidade básica.

Na primeira categoria, o foco é aprender matemática *para* resolver problemas. No que se refere ao docente, o ensino de matemática teria como finalidade fazer com que os discentes aprendessem a resolver os mais variados problemas; apresentando-lhes, antes, os conceitos, técnicas e procedimentos necessários para tal fim. Saber matemática teria, portanto, como consequência saber resolver problemas.

Na segunda categoria, o que entra em destaque são as técnicas, os procedimentos e as heurísticas utilizadas pelos discentes ao resolver um problema e essas partes do processo da Resolução de Problemas constituiriam a base do currículo de Matemática. Carrillo (1998), a partir do trabalho de Branca, complementa que há uma distinção entre a resposta que um aluno dá a determinado problema e os passos e procedimentos que o levaram a tal resposta. Saber resolver problemas teria, portanto, como consequência saber matemática. Pesquisadores como Polya e Onuchic desenvolveram trabalhos que auxiliam nessa visão sobre a Resolução de Problemas.

Quando vista como uma habilidade básica, a Resolução de Problemas torna-se uma ferramenta indispensável para que os discentes possam se situar no mundo do conhecimento e do trabalho, constituindo-se como uma competência mínima. O foco é prover o aluno dos mais variados métodos de resolver um problema (convencional ou não convencional). Carrillo (1998) critica o fato de que parte daqueles que compreendem a Resolução de Problemas como uma habilidade básica, em certas ocasiões, entendem que determinados estudantes adquirem essa destreza por meio de exercícios, deixando assim os problemas para os estudantes mais avançados.

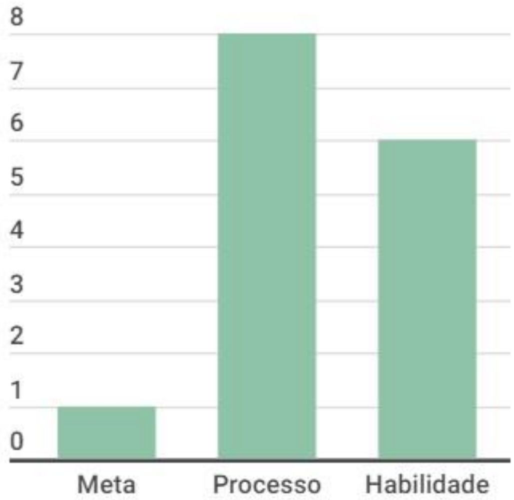
O autor ainda resume essas visões afirmando que

> considerar a Resolução de Problemas como uma habilidade básica pode nos ajudar a organizar nosso ensino diário de habilidades, conceitos e Resolução de Problemas. Considerar a Resolução de Problemas como um processo pode nos ajudar a examinar o que fazemos com as habilidades e conceitos, como eles se relacionam entre si e que papel desempenhamos na solução de vários problemas. Finalmente, considerar a Resolução de Problemas como uma meta pode influenciar tudo o que fazemos, mostrando-nos outro propósito para o ensino da matemática. (Carrillo, 1998, p. 88).[12]

[12] Do original: Considerar la Resolución de Problemas como una destreza básica nos puede ayudar a organizar nuestra enseñanza diaria de destrezas, conceptos y Resolución de Problemas. Considerar la Resolución de Problemas como un proceso nos puede ayudar a examinar qué hacemos com las destrezas y los conceptos, como se relacionan entre sí, y qué papel desempeñam em la solución de varios problemas. Finalmente, considerar la

A partir das visões de Branca (1997) e Carrillo (1998) e compreendendo que, no processo de ensino, essas diferentes concepções sobre a Resolução de Problemas não são mutuamente excludentes, procurou-se classificar as pesquisas analisadas em uma dessas três categorias, a partir da interpretação deste autor de como os pesquisadores, majoritariamente, entendem a Resolução de Problemas. Os resultados foram resumidos conforme o Gráfico 02, a seguir.

Gráfico 02 – Como os pesquisadores entendem a Resolução de Problemas.



Fonte: O autor (2020).

Apenas o trabalho de Pena (2014) enxerga a Resolução de Problemas como uma meta. Sua pesquisa abrangeu um período de oito anos, tempo que foi suficiente para a escola analisada desenvolver uma metodologia que teve como resultado o hábito dos alunos de resolver problemas a partir dos conteúdos trabalhados em sala de aula, o que ajudou nos resultados consideráveis na OBMEP.

As pesquisas de Cordeiro (2009), Furlan (2011), Fidelis (2014), Martins (2015), Faxina (2016), Paz (2017) e Silva (2017) abordam a Resolução de Problemas como um processo. São pesquisas que desenvolvem propostas de ensino que destacam as técnicas e procedimentos para se resolver problemas, baseados principalmente nas etapas de Resolução de Problemas sugeridas por Polya ou Onuchic. O trabalho de Leitão (2015) oferece poucos subsídios para uma classificação mais consistente, uma vez que não traz uma discussão mais profunda sobre a Resolução de Problemas, nem apresenta uma proposta com foco na sala de

Resolución de Problemas como una meta puede incidir en todo lo que hagamos, mostrándonos outro propósito para la enseñanza de la matemática.

aula. Ainda assim, optou-se por classificar o entendimento do autor como um processo, uma vez que ele afirma ter gravado videoaulas com etapas de soluções de algumas questões.

Os trabalhos que compreendem a Resolução de Problemas como uma habilidade básica foram os seguintes: Ferreira (2017), Goes (2017), Monteiro (2017), Valério (2017), Cruz (2019) e Silva (2019). São pesquisas que se propõem em auxiliar os estudantes a adquirirem a base necessária para se resolver um problema. Um ponto em destaque foi que todas as três pesquisas que compõem o segundo eixo norteador, intitulado *Uso de estratégias de Resolução de Problemas com o intuito de melhorar o desempenho dos estudantes na OBMEP*, possuem tal concepção sobre a Resolução de Problemas.

2.1.6 Considerações sobre o conteúdo das pesquisas brasileiras

Dos trabalhos analisados é visto que foi dada significativa ênfase às práticas voltadas para a sala de aula; algumas delas com propostas de intervenção e objetivos bem desafiadores – como "melhorar a qualidade do Ensino Básico" (Leitão, 2015), "dar autonomia ao aluno para resolver problemas em situações cotidianas nas diversas áreas do conhecimento" (Faxina, 2016) e "melhorar a qualidade no ensino-aprendizagem de matemática no município" (Goes, 2017) – e que, algumas vezes, não foram devidamente satisfeitos.

A fundamentação teórica em Resolução de Problemas da maioria dos trabalhos se resume quase que exclusivamente a Polya como literatura estrangeira, havendo também uma boa adesão aos pesquisadores nacionais, como o Dante e a Onuchic e Allevato. Ainda assim, as demais referências giram em torno dos mais variados pesquisadores, não havendo certa seletividade nas fontes. Os trabalhos pesquisados ratificam a importância da utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino para a sala de aula, atribuindo ao docente um papel fundamental nessa prática; porém, existem poucas discussões sobre como o professor pode fazer isso. As sequências didáticas e outros materiais utilizados pelos pesquisadores, segundo eles, "deram certo", mas é quase inexistente a discussão sobre como aplicá-los na sala de aula, direcionando e expondo as ferramentas para que o professor possa utilizá-las. Falta, portanto, um material com foco no professor.

Sobre a OBMEP, as discussões das pesquisas centram-se na utilização do seu banco de questões na sala de aula, como um complemento para o ensino do conteúdo ou como treinamento para a olimpíada. Além de destacarem seus objetivos, funcionamento e premiações. Em nenhum trabalho foi encontrado um estudo mais profundo sobre a OBMEP e o seu impacto no/(a partir do) currículo da Educação Básica; salvo em Goes (2017), ainda que bem sucinto.

Finalmente, este capítulo teve a intenção de apresentar, através de uma visão geral, as pesquisas brasileiras nos cenários de Resolução de Problemas e OBMEP, como uma forma de justificar a escrita desta tese e direcioná-la em apontamentos pertinentes e que acrescentem nas discussões anteriormente apresentadas, bem como nos auxiliar na construção do nosso problema e objetivo de pesquisa.

Além disso, com o desejo de colaborar e avançar no entendimento da Resolução de Problemas em sala de aula, no próximo capítulo, é apresentado o referencial teórico em que procuramos fundamentar a nossa proposta de ensino, tema central deste trabalho.

2.2 PROBLEMA E OBJETIVO DA PESQUISA

Com o intuito de possibilitar aos alunos a motivação e auxílio na formalização de conteúdos e conceitos e na aprendizagem matemática; e orientar ao professor, através da elaboração de um material didático, na utilização das questões da OBMEP para além da olimpíada, a pesquisa aqui apresentada visa discutir a concepção, estrutura e a utilização das questões da OBMEP, através de uma Sequência Didática com foco na metodologia de Resolução de Problemas, tentando obter possíveis respostas para a seguinte pergunta norteadora: “A utilização das questões da OBMEP, aliada a uma metodologia de Resolução de Problemas, constitui-se em um bom caminho para a construção de novos conteúdos e conceitos matemáticos?

O objetivo da pesquisa é, portanto, analisar a viabilidade e o potencial de utilização das questões da OBMEP na aprendizagem de novos conteúdos e conceitos matemáticos relacionados ao tema função, por intermédio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Isso porque se considera que a OBMEP, aliada aos pressupostos da Resolução de Problemas, pode consistir numa política pública cuja função extrapola o intuito de descobrir estudantes talentosos, podendo influenciar na qualidade da Educação Básica. O foco não é, portanto, armar os estudantes pesquisados de estratégias de resolução de problemas que tenham o único intuito de possibilitar êxito na olimpíada, mas sim que o professor passe a apresentar a eles as questões da OBMEP como algo constante na sala de aula, e as associem, sempre que possível, com os conteúdos previstos no currículo de tal forma que os discentes sejam motivados a resolvê-las, utilizando estratégias presentes na metodologia de Resolução de Problemas.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo abrange discussões sobre a Resolução de Problemas, a OBMEP e o conceito de Função, que nos auxiliará na construção da nossa proposta de ensino.

3.1 BASES TEÓRICAS SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (Polya, 2006, p. V).

3.1.1 Aspectos históricos da Resolução de Problemas e sua consolidação como Tendência para a Educação Matemática

O ato de resolver problemas faz parte do comportamento humano desde os seus primórdios. Antes mesmo de se ter um sistema de numeração, os homens já tinham noção da ideia de contar, de se localizar no tempo e no espaço, de classificar, ordenar, medir e comparar. Além disso, em se tratando de matemática, tudo que se desenvolveu e se sistematizou desde os tempos antigos partiu da necessidade que temos de encontrar respostas para as mais variadas perguntas.

Segundo Stanic e Kilpatrick (1990), os problemas têm papel de destaque nos currículos desde os tempos que remetem à antiguidade, remontando à época dos antigos egípcios, chineses e gregos. Já as discussões sobre o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas são relativamente recentes. Muitos compreendiam que ensinar sobre a resolução de problemas significava apresentar problemas a serem resolvidos e, talvez, destacar um exemplo em que tais procedimentos fossem usados, o que culminava numa visão muito estreita da aprendizagem por meio da resolução de problemas. Ainda segundo os mesmos autores:

> O papel da resolução de problemas na Matemática escolar é o resultado do conflito entre forças ligadas a ideias antigas e persistentes acerca das vantagens do estudo da Matemática e uma variedade de acontecimentos que se influenciaram uns aos outros e que ocorreram no princípio do séc. XX. (Stanic; Kilpatrick, 1990, p. 7).

Desde muito tempo foi assumido que aprender matemática tem como consequência a melhoria do pensamento das pessoas. Descartes já dizia que “não se deve ocupar-se com nenhum objeto sobre o qual não se possa ter uma certeza tão grande quanto aquela das demonstrações da Aritmética e da Geometria" (Descartes, 2012, p. 10). Estudar matemática melhoraria o raciocínio, a capacidade de pensar e de resolver problemas.

A resolução de problemas é discutida pelo filósofo americano John Dewey em seu livro *How we Think*, publicado originalmente em 1910 e reeditado em 1933, referindo-se a mesma como *pensamento reflexivo*. A resolução de problemas era para ele a essência do pensamento humano. Segundo Stanic e Kilpatrick (1990, p. 18),

> melhor do que ninguém, Dewey combinou as ideias da resolução de problemas como meio e como fim merecedor de especial atenção. Dewey usou muito do *How we think* para discutir como o pensamento pode ser treinado, tal era a importância que dava ao desenvolvimento da capacidade da resolução de problemas das pessoas.

Dewey dava uma grande atenção à experiência, já que os problemas surgiriam naturalmente dentro dela. O processo de ensino e aprendizagem nasceria da reconstrução dessas experiências e tal reconstrução necessita de pensamento reflexivo. Nesse processo, o papel do professor é primordial já que, segundo o próprio Dewey, "nenhuma questão educacional é da maior importância do que obter a maneira mais lógica de aprender através da transmissão dos outros" (Dewey, 1910, p. 197).

Dewey também demonstrou inquietações sobre como se deve ensinar determinado conteúdo de modo que ele não seja visto como algo finalizado e pronto para ser repassado sem que se exija dos alunos um exame mais reflexivo. Segundo ele, tal informação não deve ser óbvia, isto é, os alunos não devem perceber/descobrir através de uma abordagem direta e que ela deve ser relevante para a própria experiência dos alunos (Dewey, 1910). O autor ainda complementa que

> instrução em matéria que não se relacione com qualquer problema já abordado na própria experiência do estudante, ou que não seja apresentado para resolver um problema é pior do que inútil para propósitos intelectuais. Na medida em que não entra em qualquer processo de reflexão, é desnecessária; mantém-se em mente como madeiras e escombros sem préstimo, é uma barreira, um obstáculo no caminho do pensamento efetivo quando o problema surge. (Dewey, 1910, p. 199).

Sendo assim, a matéria apresentada deve, antes de tudo, ser significativa para o aluno; deve promover a reflexão, além de estar atrelada à experiência do discente. Dewey ainda comenta que, além de os estudantes serem competentes no uso de métodos para a solução de determinados problemas, eles também devem possuir uma atitude perante os problemas, chegando a afirmar que "nenhum indivíduo atinge o seu valor (ao resolver um problema), exceto se estiver pessoalmente animado por certas atitudes dominantes no seu próprio carácter" (Dewey, 1933, p. 29).

A década de 40 foi marcada pela publicação do livro *How to solve it* (traduzido para o português com o título *A arte de resolver problemas*) escrito pelo matemático húngaro George Polya e publicado em 1945. Polya se tornou a mais importante referência em trabalhos sobre a Resolução de Problemas e, apesar de algumas críticas ao seu método – alguns pesquisadores afirmavam que suas etapas eram mais descritivas que prescritivas. Além disso, as caracterizações feitas por Polya não apresentavam detalhes que facilitassem seu uso por professores não familiarizados com o método na sua implementação na sala de aula (Schoenfeld, 1992) –, até hoje seu livro é um dos mais citados em artigos e dissertações e teses.

De forma geral, Polya deu destaque à importância da descoberta no processo de resolução de problemas, estabelecendo um método heurístico[13] para se resolver um problema, composto por quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Contudo, seu trabalho não se restringe a essas fases; ele deu um destaque considerável ao professor durante todo esse processo. Segundo Morais e Onuchic (2014, p. 23),

> A pesquisa de Polya sobre RP transcende as quatro fases [...]. Sua preocupação estava voltada para a melhoria das habilidades da resolução de problemas pelos estudantes e, para que isso ocorresse, era preciso que os professores se tornassem bons resolvedores de problemas e que estivessem interessados em fazer de seus estudantes também bons resolvedores.

Apesar de não ter sido o pioneiro nos trabalhos sobre Resolução de Problemas, com o tempo, Polya elevou este estudo a um novo patamar, já que "uma visão mais profunda e mais compreensiva da resolução de problemas nos currículos escolares de Matemática só foi possível a partir de Polya" (Kilpatrick, 1989, p. 15). Polya dava demasiada importância ao *fazer* matemática, já que para isso é requerido um raciocínio plausível e, se os discentes precisam desenvolver tal tipo de raciocínio, devem ser ensinados como.

Voltando um pouco no tempo, Schoenfeld (1996) afirma que, desde o início do século até os anos 50, o currículo matemático era relativamente estável e "aborrecido". Essa afirmação era com base no fato de que a maioria dos estudantes se limitava a memorizar fatos e

---

[13] "[Do latim: cient. heuristica (< gr.heuristiké [téchne], 'arte de encontrar', 'descobrir').] **S. f. 1.** Conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas. [Cf. heureca.] **2.** Procedimento pedagógico pelo qual se leva o aluno a descobrir por si mesmo a verdade que lhe querem inculcar. **3.** Ciência auxiliar da História, que trata da pesquisa das fontes. **4.** *Inform.* Metodologia, ou algoritmo, us. para resolver problemas por métodos que, embora não rigorosos, ger. refletem o conhecimento humano e permitem obter uma solução satisfatória" (Ferreira, 2009, p. 1035).

procedimentos, sem ter uma preocupação mais consistente com a compreensão de conceitos ou técnicas de aplicação. Fiorentini (1994) também complementa que pesquisadores como Bloom e Broder começaram a questionar as pesquisas desenvolvidas com a temática sobre Resolução de Problemas por darem destaque aos resultados em vez de valorizar os processos implícitos nas resoluções. Complementa que tais pesquisadores defendiam que o ensino por meio da resolução de problemas deveria ter como foco o ensino de estratégias de resolução – o que corrobora com as ideias de Polya – pois as mesmas poderiam ser aprimoradas através de uma adequada formação, além da prática.

Schoenfeld (1996) também diz que houve uma mudança significativa a partir de 1957 com o advento da Matemática Moderna, sendo assim, os anos 60 e 70 passaram a ser as décadas da abstração no ensino de matemática. Como se sabe, esse movimento não vingou, já que o conteúdo era carregado de simbolismo, estruturas lógicas, algébrica e dava demasiado destaque à teoria dos conjuntos, o que dificultava a aprendizagem das crianças; além disso, tal ensino se distanciava das questões práticas e sua concepção e estruturação não contou com a participação ativa dos professores de sala de aula.

Novamente segundo Schoenfeld (1996), no final da década de 70, era uma tarefa quase impossível localizar a Resolução de Problemas como um traço identificável do currículo. Foi só em 1980 que, nos Estados Unidos, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) elaborou o documento *Uma Agenda para a Ação*[14]. Tal documento, construído em conjunto por professores e demais interessados no processo de ensino de Matemática, propunha uma série de recomendações e afirmava que a Resolução de Problemas *deveria ser o foco da Matemática escolar nos anos 80*, destacando que os educadores deveriam se dispor em auxiliar os estudantes no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Dentre as ações recomendadas, destacava-se que o currículo matemático deveria ser estruturado a partir da Resolução de Problemas; que a definição e a linguagem de resolução de problemas deveria ser revestida por um considerável apanhado de estratégias, processos e modos que incentivassem o potencial das aplicações matemáticas; que os docentes deveriam prover um ambiente em que a Resolução de Problemas se desenvolvesse; que materiais curriculares e programas com foco na resolução de problemas deveriam ser desenvolvidos em todos os níveis de ensino; e que as pesquisas priorizadas por pesquisadores e agências de fomento deveriam ser as que têm como foco a resolução de problemas (Onuchic, 1999).

[14] Do inglês *An Agenda for Action.*

Ainda nesse ano, o NCTM lança o livro *Resolução de Problemas na Matemática Escolar*[15], composto por 22 artigos – o primeiro deles encabeçado por Polya – escritos por pesquisadores renomados cujo intuito era destacar a necessidade de se discutir a Resolução de Problemas e sua utilização no ensino de Matemática.

Assim, a Resolução de Problemas ganhou mais espaço e se tornou o foco de quase todos os congressos internacionais em Educação Matemática da época.

Foi nessa época também que, no Brasil, os estudos sobre Resolução de Problemas se iniciaram. Segundo Fiorentini (1994), apesar de já existirem trabalhos datados da década de 60, os estudos relacionados ao ensino de Resolução de Problemas só seriam efetivados a partir da segunda metade da década de 80, restringindo-se quase que exclusivamente a trabalho traduzidos em dissertações ou teses.

Tais trabalhos, ainda segundo esse autor, classificavam-se em diferentes modalidades: alguns investigavam as habilidades e estratégias cognitivas dos sujeitos frente à Resolução de Problemas, outros investigavam aspectos relacionados a aprendizagem por meio da Resolução de Problemas, outros davam destaque a Resolução de Problemas como método de ensino de matemática, dentre outros temas. Ainda assim, o estudo dessa temática era muito superficial, já que as discussões eram mais centradas em métodos ou técnicas para a resolução de problemas – que são válidas, mas não suficientes para a aprendizagem em matemática.

No final da década de 80 e durante a década de 90, o NCTM publicou uma série de documentos que ficaram conhecidos como os *Standards* (Padrões, no português). Em 1989 foi publicado os *Padrões curriculares e de avaliação em Matemática escolar*[16], direcionado aos professores, supervisores e promotores de materiais instrucionais e currículo. Em 1991 foi publicado os *Padrões profissionais para o ensino de Matemática*[17]. Este assume que, no ambiente de sala de aula, "para conjecturar, inventar e resolver problemas *(deve-se)* afastar-se de uma ênfase na descoberta mecânica de respostas" (NCTM, 1991, p. 3). Em 1995 foi publicado os *Padrões de avaliação para a Matemática escolar*[18], que contém os princípios em que educadores devem se apoiar para melhorar suas práticas educativas e de avaliação.

Já em 2000 – mais de uma década após a primeira publicação e trabalhando a partir de diversas críticas e sugestões – o NCTM publicou os *Princípios e Padrões para a Matemática Escolar*[19]. Segundo Onuchic e Allevato (2012), a Resolução de Problemas é destacada como

---

[15] Do inglês *Problem Solving in School Mathematics.*
[16] Do inglês *Curriculum and evaluation sandards for school mathematics.*
[17] Do inglês *Professional standards for teachers mathematics.*
[18] Do inglês *Assessment standards for school mathematics.*
[19] Do inglês *Principles and standards for school mathematics.*

um dos padrões de processo para o ensino de Matemática, e o ensino através da resolução de problemas é fortemente recomendado. Ademais, de acordo com Justulin (2014, p. 53), "esse documento buscou fornecer orientação e direção na Educação Matemática, da Educação Infantil ao Ensino Médio. [...] Estabelecem seis princípios para a Educação Matemática: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia". Além disso, são apresentados cinco padrões de conteúdo que os alunos devem aprender (números e operações; álgebra; geometria; medida; e análise de dados e probabilidade) e cinco padrões de processo (resolução de problemas; raciocínio e prova; comunicação; conexões; e representação), que destacam os caminhos para se chegar à aprendizagem de tais conteúdos.

Sobre a Resolução de Problemas, este documento afirma que

> Resolver problemas não é apenas uma meta da aprendizagem matemática, mas também um modo importante de fazê-la. A resolução de problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, portanto, não deve ser apenas uma parte do programa de Matemática. [...] Os bons problemas integrarão múltiplos tópicos e envolverão a Matemática significativa. (NCTM, 2000, p.52).

Foi a partir da publicação dos *Standards* que os educadores começaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas. Eles também passaram a ratificar o uso de contextos na Resolução de Problemas como uma forma de desenvolver os conteúdos matemáticos e estabelecer conexões com outras áreas (Onuchic; Allevato, 2011; Onuchic; Allevato, 2012).

Também no Brasil, apoiados pelas ideias contidas nos *Standards*, foram criados os PCN (Brasil, 1997, 1998, 1999), que ratificam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas como uma forma de aprender matemática, discutindo também caminhos para se fazer matemática dentro da sala de aula (Allevato; Onuchic, 2009).

Foi ainda na década de 90 que, segundo Onuchic (1999), a Resolução de Problemas, vista como uma metodologia de ensino, passou a ser o foco das pesquisas em Educação Matemática no Brasil. Ainda de acordo com a autora, tais estudos também sofreram influências de teorias construtivistas que passaram a ser bem recebidas na Educação Matemática. Na perspectiva dessas teorias, o discente deve ser engajado ativamente na construção do seu próprio conhecimento.

No início do século XXI, os desafios ainda persistem e, conforme Cai (2003) *apud* Onuchic e Allevato (2009), mesmo ainda se sabendo pouco sobre como os discentes compreendem e dão sentido à matemática através da resolução de problemas, diversas ideias relacionadas com esse tópico têm sido pesquisadas como, por exemplo, o papel do professor, seleção e elaboração de problemas, aprendizagem colaborativa, etc., que procuram oferecer subsídios sobre formas seguras de se utilizar esse tipo de abordagem.

Tais ideias têm se espalhado pelo mundo. Conforme relata Pehkonen *et al.* (2013), nos últimos anos, diversos artigos com uma visão mais geral sobre a Resolução de Problemas foram publicados nos mais variados países, e o que se tem percebido é que o desenvolvimento da Resolução de Problemas pouco difere um dos outros.

Em resposta ao construtivismo, por exemplo, foi colocada em prática no Japão, ainda na década de 70, a abordagem aberta no ensino de matemática, isto é, a utilização de problemas abertos[20]; esse tipo de abordagem também esteve presente na Alemanha. Outrossim, as chamadas investigações (relacionadas à formulação de problemas) também foram introduzidas no currículo de matemática na Inglaterra, Escócia e Austrália. Tal ensino se concentra em um tipo de abordagem centrada no problema e estimula a comunicação na sala de aula. Na Finlândia, o foco é a compreensão das estruturas e o desenvolvimento do pensamento matemático, não apenas o domínio de cálculos mecânicos (Pehkonen, 2013).

Vale *et al.* (2015) complementa afirmando que, apesar dos avanços, o impacto da Resolução de Problemas no currículo e, principalmente, na sala de aula de matemática que tenha como objeto final a "produção" de bons resolvedores de problemas tem sido muito limitado. Revela que, sobre as políticas educacionais no que se refere ao ensino de matemática, tem havido oscilações entre o foco nas capacidades básicas e o foco na resolução de problemas, ocasionando um certo declínio nas investigações sobre essa última temática, na última década. As autoras ainda afirmam que

> Apesar destas décadas de investigação e de resultados importantes sobre o assunto, parece que desenvolver as capacidades dos alunos para resolver problemas, quer dentro da própria matemática quer na transferência para fora da matemática (outras áreas e no mundo real), necessita de outras perspectivas e investimentos e desenvolvimento curricular associado. (Vale *et al.*, 2015, p. 40).

Tais capacidades exigem uma melhoria significativa, principalmente quando se leva em consideração o mundo globalizado de hoje. A necessidade de mudança ocasiona um aumento na procura por profissionais com competências de ordem superior. O papel que a Resolução de Problemas vem desempenhando ao longo dos anos é inquestionável, o seu valor já foi colocado à prova e verificado diversas vezes. Os esforços direcionados à Resolução de Problemas são no sentido de investigar quais perspectivas de abordagens são mais consistentes em relação ao

[20] Incluem tarefas da vida cotidiana, sequências de problemas, problemas sem pergunta, investigações, etc.

propósito maior: a aprendizagem dos alunos. Sendo assim, atualmente, “a resolução de problemas não é apenas outro movimento entre os muitos que têm aparecido e desaparecido em educação matemática. Em vez disso, tem sido aceite pela comunidade de educadores matemáticos como uma parte integrante do currículo de matemática” (Vale *et al.*, 2015, p. 41).

3.1.2 A Resolução de Problemas à luz dos documentos oficiais para o currículo de Matemática

Inspirados pelos *Standards* americanos, foram elaborados os PCN para a Educação Básica. Eles apresentam a Resolução de Problemas como o caminho para o ensino de matemática. Apesar disso, destacam que, muitas vezes, tal metodologia não tem desempenhado verdadeiramente o seu papel, pois quase sempre é reduzida a uma simples aplicação de conhecimentos anteriormente adquiridos pelos alunos.

Os PCN (1998) também consideram que, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem, a Resolução de Problemas pode ser resumida nos seguintes princípios:

> - a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição [...];
> - o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório [...];
> - aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver certo tipo de problema [...];
> - um conceito matemático se constroi articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações [...];
> - a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem [...].
>
> (Brasil, 1998, p. 40-41).

Com isso, é valorizado a forma de ensino que parte da apresentação de um problema com o intuito de introduzir definições e conceitos matemáticos, valendo-se de estratégias de resolução. O problema também difere do exercício, pois sua resolução deve consistir em uma mobilização maior do raciocínio e articulação de ideias apreendidas. Além disso, é notada a ênfase dada às generalizações dos problemas, à resolução de novos problemas e à articulação e formação de conceitos no processo de ensino e aprendizagem.

Os PCN (2000) indicam que, dentre as finalidades do ensino de Matemática no Ensino Médio, está levar o aluno a compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que o levem a desenvolver estudos posteriores, adquirindo formação científica geral e que, para desenvolver a compreensão de tais conceitos matemáticos, a utilização da resolução de problemas é recomendada. Dentre as competência e habilidades a serem desenvolvidas nesse nível de ensino, referindo-se ao item Investigação e Compreensão, estão a identificação de problema, a busca pela seleção e interpretação das informações relativas ao problema, a formulação de hipóteses e previsão dos resultados, a seleção de estratégias de resolução de problemas e a interpretação crítica dos resultados.

Os PCN+ (2002) complementam isso quando dizem que "a resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios" (BRASIL, 2002, p. 112), e afirmam que tal competência não é desenvolvida quando o docente propõe apenas exercícios de aplicação dos conceitos ou técnicas matemáticas já que, em tais situações, o que entra em jogo é a busca na memória por um exercício semelhante.

As Orientações Curriculares Nacionais (OCN) continuam tais discussões afirmando que "a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem" (Brasil, 2006, p. 81).

Ao se analisar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em relação à atenção dada à Resolução de Problemas, nota-se traços dela em todas as unidades temáticas para o Ensino Fundamental (Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística) e para o Ensino Médio (Números e Álgebra; Geometria e Medidas; Probabilidade e Estatística), no que se refere ao intermédio da resolução de problemas para atingir as competência e habilidades descritas na Base. Ainda assim, o destaque dado à Resolução de Problemas pela BNCC parece não ter a mesma intensidade que nos PCN já que, de acordo com Andreatta e Allevato (2019, p. 75),

> Não percebemos na versão final da BNCC do ensino fundamental, já homologada, uma abordagem específica para a formalização de conteúdos matemáticos por meio da Resolução de Problemas enquanto metodologia e/ou estratégia de ensino, conforme presenciamos nos PCN.

Em relação ao Ensino Fundamental, a BNCC (2018) afirma que deve existir um compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático de tal forma que favoreça, entre outros, "formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos" (Brasil, 2018, p. 266), centrando-se na compreensão de conceitos.

Em relação ao Ensino Médio, é esperado que os discentes consolidem os conhecimentos apreendidos na etapa anterior, agregando novos; de tal forma que desenvolvam e mobilizem habilidades que permitirão que eles resolvam problemas ao longo da vida. Atribui-se, assim, um destaque considerável aos problemas do cotidiano, do mundo real, isso tudo "considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho" (Brasil, 2018, p.535).

Dentre as oito competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental, duas delas dão à Resolução de Problemas uma importância maior. A competência 5 valoriza a utilização de processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas. Já a competência 6 afirma que o ensino de matemática deve garantir que os alunos possam enfrentar situações-problemas em variados contextos, práticos ou imaginados, expressando suas conclusões através de diferentes registros e linguagens. No tocante ao Ensino Médio, apenas uma das cinco competências dá ênfase à Resolução de Problemas, destacando o uso de estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para, entre outros, resolver problemas em diferentes contextos, analisando, inclusive, a plausibilidade dos resultados e sua consistência (Brasil, 2018).

Além disso, partindo do conhecimento de que compreender implica em saber aplicar em outros contextos, por intermédio de fatores como formulação, interpretação e avaliação, a BNCC justifica que diversas habilidades formuladas iniciam por *resolver e elaborar problemas...*. Argumenta-se na BNCC que isso se deve ao fato de que tal opção estende o significado dado à resolução de problemas, já que

> a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. (Brasil, 2018, p. 536).

Sabendo disso, foi feito um levantamento com a finalidade de mostrar a frequência em que aparece a Resolução de Problemas (*resolução e elaboração*) nas habilidades apresentadas pela BNCC para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Os dados estão dispostos na Tabela 04 a seguir:

Tabela 04 – Frequência da Resolução de Problemas nas habilidades descritas na BNCC.

Etapa	Ano	N º de habilidades	Nº de habilidades em Resolução de problemas*
Ensino Fundamental (anos iniciais)	1º	22	1
	2º	23	3
	3º	28	4
	4º	28	4
	5º	25	5
Ensino Fundamental (anos finais)	6º	34	8
	7º	37	10
	8º	27	9
	9º	23	6
Ensino Médio	1º, 2º e 3º	43	12

* Não foram consideradas as habilidades cujo sentido atribuído à Resolução de Problemas se resume simplesmente ao ato de resolver problemas como um recurso para obter determinada habilidade específica.

Fonte: O autor (2021).

Outrossim, a Resolução nº 2, de 20 de dezembro de 2019, do Ministério da Educação (MEC), que define as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNCC-Formação) prega, em seu artigo 8º, inciso II, que os cursos destinados a esse tipo de formação devem ter como fundamentos pedagógicos:

> o compromisso com as metodologias inovadoras e com outras dinâmicas formativas que propiciem ao futuro professor aprendizagens significativas e contextualizadas em uma abordagem didático-metodológica alinhada com a BNCC, visando ao desenvolvimento da autonomia, **da capacidade de resolução de problemas**, dos processos investigativos e criativos, do exercício do trabalho coletivo e interdisciplinar, da análise dos desafios da vida cotidiana e em sociedade e das possibilidades de suas soluções práticas. (Brasil, 2019, grifos nossos).

Essa citação mostra que tem havido uma preocupação no sentido de buscar uma integração e alinhamento entre as indicações curriculares e de formação e o que prega a BNCC. Além disso, é expresso que um dos objetivos da formação do professor é desenvolver a capacidade de resolução de problemas.

3.1.3 O que é um problema?

Existem diversas concepções e discussões sobre o que caracteriza um problema, fazendo-se necessário elencar possíveis intersecções a respeito das opiniões de alguns autores. Dante (1989, p. 9), por exemplo, define problema como “qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la” e, indo mais além, diz que um problema matemático pode ser caracterizado como uma situação que requer uma maneira matemática de pensar, subsidiada por conhecimentos matemáticos para solucioná-la (Dante, 1989). O autor não argumenta sobre o que seria esse *pensamento matemático*, mas ratifica essa afirmação ao sustentar que o exercício "serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas" (Dante, 1989, p. 43). Relacionando, assim, o exercício a um meio de colocar em prática algoritmos adquiridos em alguma etapa anterior do processo de ensino-aprendizagem, ao invés de movimentar a criticidade, a seletividade, a sistematização, culminando nesse pensar matemático, que faz com que um problema seja caracterizado como tal.

A pesquisadora Onuchic (1999, p. 215) destaca que problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver", ou seja, é toda e qualquer situação que tenha o intuito de estimular o aluno a pensar, despertando-lhe o interesse e que não se tenha uma resposta imediata e/ou trivial, exigindo do resolvedor algum tipo de esforço cognitivo.

Carrillo (1998) associa problema diretamente à aplicação não mecânica, dita significativa, do conhecimento matemático a situações não familiares. Além disso, considera relevante a consciência da situação como tal, e da "existência de dificuldade ao enfrentá-la e a possibilidade de solução com a aplicação de tais conhecimentos" (Carrillo, 1998, p. 87).

Outrossim, os próprios PCN afirmam que uma questão só pode ser considerada um problema se levar o aluno a interpretar o enunciado e a estruturar aquilo que lhe é apresentado (Brasil, 1998).

Essas afirmações ou tentativas de definição levantam pelo menos dois pontos que se acredita serem fundamentais para atribuição ou não a uma determinada questão o rótulo de problema:

1. Ausência de um procedimento que leve à certeza da solução;
2. A postura do aluno/resolvedor diante da questão.

É considerável destacar que o que pode ser considerado um problema para alguns, pode ser um exercício para outros. Os pontos 1 e 2 estão muito mais relacionados às impressões do aluno diante de uma determinada questão, à utilização ou não de fórmulas já conhecidas e compreendidas, à sua predisposição para resolvê-la e a identificação da situação do que a questão proposta em si, para assim caracterizá-la ou não como um problema.

A partir destes apontamentos, e levando em consideração a relevância dada a não existência de procedimentos padrões para se chegar a uma solução, mas também à possibilidade de solução, acreditamos que a definição de Carrillo (1998) seja a mais coerente com a proposta deste trabalho. Passaremos, portanto, a adotá-la.

3.1.4 Os tipos de problemas

Pozo e Echeverría (1998, p. 20) afirmam que “existem inúmeras classificações das possíveis estruturas dos problemas, tanto em função da área à qual pertence e do conteúdo dos mesmos como do tipo de operações e processos necessários para resolvê-los”. Sendo assim, apresentaremos, a seguir, as principais classificações, conforme relevância atribuída pelos autores deste trabalho.

George Pólya (1887 – 1985) apresenta uma classificação dos tipos de problemas em quatro categorias:

- **Problemas Rotineiros:** “de modo geral, um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido” (Polya, 2006, p. 142).
- **Problemas de Determinação:** seu objetivo é “encontrar um certo objeto, a incógnita do problema. [...] podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas” (Polya, 2006, p. 142). Suas partes principais são a incógnita, os dados e a condicionante.
- **Problemas de Demonstração:** seu objetivo é “mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa” (Polya, 2006, p. 143). Suas partes principais são, geralmente, hipótese e conclusão.
- **Problemas Práticos:** “são diferentes, em diversos aspectos, dos problemas puramente matemáticos, muito embora os principais motivos e processos sejam essencialmente os mesmos em ambos os casos” (Polya, 2006, p. 144). Segundo o autor, as incógnitas, os dados e as condicionantes são menos nitidamente definidas que num problema matemático; além disso, é necessário um conjunto de conhecimentos previamente adquiridos (Polya, 2006).

Essas três últimas categorias podem ser agrupadas no que se denomina *problemas não rotineiros*, tendo em comum o fato de não apresentarem uma forma fechada para resolvê-los. Exige do discente perspicácia, capacidade de relacionar com conhecimentos prévios e, em certos casos, criatividade.

Dante (1989, p. 16-21, adaptado) classifica os problemas em seis tipos, sendo os dois primeiros caracterizados, em sentido mais restrito, como exercícios:

- **Exercícios de reconhecimento:** seu objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade etc.;
- **Exercícios de algoritmos:** são aqueles que podem ser resolvidos passo a passo. Seu objetivo é treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores;
- **Problemas-padrão:** sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige qualquer estratégia. De um modo geral, eles não aguçam a curiosidade do aluno nem o desafiam.
- **Problemas-processo ou heurísticos:** são problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado. Aguçam a curiosidade do aluno e permitem que ele desenvolva sua criatividade, sua iniciativa e seu espírito explorador; além de auxiliar no desenvolvimento de estratégias e procedimentos para a resolução de situações-problema;
- **Problemas de aplicação:** retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos;
- **Problemas de quebra-cabeça:** envolvem e desafiam grande parte dos alunos. Constituem a chamada matemática recreativa. Sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque, que é a chave da solução.

Carvalho (2010, p. 30) argumenta que, além dos problemas que envolvem ideias mais simples, os problemas podem ser divididos em:

- **Problemas não convencionais:** para resolver esse tipo de problema, há necessidade de elaborar um raciocínio mais complexo, pois as operações não estão evidenciadas no enunciado. Esse tipo de problema desafia o aluno a usar sua criatividade na elaboração de estratégias de resolução.
- **Problemas do cotidiano:** também chamados de problemas de aplicação, fazem parte do cotidiano da escola, do aluno. São os tipos de problemas mais interessantes, pois sua resolução envolve levantamento de dados, confecção de gráficos, tabelas, desenhos, aplicação das operações.

Smole e Diniz (2016) classificam os problemas em **convencionais** e **não convencionais**, fazendo uma possível relação com os problemas rotineiros e não rotineiros propostos por Polya (1985, 2006). A resolução dos primeiros depende da aplicação direta de um ou mais cálculos, ou aplicação de procedimentos já apresentados ao resolvedor. Já os últimos têm em comum o fato de poderem ter excesso de dados, várias ou nenhuma solução evidente, estarem ou não relacionados com algum conteúdo específico etc.

Blum e Niss (1991) classificam os problemas em **aplicados** (ou situação-problema real) e problemas **puros**. Os primeiros são os problemas do "mundo real", sendo necessário sua *tradução* para a linguagem matemática para uma possível solução e, posteriormente, uma tradução novamente para o mundo real. Os que constituem o segundo grupo são problemas restritos ao "mundo matemático".

De forma geral, todas essas classificações não são tão revestidas de subjetividade como o é a definição de problema – vista na seção anterior – uma vez que leva mais em consideração como eles são estruturados do que a postura do discente ante o processo de resolução.

Schoenfeld (1996) descreve quatro propriedades que ele considera importantes que um bom problema possua. De forma geral, os problemas a) devem ser (relativamente) acessíveis; b) devem, se possível, serem resolvidos ou pelo menos abordados por vários caminhos; c) devem servir como introduções a importantes ideias matemáticas; e d) devem servir, se possível, como "germens" para "honestas e boas" explorações matemáticas, possibilitando possíveis generalizações.

3.1.5 A operacionalização do ensino por meio da Resolução de Problemas: os papeis do professor e dos alunos

Em um cenário de mudanças no ensino de matemática – causado, em parte, pelos movimentos de inserção da metodologia de Resolução de Problemas no currículo – parece ser significativo discutir sobre os papeis do professor e dos alunos no processo de ensino-aprendizagem de matemática, mediados por tal metodologia. Ao aluno vem sendo atribuída uma participação mais ativa, sendo considerado protagonista no processo de construção do seu conhecimento. Ao professor é dada uma postura de mediador e exigido que ele disponha dos mais variados recursos para facilitar tal processo. Sobre isso, Allevato e Onuchic (2014, p. 40) argumentam que

> as ideias socioconstrutivistas de aprendizagem, que sustentam as orientações oficiais atuais para o trabalho com Matemática em sala de aula, partem do princípio de que a aprendizagem se realizada pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas.

Tais confrontos são benéficos para os discentes, uma vez que são justamente neles que o aluno constrói conceitos. O professor age no sentido de proporcionar aos discentes situações em que esses confrontos sejam valorizados, intervindo sempre que necessário.

Além disso, é preciso que se estabeleça uma cultura de resolução de problemas na sala de aula, e que o docente tenha consciência de que as habilidades desenvolvidas durante esse processo são construídas, não raro, lentamente (Cai; Lester, 2010).

Quanto ao ensino de matemática, esse deve ser compreendido como uma ação que perpassa o objetivo de instruir os discentes a memorizar fórmulas ou resultados, convergindo para um saber fazer Matemática e um saber pensar matemático. Além disso, deve-se privilegiar o caráter instrumental da matemática, como uma forma de fornecer ao discente um conjunto de técnicas e estratégias que podem ser aplicadas em outras áreas do conhecimento; sem, contudo, limitá-la a simples aplicações de algoritmos (Brasil, 2000; Drigo; Santos, 2007).

Pehkonen (1997, p. 64) afirma que, apesar de em muitos países a Resolução de Problemas estar presente explicitamente no currículo de matemática, não se encontram justificativas consistentes sobre o porquê que os problemas devem ter uma posição tão central. A partir disso, o autor expõe quatro razões por ele encontradas na literatura que apoiam o uso da Resolução de Problemas na sala de aula. Sendo assim, a Resolução de Problemas a) desenvolve habilidades cognitivas gerais, b) estimula a criatividade, c) faz parte do processo de aplicação matemática e d) motiva os alunos a aprender matemática.

Indo ao encontro disso, Schoenfeld (2014) levanta questionamentos sobre se é possível identificar aspectos-chave do que ele denomina *salas de aula matematicamente poderosas*, isto é, ambientes que produzem alunos que se saem bem nos testes de conteúdo matemático e resolução de problemas. De forma geral, seu propósito era buscar uma possível correlação entre as salas que mais pontuam em dimensões de suposta importância no ensino e os alunos com as melhores pontuações em testes matemáticos. O autor partiu da construção de um quadro teórico e rubrica para observação em sala de aula, chegando na hipótese do que ele considera as dimensões-chave das salas de aula matematicamente poderosas, conforme disposto na Tabela 05 a seguir:

Tabela 05 – As cinco dimensões de salas de aula matematicamente poderosas.

1. A matemática: Até que ponto a matemática discutida é focada e coerente e até que ponto as conexões entre procedimentos, conceitos e contextos (quando apropriado) são abordados e explicados. Os alunos devem ter oportunidades de aprender práticas e conteúdos matemáticos importantes e de desenvolver hábitos mentais matemáticos produtivos.
2. Demanda cognitiva: Até que ponto as interações em sala de aula criam e mantêm um ambiente de desafio intelectual produtivo que conduz o desenvolvimento matemático dos alunos. Há um meio-termo entre ensinar matemática em pequenas porções e ter desafios tão grandes que os alunos se perdem no mar.
3. Acesso a conteúdo matemático: Até que ponto as estruturas de atividades em sala de aula convidam e apoiam o envolvimento ativo de todos os alunos na sala de aula com a matemática básica sendo abordada pela classe. Não importa o quão rica seja a matemática que está sendo discutida, uma sala de aula em que um pequeno número de alunos se mantêm atentos não é equitativa.
4. Agência, autoridade e identidade: Até que ponto os alunos têm oportunidades de conjeturar, explicar, fazer argumentos matemáticos e construir sobre um as ideias de outra pessoa de forma a contribuir para o desenvolvimento de agência (a capacidade e vontade de se engajar matematicamente) e autoridade (reconhecimento por serem matematicamente sólidos), resultando em identidades positivas como fazedores de matemática.
5. Usos de avaliação: A medida em que o professor solicita que o aluno pense e a instrução subsequente responde a essas ideias com base em começos ou abordando mal-entendidos emergentes. A instrução poderosa "encontra os alunos onde eles estão" e lhes dá oportunidades de seguir em frente.

Fonte: Schoenfeld (2014, p. 407, adaptado).

Cada uma dessas dimensões é guiada, respectivamente, pelos seguintes questionamentos: quão preciso, coerente e bem justificado é o conteúdo matemático? Até que ponto os alunos são apoiados na luta com e dando sentido a conceitos matemáticos? Em que medida o professor apoia o acesso ao conteúdo da aula para todos os alunos? Até que ponto os alunos são a fonte de ideias e discussão, e como suas contribuições são consideradas? Em que medida o pensamento matemático dos alunos emerge; em que medida a instrução se baseia nas ideias dos alunos? (Schoenfeld, 2014). O autor argumenta que o processo de avaliação formativa pode aumentar a proficiência dos professores ao longo de tais dimensões. Ainda comenta que, com exceção da primeira dimensão, as demais são gerais e podem ser aplicadas a outras áreas.

Os PCN (1998) afirmam que estudar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática pressupõe analisar as variáveis que estão envolvidas nesse processo (aluno, professor e saber matemático) e suas relações. Sendo assim, a seguir estarão explicitados os papeis do professor e dos alunos nesse processo, mediados pela Resolução de Problemas.

3.1.5.1 O papel do docente

Sobre o docente, os PCN (1998) explicam que ao mesmo é fundamental identificar as principais características da Matemática, conhecer a história de vida dos alunos e ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática. Ao desempenhar a função de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o docente precisa dominar conceitos e procedimentos da área e transformar tais conhecimentos acumulados em um saber que possa ser ensinado e, principalmente, compreendido; tendo ele consciência de que é preciso superar os obstáculos envolvidos no processo de ensino. Assim, diferentes papeis são exigidos dos docentes: organizador da aprendizagem, facilitador do processo de aprendizagem, mediador, incentivador da aprendizagem e avaliador do processo.

Polya (2006) argumenta que o professor deve ter em mente dois objetivos quando se usa problemas na sala de aula. O primeiro é que ele deve auxiliar os discentes, sempre que necessitarem. O segundo é oferecer as ferramentas necessárias para que o aluno possa resolver sozinho problemas futuros. Afirma ainda que o docente que deseja que seus alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas deve promover um ambiente favorável a isso, além de despertar nos discentes o interesse por resolvê-los, por fazer indagações.

O primeiro contato com esse processo de resolver problemas se dá, em geral, através do professor. Isso implica que o próprio docente deve ser um resolvedor de problemas. Este, deve se colocar no lugar do estudante e “pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas” (Polya, 2006, p. 7).

Polya partia da ideia de que o principal objetivo da educação é o desenvolvimento da inteligência; sendo assim, deve-se reforçar o ensino de matemática, ainda que se saiba que não serão todos os alunos que precisarão de determinados conceitos em sua vida profissional, conforme é explicado em Polya (1966) *apud* Stanic e Kilpatrick (1989, p. 16):

> Se o ensino da Matemática dá só uma perspectiva unilateral, incompleta, do pensamento de um matemático, se se suprime totalmente aquelas actividades (*sic*) informais de conjecturar e extrair conceitos matemáticos do mundo visível à nossa volta, ela negligencia aquilo que pode ser a parte mais interessante para a generalidade dos alunos, a mais instrutiva para o futuro utilizador da Matemática e mais inspiradora para o futuro matemático.

Na perspectiva de Polya, o papel do professor é fundamental. Apenas um professor que se preocupa com o processo de ensino e aprendizagem seleciona eficientemente um problema e o relaciona com o assunto de determinada aula, além de se dispor em auxiliar o aluno de forma adequada na busca pela solução. Colaborando com isso, Onuchic (1999, p. 211) diz que "nenhuma intervenção no processo de aprendizagem pode fazer mais diferença do que um professor bem formado, inteligente e hábil".

O ensino por meio da Resolução de Problemas dá ênfase às ações do aluno nesse processo, sem deslegitimar a ação do docente na sala de aula. Sendo assim, o seu papel não é menos exigente. Van de Walle *et al.* (2019) listam – baseado em *Princípios para Ação: garantindo o sucesso matemático para todos (NCTM, 2014)* – oito práticas de ensino da matemática que apoiam a aprendizagem dos alunos. São elas:

1. Estabelecer objetivos matemáticos para focar na aprendizagem;
2. Implementar tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas;
3. Usar e conectar representações matemáticas;
4. Facilitar um discurso matemático significativo;
5. Apresentar questões com um propósito;
6. Construir uma fluência procedimental a partir da compreensão conceitual;
7. Apoiar a luta produtiva na aprendizagem da matemática;
8. Eliciar e usar evidências do pensamento dos alunos.

(Van de Walle *et al.*, 2019, p. 36, adaptado).

Essas práticas evidenciam que escolher um problema a ser usado na sala de aula se constitui em apenas uma parte do processo de ensino. Pode acontecer que, mesmo quando se dispõe de bons problemas, ainda assim eles podem não ser implementados de forma adequada. Cai e Lester (2010) afirmam que a aprendizagem significativa dos alunos depende não só do tipo de tarefas que os professores apresentam, como também dos tipos de discursos ocorridos na aula durante a resolução de problemas. O discurso é toda forma de representar, pensar, falar, concordar e discordar que os envolvidos no processo de ensino utilizam para se envolverem nas tarefas de ensino.

Em se tratando da formação de professores, autores como Mendes e Proença (2020) destacam sua importância, uma vez que o trabalho do professor pode influenciar gerações de alunos. Na formação inicial, sugerem que se deve promover estudos aprofundados sobre a Resolução de Problemas, principalmente no que diz respeito as relações de teoria e prática. Allevato e Onuchic (2019) argumentam que é preciso existir uma coerência entre a formação oferecida para o professor de matemática e o que se espera que ele pratique em sala de aula, e essa apreensão é dada num lugar similar à onde ele vai atuar, só que numa situação inversa.

3.1.5.2 O papel dos discentes

Sobre os discentes, os PCN (1998) argumentam que compreender está estritamente associado ao sentido de relacionar, seja com situações e problemas cotidianos – em que desenvolvem capacidades de natureza prática –, seja com o que se aprendeu em etapas anteriores do ensino, estabelecendo analogias e generalizações, por exemplo. A interação aluno-aluno é fortemente recomendada, pois auxilia no desenvolvimento das capacidades cognitivas, afetivas e de inserção social. Sendo assim, trabalhar coletivamente ajudaria na promoção de capacidades como, por exemplo, "perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso" (Brasil, 1998, p. 39).

Corroborando com isso, Van de Walle *et al.* (2019) ratificam que a interação entre os alunos nas aulas de matemática não deve ser subestimada, já que eles podem se apossar das ideias que surgem e, à medida que ouvem as ideias de outros alunos, eles têm acesso a abordagens variadas e enxergam a matemática como algo ao seu alcance, já que está sendo executada por seus pares.

Mendes (2009) ressalta que, ao se fazer uso da Resolução de problemas para o ensino-aprendizagem de Matemática, os alunos podem:

> - Usar uma abordagem de resolução de problemas para investigar e compreender o conteúdo matemático;
> - Formular problemas a partir de situações matemáticas do dia-a-dia;
> - Desenvolver e aplicar estratégias para resolver uma grande variedade de problemas;
> - Verificar e interpretar resultados comparando-os com o problema original;
> - Adquirir confiança para usar a Matemática de forma significante;
> - Generalizar soluções e estratégias para novas situações problemáticas.
> (Mendes, 2009, p.73).

Quando o problema é bem aplicado, justificado e desperta no discente a curiosidade e motivação para resolvê-lo, os pontos observados emergem quase que naturalmente. A busca pela compreensão e desenvolvimento de conceitos se torna significativa e o discente se sente confortável para formular problemas; um papel que, usualmente, é atribuído ao professor.

A escrita também é outro ponto relevante no processo de resolução de problemas, já que a noção de ordem intrínseco a esse processo é uma de suas características mais marcantes. Ao resolver um problema é preciso que o discente saiba dispor as informações relevantes à sua solução de forma coerente e coesa, usando os dados expostos no enunciado, justificando cada etapa de tal forma que os argumentos obedeçam a uma ordem que faça sentido. Evitando, por exemplo, utilizar informações contidas na tese na tentativa de provar a própria tese. Barichello (2008, p. 46) ratifica essa importância afirmando que

> Ao resolver por escrito algum problema, o aluno é induzido a explicitar cada passo de sua resolução para que o leitor o compreenda e, dessa forma, torna mais visível tanto o processo que o levou a essa resolução como o que possa eventualmente ter lhe faltado. Por outro lado, quando o aluno o faz verbal ou mentalmente, muitos desses detalhes podem se perder ou permanecer inacessíveis a quem observa.

Escrever bem tem relação direta com o bom uso da leitura e esta envolve habilidades que são comuns também quando se resolve problemas: decodificação, compreensão, interpretação e retenção (Nantes, 2015; Schoenfeld, 2014).

Todos esses pontos reforçam a ideia de que a resolução de problemas deve se tornar um hábito na vida dos estudantes, já que tal processo possui relação com os diferentes aspectos que constituem o saber e a aprendizagem em matemática.

3.1.6 Etapas sugeridas durante o processo de resolução de problemas

Quando se discute Resolução de Problemas, intrínseco a isso surgem questionamentos no sentido de saber se existem formas de sistematizar esse processo ou orientações sobre como resolver um problema. Ao longo dos anos diversos autores – como, por exemplo, Schoenfeld (1985), Krulik e Rudnick (1988), Santos (1993) e Proença (2018) – se debruçaram em propor etapas, sequências ou listas sobre como se deve proceder para se chegar na solução de um problema. A seguir, descreveremos as propostas por Polya (2006) e Carrillo (1998).

Polya (2006) propôs que o processo de resolução de um problema pode consistir em quatro etapas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Segundo o autor, o aluno *compreende o problema* quando ele é capaz de dizer com suas próprias palavras o que o problema pede; além disso, quando tem condições de identificar a incógnita, os dados e a condicionante. O autor sugere que, sempre que necessário, o professor auxilie os discentes adotando as seguintes indagações e orientações:

> Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las? (Polya, 2006, p. XIX).

A fase *estabelecimento de um plano* é atingida quando o discente conhece, mesmo que de forma sucinta, o que ele tem que fazer para chegar no resultado do problema. Polya (2006) chama a atenção ao fato de que essa é a principal fase na resolução de um problema. Duas dificuldades a serem contornadas nessa etapa é que alguns alunos se debruçam em realizar cálculos aleatórios e a traçar figura sem ter compreendido devidamente o problema, ou esperam que surja uma ideia brilhante. Contornando isso, é apresentado as seguintes indagações:

> Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver um problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou dos dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as essenciais implicadas no problema? (Polya, 2006, p. XIX).

Sendo o plano consistente, sua *execução* costuma não ter maiores dificuldades. É nessa fase em que a sistematização, a organização das ideias e a escrita ganham destaque. O plano é apenas um roteiro, é na execução dele que o discente traduz o que se pensou fazer em um texto matematicamente coerente. O maior cuidado que se deve ter nessa fase é o de que o aluno não esqueça o seu plano. Isso geralmente não acontece se o plano tiver sido traçado inteiramente pelo aluno; ou com o auxílio mínimo do professor. É nessa fase que o problema é resolvido. Polya (2006) sugere que

> Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto? (Polya, 2006, p. XX).

Polya (2006) afirma que até mesmo bons alunos costumam não chegar na fase descrita como *retrospecto.* É nela que o conhecimento é consolidado e a capacidade de resolver problemas é aperfeiçoada. O autor ainda afirma que problema algum fica completamente esgotado ao ser resolvido. Isso corrobora com o papel que o aluno deve assumir de ser, além de um resolvedor, um formulador de problemas, já que é nessa etapa que, além de verificar se sua solução possui alguma inconsistência, ao aluno é atribuída a opção de estender o problema, generalizá-lo e tomá-lo como base na resolução e elaboração de outros problemas. Polya (2006) sugere os seguintes questionamentos:

> É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? (Polya, 2006, p. XX).

Embora tais etapas de resolução sejam procedimentos que foram concebidos em uma ordem, elas não devem ser utilizadas como formas rígidas, pois a busca pela solução de um problema, não raro, envolve avanços e retrocessos.

Carrillo (1998) afirma que não existem fases perfeitas e concentra sua atenção no fato de que o ponto mais importante não está nem no rótulo nem na concepção de provisoriedade em que se encontra o resolvedor frente às fases do problema. Ele concebe as fases como estágios pelos quais se passa e que se pode voltar durante todo o processo de resolução de um problema.

Ainda assim, apresenta cinco fases para o processo geral de resolução de problemas, nomeando, intencionalmente, a primeira de fase 0 pelo fato de que, na sala de aula, o problema geralmente já se apresenta como tal. Eis as fases, seguidas de algumas heurísticas sugeridas por Carrillo (1998):

0. *Identificação:* a sugestão é do tipo atitudinal, assumindo uma postura crítica;
1. *Compreensão:* organizar a informação, exemplificar, expressar em outros termos;
2. *Planejamento e exploração:* simplificar, estimar, buscar regularidades com a intenção de generalizar, sondar, considerar problemas equivalentes, argumentar por contradição, assumir a solução, partir do que já se sabe, planejar hierarquicamente a solução, decompor o problema, explorar problemas similares, conjecturar.
3. *Execução*: registrar todos os cálculos, destacar as realizações intermediárias, atuar com ordem, atuar com precisão, explicar o estado da execução.
4. *Verificação*: analisar a consistência da solução, expressar a solução de outra maneira, analisar a consistência do processo, analisar se se pode chegar ao resultado de outra maneira, generalizar.

Essas etapas não distam do que já propunha Polya quando afirmava que o primeiro passo para se resolver um problema é compreendê-lo. É trivial afirmar que é certamente impossível resolver um problema sem uma compreensão prévia dele. Indo um pouco mais além, compreender um problema não é simplesmente fazer uma leitura do que ele diz ou ter conhecimento dos símbolos apresentados no enunciado, mas também enxergá-lo como tal e estar disposto a resolvê-lo. É ter consciência de que pode relacioná-lo com os conhecimentos prévios dispostos na sua estrutura cognitiva que possibilitam avançar para as etapas seguintes.

É entre a compreensão e a resolução do problema que se coloca em prática as ideias que se acham úteis para se chegar à resposta. Nesse *continuum* entram em destaque as estratégias, as heurísticas, as regras, os procedimentos, os algoritmos e tudo aquilo que o resolvedor pode dispor para atingir seu objetivo. A escrita é valorizada, bem como as justificativas para se tomar determinado caminho, tudo com base no rigor de que toda a matemática depende.

3.1.7 Comportamento/modos dos alunos que resolvem problemas

Considerando a relevância atribuída nesse estudo à utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, convém destacar que sua implementação não é desvinculada das subjetividades inerentes ao docente e aos discentes. O envolvimento dos discentes em tal processo é percebido pelo docente e, em geral, “alguns se envolvem mais, outros menos e têm aqueles para os quais essa tarefa é indiferente” (Silva, 2017, p. 30).

Sendo assim, será descrito possíveis características que se consideram relevantes que os alunos que resolvem problemas disponham. Esses *comportamentos* estão intrinsecamente relacionados aos tipos de conhecimentos envolvidos no processo de resolução de problemas. Com isso, baseados em Mayer (1982), Baltaci *et al.* (2014) fazem um estudo sobre esses conhecimentos mobilizados por alunos superdotados em um determinado nível de ensino. É bem verdade que este não é o público-alvo desta pesquisa de doutorado, mas tal discussão se torna relevante por servir como parâmetro para o que se almeja que os alunos desenvolvam ao longo do processo de resolução de problemas.

Os autores expressam, então, quatro tipos de conhecimentos: conhecimento semântico, conhecimento de esquema, conhecimento algorítmico e conhecimento estratégico, todos indissociáveis.

Ratificando o que prega Polya (2006) quando afirma que o primeiro passo para se resolver um problema é compreendê-lo, segundo Baltaci *et al.* (2014) o conhecimento semântico é importante nessa etapa, pois o aluno pode converter as informações contidas no enunciado do problema em afirmações matemáticas.

> Portanto, é necessário conhecimento semântico para determinar a informação fornecida em geral, para expressar os problemas por um desenho, para usar símbolos como "x" para o desconhecido, para determinar o que o valor encontrado representa e para determinar as informações necessárias para a solução. (Baltaci *et al.*, 2014, p. 1034).

O conhecimento de esquema está relacionado com expressar as estruturas de informação de um problema com problemas ou esquemas semelhantes, enquanto o problema está sendo resolvido. Quando o resolvedor de problemas sabe o tipo de problemas que ele está resolvendo, ele está usando esse tipo de conhecimento (Baltaci *et al.*, 2014). É o equivalente à heurística do Polya (2006): *conhece um problema correlato?* Ele se dá majoritariamente através da associação. É a ideia de que compreender é saber relacionar, defendida por Onuchic e Allevato (2012).

O conhecimento de algoritmo é o utilizado para resolver a equação, na concepção dos autores, é o caminho que se segue para resolver o problema. Esse conhecimento é usado "quando o aluno conhece as operações a aplicar às equações, quando gere as operações necessárias à resolução das equações, quando expressa os enunciados necessários ao resolver as equações formadas para resolver os problemas" (Baltaci *et al.*, 2014, p.1035).

Finalmente, o conhecimento estratégico é aquele que atua no planejamento e controle da solução do problema. É o tipo de conhecimento que reúne o que não se conhece com o que se conhece para resolver o problema, através de explicitações sobre como se dará a resolução do problema e como utilizará os dados (Baltaci *et al.*, 2014).

Esses tipos de conhecimentos mobilizam os estudantes no gerenciamento das informações e os tornam aptos a resolverem os mais variados tipos de problemas, já que sua bagagem intelectual está quase sempre cheia. É parte do pensar matematicamente defendido por Schoenfeld (1996), já que são conhecimentos que permitem aos discentes "ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predileção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair, e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações)" (Schoenfeld, 1996, p. 8).

English *et al.* (2008) expressam que aqueles estudantes que têm mais facilidade e experiência em resolver problemas – que iremos nomear de *bons resolvedores* – percebem de imediato as estruturas que são subjacentes ao problema, além de preverem passos seguintes na sua resolução e possíveis falhas, são mais organizados e conseguem generalizar com mais facilidade.

Somado a isso, Echeverría e Pozo (1998) afirmam que os estudos sobre Resolução de Problemas por especialistas e principiantes partem do fato de que habilidades e estratégias muitas vezes são específicas de determinadas áreas e que o êxito que os especialistas costumam ter na resolução de problemas está muito mais relacionado a conhecimentos específicos do que à capacidade cognitiva; ou seja, tem muito mais a ver com o fortalecimento desses conhecimentos através da prática (que culmina numa perícia), do que com uma capacidade intelectual de nível superior. Além disso, tal prática deve ser orientada e deve ter um objetivo e fazer sentido. Acrescenta-se também que "a eficiência na resolução de problemas depende muito da disponibilidade e da ativação de conhecimentos conceituais adequados" (Echeverría; Pozo, 1998, p. 32), através de uma relação direta entre dominar as estratégias de resolução de problemas, de sistematização e atitudes procedimentais e a obtenção de conhecimento conceitual.

Os autores ainda complementam que as estratégias pessoais de especialistas e principiantes ao resolver problemas possuem algumas diferenças. De forma resumida, os especialistas são mais rápidos ao resolver um problema e cometem menos erros. Além disso, costumam adotar estratégias diferentes das dos principiantes e controlam melhor os processos de solução, planejando melhor, descobrindo mais facilmente algum erro ou informação ausente no problema, conhecendo também melhor as regras que irão utilizar.

Carrillo (1998), a partir dos trabalhos de diferentes autores, resumiu as características comuns entre os bons resolvedores de problemas nos seguintes tópicos:

1. Alto coeficiente intelectual;
2. Habilidade na hora de raciocinar;
3. Boa compreensão;
4. Habilidade em cálculo;
5. Aptidão espacial;
6. Habilidade para compreender conceitos e termos matemáticos;
7. Habilidade para detectar semelhanças, diferenças e analogias;
8. Habilidade para identificar elementos críticos e selecionar procedimentos e dados corretos;
9. Habilidade para detectar detalhes irrelevantes;
10. Habilidade para estimar e analisar;
11. Habilidade para visualizar e interpretar fatos e relações quantitativas ou espaciais;
12. Habilidade para generalizar a partir de alguns exemplos;
13. Habilidade para mudar de método em tempo real;
14. Autoestima e confiança, com boas relações com os outros;
15. Baixa ansiedade.

As cinco primeiras características são de cunho mais geral e, possivelmente englobam as oito seguintes. Estas podem ser evidenciadas, por exemplo, através das heurísticas propostas por Polya. O destaque aqui fica centrado nas duas últimas características, pois dão uma certa importância aos aspectos afetivos, que geralmente são deixados de lado quando o estudante está a resolver um problema, mas que influenciam diretamente nesse processo, conforme argumentam pesquisas como, por exemplo, McLeod (1989), Gómez-Chacón (2000), Gil, Blanco e Gerrero (2005), Ibarra-González e Eccius-Wellmann (2018), Cai e Leikin (2020) e Schindler e Bakker (2020).

Polya (2006) afirma que um solucionador de problemas inteligente deve, antes mesmo de compreender um problema, almejar a sua solução e isso se dá, de forma geral, pela confiança que ele deve ter em si mesmo. Isso não é o mesmo que dizer que ele deve ter plena certeza no sucesso da sua resolução, mas que está disposto a obtê-la. Nesse percurso é necessário persistência, paciência e saber lidar com os percalços que costumam se apresentar; em suma, ele deve saber lidar com as emoções que emergem durante todo o processo de resolução de um problema. "Se o estudante não tiver, na escola, a oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções que surgem na luta pela solução, a sua educação matemática terá falhado no ponto mais vital" (Polya, 2006, p. 131).

3.1.8 Maneiras de se abordar a Resolução de Problemas

Schroeder e Lester (1989), adaptado de Hatfield (1978), consideram três caminhos para se abordar a Resolução de Problemas na sala de aula: ensinar *sobre* Resolução de Problemas, ensinar (*matemática*) a (*para*) resolver problemas e ensinar matemática via (*através*) da Resolução de Problemas. Os autores ainda afirmam que, apesar de serem concebidas para serem trabalhadas de forma separada, essas três concepções muitas vezes se sobrepõem.

