

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

MATIAS ZIMMERMANN

Decaimento Polinomial de Correlações via Teoria de Renovação para Operadores

Campinas

2023

Matias Zimmermann

Decaimento Polinomial de Correlações via Teoria de Renovação para Operadores

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Eduardo Garibaldi

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Matias Zimmermann e orientada pelo Prof. Dr. Eduardo Garibaldi.

Campinas
2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Z65d Zimmermann, Matias, 1995-
Decaimento polinomial de correlações via teoria de renovação para operadores / Matias Zimmermann. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Eduardo Garibaldi.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Operadores de transferência. 2. Decaimento de correlações. 3. Caos. 4. Teoria de renovação. 5. Teoria ergódica. I. Garibaldi, Eduardo, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Polynomial decay of correlations via renewal theory for operators

Palavras-chave em inglês:

Transfer operators

Correlations decay

Chaos

Renewal theory

Ergodic theory

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Eduardo Garibaldi [Orientador]

Gabriel Ponce

Philippe Paul Thieullen

Data de defesa: 19-06-2023

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-9183-7495>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/0873822049193387>

**Dissertação de Mestrado defendida em 19 de junho de 2023 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). EDUARDO GARIBALDI

Prof(a). Dr(a). GABRIEL PONCE

Prof(a). Dr(a). PHILIPPE PAUL THIEULLEN

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

AGRADECIMENTOS

À todas as pessoas que contribuíram positivamente na elaboração deste trabalho e em minha formação acadêmica, em especial à Alessandra Fabian Sostisso pelo seu incansável incentivo e apoio nas horas difíceis, de desânimo e cansaço. Por diretamente ter feito a conclusão deste trabalho ser possível. Seu apoio me proporcionou o ânimo necessário para continuar os estudos e ingressar no Doutorado, então saiba que este trabalho, e todos posteriores, possuem sua participação. Sua crença em mim, nossas inúmeras conversas tarde da noite e sorrisos encorajadores têm sido minha força motriz. Este trabalho é tanto um reflexo de nossos sonhos compartilhados quanto de meus esforços acadêmicos. Sua presença em minha vida é minha maior equação e sou grato por cada momento que passamos juntos. Que minha presença em sua vida tenha lhe impactado positivamente, tanto quanto você em minha vida. Obrigado por me ensinar o verdadeiro significado de saudade e amor.

Ao meu orientador Dr. Eduardo Garibaldi primeiramente, por ter aceitado me orientar. Por todas as horas de orientações, e todas as sugestões e críticas, que foram essenciais para finalizar este trabalho e para enriquecer minha formação como pesquisador.

Ao meu pai Elpidio Zimmermann e à minha mãe Mariana F. Zimmermann, por não medirem esforços para que eu pudesse levar meus estudos adiante.

No vasto estudo da matemática, sinto-me honrado por ter viajado através de teoremas elegantes e provas intrincadas, guiado pelo brilhantismo de inúmeros matemáticos antes de mim.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar o uso da teoria de renovação para operadores, introduzido por (SARIG, 2002). Este método permitiu estabelecer limites inferiores polinomiais para o decaimento de correlações para transformações com partições enumeráveis de Markov. Apresentaremos um resultado geral obtido por (SARIG, 2002) referente a sequências de renovação de operadores limitados atuando em espaços de Banach, o qual se aplica às iteradas do operador de transferência.

Palavras-chave: operador de transferência, decaimento de correlação, caos, teoria de renovação, teoria ergódica.

ABSTRACT

This work aims to present the use of renewal theory for operators, introduced by (SARIG, 2002). This method allowed establishing polynomial lower bounds for the decay of correlations for transformations with countable Markov partition. We will present a general result obtained by (SARIG, 2002) referring to the renewal sequences of bounded operators acting on Banach spaces, which applies to the iterations of the transfer operator.

Keywords: transfer operator, correlation decay, chaos, renewal theory, ergodic theory.

SUMÁRIO

	Introdução	9
1	PRELIMINARES	12
1.1	Elementos de Análise Funcional	12
1.1.1	Bases Conceituais	12
1.1.2	Diferenciabilidade	15
1.1.3	Integração	20
1.1.4	Álgebras de Banach	22
1.1.5	Aspectos Espectrais da Teoria de Perturbação	26
1.1.6	Espaços de Hölder	31
1.2	Noções da Teoria da Medida e Teoria Ergódica	35
1.2.1	Medida segundo Lebesgue e Espaços L^p	36
1.2.2	Perspectiva Estatística em Dinâmica	41
1.2.3	Recorrência e Conservatividade	44
1.2.4	Shifts Topológicos de Markov	48
2	DECAIMENTO SUBEXPONENCIAL	51
2.1	Operador de Transferência	51
2.2	Teoria da Renovação	57
2.3	Análise Assintótica de Sequência de Operadores de Renovação . .	59
2.4	Aplicação às Iteradas do Operador de Transferência	85
	Referências	98

INTRODUÇÃO

Muitos sistemas dinâmicos podem exibir comportamentos popularmente conhecidos como caóticos, ou seja, imprevisíveis e/ou complexos. Em sistemas caóticos, registra-se uma sensibilidade muito forte a fatores iniciais, no sentido de que mudanças arbitrariamente pequenas nas condições originais eventualmente produzem grandes alterações na evolução da trajetória. Deste modo, não é viável fazer previsões específicas para uma única trajetória, uma vez que um pequeno erro na determinação da condição inicial torna-se rapidamente amplificado, inviabilizando uma previsão confiável dos estados futuros do sistema. Devido a esta inerente falta de previsibilidade, o estudo da evolução de uma única trajetória por si só não é muito confiável, donde pouco relevante. No entanto, curiosamente a análise da evolução de uma coleção de trajetórias pode trazer informações úteis sobre a dinâmica.

Na verdade, dado o caráter aleatório dos sistemas caóticos, não é surpreendente que noções estatísticas e probabilísticas sejam ferramentas úteis para sua análise. As ideias probabilísticas introduzem tanto um ponto de vista como um maquinário que possibilitam revelar informações fundamentais sobre o comportamento de sistemas dinâmicos. Essa constatação está na base teórica da teoria ergódica, uma teoria que teve suas origens em questões fundamentais da mecânica estatística no final do século XIX, sendo que George D. Birkhoff e John von Neumann estabeleceram a estrutura matemática e os primeiros resultados não triviais. Convém igualmente recordar que as ideias seminais remontam aos trabalhos de Ludwig E. Boltzmann e Josiah W. Gibbs.

O comportamento estatístico de longo prazo destes sistemas pode ser codificado matematicamente por vários objetos, sendo um deles o chamado operador de transferência (também conhecido como operador de Ruelle-Perron-Frobenius). Suas primeiras manifestações remontam, pelo menos, ao operador de Koopman, do qual o operador de transferência é adjunto. É conveniente lembrar que o operador de Koopman foi utilizado por John von Neumann para provar a versão do teorema ergódico com convergência em média. Em seguida, a escola russa desenvolveu a teoria espectral para o operador de Koopman atuando em L^2 e sua relação com as propriedades estatísticas do sistema (como, por exemplo, ergodicidade e mixing). As informações espectrais do operador de transferência produzem interessantes medidas de probabilidade invariante para o sistema dinâmico e nos permite estudar suas propriedades ergódicas, em particular a taxa de decaimento de suas funções de correlação (BALADI, 2000).

A análise de funções de correlação desempenha um papel importante no estudo de processos estocásticos e caóticos. A presença de mixing faz com que as funções de

correlação decaíam para zero ao longo do tempo. Isso significa que os estados do sistema separados por um intervalo de tempo suficientemente grande tornam-se estatisticamente independentes (BILLINGSLEY, 1965). Da propriedade de mixing segue que um sistema dinâmico é ergódico. Além disso, para sistemas dinâmicos caóticos, o decaimento de correlações está conectada com uma instabilidade de trajetórias caóticas e a capacidade do sistema de produzir entropia (ECKMANN; RUELLE, 1985).

Nesta dissertação de mestrado, o problema abordado será o estudo da taxa de decaimento de correlações, o qual descreve o quão rápido o estado de um sistema se torna descorrelacionado com seu futuro, ou de maneira mais informal, o quão caótico o sistema é. Mais concretamente, a teoria e os resultados nesta monografia detalhados possibilitarão assegurar limitante inferior polinomial para decaimento de correlações no contexto de aplicações de Markov.

Por um bom período, vários métodos foram desenvolvidos para obter limitantes superiores polinomiais para decaimento de correlação. No entanto, não existia um método geral para obter limitantes inferiores polinomiais até a publicação do artigo (SARIG, 2002). Para isso Omri Sarig utilizou duas ferramentas importantes: operadores de transferências e teoria de renovação aplicada a sequências de operadores.

Uma descrição do operador de transferência de uma transformação ϕ que será denotada por $\hat{T}_\phi$ será fornecida na seção 2.1. Este operador estabelece a ligação entre a teoria clássica da renovação e transformações entre espaços de Banach.

O primeiro capítulo da dissertação será destinado para recordar alguns fatos sobre Análise Funcional, Teoria da Medida e Ergódica e um resultado de perturbação do espectro de operadores limitado em espaços de dimensão infinita. Neste capítulo serão apresentados os conceitos de diferenciabilidade e integração em espaços de Banach. Ainda no primeiro capítulo, serão introduzidos os conceitos de recorrência e conservatividade a fim de enunciar e demonstrar o Teorema de Recorrência de Poincaré, o qual é utilizado para definir de maneira adequada a transformação induzida.

O segundo capítulo é destinado para demonstrar os dois resultados principais do artigo de Sarig. Sendo o primeiro resultado o Teorema 2.11, que para sua demonstração serão necessários a apresentação de alguns lemas auxiliares. Este é um resultado abstrato da teoria de renovação aplicada aos operadores lineares limitados. Ele descreve o comportamento assintótico de sequências de operadores de renovação. Sobre certas condições é demonstrado que o operador $T_n f = \chi_A \hat{T}_\phi^n(f \chi_A)$ pode ser descrito por

$$T_n = \frac{1}{\vartheta} P + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k + E_n$$

com $E_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfazendo $\|E_n\| = O(1/n^{\lfloor \beta \rfloor})$.

O segundo resultado é o Teorema 2.23, que utiliza o teorema acima no contexto

de aplicações de Markov, para estabelecer a taxa de decaimento destas aplicações sobre certas condições. Como consequência, obtém-se a estimativa

$$Cor(f, g \circ \phi^n) \sim \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} m([\varphi_a > k]) \right) \int f \int g,$$

ou seja, uma limitação inferior para o decaimento de correlação.

1 PRELIMINARES

Inclusive para auxiliar o leitor na identificação dos pré-requisitos para a leitura desta monografia, neste capítulo inicial, serão apresentados alguns resultados selecionados de análise funcional, de álgebras de Banach, de teoria perturbativa em análise espectral, de teoria da medida e de teoria ergódica, os quais servirão como base para o desenvolvimento e a discussão dos resultados abordados nesta dissertação.

1.1 Elementos de Análise Funcional

Esta seção será primeiramente dedicada a recordar conceitos básicos de análise funcional, sobretudo com o intuito de fixar notações. Daremos particular atenção para a diferenciabilidade e a integrabilidade sobre espaços de Banach. Com propósito preparatório, serão a seguir enfatizados resultados referentes a álgebras de Banach e à teoria perturbativa em análise espectral. Por seu papel na prova do primeiro passo relevante (Proposição 2.16) para a demonstração de resultado geral sobre o comportamento assintótico de sequências de operadores de renovação em espaços de Banach (Teorema 2.11), encerraremos esta seção destacando propriedades de espaços de Hölder.

1.1.1 Bases Conceituais

O leitor familiarizado com análise funcional pode evitar a leitura desta subseção sem qualquer prejuízo. O propósito aqui é retomar noções fundamentais e estabelecer as notações que serão utilizadas ao longo desta dissertação.

Definição 1.1: *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma **norma** em X é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

tal que, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

- (1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Chama-se o par $(X, \|\cdot\|)$ de um espaço vetorial normado.

Caso a condição (1) seja enfraquecida para apenas supor $\|x\| \geq 0$, a aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ será chamada de **seminorma**.

Uma classe importante de espaços normados são aqueles cuja norma é gerada por um produto interno. Um **produto interno** em X é uma aplicação bilinear simétrica

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

satisfazendo $\langle x, x \rangle > 0$ para todo $x \in X \setminus \{0\}$. Dado tal produto interno, então

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \text{para } x \in X,$$

define uma norma e vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ para todos $x, y \in X$.

Definição 1.2: O espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de **espaço de Banach** quando for um espaço vetorial normado completo, isto é, quando toda sequência de Cauchy converge para algum elemento do espaço X .

Recorde que uma sequência de Cauchy é uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfaz a condição de que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, n > n_0$, tem-se

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Um resultado clássico é que todo espaço vetorial normado de dimensão finita sobre um corpo completo é um espaço de Banach. No entanto, no caso de dimensão infinita, pode ocorrer que uma sequência de Cauchy não convirja para algum elemento do espaço. Além disso, toda sequência de Cauchy em um espaço vetorial normado é limitada. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas, por exemplo, em (KREYSZIG, 1989).

Sejam X, Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : \mathbf{D}(T) \rightarrow Y$ é um operador linear (ou transformação linear) se T preserva as relações de linearidade, isto é, se

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T u_1 + \beta T u_2$$

para todos $u_1, u_2 \in \mathbf{D}(T) \subseteq X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, onde $\mathbf{D}(T)$ é o subespaço vetorial de X chamado de **domínio** de T . Além disso, denota-se por $\mathbf{R}(T) \subseteq Y$ a imagem de T . Para qualquer subconjunto $A \subseteq \mathbf{D}(T)$, denota-se por $T(A)$ a imagem de $A \cap \mathbf{D}(T)$.

Definição 1.3: Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. O operador linear $T : X \rightarrow Y$ é **limitado** se existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \tag{1.1}$$

para todo $x \in X$.

Um subconjunto $U \subset X$ de um espaço normado X é aberto se, para todo $x \in U$, $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : \|x - y\|_X < \varepsilon\} \subset U$ para algum $\varepsilon > 0$. Um operador $T : X \rightarrow Y$ entre espaços normados é **contínuo** se $T^{-1}(U)$ é aberto para todo aberto $U \subset Y$. Caso T seja um operador linear, a definição de continuidade é equivalente a T ser limitado (KREYSZIG, 1989, Teorema 2.7-9).

A menor das constantes c na Definição 1.3 é a **norma do operador** T , deste modo

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y. \quad (1.2)$$

As demonstrações da igualdade na Equação (1.2), bem como o fato de se tratar de uma norma sobre o espaço dos operadores limitados podem ser encontradas em (KREYSZIG, 1989, Lema 2.7-2). Note que, tomando $c = \|T\|$ em (1.1), tem-se

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X.$$

Dados dois espaços vetoriais X e Y sobre o corpo $\mathbb{K}$, denota-se por $\mathcal{L}(X, Y)$ o conjunto dos operadores lineares de X para Y . Denota-se por $\mathcal{B}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares limitados, sendo este um espaço vetorial normado, com a norma do operador. Caso Y seja um espaço de Banach, então $\mathcal{B}(X, Y)$ também o será. Por convenção, denota-se $\mathcal{B}(X)$ quando $X = Y$. Além disso, caso X seja de dimensão finita, então todo operador linear $T : X \rightarrow Y$ será limitado. No caso especial em que $Y = \mathbb{K}$, os elementos de $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ são chamados de funcionais lineares limitados e define-se $X^* := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ como o **espaço dual** de X , o qual é completo na norma do operador caso o corpo $\mathbb{K}$ seja completo.

Teorema 1.4 (Teorema de Hahn-Banach): *Sejam X um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação tal que*

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= |\alpha|p(x) & \text{para } x \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{K}, \\ p(x + y) &\leq p(x) + p(y) & \text{para } x, y \in X. \end{aligned}$$

Além disso, seja f um funcional linear definido em um subespaço $Z \subseteq X$ que satisfaz $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Z$. Então existe um funcional linear $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f(x) & \text{para todo } x \in Z, \\ |\tilde{f}(x)| &\leq p(x) & \text{para todo } x \in X. \end{aligned}$$

O funcional $\tilde{f}$ é chamado de extensão de Hahn-Banach de f .

A demonstração deste teorema utiliza o Lema de Zorn e pode ser encontrada em (KREYSZIG, 1989, Teorema 4.3-1), sendo uma de suas consequências o seguinte corolário.

Corolário 1.5: *Seja X um espaço vetorial normado. Então para todo $x \in X$ se tem*

$$\|x\| = \sup \{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}$$

e este supremo é atingido.

1.1.2 Diferenciabilidade

O conceito de derivada (de Fréchet) em espaços euclidianos é naturalmente generalizado para aplicações entre espaços de Banach sobre o corpo dos reais ou dos complexos.

Definição 1.6 (Diferenciabilidade): *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach, seja $U \subset X$ um conjunto aberto. A aplicação $T : U \rightarrow Y$ é **diferenciável** em $x_0 \in U$ se existe um operador linear limitado $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ com respeito ao qual*

$$\frac{\|T(x_0 + v) - T(x_0) - Av\|_Y}{\|v\|_X} < \varepsilon, \quad \forall v \in X \text{ com } 0 < \|v\|_X < \delta.$$

Em caso de existência, o único operador linear $A : X \rightarrow Y$ que satisfaz a definição acima é dito ser a **derivada** de T no ponto x_0 e pode ser denotada por $DT(x_0)$, DT_{x_0} , $T^{(1)}(x_0)$ ou $T'(x_0)$. Se T é diferenciável em todo ponto do aberto $U \subseteq X$, então chama-se o operador

$$\begin{aligned} T' : U &\rightarrow \mathcal{B}(X, Y) \\ x &\mapsto T'(x) \end{aligned}$$

do **diferencial** de T .

A definição de diferenciabilidade não depende das normas, mas apenas das topologias de X e Y . Em termos mais claros, se $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|'_X$ são normas equivalentes em X e se $\|\cdot\|_Y$ e $\|\cdot\|'_Y$ são normas equivalentes em Y , então T é diferenciável no ponto x_0 como aplicação de $(U, \|\cdot\|_X)$ em $(Y, \|\cdot\|_Y)$ se, e somente se, é aí diferenciável como aplicação de $(U, \|\cdot\|'_X)$ em $(Y, \|\cdot\|'_Y)$, sendo os diferenciais iguais.

Um caso bem conhecido é quando $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, para o qual a derivada de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ no ponto x_0 é uma matriz nas bases canônicas, onde a entrada (i, j) é dada por $\partial_j f_i(x_0)$, sendo chamada de matriz Jacobiana de f . Este exemplo é um protótipo útil, pois os resultados clássicos de diferenciabilidade nestes espaços ainda são válidos para espaços de Banach quaisquer. Alguns resultados serão apresentados, mas para mais detalhes veja (KUTTLER, 1998) ou (KÖNIGSBERGER, 2004).

Teorema 1.7 (Desigualdade do Valor Médio): *Sejam X, Y espaços de Banach, $U \subset X$ um subconjunto aberto e convexo e $T : U \rightarrow Y$ uma função diferenciável. Se $\|T'(x)\| \leq K$*

para todo $x \in U$, então para todos $x, y \in U$ tem-se

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq K\|x - y\|_X. \quad (1.3)$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (CHAE, 1985, página 70). Uma aplicação T satisfazendo (1.3) é conhecida como uma aplicação lipschitziana com constante de Lipschitz K .

As derivadas superiores de uma aplicação são definidas da maneira usual. Se o diferencial de uma aplicação T for diferenciável em U , tem-se que T é duas vezes diferenciável e a derivada de $T'(x)$ é chamada de **derivada segunda** de T em x e pode ser denotada por $T^{(2)}(x) = D^2T_x = D^2T(x) = D(DT)(x)$. Note que $T^{(2)}(x)$ é um elemento de $\mathcal{B}(X, \mathcal{B}(X, Y))$, sendo este naturalmente identificado com o espaço $\mathcal{B}^2(X, Y) := \mathcal{B}(X \times X, Y)$ dos operadores bilineares limitados de $X \times X \rightarrow Y$ pelo isomorfismo isométrico

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{B}(X, \mathcal{B}(X, Y)) &\rightarrow \mathcal{B}^2(X, Y) \\ A &\mapsto A^*: X \times X \rightarrow Y \\ (x, y) &\mapsto A(x)(y). \end{aligned}$$

De maneira indutiva, é possível definir o que é uma aplicação n -vezes diferenciável. Se o operador $T^{(n-1)} : U \rightarrow \mathcal{B}^{n-1}(X, Y)$ é diferenciável em x , então T é dito n -vezes diferenciável em x e a derivada $T^{(n)}(x) = D(T^{(n-1)})(x)$ é a n -ésima **derivada** de T . O elemento $T^{(n)}(x)$ é identificado com um elemento do espaço $\mathcal{B}^n(X, Y)$ dos operadores n -lineares limitados de $X \times \cdots \times X$ para Y . Tendo definido $T^{(n)}$ para $n \geq 1$ é conveniente denotar $T^{(0)} = T$. Para mais detalhes, veja (DIEUDONNÉ, 1969) e (CARTAN, 1971).

Definição 1.8: Sejam X, Y espaços de Banach e U um subconjunto aberto de X . A aplicação $T : U \rightarrow Y$ é de **classe** C^n em U se T é n vezes diferenciável em todo ponto de U e o operador

$$T^{(n)} : U \rightarrow \mathcal{B}^n(X, Y)$$

é contínuo. Se T for de classe C^n para todo n , então T é dito **suave** ou de **classe** C^∞ . Se T for contínua, dizemos que é de classe C^0 .

Quando o contradomínio estiver munido com uma operação de produto, é possível estender a usual regra de derivação de Leibniz para espaços de Banach.

Teorema 1.9 (Regra de Leibniz): Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach. Dados o aberto $U \subset X$ e o ponto $x_0 \in U$, sejam $T, Q : U \rightarrow Y$ aplicações n vezes diferenciáveis em x_0 . Suponha que exista uma função contínua e bilinear $\cdot : Y \times Y \rightarrow Y$. Então o produto TQ é n -vezes diferenciável em x_0 e sua derivada é dada por

$$(TQ)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^{(n-k)}(x_0) Q^{(k)}(x_0).$$

Demonstração. A demonstração deste resultado é feita por indução. Deste modo, deve-se verificá-lo primeiramente para $n = 1$, ou seja, concluir que

$$(TQ)^{(1)}(x_0) = T'(x_0)Q(x_0) + T(x_0)Q'(x_0).$$

Note que da Definição 1.6 é possível escrever a derivado do produto como

$$(TQ)'(x_0) = \lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{\|T(x_0 + v)Q(x_0 + v) - T(x_0)Q(x_0)\|_Y}{\|v\|_X}.$$

Por simples soma e subtração de $T(x_0 + v)Q(x_0)$, obtém-se

$$\begin{aligned} (TQ)'(x_0) &= \\ &= \lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{\|T(x_0 + v)[Q(x_0 + v) - Q(x_0)] + [T(x_0 + v) - T(x_0)]Q(x_0)\|_Y}{\|v\|_X} \\ &= \lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{\|T(x_0 + v)[Q(x_0 + v) - Q(x_0)]\|_Y}{\|v\|_X} + \lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{\|[T(x_0 + v) - T(x_0)]Q(x_0)\|_Y}{\|v\|_X}. \end{aligned}$$

Como a operação $\cdot$ é contínua e as aplicações T e Q são contínuas no ponto x_0 , o limite acima é

$$(TQ)'(x_0) = T(x_0)Q'(x_0) + T'(x_0)Q(x_0).$$

Supondo o resultado válido para algum $n \geq 1$, deve-se verificar a validade do teorema para $n + 1$. Deste modo,

$$\begin{aligned} (TQ)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^{(n-k)} Q^{(k)} \right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (T^{(n-k)} Q^{(k)})' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (T^{(n+1-k)} Q^{(k)} + T^{(n-k)} Q^{(k+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^{(n+1-k)} Q^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^{(n-k)} Q^{(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^{(n+1-k)} Q^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} T^{(n+1-k)} Q^{(k)} \\ &= T^{(n+1)} Q + \left(\sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] T^{(n+1-k)} Q^{(k)} \right) + TQ^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Pelo triângulo de Pascal, tem-se que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ e assim

$$\begin{aligned} (TQ)^{(n+1)} &= T^{(n+1)} Q + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} T^{(n+1-k)} Q^{(k)} + TQ^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} T^{(n+1-k)} Q^{(k)}. \end{aligned}$$



A composição de aplicação diferenciáveis resulta também ser diferenciável em geral, como garante o resultado a seguir.

Teorema 1.10 (Regra da Cadeia): *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(Z, \|\cdot\|_Z)$ espaços de Banach, sejam $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ abertos, seja $T : U \rightarrow V$ uma aplicação diferenciável no ponto $x_0 \in U$ e seja $Q : V \rightarrow Z$ uma aplicação diferenciável no ponto $y_0 := T(x_0) \in V$. Então a composição $Q \circ T : U \rightarrow Z$ é diferenciável no ponto x_0 e a sua derivada é dada por*

$$D(Q \circ T)_{x_0}(v) = DQ_{y_0}(DT_{x_0}(v)) \quad \forall v \in X.$$

Uma maneira mais compacta de representar a fórmula da regra da cadeia é $(Q \circ T)'(x_0) = Q'(T(x_0))T'(x_0)$. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (KUTTNER, 1998, Teorema 5.4).

Note que, na definição de diferenciabilidade e nos teoremas até este momento discutidos, o corpo dos escalares que atuam sobre o espaço de Banach não é especificado. De fato, a teoria aqui apresentada pode ser aplicada tanto para espaços de Banach reais como para espaços de Banach complexos.

Sejam X e Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$. Note que esses espaços também podem ser considerados como espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{R}$. Sejam $U \subset X$ um conjunto aberto e $T : U \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dado $x_0 \in U$, duas situações podem ser consideradas:

- (1) T é diferenciável no ponto x_0 em relação ao espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$;
- (2) T é diferenciável no ponto x_0 em relação ao espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

No primeiro caso, a derivada $T'(x_0)$ é um operador linear, mais precisamente $\mathbb{C}$ -linear. No segundo caso, a derivada $T'(x_0)$ é $\mathbb{R}$ -linear. Note que um operador $\mathbb{C}$ -linear é por consequência $\mathbb{R}$ -linear. Portanto, se T satisfaz a situação (1) também irá satisfazer a (2), ou seja, se T é $\mathbb{C}$ -diferenciável então também é $\mathbb{R}$ -diferenciável.

Definição 1.11: *Sejam X e Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$ e seja $U \subset X$ um conjunto aberto. A aplicação $T : U \rightarrow Y$ é **holomorfa** em U se for $\mathbb{C}$ -diferenciável para todo $z \in U$.*

Claramente a soma de duas aplicações holomorfas é igualmente holomorfa, assim como a composição preserva holomorfia.

Definição 1.12 (Série de Potências): Uma série de potências de X para Y centrada em z_0 é uma série formal da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z - z_0)^n,$$

onde $F_n \in \mathcal{B}^n(X, Y)$.

Uma observação importante sobre a notação acima é que, quando se escreve $(z - z_0)^n$, tem-se na verdade uma n -upla, isto é, $(z - z_0)^n = (z - z_0, \dots, z - z_0)$, então faz sentido a escrita $F_n(z - z_0)^n = F_n(z - z_0, \dots, z - z_0) \in Y$.

Note que a definição acima faz alusão ao conceito de série de Taylor de uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ de classe C^∞ , pois neste caso não é difícil se convencer que caracterização dos operadores multilineares F_n deveria ser

$$F_n = \frac{1}{n!} T^{(n)}(z_0).$$

Para uma dada série de potências, o número $0 \leq r_0 \leq \infty$ é dito **raio de convergência** da série se r_0 é o supremo de todos r tais que a série converge uniformemente em $\overline{B}_{r_0}(z_0)$. O raio de convergência pode ser calculado usando a fórmula de Cauchy-Hadamard se o espaço Y for completo. Em tal caso o raio de convergência é então dado por

$$\frac{1}{r_0} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n\|^{1/n}.$$

Para a demonstração deste resultado e mais detalhes, veja (CHAE, 1985, Seção 11.5).

Definição 1.13 (Analiticidade): Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e seja $U \subset X$ um conjunto aberto. A aplicação $T : U \rightarrow Y$ é **analítica** em $z_0 \in U$ se existe uma série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z - z_0)^n$$

que converge uniformemente para T em $B_r(z_0) \subset U$ para algum $r > 0$.

Sejam E um espaço de Banach e $f : \mathbb{C} \rightarrow E$ uma aplicação analítica. Note que, na série de potências associada a f , seus termos F_n podem ser identificados com elementos de E . Com efeito, é possível construir uma isometria entre $\mathcal{B}^n(\mathbb{C}, E)$ e E . Observe que, dado $A \in \mathcal{B}^n(\mathbb{C}, E)$, para qualquer $z \in \mathbb{C}^n$, tem-se

$$A(z_1, \dots, z_n) = A(z_1 \cdot 1, z_2 \cdot 1, \dots, z_n \cdot 1) = z_1 \cdots z_n A(1, \dots, 1),$$

de modo que A é uma multiplicação pelo vetor $A(1, \dots, 1)$ em E . Assim se pode identificar A com este vetor, ou seja, a transformação n -linear A é identificada com o vetor $A(1, \dots, 1)$, e não é difícil ver que essa identificação é um isomorfismo isométrico.

Teorema 1.14: *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, E um espaço de Banach e $f : U \rightarrow E$ holomorfa. Então f é analítica em U e, dado $z_0 \in U$, a série de potências*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n F_n, \quad \text{onde } F_n \in E,$$

possui, pelo menos, raio de convergência $r_0 := \sup\{r > 0 : B_r(z_0) \subseteq U\}$.

Para a discussão deste resultado, veja (CHAE, 1985, Seção 9.17). Este teorema também garante que f será infinitamente diferenciável.

Corolário 1.15: *Sejam E um espaço de Banach e $f : \{z : |z| < r_0\} \rightarrow E$ holomorfa. Então $f(z) = \sum z^n F_n$, com $\|F_n\| = O(r^{-n})$ para todo $0 < r < r_0$.*

Demonstração. Como f é holomorfa em $\{z : |z| < r_0\}$, a série de potências centrada em 0 é dada por $f(z) = \sum z^n F_n$ e seu raio de convergência coincide com r_0 . Como o raio de convergência de uma série de potências também pode ser dado pela fórmula

$$r_0 = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n\|^{1/n}},$$

existem $n_0 > 0$ e $0 < r < r_0$ tais que

$$\|F_n\|^{1/n} \leq \frac{1}{r} \quad \forall n \geq n_0,$$

deste modo $\|F_n\| \leq r^{-n}$ para todo $n \geq n_0$. Portanto $\|F_n\| = O(r^{-n})$ para todo $0 < r < r_0$. ■

1.1.3 Integração

Nesta curta subseção, apresentaremos a teoria de integração segundo Riemann para funções a valores em espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$. Nosso foco inicial serão funções definidas sobre um intervalo $[a, b]$. O desenvolvimento desta teoria de integração é similar ao usual realizado para funções a valores em espaços euclidianos.

