UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

MARCOS HENRIQUE DE PAULA DIAS DA SILVA

JUSTAPOR DEMONSTRAÇÕES E SEU EFEITO NA ESCRITA DE DEMONSTRAÇÕES

JUXTAPOSE PROOFS AND ITS EFFECT ON PROOF WRITING

CAMPINAS
2023

MARCOS HENRIQUE DE PAULA DIAS DA SILVA

JUSTAPOR DEMONSTRAÇÕES E SEU EFEITO NA ESCRITA DE DEMONSTRAÇÕES

JUXTAPOSE PROOFS AND ITS EFFECT ON PROOF WRITING

PRUEBAS YUXTAPUESTAS Y SU EFECTO EN LA REDACCIÓN DE PRUEBAS

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática, na área de Ensino de Ciências e Matemática

ORIENTADOR: SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA
CO-ORIENTADOR: JOÃO VILHETE VIEGAS D'ABREU

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO DISCENTE MARCOS HENRIQUE DE PAULA DIAS DA SILVA, E ORIENTADA PELOS PROFESSORES DOUTORES SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA E JOÃO VILHETE VIEGAS D'ABREU.

CAMPINAS
2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

Si38j

Silva, Marcos Henrique de Paula Dias da, 1991-
Justapor demonstrações e seu efeito na escrita de demonstrações / Marcos Henrique de Paula Dias da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Samuel Rocha de Oliveira.
Coorientador: João Vilhete Viegas d'Abreu.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Teoria das demonstrações. 2. Ensino superior. 3. Sistemas multimídia. I. Oliveira, Samuel Rocha de, 1962-. II. D'Abreu, João Vilhete Viegas, 1954-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Juxtapose proofs and its effect on proof writing
Palavras-chave em inglês:
Proof theory
Education, Higher
Multimedia systems
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática
Titulação: Doutor em Ensino de Ciências e Matemática
Banca examinadora:
Samuel Rocha de Oliveira [Orientador]
Miriam Cardoso Utsumi
Maurício Urban Kleinke
Marcelo Firer
Valdinei Cezar Cardoso
Daniel Miranda Machado
Leonardo Barichello
Data de defesa: 16-03-2023
Programa de Pós-Graduação: Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-8636-7959
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/6130937835002478

COMISSÃO EXAMINADORA

Data: 16/03/2023

Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira (PRESIDENTE – ORIENT.)
Profa. Dra. Miriam Cardoso Utsumi – Unicamp
Prof. Dr. Maurício Urban Kleinke – Unicamp
Prof. Dr. Marcelo Firer – Unicamp
Prof. Dr. Valdinei Cezar Cardoso – UFES
Prof. Dr. Daniel Miranda Machado – UFABC
Prof. Dr. Leonardo Barichello – USP

A Ata de defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Primeiramente devo agradecer aos financiadores desta pesquisa, a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por meio da Bolsa de Doutorado na categoria Demanda Social, processo nº 88882.435460/2019-01 (Migrado – SACPAIS), concedida ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da UNICAMP e às bolsas de auxílio permanência providas pelo SAE (Serviço de Apoio ao Estudante) da UNICAMP, que me permitiram uma dedicação integral a esta pesquisa.

Tentarei escrever alguns agradecimentos de coração (quem me conhece sabe que este não é meu forte, então adianto as desculpas caso esta parte fique estranha). Devo muito aos meus pais, que sempre investiram em mim mais do que podiam, colocando sempre seus próprios interesses em 2º plano para me ajudar nesta saga. Em seguida devo muito a meus amigos de escola, pois esse foi um ambiente socialmente hostil e vocês me permitiram criar algumas boas lembranças desta fase. Coloco aqui meus imensos agradecimentos às amizades que sobreviveram à escola e as que emergiram da vida adulta, vocês realmente foram companheiros inestimáveis para mim, dividindo fardos e fechando feridas. Sou grato também aos professores e mentores que passaram por minha vida, desde os que se lembram de mim aos que passaram por mim indiferentes, pois guardo aquilo que dividiram comigo, suas experiências, seus exemplos como profissionais, suas críticas compartilhadas sobre eu, meu ser e meu trabalho, e que considero terem me ajudado a lapidar-me. Agradeço a meus companheiros de trabalho, que foram fieis nos momentos de vitória, derrota e incertezas, os quais batalharam ao meu lado por tantas causas. Meus agradecimentos à minha esposa que me acompanha, suporta e assiste, compartilha, discute experiências e reflete comigo, e à sua família que me acolheu e cuidou durante esta longa jornada que venho percorrendo.

RESUMO

Nesta tese definimos o procedimento de demonstrar por justaposição como uma ação semelhante à montagem de um quebra-cabeça em que as peças são segmentos do texto de uma demonstração matemática. Identificamos na justaposição de demonstrações, além de características comuns à leitura e escrita de demonstrações, um potencial emergente da interação entre múltiplas mídias de contribuir para o aprendizado das demonstrações, o que nos levou a investigar a influência de seu exercício com alunos de graduação em matemática. A relevância desta pesquisa se destaca tanto pelo papel que as demonstrações desempenham na formação de matemáticos, da sua ausência na Educação Básica e pela forma como são consideradas conhecimentos prévios para alunos de graduação. Somado a isso temos as dificuldades relacionadas ao seu aprendizado no Ensino Superior discutidas na literatura e a ausência de produções científicas sobre a justaposição de demonstrações no Ensino Superior. Para investigar a influência exercida pelas demonstrações por justaposição, realizamos um estudo experimental focado em comparar o efeito dessa abordagem em relação ao exercício de demonstrar por escrito a partir de exemplos, nas demonstrações realizadas por alunos de graduação em matemática. Trabalhamos com quatro turmas de alunos da graduação em matemática dentro de disciplinas semestrais obrigatórias ministradas à distância devido à pandemia do COVID-19, para as duas turmas de alunos do primeiro ano utilizamos demonstrações de Álgebra Matricial, e para as duas turmas do 4° semestre, demonstrações de Geometria Euclidiana. Cada demonstração foi avaliada de acordo com os critérios desenvolvidos durante este estudo e devolvida individualmente na forma de feedback aos participantes, servindo como material para análise. Concluímos que para os alunos do primeiro ano, as demonstrações de justaposição desenvolveram aspectos complementares à outra abordagem, já com os alunos do 4º semestre observamos que associar as ações de escrita nas demonstrações por justaposição teve um impacto negativo à medida que os enunciados se tornaram mais complexos, mas o foco na ação de justapor demonstrações ajudou a manter baixo o nível de dificuldade das demonstrações de Geometria Euclidiana apesar do gradual avanço de sua complexidade.

Palavras-chave: Teoria das demonstrações; Ensino superior; Sistemas multimídia.

ABSTRACT

In this thesis, we define the procedure of proof by juxtaposition as an action similar to assembling a puzzle in which the pieces are segments of the text of a mathematical proof. We identified in the juxtaposition of proofs, in addition to characteristics common to reading and writing proofs, an emerging potential of the interaction between multiple media to contribute to the learning of proofs, which led us to investigate the influence of its exercise with undergraduate students in Mathematics. The relevance of this research stands out both for the role that proofs play in the formation of mathematicians, their absence in Basic Education and for the way in which they are considered prior knowledge for undergraduate students. Added to this, we have the difficulties related to their learning in Higher Education discussed in the literature and the absence of scientific productions on the juxtaposition of proofs in Higher Education. To investigate the influence exerted by proofs by juxtaposition, we carried out an experimental study focused on comparing the effect of this approach in relation to the exercise of writing proofs based in examples, in proofs carried out by undergraduate mathematics students. We worked with four classes of undergraduate students in Mathematics within mandatory semester courses taught at a distance due to the COVID-19 pandemic, for the two classes of first year students we used proofs of Matrix Algebra, and for the two classes of the 4th semester, proofs of Euclidean Geometry. Each proof was evaluated according to the criteria developed during this study and returned individually as a form of feedback to the participants, serving as material for analysis. We concluded that for the first year students, the juxtaposition demonstrations developed complementary aspects to the other approach, while with the 4th semester students we observed that associating the writing actions in the juxtaposition demonstrations had a negative impact as the utterances became more complex, but the focus on the action of juxtaposing proofs helped to keep the difficulty level of Euclidean Geometry proofs low despite the gradual increase in their complexity.

Key words: Proof theory; Education, Higher; Multimedia systems.

RESUMEN

En esta tesis definimos el procedimiento de demostración por yuxtaposición como una acción similar a armar un rompecabezas en el que las piezas son segmentos del texto de una demostración. Identificamos en la yuxtaposición de pruebas, además de características comunes a la lectura y escritura de pruebas, un potencial emergente de la interacción entre múltiples medios para contribuir al aprendizaje de las pruebas, lo que nos llevó a investigar la influencia de su ejercicio con estudiantes de grado en Matemáticas La relevancia de esta investigación se destaca por el papel que juegan las demostraciones en la formación de matemáticos, su ausencia en la Educación Básica y la forma en que son consideradas conocimientos previos para los estudiantes de pregrado. Sumado a esto, tenemos las dificultades relacionadas con su aprendizaje en la Educación Superior discutidas en la literatura y la ausencia de producciones científicas sobre la yuxtaposición en la Educación Superior. Para investigar la influencia que ejercen las demostraciones por yuxtaposición, llevamos a cabo un estudio experimental centrado en comparar el efecto de este enfoque en relación con el ejercicio de demostrar por escrito a partir de ejemplos, en demostraciones realizadas por estudiantes de matemáticas. Trabajamos con cuatro clases de estudiantes de matemáticas dentro de cursos semestrales obligatorios dictados a distancia por la pandemia del COVID-19, para las dos clases de estudiantes de primer año utilizamos demostraciones de Álgebra Matricial, y para las dos promociones de segundo año, demostraciones de Geometría Euclidiana. Cada demostración fue evaluada de acuerdo con los criterios desarrollados durante este estudio y devuelta individualmente a los participantes, sirviendo como material de análisis. Concluimos que para los estudiantes de primer año, las demostraciones de yuxtaposición desarrollaron aspectos complementarios al otro enfoque, mientras que con los estudiantes de segundo año observamos que asociar las acciones de escritura en las demostraciones de yuxtaposición tuvo un impacto negativo a medida que los enunciados se complejizaron, pero la centrarse en la acción de yuxtaponer pruebas ayudó a mantener bajo el nivel de dificultad de las pruebas de Geometría Euclidiana a pesar del aumento gradual de su complejidad.