O primeiro modo (*sobre*) está associado a considerar a Resolução de Problemas como um novo conteúdo (Allevato; Onuchic, 2014). Uma possível limitação é que, considerada sob esse aspecto, a Resolução de Problemas passaria a ser vista como um tópico do currículo e, em vez de servir como um contexto em que a matemática é aprendida e aplicada, se tornaria apenas mais um conteúdo a ser ensinado. Tem forte relação com os trabalhos de Polya, principalmente no que se refere às heurísticas e às quatro etapas para se resolver um problema. O docente baseia o seu ensino sobre Resolução de Problemas ressaltando o modelo do autor supramencionado ou alguma variação deste.

O segundo modo (*para*) dá ênfase à forma como a matemática é apresentada, tendo como finalidade a resolução de problemas rotineiros ou não rotineiros. Isto é, o conteúdo é apresentado e, posteriormente, "dá-se aos alunos muitos exemplos de conceitos e estruturas matemáticas sobre aquilo que estão estudando e muitas oportunidades de aplicar essa matemática ao resolver problemas" (ONUCHIC, 1999, p. 206 – 207). O foco não é a resolução de problemas, mas sim a Matemática, o conteúdo que se quer ensinar; já que o problema é usualmente apresentado após ter sido desenvolvida a parte teórica. Esse é o modelo mais usado nas escolas brasileiras. Apesar de relevante, Allevato e Onuchic (2014) chamam a atenção para o fato de que

> um perigo dessa concepção é que ela configure a resolução de problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito, ou após o treino de alguma habilidade ou de algum algoritmo. Assim, a Matemática é ensinada separada de suas aplicações e a resolução de problemas é utilizada para dotar a teoria de um significado prático. (Allevato; Onuchic, 2014, p. 38).

No terceiro modo (*através*), a Resolução de Problemas ganha um significado a mais, pois os problemas são vistos não apenas como uma finalidade de se aprender matemática, mas também como um primeiro veículo de fazer Matemática (Morais; Onuchic, 2014). O ensino de determinado conteúdo começaria, portanto, com uma situação-problema que fosse revestida por elementos relevantes para introduzir tal assunto. *Através* – que aqui apresenta o mesmo significado de *ao longo* ou *no decurso* – dá ênfase ao fato de que conceitos matemáticos e resolução de problemas devem ser trabalhados e construídos de forma concomitante.

Justulin (2014) destaca a substituição do termo *via* por *através*, enfatizando que

> ensinar Matemática <u>via</u> resolução de problemas implica em usar um problema como um recurso. Já ensinar Matemática <u>através</u> da resolução de problemas é uma forma de fazer Matemática em que o aluno é um coconstrutor de seu conhecimento. Nessa abordagem, os problemas apresentados gerarão novos conceitos, procedimentos ou conteúdos matemáticos. (Justulin, 2014, p. 58)

Onuchic e Allevato (2012, p. 242) afirma que "sem dúvida, ensinar matemática através da Resolução de Problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM e dos PCN, pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto de Resolução de Problemas".

3.1.9 Ensinar Matemática *através* da Resolução de Problemas

No fim da década de 80, houve-se questionamentos sobre a falta de consenso em relação à interpretação da primeira recomendação deixada pelo documento "Uma Agenda para Ação", que fixava a resolução de problemas como o foco da matemática escolar. A Resolução de

Problemas passou, assim, a ser pensada como uma metodologia de ensino, se caracterizando como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática (Nunes, 2010).

Em 1989, o ensino de Matemática passou a ser trabalhado *via* resolução de problemas. Schroeder e Lester (1989, p. 33) afirmam que

> No ensino *via* resolução de problemas, os problemas são trabalhados não apenas com o propósito de se aprender Matemática, mas também como o principal meio de se fazer isso. Nessa abordagem, o ensino de um tópico de Matemática começa com uma situação problema que incorpora aspectos chave do tópico, e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis a problemas razoáveis.

Além disso, esses autores afirmam que o intuito de se aprender Matemática é ter a possibilidade de transformar determinados problemas não rotineiros em rotineiros. Complementam que a aprendizagem matemática, nessa perspectiva, pode ser vista como um movimento do concreto para o abstrato. Aquele no sentido de que um problema do mundo real pode servir como um exemplo de conceito matemático, este como uma representação simbólica de uma classe de problemas (Schroeder; Lester, 1989).

Em 1990, a abordagem "*via* resolução de problemas" passou a ser concebida como "*através* da resolução de problemas". Como explicitado anteriormente por Justulin (2014), o ensino *via* resolução de problemas é entendido como "por meio de", "por intermédio de", em que o problema pode ser visto como um recurso para se ensinar/aprender matemática. O ensino *através* implica "ao longo de", "do começo ao fim", "em todo o *continuum*". A apresentação do problema, nessa perspectiva, tem o intuito de gerar novos conceitos e conteúdos. Ele é apresentado logo no início e a aprendizagem acontece ao longo do processo de resolução dele.

Segundo essa abordagem, os discentes aprenderiam matemática por intermédio da investigação, explorando contextos que vão desde problemas reais até modelos matemáticos. Van de Walle *et al.* (2019) dizem que o ensino *através* da resolução de problemas é o oposto do ensino *para* resolver problemas, já que o problema é apresentado logo no início. E isso faz com que os conhecimentos ou habilidades emerjam da exploração do problema.

Van de Walle (2001, p. 40) afirma que

> A maioria, se não todos, os conceitos e procedimentos matemáticos importantes podem ser melhor ensinados através da resolução de problemas. Isto é, tarefas ou problemas podem e devem ser colocados de forma a engajar os estudantes em pensar e desenvolver a matemática importante que precisam aprender.

Fatores como compreender o problema, ter um posicionamento crítico sobre quais decisões tomar para resolvê-lo, ser capaz de relacionar a informação nova com conceitos e técnicas anteriormente adquiridos, e a própria comunicação são elementos que devem ser estimulados durante todo o processo de aprendizagem *através* da resolução de problemas.

Ainda assim, Schroeder e Lester (1989) ratificam que apesar de na teoria essas três concepções sobre o ensino – *para, sobre* e *através* da – resolução de problemas serem tratadas de forma separada, na prática elas se sobrepõem e ocorrem a partir de várias combinações e sequências. Apesar disso, chama a atenção para o fato de que se os promotores de currículos, autores de livros e professores pretendem tornar a resolução de problemas o "foco da instrução", eles precisam estar cientes das limitações inerentes à adesão exclusiva a qualquer um dos dois primeiros tipos de concepções para a resolução de problemas.

Dito isso, os autores enfatizam que, apesar do ensino de matemática *através* da resolução de problemas ser pouco adotado por muitos dos três grupos citados no parágrafo anterior, quer implicitamente quer explicitamente, ela constitui-se numa abordagem que merece ser considerada, desenvolvida e avaliada. Isso se justifica pelo fato de que, segundo Onuchic (1999, p. 208),

> o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática.

Essa concepção traz em seu bojo a ideia de que compreender está estritamente ligado a relacionar. Ela aumenta à medida em que o discente é capaz de:

a) relacionar uma determinada ideia matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos;
b) relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele;
c) construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema (Onuchic; Allevato, 2012, p. 242).

A compreensão, nessa perspectiva, deveria se caracterizar como o foco do ensino de matemática, e ela emerge com mais vigor quando o discente está resolvendo um problema. É a partir deste processo que se levanta hipóteses sobre se o discente compreendeu ou não determinado conteúdo e se possui os conhecimentos necessários para resolver determinado problema. Onuchic (1999, p. 208) afirma que

> Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar a matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.

Ensinar através da resolução de problemas se caracteriza como uma mudança no paradigma do ensino tradicional de matemática, em que os alunos repetem o que o professor ensina. É nesse contexto que o aluno se posiciona como protagonista no processo de ensino-aprendizagem, pois o aluno tem o contato direto com o problema, faz deduções, relaciona conceitos anteriormente aprendidos e assimila novos conceitos.

3.1.10 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através* da Resolução de Problemas

A partir das três concepções de ensino com foco na resolução de problemas, propostas por Schroeder e Lester (1989), em que é dado destaque ao ensino da matemática *através* da resolução de problemas e, levando em consideração a consolidação da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, as pesquisadoras brasileiras Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato ampliaram essas três abordagens e desenvolveram o que elas denominam "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através* da Resolução de Problemas" (Allevato; Onuchic, 2009; Onuchic; Allevato, 2011; Allevato; Onuchic, 2014).

Frequentemente, em sala de aula, o ensino, a aprendizagem e a avaliação podem ocorrer em momentos distintos e não necessariamente como decorrência um do outro. A partir das reformas educacionais no ensino de matemática ocorridas no século XX, passou-se a entender que o ensino e a aprendizagem deveriam ocorrer simultaneamente. O termo ensino-aprendizagem tornou-se, portanto, frequente em pesquisas acadêmicas. Mais recentemente, a partir do entendimento da necessidade de um acompanhamento contínuo em que a avaliação poderia (e deveria) estar presente durante todo o processo de ensino e de aprendizagem, passou-se a considerar, no ensino-aprendizagem, a avaliação como um componente extremamente importante (Onuchic; Allevato, 2011). A expressão ensino-aprendizagem-avaliação passou, então, a ser valorizada.

Segundo Pironel e Onuchic (2016, p. 4):

1. Pode ocorrer ensino e aprendizagem sem que exista uma avaliação desse processo;
2. Pode haver ensino e avaliação sem que tenha havido aprendizagem; e

3. Pode haver aprendizagem e avaliação dessa aprendizagem, sem que ele tenha acontecido a partir do ensino.
4. Porém, compreende-se a necessidade de que os processos de ensino, aprendizagem e avaliação ocorram integralmente quando pensamos na sala de aula de matemática.

Indo ao encontro disso, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, parte da justificativa de que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer ao mesmo tempo, sendo atribuído ao professor o papel de mediador. O intuito é que o professor ensine, o aluno, participando ativamente, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. De acordo com Bransford, Brown e Cocking (2007, p. 44) "As avaliações contínuas [...] permitem que o professor compreenda as idéias preconcebidas dos estudantes, perceba em que ponto estão no caminho que leva do raciocínio informal para o formal e planeje a instrução de acordo com isso".

Essa concepção também ratifica a ideia de que avaliação deve estar presente em todo o processo de ensino-aprendizagem, "integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário" (Allevato; Onuchic, 2009, p. 139).

Allevato e Onuchic (2014, p. 44) ainda afirmam que "nessa metodologia, o problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos". Ao se trabalhar a resolução de problemas dentro dessa perspectiva (ponto de partida), assume-se que o docente acaba por não eliminar a curiosidade do discente, possibilitando que ele seja mais capaz de resolver situações ao longo da vida (Foster, 2019).

Segundo Pironel e Vallilo (2017, p. 302):

> A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas traz, em sua gênese, o compromisso com o desenvolvimento do estudante. Coloca a aprendizagem no centro do processo e compreende a necessidade de integração desse processo com os processos de ensino e de avaliação.

Herminio (2008) atribui também ao professor um papel fundamental nessa Metodologia, afirmando que para que ela tenha um bom resultado, é indispensável que haja uma melhor formação do professor, uma vez que ela requer um preparo prévio das aulas e uma reflexão sobre quais os objetivos que se pretendem alcançar com as atividades que serão propostas.

Apesar de não existir formas prontas de se trabalhar através da resolução de problemas, a pesquisadora Onuchic criou, em 1998, e com a participação de 45 professores, um roteiro que pode auxiliar no uso dessa metodologia. Ele consistia, inicialmente, em sete etapas: formar grupos e entregar uma atividade; o papel do professor; resultados na lousa; plenária; análise dos resultados; consenso; formalização (Onuchic, 1999). Com a contribuição da pesquisadora Allevato e, após algumas atualizações nas etapas já existentes, chegou-se, atualmente, em dez etapas, apresentadas a seguir:

1. Proposição do problema;
2. Leitura individual;
3. Leitura em conjunto;
4. Resolução do problema;
5. Observar a incentivar;
6. Registro das resoluções na lousa;
7. Plenária;
8. Busca do consenso;
9. Formalização do conteúdo;
10. Proposição e resolução de novos problemas.

As descrições de cada uma dessas etapas serão feitas no capítulo referente à metodologia desta pesquisa. Ademais, é possível que, durante a utilização de tal roteiro, o professor permita o uso de materiais didáticos e instrumentos manipuláveis.

É importante destacar também que, nessa Metodologia, os problemas são apresentados aos discentes antes do conteúdo-chave necessário para resolvê-lo. É justamente durante o processo de resolução do problema que conjecturas e conceitos vão sendo desenvolvidos e aprendidos, culminando, finalmente, na apresentação formal do conteúdo (etapa 9). Isso converge com o que prega os PCN (1998) ao afirmar que conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas e com a BNCC (2018) quando sugere que

> os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de **resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, **aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos** cada vez mais sofisticados. (Brasil, 2018, p. 529, grifos nossos).

Sendo assim, ao destaque dado à resolução de problemas é acrescentado, dentro dessa concepção metodológica, um importante papel à compreensão. A Resolução de Problemas transfere o seu foco de ser tida como finalidade do ensino (o ensino *para*), para ser o meio pelo qual o conhecimento matemático é construído e compreendido pelos discentes.

3.2 A OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

> A principal razão para a existência da OBMEP são os alunos das escolas públicas, seus desempenhos, interesse e motivação pela matemática. Este grupo de atores individuais é o foco principal dessa política porque está no cerne de problemas existentes e inter-relacionados: o baixo desempenho dos alunos em matemática, a importância da matemática para o desenvolvimento tecnológico do país, a baixa adesão dos profissionais a esta carreira, a necessidade de profissionais para a formação de novos alunos. (Maranhão, 2011, p. 35).

3.2.1 Histórico e Regulamento

A OBMEP é uma competição anual[21], criada em 2005 e realizada pelo IMPA, contando com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). É promovida através de recursos oriundos do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações (MCTI) e do MEC.

Sua criação foi impulsionada pelos resultados exitosos de dois outros projetos olímpicos: a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)[22] e o projeto *Numeratizar*, este último realizado no Ceará a partir de 2003, sob a coordenação do professor João Lucas Marques Barbosa, da Universidade Federal do Ceará.

De acordo com o seu regulamento[23], possui os seguintes objetivos:

> - Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil.
> - Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade.
> - Promover a difusão da cultura matemática.
> - Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas.
> - Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas e privadas, contribuindo para a sua valorização profissional.
> - Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas.
> - Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.
>
> (IMPA, 2023, p.1).

Assim, nota-se que os objetivos da OBMEP contemplam desde a valorização do esforço dos alunos-destaque e seu acompanhamento até o ensino superior (objetivo 4) até o incentivo à formação continuada dos professores de matemática (objetivo 5); além de caminharem na direção de tentar melhorar a qualidade do ensino no país, seja através da elaboração de um

---

[21] Devido a pandemia causada pela COVID-19, a OBMEP não foi realizada no ano de 2020.
[22] A partir de 2017, a OBM se integra à OBMEP, constituindo-se em fase única para os níveis 1, 2 e 3 e cujos alunos participantes são, dentre outros, os com melhores pontuações na correção regional da OBMEP.
[23] Disponível em: http://www.obmep.org.br/regulamento.htm

material dito de qualidade, seja na sua consolidação como política pública, ou como um veículo que dá visibilidade a uma ciência que, em sua essência, é vista como que para poucos.

A olimpíada é dividida em três níveis, que compreendem estudantes devidamente matriculados nos 6º ou 7º anos, 8º ou 9º anos, e Ensino Médio, para os níveis 1, 2 e 3, respectivamente. Cada nível possui duas fases: a 1ª fase é destinada a todos os estudantes participantes e é composta por 20 questões objetivas; além disso, possui duração de 2h30min. A aplicação e correção é feita pelos próprios professores da escola inscrita. A 2ª fase é destinada aos alunos que obtiverem as maiores notas na Primeira Fase, é composta por 6 questões discursivas e possui duração de 3h. A aplicação e correção das provas são feitas por equipes sob orientação do IMPA e são realizadas em duas etapas: uma regional e outra nacional.

A OBMEP contempla quase cem por cento dos municípios brasileiros e se consolidou como a maior olimpíada de Matemática do mundo (em números absolutos), "superando o último *Concours Kangourou*[24], realizado na França, que contou com a participação de quatro milhões de competidores oriundos de vários países do mundo" (Maciel; Basso, 2009, p. 3). Atingiu seu ápice de inscritos em 2010, quando houve um total de 19.665.928 inscrições realizadas. A Tabela 06, a seguir, apresenta a quantidade de escolas e alunos inscritos na primeira e segunda fases, bem como sua cobertura no território nacional.

[24] Atualmente, essa olimpíada conta com uma média de 6 milhões de participantes. Para saber mais, acesse: http://www2.mathkang.org/default.html

Tabela 06 – OBMEP em números.

	Primeira Fase			Segunda Fase		
Ano	**Alunos**	**Escolas**	**Municípios**	**Alunos**	**Escolas**	**Municípios**
2005	10.520.831	31.031	93,5%	457.725	29.074	91,9%
2006	14.181.705	32.655	94,5%	630.864	29.661	92,4%
2007	17.341.732	38.450	98,1%	780.333	35.483	96,9%
2008	18.326.029	40.397	98,7%	789.998	35.913	96,9%
2009	19.198.710	43.854	99,1%	841.139	39.387	98,1%
2010	19.665.928	44.717	99,16%	863.000	39.929	98,3%
2011	18.720.068	44.691	98,9%	818.566	39.935	98,1%
2012	19.166.371	46.728	99,42%	823.871	40.770	98,5%
2013	18.762.859	47.144	99,35%	954.926	42.480	98,83%
2014	18.192.526	46.711	99,41%	907.446	41.302	99,41%
2015	17.972.333	47.580	99,48%	889.018	42.316	97,62%
2016	17.839.424	47.474	99,59%	913.889	43.232	99,05%
2017*	18.240.497	53.231	99,57%	941.630	49.617	99,23%
2018	18.237.996	54.498	99,44%	952.782	50.183	98,89%
2019	18.158.775	54.831	99,71%	949.240	50.663	99,03%
2020**	17.774.636	53.374	99,84%	–	–	–
2021	17.774.936	53.375	99,84%	566.285	35.075	88,65%
2022	18.159.636	54.488	99,87%	834.742	46.602	97,79%

* A partir desse ano, as escolas particulares passaram a serem contempladas pela OBMEP.
** Nesse ano, houve a realização das inscrições, mas, devido a pandemia causada pela COVID-19, decidiu-se não realizar a olimpíada.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados da OBMEP (2023).

Da tabela, nota-se que a OBMEP abrange uma quantidade bastante expressiva de estudantes e escolas brasileiras. Como comparação, os dados do censo escolar 2020, divulgados pelo Inep[25] mostram que o total de estudantes matriculados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio das escolas públicas e particulares do Brasil foi de 19.479.168, o que implica dizer que aproximadamente 91,2% dos estudantes desses níveis de ensino estavam inscritos na OBMEP 2020.

Em relação às premiações, elas são distribuídas entre alunos (medalhas de ouro, prata, bronze, menções honrosas e participação dos medalhistas no PIC), professores (diplomas de homenagens, livros e participação em programa de formação de professores), escolas (troféus e kits com material didático) e Secretarias Municipais de Educação (troféus), havendo separação entre as escolas públicas e privadas.

Apesar disso, o número de alunos premiados ainda é uma parcela muito reduzida em comparação ao total de inscritos, não chegando a meio por cento, como se pode ver na Tabela 07 a seguir:

[25] Disponível em:
https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/notas_estatisticas_censo_escolar_2020.pdf

Tabela 07 – Alunos inscritos *x* alunos premiados.

Ano	Total de alunos inscritos	Total de alunos premiados*	% de alunos premiados
2005	10.520.831	31.109	0,30
2006	14.181.705	34.743	0,24
2007	17.341.732	33.033	0,19
2008	18.326.029	33.017	0,18
2009	19.198.710	33.011	0,17
2010	19.665.928	33.256	0,17
2011	18.720.068	33.201	0,18
2012	19.166.371	45.433	0,24
2013	18.762.859	44.834	0,24
2014	18.192.526	48.545	0,27
2015	17.972.333	48.784	0,27
2016	17.839.424	48.983	0,27
2017	18.240.497	51.877	0,28
2018	18.237.996	54.121	0,30
2019	18.158.775	55.671	0,31
2021	17.774.936	57.057	0,32
2022	18.159.636	55.983	0,31

*medalhas de ouro, prata, bronze e menções honrosas.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados da OBMEP (2023).

A OBMEP ainda oferece em seu site um vasto material para preparação dos alunos inscritos: as provas da primeira e segunda fases, com suas respectivas soluções, os bancos de questões de todas as edições, apostilas do PIC, simulados, vídeos, links dos sites de outras olimpíadas nacionais e internacionais e links de programas e portais, como é o caso do PIC, Portal da OBMEP, OBMEP nível A[26], Portal Clubes de Matemática, Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo, PICME, Programa OBMEP na Escola, dentre outros.

3.2.2 Uma análise geral das questões da OBMEP

De acordo com o item 3.3 do seu regulamento (IMPA, 2023, p. 6), "as questões propostas nas provas apresentam conteúdos previstos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e compatíveis com os respectivos níveis". Apesar disso, não há menção explícita no documento sobre quais são esses conteúdos. Neves (2016) – em uma pesquisa que buscava analisar o banco de questões dos níveis 1 e 2 da OBMEP, no período de 2009 a 2015, sob uma perspectiva crítico-construtiva amparado pelos PCN – argumenta, em sua conclusão, que deve ser feita uma análise mais criteriosa na elaboração do Banco de Questões e das provas, nos seus

[26] Em 2018, foi idealizado a OBMEP nível A, cujo público-alvo são alunos de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental de escolas públicas do Brasil. Esse nível possui regulamento próprio.

três níveis e tal forma que exista uma harmonia com o conteúdo da grade curricular de matemática.

Com uma proposta de analisar as evidências de validade de conteúdo[27] da primeira fase da OBMEP 2017, Nível 2, Teixeira e Moreira (2021) compararam os conteúdos abordados na olimpíada com os previstos nos PCN e no Currículo em Movimento usado no Distrito Federal.

A pesquisa apontou que, das vinte questões, apenas uma apresentou baixa demanda cognitiva[28]. Além disso, catorze questões apresentaram um grau de dificuldade alto[29], em relação ao 8º ano escolar. Sobre a distribuição dos conteúdos, constatou-se uma valorização considerável dos assuntos geometria e contagem.

Das interseções entre os conteúdos dispostos nos PCN e no Currículo em Movimento e os presentes na olimpíada, observou-se que apenas seis conteúdos presentes na união entre os currículos (de um total de vinte) foram identificados nas questões da OBMEP. Existem também itens cujos conteúdos contemplam níveis diferentes do 8º e 9º anos, para mais e para menos.

Sobre as categorias cognitivas, a prova de 2017, Nível 2, apresenta 80% das questões nas categorias mais complexas. Segundo os autores, categorias estas regidas pelos verbos *analisar*, *avaliar* e *criar*, em detrimento das menos complexas: *lembrar*, *entender* e *aplicar*. Sobre a relevância[30] das questões, todos os itens foram classificados como não relevantes[31]. Das vinte questões, dezesseis não apresentaram nenhuma evidência de validade de conteúdo.

Os autores concluem sugerindo que os organizadores da olimpíada publicizem uma matriz de referência que esteja em harmonia com os documentos curriculares da Educação Básica.

Indo nessa direção, a pesquisa de Santos (2018) teve como intuito fazer uma análise estatística das questões da segunda fase da OBMEP Nível 2, dos anos de 2014, 2015 e 2016, sob a ótica dos temas e descritores da Matriz de Referência da Prova Brasil. O autor observou que alguns itens das provas contemplaram conteúdos que não estão presentes nos descritores da Prova Brasil para a escolaridade analisada (8º e 9º anos), como é o caso, por exemplo, do

---

[27] Em linhas gerais, essa investigação buscou "analisar a representatividade das questões da OBMEP em relação aos objetivos de aprendizagem expressos pelos conteúdos de Matemática para os 8º e 9º anos, haja vista não haver documento da própria OBMEP para proceder a tal análise" (Teixeira; Moreira, 2021, p. 11).
[28] Consonância com os conteúdos previstos.
[29] Para se chegar a esse valor, foram consultados dois especialistas (professores de matemática).
[30] O quanto a questão é essencial ou importante para a mensuração do fator (conteúdo matemático 8º/9º ano) indicado (Teixeira; Moreira, 2021).
[31] Para se chegar a esse valor, foram consultados cinco especialistas (professores de matemática), denominados juízes que atribuíam um conceito à questão: a) item essencial, b) útil, mas não essencial e c) não necessário. Um item é considerado relevante quando mais da metade dos juízes assim o julgam, desde que a probabilidade de ter ocorrido concordância ao acaso seja de, no máximo, 5%.

conteúdo Análise Combinatória. Dos trinta a sete descritores elencados na matriz de referência da Prova Brasil, quinze emergiram a partir da análise dos itens da referida olimpíada, o que corresponde a uma taxa de contemplação de aproximadamente 41%.

Santos (2018) ainda comparou o comportamento do desempenho dos discentes do estado de Mato Grosso na OBMEP com base na Prova Brasil, dispondo de uma amostra que contemplou todos os 141 municípios do estado. O comparativo deu-se entre as cidades e por Tema[32] constante na matriz de referência da Prova Brasil. Sobre esse último, constatou-se que os discentes possuíram um desempenho melhor nas habilidades relacionadas com o Tema IV e pior nas relacionadas ao Tema II.

No comparativo direto entre o desempenho dos estudantes analisados na olimpíada e na Prova Brasil, observou-se que 17% dos municípios ocupam a mesma posição na classificação geral desses dois exames. Além disso, 62% dos municípios que obtiveram as 50 melhores notas na OBMEP também ficaram entre os 50 melhores desempenhos na Prova Brasil. A porcentagem é a mesma quando se leva em conta os 50 piores desempenhos. Isso mostrou que existe uma correlação positiva de grau médio entre o desempenho dos estudantes nessas duas avaliações de larga escala.

Rodrigues *et al.* (2018) investigaram as inter-relações existentes entre as questões da OBMEP – Nível 2, no período de 2005 a 2017 – e os Ambientes de Aprendizagem[33] na perspectiva de Skovsmose (2000). O intuito foi classificar todas as 260 questões em uma das seis categorias propostas por Skovsmose (2000), conforme a Tabela 08 a seguir:

Tabela 08 – Ambientes de Aprendizagem.

Tipos de Referências/ Paradigmas de práticas de sala de aula	**Paradigma do exercício**	**Paradigma de investigação**
Referência à matemática pura	01	02
Referência à semi realidade	03	04
Referência à realidade	05	06

Fonte: Skovsmose (2000) *apud* Rodrigues *et al.* (2018).

Segundo os primeiros autores, o ideal é que o ensino, para potencializar a aprendizagem, deva transitar entre os diferentes tipos de Ambientes de Aprendizagem. Os resultados obtidos

[32] Os quatro temas que constam na matriz de referência da Prova Brasil são: Tema I – Espaço e Forma, composto por onze descritores; Tema II – Grandezas e Medidas, composto por quatro descritores; Tema III – Números e Operações/Álgebra e Funções, composto por vinte descritores; e Tema IV – Tratamento da Informação, composto por dois descritores.
[33] Para Skovsmose (2000) *apud* Rodrigues *et al.* (2018, p. 59), um Ambiente de Aprendizagem "é formado por todas as condições de aprendizagem disponibilizadas aos alunos, incluindo ambiente físico, recursos, propostas metodológicas".

foram os seguintes: das 260 questões, 209 correspondem ao paradigma do exercício, comumente utilizado no ensino tradicional. Em relação aos tipos de referências relacionadas à matemática pura, à semi realidade e à realidade, obteve-se um total de 136, 121 e 03 itens, respectivamente. De forma geral, obteve-se uma predominância dos Ambiente de Aprendizagem 1 e 3 nas provas da OBMEP, Nível 2, que somadas, correspondem a um percentual de aproximadamente 79% do total de questões.

Em se tratando do nível de dificuldade, o professor Dr. Paulo Cesar Pinto Carvalho, do IMPA, orientou uma série de dissertações que tinham como intuito fazer uma análise crítica das provas da primeira fase da OBMEP, nos seus três níveis. Os resultados mostraram o seguinte:

Segundo as perspectivas de Araújo e Silva (2013), no ano de 2011, a porcentagem de itens considerados difíceis (para o nível 1) são de 30% e 45%, respectivamente (os resultados foram obtidos a partir da razão entre o número de itens considerados difíceis – na percepção dos pesquisadores – e o número total de itens, que é 20). Já para o ano de 2012, ambos concordam que essa dificuldade é de 45%, para o mesmo nível. O complementar dessas porcentagens engloba os itens fáceis ou de dificuldade média. Os autores ainda consideram que, nesses anos, a distribuição dos conteúdos foi adequada. Nas visões de Albuquerque e Matta (2013), a porcentagem de itens difíceis, nas provas do nível 2 de 2011, foi de 20% e 25%, respectivamente. Já em 2012, as porcentagens são de 25% e 15%, respectivamente. Em relação ao nível 3, o trabalho de Silva e Souza (2013) sustenta que, nas visões dos autores, a prova do ano de 2011 apresenta 55% e 45%, respectivamente, dos itens considerados difíceis. Já em 2012, ambos concordam que esse índice é de 40%.

Os autores supracitados ainda fornecem dados obtidos através da Fundação Carlos Chagas sobre o nível de dificuldade das provas da primeira fase, levando-se em conta o percentual de acerto por questão, dos alunos indicados por cada escola para a Segunda Fase da olimpíada, nos anos de 2011 e 2012. Considerou-se que um item seria classificado como difícil se no máximo 30% dos alunos o acertasse; médio, se a taxa de acerto variasse entre 30% e 50%; e baixo, se fosse no mínimo 50%. Os resultados foram resumidos na Tabela 09, apresentada a seguir:

Tabela 09 – Porcentagem de dificuldade dos níveis 1, 2 e 3, nos anos de 2011 e 2012.

Ano	Nível 1	Nível 2	Nível 3
2011	30%	30%	20%
2012	25%	15%	50%

Fonte: Elaborado a partir dos dados contidos nas pesquisas de Araújo e Silva (2013), Albuquerque e Matta (2013) e Silva e Souza (2013).

Para se ter uma ideia do que a porcentagem pode representar em termos do quão bem estruturada é uma avaliação, Pasquali (2003) sugere que, para que uma avaliação tenha um nível ideal de dificuldade, a distribuição de questões fáceis, médias e difíceis deveria ser de 30%, 40% e 30%, respectivamente.

Em relação à segunda fase, Machado (2015) – também sob orientação do professor Dr. Paulo Cesar – traz uma discussão dos Níveis 1, 2 e 3 do ano de 2014. Com uma amostra correspondente a 7.547 alunos que realizaram a segunda fase do Nível 1 e tiveram suas provas corrigidas na etapa nacional – essa informação é importante –, ele observou que, em média, os alunos acertaram 45,5% da prova, o que a classifica como uma avaliação com nível médio de dificuldade. De modo semelhante, em relação ao Nível 2, foram analisadas 6.119 provas e obteve-se um nível de acerto de 48,75%, o que a caracteriza também como uma avaliação com nível médio de dificuldade. Já em relação ao Nível 3, foram analisadas 5.237 provas e os resultados mostraram que houve uma taxa de acerto de 59,5%, o que faz com que o nível de dificuldade se enquadre como baixo.

Tais resultados podem não refletir, no entanto, no nível de dificuldade geral da olimpíada, uma vez que os dados apresentados por Araújo e Silva (2013), Albuquerque e Matta (2013) e Silva e Souza (2013) – obtidos através da Fundação Carlos Chagas – são referentes aos 5% (em média) dos alunos inscritos na OBMEP que foram classificados para a Segunda Fase; portanto, são os estudantes que apresentaram os melhores desempenhos na Primeira Fase. Não é possível analisar os dados de todos os estudantes inscritos na OBMEP 2011 e 2012 (e nas demais edições), uma vez que a Comissão Geral do certame tem acesso apenas aos gabaritos dos classificados para a Segunda Fase. O restante fica arquivado nas escolas participantes.

Em relação aos dados referentes à Segunda Fase, o mesmo se nota, já que as provas analisadas se resumem àquelas que foram corrigidas na etapa nacional, portanto, as provas daqueles que obtiveram os melhores desempenhos. Tal quantitativo equivale a aproximadamente 2,08% do total de alunos que passaram para a Segunda Fase e a amostra é não-probabilística.

Ainda sobre o nível de dificuldade das provas da OBMEP, Costa (2015) realizou uma pesquisa com 1658 alunos de cinco escolas do Distrito Federal, com o intuito de fazer uma análise das questões e das respostas dos estudantes inscritos no Nível 2 da primeira fase da OBMEP 2014. Usando conceitos da TCT, a pesquisadora explica que apenas 27% dos discentes obtiveram um escore de 5 ou mais acertos na prova. Ainda discute que, com base nas marcações dos discentes, 85% dos itens foram considerados difíceis. Em relação ao índice de discriminação[34] dos itens, foi obtido que todas as questões possuem tal índice menor que 0,2, o que caracteriza itens deficientes.

Vilarinho (2015) desenvolveu um estudo com 534 estudantes de uma escola do Distrito Federal, inscritos no Nível 2 da OBMEP 2014. O intuito, assim como os trabalhos anteriores, era analisar as questões das olimpíadas e suas respectivas respostas. Para a análise psicométrica dos itens, além da TCT, também se usou a Teoria de Resposta ao Item (TRI). Os resultados obtidos foram os seguintes: De acordo com a TCT, 85% dos itens foram considerados difíceis e 35% foram considerados deficientes. Em relação ao uso da TRI, a autora comenta que:

> Para esta prova, foi necessário retirar 9 dos 20 itens para que houvesse convergência, pois estes itens não se comportaram bem do ponto de vista dos pressupostos da teoria. Sempre que isso ocorre, os itens "problemáticos" precisam ser retirados da análise. Isso por si só já indica que parte substancial da prova tem problemas do ponto de vista da teoria da medida ou é inadequada aos estudantes dessa faixa etária, no grupo estudado. (Vilarinho, 2015, p. 47).

Dos onze itens restantes, que foram os utilizados para o cálculo de proficiência dos estudantes, observou-se que todos foram classificados como difíceis e possuem baixo poder de discriminação.

Moreira e Nogueira (2020), ao analisarem as respostas de 350 estudantes do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais (IFSudesteMG) que realizaram a OBMEP 2017, obtiveram que 74% dos estudantes acertaram no máximo seis questões. Usando-se a TRI, chegou-se que todos os itens possuem uma boa discriminação. Os autores afirmam que esse resultado vai ao encontro do que prega a OBMEP já que essa olimpíada "fundamenta-se em uma criteriosa busca por estudantes que possuem habilidades em conhecimentos matemáticos, sendo composta por questões capazes de discernir os estudantes com maiores habilidades" (Moreira; Nogueira, 2020, p. 174). Em relação ao parâmetro dificuldade, 25% dos itens foram considerados difíceis.

O elevado nível de dificuldade e o baixo índice de discriminação da OBMEP – explicitados pela maior parte das pesquisas anteriormente apresentadas – talvez possam ser justificados por dois pontos de vista, não necessariamente excludentes:

---

[34] Na TCT, esse índice é utilizado quando se quer diferenciar os participantes que possuem maior proficiência em um item dos que possuem menor proficiência. Ele é dado pela diferença entre o percentual de acerto do item entre os 27% dos participantes com maior pontuação e o percentual de acerto do item entre os 27% dos participantes com menor pontuação. É, portanto, um valor entre -1 e 1. Quanto maior for a diferença, mas bem avaliado é o item, já que isso implica dizer que os discentes que mais pontuaram também acertaram mais esse item que os discentes que menos pontuaram.

Primeiro, a OBMEP é intencionalmente difícil. Dada a dimensão da olimpíada, seria de fato pouco relevante (levando-se em conta o caráter olímpico da competição) que uma porcentagem significativa de alunos acertasse grande parte dos itens da prova. Sendo assim, para que o objetivo “identificar jovens talentos” seja cumprido, existe uma espécie de barreira (nível de dificuldade, por exemplo) em que só os alunos mais talentosos superam, já que o número de premiados é muito pequeno em comparação com o número de inscritos (não chegando a meio por cento, como vimos anteriormente – incluindo as menções honrosas).

Segundo, existe uma distância entre a matemática cobrada na sala de aula e a matemática presente nas questões da OBMEP; distância essa que poderia ser reduzida se existisse uma preocupação explícita em relacionar tais conteúdos. Estando isso presente no regulamento. Estabelecer uma matriz de referência a partir dos conteúdos dispostos nos PCN e, mais recentemente, na BNCC, poderia ser um caminho.

3.2.3 Uma análise do impacto da OBMEP na Educação Básica

Nascendo em um momento de transformações sociais, quase que concomitante à criação do Ideb, cujo intuito era medir a qualidade da Educação Básica, a OBMEP se constitui em uma ação pública que faz parte da rotina de milhões de estudantes, professores e gestores, e que não deve se limitar apenas ao momento de aplicação das provas. Acrescente a isso o fato de que os investimentos anuais ultrapassam os 54 milhões de reais, conforme afirmam Teixeira e Moreira (2021).

Sendo assim, torna-se relevante verificar até que ponto essa olimpíada tem influenciado na melhoria da qualidade do ensino de matemática e no desempenho dos alunos nas avaliações externas à escola.

Quando se considera o desempenho individual dos alunos, é inegável que a OBMEP coloca em evidência jovens talentos. Exemplos disso podem ser encontrados no próprio site da olimpíada, na aba “Histórias inspiradoras”[35]. Ademais, para além da competitividade entre os alunos e escolas, será se a OBMEP, enquanto política pública e avaliação em larga escala, e possuindo um de seus objetivos voltados para a melhoria da qualidade da educação básica, vem cumprindo o seu papel?

Dentro dessa perspectiva, Maciel e Basso (2009, p. 8) afirmam que

---

[35] Disponível em: http://www.obmep.org.br/listarHistoriasInspiradoras.do

> é necessário ressaltar que houve movimento considerável dentro de muitas escolas no sentido de divulgar e, até mesmo, preparar seus alunos para a OBMEP. Esse movimento levou professores a procurarem oportunidades de aprofundar e qualificar seu trabalho [...]. Nesse sentido, a discussão sobre os resultados obtidos pelos alunos nas Olimpíadas pode oferecer subsídios à reflexão sobre a qualificação do Ensino de Matemática no país.

Em 2009, foi publicado um estudo realizado pela Fundação Itaú Social com o título *Avaliação Econômica da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)*. Segundo o próprio estudo, seu objetivo foi o de "captar o efeito médio desse programa na nota média de matemática das escolas e calcular o retorno econômico desse programa comparando os custos e benefícios futuros dos estudantes" (Fundação Itaú Social, 2009, p. 2).

Para isso, ele comparou o desempenho na Prova Brasil das escolas que participavam da OBMEP com as que não participavam. Além disso, a análise se restringiu aos alunos do nível 2 das escolas urbanas que se inscreveram na OBMEP e que participaram da Prova Brasil no ano de 2007, na 8ª série (9º ano). Sendo assim, contou com a participação de 22.703 escolas inscritas no nível 2 da OBMEP 2007 e 1.756 escolas não inscritas[36].

Os resultados mostraram que quando não se leva em consideração o controle das características entre o grupo tratado e o de controle, a diferença entre as notas das escolas inscritas e não inscritas na OBMEP é de 7,44 pontos. Já quando se leva em consideração as estimativas de MQO ponderadas pelo *propensity escore* o valor para o ATT chega a 2,14 pontos. Segundo a fundação, "esse resultado demonstra que a OBMEP promove impacto positivo e significativo nas notas médias de matemática da 8ª série" (Fundação Itaú Social, 2009, p. 7). Além disso, a fundação afirma que

> Traduzindo o impacto de dois pontos na média de matemática da 8ª série, podemos dizer que esse valor equivale a 8% do desvio-padrão das notas de matemática observado entre as escolas (25 pontos). Para se ter uma ideia de grandeza, as notas médias do Brasil no SAEB caíram três pontos entre 1997 e 2007 na 8ª série do ensino fundamental, e cresceram três pontos na 4ª série. (Fundação Itaú Social, 2009, p. 7).

Ademais, esse resultado é referente às escolas com pelo menos uma participação na Olimpíada, de 2005 a 2007. Quando se observa apenas as escolas que participaram uma única

[36] O grupo de controle (escolas não inscritas na OBMEP) é, segundo os autores, o mais parecido possível com o grupo experimental. Isso é possível, "já que dispomos de diversas bases de dados a partir das quais é possível extrair um grande número de informações relativas à gestão, infraestrutura, corpo docente e discente, entre outras características de todas as escolas públicas brasileiras participantes ou não da Olimpíada" (Fundação Itaú Social, 2009, p. 3). Além disso, utilizou-se como método econométrico a "regressão linear ponderada pelo *propensity escore* estimado para encontrar a estimativa do efeito médio do tratamento sobre os tratados (ATT)" (Fundação Itaú Social, 2009, p. 3).

vez (2007), esse valor vai para 0,76 pontos; duas vezes (2005 e 2007 ou 2006 e 2007) o impacto é de 1,51 pontos. Já para as escolas que participaram das três primeiras edições da OBMEP, esse valor sobe para 2,38 pontos. Tal fato ratifica a afirmação de que o impacto na nota aumenta conforme aumenta o número de participação das escolas na Olimpíada.

Quando se analisa o impacto por decis e percentis na distribuição das notas dos alunos, observa-se que a OBMEP impacta positivamente em todos os níveis, e não necessariamente apenas entre os alunos com desempenho elevado na Prova Brasil. Ainda assim, o impacto é mais significativo nestes últimos. Tal resultado mostra que, além de aumentar o desempenho médio das escolas participantes da OBMEP na Prova Brasil, esse incremento acontece também para todos os alunos.

Em se tratando do impacto econômico que a OBMEP pode causar ao longo da vida dos estudantes beneficiados – partindo de hipóteses como, por exemplo, a melhora no desempenho afeta salários futuros com elasticidade estimada de 0,3 e o retorno da educação no salário sendo constante ao longo do tempo – a fundação mostra que, para uma participação na olimpíada, espera-se que o aumento nos salários anuais futuros seja de 0,10%, para duas participações, 0,19% e, para três participações, 0,30%. Além disso, chegou-se a um Valor Presente Líquido (VPL) por aluno de R$ 181,70 e a uma Taxa Interna de Retorno (TIR) de 45% ao ano. A soma dos ganhos totais é estimada em R$ 901 milhões. “Isso sinaliza que a Olimpíada parece um bom investimento em termos de política pública, os custos são relativamente baixos e o número de beneficiários é muito elevado” (Fundação Itaú Social, 2009, p. 14).

Em 2011, foi realizado um outro estudo, agora pelo CGEE[37], com o objetivo de avaliar o impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas. O referido, disponibilizado através do documento técnico de nº 11, de julho de 2011, teve como base os próprios objetivos da OBMEP e resultou em três trabalhos.

A pesquisa de Maranhão (2011), sob o título de *Avaliação de impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP – 2005/2009)*, partiu de uma consulta pública direcionada a alunos, professores, pais, gestores educacionais e público em geral e contou com um total de 9.950 respondentes, predominando os alunos (4.185) e os professores

[37] O Centro de Gestão e Estudos Estratégicos (CGEE) é uma associação civil sem fins lucrativos e de interesse público, qualificada como Organização Social pelo executivo brasileiro, sob a supervisão do Ministério da Ciência e Tecnologia. Constitui-se em instituição de referência para o suporte contínuo de processos de tomada de decisão sobre políticas e programas de ciência, tecnologia e inovação (CT&I). A atuação do Centro está concentrada nas áreas de prospecção, avaliação estratégica, informação e difusão do conhecimento (CGEE, 2011, p. 2). Para saber mais, acessar: https://www.cgee.org.br/home.

(5.116). As dimensões analisadas foram: a motivação, o interesse e o desempenho dos alunos. Os resultados foram resumidos na Tabela 10 a seguir:

Tabela 10 – Principais pontos positivos e negativos da OBMEP, em relação aos parâmetros motivação, interesse e desempenho dos alunos participantes da Olimpíada.

	Pontos positivos	Pontos negativos
Motivação dos alunos	• 38% dos alunos afirmaram que as questões os fizeram pensar mais; • 74% dos pais afirmaram que os filhos estudam mais matemática.	• 24% dos alunos afirmaram que as questões da prova foram difíceis; • 24% dos pais afirmaram que os seus filhos não mudaram seus estudos.
Interesse dos alunos pela matemática	• 47% dos alunos indicam que o principal motivo de suas participações é o interesse pela matemática; • 69% dos alunos afirmaram que passaram a se interessar mais pela matemática; • 80% dos pais afirmaram que o interesse de seus filhos pela matemática aumentou; • 39% dos professores afirmaram que seus alunos passaram a se interessar mais pela matemática.	• 21% dos alunos afirmaram que participar da OBMEP “não mudou nada”; • 14% dos alunos que não realizaram a segunda fase da OBMEP (mesmo tendo passado) afirmaram não terem tido interesse; • 24% dos pais afirmaram que não houve mudança no interesse pela matemática por seus filhos.
Desempenhos dos alunos	• 66% dos alunos acreditam que participar da olimpíada melhorou o seu desempenho em outras disciplinas; • 61% dos professores afirmaram o que desempenho dos seus alunos em matemática aumentou; • 59% dos professores afirmam que seus alunos passaram a estudar mais.	• 41% dos professores afirmaram não terem notado alteração alguma nos estudos de seus alunos; • 38% dos professores afirmaram que o desempenho de seus alunos não mudou em nada.

Fonte: Maranhão (2011).

Em relação aos aspectos positivos da Olimpíada, todos os grupos pesquisados afirmaram existir interesse e motivação de discentes e docentes pela matemática, além do incentivo ao desenvolvimento e melhoria do desempenho do aluno na disciplina. O trabalho em grupo e melhoria na relação alunos-alunos e alunos-professor também emergem como destaques positivos. Analisando cada perfil, notou-se, de forma geral, que: 1) os alunos apresentaram como aspectos positivos geralmente parâmetros direcionados a eles mesmos, com foco nos seus próprios aprendizados e nos de seus colegas, a curto e longo prazo. 2) os professores destacaram as premiações como algo relevante aos alunos, além do apoio dos pais e dos discentes em favor da olimpíada. Além disso, parecem compreender o processo de implementação e os resultados da OBMEP. 3) os gestores educacionais deram ênfase às mudanças positivas no comportamento dos alunos e professores. Além de destacarem a qualidade do material, a organização e o melhora na autoestima dos professores premiados. 4) o público em geral destacou fatores como inclusão social, desenvolvimento humano, gratuidade do material, valorização da autonomia dos alunos, dentre outros. 5) já os pais ratificaram grande parte dos pontos já elencados.

Em relação aos aspectos negativos, é unânime entre as categorias o alto grau de complexidade da prova em comparação com o ensino-aprendizagem nas escolas públicas. Além disso, outros fatores explicitados pelas categorias foram: aplicação da segunda fase no sábado, conteúdo único para mais de uma série, incompreensão dos enunciados, situações-problemas com contextos predominantemente urbano e da região Sudeste, indisponibilidade ou atraso na divulgação das notas e resultados, atraso e quantidade insuficiente de material didático recebidos, insuficiência da premiação.

Maranhão (2011) ainda apresenta uma série de aprimoramentos organizados a partir das sugestões dadas pelas categorias. Apresentaremos os mais relevantes, segundo nossa visão: enviar maiores quantidades de material didático para as escolas, com antecedência mínima de três meses em relação à realização da primeira fase das Olimpíadas; diversificar os enunciados das questões da prova de acordo com os aspectos sociais e culturais das diversas regiões brasileiras; ampliar a premiação de "honra ao mérito" proporcionalmente ao número das inscrições; incluir um certificado digitalizado para todos os participantes da segunda fase da OBMEP; e disseminar os premiados e os resultados importantes atingidos pelas escolas, por meio da distribuição de informativos curtos e acessíveis aos alunos (Maranhão, 2011). Dito isso, a pesquisa evidencia o sucesso da OBMEP em relação aos seus objetivos propostos, amparada, entre outros fatores, pela adesão considerável das escolas ao certame e pelos depoimentos favoráveis dados por aqueles que constituem a comunidade escolar.

A pesquisa de Santos e Abreu (2011), sob o título de *Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): explicitação de condições de sucesso em escolas bem sucedidas*, teve como público-alvo os gestores escolares, professores e alunos de escolas que apresentaram um bom desempenho na olimpíada, com o intuito de explicitar ações, intervenções, atitudes, posturas, estratégias, abordagens que os levaram a galgar medalhas e permanecerem como escolas-destaque em várias edições.

O período analisado foram as edições de 2005 a 2009 e a pesquisa contou com a participação de seis escolas medalhistas, distribuídas no Distrito Federal e entre os estados de Minas Gerais, Paraná, Acre, Alagoas e Rio de Janeiro. Os tipos de abordagens foram duas: a

Técnica do Grupo Nominal (TGN)[38], aplicada a gestores, professores e alunos finalistas e medalhistas; e entrevista semiestruturada, realizada com ex-campeões das escolas, premiados nas três primeiras edições da olimpíada.

Os autores mostraram que os gestores de sucesso justificam os resultados obtidos na olimpíada a partir de três fatores: envolvimento com a comunidade escolar, recursos humanos e infraestrutura. São destacados professores para preparar os alunos que passaram para a segunda fase, com uma ênfase maior nos que possuem maior potencial de sucesso. O aumento do prestígio da escola também é um fator determinante no engajamento dos gestores com a olimpíada. “Eles têm uma ação especificamente situada e planejada, que gira em torno de fazer com que a escola ganhe o maior número possível de medalhas de todas as categorias, o que lhes serve como instrumento de marketing da escola, de consolidação da escola como instituição de qualidade” (Santos; Abreu, 2011, p. 56-57).

Sobre os professores, é evidenciado pelo menos um docente que lidera os grupos de estudos para a realização das provas, desenvolvendo atividades que vão desde a realização de simulados à grupos de estudos no contraturno. A ênfase se centra naqueles(as) alunos(as) que são medalhistas em potencial. Além disso, os docentes, enquanto repercussões pessoais, apontam a melhoria no ensino de matemática e o aumento do interesse dos alunos. Apesar disso, parece não existir repercussões mais amplas para os docentes não atuantes na OBMEP.

Finalmente, em relação aos alunos, eles indicam como fator relevante para o seu sucesso a atuação de determinados professores e o apoio da família. Outro ponto relevante é que grande parte dos alunos medalhistas conquistaram o feito mais de uma vez, além de obterem êxito em olimpíadas afins. Entre os benefícios obtidos, destacam-se o aumento da autoestima, as bolsas de iniciação científica (em especial, para os de escolas públicas não celetistas), reconhecimento familiar e ratificação do apreço pela matemática.

Da entrevista semiestruturada realizada com 20 estudantes medalhistas de 2005 a 2007, a grande maioria afirma que a decisão de querer seguir (ou estar seguindo) uma carreira acadêmica na área das exatas foi reforçada pela participação na OBMEP. Sobre os eventuais impactos que a olimpíada causou, mais de 60% afirma ter sido positivo; destacando, em especial, o auxílio financeiro e o aumento do gosto pela matemática. Em relação às áreas

[38] “A Técnica do Grupo Nominal, proposta por Andre Delbecq e Andrew Van de Ven (DELBECQ; VAN DE VEN, 1971), é uma estratégia para aumentar a produtividade criativa do grupo, facilitar a tomada coletiva de decisões, estimular a geração de ideias críticas e servir como instrumento no agrupamento de ideias. O Grupo Nominal consiste em uma técnica de tomada de decisões em grupo cuja característica fundamental é o fato dos participantes, apesar de estarem frente a frente em reunião, apresentarem as suas ideias de forma sistemática e totalmente independente” (Santos; Abreu, 2011, p. 52).

escolhidas para a carreira acadêmica, dos 292 medalhistas do ano de 2007, a grande maioria escolheu as engenharias, seguida pela ciência da computação e pela matemática, respectivamente.

Os autores ainda ratificam o papel do professor durante todo esse processo, já que em diversos momentos os atores envolvidos atribuíram seu sucesso à presença de um docente qualificado, que motiva, que desafia, que envolve os discentes, “o que significa dizer que os professores são o principal esteio da escola, a partir dos quais os fatores enumerados acima são consolidados e conduzem ao sucesso da escola ou são negligenciados e conduzem ao fracasso de todos” (Santos; Abreu, 2011, p. 61).

Soares e Candian (2011) desenvolveram um estudo sob o título de *O impacto da OBMEP no desempenho dos alunos na Prova Brasil*, com intuito de verificar se uma maior participação da escola na olimpíada está relacionada ao aumento da aprendizagem, impactando positivamente no desempenho dos alunos da 8ª série (9º ano) na Prova Brasil 2009, especificamente em Matemática.

Baseados no modelo hierárquico de dois níveis apresentado por Raudenbush e Bryk (2002), os autores expressam a necessidade de se retirar as variáveis intervenientes. Sendo assim, consideram no primeiro nível o desempenho do aluno impactado por fatores como sexo, nível socioeconômico, atraso escolar, ambiente educacional e desempenho em leitura. No segundo nível, consideram-se os fatores que favoreçam o desempenho do aluno e o nível de participação da escola na OBMEP. De forma geral, Soares e Candian (2011, p. 91) afirmam que “se todas as escolas mudassem o máximo que lhes é possível mudar, o impacto na média geral dos alunos seria de 4,14 pontos. Considerando a interpretação dos valores da escala do Saeb, [...], trata-se de um aumento modesto”.

Finalmente, os autores ratificam que não é possível afirmar que tal resultado seja um efeito exclusivo da OBMEP, mas que a olimpíada é um fator associado, isto é, constatou-se uma relação de correlação e não de causalidade. Uma das justificativas elencadas é que a instituição escolar que se prepara para a OBMEP tem um projeto mais consistente e eficaz de ensino de matemática; o que, por sua vez, acarreta em um melhor desempenho na Prova Brasil. Apesar disso, os autores apresentam uma segunda interpretação: “A participação da OBMEP requer organização e comprometimento de sua comunidade, fatores que podem ser a explicação tanto para a participação da escola na Olimpíada como também para o desempenho de seus alunos nos testes da Prova Brasil” (Soares; Candian, 2011, p. 92).

Além destes, diversos outros trabalhos procuram medir, qualitativa ou quantitativamente o impacto na OBMEP na Educação Básica, seja através de resultados mostrados na Prova Brasil e outros descritores, seja baseado em depoimentos de professores e alunos.

Soares e Leo (2014) procuraram medir o grau de envolvimento[39] das escolas na OBMEP e o seu impacto no desempenho das escolas na Prova Brasil, Enem e Pisa. Em relação à primeira, foram analisados os anos de 2007, 2009 e 2011 e teve como amostra 5.681.424 alunos do 9º ano pertencentes a 35.000 escolas. Em relação ao Enem, foram utilizados dados de 3.374.468 alunos do Ensino Médio, distribuídos em 68.604 escolas e relativos aos anos de 2010, 2011 e 2012. O Pisa teve como base a edição de 2009 e a amostra contou com um total de 17.796 alunos do segundo ano do Ensino Médio de 845 escolas. Sobre a metodologia empregada no estudo, as autoras, a partir da criação de uma medida de envolvimento de cada escola com a OBMEP, usam um modelo obtido a partir da combinação conceitual do método de diferenças em diferenças com o de modelos hierárquicos.

Em se tratando da Prova Brasil, os resultados mostraram que a diferença média no desempenho nesta avaliação entre as escolas com boa trajetória na OBMEP e as escolas com trajetória ruim é de 26,10 pontos, o equivalente a cerca de 1,5 anos de escolarização. Além disso, o impacto no desempenho dos estudantes com boa trajetória de envolvimento com a OBMEP foi de 9,33 em 2007, 11,53 em 2009 e 15,34 em 2011. Sobre o Enem, o impacto nas notas dos alunos com boa trajetória, em Matemática e suas tecnologias, foi de 16,80 em 2010, 16,94 em 2011 e 15,01 em 2012. Já para o Pisa o impacto foi de 9,96 em 2009, em relação aos alunos com uma boa trajetória de envolvimento com a OBMEP. Além disso, os resultados das três avaliações corroboraram com a premissa de que o envolvimento da escola com a OBMEP oferece resultados mais significativos no Ensino Fundamental que no Ensino Médio. Acrescenta-se também que o impacto aumenta conforme aumenta o tempo de envolvimento da escola com a olimpíada.

Araújo (2015) buscou compreender de que forma a avaliação da OBMEP pode proporcionar mudanças na prática pedagógica dos professores de matemática e como isso ocorre. Através da coleta de respostas de 261 professores de quase todas as unidades de federação (numa primeira etapa) e das respostas dos professores de 13 escolas não seletivas com os melhores desempenhos do estado do Rio de Janeiro (numa segunda etapa), ele afirma que os resultados são promissores, apesar de haver um longo caminho ainda a se percorrer

[39] "Entende-se por trajetória de envolvimento o conjunto de indicadores de envolvimento atribuídos para cada escola em todos os anos em análise. [...] Por exemplo, quando o período de análise refere-se a 2005 a 2011, a trajetória de uma escola é classificada como boa caso esta escola apresente 6 ou 7 anos de alto envolvimento com a OBMEP" (Soares; Leo, 2014, p.14).

como, por exemplo, uma ampla divulgação das experiências bem sucedidas e especialização do corpo docente. Outros resultados significativos foram os seguintes: em relação aos objetivos da Olimpíada sobre os quais os docentes possuem conhecimento, *Estimular e promover o estudo da Matemática* foi o mais citado. Além disso, o objetivo que possui o maior grau de alcance (alto ou muito alto, numa escala likert de 5 níveis) foi o de *Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas* com uma frequência de 36,5% e 46% nas etapas 1 e 2, respectivamente. Quando questionados sobre o nível de concordância com a afirmação *De modo geral, qual o grau de confiança que você tem na avaliação da OBMEP, para medir o grau de habilidade do seu aluno em Matemática* – numa escala likert que ia de 1 a 10 – obteve-se um índice ponderado de 7,1 na primeira etapa e de 8,4 na segunda etapa. Finalmente, o autor conclui afirmando que uma das principais diferenças entre as escolas que compõem as duas etapas supracitadas é que as primeiras dão uma maior atenção à incentivos para que os alunos se dediquem em obter bons resultados na OBMEP, enquanto as últimas dão maior atenção à capacitação do corpo docente em estratégias competitivas.

Moreira (2017) procurou investigar como a premiação na OBMEP (menção honrosa) afeta o desempenho subsequente dos vencedores e seus colegas, considerando parâmetros como, dentre outros, participação nas edições seguintes e matrículas no ensino superior. A pesquisadora usa os dados de 5 milhões de alunos (dentre os vencedores e seus colegas) distribuídos em 170.000 salas de aula do todo o Brasil, do período de 2009 a 2012, chegando à conclusão de que o prêmio melhora o desempenho e aumenta a participação dos alunos contemplados com a premiação e de seus colegas de classe. Acrescenta-se a isso o fato de que o aumento do desempenho dos colegas nas edições futuras da olimpíada corresponde a 20% do impacto sobre o vencedor. Tal efeito dura em média um ano, enquanto no vencedor esse valor passa a ser de dois anos. Além disso, é previsto um aumento de 10% no número de matrículas dos colegas em faculdades seletivas. Em relação aos ganhos anuais futuros dos colegas, é estimado um acréscimo de R$ 1.170,00. Convém destacar, entretanto, que tal impacto é centrado nos colegas próximos ao vencedor e que possuem habilidades parecidas com as do mesmo.

Fica evidente que a OBMEP vem se consolidando com uma política pública que perpassa o objetivo de encontrar jovens talentos. As pesquisas supracitadas mostraram que a olimpíada influencia positivamente os índices que medem a qualidade da educação e os exames de larga escala. Além disso, causa mudanças nas práticas pedagógicas dos professores de matemática e impacta positivamente tanto os alunos vencedores como seus pares. Nas palavras de César Camacho, diretor-geral do IMPA (2004-2015) “a OBMEP vem se tornando, naturalmente, um programa educacional de grande abrangência nacional, a serviço da disseminação da Matemática no ambiente escolar” (IMPA, 2016, p. 10).

3.3 SOBRE O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Uma dificuldade frequente no ensino consiste em tornar compreensíveis determinados conceitos que foram sendo construídos historicamente e cuja sistematização e simbologia se distancia da linguagem mais comumente utilizada no cotidiano. Duas saídas podem ser colocadas em destaque: manter o rigor em que tais conceitos foram concebidos, o que pode ter como consequência que os discentes saibam apenas operar mecanicamente com a linguagem; ou adaptar os conceitos matemáticos, afastando-os um pouco do rigor e aproximando-os de uma linguagem mais intuitiva, o que pode facilitar a compreensão; contudo, pode também tornar determinado conceito, que é rico em sutilezas, ininteligível. O ensino do conceito de função é um exemplo (Brito; Almeida, 2005).

Para Eves (2011), o conceito de função é essencial na Matemática, já que permeia grande parte dessa ciência. Além disso, desde o início do século XX, diversos matemáticos defendem seu uso como princípio central e unificador em cursos elementares de matemática. O autor ainda complementa afirmando que “é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática” (Eves, 2011, p. 661).

Em paralelo a isso, Rezende, Nogueira e Calado (2020) afirmam que, dada as dificuldades encontradas para se chegar ao conceito de função tal qual conhecemos hoje, é natural que a construção desse conceito pelos discentes demande um tempo considerável. Ainda mais quando se leva em conta a série de conhecimentos prévios, propriedades, símbolos e representações que abarcam tal conceito.

Segundo Ponte (1990), dentro do currículo, o conceito de função pode ser visto levando em consideração três fatores: os aspectos algébricos, a generalidade do conceito e sua utilização em situações do cotidiano ou de outras ciências. Além disso, o autor destaca que, na sala de aula, o apelo intuitivo é geralmente esquecido, sendo dado mais destaque aos aspectos algébricos que, muitas vezes, vêm carregados por uma terminologia abstrata, que fortalece a memorização em detrimento da compreensão.

O autor ainda argumenta que seria um erro esperar que os nossos alunos possuíssem a mesma base matemática e as mesmas motivações que impulsionaram o desenvolvimento histórico do conceito de função. Apesar disso, “a forma mais natural de construir este conceito é fazer apelo à sua relevância em função de necessidades práticas e relacioná-lo com muitas outras ideias matemáticas” (Ponte, 1990, p. 08). Ele ainda afirma que apresentar as funções como uma correspondência entre conjuntos parece ser pedagogicamente mais aconselhável.

Corroborando com essa última afirmação, Gabbi e Nehring (2021, p. 524) afirmam que:

> A utilização de situações que problematizam a ideia de correspondência entre as variáveis precisa ser o ponto de partida no planejamento docente para o ensino de funções, o que exigirá do professor conhecimentos sobre a origem e o desenvolvimento do conceito ao longo do tempo. As definições, teoremas e regras são importantes também neste processo de compreensão, porém, é a partir da ideia de correspondência entre variáveis que o estudante consegue chegar ao entendimento do conceito, atribuindo sentidos e negociando significados.

Em relação ao currículo, o estudo das funções no Brasil, até metade do século XIX, ficava restrito ao Ensino Superior. Foi com o advento da Matemática Moderna, na década de 60, que seu ensino englobou também os anos finais do Ensino Fundamental e, posteriormente, o Ensino Médio (Nogueira, 2014). Atualmente, o ensino de Funções (noções introdutórias) é recomendado desde os primeiros anos de ensino.

A BNCC (2018), por exemplo, orienta que o estudo sobre as noções básicas de funções deve se iniciar dentro da unidade temática Álgebra, a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Sua noção intuitiva pode ser explorada dentro do contexto da resolução de problemas que envolvem variação proporcional direta entre duas grandezas. O documento aponta, para o 9º ano do Ensino Fundamental, o desenvolvimento no aluno da seguinte habilidade: “Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (Brasil, 2018, p. 317). Além disso, seu estudo deve ser aprimorado e formalizado no primeiro ano do Ensino Médio, onde o discente tem acesso aos diferentes tipos de funções e suas representações. O documento ainda apresenta uma série de habilidades para esse nível, relacionadas com o estudo das funções, iniciadas por verbos de ação, como: interpretar, construir, resolver e elaborar, converter, analisar e investigar.

Outrossim, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio recomendam que o estudo das Funções possa ser iniciado a partir do estudo das relações entre duas grandezas, de forma qualitativa:

> idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, f(x) = 2 x + 3, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da idéia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física. (Brasil, 2006, p. 72).

Os próprios PCN (Ensino Médio), apontam a importância do conceito de função no estudo do comportamento dos mais variados fenômenos do cotidiano, nas mais diversas áreas do conhecimento. Cabendo, portanto, ao docente fazer com que

> O aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (Brasil, 2000, p. 44).

Souza e Souza (2019) apontam que, tradicionalmente no ensino do conceito de função, além de serem discutidas diferentes formas de representação deste conceito, ainda é esperado do aluno que ele possua um apanhado de conhecimentos prévios. Somado a isso, tem-se o pouco destaque dado às aplicações no decorrer da formalização do conceito. Em se tratando do conceito, os autores ainda afirmam que "não é simplesmente definir, mas sim utilizar a definição para orientar as interpretações de relações funcionais, unindo em um todo coerente todos os termos abstratos que orbitam o referido conceito" (Souza; Souza, 2019, p. 16). A articulação entre as diferentes formas de representação do conceito de função é favorecida pelo processo de uso consciente da definição num processo que os autores denominam de *operacionalização da definição de função*.

> A operacionalização da definição de função é o momento em que o aprendiz apresenta uma definição formal ou pessoal (compatível com a formal) que abarque as várias representações, percebendo-as, por meio da definição adotada, como diferentes fontes de informações sobre o mesmo conceito. É o ponto em que o aprendiz trabalha com a definição que enunciou, ou seja, sabe definir o conceito de função e identificar/explicar, baseando-se na definição dada, se determinada tabela, gráfico ou diagrama representa uma função, além de conseguir estabelecer/identificar relações funcionais entre variáveis. (Souza, 2017, p.13).

Sobre as ideias base no estudo das funções, Caraça (1984) e Tinoco (2002) *apud* Nogueira e Rezende (2019) destacam cinco que são estritamente relacionadas com o conceito de função: as ideias de variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização.

A ideia de *variável* aparece quando queremos representar um elemento qualquer de um conjunto. Caraça (1951, p. 127) define variável da seguinte forma:

> Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x. *A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos de variável.*

A definição apresentada restringe o conjunto a conjuntos numéricos. Apesar disso, pode ser generalizada aos demais conjuntos. Em suma, a variável apresenta a propriedade de, sem coincidir com nenhum dos elementos do conjunto, acaba por representar a todos (Caraça, 1951). Diferentemente da *incógnita*, que representa um (ou mais) elementos em específico.

A ideia de *dependência* representa a relação condicional entre duas grandezas, uma chamada de variável dependente e outra nomeada de variável independente. Essa ideia é o que dá, segundo Caraça (1951), à função o seu caráter dinâmico, tornando esse conceito o mais importante de toda a matemática.

A ideia de *correspondência* se manifesta quando relacionamos dois conjuntos não-vazios. Talvez o exemplo mais clássico seja quando fazemos corresponder os elementos de uma coleção com o conjunto sucessivo dos números naturais, no processo de contagem. Segundo Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 31), "a correspondência é um dos aspectos essenciais da Matemática e uma das primeiras formas de pensamento matemático a se manifestar".

A *regularidade* está relacionada com a tentativa de reconhecimento de um padrão, observando-se os casos iniciais. Segundo Rezende, Nogueira e Calado (2020), tal conceito, dentre as cinco ideias relacionadas à função, se configura como o de mais fácil compreensão pelos alunos.

Já a *generalização* está relacionada com a tentativa de expressar o padrão reconhecido na regularidade através de uma lei de formação, o que envolve abstração. Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 33) afirmam que

> o registro de leis gerais em linguagem algébrica ou gráfica é passo decisivo para a construção do conceito de função, embora não seja fácil, talvez porque além de ser compreendida, a generalização exige, na maioria dos casos, também a representação utilizando a linguagem algébrica.

Sobre as diferentes formas de representação, Santos e Barbosa (2017) levantam o argumento de o ensino e a aprendizagem do conceito de função ainda ser um desafio, principalmente quando se leva em consideração as diferentes formas de abordá-lo. Os autores ainda acrescentam que a comunicação de tal conceito pode se dar de sete formas: tabela, máquina de transformação, diagrama, expressão algébrica, generalização, gráfico e definição. “Cada uma dessas formas de comunicar o conceito de função evidencia aspectos e propicia interpretações particulares desse conceito, que são mais apropriadas e/ou eficazes a depender do contexto funcional sob análise e do nível de ensino no qual está sendo abordado” (Santos; Barbosa, 2017, p. 28). O conceito de função seria, portanto, o conjunto formado por suas diferentes formas de comunicação.