Definição 1.16: *Sejam $a < b$ números reais. Uma **partição** do intervalo $[a, b]$ é uma família finita $\mathcal{P}$ consistindo de intervalos fechados de modo que a união é $[a, b]$. Mais precisamente,*

$$\mathcal{P} = \{[t_{i-1}, t_i] : t_i \in [a, b], i = 1, \dots, n\} \quad \text{com} \quad \bigcup_{i=1}^n [t_{i-1}, t_i] = [a, b].$$

Por convenção, ordena-se $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

A norma de uma partição $\mathcal{P}$ é o número $|\mathcal{P}| := \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$.

Definição 1.17: Uma **partição pontilhada** é um par $\dot{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \xi)$, onde $\mathcal{P}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ e o vetor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ cumpre $t_{i-1} \leq \xi_i < t_i$. Denota-se $|\dot{\mathcal{P}}| = |\mathcal{P}|$.

Como de costume, para definir a integral de Riemann é necessário introduzir o conceito de *somas de Riemann*.

Definição 1.18: Sejam X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$, $f : [a, b] \rightarrow X$ uma função e $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição pontilhada de $[a, b]$. A **soma de Riemann** de f sobre a partição $\dot{\mathcal{P}}$ é definida por

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i).$$

Como de costume, integrabilidade significa a existência de um elemento em torno do qual as somas de Riemann se concentram quando as normas das partições são suficientemente pequenas. Rigorosamente isso pode ser apresentado como segue.

Definição 1.19: Seja X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$. Uma função $f : [a, b] \rightarrow X$ é dita **Riemann integrável** (ou simplesmente **integrável**) em $[a, b]$ se existe $I \in X$ com a propriedade que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - I\|_X < \varepsilon$$

para toda partição pontilhada $\dot{\mathcal{P}}$ de $[a, b]$ com $|\dot{\mathcal{P}}| < \delta$. Se f é Riemann integrável, chama-se I por **integral de Riemann** de f em $[a, b]$ e denota-se

$$I := \int_a^b f \, dt.$$

Grande parte dos resultados sobre integração de Riemann em espaços euclidianos são válidos quando considerado um espaço de Banach, para mais detalhes veja (DIEUDONNÉ, 1969) e (LORENZI, 2014). Em particular, funções contínuas são exemplos de funções integráveis.

Teorema 1.20: Sejam X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$ e $f : [a, b] \rightarrow X$ integrável em $[a, b]$. Então $t \rightarrow \|f(t)\|_X$ é integrável e

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\|_X \leq \int_a^b \|f(t)\|_X \, dt.$$

Note que o resultado acima mostra que integrabilidade usual sobre a reta real implica integrabilidade sobre o espaço de Banach. A demonstração deste resultado é análoga à demonstração para o caso em que $X = \mathbb{R}^n$.

Sem surpresa, diferenciabilidade e integrabilidade sobre espaços de Banach também podem ser vistas como processos inversos.

Teorema 1.21 (Teorema Fundamental do Cálculo): *Seja X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$. Suponha que $f : [a, b] \rightarrow X$ seja de classe C^1 . Então*

$$\int_a^b f' dt = f(b) - f(a).$$

Para a demonstração deste resultado veja (LORENZI, 2014, Teorema 3.1.6).

A integrabilidade de funções contínuas permite introduzir a integração sobre curvas como de costume.

Definição 1.22: *Sejam X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho de classe C^1 . Então para toda função contínua $F : \gamma([a, b]) \rightarrow X$, o elemento de X*

$$\int_{\gamma} F := \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

é definido como a integral de F sobre a curva γ .

Note que agora é possível generalizar o Teorema 1.21 para integrais de linha. Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho e $F : \gamma([a, b]) \rightarrow X$ uma função, ambos de classe C^1 , então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela Regra da Cadeia (Teorema 1.10), tem-se

$$\int_{\gamma} F' = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

1.1.4 Álgebras de Banach

Nesta subseção, serão apresentados alguns resultados elementares sobre álgebras de Banach. De maneira muito simplificada, estas são espaços de Banach munidos de multiplicação. A estrutura adicional nos fornecerá técnicas próprias que nos permitirão estudar mais tarde (ver seção 2.3) sequências de operadores de renovação.

Definição 1.23: *Uma **álgebra** é uma tripla composta de um espaço vetorial $\mathcal{A}$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), de uma operação suplementar e de um elemento neutro $1_{\mathcal{A}}$, os quais satisfazem os axiomas*

- (1) *a operação é associativa e bilinear;*
- (2) *para todo $a \in \mathcal{A}$, vale $1_{\mathcal{A}}a = a1_{\mathcal{A}} = a$.*

*Uma **álgebra normada** é composta por uma álgebra $\mathcal{A}$ e por uma norma submultiplicativa, isto é,*

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{A}.$$

*Uma **álgebra de Banach** é uma álgebra normada para qual o espaço vetorial normado $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ é completo.*

No espaço de operadores lineares limitados $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$, é possível definir a composição entre operadores S e T por $(S \circ T)(x) = S(Tx)$. Trata-se de uma operação associativa e bilinear, sendo o elemento neutro dado pelo operador identidade. Note que a norma do operador é submultiplicativa. De fato, para quaisquer $S, T \in \mathcal{B}(X)$ e $x \neq 0$, tem-se

$$\|T \circ S\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T \circ S)x\|_X}{\|x\|_X} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T\| \|Sx\|_X}{\|x\|_X} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T\| \|S\| \|x\|_X}{\|x\|_X} = \|T\| \|S\|.$$

Assim $\mathcal{B}(X)$ é uma álgebra normada e, caso X seja espaço de Banach, tem-se que $\mathcal{B}(X)$ é um exemplo de álgebra de Banach.

A operação suplementar que caracteriza uma álgebra de Banach é sempre regular, como indica o resultado abaixo.

Proposição 1.24: *Seja $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Se $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ estiver munido da topologia do produto, então a operação $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é contínua.*

Esta proposição segue facilmente da submultiplicidade da norma, para mais detalhes veja, (RUDIN, 1991, página 246).

Em uma álgebra de Banach qualquer, note que o elemento neutro (ou unidade) é único. Sem perda de generalidade, podemos assumir sempre que $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$ — ver, por exemplo, (ALLAN; DALES, 2011, Lema 4.8). Em algumas definições de álgebras de Banach, a presença de elemento neutro não é exigida. Ao longo deste trabalho, será considerado que as álgebras de Banach sempre possuem unidade, de modo a fazer sentido a discussão da invertibilidade de um elemento em uma álgebra de Banach.

Em uma álgebra de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, um elemento $a \in \mathcal{A}$ é dito invertível se existir $b \in \mathcal{A}$ tal que

$$ba = 1_{\mathcal{A}} = ab.$$

Nesta situação, denota-se $b = a^{-1}$ e chama-se este de o inverso de a . Define-se $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ como sendo o conjunto formado por todos os elementos invertíveis de $\mathcal{A}$.

Proposição 1.25: *Seja T um elemento de uma álgebra de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ tal que $\|T\| < 1$. Então o inverso de $(1_{\mathcal{A}} - T)$ é dada por $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$, onde T^k indica o produto de T consigo mesmo k -vezes e $T^0 = 1_{\mathcal{A}}$. Além disso,*

$$\|(1_{\mathcal{A}} - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que a série converge. Para tanto, dados $n < m$, note que

$$\left\| \sum_{k=0}^n T^k - \sum_{k=0}^m T^k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m T^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|T^k\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|T\|^k.$$

Observe que $\sum \|T\|^k$ se trata de uma série geométrica com termo geral menor que 1. Portanto, estabelecida a condição de Cauchy, conclui-se a convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ para algum elemento de $\mathcal{A}$. Além disso, tem-se que $\|T\|^k \rightarrow 0$.

Para verificar que $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ se trata do inverso de $(1_{\mathcal{A}} - T)$, note que

$$(1_{\mathcal{A}} - T) \sum_{k=0}^n T^k = \sum_{k=0}^n (T^k - T^{k+1}) = 1_{\mathcal{A}} - T^{n+1}.$$

Pela Proposição 1.24, a operação de multiplicação em $\mathcal{A}$ é contínua. Deste modo, ao tomar o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados da equação, obtemos

$$(1_{\mathcal{A}} - T) \sum_{k=0}^{\infty} T^k = 1_{\mathcal{A}}.$$

De maneira similar, mostra-se que $(\sum_{k=0}^{\infty} T^k) (1_{\mathcal{A}} - T) = 1_{\mathcal{A}}$. Portanto, $1_{\mathcal{A}} - T$ é invertível com

$$(1_{\mathcal{A}} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Por fim, observe que

$$\|(1_{\mathcal{A}} - T)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} T^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

■

Com respeito à diferenciabilidade sobre álgebras de Banach, queremos destacar que o processo de considerar inversos preserva holomorfia. Isso será rigorosamente enunciado no Teorema 1.27 a seguir. Para sua demonstração, precisaremos da propriedade abaixo.

Teorema 1.26: *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach. Então $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Dado $x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, define-se a bola

$$\mathcal{U} := B_{1/2\|x^{-1}\|}(x).$$

Afirmamos que essa bola está contida em $\mathcal{G}(\mathcal{A})$. De fato, dado $u \in \mathcal{U}$ arbitrário, escrevemos $u = x + v$ com $v \in B_{1/2\|x^{-1}\|}(0)$. Como a norma em $\mathcal{A}$ é submultiplicativa, ocorre $\|x^{-1}v\| \leq \|x^{-1}\| \|v\| < \frac{1}{2}$. Assim, pela Proposição 1.25, $1_{\mathcal{A}} + x^{-1}v$ é invertível e sua inversa é descrita por

$$(1_{\mathcal{A}} + x^{-1}v)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^{-1}v)^k.$$

Logo, vemos que

$$u = x + v = x(1_{\mathcal{A}} + x^{-1}v)$$

é invertível, pois é o produto de dois elementos invertíveis. Constatamos assim que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ é aberto.

■

Teorema 1.27: *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach, $U \subset \mathbb{C}$ aberto e $F : U \rightarrow \mathcal{A}$ holomorfa. Se existir M tal que, para todo $z \in U$, $\|F(z)^{-1}\| < M$, então $z \mapsto F(z)^{-1}$ também é holomorfa em U .*

Demonstração. Note que a transformação $z \mapsto F(z)^{-1}$ pode ser escrita como uma composição de duas transformações,

$$z \xrightarrow{F} F(z) \xrightarrow{\text{inv}} F(z)^{-1},$$

onde $\text{inv} : \mathcal{G}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{A})$ é a transformação dada por $z \mapsto z^{-1}$. Como F é holomorfa por hipótese, basta provar que inv é holomorfa.

Seja $z \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Da prova do Teorema 1.26, sabe-se que há $v \in \mathcal{A}$, com $\|v\| < \frac{1}{2\|z^{-1}\|}$, tal que $z + v$ é invertível. Assim percebe-se que

$$\begin{aligned} (z + v)^{-1} - z^{-1} + z^{-1}vz^{-1} &= (z(1_{\mathcal{A}} + z^{-1}v))^{-1} - z^{-1} + z^{-1}vz^{-1} \\ &= (1_{\mathcal{A}} + z^{-1}v)^{-1}z^{-1} - z^{-1} + z^{-1}vz^{-1} \\ &= [(1_{\mathcal{A}} + z^{-1}v)^{-1} - (1_{\mathcal{A}} - z^{-1}v)]z^{-1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Note agora que

$$\begin{aligned} \|(1_{\mathcal{A}} + z^{-1}v)^{-1} - (1_{\mathcal{A}} - z^{-1}v)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (-z^{-1}v)^k - (1_{\mathcal{A}} - z^{-1}v) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} (-z^{-1}v)^k \right\| \leq \frac{\|z^{-1}v\|^2}{1 - \|z^{-1}v\|} \leq 2\|z^{-1}\|^2\|v\|^2. \end{aligned}$$

Com esta estimativa, ao retomar (1.4), tem-se que

$$\frac{\|(z + v)^{-1} - z^{-1} + z^{-1}vz^{-1}\|}{\|v\|} \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0.$$

Portanto, inv é diferenciável em todo ponto $z \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, donde holomorfa. Deste modo, a transformação $z \mapsto F(z)^{-1}$ é holomorfa.

■

Observe que, durante a demonstração acima, mostrou-se que

$$D \text{inv}(z)v = -z^{-1}vz^{-1} \quad \forall z \in \mathcal{G}(\mathcal{A}). \quad (1.5)$$

Resultados de teoria perturbativa em análise espectral serão componentes essenciais nas provas de dois passos decisivos (Proposição 2.16 e Proposição 2.17) utilizados para a demonstração do central resultado sobre o comportamento assintótico de

seqüências de operadores de renovação em espaços de Banach (Teorema 2.11). Ocorre que as noções espectrais basilares podem ser introduzidas no contexto de álgebras de Banach.

Definição 1.28: *Sejam $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach e $x \in \mathcal{A}$. O **espectro** $\sigma(x)$ de x é o conjunto de todos os elementos $\lambda \in \mathbb{K}$ tais que $\lambda 1_{\mathcal{A}} - x$ não é invertível. O complementar de $\sigma(x)$ é o conjunto **resolvente** de x e consiste de todos $\lambda \in \mathbb{K}$ para os quais que existe o inverso $(\lambda 1_{\mathcal{A}} - x)^{-1}$.*

Pelas razões já explicitadas, uma atenção especial é dada para estes conjuntos quando $\mathcal{A}$ é o espaço dos operadores lineares limitados $\mathcal{B}(X)$, e mais geralmente quando lidamos com operadores definidos em subespaços próprios de X , o qual será tratado em detalhes na subseção 1.1.5.

Observe que, se $|\lambda| > \|x\|$, então $|\lambda|^{-1}\|x\| = \|\lambda^{-1}x\| < 1$, de modo que, pela Proposição 1.25, $1_{\mathcal{A}} - \lambda^{-1}x$ é invertível, donde resulta que $\lambda 1_{\mathcal{A}} - x$ também o é. Deste modo, λ é um elemento do resolvente de x . Conclui-se daí que $\sigma(x) \subset \overline{B}_{\|x\|}(0)$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Definição 1.29: *O **raio espectral** de x é o número*

$$\rho(x) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

O seguinte teorema sintetiza propriedades espectrais fundamentais.

Teorema 1.30: *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach e $x \in \mathcal{A}$. Então*

- (1) *o espectro $\sigma(x)$ é compacto e não vazio;*
- (2) *o raio espectral $\rho(x)$ satisfaz*

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{1/n}.$$

Para a demonstração deste resultado veja (RUDIN, 1991, Teorema 10.13).

1.1.5 Aspectos Espectrais da Teoria de Perturbação

Nesta subseção, serão discutidos resultados perturbativos em análise espectral, sendo a principal referência aqui seguida o livro (KATO, 1995). Ressaltamos que nesta obra os resultados são discutidos para operadores fechados, contudo, para o escopo deste trabalho, os resultados serão enunciados para operadores limitados.

Consideraremos aqui X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$, focaremos na correspondente álgebra de Banach $\mathcal{B}(X)$ e mais geralmente levaremos em conta operadores lineares definidos sobre subespaços próprios de X .

Uma **projeção** é um operador linear idempotente $P \in \mathcal{B}(X)$, isto é, $P^2 = P$. Tendo-se uma decomposição do espaço X ,

$$X = M \oplus N,$$

como soma direta de dois subespaços fechados, é possível definir uma projeção P , de modo que $M = PX$ e $N = (I - P)X$. Com efeito, dado $x = x_M + x_N$, com $x_M \in M$ e $x_N \in N$, basta tomar $P(x) = x_M$. Dizemos que P é o operador projeção sobre M na direção de N e que $(I - P)$ é o operador projeção sobre N na direção de M . Do mesmo modo, dada uma projeção, é possível decompor o espaço X em uma soma direta de subespaços fechados.

Dois operadores $S, T \in \mathcal{B}(X)$ comutam se $ST = TS$. A extensão dessa definição para operadores não limitados em X pede certa atenção. Usualmente esta extensão é feita parcialmente, quando apenas um dos operadores é limitado. Um operador T em X comuta com $A \in \mathcal{B}(X)$ se, para todo $u \in \mathbf{D}(T)$, tem-se que $Au \in \mathbf{D}(T)$ e $TAu = ATu$.

Além da decomposição do espaço X , é possível falar da decomposição de um operador T por um par M, N de subespaços fechados. Mais precisamente, T pode ser decomposto de acordo com $X = M \oplus N$ se

$$P\mathbf{D}(T) \subset \mathbf{D}(T), \quad TM \subset M, \quad TN \subset N,$$

onde P é a projeção sobre M na direção de N . Neste caso, há naturalmente dois operadores $T_M : \mathbf{D}(T) \cap M \rightarrow M$ e $T_N : \mathbf{D}(T) \cap N \rightarrow N$, dados por $T_M = T|_M$ e $T_N = T|_N$, os quais cumprem $T(x) = T_M(x_M) + T_N(x_N)$, para todo $x \in \mathbf{D}(T)$, $x = x_M + x_N$, com $x_M \in M$ e $x_N \in N$. Observe ainda que, na presente situação, T comuta com P . De fato, para todo $u \in \mathbf{D}(T)$, $Pu \in \mathbf{D}(T)$, $TPu \in M$ e $T(I - P)u \in N$. Portanto $(I - P)TPu = 0$ e $PT(I - P)u = 0$, de modo que

$$TPu - PTPu = 0 \Rightarrow TPu = PTPu,$$

$$PTu - PTPu = 0 \Rightarrow PTu = PTPu,$$

e assim $TPu = PTPu = PTu$. Da mesma forma, T comuta com $(I - P)$.

Estendendo a Definição 1.28, a qual se aplica imediatamente para a álgebra de Banach $\mathcal{B}(X)$, dizemos que o espectro de um operador T em X é o conjunto

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ não é um isomorfismo em } X\}.$$

Note que o fato de $\lambda I - T$ não ser um isomorfismo é equivalente a tal operador não ser invertível, deste modo $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, pelo menos uma das afirmações abaixo é satisfeita:

$$(1) \quad \mathbf{R}(\lambda I - T) \neq X;$$

(2) $\lambda I - T$ não é injetora.

Se (2) é satisfeita, λ é dito ser um **autovalor** de T e o **autoespaço** associado é dado pelo núcleo da aplicação $\lambda I - T$. Em particular, todo elemento não nulo x de tal núcleo é um **autovetor** de T associado a λ e satisfaz a equação $Tx = \lambda x$. No caso em que X possui dimensão finita, o espectro consiste em uma quantidade finita de pontos, os autovalores. Para detalhes, veja (KREYSZIG, 1989, Seção 7.1). Mas para o caso infinito o espectro pode ser mais complicado e até ser todo o plano complexo. Para uma ilustração, veja (KATO, 1995, Exemplo 6.8, página 174).

Um ponto $\lambda_0 \in \sigma(T)$ é dito ser **isolado** em $\sigma(T)$ se existe uma vizinhança U de λ_0 tal que $\sigma(T) \cap U = \{\lambda_0\}$. A multiplicidade geométrica de um autovalor $\lambda \in \sigma(T)$ é a dimensão $0 \leq m_{\text{geo}}(\lambda) \leq \infty$ do autoespaço $\{v \in X : (T - \lambda)v = 0\}$. A multiplicidade algébrica de λ , por sua vez, é a dimensão $m_{\text{alg}}(\lambda) \leq \infty$ do autoespaço generalizado $\{v \in X : \exists m \geq 1, (T - \lambda)^m v = 0\}$. Quando a dimensão algébrica de λ é 1, ele é dito **simples**.

Definição 1.31: *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. O **raio espectral essencial** $\rho_{\text{ess}}(T)$ é definido como o ínfimo de todos os valores numéricos $\rho_{\text{ess}} \geq 0$ para os quais qualquer $\lambda \in \sigma(T)$ com $|\lambda| > \rho_{\text{ess}}$ é um autovalor isolado de multiplicidade algébrica finita.*

Tem-se a seguinte caracterização para o raio espectral essencial

$$\rho_{\text{ess}}(T) = \inf \{ \|T^n - K\|^{1/n} : n > 0, K \text{ um operador compacto} \}.$$

Para uma demonstração deste resultado, veja (NUSSBAUM, 1970, Teorema 1).

O resultado a seguir devido a (HENNION, 1993) fornece uma estimativa para o raio espectral essencial em certas situações.

Teorema 1.32: *Sejam X e Y espaços de Banach, $i : X \rightarrow Y$ uma aplicação compacta e $T \in \mathcal{B}(X)$. Suponha que existem $r > 0, C > 0$ e uma sequência $C_n > 0$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in X$, tem-se*

$$\|T^n(x)\|_X \leq Cr^n \|x\|_X + C_n \|i(x)\|_Y.$$

Então $\rho_{\text{ess}}(T) \leq r$.

Conforme observa (GOUËZEL, 2004b), o termo $C_n \|i(x)\|_Y$ pode ser interpretado como um majorante para uma parte compacta do operador T , não devendo portanto intervir na obtenção do raio espectral.

Com a definição de espectro, é possível introduzir o conjunto resolvente de T como sendo o seu complementar, ou melhor,

$$\text{Res}(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)^{-1} \text{ existe}\}.$$

Assim, para $\lambda \in \text{Res}(T)$, consideramos a função resolvente $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, operador que possui domínio X e imagem $\mathbf{D}(T)$.

Dado $T \in \mathcal{B}(X)$, em algumas ocasiões, ocorre que o espectro $\sigma(T)$ possui uma parte limitada σ' separada do seu complementar σ'' por uma curva rectificável fechada, a qual é fronteira de região limitada contendo uma vizinhança aberta de σ' assim como de região ilimitada contendo σ'' (ver Figura 1).

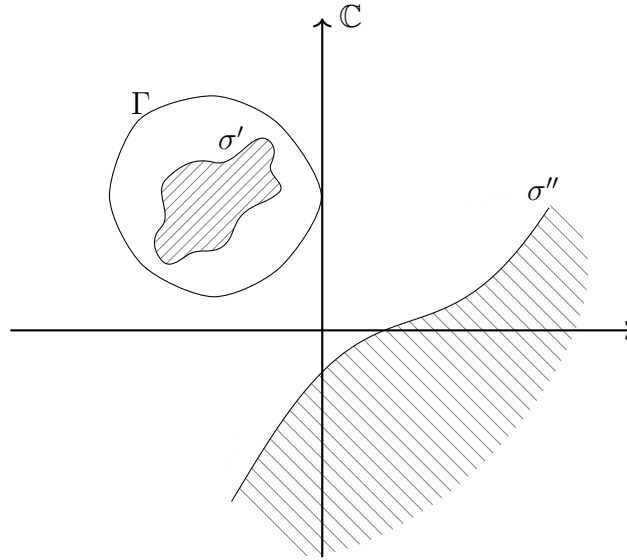


Figura 1 – Espectro de operador separado por curva retificável.

Teorema 1.33 (Teorema de Decomposição do Espectro): *Suponha que o espectro $\sigma(T)$ está separado em duas partes σ' e σ'' da maneira descrita acima. Então*

$$P := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda$$

*define um operador limitado sobre X , o qual é de fato uma projeção (conhecida como **projeção de Riesz**). Além disso, denotando $M' = P(X)$ e $M'' = (I - P)(X)$, existe uma decomposição de T de acordo com $X = M' \oplus M''$, de modo que os espectros de $T_{M'}$ e de $T_{M''}$ coincidem com σ' e σ'' , respectivamente, e $T_{M'} \in \mathcal{B}(M')$.*

Para a demonstração detalhada deste resultado, veja (KATO, 1995, Teorema 6.17, página 178).

O caso de interesse neste trabalho será a situação na qual σ' é um ponto isolado. Veja a hipótese (2) no enunciado do Teorema 2.11, resultado central a ser estudado nesta dissertação. Especificamente, focamos em $\sigma(T) = \sigma' \cup \sigma''$, onde $\sigma' = \{\lambda_0\}$ e $\sigma'' \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < |\lambda_0|\}$. Assim, define-se $B_r(0)$, com $r < |\lambda_0|$, de modo que $\sigma'' \subset B_r(0)$. Tomamos então r_0 suficientemente pequeno tal que $B_{r_0}(\lambda_0) \cap B_r(0) = \emptyset$. Deste modo, aplicando o Teorema 1.33 com Γ sendo a fronteira de $B_{r_0}(\lambda_0)$, temos que o espectro do operador $T_{M'}$ consiste apenas do ponto λ_0 . Caso $\dim M' < \infty$, então λ_0 será um autovalor

de $T_{M'}$ e portanto de T . Assim M' é o autoespaço generalizado de λ_0 e a projeção P é chamada de **autoprojeção**.

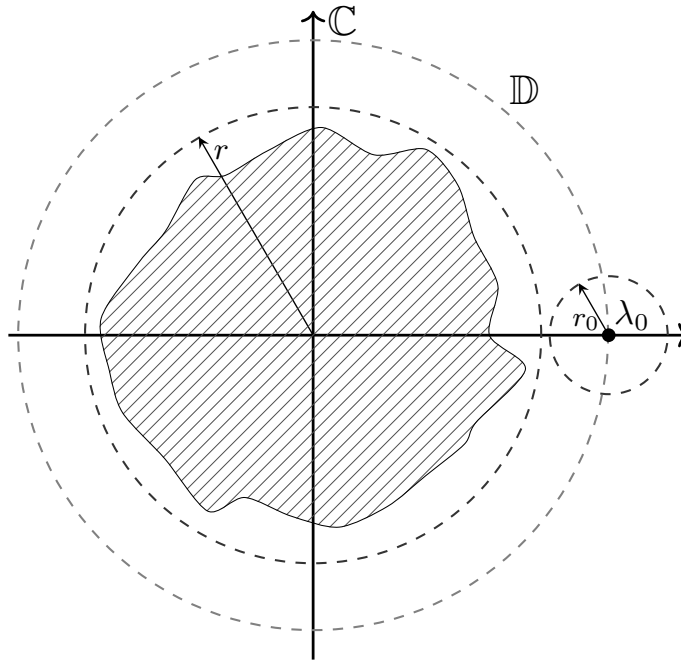


Figura 2 – Lacuna espectral.

Na situação descrita pela figura acima, dizemos que o operador T tem **lacuna espectral** (*spectral gap* em inglês) se seu maior autovalor é simples e o restante do espectro está contido num disco fechado com raio estritamente menor.

Quando se estuda problemas de perturbação em operadores, é necessário definir precisamente o que significa uma *pequena perturbação*. Isso pode ser feito de maneira natural introduzindo uma distância no espaço $\mathcal{B}(X, Y)$ de todos os operadores limitados de X para Y . O **gráfico** $\mathbf{G}(T)$ de um operador $T : X \rightarrow Y$ é o conjunto dos pontos $(u, Tu) \in X \times Y$, isto é,

$$\mathbf{G}(T) = \{(u, v) \in X \times Y : v = Tu\}.$$

Sobre $X \times Y$ consideramos usualmente a norma $\|(u, v)\|_{X \times Y} = (\|u\|_X^2 + \|v\|_Y^2)^{1/2}$. Se $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$, seus gráficos $\mathbf{G}(T)$ e $\mathbf{G}(S)$ são subespaços fechados no espaço $X \times Y$. Portanto, a distância entre T e S pode ser dada pela *inclinação* entre os subespaços $\mathbf{G}(T)$ e $\mathbf{G}(S)$.

Definição 1.34 (Distância de Hausdorff): Sejam X, Y espaços de Banach e $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$. Define-se a distância entre os operadores T e S por

$$d_H(T, S) = \max \left\{ \sup_{z \in \mathbb{S}_T} d(z, \mathbf{G}(S)), \sup_{z \in \mathbb{S}_S} d(z, \mathbf{G}(T)) \right\},$$

onde $\mathbb{S}_T$ e $\mathbb{S}_S$ denotam as esferas unitárias de $\mathbf{G}(T)$ e de $\mathbf{G}(S)$, respectivamente, e $d(z, \mathbf{G}(\cdot))$ é a distância de um ponto para um conjunto, dada por $d(z, \mathbf{G}(\cdot)) = \inf \{\|z - w\| : w \in \mathbf{G}(\cdot)\}$.

A distância definida acima não se trata de uma métrica no espaço de operadores limitados, sendo que d_H em geral não satisfaz a desigualdade triangular. Contudo, a preservação dos aspectos primordiais do espectro por perturbações pode ser descrita via esta noção de distância entre operadores. Isso pode ser visto no enunciado do (KATO, 1995, Teorema 3.16, página 212), o qual recapitulamos abaixo.

Teorema 1.35: *Seja $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\sigma(T)$ está separado em duas partes $\sigma'(T)$ e $\sigma''(T)$ por uma curva fechada Γ como na Figura 1. Considere a decomposição $X = M'(T) \oplus M''(T)$ como obtida no Teorema 1.33. Então existe $\delta > 0$, dependendo de T e Γ , com as seguintes propriedades. Qualquer $S \in \mathcal{B}(X)$ com $d_H(S, T) < \delta$ possui espectro $\sigma(S)$ também separado pela curva Γ em duas partes $\sigma'(S)$ e $\sigma''(S)$. As componentes da decomposição associada $X = M'(S) \oplus M''(S)$ são, respectivamente, isomorfas a $M'(T)$ e $M''(T)$. Ambos $\sigma'(S)$ e $\sigma''(S)$ são não vazios se o mesmo ocorre para T . Além disso, a decomposição $X = M'(S) \oplus M''(S)$ é contínua em S , no sentido em que a projeção de Riez $P[S]$ de X sobre $M'(S)$ na direção de $M''(S)$ tende para a projeção $P[T]$ em norma quando $d_H(S, T) \rightarrow 0$.*

1.1.6 Espaços de Hölder

Espaços de Hölder serão elementos-chave para o estudo do comportamento assintótico de sequências de operadores de renovação em espaços de Banach. A demonstração do resultado abstrato do qual obteremos propriedades estatísticas (especificamente, decaimento de correlações), ou melhor, a prova do Teorema 2.11 fará uso de aspectos técnicos do espaço das funções diferenciáveis com derivadas holderianas a valores em um espaço de Banach. Destacaremos nesta subseção observações gerais sobre estes espaços de Hölder, os quais são centrais tanto para o Lema 2.12 quanto para as discussões dos Lema 2.14 e Lema 2.15.

Sejam X um espaço de Banach, $U \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, limitado e convexo e $0 < \alpha < 1$. Para toda $F : U \rightarrow X$, define-se a norma do supremo por

$$\|F\|_\infty := \sup_{z \in U} \|F(z)\|_X$$

e a seminorma¹

$$\text{Hold}_\alpha(F) := \sup \left\{ \frac{\|F(z) - F(w)\|_X}{|z - w|^\alpha} : z, w \in U \text{ e } 0 < |z - w| < 1 \right\}.$$

Caso F seja r -vezes diferenciável e sua r -ésima derivada seja holderiana com expoente α , considera-se a norma

$$\|F\|_{r,\alpha} := \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} \|F^{(k)}\|_\infty + \frac{1}{(r+1)!} \text{Hold}_\alpha(F^{(r)}).$$

¹ Falha em ser uma norma apenas porque se anula em funções constantes.

Seja $C^{r,\alpha}(U)$ o conjunto formado por todas as funções $F : U \rightarrow X$ que são r -vezes diferenciáveis em U e possuem r -ésima derivada α -holderiana sobre U , ou seja, funções F tais que $\|F\|_{r,\alpha} < \infty$. Este espaço é chamado de **espaço de Hölder**. Quando for necessário explicitar a dependência do domínio, a norma será denotada por $\|\cdot\|_{C^{r,\alpha}(U)}$.