Palabras clave: Teoría de las demostraciones; Enseñanza superior; Sistemas multimedia.

Sumário

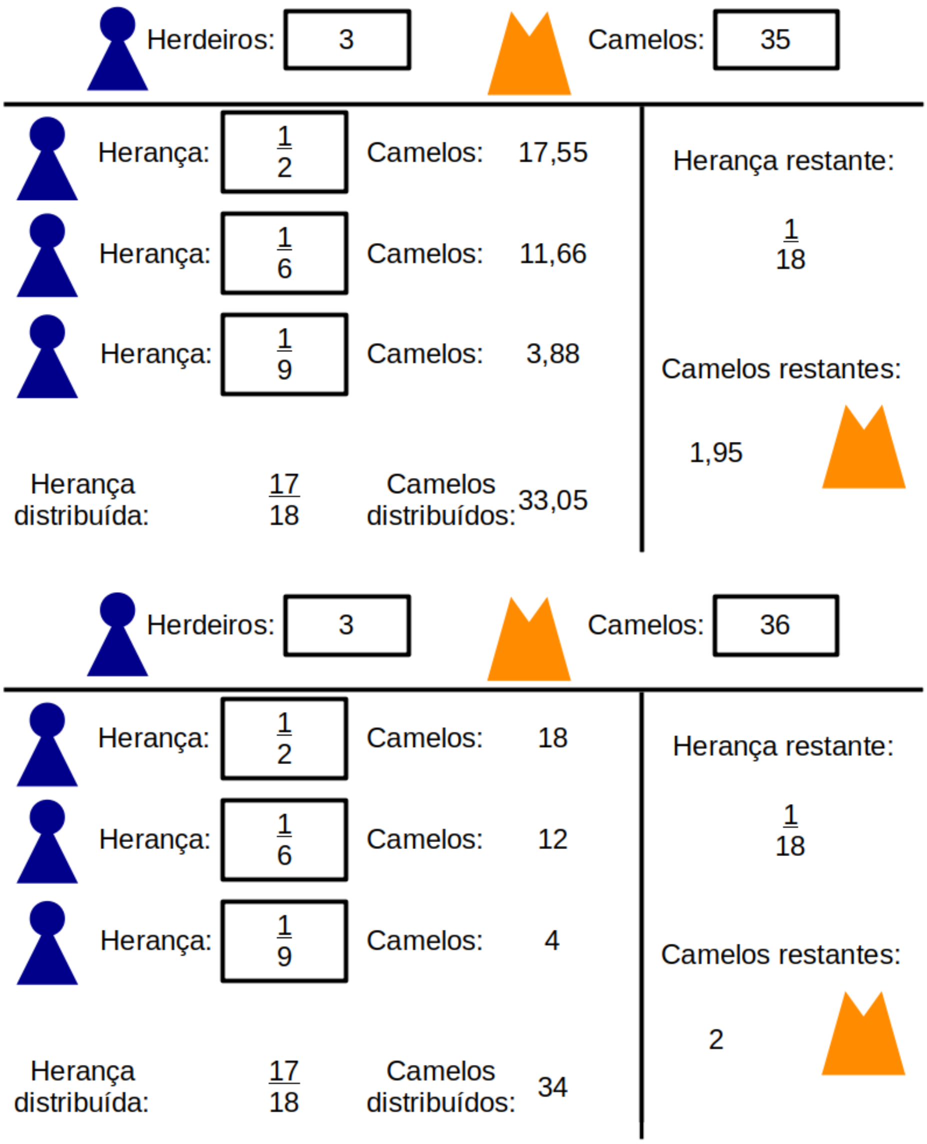
1. INTRODUÇÃO

Em março de 2019 iniciei meu doutorado com um projeto que visava investigar como os ambientes interativos influenciam a compreensão da matemática envolvida em textos literários sobre matemática. A ideia era desenvolver recursos computacionais interativos que dialogassem diretamente com o enredo do texto literário e permitissem alterar as condições dos problemas matemáticos originalmente apresentados no texto. Esses recursos seriam indexados nas respectivas obras literárias para que o leitor pudesse acessá-los e interagir com o problema de formas mais diversas do que as descritas no texto, aumentando assim seu repertório de experiências a esse respeito. Para exemplificar essa proposta, tomemos o dilema dos camelos apresentado no icônico livro de Malba Tahan (2013), “O homem que calculava”.

> - Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça e a nona parte de 35 também não são exatas? (TAHAN, 2013, p. 19)

O dilema desse problema gira em torno da dificuldade de fazer uma divisão não inteira do número total de camelos para os herdeiros e da solução proposta por Beremiz, protagonista da história, que consiste em emprestar o camelo do amigo à herança dos irmãos, o que preocupa seu próprio amigo ao temer a perda de seu único camelo depois de dividi-lo entre os herdeiros. Mas para surpresa de todos, esse camelo extra faz com que a divisão ocorra de forma exata, cada irmão se beneficiando com a adição daquele camelo à propriedade e no final sobrando dois camelos, um deles retornando então ao seu amigo e Beremiz reivindicando o outro camelo como pagamento pela solução do dilema. Um recurso computacional interativo para o dilema dos camelos apresentado por Malba Tahan (2013) poderia ser uma planilha que admitisse nas variáveis de entrada as condições iniciais do problema apresentado no livro, ou seja, quantos herdeiros temos, que fração da herança cada um receberá e o número de camelos. Com estas informações disponíveis para serem alteradas, podemos investigar outros contextos e explorar diferentes situações, como as consequências de adicionar um camelo à herança.

Figura 1 – Ilustração do recurso interativo para acompanhar o texto, à medida que alteramos os valores dentro das caixas, os demais valores são alterados



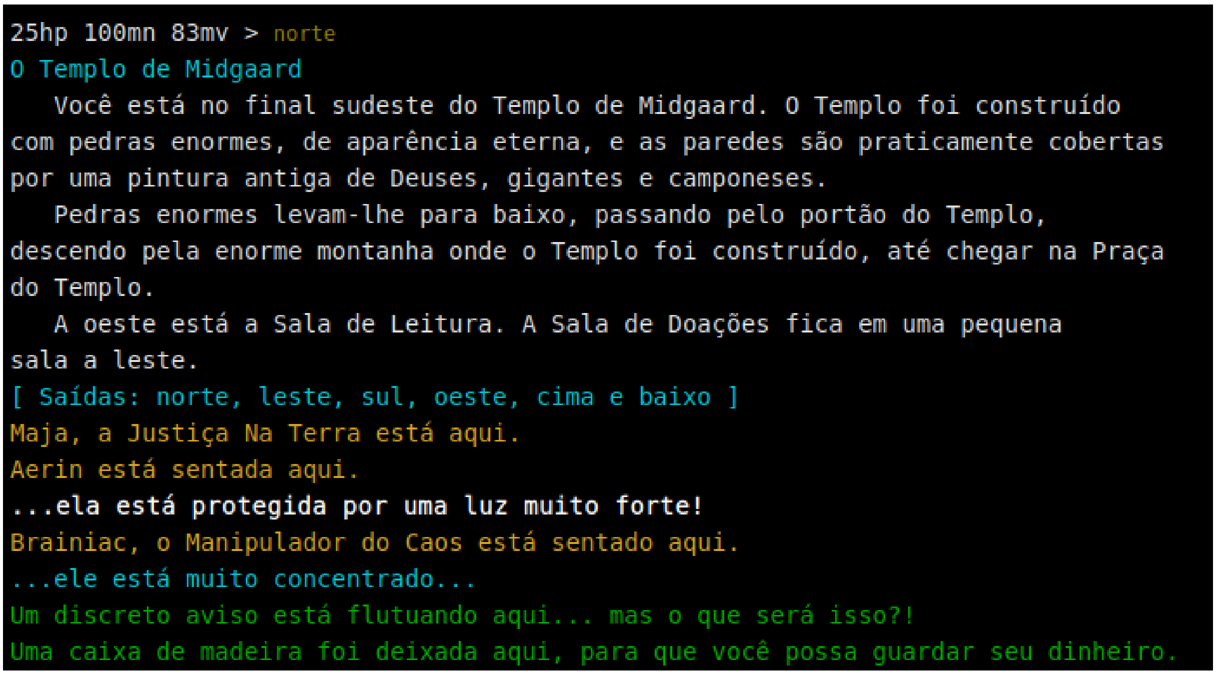
Fonte: Elaborado pelo autor.

Vale ressaltar que o recurso não se limitaria às duas situações apresentadas no livro, ou seja, o leitor poderia alterar o número de herdeiros, a fração da herança que cada herdeiro recebe e o número total de camelos, determinando automaticamente para cada configuração quantos camelos o herdeiro receberia e quantos camelos sobrariam. Na Figura 1 apresentamos as duas situações mostradas no texto original, mas representamos os valores que o usuário pode editar em caixas com bordas pretas, configurando assim diferentes situações além das descritas no livro. Levantamos a hipótese de que esses cenários variados e particulares para cada um que os utilizaria fomentariam o repertório de experiências do sujeito, proporcionando-lhe mais condições de compreender o contexto da narrativa original e poderia compreender melhor a matemática discutida em paralelo à sua leitura. No entanto esta proposta estagnou devido às seguintes dificuldades identificadas no 1º semestre do doutoramento: 1) A necessidade dos participantes lerem as obras e interagirem com os recursos, o que poderia levar a poucos participantes e em circunstâncias muito diversas; 2) Grande variedade de conteúdos desenvolvidos ao longo do trabalho e a dificuldade em avaliar aspectos específicos da matemática após a leitura/interação.