Segundo os autores, a comunicação como *tabela* oportuniza a apresentação de uma função como uma relação funcional, onde se pode associar as ideias de associação e correspondência; além das de variação, dependência e proporcionalidade direta. A comunicação como uma *máquina de transformação* parte das noções iniciais de processo, transformação e mudança, e culminam em uma ideia mais dinâmica do conceito; além de possibilitar a apresentação das definições de domínio e imagem. A comunicação como *diagrama* proporciona a apresentação do conceito de função como uma relação entre dois conjuntos não-vazios, que respeitam determinadas regras; facilitando, inclusive, a identificação de relações que não são de funções. Podem emergir também, com esse tipo de comunicação, a noção de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. A função como *expressão algébrica* expressa a relação entre as variáveis dependentes e as independentes, através de uma determinada fórmula ou lei de formação. Esse tipo de comunicação facilita a identificação e definição dos mais variados tipos de função, além de simplificar a execução das operações algébricas. A comunicação como *generalização* trata de representar, a partir de uma determinada quantidade de dados, uma certa afirmação geral que procure explicitar a dependência entre as variáveis, expressando-a por intermédio da linguagem corrente ou de símbolos algébricos. A função como *gráfico* (no universo dos números reais) se resume em representar no plano cartesiano o subconjunto de pontos (x, y), dado que x pertence ao domínio da função f e y à sua imagem. Esse tipo de comunicação permite estudar de forma mais direta o crescimento e decrescimento de uma função, os zeros, o sinal, a imagem, dentre outros (Santos; Barbosa, 2017).

Finalmente, a comunicação do conceito de função como *definição* se resume em

> indicar, em linguagem matemática precisa, critérios que possibilitem estabelecer se uma determinada relação comunicada por qualquer uma das formas especificadas anteriormente, é ou não uma relação funcional. Como exemplo, podemos definir: Uma função é uma relação entre dois conjuntos não vazios A e B, que a todo elemento de A, associa-se um único elemento de B. (Santos; Barbosa, 2017, p. 35).

Os autores ainda reforçam que apesar de tal precisão, a apresentação do conceito de função como definição omite tópicos importantes como, por exemplo, a noção de dependência e variação.

Para Andrade e Saraiva (2012),

> Ao trabalhar com diferentes representações de funções, os alunos poderão desenvolver uma compreensão mais aprofundada do conceito de função. Mais do que isso, os alunos poderão ser capazes de compreender as relações entre gráficos e símbolos e de avaliar as vantagens e desvantagens de cada representação, consoante os objetivos pretendidos. (Andrade; Saraiva, 2012, p. 141).

Para Duval (2006) as conexões entre as diferentes formas de representações das funções não são simples de executar; apesar disso, o entendimento do conceito deve partir do estabelecimento de relações entre as mesmas. Tais representações só são mobilizadas quando podem ser convertidas umas nas outras.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A partir da retomada do objetivo geral desta tese – que é apresentar a viabilidade e as potencialidades de utilização das questões da OBMEP na aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, por intermédio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – este capítulo apresenta os aportes metodológicos utilizados para se chegar a tal objetivo.

Segundo Gil (2008, p. 8) método científico "é o conjunto de procedimentos intelectuais e técnicos adotados para se atingir o conhecimento". O autor ainda complementa afirmando que áreas distintas podem possuir métodos distintos, variando conforme aquilo que se quer investigar e pela classe de proposições a se descobrir.

Sendo assim, dentro do que se planeja investigar nesta pesquisa, consideramos que, quanto à abordagem, ela é do tipo qualitativa. Para Silveira e Córdova (2009), pesquisa qualitativa tem sua atenção voltada para aspectos que não podem ser quantificados. Além disso, possui as seguintes características: objetivação do fenômeno; hierarquia nas ações de descrever, compreender e explicar; precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; busca dos resultados mais fidedignos possíveis, dentre outros.

Quanto a sua natureza, a pesquisa será do tipo aplicada. Para Silveira e Córdova (2009, p. 37) esse tipo de pesquisa "objetiva gerar conhecimentos para a aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos. Envolve verdades e interesses locais". Em relação aos objetivos, a pesquisa é considerada descritiva já que, de acordo com Gil (2008, p. 28), "as pesquisas deste tipo têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis". Já em relação aos procedimentos, a pesquisa se configura como experimental de grupo único. Para Gil (2007) *apud* Silveira e Córdova (2009, p. 38), "a pesquisa experimental consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto".

Caracterizada a pesquisa com base nesses quatro parâmetros, passa-se a apresentar o objeto de investigação dela. Sendo assim, o público-alvo deste trabalho foi uma turma de 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Dr. Joaquim Inácio, localizada na cidade de Martins/RN. Aplicou-se uma Sequência Didática sobre o conteúdo Função (noções gerais), elaboradas a partir das questões da OBMEP e trabalhadas na sala de aula por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. De tal estudo, espera-se que emerjam subsídios que possibilitem discussões sobre os seguintes questionamentos:

- É viável utilizar as questões da OBMEP – de forma sistematizada e compatível com o nível da turma – na introdução de conceitos e conteúdos dispostos no currículo?
- O que os alunos consideram relevante e quais comportamentos adotam (ou podem vir a adotar) no processo de resolução de problemas?
- Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode auxiliar na abordagem e apreensão de determinados conceitos e conteúdos matemáticos?

A Sequência Didática foi aplicada pelo próprio pesquisador em parceria com o professor da turma analisada. Com isso, o principal método empregado na fase de experimentação será o de observação participante. Segundo Spradley (1980) *apud* Correia (2009, p. 31), nesse tipo de abordagem

> os objectivos vão muito além da mera descrição dos componentes de uma situação, permitindo a identificação do sentido, a orientação e a dinâmica de cada momento. Face à intersubjectividade presente em cada momento, a observação em situação permite e facilita a apreensão do real, uma vez que estejam reunidos aspectos essenciais em campo.

Além disso, foram empregados métodos complementares na coleta de dados, como questionário aplicado aos alunos antes e depois do experimento (aplicação da Sequência Didática através da Metodologia de Resolução de Problemas). O questionário foi baseado em Carrillo (1998) e teve como objetivo compreender os comportamentos/modos de os estudantes pesquisados resolverem problemas. Foi dividido em três partes: a primeira buscou obter informações sobre as características pessoais dos discentes frente à resolução de um problema, a segunda sobre o que geralmente os discentes fazem quando estão resolvendo um problema e a terceira sobre o que os discentes consideram importante ao se resolver um problema.

Dentre as formas de registro, destacamos: o diário de campo do pesquisador, as folhas de respostas dos discentes, além de gravações de áudio e fotografias.

Sobre a Sequência Didática, Zabala (1998, p. 18) diz que é

> um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. [...] são instrumentos que permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva: planejamento, aplicação e avaliação.

A partir dessa definição, foi desenvolvida a Sequência Didática e implementada na sala de aula através da Metodologia de Resolução de Problemas supracitada. A Sequência Didática foi estruturada de tal forma que também possa se constituir em um material de auxílio ao professor na introdução de conceitos e conteúdos relacionados a funções, para além desta pesquisa. Estrutura essa resumida nos seguintes pontos: introdução, objetivo da atividade, duração indicada, competências e habilidades de acordo com a BNCC, conhecimentos prévios necessários, conteúdos que serão abordados, metodologia sugerida para aplicação, problemas, análise geral dos problemas, possíveis soluções, formalização do conteúdo, problemas adicionais e comentários gerais.

Finalizando esta seção, convém destacar que neste trabalho será considerado tanto a Metodologia no âmbito da Pesquisa Pedagógica, que orientará e fundamentará as atividades realizadas em sala de aula, como a Metodologia no âmbito da Pesquisa Científica, que conferirá a este estudo a validade e o rigor necessários (Onuchic; Noguti, 2014).

Sendo assim, como “Metodologia Pedagógica” utilizaremos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta pelas pesquisadoras brasileiras Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato. Já como “Metodologia Científica” a tese será estruturada em conformidade com a Metodologia da Engenharia Didática, que tem como principal nome a pesquisadora francesa Michèle Artigue.

Ambas as metodologias serão descritas com mais profundidade nas seções a seguir.

4.1 O ROTEIRO DA METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Como descrito no capítulo sobre Resolução de Problemas, a Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode ser implementada na sala de aula através de um roteiro que consiste em dez etapas, expressas e detalhadas a seguir:

1. **Proposição do problema:** o professor seleciona ou elabora um problema e propõe aos alunos, ou aceita um problema proposto pelos próprios alunos. Este problema inicial é chamado problema gerador, pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula.

2. **Leitura individual:** a ação, nessa etapa, é do aluno; ao ler individualmente, tem possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto.
3. **Leitura em conjunto:** os alunos reúnem-se em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão do problema. O professor ajuda os grupos na compreensão do problema e na resolução de problemas secundários (dúvidas referentes à notação, à passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, a conceitos relacionados e a técnicas operatórias), mas ainda as ações são realizadas, essencialmente, pelos alunos. Nesta fase, exercitam a expressão de ideias, para o que necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem, a fim de expressar-se com clareza e coerência e fazer-se entender.
4. **Resolução do problema:** a partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, tentam resolver o problema gerador, que lhes conduzirá à construção de conhecimento sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. A ação dos alunos volta-se à expressão escrita, pois, para resolver o problema, precisarão da linguagem matemática ou de outros recursos de que dispõem: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas.
5. **Observar e incentivar:** nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor age, observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, e incentivando a troca de ideias. Auxilia nas dificuldades sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos. O professor também acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados e técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuação do trabalho.
6. **Registro das resoluções na lousa:** feita por representantes dos grupos (respostas certas, erradas ou feitas por diferentes processos). Diante desse “painel de soluções”, o professor estimula os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defender pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções, isto é, avaliar suas próprias resoluções de modo a aprimorar a apresentação (escrita) da resolução.
7. **Plenária:** para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos

de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8. **Busca do consenso:** Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
9. **Formalização do conteúdo:** o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações, se for o caso.
10. **Proposição e resolução de novos problemas:** novos problemas relacionados ao problema gerador são propostos aos alunos. Eles possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante. Essa etapa teria forte viés do ensino *para* a resolução de problemas, contudo, isso não desconfigura a metodologia porque essa concepção (*através*) inclui as demais (*sobre* e *para*).

(Allevato; Onuchic, 2009; Onuchic; Allevato, 2011; Allevato; Onuchic, 2014).

Em especial, nas etapas de 2 a 8, serão valorizadas as heurísticas sugeridas por Carrillo (1998) e Polya (2006), nas suas respectivas fases de resolução de problemas.

4.2 ENGENHARIA DIDÁTICA

Segundo Artigue (1996) a metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática surgiu na didática da matemática no início da década de 1980 e consiste em uma forma de trabalho comparado ao de um engenheiro que, ao idealizar um projeto, tem como base o conhecimento científico de sua área, aceita em submetê-lo a um controle científico, mas que, apesar disso, vê-se obrigado a trabalhar com variáveis externas à sua ciência, enfrentando problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

No caso das pesquisas em Educação, um exemplo de tais variáveis é a subjetividade dos indivíduos que compõem o público-alvo de uma determinada pesquisa.

A autora chama a atenção para a abordagem de duas questões cruciais inerentes à Engenharia Didática: "a relação entre pesquisa e ação no sistema educacional e o papel que as 'realizações didáticas' devem desempenhar na sala de aula" (Artigue, 1996, p. 243). O primeiro ponto se refere às articulações que devem existir entre a pesquisa e a ação, a fim de que não se reduza o sentido de cada uma, quando entendidas como processos disjuntos. Já o segundo ponto mostra que, dada a complexidade do sistema educativo, metodologias externas (como questionários, entrevistas, testes etc.), apesar de válidas, muitas vezes não são suficientes para capturar tal complexidade; além disso, as realizações didáticas colocam em teste as construções teóricas desenvolvidas na pesquisa (Artigue, 1996).

Silva (2019, p. 60) diz que

> A Engenharia Didática tem três possibilidades de aplicação: 1) como metodologia de pesquisa; 2) como pressuposto para atuação em sala de aula, para planejar sequências didáticas, analisar e explicar fenômenos e desenvolver questões teóricas; 3) a conjugação da primeira com a segunda possibilidade. A Engenharia Didática evoca a existência de uma descrição, um estudo e justificações que possibilitem possíveis condições de utilização deste dispositivo em diversos contextos.

Artigue (1996, p. 247) afirma que "a engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' em sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino". Dependendo do destaque atribuído às realizações didáticas, emergem dois níveis: o da micro-engenharia e o da macro-engenharia. O primeiro, realizado em nível local, permite estudar a complexidade do fenômeno de classe, mas não oferece subsídios para um estudo mais amplo dos fenômenos relacionados à duração do ensino/aprendizagem. Assim, para a autora, a pesquisa em macro-engenharia se torna inevitável.

Uma particularidade da Engenharia Didática se dá pela forma como o experimento em aula é validado. Sua validação é essencialmente interna, realizada a partir do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, que serão descritas a seguir. Seus objetivos de pesquisa também são diversos, fazendo com que a Engenharia Didática tenha sua singularidade principalmente atrelada a esse aspecto metodológico.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008, p. 66),

> A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer).

A utilização da Engenharia Didática, enquanto abordagem metodológica, consiste em quatro fases: 1) análises preliminares; 2) concepção e análise *a priori* das situações didáticas; 3) experimentação (aqui entendida como a aplicação da sequência didática) e, por último, 4) análise *a posteriori* da sequência didática e validação. Apesar de aparecerem em sequência, tal processo pode envolver retrocessos e avanços de acordo com as observações e os trabalhos de análise.

A primeira fase, as **análises preliminares**, consiste em um referencial teórico geral e nos conhecimentos didáticos presentes na área de pesquisa. Em diversos trabalhos (Ingar, 2014; Oliveira, 2014; Ferreira, 2016; Silva, 2019) essa etapa se dá, majoritariamente, numa revisão de literatura sobre o tema abordado. Além disso, são requeridos alguns tipos de análise:

> - análise epistemológica do conteúdo visados pelo ensino,
> - análise do ensino usual e seus efeitos,
> - análise das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam seu desenvolvimento,
> - análise das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva,
> - e, claro, levando em consideração os objetivos específicos da pesquisa.
>
> (Artigue, 1996, p. 249-250).

Apesar disso, a autora esclarece que nem todos os componentes dessas análises são apresentados explicitamente. Outro ponto é que tais análises permitem a identificação das variáveis de comando, que serão explicitadas na fase seguinte.

Na segunda fase, **concepção e análise *a priori***, o pesquisador atua sobre um determinado número de variáveis do sistema, chamadas *variáveis de comando*, destacando quais serão relevantes para o seu problema de pesquisa. Essas variáveis se dividem em dois tipos: as macrodidáticas ou globais e as microdidáticas ou locais. As primeiras estão relacionadas à organização geral da metodologia de Engenharia Didática. As últimas estão relacionadas à organização de uma sessão ou fase que dependem do conteúdo didático cujo ensino é destinado. Essas variáveis são, conforme Brum e Schuhmacher (2013, p. 65) explicam, “pertinentes ao sistema didático (professor/aluno/saber) e consideradas essenciais pelo investigador/professor, sendo abordadas nas várias sessões ou fases da Engenharia Didática”.

Almouloud e Coutinho (2008, p. 67) argumentam que

> Esses dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado e suas análises serão realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica (associada às características do saber), a dimensão cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e dimensão

> didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos).

A validação da metodologia se inicia a partir do momento em que a análise *a priori* é implementada. Segundo Artigue (1996), o objetivo da análise *a priori* é

> determinar de que forma as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e sua orientação. Para tanto, será baseado em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente envolvida, no confronto feito na quarta fase entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. (Artigue, 1996, p. 258).

A análise *a priori* é realizada a partir de uma parte descritiva e de outra preditiva, e é "centrada nas características de uma situação adidática que pretendemos construir e que procuraremos aplicar aos alunos" (Artigue, 1996, p. 258). Através dela descreve-se as escolhas feitas a nível local, as características da situação adidática a ser desenvolvida, analisa-se as possíveis consequências da situação quando aplicada aos alunos, prever-se possíveis comportamentos com a intenção de controlar o seu significado, sendo que tais comportamentos devem resultar da implementação do conhecimento pretendido através da aprendizagem (Artigue, 1996).

Deve-se também apresentar os objetivos e as condições em que será realizada a pesquisa, descrever o público-alvo, estabelecer o contrato didático e como serão aplicados os instrumentos de pesquisa.

A fase de **experimentação** é o momento em que o pesquisador aplica as atividades desenvolvidas na fase anterior e em que são observadas as atitudes e as produções dos alunos. Nesse momento podem surgir necessidades de ajustes e a consequente revisão das fases anteriores. Essa fase se dá a partir do momento em que o pesquisador entra em contato direto com a população estudada.

Na **análise *a posteriori* e validação** o pesquisador, inicialmente, se baseia em todos os dados obtidos durante a experimentação, que podem ser tanto as observações feitas durante as aulas, como também as produções dos discentes dentro ou fora da sala de aula. Segundo Artigue (1996), essas informações podem ser complementadas por outras obtidas a partir de questionários e entrevistas (individuais ou em pequenos grupos), realizadas ao longo da experimentação ou no seu final.

Configura-se como todos os resultados que se pode obter a partir da análise dos dados recolhidos, caracterizando-se como uma análise feita à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa. Com isso, depende de ferramentas técnicas ou teóricas para a coleta de dados, cujo intuito é estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos emergentes (Almouloud; Coutinho, 2008).

A validação das hipóteses envolvidas na pesquisa é realizada, como dito anteriormente, pelo confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Por conseguinte, a Engenharia Didática se configura numa importante metodologia de pesquisa, por relacionar o aspecto científico com o aspecto prático do tema de estudo; constituindo-se em um modelo metodológico viável para, dentre outros pontos, sistematizar o referencial teórico necessário para a pesquisa, justificar a elaboração e implementação de uma determinada sequência didática, e também para analisar e validar as práticas implementadas na sala de aula durante o processo de ensino e aprendizagem.

Outrossim, o uso de Engenharia Didática nos oferta, ao mesmo tempo, uma metodologia de pesquisa e um instrumento de elaboração de inovações didáticas, que não restringe o papel do professor no planejamento e desenvolvimento de metodologias com ênfase nos estudantes (Silva, 2019).

5 ANÁLISE *A PRIORI*

A segunda fase da Engenharia Didática se concentra, predominantemente, na elaboração da Sequência Didática a ser implementada na sala de aula, bem como a previsão das ações e comportamentos do público-alvo durante a sua execução.

A análise preliminar feita com base nos pressupostos de tal metodologia favoreceu a elaboração de um referencial teórico baseado em três dimensões: a epistemológica, a cognitiva e a didática, detalhadas a seguir:

- ✓ Dimensão epistemológica
  - Levantamento de produções científicas para constituir a revisão bibliográfica;
  - Aportes teóricos que justifiquem e fundamentem a Resolução de Problemas ao longo dos anos e sua consolidação como metodologia de ensino;
  - Aportes teóricos que justifiquem o uso das questões da OBMEP para além do momento de aplicação das provas;
  - Conhecer os estudos de práticas comuns no ensino do conteúdo funções e seus efeitos.
- ✓ Dimensão didática
  - Discussões associadas à operacionalização do ensino por meio da resolução de problemas em sala de aula, com ênfase no papel do aluno e no do professor;
  - Discussões sobre o conceito de aprendizagem.
- ✓ Dimensão cognitiva
  - Concepções sobre o conhecimento prévio;
  - Concepções sobre os comportamentos/modos de os alunos resolverem problemas.

A partir disso, conseguimos estruturar a nossa Sequência Didática com base nas seguintes **variáveis globais**:

a) A adoção da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como metodologia Pedagógica;
b) A utilização de situações-problema retiradas do banco de questões e/ou das provas da OBMEP como recurso didático;
c) A opção de organizar a turma em grupos com o intuito de favorecer a comunicação e potencializar a troca de experiências entre os discentes;
d) A introdução da noção intuitiva de função para posterior apresentação da sua definição formal;

e) A representação da noção de função sob diferentes contextos;
f) A valorização das competências e habilidades prescritas em documentos oficiais voltados para a Educação Básica;
g) O conhecimento prévio dos discentes;
h) Recorrer a diferentes heurísticas sempre que necessário.

Definidas as variáveis globais, passamos à concepção e estruturação da nossa Sequência Didática.

5.1 SOBRE A CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para a construção da nossa Sequência Didática recorremos, no que se refere aos problemas geradores que seriam utilizados, ao site da OBMEP, no qual consta um material didático que contempla as provas, banco de questões, apostilas do PIC, simulados, vídeos, dentre outros. Concentramo-nos nos dois primeiros.

Inicialmente, seriam consultadas apenas as provas da 1ª e 2ª fases do nível 3 da olimpíada. Contudo, levando em consideração o vasto material disponível e que muitos dos problemas que estão relacionados ao conteúdo funções não se apresentam necessariamente em termos de lei de formação e gráficos (a maioria dos problemas do referido conteúdo elencados do nível 3 são expressos dessa forma), optou-se em fazer o levantamento a partir das provas de todos os níveis da OBMEP e de seu banco de questões, no período compreendido entre 2005 e 2020.

Chegou-se a um total de 91 problemas que contemplassem algum tópico relacionado com o conteúdo função (noções gerais, função afim e função quadrática). Posteriormente, optou-se por reduzir esse tema para *noções gerais de função.*

A Sequência Didática é composta por onze problemas geradores que, em nossa visão, contemplam o tema supracitado em sua totalidade. Além disso, tais problemas estão dispostos numa ordem que acreditamos ser a mais condizente com o que é apresentado nos livros didáticos que tratam desse assunto.

Cada problema gerador é composto por um código de onze dígitos. Os quatro primeiros se referem ao ano em que o problema foi lançado. O quinto e o sexto são referentes ao nível da prova (N1, N2 ou N3), o sétimo e o oitavo estão relacionados à fase (F1 ou F2) ou se o problema pertence ao banco de questões (BQ) e os três últimos indicam o número do problema.

Por exemplo, o problema gerador 1 possui o código 2010N2BQQ10, o que equivale a dizer que é um problema de 2010, do nível 2, retirado do banco de questões, sendo a questão de número 10.

Além disso, procurou-se apresentar o problema tal qual ele foi elaborado. Sempre que isso não fosse possível (por optar por transformar um problema objetivo em subjetivo) destacou-se o termo *adaptado* no final.

A escolha do tema funções foi motivada pelos seguintes fatores:

- Por ser um conteúdo cuja ideia intuitiva já é trabalhada desde o Ensino Fundamental;
- Por ser um dos primeiros conteúdos vistos no Ensino Médio, em geral, logo após as noções de conjuntos;
- Por ser um conteúdo cuja associação com situações contextualizadas é mais frequente;
- Por ser um conteúdo recorrente nos problemas apresentados pela OBMEP.

Os livros utilizados na seção *Formalização do conteúdo* e na etapa de proposição e resolução de novos problemas (última etapa da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de problemas) foram os seguintes:

- Conexões: matemática e suas tecnologias (grandezas, álgebra e algoritmos), publicado pela editora Moderna, sob edição de Fabio Martins de Leonardo. Este é o livro utilizado pelo professor titular da disciplina.
- Matemática em contextos: função afim e função quadrática, de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, publicado pela editora Ática. Este foi o livro que ficou como segunda opção na escolha do livro didático da escola.
- Fundamentos da Matemática Elementar: conjuntos e funções, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, publicado pela editora Atual. Essa escolha foi motivada por ser um livro que faz parte de uma coleção bastante conceituada e difundida no meio acadêmico.

Além disso, tais livros[40] auxiliaram na escolha da ordem dos tópicos abordados e na sequência em que os problemas geradores apareceriam.

As discussões e heurísticas apresentadas na seção *Possíveis direcionamentos para o(a) docente* foram baseadas em Polya (2006) e Carrillo (1998). Sempre que fizermos referência direta a tais autores, usaremos as letras P e C para denotá-los, respectivamente.

A seguir, apresentaremos a análise feita para o Problema Gerador 01. A Sequência Didática completa está disponível no Apêndice I.

[40] As definições e problemas contidos nesta tese foram retirados exatamente como estão descritos nos livros supracitados.

PROBLEMA GERADOR 01 (2010N2BQQ10) (Adaptado)

Geni é cliente de uma companhia telefônica que oferece o seguinte plano:

- tarifa mensal fixa de R$ 18,00;
- gratuidade em 10 horas de ligações por mês;
- R$ 0,03 por minuto que exceder as 10 horas gratuitas.

Em janeiro, Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos e, em fevereiro, por 9 horas e 55 minutos. Qual foi a despesa de Geni com telefone nesses dois meses, em reais?

OBJETIVO DO PROBLEMA

Evidenciar a noção intuitiva de função.

VARIÁVEIS LOCAIS

- O reconhecimento da existência de dependência entre valor a ser pago por mês e o tempo gasto ao telefone.

- O reconhecimento dessas variáveis como conjuntos não vazios que se relacionam.

- A divisão da situação em dois casos com base no seguinte questionamento: Nesse mês, Geni usou o telefone por um tempo superior ou inferior às 10 horas?

- A conversão das horas excedentes em minutos (para o segundo mês).

UMA SOLUÇÃO

Como em janeiro Geni usou o telefone por 15 horas e 17 minutos, ela deve pagar a tarifa fixa de R$ 18,00, mais R$ 0,03 por cada minuto das 5 horas e 17 minutos que excederam das 10 horas. Como 1 hora possui 60 minutos, então 5 horas e 17 minutos são $5 \times 60 + 17 = 300 + 17 = 317$ minutos. Assim, para esse mês, Geni deve pagar $18{,}00 + 317 \times 0{,}03 = 18{,}00 + 9{,}51 = \text{R\$ } 27{,}51$.

Como em fevereiro Geni usou o telefone por menos de 10 horas, ela irá pagar apenas a taxa mensal fixa de R$ 18,00.

Sendo assim, a despesa de Geni com telefone nesses dois meses foi de $27{,}51 + 18{,}00 = \mathbf{R\$\ 45{,}51}$.

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Observação 1: A ideia de função está presente quando relacionamos os valores de duas grandezas variáveis.

Definição 1: Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função f de A em B** é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Nessas condições, usamos as seguintes notações:

$$f: A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$

Nos dois casos, lemos: f é uma função de A em B.

Observação 2:

- Todo elemento do primeiro conjunto tem um correspondente no segundo conjunto;
- Cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento no segundo conjunto.

(Dante; Viana, 2020).

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

O problema apresenta uma situação frequente no dia a dia, que é a assinatura de um plano de telefonia. Tendo os alunos lido o problema de forma individual e, em seguida, discutido dentro de seu grupo os pontos-chave, o professor pode iniciar a discussão verificando se eles compreenderam realmente o problema; utilizando valores menores e maiores do que 10 horas. Além disso, pode questionar sobre o que a questão está pedindo. Polya (2006) sugere:

P: Qual é a incógnita? O valor a ser pago por Geni nos dois meses.

P: Quais são os dados? As condições do plano e o tempo que Geni usou o telefone nos dois meses.

P: Qual é a condicionante? O valor a ser pago depende do tempo usado.

P: Separe as diversas partes da condicionante. É preciso notar que o "cálculo do valor" a ser pago deve ser com base no seguinte fato: nesse mês, Geni usou o telefone por um tempo inferior ou superior a 10 horas? Carrillo (1998) sugere: *C: Decomponha o problema.*

Outro ponto importante é que o discente deve perceber que é preciso, no primeiro mês, transformar em minutos o tempo que excede as 10 horas. Ratificando isso, lembra-se de Polya (2006), quando questiona: *P:É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita?*

Tendo o problema sido resolvido por cada grupo, o momento agora é de compartilhar as respostas entre os grupos e analisar a razoabilidade das soluções. *P: É possível verificar o* *resultado? P: É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? C: Analise a consistência da solução.* A resposta que você chegou faz sentido? É maior que R$ 36,00? (tarifa mínima referente aos dois meses).

Chegando na solução correta, o professor segue para a fase 9 da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que é a **formalização do conteúdo**.

Inicialmente, ele pode questionar quais são as variáveis do problema apresentado. *"O que eu quero saber? O* valor *que Geni irá pagar." "Qual informação eu devo dispor para obter esse valor? O* tempo *que ela passou ao telefone."*

Essas duas variáveis (tempo e valor) se relacionam. *Tal relação estabelecida entre a variável tempo utilizado e a variável valor a ser pago é chamada de* função. Apresentar a **Observação 1.**

Dessa observação, associamos ao nosso x a variável *tempo* e ao nosso y a variável *valor*. Pergunta-se: *Para cada tempo gasto ao telefone, existe um valor a ser pago? Para cada tempo gasto ao telefone, existe um único valor a ser pago? Tempos diferentes podem fornecer o mesmo valor a ser pago? Pode um mesmo tempo fornecer dois ou mais valores? Pode existir valores que não estejam associados a nenhum tempo?*

Apresentar a **Definição 1** e a **Observação 2.** No problema apresentado, o conjunto A é representado por todos os valores possíveis de tempo que Geni pode passar ao telefone e o conjunto B por todos os valores em reais possíveis. Note que, no conjunto B, podem existir valores em reais que não estão associados a nenhum tempo de ligação como, por exemplo R$ 15,00.

Discutir com os discentes sobre a "gratuidade" em 10 horas de ligações por mês.

Além disso, apesar de a função ser definida por mais de uma sentença, optou-se, nesse momento inicial, por não a apresentar nesses termos. Iremos retomar tal problema após a aplicação do Problema Gerador 09, que se propõe em construir a noção de função definida por mais de uma sentença.

Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

5.2 SOBRE A CONSTRUÇÃO DO QUESTIONÁRIO

Como descrito na seção de Metodologia desta pesquisa, o questionário foi baseado em Carrillo (1998) e teve como objetivo compreender os comportamentos/modos de os estudantes pesquisados resolverem problemas. Assim como o questionário original, o mesmo foi dividido em três partes: a primeira buscou obter informações sobre as características pessoais dos discentes frente à resolução de um problema, a segunda sobre o que geralmente os discentes fazem quando estão resolvendo um problema e a terceira sobre o que os discentes consideram importante ao se resolver um problema.

Isso sendo destacado, é esperado que ele possa acrescentar informações relevantes às discussões do segundo tópico relacionado à dimensão cognitiva, destacado no início do presente capítulo e feitas na seção sobre Resolução de Problemas.

Sobre a análise do questionário, pretende-se verificar tendências de comportamentos em suas aplicações pré-intervenção e pós-intervenção, com o intuito de analisar se houve algum tipo de modificação a partir da utilização das questões da OBMEP na introdução do conteúdo Noções Gerais de Função, por intermédio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

O questionário original era destinado ao público docente e possuía dezoito itens. Para cada um deles eram apresentadas cinco opções para marcar, em ordem gradativa de tal maneira que a quinta afirmação deveria ser o que um *bom resolvedor de problemas* optaria. Por exemplo, o primeiro item era o seguinte:

> *1.1 Influência em seu comportamento pelo fato de ser observado.*
> 1) O enfrentamento de situações-problema quando está sendo observado se torna um bloqueio intransponível.
> 2) Provoca nervosismo e desconfiança, repercutindo negativamente em seu comportamento.
> 3) Supõe um elemento de distorção que afeta o seu comportamento, mas que o supera gradualmente.
> 4) Supõe um elemento de distorção que supera com facilidade.
> 5) Não afeta o seu comportamento.[41]
> (Carrillo, 1998, p. 117).

O nosso questionário será aplicado aos discentes constituintes da turma de 1º ano do Ensino Médio selecionada para nossa pesquisa. Além disso, considerando o nosso público-alvo, optamos por tornar mais objetivos os questionamentos, como também por usar como opções

---

[41] Do original:
1.1 Repercusión em su comportamiento del hecho de ser observado.
1) El enfrentamiento a situaciones problemáticas en las que se está siendo observado supone um bloqueo insalvable.
2) Provoca nerviosismo y desconfianza, repercutiendo negativamente em su comportamiento.
3) Supone um elemento de distorsión que afeta a su comportamiento, pero que supera paulatinamente.
4) Supone um elemento de distorsión que supera com facilidad.
5) No afeta a su comportamiento.

para marcar os termos “discordo muito, discordo, indiferente, concordo, concordo muito”, distribuídos em Escala Likert.

Por exemplo, o questionamento 1 foi convertido em:

1. O fato de ser observado ao resolver um problema não afeta negativamente o meu comportamento.

Outrossim, alguns itens do questionário original foram divididos em dois ou mais itens no nosso questionário, com o intuito de que pudéssemos analisar alguns parâmetros isoladamente. Portanto, o questionário final acabou por apresentar vinte e seis itens.

A primeira parte do questionário, nomeada de *Características pessoais frente à resolução de um problema*, possui itens relacionados a uma etapa anterior ao ato de resolver um problema. Discorre sobre fatores emocionais e as noções predefinidas sobre o processo de resolução de problemas. Isso vai ao encontro de pesquisas que afirmam que variáveis externas possuem um papel fundamental no processo de resolução de problemas, como indicam Gómez-Chacón (2000), Gil, Blanco e Guerrero (2005) e Ibarra-Gonzaléz e Eccius-Wellmann (2018), que trazem pesquisas sobre a relação entre o domínio afetivo e a aprendizagem matemática.

Sendo assim, o item 1 do questionário busca informações relacionadas à possível mudança de comportamento do discente perante o fato dele ser observado ao resolver um problema. Os itens 2, 3 e 4 buscam saber qual é a atitude dos discentes diante dos problemas, explorando aspectos como o gosto por resolver um problema, a forma de resolução (sozinho ou em grupo), e solicitação de ajuda. O item 5 está relacionado ao hábito de resolver problemas e a sua preferência à resolução de exercícios. Os itens 6, 7 e 8 se referem às atitudes de predisposição para resolver um problema, a confiança em si mesmo de que irá resolvê-lo e atenção requerida para tal, respectivamente. O item 9 trata da organização do conhecimento, no que se refere ao hábito de resolver problemas e treinamento matemático. Os itens 10, 11 e 12 abordam a relevância atribuída à memorização de fórmulas/métodos de resolução diante de um problema.

A segunda parte do questionário, nomeada de *Características táticas ao resolver um problema*, está relacionada ao próprio ato de resolver um problema. Considera-se, nesta parte, as fases de resolução de problemas propostas por Carrillo (1998): identificação, compreensão, planejamento e exploração, execução e verificação.

O item 13 se refere aos processos de identificação e compreensão do problema, através da obtenção de uma representação significativa do mesmo. O item 14 trata da eficácia do planejamento e sua adequada exploração. O item 15 trata da eficácia e adequação da execução do planejamento desenvolvido na etapa anterior. Os itens 16, 17 e 18 buscam informações sobre a etapa de verificação, no que se refere à eficácia no uso da revisão e o nível de acabamento da solução.

A terceira parte do questionário, nomeada *Características reguladoras sobre a resolução de um problema*, direciona-se a obter informações sobre o que os discentes envolvidos consideram importante ao resolver um problema. Consiste na retomada de alguns fatores apresentados nas partes anteriores.

Os itens 19, 20, 21 e 22 tratam da importância atribuída à compreensão do problema, à obtenção de um bom planejamento, à clareza da execução, e à revisão, respectivamente. Os itens 23 e 24 se referem à organização do tempo e a devida relevância delegada a cada etapa do processo de resolução. O item 25 busca informações sobre a importância de se possuir um amplo repertório de estratégias de resolução de problemas. O item 26 trata do destaque dado às variáveis externas no ato de resolução de problemas.

Ademais, ao longo da aplicação do questionário, é previsto o esclarecimento de alguns termos associados à Resolução de Problemas como uma forma de evitar equívocos na interpretação de alguns itens. São eles: definir problema matemático; apresentar a diferença entre problema e exercício; elencar algumas heurísticas como procedimentos alternativos na resolução de um problema; definir teorema matemático; apresentar alguns métodos de resolução de problemas; apresentar as etapas de resolução de problemas, conforme Carrillo (1998) e Polya (2006); além de discutir sobre termos mais gerais que apresentem dúvidas durante a explanação.

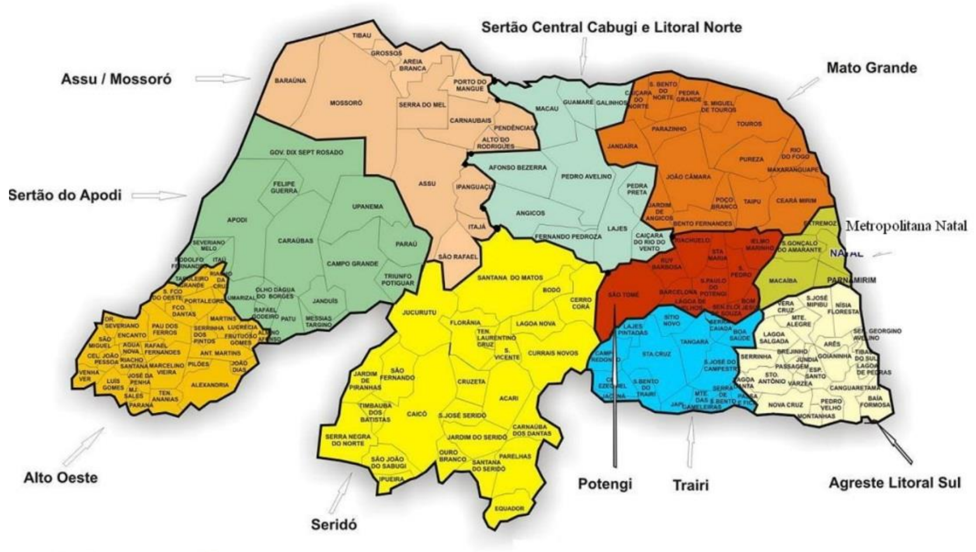
O questionário completo está disponível no Apêndice II.

6 EXPERIMENTAÇÃO

A terceira fase da Engenharia Didática, nomeada de *experimentação*, é o momento de aplicação das atividades elaboradas na etapa anterior. Sendo assim, é a partir dessa fase que o pesquisador entra em contato com a população estudada. Portanto, torna-se relevante caracterizar o público-alvo da pesquisa, além do ambiente no qual ele está inserido.

A região do Alto Oeste potiguar é composta por trinta municípios do estado do Rio Grande do Norte, que totalizam uma população de 209.545 habitantes, segundo previsão do IBGE[42]. Isso corresponde a aproximadamente 5,9% da população do estado. Além disso, tal região se localiza no que é popularmente conhecido como a "tromba do elefante", conforme pode ser observado na Figura 01 a seguir:

Figura 01 – Regiões do Rio Grande do Norte.



Fonte: Instituto Kairos (2022)[43].

O município de Martins fica a uma distância de cerca de 380 km da capital do estado, Natal. Possui uma população estimada – para o ano de 2021 – de 8790 habitantes. Além disso, está localizada numa altitude média de 745 metros em relação ao nível do mar, fazendo com que possua um clima ameno durante todo o ano, destoando das temperaturas mais elevadas das cidades circunvizinhas. É uma cidade reconhecida pelo seu potencial turístico, com eventos

[42] Para ver mais, acessar: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/rn/panorama
[43] Disponível em: https://institutokairos.net/wp-content/uploads/2011/10/Mapa_do_RN_por_territorios1.jpg

consolidados nacionalmente, como o Festival Gastronômico e Cultural de Martins que, em 2022, se encontra na sua 14ª edição.

Em relação à educação, possuía, em 2010, uma taxa de escolarização de 98,9%[44], referente à faixa etária de 6 a 14 anos. Sobre o Ideb, temos os seguintes dados: 5,0 para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, 4,2 para os Anos Finais do Ensino Fundamental e 3,3 para o Ensino Médio, sendo dados referentes à rede pública de ensino e relativos ao ano de 2021[45]. Para efeito de comparação, o RN (relativo às escolas públicas) obteve o seguinte resultado: 4,5 para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, 4,0 para os Anos Finais do Ensino Fundamental e 2,8 para o Ensino Médio.

A cidade ainda contava, em 2021, com um total de 1.117 matrículas no Ensino Fundamental (distribuídos em 9 estabelecimentos de ensino) e 316 matrículas no Ensino Médio (distribuídos em 2 estabelecimentos de Ensino[46]), ambas relacionadas à Rede Pública Estadual e/ou Municipal.

Tendo sido caracterizada de forma mais ampla a localidade em que a pesquisa foi realizada, a seguir descreveremos a escola, os sujeitos da pesquisa e como se deram os encontros.

6.1 CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA

A Escola Estadual Doutor Joaquim Inácio – Ensino Médio em Tempo Integral, é uma das vinte e nove escolas em atividade pela rede pública estadual e sob responsabilidade da 14ª Diretoria Regional de Educação e Cultura – 14ª Direc (ao todo, o estado possui quinze diretorias dessa natureza para melhor gerenciamento e assessoramento frente à Secretaria de Estado da Educação, da Cultura, do Esporte e do Lazer – Seec, do Rio Grande do Norte). É também uma das três escolas estaduais do município de Martins, sendo a única que apresenta o nível de Ensino Médio regular.

A escola iniciou suas atividades educacionais no ano de 1967, sendo criada pelo Ato nº 487/67, em 25/01/1967, e tendo o objetivo de funcionar como Escola Agrícola. Passou, ao longo

[44] Dados retirados de: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/rn/martins/panorama.

[45] Dados retirados de: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/ideb/resultados.

[46] Um desses estabelecimentos é onde a presente pesquisa foi realizada. Como foi implementado em tal escola o ensino na modalidade integral, uma outra escola (dentre as 9 que ofertam o ensino fundamental) passou a ofertar a EJA para o Ensino Médio, no período noturno.

do tempo, por várias reformas em seu espaço físico, tendo recentemente sido reformada e construída em parte para funcionar o Ensino Médio em Tempo Integral.

Segundo o documento que trata da Estrutura Curricular (Rio Grande do Norte, 2021, p. 4),

> A organização curricular das escolas de Ensino Médio Potiguar em Tempo Integral deve promover, a partir da complexidade que se revela no cotidiano, ações que favoreçam a educação com projetos, aprendizagem colaborativa, presença pedagógica e problematização.

Sobre as formas de avaliação, o Projeto Político Pedagógico da escola destaca:

> A Avaliação Somatória ainda predomina em nossa Escola, bimestralmente, a qual tem o objetivo de atribuir notas e conceitos ao aluno e, assim, promovê-lo de um ano letivo para o outro. Contudo, a Escola tem procurado realizar a avaliação de forma contínua, embasada no trabalho de projetos interdisciplinares, apesar de alguns entraves ainda dificultarem, por exemplo, a frequência irregular de alunos. (Escola Estadual Dr. Joaquim Inácio, 2022, p. 9).

Tentando sanar este desafio, a escola propõe, bimestralmente, realizar reuniões "cooperativas" por turma, que envolvam os pais, os estudantes e os agentes educacionais. A avaliação contínua se daria através de fichas de avaliação, oficinas, atividades extraclasse, testes e avaliações, focando na interdisciplinaridade e na contextualização.

Partindo do intuito de ofertar um ensino de qualidade, garantindo o sucesso na aprendizagem e reduzindo a distorção idade/série, são objetivos da instituição:

> - Elevar o nível de aprendizagem;
> - Elaborar projetos interdisciplinares e de correção de fluxo que contribuam para redução da distorção idade/série;
> - Proporcionar, aos educadores, formação continuada que lhes permita refletir e aperfeiçoar a prática pedagógica;
> - Realizar um trabalho integrado e contínuo entre a escola e a família, visando amenizar a evasão e a repetência escolar.
>
> (Escola Estadual Dr. Joaquim Inácio, 2022, p. 19).

Por fim, o Regimento da Escola, em seu Art. 3º, aponta como Missão da instituição "Desenvolver a qualidade do Ensino Médio em Tempo Integral, por meio de inovações metodológicas no trato com os conteúdos e gestão de pessoas, com o objetivo de promover a formação humana integral dos estudantes" (Escola Estadual Dr. Joaquim Inácio, 2021, p. 10).

6.2 CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS

A escolha de se aplicar a Sequência Didática numa turma de 1º ano do Ensino Médio se deu após a decisão de se trabalhar com o tema Função (Noções Gerais), cuja justificativa foi apresentada no capítulo anterior. Sendo este um conteúdo que é comumente ministrado nesse ano de ensino, geralmente após o conteúdo Conjuntos, optar por essa série dependeu exclusivamente da escolha do conteúdo-chave. Dito isso, para se chegar à turma do 1º ano B, preferimos ouvir o professor de matemática (que leciona nas três turmas de 1º ano que a escola possui), a direção e o suporte pedagógico. A partir de tal fato, consideramos fatores como: ser uma turma participativa, possuir uma boa quantidade de alunos e ter um nível de facilidade com a disciplina de Matemática considerado mediano. Além disso, era uma turma cujos horários se adequavam aos disponíveis por este pesquisador.

Em conversas preliminares com o professor de matemática da turma, realizadas na segunda semana do ano letivo[47], foi apresentada a Sequência Didática que seria utilizada (aberta a possíveis colaborações), e dado ênfase à metodologia a ser adotada. Sendo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas utilizada na introdução de conteúdos e conceitos matemáticos, foi acordado que o professor pesquisador iniciaria suas atividades no segundo bimestre (com início em 02 de maio) e que o professor de matemática utilizaria o primeiro bimestre para apresentar o conteúdo Conjuntos, seguindo a sua própria metodologia de ensino, reforçando os conhecimentos prévios necessários para um bom desenvolvimento da Sequência Didática.

Sendo assim, o primeiro contato que a turma teve com o conteúdo Funções (Noções Gerais) foi através do professor pesquisador, o que vai ao encontro do que prega o ensino *através* da resolução de problemas.

Para resguardar tanto o pesquisador como os sujeitos envolvidos nesta pesquisa, a mesma teve o seu projeto submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), sendo aprovado no parecer nº 4.965.091, em 2021. Assim expresso, os participantes menores de idade assinaram o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) e seus responsáveis legais assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Já o único participante maior de idade assinou o TCLE. O professor responsável pela disciplina também assinou o TCLE.

[47] Devido à pandemia causada pela COVID-19, a escola estava retomando o ensino presencial, paralisado desde 2020. Além disso, no ano anterior (2021), os estudantes estavam matriculados na(s) escola(s) que oferta(m) o Ensino Fundamental (Anos Finais), que também estavam funcionando na modalidade remota.

Os materiais produzidos nos encontros estão sob responsabilidade deste pesquisador, podendo ser utilizado em publicações e desenvolvimento de novas pesquisas por um período de até cinco anos após a finalização desta tese, sendo descartado em seguida.

A turma era composta por 32 alunos. Desses, 25 assinaram o TALE (ou o TCLE, para o discente maior de idade) e seus responsáveis assinaram o TCLE. Todos os discentes participaram da pesquisa (uma vez que este pesquisador assumiu o lugar do professor de matemática da turma). Ainda assim, resguardando o direito de não querer ter seus desempenhos divulgados, toda e qualquer informação apresentada nesta tese é referente ao conjunto de 25 discentes que aceitaram participar da pesquisa.

Considerando a terceira etapa da Metodologia Pedagógica proposta pelas pesquisadoras Allevato e Onuchic, além de uma melhor operacionalização, foi dado a oportunidade de os sujeitos formarem grupos cuja composição (excluindo aqueles(as) que não assinaram os termos) variava de 3 a 4 componentes, e solicitado que os mantivessem até o final da aplicação da Sequência Didática.

Para terem suas identidades preservadas, optamos por usar um código para cada aluno. Ao todo, conseguimos formar 8 grupos, conforme apresentado na Tabela 11 a seguir:

Tabela 11 – Formação dos grupos.

Grupo	**Formação**
01	A_1, A_2 e A_3
02	A_1, A_2, A_3 e A_4
03	A_1, A_2 e A_3
04	A_1, A_2 e A_3
05	A_1, A_2 e A_3
06	A_1, A_2 e A_3
07	A_1, A_2 e A_3
08	A_1, A_2 e A_3

Fonte: O autor (2022).

Portanto, no corpo desta tese, o código, por exemplo, A_3G_5, faz referência ao aluno 3 do grupo 5.

6.3 OS ENCONTROS

O primeiro contato com a turma se deu uma semana antes do início da aplicação da pesquisa. Em tal encontro, foi dada a oportunidade deste pesquisador apresentar a sua proposta de tese, e entregar os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido para posterior assinatura dos responsáveis legais dos discentes.

Dito isso, o período de realização da pesquisa foi de 02 de maio de 2022 a 18 de julho de 2022, compreendendo um total de dezenove encontros, que totalizaram vinte e nove horas-aula. Dessas, vinte e cinco horas-aula foram dedicadas à aplicação da Sequência Didática.

A turma possuía três aulas de Matemática por semana que eram, predominantemente, ministradas nas segundas e quartas-feiras; sendo uma e duas aulas, respectivamente, e com duração de 50 min cada. Para melhor gerenciamento do tempo, sempre que possível, os problemas geradores eram aplicados nos dias em que seriam ministradas duas aulas.

Dentre as formas de registros dos dados, destacamos: diário de campo do pesquisador, folhas de respostas com a resolução dos problemas geradores e dos problemas adicionais, gravação de áudio para posterior transcrição, e fotografias dos alunos e do quadro branco (durante o registro pelos grupos das soluções na lousa, na formalização do conteúdo, dentre outros). Todas as formas de registro estavam previstas nos TALE e TCLE.

Dentre as principais modificações realizadas na Sequência Didática, está a de não utilizar os problemas geradores 8, 10 e 11. Tal decisão se deu por intermédio dos seguintes fatores:

- Gerenciamento do tempo, uma vez que a resolução dos problemas geradores e adicionais demoraram mais do que o esperado, já que para a resolução de cada um dos primeiros deveríamos percorrer as etapas da metodologia proposta por nossa pesquisa. Os últimos surgiam como fixação do conteúdo/conceito, e procurávamos resolver uma quantidade variada de situações-problema;
- O acordo prévio de se utilizar apenas o segundo bimestre na aplicação da pesquisa;
- O recesso escolar com duração de duas semanas, que ocorreu entre os encontros 14 e 15;
- A opção por utilizar o problema gerador 9 (e adicionais) como uma forma de revisar os conteúdos/conceitos apresentados antes do recesso;
- O fato de os conteúdos a serem trabalhados pelo problema gerador 8 (função polinomial), pelo problema gerador 10 (função composta) e pelo problema gerador 11 (função inversa) necessitarem de uma formalização mais profunda que o número de aulas restantes poderia fornecer; além de serem conteúdos que podem ser introduzidos em momento posterior às noções gerais básicas de função, inclusive após a formalização das funções afins e quadráticas.

Com isso, a nossa Sequência Didática passou a contar com oito problemas geradores, sendo que o problema gerador 9 acabou por ser nomeado de problema gerador 8; foi seguida ainda por problemas adicionais retirados das provas e dos bancos de questões da OBMEP, como também de Leonardo (2020), Dante e Viana (2020) e Iezzi e Murakami (2019). Ao final da aplicação da Sequência Didática, em comum acordo com o professor de Matemática da turma, foi realizada também uma atividade avaliativa.

A Tabela 12, a seguir, traz um resumo sobre as atividades desenvolvidas durante os encontros:

Tabela 12 – Divisão dos encontros.

Encontro	Nº de horas-aula	Atividades realizadas
Encontro 01 – 02/05/2022	01	Aplicação do Questionário (Pré-intervenção)
Encontro 02 – 04/05/2022	02	Resolução do Problema Gerador 01 (noções gerais de função) e resolução de três problemas adicionais
Encontro 03 – 09/05/2022	01	Resolução da letra a) do Problema Gerador 02 (definição formal de função)
Encontro 04 – 11/05/2022	02	Resolução da letra b) do Problema Gerador 02 e resolução de três problemas adicionais
Encontro 05 – 16/05/2022	01	Resolução de três problemas adicionais
Encontro 06 – 18/05/2022	02	Resolução do Problema Gerador 03 (domínio, contradomínio e imagem de uma função)
Encontro 07 – 23/05/2022	01	Resolução de dois problemas adicionais
Encontro 08 – 25/05/2022	02	Resolução de um problema adicional e resolução do Problema Gerador 04 (plano cartesiano)
Encontro 09 – 30/05/2022	01	Resolução de três problemas adicionas
Encontro 10 – 01/06/2022	02	Resolução do Problema Gerador 05 (gráfico de uma função) e resolução de um problema adicional
Encontro 11 – 06/06/2022	01	Resolução de um problema adicional
Encontro 12 – 08/06/2022	02	Resolução de três problemas adicionais e resolução do Problema Gerador 06 (zero de uma função)
Encontro 13 – 13/06/2022	02	Continuação da resolução do Problema Gerador 06 e resolução de um problema adicional
Encontro 14 – 15/06/2022	02	Resolução do Problema Gerador 07 (crescimento e decrescimento de uma função)
Encontro 15 – 05/07/2022	01	Resolução de três problemas adicionais
Encontro 16 – 07/07/2022	01	Resolução do Problema Gerador 08 (função definida por mais de uma sentença)
Encontro 17 – 11/07/2022	01	Resolução de um problema adicional
Encontro 18 – 12/07/2022	01	Resolução de dois problemas adicionais
Encontro 19 – 18/07/2022	03	Atividade avaliativa e aplicação do Questionário (Pós-intervenção)

Fonte: O autor (2022).

O próximo capítulo trará a análise de como se deu tais encontros e se constitui na última etapa da metodologia de Engenharia Didática.

7 ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Neste capítulo, iremos analisar os dados que foram obtidos durante a fase de *experimentação*, confrontando-os com o que foi antecipado na análise *a priori*, e à luz também do nosso referencial teórico. Sendo assim, evidenciaremos as atividades desenvolvidas nos encontros 01 e 02, que tratam da aplicação do questionário e do problema gerador 01, respectivamente. As análises dos demais encontros estão disponíveis no Apêndice III. Além disso, os problemas adicionais utilizados após o problema gerador 02 e os demais estão disponíveis no Anexo I.

7.1 ENCONTRO 01 – 02/05/2022

Após uma breve apresentação deste que está sendo nomeado Professor Pesquisador (Prof. Pesq.), foi solicitado que a turma respondesse ao Questionário. Ele possuía o objetivo de definir o perfil dos alunos em Resolução de Problemas antes que a Metodologia proposta neste trabalho fosse aplicada para que, ao término da pesquisa, pudéssemos avaliar se houve alguma melhora na turma em relação à predisposição para se resolver um problema, ao próprio processo de resolução de problemas e à importância dada a tal processo.

Como uma forma de melhor acompanhamento, o Prof. Pesq. solicitou aos discentes que fossem respondendo aos itens conforme a leitura em voz alta por parte do docente fosse realizada, a fim de evitar tanto interpretações equivocadas do que os itens queriam medir como também de esclarecer alguns termos.

O texto introdutório do questionário *(Caro(a) participante, este questionário tem o intuito de definir o "Perfil dos alunos em Resolução de Problemas".)*, como previsto na nossa análise *a priori*, já provocou a seguinte discussão:

> (1) **Prof. Pesq.**: Para vocês, o que é um problema matemático? Qual é a diferença entre problema e exercício?
> (2) **A_4G_2**: O problema depende do contexto que a gente tem que tentar interpretar para resolver. O exercício ele só vem, por exemplo, a equação para você responder.

O Prof. Pesq. aproveita o exemplo dado pelo aluno, vai até ao quadro branco e escreve a seguinte equação:

$$x + 2x = 45$$

Em seguida, questiona:

(1) **Prof. Pesq.**: Isso seria o quê? Um problema ou um exercício?
(2) **Alguns alunos**: Um exercício.
(3) **Prof. Pesq.**: Depende.
(4) **A_4G_2**: Depende de quê?
(5) **Prof. Pesq.**: De quem irá resolver esta equação (*expressões de confusão*). Por exemplo, se algum de vocês olha para essa equação e automaticamente sabe resolvê-la, então ela é um exercício para esta pessoa. Por quê? Porque ela já tem uma bagagem, construída ao longo do Ensino Fundamental, ao longo do primeiro bimestre desse ano, que permite que ela olhe para essa equação e já saiba qual procedimento irá utilizar para resolvê-la.
(6) **A_4G_2**: Então essa equação será um problema se a pessoa não souber resolvê-la de momento?
(7) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Saber se uma questão é um problema ou um exercício está muito mais centrado em quem irá resolver do que na questão propriamente dita.

Nesse momento, o Prof. Pesq. escreve a definição proposta por Carrillo (1998) dando ênfase ao fato de que a resolução deve ser não mecânica, da dificuldade que deve existir para resolver o problema e da sua possibilidade de solução. Além da existência de predisposição para resolver.

Na leitura da primeira parte do questionário, é dito aos discentes que eles devem dar lugar às suas respectivas posturas *quando eles resolvem um problema*. Chamamos atenção para o fato que eles deveriam marcar apenas uma opção (dentre as cinco opções: discordo muito, discordo, indiferente, concordo e concordo muito) em relação a cada um dos itens. Destacamos também o fato de que se deve predominar unicamente a opinião de cada um, excluindo-se discussões entre pares e o que eles achariam que fosse a resposta ideal, a que o Prof. Pesq. queria ouvir.

Durante o item 6 do questionário *(Sinto-me entusiasmado diante de um problema, mesmo que não encontre uma solução)*, surgiram questionamentos que promoveram o seguinte diálogo:

(1) **Prof. Pesq.**: Se você gosta quando tem um problema de matemática para resolver, mesmo que você não saiba resolvê-lo, mesmo que você não consiga chegar na resposta final. Mas só o fato de você ter um problema para resolver se isso lhe agrada. Mas uma vez, pessoal, um problema de matemática. Problema no dia a dia ninguém gosta de ter *(risos da turma).*
Nesse momento, o professor de Matemática da turma – que nomearemos de Prof. Mat. – se pronuncia pela primeira vez.
(2) **Prof. Mat.**: Eu tenho uma dinâmica assim, por exemplo: eu pego um problema bem complicado. Geralmente, no final de semana, eu pego dez ou quinze problemas para resolver. Mesmo sabendo que não dá tempo de resolver todos. Quando eu não consigo resolver um problema, eu passo para outro, mas eu fico com aquele registrando. Tem horas em que você não esquece ele (*o problema)*, aí você está resolvendo outro e, de repente, vem na sua mente aquela compreensão. Às vezes eu fico rindo sozinho disso.

A fala do Prof. Mat. vai ao encontro do que prega Polya (2006) quando diz que os professores devem ser eles mesmos resolvedores de problemas, trazendo essa experiência para a sala de aula, e refletindo sobre suas dificuldades e sucessos ao resolver problemas. A fala ainda evidencia a ideia luminosa, o *insight*, que pode ocorrer durante a segunda fase de resolução de um problema, proposto pelo autor, que é o estabelecimento de um plano.

Na leitura do item 7 *(Tenho confiança em minhas possibilidades de resolver um problema)* o Prof. Pesq. questiona:

> (1) **Prof. Pesq.**: Vocês acreditam na capacidade de conseguir resolver um problema de matemática?
> (2) **Alguns alunos**: Não.
> (3) **A_1G_4**: Às vezes.
> (4) **Prof. Pesq.**: Vocês duvidam de vocês mesmos?
> (5) **A_4G_2**: Eu duvido.
> (6) **A_1G_4**: Às vezes.
> (7) **Prof. Pesq.**: Quando vocês têm contato com um problema, vocês pensam: Eu acho que eu consigo resolver essa questão. Ou vocês desistem logo? Vocês acham que não conseguem resolver?
> *A maioria fala algo no sentido de que não conseguirão resolver.*
> (8) **A_1G_4**: Às vezes eu acho que consigo, às vezes eu acho que não consigo.

Esse trecho confirma a necessidade de desenvolver nos discentes o hábito de resolver problemas. A concepção prévia de que resolvê-los é um procedimento difícil muitas vezes está relacionada à presença pouco frequente de situações que potencializem as diversas estratégias de resolução de problemas. Ou quando são colocadas situações com um nível divergente do que é enxergado na sala de aula. Isso converge com o que afirma Schoenfeld (2014) quando destaca as dimensões de salas de aula matematicamente poderosas. A segunda dimensão, a da demanda cognitiva, aponta que deve haver um ponto de equilíbrio entre ensinar matemática em pequenas porções e apresentar desafios nos quais os alunos se percam.

Sobre o procedimento alternativo listado no item 8 *(Quando o problema é de um conteúdo que não tenho tanta intimidade, fico mais atento e tento procedimentos alternativos)*, o Prof. Mat. questiona se isso seria pedir ajuda. O Prof. Pesq. confirma e acrescenta que está relacionado também com a possibilidade de fazer uma conexão com um outro problema ou conteúdo que se conheça.

A leitura do item 9 *(Geralmente, consigo resolver um problema com facilidade)* foi a que causou a maior reação de discordância. Vários alunos anunciaram em voz alta que discordavam muito.

Durante a leitura do item 11 *(Conheço alguns métodos de resolução de problemas)*, o Prof. Pesq., sentiu, como já era esperado, a necessidade de apresentar algumas formas de se resolver a equação apresentada no início desta seção, como uma apresentação prévia desses métodos. Entendendo que conhecer não significa necessariamente saber os nomes, mas sim utilizá-los intuitivamente. A partir disso, temos o seguinte diálogo:

> (1) **Prof. Pesq.**: Pra resolver esse problema (*vai até ao quadro branco e destaca a equação* $x + 2x = 45$ *)*, um método que eu poderia utilizar seria por tentativa. Não é o método mais prático, mas é uma forma. Por exemplo, eu posso trocar o x por 1 e ver se obtenho 45, troco o x por 2 e ver se obtenho 45, e assim por diante. Eu também posso resolver por proporção: se eu substituo o x por 3 eu obtenho 9; assim, 3 está para 9, assim como a solução da equação está para 45.
> (2) **A_3G_7**: É 15.
> (3) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo *(continua)*. Em se tratando de procedimentos de resolução, eu posso utilizar o método descrito pelo matemático húngaro chamado George Polya.
> *Nesse momento, o Prof. Pesq. escreve no quadro branco as quatro etapas propostas por Polya (2006) no processo de resolução de um problema: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução desse plano e revisão.*
> (4) **Prof. Pesq.**: A primeira etapa é a compreensão do problema. O que o problema quer que a gente faça?
> (5) **A_3G_7**: Descobrir o valor do x.
> (6) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Na segunda etapa a gente tem que pensar no que se deve fazer para resolver o problema. Alguém sabe?
> (7) **A_3G_7**: Tem que juntar o x com o $2x$, aí fica $3x$. Depois passa o 3 dividindo o 45, aí fica 15.
> (8) **Prof. Pesq.**: Muito bem. Notem que a gente ainda não executou nenhum cálculo, estamos pensando ainda em como resolver a equação. Isso é a elaboração de um plano, de uma estratégia para resolvermos o problema, como foi apresentado por A_3G_7. Na terceira etapa, execução do plano, a gente resolve o problema usando o plano que A_3G_7 falou *(o Prof. Pesq. resolve o problema)*. A última etapa é a revisão da resolução. A gente faz, entre outras, a verificação se a resposta está correta. Como fazemos isso?
> (9) **A_3G_7**: Só é pegar o 15 e colocar no lugar do x. Aí fica: $15 + 30 = 45$.
> (10) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo *(pausa)*. Quando eu cheguei aqui na sala, vocês dois *(apontando para os alunos A_4G_2 e A_3G_7)* estavam resolvendo um problema que pedia para calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo. Chegaram no resultado 25 (os outros lados mediam 24 e 7). Então A_4G_2 disse: vamos conferir? Olharam novamente todo o processo e depois usaram a desigualdade triangular para conferir se a resposta estava correta. O que vocês fizeram foi usar a quarta etapa proposta por Polya, mesmo que não soubessem que existia um nome para isso.

Em seguida, o Prof. Pesq. retoma com a leitura do item 11. Alguns discentes afirmaram que estavam vendo tais procedimentos pela primeira vez. Outros, que já os conheciam, mas que não sabiam que eles eram assim nomeados.

A apresentação do método de Polya foi significativa, pois a parte dois do questionário centra-se no próprio ato de resolver problemas e os itens estão distribuídos de tal forma que compreendem cada uma dessas etapas.

Na leitura do item 17 *(Após obter uma solução, tento chegar ao resultado de outro maneira)*, a maioria dos discentes afirmaram que discordavam muito. Não ter o costume de procurar soluções alternativas para um problema é um hábito comum até mesmo entre os professores de matemática. O retrospecto é uma fase que, segundo Polya (2006), até mesmo bons alunos costumam não passar por ela. Temos o seguinte diálogo:

> (1) **A_4G_2**: Discordo muito.
> (2) **A_1G_3**: Como é a 17 aí?
> (3) **Prof. Pesq.**: Depois que você resolve um problema, você tenta resolver esse mesmo problema de outra forma?
> (4) **A_1G_3**: Nam. O caba já resolveu.
> (5) **Prof. Pesq.**: Então eu não vou pensar se posso resolver de outra forma não?
> (6) **A_1G_3**: Já foi um milagre o caba já ter resolvido.
> *(Risos da turma).*

No item 18 *(Ao resolver um problema, em meus cálculos observam-se constantemente clareza e coerência),* o Prof. Pesq. questiona:

> (1) **Prof. Pesq.**: Imagine que você tenha acabado de resolver um problema. Se um colega pedir para olhar a sua solução, ele irá entender?
> (2) **Alguns alunos**: Não.
> (3) **A_1G_3**: Às vezes nem eu entendo, quanto mais os outros!
> *(Risos da turma)*

Esse trecho chama a atenção para um fator tão importante quanto se chegar à solução de um problema: justificar as etapas que o levaram a esse fim. Existe uma hierarquia na argumentação que deve ser obedecida. O acesso às respostas dos discentes aos problemas geradores e adicionais nos ofertou material que permitiu observar que houve uma melhora na escrita dos mesmos ao longo da aplicação da Sequência Didática.

O Prof. Pesq. destaca que os itens presentes na parte três do questionário se referem ao que eles acham importante no processo de resolução de um problema, e não necessariamente no que eles fazem ao resolvê-lo.

No item 21 *(Quando se resolve um problema, considero que a explicação do que se está fazendo deve ser clara, esclarecendo as razões porque se está dando destaque a algum procedimento, o que se fará com esse resultado inicial e o que se está fazendo exatamente),* é dado o exemplo do ato do Prof. Mat. resolver um problema no quadro. Grande parte destacou a importância de que todo o processo deva ser claro.

No item 23 *(A existência de um prazo determinado de tempo para resolver um problema não produz estresse ou ansiedade, pois cada fase da resolução precisa de certo investimento de tempo),* a maioria dos discentes afirmaram se sentirem mais nervosos quando se tinha um prazo para resolver um problema, principalmente se fosse numa atividade avaliativa.

O restante da leitura dos itens do questionário não provocou maiores dúvidas.

De forma geral, a aplicação prévia do questionário ofertou subsídios para que pudéssemos ter um panorama inicial sobre os comportamentos/modos de os alunos resolverem problemas e pudéssemos implementar nossa metodologia a partir disso.

Finalizou-se o primeiro encontro.

7.2 ENCONTRO 02 – 04/05/2022

O Prof. Pesq. inicia a aula dizendo que a turma iria resolver alguns problemas de matemática. A aluna A_1G_2, comenta: "Ah, meu Deus! A maioria falou que gostava, era?", referindo-se ao item dois do questionário respondido no Encontro 01 *(Gosto de resolver problemas)*. O Prof. Pesq. aproveita para comentar que resolver problemas está no âmago da matemática, citando Polya (2006) ao afirmar que a maior parte do nosso pensamento está relacionado com a resolução de problemas.

Em seguida, o Prof. Pesq. explica que acredita que a maioria dos discentes está habituado a uma metodologia de ensino que parte da apresentação das definições para que, em seguida, seja apresentada uma série de problemas em que se possa utilizar/aplicar as definições evidenciadas na etapa anterior. Eles confirmam. O Prof. Pesq. continua afirmando que assim estaríamos falando do ensino *para* resolver problemas, conforme apontam Schroeder e Lester (1989). A partir disso, ele explica para a turma que, nos encontros, iria ser utilizado o ensino *através* da resolução de problemas, a partir da introdução do que ele está chamando de Problema Gerador.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é colocada em prática a partir do momento em que o Prof. Pesq. propõe que os alunos resolvam o seguinte problema (**etapa 01**):

PROBLEMA GERADOR 01 (2010N2BQQ10) (Adaptado)

Geni é cliente de uma companhia telefônica que oferece o seguinte plano:

- tarifa mensal fixa de R$ 18,00;
- gratuidade em 10 horas de ligações por mês;
- R$ 0,03 por minuto que exceder as 10 horas gratuitas.