Lema 1.36: *O espaço de Hölder $(C^{r,\alpha}(U), \|\cdot\|_{r,\alpha})$ é um espaço de Banach e, caso X seja uma álgebra de Banach, então $(C^{r,\alpha}(U), \|\cdot\|_{r,\alpha})$ também o será.*

Demonstração. Não é difícil verificar que $\|\cdot\|_{r,\alpha}$ é uma norma. Mostraremos que $(C^{r,\alpha}(U), \|\cdot\|_{r,\alpha})$ é um espaço de Banach.

Seja $\{F_n\}$ uma sequência de Cauchy em $C^{r,\alpha}(U)$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que, se $m, n \geq n_0$, tem-se

$$\|F_n - F_m\|_{r,\alpha} < \varepsilon.$$

Note que a sequência $\{F_n\}$ também será de Cauchy no espaço de funções r vezes diferenciáveis $(C^r(U), \|\cdot\|_r)$, onde

$$\|F\|_r = \sum_{k=0}^r \|F^{(k)}\|_\infty.$$

Sabe-se que $(C^r, \|\cdot\|_r)$ é um espaço de Banach, portanto, existe $F \in C^r(U)$ para a qual $F_n \rightarrow F$ na norma $\|\cdot\|_r$. Deste modo, resta garantir que $F \in C^{r,\alpha}(U)$ e que a convergência também ocorre na norma $\|\cdot\|_{r,\alpha}$.

Para demonstrar que $F \in C^{r,\alpha}(U)$, basta verificar que $\text{Hold}_\alpha(F^{(r)}) < \infty$. Para isso, note que $F_n^{(r)} \rightarrow F^{(r)}$ em $(C^0(U), \|\cdot\|_\infty)$, em particular $F_n^{(r)}(z) \rightarrow F^{(r)}(z)$ para todo $z \in U$. Como $\{F_n\}$ é uma sequência de Cauchy no espaço normado $(C^{r,\alpha}(U), \|\cdot\|_{r,\alpha})$, a sequência $\{F_n\}$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que

$$\|F_n\|_{r,\alpha} \leq \frac{M}{(r+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular

$$\frac{1}{(r+1)!} \text{Hold}_\alpha(F_n^{(r)}) \leq \frac{M}{(r+1)!}.$$

Portanto, para todos $z, w \in U$, com $z \neq w$,

$$\frac{\|F^{(r)}(z) - F^{(r)}(w)\|_X}{|z - w|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|F_n^{(r)}(z) - F_n^{(r)}(w)\|_X}{|z - w|^\alpha} \leq M$$

e assim $\text{Hold}_\alpha(F^{(r)}) < \infty$, o que permite concluir que $F \in C^{r,\alpha}(U)$.

Agora se demonstra que a convergência também ocorre em $C^{r,\alpha}(U)$. Para isto, basta verificar que $\text{Hold}_\alpha(F_n^{(r)} - F^{(r)}) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, pois se tem que a convergência de $\{F_n\}$ para F ocorre em $(C^r, \|\cdot\|_r)$. Dados $z, w \in U$, $z \neq w$, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\|(F_n^{(r)}(x) - F^{(r)}(x)) - (F_n^{(r)}(y) - F^{(r)}(y))\|}{|z - w|^\alpha} = \\
& = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|(F_n^{(r)}(x) - F_m^{(r)}(x)) - (F_n^{(r)}(y) - F_m^{(r)}(y))\|}{|z - w|^\alpha} \\
& \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \text{Hold}_\alpha(F_n^{(r)} - F_m^{(r)}).
\end{aligned}$$

Como $\{F_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $(C^{r,\alpha}(U), \|\cdot\|_{r,\alpha})$, resulta

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \text{Hold}_\alpha(F_n^{(r)} - F_m^{(r)}) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Deste modo, tem-se que, dada uma sequência de Cauchy $\{F_n\}$ em $C^{r,\alpha}(U)$, ela converge para alguma função $F \in C^{r,\alpha}(U)$. Portanto $(C^{r,\alpha}(U), \|\cdot\|_{r,\alpha})$ é um espaço de Banach.

Supondo agora que X é uma álgebra de Banach, então se deve mostrar que $(C^{r,\alpha}(U), \|\cdot\|_{r,\alpha})$ é uma álgebra normada, sendo que já foi provado que o espaço é completo. De fato, trata-se de uma álgebra com a operação usual de multiplicação de funções, onde seu elemento neutro é dado pela função identicamente igual ao elemento neutro 1_X da álgebra X . Para mostrar que este espaço é uma álgebra normada são necessárias duas desigualdades,

$$\begin{aligned}
\text{Hold}_\alpha(FG) &\leq \|F\|_\infty \text{Hold}_\alpha(G) + \text{Hold}_\alpha(F)\|G\|_\infty, & \text{para todo } F, G \in C^\alpha(U), \\
\text{Hold}_\alpha(F) &\leq \|F'\|_\infty, & \text{para todo } F, G \in C^{1,\alpha}(U).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

A primeira desigualdade é direta. Para provar a segunda, sejam $z, w \in U$, com $|z - w| < 1$ e $\gamma(t) = tz + (1 - t)w$ para $t \in [0, 1]$. Como U é convexo, tem-se que $\gamma([0, 1]) \subseteq U$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 1.21), vale

$$\begin{aligned}
\|F(z) - F(w)\| &= \left\| \int_\gamma F' \right\| \leq \int_\gamma \|F'\|_\infty = \|F'\|_\infty |z - w| \\
&\leq \|F'\|_\infty |z - w|^\alpha,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usa-se que $0 < \alpha < 1$. Pela definição de Hold_α , a desigualdade desejada segue de imediato desta estimativa.

Definimos então

$$\begin{aligned}
c_k(F) &= \|F^{(k)}\|_\infty, & \text{para } k = 0, \dots, r \text{ e} \\
c_{r+1}(F) &= \text{Hold}_\alpha(F^{(r)}).
\end{aligned}$$

Deste modo, para todos $F, G \in C^{r,\alpha}(U)$ e qualquer $k = 0, \dots, r + 1$, tem-se

$$c_k(FG) \leq \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} c_i(F) c_{k-i}(G) = \sum_{i=0}^k \frac{k! c_i(F) c_{k-i}(G)}{i!(k-i)!}.$$

De fato, se $k \leq r$ basta utilizar a Regra de Leibniz (Teorema 1.9). Para $k = r + 1$, utiliza-se também as desigualdades (1.6), mais precisamente

$$\begin{aligned}
c_{r+1}(FG) &= \text{Hold}_\alpha((FG)^{(r)}) = \text{Hold}_\alpha\left(\sum_{i=0}^r \binom{r}{i} F^{(i)} G^{(r-i)}\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \text{Hold}_\alpha(F^{(i)} G^{(r-i)}) \\
&\leq \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left[\|F^{(i)}\|_\infty \text{Hold}_\alpha(G^{(r-i)}) + \text{Hold}_\alpha(F^{(i)}) \|G^{(r-i)}\|_\infty \right] \\
&= \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} \|F^{(i)}\|_\infty \text{Hold}_\alpha(G^{(r-i)}) + \|F\|_\infty \text{Hold}_\alpha(G^{(r)}) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \text{Hold}_\alpha(F^{(i)}) \|G^{(r-i)}\|_\infty + \text{Hold}_\alpha(F^{(r)}) \|G\|_\infty \\
&\leq \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} \|F^{(i)}\|_\infty \|G^{(r+1-i)}\|_\infty + \|F\|_\infty \text{Hold}_\alpha(G^{(r)}) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \|F^{(i+1)}\|_\infty \|G^{(r-i)}\|_\infty + \text{Hold}_\alpha(F^{(r)}) \|G\|_\infty \\
&= \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} \|F^{(i)}\|_\infty \|G^{(r+1-i)}\|_\infty + c_0(F) c_{r+1}(G) \\
&\quad + \sum_{i=1}^r \binom{r}{i-1} \|F^{(i)}\|_\infty \|G^{(r+1-i)}\|_\infty + c_{r+1}(F) c_0(G) \\
&= \sum_{i=1}^r \left[\binom{r}{i} + \binom{r}{i-1} \right] \|F^{(i)}\|_\infty \|G^{(r+1-i)}\|_\infty + c_0(F) c_{r+1}(G) + c_{r+1}(F) c_0(G) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} c_i(F) c_{r+1-i}(G).
\end{aligned}$$

Portanto, vemos que

$$\|FG\|_{r,\alpha} = \sum_{k=0}^{r+1} \frac{c_k(FG)}{k!} \leq \sum_{k=0}^{r+1} \sum_{i=0}^k \frac{c_i(F)}{i!} \frac{c_{k-i}(G)}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{r+1} \frac{c_i(F)}{i!} \sum_{k=i}^{r+1} \frac{c_{k-i}(G)}{(k-i)!} \leq \|F\|_{r,\alpha} \|G\|_{r,\alpha}.$$

■

Quando X é uma álgebra de Banach, outra estimativa útil envolvendo funções $F \in C^{r,\alpha}(U)$ é a seguinte

$$\|F^n\|_{1,\alpha} \leq \binom{n+2}{2} \|F\|_\infty^{n-2} \|F\|_{1,\alpha}^2, \quad \forall n \geq 2. \quad (1.7)$$

Não é difícil verificá-la. Basta observar que a Regra de Leibniz (Teorema 1.9) fornece $(F^n)' = \sum_{k=0}^{n-1} F^k F' F^{n-k-1}$, de modo que $\|(F^n)'\|_\infty \leq n \|F\|_\infty^{n-1} \|F'\|_\infty$. Com isto, pela

segunda desigualdade de (1.6), decorre que

$$\text{Hold}_\alpha(F^n) \leq n \|F\|_\infty^{n-1} \|F'\|_\infty.$$

Com a estimativa acima, aplicando a primeira desigualdade em (1.6) e a submultiplicatividade da norma, tem-se que $\text{Hold}_\alpha(F^n)' \leq n(n+1) \|F\|_\infty^{n-2} \|F\|_{1,\alpha}^2$ para $n \geq 2$. Com efeito, note que

$$\begin{aligned} \text{Hold}_\alpha(F^n)' &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \text{Hold}_\alpha(F^k F' F^{n-k-1}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left[\|F\|_\infty^k \|F'\|_\infty \text{Hold}_\alpha(F^{n-k-1}) + \text{Hold}_\alpha(F^k F') \|F\|_\infty^{n-k-1} \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|F\|_\infty^k \|F'\|_\infty (n-k-1) \|F\|_\infty^{n-k-2} \|F'\|_\infty \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \|F\|_\infty^{n-k-1} \left(\|F\|_\infty^k \text{Hold}_\alpha(F') + \|F'\|_\infty \text{Hold}_\alpha(F^k) \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1) \|F\|_\infty^{n-2} \|F'\|_\infty^2 \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \|F\|_\infty^{n-1} \text{Hold}_\alpha(F') + \sum_{k=0}^{n-1} \|F\|_\infty^{n-k-1} \|F'\|_\infty k \|F\|_\infty^{k-1} \|F'\|_\infty \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \|F\|_\infty^{n-2} \|F'\|_\infty^2 + n \|F\|_\infty^{n-1} \text{Hold}_\alpha(F') + \frac{n(n-1)}{2} \|F\|_\infty^{n-2} \|F'\|_\infty^2 \\ &= \|F\|_\infty^{n-2} \left(n(n-1) \|F'\|_\infty^2 + 2n \|F\|_\infty \frac{\text{Hold}_\alpha(F')}{2} \right) \\ &\leq n(n+1) \|F\|_\infty^{n-2} \|F\|_{1,\alpha}^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, obtêm-se a desigualdade (1.7), visto que

$$\begin{aligned} \|F^n\|_{1,\alpha} &\leq \|F\|_\infty^n + n \|F\|_\infty^{n-1} \|F'\|_\infty + \frac{n(n+1)}{2} \|F\|_\infty^{n-2} \|F\|_{1,\alpha}^2 \\ &= \|F\|_\infty^{n-2} \left(\|F\|_\infty^2 + n \|F\|_\infty \|F'\|_\infty + \frac{n(n+1)}{2} \|F\|_{1,\alpha}^2 \right) \\ &\leq \|F\|_\infty^{n-2} \left(1 + n + \frac{n(n+1)}{2} \right) \|F\|_{1,\alpha}^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \|F\|_\infty^{n-2} \|F\|_{1,\alpha}^2. \end{aligned}$$

1.2 Noções da Teoria da Medida e Teoria Ergódica

Recordaremos aqui conceitos essenciais da teoria da medida segundo Lebesgue e alguns aspectos da teoria ergódica úteis para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente serão discutidas noções básicas de medida para introduzir os espaços L^p e enunciar o Teorema de Radon-Nykodym, o que nos permitirá apresentar o Operador

de Transferência. Em seguida serão abordados alguns conceitos da teoria ergódica com enfoque nas ideias estatísticas para o estudo de um sistema dinâmico, dando particular ênfase para decaimento de correlações. Também serão apresentadas as definições de recorrência e conservatividade com o intuito de enunciar o Teorema de Recorrência de Poincaré, o que possibilitará a entrada em cena da transformação induzida. Por fim, serão introduzidos os shifts topológicos de Markov, sendo este o modelo dinâmico sobre o qual será aplicado o teorema principal examinado neste trabalho.

1.2.1 Medida segundo Lebesgue e Espaços L^p

Nessa subseção, serão recordadas ideias fundamentais da teoria da medida. Daremos particular atenção as propriedades essenciais dos espaços L^p . Relembraremos em especial a noção de continuidade absoluta entre medidas, dando enfoque ao teorema de Radon-Nykodym. Da propriedade de preservação de continuidade absoluta via transformações não singulares, poderemos então introduzir o Operador de Transferência. As principais referências para teoria de Lebesgue serão (RUDIN, 1987) e (KANTOROVITZ, 2006).

Definição 1.37: *Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é dita uma σ -álgebra se*

- (1) $X \in \mathcal{F}$;
- (2) Se $A \in \mathcal{F}$, então o complementar $A^c \in \mathcal{F}$;
- (3) Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{F}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ pertence a $\mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra em X , então o par $(X, \mathcal{F})$ é chamado de **espaço mensurável** e os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de **conjuntos mensuráveis**.

Como consequência direta desta definição, de (1) e (2), o conjunto vazio $\emptyset$ pertence a $\mathcal{F}$. Tomando $A_n = \emptyset$ para $n > k$ em (3), $\mathcal{F}$ é fechado para união finita. Além disso, também é fácil concluir que toda σ -álgebra é fechada para intersecção enumerável.

Definição 1.38: *Seja S uma família de subconjuntos de X . A menor σ -álgebra de X contendo S é a σ -álgebra gerada por S e é denotada por $\sigma(S)$.*

Esta menor σ -álgebra existe e é única. Para a demonstração deste resultado veja (BOGACHEV, 2007, Proposição 1.2.6). Um caso importante surge naturalmente quando X é um espaço topológico.

Definição 1.39: A σ -álgebra de Borel de um espaço topológico (X, τ) é a σ -álgebra gerada por todos os conjuntos abertos de X . Se $\mathcal{F}(X)$ for a σ -álgebra de Borel de X , então, para qualquer $A \subset X$, denota-se por $\mathcal{F}(A)$ todos os conjuntos da forma $A \cap B$, onde $B \in \mathcal{F}(X)$.

O conceito de σ -álgebra nos permite introduzir tanto a noção de função mensurável como de medida sobre um espaço.

Definição 1.40: Sejam $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis. Uma transformação $\phi : X \rightarrow Y$ é **mensurável** se, para todo $B \in \mathcal{G}$, o conjunto

$$\phi^{-1}(B) := \{x \in X : \phi(x) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Definição 1.41: Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma **medida** em $\mathcal{F}$ é uma função $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e, para qualquer sequência de conjuntos disjuntos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A tripla $(X, \mathcal{F}, \mu)$ é chamada de **espaço de medida**.

Um espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ é finito se $\mu(X) < \infty$ e caso $\mu(X) = 1$ o espaço de medida é chamado de **espaço de probabilidade**.

Definição 1.42: O espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ é chamado de **espaço de medida σ -finito** se existe uma sequência $\{A_n\} \in \mathcal{F}$, satisfazendo

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{e} \quad \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.43: Um espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ é **completo** se $\mathcal{F}$ contém todos os subconjuntos de conjuntos de medida nula.

Uma medida importante é a **medida de Lebesgue** m sobre a reta, a qual generaliza a noção intuitiva de comprimento em $\mathbb{R}$, isto é, dado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, então $m([a, b]) = b - a$. Para uma construção detalhada da medida de Lebesgue, veja (RUDIN, 1987, página 49) ou (ROYDEN, 1988, Capítulo 3).

Exemplos relevantes de espaços de medida são os ditos espaço de Lebesgue. Para introduzi-los, seguiremos a definição apresentada por (SINAI, 1994). Para tanto, necessitaremos do conceito de isomorfismo mensurável.

Definição 1.44: Dois espaços de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ são **mensuralmente isomorfos** se há uma transformação mensurável $\pi : X \rightarrow Y$ para qual existem $X' \in \mathcal{F}$ e $Y' \in \mathcal{G}$, com $\mu(X \setminus X') = \nu(Y \setminus Y') = 0$, tais que $\pi : X' \rightarrow Y'$ é invertível com inversa mensurável.

Definição 1.45 (Espaço de Lebesgue): Um *espaço de Lebesgue* é um espaço de medida, suposto não possuir pontos com medida positiva, que é mensuravelmente isomorfo ao intervalo $[0, 1]$ munido da σ -álgebra de Borel e da medida de Lebesgue.

Note que qualquer espaço métrico separável com a σ -álgebra de Borel é um espaço de Lebesgue, (COUDÈNE, 2016, Teorema 13.1).

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e f uma transformação mensurável com imagem em $[-\infty, \infty]$ (reta estendida) ou $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (esfera de Riemann). Então $|f| : X \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável, e portanto possui uma integral com valor em $[0, \infty]$. Caso esta integral seja finita, dizemos que f é **integrável**.

Se f é integrável, é possível redefini-la como sendo uma constante arbitrária sobre o conjunto $\{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ (que possui medida zero) e obter uma nova transformação mensurável apenas com valores finitos, preservando a integrabilidade. Assim, é possível restringir a discussão de transformações mensuráveis para o caso complexo (ou real).

Definição 1.46: Denota-se por $\mathcal{M}(X)$ o espaço das transformações $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ mensuráveis, onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Para $1 \leq p \leq \infty$, definem-se os espaços $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^p(X, \mu) &:= \{f \in \mathcal{M}(X) : |f|^p \text{ é integrável}\}, \\ \mathcal{L}^\infty(X, \mu) &:= \{f \in \mathcal{M}(X) : \exists C > 0 \text{ tal que } |f| \leq C \text{ } \mu\text{-q.t.p.}\}.\end{aligned}$$

Quando não houver confusão, o espaço $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ pode ser denotado por $\mathcal{L}^p(X)$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ ou apenas $\mathcal{L}^p$. Considerando as operações usuais, os espaços $\mathcal{L}^p$ são $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. Para $1 \leq p < \infty$, define-se

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{L}^p(X, \mu).$$

Para $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$, tem-se

$$\|f\|_\infty := \inf \left\{ \sup_{x \notin N} |f(x)| : N \subset X, \mu(N) = 0 \right\}.$$

Observe que se $f \in \mathcal{L}^p$, então $\|f\|_p < \infty$ e que $\|\cdot\|_p$ é uma seminorma em $\mathcal{L}^p$ para $1 \leq p \leq \infty$ (COHN, 2013, Corolário 3.3.4). Caso existam subconjuntos não vazios mensuráveis $N \subseteq X$ satisfazendo $\mu(N) = 0$, então existem funções não nulas pertencentes a $\mathcal{L}^p$ satisfazendo $\|f\|_p = 0$. Assim, para espaços de medida usuais, a seminorma $\|\cdot\|_p$ não é uma norma. Deste modo, é construído o espaço normado L^p a partir do espaço $\mathcal{L}^p$, introduzindo uma relação de equivalência e então tomando o espaço quociente.

Dado $1 \leq p \leq \infty$, duas funções $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ são equivalentes se, e somente se, $f = g$ μ -q.t.p., isto é:

$$f \sim g \iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

A classe de equivalência de f em $\mathcal{L}^p$ é denotada por $[f] := \{g \in \mathcal{L}^p : f \sim g\}$.

Definição 1.47: Para $1 \leq p \leq \infty$, definem-se os espaços $L^p(X, \mu)$ por

$$L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu) / \sim,$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência discutida acima.

Para todo $[f] \in L^p$, seja $\|[f]\|_p := \|\tilde{f}\|_p$, onde $\tilde{f}$ é um representante arbitrário da classe de equivalência de f . Claramente, $\|[f]\|_p$ não depende da escolha do representante.

O espaço $L^p(X, \mu)$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial: a soma de duas classes de equivalência $[f]$ e $[g]$ é a classe de equivalência de $[f + g]$. Novamente, essa definição não depende da escolha do representante das classes de f e g . A multiplicação por escalar é definida analogamente.

Quando se estuda o espaço L^p , o que está sendo considerado não é um espaço de funções, mas um espaço onde os elementos são classes de equivalência de funções. Por simplicidade de notação, os elementos do espaço L^p serão denotados por f em vez de $[f]$. Por exemplo, se $f \in L^p$ tal que $f \geq 0$, significa que todos os representantes de f são não negativos μ -q.t.p.. No entanto, é importante destacar que, do ponto de vista formal, uma expressão da forma “uma função contínua f em L^p ” não está correta, sendo que a formulação adequada seria que “a classe de equivalência de $f \in L^p$ contém uma função contínua”.

Agora é possível estabelecer o teorema da completude dos espaços L^p . A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (RUDIN, 1987, Teorema 3.11).

Teorema 1.48: Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Então, dado $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X, \mu)$ é um espaço de Banach com respeito à norma $\|\cdot\|_p$.

Supondo que $1 < p, q < \infty$, os números p e q são chamados de **expoentes conjugados** se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

A relação ainda é válida quando $p = 1$, neste caso toma-se $q = \infty$.

Teorema 1.49 (Desigualdade de Hölder): Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p, q \leq \infty$ expoentes conjugados. Se $f \in L^p(X, \mu)$ e $g \in L^q(X, \mu)$, então $fg \in L^1(X, \mu)$

e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, isto é:

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Para a demonstração deste teorema, veja (RUDIN, 1987, Teorema 3.11). Para uma discussão sobre consequências da Desigualdade de Hölder, consulte (BOGACHEV, 2007, Capítulo 2.11).

Definição 1.50: Sejam μ e ν medidas definidas no espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$. A medida ν é dita **absolutamente contínua** com respeito a μ se, para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$, vale $\nu(A) = 0$. Indica-se esta situação pela notação $\nu \ll \mu$.

Recordamos resultado central de caracterização da condição de continuidade absoluta entre medidas.

Teorema 1.51 (Teorema de Radon-Nikodym): Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito e $\nu \ll \mu$. Então existe uma única $h \in L^1(X, \mu)$ tal que

$$\nu(A) = \int_A h d\mu$$

para todo $A \in \mathcal{F}$. A classe h é chamada de **derivada de Radon-Nykodym** de ν com respeito a μ , sendo denotada por $\frac{d\nu}{d\mu}$.

O teorema acima é um dos principais resultados da Teoria da Medida e sua demonstração pode ser encontrada em (RUDIN, 1987, Teorema 6.10), juntamente com outro resultado importante conhecido como *Decomposição de Lebesgue*.

Lembramos que continuidade absoluta é preservada por transformações não singulares.

Definição 1.52: Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Diz-se que a transformação ϕ é **não singular** com respeito a μ se, para todo $A \in \mathcal{F}$, tem-se

$$\mu(A) = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad \mu(\phi^{-1}(A)) = 0.$$

Sejam $\mathcal{M}(X)$ o espaço de todas as medidas em $(X, \mathcal{F})$ e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. A aplicação ϕ induz uma transformação ϕ_* em $\mathcal{M}(X)$ definida por $(\phi_*\mu)(A) = \mu(\phi^{-1}A)$ para todo A mensurável. Como ϕ é mensurável, é fácil de ver que $\phi_*\mu \in \mathcal{M}(X)$. A transformação $\phi_*\mu$ é chamado de *pushforward* de μ por ϕ .

Proposição 1.53: Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida finita e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação não singular. Então, quando $\nu \ll \mu$, tem-se $\phi_*\nu \ll \phi_*\mu \ll \mu$.

Demonstração. Como $\nu \ll \mu$ se $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Sendo ϕ não singular, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(\phi^{-1}A) = 0 \Rightarrow \nu(\phi^{-1}A) = 0$. Assim, $\phi_*\nu \ll \phi_*\mu$. Como ϕ é não singular, $\phi_*\mu \ll \mu$. ■

Definição 1.54: Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Denotamos por

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(X, \mathcal{F}, \mu) = \{f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu) : f \geq 0 \text{ e } \|f\|_1 = 1\}$$

o conjunto de (classes de equivalência de) funções de densidade. Toda função $f \in \mathcal{D}$ é chamada de **função de densidade** ou simplesmente **densidade**.

Se $f \in \mathcal{D}$, então ao definir

$$\mu_f(A) := \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

temos uma medida sobre $\mathcal{F}$, a qual é absolutamente contínua com respeito a μ . Neste caso, f é chamada de densidade de μ_f e é simplesmente indicada por $\frac{d\mu_f}{d\mu}$.

Se $\nu \ll \mu$, pela Proposição 1.53, tem-se que $\phi_*\nu$ é absolutamente contínua com respeito a μ . Portanto, dada uma aplicação não singular ϕ , podemos interpretar que à densidade de ν , $\frac{d\nu}{d\mu}$, foi feita corresponder a densidade de $\phi_*\nu$, $\frac{d\phi_*\nu}{d\mu}$. Essa transformação, denotada por $\hat{T}_\phi$, é conhecida como **Operador de Transferência** ou **Operador de Ruelle-Perron-Frobenius**, o qual será apresentado com mais detalhes no Capítulo 2. Os operadores ϕ_* e $\hat{T}_\phi$ são estreitamente relacionados:

$$\underbrace{f \in \mathcal{D} \mapsto \mu_f \in \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\phi_*} \phi_*\mu_f \in \mathcal{M}(X) \mapsto \frac{d\phi_*\mu_f}{d\mu} \in \mathcal{D}}_{\hat{T}_\phi}.$$

O operador $\hat{T}_\phi$ desempenha um importante papel no Formalismo Termodinâmico e como ele age em L^1 é normalmente mais fácil de trabalhar do que ϕ_* .

1.2.2 Perspectiva Estatística em Dinâmica

Ao se interessar pelo estudo de processos que evoluem ao longo do tempo, a teoria ergódica se concentra em descrever o comportamento médio assintótico de órbitas típicas de sistemas dinâmicos. Para fazer isso, são empregadas técnicas de vários campos diferentes, incluindo teoria da probabilidade e mecânica estatística.

Dizemos que uma transformação ϕ agindo no espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ é **ergódica** caso

$$A \in \mathcal{F}, \phi^{-1}(A) = A \quad \mu\text{-q.t.p.} \implies \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A^c) = 0.$$

Ergodicidade significa que, quando o conjunto A for totalmente invariante, ou seja, um conjunto para o qual $\phi^{-1}(A) = A$, este terá medida zero ou completa. Este é um tipo de propriedade de *indecomponibilidade* da dinâmica segundo a medida. Se tal conjunto existe, seu complemento também será totalmente invariante e, em particular, tem-se que $\phi(A) \subseteq A$ e $\phi(A^c) \subseteq A^c$. Portanto, a imagem de nenhum ponto em A pode interceptar A^c e vice-versa. Em essência, isso indica a existência de duas regiões no espaço de fase sobre as quais a dinâmica evolui separadamente, uma das quais não sendo “capturada” pela medida μ , no sentido que não intercepta seu suporte.

A definição de transformação não singular é dada através de conjuntos de medida nula, mas é interessante que a medida μ seja *compatível* com a dinâmica de ϕ não apenas em conjuntos de medida nula. Isso se obtém pela noção de medida invariante.

Definição 1.55: *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Então μ é ϕ -invariante (ou ϕ preserva a medida μ) se $\mu(\phi^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$.*

Conclusões decorrentes simplesmente do fato de uma dinâmica ser invariante e ergódica não fornecem uma descrição completa da evolução do sistema. Note que, a rotação irracional $\phi_1(x) = x + \alpha$, com $\alpha \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$, e o mapa da duplicação do ângulo $\phi_2(x) = 2x \bmod 1$ são dois exemplos de dinâmicas ergódicas com respeito a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. No entanto, constituem dinâmicas com particularidades fundamentais bastante distintas. Em um caso, os pontos próximos permanecem próximos o tempo todo, enquanto no outro eles tendem a se separar. Isso cria uma espécie de *imprevisibilidade* em um caso que não está presente no outro. Uma maneira de distinguir estas duas dinâmicas é a condição de ser *mixing*.

Dizemos que a transformação ϕ é *mixing* se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu(\phi^{-n}(B) \cap A) - \mu(A)\mu(B)| = 0, \quad (1.8)$$

para quaisquer conjuntos mensuráveis $A, B \subset X$. Em outras palavras, quando n cresce, a probabilidade do evento $[x \in A \text{ e } \phi^n(x) \in B]$ converge para o produto das probabilidades dos eventos $[x \in A]$ e $[x \in B]$. Uma interpretação dessa propriedade é que a probabilidade condicional de A dado $\phi^{-n}(B)$, ou seja, a probabilidade de que o evento B seja uma consequência do evento A ter ocorrido em algum tempo no passado, é assintoticamente computada como se os dois eventos fossem completamente independentes. Em outros termos, assintoticamente não há relação causal entre os dois eventos. É por isso que dizemos que um sistema *mixing* exibe comportamento do tipo *estocástico* ou *aleatório*. Geometricamente, é possível pensar em $\phi^{-n}(B)$ como uma “redistribuição de massa” e a condição de *mixing* diz que, para n grande o suficiente, a proporção de $\phi^{-n}(B)$ que intercepta A é proporcional à medida de A . De forma intuitiva, $\phi^{-n}(B)$ está se “espalhando

de modo homogêneo” em relação à medida μ .

É possível observar que a rotação irracional $\phi_1(x) = x + \alpha$ não é *mixing* (SILVA, 2008, Teorema 6.7.1), mas a duplicação de ângulo $\phi_2(x) = 2x \pmod 1$ o é (SILVA, 2008, Teorema 6.6.1).

Supondo que ϕ preserva a probabilidade μ , observe que a condição de ser *mixing* implica ergodicidade. De fato, a existência de um conjunto A mensurável, com $\mu(\phi^{-1}(A) \triangle A) = 0$, tal que $0 < \mu(A) < 1$ impede que o sistema seja *mixing*. Isto porque obviamente temos $\mu(A)\mu(A^c) = \mu(A)(1 - \mu(A)) \in (0, 1)$, mas por outro lado a inclusão $\phi^{-n}(A) \setminus A \subseteq \bigcup_{j=0}^{n-1} \phi^{-(j+1)}(A) \setminus \phi^{-j}(A)$ implica de imediato que $\mu(\phi^{-n}(A) \cap A^c) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \mu(\phi^{-j+1}(A) \setminus \phi^{-j}(A)) = n\mu(\phi^{-1}(A) \setminus A) = 0$.