Como alternativa a essas dificuldades, pensamos em narrativas matemáticas mais curtas, que pudessem ser lidas sem interrupções e que cada texto tratasse de um conteúdo específico avaliável após a interação com o recurso computacional. No entanto isso parecia reduzir demais o campo de exploração deste trabalho, já que teríamos recursos computacionais desenvolvidos especificamente para cada narrativa, apresentando naturezas diferentes e com consideráveis influências da interpretação e clareza do texto literário utilizado. A fim de reduzir a influência da qualidade do texto literário e focar mais na interação com os recursos computacionais relacionados ao contexto, propomos uma narrativa interativa, ou seja, colocando o leitor na posição de protagonista e com o poder de ação no cenário, semelhante em muitos aspectos aos jogos RPG[1] digitais. Nesse sentido, focamos na interação com as experiências científicas de um aluno que visita um museu de ciências e para reduzir a complexidade gráfica de modelar o efeito das escolhas do usuário com os experimentos desta proposta, utilizariamos a mesma estética dos RPGs digitais baseados em texto. Nesse estilo de RPG, cenários, objetos interativos, personagens e ações explícitas são apresentados ao jogador com base em uma descrição textual detalhada, conforme mostra a Figura 2.

1 Sigla de Role-playing gaming, é um gênero de jogo que envolve interpretar papéis e assumir personagens em uma história.

Figura 2 – Descrição feita no RPG digital baseado em texto, Devil's Bob MUD



Fonte: Elaborado pelo autor em interação com o RPG digital Devil's Bob MUD, <http://www.debomud.org/play/>. Acesso em: 15 Set. 2022.

Utilizando a estrutura de um RPG digital baseado em texto, os experimentos, os cenários e as interações entre os personagens seriam apresentadas por descrições textuais, incluindo o efeito de variáveis alteradas nas experiências dos visitantes que estariam ligadas a expressões matemáticas cujo sistema mostraria automaticamente o resultado no contexto da narrativa. Para ilustrar melhor a ideia, mostramos na Figura 3 a forma como imaginamos esse ambiente e a interação com o usuário, no temos um experimento de combinar lentes objetivas e oculares de um microscópio para que a ampliação de um inseto atinja dimensões estipuladas. De forma semelhante ao exemplo anterior com camelos, há espaço para interação e manipulação das informações do problema, permitindo a escolha de lentes de várias ampliações e o sistema determina automaticamente o efeito dessas escolhas.

Figura 3 – Ilustração do personagem interagindo com um microscópio no museu da ciência e o resultado da ação apresentada textualmente

Troque as lentes do microscópio para ampliar um inseto com largura de 3 milímetros a uma largura entre 180 e 200 milímetros.
No microscópio:
Lente ocular 5x;
Lente objetiva 10x;
Inseto aparece 50 vezes maior;
Largura aparente: 150 milímetros.

Digite "ocular <número de vezes>" para trocar a amplitude da lente ocular. Digite "objetiva <número de vezes>" para trocar a amplitude da lente objetiva.

Marcos: ocular 6

Objetivo alcançado! O inseto com largura de 3 milímetros aparece no microscópio com uma largura entre 180 e 200 milímetros.
No microscópio:
Lente ocular 6x;
Lente objetiva 10x;
Inseto aparece 60 vezes maior;
Largura aparente: 180 milímetros.

Digite "ocular <número de vezes>" para trocar a amplitude da lente ocular. Digite "objetiva <número de vezes>" para trocar a amplitude da lente objetiva.

Marcos:

Fonte: Elaborado pelo autor.

Embora essa proposta resolvesse a questão do tempo de interação e controle da experiência com o recurso (dificuldade 1 apresentada na proposta anterior), ela ainda conflitava com a dificuldade 2, que é a grande variedade de conteúdos desenvolvidos durante os experimentos e a forma de avaliar aspectos da matemática após sua interação, dado o repertório de experiências muito variado disponibilizado por meio dos experimentos. Portanto pareceu necessário focar os experimentos para que sua convergência ocorresse em um conceito matemático específico cujos efeitos da interação pudessem ser medidos com mais clareza.

Revendo experiências com maratonas de programação e o sistema que utilizam para avaliar automaticamente os códigos submetidos, lembramos que os competidores costumam se preparar resolvendo problemas de edições anteriores e submetendo-os para avaliação automática no sistema “URI Online Judge”[2], que é semelhante ao utilizado pelas principais maratonas. Isso nos fez pensar sobre como demonstrações matemáticas poderiam ser avaliadas de forma mais automática, dando maior independência para que os estudantes pratiquem demonstrações, assim como os concorrentes da maratona de programação fazem para se preparar. Uma solução que surgiu para esse problema foi verificar a validade de uma demonstração recém-escrita procurando um texto semelhante em reconhecidas publicações matemáticas. Se encontrarmos algum texto semelhante nos procedimentos, diferindo apenas na escolha das palavras e aspectos que não afetam a generalidade do resultado, podemos inferir que nossa demonstração é tão válida quanto a encontrada. Um exemplo disso, é a demonstração da “regra da soma derivada” dada por Guidorizzi (1998) e mostrada na Figura 4, em comparação à demonstração dada por Stewart (2013) e mostrada na Figura 5. As demonstrações usam argumentos para chegar à mesma conclusão, e embora existam diferenças na forma como cada autor a apresenta, podemos dizer que diferem apenas na escolha das palavras e aspectos que não afetam a generalidade do resultado, portanto, se sabemos que uma dessas demonstrações é válida, a outra necessariamente também deve ser válida.

2 <https://www.beecrowd.com.br>. Acesso em 19 Nov. 2022.

Figura 4: Demonstração da propriedade de soma das derivadas

$$\text{(D1)}\ (f+g)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{[f(x)+g(x)] - [f(p)+g(p)]}{x-p}$$
$$= \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p} + \frac{g(x)-g(p)}{x-p} \right]$$
$$= f'(p) + g'(p).$$

(Em palavras: *a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas das parcelas.*)

Fonte: Guidorizzi (1998, p. 154).

Figura 5: Demonstração análoga à da Figura anterior referente à propriedade de soma das derivadas

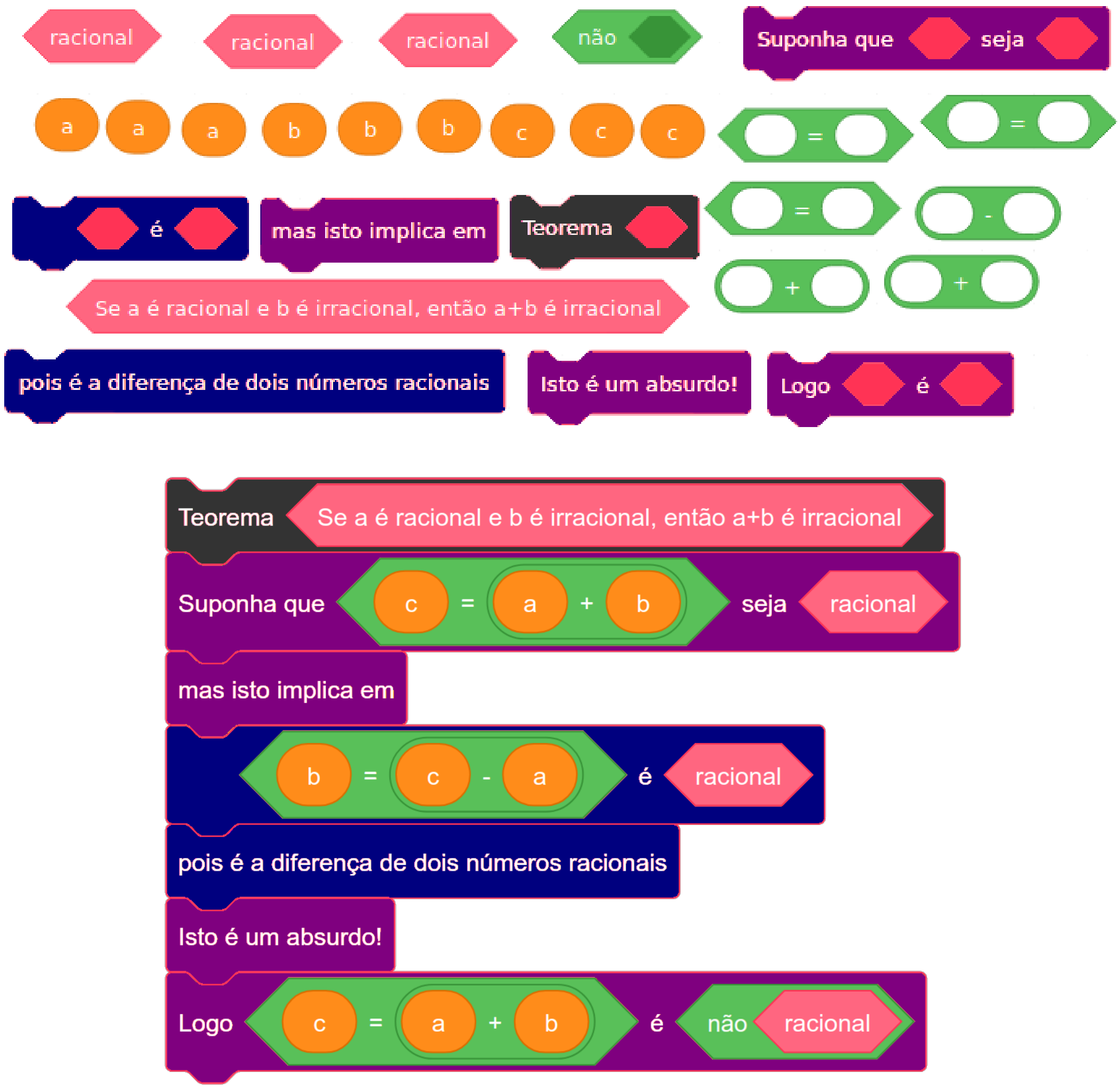
DEMONSTRAÇÃO Seja $F(x) = f(x) + g(x)$. Então

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(pela Propriedade 1)}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

Fonte: Stewart (2013, p. 161).