Em janeiro, Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos e, em fevereiro, por 9 horas e 55 minutos. Qual foi a despesa de Geni com telefone nesses dois meses, em reais?

Cujo objetivo é evidenciar a noção intuitiva de função. Destacamos ainda que, com base nesta metodologia, o conteúdo de funções ainda não havia sido trabalhado pelo Prof. Mat.

Segundo Gonçalves e Allevato (2018),

> A proposição do problema é uma atividade relevante em sala de aula, pois a partir da resolução do problema gerador é possível, dentre vários fatores, construir ou reconstruir o conceito de função usando relações entre duas grandezas, analisar e interpretar diversos tipos de gráficos relacionando-os a sua função, resolver problemas envolvendo funções, compreender tabelas que representam diversas situações, construir e analisar leis de formação de função, promovendo a contextualização e a compreensão dos problemas envolvendo funções definidas por várias sentenças. (Gonçalves; Allevato, 2018, P. 42).

Estes e outros conceitos serão desenvolvidos através dos Problemas Geradores e problemas adicionais presentes em nossa Sequência Didática.

É entregue uma folha com o problema em questão a cada um dos alunos. Além disso, é sugerido que eles formem grupos contendo de três a quatro componentes (e que permaneçam com essa confecção até o final da aplicação da Sequência Didática), mas que eles fizessem uma leitura individual (**etapa 02**) do problema, inicialmente. Segundo Allevato e Onuchic (2014), a leitura individual permite que o aluno reflita sobre o problema, compreendendo-o a partir de sua perspectiva, além de possibilitar um contato mais próximo com a linguagem matemática.

Já a formação de grupos possibilita a troca de experiência e o esclarecimento de termos e informações que não tenham ficado evidentes durante a leitura inicial, da perspectiva dos próprios alunos. Nesse contato de “igual para igual” o discente tende a ter mais liberdade para expressar sua opinião, concordando ou discordando dos argumentos dos demais, num processo de cooperação e colaboração. Corroborando com isso, Araújo e Borba (2004, p. 38) afirmam que “um trabalho em grupo permite que diversos focos sejam escolhidos, diversos procedimentos sobre o mesmo foco sejam utilizados, proporcionando uma perspectiva mais global de um fenômeno estudado”.

A Figura 02, a seguir, mostra parte dos oito grupos que foram formados:

Figura 02 – Formação dos grupos.

Fonte: Acervo do autor (2022).

Após a leitura em conjunto (**etapa 03**), o Prof. Pesq. ainda lê em voz alta o Problema Gerador 01. Em seguida, ele caminha entre os grupos formados e, quando necessário, interfere, auxiliando nas dificuldades, esclarecendo termos, relembrando conceitos, apontando discretamente caminhos, incentivando os alunos a trocarem ideias e a usarem técnicas operatórias já conhecidas (**etapas 04 e 05**). Enfim, auxiliando-os.

Os recortes a seguir apresentam parte das discussões realizadas entre o Prof. Pesq. e os grupos, durante os processos de resolução do Problema Gerador 01 por eles. Procurou-se manter os diálogos tal qual como foram falados. As ações não faladas, intervalos e localização temporal, e movimentos externos ao grupo em ação foram destacadas em *itálico*.

Além disso, o intuito é que o recorte das falas reproduza de forma mais fidedigna os movimentos de construção dos conteúdos e conceitos matemáticos, como também as dificuldades apresentadas durante as sessões.

Passemos a reproduzi-las:

[Diálogo com o Grupo 04]
(1) **Prof. Pesq.**: Vocês compreenderam o que o problema está dizendo?
(2) **A_1G_4**: Não. Como é que faz isso?
O Prof. Pesq. lê com o grupo o problema, destacando (junto com o grupo) as informações essenciais. Um dos alunos do Grupo 08 interrompe a discussão e pergunta se o problema era uma prova. O Prof. Pesq. nega, afirmando que é apenas uma atividade. O Prof. Pesq. aproveita e pergunta se ele compreendeu o problema, ele afirma que ainda nem o leu. O Prof. Pesq. retoma a discussão com o Grupo 04:
(3) **Prof. Pesq.**: O que quer dizer a informação "tarifa mensal fixa de R$ 18,00"?
(4) **A_1G_4**: Não sei não.
(5) **Prof. Pesq.**: Se Geni usar o telefone por, por exemplo, 5 horas no mês, quanto ela vai pagar?
(6) **A_1G_4**: *(Pausa longa)*
(7) **Prof. Pesq.**: Quanto ela vai pagar em janeiro?

(8) **A_1G_4**: Soma esse com esse *(o primeiro* esse *é referente aos R$ 18,00 e o segundo* esse *é referente aos R$ 0,03).*
(9) **A_3G_4**: Divide por 3?

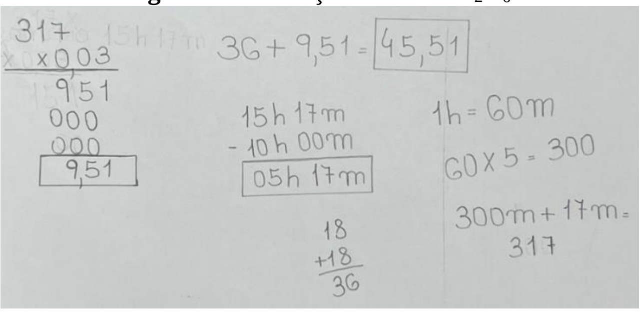
O grupo em questão apresentou dificuldades em compreender o problema; além de assumirem uma postura passiva frente à tentativa de resolução, aguardando que essa ação fosse realizada pelo Prof. Pesq., conforme aponta a fala (2). Tal grupo se mostrou também tímido em responder aos questionamentos do docente, um fato que pode ser justificado por ser o primeiro contato direto do Prof. Pesq. com o grupo, ou até mesmo pela pouca disposição do grupo em tentar resolver o problema. Polya (2006) afirma que tão importante quanto compreender um problema é desejar resolvê-lo. As falas (8) e (9) ainda retratam um fato corriqueiro na vida dos estudantes que é atirar-se a fazer cálculos sem ter conseguido inicialmente compreender o problema. Polya (2006, p. 5) ainda diz que "é geralmente inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de plano", fase essa precedida pela compreensão do problema.

O Grupo 06, a seguir, apresentou evidências de que superou a primeira fase:

[Diálogo com o Grupo 06]
(1) **Prof. Pesq.**: Se coloquem no lugar de Geni. Se vocês passarem 1 minuto a mais que as 10 horas gratuitas, quanto vocês irão pagar por esse minuto?
(2) **A_3G_6**: R$ 0,03.
(3) **Prof. Pesq.**: E se passarem 2 minutos?
(4) **A_3G_6**: R$ 0,06.
(5) **Prof. Pesq.**: E se passarem 3 minutos?
(6) **A_3G_6**: R$ 0,09.
(7) **Prof. Pesq.**: Muito bem. E quanto vocês irão pagar nesse mês em que usaram o telefone por 10 horas e três minutos?
(Pausa longa)
(8) **Prof. Pesq.**: Quais são os dados do problema?
Todos do grupo começam a ler o problema.
(9) **A_2G_6**: R$ 18,09?
(10) **Prof. Pesq.**: Exatamente. E quanto a Geni? Quanto ela vai pagar no mês de janeiro? Terminem de ler o problema.

O Grupo compreendeu bem as condições iniciais do problema e conseguiu relacionar os minutos excedentes com os R$ 0,03, como também considerou o fato de existir uma tarifa mensal fixa. Conseguiram chegar na solução do problema. A Figura 03 mostra a solução de um dos componentes desse grupo.

Figura 03 – Solução do aluno A_2G_6.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Apesar de faltar uma certa organização lógica sequencial que poderia facilitar a leitura da resolução do problema, ela apresenta um nível de clareza satisfatório.

Em seguida, temos o diálogo com o Grupo 08:

[Diálogo com o Grupo 08]
(1) **Prof. Pesq.**: O que quer dizer essa "tarifa mensal fixa"?
(2) **A_2G_8**: Que por mês tem que pagar R$ 18,00.
(3) **Prof. Pesq.**: Se usar o telefone por até quanto tempo?
(4) **A_2G_8**: 10 horas.
(5) **Prof. Pesq.**: Se Geni usar o telefone por 10 horas e 1 minuto, quanto ela irá pagar?
Dois alunos respondem ao mesmo tempo:
(6) **A_1G_8**: R$ 0,03.
(7) **A_2G_8**: R$ 10,03.
(8) **Prof. Pesq.**: 10?
(9) **A_2G_8**: R$ 18,03.
O Prof. Pesq. destaca as condições do problema.
(10) **Prof. Pesq.**: Se Geni usar o telefone por menos de 10 horas, quanto ela vai pagar?
(11) **A_2G_8**: Os R$ 18,00.
(12) **Prof. Pesq.**: E por mais de 10 horas?
(13) **A_2G_8**: Os R$ 18,00, aí tem que olhar os minutos que passaram, né?
(14) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo.

O Grupo 08 também conseguiu compreender bem o problema. O aluno A_2G_8 comete uma certa confusão ao associar as 10 horas gratuitas com R$ 10,00 a serem pagos de tarifa fixa, fala (7), mas logo se corrige. Além disso, a fala (13) evidencia a compreensão de que *alguma coisa* deve ser feita com os minutos que passaram. Onuchic (1999, p. 208) afirma que "as indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem, com frequência, quando ele resolve um problema".

Mantivemos o seguinte diálogo com o Grupo 05:

[Diálogo com o Grupo 05]
(1) **A_3G_5**: Venha cá. Dá uma olhadinha aqui, por favor.
(2) **Prof. Pesq.**: Como é que você fez?
(Risos)
(3) **A_3G_5**: Alguém explique aí *(referindo-se aos demais componentes do grupo)*.
(4) **Prof. Pesq.**: O que o problema está dizendo?

(Mais risos)
O Prof. Pesq. tranquiliza o grupo afirmando que é só uma conversa. Que não tem problema se errar algo.
(5) **A_3G_5:** Que ela tem direito a 10 horas por mês e que se ela exceder as 10 horas paga R$ 0,03 por minuto. Aí a gente fez assim: no mês de fevereiro são R$ 18,00 porque ela não gastou as 10 horas. No mês de janeiro a gente pegou as horas que excedeu. Aí a gente multiplicou as 5 horas por 60 dos minutos e depois somou com 17, ficando 317. Aí a gente multiplicou por 0,03 e ficou R$ 9,51 e somou com os R$ 36,00, que é referente aos dois meses.
(6) **Prof. Pesq.:** O argumento que vocês utilizaram está correto.
(7) **A_3G_5**: Mas a resposta está correta?
(8) **Prof. Pesq.**: Já, já eu falo.
(9) **A_3G_5**: Poxa.

A fala da estudante A_3G_5 (5) evidencia uma boa compreensão do problema. Além disso, o estabelecimento e execução do plano traçado é coerente. O Prof. Pesq. pouco auxiliou ao grupo, além de também ter evitado afirmar, nesse primeiro momento, que a resolução estava correta, o que ocasionou uma espécie de frustração por parte dos membros do grupo. Isso é uma postura bastante comum entre os estudantes: o fato de darem mais atenção a se o problema está correto do que à coerência dos procedimentos utilizados para resolvê-lo. O Prof. Pesq. deixa claro que está mais interessado em saber se eles compreenderam o problema, e se conhecem as etapas necessárias para resolvê-lo, do que na resposta final. Corroborando com isso, Onuchic (2015, p. 973) afirma que

> Na Resolução de Problemas, o foco não está na resposta ou na solução do problema, mas sim nos pensamentos produzidos e engendrados pelos conceitos e princípios que possam destacar a resolução do problema que se pretende estudar e avançar nos meios, e não simplesmente nos fins.

O Prof. Pesq. manteve o seguinte diálogo com o Grupo 03:

[Diálogo com o Grupo 03]
(1) **A_3G_3**: Essas 15 horas aqui, as 10h já estão dentro dela?
(2) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo.
(3) **A_1G_3**: No caso só passou 5 horas?
(4) **Prof. Pesq.**: 5 horas e...?
(5) **A_1G_3**: 17 minutos.
(6) **Prof. Pesq.**: Aí vocês vão fazer o quê com esse tempo que passou das 10 horas?
(7) **A_1G_3**: Dividir por 5?
(8) **Prof. Pesq.**: Por quê dividir por 5?
(9) **A_1G_3**: Porque passou 5 horas e 17 minutos, né? Aí divide por 17 e... *(pausa longa)*
(10) **Prof. Pesq.**: Vamos ver aqui: no mês de fevereiro Geni usou o telefone por 9 horas e 55 minutos. Quanto ela irá pagar nesse mês?
(11) **A_1G_3**: Os R$ 18,00.
(12) **A_3G_3**: Mas ela não usou nem as 10 horas, falta... 5 minutos.
(13) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Até as 10 horas, ela vai pagar quanto?
(14) **A_1G_3**: Os R$ 18,00.
(15) **Prof. Pesq.**: Então... No mês de fevereiro vocês descobriram que ela vai pagar R$ 18,00. E no mês de janeiro, quanto ela irá pagar?

(16) **A_1G_3**: R$ 5,17... Mais os R$ 18,00.
(17) **Prof. Pesq.**: R$ 18,00 pelas 10 horas...
(18) **A_1G_3**: E os minutos aqui.
(19) **Prof. Pesq.**: Exatamente. O que a gente vai fazer com essas 5 horas e 17 minutos?
(20) **A_1G_3**: A pessoa dividindo ele e depois...
(21) **A_2G_3**: 5 horas é 300 minutos.
(22) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Então 5 horas e 17 minutos são quantos minutos?
(23) **A_2G_3**: 317 minutos.
(24) **Prof. Pesq.**: Agora leiam a terceira condição.

Procurou-se esclarecer algumas informações ao grupo, já que os componentes não haviam compreendido totalmente o problema. O aluno A_1G_3, aparentemente, percebeu que deveria converter o tempo de 5 horas e 17 minutos em minutos, mas não soube como; as falas (7) e (9) evidenciam isso. Além disso, ele ainda associou esse tempo excedente ao valor de R$ 5,17 (fala (16)). Foi o estudante A_2G_3, que até o momento está apenas observando a discussão, quem primeiro fez a conversão corretamente. Na leitura da terceira condição do plano, o grupo percebeu que deveria multiplicar os 317 minutos excedentes por 0,03. O Prof. Pesq. se afasta do grupo nesse momento.

Em seguida, o Prof. Pesq. retornou ao Grupo 04:

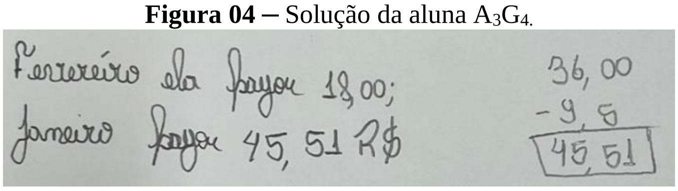
[Diálogo com o Grupo 04 – parte 02]
(1) **A_1G_4**: Por onde é que começa isso, pelo amor de Deus?!
(2) **Prof. Pesq.**: Vocês acham que é mais fácil descobrir quanto Geni irá pagar no mês de janeiro ou fevereiro?
(3) **A_3G_4**: Em janeiro.
(4) **Prof. Pesq.**: Então vamos descobrir o de janeiro. Nesse mês, Geni usou o telefone por 15 horas e 17 minutos. Quanto ela irá pagar pelas 10 primeiras horas?
(Pausa)
(5) **A_3G_4**: R$ 18,00.
(6) **Prof. Pesq.**: Exato. Nesse mês de janeiro, quantas horas passou das 10?
(7) **A_3G_4**: Ai, sei não! Sou péssima em matemática!
(8) **Prof. Pesq.**: Quanto é 15 horas e 17 minutos menos 10 horas?
(Pausa longa)
(9) **A_3G_4**: 5 horas e 17 minutos?
(10) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. O que podemos fazer agora? Usar o telefone por 5 horas e 17 minutos a mais que as 10 horas, equivale a pagar quantos reais a mais que os R$ 18,00, sendo que cada minuto excedente custa R$ 0,03?
(11) **A_1G_4**: Dá cento e pouco, né?
Nesse momento, um dos alunos do Grupo 02 questiona ao Prof. Pesq. quantas aulas ele irá ministrar. Depois de respondê-lo, o Prof. Pesq. continua a discussão:
(12) **Prof. Pesq.**: Vamos pensar de outra forma? Em fevereiro, quanto Geni irá pagar? Ela usou o telefone por mais ou menos tempo que as 10 horas?
(13) **A_3G_4**: Menos?
(14) **Prof. Pesq.**: Exatamente. Então quanto ela irá pagar nesse mês?
(15) **A_3G_4**: Os R$ 18,00.
(16) **Prof. Pesq.**: Isso. Vocês notaram que foi mais fácil de encontrar o valor a ser pago por Geni em fevereiro?
O grupo confirma com a cabeça.
Em seguida, o Prof. Pesq. pede para o grupo fazer um resumo sobre os resultados em que chegaram. No final, questiona:

(17) **Prof. Pesq.**: O valor que Geni irá pagar juntando os dois meses é menor ou maior do que R$ 36,00?
(Pausa longa)
(18) **A_3G_4**: Maior.
(19) **Prof. Pesq.**: Por quê?
(20) **A_3G_4**: Porque já tem os dois de R$ 18,00.

A resposta ao questionamento emitido na fala (2) deixa claro que o grupo ainda não havia compreendido totalmente o problema. Além disso, o questionamento proposto na fala (10), analisado agora numa perspectiva posterior, ficou carregado de informações que possivelmente dificultaram o entendimento do que se deveria fazer para resolver o problema. A estimativa da discente A_1G_4, numa tentativa de resposta a tal questionamento, corrobora com isso, já que destoa bastante da resposta esperada: R$ 9,51. Apesar disso, o grupo ainda chegou à conclusão de que dois valores de R$ 18,00 necessariamente devem constar nas faturas dos meses de janeiro e fevereiro.

O grupo não conseguiu avançar mais do que isso. A Figura 04, a seguir, mostra a solução de um dos membros do grupo, obtida após as discussões entre os grupos. Nota-se que, ainda assim, falta coerência na solução: a subtração deveria ser uma soma (R$ 9,51) e o valor descrito para o mês de janeiro corresponde, na verdade, ao valor total dos dois meses referenciados.

Figura 04 – Solução da aluna A_3G_4.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Quanto aos demais grupos, o Grupo 01 não solicitou ajuda na resolução do problema e os Grupos 02 e 07 apresentaram abordagens muito semelhantes aos demais grupos.

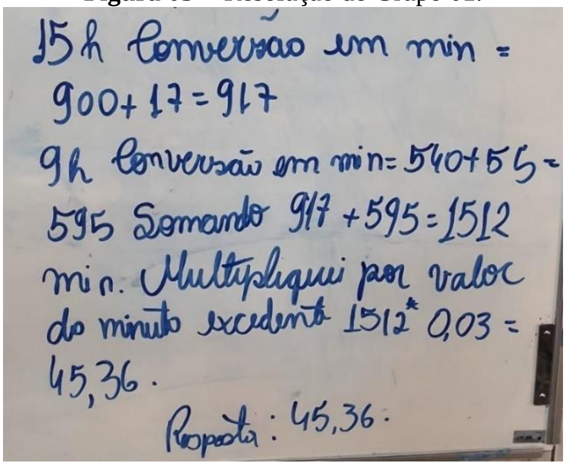
Após os oito grupos finalizarem a resolução do problema, o Prof. Pesq. solicita que cada grupo eleja um representante para que ele possa ir ao quadro branco registrar a sua solução (**etapa 06**). Segundo Onuchic (2015, p. 972), esse é um momento "muito importante para a aprendizagem, no qual os estudantes apresentaram suas resoluções para discussão e para fomentar a formalização dos conceitos matemáticos almejados para o problema".

Após alguma resistência, conseguimos que três grupos cumprissem tal tarefa. Dos outros cinco, dois não elegeram representantes e os outros três grupos apresentaram soluções semelhantes às três primeiras.

Além disso, houve um estranhamento da maior parte dos alunos em assumir (ou verem seus colegas assumirem) uma postura ativa em relação à apresentação da solução do problema. Alguns questionaram se valia nota, se havia a necessidade de explicar o cálculo, ou se tinha que escrever o passo a passo da resolução. Outros, no momento em que as resoluções eram apresentadas, começaram a apagar as suas próprias e escrever as do quadro. O Prof. Pesq., nesse momento, chamou a atenção da turma para o fato de que toda resolução (correta ou incorreta) era relevante; além de pedir que os discentes não modificassem as suas resoluções. Para tranquilizá-los, explicou que iria construir junto com a turma a "solução oficial".

As Figuras 05, 06 e 07 apresentam, respectivamente, os registros das resoluções dos Grupos 01, 05 e 08:

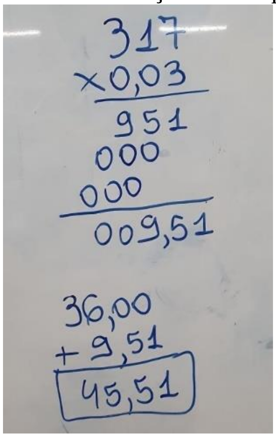
Figura 05 – Resolução do Grupo 01.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Nesta solução, o grupo não considerou todos os dados contidos no problema. Nota-se que os discentes inferiram que Geni pagaria R$ 0,03 por cada minuto passado ao telefone, desprezando a tarifa fixa de R$ 18,00 pelo uso (ou não) das 10 horas. Apesar disso, observa-se na solução que o grupo procurou justificar cada etapa alcançada. O uso da linguagem corrente, auxiliada pelas técnicas operatórias, foi bem construída.

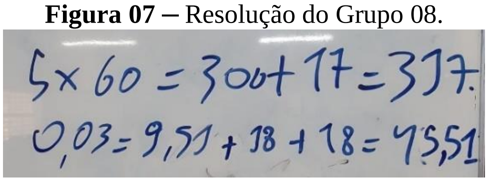
Figura 06 – Resolução do Grupo 05.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Esse grupo conseguiu chegar na resposta correta, apesar de não justificar na resolução alguns passos como, por exemplo, o valor 317 e o valor 36,00. Apesar disso, na discussão com o grupo nas etapas 05 e 06 da Metodologia, uma das integrantes do grupo apresentou verbalmente e com clareza todos os procedimentos construídos ao longo da solução (Diálogo com o Grupo 05, fala (5)). Isso indica que pode existir uma perda, no ato de se resolver um problema, quando se passa da linguagem falada para a linguagem escrita. Indo um pouco além, quando se passa do estabelecimento de um plano para a execução dele.

Figura 07 – Resolução do Grupo 08.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Este grupo apresentou a solução final do problema corretamente, inclusive justificando a conversão das 5 horas e 17 minutos em minutos. Contudo, as operações aritméticas são manipuladas como se fosse uma única expressão, além do uso repetitivo do sinal de igualdade para representar termos distintos.

De forma geral, a grande maioria dos grupos apresentaram soluções semelhantes à prevista na nossa Sequência Didática; faltando, apenas, um uso mais frequente da linguagem escrita e conectivos lógicos que poderiam tornar as soluções mais claras e coerentes.

Após o registro das resoluções na lousa, iniciou-se a plenária (**etapa 07**). Essa etapa favorece a avaliação dos discentes, principalmente no que se refere ao sentido que eles atribuem aos conceitos trabalhados. Além disso, ela possibilita a socialização de diferentes processos de resolução e a validação (ou não) dos mesmos (Pironel; Vallilo, 2017). Ainda segundo tais autores, “esse momento favorece tanto a coavaliação quanto a autoavaliação dos alunos e é fonte de evidências para a avaliação da aprendizagem dos alunos pelo professor e de uma reflexão sobre sua prática docente, culminando na possibilidade de uma meta-avaliação” (Pironel; Vallilo, 2017, p. 296-297).

> **[Diálogo com a turma]**
> *O Prof. Pesq. lê novamente o problema, destacando as informações relevantes.*
> (1) **Prof. Pesq.**: Vamos analisar as três condições do problema. O que significa essa “tarifa mensal fixa de R$ 18,00”?
> (2) **A_4G_2**: É o valor constante.
> (3) **Prof. Pesq.:** Isso mesmo. Independentemente de Geni usar ou não o plano, qual é o valor mínimo que ela irá pagar por mês?
> (4) **A_4G_2**: R$ 18,00.
> (5) **Prof. Pesq.:** Se Geni usar o telefone por 3 horas durante o mês, quanto ela irá pagar?
> (6) **Alunos**: R$ 18,00.
> (7) **Prof. Pesq.:** E se ela usar o telefone por 9 horas?
> (8) **Alunos**: R$ 18,00.
> (9) **Prof. Pesq.:** E se ela usar o telefone por uma quantidade de tempo maior que 10 horas mensais, quanto ela irá pagar?
> (10) **A_4G_2**: R$ 0,03 por cada minuto que passar das 10 horas, mais os R$ 18,00.

Tais questionamentos e os seguintes estavam previstos na nossa Sequência Didática. O Prof. Pesq. continua a leitura do problema. Ao término dela, expõe as três soluções apresentadas, procurando valorizá-las o máximo possível. É solicitado que os representantes justifiquem algumas informações que não ficaram explícitas como, por exemplo, como se chegou ao número 317, e dado espaço para questionamentos dos demais grupos. Analisou-se, também, a consistência das soluções, perguntando-se qual seria o valor mínimo que Geni iria pagar nos dois meses (R$ 36,00) e verificando que todas as três respostas apresentavam valores superiores a esse. Deu-se, portanto, destaque a essa condição necessária (mas não suficiente) para confirmação da resposta.

Além disso, como o problema já havia sido bastante discutido no processo de resolução em grupo, este momento não apresentou maiores desdobramentos. Após alguns ajustes, foi selecionada a resolução do Grupo 05, acrescida do cálculo de conversão das 5h e 17min proposta pelo Grupo 08 e da escrita desenvolvida pelo Grupo 01, com as devidas correções com relação às notações matemáticas e às de natureza ortográfica, respectivamente (**etapa 08**). De acordo com Gonçalves e Allevato (2018),

> é fundamental que o professor tenha domínio do conteúdo matemático, e que, a partir das resoluções apresentadas pelos alunos, promova a reflexão sobre as resoluções dos alunos com a intenção de introduzir novos conceitos e ideias matemáticas e de promover uma aprendizagem significativa. (Gonçalves; Allevato, 2018, p. 43).

Finalmente, passou-se à formalização do conteúdo (**etapa 09**). Segundo Pereira (2004, p. 246), nessa fase,

> o professor, na lousa, formaliza os novos conceitos criados, sintetizando o que se objetivava aprender a partir do problema dado. São colocadas, quando necessário, as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações, usando a terminologia e a notação corretas relativas ao tópico trabalhado.

O foco, nessa etapa, é procurar desenvolver a noção intuitiva do conceito de função. Segundo Ponte (1990) *apud* Souza e Souza (2019, p. 15),

> Na matemática escolar, o apelo intuitivo é geralmente esquecido. A preocupação principal acaba sendo a introdução de muita terminologia abstrata que, por não ser usada como ferramenta prática para lidar com situações interessantes, acaba constituindo um vocabulário que meramente se memoriza sem se compreender nem se valorizar.

A partir disso, apresentamos a seguinte discussão:

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: A noção de função aparece quando nós conseguimos relacionar duas grandezas variáveis *(Observação 1 da Sequência Didática)*. Nesse problema, nós temos duas grandezas. Quais são?
> *(Silêncio)*
> (2) **Prof. Pesq.**: O tempo que Geni passou ao telefone. E qual seria a segunda?
> (3) **A_3G_7**: O dinheiro.
> (4) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. O valor a ser pago por esse tempo.
> *(Depois de um intervalo de tempo, prossegue).*
> (5) **Prof. Pesq.**: Qual seria, então, a incógnita do problema? Isto é, o que o problema quer que a gente encontre?
> (6) **A_4G_2**: Quanto ela vai pagar nos dois meses.
> (7) **Prof. Pesq.**: E quais são os dados?
> *Alguns discentes apontam as três condições do plano e o tempo que Geni passou ao telefone nos meses de janeiro e fevereiro.*
> (8) **Prof. Pesq.**: Existe uma relação de dependência entre as duas grandezas apresentadas (tempo e dinheiro). Quem depende de quem?
> (9) **A_4G_2**: O dinheiro depende do tempo.
> (10) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Isso quer dizer que o valor que Geni irá pagar depende do tempo que ela passar ao telefone em determinado mês. Então, essa dependência, essa relação entre duas variáveis, é chamada de função.

O Prof. Pesq. iniciou a discussão conforme previa a Sequência Didática, descrita na nossa Análise *a Priori*, associando a noção de função como uma relação entre grandezas e, posteriormente, de dependência entre os valores de tais grandezas. Segundo Gabbi e Nehring (2021, p. 536), "considera-se que o entendimento de correspondência, relação, dependência e variação se estabelece como núcleo da compreensão do conceito função, pois apresenta as relações conceituais em que consiste o próprio conceito". No Problema Gerador 02 daremos mais destaque a esses termos.

Nesse momento, o Prof. Pesq. escreve no quadro a seguinte definição de função, de Dante e Viana (2020):

Definição: Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$** é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Nessas condições, usamos as seguintes notações:

$$f: A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$

Nos dois casos, lemos: f é uma função de A em B.

Após ler a definição para a turma e fazer uma breve revisão sobre Conjuntos, o Prof. Pesq. questiona:

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: A partir dessa definição, alguém poderia me dizer quem, no problema que acabamos de resolver, representa o conjunto A?
(2) **A_3G_7**: Seria os R$ 18,00, as 10 horas e os R$ 0,03?
O Prof. Pesq. lê novamente a definição e relembra da noção de dependência.
(3) **Prof. Pesq.**: O conjunto A será o nosso ponto de partida e o conjunto B será o nosso ponto de chegada. No problema anterior, nós destacamos duas variáveis: tempo e valor a ser pago. Vocês falaram que o valor a ser pago dependia do tempo usado no telefone. Então o meu conjunto de partida será o quê? Qual variável eu tenho de analisar primeiro?
(4) **A_3G_7**: O tempo.
(5) **Prof. Pesq.**: E o nosso conjunto de chegada?
(6) **Alguns alunos**: O dinheiro.
(7) **Prof. Pesq.:** Para cada tempo gasto ao telefone, Geni vai ter que pagar um valor em dinheiro, inclusive para o tempo 0.
O Prof. Pesq. lê novamente a definição.
(8) **Prof. Pesq.**: Então esse conjunto A (o nosso conjunto de partida) é formado por todos os valores de tempo possível para um mês. E o conjunto B (o nosso conjunto de chegada) é formado por todos os valores em dinheiro possível para um mês. Para cada elemento do conjunto A (tempo gasto ao telefone) vai ter que existir um único valor a ser pago (conjunto B).
Após uma pausa para pedir silêncio à turma, o Prof. Pesq. continua:
(9) **Prof. Pesq.**: Para cada tempo passado ao telefone existirá um valor a ser pago?
(10) **Alguns alunos**: Sim.
(11) **Prof. Pesq.**: Para cada tempo passado ao telefone existirá um único valor a ser pago?
(12) **Alguns alunos**: Sim.
(13) **Prof. Pesq.**: Pode algum valor em tempo está associado a dois ou mais valores em reais?
(14) **Alguns alunos**: Não.
(15) **Prof. Pesq.**: Muito bem. Não faria sentido, por exemplo, num mês em que Geni passe 8 horas ao telefone ela pagar R$ 18,00 ou R$ 25,00. *(Continua).* Pode dois valores de tempo está associado a um mesmo valor em reais?
Esse questionamento causou bastante dúvida. Os alunos ficaram divididos.
(16) **Prof. Pesq.**: Se Geni passar 8 horas ao telefone, quanto ela irá pagar?
(17) **Alguns alunos**: R$ 18,00.

(18) **Prof. Pesq.**: Se Geni passar 5 horas ao telefone, quanto ela irá pagar?
(19) **Alguns alunos**: R$ 18,00.
(20) **Prof. Pesq.**: Então pode dois valores de tempo estarem associados a um mesmo valor em reais?
(21) **Alguns alunos**: Sim.
(22) **Prof. Pesq.**: Para cada valor em dinheiro existirá um tempo passado ao telefone?
Silêncio.
O professor destaca que para cada tempo passado ao telefone existirá um valor a ser pago, conforme os discentes confirmaram em questionamento anterior (9 e 10). Em seguida, volta a repetir a pergunta (22).
O silêncio se mantém. Após um tempo, um aluno responde:
(23) **A_4G_2**: Não.
(24) **Prof. Pesq.**: Por quê?
Silêncio.
(25) **Prof. Pesq.**: O conjunto B (o de chegada) não é formado por todos os valores em reais?
(26) **Alguns alunos**: Sim.
(25) **Prof. Pesq.**: Então, por exemplo, R$ 10,00 está associado a qual valor de tempo passado ao telefone, que é o conjunto A?
(26) **A_4G_2**: A nenhum.
O Prof. Pesq. concorda, justificando com a condição 1 do problema.
(27) **Prof. Pesq.**: Então pode existir valores de B que não estão associados a valores de A?
(28) **Alguns alunos**: Sim.

Em seguida, o Prof. Pesq. escreve no quadro as duas condições que uma relação precisa respeitar para que ela seja uma relação de função, conforme Dante e Viana (2020):

- Todo elemento do primeiro conjunto tem um correspondente no segundo conjunto;
- Cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento no segundo conjunto.

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Notem que essas duas condições resumem o que a gente acabou de discutir: 1) Todo tempo passado ao telefone corresponde a um valor a ser pago por Geni. 2) Cada tempo passado ao telefone corresponde a um único valor a ser pago por Geni. *(Pausa)*. Notem também que isso garante que não pode existir tempo gasto ao telefone que não esteja associado a um valor a ser pago, e que também um tempo gasto ao telefone não pode estar associado a dois ou mais valores a serem pagos.

Sobre a noção de correspondência, Reis (2017, p. 134) diz que

> No processo de aprendizagem do aluno, a proposta de ensino encaminhada pelo professor deve explorar a conexão essencial do conceito – no caso de função, a correspondência. É por essa conexão essencial que os significados de dependência, relação e variação adquirem sentido no processo de análise e síntese.

A formalização do conteúdo ocorreu de forma semelhante à prevista na nossa Sequência Didática. Dos questionamentos lá apresentados, apenas o referente a "gratuidade" nas 10 horas de ligação por mês não foi evidenciado. Contudo, compreendemos que a ausência de tal discussão não comprometeu a apresentação da definição da função nem das observações decorrentes dela. Os discentes conseguiram, em sua maioria, resolver o problema, e a penúltima etapa da nossa Metodologia permitiu que eles retornassem ao enunciado e enxergassem a relação funcional lá contida. Além disso, os discentes passaram, sempre que solicitados, nos problemas seguintes, a enunciar o conceito apresentado e as duas condições necessárias para que uma relação seja considerada uma relação de função.

Após a formalização, passou-se à proposição e resolução de novos problemas (**etapa 10**) relacionados ao conteúdo noção intuitiva de função. Tal proposição possibilita verificar se os conceitos anteriormente apresentados foram compreendidos, bem como aprofundá-los.

Foram propostos os três problemas adicionais a seguir, seguidos de breves resumos das respectivas discussões empreendidas.

PROBLEMA ADICIONAL 01

(Fábricas e máquinas) Atualmente, várias fábricas têm máquinas que possibilitam a criação de diferentes produtos a custos acessíveis a uma parcela maior da população. Essas máquinas, que também podem ser robôs, são programadas para realizar tarefas específicas. Considere que em uma fábrica existe uma máquina que realiza alguns procedimentos e transforma parte da fruta em purê e parte em suco.

a) Ao colocar uma laranja na máquina, qual será o produto final?

b) Ao colocar uma maçã na máquina, qual será o produto final?

c) Converse com um colega sobre quais seriam os processos necessários para a máquina fazer essa transformação.

(Dante; Viana, 2020, p. 12)

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Levem em consideração o que a gente acabou de discutir. Função é uma relação entre duas grandezas variáveis. Todo elemento do primeiro conjunto tem um correspondente no segundo conjunto. Cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento no segundo conjunto.
O Prof. Pesq. lê o problema.
(2) **Prof. Pesq.**: No problema em questão nós temos a grandeza *fruta*, que a gente vai colocar dentro da máquina, que é o nosso conjunto de partida (conjunto A). Nós temos também a *máquina*, que representa a função, a transformação a ser realizada na fruta. E nós temos o produto final, que será purê e suco da fruta correspondente (conjunto B). Percebam que para toda fruta que eu coloque dentro da máquina irá existir purê e suco associados a ela (Todo elemento de A tem um correspondente B). Se eu coloco uma fruta não pode não sair suco ou purê. E também que se saiu purê e suco, alguma fruta obrigatoriamente deve ter sido inserida na máquina. *(Pausa)*. Notem também que uma fruta não pode gerar purê e suco com sabores distintos do sabor dela. (Cada

> elemento do conjunto A corresponde a um único elemento no conjunto B). Por exemplo, não existe a possibilidade de inserirmos uma maçã e sair suco e purê de maçã e de jaca.
> *Em dado momento, o aluno A_4G_2 questiona:*
> (3) **A_4G_2**: Se eu tivesse que encontrar uma expressão de cálculo *(compreendemos que, nesse questionamento, o discente já procura relacionar a função com sua respectiva lei de formação)*, eu poderia afirmar que a máquina produz ½ de suco e ½ de purê?
> *O Prof. Pesq. responde que do enunciado do problema não poderíamos garantir isso, mas que seria bastante razoável supor que isso acontecesse*[48].

Os discentes respondem corretamente aos itens a), b) e c). Neste último, são apontados termos como *espremer*, *triturar, amassar, misturar, retirar os caroços* etc.

PROBLEMA ADICIONAL 02

(Dose de medicamentos) Muitos medicamentos líquidos são administrados em gotas de maneira que, para crianças, a quantidade de gotas é calculada de acordo com a medida de massa[49]. Isso ocorre porque os órgãos das crianças ainda estão em desenvolvimento e, por isso, é necessário recomendar doses mais específicas. Essas recomendações costumam ser dadas para crianças com até 30 kg de medida de massa; depois disso a dosagem costuma ser única para qualquer pessoa.

Dessa maneira, quanto maior a medida de massa de uma criança, maior deve ser a quantidade de medicação administrada a ela. Assim, podemos dizer que a quantidade de gotas de um remédio é dada em função da medida de massa da criança.

Considere que a bula de um remédio antitérmico recomende que a dosagem seja de 2 gotas para cada quilograma de massa da criança.

a) Qual deve ser a quantidade de gotas desse medicamento que uma criança de 5 kg deve tomar? E uma criança de 10 kg?

b) Qual operação matemática você utilizou para calcular a resposta do item anterior?

c) Escreva no caderno uma relação que indique como uma pessoa pode calcular a dosagem desse remédio, em gotas, a partir da medida de massa da criança, em quilogramas.

(Dante; Viana, 2020, p.12)

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: Notem que existe uma relação de função entre a massa da criança (conjunto de entrada, conjunto A) e a quantidade de medicamento que ela irá tomar (conjunto de chegada, conjunto B). Lembrem também das duas condições para uma relação ser considerada uma relação de função.
> *Alguns alunos falam em voz alta as duas condições.*

---

[48] Analisada a resposta do Prof. Pesq. em momento posterior, percebe-se que o mesmo poderia ter aproveitado a ocasião para afirmar que nem toda função é numérica.
[49] Em se tratando da contextualização do problema, o termo mais indicado seria *peso*.

(2) **Prof. Pesq.**: Existe alguma massa para o qual não se aplique uma quantidade de remédio?
(3) **A_4G_2**: A massa 0 kg.
(4) **Prof. Pesq.**: Existe alguma criança com massa 0 kg?
(5) **A_4G_2**: Não.
(6) **Prof. Pesq.**: Devemos considerar o contexto do problema. *(Pausa)*. Então para cada massa da criança vai existir uma quantidade de medicamento associada. Além disso, uma massa não pode estar associada a duas ou mais quantidades de medicamento.

Os discentes respondem corretamente aos itens a), b) e c).

PROBLEMA ADICIONAL 03

(Combustível em automóveis) Um automóvel pode percorrer determinada distância de acordo com a quantidade de combustível que há no tanque dele. A autonomia (medida de distância máxima percorrida utilizando um tanque cheio de combustível) é dada, entre outros fatores, em função da quantidade de litros de combustível existente no tanque.

Suponha que determinado veículo percorra 12 km com 1 litro de combustível e nenhum outro fator interfira na autonomia.

a) Sabendo que no tanque há 45 litros de combustível, qual será, aproximadamente[50], a medida de distância máxima que ele poderá percorrer sem precisar reabastecer?

b) Qual foi a operação matemática que você utilizou para responder ao item anterior?

c) Considerando que esse veículo tem x litros de combustível no tanque, qual expressão indica a medida de distância máxima, em quilômetros, que pode ser percorrida sem necessidade de reabastecimento?

(Dante; Viana, 2020, p. 13)

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Nesse problema também temos uma relação de função. A quantidade de combustível no tanque está relacionada ao total máximo de quilômetros que o carro irá percorrer. Notem que qualquer quantidade de combustível está associada a uma quilometragem máxima. Notem também que não pode existir duas ou mais quilometragens máximas associadas a uma mesma quantidade de combustível. Ou seja, cada quantidade de combustível está associada a uma única quilometragem máxima. Apareceram nossas duas condições novamente.

Os discentes respondem corretamente aos itens a), b) e c).

[50] Sendo que o carro percorre 12km com 1 litro de combustível, a expressão “aproximadamente” deveria ser descartada, uma vez que o valor obtido pela multiplicação 45×12 é exato.

Os problemas adicionais 02 e 03, nos seus respectivos itens c), ainda possibilitaram apresentar expressões algébricas associadas às situações-problema. Isso auxiliará no desenvolvimento da lei de formação de uma função, introduzida pelo Problema Gerador 02.

O Prof. Pesq. encerra a aula relembrando os problemas apresentados e destacando que todos são problemas que representam situações do dia a dia que podem ser modeladas por funções.

7.3 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO E *FEEDBACKS*

Dos 25 estudantes participantes da pesquisa, 23 responderam ao questionário nas suas versões pré-intervenção e pós-intervenção. Como apresentado na seção *Análise a priori*, ele consistia em 26 itens objetivos, dispostos em escala Likert com as seguintes variações: discordo muito, discordo, indiferente, concordo e concordo muito. Na nossa análise, atribuímos os números 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, a cada umas das variações.

Sendo assim, o valor associado a cada item poderia variar de 23 pontos a 115 pontos, em situações em que todos os alunos marcassem "discordo muito" ou "concordo muito" em determinado item, respectivamente.

Além disso, o questionário foi dividido em três partes:

- Parte 01: Características pessoais frente à resolução de um problema, que se configura na predisposição dos discentes para resolver um problema (itens de 01 a 12).
- Parte 02: Características táticas ao resolver um problema, que diz respeito ao que o discente geralmente faz quando está resolvendo um problema (itens de 13 a 18).
- Parte 03: Características reguladoras sobre a resolução de problemas, que está relacionado à importância que os discentes atribuem às etapas de resolução de problemas (itens de 19 a 26).

A Tabela 13, a seguir, apresenta as assertivas presentes no questionário e suas respectivas pontuações pré-intervenção e pós-intervenção:

Tabela 13 – Assertivas do questionário e suas pontuações pré-intervenção e pós-intervenção.

Assertivas	Pré-intervenção	Pós-intervenção
1. O fato de ser observado ao resolver um problema não afeta negativamente o meu comportamento.	57	76
2. Gosto de resolver problemas.	54	61
3. Prefiro resolver um problema em grupo a resolvê-lo sozinho.	92	105
4. Solicito ajuda quando não consigo resolver um problema.	100	100
5. Prefiro resolver um problema a resolver um exercício.	66	74
6. Sinto-me entusiasmado diante de um problema, mesmo que não encontre uma solução.	52	64
7. Tenho confiança em minhas possibilidades de resolver um problema.	71	77
8. Quando o problema é de um conteúdo que não tenho tanta intimidade, fico mais atento e tento procedimentos alternativos.	85	83
9. Geralmente, consigo resolver um problema com facilidade.	44	44
10. Tenho uma boa memória para fórmulas, conceitos e teoremas matemáticos.	56	49
11. Conheço alguns métodos de resolução de problemas.	67	70
12. Considero a memorização de fórmulas, conceitos, teoremas úteis, mas sou capaz de resolver problemas sem depender exclusivamente disso.	53	63
13. Geralmente consigo compreender bem o problema, o que faz com que eu tenha esperança de sucesso no planejamento da resolução.	55	60
14. Ao resolver um problema, o planejamento que faço é bem estruturado, relevante e útil para a solução.	66	84
15. A resolução de um problema condiz com o que eu geralmente planejo, podendo ter apenas alguns pequenos erros de cálculo que dificilmente reduz sua eficácia.	71	76
16. Costumo revisar os cálculos durante todo o processo de resolução de um problema.	70	76
17. Após obter uma solução, tento chegar ao resultado de outra maneira.	36	45
18. Ao resolver um problema, em meus cálculos observam-se constantemente clareza e coerência.	79	66
19. Tenho consciência de que é importante investir um tempo na compreensão de um problema e que não se deve passar para a próxima fase até que se tenha conseguido.	96	94
20. Considero que a resolução de um problema pode depender em grande parte de um bom planejamento, devendo-se atribuir-lhe importância e pensar que se deve voltar a ele sempre que necessitar.	99	98
21. Quando se resolve um problema, considero que a explicação do que se está fazendo deve ser clara, esclarecendo as razões porque se está dando destaque a algum procedimento, o que se fará com esse resultado inicial e o que se está fazendo exatamente.	103	103
22. Ao se resolver um problema, considero importante que o processo seja totalmente coerente e esteja organizado; cada etapa deve ser revisada, inclusive a resposta final.	101	93
23. A existência de um prazo determinado de tempo para resolver um problema não produz estresse ou ansiedade, pois cada fase da resolução precisa de certo investimento de tempo.	53	39
24. É importante obter resultados significativos dentro do prazo, ainda que isso suponha deixar alguma justificativa sem tanta importância para o final.	90	88
25. Acredito que se deve conhecer um bom repertório de estratégias de Resolução de Problemas; além de ser consciente do papel que desempenham em uma boa resolução.	104	94

26. Penso que qualquer resolução de um problema pode ser influenciada por variáveis externas (afetivas, sociais etc.).	97	95

Fonte: O autor (2023).

Na pré-intervenção, o item com menor pontuação foi o 17, com uma pontuação de 36 pontos; algo já esperado, uma vez que se constitui numa ação que muitas vezes não é executada nem pelos docentes. Em seguida, temos o item 09, com 44 pontos. As respectivas médias foram de 1,57 e 1,91, isso indica que a maioria das marcações foram em "discordo muito" ou "discordo".

O item com maior pontuação foi o 25, com 104 pontos. Em seguida, temos o item 21, com 103 pontos. As respectivas médias foram de 4,52 e 4,48, indicando que as marcações se concentram em "concordo" ou "concordo muito".

Além disso, quando se analisa na pré-intervenção a pontuação dos itens agrupados em cada uma das partes, nota-se que a Parte 03 foi a que mais se destacou, obtendo uma média de 92,88 pontos na soma das respostas dos alunos à cada item, isso indica que a maioria dos discentes "concordaram" ou "concordaram muito" com as assertivas. Dos oito itens que constituem o grupo, apenas o de número 23 possui pontuação inferior a 90, sendo ela 53. Destaca-se que esse grupo se refere a afirmações sobre o que os discentes consideram relevantes no processo de resolução de problemas e não, necessariamente, ao que eles fazem ao resolver um problema. Apesar disso, o resultado obtido mostra que eles têm consciência da relevância dessa metodologia de ensino.

A Parte 01 foi a segunda no quesito das pontuações, apresentando uma média de 66,42 pontos. Sendo assim, em média, os discentes "discordam" ou são "indiferentes" aos itens. Apesar disso, o item 04 foi o que apresentou a maior pontuação: 100 pontos, mostrando que eles possuem a iniciativa de questionar ao docente ou aos colegas quando não compreendem bem determinado problema. Como mencionado anteriormente, eram itens referentes à predisposição dos estudantes para resolver um problema.

A Parte 02 apresentou uma pontuação média de 62,83 pontos e estava relacionada ao que os estudantes geralmente fazem ao resolver um problema, é nesse grupo que está contido o item com menor pontuação (o item 17), como mencionado anteriormente. O item 18, obteve 79 pontos, configurando-se como a maior pontuação dentro do grupo.

Já analisando a pós-intervenção, o item com menor pontuação foi o 23, perfazendo um total de 39 pontos. Em seguida, temos os itens 09 e 17, com um total de 44 e 45 pontos, respectivamente, indicando que os discentes majoritariamente "discordam" ou são "indiferentes" aos itens. Em relação aos itens que melhor pontuaram, temos os itens 03, 21 e

04, que somaram, respectivamente, 105, 103 e 100 pontos, indicando que a maioria dos discentes “concordam” ou “concordam muito” com as afirmações presentes nos itens.

Quando consideradas as partes separadamente, a ordem se manteve. A Parte 03 obteve uma pontuação média de 88, sendo que o item 23 influenciou consideravelmente na média, uma vez que todos os demais itens do grupo possuem pontuação igual ou superior ao valor dessa média. A Parte 01 obteve uma pontuação média de 72,17. Já a Parte 02 obteve uma pontuação média de 67,83.

No comparativo das respostas da pré-intervenção com as da pós-intervenção, nota-se que, dos 26 itens, 13 apresentaram uma pontuação melhor na reaplicação do questionário, 3 se mantiveram constantes e 10 apresentaram uma pontuação inferior. A Tabela 14, a seguir, traz a diferença entre as pontuações obtidas na pós-intervenção e na pré-intervenção:

Tabela 14 – Variação das pontuações dos itens.

Item	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**13**
Pré-intervenção	57	54	92	100	66	52	71	85	44	56	67	53	55
Pós-intervenção	76	61	105	100	74	64	77	83	44	49	70	63	60
Diferença	19	7	13	0	8	12	6	–2	0	–7	3	10	5
Item	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
Pré-intervenção	66	71	70	36	79	96	99	103	101	53	90	104	97
Pós-intervenção	84	76	76	45	66	94	98	103	93	39	88	94	95
Diferença	18	5	6	9	–13	–2	–1	0	–8	–14	– 2	–10	–2

Fonte: O autor (2023).

Observa-se, da tabela, que os itens que constituem a Parte 01 do questionário, em sua maioria, obtiveram uma melhor pontuação na aplicação pós-intervenção. Dos 12 itens, 8 apresentaram uma pontuação maior, 2 mantiveram-se constantes e 2 apresentaram pontuações menores. Isso indica que, na visão dos alunos, os mesmos aumentaram a predisposição para resolver problemas.

Além disso, o item 01 foi o que apresentou o aumento mais expressivo, de 19 pontos, o que pode indicar uma influência direta da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que mantém o discente em evidência durante todo o processo, seja durante a discussão do professor pesquisador com os grupos, seja durante as fases de registro das resoluções na lousa, plenária ou busca pelo consenso. A formação de grupos também apresentou uma boa aceitação dos discentes, uma vez que o item 03 teve um aumento de 13 pontos em relação à pré-intervenção. A metodologia ainda pode ter favorecido numa melhor motivação dos discentes para resolverem problemas, sem necessariamente estarem centrados exclusivamente na resposta final dos mesmos, conforme pode indicar o aumento de 12 pontos do item 06.

Destaca-se também que, dentro desse grupo, o item 10 foi o que apresentou a maior queda em relação à pré-intervenção, 7 pontos. Acredita-se que isso pode ser explicado também em termos da metodologia utilizada, uma vez que o problema era apresentado antes da formalização do conteúdo (etapas 01 e 09, respectivamente), não necessitando, muitas vezes, de fórmulas/teoremas para se chegar à solução. A própria natureza do que é um problema (resumida por este pesquisador através de duas características presentes no final da seção *O que é um problema?* desta tese: 1. Ausência de um procedimento que leve à certeza da solução; 2. A postura do aluno/resolvedor diante da questão.) corrobora também para isso, uma vez que o item 12 teve um aumento de 10 pontos.

Ainda na Parte 01 do questionário, observa-se que houve uma melhora no gosto dos discentes por resolver problemas, um aumento na atitude de resolver um problema a um exercício, um aumento na confiança em si mesmos para resolver um problema, além de uma modesta melhora quando se trata de conhecer métodos de resolução de problemas.

Em relação aos itens que englobam a Parte 02 do questionário, 5 dos 6 itens apresentaram uma melhora em relação à pré-intervenção, o que constitui uma provável evidência de que as atividades realizadas nos encontros impactaram positivamente no processo de resolução de problemas pelos discentes. Esse grupo possui itens diretamente relacionados às etapas de resolução de problemas propostas por Carrillo (1998) e Polya (2006), que foram valorizadas pela Metodologia empregada.

O item que apresentou o aumento mais expressivo foi o item 14, com 18 pontos, que trata da fase do planejamento/elaboração de um plano de resolução de um problema. O planejamento da solução geralmente era realizado pelas discussões colaborativas entre os componentes de um grupo, com pequenas interferências do professor. Em contraste, o item 18 foi o único, dentro do grupo, que apresentou uma queda na pontuação, de 13 pontos. O item trata da clareza e coerência na resolução do problema. Consideramos que tal pontuação possui relação com os momentos de registro das resoluções na lousa, plenária e, principalmente, a busca pelo consenso, em que, nas soluções, quase sempre era preciso detalhar ou esclarecer alguma informação, até se chegar nessa última etapa. Sendo assim, as pontuações podem indicar uma melhora na atitude dos discentes em considerar o planejamento bem estruturado e útil para a solução; contudo, a solução ainda apresenta alguns erros de notação e coerência entre as proposições, que podem ser corrigidos no momento da busca pelo consenso e, posteriormente, na formalização do conteúdo. Um dado que já é previsto na nossa Metodologia.

Além disso, houve também uma melhora de atitude dos discentes nas demais fases da resolução de problemas. A saber: compreensão do problema, com 5 pontos; execução do planejamento, com 5 pontos; e revisão, com 6 pontos. A busca por soluções alternativas também obteve uma pontuação superior na pós-intervenção, deixando de ser o item com menor pontuação.

Em se tratando da Parte 03 do questionário, dos 8 itens que o constituem, 1 item manteve a pontuação obtida na pré-intervenção e os demais apresentaram pontuações inferiores. O item 23 foi o que obteve a queda mais expressiva, com 14 pontos, indicando que o fator tempo ainda é considerado algo significativo pelos discentes ao se resolver um problema. Em seguida, temos o item 25, com 10 pontos. Esse item estava relacionado ao conhecimento de um bom repertório de Resolução de Problemas, o que de certa forma está de acordo com o que os discentes pontuaram nos itens 10 e 12 da Parte 01. Talvez o item que mais destoa em relação às Partes 1 e 2 da pós-intervenção, e também em relação à pré-intervenção, seja o de número 22, em que a soma das pontuações atribuídas pelos discentes foi 8 pontos menor. Era uma assertiva relacionada à importância atribuída à coerência e organização de cada uma das etapas de resolução de problemas. Uma possível justificativa pode caminhar na direção de que parte desses aspectos serem realizados pelo professor pesquisador em conjunto com a turma, nas etapas da busca pelo consenso e formalização do conteúdo, e não exclusivamente por cada discente.

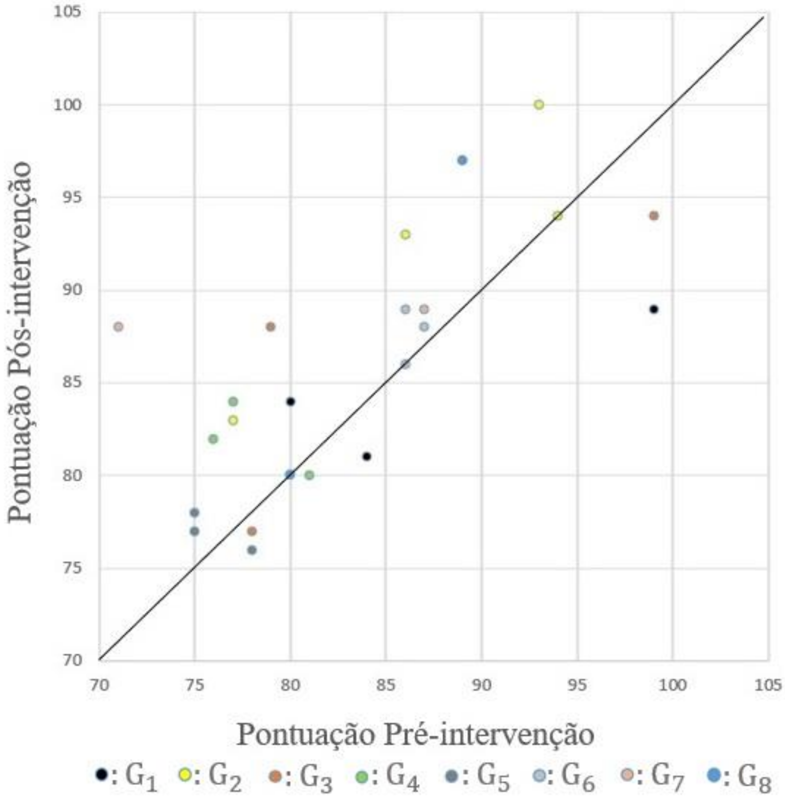
Além disso, os itens que constituem a Parte 03 do questionário estão relacionados à importância atribuída pelos discentes ao processo de resolução de problemas. Sendo assim, a queda nas pontuações desses itens talvez possa ser justificada por consistirem em assertivas que passaram a ser um pouco mais acessíveis aos discentes, já que nas partes 01 e 02 houve uma melhora na predisposição e atitude para se resolver problemas.

Visto de uma forma geral, acredita-se que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas parece ter influenciado positivamente na atitude dos discentes, desde o momento em que são confrontados com o problema, até no seu processo de resolução, sendo fortalecidos pela formação de grupos e discussão do professor pesquisador com a turma.

Procurou-se, ainda, analisar como se deram os desempenhos individuais de cada discente, numa escala de atitude. Sendo assim, o valor associado a cada discente poderia variar de 26 pontos a 130 pontos, em situações em que todos os itens fossem marcados como “discordo muito” ou “concordo muito” por determinado discente, respectivamente.

O Gráfico 03, a seguir, apresenta as pontuações obtidas por cada discente no somatório das suas respectivas respostas ao questionário, em suas versões pré-intervenção e pós-intervenção. Discentes representados por pontos de mesma cor fazem parte de um mesmo grupo:

Gráfico 03 – Pontuação de cada discente (Pré-intervenção e Pós-intervenção).



Fonte: O autor (2023).

No comparativo das pontuações da pré-intervenção com as da pós-intervenção, nota-se que 14 discentes aumentaram suas pontuações, 3 discentes as mantiveram constantes e 6 discentes pontuaram menos na pós-intervenção. Em relação às pontuações dos grupos, 7 dos 8 grupos apresentaram uma média maior na reaplicação do questionário.

Na pré-intervenção, a média das pontuações obtidas pelos discente foi de 83,35 pontos. O discente A_1G_7 foi o que apresentou a menor pontuação, com 71 pontos. Os discentes A_3G_1 e A_3G_3 foram os que apresentaram as maiores pontuações, ambos obtiveram 99 pontos. Quando se analisa os desempenhos dos grupos, temos as seguintes médias, em ordem crescente: Grupo 05, com 76 pontos; Grupo 04, com 78 pontos; Grupo 07, com 79 pontos; Grupo 08, com 84,5 pontos; Grupo 03, com 85,33 pontos; Grupo 06, com 86,33 pontos; Grupo 02, com 87,5 pontos e Grupo 01, com 87,67 pontos.

Na pós-intervenção, a média das pontuações obtidas pelos discente foi de 85,96 pontos. O discente que obteve a menor pontuação foi o A_1G_5, com 76 pontos. O discente A_4G_2, foi o que apresentou a maior pontuação, com 100 pontos. Em relação ao desempenho dos grupos, obtivemos as seguintes médias, em ordem crescente: Grupo 05, com 77 pontos; Grupo 04, com 82 pontos; Grupo 01, com 84,67 pontos; Grupo 03, com 86,33 pontos; Grupo 06, com 87,67 pontos; Grupos 07 e 08, ambos com 88,5 pontos; e Grupo 02, com 92,5 pontos.

A Tabela 15, a seguir, traz as pontuações obtidas na pré-intervenção e pós-intervenção e suas respectivas diferenças:

Tabela 15 – Variação das pontuações dos discentes[51].

Discente	A_1G_1	A_2G_1	A_3G_1	A_1G_2	A_2G_2	A_3G_2	A_4G_2	A_1G_3	A_2G_3	A_3G_3	A_1G_4	A_2G_4
Pré-intervenção	80	84	99	94	86	77	93	78	79	99	81	76
Pós-intervenção	84	81	89	94	93	83	100	77	88	94	80	82
Diferença	4	– 3	–10	0	7	6	7	–1	9	–5	–1	6
Discente	A_3G_4	A_1G_5	A_2G_5	A_3G_5	A_1G_6	A_2G_6	A_3G_6	A_1G_7	A_3G_7	A_1G_8	A_3G_8	
Pré-intervenção	77	78	75	75	86	87	86	71	87	89	80	
Pós-intervenção	84	76	78	77	89	88	86	88	89	97	80	
Diferença	7	–2	3	2	3	1	0	17	2	8	0	

Fonte: O autor (2023).

O discente que teve o aumento mais expressivo foi o A_1G_7, com 17 pontos. Foi o aluno que havia obtido a menor pontuação na pré-intervenção. De forma semelhante, o discente que obteve a maior queda na pontuação foi o A_3G_1, com 10 pontos, que havia sido um dos dois discentes que obteve a maior pontuação na pré-intervenção. Isso talvez possa indicar que o grau de envolvimento com as atividades previstas na Sequência Didática, por intermédio da nossa Metodologia empregada, tenha influenciado na atitude de tais discentes, uma vez que o discente A_1G_7 foi bastante participativo durante as aulas, enquanto o discente A_3G_1 foi mais contido e pouco interagiu nas discussões, como pode ser observado nos diálogos descritos nos encontros. O mesmo aconteceu com os discentes A_2G_3, A_3G_4 e A_4G_2, que também aumentaram suas respectivas pontuações.

Além disso, após a aplicação da pós-intervenção, o professor pesquisador ainda solicitou que os discentes comentassem brevemente sobre o que eles haviam achado das aulas de matemática no bimestre em curso, destacando os pontos positivos, negativos e possíveis

[51] Dos 25 discentes, 2 não responderam ao questionário em suas duas versões. A saber: os alunos A_2G_7 e A_2G_8.

sugestões. Questionou-se também sobre o que eles acharam do uso das questões da OBMEP nos problemas geradores.

A seguir, destacamos as respostas:

A_1G_1: Achei as aulas muito interessante, achei boa bem explicadas.

A_2G_1: As aulas desse bimestre foram ótimas. Entendi pouco o conteúdo mas com a ajuda do professor consegui aprender.

A_3G_1: Gostei bastante das aulas. Uso de questões da OBMEP foi fundamental para nossa aprendizagem.

A_1G_2: Foram boas, os problemas geradores me ajudou a desenvolver melhor o raciocínio, para resolver questões.

A_2G_2: Muito prestativo, pois além de nos ensinar, fomos preparados para possíveis olimpíadas.

A_3G_2: Eu achei ótimas, e só tem ponto positivo. Eu aprendi bastante mais não lembro de tudo.

A_4G_2: Foram ótimas aulas, embora não tenha havido toda a colaboração da turma, deu para aproveitar e aprender sobre o assunto. A constância de atividades e questões ajudaram a fixar melhor o assunto. Não houveram pontos negativos em minha opinião.

A_1G_3: Achei muito bom, aprendi bastante.

A_2G_3: Achei as aulas legais, o professor explica muito bem e sempre ajuda o aluno a fazer as atividades. E o uso das questões da OBMEP é algo muito importante.

A_3G_3: Muito legal.

A_1G_4: Ótima, só preciso prestar mais atenção...

A_2G_4: Foi bom.

A_3G_4: Sem comentário. Mas foi boa embora eu não sei de nada.

A_1G_5: Achei bom, questões que avaliam nosso conhecimento, claro que nem todas me agradaram, mas mesmo assim foi bom.

A_2G_5: Achei interessante, pois esses tipos de questões precisaremos no futuro, como no ENEM, por exemplo. O que não gostei muito, é que as resoluções das mesmas são bastante complexas dificultando o raciocínio. Uma ideia seria explicar melhor o passo a passo de uma maneira mais simples.

A_3G_5: O método utilizado nas aulas foi muito construtivo e não vejo nenhum ponto negativo, pois se não consegui absorver os assuntos, isso diz respeito apenas a mim que não aproveitei como deveria. Achei as questões da OBMEP uma maneira fácil de introduzir o assunto, pois o aluno podia responder do seu jeito e depois entender o método utilizado na função.

A_1G_6: Uma ótima explicação, o professor bem prestativo, tirava todas as dúvidas.

A_2G_6: Achei legal trabalhar com questões da OBMEP.

A_3G_6: Gostei bastante, principalmente os problemas geradores, onde os alunos pensam para responder. Apenas alguns barulhos que tiram a nossa concentração.

A_1G_7: Nos pontos positivos, muitas aulas bem explicadas, nos pontos negativos não tenho e, a minha sugestão é que o professor é uma ótima pessoa e que sabe explicar com dedicação e carinho a cada um e, sobre as questões da OBMEP, não entendi muito não.

A_2G_7: Os pontos positivos: a melhora na explicação e nas atividades. Teve contas que consegui entender mais ou menos as questões. Pontos negativos: as aulas ficaram mais cansativas e prolongadas e menos descontraídas.

A_3G_7: Explicação muito boa, questões legais de responder, que usava suas ideias ou o próprio conteúdo passado pelo professor para responder.

A_1G_8: Achei o máximo aprendi muitas coisas legais e foi o máximo.

A_2G_8: Gostei.

A_3G_8: Achei bem explicativa. Gostei do professor também. Conteúdo bem difíceis.

Também procurou-se ouvir o professor de Matemática da turma pesquisada, que acompanhou todos os encontros.

Quando questionado sobre o que havia achado das atividades realizadas, ele diz que os encontros foram dinâmicos, consistindo numa forma diferente de ensino que envolve a turma tanto individual quanto coletivamente. Apesar de não conhecer a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, ele pode inferir que a mesma desenvolve a autonomia dos alunos. Em se tratando do uso das questões da OBMEP como uma forma de introduzir conteúdos e conceitos matemáticos, comenta:

> Achei muito interessante, pois, mostrou ser um material motivante para os alunos e para mim. O seu objetivo foi alcançado, buscou desenvolver e despertar interesses que despertem o prazer de raciocinar, e acredito ter estimulado alguns alunos a participarem da OBMEP de forma mais prazerosa. [Depoimento do Professor de Matemática].

Ainda comenta que pensa em incorporar a sequência didática nas suas aulas porque, segundo ele, viu que a metodologia aplicada “contribui para o desenvolvimento dos alunos nos três principais pilares da Matemática que são: conceituação; manipulação e aplicações”. Os encontros ainda o levaram a focar mais em sua formação continuada, “a trabalhar com

Resolução de problemas e ter um olhar mais voltado para trabalhar com Questões da OBMEP". Ainda afirma que, após a aplicação da Sequência Didática, notou que os discentes que já gostavam de Matemática estão mais dedicados. E mesmo aqueles que desejam ingressar em cursos da área de Ciências Humanas pretendem se aprofundar mais em Matemática. Quando lhe é sugerido destacar algum ponto negativo ou crítica em relação às aulas ministradas, afirma: "não tenho pontos negativos ou críticas a fazer, pois, as aulas foram ministradas de forma dinâmica e com metodologias eficazes".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta tese foi o de analisar a viabilidade e o potencial de utilização das questões da OBMEP na aprendizagem de novos conteúdos e conceitos matemáticos relacionados ao tema função, por intermédio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Sendo assim, foi possível construir, utilizando problemas contidos nas provas e nos bancos de questões da OBMEP, uma Sequência Didática sobre o conteúdo Funções (Noções Gerais) coerente com os tópicos usualmente apresentados nos livros didáticos, e com um nível de dificuldade mediano. Os conteúdos trabalhados ao longo dos oito problemas geradores foram:

- Noção intuitiva de função;
- Definição formal de função;
- Domínio, contradomínio e imagem de uma função;
- Plano cartesiano;
- Gráfico de uma função;
- Zero de uma função;
- Crescimento e decrescimento de uma função;
- Função definida por mais de uma sentença.