Uma questão natural diz respeito à velocidade de *mixing*, ou seja: com qual taxa o limite (1.8) tende para 0? No entanto, contraexemplos mostram que, em geral, não há taxa específica com respeito à qual essa convergência tende para zero. Já para a duplicação de ângulo é possível sempre encontrar pares de conjuntos mensuráveis A e B para os quais o limite (1.8) é tão lento quanto se queira (CLIMENHAGA, 2014). Por outro lado, é possível introduzir a função de correlação entre potenciais (ou observáveis) f e g , o que permite em alguns casos, quando os potenciais possuem regularidade suficiente, obter taxas específicas de decaimento, que dependem apenas da transformação ϕ (a menos de uma constante que pode depender de f e g).

Definição 1.56: Seja $\phi : (X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{F}, \mu)$ uma transformação mensurável que preserva a probabilidade μ . Dadas funções mensuráveis $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (chamadas de potenciais), para todo inteiro positivo n , define-se a n -ésima correlação do par f, g por

$$C_n(f, g) = C(f, g \circ \phi^n) := \int f(g \circ \phi^n) d\mu - \int f d\mu \int g d\mu,$$

quando as integrais fazem sentido.

Segundo (VIANA; OLIVEIRA, 2016), podemos pensar em f e g como grandezas refletindo medições do sistema. Então $C_n(f, g)$ indica como o valor de g em tempo n se correlaciona com o valor de f em tempo zero, em qual grau o comportamento de uma grandeza “afeta” o comportamento da outra. Ao considerar, por exemplo, $f = \chi_A$ e $g = \chi_B$, com A e B mensuráveis, então $f(x)$ fornece dado sobre a posição do ponto inicial x , enquanto que $g(\phi^n(x))$ informa sobre a posição do seu n -ésimo iterado $\phi^n(x)$. Se a correlação $C_n(f, g)$ for pequena, então a primeira informação será de pouca utilidade para fazer previsões quanto ao segundo evento.

Dadas duas classes de funções mensuráveis, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, e uma sequência $\{a_n\}$ de números positivos com $a_n \rightarrow 0$, dizemos que as funções de correlação $C_n(f, g)$ decaem com taxa descrita por $\{a_n\}$ para funções $f \in \mathcal{B}_1, g \in \mathcal{B}_2$ se existe uma constante $K =$

$K(f, g) > 0$ tal que

$$C_n(f, g) \leq K a_n.$$

Por exemplo, se $a_n = \theta^n$, para $\theta \in (0, 1)$, dizemos que as funções de correlação decaem exponencialmente. Em um certo sentido, a taxa de decaimento nos fornece a velocidade de *mixing* de acordo com medições específicas. Se as classes de observáveis forem muito grandes, contudo, não é sempre possível determinar decaimento característico, com uma taxa particular. Por exemplo, se escolhermos $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = L^2$, então, dada qualquer taxa, é possível encontrar funções de quadrado integrável tais que as respectivas correlações decaem em uma taxa ainda mais lenta. Para detalhes, consulte o apêndice de (BARREIRA; PESIN, 2006).

1.2.3 Recorrência e Conservatividade

Um resultado muito conhecido da teoria ergódica é o Teorema de Recorrência de Poincaré. Foi formulado e discutido por Henri Poincaré em 1890 e, segundo (DAJANI; KALLE, 2021), é um dos primeiros resultados que utiliza teoria da medida para estudar sistemas dinâmicos. A grosso modo, o resultado afirma que, em um sistema que preserva medida, as iteradas de todo conjunto de medida positiva retornam ao conjunto em uma infinidade de ocasiões. Para a discussão sobre recorrência, foi utilizado como referência o livro de (SILVA, 2008).

Conservatividade, por sua vez, requer que os retornos ocorram de forma mensuravelmente significativa, ou melhor, para todo conjunto de medida positiva, há iterada que encontra o conjunto em um subconjunto também de medida positiva.

De maneira informal, uma transformação ϕ é dita *recorrente* quando, para qualquer conjunto A de medida positiva, quase todo ponto de A retorna para A em algum momento do futuro. De maneira mais precisa, tem-se a definição abaixo.

Definição 1.57: *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Então ϕ é **recorrente** se, para todo $A \in \mathcal{F}$ de medida positiva e para quase todo ponto $x \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^n(x) \in A$.*

Agora é possível apresentar o Teorema de Recorrência de Poincaré, que estabelece uma relação entre uma transformação invariante e recorrência.

Teorema 1.58 (Teorema de Recorrência de Poincaré): *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida finita e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável invariante. Então ϕ é recorrente.*

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{F}$ de medida positiva e $N \subset A$ o subconjunto de todos os elementos de A que nunca retornam para A . Então

$$N = \{x \in A : \phi^k(x) \notin A \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}.$$

Deve-se concluir que $\mu(N) = 0$. Note que $N \cap \phi^{-k}(N) = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $\phi^{-m}(N) \cap \phi^{-n}(N) = \emptyset$ para quaisquer $m \neq n$. Assim, os conjuntos $N, \phi^{-1}(N), \dots$ são dois a dois disjuntos. Como ϕ é invariante, $\mu(\phi^{-j}(N)) = \mu(N)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Se $\mu(N) > 0$, então

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \phi^{-j}(N)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(N) = \infty,$$

o que contradiz o fato de X ter medida finita. Portanto, $\mu(N) = 0$ e assim ϕ é recorrente. ■

Para chegar na contradição, foi necessário que X tivesse medida finita. Note que o resultado pode não ser verdadeiro em um espaço de medida infinita. Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = x + t$ para algum $t > 0$. Não é difícil ver que essa transformação preserva a medida de Lebesgue, mas claramente não é recorrente, basta notar que $\phi^n([0, t)) \cap [0, t) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.59: *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Dizemos que ϕ é **conservativo** se, para todo $A \in \mathcal{F}$ de medida positiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\phi^{-n}(A) \cap A) > 0$.*

Sob a hipótese de não-singularidade, Definição 1.52, o próximo resultado apresenta a equivalência entre recorrência e conservatividade. Em particular, segue do Teorema 1.58 que toda transformação que preserva medida em um espaço de medida finita é conservativa.

Teorema 1.60: *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável não singular. Então ϕ é recorrente se, e somente se, for conservativo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que ϕ não é conservativo. Então existe um conjunto A de medida positiva tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\phi^{-n}(A) \cap A$ tem medida nula. Assim, para quase todo ponto $x \in A$, tem-se que $\phi^n(x) \notin A$ para todo n , de modo que ϕ não é recorrente.

($\Leftarrow$) Suponha que ϕ não é recorrente. Então existem conjuntos A e B de medida positiva tais que $B \subset A$ e, para todo $x \in B$, $\phi^n(x) \notin A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in \phi^{-n}(B) \cap B$ implica que $\phi^n(x) \in A$, tem-se que $\mu(\phi^{-n}(B) \cap B) = 0$ para todo n . Portanto, ϕ não é conservativo. ■

O próximo resultado garante que se uma transformação é recorrente, então existe uma quantidade infinita de retornos.

Proposição 1.61: Se ϕ for recorrente, então, para todo conjunto A de medida positiva e quase todo $x \in A$, existe uma sequência crescente $\{n_i\}$ tal que $\phi^{n_i}(x) \in A$.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{F}$ de medida positiva. Defina de maneira indutiva os conjuntos

$$N_1 = \{x \in A : \phi^n(x) \notin A \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

$$N_i = \left\{ x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} N_j : \phi^n(x) \notin A \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} N_j \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{para } i \geq 2.$$

Como ϕ é recorrente, cada N_i tem medida nula. Seja $N = \bigcup_{i \geq 1} N_i$. Claramente $\mu(A \setminus N) = \mu(A) > 0$. Então para todo $x \in A \setminus N$ existe uma sequência crescente $\{n_i\}$ tal que $\phi^{n_i}(x) \in A \setminus N$. De fato, dado $x \in A \setminus N$, existe $n_1 = n(x)$ tal que $\phi^{n_1}(x) \in A \setminus N$. Agora considerando $y = \phi^{n_1}(x)$, existe $m_1 = m(y)$ tal que $\phi^{m_1}(y) \in A \setminus N$. Tomando $n_2 = n_1 + m_1$, então $\phi^{n_2}(x) \in A \setminus N$. Continuando desta maneira, obtém-se uma sequência $\{n_i\}$ tal que $\phi^{n_i}(x) \in A$.

Para concluir, note que $\mu(N) = 0$ e assim

$$\mu(\{x \in A : \phi^n(x) \in A \text{ para infinitos } n \in \mathbb{N}\}) = \mu(A \setminus N) = \mu(A).$$

■

Uma estratégia útil em dinâmica é considerar transformações induzidas. No presente trabalho, estas ajudam a reduzir o estudo de transformações em espaços com medida infinita ao caso de transformações em espaços de medida finita. Algumas vezes, de fato, transformações induzidas escolhidas adequadamente possuem melhores propriedades dinâmicas, como, por exemplo, distorção limitada.

Definição 1.62: Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação conservativa e não singular. Fixando um conjunto $A \in \mathcal{F}$ com $0 < \mu(A) < \infty$. O **tempo de primeiro retorno** é dado por

$$\varphi_A(x) := \chi_A(x) \inf\{n \geq 1 : \phi^n(x) \in A\}.$$

Note que pelo Teorema 1.60 a função φ_A está bem definida μ -q.t.p. no espaço de medida $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$, onde

$$\mathcal{F}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\} \quad \text{e} \quad \mu_A(E) = \mu(E|A) = \frac{\mu(E \cap A)}{\mu(A)}.$$

Tem-se naturalmente definida a **transformação induzida** ϕ_A que é dada por

$$\phi_A(x) = \phi^{\varphi_A(x)}(x).$$

Observe que uma iteração de ϕ_A corresponde a várias iterações de ϕ . Deste modo, dependendo da escolha do conjunto A , a transformação ϕ_A pode vir a ser mais

‘caótica’ do que ϕ . Para a construção da transformação induzida, assume-se que a medida é σ -finita quando $\mu(X) = \infty$. A transformação induzida é construída apenas em conjuntos $A \in \mathcal{F}$ com $\mu(A) < \infty$. Veja (AARONSON, 1997, Seção 1.5) para propriedades e resultados básicos de transformações induzidas.

Apresentaremos a seguir a fórmula de Kac. Quando se trata de um espaço de probabilidade, esta mostra que, na presença de ergodicidade, a média do tempo de primeiro retorno segundo a medida induzida é igual ao inverso da medida do conjunto sobre o qual se realiza a indução. Neste trabalho, será utilizado o teorema apresentado em (AARONSON, 1997), o qual não supõe um espaço de probabilidade.

Lema 1.63: *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e ϕ uma transformação conservativa e invariante. Se $A \in \mathcal{F}$ com $0 < \mu(A) < \infty$ e $\mu(X \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \phi^{-k}(A)) = 0$, então*

$$\mu(B \setminus A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A \cap \phi^{-k}(B) \setminus \bigcup_{j=1}^k \phi^{-j}(A)\right) \quad \forall B \in \mathcal{F}.$$

Para a demonstração deste resultado, veja (AARONSON, 1997, Lema 1.5.4).

Teorema 1.64 (Fórmula de Kac): *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e ϕ uma transformação invariante, conservativa e ergódica. Se $A \in \mathcal{F}$ com $0 < \mu(A) < \infty$, então*

$$\int_A \varphi_A d\mu = \mu(X).$$

Demonstração. Como ϕ é conservativa e ergódica, tem-se a menos de conjunto de medida nula que

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \phi^{-k}(A) = X.$$

Então pelo Lema 1.63 para todo $B \in \mathcal{F}$,

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A \cap \phi^{-k}(B) \setminus \bigcup_{j=1}^k \phi^{-j}(A)\right).$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_A \sum_{k=0}^{\varphi_A-1} \chi_B \circ \phi^k d\mu &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A \cap [\varphi_A=j]} \sum_{k=0}^{j-1} \chi_B \circ \phi^k d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-1} \mu(A \cap [\varphi_A=j] \cap \phi^{-k}(B)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \mu(A \cap [\varphi_A=j] \cap \phi^{-k}(B)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A \cap [\varphi_A > k] \cap \phi^{-k}(B)). \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\mu(A \cap B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A \cap \phi^{-k}(B) \setminus \bigcup_{j=1}^k \phi^{-j}(A)\right) = \int_A \sum_{k=0}^{\varphi_A-1} \chi_B \circ \phi^k d\mu,$$

ou melhor,

$$\mu(B) = \int_A \sum_{k=0}^{\varphi_A-1} \chi_B \circ \phi^k d\mu \quad \forall B \in \mathcal{F}.$$

Em particular, tomando $B = X$

$$\int_A \varphi_A d\mu = \mu(X).$$

■

1.2.4 Shifts Topológicos de Markov

Nesta seção, será introduzido a noção de shift topológico de Markov e algumas de suas propriedades. Estas transformações formam uma classe dos sistemas simbólicos, os quais, é bem sabido, constituem via conjugação ferramenta útil para a análise de sistemas dinâmicos. A ideia é particionar o espaço, atribuindo um símbolo a cada parte, e representar a órbita de um ponto do sistema por uma sequência de símbolos que identificam as “visitas” da trajetória a cada elemento da partição do espaço. Deste modo, obtêm-se informações sobre o sistema analisando essas correspondentes órbitas simbólicas. Naturalmente são necessárias propriedades adequadas para garantir uma partição apropriada, o que pode ser assegurado pelo caráter markoviano da dinâmica. Este será o principal modelo dinâmico estudado neste trabalho, sendo a aplicação do teorema principal (ver Teorema 2.23) realizada para esta classe de sistemas.

Para sermos concretos, considere $(X, \mathcal{F}, m)$ um espaço de medida. Uma família $\alpha \subset \mathcal{F}$ é uma **partição** de X se os seus elementos são dois a dois mensuravelmente disjuntos (no sentido que, a menos de um conjunto de medida nula, estes são disjuntos) e além disso a união de todos seus elementos é mensurável e tem medida total.

Definição 1.65 (Aplicação Markoviana): *Sejam $(X, \mathcal{F}, m)$ um espaço de medida², $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável não singular e $\alpha \subset \mathcal{F}$ uma partição enumerável (finita ou infinita) tais que*

- (1) *Propriedade Geradora: $\mathcal{F}$ é a menor σ -álgebra que contém $\bigcup_{n \geq 0} \phi^{-n}(\alpha)$ e que é completa com respeito a m , isto é, trata-se do completamento da σ -álgebra*

$$\sigma(\{\phi^{-n}(a) : a \in \alpha, n \geq 0\}).$$

- (2) *Propriedade de Markov: para todos $a, b \in \alpha$, se $m(\phi(a) \cap b) > 0$, então $m(b \setminus \phi(a)) = 0$, o que se denota por $\phi(a) \supseteq b \pmod{m}$.*

- (3) *Inversibilidade Local: para todo $a \in \alpha, m(a) > 0$ e $\phi : a \rightarrow \phi(a)$ é invertível com inversa mensurável.*

² Para os propósitos deste trabalho, assume-se sendo um espaço de Lebesgue.

Denominam-se α por **partição de Markov** e ϕ por **mapa de Markov**.

Um mapa de Markov é **irreduzível** (ou transitivo) se, para quaisquer $a, b \in \alpha$, existe $n = n(a, b)$ tal que $m(a \cap \phi^{-n}(b)) > 0$.

Dados $a_0, \dots, a_{n-1} \in \alpha$, denota-se

$$\begin{aligned} [a_0, \dots, a_{n-1}]_\alpha &:= \{x \in X : \phi^i(x) \in a_i, 0 \leq i \leq n-1\} \\ &= \bigcap_{i=0}^{n-1} \phi^{-i}(a_i). \end{aligned}$$

Estes conjuntos são mesuráveis e aqueles com medida diferente de zero são chamados de **cilindros da aplicação ϕ** . Note que, para quase todos os pontos de X e para todo inteiro n , pode-se associar único cilindro de comprimento n . Equiparemos X com a topologia gerada pelos cilindros da aplicação ϕ .

Definição 1.66 (Shift Topológico de Markov): Sejam S um conjunto enumerável (também conhecido como alfabeto), $\mathbb{T} = (t_{ij})_{S \times S}$ uma matriz de zeros e uns (chamada de **matriz de transição**). Considere o conjunto

$$X_S := \{(x_0, x_1, \dots) \in S^{\mathbb{N} \cup \{0\}} : t_{x_i, x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\},$$

munido com a topologia gerada pelos cilindros

$$[a_0, \dots, a_{n-1}]_S := \{x \in X_S : x_i = a_i \text{ para todos } i = 0, \dots, n-1\}.$$

Sejam $\mathcal{F}_S$ a σ -álgebra de Borel correspondente e $\sigma : X_S \rightarrow X_S$, dado por $(\sigma x)_i = x_{i+1}$, o shift à esquerda. Dizemos que $(X_S, \mathcal{F}_S, \sigma)$ é um **shift topológico de Markov sobre S** .

Um shift topológico de Markov é dito **topologicamente mixing** quando, para todo par $a, b \in S$, existe $N_{a,b} > 0$ tal que $[a]_S \cap \sigma^{-n}([b]_S) \neq \emptyset$ sempre que $n > N_{a,b}$.

Tem-se que qualquer mapa de Markov $(X, \mathcal{F}, m, \phi, \alpha)$ é isomorfo a um **shift topológico de Markov sobre α** equipado com uma medida não singular. De fato, um mapa de Markov admite uma tal representação com $S = \alpha$ e $\mathbb{T} = (t_{ab})_{S \times S}$, onde $t_{ab} = 1$ se, e somente se, $m(a \cap \phi^{-1}(b)) > 0$, sendo a conjugação dada por $x \mapsto (a_0, a_1, \dots)$ onde os a'_i s cumprem $\phi^i(x) \in a_i$ para todo i . Mais precisamente, tem-se o seguinte resultado.

Proposição 1.67: Seja (ϕ, α) um mapa de Markov, onde $\alpha = \{a_s : s \in S\}$, definimos $\pi : X \rightarrow S^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ pela condição $\phi^{n-1}(x) \in a_{\pi(x)_n}$ para todo n . Considere a matriz de transição $\mathbb{T}$ definida acima. Então o suporte de $m \circ \pi^{-1}$ é X_S e π é a conjugação de $(X, \mathcal{F}, m, \phi)$ com $(X_S, \mathcal{F}_S, m \circ \pi^{-1}, \sigma)$.

Essa proposição encontra-se em (AARONSON, 1997, Proposição 4.2.3).

As (ϕ, α) -variações de uma aplicação mensurável $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ são definidas por

$$v_n(\psi) := \sup \{ |\psi(x) - \psi(y)| : x, y \in [a_0, \dots, a_{n-1}]_\alpha \text{ onde } a_i \in \alpha \}, \quad \forall n \geq 1.$$

Se

$$\sum_{n \geq 2} v_n(\psi) < \infty,$$

então é dito que ψ possui (ϕ, α) -variação somável. Note que, ao considerar $n \geq 2$, não ficamos restritos a funções limitadas. Se existem $K > 0, \theta \in (0, 1)$ tais que $v_n(\psi) < K\theta^n$ para todo $n \geq 1$, então ψ é dito (ϕ, α) -localmente holderiano (com parâmetro θ).

2 DECAIMENTO SUBEXPONENCIAL

Neste capítulo, inicialmente daremos mais detalhes sobre o Operador de Transferência e algumas de suas propriedades, bem como faremos uma breve introdução da teoria de renovação em sua versão probabilística. O intuito é familiarizar o leitor com estes tópicos, os quais são essenciais para a apresentação e o desenvolvimento da Teoria de Renovação para Operadores, foco principal deste capítulo e, de fato, desta dissertação. As duas últimas seções deste trabalho são assim destinadas para discutir e demonstrar os resultados centrais desta monografia: a partir de um resultado abstrato sobre sequências de operadores de renovação (Teorema 2.11), asseguramos o decaimento subexponencial de correlações de estados de equilíbrio associados a aplicações markovianas (Teorema 2.23). A prova do primeiro resultado ocupa toda seção 2.3, enquanto sua aplicação para sistemas dinâmicos é realizada na seção 2.4. Estes teoremas e suas demonstrações são devidas a (SARIG, 2002).

2.1 Operador de Transferência

Estudar trajetórias individuais de um sistema dinâmico pode ser muito complicado, especialmente levando em conta que certos sistemas apresentam sensibilidade às condições iniciais, ou seja, que pequenas vizinhanças de uma condição inicial podem evoluir com ocorrência de afastamentos exponenciais. Apesar da tentativa de *acompanhar* a trajetória de um ponto poder ser desaconselhada, o estudo da evolução de um conjunto de condições iniciais, o qual pode ser capturado por uma *função de densidade*, pode fornecer informações interessantes sobre o comportamento do sistema. Uma pergunta natural surge: dada uma função de densidade, como descrever sua evolução ao longo do tempo? O *operador de transferência* pode ser visto como uma possível resposta para esta indagação.

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ_f uma medida com função densidade f , isto é, para qualquer conjunto mensurável $A \in \mathcal{F}$,

$$\mu_f(A) = \int_A f d\mu.$$

Gostaríamos de saber como a dinâmica ϕ *distribui* um conjunto no espaço X . Suponha que temos uma distribuição descrita por $f d\mu$, $f \in L^1(X, \mu)$ com $f \geq 0$, a ideia é determinar como a dinâmica afeta essa distribuição de pontos. Para isso, suponha que ϕ é não singular (veja Definição 1.52). Então temos que a distribuição de pontos em A

após a ação da dinâmica é dada por

$$\begin{aligned} \int \chi_A \circ \phi f d\mu &= \int \chi_A \circ \phi d\mu_f \\ &= \int \chi_A d(\mu_f \circ \phi^{-1}) \\ &= \int_A \frac{d(\mu_f \circ \phi^{-1})}{d\mu} d\mu. \end{aligned}$$

Isso motiva a definição apresentada na página 41 do operador de transferência, que é dado pela solução da equação

$$\int_A \widehat{T}_\phi f d\mu = \int_{\phi^{-1}(A)} f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{F}. \quad (2.1)$$

Note que a função de densidade f foi transformada em uma nova função de densidade $\widehat{T}_\phi f$. Intuitivamente podemos pensar no operador $\widehat{T}_\phi$, o qual associa uma função densidade a uma nova densidade, como um indicador da ação da dinâmica sobre a distribuição de pontos. O operador $\widehat{T}_\phi$ é conhecido como **Operador de Transferência**. Como $f \in L^1(X, \mu)$, $\widehat{T}_\phi f \in L^1(X, \mu)$, portanto $\widehat{T}_\phi : L^1(X, \mu) \rightarrow L^1(X, \mu)$ é um operador bem definido.

Definição 2.1: Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável não singular. O **Operador de Transferência** $\widehat{T}_\phi : L^1(X, \mu) \rightarrow L^1(X, \mu)$ é dado por

$$\widehat{T}_\phi f = \frac{d(\mu_f \circ \phi^{-1})}{d\mu}, \quad \text{onde } d\mu_f = f d\mu.$$

Quando não houver ambiguidade, o operador transferência de ϕ será denotado por $\widehat{T}$.

A definição dada acima muitas vezes pode ser inadequada de se trabalhar. Por isso, seguindo as notas de (SARIG, 2020a) e (AARONSON, 1997), a proposição a seguir fornece uma representação integral do operador de transferência.

Proposição 2.2: Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável não singular. Dada $f \in L^1(X, \mu)$, então $\widehat{T}_\phi f$ é o único elemento de $L^1(X, \mu)$ tal que

$$\int g \cdot \widehat{T}_\phi f d\mu = \int g \circ \phi \cdot f d\mu$$

para toda $g \in L^\infty(X, \mu)$.

Demonstração. Para todo $g \in L^\infty(X, \mu)$,

$$\begin{aligned} \int g \cdot \widehat{T}_\phi f \, d\mu &= \int g \cdot \frac{d(\mu_f \circ \phi^{-1})}{d\mu} \, d\mu \\ &= \int g \, d(\mu_f \circ \phi^{-1}) \\ &= \int g \circ \phi \, d\mu_f \\ &= \int g \circ \phi \cdot f \, d\mu. \end{aligned}$$

Para a unicidade de $\widehat{T}_\phi f$, considere que existam $h_1, h_2 \in L^1$ tais que

$$\int g \cdot h_i \, d\mu = \int g \circ \phi \cdot f \, d\mu$$

para toda $g \in L^\infty$. Tomando $g = \text{sgn}(h_1 - h_2)$, onde

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & \text{se } z \neq 0, \\ 0, & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} \int |\overline{h_1} - \overline{h_2}| \, d\mu &= \int g \cdot (h_1 - h_2) \, d\mu \\ &= \int g \cdot h_1 \, d\mu - \int g \cdot h_2 \, d\mu \\ &= \int (g \circ \phi) \cdot f \, d\mu - \int (g \circ \phi) \cdot f \, d\mu = 0, \end{aligned}$$

de modo que $h_1(x) = h_2(x)$ para quase todo x .

■

O operador de transferência apresenta diversas propriedades interessantes, resumidas na proposição a seguir.

Proposição 2.3: *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito e $\phi, \psi : X \rightarrow X$ transformações mensuráveis não singulares. Então*

1. $\widehat{T}_\phi$ é linear:

$$\widehat{T}_\phi(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \widehat{T}_\phi f_1 + \beta \widehat{T}_\phi f_2.$$

2. $\widehat{T}_\phi$ é um operador positivo, isto é, $\widehat{T}_\phi f \geq 0$ se $f \geq 0$.

3. $\langle \widehat{T}_\phi f, 1 \rangle = \langle f, 1 \rangle$, isto é,

$$\int_X \widehat{T}_\phi f \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

4. $\widehat{T}_\phi$ é uma contração, isto é, para toda $f \in L^1(X, \mu)$

$$\|\widehat{T}_\phi f\|_1 \leq \|f\|_1.$$

5. $\widehat{T}_{\phi \circ \psi} = \widehat{T}_\phi \widehat{T}_\psi$. Em particular, $\widehat{T}_{\phi^n} = (\widehat{T}_\phi)^n$.

A demonstração destas e outras propriedades podem ser encontradas em (BOYARSKY; GÓRA, 1997) ou (BALADI, 2000). As propriedades (1)-(3) mostram que o operador de transferência faz parte de uma classe maior de operadores, conhecidos como Operadores de Markov, para mais detalhes veja (DING; ZHOU, 2009).

Na palestra (SARIG, 2020b), é fornecida descrição do operador de transferência associado ao mapa de Gauss. Já em (SARIG, 2020a), é explicitado o operador para o caso do mapa de duplicação do ângulo. A seguir será apresentado o operador de transferência associado ao mapa logístico.

Exemplo 2.4: Um dos exemplos mais simples de um sistema não linear que pode levar a uma dinâmica rica é o mapa logístico (ou quadrático) $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, com $\alpha \in (0, 4]$, dado por

$$\phi(x) = \alpha x(1 - x).$$

O mapa logístico foi desenvolvido pela primeira vez pelo sociólogo e matemático Pierre F. Verhulst para descrever o crescimento populacional com recursos limitados. Para um estudo mais detalhado deste sistema, veja (SHI; YU, 2007) ou (STROGATZ, 2015, Capítulo 10).

Para facilitar os próximos cálculos será utilizado $\alpha = 4r$ e portanto $r \in (0, 1]$, sendo o mapa logístico agora dado por

$$\phi(x) = 4rx(1 - x).$$

Para descrever o operador de transferência de ϕ , considerando a medida de Lebesgue m , note que da Equação (2.1), tomando $A = [0, x]$ e $f \in L^1([0, 1], m)$, tem-se

$$\int_0^x \widehat{T}f \, dm = \int_{\phi^{-1}[0, x]} f \, dm.$$

Diferenciando em ambos os lados com respeito a x , obtém-se

$$\widehat{T}f(x) = \frac{d}{dx} \int_{\phi^{-1}[0, x]} f \, dm. \quad (2.2)$$

Deve-se obter a imagem inversa do intervalo $[0, x]$. Para isso, basta resolver a equação quadrática subjacente, o que produz

$$\phi^{-1}([0, x]) = \left[0, \frac{r - \sqrt{r(r-x)}}{2r}\right] \cup \left[\frac{r + \sqrt{r(r-x)}}{2r}, 1\right].$$

Deste modo, da Equação (2.2), tem-se

$$\hat{T}f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\frac{r - \sqrt{r(r-x)}}{2r}} f(t) dm + \frac{d}{dx} \int_{\frac{r + \sqrt{r(r-x)}}{2r}}^1 f(t) dm,$$

e portanto

$$\hat{T}f(x) = \frac{1}{4\sqrt{r(r-x)}} \left[f\left(\frac{r - \sqrt{r(r-x)}}{2r}\right) + f\left(\frac{r + \sqrt{r(r-x)}}{2r}\right) \right].$$

◇

Nosso intuito será agora descrever o operador de transferência de aplicações de Markov (reveja, em particular, a Definição 1.65 e a Proposição 1.67). Seja ϕ um mapa de Markov em X . Denote por μ a medida não singular associada. Temos então a medida $\mu \circ \phi$ definida por

$$(\mu \circ \phi)(E) = \sum_{a \in S} \mu(\phi(E \cap [a])).$$

Note que se μ for σ -finita, então $\mu \circ \phi$ também o será.

Lema 2.5: *No contexto de aplicações de Markov, para toda função Boreliana não negativa $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se que*

$$\int_X f d(\mu \circ \phi) = \sum_{a \in S} \int_{\phi[a]} f(a, x) d\mu \quad (2.3)$$

e $\mu \ll \mu \circ \phi$.

Demonstração. Note que $\chi_{\phi(E \cap [a])}(x) = \chi_{\phi([a])}(x) \chi_E(a, x)$, pois

$$x \in \phi(E \cap [a]) \Leftrightarrow x \in \phi([a]) \text{ e } (a, x) \in E.$$

Assim a própria definição da medida $\mu \circ \phi$ fornece

$$\int \chi_E d(\mu \circ \phi) = \sum_{a \in S} \int \chi_{\phi(E \cap [a])} d\mu = \sum_{a \in S} \int_{\phi([a])} \chi_E(a, x) d\mu$$

para todo conjunto mensurável E . Por linearidade, essa igualdade se estende para funções simples e, pelo Teorema da Convergência Monótona, obtemos (2.3).

Como $E \subset \phi^{-1}(\phi(E))$, o fato de μ ser não singular assegura imediatamente que $\mu \ll \mu \circ \phi$.

■

A descrição que desejamos obter para o operador de transferência para aplicações de Markov envolve o conceito de Jacobiano. A definição de Jacobiano adotada neste trabalho seguirá a apresentada em (VIANA; OLIVEIRA, 2016, Capítulo 9.7). Seja

$\phi : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Diz-se que ϕ é **localmente invertível** se existe algum cobertura enumerável $\{U_k : k \geq 1\}$ de X por conjuntos mensuráveis tais que $\phi(U_k)$ é um conjunto mensurável para cada k e a restrição $\phi : U_k \rightarrow \phi(U_k)$ é uma bijeção com inversa mensurável. Os subconjuntos mensuráveis destes conjuntos U_k serão chamados **domínios de invertibilidade**. Note que se A é domínio de invertibilidade então $\phi(A)$ é um conjunto mensurável. Observe, igualmente, que se f é localmente invertível então a pré-imagem $\phi^{-1}(y)$ de qualquer $y \in X$ é enumerável, pois contém no máximo um ponto em cada U_k .