Para acelerar essas verificações poderíamos reduzir a gama de estratégias e escolhas de palavras disponíveis durante uma demonstração, assemelhando-se até certo ponto a uma linguagem de programação baseada em blocos. Na parte superior da Figura 6 apresentamos os termos e expressões necessários para mostrar que “se a ∈ ℚ e b ∈ 𝕀, então a + b ∈ 𝕀” e na parte inferior apresentamos a demonstração a partir desta estrutura baseada em blocos.

Figura 6 – Ilustração dos textos necessários para escrever a demonstração e como ficaria com as peças encaixadas corretamente



Fonte: Elaborado pelo autor em adaptação dos blocos usados na linguagem Scratch 3.0 <https://scratch.mit.edu/>. Acesso em: 15 Set. 2022.

Esta ideia de design casou com o que procurávamos investigar por se tratar de um recurso computacional interativo, que varia pouco entre as afirmações e permite o manuseio dos mais diversos conteúdos matemáticos mediante a justaposição dos segmentos de texto de uma demonstração. Esse recurso poderia ser facilmente indexado em livros virtuais (com hiperlinks ou códigos embutidos) e físicos (com códigos QR) relacionados à matemática, fornecendo uma maneira interativa do usuário demonstrar as propriedades destacadas com alguma importância na trama do texto e para entender a potencial contribuição que esse recurso traria na compreensão da matemática, seria viável associar diretamente as demonstrações movimentando blocos com as demonstrações nos conteúdos curriculares de disciplinas dos cursos de graduação em matemática.

1.1. Justapor demonstrações

Na matemática encontramos o verbo justapor frequentemente associado a procedimentos de representação geométrica que envolvem a colocação de objetos adjacentes a outros, conforme mostra a Figura 7.

Figura 7 –Exemplo do verbo justapor é usado em um sentido geométrico

Vamos obter uma fórmula para a área de um conjunto A assim descrito sem transformar a equação para coordenadas cartesianas. Façamos uma aproximação do conjunto A pela justaposição de setores circulares centrados na origem, procedendo da seguinte forma:

Fonte: Táboas (2008, p. 225).

O termo justaposição é usado com menos frequência em matemática no sentido de considerar textos colocados sequencialmente como no livro “Cálculo volume 1” do autor James Stewart (2013), quando após demonstrar separadamente duas propriedades relativas a derivadas e integrais, afirma que justapondo ambos os resultados demonstramos o Teorema Fundamental do Cálculo. Nesse contexto, podemos entender que a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo é dada pelas duas demonstrações anteriores (referidas no texto como demonstrações do Teorema Fundamental do Cálculo Parte 1 e 2 respectivamente) lidas em sequência, conforme mostrado na Figura 8.

Figura 8 – James Stewart usando o verbo justapor para formar a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo

Vamos finalizar esta seção justapondo as duas partes do Teorema Fundamental.

Teorema Fundamental do Cálculo Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.

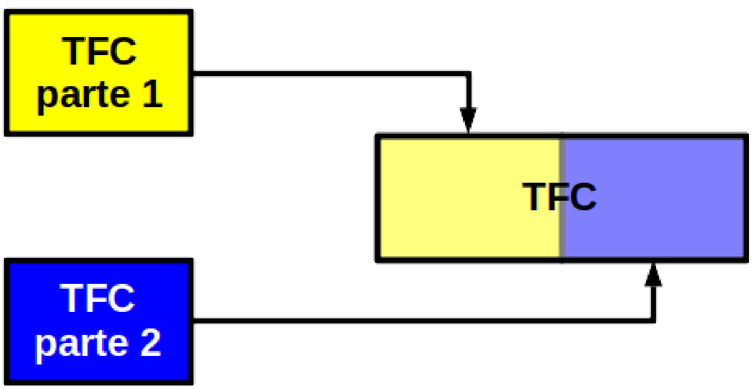
1. Se $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Fonte: Stewart (2013, p. 356).

Nessa perspectiva definimos a justaposição de uma demonstração como um procedimento de colocar um ao lado do outro os segmentos de texto de uma demonstração completa. Na situação do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) apresentado por Stewart (2013), teríamos a justaposição de uma demonstração completa dividida em dois segmentos de texto. Neste caso específico, embora não seja uma regra, ambos os segmentos são demonstrações completas de enunciados menores e a ordem em que poderiam ser justapostos não importaria. Na Figura 9, ilustramos essa ideia quando pensamos na demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) como a justaposição da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo Parte 1 e Parte 2 (TFC parte 1 e TFC parte 2, respectivamente).

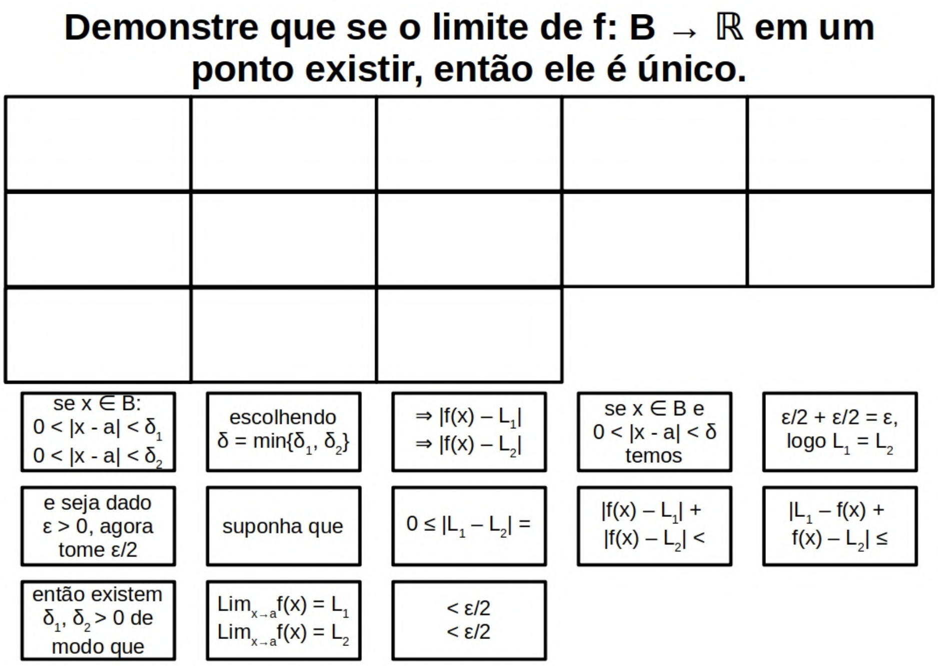
Figura 9 – Justaposição das partes do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Num contexto mais amplo podemos pensar em textos de demonstrações segmentados a partir de diferentes métricas (palavras, frases, expressões algébricas, símbolos matemáticos ou suas combinações) e o procedimento de justaposição desses segmentos, permitindo a formação de pelo menos uma demonstração válida. Na Figura 10 ilustramos uma demonstração de “singularidade de limite” dividida em 13 segmentos de texto, neste exemplo podemos ver uma situação em que a demonstração original é decomposta em segmentos de palavras, frases, expressões, símbolos matemáticos e suas combinações.

Figura 10 – Justaposição de diferentes partes de uma demonstração

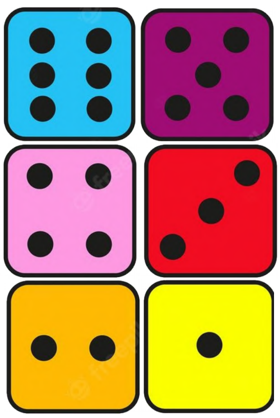
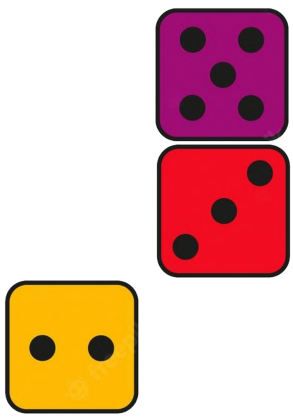
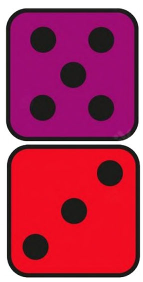


Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto a escolha de um verbo que especifique o procedimento de colocar lado a lado os segmentos de texto de uma demonstração completa visa sobretudo não introduzir novas terminologias no vocabulário das demonstrações. O verbo justapor foi escolhido após discussões iniciadas no exame de qualificação desta tese, que buscavam nomear a ação tratada de forma simples evitando neologismos e sem o uso de verbos que pudessem ter associações em comum com outros procedimentos matemáticos como unir, somar, adicionar ou associar. Ao longo desta tese utilizamos os termos justapor uma demonstração, demonstrar por justaposição, demonstração justaposta, entre outros, sempre indicando este procedimento.

Podemos pensar na justaposição de demonstrações como um processo de busca por combinações de segmentos, por isto consideramos a Teoria da Informação como um campo conveniente para inserir em nosso vocabulário alguns conceitos que estarão diretamente relacionados ao quanto sabemos sobre uma demonstração a partir do que vemos segmentado. No campo da Teoria da Informação, a informação é entendida como um objeto capaz de reduzir a incerteza dos eventos (SHANNON, 1948), para ilustrar podemos pensar no lançamento de um dado de seis lados com qualquer resultado igualmente provável, assumimos que adivinhar seu resultado está relacionado à incerteza de uma escolha correta versus cinco incorretas. Mas se nos disserem que o resultado é um número ímpar, com essa informação reduzimos o total de situações equiprováveis a três, da mesma forma se nos disserem apenas que o resultado é um número primo. Ou seja, saber que o resultado é ímpar ou primo carrega a mesma quantidade de informação, mas como são informações diferentes, fornecê-las juntas reduzirá uma incerteza maior que qualquer uma de suas partes, pois neste novo caso teremos apenas duas situações equiprováveis, no Quadro 1 apresentamos as possíveis situações equiprováveis à medida que são fornecidas informações sobre seus resultados.