Desses, consideramos que os dois primeiros são os que aparecem com mais frequência no material da olimpíada, inclusive nos três níveis que a OBMEP contempla, ainda que com mais destaque no último. Isso facilita a apresentação do conteúdo em questão, uma vez que são tópicos (em particular, o primeiro) introdutórios que podem ser ensinados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como recomenda a BNCC (2018). Além disso, acrescentando a noção de gráfico de função, tais tópicos permitem trabalhar as diferentes comunicações do conceito de função, como apregoa Santos e Barbosa (2017), sendo que o que aparece com mais frequência nas provas e bancos de questões é o de generalização.

O nosso levantamento inicial para a construção da Sequência Didática aplicada nesse estudo ainda possibilitou evidenciar que a OBMEP apresenta uma quantidade considerável de problemas sobre temas mais específicos de funções, como função afim e função quadrática, sendo esta última concentrada no nível 3. Sendo assim, se torna plausível utilizar os problemas contidos nessa olimpíada em sala de aula, de forma sistematizada e compatível com o nível da turma, como uma maneira de introduzir e/ou formalizar conteúdos e conceitos matemáticos, atribuindo um caráter utilitário a tais problemas para além da preparação para a olimpíada.

Em relação aos objetivos traçados pela OBMEP em seu regulamento, podemos concluir que eles podem ser, em grande parte, atingidos. Nosso referencial teórico evidenciou que ela tem impactado positivamente os índices que medem a qualidade da educação, ofertando um material didático de qualidade para docentes e discentes, e apresentando questões desafiadoras que atendem estudantes que possuem um perfil olímpico. Tem também estimulado a qualificação docente e incentivado a aproximação de estudantes com as áreas científicas e tecnológicas. Apesar disso, dois pontos críticos emergem das nossas análises: o elevado grau de dificuldade da prova e a ausência de uma matriz de referência dos conteúdos cobrados na olimpíada. O primeiro ponto reflete no caráter olímpico da competição. Já em relação ao segundo ponto, é destacado no regulamento que os conteúdos das provas são os previstos na BNCC; falta, portanto, explicitá-los por nível. De forma geral, a maior parte dos itens das provas se distribuem entre os conteúdos de álgebra, aritmética, geometria e contagem.

Sobre a metodologia adotada, compreendemos que o ensino através da Resolução de Problemas se constitui como uma forma de tirar o aluno da sua zona de conforto, já que o problema é apresentado antes mesmo que o discente tenha conhecimento do conteúdo ou conceito necessário para a sua resolução. É o inverso do que geralmente ocorre nas aulas em que prevalece o Ensino Tradicional, onde se apresenta o conteúdo ou conceito, em seguida algum problema resolvido e, por fim são apresentados exercícios e/ou problemas para "fixar" o conteúdo ministrado. No ensino através da Resolução de Problemas, os problemas são vistos como o primeiro meio para se fazer matemática, e têm o intuito de introduzir novos conteúdos e conceitos matemáticos, relacionando-os com os conhecimentos prévios dos discentes.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas possibilitou uma melhor interação entre o professor pesquisador e a turma, uma vez que ela participou ativamente das atividades realizadas. A formação dos grupos auxiliou no desenvolvimento da cooperação e colaboração entre os discentes, já que se configurou em um contato mais direto entre os pares, em que os mesmos discutiam, usavam uma linguagem mais acessível, apontavam erros e construíam soluções muitas vezes sem a interferência do professor pesquisador. O registro das soluções na lousa proporcionou uma visão mais ampla sobre as diferentes formas de resolução, mostrando que as etapas e procedimentos que levam à resposta de um problema não são únicos. Essa fase também favoreceu a elucidação de termos e procedimentos operatórios que não ficaram devidamente esclarecidos nas etapas anteriores. Uma dificuldade inicial dessa fase – e que se estendeu à plenária e à busca pelo consenso – foi o professor pesquisador tentar fazer com que os grupos mantivessem suas soluções originais, quando confrontadas com as demais. Aos poucos, os discentes, ao invés de apagarem suas soluções, foram melhorando-as, encontrando erros e justificando etapas.

Sobre a formalização do conteúdo, Nunes (2010, p. 329) afirma que a metodologia "permite trabalhar as grandes ideias conceituais contidas em cada tópico matemático". Os discentes conseguiram compreender bem as definições apresentadas ao longo da aplicação dos problemas, além de terem conseguido resolvê-los em sua grande maioria. Souberam reconhecer as diferentes formas de se representar uma função, e enunciar a definição e as duas condições básicas que caracterizam uma função sempre que solicitado, ainda que carecendo de um maior rigor. Assim, entendemos que eles conseguiram, em grande parte, operacionalizar a definição de função, conforme descreve Souza e Souza (2019). Além disso, os diálogos mostraram que parte dos discentes conseguiram relacionar as ideias intrínsecas às funções com os problemas apresentados, dando ênfase às de dependência e correspondência.

Destarte, acreditamos que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas apresenta um potencial para a sala de aula, pois atribui ao discente o papel de coconstrutor do seu conhecimento, valoriza o problema a ser empregado para a construção do conteúdo ou conceito matemático, além de exigir a cooperação entre estudante-estudante e estudante-docente.

A aplicação do questionário, em suas versões pré-intervenção e pós-intervenção, evidenciou melhoras em determinadas atitudes e comportamentos frente à resolução de um problema. De forma geral, as respostas dos discentes apontam um crescimento nas suas predisposições para resolver um problema e nas suas ações referentes ao ato de resolver um problema, dados que acreditamos terem sido influenciados diretamente pela metodologia empregada.

Em resumo, os discentes melhoraram a atitude em relação ao fato de serem observados ao resolverem um problema, sobre o gosto de resolver problemas, sobre a preferência de resolver um problema em grupo a resolvê-lo sozinho, sobre a preferência de resolver um problema a resolver um exercício. Mostraram-se também mais entusiasmados e aumentaram a confiança em resolver problemas, acreditando mais em seus potenciais. Além disso, em relação às fases de resolução de um problema, proposta por Polya (2006), os discentes consideram que melhoraram em todas as etapas. Contudo, a relevância atribuída a tal processo se tornou menos significativa ao longo das aulas.

Desse modo, consideramos que a utilização de uma Sequência Didática com foco nas questões da OBMEP, aliada à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se numa alternativa para o ensino de conteúdos e conceitos matemáticos, em particular, o conceito de função. Uma vez que, a partir das nossas descrições e análises das atividades realizadas, conseguimos evidenciar que os discentes passaram a mobilizar a noção intuitiva de função e a compreender os diferentes conceitos que emergem dessa noção, a cooperar mais uns com os outros e se tornaram mais autônomos no processo de resolução de problemas. Além de terem, em sua maioria, aumentado as suas atitudes e predisposições para resolver problemas.

É bem verdade que cada problema gerador por si só não contemplou todas as discussões que são inerentes ao campo das funções; contudo, permitiram apresentar conceitos e definições bases que foram consolidados na última etapa da nossa metodologia, que é a proposição e resolução de novos problemas. Além disso, os problemas mostraram a viabilidade que se pode ter em utilizar as questões da OBMEP como um ponto de partida para a apreensão de diferentes temas matemáticos, possibilitando relacioná-la de forma mais direta com o currículo e indo ao encontro do que prega um dos seus objetivos, que é o de contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica.

Finalmente, a Sequência Didática (Apêndice I), além de contemplar parte da Análise *a Priori* prevista na nossa metodologia científica, tem o intuito de oferecer aos professores possíveis direcionamentos que consideramos relevantes para o ensino através da Resolução de Problemas. Serve como um modelo que pode ser seguido e, sem a intenção de ser prescritiva, pode ser adaptada para a introdução de outros conteúdos matemáticos. Sendo assim, procurou-se apresentá-la de forma sistematizada, numa escala que permitisse a sua reprodução pelos docentes, o que vai de acordo com a metodologia de Engenharia Didática.

O nível de detalhamento dos encontros descritos no capítulo *Análise a posteriori e validação* (acrescido do Apêndice III) também possibilitou ao leitor entender como se deu a aplicação da nossa Sequência Didática, onde procuramos evidenciar como o professor pesquisador gerenciou os problemas trabalhados com a turma, percorrendo as dez fases da nossa Metodologia Pedagógica; além de explicitar as dificuldades encontradas ao longo do percurso e as suas prováveis resoluções. Isso compactua com a tentativa de superar os obstáculos apresentados na problemática da nossa pesquisa, em que foi evidenciada a pouca predominância de trabalhos que apresentassem, aos professores, orientações sobre as possibilidades de utilização de uma sequência didática com problemas da OBMEP, através de uma metodologia de Resolução de Problemas.

Algumas dificuldades também se apresentaram ao longo da aplicação das atividades. Uma delas foi o fator tempo, que fez com que não fossem utilizados três dos onze problemas geradores contidos na Sequência Didática original. Além disso, o uso da nossa Metodologia requer um tempo maior de implementação do que o de aulas cujo modelo de ensino é o *para* resolver problemas. Sendo assim, o docente pode utilizá-la priorizando os conteúdos que considera mais relevantes, para que sua utilização não comprometa o ensino dos tópicos apresentados no currículo, a serem lecionados no respectivo ano letivo. Outro ponto é que, em nossa pesquisa, trabalhamos com oito grupos cuja composição variava de 3 a 4 estudantes. Acreditamos que esse quantitativo por grupo seja satisfatório; contudo, uma quantidade menor de grupos poderia ter proporcionado um melhor acompanhamento por parte do professor pesquisador das resoluções propostas.

A Resolução de Problemas já se consolidou como uma Tendência para a Educação Matemática, e que vem resistindo ao longo do tempo, se renovando e se atualizando. Continua tendo como base o ato de resolver problemas para uma melhor compreensão em Matemática; contudo, não se resume apenas a isso. Sobre esse aspecto, Polya (2006) destaca que:

> a resolução de problema é uma habilidade prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem as outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 2006, p. 4).

Vista como uma metodologia, ela permite tangibilizar conceitos, associando-os, sempre que possível, com o mundo real e atribuindo significado aos discentes. Partindo da premissa de que discussões sobre esse tema não estão completamente esgotadas, tenciona-se, como trabalhos futuros, refinar a nossa sequência didática (a partir das discussões apresentadas na aplicação do experimento e das alterações que foram realizadas em sala de aula) e também adaptá-la para outras áreas da Matemática como, por exemplo, a Geometria. Outra linha de pesquisa é estudar sobre como se dá o processo de formulação de problemas pelos discentes, sobre a influência dos aspectos afetivos e/ou emocionais na Resolução de Problemas, e as questões relacionadas à metacognição.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, C. F. M.; MATTA, A. A. **Uma análise crítica das provas da primeira fase da OBMEP** - Nível 2. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática,** Rio de Janeiro, n. 55, p. 133-154, jul./dez. 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? *In*: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. As conexões trabalhadas através da resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 01-14, jun. 2019.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPED. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, jan. 2008.

ANDREATTA, C.; ALLEVATO, N. S. G. Um cenário das pesquisas envolvendo Resolução de Problemas em edições do CIEM. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 1, p. 69-92, abr. 2019.

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 15, n. 2, p. 137-169, jul. 2012.

ARAÚJO, O. **A avaliação da OBMEP como indutor de mudanças na prática pedagógica dos professores de matemática**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. *In*: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-45.

ARAÚJO, S. V. L.; SILVA, C. G. **Uma análise crítica das provas da primeira fase da OBMEP** - Nível 1. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

ARTIGUE, M. Ingéniere didactique. *In*: BRUN, J. (ed.). **Didactique des Mathématiques**. Lousanne, Paris: Delachaux et niestlé, 1996. p. 243-274.

BALTACI, S.; YILDIZ, A.; GÜVEN, B. Knowledge Types Used by Eighth Grade Gifted Students While Solving Problems. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1032-1055, dez. 2014.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Tradução: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.

BARICHELLO, L. **Análise de resoluções de problemas de cálculo diferencial em um ambiente de interação escrita**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

BERNARDINO, F.; GARCIA, W. F. D. G.; REZENDE, V. Ideias base do conceito de função mobilizadas por estudantes do ensino fundamental e ensino médio. **ACTIO**: Docência em Ciências, Curitiba, v. 4, n. 2, p. 127-147, maio/ago. 2019.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, n. 22, p. 37-68, 1991.

BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. *In*: KRULIK, S.; REYS, R. E. (orgs.). **A resolução de problema na matemática escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 4-12.

BRANSFORD, J. D.; BROWN, A. L.; COCKING, R. R. **Como as pessoas aprendem: cérebro, mente, experiência e escola**. Tradução: Carlos David Szlak. São Paulo: Editora Senac, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática (1ª a 4ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. v.2. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 63-86, jan./jun. 2005.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. A Engenharia Didática como campo metodológico para o planejamento de aula de matemática: análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, Londrina, v. 6, n. 2, p. 60-84, jun. 2013.

CAI, J.; LESTER, F. Why is teaching with problem solving important to student learning? **Research Brief**, Reston, v. 14, p. 1-6, apri. 2010.

CAI, J.; LEIKIN, R. Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. **Educational Studies in Mathematics**, v. 105, n. 3, p. 287-301, sept./nov. 2020.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARRILLO, J. **Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza:** Metodología de la investigación y relaciones. Huelva: Universidade de Huela, 1998.

CARVALHO, M. **Problemas? Mas que problemas?!** Estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula. 4. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2010.

CGEE. Centro de Gestão e Estudos Estratégicos. **Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP)**. Série Documentos Técnicos, n. 11. Brasília, jul. 2011. Disponível em: http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/251395.o. Acesso em: 18 mar. 2021.

CORDEIRO, C. C. **Análise e classificação de erros de questões de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.** 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades, Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”, Duque de Caxias, 2009.

CORREIA, M. C. B. A observação participante enquanto técnica de investigação. **Pensar Enfermagem**, Lisboa, v. 13, n. 2, p. 30-36, jul./dez. 2009.

COSTA, R. Q. G. **Análise da prova da primeira fase da OBMEP como subsídio para orientar a prática docente**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

CRUZ, J. C. P. **Estudo de Caso:** A OBMEP no colégio Tiradentes da polícia militar de MG – Unidade Governador Valadares. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2019.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 1989.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos:** função afim e função quadrática. São Paulo: Ática, 2020.

DESCARTES, R. **Regras para a orientação do espírito.** Tradução: Maria Ermantina de Almeida Prado Galvão. 3ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2012.

DEWEY, J. **How we Think**. Boston: D. C. Heath & CO Publishers, 1910.

DEWEY, J. **How we think:** A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process. Boston: D. C. Heath & CO Publishers, 1933.

DRIGO, M. O.; SANTOS, P. Abordagens da metodologia de resolução de problemas: valores da matemática que as permeiam. **Série-Estudos - Periódico dos Mestrado em Educação da UCDB**, Campo Grande, n. 23, p. 115-128, jan./jun. 2007.

DUVAL, R. Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 9, n. extra 1, p. 45-81, 2006.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *In*: POZO, J. I. (Org). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-42.

ENGLISH, L.; LESH, R.; FENNEWALD, T. Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. *In*: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ICME, 11, Monterrey, México, 2008.

ESCOLA ESTADUAL DR. JOAQUIM INÁCIO. **Projeto Político Pedagógico.** Martins, 2022. 44 p.

ESCOLA ESTADUAL DR. JOAQUIM INÁCIO. **Regimento Escolar**. Martins, 2021. 59 p.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. São Paulo: Ed. Unicamp, 2011.

FAXINA, M. L. B. **Uma sequência didática sobre porcentagem e tratamento da informação utilizando problemas das OBMEP.** 2016. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas) – Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016.

FERREIRA, A. B. H. **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 4 ed. Curitiba: Positivo, 2009.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

FERREIRA, T. A. **Resolução de Problemas de Probabilidade no Ensino Médio: uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

FIDELIS, E. C. **A OBMEP sob uma perspectiva de Resolução de Problemas.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática:** o caso da produção científica em cursos de pós-graduação. 1994. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1994.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. C. C. **Tendências em Educação Matemática:** Disciplina na modalidade à distância. 2. ed. Palhoça: UnisulVirtual, 2005.

FOSTER, C. The fundamental problem with teaching problem solving. **Association of Teachers of Mathematics**, v. 265, p. 8-10, feb. 2019.

FUNDAÇÃO ITAÚ SOCIAL. **Avaliação Econômica da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).** Superintendência Econômica de Crédito. Gerência de Avaliação de Projetos Sociais, 2009. Disponível em: https://sinapse.gife.org.br/download/avaliacao-economica-olimpiada-brasileira-de-matematica-das-escolas-publicas. Acesso em: 15 dez. 2021.

FURLAN, M. **MATIDA**: tempo e espaço de atenção no olhar-experiência de uma professora. 2011. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

GABBI, A. C.; NEHRING, C. M. Sentidos atribuídos pelos estudantes na significação do conceito função: correspondência, relação, dependência e variação. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**, Bogotá, v. 16, n. 3, p. 522-537, sept./dic. 2021.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Atlas S. A., 2008.

GIL, N.; BLANCO, L. J.; GUERRERO, E. El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Andújar, v. 1, n. 2, p. 15-32, jun. 2005.

GOES, C. R. **Desenvolvendo e aplicando a Matemática: um projeto para produzir vencedores na OBMEP e elevar os indicadores sociais do município de Branquinha – AL.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2017.

GÓMEZ-CHACÓN, I. M. **Matemática Emocional**: los Afectos en el Aprendizaje Matemático.Madrid: Narcea, 2000.

GONÇALVES, R.; ALLEVATO, N. S. G. A resolução de problemas como proposta metodológica para aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças. **Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino,** Cornélio Procópio, v. 2, n. 2, p. 27-47, 2018.

HERMINO, P. H. **Matemática financeira** – um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação

Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

IBARRA-GONZÁLEZ, K. P.; ECCIUS-WELLMANN, C. Desarrollo y Validación de un Instrumento de Medición de la Afectividad respecto a la Comisión de Errores en Matemáticas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 673-695, ago. 2018.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar – volume 1**: conjuntos e funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2019.

IMPA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **OBMEP 12 anos.** IMPA, 2016.

IMPA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **Regulamento da 18ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – 18ª OBMEP**, 2023.

INGAR, K. V. **A Visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais**. 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

JUSTULIN, A. M. **A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas**. 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

JUSTILIN, A. M.; NOGUTI, F. C. H. Formação de Professores e Resolução de Problemas: um estudo a partir de Teses e Dissertações Brasileiras. *In*: ONUCHIC, L. R.; LEAL JÚNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (orgs.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 21-53.

KRULIK, S.; RUDNICK, J. A. **Problem Solving**: A Handbook for Elementary School Teachers. 2. ed. Massachusetts: Allyn and Bacon, Inc, 1988.

LEITÃO, L. E. M. A. **Uma Proposta Pedagógica Usando Resolução de Problemas Visando Melhorar a Qualidade do Ensino Básico.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.

LEONARDO, F. M. **CONEXÕES:** matemática e suas tecnologias: manual do professor (grandezas, álgebra e algoritmos). São Paulo: Moderna, 2020.

MACHADO, L. S. **Uma análise crítica das provas da segunda fase da OBMEP 2014**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.

MACIEL, M. V. M.; BASSO, M. V. A. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): as origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na Educação Básica. *In*: Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 10, 2009, Ijuí. **Anais** [...]. Ijuí: Ed. Unijuí, 2009, p. 1–11.

MARANHÃO, T. P. A. Avaliação de impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP - 2005/2009). *In*: **Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas**. Série Documentos Técnicos, n. 11, Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011. p. 13-46.

MARTINS, L. B. **Um estudo sobre as estratégias de resolução de questões da OBMEP.** 2015. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

McLEOD, D. Beliefs, Attitudes, and Emotions: New View of Affect in Mathematics Education. *In*: Mc.LEOD, D.; ADAMS, V. (eds.).**Affect and Mathematics Problem Solving**:A New Perspective. New York: Springer-Velag, 1989. p. 245-258.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula:** Tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MENDES, L. O. R.; PROENÇA, M. C. O Ensino de Matemática via Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 17, p. 1-24, jan. 2020.

MONTEIRO, A. C. T. **Introdução ao Treinamento Olímpico**: uma proposta para os alunos da rede pública estadual. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. *In*: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

MOREIRA, D. **Recognizing Performance**: How Awards Affect Winners' and Peers' Performance in Brazil, apr. 2017. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/Moreira_JMP.pdf. Acesso em: 08 jan. 2022.

NANTES, E. A. S. A Literatura Infantojuvenil e o Processo de Formação do Sujeito Leitor. *In*: STEINLE, C. B. S.; NANTES, E. A. S.; SILVEIRA, A. P. P.; PAGNAN, C. S. (orgs.). **Literatura Infantojuvenil**. Londrina: Ed. e Distr. Educacional S.A., 2015.

NCTM. **Professional standards for teaching mathematics.** Reston: NCTM, 1991.

NEVES, I. F. **Banco de questões OBMEP níveis I e II**: uma análise crítico-construtiva e uma nova proposta metodológica. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2016.

NEVES, J. D.; RESENDE, M. R. O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 599-625, set. 2016.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. Mapeando o Campo Conceitual da função afim: primeiros passos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 5, p. 193-204, nov. 2019.

NOGUEIRA, C. M. I. Construindo o Conceito de Funções. *In*: RAMOS, A. S.; REJANE, F. C. (orgs.). **Teoria e Prática de Funções**. Maringá: Unicesumar, 2014. p. 13-36.

NORONHA, D. P; FERREIRA, S. M S. P. Revisões de literatura. *In*: CAMPELLO, B. S; CONDÓN, B. V; KREMER, J. M. (orgs.). **Fontes de informação para pesquisadores e profissionais**. Belo Horizonte: UFMG, 2000.

NUNES, C. B. **O Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas**: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas -** Somando novos talentos para o Brasil. Disponível em: http://www.obmep.org.br/.

OLIVEIRA, E. A. **Uma Engenharia Didática para abordar o conceito de Equação Diferencial em cursos de Engenharia**. 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectivas. Rio Claro: Unesp, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas. *In*: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (orgs.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 4ª ed. São Paulo: Cortez, 2012. p. 213-230.

PASQUALI, L. **Psicometria**: Teoria dos Testes na Psicologia e na Educação. Petrópolis: Vozes, 2003.

PAZ, V. P. B. **O Princípio Fundamental da Contagem através da metodologia de Resolução de Problemas, com foco nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Presidente Prudente, 2017.

PEHKONEN, E. The State-of-Art in Mathematical Creativity. **ZDM Mathematics Education**, v. 29, n. 3, p. 63-67, june. 1997.

PEHKONEN, E.; NÄVERI, L.; LAINE, A. On Teaching Problem Solving in School Mathematics. **Center for Educational Policy Studies Journal**, v. 3, n. 4, p. 9-23, dec. 2013.

PENA, M. B. A. **Experiências docente vivenciadas, dentro e fora da sala de aula, em tempos de OBMEP de 2005 a 2013.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2014.

PEREIRA, M. **O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas no 3º ciclo do Ensino Fundamental.** 2004. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

PIRONEL, M.; ONUCHIC, L. R. Avaliação para a aprendizagem: uma proposta a partir de transformações do conceito de avaliação na sala de aula do século XXI. *In:* Congresso Nacional de Avaliação em Educação, 4, 2016, Bauru. **Anais** [...]. Bauru: CECEM/UNESP, 2016. p. 01-12.

PIRONEL, M.; VALLILO, S. A. M. O papel da Avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. *In*: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (orgs.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 279-304.

POLYA, G. O ensino por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática**, n. 7, p. 11-16, 1985.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. **Educação e Matemática**, Lisboa, v. 15, p. 3-9, set. 1990.

PROENÇA, M. C. **Resolução de problemas:** encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá: Eduem, 2018.

REIS, A. Q. M. **A contextualização da matemática como princípio educativo no desenvolvimento do pensamento teórico**: exploração de contextos no movimento do pensamento em ascensão do abstrato ao concreto. 2017. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências – área de Matemática) – Departamento de Humanidades e Educação, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2017.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, T. V. Função Afim na Educação Básica: Estratégias e Ideias Base Mobilizadas por Estudantes Mediante a Resolução de Tarefas Matemáticas. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 25-50, nov. 2020.

RIO GRANDE DO NORTE. Secretaria de Estado da Educação, da Cultura, do Esporte e do Lazer. **Estrutura Curricular – 2022, Ensino Médio Potiguar em Tempo Integral.** Natal: SEEC, 2021.

RODRIGUES, M. U. GONÇALVES, W. V.; BRITO, A. J.; SILVA, A. K. M. OBMEP na perspectiva dos Ambientes de Aprendizagem: uma análise de conteúdo no período de 2005 a 2017. **Revista Prática Docente**, Confresa, v. 3, n. 1, p. 54-74, jan./jun. 2018.

SANTOS, G. L.; ABREU, P. H. Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): explicação de condições de sucesso em escolas bem sucedidas. *In*: **Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas**. Série Documentos Técnicos, n. 11, Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011. p. 47-72.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Como ensinar o conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 22, n. 53, p. 27-37, jan./mar. 2017.

SANTOS, M. S**. A metodologia de resolução de problemas como atividade de investigação**: um instrumento de mudança didática. 1993. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.

SANTOS, P. **Análise estatística da OBMEP em MT sob a ótica dos descritores da Prova Brasil**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2018.

SCHINDLER, M.; BAKKER, A. Affective field during collaborative problem posing and problem solving: a case study. **Educational Studies in Mathematics**, v. 105, n. 2, p. 303-324, sept. 2020.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. Orlando, Florida: Academic Press, 1985.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *In*: GROUWS, D. (ed.). **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan, 1992. p. 334-370.

SCHOENFELD, A. H. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? *In*: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (eds.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 1996. p. 61-72.

SCHOENFELD, A. H. What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A Story of Research and Practice, Productively Intertwined. **Educational Researcher**, v. 43, n. 8, p. 404-412, nov. 2014.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. *In*: TRATFON, P. R.; SHULTE, A. P. (eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SILVA, A. L. **Uma Engenharia Didática para aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio**. 2019. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2019.

SILVA, A. S. **Indução de estratégias de aprendizagem matemática nas questões das provas da OBMEP.** 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

SILVA, J. J.; SOUZA, C. S. **Uma análise crítica das provas da primeira fase da OBMEP -** Nível 3. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

SILVA, P. H. C. **Análise e avaliação das questões dos níveis 1 e 2 da primeira fase da OBMEP sob uma perspectiva de Resolução de Problemas.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2017.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A Pesquisa Científica. *In*: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (orgs.). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. p. 33-44.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Resolução de problemas nas aulas de matemática:** o recurso da problemateca. Porto Alegre: Penso, 2016.

SOARES, C. M. M.; LEO, E. **Impacto da Olimpíada Brasileira de Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho em Matemática na Prova Brasil, Enem e Pisa,** 2014. Disponível em: http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/420951.o. Acesso em: 4 jan. 2022.

SOARES, J. F.; CANDIAN, J. F. O impacto da OBMEP no desempenho dos alunos na Prova Brasil. *In*: **Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas**. Série Documentos Técnicos, n. 11, Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011. p. 73-94.

SOUZA, J. S. S. **O conceito de função**: da operacionalização da definição à aprendizagem significativa. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.

SOUZA, J. S. S.; SOUZA, L. O. Operacionalização da definição de função: um processo desencadeador da aprendizagem significativa do conceito de função. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 12, n. 3, p. 14-40, set./dez. 2019.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. *In*: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (eds.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, 1990. p. 1-22.

TEIXEIRA, C. J.; MOREIRA, G. E. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas: Uma análise de evidências de validade de conteúdo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Itabaiana, v. 6, n. 1, p. 1-25, fev. 2021.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. Ensinar matemática com resolução de problemas. **Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática**, Lisboa, v. 24, n. 2, p. 39-60, dez. 2015.

VALÉRIO, W. **Resolução de Problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

VAN DE WALLE, J. A.; KARP, K. S.; BAY-WILLIAMS, J. M. **Elementary and Middle School Mathematics:** Teaching Developmentally. 10. ed. New York: Pearson, 2019.

VILARINHO, A. P. L. **Uma proposta de análise de desempenho dos estudantes e de valorização da primeira fase da OBMEP**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE I – A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

CONTEÚDO: NOÇÕES GERAIS DE FUNÇÃO

INTRODUÇÃO

Levando em consideração que o ensino *através* da resolução de problemas é fortemente recomendado no corpo da tese da qual esta sequência didática é derivada, as atividades aqui descritas devem ser aplicadas no processo de introdução do conteúdo “Função”.

O intuito é que ela sirva como um guia que possa auxiliá-lo(a) em sua prática docente, principalmente no que se refere ao uso das questões da OBMEP como um elemento viável de ser utilizado na abordagem dos temas dispostos no currículo de matemática do ensino médio, e que podem auxiliar na formação de conceitos e conteúdos matemáticos.

Além disso, esta sequência didática não é rígida e totalmente prescritiva; podendo o(a) docente adaptá-la conforme suas necessidades e a realidade da turma. O que ela traz é, em suma, uma série de tópicos que, no nosso entendimento, são significativos para uma melhor compreensão do papel que a OBMEP pode assumir na introdução de conteúdos e conceitos matemáticos, aliada a uma metodologia de Resolução de Problemas e em conjunto com o currículo de matemática.

OBJETIVOS DA ATIVIDADE

Ao término das atividades, é esperado que o discente seja capaz de:

- Compreender a noção intuitiva e o conceito formal de função;
- Reconhecer diversas situações que podem ser modeladas por função;
- Identificar os principais elementos que constituem uma função;
- Analisar e construir gráficos de funções;
- Reconhecer os principais tipos de funções, suas composições, comportamentos e relações;
- Resolver situações-problemas que envolvam funções.

DURAÇÃO

Recomenda-se um tempo de 35 h/a para a realização destas atividades.

COMPETÊNCIAS SEGUNDO A BNCC

Esta sequência didática pode favorecer o desenvolvimento das seguintes competências específicas de Matemática e suas Tecnologias, apresentadas na BNCC:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADES SEGUNDO A BNCC

Esta sequência didática pode favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades de Matemática e suas Tecnologias, apresentadas na BNCC:

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

De forma geral, como o conteúdo Funções usualmente é estudado no Ensino Médio após o conteúdo Conjuntos, é esperado que os discentes já detenham um conhecimento prévio consistente sobre esse último. Com isso, ao iniciar esta sequência didática, os discentes já devem conhecer tópicos como: noções básicas de conjuntos, operações com conjuntos, conjuntos numéricos (o que deve refletir no domínio das operações fundamentais) e intervalos.

Ainda assim, ao se fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o docente pode auxiliar os discentes no resgate dos conhecimentos prévios necessários para se resolver o problema, além de apresentar outros conceitos que o discente porventura não tenha conhecimento e que sejam fundamentais para o desenvolvimento do conceito/conteúdo-chave.

Especificamente, os **Problemas 1, 5, 9 e 10** estão contemplados pelo que foi exposto no 1º parágrafo desta seção. Quanto aos demais: nos **Problema 3 e 11**, deve-se saber resolver equações polinomiais do 2º grau e, especificamente para o problema 3, saber utilizar procedimentos de fatoração. No **Problema 6**, deve-se saber resolver sistemas lineares. No **Problema 4**, deve-se ter conhecimento sobre como se calcula a média aritmética entre dois números. No **Problema 7**, deve-se saber que o raio de uma circunferência é medido pela distância de um ponto qualquer dessa circunferência ao seu centro, e que essa distância é constante. No **Problema 8**, deve-se saber utilizar procedimentos de fatoração e resolver equação cúbica. No **Problema 11**, deve-se saber resolver equações polinomiais do 2º grau (item b)).

CONTEÚDOS QUE SERÃO ABORDADOS

- Noção intuitiva de função;
- Definição formal de função;
- Lei de formação de uma função;
- Variável dependente e variável independente;
- Função e diagrama;
- Situações que representam ou não uma função;
- Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função;
- Zero de uma função;
- O plano cartesiano;
- Gráfico de uma função;

- Intervalos de crescimento e decrescimento de uma função;
- Função polinomial;
- Função definida por mais de uma sentença;
- Função composta;
- Função sobrejetora;
- Função injetora;
- Função bijetora;
- Função inversa.

METODOLOGIA

Recomenda-se a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através* da Resolução de Problemas.

PROBLEMAS E DISCUSSÕES

PROBLEMA GERADOR 01 (2010N2BQQ10) (Adaptado)

Geni é cliente de uma companhia telefônica que oferece o seguinte plano:

- tarifa mensal fixa de R$ 18,00;
- gratuidade em 10 horas de ligações por mês;
- R$ 0,03 por minuto que exceder as 10 horas gratuitas.

Em janeiro, Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos e, em fevereiro, por 9 horas e 55 minutos. Qual foi a despesa de Geni com telefone nesses dois meses, em reais?

OBJETIVO DO PROBLEMA

Evidenciar a noção intuitiva de função.

VARIÁVEIS LOCAIS

- O reconhecimento da existência de dependência entre valor a ser pago por mês e o tempo gasto ao telefone.

- O reconhecimento dessas variáveis como conjuntos não vazios que se relacionam.

- A divisão da situação em dois casos com base no seguinte questionamento: Nesse mês, Geni usou o telefone por um tempo superior ou inferior às 10 horas?

- A conversão das horas excedentes em minutos (para o segundo mês).

UMA SOLUÇÃO

Como em janeiro Geni usou o telefone por 15 horas e 17 minutos, ela deve pagar a tarifa fixa de R$ 18,00, mais R$ 0,03 por cada minuto das 5 horas e 17 minutos que excederam das 10 horas. Como 1 hora possui 60 minutos, então 5 horas e 17 minutos são $5 \times 60 + 17 = 300 + 17 = 317$ minutos. Assim, para esse mês, Geni deve pagar $18{,}00 + 317 \times 0{,}03 = 18{,}00 + 9{,}51 = \text{R\$ } 27{,}51$.

Como em fevereiro Geni usou o telefone por menos de 10 horas, ela irá pagar apenas a taxa mensal fixa de R$ 18,00.

Sendo assim, a despesa de Geni com telefone nesses dois meses foi de $27{,}51 + 18{,}00 = \mathbf{R\$\ 45{,}51}$.

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Observação 1: A ideia de função está presente quando relacionamos os valores de duas grandezas variáveis.

Definição 1: Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$** é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Nessas condições, usamos as seguintes notações:

$$f: A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$

Nos dois casos, lemos: f é uma função de A em B.

Observação 2:

- Todo elemento do primeiro conjunto tem um correspondente no segundo conjunto;
- Cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento no segundo conjunto.

(Dante; Viana, 2020).

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

O problema apresenta uma situação frequente no dia a dia, que é a assinatura de um plano de telefonia. Tendo os alunos lido o problema de forma individual e, em seguida, discutido dentro de seu grupo os pontos-chave, o professor pode iniciar a discussão verificando se eles compreenderam realmente o problema; utilizando valores menores e maiores do que 10 horas. Além disso, pode questionar sobre o que a questão está pedindo. Polya (2006) sugere:

P: Qual é a incógnita? O valor a ser pago por Geni nos dois meses.

P: Quais são os dados? As condições do plano e o tempo que Geni usou o telefone nos dois meses.

P: Qual é a condicionante? O valor a ser pago depende do tempo usado.

P: Separe as diversas partes da condicionante. É preciso notar que o "cálculo do valor" a ser pago deve ser com base no seguinte fato: nesse mês, Geni usou o telefone por um tempo inferior ou superior a 10 horas? Carrillo (1998) sugere: *C: Decomponha o problema.*

Outro ponto importante é que o discente deve perceber que é preciso, no primeiro mês, transformar em minutos o tempo que excede as 10 horas. Ratificando isso, lembra-se de Polya (2006), quando questiona: *P:É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita?*

Tendo o problema sido resolvido por cada grupo, o momento agora é de compartilhar as respostas entre os grupos e analisar a razoabilidade das soluções. *P: É possível verificar o resultado? P: É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? C: Analise a consistência da solução.* A resposta que você chegou faz sentido? É maior que R$ 36,00? (tarifa mínima referente aos dois meses).

Chegando na solução correta, o professor segue para a fase 9 da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que é a **formalização do conteúdo**.

Inicialmente, ele pode questionar quais são as variáveis do problema apresentado. *O que eu quero saber? O* valor *que Geni irá pagar. Qual informação eu devo dispor para obter esse valor? O* tempo *que ela passou ao telefone.*

Essas duas variáveis (tempo e valor) se relacionam. *Tal relação estabelecida entre a variável tempo utilizado e a variável valor a ser pago é chamada de* função. Apresentar a **Observação 1.**

Dessa observação, associamos ao nosso *x* a variável *tempo* e ao nosso *y* a variável *valor*. Pergunta-se: *Para cada tempo gasto ao telefone, existe um valor a ser pago? Para cada tempo gasto ao telefone, existe um único valor a ser pago? Tempos diferentes podem fornecer o mesmo valor a ser pago? Pode um mesmo tempo fornecer dois ou mais valores? Pode existir valores que não estejam associados a nenhum tempo?*

Apresentar a **Definição 1** e a **Observação 2.** No problema apresentado, o conjunto A é representado por todos os valores possíveis de tempo que Geni pode passar ao telefone e o conjunto B por todos os valores em reais possíveis. Note que, no conjunto B, podem existir valores em reais que não estão associados a nenhum tempo de ligação como, por exemplo R$ 15,00.

Discutir com os discentes sobre a “gratuidade” em 10 horas de ligações por mês.

Além disso, apesar de a função ser definida por mais de uma sentença, optou-se, nesse momento inicial, por não a apresentar nesses termos. Iremos retomar tal problema após a aplicação do Problema Gerador 09, que se propõe em construir a noção de função definida por mais de uma sentença.

Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

PROBLEMA GERADOR 02 (2005N3F2Q03)

Numa certa cidade existem apenas duas empresas de táxi, a Dona Leopoldina e a Dom Pedro II. A Dona Leopoldina cobra uma taxa fixa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 por quilômetro rodado. Já a Dom Pedro II cobra uma taxa fixa de R$ 1,00 mais R$ 0,75 por quilômetro rodado.

Tarifas de Táxi	
Dona Leopoldina	Dom Pedro *II*
Taxa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 por km rodado	*Taxa de R$ 1,00 mais R$ 0,75 por km* rodado

Os amigos Bento, Sofia e Helena trabalham nessa cidade e sempre voltam de táxi do trabalho para casa. Para pagar menos, Helena sempre usa os táxis da Dona Leopoldina e, pelo mesmo motivo, Bento só usa os da Dom Pedro II. Sofia usa os táxis das duas empresas, porque paga o mesmo preço em ambas.

a) Quanto Sofia paga para ir de táxi do trabalho para casa?

b) Qual dos três amigos percorre, de táxi, a menor distância entre seu trabalho e sua casa?

OBJETIVO DO PROBLEMA

Apresentar a definição formal de função.

VARIÁVEIS LOCAIS

- O estabelecimento do valor a ser pago por cada uma das empresas de táxi como expressões algébricas e, posteriormente, como funções.

- A relação entre optar por usar determinada empresa de táxi e os símbolos <, > ou =.

- O uso da quilometragem como variável contínua.
- A apresentação das diferentes formas de comunicação do conceito de função.

UMA SOLUÇÃO

O custo de uma corrida de x quilômetros na empresa de táxi Dona Leopoldina é $3 + 0{,}5x$. Já na empresa de táxi Dom Pedro II, o custo é dado pela expressão $1 + 0{,}75x$ (estamos considerando aqui x como sendo um número real, apesar de o taxímetro ignorar frações de quilômetros. Esse fato atende ao objetivo da atividade).

a) Como Sofia paga o mesmo preço em ambas as empresas de táxi então, nesse caso, $3 + 0{,}5x = 1 + 0{,}75x$, o que resulta em $x = 8$. Sendo assim, Sofia paga $3 + 0{,}5 \times 8 = 7$ reais pela corrida.

b) Helena paga menos usando o táxi da Dona Leopoldina; então, se h é a distância que ela percorre, $3 + 0{,}5h < 1 + 0{,}75h$, o que resulta em $h > 8$ quilômetros.

Bento paga menos usando o táxi da Dom Pedro II; então, se b é a distância que ele percorre, $3 + 0{,}5b > 1 + 0{,}75b$, o que resulta em $b < 8$ quilômetros.

Logo, Bento é o que percorre a menor distância entre seu trabalho e sua casa.

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Observação 3: Se a função f relaciona o elemento x de A com o elemento y de B, então podemos escrever[52] $f : x \longmapsto y$ ou, mais comumente:

$f(x) = y$ (Lemos: f de x é igual a y.)

Observação 4: Variável dependente e variável independente.

Observação 5: Lei de formação ou lei de correspondência.

(Dante; Viana, 2020).

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

Tendo o problema sido resolvido, o(a) professor(a) ainda retoma com os alunos o fato de que o valor a ser pago a qualquer uma das empresas de táxi depende dos quilômetros percorridos. Em outras palavras, a variável *valor* a ser pago (y) depende da variável *quilometragem* (x). Ele mostra, assim, que essas variáveis estão relacionadas. Apresentar as **Observações 3 e 4**.

---

[52] Os autores mudam a notação apresentada na formalização do conteúdo do Problema Gerador 01 ($f : A \to B$) e passam a usar $f : x \longmapsto y$. Isso pode confundir o discente.

Essa dependência da variável *y* em relação a variável *x* pode ser evidenciada através de uma expressão algébrica. Apresentar a **Observação 5.**

Sendo assim, voltando ao problema gerador, o professor pode questionar a turma sobre qual é a lei de formação da função apresentada no problema (se os mesmos não já o tiverem expressado no registro das resoluções na lousa). Dos discentes é esperado que consigam encontrar (através da análise de alguns casos em particular), as seguintes leis de formação das funções:

Para a empresa de táxi Dona Leopoldina, a função será definida por $f(x) = 3 + 0{,}5x$. Onde *x* é o número de quilômetros percorridos e $y = f(x)$ é o valor a ser pago.

Para a empresa de táxi Dom Pedro II, a função será definida por $f(x) = 1 + 0{,}75x$. Onde *x* é o número de quilômetros percorridos e $y = f(x)$ é o valor a ser pago.

Além disso, para esse estudo inicial da lei de formação de função, estamos considerando a variável x como uma variável contínua. (Apesar disso, deve-se iniciar uma discussão sobre frações de quilometragem.)

Ademais, com as leis de formação obtidas, o(a) docente pode questionar outros valores a serem pagos a cada empresa de táxi a partir de determinados quilômetros percorridos. Pode, inclusive, percorrer o caminho inverso, com questionamentos do tipo: *Se eu dispor de R$ 16,00, quantos quilômetros daria para percorrer com o táxi da empresa Dona Leopoldina? E da empresa Dom Pedro II?*

O docente também pode apresentar outras formas de se comunicar o conceito de função (como tabela, como máquina de transformação, como diagrama, como expressão algébrica, como generalização).

Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

PROBLEMA GERADOR 03 (2020N2BQQ02)

O professor M. A. Luco escreveu no quadro a expressão:

$$\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4}$$

Então, ele diz aos alunos que *n* pode ser qualquer número natural, com exceção de 4.

a) Qual o valor da expressão para *n* = 1?

b) Marcos substituiu *n* por um número natural e verificou que o valor da expressão é 5. Marcos substituiu *n* por qual número?

c) Quais são os números naturais que não podem ser o valor numérico da expressão?

OBJETIVO DO PROBLEMA

Construir os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função.

VARIÁVEIS LOCAIS

- Valorizar a condição inicial do problema ($n \neq 4$).
- Discussões sobre variável e incógnita.
- Ratificação da apresentação de uma função como uma relação entre conjuntos.
- Retomar a Observação 02, apresentada no problema gerador 01.

UMA SOLUÇÃO

a) Para n = 1, temos:

$$\frac{1^2 - 5 \times 1 + 4}{1 - 4} = \frac{1 - 5 + 4}{-3} = \frac{0}{-3} = 0$$

b) Devemos resolver a seguinte equação:

$$\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4} = 5$$

Assim: $n^2 - 5n + 4 = 5(n - 4) \Rightarrow n^2 - 5n + 4$

$$= 5n - 20 \Rightarrow n^2 - 10n + 24 = 0$$

Que é uma equação polinomial do 2º grau, cujas raízes podemos obter por:

$$n = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 1 \times 24}}{2 \times 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = 5 \pm 1.$$

Cujas raízes são 6 e 4. Como $n \neq 4$, então Marcos substituiu *n* por 6.

c) Notamos, inicialmente que

$$\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4} = \frac{(n - 4)(n - 1)}{n - 4}.$$

Como $n \neq 4$, então:

$$\frac{(n - 4)(n - 1)}{n - 4} = n - 1.$$

Ainda de $n \neq 4$, temos que $n - 1 \neq 3$. Portanto, 3 não pode ser o valor numérico da expressão.

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Definição 2: Ao definirmos uma função f de A em B, os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de **domínio ($\boldsymbol{D(f)}$)** e **contradomínio ($\boldsymbol{CD(f)}$)** da função f.

Definição 3: Para cada $a \in A$, o elemento $b \in B$ tal que $f(a) = b$ é chamado de **imagem** de a pela função f. Já o conjunto formado pelas imagens de todos os elementos de A é chamado de **conjunto imagem** de f e é indicado por $\boldsymbol{Im(f)}$.

Observação 6: Em toda função f de A em B, temos que $Im(f)$ está contido em B, ou seja, é um subconjunto de B. Indicamos: $Im(f) \subset B$.

(Dante; Viana, 2020).

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

Na **letra a)**, após a pergunta ter sido resolvida, o professor pode verificar a real compreensão do que se pedia exemplificando com outros valores para o *n*. Pode, inclusive representar tal situação através de um diagrama, em que o conjunto A é constituído por alguns valores de *n* e o conjunto B por números dentre os quais estão os respectivos resultados quando se substitui cada um dos elementos do conjunto A na expressão $\frac{n^2-5n+4}{n-4}$. O intuito é que os discentes vejam essa expressão como uma função do tipo $f(n) = \frac{n^2-5n+4}{n-4}$. Eis alguns questionamentos: *O conjunto A pode ser composto por qualquer número natural? Por que* n *não pode assumir o valor 4? O número 4 pode ser um elemento do conjunto B? O conjunto A é de onde os números estão "saindo" e o conjunto B é onde os números estão "chegando". Essa relação representa uma função?* Apresentar a **Definição 2**. Espera que os discentes expressem que o domínio da função é $D(f) = \{n \in \mathbb{N}/n \neq 4\}$ e que o contradomínio pode ser, por exemplo, $CD(f) = \{f(n) \in \mathbb{R}\}$. A letra c) ajudará a restringir mais esse contradomínio, onde podemos chegar em $CD(f) = \{f(n) \in \mathbb{N} \cup (-1)\}$.

Na **letra b)** o professor pode questionar: *P: Já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?* O esperado é que eles lembrem de já terem resolvido equações polinomiais do 2º grau. Chega-se em dois valores possíveis para o *n* (4 e 6). Essa etapa é importante, pois mostra que o processo de *revisão* é indispensável, já que 4 não pode ser solução do problema. *P: É possível verificar o resultado?* Pode-se substituir os valores 4 e 6 na expressão $\frac{n^2-5n+4}{n-4}$ e notar que se obterá uma indeterminação matemática (divisão por 0) quando se substitui o *n* por 4. *C: Analise a consistência da solução.* O professor diz que 5 é um elemento do conjunto B que tem a propriedade de que ele foi obtido a partir de um valor contido no conjunto A; no caso, o 6. O conjunto B pode possuir elementos que tem ou não essa propriedade. Os que têm recebem uma nomenclatura. Apresentar a **Definição 3 e a Observação 6**.

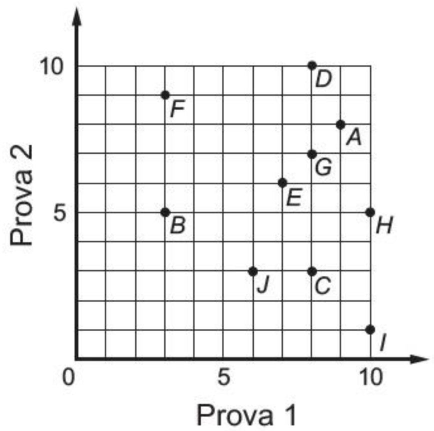
A **letra c)** é importante para a obtenção da imagem da função, pois é nesse item que o discente observa que $\frac{n^2-5n+4}{n-4} = n - 1$; portanto, $Im(f) = \{f(n) \in \mathbb{N} \cup (-1)/y \neq 3\}$.

Um tópico ainda a ser valorizado é o fato de que tal questão possibilita trabalhar com domínio, contradomínio e imagem de função mais restritos que o conjunto dos números reais.

Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

PROBLEMA GERADOR 04 (2014N2F1Q08) (Adaptado)

O professor Michel aplicou duas provas a seus dez alunos e divulgou as notas por meio do gráfico mostrado abaixo. Por exemplo, o aluno A obteve notas 9 e 8 nas provas 1 e 2, respectivamente; já o aluno B obteve notas 3 e 5. Para um aluno ser aprovado, a média aritmética de suas notas deve ser igual a 6 ou maior do que 6. Quantos alunos foram aprovados?



OBJETIVO DO PROBLEMA

Construir a noção de plano cartesiano.

VARIÁVEIS LOCAIS

- As noções de direção relacionadas aos eixos das abscissas e das ordenadas.

- A maneira de se posicionar um ponto no plano cartesiano e sua relação com os quadrantes.

- A relação das abscissas e ordenadas como grandezas de uma função.

UMA SOLUÇÃO

Na situação apresentada, a média aritmética será dada por: $\frac{nota\ na\ prova\ 1 + nota\ na\ prova\ 2}{2}$. Sendo assim,

O aluno A obteve 9 na prova 1 e 8 na prova 2, sua média será $\frac{9+8}{2} = 8{,}5$. Está aprovado.

O aluno B obteve 3 na prova 1 e 5 na prova 2, sua média será $\frac{3+5}{2} = 4$. Está reprovado.

O aluno C obteve 8 na prova 1 e 3 na prova 2, sua média será $\frac{8+3}{2} = 5{,}5$. Está reprovado.

O aluno D obteve 8 na prova 1 e 10 na prova 2, sua média será $\frac{8+10}{2} = 9$. Está aprovado.

O aluno E obteve 7 na prova 1 e 6 na prova 2, sua média será $\frac{7+6}{2} = 6{,}5$. Está aprovado.

O aluno F obteve 3 na prova 1 e 9 na prova 2, sua média será $\frac{3+9}{2} = 6$. Está aprovado.

O aluno G obteve 8 na prova 1 e 7 na prova 2, sua média será $\frac{8+7}{2} = 7{,}5$. Está aprovado.

O aluno H obteve 10 na prova 1 e 5 na prova 2, sua média será $\frac{10+5}{2} = 7{,}5$. Está aprovado.

O aluno I obteve 10 na prova 1 e 1 na prova 2, sua média será $\frac{10+1}{2} = 5{,}5$. Está reprovado.

O aluno J obteve 6 na prova 1 e 3 na prova 2, sua média será $\frac{6+3}{2} = 4{,}5$. Está reprovado.

Portanto, 6 alunos foram aprovados.

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Definição 5: Plano cartesiano é o plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais x (**eixo das abscissas**) e y (**eixo das ordenadas**), que o dividem em quatro regiões chamadas de **quadrantes**.

Um ponto P, representado no plano cartesiano, tem uma referência horizontal (x) e uma referência vertical (y), que correspondem às projeções ortogonais de P em cada eixo e que, juntas, definem o **par ordenado** (x, y). Dizemos que x e y são **coordenadas** do ponto $P(x, y)$[53].

[53] A notação $P(x, y)$, apresentada pelo autor do livro, induz o aluno a enxergar o ponto P como uma função. O correto seria: o ponto P, cujas coordenadas são (x, y). Ou: o ponto P, representado pelo par ordenado (x, y).

Observação 7:

- cada par ordenado corresponde a um único ponto no plano cartesiano;
- cada ponto do plano cartesiano corresponde a um único par ordenado;
- todo ponto $P(x, y)$ do 1º quadrante tem $x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- todo ponto $P(x, y)$ do 2º quadrante tem $x \leq 0$ e $y \geq 0$;
- todo ponto $P(x, y)$ do 3º quadrante tem $x \leq 0$ e $y \leq 0$;
- todo ponto $P(x, y)$ do 4º quadrante tem $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

(Leonardo, 2020).

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

Em se tratando da etapa de compreensão do problema, o docente pode questionar à turma sobre o que significa calcular a média aritmética. Se for necessário, ele pode apresentar tal definição e exemplificar.

Esse problema permite abordar o conceito de plano cartesiano. Inicialmente, o professor pode dizer que a "Prova 1" representa um eixo horizontal que recebe o nome de abscissa e que a "Prova 2" representa um eixo vertical que recebe o nome de ordenada. Pode usar o primeiro exemplo do enunciado e afirmar que a nota final do aluno A está bem definida por meio do par ordenado (9, 8). Apresentar a diferença entre par e par ordenado e questionar se (9, 8) é o mesmo que (8, 9). Usar outros exemplos. Apresentar a **Definição 5** e a **Observação 7**.

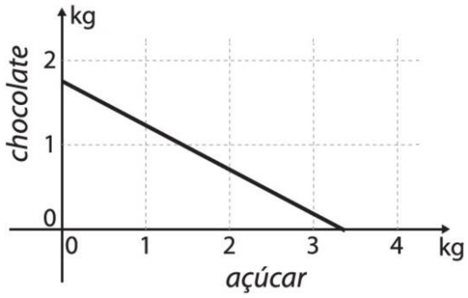
Questionar, a partir da observação 7, o porquê que, no problema, só é representado o 1º quadrante.

Além disso, a depender do andamento da turma, o docente pode questionar sobre qual é o domínio e o contradomínio da função que relaciona as notas obtidas nas provas 1 e 2 e a média aritmética entre elas.

Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

PROBLEMA GERADOR 05 (2013N3F1Q09)

Iara gastou R$ 10,00 para comprar açúcar e chocolate. A relação entre as quantidades desses ingredientes que podem ser compradas com essa quantia é dada pelo gráfico[54]. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira, independentemente das quantidades compradas?



a) Iara comprou mais açúcar do que chocolate.

b) Iara comprou quantidades diferentes de açúcar e chocolate.

c) Iara gastou mais em chocolate do que em açúcar.

d) O preço de um quilo de chocolate é maior que o preço de um quilo de açúcar.

e) Iara comprou duas vezes mais chocolate do que de açúcar.

OBJETIVO DO PROBLEMA

Construir a definição de gráfico de uma função.

VARIÁVEIS LOCAIS

- O gráfico como um conjunto de pontos.
- O gráfico como uma maneira de comunicar o conceito de função.
- Inferências a partir do gráfico, tendo como base as relações entre as quantidades.

UMA SOLUÇÃO

Letra a) **Falso!** O gráfico mostra que Iara pode comprar também mais chocolate que açúcar. Para isso, basta considerarmos, por exemplo, o ponto no gráfico representado por $(0, y)$, que representa o caso em que ela pode comprar apenas chocolate.

Letra b) **Falso!** Pois existe um ponto no gráfico em que essas quantidades podem ser iguais. É o ponto de interseção do gráfico com a função $f(x) = x$.

[54] O gráfico apresentado possui o problema de que seus eixos são definidos pela unidade (kg). Por convenção, o gráfico é representado pelos nomes dos eixos, não pela unidade em que estão representados os números. O correto seria: quantidade de açúcar (kg) e quantidade de chocolate (kg).

Letra c) **Falso!** O gráfico mostra que Iara pode gastar também mais com açúcar. Para isso, basta considerarmos, por exemplo, o ponto no gráfico representado por $(x, 0)$, que representa o caso em que ela gastou apenas com açúcar.

Letra d) **Verdadeiro!** Se Iara comprar apenas chocolate, ela consegue comprar quase 2kg. Se Iara comprar apenas açúcar, ela consegue comprar um pouco mais de 3kg. Assim, o preço do quilo de chocolate é maior que o de açúcar.

Letra e) **Falso!** As próprias justificativas apresentadas nos itens anteriores eliminam essa alternativa. Além disso, existe apenas um ponto em que a quantidade de chocolate é duas vezes a quantidade de açúcar: no ponto de interseção do gráfico com a função $f(x) = 2x$.

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Definição 6: Dada uma função $f: A \to B$, o gráfico dela é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in A,\ y \in B$ e $y = f(x)$, ou seja, $G(f) = \{(x, y); x \in A,\ y \in B \text{ e } y = f(x)\}$

(Dante; Viana, 2020).

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

Nesse problema, o professor pode pedir que os discentes destaquem no gráfico cada um dos pontos considerados para a resolução; pode, inclusive, estender as perguntas levando em consideração o intervalo em que o gráfico está definido. *P: É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*

Segue alguns possíveis questionamentos/sugestões:

- *Por que o gráfico só está definido no 1º quadrante?*

- *O dinheiro de Iara é suficiente para comprar 1 kg de chocolate e 1kg de açúcar? E 2 kg de açúcar e 1 kg de chocolate?*

- *Qual a região do 1º quadrante que representa as quantidades de açúcar e chocolate que Iara pode comprar com menos de R$ 10,00? E com exatamente R$ 10,00? E com mais de R$ 10,00?*

- *Faça o gráfico da função* $f(x) = x$.

- *Qual região do gráfico representa a situação em que Iara compra mais chocolate que açúcar?*

- *Qual região do gráfico representa a situação em que Iara compra mais açúcar que chocolate?*

- *Faça o gráfico da função* $f(x) = 2x$.

- *Estime o valor do quilo de chocolate.*

- *Estime o valor do quilo de açúcar.*

- *Faça o gráfico que represente as possibilidades de compras (em quantidade inteiras) de chocolate e/ou açúcar com até R$ 10,00.*

Apresentar a **Definição 6**.

Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

PROBLEMA GERADOR 06 (2016N3F1Q13) (Adaptado)
Uma função[55] f é tal que $f(1 - x) + 2f(x) = 3x$, para todo x real. Qual é o valor de $f(0)$?

OBJETIVO DO PROBLEMA

Construir o conceito de zero de uma função.

VARIÁVEIS LOCAIS

- Os pontos do gráfico que cortam os eixos.
- A localização dos zeros da função no gráfico.
- Discussões sobre intervalos para os quais a função é positiva ou negativa.

UMA SOLUÇÃO

Para $x = 0$, temos:

$$f(1-0) + 2f(0) = 3 \times 0 \Rightarrow f(1) + 2f(0) = 0 \quad (eq.I)$$

Para $x = 1$, temos:

$$f(1-1) + 2f(1) = 3 \times 1 \Rightarrow f(0) + 2f(1) = 3 \quad (eq.II)$$

Isolando $f(1)$ na *eq. I*: $f(1) = -2f(0)$.

Substituindo esse valor na *eq. II*, obtemos:

$$f(0) + 2\big(-2f(0)\big) = 3 \Rightarrow -3f(0) = 3 \Rightarrow \boldsymbol{f(0) = -1}.$$

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Definição 4: O zero de uma função f qualquer é raiz da equação obtida ao fazer $f(x) = 0$.

(Dante; Viana, 2020).

[55] O problema não destaca o conjunto em que a função está definida.

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

Nessa questão, pode ser útil as seguintes heurísticas:

P: Qual é a incógnita? O valor de $f(0)$.

P: Quais são os dados? $f(1-x)+2f(x)=3x$.

C: Decomponha o problema. Posso calcular $f(0)$ em $f(1-x)$; para isso, tomo $x=1$. Posso calcular $f(0)$ em $f(x)$; para isso, tomo $x=0$. Em seguida, observo o que acontece. É obtido duas equações nas incógnitas $f(0)$ e $f(1)$.

P: Considere a incógnita! Quero encontrar o valor de $f(0)$.

C: Explore problemas similares. Como resolveria um sistema linear nas variáveis *x* e *y*?

P: Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizar o seu método?

Utilizando tais heurísticas, é esperado que os alunos obtenham que $f(0)=-1$.

Em seguida, perguntar aos discentes onde está localizado no gráfico o ponto $(0,-1)$ e, após isso, o ponto mais geral $(0,y)$. O intuito é que os discentes notem que tal ponto está sobre o eixo y.

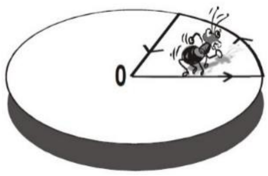
Na sequência, explorar também as possíveis posições para o ponto $(x,0)$. O intuito é que os discentes notem que tal ponto está sobre o eixo x.

Explica-se aos discentes o que, numa função, representa esse $f(x)=0$. Apresentar a **Definição 4**.

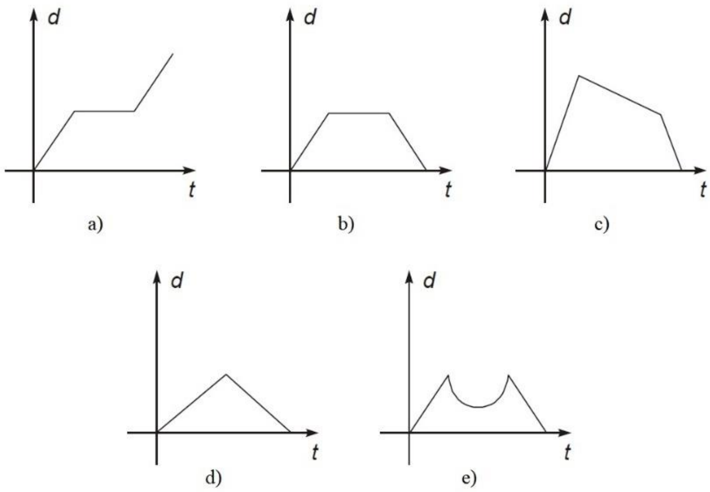
Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

PROBLEMA GERADOR 07 (2006N3F1Q17)

Uma formiguinha parte do centro de um círculo e percorre uma só vez, com velocidade constante, o trajeto ilustrado na figura.



Qual dos gráficos a seguir representa a distância *d* da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo *t*?



OBJETIVO DO PROBLEMA

Construir a noção de crescimento e decrescimento de uma função.

VARIÁVEIS LOCAIS

- A relação entre a distância percorrida e o formato do gráfico.
- O fato de a velocidade da formiguinha ser constante.
- Propriedades específicas do círculo.
- Relação de aumento ou diminuição da distância com crescimento e decrescimento de função.

UMA SOLUÇÃO

I) Na primeira parte do trajeto, percebemos que a distância da formiguinha ao centro do círculo aumenta em função do tempo.

II) Na segunda parte do trajeto, a formiguinha está sobre a circunferência, o que faz com que a distância em relação ao centro do círculo seja constante (medindo o raio). Essa afirmação elimina os itens c), d) e e).

III) Na terceira parte do trajeto, a formiguinha vai se aproximando do centro novamente, fazendo com que a distância diminua em função do tempo. O que elimina o item a).

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Definição 7: uma função f é **crescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f\ (x_1) < \ f\ (x_2)$.

Definição 8: uma função f é **decrescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f\ (x_1) > \ f\ (x_2)$.

(Leonardo, 2020)[56].

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

O objetivo desse problema é fazer com que o discente compreenda como se dá a variação da distância (d) que a formiguinha está em relação ao centro do círculo, no decorrer de determinado intervalo de tempo (t).

Ele deve notar que:

- Na primeira parte do trajeto, d aumenta à medida que t aumenta. Apresentar a **Definição 7**;
- Na segunda parte do trajeto, d permanece constante à medida que t aumenta. Isto é, a variação de d é 0, o que caracteriza uma função constante;
- Na terceira parte do trajeto, d diminui à medida que t aumenta. Apresentar a **Definição 8**.

O docente também pode questionar sobre qual é o domínio e o contradomínio de tal função.

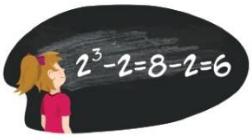
Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

---

[56] O autor do livro não diferencia função crescente (decrescente) de função estritamente crescente (decrescente). A definição precisa de função crescente (decrescente) seria:
Uma função f é **crescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f\ (x_1) \leq \ f\ (x_2)$.
Uma função f é **decrescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f\ (x_1) \geq \ f\ (x_2)$.

PROBLEMA GERADOR 08 (2017N2F2Q03) (Adaptado)

Júlia faz o seguinte cálculo com números inteiros positivos: ela escolhe um número, eleva esse número ao cubo e subtrai desse cubo o próprio número. Veja na figura que o resultado do cálculo de Júlia com o número 2 é igual a 6.



a) Qual é o resultado do cálculo de Júlia com o número 3?

b) Qual é o número que deve ser escolhido por Júlia para que o resultado do cálculo seja 1320?

OBJETIVO DO PROBLEMA

Apresentar a definição de função polinomial.

VARIÁVEIS LOCAIS

- A relação entre a operação numérica e a expressão algébrica associada.
- A relação entre a expressão algébrica e a função associada.

UMA SOLUÇÃO

a) Teremos: $3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$.

b) A função será dada por: $f(n) = n^3 - n$. Do problema, temos $f(n) = 1320$. Portanto, devemos calcular as raízes da equação $n^3 - n = 1320$:

$$n^3 - n = 1320 \Rightarrow n(n^2 - 1) = 1320 \Rightarrow$$
$$n(n+1)(n-1) = 1320 \Rightarrow (n-1)n(n+1)1320$$

Essa última equação nos diz que o produto de três números inteiros positivos consecutivos é 1320. Por inspeção, obtemos que $10 \times 11 \times 12 = 1320$ (note, por exemplo, que $10 \times 10 \times 10 = 1000$ e que o algarismo das unidades de 1320 é 0).

Portanto, Júlia deve ter escolhido o número $n = 11$.

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Definição 9: Função polinomial na variável real *x* é toda função definida por

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (com $n \in \mathbb{N}$), para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação 8: Na função polinomial:

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados de coeficientes da função;
- n é o grau do polinômio que expressa a função (com $a_n \neq 0$);
- o grau da função é determinado pelo grau do polinômio, e o grau do polinômio de uma só variável é dado pelo maior expoente da variável.

(Leonardo, 2020).

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

O docente pode atribuir outros valores para o n da função $f(n) = n^3 - n$ (*P: Adote uma notação adequada. C: Expressar em outros termos*), inclusive $n = 0$ para que o discente note que essa função passa pela origem do plano cartesiano. Isso pode instigá-lo a saber se existem outros pontos da função que "tocam" ou "cortam" os eixos, em especial, o eixo x, o que pode reforçar o conceito de zero de função, apresentado no Problema Gerador 06.

Peça para os alunos fazerem um esboço do gráfico. *P: Trace uma figura.*

Antes de resolver a equação $n^3 - n = 1320$, resolva a equação mais simples $n^3 - n = 0$. *P: Já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? C: Considere problemas equivalentes. C: Parta do que já se sabe.* Note que resolver essa última equação implica em conhecer os zeros da função. *P: Volte às definições.* Aprimore o gráfico que os alunos desenharam com essa informação.

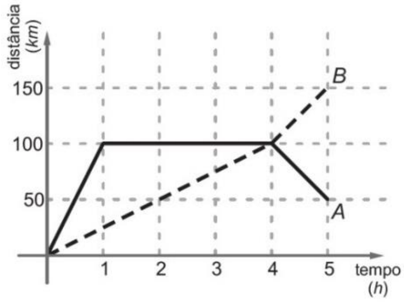
Apresente a **Definição 9** e a **Observação 8**.

Escrever $n^3 - n$ como $(n-1) \times n \times (n+1)$ e notar que as raízes são $-1, 0, 1$ na resolução do problema auxiliar $n^3 - n = 0$ pode ajudar na visualização de 1320 como $10 \times 11 \times 12$.