Definição 2.6: *Seja ν uma medida de probabilidade em X , não necessariamente invariante por ϕ . Uma função mensurável $J_\nu : X \rightarrow [0, \infty)$ é um **Jacobiano** de ϕ relativamente a ν se a restrição de J_ν a qualquer domínio de invertibilidade A é integrável com relação a ν e satisfaz*

$$\nu(\phi(A)) = \int_A J_\nu d\nu.$$

É importante observar que esta definição não depende da escolha da cobertura $\{U_k : k \geq 1\}$ e, quando o Jacobiano existe, ele é único ν -q.t.p. Pela equação de mudança de variável, tem-se que, para todo $k \geq 1$, existe Jacobiano de ϕ^k com relação a ν e ele é dado por

$$J_\nu \phi^k(x) = \prod_{n=0}^{k-1} J_\nu \phi(\phi^n(x)). \quad (2.4)$$

Podemos enfim caracterizar o operador de transferência para aplicações de Markov.

Proposição 2.7: *Suponha que X é um mapa de Markov com conjunto de estados S e que μ é não singular com Jacobiano $J_\mu = \frac{d\mu}{d\mu \circ \phi}$. Então o operador de transferência associado a μ é dado por*

$$(\widehat{T}_\phi f)(x) = \sum_{a \in S} \chi_{\phi([a])}(x) J_\mu(a, x) f(a, x) = \sum_{\phi(y)=x} J_\mu(y) f(y).$$

Demonstração. Seja $g \in L^\infty$. Então de (2.3) tem-se

$$\begin{aligned} \int g(x) \sum_{a \in S} \chi_{\phi([a])}(x) J_\mu(a, x) f(a, x) d\mu(x) &= \sum_{a \in S} \int_{\phi([a])} (g \circ \phi)(a, x) J_\mu(a, x) f(a, x) d\mu(x) \\ &= \int (g \circ \phi) J_\mu f d(\mu \circ \phi) \\ &= \int (g \circ \phi) f \frac{d\mu}{d\mu \circ \phi} d(\mu \circ \phi) \\ &= \int (g \circ \phi) f d\mu. \end{aligned}$$

■

2.2 Teoria da Renovação

A *Teoria da Renovação* é um tópico que originalmente vem da Teoria da Probabilidade e passeios aleatórios. Mas a ideia em si encontra suas aplicações em um espectro mais amplo e a teoria por trás dela geralmente pertence à análise pura. Primeiramente serão apresentados alguns conceitos básicos da teoria, para um estudo mais profundo do ponto de vista probabilístico é sugerido ao leitor os livros (COX, 1962) e (MITOV; OMEY, 2004).

Seja $\{r_n\}$ com $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de números reais com as propriedades,

$$r_n \geq 0, \text{ para } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n = 1 \quad \text{e} \quad \text{mdc}\{n \in \mathbb{N} : r_n \neq 0\} = 1,$$

onde a última propriedade é equivalente a dizer que r_n não é periódico. Definindo $t_0 = 1$, é possível construir outra sequência t_n , de maneira recursiva por

$$t_n = \sum_{k=1}^n r_k t_{n-k}. \quad (2.5)$$

É fácil ver que para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_n \leq 1$. As duas sequências r_n e t_n são chamadas de **par de renovação**.

Ao lidar com sequências infinitas, muitas vezes é melhor trabalhar com as funções geradoras. A **função geradora** de uma sequência infinita a_n , para $|s| < 1$ é dada por

$$a(s) := \sum_{n=1}^{\infty} s^n a_n.$$

Lema 2.8: A Equação (2.5) é equivalente seguinte relação entre a função geradora de r_n e t_n .

$$t(s) = \frac{1}{1 - r(s)}.$$

Para a demonstração deste resultado veja (FELLER, 1968, página 330). A versão equivalente deste resultado para operadores é a Proposição 2.10.

O exemplo a seguir é uma adaptação de (KAUTZSCH, 2011, Seção 4.1.2).

Exemplo 2.9: Suponha que uma lâmpada da marca Gouveia, instalada em um quarto é verificada todos os dias às 9h da manhã. Se estiver quebrada, é substituída por outra lâmpada nova e idêntica. O tempo utilizado para a substituição será, por simplificação, ignorado. Cada lâmpada tem uma expectativa de durabilidade que segue uma certa distribuição. Considera-se que a expectativa de durabilidade das lâmpadas desta marca são distribuídos de forma idêntica e independente. Isso implica que após a substituição

de uma lâmpada, o processo começa do zero. Desta maneira, define-se as probabilidades

$$\begin{aligned} t_k &:= \mu(\text{lâmpada está quebrada na manhã do dia } k), \\ r_k &:= \mu(\text{lâmpada é quebrada pela primeira vez na manhã do dia } k). \end{aligned}$$

Para determinar se em um determinado dia N , a lâmpada deve ser substituída existem algumas opções. Poderia ser a primeira substituição, que seria o que r_N representaria, ou poderia ter sido substituída pela última vez antes do dia N no dia $k \leq N$, que é representado por t_k . Após esta última substituição teria que ser substituída pela primeira vez novamente no dia N . Esta substituição *novamente pela primeira vez* é então representada por r_{N-k} . A soma da probabilidade destes eventos mutuamente exclusivos é t_N , a probabilidade de que uma substituição seja necessária no dia número N .

$$t_N = \sum_{k=0}^{N-1} r_{N-k} t_k.$$

◇

Dada uma sequência de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ com $\mathbb{P}\{\xi_1 = k\} = r_k$, $k = 1, 2, \dots$ e $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Definindo $a_0 = 1$ e para $n = 1, 2, \dots$, definimos

$$t_n = \sum_{k=1}^n r_k t_{n-k}.$$

O número t_n pode ser considerado como a probabilidade do evento

$$\bigcup_{k=1}^n \{\xi_1 + \dots + \xi_k = n\}.$$

Kolmogorov provou em (KOLMOGOROV, 1937) que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1/\vartheta$, onde $\vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} k r_k$. Naturalmente, surge a questão da velocidade de aproximação no qual a sequência se aproxima de seu limite. Em (ROGOZIN, 1974) foi demonstrado que se $\mathbb{E}\xi_1^\alpha < \infty$, então

$$t_n = \frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_1 \geq k+1\} + E_n,$$

onde

$$E_n = \begin{cases} o(n^{-2(\alpha-1)}), & 1 \leq \alpha < 2, \\ o(n^{-\alpha}), & \alpha \geq 2. \end{cases}$$

A Proposição 2.10 da próxima seção estabelece a relação desta teoria com a de operadores lineares, o que permitiu Sarig estabelecer um teorema análogo ao resultado clássico em teoria de renovação apresentado acima, veja também (GEL'FOND, 1964). Este teorema é um dos principais desta dissertação, o qual descreve o comportamento assintótico de sequências de operadores de renovação.

2.3 Análise Assintótica de Sequência de Operadores de Renovação

Nesta seção será discutido um resultado geral referente ao comportamento assintótico de sequências de operadores limitados agindo em um espaço de Banach. O enunciado preciso é apresentado no Teorema 2.11. Toda a seção será dedicada para a demonstração deste resultado, a qual segue o trabalho de (SARIG, 2002).

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação conservativa não singular. Dado $A \in \mathcal{F}$ de medida positiva finita, definem-se os operadores de renovação T_n e R_n por

$$T_n f = \chi_A \widehat{T}_\phi^n(f \chi_A) \quad \text{e} \quad R_n f = \chi_A \widehat{T}_\phi^n(f \chi_{[\varphi_A=n]}),$$

onde $\widehat{T} = \widehat{T}_\phi$ é o operador de transferência da transformação ϕ . Note que T_n e R_n podem ser vistos como operadores em $L^1(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ com $T_0 = I$ e $R_0 = 0$. É possível interpretar T_n como uma versão em linguagem de operadores do mapa de retorno a A e R_n como uma versão do mapa de primeiro retorno a A . Deste modo, sejam

$$R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n R_n \quad \text{e} \quad T(z) = I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T_n.$$

Proposição 2.10: *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação conservativa não singular e $A \in \mathcal{F}$ tal que $0 < \mu(A) < \infty$. Então, para todo $z \in \mathbb{D}$, a equação de renovação de T é dada por*

$$T(z) = (I - R(z))^{-1}.$$

Além disso, $R(1)$ é o operador de transferência da transformação induzida ϕ_A .

Demonstração. Para provar a proposição, basta verificar as seguintes igualdades

$$T_n = \sum_{k=1}^n R_k T_{n-k} \tag{2.6}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} T_k R_{n-k} \tag{2.7}$$

Para a igualdade (2.6), tomando $g \in L^\infty(A, \mathcal{F}, \mu_A)$ e $f \in L^1(A, \mathcal{F}, \mu_A)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\int g \sum_{k=1}^n R_k T_{n-k} f \, d\mu_A &= \int g \sum_{k=1}^n R_k (\chi_A \widehat{T}_\phi^{n-k}(f\chi_A)) \, d\mu_A \\
&= \int g \sum_{k=1}^n \chi_A \widehat{T}_\phi^k (\chi_A \widehat{T}_\phi^{n-k}(f\chi_A) \chi_{[\varphi_A=k]}) \, d\mu_A \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu(A)} \int g \chi_A \widehat{T}_\phi^k (\chi_{[\varphi_A=k]} \widehat{T}_\phi^{n-k}(f\chi_A)) \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu(A)} \int ((g\chi_A) \circ \phi^k) \cdot \chi_{[\varphi_A=k]} \widehat{T}_\phi^{n-k}(f\chi_A) \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu(A)} \int \left(((g\chi_A) \circ \phi^k) \chi_{[\varphi_A=k]} \right) \circ \phi^{n-k} \cdot f\chi_A \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu(A)} \int g\chi_A \circ \phi^n \cdot \chi_{[\varphi_A=k]} \circ \phi^{n-k} \cdot f\chi_A \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu(A)} \int g \circ \phi^n \cdot \left(\chi_A \circ \phi^n \cdot \chi_{[\varphi_A=k]} \circ \phi^{n-k} \cdot \chi_A \right) \cdot f \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu(A)} \int_{A_{nk}} g \circ \phi^n \cdot f \, d\mu,
\end{aligned}$$

onde $A_{nk} = A \cap \phi^{-n}(A) \cap \phi^{-(n-k)}([\varphi_A = k])$.

Note que, para todo n os conjuntos $A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nn}$ são dois a dois disjuntos e sua união sobre k é $A \cap \phi^{-n}(A)$. Consequentemente como f e g são suportadas em A , tem-se

$$\begin{aligned}
\int g \sum_{k=1}^n R_k T_{n-k} f \, d\mu_A &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu(A)} \int_{A_{nk}} g \circ \phi^n \cdot f \, d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(A)} \int (g\chi_A) \circ \phi^n \cdot f\chi_A \, d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(A)} \int g\chi_A \cdot \widehat{T}_\phi^n(f\chi_A) \, d\mu \\
&= \int g T_n f \, d\mu_A
\end{aligned}$$

como $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$ foram arbitrários, a igualdade (2.6) é verdadeira. Para igualdade (2.7) o procedimento é semelhante.

Uma vez que as duas desigualdades estão demonstradas, vamos verificar a

validade da equação de renovação. Seja $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
 R(z)T(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n R_n \sum_{n=0}^{\infty} z^n T_n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n R_n \sum_{n=0}^{\infty} z^n T_n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=1}^n R_k T_{n-k} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n T_n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n T_n - T_0 \\
 &= T(z) - I.
 \end{aligned}$$

De maneira similar chega-se em $T(z) - I = T(z)R(z)$,

$$\begin{aligned}
 T(z) - I &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n T_n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n-1} T_k R_{n-k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n T_n \sum_{n=0}^{\infty} z^n R_n \\
 &= T(z)R(z).
 \end{aligned}$$

Portanto $R(z)T(z) = T(z) - I = T(z)R(z)$ que equivale a $I = (I - R(z))T(z) = T(z)(I - R(z))$ concluindo que $T(z) = (I - R(z))^{-1}$.

Temos ainda que $R(1)$ é o operador de transferência de ϕ_A . Por definição, tem-se que $R(1) = \sum R_k f = \chi_A \hat{T}_\phi^k(f \chi_{[\varphi_A=k]})$. Suponha f uma função real positiva em L^1 , então

$$\begin{aligned}
\int |gR_k f| d\mu_A &= \frac{1}{\mu(A)} \int \left| g\chi_A \widehat{T}_\phi^k(f\chi_{[\varphi_A=k]}) \right| d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(A)} \int \left| g\chi_A \cdot \widehat{T}_\phi^k(f\chi_{[\varphi_A=k]}) \right| d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(A)} \int |g \circ \phi^k \cdot \chi_A \circ \phi^k \cdot f\chi_{[\varphi_A=k]}| d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(A)} \int |g \circ \phi^k \cdot \chi_{\phi^{-k}(A)} \cdot f\chi_{[\varphi_A=k]}| d\mu \\
&\leq \frac{1}{\mu(A)} \|g\|_\infty \int f\chi_{[\varphi_A=k]} d\mu,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade foi utilizado que $[\varphi_A = k] \subset \phi^{-k}(A)$. Note que a última integral define uma medida e que $\bigsqcup_{k \geq 1} [\varphi_A = k] = A$ a menos de um conjunto de medida nula., portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int f\chi_{[\varphi_A=k]} d\mu \leq \int f d\mu < \infty.$$

Se f é uma função complexa em L^1 , ou seja $f = u + iv$, então é possível decompor-la em funções positivas, $f = u^+ - u^- + iv^+ - iv^-$. Como o operador de transferência é linear e positivo é possível aplicar o processo anterior para cada uma das funções da decomposição de f e concluir que a soma das integrais é finito, deste modo satisfazendo as condições de (RUDIN, 1987, Teorema 1.38), o que permite concluir que,

$$\int g \sum_{k=1}^{\infty} \chi_A \widehat{T}_\phi^k(f\chi_{[\varphi_A=k]}) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int g\chi_A \cdot \widehat{T}_\phi^k(f\chi_{[\varphi_A=k]}) d\mu.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int g \sum_{k=1}^{\infty} R_k f d\mu_A &= \frac{1}{\mu(A)} \int g \sum_{k=1}^{\infty} \chi_A \widehat{T}_\phi^k(f\chi_{[\varphi_A=k]}) d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(A)} \sum_{k=1}^{\infty} \int g\chi_A \cdot \widehat{T}_\phi^k(f\chi_{[\varphi_A=k]}) d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(A)} \sum_{k=1}^{\infty} \int g \circ \phi^k \cdot \chi_{\phi^{-k}(A)} \cdot f\chi_{[\varphi_A=k]} d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(A)} \int \chi_A g \circ \phi_A f d\mu \\
&= \int g \circ \phi_A f d\mu_A,
\end{aligned}$$

■

Como já mencionado, este trabalho busca estudar a taxa de decaimento da correlação de uma aplicação $\phi : (X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{F}, \mu)$ que preserva medida. Sem hipóteses adicionais, esse decaimento pode ser arbitrariamente pequeno, por isso, deseja-se encontrar um espaço adequado para realizar este estudo. Além disso, existem exemplos (geralmente sistemas hiperbólicos não uniformes) em que o decaimento das correlações é mais lento que o exponencial. Obviamente, o operador de transferência para esses exemplos não pode ter uma lacuna espectral.

O teorema a seguir permite determinar o comportamento assintótico de $\hat{T}_\phi^n$ quando $\hat{T}_\phi$ não possui lacuna espectral, mas $\hat{T}_{\phi_A}^n$ possui. Note que o lado esquerdo equação de renovação $T(z) = (I - R(z))^{-1}$ contém informações sobre T_n , que por definição é quase igual ao operador de transferência. Já o lado direito, envolve $R(z)$ que é uma perturbação de $R(1) = \hat{T}_{\phi_A}$.

Deste modo, a lacuna espectral de $R(1)$, se existir, permite analisar $R(z)$. A questão é traduzir informações de $R(z)$ para informações em $T(z)$. O próximo teorema nos permite fazer isso.

Teorema 2.11: *Sejam T_n operadores lineares em um espaço de Banach $\mathcal{H}$ de modo que $T(z) = I + \sum z^n T_n$ converge em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Assuma que*

(1) *Equação de Renovação: Para todo $z \in \mathbb{D}$,*

$$T(z) = (I - R(z))^{-1},$$

onde

$$R(z) = \sum z^n R_n, \quad R_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad e \quad \sum \|R_n\| < \infty.$$

(2) *Lacuna Espectral: O espectro de $R(1)$ consiste de um autovalor simples isolado em 1 e de um subconjunto compacto de $\mathbb{D}$.*

(3) *Aperiodicidade: O raio espectral de $R(z)$ é estritamente menor que 1 para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{1\}$.*

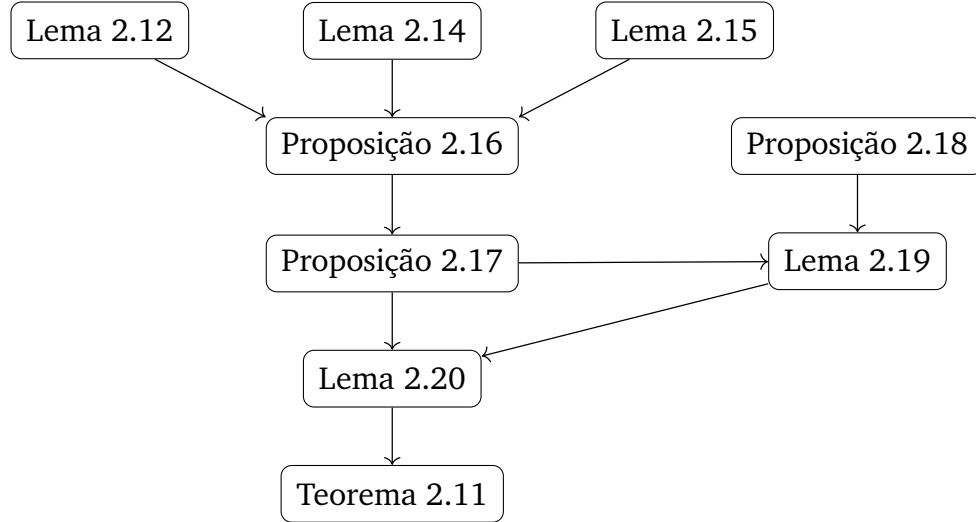
(4) *Cauda Polinomial: $\sum_{k>n} \|R_k\| = O(1/n^\beta)$ para algum $\beta > 2$.*

Seja P a autoprojeção de $R(1)$ em 1. Se $PR'(1)P \neq 0$, então para todo n

$$T_n = \frac{1}{\vartheta} P + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k + E_n,$$

onde ϑ é dado por $PR'(1)P = \vartheta P$, $P_n = \sum_{l>n} PR_l P$ e $E_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfaz $\|E_n\| = O(1/n^{\lfloor \beta \rfloor})$.

A fim de provar o Teorema 2.11, serão necessários alguns resultados, sendo essencial a demonstração de que $\sum \|T_n - T_{n-1}\|$ é somável, o que demandará certos lemas auxiliares. A demonstração do teorema acima encontra-se na página 85, sendo que a principal dependência entres os resultados auxiliares pode ser visualizada no fluxograma abaixo.



Lema 2.12: Sejam F_n vetores em um espaço de Banach B tais que $F(z) = \sum_{n \geq 1} z^n F_n$ converge em B para todo $|z| < 1$. Assuma que $F(z)$ é fortemente diferenciável em $\mathbb{D}$. Se $F \in C^{1,\alpha}(\mathbb{D})$ para algum $\alpha \in (0, 1)$, então $\|F_n\| = O(1/n^{1+\alpha})$.

Demonstração. Para a demonstração deste lema é necessário a seguinte afirmação, que pode ser encontrada em (ZYGmund; FEFFERMAN, 2002, página 45).

Afirmação 1: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua tal que $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e seja $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(\theta_1) - f(\theta_2)| : |\theta_1 - \theta_2| < \delta\}$ seu módulo de continuidade. Então os coeficientes de Fourier de f satisfazem

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \omega_f \left(\frac{\pi}{|n|} \right) \quad \forall n \neq 0.$$

Para todo $r \in (0, 1)$, tem-se que $\|F_n\| = o(1/r^n)$, pois $\sum r^n F_n$ converge. Seja $0 < r < 1$ e $\varphi \in B^*$ um funcional linear limitado com $\|\varphi\| = 1$. Definindo $g_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ por $g_r(\theta) = \varphi(F'(re^{i\theta}))$ e diferenciando em relação a z na fórmula de $F(z)$, tem-se

$$g_r(\theta) = \sum_{n \geq 1} n \varphi(F_n) r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}.$$

Para ver que a série acima converge absoluta e uniformemente, seja $r_* = \frac{r+1}{2}$, de modo que $0 < r < r_* < 1$. Como $\sum r_*^n F_n$ converge, existe M tal que $\|r_*^n F_n\| < M$ para

todo n . Assim,

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n \geq 1} n \varphi(F_n) r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} |n \varphi(F_n) r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}| \\
 &= \sum_{n \geq 1} n r^{n-1} |\varphi(F_n)| \cdot |e^{i(n-1)\theta}| \\
 &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{n r^n \|F_n\|}{r} \\
 &= \frac{1}{r} \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{r^n}{r_*^n} \right) r_*^n \|F_n\| \\
 &\leq \frac{1}{r} \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{r}{r_*} \right)^n M \\
 &= \frac{M}{r} \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{r}{r_*} \right)^n
 \end{aligned}$$

sendo que a última série converge pelo teste da razão. Note que

$$\widehat{g}_r(n) = (n+1)\varphi(F_{n+1})r^n.$$

Como $\|\varphi\| = 1$,

$$|g_r(\theta_1) - g_r(\theta_2)| = |\varphi(F'(re^{i\theta_1}) - F'(re^{i\theta_2}))| \leq \|F'(re^{i\theta_1}) - F'(re^{i\theta_2})\|$$

logo,

$$|g_r(\theta_1) - g_r(\theta_2)| \leq \|F'(re^{i\theta_1}) - F'(re^{i\theta_2})\| \leq Cr^\alpha |\theta_1 - \theta_2|^\alpha$$

onde C é a constante de Hölder, tal que $\|F'(z) - F'(w)\| \leq C|z - w|^\alpha$ para todo $z, w \in \mathbb{D}$. Portanto $\omega_{g_r}(\delta) \leq Cr^\alpha \delta^\alpha$, assim, pela Afirmação 1, para $n > 1$,

$$\varphi(F_n) = \frac{\widehat{g}_r(n-1)}{nr^{n-1}} \leq \frac{Cr^\alpha \pi^\alpha}{2(n-1)^\alpha nr^{n-1}} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \frac{C\pi^\alpha}{2(n-1)^\alpha n} \leq \frac{C\pi^\alpha}{2(n-1)^{\alpha+1}}$$

tomando o supremo sobre todos os funcionais lineares limitados φ com $\|\varphi\| = 1$, pelo Corolário 1.5, obtêm-se

$$\|F_n\| \leq \frac{C\pi^\alpha}{2(n-1)^{1+\alpha}} = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right).$$

■

Seja

$$S(z) = \frac{I - R(z)}{1 - z}. \quad (2.8)$$

Pela equação de renovação tem-se que

$$S(z)^{-1} = (1 - z)T(z), \quad (2.9)$$

sendo assim

$$\begin{aligned}
 S(z)^{-1} &= (1 - z) \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T_n \right) \\
 &= I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T_n - zI - \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1} T_n \\
 &= I + \sum_{n=1}^{\infty} (z^n - z^{n+1}) T_n - zT_0 \\
 &= I + [(z - z^2)T_1 + (z^2 - z^3)T_2 + \cdots + (z^n - z^{n+1})T_n + \cdots] + zT_0 \\
 &= I + z(T_1 - T_0) + z^2(T_2 - T_1) + \cdots + z^n(T_n - T_{n-1}) + \cdots \\
 &= I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n (T_n - T_{n-1}). \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Agora se deve mostrar que a função $S(z)^{-1} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{D})$, onde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Para isso o disco será dividido em dois conjuntos U_ε e V_ε para algum $\varepsilon > 0$ como apresentado na Figura 3.

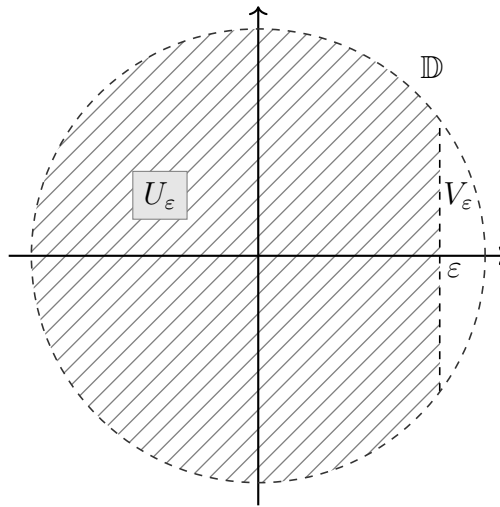


Figura 3 – Divisão do disco por U_ε e V_ε .

O Lema 2.14 se concentra em U_ε e o Lema 2.15 foca em V_ε . Para a prova do Lema 2.14, é útil recordar o seguinte resultado.

Lema 2.13 (Lema de Fekete): *Dada uma sequência $\{x_n\}$ de números reais, se para todo $n, m \in \mathbb{N}$ tem-se que $x_{n+m} \leq x_n + x_m$, isto é, a sequência é subaditiva, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$$

existe e é igual ao seu ínfimo, $\inf_{k \geq 1} \frac{x_k}{k}$. Este limite pode ser $-\infty$, mas se x_n for limitada inferiormente então o limite será não negativo.

Para uma demonstração do lema acima, veja (WALTERS, 1982, Teorema 4.9).

Lema 2.14: Se $U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{D} : \Re(z) < 1 - \varepsilon\}$, então $S(z)^{-1} \in C^{1,\alpha}(U_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$ e $0 < \alpha < 1$.

Demonstração. Note que a equação de renovação suposta como hipótese no Teorema 2.11 permite concluir que $R(z)$ é analítica em $\mathbb{D}$ e contínua em $\overline{\mathbb{D}}$. Com efeito, note primeiro que $R(z)$ converge em $\overline{\mathbb{D}}$. Definindo

$$\mathfrak{f}_n(z) = \sum_{k=1}^n z^k R_k,$$

como $\sum \|R_n\|$ converge, então para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para quaisquer $m > n > n_0$

$$\sum_{k=n+1}^m \|R_k\| < \varepsilon.$$

Assim, para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$ e quaisquer $m > n > n_0$, tem-se

$$\|\mathfrak{f}_m(z) - \mathfrak{f}_n(z)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m z^k R_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m |z^k| \|R_k\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|R_k\| < \varepsilon.$$

Portanto, a sequência $\{\mathfrak{f}_k(z)\}$ é de Cauchy e, pelo Lema 1.36, converge para $R(z)$. Deste modo, para $n > n_0$, tem-se que

$$\|R(z) - \mathfrak{f}_n(z)\| = \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{f}_m(z) - \mathfrak{f}_n(z) \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathfrak{f}_m(z) - \mathfrak{f}_n(z)\| \leq \varepsilon,$$

o que mostra que a sequência $\{\mathfrak{f}_n\}$ de somas parciais converge uniformemente em $\overline{\mathbb{D}}$. Como se trata de uma *série de potências*, tem-se que $R(z)$ é analítica em $\mathbb{D}$.

A demonstração da continuidade de $R(z)$ segue facilmente do fato de se tratar de uma série de potências. De fato, define-se

$$\mathfrak{g}_n(z) = R(z) - \mathfrak{f}_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} z^k R_k.$$

Como a série converge uniformemente em $\overline{\mathbb{D}}$, para todo ε existe um inteiro positivo n_ε tal que

$$\|\mathfrak{g}_{n_\varepsilon}(z)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Sendo $\mathfrak{f}_{n_\varepsilon}(z)$ contínuo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathfrak{f}_{n_\varepsilon}(z) - \mathfrak{f}_{n_\varepsilon}(w)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

sempre que $|z - w| < \delta$. Fixando $w \in \overline{\mathbb{D}}$, então para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$ com $|z - w| < \delta$, tem-se

$$\begin{aligned} \|R(z) - R(w)\| &= \|(\mathfrak{f}_{n_\varepsilon}(z) + \mathfrak{g}_{n_\varepsilon}(z)) - (\mathfrak{f}_{n_\varepsilon}(w) + \mathfrak{g}_{n_\varepsilon}(w))\| \\ &\leq \|\mathfrak{f}_{n_\varepsilon}(z) - \mathfrak{f}_{n_\varepsilon}(w)\| + \|\mathfrak{g}_{n_\varepsilon}(z)\| + \|\mathfrak{g}_{n_\varepsilon}(w)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Note agora que $\|R'\|_\infty = \sup_{z \in U_\varepsilon} \|R'\|$ e $\|R''\|_\infty = \sup_{z \in U_\varepsilon} \|R''\|$ são finitos. Para isto, deve-se observar que a série $\sum k^2 \|R_k\|$ converge. De fato, é possível reescrever esta série da seguinte maneira

$$\sum_{k \geq 1} k^2 \|R_k\| = \sum_{j \geq 1} [j^2 - (j-1)^2] \sum_{k \geq j} \|R_k\| = \sum_{j \geq 1} (2j-1) \sum_{k \geq j} \|R_k\|.$$

Como por hipótese $\sum_{k > n} \|R_k\| = O(1/n^\beta)$, existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{k > n} \|R_k\| < C \frac{1}{n^\beta} \quad \forall n.$$

Assim,

$$\sum_{j \geq 1} (2j-1) \sum_{k \geq j} \|R_k\| \leq \sum_{j \geq 1} (2j-1) \frac{C}{j^\beta} \leq 2C \sum_{j \geq 1} \frac{j}{j^\beta}.$$

Para $\beta > 2$, a série acima converge e deste modo a série $\sum k^2 \|R_k\|$ converge.