Quadro 1 – Exemplo de incerteza ao lançar um dado de 6 faces

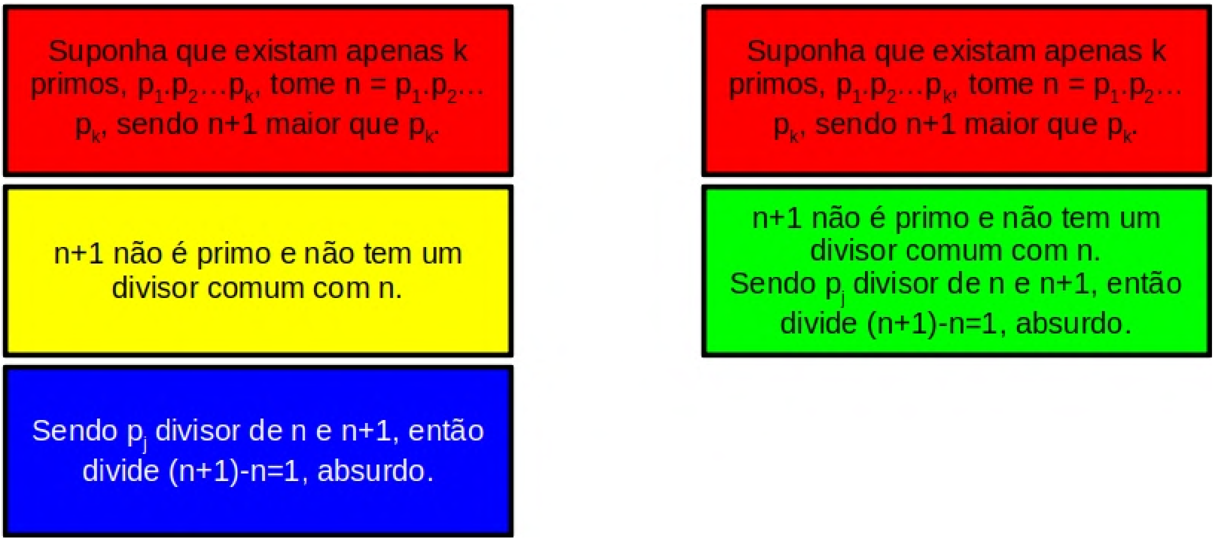
Informação fornecida			
Nenhuma	**É ímpar**	**É primo**	**É ímpar e primo**
			

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Teoria da Informação entendemos ruído como a diferença entre a mensagem original e a recebida (SHANNON, 1948), podendo ser de diversas naturezas como o som de um caminhão passando que abafa algumas palavras durante uma conversa (neste caso o ruído sonoro esconde parte da mensagem), ou pode advir da confusão do significado da mensagem como quando ouvimos palavras com pronúncias semelhantes, ou mesmo erros de digitação ou efeitos de autocorreção, que podem alterar as palavras recebidas. O ruído poderia ainda ser um efeito intencional destinado a dificultar que o conteúdo da mensagem seja recebido por outros indivíduos, como no envio de mensagens secretas. Já a redundância pode ser entendida como tudo o que é desnecessário para a mensagem (SHANNON, 1948), como os pleonasmos viciosos da língua portuguesa “entrar para dentro”, “sair para fora”, “subir para cima”, “descer para baixo”. Devido à presença involuntária de ruído nas mensagens, a redundância torna-se uma ferramenta fundamental para permitir a recuperação de conteúdos perdidos ou adulterados, durante uma conversa informal mesmo que se perca uma palavra podemos recuperar a mensagem que está sendo transmitida por meio da redundância da linguagem. A redundância aparece até mesmo em documentos e registros, como dígitos de verificação, reduzindo a chance de que erros de digitação que afetem outras contas/registros.

Esperamos criar associações entre justapor uma demonstração como sendo equivalente a receber uma mensagem com ruídos, já que a demonstração corretamente justaposta corresponderia à mensagem original e cada uma das partes da demonstração a serem justapostas carrega uma certa quantidade de informações sobre a demonstração completa. A possibilidade de recuperar a demonstração completa com a análise de suas partes indica que há redundâncias nas informações, essa redundância no caso pode residir no conhecimento do destinatário sobre a natureza da informação (uma demonstração válida), a finalidade da informação (demonstração de um enunciado específico) e os possíveis resultados de sua construção (combinações de partes disponíveis). Nesse sentido, se uma demonstração foi segmentada de duas formas diferentes, a primeira segmentação nas partes A, B e C, enquanto a segunda segmentação ocorre nas partes A e D. Como a demonstração original é a mesma para ambas as segmentações e A é repetido, temos que as partes justapostas B e C devem formar a parte D. Isso nos permite afirmar que entre as duas segmentações, a redundância na primeira é menor que na segunda. Ou seja, é mais difícil recuperar a mensagem original no primeiro caso, pois podemos justapor suas partes em ABC, ACB, BAC, BCA, CAB ou CBA, enquanto na segunda segmentação podemos justapor suas partes apenas em AD (equivalente a ABC) ou DA (equivalente a BCA). Ilustramos essa situação na Figura 11, usando a demonstração da "existência de infinitos números primos positivos" e como pode ser visto no exemplo, estas comparações se limitam no sentido de medir a dificuldade de uma demonstração segmentada original de duas formas diferentes, onde necessariamente todas as partes de uma delas são combinações das outras.

Figura 11 – Demonstração decomposta de duas formas diferentes, à esquerda com menor redundância, à direita com maior redundância



Fonte: Elaborado pelo autor.

1.2. Escrever, Ler, Completar, Apurar e Justapor demonstrações

Nesta tese trataremos da ação de justapor demonstrações, portanto discutiremos outras ações que percebemos relacionadas a esta, para começar temos que a escrever uma demonstração acarreta uma dificuldade maior do que a envolvida na resolução de problemas matemáticos, pois requer além do aprendizado do raciocínio matemático, a aplicação de conhecimentos especializados, bem como o uso e aquisição de uma linguagem própria (HAMMACK, 2013). Beck e Geoghegan (2010) apontam que no processo criativo de matemáticos profissionais durante a produção de uma demonstração, costuma-se utilizar anotações simbólicas acompanhadas de orientações textuais que justifiquem os procedimentos, elaborando um texto com o rigor necessário para validar aquela afirmação. No entanto este texto também deve ser aceito socialmente por seus colegas e pelo público, portanto, uma vez desenvolvido o argumento, é realizado o processo de elaboração da versão final de uma demonstração, omitindo os caminhos reais e as estratégias infrutíferas tentadas até a descoberta do argumento, transcrevendo os passos de forma limpa e clara, ocultando os verdadeiros caminhos que levaram a essa demonstração e que apontariam a origem de engenhosas construções ou mesmo as dificuldades envolvidas na elaboração do raciocínio. Esse uso da linguagem na produção da versão final aparece, por exemplo, quando observamos as Figuras 4 e 5, que mostram a mesma estratégia para demonstrar uma afirmação, mas expressa na forma de textos com sintaxes diferentes. Além de uma variação sintática no texto da demonstração de uma afirmação, escrever uma demonstração é um processo de múltiplos caminhos, pois podemos ter diferentes formas de demonstrar o mesmo enunciado, conforme exemplificado por Alsina e Nelsen (2010, p. 10) que apresentam três argumentos distintos para demonstrar que “existem infinitos números primos positivos”.

> Suponha que existam apenas k primos, p1.p2…pk.
> Tome n=p1.p2…pk.
> Sendo n+1 maior que pk, n+1 não é primo e não tem um divisor comum com n.
> Sendo pj divisor de n e n+1, então divide (n+1)-n=1, o que é um absurdo (ALSINA, NELSEN, 2010, p. 10, tradução própria).

> É suficiente mostrar que para qualquer Natural n, existe um primo p maior do que n.
> Para isto considere qualquer primo p que divida n!+1 (ALSINA, NELSEN, 2010, p. 10, tradução própria).

> Tome n>1 um Inteiro qualquer.
> Sendo n e n+1 inteiros consecutivos, eles são primos relativos.
> Então N_2=n(n+1) deve ter pelo menos dois diferentes fatores primos.

> Analogamente n(n+1) e n(n+1)+1 são inteiros consecutivos, e por isto primos relativos.
> Assim N_3=n(n+1)[n(n+1)+1] deve ter pelo menos três diferentes fatores primos.
> Este processo pode ser continuado indefinidamente (ALSINA, NELSEN, 2010, p. 10, tradução própria).