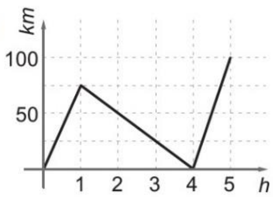
Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

PROBLEMA GERADOR 09 (2012N3F1Q05) (Adaptado)

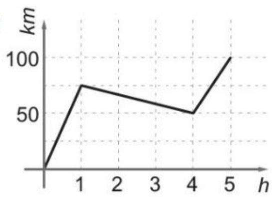
Dois carros *A* e *B* partem de Quixajuba, ao mesmo tempo, pela estrada que vai para Pirajuba. No gráfico abaixo, a linha contínua e a linha pontilhada representam, respectivamente, a distância de *A* e *B* a Quixajuba, ao longo da estrada, em função do tempo. Qual dos cinco últimos gráficos abaixo representa a distância entre os dois carros, ao longo da estrada, em função do tempo?



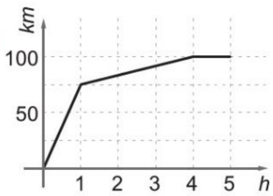
a)



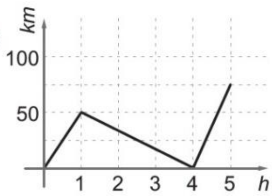
b)



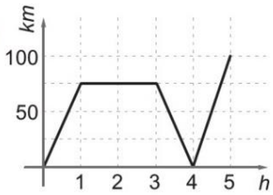
c)



d)



e)



OBJETIVO DO PROBLEMA

Construir a noção de função definida por mais de uma sentença.

VARIÁVEIS LOCAIS

- O estudo do problema separado por intervalos.
- Cada um dos intervalos é modelado por uma função.
- A transposição de informação de um gráfico para outro.

UMA SOLUÇÃO

No instante t = 0, a distância entre os carros A e B é 0 km. De t = 0 até t = 1 a distância entre os dois carros aumenta, sendo que no tempo t = 1 essa distância é de 100 – 25 = 75 km (com isso, eliminamos a letra d)). Entre t = 1 e t = 4, o carro A fica parado e o carro B se aproxima dele, logo, a distância entre os carros diminui (isso exclui as letras c) e e)). No instante t = 4 os carros se encontram, então a distância entre eles é 0 km (isso exclui a letra b)). Entre t = 4 e t = 5 a distância entre os carros A e B aumenta, chegando em t = 5 com 150 – 50 = 100 km de distância.

Portanto, o gráfico mais coerente com a situação apresentada é o da letra a).

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Definição 10: Uma função f pode ser definida por várias sentenças abertas cada uma das quais está ligada a um domínio D_i contido no domínio da f.

(Iezzi; Murakami, 2019).

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

O objetivo deste problema é apresentar a noção de função definidas por mais de uma sentença. O discente deve destacar quatro valores em particular para o t $(0, 1, 4, 5)$ e os três intervalos determinados por eles (incluindo-os). Ele deve notar que, para cada um desses intervalos, a relação definida pela distância entre os carros A e B varia, fazendo com que a lei de formação da função se altere.

Heurísticas úteis:

- *P: Separe as diversas partes da condicionante.*

- *P: É possível resolver uma parte do problema?*

- *C: Decomponha o problema.*

Perguntas que podem ser úteis para a compreensão/resolução/extensão do problema:

- *Na primeira hora a distância entre os dois carros aumentou, permaneceu constante ou diminuiu?*

- *Algum carro para em algum momento? Se sim, qual? O que aconteceu com o outro carro nesse mesmo período?*

- *Os dois carros se encontram em algum momento depois do início da partida? Qual era a distância a Quixajuba nesse momento?*

- *O que acontece com os carros no intervalo de tempo compreendido entre 4 e 5 horas?*

- *Quanto tempo o carro A ficou parado?*

- Na primeira hora de viagem, qual carro tem a velocidade maior? E entre 1 e 4 horas? E entre 4 e 5 horas?

- Se o carro A tivesse mantido a velocidade de partida constante durante todo o trajeto, em quanto tempo ele teria percorrido 150 km? E o carro B?

Apresentar a **Definição 10**.

Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

PROBLEMA GERADOR 10 (2010N1BQQ25)

Uma calculadora possui duas teclas especiais:

- a tecla A, que duplica o número que aparece no visor; e
- a tecla B, que acrescenta uma unidade ao número que aparece no visor.

Por exemplo, se o número 45 estiver no visor e for apertada a tecla B, o visor mostrará o número 46. Se, em seguida, apertarmos a tecla A, o visor mostrará o número 92. Nesse exemplo, apertamos ao todo duas vezes as teclas A e B: uma vez a tecla B e depois uma vez a tecla A, para, a partir de 45, chegar ao 92. Suponha que no visor esteja o número 1. Indique uma maneira de obter o número:

a) 10 apertando um total de quatro vezes as teclas A e B;
b) 15 apertando um total de seis vezes as teclas A e B;
c) 100 apertando um total de oito vezes as teclas A e B.

OBJETIVO DO PROBLEMA

Construir a definição de função composta.

VARIÁVEIS LOCAIS

- Apresentar a operação “apertar a tecla” como uma relação de função.

- Discussão sobre a relação entre apertar uma tecla mais de uma vez e a função composta.

UMA SOLUÇÃO

Podemos usar a seguinte sequência:

a) 1 – tecla A – 2 – tecla A – 4 – tecla B – 5 – tecla A – 10.
b) 1 – tecla A – 2 – tecla B – 3 – tecla A – 6 – tecla B – 7 – tecla A – 14 – tecla B – 15.
c) 1 – tecla A – 2 – tecla B – 3 – tecla A – 6 – tecla A – 12 – tecla A – 24 – tecla B – 25 – tecla A – 50 – tecla A – 100.

Observação: note que é possível passar do 1 ao 2 apertando tanto a tecla A como a tecla B.

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Definição 11: Seja f uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de B em um conjunto C; chama-se **função composta** de g e f à função h de A em C definida por

$$h(x) = g(f(x))$$

para todo x em A.

Indicaremos esta aplicação h por gof (lê-se: g composta com f ou g círculo f); portanto

$$(gof)(x) = \ g(f(x))$$

para todo x em A.

Observação 9:

- A composta gof só está definida quando o contra-domínio da f é igual ao domínio da g.
- Em geral, $fog \ \neq \ gof$, isto é, a composição de funções não é comutativa.

(Iezzi; Murakami, 2019).

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

O uso desse problema permite a introdução do conteúdo **função composta.** Para isso, após resolvido o problema, o docente pode estendê-lo associando “apertar a tecla A” com a função $f(x) = 2x$ e “apertar a tecla B” com a função $g(x) = x + 1$.

A partir disso, ele pode mostrar que, partindo de um número x e apertando as teclas A e B, respectivamente, chega-se no número x → tecla A → 2x → tecla B → 2x + 1, que é o mesmo que calcular $f(x) = 2x \rightarrow g(2x) = 2x + 1$, que equivale a calcular o valor de $g(f(x))$.

De forma semelhante, o docente pode partir de um número x e apertar as teclas B e A, respectivamente, chegando ao número x → tecla B → x + 1 → tecla A → 2x + 2, que é o mesmo que calcular $g(x) = x + 1 \rightarrow f(x + 1) = 2x + 2$, que equivale a calcular o valor de $f(g(x))$.

O docente ainda pode "testar" as funções $f(f(x))$ e $g(g(x))$, associando com "apertar a tecla A duas vezes" e "apertar a tecla B duas vezes". Apresentar a **Definição 11** e a **Observação 9**.

Feito isso, o docente pode questionar se existe determinado x do domínio da função (que, na situação apresentada, é o conjunto dos números naturais) para algum valor do contradomínio da função (*Eu posso chegar no número 42 apertando duas vezes qualquer uma das teclas A ou B?*).

O docente pode ainda solicitar que os discentes encontrem as leis de formação das funções $f(g(f(x)))$, $g(g(g(x)))$, $f(g(f(g(x))))$, e assim por diante.

Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

PROBLEMA GERADOR 11 (2007N3F2Q01)

A calculadora do Dodó tem uma tecla especial com o símbolo ↯. Se o visor mostra um número x diferente de 2, ao apertar ↯ aparece o valor de $\frac{2x-3}{x-2}$.

a) Se o Dodó colocar 4 no visor e apertar ↯, qual número vai aparecer?
b) Dodó colocou um número no visor e, ao apertar ↯, apareceu o mesmo número. Quais são os números que ele pode ter colocado no visor?
c) Dodó percebeu que, colocando o 4 no visor e apertando ↯ duas vezes, aparece de novo o 4; da mesma forma, colocando o 5 e apertando ↯ duas vezes, aparece de novo o 5. O mesmo vai acontecer para qualquer número diferente de 2? Explique.

OBJETIVO DO PROBLEMA

Construir a definição de função inversa.

VARIÁVEIS LOCAIS

- Discussão sobre função injetora, sobrejetora e bijetora.
- A comparação entre o gráfico de uma função e o da sua inversa.
- A relação entre a função inversa e a função identidade.
- Retomada do conteúdo função composta.

UMA SOLUÇÃO

a) Para todo $x \neq 2$, temos $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ ao apertar a tecla . Sendo assim, para $x = 4$, temos:

$$f(4) = \frac{2 \times 4 - 3}{4 - 2} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

b) Se o número colocado por Dodó no visor foi a, devemos ter então:

$$\frac{2a-3}{a-2} = a \Rightarrow 2a - 3 = a(a-2) \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$$

Uma equação do segundo grau cujas raízes são $a = 1$ e $a = 3$.

Portanto, os números que Dodó pode ter colocado no visor são 1 ou 3.

c) Seja $a \neq 2$ o número presente no visor. Ao apertar duas vezes a tecla , teremos:

1ª vez: $f(a) = \frac{2a-3}{a-2}$

2ª vez $f\left(\frac{2a-3}{a-2}\right) = \frac{2\left(\frac{2a-3}{a-2}\right)-3}{\left(\frac{2a-3}{a-2}\right)-2} = \frac{\frac{4a-6}{a-2}-3}{\frac{2a-3}{a-2}-2} = \frac{\frac{4a-6-3a+6}{a-2}}{\frac{2a-3-2a+4}{a-2}} = \frac{\frac{a}{a-2}}{\frac{1}{a-2}} = \frac{a}{a-2} \times \frac{a-2}{1} = a$

Que é o valor que tínhamos no início. Portanto, o mesmo irá acontecer com qualquer número diferente de 2.

Obs: poderíamos ter calculado diretamente através da função composta $f(f(a))$.

É preciso ainda garantir que Dodó pode apertar a tecla uma segunda vez. Para isso, devemos ter $\left(\frac{2a-3}{a-2}\right) - 2 \neq 0$. Note que isso é sempre verdade, já que, se:

$\left(\frac{2a-3}{a-2}\right) - 2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{2a-3}{a-2}\right) = 2 \Rightarrow 2a - 3 = 2a - 4 \Rightarrow -3 = -4$, teríamos um absurdo.

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Definição 12: Uma função $f : A \to B$ é **sobrejetora** quando, para qualquer $y \in B$, sempre temos $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $Im(f) = B$.

Definição 13: Uma função $f : A \to B$ é **injetora** se, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observação 10: Em uma função f de A em B, a condição de função injetora, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, equivale à condição para quaisquer x_1 e x_2 de A, se $f(x_1) = f(x_2)$, então, $x_1 = x_2$

Definição 14: Uma função $f : A \to B$ é **bijetora** se for sobrejetora e injetora.

Definição 15: Dada uma função bijetora $f : A \to B$, chamamos de **função inversa** de f a função $f^{-1}: B \to A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, com $y = f(x)$, temos $f^{-1}(y) = x$.

Observação 11: Nem todas as funções admitem inversa; somente as que são bijetoras.

Observação 12: Se conhecemos a lei que define uma função bijetora $f : A \to B$, podemos obter a lei que define sua inversa, $f^{-1}: B \to A$.

Observação 13: Os gráficos de uma função e de sua inversa são simétricos em relação ao gráfico da função identidade i, definida por $i(x) = x$, que é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

(Leonardo, 2020).

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

Tendo resolvido o item a), o professor pode atribuir outros valores para x e questionar sobre o domínio da função $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$. A partir disso, pode perguntar se valores distintos para x fornecem valores distintos para $f(x)$. Nesse momento, não é necessária uma demonstração formal, mas pode usar o fato de que:

$$\frac{2x-3}{x-2} = \frac{2x-4+1}{x-2} = \frac{2x-4}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$$

E que o valor de $2 + \frac{1}{x-2}$ é único para um determinado x único.

Apresentar a **Definição 13** e a **Observação 10**.

Tendo resolvido o item b), o professor pode atribuir outros valores para o y, encontrando os x correspondentes e, em seguida, sugerir que os discentes encontrem a imagem da função. *O y pode assumir qualquer valor real?*

Espera-se que os discentes consigam expressar a equação $y = \frac{2x-3}{x-2}$ em função de y:

$$y = \frac{2x-3}{x-2} \Rightarrow y(x-2) = 2x-3 \Rightarrow yx - 2y = 2x - 3 \Rightarrow yx - 2x = 2y - 3 \Rightarrow$$

$$(y-2)x = 2y - 3 \Rightarrow x = \frac{2y-3}{y-2}$$

Notando, assim, que o y pode assumir o valor de qualquer número real, com exceção do 2. O professor ainda ratifica esse fato usando o item a) ao notar que, para $y = 2$, deve-se ter $2 + \frac{1}{x-2} = 2$, o que implica $\frac{1}{x-2} = 0$. Um absurdo!

Apresentar as **Definições 12 e 14**.

O docente pode associar o item c) com a composição de função. *Qual é o valor de* $f\big(f(x)\big)$? Ou resolver o problema por etapas. *C: Decomponha o problema.* O discente deve ter cuidado ao fazer as operações algébricas e considerar o novo domínio da função. *P: Volte às definições.*

O docente deve mostrar que a relação "apertar a tecla a 1ª vez" está diretamente relacionada ao par ordenado (x, y) e que a relação "apertar a tecla a 2ª vez" está diretamente relacionada ao par ordenado (y, x). Apresentar a **Definição 15** e a **Observação 11**.

Tem-se um caso particular de função inversa em que $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ é a própria função inversa de $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$. Apresentar a **Observação 12**.

Peça aos alunos que tentem construir um esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$. Apresentar a **Observação 13.**

Após a formalização do conteúdo e sanadas todas as dúvidas, o(a) docente propõe novos problemas que podem ser resolvidos utilizando o conteúdo abordado.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática,** Rio de Janeiro, n. 55, p. 133-154, jul./dez. 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? *In*: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

CARRILLO, J. **Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza:** Metodología de la investigación y relaciones. Huelva: Universidade de Huela, 1998.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos:** função afim e função quadrática. São Paulo: Ática, 2020.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar – volume 1**: conjuntos e funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2019.

LEONARDO, F. M. **CONEXÕES:** matemática e suas tecnologias: manual do professor (grandezas, álgebra e algoritmos). São Paulo: Moderna, 2020.

OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas -** Somando novos talentos para o Brasil. Disponível em: http://www.obmep.org.br/.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

APÊNDICE II – O QUESTIONÁRIO

Caro(a) participante, este questionário tem o intuito de definir o “Perfil dos alunos em Resolução de Problemas”. O mesmo está dividido em 03 (três) partes, que serão explicitadas posteriormente.

Os itens estão dispostos em Escala Likert, com as seguintes variações: “discordo muito, discordo, indiferente, concordo, concordo muito”. Você deverá marcar apenas uma alternativa, sendo esta a mais condizente com a **sua opinião**.

PARTE 1: Características pessoais frente à resolução de um problema.

Aqui você encontrará afirmações relacionadas à sua predisposição para resolver um problema.

ITENS	Discordo muito	Discordo	Indiferente	Concordo	Concordo muito
1. O fato de ser observado ao resolver um problema não afeta negativamente o meu comportamento					
2. Gosto de resolver problemas					
3. Prefiro resolver um problema em grupo a resolvê-lo sozinho					
4. Solicito ajuda quando não consigo resolver um problema					
5. Prefiro resolver um problema a resolver um exercício					
6. Sinto-me entusiasmado diante de um problema, mesmo que não encontre uma solução					
7. Tenho confiança em minhas possibilidades de resolver um problema					
8. Quando o problema é de um conteúdo que não tenho tanta intimidade, fico mais atento e tento procedimentos alternativos					
9. Geralmente, consigo resolver um problema com facilidade					
10. Tenho uma boa memória para fórmulas, conceitos e teoremas matemáticos					
11. Conheço alguns métodos de resolução de problemas					

12. Considero a memorização de fórmulas, conceitos, teoremas úteis, mas sou capaz de resolver problemas sem depender exclusivamente disso					

PARTE 2: Características táticas ao resolver um problema.

Aqui você encontrará afirmações relacionadas ao que você geralmente faz quando está resolvendo um problema.

ITENS	Discordo muito	Discordo	Indiferente	Concordo	Concordo muito
13. Geralmente consigo compreender bem o problema, o que faz com que eu tenha esperança de sucesso no planejamento da resolução					
14. Ao resolver um problema, o planejamento que faço é bem estruturado, relevante e útil para a solução					
15. A resolução de um problema condiz com o que eu geralmente planejo, podendo ter apenas alguns pequenos erros de cálculo que dificilmente reduz sua eficácia					
16. Costumo revisar os cálculos durante todo o processo de resolução de um problema					
17. Após obter uma solução, tento chegar ao resultado de outra maneira					
18. Ao resolver um problema, em meus cálculos observam-se constantemente clareza e coerência					

PARTE 3: Características reguladoras sobre a resolução de um problema.

Aqui você encontrará afirmações relacionadas à importância que você atribui às etapas de resolução de problemas (marque a opção que você acha mais condizente com a sua visão sobre a importância de determinado fato durante o processo de resolução de um problema e não, necessariamente, ao que você faz quando está resolvendo um problema).

ITENS	Discordo muito	Discordo	Indiferente	Concordo	Concordo muito
19. Tenho consciência de que é importante investir um tempo na compreensão de um problema e que não se deve passar para a próxima fase até que se tenha conseguido					
20. Considero que a resolução de um problema pode depender em grande parte de um bom planejamento, devendo-se atribuir-lhe importância e pensar que se deve voltar a ele sempre que necessitar					
21. Quando se resolve um problema, considero que a explicação do que se está fazendo deve ser clara, esclarecendo as razões porque se está dando destaque a algum procedimento, o que se fará com esse resultado inicial e o que se está fazendo exatamente					
22. Ao se resolver um problema, considero importante que o processo seja totalmente coerente e esteja organizado; cada etapa deve ser revisada, inclusive a resposta final					
23. A existência de um prazo determinado de tempo para resolver um problema não produz estresse ou ansiedade, pois cada fase da resolução precisa de certo investimento de tempo					
24. É importante obter resultados significativos dentro do prazo, ainda que isso suponha deixar alguma justificativa sem tanta importância para o final					
25. Acredito que se deve conhecer um bom repertório de estratégias de Resolução de Problemas; além de ser consciente do papel que desempenham em uma boa resolução					
26. Penso que qualquer resolução de um problema pode ser influenciada por variáveis externas (afetivas, sociais etc.).					

REFERÊNCIAS

CARRILLO, J. **Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza:** Metodología de la investigación y relaciones. Huelva: Universidade de Huela, 1998.

A partir da tradução do questionário original, procuramos adaptá-lo em assertivas mais objetivas, tendo em vista que um questionário maior poderia fazer com que a turma não desse a devida atenção ao que estivesse lendo. Outro ponto é que procuramos, sempre que necessário, converter uma assertiva em duas ou mais, para que pudéssemos analisar um parâmetro por vez. Por exemplo, os itens 25 e 26 do nosso questionário constituíam a alternativa 5 do item 3.6 do questionário original.

As assertivas também foram escritas de tal forma que o *bom resolvedor de problemas* pudesse marcar "concordo muito" em todas as afirmações, isso possibilitaria fazer uma análise das pontuações obtidas em cada item dentro de determinada amplitude, a partir do total de estudantes respondentes.

A versão original tinha como público-alvo os professores. Já o nosso questionário tem como publico-alvo estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

APÊNDICE III – ANÁLISES DOS DEMAIS ENCONTROS

1. ENCONTRO 03 – 09/05/2022

Nesse encontro propusemos o Problema Gerador 02, cujo intuito foi o de apresentar a definição de função, em termos de sua lei de formação. Conseguimos abordar a letra a).

PROBLEMA GERADOR 02 (2005N3F2Q03)

Numa certa cidade existem apenas duas empresas de táxi, a Dona Leopoldina e a Dom Pedro II. A Dona Leopoldina cobra uma taxa fixa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 por quilômetro rodado. Já a Dom Pedro II cobra uma taxa fixa de R$ 1, 00 mais R$ 0,75 por quilômetro rodado.

Tarifas de Táxi	
Dona Leopoldina	Dom Pedro *II*
Taxa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 por km rodado	*Taxa de R$ 1,00 mais R$ 0,75 por km* rodado

Os amigos Bento, Sofia e Helena trabalham nessa cidade e sempre voltam de táxi do trabalho para casa. Para pagar menos, Helena sempre usa os táxis da Dona Leopoldina e, pelo mesmo motivo, Bento só usa os da Dom Pedro II. Sofia usa os táxis das duas empresas, porque paga o mesmo preço em ambas.

a) Quanto Sofia paga para ir de táxi do trabalho para casa?

b) Qual dos três amigos percorre, de táxi, a menor distância entre seu trabalho e sua casa?

O Prof. Pesq. lê o problema para a turma, esclarecendo as informações e retomando termos vistos no encontro anterior como, por exemplo, a expressão “taxa fixa”, usada na condição 1 do Problema Gerador 01. Além disso, atribui alguns valores para a quilometragem percorrida em cada uma das empresas de táxi, com o intuito de verificar se a turma havia compreendido os dados do problema. Além de questionar o porquê que para Sofia era indiferente usar qualquer uma das empresas de táxi.

Utilizando de forma implícita as etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através* da Resolução de Problemas, é descrito, a seguir, o envolvimento da turma na resolução do problema. Procurou-se manter os grupos com o formato que foi estabelecido no encontro anterior.

Sendo assim, o Prof. Pesq. auxilia os grupos sempre que solicitado:

[Diálogo com o Grupo 03]
(1) **A_1G_3**: A distância da casa dela para o trabalho são quantos quilômetros?
(2) **Prof. Pesq.**: Essa informação está contida do enunciado do problema?
(3) **A_1G_3:** Não.
(4) **Prof. Pesq.**: Então você tem que descobrir primeiro essa distância, para depois calcular quanto Sofia irá pagar.
(5) **A_2G_3**: Aí como é que descobre?
(6) **Prof. Pesq.**: O que você acha que deve fazer para descobrir a distância?
(7) **A_2G_3**: Regra de três?

O aluno A_1G_3 demonstrou ter compreendido que para calcular o valor a ser pago por Sofia do trabalho para casa era necessário, antes de tudo, saber a distância entre esses dois locais; uma informação que não está contida no enunciado do problema, mas que pode ser obtida sem maiores dificuldades. Além disso, quando questionado sobre o porquê de usar "regra de três", o aluno A_2G_3 apresentou indícios de que seria porque tinha sido um assunto visto recentemente, sem apresentar argumentos sólidos que pudessem justificar essa escolha. Tal argumento seria mais coerente (ainda que não resolvesse o problema), se o tipo específico das funções que podem ser retiradas do problema fosse a função linear (que pode ser associada com a regra de três), não sendo este o caso.

Com intuito de que reconhecessem o padrão, o Prof. Pesq. sugere ao Grupo 08, a seguir, que procurassem resolver o problema atribuindo alguns valores para a quilometragem:

[Diálogo com o Grupo 08]
(1) **Prof. Pesq.**: Vocês conseguem expressar o valor a ser pago ao táxi da Dona Leopoldina através de uma fórmula?
(2) **A_2G_8:** Como assim?
(3) **Prof. Pesq.**: Através de uma expressão algébrica que consiga relacionar a distância percorrida com o valor a ser pago ao táxi?
(4) **A_2G_8:** Acho que não.
O Prof. Pesq. tenta outra abordagem.
(5) **Prof. Pesq.**: E se a gente atribuísse valores de quilometragem? Fazendo por tentativa? *(Ele lê as condições do táxi da empresa Dona Leopoldina e da empresa Dom Pedro II).*
(6) **A_3G_8:** Mas aí como eu vou saber a quilometragem de Sofia do trabalho para a casa dela?
(7) **Prof. Pesq.**: Vai ser a quilometragem que irá proporcionar o mesmo valor nos dois taxis. *(Pausa)*. Lembram que para Sofia é indiferente usar os taxis de qualquer uma das empresas?
(8) **A_3G_8:** Sim... Porque ela vai pagar o mesmo valor.
(9) **Prof. Pesq.**: Exatamente. Por exemplo, se Sofia morar a 2 km do trabalho, quanto ela iria pagar em cada um dos taxis?
Nesse momento, o Prof. Pesq. aguarda o grupo fazer os cálculos necessários. Finalmente, um dos componentes responde:

(10) **A_3G_8:** R$ 4,00 e R$ 2,50 *(Referindo-se aos táxis das empresas Dona Leopoldina e Dom Pedro II, respectivamente)*.
(11) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Então o que podemos concluir a partir disso? Sofia mora a 2 km de distância do trabalho?
(12) **Grupo 08:** Não.
(13) **Prof. Pesq.**: Por quê?
(14) **A_3G_8:** Porque não deu o mesmo valor.

Analisada posteriormente, reconhecemos que a fala do Prof. Pesq. em (7) poderia ter sido omitida. O intuito seria que os discentes chegassem a essa conclusão sozinhos. Essa postura assumida pelo Prof. Pesq. requer um certo cuidado pois, segundo Polya (2006, p. 11) "O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor". Apesar disso, de posse dessa informação, eles conseguiram resolver o problema atribuindo valores de quilometragens a partir do 3º quilômetro e pararam quando chegaram no 8º quilômetro, demonstrando terem compreendido perfeitamente o que se deveria fazer a partir da informação oferecida. Conseguindo, ainda, diferenciar os 8 km do valor a ser pago por Sofia, que seria R$ 7,00.

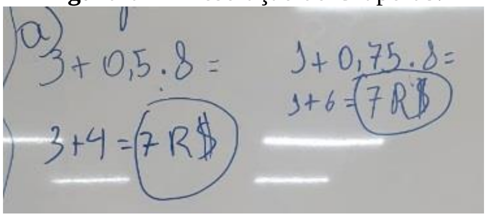
O Grupo 04 teve uma certa dificuldade em compreender o problema:

[Diálogo com o Grupo 04]
(1) **A_1G_4**: Sei nem pra onde é que vai isso!
(Risos). O Prof. Pesq. lê o problema para o grupo.
(2) **Prof. Pesq.**: Se você fosse pegar um táxi da Dona Leopoldina e você fosse percorrer 2 km, quanto você pagaria?
(3) **A_1G_4**: R$ 3,00.
(4) **Prof. Pesq.**: R$ 3,00 mais quanto?
(5) **A_1G_4**: Mais 50 centavos...
(6) **Prof. Pesq.**: Por cada quilômetro, né isso?
(7) **A_1G_4**: É...
(8) **Prof. Pesq.**: Então você pagaria R$ 4,00.
O Prof. Pesq. faz o mesmo questionamento, agora referente aos táxis da empresa Dom Pedro II. Após obtida a resposta, ele continua:
(9) **Prof. Pesq.**: Então qual empresa você escolheria?
(10) **A_1G_4**: A de R$ 2,50.
(11) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo... Então eu quero saber o seguinte: Pra Sofia é indiferente escolher os táxis de uma empresa ou de outra. Por quê? *(Pausa longa)*. Se eu perguntasse pra você: você escolheria o táxi da empresa Dona Leopoldina em que você pagaria, por exemplo, R$ 10,00 ou os da empresa Dom Pedro II, em que você pagaria também R$ 10,00? Qual táxi você escolheria?
(12) **A_1G_4**: Qualquer um.
(13) **Prof. Pesq.**: Por quê?
(14) **A_1G_4 e A_2G_4**: Porque é o mesmo preço.
(15) **Prof. Pesq.**: Então pra Sofia é do mesmo jeito! (*O Prof. Pesq. lê com o grupo o problema novamente, destacando o fato de Sofia pagar o mesmo preço em ambas as empresas)*. Então eu quero saber qual é o valor que ela vai pagar, se esse valor é o mesmo para as duas empresas. Notem que eu preciso saber, inicialmente, a distância da casa de Sofia ao trabalho.

O grupo não inferiu corretamente a partir dos dados do problema, necessitando do auxílio do Prof. Pesq. para responder perguntas como a (2). Uma alternativa foi procurar inserir os membros no contexto apresentado, em que eles assumiriam o papel atribuído a Sofia. Isso possibilitou a afirmação (14) – algo que já estava descrito no enunciado do problema. Reis (2017, p. 159) afirma que "a dificuldade na aprendizagem da matemática tem grandes conflitos com a questão da interpretação", parecendo não estarem dissociadas uma da outra. O grupo não conseguiu avançar muito mais depois disso.

No momento do registro das resoluções na lousa, foram ao quadro os representantes dos Grupos 08 e 02. As Figuras 01 e 02 representam as respectivas soluções:

Figura 01 – Resolução do Grupo 08.

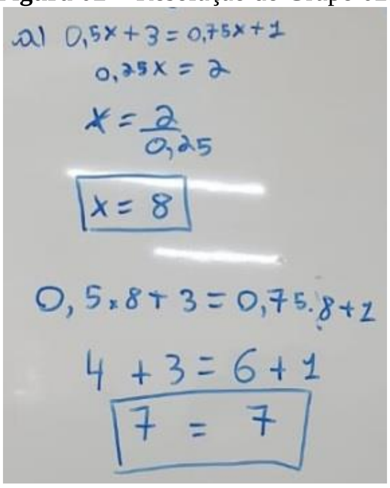


Fonte: Acervo do autor (2022).

Esse grupo, respondeu ao item a) atribuindo valores para as quilometragens, tentando assim obter algum valor que resultasse em um mesmo preço a se pagar por Sofia. Na lousa, foi registrada apenas a tentativa bem sucedida, na qual verificou-se que para 8km, o valor a ser pago em ambas as empresas será de R$ 7,00. Em seguida, aproveitamos a solução para discuti-la sobre outros aspectos, muitas vezes adaptando o problema ao que se queria. Foi levantada uma discussão sobre as desvantagens de se utilizar esse procedimento na situação em que, por exemplo, Sofia morasse a 50 km de distância do seu trabalho; se existisse alguma outra quilometragem que fornecesse também o mesmo valor a ser pago por Sofia (para o problema em questão, não; por se tratar de funções polinomiais do 1º grau), ou até mesmo se a resposta correta fosse uma fração de quilômetro. Outrossim, a solução mostra que o grupo compreendeu de forma satisfatória o que solicitava o item a) do problema.

O Grupo 02 procurou obter, inicialmente, expressões algébricas que fornecessem o valor a ser pago aos táxis de cada uma das empresas a partir dos quilômetros percorridos, conforme previa nossa Sequência Didática:

Figura 02 – Resolução do Grupo 02.



Fonte: Acervo do autor (2022).

O grupo reconheceu a possibilidade de converter as sentenças “taxa fixa de R$ 3,00 mais R$ 0,50 por quilômetro rodado” e “taxa fixa de R$ 1, 00 mais R$ 0,75 por quilômetro rodado” nas expressões $0{,}5x + 3$ e $0{,}75x + 1$, respectivamente. Isso pode ser um indício de que, aparentemente, o grupo superou a barreira de converter uma sentença da língua vernácula para a linguagem algébrica. Sobre a linguagem escrita na matemática, Neves e Resende (2016, p. 618) afirmam que ela “traz mais dificuldades, pois os alunos têm que perceber a sua necessidade e devem dominar os signos necessários”.

Na formalização do conteúdo, o professor lê novamente o Problema Gerador, tentando relacioná-lo com o assunto a ser apresentado.

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Imaginem que sejam vocês que irão pegar um táxi com uma dessas duas empresas. Estamos aqui em Martins. Qual das duas empresas de táxi vocês escolheriam?
(2) **A_1G_7**: A mais barata.
(3) **Prof. Pesq.**: Exatamente. Não faz muito sentido, dentre duas opções, escolhermos justamente a que iremos pagar mais... E esse valor depende de quê?
(4) **A_1G_7**: Da distância que vai percorrer.
(5) **Prof. Pesq.**: Do mesmo jeito acontece com os personagens do problema.
O Prof. Pesq. continua explicando os dados do problema. O Prof. Pesq. ainda chama a atenção o fato de o problema ser do ano de 2005; sendo assim, tais valores poderiam estar desatualizados.

O Prof. Pesq. ainda explica à turma as duas soluções apresentadas, evidenciando os aspectos positivos de ambas, e usando as soluções para a construção do conceito. Utilizando a tarifa da empresa Dona Leopoldina, atribui-se valores de quilometragem iguais a 1, 2, 3 e 4 e obteve-se as seguintes expressões: $3 + 0{,}5 \times 1 = 3{,}50$; $3 + 0{,}5 \times 2 = 4{,}0$; $3 + 0{,}5 \times 3 = 4{,}5$ e $3 + 0{,}5 \times 4 = 5{,}0$. Questiona-se:

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Vocês conseguem identificar algum padrão aqui?
(2) **A_4G_2**: A quilometragem está mudando.
(3) **Prof. Pesq.**: Percebam que o que muda de uma expressão para outra é justamente que o cinco está sendo multiplicado pela quilometragem percorrida. Olhando essa sequência, para *x* quilômetros, como ficaria a expressão?
(Pausa). O Prof. Pesq. retoma a expressão anterior, destacando os números 1, 2, 3 e 4, e repete a pergunta.
(4) **A_4G_2**: Substitui os números que estão mudando por *x*.
O Prof. Pesq. concorda e escreve na lousa a seguinte expressão: $3 + 0{,}5x$.
(5) **Prof. Pesq.**: Essa é a expressão que vai me dar qualquer valor a ser pago para os táxis da empresa Dona Leopoldina a partir dos quilômetros percorridos. Da mesma forma podemos fazer para os táxis da empresa Dom Pedro II. *(Utiliza o mesmo argumento e chega na expressão* $1 + 0{,}75x$*).* Sendo assim, qual seria, por exemplo, o valor que eu pagaria, utilizando um táxi da empresa Dona Leopoldina, se a distância da minha casa ao trabalho for de 100 km? E um táxi da empresa Dom Pedro II?
Os alunos respondem aos questionamentos corretamente.
(6) **Prof. Pesq.**: Notem que nos dois casos eu tenho uma relação. Tenho uma relação de dependência entre duas variáveis (lembram da aula passada?). A primeira variável é a distância (quilometragem) e a segunda variável é o valor (dinheiro) a ser pago na corrida. Essas duas variáveis se relacionam. Então aqui eu tenho também uma situação que representa uma função. A primeira expressão representa uma função que me dará o valor que eu vou pagar ao táxi da empresa Dona Leopoldina, e a segunda expressão representa uma função que me dará o valor que eu vou pagar ao táxi da empresa Dom Pedro II.

Em seguida, o Prof. Pesq. escreve na lousa a seguinte observação, proposta por Dante e Viana (2020):

Se a função f relaciona o elemento x de A com o elemento y de B, então podemos escrever $f: x \longmapsto y$ ou, mais comumente:

$f(x) = y$ (Lemos: f de x é igual a y).

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Nós temos aí dois conjuntos: o conjunto A e o conjunto B. O conjunto A corresponde aos valores das quilometragens. Já o conjunto B é formado por todos os valores possíveis ao se percorrer essas distâncias. A função irá relacionar um valor de quilometragem de A com um único valor, em reais, de B. Essa relação podemos representar da seguinte forma: $y = f(x)$. O nosso x (que pertence ao conjunto A) é chamado de variável independente. O nosso y (que pertence ao conjunto B) é chamado de variável dependente. Ou seja, o valor a ser pago depende de quê?
(2) **A_1G_7:** Da distância que você vai andar.
(3) **Prof. Pesq.**: Exatamente. *(Pausa)*. Eu falei que essas duas variáveis se relacionam. Essa relação pode ser expressa pelo que chamaremos de lei de formação ou lei de correspondência.

O Prof. Pesq., então, escreve na lousa as seguintes leis de formação:

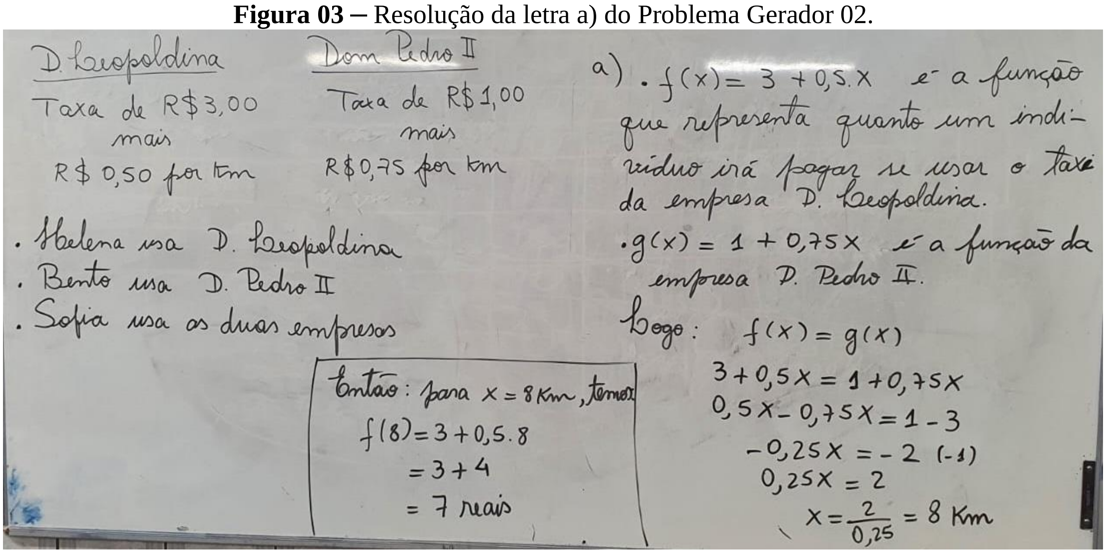
$$f(x) = 3 + 0{,}5x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 1 + 0{,}75x$$

Que correspondem aos valores f e g, a serem pagos por uma pessoa que andou x quilômetros em um táxi da empresa Dona Leopoldina ou da empresa Dom Pedro II, respectivamente. Em seguida, o Prof. Pesq. retoma a pergunta do item a) do problema.

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: A gente não sabe a distância do trabalho de Sofia a sua casa. Mas nós temos uma informação importante. Qual seria?
(2) **A$_4$G$_2$**: Que ela paga o mesmo valor.
(3) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Independentemente do táxi escolhido, ela irá pagar a mesma quantia em reais.
Nesse momento, o Prof. Pesq. retoma as duas leis de formação que foram obtidas, igualando-as e resolvendo a equação do 1º grau associada. Essa etapa não causou maiores dúvidas. Em seguida, pergunta-se:
(4) **Prof. Pesq.**: O que representa esse $x = 8$?
Alguns alunos responderam que representava o valor que Sofia paga ao táxi. O Prof. Pesq. retoma novamente as notações x e $f(x)$, associando-as com quilometragem e valor a ser pago, respectivamente. Em seguida, repete a pergunta. Parte dos estudantes falam que o 8 representa a distância do trabalho de Sofia a sua casa.
(5) **Prof. Pesq.**: Lembrem que a pergunta é quanto Sofia irá pagar.
Os estudantes, após um tempo, percebem que se pode obter esse valor substituindo o $x = 8$ em qualquer uma das leis de formação de $f(x)$ ou $g(x)$.

A Figura 03 apresenta a resolução do item a) do Problema Gerador 02, construída a partir da interação com a turma e das soluções propostas pelos grupos, e que resume as discussões apresentadas.

Figura 03 – Resolução da letra a) do Problema Gerador 02.



Fonte: Acervo do autor (2022).

A solução está bem próxima da proposta na nossa Sequência Didática. O Prof. Pesq. ainda atribui alguns valores para o x com o intuito de que os alunos visualizem as substituições.

Ademais, eles apresentaram uma certa dificuldade em reconhecer a função através da notação $y = f(x)$; já que, em um momento, o $f(x)$ era usado para definir a situação como um todo $(3 + 0{,}5x)$, outras vezes era igual ao y; e em outras, assumia valores específicos (como o $f(8)$).

Portanto, assim como a variável x que "sem coincidir *individualmente* com nenhum dos números reais desse intervalo, é susceptível de os representar a todos" (Caraça, 1951, p. 112), a notação $f(x)$ também apresenta caráter dúbio. Andrade e Saraiva (2012, p. 141) afirmam que "a notação da função surge, deste modo, como ambígua, pois $f(x)$ tanto representa o nome da função como o valor da função f, realçando que o seu significado depende do contexto – o que pode confundir um aluno".

Encerra-se o Encontro 03.

2. ENCONTRO 04 – 11/05/2022

Nesse encontro continuamos as discussões sobre o Problema Gerador 02. Após ser respondida a letra a) do problema, os discentes tentaram resolver a letra b): "Qual dos três amigos percorre, de táxi, a menor distância entre seu trabalho e sua casa?", a maioria usando as expressões algébricas obtidas na etapa anterior.

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: A gente já sabe que a distância do trabalho de Sofia a sua casa são 8 km. E Helena? *(Silêncio)*. Nós sabemos que Helena usa os táxis da empresa Dona Leopoldina. O que isso significa? Por que Helena escolhe os táxis dessa empresa?
> (2) **A_1G_7**: Porque é mais barato.
> (3) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Isso quer dizer que, para Helena, o valor pago ao táxi da empresa Dom Pedro II é maior que o valor que ela paga ao táxi da empresa Dona Leopoldina. Nós podemos representar isso da seguinte forma: $g(x) > f(x)$.

Antes de resolver a expressão, o Prof. Pesq. revisa o conteúdo Inequações. Os estudantes já estavam familiarizados com esse conteúdo, pois o Prof. Mat. já o havia ministrado no 1º Bimestre. Sendo assim, não apresentaram maiores dificuldades em resolver a inequação:

$$1 + 0{,}75x > 3 + 0{,}5x \Rightarrow x > 8$$

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: Notem que a gente não descobriu a distância do trabalho de Helena a sua casa. Pode ser 9km, 10km, 11km..., mas nós conseguimos obter uma informação importante. Qual?
> *(Pausa longa).*
> (2) **A_4G_2**: Que é um valor maior que 8.

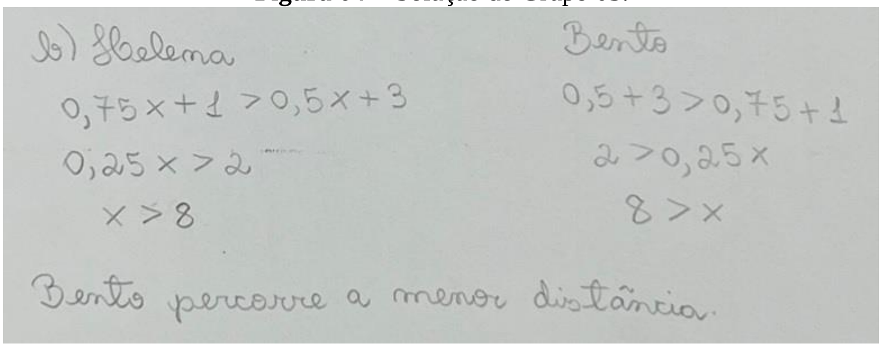
Utilizando o mesmo argumento para Bento, chegamos na seguinte inequação:

$$3 + 0{,}5x > 1 + 0{,}75x \Rightarrow x < 8$$

De forma semelhante, a turma percebe que Bento mora a menos de 8 km de distância do trabalho; percorrendo, assim, a menor distância entre os três.

A Figura 04, a seguir, apresenta a solução de um dos grupos:

Figura 04 – Solução do Grupo 05.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Houve ainda uma discussão no sentido de se tínhamos ou não condições de saber quanto cada um paga ao usar determinado táxi para ir do trabalho à casa. O Prof. Pesq. afirmou que, com os dados do problema, não se pode chegar a uma resposta para tal pergunta; mas que, a partir dos cálculos, chega-se à conclusão de que Bento paga menos de R$ 7,00 e Helena paga mais de R$ 7,00. Do item a), já se sabia que Sofia paga R$ 7,00.

Além disso, questionou-se a situação em que se um indivíduo fosse percorrer uma distância “longa”, qual empresa de táxi ele deveria escolher. O aluno A_4G_2 argumenta que até 30 km usar os táxis da empresa Dom Pedro II seria mais vantajoso. O Prof. Pesq. pede para ele calcular quanto ele pagaria ao percorrer 30 km em cada uma das empresas. Ele calcula corretamente os valores de R$ 23,50 para a empresa Dom Pedro e R$ 18,00 para a empresa Dona Leopoldina. Percebendo seu equívoco, e revisando (por sugestão do Prof. Pesq.) a resolução do item b), ele acaba por concluir que para qualquer quilometragem maior que 8 km, é mais vantajoso usar os táxis da empresa Dona Leopoldina.

Esse fato iniciou uma discussão sobre o destaque que muitas vezes se dá a parte fixa de expressões lineares que definem determinadas situações-problema – como é o caso da taxa fixa de R$ 3,00 cobrada pelos táxis da empresa Dona Leopoldina e também da taxa fixa de R$ 1,00 cobrada pela empresa Dom Pedro II – em detrimento de se fixar o olhar no coeficiente angular de funções polinomiais de 1º grau, cuja influência se torna mais significativa conforme os valores de x aumentam, por exemplo. Foi o que, provavelmente, levou o estudante A_4G_2, inicialmente, a considerar que usar táxis da empresa Dom Pedro era mais vantajoso até 30 km.

Outrossim, isso desencadeou discussões sobre a contratação de serviços que cobram uma tarifa fixa, sobre assinaturas de planos de *streaming*, sobre contratação de planos funerários, sobre compras de produtos pela internet (com ou sem frete grátis). Além de desdobramentos sobre a variável x ser de natureza discreta ou contínua, conforme sugeria nossa Sequência Didática.

Finalizada a discussão sobre o Problema Gerador 02, seguimos para a 10ª etapa da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através* da Resolução de Problemas, que é a proposição e resolução de novos problemas.

Com o intuito de fixar o conceito de função, e conforme sugerido na nossa Análise *a Priori*, seguimos o que defende Santos e Barbosa (2017) quando argumentam que a comunicação do conceito de função pode se dar de sete formas: tabela, máquina de transformação, diagrama, expressão algébrica, generalização, gráfico e definição. Sendo assim, procuramos trabalhar, nos problemas adicionais seguintes, cada uma das cinco primeiras comunicações. Os Problemas Geradores 01 (com seus problemas adicionais) e 02 auxiliaram na comunicação de número 7. Os Problemas Geradores 04 e 05, auxiliarão na comunicação de número 6.

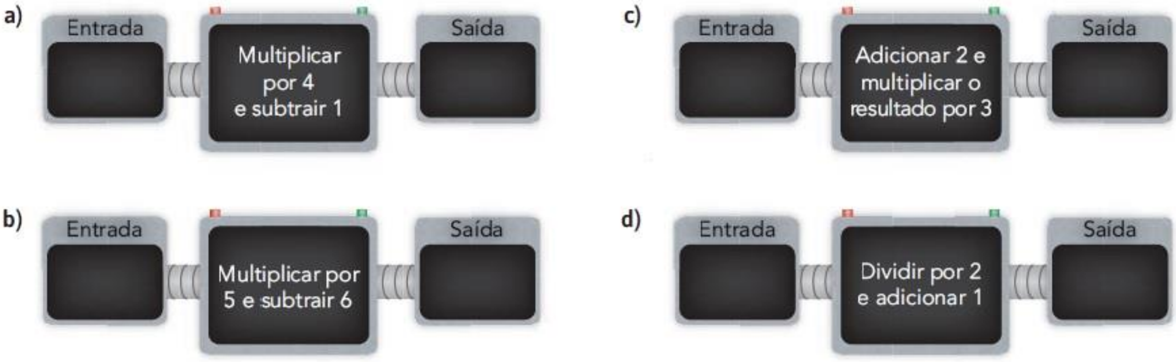
A análise de cada uma dessas representações, como defendido por Santos e Barbosa (2017, p. 27) “evidencia especificidades e potencialidades em realizar e revelar características do conceito”.

Sendo assim, o Prof. Pesq. fez uma revisão dos problemas discutidos nas aulas anteriores, ratificando serem situações-problema que foram modeladas através de funções. Acrescenta que, a partir daquele momento, eles iriam estudar os vários tipos de representação de uma função, além da representação como *definição*, vista nas discussões passadas.

O primeiro problema adicional apresenta a noção de função como uma *máquina de transformação*, conforme pode ser observado a seguir:

PROBLEMA ADICIONAL 01

Represente no caderno cada uma das quatro máquinas abaixo. Em seguida, coloque cada um dos números do conjunto {0, 1, 2, 3, 4} na entrada de cada máquina e, respeitando as operações indicadas, escreva os resultados que serão apresentados na saída.



(Dante; Viana, 2020, p. 16)

[Diálogo com a turma]

(1) **Prof. Pesq.**: Esse problema traz a representação de uma função através de uma máquina de transformação. Nós colocamos o número na entrada da máquina, efetuamos com esse número as operações descridas na máquina e o resultado aparece na saída. Lembram da aula passada? Lembram do conjunto A da definição de função? *(Os discentes confirmam. Ainda assim, o Prof. Pesq. escreve a definição na lousa).* Então os números colocados na entrada representam o nosso conjunto A. Da mesma forma, os números que aparecem na saída representam o nosso conjunto B. Então, se eu colocar na entrada o número 0, e efetuar as operações *multiplicar por 4 e subtrair 1*, que número aparecerá na saída?

(2) **Alguns alunos**: – 1.

O Prof. Pesq. pergunta sobre os demais números e os alunos respondem sem maiores problemas.

(3) **A_3G_5**: É só isso?

O Prof. Pesq. confirma.

(4) **A_4G_2**: Aí, nesse caso, o conjunto da saída ele vai ser independente, né? Ou é ao contrário?

(5) **Prof. Pesq.**: Ao contrário. Os elementos da entrada constituem os termos independentes, e os elementos da saída constituem os termos dependentes. Note que para eu colocar o 3 na máquina não existe qualquer impedimento. Ele não depende de algo. Já para obtermos o 11 na saída é necessário que coloquemos o 3 na entrada. O 11 é determinado pelo 3, ele depende do 3. De forma geral, os elementos da saída dependem dos elementos que eu escolho na entrada.

Nesse momento, o Prof. Pesq. ainda associa esse exemplo com a máquina que produz suco ou polpa (Problema adicional 01 do Problema Gerador 01), afirmando que o tipo de suco ou de polpa depende do tipo de fruta inserida.

O Prof. Pesq. ainda descreve que os elementos do conjunto A são denotados pela variável x e os elementos do conjunto B são denotados por y ou $f(x)$.

(6) **Prof. Pesq.**: Se eu colocasse o x na entrada da máquina, iria sair que valor? O que eu faço com o x?

(7) **A_1G_7**: Multiplica por 4 e subtrai 1.

(8) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Então, qual é a lei de correspondência dessa função? *(Pausa)*. Seria $f(x)$ = ...

(9) **A_4G_2**: A $4x - 1$.

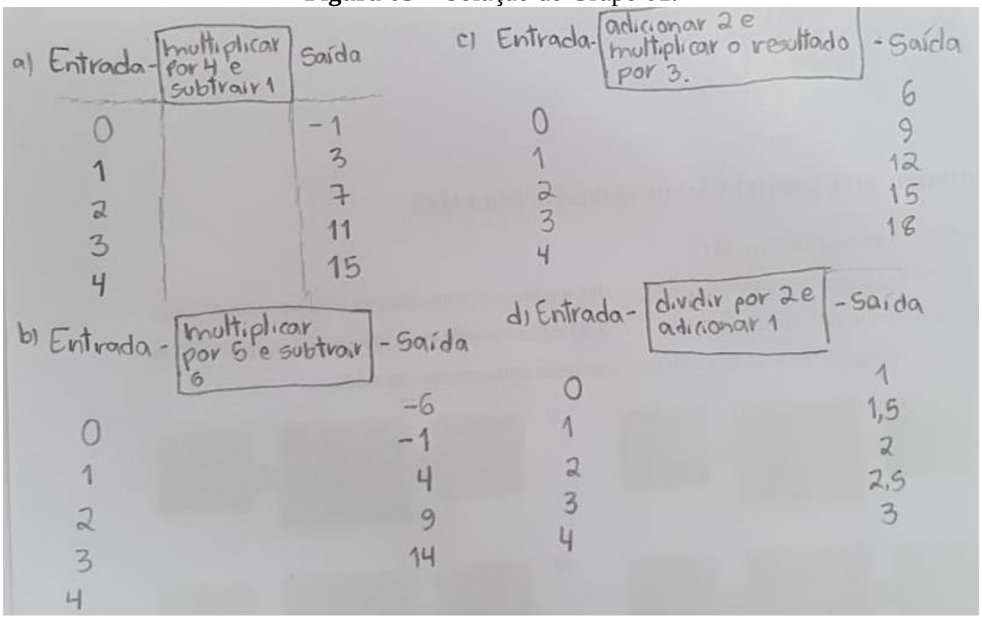
O Prof. Pesq. ainda atribui diversos valores para o x na lei de formação obtida, obtendo da maioria dos alunos respostas satisfatórias.

O aluno A_4G_2 (na fala (4)) já demonstra uma preocupação em relacionar as partes de entrada e saída da máquina com as variáveis independente e dependente, apesar de ter se confundido e invertido os termos. Isso é um passo importante, já que o intuito de apresentar as várias comunicações do conceito de função é justamente permitir que o discente transite entre as diferentes representações e construa o conceito de função como algo não isolado. Segundo Souza e Souza (2019, p. 24), “ao entender que essas representações são diferentes fontes de informação sobre um mesmo objeto matemático, temos uma possibilidade de superação da confusão entre forma e conteúdo”.

Apesar de nessa etapa já ser possível apresentar as noções de domínio e imagem de uma função, optou-se por abordar esses tópicos no Problema Gerador 03, conforme previa nossa Sequência Didática. Ademais, a fala (8) inicia uma discussão que será fortalecida no problema adicional 03 deste encontro, que é a possibilidade de expressar uma função a partir de uma expressão algébrica.

Com as discussões apresentadas, os discentes conseguiram responder aos demais itens do problema. A Figura 05, a seguir, apresenta a solução do Grupo 01.

Figura 05 – Solução do Grupo 01.



Fonte: Acervo do autor (2022).

O segundo problema adicional apresenta a noção de função como uma *tabela*. Santos e Barbosa (2017) afirmam que, para essa comunicação, pode-se destacar as noções de variação e de dependência. Temos o seguinte problema:

PROBLEMA ADICIONAL 02

Observe na tabela a seguir a medida de comprimento do lado (em cm) de uma região quadrada e a medida de área *A* (em cm²).

Relação entre a medida de comprimento do lado e a medida de área de uma região quadrada

Medida de comprimento do lado (ℓ em cm)	1	3	4	5,5	10	...	x
Medida de área (A em cm²)	1	9	16	30,25	100	...	x^2

a) Quais são as variáveis dessa situação?

b) Qual é a variável dependente?

c) Qual é a variável independente?

d) Qual é a lei da função que associa a medida de comprimento do lado com a medida de área da região quadrada?

e) Quanto mede a área da região quadrada cujo lado tem medida de comprimento de 12 cm?

f) Qual é a medida de comprimento do lado da região quadrada cuja área mede 169 cm^2?

(Dante; Viana, 2020, p. 16)

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Notem que agora as informações estão resumidas numa tabela. Essa é uma outra forma que podemos comunicar o conceito de função. (*O Prof. Pesq. lê o problema e revisa a definição de função).* Quem seria o nosso conjunto A?
(2) **Alguns alunos**: O lado.
(3) **Prof. Pesq.**: E o nosso conjunto B?
(4) **Alguns alunos**: A área.
(5) **Prof. Pesq.**: Notem que todo elemento do conjunto A está associado a um elemento do conjunto B, pois para cada valor de comprimento de lado é possível associar um valor de área. Notem que todo elemento do conjunto A está associado a um único elemento do conjunto B, pois para um valor qualquer de lado só existe uma única área associada e ele. *(Pausa).* Pode algum quadrado não ter área?
(6) **A_1G_4**: Não.
(7) **Prof. Pesq.**: Pode um quadrado de lado 3 cm está associado a duas ou mais áreas?
(8) **A_1G_4**: Não.

Em seguida, o Prof. Pesq. discute os itens com os estudantes. No item a) eles respondem “medida do lado e medida da área”. O Prof. Pesq. diz que essas duas variáveis se relacionam, uma dependendo da outra. Essa afirmação auxilia na resolução dos itens b) e c). No item d), a maioria dos discentes expressaram a lei da forma $f(x) = x^2$. O Prof. Pesq. só chama a atenção pelo fato de que, na tabela, a medida do comprimento do lado do quadrado está sendo representada por l e a medida da sua área por $A(l)$, isso faz com que ele escreva a lei de formação da função da seguinte maneira:

$$A(l) = l^2$$

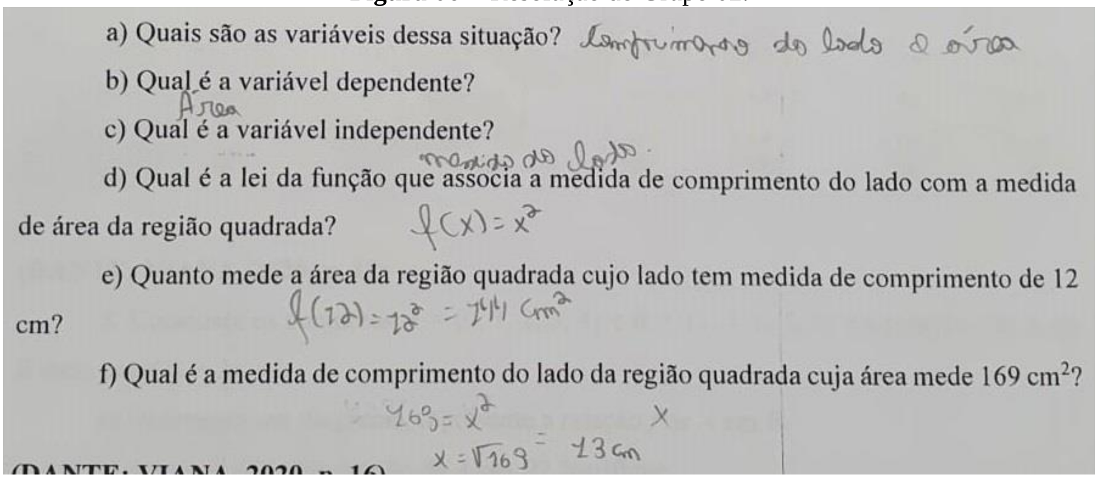
Os itens e) e f) não apresentaram maiores problemas. Nesse último, o Prof. Pesq. destacou o cuidado que se deve ter em descartar a raiz negativa que também é solução da equação $l^2 = 169$, já que não existe medida negativa de lado. Essa discussão se dirigiu para situações contextualizadas nas rotinas dos discentes que podem ser representadas por funções, onde várias delas poderiam ser organizadas através de uma tabela. Isso corrobora com o que argumenta Ponte (1990), quando diz que

> Construir tabelas, calcular valores numéricos, desenvolver um sentido do quantitativo, adquirir sensibilidade para o que são aproximações aceitáveis e inaceitáveis, são aspectos importantes da competência matemática que só podem ser desenvolvidas se se lidar correntemente e com desembaraço com números concretos (se possível, provenientes de contextos da vida real). (Ponte, 1990, p. 07).

Reis (2017) também argumenta sobre a importância de se utilizar contextos “no movimento de recriação da conexão essencial do objeto em estudo” (Reis, 2017, p. 142). Segundo ela, o “conhecimento científico é a abstração resultante da realidade.” (Reis, 2017, p. 142).

A Figura 06, a seguir, apresenta a solução de um dos grupos:

Figura 06 – Resolução do Grupo 02.



a) Quais são as variáveis dessa situação? Comprimento do lado e área

b) Qual é a variável dependente?
Área

c) Qual é a variável independente?
medida do lado.

d) Qual é a lei da função que associa a medida de comprimento do lado com a medida de área da região quadrada? $f(x) = x^2$

e) Quanto mede a área da região quadrada cujo lado tem medida de comprimento de 12 cm? $f(12) = 12^2 = 144\ cm^2$

f) Qual é a medida de comprimento do lado da região quadrada cuja área mede 169 cm²?
$169 = x^2$
$x = \sqrt{169} = 13\ cm$

(DANTE; VIANA, 2020, p. 16)

Fonte: Acervo do autor (2022).

O terceiro problema adicional apresenta a noção de função como uma *expressão algébrica* que, segundo Santos e Barbosa (2017), pode ser trabalhada mesmo que o conceito de função ainda não tenha sido introduzido, “propiciando uma exposição anterior com a noção de relação de dependência entre variáveis, por intermédio de uma regra, que pode posteriormente ser vinculada, de modo mais natural, ao conceito de função” (Santos; Barbosa, 2017, p. 32).

Apresentamos o problema adicional 03:

PROBLEMA ADICIONAL 03

Expresse no caderno a lei da função f que associa cada número real x:

a) à terça parte dele;

b) ao dobro dele diminuído de 3;

c) à metade dele somada com 3;

d) ao cubo dele somado com o quadrado dele.

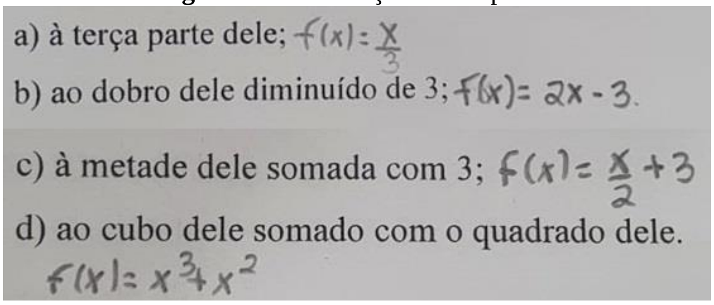
(Dante; Viana, 2020, p. 16)

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Procurem encontrar expressões algébricas que traduzam o que cada um dos itens está dizendo. *(Depois de dado um certo tempo para os grupos responderem ao problema, o professor continua)*. O que quer dizer a terça parte de um número?
O professor ouve um dos componentes do Grupo 05 comentar:
(2) **A_1G_5**: A terça parte de um número... A terça parte de 3 é 1.
(3) **A_3G_5**: A terça parte de 10 é 3.
(4) **Prof. Pesq.**: 3,333... Como a gente representa então a terça parte?
(5) **A_1G_5**: 1 sobre 3?
(6) **Prof. Pesq.**: Aí você acabou de expressar a terça parte de 1.
(7) **A_1G_5**: Então é 10 sobre 3.
O Grupo 06 chama o Prof. Pesq.
(8) **A_2G_6**: Como assim a terça parte?
(9) **Prof. Pesq.**: Qual é a terça parte do 6?
(10) **A_2G_6**: Não sei.
(11) **Prof. Pesq.**: É você pegar o 6, dividir em três partes e pegar uma, que é o 2. Ou seja, é 6 dividido por 3 que resulta em 2.
(12) **A_2G_6**: Ah, entendi.
(13) **Prof. Pesq.**: Então, qual é a terça parte de 12?
(14) **A_2G_6**: É o 4... Aí aqui está pedindo a terça parte de quê?
(15) **Prof. Pesq.**: De x. Que é...
(16) **A_2G_6**: x dividido por 3?
(17) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. *(O Prof. Pesq. se dirige à turma)*. Se o número é x, então a terça parte desse número é...?
(18) **A_3G_2**: x dividido por 3.
(19) **Prof. Pesq.**: Que nós iremos representar da forma $f(x) = \frac{x}{3}$.
O Prof. Pesq. ainda comenta que o $\frac{x}{3}$ *representa uma expressão algébrica que traduz a situação "terça parte de um número".*

Parte do diálogo retrata a dificuldade ainda frequente quando se trata de trabalhar com frações nesse tipo de conversão. A expressão "a terça parte dele" causou uma certa dúvida, enquanto que a reescrita "ele dividido por três" talvez não causasse. Além disso, a fala do Prof. Pesq. em (11) procurou justificar a frase atribuindo à fração o sentido de partilha.

Os alunos conseguiram resolver sem maiores dificuldades os demais itens. A Figura 07, a seguir, representa a solução de um dos grupos:

Figura 07 – Resolução do Grupo 03.



a) à terça parte dele; $f(x) = \frac{x}{3}$

b) ao dobro dele diminuído de 3; $f(x) = 2x - 3$.

c) à metade dele somada com 3; $f(x) = \frac{x}{2} + 3$

d) ao cubo dele somado com o quadrado dele.

$f(x) = x^3 + x^2$

Fonte: Acervo do autor (2022).

Essa forma de comunicar o conceito de função possibilita, segundo Santos e Barbosa (2017), simplificar as operações aritméticas e ajuda na composição de função. Reconhecemos ainda que o problema abordou de forma inicial essa representação, dando ênfase à conversão da linguagem escrita para a linguagem matemática, sem necessariamente focar no significado de uma expressão algébrica no dia a dia ou, mais além, como uma *tradução* das leis físicas, por exemplo.

Para Ponte (1990),

> mais do que manejar corretamente longas e intrincadas expressões, é fundamental que os alunos compreendam o seu significado em relação a casos concretos. As fórmulas da Geometria, da Física, da Química, e das outras ciências devem ser tomadas correntemente como exemplos e exploradas nos seus diversos significados. (PONTE, 1990, p.7).

A própria natureza introdutória do problema impossibilitou isso. Apesar disso, cumpriu o intuito preestabelecido de comunicar a noção de função.

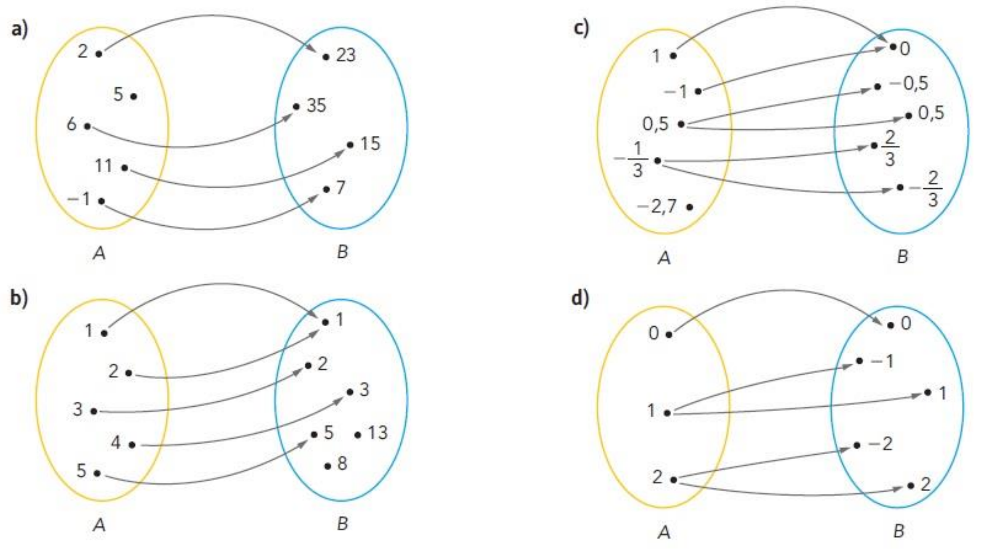
Encerra-se o Encontro 04.

3. ENCONTRO 05 – 16/05/2022

O problema adicional 04 apresenta a noção de função como um *diagrama*, conforme pode ser observado a seguir:

PROBLEMA ADICIONAL 04

Para cada item a seguir, avalie se o diagrama apresentado representa uma função de *A* em *B*. Caso não represente uma função, justifique.