Seja $\rho(z)$ o raio $\mathcal{H}$ -espectral de $R(z)$ dado por

$$\log \rho(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|R(z)^n\|.$$

Como $\{\log \|R(z)^n\|\}$ é subaditivo, pelo Lema de Fekete (Lema 2.13) este limite é igual a $\inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \log \|R(z)^n\|$. Assim, como $\rho(z)$ é o ínfimo de funções contínuas, tem-se por (CHOQUET, 1966, Teorema 8.6) que $\rho(z)$ é semi-contínua superiormente e portanto por (CHOQUET, 1966, Teorema 10.1) atinge seu máximo em compactos. Então, pela suposição de aperiodicidade no Teorema 2.11, tem-se que

$$\max_{z \in \overline{U_\varepsilon}} \rho(z) < 1,$$

donde $\max \log \rho(z) < 0$ e assim $\|R(z)^n\|$ converge para 0. Deste modo, para todo $z \in \overline{U_\varepsilon}$, existe $n_z = n(z)$ tal que $\|R(z)^n\| < 1/2$ para todo $n \geq n_z$. Como $z \mapsto \|R(z)\|$ é contínua em $\overline{U_\varepsilon}$, existe $r = r(z)$ tal que $\|R(w)^{n_z}\| < 3/4$ para todo $w \in B_r(z)$. Deste modo, tem-se que

$$\overline{U_\varepsilon} \subseteq \bigcup_{z \in \overline{U_\varepsilon}} B_r(z).$$

Como $\overline{U_\varepsilon}$ é compacto, é possível tomar uma subcobertura finita, isto é, há $z_i \in \overline{U_\varepsilon}$ com $i \in \{1, \dots, k\}$, tais que

$$\overline{U_\varepsilon} \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{r_i}(z_i).$$

Tomando $N = \prod_{i \in \mathcal{H}} n_{z_i}$, tem-se que para todo $z \in \overline{U_\varepsilon}$, existe j tal que $z \in B_{r_j}(z_j)$ e

$$\|R(z)^N\| \leq \|R(z)^{n_j}\|^{N/n_j} \leq \frac{3}{4}.$$

Assim, como $\|R(z)\|_\infty = \sup_{z \in U_\varepsilon} \|R(z)\| < \infty$, dados $p, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = pN + r$, onde $0 \leq r \leq N - 1$, tem-se que

$$\begin{aligned} \|R(z)^n\| &\leq \|R(z)^N\|^p \|R(z)\|^r \\ &\leq C_1 \left(\frac{3}{4}\right)^p \\ &= C_1 \left(\frac{3}{4}\right)^{n/N} \left(\frac{4}{3}\right)^{r/N} \\ &\leq C_2 \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{1/N}\right)^n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|R(z)^n\| = O(\tau^n) \quad \text{uniformemente em } U_\varepsilon, \quad \text{onde } \tau = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{N}} \in (0, 1).$$

Deste modo, a soma $\sum R(z)^n$ converge em $\mathcal{H}$ para todo $z \in U_\varepsilon$ sendo seu limite igual a $(I - R(z))^{-1}$ neste conjunto. Portanto, recordando a definição 2.8, tem-se que

$$S(z)^{-1} = (1 - z) \sum_{n \geq 0} R(z)^n.$$

Aplicando a regra da derivação do produto, obtém-se a fórmula $(R^n)' = \sum_{k=0}^{n-1} R^k R' R^{(n-1)-k}$. Do fato que $\|R'\|_\infty < \infty$, tem-se

$$\|(R^n)'\|_\infty = O(n\tau^n).$$

Note que $(R^n)' \in C^{1,\alpha}$ para todo $\alpha \in (0, 1)$, isto segue facilmente da Desigualdade do Valor Médio (Teorema 1.7), pois $\|R\|_\infty, \|R'\|_\infty, \|R''\|_\infty < \infty$. Utilizando então a segunda desigualdade em (1.6) e que $\|R''\|_\infty < \infty$, de maneira similar ao anterior, tem-se

$$\text{Hold}_\alpha((R^n)') \leq \|(R^n)''\|_\infty = O(n^2\tau^n).$$

Portanto,

$$\|R^n\|_{1,\alpha} = \|R^n\|_\infty + \|(R^n)'\|_\infty + \frac{1}{2}\text{Hold}_\alpha((R^n)') = O(n^2\tau^n).$$

Segue que $\sum R(z)^n$ converge em $C^{1,\alpha}(U_\varepsilon)$. Pelo Lema 1.36, tem-se que o limite pertence ao conjunto $C^{1,\alpha}(U_\varepsilon)$ e deste modo $S(z)^{-1} \in C^{1,\alpha}(U_\varepsilon)$. ■

Lema 2.15: Se $V_\varepsilon = \{z \in \mathbb{D} : \Re(z) > 1 - \varepsilon\}$ então $S(z)^{-1} \in C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)$ para algum $0 < \alpha < 1$ e $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Definindo,

$$R_A(z) = R(1) + (z - 1)R'(1), \quad D_A(z) = \frac{R(z) - R_A(z)}{1 - z} \quad \text{e} \quad S_A(z) = \frac{I - R_A(z)}{1 - z}.$$

A prova deste lema está fundamentada na identidade

$$S(z)^{-1} = S_A(z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (D_A S_A^{-1})^k, \quad (2.11)$$

a qual pode ser obtida formalmente da seguinte maneira,

$$S(z) = S_A - D_A = (I - D_A S_A^{-1}) S_A,$$

invertendo o último termo, obtém-se a Equação (2.11).

Afirmção 1: $z \mapsto S_A(z)^{-1}$ possui uma extensão holomorfa em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para uma vizinhança de 1.

Demonstração. As hipóteses do Teorema 2.11 garantem que o espectro de $R(1)$ consiste de um subconjunto de $\{\lambda \in \mathbb{D} : |\lambda| \leq \eta_1\}$ para algum $\eta_1 \in (0, 1)$ e um autovalor simples isolado em 1 com autoprojção P . Fixando $\eta_{\text{pert}} \in (\eta_1, 1)$. Como $z \mapsto R_A(z)$ é holomorfa, pelos resultados discutidos na subseção 1.1.5, especialmente pelo Teorema 1.35, conclui-se que existem $\delta > 0$ e $P_A : B_\delta(1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\lambda_A : B_\delta(1) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas tais que

- $\lambda_A(z)$ é um autovalor simples de $R_A(z)$ com autoprojção $P_A(z)$;
- $|\lambda_A(z)| > \eta_{\text{pert}}$ e o resto do espectro de $R_A(z)$ está contido em $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \eta_{\text{pert}}\}$.

Derivando a igualdade $R_A P_A = \lambda_A P_A$ e aplicando P_A em ambos os lados, tem-se,

$$\begin{aligned} P_A R'_A P_A + P_A R_A P'_A &= P_A \lambda'_A P_A + P_A \lambda_A P'_A \\ &= \lambda'_A P_A + \lambda_A P_A P'_A. \end{aligned}$$

Como R_A comuta com P_A , tem-se que $P_A R_A P'_A = \lambda_A P_A P'_A$, então $P_A R'_A P_A = \lambda'_A P_A$. Aplicando em $z = 1$, tem-se $PR'(1)P = \lambda'_A(1)P$. Por hipótese $PR'(1)P \neq 0$, então $\vartheta := \lambda'_A(1) \neq 0$ e

$$\lambda_A(z) = 1 + \vartheta(z - 1) + o(|z - 1|) \quad \text{quando } z \rightarrow 1. \quad (2.12)$$

Deste modo, $\lambda_A(z) \neq 1$ para $z \neq 1$, $|z - 1| < \delta_0$ e $\delta_0 < \delta$ pequeno o suficiente. Fixado tal δ_0 , para $z \neq 1$ em $B_{\delta_0}(1)$, e definindo

$$G = \frac{1 - z}{1 - \lambda_A(z)} P_A(z) + (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} R_A(z)^n (I - P_A(z)),$$

formalmente, tem-se que $G = S_A(z)^{-1}$. De fato,

$$\begin{aligned} G \cdot S_A &= \frac{1}{1 - \lambda_A} (P_A - R_A P_A) + \sum_{n=0}^{\infty} R_A^n (I - P_A) - \sum_{n=0}^{\infty} R_A^n (I - P_A) R_A \\ &= \frac{1}{1 - \lambda_A} (P_A - \lambda_A P_A) + \sum_{n=0}^{\infty} (R_A^n - R_A^{n+1}) (I - P_A) \\ &= P_A + I - P_A = I. \end{aligned}$$

A igualdade $S_A \cdot G = I$ segue de maneira similar.

A soma $\sum R_A^n(I - P_A)$ é convergente em norma e é holomorfa em $B_\delta(1)$, pois

$$\begin{aligned}
 (R_A - \lambda_A P_A)^n &= (R_A - \lambda_A P_A)(R_A P_A)^{n-1} \\
 &= (R_A - R_A P_A)(R_A P_A)^{n-1} \\
 &= R_A(I - P_A)(R_A P_A)^{n-1} \\
 &= R_A(I - P_A)R_A(I - P_A)(R_A P_A)^{n-2} \\
 &= R_A^2(I - P_A)(R_A P_A)^{n-2} \\
 &= \vdots \\
 &= R_A^n(I - P_A),
 \end{aligned}$$

e $\rho(R_A - \lambda_A P_A) \leq \eta_{\text{pert}} < 1$. O termo $\frac{1-z}{1-\lambda_A} P_A$ pode ser estendido para uma função holomorfa em $B_{\delta_0}(1)$, pois a expansão descrita na Equação (2.12) mostra que o único zero de $1 - \lambda_A(z)$ em $B_{\delta_0}(1)$ é um zero simples em 1.

Deste modo, conclui-se que $z \mapsto S_A(z)^{-1}$ possui uma extensão holomorfa em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para uma vizinhança de 1, e consequentemente é $C^{1,\alpha}$ nesta vizinhança para todo $\alpha \in (0, 1)$.

□

Afirmção 2: $\|D_A(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq C_2|z - 1|$ para algum $C > 0$ e todo $z \in \mathbb{D}$, e existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $D_A(z) \in C^{1,\alpha}(\mathbb{D})$.

Demonstração. Da igualdade

$$\frac{z^n - 1}{1 - z} = - \sum_{k=0}^{n-1} z^k \quad (2.13)$$

é possível reescrever $D_A(z)$, da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
 D_A(z) &= \frac{R - R_A}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} \left(\sum_{n \geq 1} z^n R_n - R(1) - (z - 1)R'(1) \right) \\
 &= \frac{1}{1 - z} \left(\sum_{n \geq 1} z^n R_n - \sum_{n \geq 1} R_n \right) + R'(1) \\
 &= \frac{1}{1 - z} \left(\sum_{n \geq 1} (z^n - 1) R_n \right) + \sum_{n \geq 1} n R_n \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left(- \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right) R_n + \sum_{n \geq 1} n R_n \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (1 - z^k) \right] R_n \\
 &= (1 - z) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - z^k}{1 - z} \right) R_n
 \end{aligned}$$

Utilizando a Equação (2.13) e se $|z| < 1$, tem-se que

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - z^k}{1 - z} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} k < \frac{n^2}{2},$$

então $\|D_A(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq C_2|1 - z|$ onde $C_2 := \sum_{n \geq 1} n^2 \|R_n\| < \infty$.

Se $h_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - z^k)$, então $D_A(z) = \sum_{n \geq 1} h_n(z) R_n$. Deste modo, caso $|z| < 1$, tem-se que

$$|h_n(z)| \leq 2n, \quad |h'_n(z)| \leq \frac{n^2}{2} \quad \text{e} \quad |h''_n(z)| \leq \frac{n^3}{3},$$

onde para a terceira desigualdade foi utilizado que

$$|h''_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |(k-1)k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{6n(n-1)(2n-1)}{6} \leq \frac{n^3}{3}.$$

Pela Desigualdade do Valor Médio (Teorema 1.7), para todo $z, w \in \mathbb{D}$, $|h'_n(z) - h'_n(w)| \leq \min\{n^2, n^3|z - w|\}$. Fixando $\alpha \in (0, 1)$. Se $n^3|z - w| < 1$, então $|h'_n(z) - h'_n(w)| \leq n^3|z - w| \leq n^{3\alpha}|z - w|^\alpha$. Caso $n^3|z - w| \geq 1$, então $|h'_n(z) - h'_n(w)| \leq n^2 \leq n^{2+3\alpha}|z - w|^\alpha$. Em ambos os casos $\text{Hold}_\alpha(h'_n(z)R_n) \leq n^{2+3\alpha}\|R_n\|$, deste modo

$$\begin{aligned} \|h_n(z)R_n\|_{1,\alpha} &= \|h_n R_n\|_\infty + \|h'_n R_n\|_\infty + \frac{\text{Hold}_\alpha(h'_n R_n)}{2} \\ &\leq \left(2n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^{2+3\alpha}}{2}\right) \|R_n\| \\ &= O(n^{2+3\alpha}\|R_n\|). \end{aligned}$$

Como $\sum_{k > n} \|R_k\| = O(1/n^\beta)$, $\sum n^\gamma \|R_n\|$ converge para todo $\gamma < \beta$. Portanto, fixando α satisfazendo $0 < \alpha < \frac{\beta-2}{3}$, então $\sum \|h_n R_n\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{D})} < \infty$, assim $D_A = \sum h_n R_n \in C^{1,\alpha}(\mathbb{D})$. □

Afirmção 3: Existe ε tal que $\sum \|(D_A S_A^{-1})^k\|_{C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)}$ converge.

Demonstração. Pela Afirmção 1 existe ε_1 tal que S_A^{-1} é holomorfo em $B_{2\varepsilon_1}(1)$

e

$$M_1 := \sup_{z \in B_{2\varepsilon_1}(1)} \|S_A(z)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

Para todo $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \frac{1}{2C_2 M_1}\}$ e $z \in B_\varepsilon(1)$,

$$\|D_A(z)S_A(z)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < C_2 M_1 \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Além disso da identidade (1.7), tem-se

$$\begin{aligned}
\|(D_A S_A^{-1})^n\|_{C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)} &\leq \binom{n+2}{2} \|D_A S_A^{-1}\|_\infty^{n-2} \|D_A S_A^{-1}\|_{C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)}^2 \\
&< \frac{(n+1)(n+2)}{2} \frac{1}{2^{n-2}} \widetilde{M}_1^2 \\
&= O\left(\frac{n^2}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \|(D_A S_A^{-1})^k\|_{C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)} &= \|D_A S_A^{-1}\|_{C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)} + \sum_{k=2}^{\infty} \|(D_A S_A^{-1})^k\|_{C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)} \\
&\leq \widetilde{M}_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}
\end{aligned}$$

Segue que a série $\sum \|(D_A S_A^{-1})^k\|_{C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)}$ converge.

□

Como consequência da Afirmação 1 tem-se que $S_A(z)^{-1} \in C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)$ e da Afirmação 3 tem-se que $\sum (D_A S_A^{-1})^k \in C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)$, portanto a Equação (2.11) é válida e $S(z)^{-1} \in C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)$.

■

Temos agora condições de destacar um dos principais resultados necessários para a prova do Teorema 2.11, o qual fornece dados significativos sobre o comportamento assintótico dos operadores de renovação T_n .

Proposição 2.16: *Assumindo as hipóteses do Teorema 2.11, tem-se que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n - T_{n-1}\| < \infty.$$

Demonstração. Pela equação de renovação Equação (2.10), tem-se

$$S(z)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n (T_n - T_{n-1}).$$

Pelo Lema 2.15 sabe-se que existe um ε e $\alpha \in (0, 1)$ tal que $S(z)^{-1} \in C^{1,\alpha}(V_\varepsilon)$ e pelo Lema 2.14 é possível concluir que $S(z)^{-1} \in C^{1,\alpha}(U_{\varepsilon/2})$. Como $\mathbb{D} = V_\varepsilon \cup U_{\varepsilon/2}$ tem-se que $S(z)^{-1} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{D})$. Pelo Lema 2.12 tem-se que $\|T_n - T_{n-1}\| = O(1/n^{1+\alpha})$. Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n - T_{n-1}\| < \infty.$$

■

Outro resultado crucial para a demonstração do Teorema 2.11 é a seguinte proposição.

Proposição 2.17: *Se P é a autoprojeção de $R(1)$ em 1 e ϑ é dado por $PR'(1)P = \vartheta P$, então existe $R_B : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ com as seguintes propriedades:*

- (1) R_B é holomorfa, $R_B(1) = R(1)$ e $R'_B(1) = R'(1)$.
- (2) $\frac{R(1)-R_B}{1-z}$ e $\frac{1}{1-z} \left[\frac{R(1)-R_B}{1-z} - R'(1) \right]$ são polinômios em z .
- (3) $I - R_B(z)$ possui inversa limitada em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{1\}$.
- (4) para todo $z \in \mathbb{D}$, definindo

$$S_B(z) := \frac{I - R_B(z)}{1 - z},$$

vale que

$$S_B(z)^{-1} = \left(\frac{I - R_B(z)}{1 - z} \right)^{-1} = \frac{1}{\vartheta} P + (1 - z) \sum_{n \geq 0} z^n A_n,$$

onde A_n são operadores com $\|A_n\| = O(\kappa^n)$ para algum $0 < \kappa < 1$.

Demonstração. Pela Proposição 2.16 tem-se que $K := 1 + \sum_{n \geq 1} \|T_n - T_{n-1}\|$ é finito. Seja n_0 tal que $\sum_{n > n_0} n \|R_n\| < \frac{1}{2K}$. Definindo

$$\begin{aligned} R_B(z) &:= \sum_{n=1}^{n_0} z^n R_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} R_n + (z-1) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n R_n \\ &= R(1) + \sum_{n=1}^{n_0} (z^n - 1) R_n + (z-1) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n R_n \\ &= R(1) + (z-1) R'(1) + \sum_{n=1}^{n_0} [(z^n - 1) - n(z-1)] R_n \\ &= R_A(z) + \sum_{n=1}^{n_0} [(z^n - 1) - n(z-1)] R_n. \end{aligned}$$

Propriedade (1): Claramente R_B é holomorfa e $R_B(1) = R(1)$. Como

$$R'_B(z) = R'(1) + \sum_{n=1}^{n_0} [n z^{n-1} - n] R_n,$$

tem-se que $R'_B(1) = R'(1)$.

Propriedade (2): Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} \left[\frac{R(1) - R_B}{1-z} - R'(1) \right] &= \frac{1}{(1-z)^2} \left[- \sum_{n=1}^{n_0} [(z^n - 1) - n(z-1)] R_n \right] \\ &= - \sum_{n=2}^{n_0} \frac{z^n - nz + n - 1}{(1-z)^2} R_n \\ &= - \sum_{n=2}^{n_0} \left[\sum_{k=0}^{n-2} (n-1-k) z^k \right] R_n \end{aligned}$$

é um polinômio em z e de maneira similar segue que $\frac{R(1)-R_B}{1-z}$ também é um polinômio em z .

Propriedade (3): Sejam $F(z) := I + \sum_{n \geq 1} z^n (T_n - T_{n-1})$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ e $z_0 \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$. Seja $z_n \in \mathbb{D}$ uma sequência convergindo para z_0 . Como $F(z) = S(z)^{-1}$ em $\mathbb{D}$ a equação de renovação é válida em $\mathbb{D}$ e assim $F(z_n)(I - R(z_n)) = (1 - z_n)I$. Pela Proposição 2.16, $F(z)$ é contínua em $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ e como $\sum \|R_n\| < \infty$ é possível tomar o limite e obter

$$F(z_0)(I - R(z_0)) = (1 - z_0)I.$$

De maneira similar, tem-se que $(I - R(z_0))F(z_0) = (1 - z_0)I$, para qualquer $z_0 \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, portanto

$$F(z) = \left(\frac{I - R(z)}{1 - z} \right)^{-1} \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}.$$

Segue que para todo $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$,

$$\left\| \left(\frac{I - R(z)}{1 - z} \right)^{-1} \right\| \leq K.$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{R - R_B}{1 - z} &= \frac{1}{1 - z} \left[\sum_{n=1}^{\infty} z^n R_n - \sum_{n=1}^{\infty} R_n - (z - 1) \sum_{n=1}^{\infty} n R_n - \sum_{n=1}^{n_0} [(z^n - 1) - n(z - 1)] R_n \right] \\ &= \frac{1}{1 - z} \left[\sum_{n=1}^{\infty} [(z^n - 1) - n(z - 1)] R_n - \sum_{n=1}^{n_0} [(z^n - 1) - n(z - 1)] R_n \right] \\ &= \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{(z^n - 1) - n(z - 1)}{1 - z} R_n \\ &= \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (1 - z^k) \right) R_n, \end{aligned} \tag{2.14}$$

deste modo

$$\left\| \frac{R - R_B}{1 - z} \right\| \leq 2 \sum_{n > n_0} n \|R_n\| < \frac{1}{K}.$$

Portanto, $\|(R - R_B)(I - R)^{-1}\| < 1$. Da igualdade

$$\begin{aligned} I - R_B &= I - R + R - R_B \\ &= (I + (R - R_B)(I - R)^{-1})(I - R) \end{aligned}$$

obtêm-se a inversa dada por $(I - R)^{-1}[I + (R - R_B)(I - R)^{-1}]^{-1}$ que está bem definida e é limitada para todo $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$.

Propriedade (4): Tem-se que

$$S_B(z) = \frac{I - R_B(z)}{1 - z}.$$

Afirmção 1: Todo $z_0 \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ possui uma vizinhança onde $S_B(z)^{-1}$ é bem definido e holomorfa.

Demonstração. Seja $z_0 \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$. Pela propriedade anterior $S_B(z_0)^{-1}$ é limitado. Como $z \mapsto S_B(z)$ é contínuo em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, existe $\delta = \delta(z_0) > 0$ tal que

$$\|S_B(z) - S_B(z_0)\| < \frac{1}{2\|S_B(z_0)^{-1}\|}$$

sempre que $|z - z_0| < \delta$.

Deste modo, se $|z - z_0| < \delta$, então $S_B(z)$ é invertível, inclusive se $z \notin \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, como destacado na Figura 4.

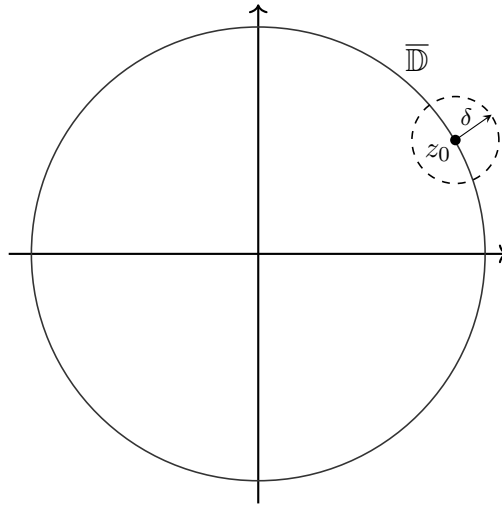


Figura 4 – A invertibilidade de S_B se dá inclusive fora do disco unitário.

Para verificar a invertibilidade de S_B , note que

$$\begin{aligned} S_B(z) &= [I + S_B(z)S_B(z_0)^{-1} - I]S_B(z_0) \\ &= [I + S_B(z)S_B(z_0)^{-1} - S_B(z_0)S_B(z_0)^{-1}]S_B(z_0) \\ &= [I + (S_B(z) - S_B(z_0))S_B(z_0)^{-1}]S_B(z_0), \end{aligned}$$

donde resulta

$$S_B(z)^{-1} = S_B(z_0)^{-1} [I + (S_B(z) - S_B(z_0))S_B(z_0)^{-1}]^{-1}.$$

Portanto para todo $z \in B_\delta(z_0)$ tem-se que $\|S_B(z)^{-1}\| \leq 2\|S_B(z_0)^{-1}\|$.

Pelo Teorema 1.27, segue que $z \mapsto S_B(z)^{-1}$ é holomorfa em $U = B_\delta(z_0)$. □

Afirmção 2: S_B^{-1} possui uma extensão holomorfa para alguma vizinhança V de $z = 1$, da forma $\frac{1}{\vartheta}P + (1 - z)A(z)$ onde $A(z)$ é holomorfa em V .

Demonstração. A prova segue os mesmos passos da Afirmção 1 do Lema 2.15. Deste modo

$$S_B(z)^{-1} = \frac{1 - z}{1 - \lambda_B(z)} P_B(z) + (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} R_B(z)^n [I - P_B(z)].$$

E assim,

$$S_B(z)^{-1} = \frac{1}{\vartheta}P + (1-z)A(z),$$

onde $A(z)$ é holomorfa em V , P é a autoprojeção de $R(1)$ em 1, e ϑ é dado por $\vartheta P = PR'(1)P$.

□

Afirmção 3: Para todo $z \in \mathbb{D}$, $S_B^{-1} = \frac{1}{\vartheta}P + (1-z) \sum_{n \geq 1} z^n A_n$ onde $\|A_n\| = O(\kappa^n)$ para algum $0 < \kappa < 1$.

Demonstração. Definindo

$$A(z) := \frac{1}{1-z} \left(S_B^{-1} - \frac{1}{\vartheta}P \right).$$

Pelas Afirmções 1 e 2, sabe-se que, para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$, existe uma vizinhança sobre a qual $A(z)$ é holomorfa. Portanto, da compacidade de $\overline{\mathbb{D}}$, existe $r_0 > 1$ tal que $A(z)$ é holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_0\}$. A Afirmção 3 segue do Corolário 1.15 com $\frac{1}{r_0} < \kappa < 1$.

□

Portanto, as quatro propriedades da proposição estão provadas.

■

Para toda sequência de números reais positivos $\{c_n\}_{n \geq 0}$ satisfazendo $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq 1$, define-se

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\{c_n\}) &:= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} z^n F_n : F_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ e } \|F_n\| = O(c_n) \right\} \\ \mathfrak{R}_{\infty} &:= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} z^n F_n : F_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ e } \sum \|F_n\| < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Por conveniência, algumas vezes será denotado $\mathfrak{R}(a_n)$ em vez de $\mathfrak{R}(\{a_n\})$ e, quando necessário, será escrito $\mathfrak{R}(\frac{1}{n^\alpha})$ para $\mathfrak{R}(\{\frac{1}{(n+1)^\alpha}\}_{n \geq 0})$.

A convolução de duas sequências $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$ é dada por $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$. Defina

$$\mathfrak{R}(\{a_n\}) * \mathfrak{R}(\{b_n\}) = \{F(z)G(z) : F(z) \in \mathfrak{R}(a_n), G(z) \in \mathfrak{R}(b_n)\}.$$

Sempre que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências não negativas tais que $\sum a_n, \sum b_n < \infty$, os elementos de $\mathfrak{R}(\{a_n\}) * \mathfrak{R}(\{b_n\})$ são dados por

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n F_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n G_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n H_n, \quad \text{onde } H_n = \sum_{i=0}^n F_i G_{n-i}.$$

Portanto $\mathfrak{R}(\{a_n\}) * \mathfrak{R}(\{b_n\}) = \mathfrak{R}(\{a_n\} * \{b_n\})$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \forall \kappa_1, \kappa_2 \in (0, 1), \quad \mathfrak{R}(\kappa_1^n) * \mathfrak{R}(\kappa_2^n) &\subseteq \mathfrak{R}(n \max\{\kappa_1, \kappa_2\}^n), \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 > 1, \quad \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right) * \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_2}}\right) &= \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\min\{\alpha_1, \alpha_2\}}}\right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

A inclusão da primeira linha e a inclusão $\supseteq$ da equação acima são imediatas. Para verificar a inclusão $\subseteq$ da segunda linha, denota-se

$$\left\{\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right\} * \left\{\frac{1}{n^{\alpha_2}}\right\} = \{c_n\}, \quad \text{onde} \quad c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{\alpha_1}} \frac{1}{(n+1-k)^{\alpha_2}}.$$

Seja $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Assim, note que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{\alpha_1}} \frac{1}{(n+1-k)^{\alpha_2}} &\leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)^\alpha}{(k+1)^\alpha (n+1-k)^\alpha} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)^\alpha} \sum_{0 \leq k \leq n/2} \frac{(n+1)^\alpha}{(k+1)^\alpha (n+1-k)^\alpha} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)^\alpha} \sum_{0 \leq k \leq n/2} \frac{(n+1)^\alpha}{(k+1)^\alpha (n+1-\frac{n}{2})^\alpha} \\ &\leq \frac{2^{\alpha+1}}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha}. \end{aligned}$$

Outra relação a destacar é

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right) * \mathfrak{R}(\kappa_2^n) = \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right). \quad (2.16)$$

Observe primeiro que, como $\mathfrak{R}(\kappa_2^n) \subset \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right)$, tem-se $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right) * \mathfrak{R}(\kappa_2^n) \subset \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right) * \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right)$. Por outro lado, $\frac{1}{n^{\alpha_1}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha_1}} \kappa_2^{n-1-k}$ mostra que $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right) \subset \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right) * \mathfrak{R}(\kappa_2^n)$.

Nota-se ainda a inclusão $\mathfrak{R}_\infty * \mathfrak{R}_\infty \subseteq \mathfrak{R}_\infty$ a qual é consequência de (RUDIN, 1976, Teorema 3.50).

Proposição 2.18: *Sejam F_n vetores em uma álgebra de Banach X tais que $F(z) = \sum z^n F_n$ e $F \in \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ para algum $\beta > 1$. Supondo ainda que, para todo $z \in \mathbb{D}$, $I + F(z)$ é invertível com $(I + F(z))^{-1} := G(z) = \sum z^n G_n$. Se $G(z) \in \mathfrak{R}_\infty$, então $G \in \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\lfloor \beta \rfloor}}\right)$ quando $\beta \neq 2$ e $G \in \mathfrak{R}\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$ caso $\beta = 2$.*

Demonstração. Sejam $p > \max\left\{\frac{1}{\beta-1}, 1\right\}$ e q seu conjugado, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Defina $c_n := \sum_{i+k=n} \|G_i\| \cdot \|G_k\|$.

Recordando (1.5) tem-se $[(I + F)^{-1}]' = -(I + F)^{-1}F'(I + F)^{-1}$. Analisando os respectivos coeficientes, obtém-se que

$$\begin{aligned} (n+1)\|G_{n+1}\| &\leq \sum_{i+j+k=n} \|G_i\| \cdot j\|F_j\| \cdot \|G_k\| = \sum_{j=0}^n j\|F_j\|c_{n-j} \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^n j^p \|F_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=0}^n c_{n-j}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} j^p \|F_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Por definição, $\sum c_n = (\sum \|G_i\|)^2$, então $\{c_n\}_{n \geq 0}$ é somável, de modo que $c_n \rightarrow 0$. Em particular, para n suficientemente grande, $c_n^q = c_n^{\frac{p}{p-1}} < c_n$, donde $\sum c_n^q < \infty$.

Por hipótese, $j\|F_j\| = O(\frac{1}{j^{\beta-1}})$ e $p > \frac{1}{\beta-1}$, de modo que $\sum j^p \|F_j\|^p < \infty$.

Portanto, $\{n\|G_n\|\}$ é limitada e conseqüentemente $\|G_n\| = O(\frac{1}{n})$, concluindo o resultado para $\beta \in (1, 2)$.

Se $\beta = 2$, tem-se para todo n

$$\begin{aligned} (n+1)\|G_{n+1}\| &\leq \sum_{0 \leq j < \frac{n}{2}} j\|F_j\|c_{n-j} + \sum_{\frac{n}{2} \leq j \leq n} j\|F_j\|c_{n-j} \\ &\leq \max_{0 \leq j < \frac{n}{2}} c_{n-j} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} j\|F_j\| + \max_{\frac{n}{2} \leq j \leq n} j\|F_j\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como $\{c_n\}$ é uma convolução de $\{\|G_n\|\}$ consigo mesmo, tem-se que, para alguma constante $\xi > 0$,

$$\begin{aligned} c_n &\leq \xi \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(n+1-k)} = \xi \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n+1-k} \right) \\ &= \frac{\xi}{n+2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1-k} \right) = \frac{2\xi}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Recorde que as somas parciais da série harmônica $\{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\}$ são da ordem $\{\ln n\}$, no sentido que a razão entre os respectivos termos das sequências tende a 1, o que é usualmente denotado por $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \sim \ln(n)$. Com isso, a desigualdade anterior fornece que

$$c_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Reavaliando a Equação (2.17) munido destas informações assintóticas, conclui-se que

$$\|G_n\| = \frac{1}{n} \left[O\left(\frac{\ln n}{n} \ln n\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).$$

Seja agora $\beta > 2$. Similarmente ao raciocínio para obter a Equação (2.17), deduz-se que para todo n

$$(n+1)\|G_{n+1}\| \leq \max_{0 \leq j < \frac{n}{2}} c_{n-j} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j\|F_j\| + \max_{\frac{n}{2} \leq j \leq n} j\|F_j\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \quad (2.18)$$

Como $\sum \|G_n\| < \infty$, é imediato que

$$\|G_n\| = O\left(\frac{1}{n^i}\right),$$

para algum i inteiro positivo. Isto implica que

$$\max \left\{ \|G_k\| : \frac{n}{2} \leq k \leq n \right\} = O\left(\frac{1}{n^i}\right)$$

e como $c_n = \sum_{k+j=n} \|G_k\| \cdot \|G_j\| \leq 2 \max \left\{ \|G_k\| : \frac{n}{2} \leq k \leq n \right\} \sum \|G_j\|$, tem-se

$$c_n = O\left(\frac{1}{n^i}\right).$$

Retomando a Equação (2.18), conclui-se que

$$\|G_n\| = \frac{1}{n} \left(O\left(\frac{1}{n^i}\right) + O\left(\frac{1}{n^{\beta-1}}\right) \right) = O\left(\frac{1}{n^{\min\{i+1, \beta\}}}\right).$$

Enquanto ocorrer $i+l < \beta$ para algum inteiro positivo l , pode-se repetir esse procedimento partindo de

$$\|G_n\| = O\left(\frac{1}{n^l}\right),$$

com $l = i + l$, e obtendo

$$\|G_n\| = O\left(\frac{1}{n^{\min\{l+1, \beta\}}}\right).$$

Isto nos garante que de fato

$$\|G_n\| = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

■

Lema 2.19: $S(z)^{-1} \in \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{[\beta]}}\right)$ com $\beta > 2$.