Por outro lado Rav (1999) argumenta que o interesse dos matemáticos em ler demonstrações vai além de uma necessidade real de saber se uma determinada afirmação é verdadeira, pois confirmar a validade de uma determinada afirmação pode ser simplesmente uma ação de consultar fontes confiáveis, e o interesse dos matemáticos pela leitura de demonstrações está associado ao entendimento de como funcionava a estrutura daquele argumento, para reconhecer ou reproduzir os meios com os quais o raciocínio foi desenvolvido. Essa interpretação é reforçada com os resultados obtidos na pesquisa de Weber (2015) com quatro alunos de graduação em matemática aprovados nas disciplinas específicas do conteúdo pesquisado e observa o efeito de diferentes estratégias de leitura de demonstrações na compreensão de demonstrações, identificando as seguintes estratégias eficazes:

1) Compreender o enunciado do teorema: Essa estratégia permitiu que os participantes entendessem o significado de um dos enunciados da demonstração, e também os auxiliou a compreender a estrutura da demonstração que seria usada para estabelecer o teorema;

2) Tentar demonstrar o teorema antes de ler sua demonstração: A estratégia forneceu a motivação para ler a demonstração, bem como antecipar a estrutura de demonstração que seria utilizada e como a demonstração seria estruturada;

3) Considerar a estrutura de como demonstrar aquele enunciado: A estratégia ajudou os estudantes a entender por que as suposições e conclusões da demonstração eram apropriadas;

4) Dividir a demonstração em partes ou sub-demonstrações: A estratégia não só permitiu aos participantes ver como a demonstração poderia ser dividida, mas também ver como a demonstração poderia ser resumida;

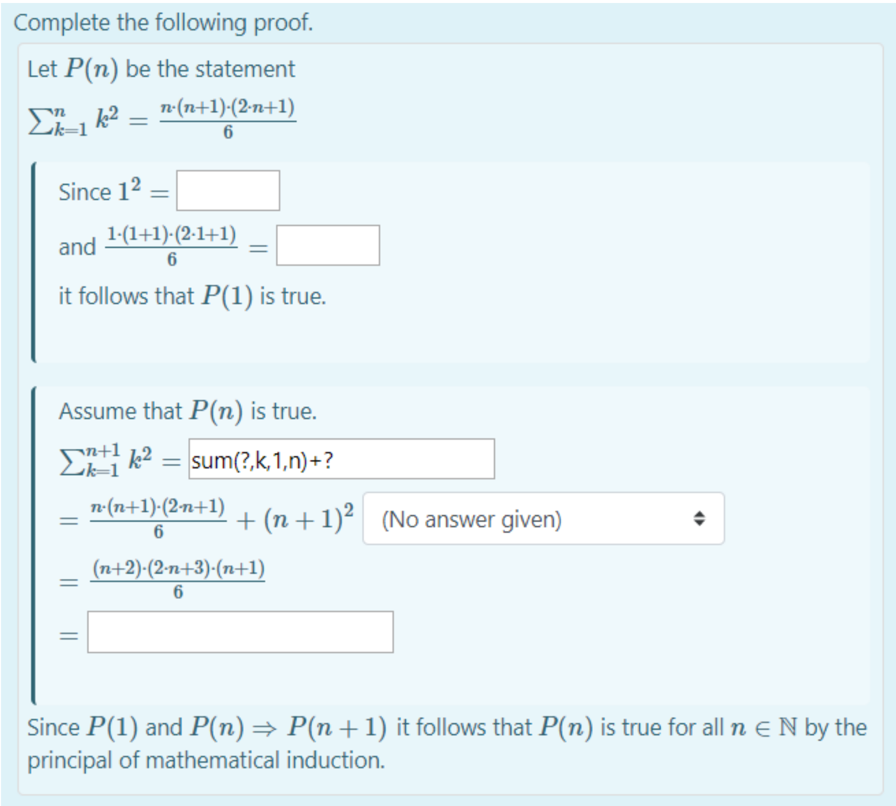
5) Utilizar de diferentes maneiras declarações específicas na demonstração: Essa estratégia ajudou os estudantes a ver como a demonstração se aplicava a um

exemplo específico, além de serem capazes de entender as declarações dentro da demonstração e ver como elas foram justificadas;

6) Comparar o método da demonstração com a própria abordagem: Essa estratégia ajudou a identificar métodos que podem ser úteis na demonstração de outros teoremas.

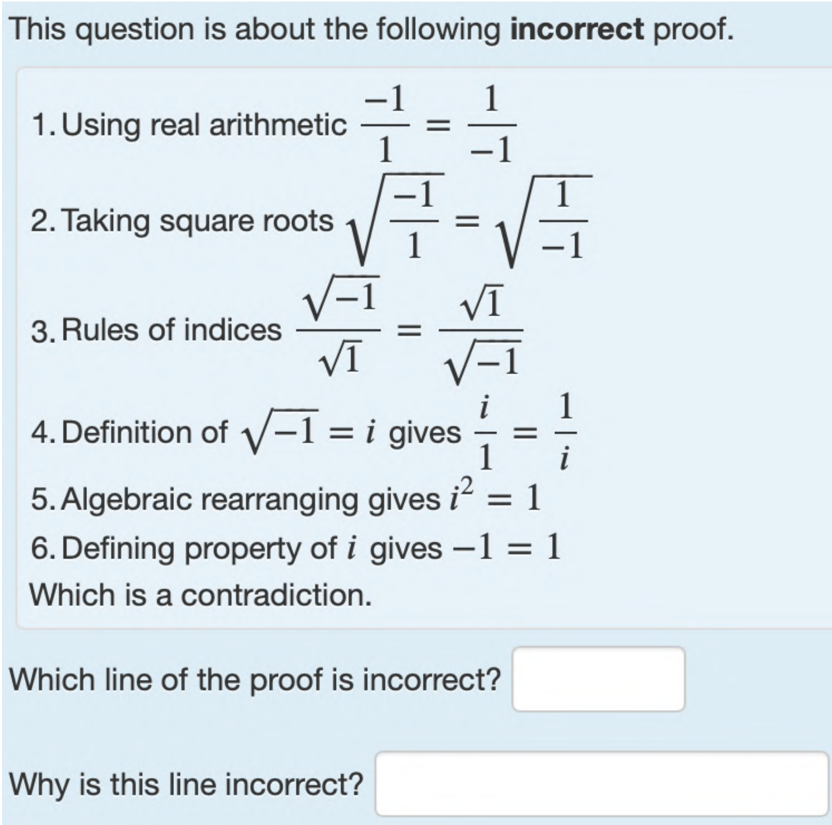
Além da redação e leitura das demonstrações temos outras duas ações apresentadas na pesquisa de Bickerton e Sangwin (2021), a primeira é completar uma demonstração, que envolve reconhecer como devem ser os trechos que faltam no texto para que ele seja válido para aquela enunciado, tratada pelos autores na Figura 12. A segunda ação é apurar uma demonstração, o que implica entender ao longo do texto onde se encontra um procedimento que torna a demonstração inválida para aquele enunciado e explicando o motivo disso, situação tratada pelos autores na Figura 13.

Figura 12 – Atividade de completar uma demonstração



Fonte: Bickerton e Sangwin (2021, p. 3).

Figura 13 – Atividade de identificar a falha em uma demonstração



This question is about the following **incorrect** proof.

1. Using real arithmetic $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$
2. Taking square roots $\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$
3. Rules of indices $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$
4. Definition of $\sqrt{-1} = i$ gives $\frac{i}{1} = \frac{1}{i}$
5. Algebraic rearranging gives $i^2 = 1$
6. Defining property of i gives $-1 = 1$

Which is a contradiction.

Which line of the proof is incorrect?

Why is this line incorrect?

Fonte: Bickerton e Sangwin (2021, p. 17).

A partir do que foi exposto, justapor uma demonstração envolve um processo semelhante à escrita de uma demonstração com a restrição de quais palavras, frases, expressões e símbolos estão disponíveis para uso, semelhante à leitura das demonstrações dado que ao longo do processo de justaposição é preciso entender o papel de cada componente separadamente e analisar o que significam suas combinações até que considere a demonstração completa. Ao contrário do processo de escrita, o processo de completar e apurar uma demonstração pode estar simultaneamente associado à justaposição, pois como já existem algumas combinações isoladas de segmentos e precisamos fazer as suas junções, passa a ser necessário encontrar componentes que façam a união adequada entre o que queremos e o que já foi elaborado numa tentativa de reconhecer se a dificuldade em localizar as partes que faltam não é consequência de algum componente em uma outra posição que invalida a demonstração. Além dessas semelhanças mencionadas, a justaposição traz características próprias associadas à mídia[3] tangível por meio da qual nos conectamos para acessar suas informações. Mcluhan (1996) afirma que a mesma informação transmitida em diferentes meios será recebida de forma diferente pelo mesmo destinatário, Ullmer e Ishi (2000) definem mídias tangíveis como aquelas relacionadas ao uso de um sistema de artefatos físicos para contato com a informação. As mídias tangíveis já são abordagens bem consolidadas, principalmente no ensino de Geometria, com instrumentos de régua e compasso, relacionando além da visão, a ação de manipular os instrumentos para elaborar construções geométricas. Da mesma forma, a justaposição de demonstrações ocorre em meio tangível, pois está ligada à ação de dispor os segmentos de texto em ordem, como seria feito com um quebra-cabeça.