(Dante; Viana, 2020, p. 18)

[Diálogo com a turma]
O Prof. Pesq. relembra as formas de se representar uma função, vistas nas aulas anteriores.
(1) **Prof. Pesq.**: Para que um diagrama seja considerado o diagrama de uma função, ele deve obedecer às duas condições vistas na nossa segunda aula. Alguém lembra?
(2) **A_4G_2**: Todos os elementos do primeiro conjunto devem estar associados a somente um elemento do segundo conjunto.
O Prof. Pesq. assente, reescrevendo as duas condições tal qual como expressa Dante e Viana (2020):
- *Todo elemento do primeiro conjunto tem um correspondente no segundo conjunto;*
- *Cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento no segundo conjunto.*

(3) **Prof. Pesq.**: Então para que esses diagramas sejam de função, eles devem obedecer a essas regras. Notem que a regra não diz nada sobre as condições do segundo conjunto em relação ao primeiro. É apenas do primeiro em relação ao segundo. *(Pausa).* Então, eu pergunto para vocês: o diagrama da letra a) representa o diagrama de uma função?
(4) **Alguns alunos**: Não.
(5) **Prof. Pesq.**: Por que que não?
(6) **A_4G_2**: Porque o número 5 não está associado a nenhum elemento.
(7) **Prof. Pesq.**: Exato. Existe um elemento do primeiro conjunto – no caso, o 5 – que não está associado a nenhum elemento do segundo conjunto. Já quebrou a primeira condição. *(Pausa).* Notem que os outros elementos obedecem às duas condições. Mas, como existe um elemento que não obedece, a relação não será de função.
Os discentes concluem corretamente que o diagrama do item b) é o diagrama de uma função.

> (8) **Prof. Pesq.**: O item c) representa o diagrama de uma função?
> (9) **Alguns alunos**: Não. *(E apresentaram um argumento semelhante ao do item a)).*
> (10) **Prof. Pesq.**: O item d) representa o diagrama de uma função? *(A turma fica dividida).* Todo elemento do primeiro conjunto está associado a elementos do segundo conjunto?
> (11) **Alguns alunos**: Sim.
> (12) **Prof. Pesq.**: Todo elemento do primeiro conjunto está associado a um único elemento do segundo conjunto?
> (13) **A_3G_7**: Não.
> (14) **Prof. Pesq.**: Por quê?
> (15) **A_3G_7**: Porque o 1 está ligado ao 1 e ao – 1.
> (16) **A_1G_7**: E o 2 também. *(Referindo-se que o 2 também estava associado a dois elementos do segundo conjunto: – 2 e 2).*
> (17) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Ele respeita a primeira condição, mas não respeita a segunda.

A fala do estudante A_4G_2 (em (2)), ainda que não totalmente coerente – já que pode ser interpretada como se todos elementos do primeiro conjunto estivessem associados a um mesmo elemento do segundo conjunto, o que caracterizaria uma função do tipo constante –, reforça o entendimento sobre as duas condições apresentadas: a totalidade dos elementos do primeiro conjunto e a sua unicidade na correspondência.

Em seguida, o Prof. Pesq. reforça as duas condições. De igual modo, retoma que os elementos do primeiro conjunto constituem a variável independente (x), e que os elementos do segundo conjunto constituem a variável dependente (y ou $f(x)$).

Compreender a comunicação de função por meio de diagramas envolve recordar basicamente as duas condições elencadas por Dante e Viana (2020). Das diversas representações, essa foi a de mais rápida assimilação pelos discentes; um fato talvez justificado pelas condições terem sido apresentadas na aula inicial e retomadas em quase todos os problemas anteriormente estudados.

Nesse tipo de representação, também se pode inserir as noções de função injetora, sobrejetora e bijetora. Uma indicação não seguida pelo Prof. Pesq., uma vez que tais conceitos seriam abordados, inicialmente, pelo Problema Gerador 11, cujo objetivo era o de construir a definição de função inversa – o que acabou não acontecendo. Apesar disso, tais conceitos não eram pré-requisitos para se trabalhar os demais temos abordados nos Problemas Geradores seguintes.

Além disso, o cuidado que se deve ter em inserir esse tipo de comunicação (através de diagramas) na sala de aula, é o de não se restringir unicamente a ele, por ser o mais rapidamente assimilado pelos discentes, já que é fácil reconhecer as relações existentes entre elementos de dois conjuntos. O estudo ficaria resumido em reconhecer se a relação constitui ou não uma relação funcional. Corroborando com isso, autores como Sousa e Sousa (2019) chamam a atenção para o fato de que

> Apresentar o conceito de função por meio de sua definição formal apoiada na representação por diagramas é esperar que o aluno apreenda em poucas aulas a forma mais geral de um conceito matemático que a humanidade levou séculos para formalizar. Introduzir o conceito de função *exclusivamente* por meio de relações binárias pode dificultar a construção de um campo de significados para o conceito. (Souza; Souza, 2019, p. 23-24).

Exemplos disso são as construções das ideias dependência e generalização usando diagramas. Sendo assim, recomenda-se o uso das diferentes representações do conceito função, já que cada uma delas reforça aspectos do conceito.

O problema adicional 05 apresenta a noção de função como uma *generalização*. Santos e Barbosa (2017) afirmam que esse tipo de comunicação já pode ser utilizada nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o que auxiliaria no desenvolvimento das noções de dependência entre quantidades, descritas verbalmente nos anos iniciais e utilizando notação algébrica nos anos finais do Ensino Fundamental.

Isso auxiliaria na apresentação das noções de variável, dependência e correspondência sem, necessariamente, apresentar a definição ou até mesmo a noção de função.

A seguir, temos o problema adicional 05.

PROBLEMA ADICIONAL 05

Quantos fósforos são necessários para formar o oitavo termo da sequência cujos três primeiros termos estão dados?

(2010BQN1Q148) (Adaptado)

> **[Diálogo com a turma]**
> *O Prof. Pesq. inicia o problema abordando os casos iniciais, destacando quantos palitos de fósforos foram necessários para construir cada uma das figuras.*
> (1) **Prof. Pesq.**: Uma das formas de sabermos quantos fósforos são necessários para construir a oitava figura é construir as próximas cinco. (*Ele constrói com a turma as figuras 4 e 5).*
> (2) **A_1G_7**: É o jeito mais fácil.
> (3) **Prof. Pesq.**: Para uma quantidade pequena, sim. Mas se o problema estivesse pedindo para 1000ª figura?
> (4) **A_1G_7**: Aí ia fazer até mil *(sorri)*.
> (5) **Prof. Pesq.**: Esse procedimento seria também possível, mas não seria nada prático.
> (6) **A_1G_7**: Era só fazer até 10 e multiplicar por 100.

(7) **Prof. Pesq.**: Para que você possa fazer isso, primeiramente, você deve identificar o padrão seguido pela sequência de figuras.

Com base nas resoluções de alguns grupos, o Prof. Pesq. inicia sua fala já afirmando que construir as próximas figuras seria um método aceitável e seguro para solucionar o problema, o que é complementado pelo discente A_1G_7 de que seria o método mais fácil. Na maioria dos casos, problemas que pedem *o próximo número da sequência* ou a *próxima figura* são resolvidos (ou tenta-se resolver) desta maneira. A dificuldade surge quando se pede o termo (ou figura) que está distante dos termos iniciais. A própria fala do discente A_1G_7 em (4), seguida de um sorriso, demostra a inviabilidade de se usar esse procedimento diante da figura de posição 1000. Em seguida, ele faz uma tentativa de generalização (ainda que incorreta) em que procura analisar os casos iniciais. Seu argumento é o de que – na linguagem de funções – $f(1000) = 100 \times f(10)$, o que estaria correto se, no exemplo, a sequência fosse associada a uma função linear.

O diálogo com a turma continua:

[Diálogo com a turma]
(1) **A_4G_2**: É interessante notar que a gente tem sempre uma figura fixa, que é o triângulo. Pra formar o triângulo a gente usa três palitos de fósforo. Então a gente poderia considerar o triângulo uma constante. *(O Prof. Pesq. concorda).* Também, para formar o quadrado, a gente precisa de três palitos.
(2) **Prof. Pesq.**: Exatamente. Já que a gente aproveita um lado do triângulo na primeira figura e um lado do quadrado anterior nas figuras seguintes.
Aproveitando a ideia do aluno A_1G_7, o Prof. Pesq. continua:
(3) **Prof. Pesq.**: A primeira figura é formada por 6 palitos: 3 que formam o triângulo e 3 que formam o quadrado *(escreve na lousa 6 = 3 + 3)*. A segunda figura é formada por 9 palitos: 3 que formam o triângulo e 6 que formam os dois quadrados *(escreve na lousa 9 = 3 + 3×2).* A terceira figura é formada por 12 palitos: 3 que formam o triângulo e 9 que formam os três quadrados *(escreve na lousa* $12 = 3 + 3 \times 3$*).* Vocês conseguem notar algum padrão nesses resultados?
(4) **A_1G_7**: Aumenta de 3 em 3.
(5) **A_4G_2**: E varia de acordo com a quantidade de quadrados.
(6) **Prof. Pesq.**: Os dois estão corretos. Por exemplo, a primeira figura apresenta 1 quadrado e a quantidade de palitos é $6 = 3 + 3 \times \mathbf{1}$. A segunda figura apresenta 2 quadrados e a quantidade de palitos é $9 = 3 + 3 \times \mathbf{2}$. A terceira figura apresenta 3 quadrados e a quantidade de palitos é $12 = 3 + 3 \times \mathbf{3}$. Notem que a quantidade de quadrados por figura coincide com a posição da figura. *(Pausa).* Como a gente poderia expressar a quantidade de palitos usados para construir a quarta figura?
(7) **A_2G_5**: Fica $15 = 3 + 3 \times 4$.
(8) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. O primeiro 3 será a nossa parte fixa e o segundo 3 é multiplicado pela posição da figura (ou pelo número de quadrados da figura)... E para a oitava figura, quantos palitos de fósforos são necessários?
(9) **A_1G_1**: Seria 27.
(10) **Prof. Pesq.**: E como ficaria na expressão?
(11) **A_1G_1**: $3 + 3 \times 8$.
(12) **A_1G_7**: Aí quer dizer que se fosse para descobrir quantos palitos tinha na milésima figura só é fazer $3 + 3 \times 1000$?
(13) **Prof. Pesq.**: Exatamente... É bem mais fácil que fazer as mil figuras, né? *(O aluno sorri e concorda).* Nós podemos ainda obter uma expressão que resulta na

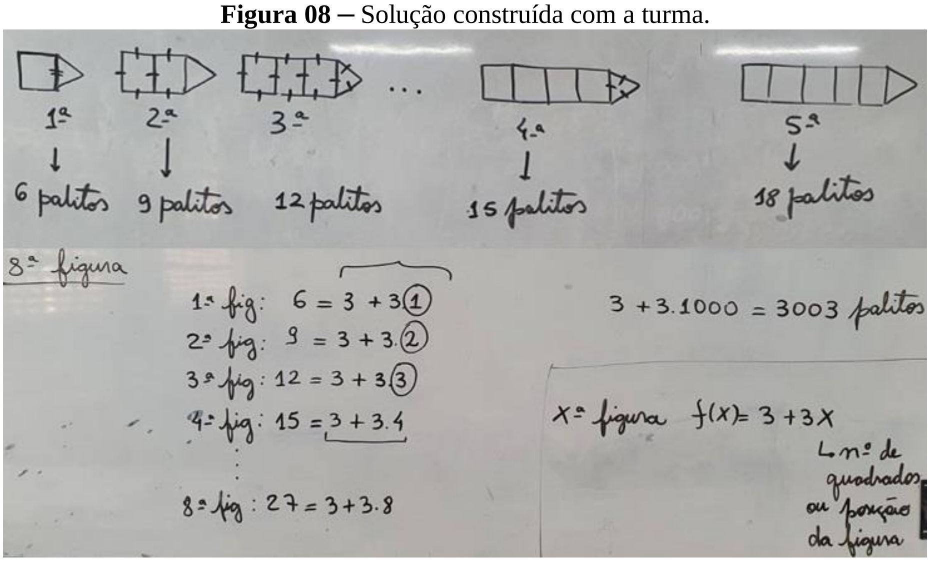
> quantidade de palitos necessária para formar qualquer figura da sequência... Por exemplo, a figura de posição x é construída usando quantos palitos?
> (14) **A_1G_7**: $3 + 3x$.
> (15) **Prof. Pesq.**: Isso... Notem que a gente reconheceu o padrão a partir das figuras iniciais, construiu um argumento que justificasse esse padrão e, em seguida, generalizamos... Nós representamos essa generalização, utilizando a noção de função, da seguinte forma: $f(x) = 3 + 3x$, onde o x representa a posição da figura e o $f(x)$ representa o número de palitos de fósforo necessários para construí-la.

A fala do aluno A_4G_2 em (1) demostra a compreensão *do que está acontecendo* com as figuras. Ele associa os três palitos que constituem os lados do triângulo com a "parte fixa" da função. Além disso, nota que a quantidade restante de palitos vai depender da quantidade de quadrados formados (fala (5)). Com esta sugestão, o Prof. Pesq. dispõe a quantidade de palitos através de expressões que valorizem o reconhecimento do padrão para se chegar à generalização.

O aluno A_1G_7 também contribui com a discussão afirmando que a quantidade de palitos "aumenta de 3 em 3", um argumento parecido com o idealizado inicialmente pelo Prof. Pesq. no seu planejamento, onde havia chegado à expressão $3(n + 1)$, onde n representa a posição da figura. Além disso, ele mesmo retomou o exemplo da discussão anterior, sobre calcular a quantidade de palitos necessária para formar a 1000ª figura, notado que ... *só é fazer* $3 + 3 \times 1000$ (fala (12)). Foi ele ainda quem chegou na generalização $3 + 3x$.

A Figura 08, a seguir, resume a discussão com a turma:

Figura 08 – Solução construída com a turma.



Fonte: Acervo do autor (2022).

O Prof. Pesq. ainda ratifica os cálculos a partir das expressões $f(1), f(2), f(3), f(4), f(8), f(1000)$ e $f(x)$. Além disso, o Prof. Mat. questiona se a sequência apresentada pode ser representada também por uma progressão aritmética. O Prof. Pesq. confirma e afirma que o termo geral de toda progressão aritmética (com a razão diferente de 0) pode ser representada por uma função polinomial do 1º grau, sendo a recíproca também verdadeira.

Encerra-se o Encontro 05.

4. DEMAIS ENCONTROS

Nesta seção, apresentaremos de forma mais concisa como se deu os demais encontros. O foco aqui será o de destacar a discussão dos problemas geradores com a turma na formalização dos demais conceitos e conteúdos relacionados à função. Os problemas adicionais associados a cada problema gerador estão dispostos no Anexo I desta pesquisa.

PROBLEMA GERADOR 03 (2020N2BQQ02)

O professor M. A. Luco escreveu no quadro a expressão:

$$\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4}$$

Então, ele diz aos alunos que *n* pode ser qualquer número natural, com exceção de 4.

a) Qual o valor da expressão para $n = 1$?

b) Marcos substituiu *n* por um número natural e verificou que o valor da expressão é 5. Marcos substituiu *n* por qual número?

c) Quais são os números naturais que não podem ser o valor numérico da expressão?

Este problema teve como objetivo construir os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função.

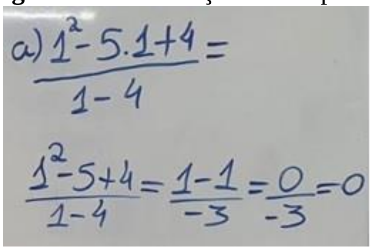
Tendo os grupos resolvido o problema, temos a seguinte discussão referente ao item a):

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Alguém saberia me dizer por que o n não pode ser 4 nessa expressão?
(2) **A_4G_2**: Porque o resultado dá 0.
(3) **Prof. Pesq.**: O resultado de quê? Da expressão? Do numerador? Do denominador?
(4) **A_4G_2**: Da expressão.
(5) **Prof. Pesq.**: Mas na letra a) o resultado deu 0.
(6) **A_2G_1**: Então é por causa do denominador?
(7) **Prof. Pesq.**: Exato.
O Prof, Pesq. troca o n por 4 no denominador da expressão e argumenta sobre o fato de o denominador não poder ser igual a 0.

O item a) não gerou maiores dúvidas, e ocorreu de forma semelhante ao que prevemos. Todos os grupos substituíram o n por 1 na expressão $\frac{n^2-5n+4}{n-4}$, obtendo o 0 como resposta. Apesar disso, o Grupo 04 precisou da ajuda do Prof. Pesq. na substituição, além de encontrar uma certa dificuldade em resolver operações do tipo 1 – 4. Contornando esse fato, o Prof. Pesq. associa essa subtração com a noção de *dívida*, o que faz com que o grupo chegue à resposta correta.

A Figura 09, a seguir, apresenta a solução de um dos grupos:

Figura 09 – Resolução do Grupo 01.



Fonte: Acervo do autor (2022).

No item b), o Prof. Pesq. afirma que o procedimento é o "contrário" do que foi realizado no item a). A maioria dos grupos resolveram o item atribuindo valores para o n que resultassem em 5 para a expressão. No diálogo com os grupos, foi sugerido que o item poderia ser resolvido através da "Fórmula de Bháskara", já que resultava numa equação do 2º grau na variável n. Contudo, apenas o Grupo 02 recordava tal procedimento.

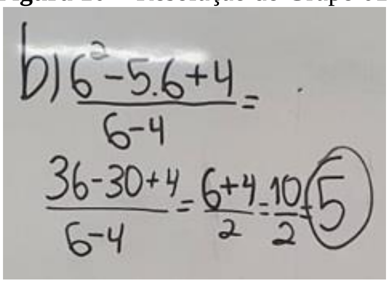
O aluno A_3G_7 explica o seu raciocínio para a turma:

> **A_3G_7**: Eu fiz porque eu pensei: se o 1 vai dá 0, então o 2 vai dá 1, o 3 vai dá 2, o 4 vai dá 3, o 5 vai dá 4.

Apesar da afirmação ser verdadeira (com exceção do caso $n = 4$), o discente não soube apresentar um argumento sólido do porquê que isso acontecia, afirmando ainda que não havia feito as demais substituições, tendo analisado apenas o primeiro caso. O Prof. Pesq. associa essa situação com a apresentada no problema adicional 05 do Problema Gerador 02, justificando que, na ocasião, tinha-se obtido uma explicação coerente. Em seguida, o discente se corrigiu e afirmou que havia testado mais casos.

As Figuras 10 e 11 apresentam, respectivamente, as soluções propostas pelos Grupos 01 e 02:

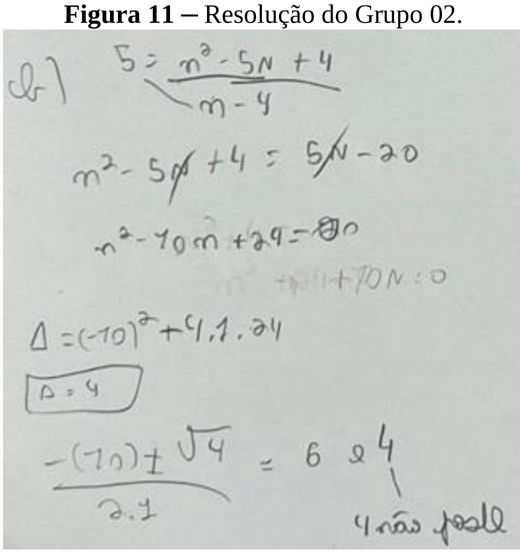
Figura 10 – Resolução do Grupo 01.



Fonte: Acervo do autor (2022).

O Grupo resolveu o problema por tentativa, onde apresentou o caso de sucesso em que se atribuiu o valor de 6 para o n, obtendo 5 como resultado. Quando questionados pelo Prof. Pesq. sobre se não existiria algum outro valor para o n que também resultasse em 5, o grupo respondeu que acreditava que não, mas não souberam justificar.

Figura 11 – Resolução do Grupo 02.



Fonte: Acervo do autor (2022).

O grupo empregou o método de resolução de equações do 2º grau, popularmente conhecido no Brasil como "Fórmula de Bháskara". Apesar de apresentar algumas inconsistências algébricas (como "cortar" os termos $-5n$ e $5n$ e considerá-los na linha seguinte, usar $\Delta = (-10)^2 + 4 \times 1 \times 24$ ao invés de $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 24$, e não evidenciar que $n = \frac{-(-10) \pm \sqrt{4}}{2 \times 1}$), o grupo chega à solução correta, atentos também ao fato de ter que descartar a raiz 4.

O item c) apresentou as mais variadas respostas como, por exemplo:

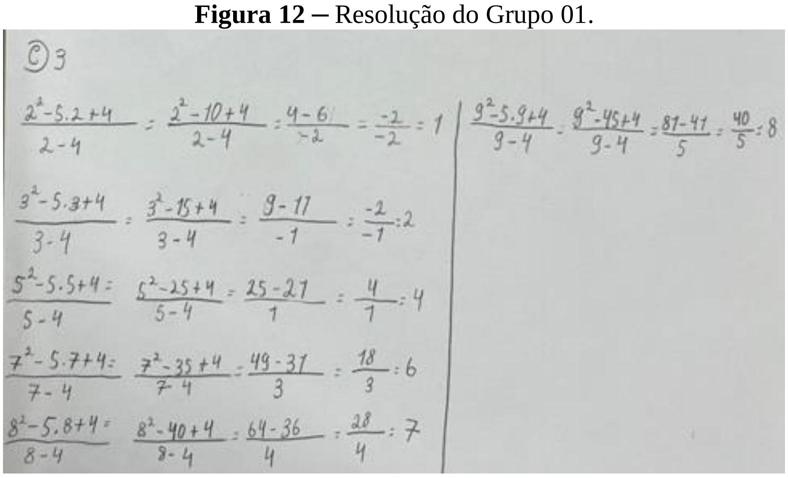
> **Grupo 03**: Não, sempre haverá um resultado.
> **Grupo 04**: 4. Pois pode ser qualquer número natural, com a exceção do 4.

> **Grupo 07**: O número 4, pois foi dito que não poderia ser usado. E se o denominador der zero, não tem solução.

O Grupo 03 considerou não existir impedimento sobre o valor numérico da expressão. Já os Grupos 04 e 07 inverteram a ordem, compreendendo que o item estava se referindo aos valores que n não poderia assumir (uma informação já contemplada pelo enunciado do problema), e não sobre os valores que a expressão $\frac{n^2-5n+4}{n-4}$ não poderia assumir, que depende de n.

O Grupo 01 compreendeu o que o item c) estava pedindo, inclusive obtendo a resposta correta. Contudo, conforme pode ser observado na Figura 12, a seguir, sua solução se deu atribuindo valores naturais para o n, de 2 até o 9 (tomando o cuidado de não considerar $n = 4$, e já considerando o item b)), e assumindo que o padrão iria se repetir para os demais números:

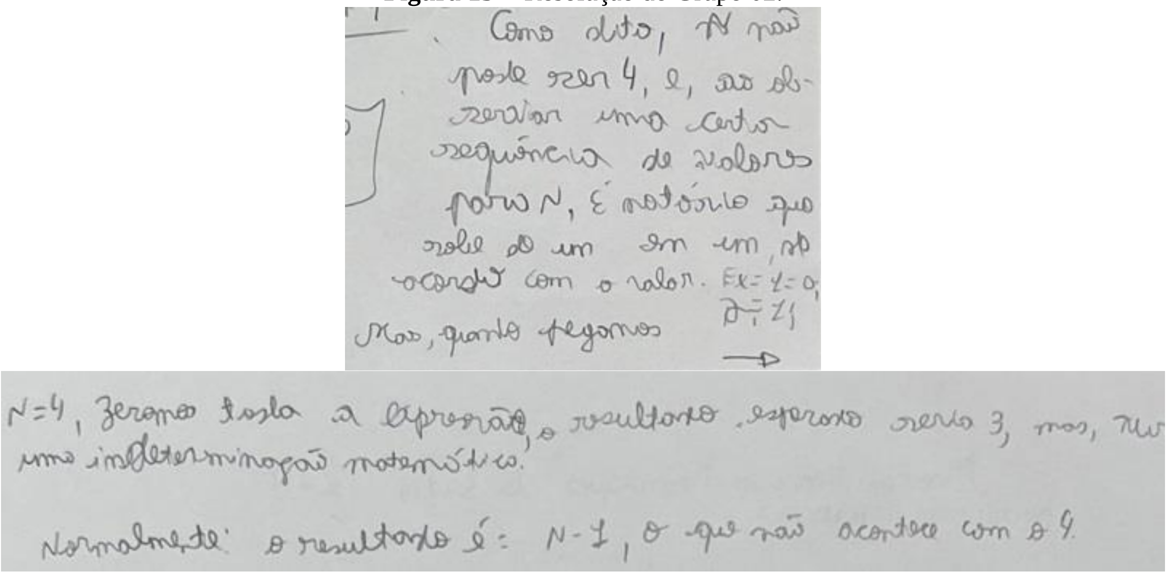
Figura 12 – Resolução do Grupo 01.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Já o Grupo 02 apresenta uma justificativa razoável, inclusive considerando a expressão simplificada $n - 1$. A Figura 13, a seguir, retrata a solução do grupo:

Figura 13 – Resolução do Grupo 02.



Como dito, N não pode ser 4, e, ao observar uma certa sequência de valores para N, é notório que sobe de um em um, de acordo com o valor. Ex: 1=0, 2=1

Mas, quando pegamos N=4, zeramos toda a expressão, o resultado esperado seria 3, mas, deu uma indeterminação matemática.

Normalmente o resultado é: N-1, o que não acontece com o 4.

Fonte: Acervo do autor (2022).

A afirmação "Mas quando pegamos $n = 4$, zeramos toda a expressão. *O resultado esperado seria 3*, mas deu uma indeterminação matemática", mostra que o grupo compreendeu perfeitamente o que o item pedia. Apesar disso, a expressão $n - 1$, apresentada no final do argumento, parece estar mais relacionada ao aspecto observacional do padrão, como apresentado pelos Grupos 01 e 07, já que a resposta não apresenta indícios de que houve algum tipo de fatoração do numerador da expressão $\frac{n^2-5n+4}{n-4}$.

Na discussão com a turma sobre o item c), o professor ainda retoma o padrão observado inicialmente pelo discente A_3G_7. Juntamente com a turma, o professor procura simplificar a expressão $\frac{n^2-5n+4}{n-4}$, reescrevendo-a como $\frac{(n-1)\times(n-4)}{n-4}$, o que ocasionou dúvidas por parte dos discentes. Uma alternativa adotada, foi a de resolver a equação $n^2 - 5n + 4 = 0$, cujas raízes são 1 e 4 e associá-las com os fatores $(x - 1)$ e $(x - 4)$, resolvendo também outras equações do 2º grau para exemplificar.

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Como eu posso simplificar a expressão $\frac{(n-1)\times(n-4)}{n-4}$?
(2) **A_4G_2**: Pode cortar o $n - 4$ de cima com o de baixo.
(3) **Prof. Pesq.**: Exatamente. Mas lembrem que eu só posso fazer isso porque $n \neq 4$... Sendo assim, sobra apenas o $n - 1$.
O Prof. Pesq. então destaca na lousa que $\frac{n^2-5n+4}{n-4} = n - 1$.
(4) **Prof. Pesq.**: Conseguem notar agora o porquê que a afirmação de A_3G_7 é verdadeira?
O Prof. Pesq. atribui na expressão $n - 1$ os valores de $n = 0, 1, 2, ...8$, com exceção do 4 (fato que foi destacado por vários alunos), e expressa esses valores e seus respectivos resultados na vertical, dentro de dois conjuntos, que posteriormente serão

> *nomeados por A e B. O objetivo é relacionar esses dois conjuntos através da função $f(n) = \frac{n^2-5n+4}{n-4} = n - 1$(com o domínio a ser construído).*
> (5) **Prof. Pesq.**: Conseguem notar que para todo valor que eu atribua ao n (natural e diferente de 4) eu sempre irei obter uma resposta?
> (6) **Alguns alunos**: Sim.
> *O Prof. Pesq. questiona quais são os únicos números naturais que não apareceriam nos conjuntos se continuássemos atribuindo valores para o n. Eles respondem corretamente os números 4 e 3, respectivamente). O Prof. Pesq. destaca o 3 no segundo conjunto sem associá-lo a elemento do primeiro conjunto.*

Apesar de seis dos oito grupos terem errado a resposta do item c), após as explicações eles afirmaram terem compreendido o problema. Em seguida, o Prof. Pesq. nomeia o primeiro conjunto de A e o segundo conjunto de B, afirmando que eles podem ser relacionados através da função $f(n) = \frac{n^2-5n+4}{n-4}$, sendo $n \neq 4$. Além disso, retoma as duas condições para que um diagrama seja considerado um diagrama de função, destacando o motivo de não podermos colocar o elemento 4 dentro do primeiro conjunto, ainda que não estivesse relacionado com o 3 (que aparece no segundo conjunto; porém, sem correspondência). Segundo Souza e Souza (2019),

> o professor tem de trabalhar com a definição de função que apresentou, exemplificando permanentemente o processo de operacionalização da definição de função. Nesse sentido, sempre que possível, o professor deve explicar, por meio da definição que enunciou, por que determinadas relações entre variáveis são funcionais e por que determinadas tabelas, diagramas ou gráficos representam o conceito de função. (Souza; Souza, 2019, p. 24).

O Prof. Pesq. prossegue:

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: Os elementos do conjunto A constituem o que a partir de agora chamaremos de *domínio* da função. O domínio de uma função é constituído por todos os valores que o x, elemento do conjunto A (lembram?), pode assumir. *(Pausa).* Todos os elementos que constituem o conjunto B (incluindo o 3), e lembrando que são representados pelo nosso y, constituem o que chamaremos de *contradomínio* da função.
> (2) **A_4G_2**: Ôh... isso é muito legal!
> *(Alguns alunos concordam... Outros, discordam...)*

Nesse momento, o Prof. Pesq. escreve na lousa a definição de Dante e Viana (2020):

Ao definirmos uma função f de A em B, os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de **domínio ($\boldsymbol{D(f)}$)** e **contradomínio ($\boldsymbol{CD(f)}$)** da função f.

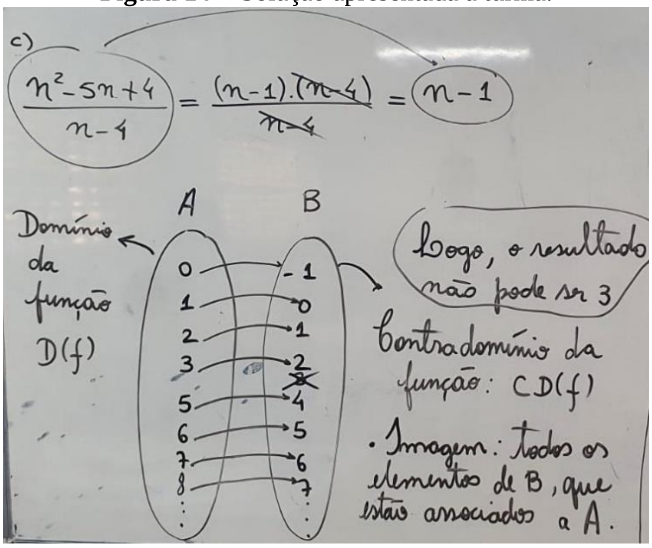
[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Os elementos do conjunto B que possuem correspondência com os elementos do conjunto A é o que a gente irá chamar de conjunto *imagem* de uma função.

O Prof. Pesq. escreve na lousa a definição de Dante e Viana (2020, adaptado):

Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ tal que $f(x) = y$ é chamado de **imagem** de x pela função f. Já o conjunto formado pelas imagens de todos os elementos de A é chamado de **conjunto imagem** de f e é indicado por $\boldsymbol{Im(f)}$.

A Figura 14, a seguir, resume a solução feita, em conjunto com a turma, do item c) e a apresentação das noções de domínio, contradomínio e imagem de uma função:

Figura 14 – Solução apresentada à turma.



Fonte: Acervo do autor (2022).

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Retomando: domínio são todos os elementos do conjunto A (notem que não tem o 4), contradomínio são todos os elementos do conjunto B (notem que o número 3 pertence ao contradomínio), e imagem são todos os elementos do conjunto B que estão associados a algum elemento do conjunto A. Ou seja, a imagem da função, nesse exemplo, são todos os elementos desse conjunto *(apontando para o conjunto B)*, com exceção desse 3. *(Pausa).* Notem que a imagem da função está dentro, está contida, no contradomínio.

O Prof. Pesq. escreve na lousa a observação de Dante e Viana (2020):

Em toda função f de A em B, temos que $Im(f)$ está contido em B, ou seja, é um subconjunto de B. Indicamos: $Im(f) \subset B$.

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Notem que nós podemos expressar o domínio de uma função apontando todos os seus elementos (o que não é viável se o conjunto possuir vários ou infinitos elementos, como é caso do nosso exemplo), ou podemos expressá-lo através de uma notação específica. Uma lei que resuma de forma completa as características do conjunto. *(Pausa).* Nós representamos o domínio de uma função como $D(f)$. Aí eu pergunto para vocês: qual é a característica comum a todos os elementos do conjunto A?
(Silêncio)
(2) **Prof. Pesq.**: O 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, ... até o infinito. O que esses elementos são?
(3) **A_4G_2**: São números naturais.
(4) **Prof. Pesq.**: Exatamente. Todo elemento x do conjunto A é um número natural. Então eu posso expressar o domínio assim: $D(f) = \{x \in \mathbb{N}$..., com exceção de qual número?
(5) **Alguns alunos**: Do 4.
(6) **Prof. Pesq.**: Então o domínio ficará $D(f) = \{x \in \mathbb{N}/x \neq 4\}$. Como a nossa função é $f(n) = \frac{n^2-5n+4}{n-4}$, então vamos trocar o x por n: $D(f) = \{n \in \mathbb{N}/n \neq 4\}$. Notem que essa afirmação compreende todos os números naturais, menos o 4, que é justamente o que caracteriza o conjunto A. *(Pausa).* Nós representamos o contradomínio da função utilizando o mesmo argumento. Lembrem que são todos os elementos de B, que estamos chamando de y.
O Prof. Pesq. escreve $CD\ (f) = \{y$ ...
(7) **Prof. Pesq.**: Eu posso afirmar apenas que os elementos de y pertencem ao conjunto dos números naturais?
(8) **Alguns alunos**: Não.
(9) **Prof. Pesq.**: Por quê?
(10) **A_4G_2**: Porque tem o – 1.
(11) **Prof. Pesq.**: Isso. Tem o – 1, que não é um número natural... Se retirássemos ele, poderíamos dizer que y é natural?
(12) **Alguns alunos**: Sim.
(13) **Prof. Pesq.**: Então como eu posso representar que y pertence aos números naturais, unido com – 1?
(14) **A_4G_2**: Dizer que ele pertence aos números inteiros?
(15) **Prof. Pesq.**: Mas isso implicaria afirmar que o $-1, -2, -3, -4,$ ... também são elementos do conjunto B. Como a gente quer acrescentar apenas o – 1, podemos usar a noção de união de conjuntos.

O Prof. Pesq. então faz um breve resumo sobre conjunto, incluindo os seus operadores de união, interseção, complementar, etc. Finalmente, chegamos à seguinte notação para representar o contradomínio de f: $CD\ (f) = \{y \in \mathbb{N} \cup \{-1\}\}$ que, posteriormente, foi substituído por $CD\ (f) = \{f(n) \in \mathbb{N} \cup \{-1\}\}$.

De posse dessa informação, a obtenção da imagem de f não provocou maiores discussões, já que os discentes notaram diretamente que ela era igual ao contradomínio, excluindo o 3. Chegou-se em: $Im\ (f) = \{f(n) \in \mathbb{N} \cup \{-1\}\ /\ f(n) \neq 3\}$.

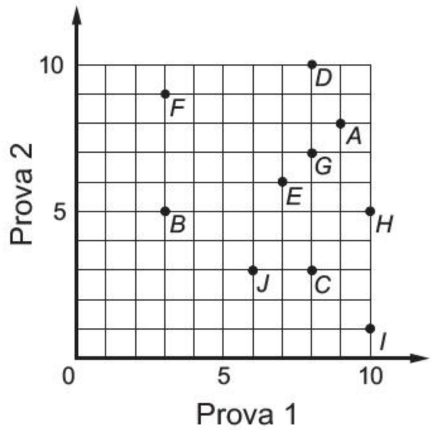
De forma geral, a principal mudança em relação ao que estava previsto na nossa Análise *a Priori* foi a opção por apresentar as noções de domínio, contradomínio e imagem após a solução dos três itens, e não em paralelo. Esse fato aconteceu por procurarmos associar tais conceitos à representação de função por diagrama (Figura 14, apresentada anteriormente).

Em seguida, resolveu-se alguns problemas adicionais para fixar o conceito.

O objetivo do Problema Gerador 04, a seguir, foi o de construir a noção de plano cartesiano.

PROBLEMA GERADOR 04 (2014N2F1Q08) (Adaptado)

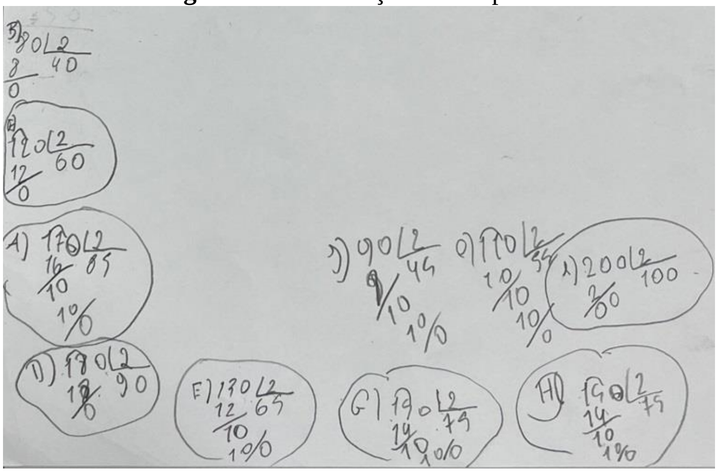
O professor Michel aplicou duas provas a seus dez alunos e divulgou as notas por meio do gráfico mostrado abaixo. Por exemplo, o aluno A obteve notas 9 e 8 nas provas 1 e 2, respectivamente; já o aluno B obteve notas 3 e 5. Para um aluno ser aprovado, a média aritmética de suas notas deve ser igual a 6 ou maior do que 6. Quantos alunos foram aprovados?



Inicialmente, alguns alunos tiveram uma certa dificuldade em associar cada ponto aos seus respectivos valores relacionados às notas obtidas na Prova 1 e na Prova 2. O Grupo 04 não reconheceu de imediato quais seriam os outros valores que não estavam destacados nos eixos. Quando questionados, por exemplo, sobre quais foram as notas do aluno B (sem olhar para o enunciado do problema), foi dito que uma delas era 5 (que é um número em destaque no eixo vertical), mas levou um certo tempo para o grupo perceber que a nota da Prova 1 havia sido 3 (um número não evidenciado no eixo horizontal). Contornado esse fato, o grupo conseguiu destacar os demais valores (com exceção das notas obtidas pelo aluno I).

A Figura 15, a seguir, apresenta a solução do grupo:

Figura 15 – Resolução do Grupo 04.

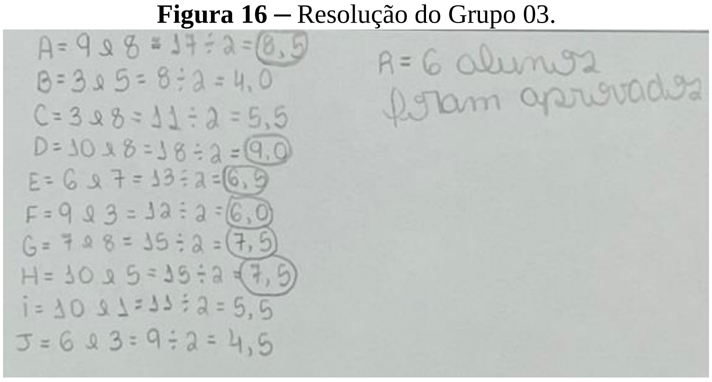


Fonte: Acervo do autor (2022).

Na obtenção das notas do aluno I, o grupo obteve como sendo 100 na Prova 1 e 100 na Prova 2 (ao invés de “10”). Além disso, conforme explicitado, o Grupo considerou as notas em um intervalo que variava de 0 a 100, e não de 0 a 10, como mostrado pelo gráfico. Quando questionados, afirmaram que era esse o modo como recebiam as notas na escola. Ademais, esse e os outros grupos não demonstraram maiores problemas em calcular a média aritmética entre as duas notas.

O Grupo 03, inicialmente, havia considerado as aprovações em cada prova. Na releitura do problema com o Prof. Pesq., o grupo percebeu que ainda faltava e etapa de calcular a média aritmética das duas notas atribuídas a cada aluno. A Figura 16, a seguir, representa a sua solução:

Figura 16 – Resolução do Grupo 03.

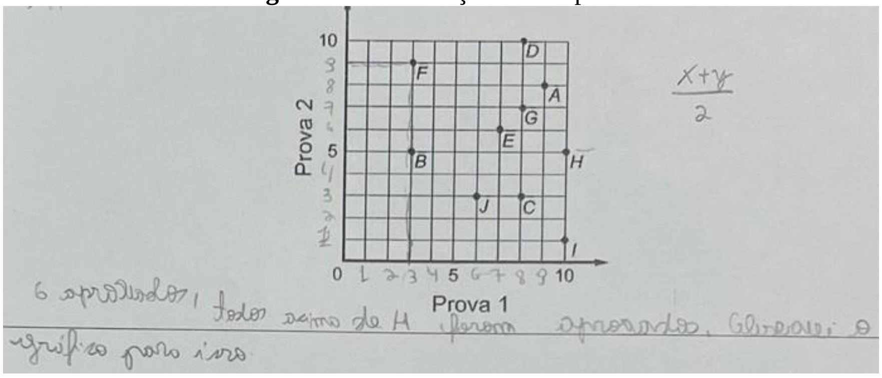


Fonte: Acervo do autor (2022).

Nota-se que, para os dois primeiros alunos, foi considerada a ordem: nota na Prova 1 e nota na Prova 2 (um dado já evidenciado no problema). Em seguida, inverteu-se a ordem e, do aluno H em diante retornou-se à ordem inicial. Em se tratando da solução do problema, que resulta no cálculo de uma média aritmética, essa ordem não é determinante. Contudo, se tratando de pares ordenados, sim. O Prof. Pesq. evidencia isso na formalização do conceito. Temos ainda um problema no uso de conectivos como, por exemplo, “9 e $8 = 17 \div 2 = 8{,}5$”.

O Grupo 02 fez, segundo eles, “pela lógica”. Na solução, apresentada na Figura 17, a seguir, observa-se a expressão $\frac{x+y}{2}$.

Figura 17 – Resolução do Grupo 02.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Infere-se que o grupo considerou, intuitivamente, que os alunos aprovados estariam acima da reta $y = 5$, que passa por H, mas que também passa por B. Além disso, “acima de H” estão cinco estudantes, e não seis. Sendo assim, o grupo considerou o H no grupo de estudantes que passaram (o que vai ao encontro da solução), mas não apresentou um argumento do porquê o B também não estaria aprovado. Apesar disso, o grupo procurou uma forma de evidenciar os aprovados sem necessariamente ter que calcular a média de cada um, adotando um procedimento alternativo não trivial. Tal processo é definido por Pereira (2013) como pensamento lateral e consiste numa

> heurística para solução de problemas, através da qual o problema é analisado por vários ângulos, ao invés de ser atacado de frente. Em oposição ao pensamento linear, tradicionalmente aplicado na escola básica, o pensamento lateral visa um processo não linear de raciocínio, para checar suposições, mudar perspectivas e gerar novas ideias. (Pereira, 2013, p. 14).

Compreendemos que o Grupo procurou apontar (não com total sucesso) qual a região do gráfico que compreende todos os possíveis aprovados, que seria a interseção entre o quadriculado e a região acima da reta $y = 12 - x$ (e incluindo-a).

Antes da formalização do conteúdo, foi solicitado que os grupos fossem até a lousa e escrevessem suas soluções. Procurou-se, também, padronizar os cálculos, seguindo a expressão apresentada pelo Grupo 02: $\frac{x+y}{2}$, onde x é referente à nota na Prova 1 e o y é referente à nota na Prova 2.

A seguir, apresentamos como se deu o diálogo com a turma:

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: Divulgar as notas através de um gráfico é um modo interessante porque ele resume boa parte das informações relevantes sobre a turma, sem necessariamente ser preciso construir uma tabela ou fazer uma listagem aluno por aluno.
> *O Prof. Pesq. destaca os eixos horizontal e vertical e relaciona-os com as notas obtidas na Provas 1 e 2, respectivamente. Além disso, introduz a noção de projeção de um ponto sobre cada um desses eixos, apresentando como exemplo as notas obtidas pelos alunos A e B. Também ratificou que cada "espaço" destacado nos eixos possui 1 unidade.*
> (2) **Prof. Pesq.**: Notem que, nessa situação, a ordem em que a gente destaca essas notas importa. Primeiro destacamos a nota do aluno na Prova 1; em seguida, destacamos a nota do aluno na Prova 2. *(O Prof. Pesq. apresenta alguns exemplos)*. A informação 9 na Prova 1 e 8 na Prova 2 não é equivalente à informação 8 na Prova 1 e 9 na Prova 2, apesar de ambas resultarem na mesma média.
> *O Prof. Pesq. destaca os pontos relacionados a essas duas informações para que a turma note que são pontos distintos.*
> (3) **Prof. Pesq.**: Percebam que para todo ponto que eu destaque no gráfico eu consigo fazer uma correspondência com um valor para a nota na Prova 1 e outro para a Prova 2, nessa ordem. Essa região determinada pelos eixos nomeados de Prova 1 e Prova 2 é chamado de Plano Cartesiano, e pode ser estendido.
> *O Prof. Pesq. desenha o plano cartesiano na lousa. Além disso, faz uma breve revisão histórica, e também relaciona o eixo horizontal com a reta numérica, que os alunos afirmaram terem estudado no conteúdo Conjuntos Numéricos.*
> (4) **Prof. Pesq.**: Essa reta na horizontal representa os valores de x e é chamada de eixo das abscissas. *(Pausa)*. Essa reta que passa pelo 0 e forma um ângulo de 90 graus com o eixo das abscissas representa os valores de y e é chamada de eixo das ordenadas. *(o Prof. Pesq. destaca um ponto no Plano, nomeando-o de P)*. Notem que esse ponto P está relacionado a um único valor x do eixo das abscissas (projeção de P nesse eixo) e um único valor y do eixo das ordenadas (projeção de P nesse eixo). Representamos isso da forma ponto P, cujas coordenadas são (x, y).

O Prof. Pesq. destaca outros pontos, inclusive localizados nas outras regiões, que ele denomina de quadrantes. Em seguida, apresenta a definição proposta por Leonardo (2020):

> **Plano cartesiano** é o plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais x (**eixo das abscissas**) e y (**eixo das ordenadas**), que o dividem em quatro regiões chamadas de **quadrantes**.
> Um ponto P, representado no plano cartesiano, tem uma referência horizontal (x) e uma referência vertical (y), que correspondem às projeções ortogonais de P em cada eixo e que, juntas, definem o **par ordenado** (x, y). Dizemos que x e y são **coordenadas** do ponto $P(x, y)$.

Observação: • cada par ordenado corresponde a um único ponto no plano cartesiano; • cada ponto do plano cartesiano corresponde a um único par ordenado; • todo ponto $P(x, y)$ do 1º quadrante tem $x \geq 0$ e $y \geq 0$; • todo ponto $P(x, y)$ do 2º quadrante tem $x \leq 0$ e $y \geq 0$; • todo ponto $P(x, y)$ do 3º quadrante tem $x \leq 0$ e $y \leq 0$; • todo ponto $P(x, y)$ do 4º quadrante tem $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

[Diálogo com a turma]
O Prof. Pesq. destaca um ponto no 3º quadrante:
(1) **Prof. Pesq.**: Quais são as coordenadas desse ponto? *(um ponto genérico).*
(2) **A_1G_7:** $(-x, -y)$.
O Prof. Pesq. corrige, afirmando que só o fato de o ponto pertencer ao 3º quadrante já garante que x e y são negativos. E seguida, apresenta alguns pontos com valores específicos.
O Prof. Pesq. também destaca como se expressa as coordenadas de um ponto quando ele está sobre cada um dos eixos.
(3) **Prof. Pesq.**: Por quê que na figura do problema é representado apenas o 1º Quadrante?
(4) **A_4G_2:** Porque as notas não podem ser negativas.

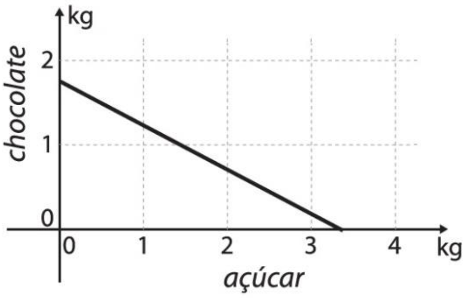
A fala (2) retrata um erro bastante comum, que é o de apresentar uma incógnita precedida do sinal “$-$” para se expressar que o seu valor é negativo. Além dos exemplos numéricos, foi apresentada a noção de módulo, um número estritamente positivo, através da sua definição algébrica: $|x| = \begin{cases} x; \ x \geq 0 \\ -x; \ x < 0 \end{cases}$, para mostrar que $-x$ pode ser um número positivo, assim como x pode assumir um valor negativo. Além disso, a fala (4) mostra a compreensão da situação proposta enquanto problema contextualizado, que tratava das notas atribuídas aos estudantes de uma turma.

A noção de Plano Cartesiano, no geral, foi bem assimilada pelos estudantes; não provocando maiores dúvidas, ocorrendo conforme o previsto. Ao final da aula, o aluno A_3G_2 comentou: “Valeu, professor. Foi boa a sua aula. Eu gostei disso daqui. Na prova que você for fazer, coloque só isso”.

O objetivo do Problema Gerador 05, a seguir, foi o de construir a definição de gráfico de uma função. Segundo Santos e Barbosa (2017), um aspecto relevante de se comunicar a noção de função graficamente é o fato de desvinculá-la de sua subordinação em relação à representação algébrica. No próprio problema, a lei de formação da função não é apresentada e nem é, também, indispensável para a sua resolução.

PROBLEMA GERADOR 05 (2013N3F1Q09)

Iara gastou R$ 10,00 para comprar açúcar e chocolate. A relação entre as quantidades desses ingredientes que podem ser compradas com essa quantia é dada pelo gráfico. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira, independentemente das quantidades compradas?



a) Iara comprou mais açúcar do que chocolate.

b) Iara comprou quantidades diferentes de açúcar e chocolate.

c) Iara gastou mais em chocolate do que em açúcar.

d) O preço de um quilo de chocolate é maior que o preço de um quilo de açúcar.

e) Iara comprou duas vezes mais chocolate do que de açúcar.

O Prof. Pesq. lê o problema com a turma. O aluno A_1G_7 questiona se "a reta no meio é o que ela comprou", o Prof. Pesq. responde que são todas as possibilidades de compra com os R$ 10,00. Essa foi uma dúvida bastante comum entre os grupos: separar o que Iara comprou (uma informação inexistente) com o que ela pode comprar (expressado através do gráfico), sendo necessário vários esclarecimentos.

O Grupo 08 se manifestou:

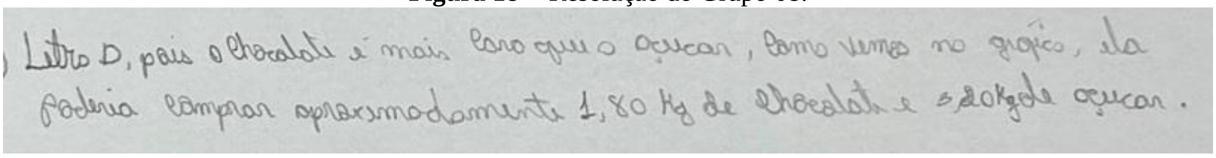
[Diálogo com o Grupo 08]
(1) **A_3G_8**: Então só a letra d) é verdadeira.
(2) **Prof. Pesq.**: Por quê?
(3) **A_3G_8**: Porque compra menos chocolate do que açúcar com os R$ 10,00.
(4) **Prof. Pesq.**: Como assim?
(5) **A_3G_8**: Porque ela pode comprar mais de 3 kg de açúcar e menos de 2 kg de chocolate.
(6) **Prof. Pesq.**: Sua justificativa está correta.
(7) **A_3G_8**: É... Só falta responder agora *(risos)*.
(8) **Prof. Pesq.**: Mas você acabou de responder. É só passar para o papel o que você acabou de dizer.

O Grupo conseguiu inferir corretamente que o preço de um quilo de chocolate é maior que o preço de um quilo de açúcar, por se comprar uma quantidade menor com aquele do que com este, com os R$ 10,00. O grupo ainda estimou cada uma das quantidades que se poderiam comprar com esse valor (Figura 18, a seguir). Na justificativa, a única correção seria substituir o conectivo “e” pelo conectivo “ou”, com caráter exclusivo, já que, no exemplo, compra-se só açúcar ou só chocolate.

Outro ponto que chama a atenção é a fala (7) do discente A_3G_8, quando diz que ainda iria resolver o problema (mesmo já tendo justificado verbalmente e de forma correta). Por resolver, ele quis dizer expressar a justificativa na linguagem matemática, de forma algébrica. Essa é uma visão bastante comum entre os discentes: a de considerar que respostas na língua vernácula não constituem solução de diversos problemas matemáticos. O “cálculo” tem que aparecer de alguma forma. Segundo Bernardino, Garcia e Rezende (2019, p 140), “essa dificuldade do aluno pode ser resultado de um processo de ensino em que raramente o aluno precisa explicar em linguagem natural as interpretações e resultados matemáticos propostos em sala de aula”.

Sendo assim, o Prof. Pesq. reforça que a turma pode justificar a escolha da alternativa da forma que achar mais conveniente:

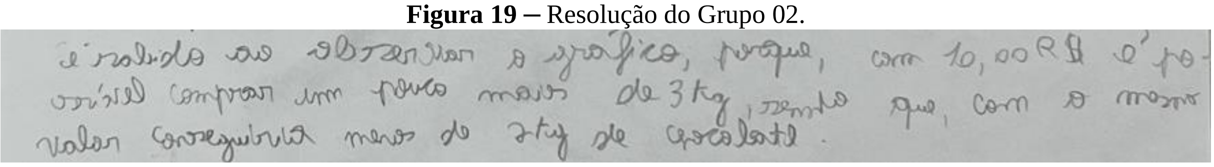
Figura 18 – Resolução do Grupo 08.


Letra D, pois o chocolate é mais caro que o açúcar, como vemos no gráfico, ela poderia comprar aproximadamente 1,80 kg de chocolate e 5,20kg de açúcar.

Fonte: Acervo do autor (2022).

O Grupo 02, conforme a Figura 19, a seguir, apresentou uma justificativa semelhante, porém sem especificar as quantidades compradas; mas sim, afirmando que, para o chocolate, é uma quantidade menor que 2kg e, para o açúcar, é uma quantidade maior que 3kg:

Figura 19 – Resolução do Grupo 02.


é validado ao observar o gráfico, porque, com 10,00 R$ é possível comprar um pouco mais de 3kg, sendo que, com o mesmo valor conseguiria menos de 2kg de chocolate.

Fonte: Acervo do autor (2022).

Estes dois grupos recorreram a uma informação contida no gráfico para mostrar que o preço de um quilo de chocolate é maior que o preço de um quilo de açúcar. Dois outros grupos também afirmaram isso, mas sem apresentar uma justificativa com base nas informações contidas no problema:

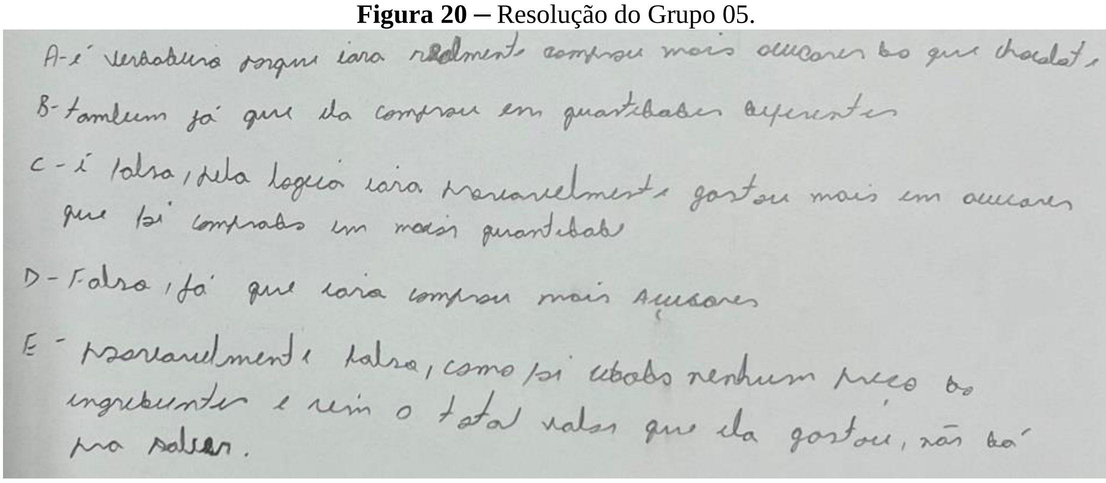
> **Grupo 03:** Porque a letra D é verdadeira. Porque todo mundo sabe que chocolate é mais caro do que açúcar.
> **Grupo 04:** Letra D, porque o chocolate é mais caro do que açúcar.

Justificativas essas que foram baseadas na experiência dos grupos. Apesar de não serem respostas fornecidas com base nos dados do problema, elas mostram que frequentemente o estudante procura relacionar o conteúdo visto na sala de aula com o seu dia a dia, talvez como uma forma de atribuir-lhe sentido. Por outro lado, a tentativa de contextualização do problema mostra que houve uma preocupação em apresentar um problema compatível com a realidade, com o intuito de torná-lo verossímil, já que a resposta correta realmente era a alternativa D.

Ademais, o Grupo 06 também marcou o item D, com a justificativa de "mesmo o açúcar sendo comprado em maior quantidade, o chocolate se torna mais caro". O Grupo 01 marcou a letra B, "pois Iara comprou uma quantidade maior de açúcar do que de chocolate". O Grupo 07 marcou a alternativa A, "porque ela comprou mais quilos de açúcar do que chocolate". Todos estes grupos partiram da premissa de que foi comprado mais açúcar do que chocolate, uma informação que o gráfico não apresenta. O erro na interpretação se deu, provavelmente, por se considerar que os valores contidos nos extremos do gráfico ocorriam simultaneamente. Além disso, se essa informação fosse correta, ambos os itens A e B estariam corretos, pois a primeira afirmação teria como consequência a segunda.

O Grupo 05 também concluiu que foi comprado mais açúcar do que chocolate e, baseando-se nisso, considerou que os itens A e B estavam corretos. Além disso, procurou justificar cada um dos itens a partir dessa informação. A Figura 20, a seguir, apresenta tais justificativas:

Figura 20 – Resolução do Grupo 05.


A- é verdadeira porque iara realmente comprou mais açucares do que chocolate,
B- tambem já que ela comprou em quantidades diferentes
C- é falsa, pela logica iara provavelmente gastou mais em açucares que foi comprado em mais quantidade
D- Falsa, já que iara comprou mais Açucares
E- provavelmente falsa, como foi citado nenhum preço dos ingredientes e nem o total valor que ela gastou, não dá pra saber.

Fonte: Acervo do autor (2022).

Na formalização do conteúdo, tivemos a seguinte discussão com a turma:

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: Notem que o problema não diz quantos quilos de chocolate ou quantos quilos de açúcar Iara comprou. O que o problema fornece é esse gráfico que relacionada as quantidades de chocolate ou açúcar que Iara *pode* comprar.
> *Em seguida, o Prof. Pesq. retoma a noção de plano cartesiano. Além disso, destaca que o problema está admitindo que se pode comprar quantidades fracionadas de açúcar e de chocolate. Explica também a utilização do termo "independentemente das quantidades compradas".*
> (2) **Prof. Pesq.**: O item a) está correto ou não?
> (3) **A_2G_2**: Ela não comprou ainda.

A resposta do A_2G_2 impulsionou uma discussão no sentido de se verificar como as sentenças estavam escritas. No enunciado do problema aparece a expressão "a relação entre as quantidades desses ingredientes que podem ser compradas com essa quantia é dada pelo gráfico", usada no tempo futuro. Das cinco alternativas, apenas a d) não está sendo empregada no tempo passado. Contornando isso, o Prof. Pesq. prossegue:

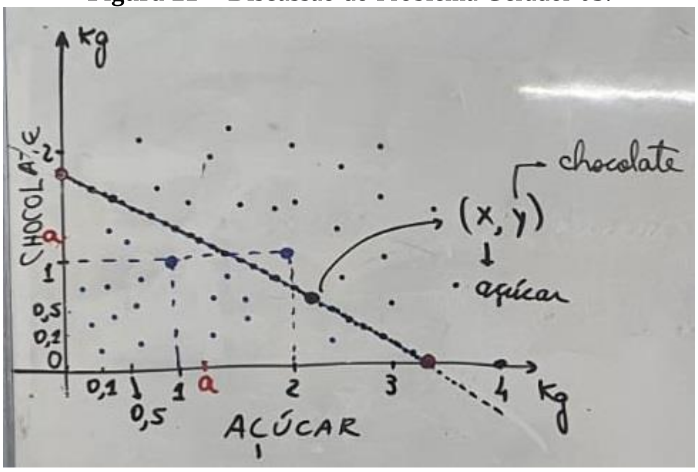
> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: A gente não sabe a quantidade que Iara comprou de açúcar e chocolate, mas o problema diz que a informação contida no gráfico não depende disso. *(Pausa).* Para que a gente consiga descartar uma alternativa, basta a gente apresentar um contraexemplo.
> *O Prof. Pesq. reler o item a) e, em seguida, destaca o ponto do gráfico que está sobre o eixo correspondente ao chocolate (Figura 21).*
> (2) **Prof. Pesq.**: Quais são as coordenadas desse ponto? *(Pausa).* O ponto está no eixo y (lembram?) então o x vale quanto?
> (3) **A_4G_2**: 0
> (4) **Prof. Pesq.**: Esse ponto representa a situação em que Iara pode comprar só chocolate. Então o item a) é verdadeiro?
> (5) **Alguns alunos**: Não.

No item b) o Prof. Pesq. destaca um ponto no gráfico que possui as coordenadas (a, a) (Figura 21), relacionando-o com a função $f(x) = x$, os estudantes tiveram uma certa dificuldade em compreender, principalmente na interpretação da interseção desta reta com o gráfico do problema. No item c), o Prof. Pesq. utiliza um argumento análogo ao apresentado no item a), destacando o ponto do gráfico que está sobre o eixo correspondente ao açúcar (Figura 21). No item d), foi utilizando o mesmo argumento dos Grupos 02 e 08.

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Por que o item e) é falso?
(2) **A_1G_7**: Porque também pode ser quantidades iguais.
(3) **Prof. Pesq.**: Exatamente. No item b) a gente encontrou no gráfico o ponto que representa quantidades iguais de chocolate e açúcar que podem ser comprados. *(Pausa).* Assim como no item b), só existe um ponto em que a quantidade de chocolate é duas vezes a quantidade de açúcar: na interseção do gráfico da função $f(x) = 2x$ com o gráfico do problema.

A Figura 21, a seguir, apresenta os pontos destacados na discussão sobre os itens:

Figura 21 – Discussão do Problema Gerador 05.



Fonte: Acervo do autor (2022).

O Prof. Pesq. destaca vários outros pontos no 1º quadrante, pertencentes ou não ao gráfico que relaciona as quantidades de açúcar e chocolate que Iara pode comprar com R$ 10,00. Incluindo, conforme pode ser visto na Figura 21, representada anteriormente, vários deles sobre tal gráfico, para que os discentes notassem que este é construído por um conjunto de pontos (pares ordenados). Questiona-se:

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Por que nesse gráfico só é representado o 1º quadrante?
(2) **A_4G_2**: Porque a gente não pode ter valores negativos quanto à grandeza de massa.
O Prof. Pesq. concorda e ratifica.
(3) **Prof. Pesq.**: Lembrando que Iara possui R$ 10,00. Com esse valor ela consegue comprar 1kg de açúcar e 1kg de chocolate?
(4) **Alguns alunos:** Sim.
(5) **Prof. Pesq.**: Onde está o ponto cujas coordenadas são (1,1)?
(6) **A_4G_2**: Passa pela bissetriz.
(7) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. *(O Prof. Pesq. destaca esse ponto no plano, conforme Figura 21).* Além disso, ele está abaixo do gráfico. Ela consegue comprar e ainda sobra dinheiro. Todo ponto abaixo dessa reta me diz...
(8) **A_4G_2**: ... Que sobrou dinheiro.
(9) **Prof. Pesq.**: Com esse valor de R$ 10,00, Iara consegue comprar 2kg de açúcar e 1kg de chocolate?
(10) **Alguns alunos:** Não.
O Prof. Pesq. concorda e destaca o ponto no plano, conforme Figura 21.

> (9) **Prof. Pesq.**: Por quê?
> (10) **A_1G_7:** Porque vai faltar dinheiro.
> (11) **A_4G_2**: Porque passa de R$ 10,00.
> (12) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. Todo ponto acima dessa reta corresponde a quantidades que Iara não poderá comprar com os R$ 10,00. *(Pausa)*. Os pontos que estão na reta correspondem a quantidades de açúcar e chocolate que Iara irá pagar com exatamente R$ 10,00.
> *O Prof. Pesq. retoma os três casos.*
> (13) **Prof. Pesq.**: Notem que se eu unir esses pontos *(os que estão na reta)*, eu vou conseguir formar a própria reta *(o Prof. Pesq. vai destacando cada vez mais pontos).* Essa reta é o gráfico da nossa função que relaciona as quantidades de açúcar e chocolate que Iara pode comprar com R$ 10,00. Cada um desses pontos eu posso representar pelas coordenadas (x, y), onde o x representa a quantidade de açúcar e o y representa a quantidade de chocolate que Iara pode comprar com R$ 10,00.

O Prof. Pesq. então escreve na lousa a seguinte definição, proposta por Dante e Viana (2020):

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, o gráfico dela é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in A,\ y \in B$ e $y = f(x)$, ou seja, $G(f) = \{(x, y); x \in A,\ y \in B \text{ e } y = f(x)\}$.

O Prof. Pesq. retoma as noções de domínio, contradomínio, imagem e par ordenado. Além disso, relaciona com a situação apresentada no Problema Gerador 05. Em dado momento, o aluno A_4G_2 questiona se a definição não deveria ser reescrita como "o gráfico dela é o conjunto *infinito* de pares ordenados". O Prof. Pesq. esclarece que a frase "conjunto formado por todos os pares ordenados" já engloba os casos em que a quantidade de pares ordenados é infinita com também finita. O discente havia intuído que todo gráfico era formado por um conjunto infinito de pontos, o que não é necessariamente verdade. Como exemplo, o Prof. Pesq. retomou o Problema Gerador 05, questionando como seria o seu gráfico se considerássemos apenas quantidade inteiras para quilos de açúcar e chocolate.

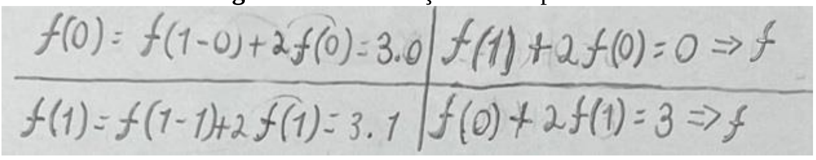
O objetivo do Problema Gerador 06 foi o de construir o conceito de zero de uma função:

PROBLEMA GERADOR 06 (2016N3F1Q13) (Adaptado)
Uma função f é tal que$f(1 - x)\ +\ 2f(x)\ =\ 3x$, para todo x real. Qual é o valor de $f(0)$?

Na discussão com os grupos, o Prof. Pesq. sugere que eles atribuam valores para o x. Dentre os valores, a maioria atribuiu os seguintes: $0, 1, 2$ e 3. Estes ainda perceberam que as situações em que $x = 2$ e $x = 3$ poderiam ser descartadas. Apesar disso, eles não conseguiram operar com as equações $f(1) + 2f(0) = 0$ e $f(0) + 2f(1) = 3$, em que deveriam obter o valor de $f(0)$ através da resolução de um sistema linear com as equações supracitadas.

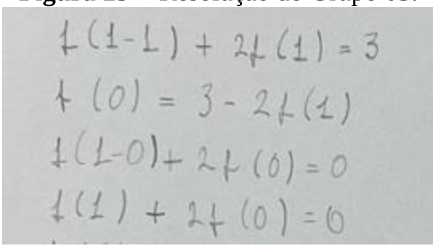
As Figuras 22, 23 e 24, a seguir, apresentam as soluções de alguns grupos:

Figura 22 – Resolução do Grupo 01.