Demonstração. Note que é possível reescrever S^{-1} em $\mathbb{D}$ da seguinte forma

$$S^{-1} = S_B^{-1} [I + (S - S_B)S_B^{-1}]^{-1}.$$

Para isso, recorde que, pela Propriedade (4) da Proposição 2.17, S_B é invertível. Como se pode escrever

$$I + (S - S_B)S_B^{-1} = SS_B^{-1},$$

a igualdade acima segue da invertibilidade de S pelos Lema 2.14 e Lema 2.15.

Pela Propriedade (4) da Proposição 2.17, tem-se que $S_B^{-1} \in \mathfrak{R}(\kappa^n)$ para algum $0 < \kappa < 1$ e consequentemente $S_B^{-1} \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^{\lfloor \beta \rfloor}})$. Deste modo, é suficiente provar que $[I + (S - S_B)S_B^{-1}]^{-1} \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^{\lfloor \beta \rfloor}})$, pois pela Equação (2.15) tem-se $S^{-1} \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^{\lfloor \beta \rfloor}}) * \mathfrak{R}(\frac{1}{n^{\lfloor \beta \rfloor}}) = \mathfrak{R}(\frac{1}{n^{\lfloor \beta \rfloor}})$.

Note que o termo $S - S_B \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^\beta})$. De fato, das respectivas definições:

$$S(z) - S_B(z) = \frac{R(1) - R(z)}{1 - z} - \frac{R(1) - R_B(z)}{1 - z}. \quad (2.19)$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{R(1) - R(z)}{1 - z} &= \frac{1}{1 - z} \left(\sum_{k \geq 1} R_k - \sum_{k \geq 1} z^k R_k \right) \\ &= \frac{1}{1 - z} \left(\sum_{k \geq 1} (1 - z^k) R_k \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{n=0}^{k-1} z^n \right) R_k \\ &= \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{k \geq n+1} R_k, \end{aligned} \quad (2.20)$$

ou seja, trata-se de um elemento de $\mathfrak{R}(\frac{1}{n^\beta})$, pois por hipótese $\sum_{k > n} \|R_k\| = O(1/n^\beta)$. Além disso, pela Propriedade (2) da Proposição 2.17, a segunda parcela do termo à esquerda da Equação (2.19) é um polinômio em z , tem-se que $S(z) - S_B(z) \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^\beta})$.

Agora note que $[I + (S - S_B)S_B^{-1}]^{-1} \in \mathfrak{R}_\infty$. Isso porque, pela Equação (2.10), uma maneira equivalente de enunciar a Proposição 2.16 seria $S^{-1} \in \mathfrak{R}_\infty$, donde se tem

$$\begin{aligned} [I + (S - S_B)S_B^{-1}]^{-1} &= S_B S^{-1} \\ &= I + (S_B - S)S^{-1} \in \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^\beta}\right) * \mathfrak{R}_\infty \subseteq \mathfrak{R}_\infty. \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração do lema, aplica-se a Proposição 2.18 para $F(z) = (S(z) - S_B(z))S_B^{-1}(z)$.

■

Note que pela Equação (2.9) é possível reescrever $T(z)$ como

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{1 - z} S^{-1} = \frac{1}{1 - z} S_B^{-1} [S_B S^{-1}] \\ &= \frac{1}{1 - z} S_B^{-1} [I + (I - S S_B^{-1}) S_B S^{-1}] \\ &= \frac{1}{1 - z} S_B^{-1} [I + (I - S S_B^{-1})(I + S_B S^{-1} - I)] \\ &= \frac{1}{1 - z} S_B^{-1} [I + I - S S_B^{-1} + (I - S S_B^{-1})(S_B S^{-1} - I)] \\ &= \frac{1}{1 - z} S_B^{-1} [I + (S_B - S)S_B^{-1} + (S_B - S)S_B^{-1}(S_B - S)S^{-1}]. \end{aligned}$$

Deste modo, tem-se a seguinte expressão

$$T(z) = \frac{1}{1-z} S_B^{-1} + \frac{1}{1-z} S_B^{-1} (S_B - S) S_B^{-1} + \frac{1}{1-z} [S_B^{-1} (S_B - S)]^2 S^{-1}. \quad (2.21)$$

O próximo lema irá analisar cada termo da soma.

Lema 2.20: *Assumindo as hipóteses do Teorema 2.11, se P é a autoprojção de $R(1)$ em 1, e ϑ é dado por $PR'(1)P = \vartheta P$, então têm-se os seguintes resultados*

(1)

$$\frac{1}{1-z} S_B^{-1} = \frac{1}{\vartheta} \sum_{n \geq 0} z^n (P + \varepsilon_n),$$

onde $\|\varepsilon_n\| = O(\kappa^n)$ para algum $0 < \kappa < 1$.

(2)

$$\frac{1}{1-z} S_B^{-1} (S_B - S) S_B^{-1} = \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{n \geq 0} z^n \left(\sum_{k > n} P_k + \varepsilon'_n \right),$$

onde $\|\varepsilon'_n\| = O(1/n^\beta)$ e $P_n = \sum_{l > n} PR_l P$.

(3)

$$\frac{1}{1-z} [S_B^{-1} (S_B - S)]^2 S^{-1} = \sum_{n \geq 0} z^n J_n,$$

onde $\|J_n\| = O(1/n^{\lfloor \beta \rfloor})$.

Demonstração. Item (1): Pela Propriedade (4) da Proposição 2.17

$$S_B^{-1} = \frac{1}{\vartheta} P + (1-z) \sum_{n \geq 0} z^n A_n, \quad (2.22)$$

com $\|A_n\| = O(\kappa^n)$ para algum $0 < \kappa < 1$. Assim, vale que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} S_B^{-1} &= \frac{1}{\vartheta} \sum_{n \geq 0} z^n P + \sum_{n \geq 0} z^n A_n \\ &= \frac{1}{\vartheta} \sum_{n \geq 0} z^n (P + \varepsilon_n), \quad \text{onde } \varepsilon_n = \vartheta A_n. \end{aligned}$$

Item (2): Segue da Equação (2.19) que

$$\frac{1}{1-z} S_B^{-1} (S_B - S) S_B^{-1} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2,$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &:= \frac{1}{1-z} S_B^{-1} \left(\frac{R(1) - R_B}{1-z} - R'(1) \right) S_B^{-1}, \\ \mathcal{I}_2 &:= \frac{1}{1-z} S_B^{-1} \left(R'(1) - \frac{R(1) - R}{1-z} \right) S_B^{-1}. \end{aligned}$$

Análise de $\mathcal{I}_1$: Pela Propriedade (2) da Proposição 2.17, tem-se que $\frac{1}{1-z} \left[\frac{R(1)-R_B}{1-z} - R'(1) \right]$ é um polinômio. Pela Propriedade (4) da mesma Proposição, $S_B^{-1} \in \mathfrak{R}(\kappa^n)$ para algum $0 < \kappa < 1$. Portanto, por (2.15), $\mathcal{I}_1 \in \mathfrak{R}(n\kappa^n)$, ou seja,

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n, \quad \text{com } \|a_n\| = O(n\kappa^n).$$

Análise de $\mathcal{I}_2$: Seja $F(z) = R'(1) - \frac{R(1)-R(z)}{1-z}$. Durante a prova do Lema 2.19, foi mostrado que o segundo termo é um elemento de $\mathfrak{R}(\frac{1}{n^\beta})$. Consequentemente, $F \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^\beta})$. Da Equação (2.22) é possível reescrever $\mathcal{I}_2$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \frac{1}{1-z} \left[\frac{1}{\vartheta} P + (1-z) \sum_{n \geq 0} z^n A_n \right] F \left[\frac{1}{\vartheta} P + (1-z) \sum_{n \geq 0} z^n A_n \right] \\ &= \frac{1}{\vartheta^2} P \left(\frac{F}{1-z} \right) P + \underbrace{\frac{1}{\vartheta} P F A + \frac{1}{\vartheta} A F P + (1-z) A F A}_{(*)}, \quad \text{com } A = \sum_{n \geq 0} z^n A_n. \end{aligned}$$

Segue que $(*) \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^\beta})$, pois por (2.16) $\mathfrak{R}(\frac{1}{n^\beta}) * \mathfrak{R}(\kappa^n) = \mathfrak{R}(\frac{1}{n^\beta})$. Agora, decorre da Equação (2.20) que

$$\begin{aligned} P F(z) P &= P R'(1) P - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} P R_k P \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k P R_k P - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} P R_k P \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-z^n) \sum_{k=n+1}^{\infty} P R_k P. \end{aligned}$$

Portanto, pela Equação (2.13),

$$\frac{1}{\vartheta^2} P \left(\frac{F}{1-z} \right) P = \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} P R_l P \right)$$

e assim

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} P R_l P \right) + \sum_{n=0}^{\infty} z^n b_n, \quad \text{com } \|b_n\| = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Deste modo, como consequência das análises de $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} S_B^{-1} (S_B - S) S_B^{-1} &= \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} P R_l P \right) + \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n b_n \\ &= \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} P R_l P + \vartheta^2 (a_n + b_n) \right) \\ &= \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} P_k + \varepsilon'_n \right), \end{aligned}$$

onde

$$P_k = \sum_{l=k+1}^{\infty} P R_l P \quad \text{e} \quad \varepsilon'_n = \vartheta^2(a_n + b_n),$$

com $\|\varepsilon'_n\| = O(n\kappa^n) + O(\frac{1}{n^\beta}) = O(\frac{1}{n^\beta})$, o que conclui o Item 2.

Item (3): Seja $G = S_B^{-1}(S_B - S)$. Novamente, sabe-se que $S_B^{-1} \in \mathfrak{R}(\kappa^n)$ e durante a prova do Lema 2.19 foi mostrado que $S_B - S \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^\beta})$. Portanto,

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n G_n, \quad \|G_n\| = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Além disso, $G(1) = \sum G_n = 0$. De fato como $S_B^{-1} \in \mathfrak{R}_\infty$, então existe $M > 0$ tal que $\|S_B(z)^{-1}\| < M$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Portanto, recordando (2.19), pela Equação (2.14), tem-se que para todo $z \in \mathbb{D}$

$$\|G(z)\| \leq M \|S_B(z) - S(z)\| = M \left\| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (1 - z^k) \right) R_n \right\|.$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - z)^k &= (1 - z) + (1 - z^2) + \cdots + (1 - z^{n-1}) \\ &= n - (1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}). \end{aligned}$$

Logo

$$\|G(z)\| \leq M \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1 + z + \cdots + z^{n-1}}{n} \right| \cdot n \|R_n\| \xrightarrow{z \rightarrow 1} 0,$$

onde a somabilidade de $\sum n \|R_n\|$ é usada para inverter a ordem entre o limite e o somatório. Segue que $\sum G_n = 0$. Deste modo, tem-se

$$\frac{G(z)}{1 - z} = \frac{G(z) - G(1)}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n - 1}{1 - z} G_n = - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k>n} G_k \in \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n^{\beta-1}}\right),$$

visto que

$$\sum_{k>n} \frac{1}{n^\beta} \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^\beta} dx = \frac{1}{(\beta - 1)n^{\beta-1}}.$$

Claramente $G'(z) \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^{\beta-1}})$. Pelo Lema 2.19, sabe-se que $S(z)^{-1} \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^{\lfloor \beta \rfloor}})$, donde resulta $[S^{-1}(z)]' \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^{\lfloor \beta \rfloor - 1}})$.

Derivando agora $J := \frac{1}{1-z} G^2 S^{-1}$, tem-se

$$\begin{aligned} J' &= \frac{1}{(1-z)^2} G^2 S^{-1} + \frac{1}{1-z} (GG' + G'G) S^{-1} + \frac{1}{1-z} G^2 (S^{-1})' \\ &= \left(\frac{G}{1-z} \right)^2 S^{-1} + \left[\left(\frac{G}{1-z} \right) G' + G' \left(\frac{G}{1-z} \right) \right] S^{-1} + G \left(\frac{G}{1-z} \right) (S^{-1})'. \end{aligned}$$

Pelos fatos antes assinalados, utilizando (2.15), conclui-se que $J' \in \mathfrak{R}(\frac{1}{n^{\lfloor \beta \rfloor - 1}})$, o que implica $\|J_n\| = O(\frac{1}{n^{\lfloor \beta \rfloor}})$.

■

Demonstração do Teorema 2.11. Relembrando da Equação (2.21),

$$T(z) = \frac{1}{1-z} S_B^{-1} + \frac{1}{1-z} S_B^{-1} (S_B - S) S_B^{-1} + \frac{1}{1-z} [S_B^{-1} (S_B - S)]^2 S^{-1},$$

e utilizando o Lema 2.20, tem-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned} I + \sum_{n \geq 1} z^n T_n &= T = \frac{1}{\vartheta} \sum_{n \geq 0} z^n (P + \varepsilon_n) + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{n \geq 0} z^n \left(\sum_{k > n} P_k + \varepsilon'_n \right) + \sum_{n \geq 0} z^n J_n \\ &= \sum_{n \geq 0} z^n \left(\frac{1}{\vartheta} P + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{k > n} P_k + \frac{1}{\vartheta} \varepsilon_n + \frac{1}{\vartheta^2} \varepsilon'_n + J_n \right) \\ &= I + \sum_{n \geq 1} z^n \left(\frac{1}{\vartheta} P + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{k > n} P_k + E_n \right). \end{aligned}$$

Decorre que

$$T_n = \frac{1}{\vartheta} P + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{k > n} P_k + E_n \quad \text{e} \quad E_n = \frac{1}{\vartheta} \varepsilon_n + \frac{1}{\vartheta^2} \varepsilon'_n + J_n,$$

com $\|E_n\| = O(1/n^{\lfloor \beta \rfloor})$.

■

2.4 Aplicação às Iteradas do Operador de Transferência

Esta seção é dedicada ao estudo do decaimento de correlações de estados de equilíbrio no contexto de aplicações markovianas. Ao aplicar o resultado principal da seção anterior, será possível obter cotas inferiores subexponenciais para funções de correlação. A expressão rigorosa da consequência desta aplicação está registrada no enunciado do Teorema 2.23 devido a (SARIG, 2002).

Da Proposição 2.7, sabe-se que para mapas de Markov o operador de transferência associado a m é da forma

$$\widehat{T}_\phi f(x) = \sum_{\phi(y)=x} J_m(y) f(y), \quad \text{onde} \quad J_m = \frac{dm}{dm \circ \phi}. \quad (2.23)$$

Definição 2.21: Seja ϕ uma transformação não singular em um espaço de medida σ -finito $(X, \mathcal{F}, \mu)$. A transformação ϕ é exata se para todo $A \in \bigcap_{n \geq 0} \phi^{-n} \mathcal{F}$ tem-se que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$.

Teorema 2.22: Suponha que $(X, \mathcal{F}, m, \phi, \alpha)$ é um mapa de Markov topologicamente mixing, que μ é uma medida não singular a qual é finita em cilindros e que $\ln J_\mu$ possui (ϕ, α) -variação somável. Se μ é conservativa, então μ é exata.

Para a demonstração deste resultado, veja (SARIG, 2009, Teorema 2.5).

Dado um conjunto a da partição α , define-se o tempo de primeiro retorno por

$$\varphi_a(x) := \chi_{[a]_\alpha}(x) \inf \{n \geq 1 : \phi^n(x) \in [a]_\alpha\},$$

não se excluindo, a priori, o valor $+\infty$.

Se ϕ é uma aplicação conservativa, então o mapa induzido $\phi_a : a \rightarrow a$ dado por $\phi_a(x) = \phi^{\varphi_a(x)}$ m-q.t.p. $x \in a$ é um mapa de Markov quando equipado com a partição

$$\alpha_a := \{[a, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, a]_\alpha : \xi_i \in \alpha, \xi_i \neq a\} \setminus \{\emptyset\}.$$

Aqui naturalmente consideramos $\mathcal{F}_a$ como o completamento da σ -álgebra gerada por

$$\{\phi_a^{-n}(b_a) : b_a \in \alpha_a, n \geq 0\},$$

além disso tomamos a medida induzida por a ,

$$m_a(E) = m(E|a) \quad \forall E \in \mathcal{F},$$

restringindo-a a $\mathcal{F}_a$. Em particular, o operador de transferência associado a m_a é

$$\hat{T}_{\phi_a} f(x) = \sum_{\phi_a(y)=x} J_{m_a}(y) f(y), \quad \text{onde} \quad J_{m_a} = \frac{dm_a}{dm_a \circ \phi_a}.$$

Seja $[\cdot]_a = [\cdot]_{\alpha_a}$ o cilindro com respeito a (ϕ_a, α_a) . Para dois elementos distintos $x, y \in \bigcup \alpha_a$, considere o **tempo de separação** de x e y dado por

$$s(x, y) := \sup \{n \geq 0 : x, y \in [b_0, \dots, b_{n-1}]_a, b_0, \dots, b_{n-1} \in \alpha_a\}.$$

Assim, $s(x, y)$ é o comprimento do maior cilindro (com respeito a α_a) contendo x e y e indica quando os retornos ao conjunto a se disassociam. Note que, para quase todos x e y , $s(x, y)$ é finito.

Dada $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ limitada e (ϕ_a, α_a) -localmente holderiana com respeito ao parâmetro $\theta \in (0, 1)$ fixado, seja

$$\text{Hold}_a(f) := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\theta^{s(x, y)}} \right\},$$

onde o supremo é tomado sobre todos os diferentes $x, y \in [a]$ tais que $\phi^i(x), \phi^j(y) \in [a]$ para infinitos i e j . O conjunto das aplicações f para as quais $\text{Hold}_a(f) < \infty$ será denotado por $\mathcal{H}_a$. Define-se sobre este conjunto a norma

$$\|f\|_{\mathcal{H}_a} := \|f\|_\infty + \text{Hold}_a(f).$$

O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.23: *Seja $(X, \mathcal{F}, m, \phi, \alpha)$ um mapa de Markov irredutível e conservativo em um espaço de probabilidade. Suponha que $\ln J_{m_a}$ é (ϕ_a, α_a) -localmente holderiana para algum $a \in \alpha$. Assuma também que*

$$\text{mdc} \left\{ \varphi_a(x) - \varphi_a(y) : x, y \in \bigcup \alpha_a \right\} = 1$$

e $m([\varphi_a > n]) = O(\frac{1}{n^\beta})$, onde $\beta > 2$. Então existem $\theta \in (0, 1), C > 0$ tais que, para quaisquer f, g integráveis suportadas em $[a]_\alpha$, com $g \in L^\infty$ e $f \in \mathcal{H}_\alpha$, vale

$$\left| \text{Cor}(f, g \circ \phi^n) - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} m[\varphi_a > k] \right) \int f dm \int g dm \right| \leq \frac{C}{n^{\lfloor \beta \rfloor}} \|g\|_\infty \|f\|_{\mathcal{H}_\alpha}.$$

A demonstração do teorema acima se encontra na página 90. Note que pela Proposição 1.67, é suficiente provar este teorema para o caso em que (X, ϕ) é um *shift* topológico de Markov.

Note que, por hipótese,

$$\text{mdc}\{\varphi_a(x) - \varphi_a(y) : 0 < \varphi_a(x), \varphi_a(y) < \infty\} = 1,$$

então $\text{mdc}\{\varphi_a(x) : 0 < \varphi_a(x) < \infty\} = 1$. Junto com a suposição de irredutibilidade, isto implica, por intermédio do Teorema de Schur (WILF, 2005, Teorema 3.24), que para qualquer $b \in S$ existe uma constante N_{ab} tal que, para todo $n \geq N_{ab}$, $[a]_\alpha \cap \phi^{-n}([b]_\alpha) \neq \emptyset$, ou equivalentemente que (X, ϕ) é topologicamente mixing.

A transformação induzida $\phi_a = \phi^{\varphi_a}$ sobre

$$A = \{x \in a : \phi^i(x) \in a \text{ para infinitas iteradas } i\}$$

é conjugada a um *shift* topológico de Markov e pode ser codificado simbolicamente como segue. Sejam

$$\overline{S} := \{[a, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}]_\alpha : \emptyset \neq [a, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, a]_\alpha \in \alpha_a, n \geq 1\},$$

$\overline{X} := \overline{S}^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ e $\sigma : \overline{X} \rightarrow \overline{X}$ o *shift* à esquerda. O *shift* topológico de Markov $(\overline{X}, \sigma)$ é a representação simbólica natural da transformação induzida (A, ϕ_a) . De fato, dado $(\overline{b}_0, \overline{b}_1, \overline{b}_2, \dots) \in \overline{X}$, onde $\overline{b}_i = [a, \xi_1^i, \dots, \xi_{n_i-1}^i]_\alpha \in \overline{S}$, considere a aplicação $\pi : \overline{X} \rightarrow A$ definida q.t.p. por

$$\pi(\overline{b}_0, \overline{b}_1, \dots) := \pi^{-1}(a, \xi_1^0, \dots, \xi_{n_0-1}^0, a, \xi_1^1, \dots, \xi_{n_1-1}^1, a, \xi_1^2, \dots),$$

é fácil ver que $\phi^{\varphi_a} \circ \pi = \pi \circ \sigma$.

Sejam m uma medida de probabilidade como no Teorema 2.23 e a um conjunto da partição tal que $\ln J_{m_a}$ é (ϕ_a, α_a) -localmente holderiana com parâmetro $\theta \in (0, 1)$. Note que da Equação (2.4) tem-se que

$$\ln J_{m_a} = \sum_{i=0}^{\varphi_a-1} \ln J_m \circ \phi^i.$$

Além disso o fato de $\ln J_{m_a}$ ser (ϕ_a, α_a) -localmente holderiana é equivalente a dizer que

$$\left(\sum_{i=0}^{\varphi_a-1} \ln J_m \circ \phi^i \right) \circ \bar{\pi}$$

é $(\sigma, \bar{\alpha})$ -localmente holderiana, onde $\bar{\alpha} = ([\bar{b}]_{\bar{S}} : \bar{b} \in \bar{S})$. Nesta notação, tem-se

$$\text{Hold}_a(f) := \text{Lip}_\theta(f \circ \bar{\pi}), \quad \text{onde} \quad \text{Lip}_\theta(F) := \sup_{\bar{x} \neq \bar{y}} \left\{ \frac{|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|}{\theta^{\min\{i: \bar{x}_i \neq \bar{y}_i\}}} \right\}.$$

Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, $m([a]_\alpha \setminus \bar{\pi}(\bar{X})) = 0$. Portanto, para o propósito deste trabalho, é possível redefinir $\mathcal{H}_a$ como sendo o espaço de Banach

$$\mathcal{H}_a := \{f : \bar{\pi}(\bar{X}) \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{\mathcal{H}_a} := \|f\|_\infty + \text{Lip}_\theta(f \circ \bar{\pi}) < \infty\}.$$

Denote a n -ésima soma ergódica (ou soma de Birkhoff) de $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$s_n(\psi)(x) = \psi(x) + (\psi \circ \phi)(x) + \cdots + (\psi \circ \phi^{n-1})(x).$$

Para todo $[\underline{b}]_\alpha = [b_0, \dots, b_{n-1}]_\alpha$ tais que $b_0 = a$ e $[\underline{b}, a]_\alpha \neq \emptyset$, defina o operador agindo em $\mathcal{H}_a$ por

$$(M_{\underline{b}}f)(x) = e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, x)} f(\underline{b}, x), \quad \forall x \in A,$$

onde n é o comprimento de $\underline{b}$ e $(\underline{b}, x) = (b_0, \dots, b_{n-1}, x_0, x_1, \dots)$.

Lema 2.24: Existe $B > 0$, independentes da escolha de $\underline{b}$, tal que para todo $f \in \mathcal{H}_a$,

$$\|M_{\underline{b}}f\|_{\mathcal{H}_a} \leq B m([\underline{b}, a]_\alpha) \left(\theta^k \|f\|_{\mathcal{H}_a} + \frac{1}{m([\underline{b}, a]_\alpha)} \int_{[\underline{b}, a]_\alpha} |f| dm \right),$$

onde k é o número de vezes que a aparece em $\underline{b}$.

Demonstração. Sejam $\underline{b} = (\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{k-1})$, $x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots)$ e $y = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots)$, com $\bar{b}_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i \in \bar{S}$. Uma vez que o itinerário de $(\underline{b}, x) \in X$ segundo ϕ pode ser decomposto em seus retornos ao conjunto a , note que é possível escrever

$$s_n(\ln J_m)(\underline{b}, x) = s_k(\ln J_{m_a} \circ \bar{\pi})(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots),$$

onde a segunda soma ergódica é tomada de acordo com a dinâmica do *shift* σ . Ademais, as identificações utilizadas permitem escrever

$$f(\underline{b}, x) = (f \circ \bar{\pi})(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots).$$

Como $\bar{\psi} := \ln J_{m_a} \circ \bar{\pi}$ é $(\sigma, \bar{\alpha})$ -localmente holderiana, existe K tal que $v_n(\bar{\psi}) < K\theta^n$ para todo $n \geq 1$, onde v_n são as $(\sigma, \bar{\alpha})$ -variações. Portanto, para $\bar{t}(x, y) = \inf\{i \geq 0 : \bar{x}_i \neq \bar{y}_i\}$,

tem-se

$$\begin{aligned}
|s_n(\ln J_m)(\underline{b}, x) - s_n(\ln J_m)(\underline{b}, y)| &= \\
&= |s_k(\bar{\psi})(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots) - s_k(\bar{\psi})(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots)| \\
&\leq K \left(\theta^{k+\bar{t}(x,y)} + \dots + \theta^{\bar{t}(x,y)} \right) \\
&\leq K \frac{\theta^{\bar{t}(x,y)}}{1-\theta}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Como $|e^\delta - 1| \leq |\delta|e^{|\delta|}$, seja L tal que

$$|e^{\pm K\theta^i/(1-\theta)} - 1| \leq L\theta^i \quad \forall i \geq 1$$

e defina $C = L + 1$. Deste modo, tem-se que

$$\begin{aligned}
|M_{\underline{b}}f(x) - M_{\underline{b}}f(y)| &= |e^{s_k(\bar{\psi})(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{x}_0, \dots)} f \circ \bar{\pi}(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{x}_0, \dots) \\
&\quad - e^{s_k(\bar{\psi})(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{y}_0, \dots)} f \circ \bar{\pi}(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{y}_0, \dots)| \\
&\leq \|e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, \cdot)}\|_\infty \left(|f \circ \bar{\pi}(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{x}_0, \dots) - f \circ \bar{\pi}(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{y}_0, \dots)| \right. \\
&\quad \left. + \sup_{z \in [\underline{b}, a]_\alpha} |f(z)| \left| e^{s_k(\bar{\psi})(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{y}_0, \dots)} - e^{s_k(\bar{\psi})(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k-1}, \bar{x}_0, \dots)} - 1 \right| \right) \\
&\leq \|e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, \cdot)}\|_\infty \left(\text{Lip}_\theta(f \circ \bar{\pi})\theta^{k+\bar{t}(x,y)} + \sup_{z \in [\underline{b}, a]_\alpha} |f(z)| L\theta^{\bar{t}(x,y)} \right),
\end{aligned}$$

donde

$$\text{Hold}_a(M_{\underline{b}}f) \leq \|e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, \cdot)}\|_\infty \left(\theta^k \|f\|_{\mathcal{H}_a} + L \sup_{z \in [\underline{b}, a]_\alpha} |f(z)| \right).$$

Como

$$\|M_{\underline{b}}f\|_\infty = \sup_{x \in [a]_\alpha} \{e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, x)} f(\underline{b}, x)\} \leq \|e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, \cdot)}\|_\infty \sup_{z \in [\underline{b}, a]_\alpha} |f(z)|,$$

tem-se então

$$\|M_{\underline{b}}f\|_{\mathcal{H}_a} \leq \|e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, \cdot)}\|_\infty \left(\theta^k \|f\|_{\mathcal{H}_a} + C \sup_{z \in [\underline{b}, a]_\alpha} |f(z)| \right). \tag{2.25}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_{\phi_a}^k \chi_{[\underline{b}, a]_\alpha}(x) &= \sum_{(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{k-1}) \in \bar{S}} e^{s_k(\bar{\psi})(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{k-1}, x_0, \dots)} \chi_{[\underline{b}, a]_\alpha}(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{k-1}, x_0, \dots) \\
&= e^{s_k(\bar{\psi})(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k-1}, x_0, \dots)} \\
&= e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, x)}.
\end{aligned}$$

Seja $x \in [a]_\alpha$, então, para todo $\lambda \in (0, 1)$, existe z_λ tal que

$$\lambda \|e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, \cdot)}\|_\infty \leq e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, z_\lambda)} \leq e^{\frac{K}{1-\theta}} e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, x)} = e^{\frac{K}{1-\theta}} \widehat{T}_{\phi_a}^k \chi_{[\underline{b}, a]_\alpha}(x).$$

Assim $\|e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, \cdot)}\|_\infty \leq e^{\frac{K}{1-\theta}} \widehat{T}_{\phi_a}^k \chi_{[\underline{b}, a]_\alpha}(x)$. Integrando com respeito m_a em ambos os lados da desigualdade sobre $[a]_\alpha$, obtém-se

$$\|e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, \cdot)}\|_\infty \leq e^{\frac{K}{1-\theta}} \frac{m([\underline{b}, a]_\alpha)}{m([a]_\alpha)}, \quad (2.26)$$

pois, recordando da Proposição 2.2, tem-se

$$\int \widehat{T}_{\phi_a}^k \chi_{[\underline{b}, a]_\alpha} \cdot \chi_{[a]_\alpha} dm_a = \int \chi_{[\underline{b}, a]_\alpha} \cdot \chi_{[a]_\alpha} \circ \phi_a^k dm_a = \int \chi_{[\underline{b}, a]_\alpha} dm_a = m_a([\underline{b}, a]_\alpha).$$

Note agora que

$$\left| |f(\underline{b}, x)| - |f(\underline{b}, y)| \right| \leq |f(\underline{b}, x) - f(\underline{b}, y)| \leq \theta^k \|f\|_{\mathcal{H}_a}$$

implica

$$|f(\underline{b}, y)| \leq |f(\underline{b}, x)| + \theta^k \|f\|_{\mathcal{H}_a},$$

tomando o supremo à esquerda e então integrando com respeito a m em ambos os lados da desigualdade sobre $[\underline{b}, a]_\alpha$, obtém-se

$$\sup_{z \in [\underline{b}, a]_\alpha} |f(z)| \leq \frac{1}{m([\underline{b}, a]_\alpha)} \int_{[\underline{b}, a]_\alpha} |f| dm + \theta^k \|f\|_{\mathcal{H}_a}. \quad (2.27)$$

O lema segue substituindo as Equações (2.26) e (2.27) na Equação (2.25) e tomando $B = \frac{(C+1)e^{\frac{K}{1-\theta}}}{m[a]_\alpha}$. ■

Destacamos o seguinte corolário da demonstração acima.