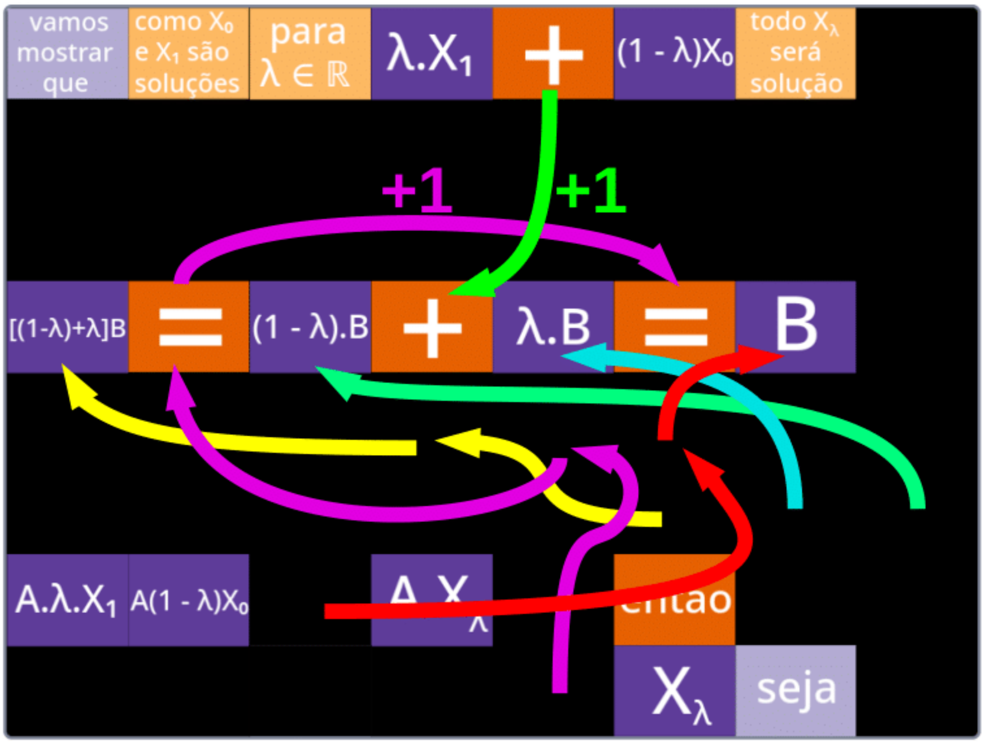
No exame de qualificação desta tese foi levantada a questão se o meio tangível de justaposição estava relacionado com o processo de elaboração da demonstração matemática, ou se a demonstração era primeiro elaborada mentalmente ou noutro suporte (como o papel) e depois as componentes designados para suas respectivas posições. Se considerarmos o conceito de aprendizagem multimídia proposto por Mayer (1997), a ação de justapor demonstrações envolve mídias tangíveis ligadas a mídias visuais (nos textos de cada parte e em suas combinações) e o acesso à informação por diferentes meios proporcionaria um processo de construção da informação, que seleciona e conecta ativamente diferentes conhecimentos disponíveis, combinando distintos sistemas cognitivos para processar a informação. Logo, era de se esperar que a mídia tangível contribuísse para o processo de raciocínio envolvido na atribuição dos componentes que formam uma demonstração válida para a respectiva afirmação.

Após o exame de qualificação viemos responder a esta questão empiricamente, através de uma experiência realizada com alunos da disciplina de Geometria Analítica, registrando o movimento de cada componente de 10 demonstrações justapostas deixadas como atividades semanais ao longo de um semestre e observamos como os alunos moviam os componentes, constantando situações recorrentes em que os segmentos da demonstração eram combinados, deslocados e reposicionados durante o processo de justaposição. Isso indica que os

3 Na Teoria do Meio, a mídia é por vezes entendida como a mensagem, a mídia é tudo que permite a transmissão de informações, seja a voz, o papel, a tela do computador. (MCLUHAN, 1996).

meios tangíveis que permitem a movimentação dos componentes da demonstração proporcionaram a construção de informações sobre a demonstração original, e que a movimentação dos componentes se inicia antes que o aluno tenha clareza sobre o argumento a ser utilizado. Em Silva (2022) discutimos um exemplo em que o aluno precisa mostrar por justaposição que "para as matrizes A_{mxn} e B_{mx1}, se A.X = B tem duas soluções $X_0 \neq X_1$, então existem infinitas soluções", as "setas" na Figura 14 indicam o movimento dos componentes de demonstração, enquanto os sinais "+1" indicam qual componente foi duplicado e a posição em que o componente duplicado foi colocado. Na Figura 14, o aluno começou a montar os componentes desde o início da demonstração, definindo parcialmente os componentes necessários, quando descobre qual deve ser a conclusão desse argumento e então justapõe os componentes para formar o final do texto, em seguida elabora as etapas intermediárias e ajusta as definições iniciais para validar o argumento proposto. Esta observação indica que a interação com os componentes, vindos de um meio tangível, foi necessária para recuperar esta informação (demonstração completa).

Figura 14 – Processo de justapor os segmentos de uma demonstração



Fonte: Silva (2022, p. 4).

1.3. Pergunta de pesquisa e objetivos

Conforme apresentamos, o estudo concentra-se na abordagem de demonstrar por justaposição. Compreendendo a influência que a realização de exercícios de justaposição de demonstrações tem sobre a ação de demonstrar, podemos determinar situações em que traria maiores contribuições na elaboração de outras demonstrações. Para investigar empiricamente essa abordagem, optou-se pelo público do Ensino Superior, pois como o pesquisador não tinha vínculo docente no momento de planejar sua coleta de dados, considerou que seria mais fácil e viável encontrar participantes com condições e disponibilidade para demonstrar propriedades matemáticas entre adultos matriculados nos cursos de graduação em matemática. A seguir, apresentamos nossa questão de pesquisa e seus objetivos.

Pergunta de pesquisa: Como demonstrar por justaposição influencia as demonstrações desenvolvidas por graduandos em matemática?

Objetivo geral: Compreender a influencia que demonstrar por justaposição exerce nas demonstrações produzidas.

Objetivo específico 1: Associar a influencia das demonstrações por justaposição com os erros/dificuldades identificados nas demonstrações escritas.

Objetivo específico 2: Relacionar a influencia das demonstrações por justaposição com o desenvolvimento de demonstrações válidas.

Esta tese está dividida em mais quatro capítulos, descritos a seguir.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: Explicamos um pouco sobre a origem histórica das demonstrações, sua dificuldade no campo da pesquisa matemática e como elas se apresentam em diferentes etapas. Destacamos a presença de demonstrações na Educação Básica, livros didáticos para o Ensino Superior, abordamos algumas teorias e estudos relacionados à dificuldade que os alunos do Ensino Superior têm em demonstrar, modelos considerados necessários para o aprendizado, abordagens que contribuem para o seu desenvolvimento, as diferenças de nossa proposta com outros trabalhos acadêmicos e suas semelhanças com práticas de professores de matemática compartilhadas.

METODOLOGIA: Caracterizamos nosso trabalho como pesquisa experimental, mostramos o desenvolvimento do estudo, passando pelo comitê de ética, as coletas de dados realizadas e descrevemos outros aspectos considerados necessários para sua replicação. Discutimos o tratamento dos dados coletados nas Coletas realizadas e como planejamos suas análises.

RESULTADOS: Apresentamos e interpretamos os resultados obtidos.

CONSIDERAÇÕES: Encerramos a tese explicando como os objetivos da pesquisa foram atendidos e apresentando a resposta para a pergunta que norteou este trabalho organizando nossas percepções sobre os aspectos interpretativos dos resultados, relacionando-os com a literatura e traçando paralelos entre o que foi observado em nosso estudo com as teorias e estudos anteriores nos quais nos apoiamos. Por fim, apresentamos o que faríamos de diferente nesta pesquisa, como a reaplicaríamos e a forma na qual o ambiente de justaposição continuou se desenvolvendo para além da respectiva tese.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ben-Ari (2012) explica “demonstrar” como o processo de deduzir uma proposição de operadores aplicados a um conjunto de outras proposições previamente aceitas, resultando na proposição deduzida ser tão verdadeira quanto as proposições previamente aceitas. No entanto, apesar de a matemática ter surgido espontaneamente para muitas culturas, motivada pelo fator de desenvolvimento humano associado à contagem de objetos, delimitação de áreas ou compreensão de fatos naturais, as demonstrações só surgem a partir dos gregos, que passaram a tratá-la como uma abordagem puramente abstrata, desconectado dos contextos ou das necessidades práticas, registrando os primeiros procedimentos de argumentação lógica para garantir a validade geral de certas afirmações (CHEMLA, 2015). Segundo Ben-Ari (2012), o estudo da lógica foi iniciado pelos antigos gregos a partir da ênfase dada às habilidades de linguagem e raciocínio, combinando retórica e gramática a lógica correspondeu a uma das primeiras disciplinas ensinadas aos jovens, com ênfase na formação dos gregos, os silogismos. No entanto, Chemla (2015) aponta que por muito tempo na matemática as demonstrações não foram consideradas necessárias para garantir a veracidade das afirmações, sendo sua validade por vezes atribuída ao sucesso em todos os casos já comprovados ou aos argumentos de autoridades na área, somente no século XIX quando a lógica passou por um processo de formalismo associado à matemática, a fim de evitar possíveis falhas derivadas da subjetividade na linguagem natural, a presença de demonstrações passou a ser vista como estritamente necessária. Recebendo um imenso papel na primeira metade do século XX com a influência de David Hilbert que se mantém até hoje, pois demonstrar a validade/falha de um enunciado é a base da Matemática Moderna, termo que se refere ao nosso atual sistema axiomático baseado em princípios lógicos rígidos (ROSSI, 2006).

Produzir uma demonstração pode variar de uma ação trivial a uma tarefa que beira o impossível, isso pode ficar mais claro diante de alguns teoremas cuja afirmação apesar de bastante simples permaneceram (e alguns ainda permanecem) por séculos sem se demonstrar verdadeira ou inválida. Por exemplo, o livro “Fermat's Last Theorem” (SINGH, 1997), fala sobre um teorema conjecturado pelo matemático francês Pierre de Fermat em 1637, afirmando “não existirem x, y e z

Naturais maiores que 0, tais que $x^n + y^n = z^n$, para n Natural maior que 2”. Apesar da aparente simplicidade da afirmação e da facilidade de verificação dos dados x, y e n, se existe um z que satisfaça a igualdade, a demonstração de que não há solução para isso foi elaborada apenas 358 anos após sua formulação (em 1995) pelos matemáticos Andrew Wiles e Richard Taylor. Eventualmente teremos enunciados cujas estratégias convencionais não servirão, como no “Fermat's Last Theorem”, cujo autor do enunciado (Pierre de Fermat) escreveu em um nota na borda da página que só não mostrava a demonstração pois não tinha espaço no papel. Este teorema foi inicialmente tratado (e por mais de 300 anos) como um problema dentro da teoria dos números, porém, sua demonstração só foi possível como consequência direta do Teorema de Shimura-Taniyama-Weil, que estabelece uma relação entre a Teoria dos Números e as Curvas Elípticas (SINGH, 1997).