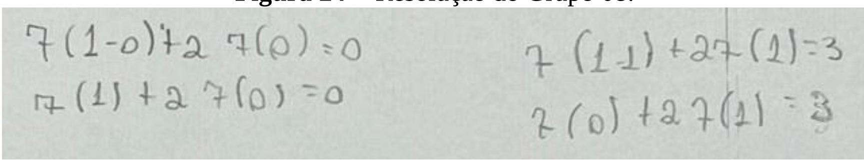
Fonte: Acervo do autor (2022).

Figura 23 – Resolução do Grupo 03.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Figura 24 – Resolução do Grupo 08.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Os procedimentos de resolução dos grupos são praticamente o mesmo. De igual forma, os grupos não conseguiram avançar mais depois das substituições. Quando questionados se haviam estudado resolução de sistemas lineares nos anos anteriores, eles afirmaram não lembrar.

Posteriormente à análise *a priori* desde problema gerador, verificou-se que ele era o que mais se distanciava dos demais. Primeiramente, por não apresentar qualquer tipo de contextualização. Em seguida, por exigir dos estudantes um conhecimento prévio bastante específico, que é a resolução de sistemas lineares, com o agravante de o mesmo ser nas incógnitas $f(0)$ e $f(1)$, e não nas incógnitas x e y, como são comumente apresentadas. Além disso, existe o fato dele não estar diretamente relacionado ao conceito de zero de uma função, uma vez que solicita o valor de $f(0)$, e não necessariamente o valor de $f(x) = 0$ (um fator que foi adaptado). Apesar disso, optou-se por manter a aplicação do problema.

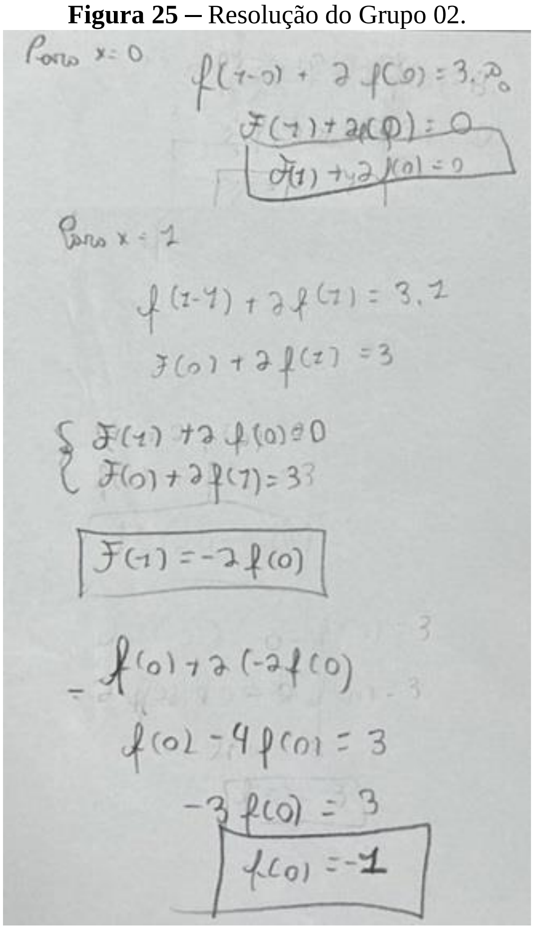
Apenas o Grupo 02 conseguiu resolver corretamente o problema. Tivemos o seguinte diálogo:

[Diálogo com o Grupo 02]
(1) **A_4G_2**: O resultado dá 3?
(2) **Pro. Pesq.**: Por quê?
O aluno contorna a resposta do Prof. Pesq., não a respondendo. O Prof. Pesq. olha o que o grupo havia feito e percebe que já haviam atribuído na equação $f(1 - x) + 2f(x) = 3x$ *o valor* $x = 0$.
(3) **Pro. Pesq.**: O raciocínio do grupo está correto, mas ainda falta um novo passo... Vocês trocaram o x por 0.
(4) **A_4G_2**: E se a gente atribuísse outro valor a x? Tipo 1?
(5) **Pro. Pesq.**: Tente trocar por 1...
(6) **A_4G_2**: ...Você acha, por exemplo, que um sistema de equação dá pra resolver?
(7) **Pro. Pesq.**: É isso mesmo!

Apesar do equívoco inicial, o grupo compreendeu o que o problema solicitava. A fala do A_4G_2 (em (6)) procura antecipar uma etapa ainda a ser realizada, o que sugere um bom planejamento da solução, conforme ratifica Polya (2006), além de um domínio satisfatório dos procedimentos algébricos, já que ele *visualizou* que iria obter duas equações nas incógnitas $f(0)$ e $f(1)$.

A Figura 25, a seguir, apresenta a solução do Grupo 02:

Figura 25 – Resolução do Grupo 02.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Na formalização dos conteúdos, tivemos o seguinte diálogo com a turma:

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: Notem que o problema não fornece a lei de formação da função. Se fornecesse, o problema seria bem mais fácil de se resolver, porque só era substituir o x por 0 nessa lei. Então, nós temos que trabalhar com o que o problema fornece. *(Pausa)*. Se eu quero saber o valor de $f(0)$, então...
> (2) **A_1G_3**: ...Você vai trocar o x por 0.
> *O Prof. Pesq. concorda e, em seguida, faz a substituição, obtendo:* $f(1) + 2f(0) = 0$.
> (3) **Prof. Pesq.**: Notem que só essa equação não resolve o problema, pois nós obtemos uma equação com duas incógnitas. Nós temos então que obter uma outra equação, também nessas incógnitas. Como eu obtenho outro $f(0)$ na equação $f(1 - x) + 2f(x) = 3x$?
> (4) **A_4G_2**: Troca o x por 1.
> *O Prof. Pesq. concorda e, em seguida, faz a substituição, obtendo:* $f(0) + 2f(1) = 3$.

O Prof. Pesq. destaca o $f(0)$ e o $f(1)$ nas duas equações. Em seguida, faz uma breve revisão sobre sistemas lineares. Em determinado momento da resolução do sistema obtido no problema, o aluno A_4G_2 questiona se pode substituir o $f(0)$ por x e o $f(1)$ por y para tornar o sistema mais simples. O Prof. Pesq. expressa que poderia ser uma forma de resolução. Obtido o valor $f(0) = -1$, o Prof. Pesq. o associa ao ponto $(0, -1)$, que pertence à função f:

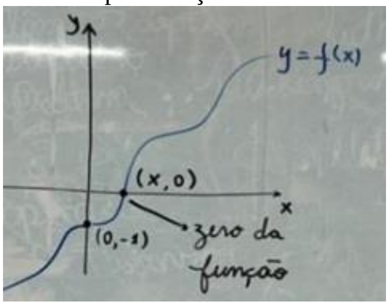
> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: Esse ponto de coordenadas $(0, -1)$ corta o eixo y em -1. Nós não sabemos a lei de formação da função f, nem o formato do seu gráfico, mas nós sabemos que seu gráfico corta o eixo y em -1. Ou seja, é um ponto que pertence ao eixo das ordenadas. *(Pausa)*. Essa mesma função pode cortar o eixo x (eixo das abscissas) em um valor genérico x. Quais são as coordenadas desse novo ponto? Quanto vale o meu y nesse ponto, já que ele está sobre o eixo x?
> (2) **A_4G_2**: 0.
> (3) **Prof. Pesq.**: Então esse ponto terá coordenadas $(x, 0)$... Esse x, que constitui com o 0 um ponto sobre o eixo x, é chamado de zero da função f.

Nessa etapa, o Prof. Pesq. destaca na lousa a definição de Dante e Viana (2020):

O zero de uma função f qualquer é raiz da equação obtida ao fazer $f(x) = 0$.

No processo, o Prof. Pesq. desenha um gráfico genérico para f, destacando nele o ponto associado ao zero da função f, conforme se pode observar na Figura 26, a seguir:

Figura 26 – Representação do zero da função f.



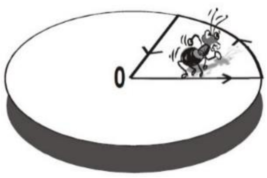
Fonte: Acervo do autor (2022).

Além disso, destaca que uma função pode assumir um ou mais zeros (ou nenhum), exemplificando com diversos gráficos. A turma não apresentou maiores dúvidas sobre esse conceito. Passou-se, então, a proposição e resolução dos problemas adicionais.

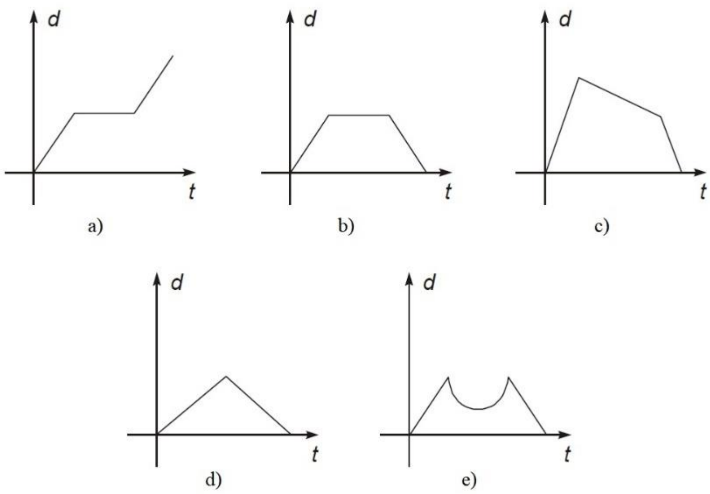
O objetivo do Problema Gerador 07 foi o de construir a noção de crescimento e decrescimento de uma função.

PROBLEMA GERADOR 07 (2006N3F1Q17)

Uma formiguinha parte do centro de um círculo e percorre uma só vez, com velocidade constante, o trajeto ilustrado na figura.



Qual dos gráficos a seguir representa a distância *d* da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo *t*?



O Prof. Pesq. lê o problema com a turma, afirmando que a formiguinha percorre três direções distintas, até retornar ao centro O do círculo. Curiosamente, todos os grupos concluíram erroneamente que a alternativa correta era o item d). A seguir, temos as justificativas dadas por cada um dos grupos:

> **Grupo 01:** Letra d) pelo fato do formato do gráfico ser o mesmo trajeto da formiga, que caminha formando um triângulo.
> **Grupo 02:** A distância varia em função do tempo, quando tiramos o raio de uma circunferência, a conseguimos dividir em vários triângulos, o que me levou a acreditar que poderia ser a d), esta que forma um triângulo. Além da constância da velocidade, que faria acreditar que a reta do gráfico subiria ou desceria de formato uniforme.
> **Grupo 03:** D. Porque é a figura com que mais se parece com o trajeto percorrido pela formiguinha.
> **Grupo 04:** D. Porque é a mais que se parece com a formiguinha.
> **Grupo 05:** D, pois o desenho que representa o trajeto é parecido com o do gráfico.
> **Grupo 06:** D. Por que as linhas do desenho bate com o caminho que a formiga foi.
> **Grupo 07**: D, pois o gráfico é parecido.
> **Grupo 08:** D, pois a trajetória é parecida com a figura.

Como observado, todos os grupos associaram o formato do trajeto percorrido pela formiguinha com o formato do gráfico da alternativa d). Isso mostra que não houve total compreensão do problema; e sim, mais uma "sobreposição" de imagens, aparentemente, relacionando o setor circular percorrido pela formiguinha com um triângulo, conforme mostra a fala do Grupo 02: "quando tiramos o raio de uma circunferência, a conseguimos dividir em vários triângulos".

Na formalização do conteúdo, obtivemos o seguinte diálogo:

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) **Prof. Pesq.**: De acordo com a figura, a formiguinha percorre quantos caminhos distintos? Ela muda de direção quantas vezes?
> (2) **A_3G_7**: Três.
> (3) **Prof. Pesq.**: Exatamente. *(Pausa).* Em cada um desses caminhos, a distância em relação ao centro (o centro é esse ponto O) muda ou não? *(Silêncio).* Por exemplo, nessa primeira etapa do percurso, a distância da formiguinha ao centro aumenta ou diminui?
> (4) **Alguns alunos**: Aumenta.

O Prof. Pesq. faz a mesma pergunta em relação à segunda etapa do trajeto. A turma fica dividida. Sendo assim, ele acaba por revisar as noções de círculo, circunferência, centro, diâmetro, raio, setor circular e conceitos afins. Em seguida, repete a pergunta:

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Nessa etapa do trajeto, a distância aumenta ou diminui?
(2) **A_3G_7**: Permanece igual.
(3) **Prof. Pesq.:** Exatamente. Nessa segunda etapa do trajeto, a distância da formiguinha até o centro O não varia. Ela não muda. É constante.
(4) **A_1G_7**: Mas você só pergunta "aumenta" ou "diminui" ...
(5) **Prof. Pesq.:** A intenção era justamente essa: que alguém pensasse fora da caixinha e notasse que a distância nem aumenta e nem diminui, é constante.
O Prof. Pesq. retoma as duas primeiras etapas.
(6) **Prof. Pesq.**: E na terceira etapa do trajeto? A distância da formiguinha ao centro O aumenta, diminui ou permanece constante?
(7) **Alguns alunos**: Diminui.
(8) **A_1G_7**: Ah, então é a b)!
(9) **A_3G_7**: É a letra b)!
(10) **Prof. Pesq.**: Exatamente. *(Pausa)*. Então eu tenho três situações: na primeira, a distância aumenta; na segunda, a distância permanece constante; e na terceira, a distância diminui. Notem que o tempo tá passando também, conforme a formiguinha vai percorrendo os caminhos.

A turma, então, acaba por concluir que a alternativa que melhor representa a distância d da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo t é a alternativa b).

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Pelo gráfico, notem que, na primeira etapa do percurso, conforme o tempo aumenta, a distância da formiguinha ao centro O também aumenta. *(O Prof. Pesq. destaca alguns pontos nesse intervalo).* Isso quer dizer que, na primeira etapa do percurso, a função é crescente.

Nesse momento, o Prof. Pesq. escreve na lousa a seguinte definição de Leonardo (2020).

Uma função f é **crescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f\ (x_1) < f\ (x_2)$.

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Na segunda etapa do percurso, conforme o tempo aumenta, a distância da formiguinha ao centro O se mantém constante. *(O Prof. Pesq. destaca alguns pontos nesse intervalo).* Isso quer dizer que, na segunda etapa do percurso, a função é constante. Essa função é do tipo $f(x) = r$, onde r é o raio do círculo associado.
O Prof. Pesq. apresenta outros valores números para a função constante.
(2) **Prof. Pesq.**: Na terceira etapa do percurso, conforme o tempo aumenta, a distância da formiguinha ao centro O vai diminuindo. *(O Prof. Pesq. destaca alguns pontos nesse intervalo).* Isso implica que, na terceira etapa do percurso, a função é chamada de função decrescente.

Nesse momento, o Prof. Pesq. escreve na lousa a seguinte definição de Leonardo (2020).

Uma função f é **decrescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f\ (x_1) > f\ (x_2)$.

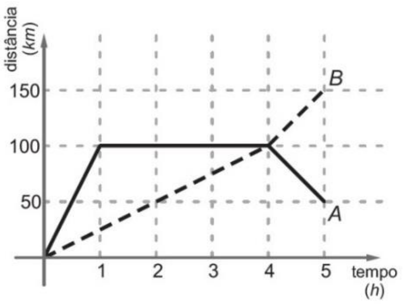
O Prof. Pesq. ainda estuda com a turma o decrescimento/crescimento de cada um dos gráficos apresentados nas alternativas do Problema Gerador 07, associando-os com as definições apresentadas. Além disso, apesar das respostas iniciais, os discentes conseguiram enxergar os erros e acabaram por deduzirem sozinhos que o item correto era o b). No mais, a apresentação do conceito se deu como previsto na Sequência Didática.

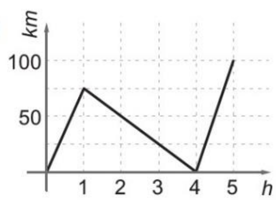
Em seguida, é proposto que os discentes resolvam os problemas adicionais relacionados ao conteúdo.

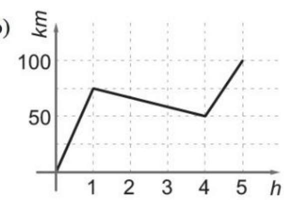
O objetivo do Problema Gerador 08, a seguir, foi o de construir a noção de função definida por mais de uma sentença.

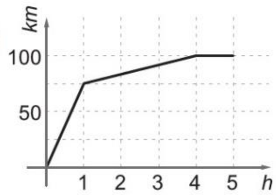
PROBLEMA GERADOR 08 (2012N3F1Q05) (Adaptado)

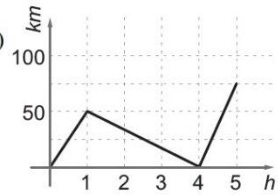
Dois carros *A* e *B* partem de Quixajuba, ao mesmo tempo, pela estrada que vai para Pirajuba. No gráfico abaixo, a linha contínua e a linha pontilhada representam, respectivamente, a distância de *A* e *B* a Quixajuba, ao longo da estrada, em função do tempo. Qual dos cinco últimos gráficos abaixo representa a distância entre os dois carros, ao longo da estrada, em função do tempo?

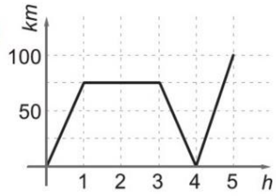


a)


b)


c)


d)


e)


O Prof. Pesq. lê o problema para a turma. Além disso, para uma melhor compreensão da situação-problema, associa com a situação em que os dois carros estivessem partindo de Martins (onde a escola em que a pesquisa foi realizada está situada) em direção à cidade de Pau dos Ferros, um percurso em que os dois carros teriam que passar pela cidade de Serrinha dos Pintos, o que culminaria no trajeto Martins – Serrinha dos Pintos – Pau dos Ferros. Explica que, no percurso, a distância entre os dois carros pode aumentar, ser constante (inclusive os carros podem ir imediatamente um atrás do outro), ou pode diminuir. Além disso, procura explicar a diferença entre o gráfico do problema e os gráficos das alternativas.

O Grupo 06 marcou o item c) como resposta correta, sob a justificativa de que "é a opção mais parecida com a velocidade dos carros". Já o Grupo 01 responde o seguinte:

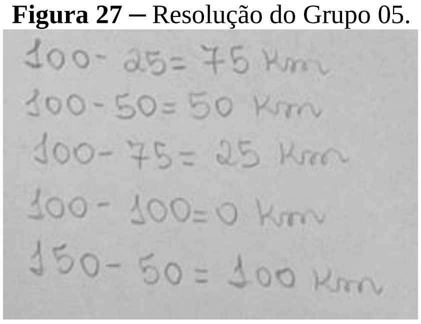
> **Grupo 01:** Pela minha lógica acho que a letra (A) é a resposta correta. Porque, primeiro a velocidade dos dois aumentaram, depois a velocidade do carro A permanece constante e do B aumenta e depois o carro A diminui a velocidade e o B aumenta.

Assim como no Problema Gerador 07, o Grupo 06 faz da associação uma justificativa para marcar o item c); pela alternativa ter, segundo o grupo, um formato parecido com o do gráfico do problema. Além disso, em ambas as justificativas, é interpretado equivocadamente que o gráfico representa uma função nas variáveis tempo e velocidade, e não nas variáveis tempo e distância. Para além desse equívoco, o Grupo 01 demonstrou ter compreendido as informações contidas no gráfico.

O Grupo 04 marcou o item a); porém, não justificou a escolha.

Os Grupos 02, 05, 07 e 08 conseguiram compreender o problema, marcando o item a). Apresentaram soluções bastante semelhantes. A Figura 27, a seguir, mostra a solução de um dos grupos:

Figura 27 – Resolução do Grupo 05.

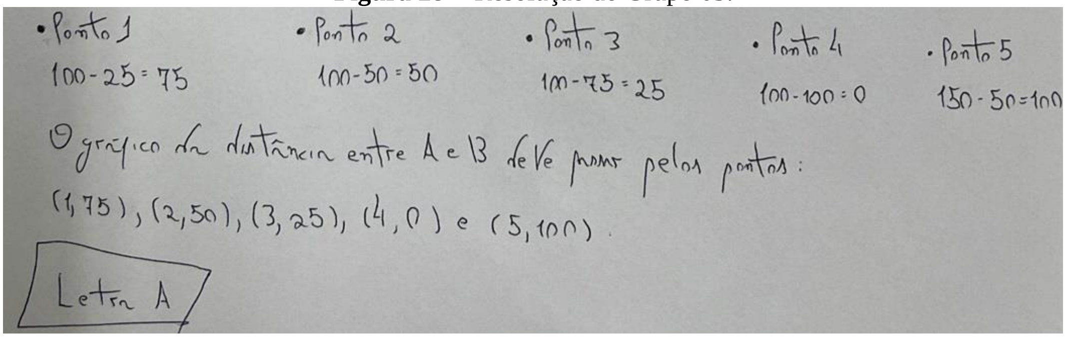


100- 25= 75 Km
100-50= 50 Km
100- 75= 25 Km
100- 100=0 Km
150- 50 = 100 Km

Fonte: Acervo do autor (2022).

Nota-se que o grupo dividiu o intervalo de tempo em $t = 1, 2, 3, 4, 5$, procurando, assim, obter a distância entre os dois carros em cada um dos respectivos tempos, a partir do cálculo da diferença de suas distâncias à Quixajuba. O Grupo 03, além de realizar esse procedimento, ainda os relacionou através dos pares ordenados $(1{,}75), (2{,}50), (3{,}25), (4{,}0)$ e $(5{,}100)$; procurando, assim, nas alternativas, a única que apresentava um gráfico que passasse por cada um desses pontos, conforme pode ser observado na Figura 28, a seguir:

Figura 28 – Resolução do Grupo 03.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Após os grupos resolverem o problema, deu-se início a etapa de formalização do conteúdo. Temos, então, o seguinte diálogo com a turma:

[Diálogo com a turma]
O Prof. Pesq. destaca na lousa a distância do carro A até Quixajuba para os valores $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
(1) **Prof. Pesq.**: Isso me diz que o carro A partiu de Quixajuba e, 1 hora depois estava a 100 km de distância. Depois disso, ele ficou parado... Por quanto tempo?
(2) **A_3G_7**: De 1 até 4.
(3) **Prof. Pesq.**: Isso mesmo. O carro A passou três horas parado... E depois? O que acontece?
(4) **A_3G_7**: A distância diminui.
O Prof. Pesq. concorda.
(5) **Prof. Pesq.**: Fazendo um paralelo, é como se o carro saísse daqui de Martins, fosse a Pau dos Ferros (fazer compras, por exemplo) e, três horas depois, voltasse, mas ficasse em Serrinha dos Pintos.
O Prof. Pesq. destaca na lousa a distância do carro B até Quixajuba para os valores $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
(6) **Prof. Pesq.**: Notem que o carro B passou por Pau dos Ferros, mas não parou. Ele continuou a viagem. Além disso, nas quatro primeiras horas, ele manteve a velocidade constante e, na última hora, aumentou.

O Prof. Pesq. destaca que essas informações não estão escritas no enunciado do problema, mas que podem ser obtidas a partir da interpretação do gráfico. Após os esclarecimentos, o Prof. Pesq. acaba por apresentar a solução na lousa.

[Diálogo com a turma]
(1) **Prof. Pesq.**: Notem que tanto o gráfico da letra a) como os das demais letras, podem ser decompostos em várias sentenças. Por exemplo, no item a), dentro do intervalo de 0 a 1, a função ela é crescente e foi gerada, por exemplo, da situação: carro A com velocidade maior que a do carro B. Dentro do intervalo de 1 a 4, a função é decrescente e foi obtida a partir da situação: carro A parado e carro B se aproximando. Dentro do intervalo de 4 a 5, a função passa a ser novamente crescente, e foi gerada da situação: carro A e B com velocidades iguais e indo em direção opostas. *(Pausa).* Notem que cada um desses três intervalos que define a função faz com que ela seja expressa por uma lei de formação. É como se tivéssemos uma função obtida da união de outras três. *(Pausa).* Isso é o que a gente chama de função definida por mais de uma sentença.

Nesse momento, o Prof. Pesq. apresentou a definição proposta por Iezzi e Murakami (2019):

Uma função f pode ser definida por várias sentenças abertas cada uma das quais está ligada a um domínio D_i contido no domínio da f.

Feito isso, o Prof. Pesq., junto com a turma, procurou obter a lei de formação que define a função representada no gráfico do item a). Chegou-se na seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} 75x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -25x + 100, & \text{se } 1 \leq x < 4 \\ 100x - 400, & \text{se } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Além disso, apresentou outros exemplos, como a função modular, e retomou o Problema Gerador 01, cuja lei de formação pode ser expressa por duas sentenças.

De forma geral, os questionamentos apresentados foram condizentes com os sugeridos na nossa Sequência Didática e obtiveram respostas satisfatórias.

Em seguida, o Prof. Pesq. apresentou alguns problemas adicionais que tratavam de função definida por mais de uma sentença, além de abordarem também todos os conteúdos anteriores que foram apresentados nos Problemas Geradores de número 01 a 07, o que caracterizou uma espécie de revisão dos conceitos.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática,** Rio de Janeiro, n. 55, p. 133-154, jul./dez. 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? *In*: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 15, n. 2, p. 137-169, jul. 2012.

BERNARDINO, F.; GARCIA, W. F. D. G.; REZENDE, V. Ideias base do conceito de função mobilizadas por estudantes do ensino fundamental e ensino médio. **ACTIO**: Docência em Ciências, Curitiba, v. 4, n. 2, p. 127-147, maio/ago. 2019.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos:** função afim e função quadrática. São Paulo: Ática, 2020.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar – volume 1**: conjuntos e funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2019.

LEONARDO, F. M. **CONEXÕES:** matemática e suas tecnologias: manual do professor (grandezas, álgebra e algoritmos). São Paulo: Moderna, 2020.

NEVES, J. D.; RESENDE, M. R. O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 599-625, set. 2016.

OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas -** Somando novos talentos para o Brasil. Disponível em: http://www.obmep.org.br/.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PEREIRA, A. M. **Problemas, Sequências e Consequências.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. **Educação e Matemática**, Lisboa, v. 15, p. 3-9, set. 1990.

REIS, A. Q. M. **A contextualização da matemática como princípio educativo no desenvolvimento do pensamento teórico**: exploração de contextos no movimento do pensamento em ascensão do abstrato ao concreto. 2017. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências – área de Matemática) – Departamento de Humanidades e Educação, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2017.

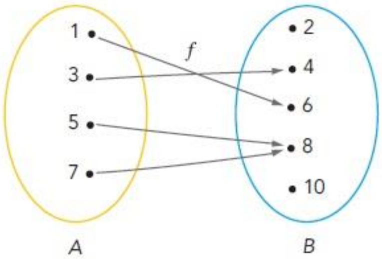
SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Como ensinar o conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 22, n. 53, p. 27-37, jan./mar. 2017.

SOUZA, J. S. S.; SOUZA, L. O. Operacionalização da definição de função: um processo desencadeador da aprendizagem significativa do conceito de função. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 12, n. 3, p. 14-40, set./dez. 2019.

ANEXO I – PROBLEMAS ADICIONAIS

USADOS APÓS O PROBLEMA GERADOR 3

(Dante; Viana, 2020, p. 19) 10. De acordo com o diagrama a seguir, que representa a função f, responda aos itens no caderno.



a) Qual é o domínio e o contradomínio de f ?

b) Qual é o conjunto imagem de f ?

c) Quanto vale $f\ (3)$?

d) Existem elementos de $CD(f)$ que não são elementos de $Im(f)$? Se sim, quais são eles?

e) Existe algum elemento de $D(f)$ que está relacionado pela função f a mais de um elemento de $CD(f)$? Se sim, qual é esse elemento?

f) Existe algum elemento de $Im(f)$ que é imagem de mais de um elemento de $D(f)$? Se sim, qual é esse elemento?

(Leonardo, 2020, p. 65) 7. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 4x + 1$. Determine:

a) $f(4)$

b) $f(-2)$

c) $f(-1) + f(0) - f(11)$

d) $2f(3) - \ f(-3)$

(Leonardo, 2020, p. 65) 8. Obtenha o domínio de cada função[57].

a) $f(x) = 9x + 3$

b) $g(x) = \frac{x^3+8x}{x+3}$

c) $i(x) = \sqrt{x-8}$

d) $j(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$

[57] O autor não expressa o conjunto a ser considerado.

USADOS APÓS O PROBLEMA GERADOR 4

(Leonardo, 2020, p. 67) 14. **(Adaptado)**. Construa um plano cartesiano e marque os pontos indicados

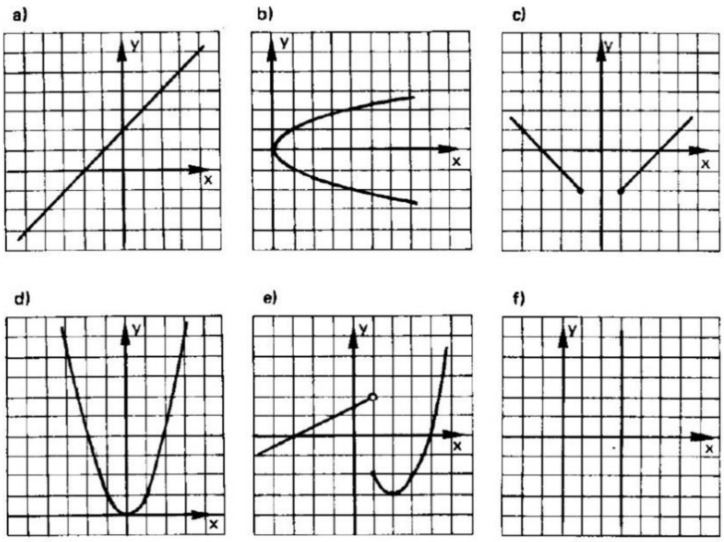
$E(-1,2)$; $F(-2,1)$; $G(-2,3)$; $H(-3,0)$; $I(-3,4)$; $J(-4,1)$; $K(24,3)$; $L(-5,2)$.

(Leonardo, 2020, p. 67) 16. O ponto[58] $(3, 5y + 10)$ pertence ao eixo das abscissas. Determine y.

(Leonardo, 2020, p. 67) 17. O ponto[59] $(2x, y + 3)$ está no 2º quadrante. Indique os valores que x e y podem assumir.

USADOS APÓS O PROBLEMA GERADOR 5

(Iezzi; Murakami, 2013, p. 84) 144. Quais das relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.



(Leonardo, 2020, p. 71) 20. (Adaptado) Em cada caso, construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico de cada função a seguir.

a) $f: A \rightarrow B$, em que $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dada por $f(x) = x^2$.

b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x - 1$.

c) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $k(x) = 7$.

---

[58] O ponto cujas coordenadas são $(3, 5y + 10)$ ...
[59] O ponto cujas coordenadas são $(2x, y + 3)$ ...

(Leonardo, 2020, p. 72) 21. Faça o que se pede em cada item.

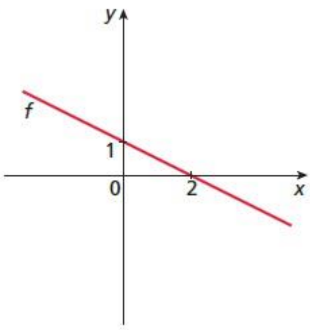
a) Verifique se o ponto representado pelo par ordenado $(8, -1)$ pertence ao gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x - 9$. Justifique.

b) Determine o valor de a para que o ponto[60] $(-2, 1)$ pertença ao gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + 5$.

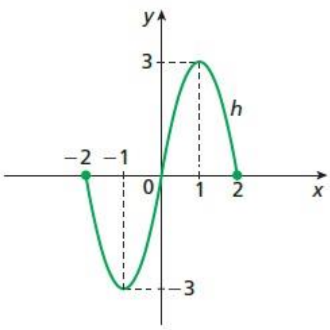
c) O domínio de uma função f é $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 3\}$. O ponto representado pelo par ordenado $(3, -1)$ pode pertencer ao gráfico de f?

(Leonardo, 2020, p. 73) (Adaptado) 25. Determine o domínio e o conjunto imagem das funções correspondentes a cada gráfico[61].

a)



b)



USADOS APÓS O PROBLEMA GERADOR 6

(Leonardo, 2020, p. 64) R5. Determinar os zeros das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $g(x) = x + 9$

b) $h(x) = x^2 - 1$

(Leonardo, 2020, p. 65) 10. Determine, se existirem, os zeros reais das funções[62].

a) $h(x) = 4 - \mathrm{x}$

---

[60] ... de coordenadas $(-2, 1)$...

[61] No item a), não fica claro se é para considerar todo o eixo real.

[62] Não é explicitado em que domínio.

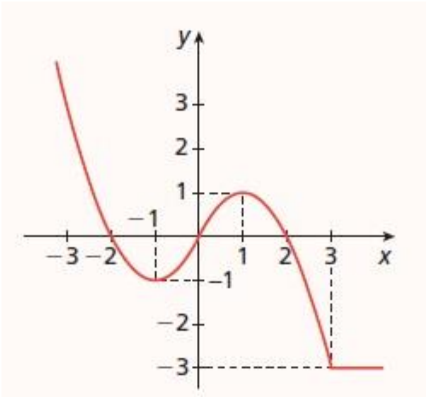
b) $s(x) = \frac{1}{3}\mathrm{x} - \frac{1}{3}$

c) $m(x) = \mathrm{x}^2 + 1$

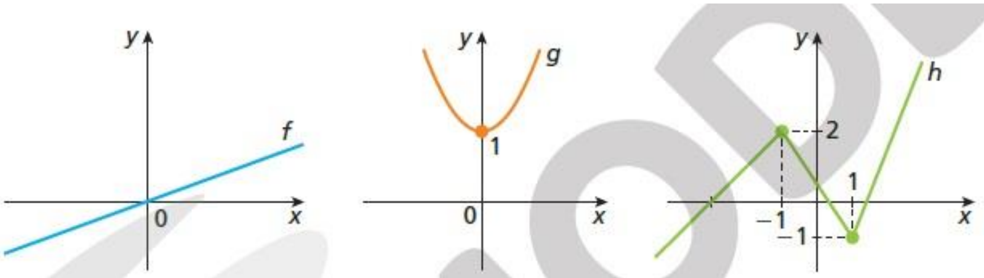
d) $p(x) = \frac{1}{\mathrm{x}+1}$

USADOS APÓS O PROBLEMA GERADOR 7

(Leonardo, 2020, p. 74) R8. Indicar o(s) intervalo(s) do domínio no(s) qual(is) a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, representada no gráfico, é crescente, decrescente e constante (não é crescente nem decrescente).

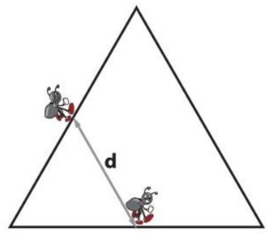


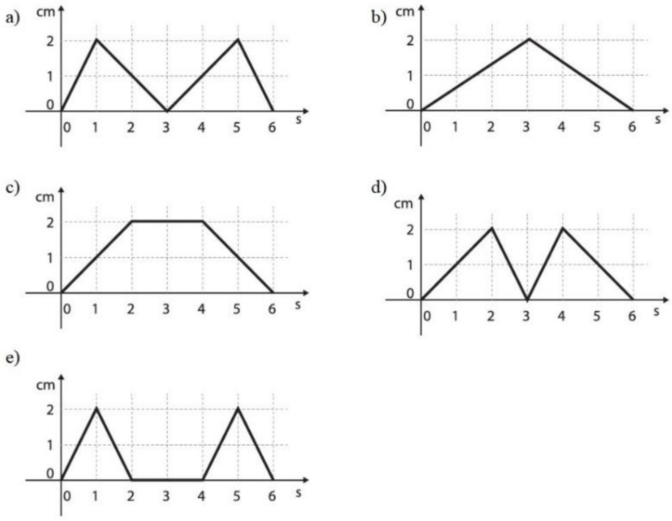
(Leonardo, 2020, p. 75) (Adaptado) 26. Observe os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e, em seguida, faça o que se pede.



Identifique os intervalos de crescimento e os intervalos de decrescimento de cada função.

(2013N3F1Q12) Duas formiguinhas partiram ao mesmo tempo e em direções diferentes de um mesmo vértice de um triângulo equilátero de lado 2 cm. Elas andaram sobre os lados do triângulo à velocidade de 1 cm/s, até retornar ao vértice inicial. Qual dos gráficos[63] abaixo descreve a distância *d* entre as duas formiguinhas em função do tempo?





USADOS APÓS O PROBLEMA GERADOR 8

(Dante; Viana, 2020, p. 13) (Cobrança de estacionamento) Alguns estacionamentos rotativos costumam cobrar um valor mínimo que dá ao motorista o direito de manter o carro estacionado no local durante certa medida de intervalo de tempo. Quando essa medida de intervalo de tempo acaba, há um acréscimo no valor do estacionamento, que aumenta com relação à quantidade de horas inteiras excedidas.

Considere que um motorista estaciona o carro em um local que cobra R$ 14,00 por até 3 horas de estacionamento e R$ 1,50 por hora excedente.

a) Quanto o motorista terá de pagar se deixar o carro estacionado por 5 horas?

b) No caso de pagar R$ 21,50, quantas horas o motorista estacionou além das 3 horas iniciais?

c) E se ele permanecer por apenas 2 horas, quanto deverá pagar de estacionamento?

d) Converse com os colegas sobre o porquê de o valor do estacionamento ser constituído por uma parte fixa e outra variável.

---

[63] Os gráficos apresentados possuem o problema de que seus eixos são definidos pelas unidades (s e cm). Por convenção, o gráfico é representado pelos nomes dos eixos, não pela unidade em que estão representados os números. O correto seria: tempo (s) e distância percorrida (cm).

e) Escreva no caderno uma maneira de calcular o preço a pagar, de acordo um número x de horas em que o carro fica no estacionamento.

(Dante; Viana, 2020, p. 60) 61. Considere a função[64] dada por

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 5, se\ x \leq 1 \\ 9, se\ 1 < x \leq 6 \\ -x + 14, se\ x > 6 \end{cases}$$

Calcule o que é pedido em cada item.

a) $f(0)$

b) $f(-1)$

c) $f(1)$

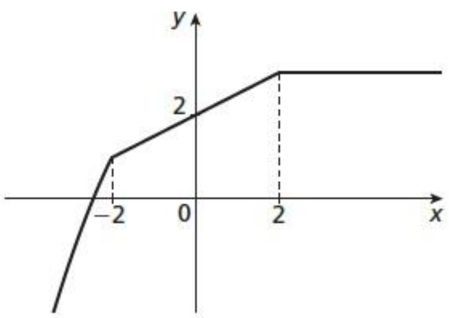
d) $f(5)$

e) $f(10)$

f) $f(6)$

(Leonardo, 2020, p. 84) Observe a lei e o gráfico[65] da função m de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

$$m(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 3, se\ x \leq -2 \\ \dfrac{x}{2} + 2, se - 2 < x \leq 2 \\ 3, \quad se\ x > 2 \end{cases}$$



Agora, responda às questões.

a) Qual é o domínio e o conjunto imagem de $m(x\ )$?

b) Em que intervalo do domínio a função é constante?

c) Quantos zeros tem essa função? Justifique sua resposta.

d) Em que intervalo do domínio a função é positiva? E negativa?

[64] O problema não diz em que conjunto a função está definida.
[65] O eixo y, no gráfico, deveria ser renomeado de eixo m.

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos:** função afim e função quadrática. São Paulo: Ática, 2020.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar – volume 1**: conjuntos e funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2019.

LEONARDO, F. M. **CONEXÕES:** matemática e suas tecnologias: manual do professor (grandezas, álgebra e algoritmos). São Paulo: Moderna, 2020.

OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas -** Somando novos talentos para o Brasil. Disponível em: http://www.obmep.org.br/.

ANEXO II – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

CEPUNICAMP

CHS/UNICAMP - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA INTRODUÇÃO DE CONTEÚDOS E CONCEITOS MATEMÁTICOS: UM OLHAR A PARTIR DAS QUESTÕES DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Pesquisador: PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 50789221.0.0000.8142

Instituição Proponente: Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 4.965.091

Apresentação do Projeto:

INFORMAÇÕES FORNECIDAS PELA EQUIPE DE PESQUISA VIA PLATAFORMA BRASIL

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma competição anual cujo público-alvo são estudantes da Educação Básica. Reconhecida internacionalmente, ela possui, entre outros, o objetivo de contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade. Apesar disso, o que se tem percebido é que, muitas vezes, essa olimpíada se resume ao momento de aplicação das provas. Estamos interessados, neste trabalho, em utilizar esse material dito de qualidade como um componente complementar na abordagem de determinados conteúdos matemáticos. Sendo assim, temos a conjectura de que metodologias não usuais são necessárias para despertar nos alunos o gosto por estudar matemática e o desenvolvimento de habilidades que os auxiliem no enfrentamento das mais variadas situações-problema. O primeiro passo de nossa proposta é trabalhar as questões da OBMEP sob a perspectiva da Resolução de Problemas. Seguindo nessa direção, este projeto apresenta uma pesquisa de doutorado, que se encontra em fase inicial, cuja pergunta norteadora é: A utilização das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, aliada a uma metodologia de Resolução de Problemas, constitui-se num bom caminho para a construção de novos conteúdos e conceitos matemáticos? Com isso, tem-se o objetivo de analisar a viabilidade e o potencial de utilização das questões da OBMEP na

Endereço: Av. Betrand Russell, 801, 2º Piso, Bloco C, Sala 5, Campinas-SP, Brasil.
Bairro: Cidade Universitária "Zeferino Vaz" **CEP:** 13.083-865
UF: SP **Município:** CAMPINAS
Telefone: (19)3521-6836 **E-mail:** cepchs@unicamp.br

aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, por intermédio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Para atingir tal objetivo, temos a intenção de aplicar uma série de sequências didáticas em uma turma de ensino médio de uma escola localizada na região do Alto Oeste Potiguar. Do estudo, espera-se obter subsídios para mensurar e descrever o comportamento dos alunos ao resolver um problema, bem como para analisar se as atividades planejadas corroboram para uma melhor aprendizagem em matemática, além de avaliar se as questões da OBMEP podem ser uma opção viável para a sala de aula.

Critério de Inclusão:
Alunos do 1o ano do Ensino Médio e professor de matemática da escola pesquisada.

Objetivo da Pesquisa:
INFORMAÇÕES FORNECIDAS PELA EQUIPE DE PESQUISA VIA PLATAFORMA BRASIL
O objetivo da pesquisa é analisar a viabilidade e o potencial de utilização das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas na aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, por intermédio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:
Segundo a equipe de pesquisa "Por se tratar de uma pesquisa experimental de aplicação de prática didática em ensino de matemática, com resolução de exercícios em sala de aula, não há riscos identificados de antemão. Mas, a qualquer sinal de desconforto, os participantes têm a opção de se retirar da pesquisa." Também é informado: "Prevemos como benefício a médio ou longo prazo, o oferecimento de material didático criado a partir destas experimentações em sala de aula."

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:
Pesquisa de doutorado Paulo Henrique das Chagas Silva sob orientação de Laura Leticia Ramos Rifo e sediado no PECIM da Unicamp.

A pesquisa prevê a abordagem a 41 participantes, sendo um professor de matemática a ser entrevistado e 40 estudantes do Ensino Médio da Escola Estadual Dr. Joaquim Inácio, no RN, para preenchimento questionários, participarão em atividades de resolução de problemas olímpicos e para entrevistas.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

ver "Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações"

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

O protocolo foi considerado aprovado neste CEP e, caso não tenha autorizações institucionais pendentes ou centros co-participantes, pode ser iniciado.

Não estão sob o escopo deste parecer

- Eventuais alterações documentais realizadas sem aviso prévio e/ou não solicitadas pelo CEP em forma de pendência ou de recomendação;
- Dados coletados em data anterior a este parecer;
- Caso, eventualmente, os dados sejam coletados com autorizações pendentes;
- Caso, eventualmente, os dados sejam coletados sem a aprovação/autorização do centro co-participante (se necessário).

* Conforme a Resolução 510/16, art.28 inciso V, ao término do estudo deve ser apresentado ao CEP um relatório final da pesquisa via NOTIFICAÇÃO.

** Relatório parcial deve ser apresentado em caso de qualquer intercorrência.

*** Potenciais alterações no protocolo podem ser solicitadas via EMENDA. Em caso de submissão de emenda, a coleta de dados fica suspensa até que a emenda seja aprovada.

**** Documentação pendente pode ser submetida via NOTIFICAÇÃO, não sendo necessário aguardar novo parecer para a continuidade da pesquisa.

Considerações Finais a critério do CEP:

1. Vale lembrar que a interação com os participantes de pesquisa só pode ser iniciada a partir da aprovação desse protocolo no CEP. Os cronogramas de geração/coleta de dados deve acompanhar o relatório final de pesquisa

2. Cabe enfatizar que, segundo a Resolução CNS 510/16, Art.28 Inciso IV, o pesquisador é responsável por "(...) manter os dados da pesquisa em arquivo, físico ou digital, sob sua guarda e

responsabilidade, por um período mínimo de 5 (cinco) anos após o término da pesquisa".

3. O participante da pesquisa tem a liberdade de recusar-se a participar ou de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma e sem prejuízo ao seu cuidado. (Res.510/16, Cap.III, Art.9, inciso II)

4. A responsabilidade de obtenção de registro de consentimento, bem como o de sua guarda adequada, é de inteira responsabilidade da equipe de pesquisa. Tais documentos podem ser solicitados a qualquer momento pelo sistema CEP-CONEP para fins de auditoria, bem como servem de proteção para os próprios pesquisadores em caso de eventuais reclamações ou denúncias por parte dos participantes.

5. A responsabilidade pelo planejamento e boa gestão de dados é de inteira responsabilidade da equipe de pesquisa.

6. Eventuais modificações ou emendas ao protocolo devem ser apresentadas ao CEP de forma clara e sucinta, identificando a parte do protocolo a ser modificada e suas justificativas e aguardando a aprovação do CEP para continuidade da pesquisa.

7. Conforme a Resolução 510/16, art.28 inciso V, ao término do estudo deve ser apresentado ao CEP um relatório final da pesquisa via NOTIFICAÇÃO.

8. Caso a pesquisa seja realizada ou dependa de dados a serem observados/coletados em uma instituição (ex. empresas, escolas, ONGs, entre outros), essa aprovação não dispensa a autorização dos responsáveis. Caso não conste no protocolo no momento desta aprovação, estas autorizações devem ser submetidas ao CEP em forma de notificação antes do início da pesquisa.

9. Vale também ressaltar o Art. 3o, inciso VIII da Resolução 510/16:
"São princípios éticos das pesquisas em Ciências Humanas e Sociais:
VIII - garantia da não utilização, por parte do pesquisador, das informações obtidas em pesquisa em prejuízo dos seus participantes;"

10. O papel do CEP é proteger e garantir os direitos do participante de pesquisa. Está além das

funções e das capacidades técnicas do CEP a validação jurídica de documentos como termos de licenciamento de uso/reprodução de imagem e voz e demais tipos de autorizações.

11. As declarações preenchidas na Plataforma Brasil são feitas sob documento público e estão sujeitas a todas as responsabilidades legais e administrativas relacionadas.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1725736.pdf	10/09/2021 13:40:00		Aceito
Outros	Carta_resposta.pdf	10/09/2021 13:38:29	PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_professor.pdf	10/09/2021 13:37:40	PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_responsavel.pdf	10/09/2021 13:37:22	PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TALE_menor.pdf	10/09/2021 13:37:05	PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_maior.pdf	10/09/2021 13:36:29	PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA	Aceito
Outros	AtestadoMatricula.pdf	26/07/2021 12:46:22	PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA	Aceito
Declaração de concordância	Autorizacao_coleta_de_dados.pdf	14/07/2021 15:10:26	PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto.pdf	14/07/2021 15:08:06	PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_rosto.pdf	14/07/2021 15:04:44	PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA	Aceito

Situação do Parecer:

Continuação do Parecer: 4.965.091

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

CAMPINAS, 11 de Setembro de 2021

Assinado por:
Thiago Motta Sampaio
(Coordenador(a))

ANEXO III – TALE (Estudantes menores de idade)

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

A Resolução de Problemas na introdução de conteúdos e conceitos matemáticos: um olhar a partir das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Paulo Henrique das Chagas Silva[1]
Laura Rifo[2]

[1]Aluno do curso de doutorado Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.
[2]Professora orientadora do curso de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

Número do CAAE: 50789221.0.0000.8142

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Assentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e pelo participante, sendo que uma via deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma competição anual, criada em 2005, e voltada a estudantes do Ensino Fundamental (anos finais) e do Ensino Médio. Reconhecida internacionalmente, a OBMEP possui, entre outros, o objetivo de estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil, contribuindo na melhoria da qualidade da educação básica. Entretanto, ela muitas vezes tende a funcionar como um caça-talentos, trazendo em seu bojo questões de alto nível de elaboração e que requerem um

raciocínio mais apurado por parte dos alunos; fazendo com que, muitas vezes, a resolução e os resultados da mesma não atinjam os índices esperados. Além disso, parece não ser frequente o uso de tais questões como um elemento que pode auxiliar na introdução e desenvolvimento de determinados conteúdos dispostos no currículo de matemática. Sendo assim, metodologias não usuais podem ser uma boa alternativa para despertar nos alunos, além do espírito competitivo, principalmente o gosto por estudar matemática. Um primeiro passo poderia ser trabalhar as questões da OBMEP sob a perspectiva da Resolução de Problemas.

Sendo assim, o objetivo desta pesquisa é analisar a viabilidade e o potencial de utilização das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas na aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, por intermédio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Isso porque se considera que a OBMEP, aliada aos pressupostos da Resolução de Problemas, pode consistir numa política pública cuja função extrapola o intuito de descobrir estudantes talentosos, podendo influenciar na qualidade da educação básica, correlacionando determinados conteúdos vistos na olimpíada com os conteúdos ensinados na sala de aula.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: resolver problemas do banco de questões e/ou provas da Obmep. Também poderá responder questionários ou entrevistas sobre as tarefas realizadas. Sua participação terá duração máxima prevista de 10 encontros de 2 h/a, e os registros poderão ser feitos através de diário de campo, folhas de respostas, gravação de áudio e fotografias. Em tais casos, sua identidade será mantida sob sigilo: as folhas de respostas reproduzidas na pesquisa não conterão qualquer informação que o identifique, os áudios servirão apenas para posterior transformação em texto e as fotos disporão de efeitos como esfumaçamento, tarjas e/ou outros procedimentos que impeçam o seu reconhecimento. Sempre que necessário, nos dirigiremos a você, no texto da pesquisa, através de um pseudônimo.

As atividades serão realizadas de forma individual e/ou em grupo.

Os dados coletados ficarão armazenados em formato digital sob a responsabilidade do pesquisador por cinco anos após a data de defesa da referida tese, após este período os mesmos serão descartados.

Desconfortos e riscos:

Por se tratar de uma pesquisa experimental de aplicação de prática didática em ensino de matemática, com resolução de exercícios em sala de aula, não há riscos diretos identificados

de antemão. Mas, a qualquer sinal de desconforto, os participantes têm a opção de se retirar da pesquisa.

Benefícios:

Prevemos como benefício a médio e longo prazo, o oferecimento de material didático criado a partir destas experimentações em sala de aula.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Em situações nas quais você preveja alguma despesa (por exemplo, transporte, alimentação, materiais de papelaria ou impressões), deve informar o orçamento calculado ao pesquisador com antecedência ao preenchimento deste termo de consentimento livre e esclarecido, para que o pesquisador delibere sobre o ressarcimento dos custos na forma "em espécie" ou através de depósito em conta corrente.

Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa quando comprovados nos termos da legislação vigente.

Acompanhamento e assistência:

A qualquer momento os participantes poderão entrar em contato com os pesquisadores para esclarecimentos e assistência sobre qualquer aspecto da pesquisa, através dos contatos abaixo. Você receberá assistência integral e imediata, de forma gratuita, pelo tempo que for necessário em caso de danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, se precisar consultar esse registro de consentimento ou quaisquer outras questões, você poderá entrar em contato com o pesquisador Paulo Henrique das Chagas Silva. Endereço: BR 226, km 405, São Geraldo. Paulo dos Ferros/RN. CEP: 59900-000. UFERSA, sala 10. Telefone: (84) 99913-2151. E-mail: paulo.silva@ufersa.edu.br. E também com a pesquisadora Laura Rifo. Endereço: Rua Sérgio

Buarque de Holanda, 651, CEP: 13083-859, Campinas/SP. Departamento de Matemática, sala 202. Telefone: (19) 3521-6052. E-mail: laurarifo@unicamp.br.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP-CHS) da UNICAMP das 08h30 às 11h30 e das 13h00 às 17h00 na Rua Bertrand Russell, 801, Bloco C, 2º piso, sala 05, CEP 13083-865, Campinas – SP; telefone (19) 3521-6836; e-mail: cepchs@unicamp.br.

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar:

Nome do(a) participante:____

____Data: ___/_____/______.

(Assinatura do participante)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 510/2016 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Assentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____Data: ____/_____/______.

(Paulo Henrique das Chagas Silva)

ANEXO IV – TCLE (Pais e/ou responsáveis)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

A Resolução de Problemas na introdução de conteúdos e conceitos matemáticos: um olhar a partir das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Paulo Henrique das Chagas Silva[1]
Laura Rifo[2]

[1]Aluno do curso de doutorado Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.
[2]Professora orientadora do curso de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

Número do CAAE: 50789221.0.0000.8142

Você está sendo convidado a autorizar a participação de seu/sua filho(a) e/ou menor sob sua responsabilidade como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar o direito do menor como participante e é elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e pelo responsável legal, sendo que uma via deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar que o menor sob sua responsabilidade participe ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma competição anual, criada em 2005, e voltada a estudantes do Ensino Fundamental (anos finais) e do Ensino Médio. Reconhecida internacionalmente, a OBMEP possui, entre outros, o objetivo de estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil, contribuindo na melhoria da qualidade da educação básica. Entretanto, ela muitas vezes tende a funcionar como um caça-talentos, trazendo em seu bojo questões de alto nível de elaboração e que requerem um

raciocínio mais apurado por parte dos alunos; fazendo com que, muitas vezes, a resolução e os resultados da mesma não atinjam os índices esperados. Além disso, parece não ser frequente o uso de tais questões como um elemento que pode auxiliar na introdução e desenvolvimento de determinados conteúdos dispostos no currículo de matemática. Sendo assim, metodologias não usuais podem ser uma boa alternativa para despertar nos alunos, além do espírito competitivo, principalmente o gosto por estudar matemática. Um primeiro passo poderia ser trabalhar as questões da OBMEP sob a perspectiva da Resolução de Problemas.

Sendo assim, o objetivo desta pesquisa é analisar a viabilidade e o potencial de utilização das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas na aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, por intermédio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Isso porque se considera que a OBMEP, aliada aos pressupostos da Resolução de Problemas, pode consistir numa política pública cuja função extrapola o intuito de descobrir estudantes talentosos, podendo influenciar na qualidade da educação básica, correlacionando determinados conteúdos vistos na olimpíada com os conteúdos ensinados na sala de aula.

Procedimentos:

Participando do estudo, o menor sob sua responsabilidade estará sendo convidado a: resolver problemas do banco de questões e/ou provas da Obmep. Também poderá responder questionários ou entrevistas sobre as tarefas realizadas. Sua participação terá duração máxima prevista de 10 encontros de 2 h/a, e os registros poderão ser feitos através de diário de campo, folhas de respostas, gravação de áudio e fotografias. Em tais casos, identidade do menor será mantida sob sigilo: as folhas de respostas reproduzidas na pesquisa não conterão qualquer informação que o identifique, os áudios servirão apenas para posterior transformação em texto e as fotos disporão de efeitos como esfumaçamento, tarjas e/ou outros procedimentos que impeçam o reconhecimento. Sempre que necessário, nos dirigiremos ao menor, no texto da pesquisa, através de um pseudônimo.

As atividades serão realizadas de forma individual e/ou em grupo.

Os dados coletados ficarão armazenados em formato digital sob a responsabilidade do pesquisador por cinco anos após a data de defesa da referida tese, após este período os mesmos serão descartados.

Desconfortos e riscos:

Por se tratar de uma pesquisa experimental de aplicação de prática didática em ensino de matemática, com resolução de exercícios em sala de aula, não há riscos diretos identificados de antemão. Mas, a qualquer sinal de desconforto, os participantes têm a opção de se retirar da pesquisa.

Benefícios:

Prevemos como benefício a médio e longo prazo, o oferecimento de material didático criado a partir destas experimentações em sala de aula.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que a identidade do menor sob sua responsabilidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Em situações nas quais o menor preveja alguma despesa (por exemplo, transporte, alimentação, materiais de papelaria ou impressões), deve informar o orçamento calculado ao pesquisador com antecedência ao preenchimento deste termo de consentimento livre e esclarecido, para que o pesquisador delibere sobre o ressarcimento dos custos na forma “em espécie” ou através de depósito em conta corrente.

O menor terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa quando comprovados nos termos da legislação vigente.

Acompanhamento e assistência:

A qualquer momento os participantes poderão entrar em contato com os pesquisadores para esclarecimentos e assistência sobre qualquer aspecto da pesquisa, através dos contatos abaixo. O menor sob sua responsabilidade receberá assistência integral e imediata, de forma gratuita, pelo tempo que for necessário em caso de danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, se precisar consultar esse registro de consentimento ou quaisquer outras questões, você poderá entrar em contato com o pesquisador Paulo Henrique das Chagas Silva. Endereço: BR 226, km 405, São Geraldo. Paulo dos Ferros/RN. CEP: 59900-000. UFERSA, sala 10. Telefone: (84) 99913-2151. E-mail:

paulo.silva@ufersa.edu.br. E também com a pesquisadora Laura Rifo. Endereço: Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651, CEP: 13083-859, Campinas/SP. Departamento de Matemática, sala 202. Telefone: (19) 3521-6052. E-mail: laurarifo@unicamp.br.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP-CHS) da UNICAMP das 08h30 às 11h30 e das 13h00 às 17h00 na Rua Bertrand Russell, 801, Bloco C, 2º piso, sala 05, CEP 13083-865, Campinas – SP; telefone (19) 3521-6836; e-mail: cepchs@unicamp.br.

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, autorizo (nome do menor)

____ a participar desta pesquisa.

____Data: ____/_____/______.

(Assinatura do responsável legal)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 510/2016 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____Data: ____/_____/______.

(Paulo Henrique das Chagas Silva)

ANEXO V – TCLE (Estudante maior de idade)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

A Resolução de Problemas na introdução de conteúdos e conceitos matemáticos: um olhar a partir das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Paulo Henrique das Chagas Silva[1]
Laura Rifo[2]

[1]Aluno do curso de doutorado Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.
[2]Professora orientadora do curso de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

Número do CAAE: 50789221.0.0000.8142

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e pelo participante, sendo que uma via deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma competição anual, criada em 2005, e voltada a estudantes do Ensino Fundamental (anos finais) e do Ensino Médio. Reconhecida internacionalmente, a OBMEP possui, entre outros, o objetivo de estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil, contribuindo na melhoria da qualidade da educação básica. Entretanto, ela muitas vezes tende a funcionar como um caça-talentos, trazendo em seu bojo questões de alto nível de elaboração e que requerem um

raciocínio mais apurado por parte dos alunos; fazendo com que, muitas vezes, a resolução e os resultados da mesma não atinjam os índices esperados. Além disso, parece não ser frequente o uso de tais questões como um elemento que pode auxiliar na introdução e desenvolvimento de determinados conteúdos dispostos no currículo de matemática. Sendo assim, metodologias não usuais podem ser uma boa alternativa para despertar nos alunos, além do espírito competitivo, principalmente o gosto por estudar matemática. Um primeiro passo poderia ser trabalhar as questões da OBMEP sob a perspectiva da Resolução de Problemas.

Sendo assim, o objetivo desta pesquisa é analisar a viabilidade e o potencial de utilização das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas na aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, por intermédio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Isso porque se considera que a OBMEP, aliada aos pressupostos da Resolução de Problemas, pode consistir numa política pública cuja função extrapola o intuito de descobrir estudantes talentosos, podendo influenciar na qualidade da educação básica, correlacionando determinados conteúdos vistos na olimpíada com os conteúdos ensinados na sala de aula.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: resolver problemas do banco de questões e/ou provas da Obmep. Também poderá responder questionários ou entrevistas sobre as tarefas realizadas. Sua participação terá duração máxima prevista de 10 encontros de 2 h/a, e os registros poderão ser feitos através de diário de campo, folhas de respostas, gravação de áudio e fotografias. Em tais casos, sua identidade será mantida sob sigilo: as folhas de respostas reproduzidas na pesquisa não conterão qualquer informação que o identifique, os áudios servirão apenas para posterior transformação em texto e as fotos disporão de efeitos como esfumaçamento, tarjas e/ou outros procedimentos que impeçam o seu reconhecimento. Sempre que necessário, nos dirigiremos a você, no texto da pesquisa, através de um pseudônimo.

As atividades serão realizadas de forma individual e/ou em grupo.

Os dados coletados ficarão armazenados em formato digital sob a responsabilidade do pesquisador por cinco anos após a data de defesa da referida tese, após este período os mesmos serão descartados.

Desconfortos e riscos:

Por se tratar de uma pesquisa experimental de aplicação de prática didática em ensino de matemática, com resolução de exercícios em sala de aula, não há riscos diretos identificados

de antemão. Mas, a qualquer sinal de desconforto, os participantes têm a opção de se retirar da pesquisa.

Benefícios:

Prevemos como benefício a médio e longo prazo, o oferecimento de material didático criado a partir destas experimentações em sala de aula.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Em situações nas quais você preveja alguma despesa (por exemplo, transporte, alimentação, materiais de papelaria ou impressões), deve informar o orçamento calculado ao pesquisador com antecedência ao preenchimento deste termo de consentimento livre e esclarecido, para que o pesquisador delibere sobre o ressarcimento dos custos na forma “em espécie” ou através de depósito em conta corrente.

Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa quando comprovados nos termos da legislação vigente.

Acompanhamento e assistência:

A qualquer momento os participantes poderão entrar em contato com os pesquisadores para esclarecimentos e assistência sobre qualquer aspecto da pesquisa, através dos contatos abaixo. Você receberá assistência integral e imediata, de forma gratuita, pelo tempo que for necessário em caso de danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, se precisar consultar esse registro de consentimento ou quaisquer outras questões, você poderá entrar em contato com o pesquisador Paulo Henrique das Chagas Silva. Endereço: BR 226, km 405, São Geraldo. Paulo dos Ferros/RN. CEP: 59900-000. UFERSA, sala 10. Telefone: (84) 99913-2151. E-mail: paulo.silva@ufersa.edu.br. E também com a pesquisadora Laura Rifo. Endereço: Rua Sérgio

Buarque de Holanda, 651, CEP: 13083-859, Campinas/SP. Departamento de Matemática, sala 202. Telefone: (19) 3521-6052. E-mail: laurarifo@unicamp.br.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP-CHS) da UNICAMP das 08h30 às 11h30 e das 13h00 às 17h00 na Rua Bertrand Russell, 801, Bloco C, 2º piso, sala 05, CEP 13083-865, Campinas – SP; telefone (19) 3521-6836; e-mail: cepchs@unicamp.br.

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar:

Nome do(a) participante:____

____Data: ____/_____/______.

(Assinatura do participante)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 510/2016 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____Data: ____/_____/______.

(Paulo Henrique das Chagas Silva)

ANEXO VI – TCLE (Professor)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

A Resolução de Problemas na introdução de conteúdos e conceitos matemáticos: um olhar a partir das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Paulo Henrique das Chagas Silva[1]
Laura Rifo[2]

[1]Aluno do curso de doutorado Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.
[2]Professora orientadora do curso de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

Número do CAAE: 50789221.0.0000.8142

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e pelo participante, sendo que uma via deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma competição anual, criada em 2005, e voltada a estudantes do Ensino Fundamental (anos finais) e do Ensino Médio. Reconhecida internacionalmente, a OBMEP possui, entre outros, o objetivo de estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil, contribuindo na melhoria da qualidade da educação básica. Entretanto, ela muitas vezes tende a funcionar como um caça-talentos, trazendo em seu bojo questões de alto nível de elaboração e que requerem um

raciocínio mais apurado por parte dos alunos; fazendo com que, muitas vezes, a resolução e os resultados da mesma não atinjam os índices esperados. Além disso, parece não ser frequente o uso de tais questões como um elemento que pode auxiliar na introdução e desenvolvimento de determinados conteúdos dispostos no currículo de matemática. Sendo assim, metodologias não usuais podem ser uma boa alternativa para despertar nos alunos, além do espírito competitivo, principalmente o gosto por estudar matemática. Um primeiro passo poderia ser trabalhar as questões da OBMEP sob a perspectiva da Resolução de Problemas.

Sendo assim, o objetivo desta pesquisa é analisar a viabilidade e o potencial de utilização das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas na aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, por intermédio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Isso porque se considera que a OBMEP, aliada aos pressupostos da Resolução de Problemas, pode consistir numa política pública cuja função extrapola o intuito de descobrir estudantes talentosos, podendo influenciar na qualidade da educação básica, correlacionando determinados conteúdos vistos na olimpíada com os conteúdos ensinados na sala de aula.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado(a) a auxiliar na implementação das atividades propostas em sala de aula. Também poderá participar de uma entrevista sobre o uso das questões realizadas. Sua participação terá duração máxima prevista de 10 encontros de 2 h/a, e os registros poderão ser feitos através de folhas de respostas, gravação de áudio e fotografias. Em tais casos, sua identidade será mantida sob sigilo: as folhas de respostas reproduzidas na pesquisa não conterão qualquer informação que o identifique, os áudios servirão apenas para posterior transformação em texto e as fotos disporão de efeitos como esfumaçamento, tarjas e/ou outros procedimentos que impeçam o seu reconhecimento. Sempre que necessário, nos dirigiremos a você, no texto da pesquisa, através de um pseudônimo.

Os dados coletados ficarão armazenados em formato digital sob a responsabilidade do pesquisador por cinco anos após a data de defesa da referida tese, após este período os mesmos serão descartados.

Desconfortos e riscos:

Por se tratar de uma pesquisa experimental de aplicação de prática didática em ensino de matemática, com resolução de exercícios em sala de aula, não há riscos diretos identificados

de antemão. Mas, a qualquer sinal de desconforto, os participantes têm a opção de se retirar da pesquisa.

Benefícios:

Prevemos como benefício a médio e longo prazo, o oferecimento de material didático criado a partir destas experimentações em sala de aula.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Em situações nas quais você preveja alguma despesa (por exemplo, transporte, alimentação, materiais de papelaria ou impressões), deve informar o orçamento calculado ao pesquisador com antecedência ao preenchimento deste termo de consentimento livre e esclarecido, para que o pesquisador delibere sobre o ressarcimento dos custos na forma "em espécie" ou através de depósito em conta corrente.

Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa quando comprovados nos termos da legislação vigente.

Acompanhamento e assistência:

A qualquer momento os participantes poderão entrar em contato com os pesquisadores para esclarecimentos e assistência sobre qualquer aspecto da pesquisa, através dos contatos abaixo. Você receberá assistência integral e imediata, de forma gratuita, pelo tempo que for necessário em caso de danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, se precisar consultar esse registro de consentimento ou quaisquer outras questões, você poderá entrar em contato com o pesquisador Paulo Henrique das Chagas Silva. Endereço: BR 226, km 405, São Geraldo. Paulo dos Ferros/RN. CEP: 59900-000. UFERSA, sala 10. Telefone: (84) 99913-2151. E-mail: paulo.silva@ufersa.edu.br. E também com a pesquisadora Laura Rifo. Endereço: Rua Sérgio

Buarque de Holanda, 651, CEP: 13083-859, Campinas/SP. Departamento de Matemática, sala 202. Telefone: (19) 3521-6052. E-mail: laurarifo@unicamp.br.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP-CHS) da UNICAMP das 08h30 às 11h30 e das 13h00 às 17h00 na Rua Bertrand Russell, 801, Bloco C, 2º piso, sala 05, CEP 13083-865, Campinas – SP; telefone (19) 3521-6836; e-mail: cepchs@unicamp.br.

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar:

Nome do(a) participante:____

____Data: ____/_____/______.

(Assinatura do participante)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 510/2016 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____Data: ____/_____/______.

(Paulo Henrique das Chagas Silva)