Corolário 2.25: *A medida m_a dá massa positiva para cada cilindro com respeito a α_a .*

Demonstração. A prova segue diretamente da desigualdade (2.26). ■

Demonstração do Teorema 2.23. A prova deste resultado consiste em verificar que são satisfeitas as condições do Teorema 2.11. Seja o operador de Ruelle

$$L_{\ln J_m} f(x) = \sum_{\phi(y)=x} e^{\ln J_m(y)} f(y).$$

Observe que pela Equação (2.23) tem-se que $L_{\ln J_m} f(x) = \widehat{T}_\phi f(x)$. Defina

$$T_n f := \chi_{[a]_\alpha} L_{\ln J_m}^n (f \chi_{[a]_\alpha}) \quad \text{e} \quad R_n f := \chi_{[a]_\alpha} L_{\ln J_m}^n (f \chi_{[\varphi_a=n]}) .$$

Lembrando que para todo $z \in \mathbb{D}$ define-se

$$T(z) = I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T_n \quad \text{e} \quad R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n R_n.$$

Equação de Renovação: Os operadores lineares T_n e R_n são limitados em $\mathcal{H}_a$, $\|T_n\| = O(1)$, $\sum \|R_n\| < \infty$ e $T(z) = (I - R(z))^{-1}$.

Demonstração. Seja $\Lambda_n := \{(b_0, \dots, b_{n-1}) \in S^n : [b_0, \dots, b_{n-1}]_\alpha \in \overline{S}\}$. Por definição

$$[\varphi_a = n] = \bigcup_{\underline{b} \in \Lambda_n} [\underline{b}, a]_\alpha \quad \text{e} \quad R_n = \sum_{\underline{b} \in \Lambda_n} M_{\underline{b}} \quad \text{q.s.}$$

De fato, para a segunda igualdade, tem-se para todo $x \in A$

$$\begin{aligned} R_n f(x) &= \sum_{(b_0, \dots, b_{n-1}) \in S^n} e^{s_n(\ln J_m)(b_0, \dots, b_{n-1}, x_0, \dots)} (f \chi_{[\varphi_a = n]})(b_0, \dots, b_{n-1}, x_0, \dots) \\ &= \sum_{\underline{b} \in \Lambda_n} e^{s_n(\ln J_m)(\underline{b}, x)} f(\underline{b}, x) \\ &= \sum_{\underline{b} \in \Lambda_n} (M_{\underline{b}} f)(x). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.24, tem-se que

$$\begin{aligned} \|R_n\| &= \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_a} = 1} \|R_n f\|_{\mathcal{H}_a} \leq \sum_{\underline{b} \in \Lambda_n} \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_a} = 1} \|M_{\underline{b}} f\|_{\mathcal{H}_a} \\ &\leq B(\theta + 1) \sum_{\underline{b} \in \Lambda_n} m([\underline{b}, a]_\alpha) \\ &= B(\theta + 1) m([\varphi_a = n]). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Segue que $R_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_a)$ e, como por hipótese $m([\varphi_a > n]) = O(\frac{1}{n^\beta})$ com $\beta > 2$, tem-se que, $\sum \|R_n\| < \infty$.

A limitação de T_n é obtida de maneira similar, note que $T_n = \chi_{[a]_\alpha} \sum M_{\underline{b}}$, onde a soma é tomada sobre todos $\underline{b} = (b_0, \dots, b_{n-1}) \in S^n$ com $b_0 = a$. Note que os respectivos cilindros $[b_0, \dots, b_{n-1}]_\alpha$ não são apenas disjuntos, mas sua união é $[a]_\alpha \cap \phi^{-n}[a]_\alpha$, assim pelo Lema 2.24 conclui-se que

$$\|T_n\| \leq B(\theta + 1) m([a]_\alpha \cap \phi^{-n}[a]_\alpha).$$

Da discussão até este momento, sabemos que para todo $z \in \mathbb{D}$ os operadores $T(z)$ e $R(z)$ são limitados em $\mathcal{H}_a$.

Para verificar que a equação de renovação é válida, note que toda $f \in \mathcal{H}_a$ é absolutamente integrável. Então pela Proposição 2.10, para todo $z \in \mathbb{D}$, tem-se

$$T(z)(I - R(z))f = f$$

m_a -quase todo ponto. Note que na Proposição 2.10 o espaço de Banach considerado é $L^1(m_a)$. Queremos mostrar a inversão agora sobre $\mathcal{H}_a$. Para isso, observe que ambos os lados da equação acima são funções contínuas em $\bar{\pi}(\overline{X})$. Como m_a é positiva em todo cilindro, a igualdade então se estende para todo o conjunto $\bar{\pi}(\overline{X})$. Portanto $T(z)(I - R(z)) = I$ sobre $\mathcal{H}_a$. A identidade $(I - R(z))T(z) = I$ é verificada de maneira similar.

□

Lacuna Espectral: O operador $R(1) : \mathcal{H}_a \rightarrow \mathcal{H}_a$ satisfaz

- (1) $R(1)$ possui um autovalor simples em 1, e sua autoprojeção é o operador P_a dado por

$$P_a f = \frac{1}{m([a]_\alpha)} \int_{[a]_\alpha} f dm.$$

- (2) O raio espectral de $R(1) - P_a$ é estritamente menor que 1.

Demonstração. Seja $([a]_\alpha, \mathcal{F}_a, m_a, \phi_a)$ o mapa induzido de ϕ em $[a]_\alpha$. Esse sistema preserva medida, já que m é ϕ -invariante. Deste modo, tem-se

$$\int_{[a]_\alpha} g \cdot \widehat{T}_{\phi_a} 1 dm_a = \int_{[a]_\alpha} (g \circ \phi_a) \cdot 1 dm_a = \int_{[a]_\alpha} g dm_a,$$

portanto

$$1 = \widehat{T}_{\phi_a} 1(x) = \sum_{\phi_a(y)=x} J_{m_a}(y),$$

de modo a obter que $\sum_{y \in \phi_a^{-1}(x)} e^{\ln(J_{m_a})(y)} = 1$, para todo $x \in [a]_\alpha$. Note que

$$1 = \sum_{y \in \phi_a^{-1}(x)} e^{\ln(J_{m_a})(y)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\underline{b} \in \Lambda_n} (M_{\underline{b}} 1)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (R_n 1)(x). \quad (2.29)$$

Portanto $R(1)1 \equiv 1$, segue que 1 é um autovalor de $R(1)$. Claramente conclui-se que $R(1)P_a = P_a$. Além disso, recordando a Proposição 2.10, note que

$$P_a(R(1)f) = \int_{[a]_\alpha} \widehat{T}_{\phi_a} f dm_a = \int_{[a]_\alpha} (1 \circ \phi_a) \cdot f dm_a = \int_{[a]_\alpha} f dm_a = P_a f,$$

ou seja, $P_a R(1) = P_a$. As propriedades espectrais restantes (simplicidade, a identificação de P_a como a autoprojeção e a lacuna espectral) decorrerão da demonstração a ser feita nos parágrafos a seguir que o raio espectral de $R(1) - P_a$ é estritamente menor que 1. Com respeito especificamente ao fato de que 1 é autovalor simples de $R(1)$, talvez o leitor aprecie examinar a argumentação fornecida por (GOUËZEL, 2004a, Lema 6.6).

A coleção $\alpha_a = \{[\bar{b}, a]_\alpha : \bar{b} \in \bar{S}\}$ é uma partição de Markov para este sistema e m_a é uma medida de Gibbs com respeito a esta partição no sentido da definição a seguir.

Definição 2.26: Uma medida de Gibbs (de acordo com Bowen) para uma função contínua $f : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma medida de probabilidade invariante μ para a qual existem constantes $M > 1$ e $C \in \mathbb{R}$ tais que, para todo cilindro $[a_0, \dots, a_{n-1}]$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$M^{-1} \leq \frac{\mu([a_0, \dots, a_{n-1}])}{\exp(s_n(f(x)) - nC)} \leq M$$

para todo $x \in [a_0, \dots, a_{n-1}]$.

Para verificar que m_a é uma medida de Gibbs para $\ln(J_{m_a})$, basta observar que existe $M > 1$ tal que, para todo (ϕ_a, α_a) -cilindro $\cap_{i=0}^{k-1} \phi_a^{-i}(\underline{a}_i)$, com $\underline{a}_i \in \alpha_a$, e para todo $x \in \cap_{i=0}^{k-1} \phi_a^{-i}(\underline{a}_i)$,

$$M^{-1} \exp \sum_{j=0}^{k-1} \ln J_{m_a}(\phi_a^j x) \leq m_a \left(\bigcap_{i=0}^{k-1} \phi_a^{-i}(\underline{a}_i) \right) \leq M \exp \sum_{j=0}^{k-1} \ln J_{m_a}(\phi_a^j x). \quad (2.30)$$

Com efeito, por hipótese $\ln J_{m_a}$ é (ϕ_a, α_a) -localmente holderiana. Introdúz-se o operador dual de Ruelle $L_{\ln J_{m_a}}^* \mu$ pela expressão

$$\int_{[a]_\alpha} f d(L_{\ln J_{m_a}}^* \mu) = \int_{[a]_\alpha} L_{\ln J_{m_a}} f d\mu.$$

Recorde que $L_{\ln J_{m_a}} = \hat{T}_{\phi_a}$. Observe que $L_{\ln J_{m_a}}^* m_a = m_a$, pois

$$\int_{[a]_\alpha} f d(L_{\ln J_{m_a}}^* m_a) = \int_{[a]_\alpha} \hat{T}_{\phi_a} f dm_a = \int_{[a]_\alpha} f dm_a \quad \forall f.$$

Assim, para $\underline{b} \in \bar{S}^k$ com $k \geq 1$

$$\begin{aligned} m_a([b, a]_\alpha) &= \int_{[a]_\alpha} \chi_{[b, a]_\alpha}(z) dm_a(z) = \int_{[a]_\alpha} \hat{T}_{\phi_a}^k \chi_{[b, a]_\alpha}(z) dm_a(z) \\ &= \int_{[a]_\alpha} \sum_{\phi_a^k(y)=z} e^{s_k(\ln J_{m_a})(y)} \chi_{[b, a]_\alpha}(y) dm_a(z). \end{aligned}$$

Pela propriedade de inversibilidade local de uma aplicação de Markoviana, para cada z se pode atribuir mensuravelmente $y_z \in [b, a]_\alpha$ tal que $\sum_{\phi_a^k(y)=z} e^{s_k(\ln J_{m_a})(y)} \chi_{[b, a]_\alpha}(y) = e^{s_n(\ln J_m)(y_z)}$. Fixado $x \in [b, a]_\alpha$, da desigualdade (2.24) obtém-se que para $M = e^{K/(1-\theta)}$ vale que

$$M^{-1} e^{s_n(\ln J_m)(x)} \leq e^{s_n(\ln J_m)(y_z)} \leq M e^{s_n(\ln J_m)(x)}.$$

Portanto $m_a([b, a]_\alpha) \asymp e^{s_k(\ln J_{m_a})(x)}$ para todo (ϕ_a, α_a) -cilindro $[b]_\alpha \subset [a]_\alpha$ de comprimento k que contém x .

A representação simbólica de ϕ_a com respeito a partição $\bar{S}$ é de um *shift* completo (todas as entradas da matriz de transição correspondente são iguais a 1). Em particular $\phi_a([\bar{b}]_\alpha) = \bar{X}$ para todo $\bar{b} \in \bar{S}$. Portanto, como m_a é uma medida de Gibbs com respeito a ϕ_a , utilizando estimativa sobre velocidade de convergência de iterados do operador de Ruelle (AARONSON, 1997, Teorema 4.7.7), existem $C > 0$ e $0 < \kappa < 1$ tais que, para todo $f \in \mathcal{H}_a$,

$$\left\| \hat{T}_{\phi_a}^n f - \int f dm_a \right\|_{\mathcal{H}_a} < C \|f\|_{\mathcal{H}_a} \kappa^n.$$

Esta desigualdade se traduz em termos da norma do operador em $\|(\hat{T}_{\phi_a} - P_a)^n\| \leq C \kappa^n$, donde pela fórmula apresentada no Teorema 1.30 obtemos que $\rho(\hat{T}_{\phi_a} - P_a) \leq \kappa$.

□

Aperiodicidade: Se $\text{mdc} \{ \varphi_a(x) - \varphi_a(y) : 0 < \varphi_a(x), \varphi_a(y) < \infty \} = 1$, então o raio espectral de $R(z) : \mathcal{H}_a \rightarrow \mathcal{H}_a$ é estritamente menor que 1 para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{1\}$.

Demonstração. Note que é possível reescrever $R(z)$ como

$$R(z)f = \sum_{n=1}^{\infty} z^n R_n f = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{\underline{b} \in \Lambda_n} M_{\underline{b}} f = \sum_{\bar{b}_0 \in \bar{S}} z^{l(\bar{b}_0)} M_{\bar{b}_0} f,$$

onde $l(\bar{b}_0)$ denota o comprimento de $\bar{b}_0$ visto como um cilindro com respeito à partição α . De maneira similar, tem-se que

$$R(z)^2 f = \sum_{\bar{b}_0 \in \bar{S}} z^{l(\bar{b}_0)} M_{\bar{b}_0} R(z)f = \sum_{\bar{b}_0 \in \bar{S}} z^{l(\bar{b}_0)} M_{\bar{b}_0} \sum_{\bar{b}_1 \in \bar{S}} z^{l(\bar{b}_1)} M_{\bar{b}_1} f = \sum_{\underline{b}=(\bar{b}_0, \bar{b}_1) \in \bar{S}^2} z^{l(\underline{b})} M_{\underline{b}} f,$$

prossequindo de maneira indutiva, é fácil ver que para toda $f \in \mathcal{H}_a$ e qualquer k ,

$$R^k(z)f = \sum_{\underline{b}=(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k-1}) \in \bar{S}^k} z^{l(\underline{b})} M_{\underline{b}} f.$$

Claramente para $\underline{b} \in \bar{S}^k$ tem-se que $l(\underline{b}) \geq k$. Deste modo, pelo Lema 2.24 conclui-se que

$$\|R(z)^k f\|_{\mathcal{H}_a} \leq B|z|^k (\theta^k \|f\|_{\mathcal{H}_a} + \|f\|_1). \quad (2.31)$$

Recorde que um operador linear $Q : X \rightarrow Y$ entre dois espaços de Banach é dito **compacto** se para toda sequência limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X , a sequência $\{Q(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em Y . Note que a inclusão $\mathcal{H}_a \rightarrow L^1(m_a)$ é compacta. Isso decorre de uma adaptação do teorema de Arzelà-Ascoli pois, grosseiramente falando, ser limitada na norma de $\mathcal{H}_a$ se traduz em ser limitada na norma uniforme e possuir constantes de Lipschitz uniformemente limitadas, implicando equilimitação e equicontinuidade. Além disso, como estamos lidando com uma probabilidade, não é uma surpresa que topologia uniforme pode ser vista como mais forte que a topologia L^1 , de modo que uma sequência convergente na norma uniforme resultará também convergente em L^1 . A sutileza se encontra, contudo, no fato da norma sobre $\mathcal{H}_a$ ser definida desconsiderando um conjunto de medida nula $[a]$. Detalhes técnicos podem ser consultados em (GOUËZEL, 2004b, Proposição 1.1.16).

Para k fixado, considere uma sequência $\{f_n\}$ contida na esfera unitária de $\mathcal{H}_a$ satisfazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(z)^k f_n\|_{\mathcal{H}_a} = \|R(z)^k\|.$$

Pelo comentário anterior, sendo essa sequência limitada, existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ convergindo para f_∞ (na topologia uniforme e portanto) em $L^1(m_a)$. Essencialmente se pode assinalar que

$$\|f_\infty\|_\infty \leq \|f_{n_j} - f_\infty\|_\infty + \|f_{n_j}\|_\infty \leq \|f_{n_j} - f_\infty\|_\infty + 1,$$

assegura $\|f_\infty\|_\infty \leq 1$. Com isto, uma passagem ao limite em (2.31) fornece

$$\sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_a}=1} \|R(z)^k f\| \leq B|z|^k(\theta^k + 1).$$

Portanto $\rho(R(z)) \leq |z|$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Basta agora considerar o caso $z \neq 1$ com $|z| = 1$. Pelo Teorema 1.32, para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$ o raio espectral essencial de $R(z)$ em $\mathcal{H}_a$ é menor ou igual a $\theta < 1$. Assim basta verificar que nenhum autovalor de $R(z)$ tem módulo 1.

Fixando $z = e^{it}$ com $0 < t < 2\pi$ e supondo $R(z)f = \lambda f$ para $f \in \mathcal{H}_a$ não nula e $|\lambda| = 1$. Para $u, v \in L^2(m_a)$ seja

$$\langle u, v \rangle = \int \bar{u}v \, dm_a.$$

Defina o operador $W : L^\infty(m_a) \rightarrow L^\infty(m_a)$ por $Wu = \bar{z}^{\varphi_a} u \circ \phi_a = e^{-it\varphi_a} u \circ \phi_a$. Note que

$$R(z)v = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{b \in \Lambda_n} M_b(z^{\varphi_a} v) = R(1)(z^{\varphi_a} v).$$

Deste modo, como $R(1)$ é o operador de transferência da transformação induzida ϕ_a , o operador W satisfaz

$$\begin{aligned} \langle u, R(z)v \rangle &= \int \bar{u}R(z)v \, dm_a = \int \bar{u}R(1)(e^{it\varphi_a} v) \, dm_a = \int \bar{u} \circ \phi_a e^{it\varphi_a} v \, dm_a \\ &= \int \overline{Wu} \cdot v \, dm_a \\ &= \langle Wu, v \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, W é o adjunto de $R(z)$. Deste modo

$$\begin{aligned} \|Wf - \bar{\lambda}f\|_2^2 &= \|Wf\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle Wf, \bar{\lambda}f \rangle + |\lambda|^2\|f\|_2^2 = \|Wf\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\langle f, R(z)f \rangle) + \|f\|_2^2 \\ &= \|Wf\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\langle f, \lambda f \rangle) + \|f\|_2^2 \\ &= \|Wf\|_2^2 - \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Como ϕ_a preserva a medida m_a , tem-se

$$\|Wf\|_2^2 = \int |f|^2 \circ \phi_a = \int |f|^2 = \|f\|_2^2$$

e deste modo $\|Wf - \bar{\lambda}f\|_2^2 = 0$. Portanto a função $Wf - \bar{\lambda}f$ é nula m_a -quase todo ponto. Como $f \in \mathcal{H}_a$ e m_a é não nula nos cilindros, a função f é contínua, então $Wf - \bar{\lambda}f = 0$ em todo ponto, em particular

$$e^{-it\varphi_a} f \circ \phi_a = \bar{\lambda}f.$$

Tomando o módulo, a ergodicidade de ϕ_a garante que $|f|$ é constante em quase todo ponto donde, por continuidade em todo ponto. Como $f \not\equiv 0$, esta constante é não nula

e assim é possível considerar f de módulo constante 1 (a menos de trocar f por $f/|f|$). Assim, tem-se que

$$e^{-it\varphi_a} = \frac{\bar{\lambda}f}{f \circ \phi_a} = \bar{\lambda}f \cdot \bar{f} \circ \phi_a,$$

onde $f : [a]_\alpha \rightarrow \mathbb{S}^1$ é mensurável e $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Deste modo as condições em (AARONSON; DENKER, 2001, Teorema 3.1) são satisfeitas, o qual garante que f é $(\alpha_a)_*$ -mensurável, onde $(\alpha_a)_*$ é a partição mais fina com a propriedade de para todo $E \in \alpha_a$, $\phi_a(E)$ está contido em algum átomo de $(\alpha_a)_*$. Na verdade, como $\phi_a(E) = [a]_\alpha$ para todo $E \in \alpha_a$, tem-se que $(\alpha_a)_* = \{[a]_\alpha, \emptyset\}$ e consequentemente f é constante em quase todo ponto e assim, por continuidade, em todo ponto.

Agora note que, fazendo uso da Equação (2.29), obtém-se

$$(R(z)f)(x) = (R(1)(z^{\varphi_a}f))(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (R_n(z^{\varphi_a}f))(x) = \sum_{y \in \phi_a^{-1}(x)} e^{\ln(J_{m_a})(y)} z^{\varphi_a(y)} f(y),$$

ou seja,

$$\sum_{y \in \phi_a^{-1}(x)} e^{\ln(J_{m_a})(y)} z^{\varphi_a(y)} f(y) = \lambda f(x).$$

Como a equação acima se trata de uma combinação convexa não trivial de pontos extremais, necessariamente

$$z^{\varphi_a(y)} f(y) = \lambda f(x) \quad \forall y \in \phi_a^{-1}(x) \text{ e } \forall x.$$

Como f é constante e $\text{mdc} \{\varphi_a(x) - \varphi_a(y) : 0 < \varphi_a(x), \varphi_a(y) < \infty\} = 1$, tem-se que $z^{\varphi_a(y)} = \lambda$ para todo y é verdade apenas quando $z = \lambda = 1$, um absurdo, já que $z \neq 1$.

□

Decaimento de Correlação: A desigualdade

$$\left| \text{Cor}(f, g \circ \phi^n) - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} m[\varphi_a > k] \right) \int f dm \int g dm \right| \leq \frac{C}{n^{[\beta]}} \|g\|_\infty \|f\|_{\mathcal{H}_a}$$

é válida.

Demonstração. Pela Equação (2.28) tem-se que $\|R_n\| = O(m([\varphi_a = n]))$ e consequentemente

$$\sum_{k>n} \|R_k\| = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

para algum $\beta > 2$. Tem-se que $Pf = \frac{1}{m([a]_\alpha)} \int_{[a]_\alpha} f dm \cdot \chi_{[a]_\alpha}$ e portanto

$$PR_nP = \frac{m([\varphi_a = n])}{m([a]_\alpha)} P.$$

Recordando que R_n são operadores lineares, necessariamente $R'_n = R_n$ e consequentemente

$$PR'(1)P = \frac{1}{m([a]_\alpha)} \int_{\alpha_a} \varphi_a dm \cdot P = \frac{1}{m([a]_\alpha)} P$$

pela fórmula de Kac (Teorema 1.64) . Deste modo

$$PR'(1)P \neq 0.$$

Deste modo, as condições do Teorema 2.11 são satisfeitas, e portanto existe $E_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ com norma $\|E_n\| = O(1/n^{[\beta]})$ tal que para toda f em $\mathcal{H}$ (suportadas em $[a]_\alpha$)

$$\chi_{[a]_\alpha} \hat{T}_\phi f = \chi_{[a]_\alpha} \left(\int f dm + \sum_{k=n+1}^{\infty} m([\varphi_a > k]) \int f dm + E_n f \right).$$

Multiplicando por uma $g \in L^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ suportada em $[a]_\alpha$, tem-se pela definição de operador de transferência

$$\int f g \circ \phi^n dm = \int f dm \int g dm + \sum_{k=n+1}^{\infty} m([\varphi_a > k]) \int f dm \int g dm + \int g E_n f dm.$$

Como $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, o valor absoluto do último termo é limitado por $\|g\|_\infty \|f\|_{\mathcal{H}} \|E_n\|$.

□

Note que quando $m([\varphi_a > n]) \asymp \frac{1}{n^\beta}$, $\int f, \int g \neq 0$ e $\|g\|_\infty, \|f\|_{\mathcal{H}} < \infty$ a estimativa acima implica em

$$Cor(f, g \circ \phi^n) \sim \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} m([\varphi_a > k]) \right) \int f \int g$$

deste modo obtendo uma limitação inferior para o decaimento de correlação.

■

REFERÊNCIAS

- AARONSON, Jon. **An Introduction to Infinite Ergodic Theory**. Boston: American Mathematical Society, 1997. (Mathematical Surveys and Monographs).
- AARONSON, Jon; DENKER, Manfred. Local limit theorems for partial sums of stationary sequences generated by Gibbs–Markov maps. **Stochastics and Dynamics**, World Scientific, v. 1, n. 02, p. 193–237, 2001.
- ALLAN, Graham R; DALES, Harold G. **Introduction to Banach spaces and algebras**. [S.l.]: Oxford University Press, 2011.
- BALADI, Viviane. **Positive Transfer Operators and Decay of Correlations**. Singapore: World Scientific, 2000. (Advanced Series in Nonlinear Dynamics, v.16).
- BARREIRA, Luis; PESIN, Yakov. Smooth Ergodic Theory and Nonuniformly Hyperbolic Dynamics - with an appendix by Omri Sarig. In: KATOK, Anatole; HASSELBLATT, Boris (Ed.). **Handbook of Dynamical Systems**. Amsterdam: Elsevier, 2006. 1B. cap. 2, p. 57–263.
- BILLINGSLEY, Patrick. **Ergodic Theory and Information**. [S.l.]: Wiley New York, 1965. v. 1.
- BOGACHEV, Vladimir I. **Measure Theory**. Berlin: Springer, 2007.
- BOYARSKY, Abraham; GÓRA, Paweł. **Laws of Chaos: Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension**. Boston: Birkhäuser, 1997. (Probability and Its Applications).
- CARTAN, Henri. **Differential Calculus**. Paris: Hermann, 1971.
- CHAE, Soo Bong. **Holomorphy and Calculus in Normed Spaces**. New York: CRC Press, 1985. (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics).
- CHOQUET, Gustave. **Topology**. New York: Academic Press Inc., 1966. (Pure and Applied Mathematics).
- CLIMENHAGA, Vaughn. **Slowly mixing sets**. 2014. Disponível em: <<https://vaughnclimenhaga.wordpress.com/2014/04/22/slowly-mixing-sets>>.
- COHN, Donald L. **Measure Theory**. 2. ed. Boston: Birkhäuser, 2013. (Birkhäuser Advanced Texts).
- COUDÈNE, Yves. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**. Tradução: Reinie Erné. Brest, France: Springer London, 2016. (Universitext).
- COX, David Roxbee. **Renewal Theory**. Londres: Methuen, 1962.
- DAJANI, Karma; KALLE, Charlene. **A First Course in Ergodic Theory**. Boca Raton: Chapman e Hall/CRC, 2021.

- DIEUDONNÉ, Jean. **Foundations of Modern Analysis**. New York: Academic Press Inc., 1969. v. 4. (Pure and Applied Mathematics).
- DING, Jiu; ZHOU, Aihui. **Statistical Properties of Deterministic Systems**. [S.l.]: Springer, 2009. (Tsinghua University Texts).
- ECKMANN, Jean-Pierre; RUELLÉ, David. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Reviews of modern physics**, APS, v. 57, n. 3, p. 617, 1985.
- FELLER, William. **An Introduction to Probability Theory and its Applications**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1968. v. 1. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics).
- GEL'FOND, Alexander Osipovich. An estimate for the remainder term in a limit theorem for recurrent events. **Theory of Probability & Its Applications**, SIAM, v. 9, n. 2, p. 299–303, 1964.
- GOUËZEL, Sébastien. Sharp polynomial estimates for the decay of correlations. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 139, p. 29–65, 2004.
- _____. **Vitesse de décorrélation et théoremes limites pour les applications non uniformément dilatantes**. 2004. Tese (Doutorado) – Ph. D. Thesis, Ecole Normale Supérieure.
- HENNION, Hubert. Sur un théoreme spectral et son application aux noyaux lipchitziens. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 118, n. 2, p. 627–634, 1993.
- KANTOROVITZ, Shmuel. **Introduction to Modern Analysis**. Oxford: Oxford University Press, 2006. (Oxford Graduate Texts in Mathematics).
- KATO, Tosio. **Perturbation Theory for Linear Operators**. Berlin: Springer, 1995. (Classics in Mathematics).
- KAUTZSCH, Johannes. **Renewal Theory for Operators in Banach Spaces**. 2011. Tese (Doutorado) – Universität Bremen.
- KOLMOGOROV, Andrei Nikolaevitch. Markov chains with a countable number of possible states. **Bull. Mosk. Gos. Univ. Math. Mekh**, v. 1, n. 3, p. 1–15, 1937.
- KÖNIGSBERGER, Konrad. **Analysis 2**. 5. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2004. (Springer-Lehrbuch).
- KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley & Sons. Inc, 1989. (Wiley Classics Library).
- KUTTLER, Kenneth. **Modern Analysis**. Boca Raton: CRC Press, 1998. (Studies in Advanced Mathematics).
- LORENZI, Alfredo. **An Introduction to Identification Problems via Functional Analysis**. Berlin, Boston: De Gruyter, 2014. (Inverse and Ill-Posed Problems Series).

- MITOV, Kosto V.; OMEY, Edward. **Renewal Processes**. [S.l.]: Springer Cham, 2004. (SpringerBriefs in Statistics).
- NUSSBAUM, Roger D. The radius of the essential spectrum, 1970.
- PARRY, William; POLLICOTT, Mark. Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics. **Astérisque**, v. 187, n. 188, p. 1–268, 1990.
- ROGOZIN, BA. An estimate of the remainder term in limit theorems of renewal theory. **Theory of Probability & Its Applications**, SIAM, v. 18, n. 4, p. 662–677, 1974.
- ROYDEN, Halsey. **Real Analysis**. 3. ed. New York: Macmillan Publishing Company, 1988.
- RUDIN, Walter. **Functional Analysis**. 2. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1991. (International Series in Pure and Applied Mathematics).
- _____. **Principles of Mathematical Analysis**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1976. (International Series in Pure and Applied Mathematics).
- _____. **Real and Complex Analysis**. 3. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1987. (Mathematics Series).
- SARIG, Omri. Introduction to the Transfer Operator Method. Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn, 2020. Disponível em:
<<https://www.weizmann.ac.il/math/sarigo/sites/math.sarigo/files/uploads/transferoperatorcourse-bonn.pdf>>.
- _____. Lecture Notes on Thermodynamic Formalism for Topological Markov Shifts. **Penn State**, 2009.
- _____. Subexponential Decay of Correlations. **Inventiones Mathematicae**, Springer, v. 150, n. 3, p. 629–653, 2002.
- _____. **The Transfer Operator Method**. Vídeos 1 à 5. 2020. Disponível em:
<<https://youtu.be/0Xg10n17Msg>>.
- SHI, Yuming; YU, Pei. On Chaos of the Logistic Maps. **Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series B**, WATAM PRESS, v. 14, n. 2, p. 175–195, 2007.
- SILVA, César Ernesto. **Invitation to Ergodic Theory**. Providence: American Mathematical Society, 2008. (Student Mathematical Library).
- SINAI, Iakov Grigorevich. **Topics in Ergodic Theory**. New Jersey: Princeton University Press, 1994. v. 44. (Princeton mathematical series).
- STROGATZ, Steven H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. 2. ed. Cambridge: CRC Press, 2015.
- VIANA, Marcelo; OLIVEIRA, Krerley. **Foundations of Ergodic Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics).

WALTERS, Peter. **An Introduction to Ergodic Theory**. New York: Springer, 1982. (Graduate Texts in Mathematics).

WILF, Herbert S. **generatingfunctionology**. 3. ed. Wellesley: A K Peters, Ltd., 2005.

ZYGMUND, A.; FEFFERMAN, Robert. **Trigonometric Series**. 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Mathematical Library).