O cenário anterior expressa a realidade presente na ação de demonstrar conjecturas (desde que a afirmação não seja confirmada ou refutada por uma demonstração, é considerada uma conjectura) e é tratada no drama “Tio Petros e a conjectura de Goldbach” (DOXIADIS, 2001), uma obra de ficção que aborda a frustração de um habilidoso matemático em seus esforços para demonstrar a conjectura de Goldbach. Esta conjectura foi formulada em 1742 e propõe que “todo número par maior que 2 pode ser representado pela soma de dois números primos”. Novamente, apesar da afirmação simples, a Conjectura de Goldbach permanece até hoje sem uma demonstração. Embora de acordo com Hanna, Jahnke e Pulte (2010), ao contrário do “Fermat's Last Theorem”, que permitia relacionar a Teoria dos Números com as Curvas Elípticas, a Conjectura de Goldbach não parece estar associada a nenhum campo de relevância prática para a matemática, mas mesmo assim há grande interesse da comunidade matemática em sua demonstração.

2.1. Demonstrações no currículo

A presença de demonstrações matemáticas na Educação Básica, apesar de ganhar força durante o movimento da Matemática Moderna (HARVEY, WAITS e DEMANA, 1995), atualmente não é uma tendência no cenário brasileiro, embora como veremos nesta seção, a discussão sobre o ensino de demonstrações matemáticas na Educação Básica perdure por várias décadas. Mazzi (2018) aponta que trabalhar com demonstrações matemáticas na Educação Básica pode favorecer a compreensão de suas estruturas mais abstratas, característica presente com destaque nos conteúdos de geometria tanto em livros didáticos quanto na divulgação de softwares de geometria e nas chamadas "demonstrações matemáticas dinâmicas" (NÓBRIGA, 2019). No Brasil, a nota do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) permite o ingresso em cursos de matemática na maioria das universidades públicas brasileiras, porém, suas questões de matemática são as mesmas para todos os candidatos e somente após o cálculo da nota é que o curso é escolhido. Ainda assim, podemos identificar no ENEM, questões cuja resolução carece de demonstração, como na Questão 176 do Caderno Rosa 2020, apresentada no Quadro 2, juntamente com a nossa resolução para a mesma.

Quadro 2 – Questão 176, do caderno Rosa do ENEM 2020 e resolução do autor

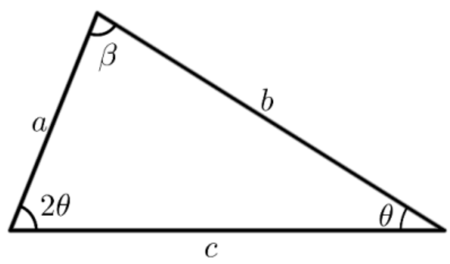
Questão 176 2020enem2020enem2020enem A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (r). Ela é dada por $$f = \frac{A}{r^B}$$ O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, $r = 1$ para a palavra mais frequente, $r = 2$ para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente. A e B são constantes positivas. Diponível em: http://klein.sbm.org.br. Acesso em: 12 ago. 2020 (adatpado). Com base nos valores de $X = \log(r)$ e $Y = \log(f)$, é possível estimar valores para A e B. No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é	**Resolução:** A partir do enunciado, temos: f = A/rB, X = log(r) e Y = log(f) Assim, log(f) = log(A/rB) ⇔ log(f) = log(A) – log(rB) ⇔ log(f) = log(A) – B.log(r) ⇔ Substituindo X e Y, temos: Y = log(A) – B.X ou isolando o X, temos: X = (log(A) –Y)/B

Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 23 Nov. 2022.

Esta questão do exame exemplifica um contexto em que o processo de demonstração é usado na resolução, aspecto também no vestibular organizado pela COMVEST (Comissão Permanente para os Vestibulares) gerido pela Universidade Estadual de Campinas como exemplificamos nas Figuras 15 e 16 da segunda fase da prova de 2018 com duas questões de tópicos que pediam explicitamente para escrever uma demonstração (nas questões utilizam o termo prova, que pode ser entendido no contexto como sinônimo de demonstração).

Figura 15 – Questão 17, item b, da 2ª fase do vestibular da COMVEST de 2018

A figura abaixo exibe um triângulo com lados de comprimentos a, b e c e ângulos internos θ, 2θ e β.



a) Supondo que o triângulo seja isósceles, determine todos os valores possíveis para o ângulo θ.

b) Prove que, se $c = 2a$, então $\beta = 90^o$.

Fonte: <https://www.comvest.unicamp.br>. Acesso em: 19 Nov. 2022.

Figura 16 – Questão 18, item a, da 2ª fase do vestibular da COMVEST de 2018

Sabendo que p e q são números reais, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

a) Prove que para quaisquer p e q teremos $B^T AB \geq 0$.

b) Determine os valores de p e q para os quais o sistema linear nas variáveis reais x, y e z, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$, tem infinitas soluções.

Fonte: <https://www.comvest.unicamp.br>. Acesso em: 19 Nov. 2022.

Nas estatísticas publicadas pela COMVEST, essas duas questões (17 e 18 da 2ª fase de 2018) são classificadas com base no percentual de candidatos que acertaram, como Difíceis, e na consistência dessa avaliação de acordo com essas mesmas estatísticas, são classificadas como Ótimas. Essa classificação é frequentemente repetida para outras questões que envolvem demonstrações encontradas em outros anos, por exemplo a questão 9, item b de 2019 e a questão 8 item a de 2020, ilustradas nas Figuras 17 e 18 respectivamente (<https://www.comvest.unicamp.br>. Acesso em: 19 Nov. 2022).

Figura 17 – Questão 9, item b, da 2ª fase do vestibular da COMVEST de 2019

Sabendo que c é um número real, considere a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 3x + c$, definida para todo número real x.

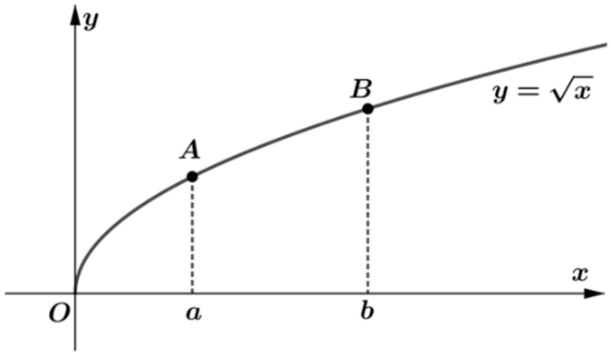
a) Determine todos os valores de c para os quais $f(-1)f(1) = f(-1) + f(1)$.

b) Sejam p e q números reais distintos tais que $f(p) = f(q)$. Prove que p e q não podem ser ambos números inteiros.

Fonte: <https://www.comvest.unicamp.br>. Acesso em: 19 Nov. 2022.

Figura 18 – Questão 8, item a, da 2ª fase do vestibular da COMVEST de 2020

A figura abaixo exibe, no plano cartesiano, o gráfico de $y = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$, em que os pontos A e B têm abscissas $x_A = a > 0$ e $x_B = b > a$, e O é a origem do sistema de coordenadas.



a) Prove que os pontos A, B e $C = (-\sqrt{ab}, 0)$ são colineares.

b) Para $b = 3$, determine o valor de a para o qual a distância da origem ao ponto A é igual à distância do ponto A ao ponto B.

Fonte: <https://www.comvest.unicamp.br>. Acesso em: 19 Nov. 2022.

De acordo com as classificações publicadas nas estatísticas do Vestibular COMVEST, essas questões são consideradas Difíceis ou Muito Difíceis, e essas classificações têm uma consistência considerada Ótimas ou Excelentes. Isso significa que são questões que na maioria das vezes só são respondidas corretamente pelos alunos com melhor desempenho no exame, resultado associado a questões que envolvem a elaboração de demonstrações, logo podemos interpretar como um indício de que apenas os alunos com melhores desempenhos conseguiram desenvolver as demonstrações solicitadas no exame. Como essas questões são pouco frequentes nos exames (ENEM e Vestibular COMVEST), não é garantido que quem ingressou na graduação em matemática por essas vias já tenha visto esse conteúdo antes, ou mesmo que ao errar estas respostas não alcancem nota suficiente para se matricular nos respectivos cursos. Essa situação é ilustrada quando observamos o resultado do estudo de Caldato (2018) sobre os estímulos recebidos pelos alunos do primeiro ano da Licenciatura em Matemática relacionados a demonstrações, e observa que dos 78 participantes com quem a pesquisa foi realizada, menos de 9% lembram de ter visto demonstrações na Educação Básica.

Em vários livros utilizados como referências para as disciplinas obrigatórias de matemática na graduação, presumem que os alunos já possuem experiência com demonstrações, isso pode ser visto no exemplo da Figura 19 extraído do livro “Cálculo com variável” de Táboas (2008). A primeira menção feita a demonstrações matemáticas ocorre logo após enunciar quatro propriedades da função módulo e deixar suas respectivas demonstrações como exercícios para o leitor.

Figura 19 – Demonstrações deixadas como exercícios.

A definição 1.1.2 implica as seguintes propriedades:

1. $|x| = |-x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$
2. $|x| \geqslant 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$
3. $x \leqslant |x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$
4. $|xy| = |x||y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},$

cujas demonstrações são deixadas como exercício.

Fonte: Táboas (2008, p. 12).

Esta é a primeira menção à palavra demonstração em um livro dedicado a uma disciplina normalmente oferecida no 1º semestre dos cursos de graduação em matemática e já coloca o aluno no exercício de demonstrar sem maiores explicações ou mesmo exemplos do que é uma demonstração. Na página seguinte (página 13), aparece o primeiro exemplo de demonstração, embora o termo não apareça junto, sendo tratado como exemplo de utilização de uma das propriedades anteriores, mas cujo processo de resolução pode ser entendido como uma demonstração conforme ilustramos na Figura 20.

Figura 20 – Primeira demonstração apresentada no livro

Exemplo 1.1.3. (1) Dado $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a, \qquad (1.1.1)$$

como está indicado na figura 1.1.1.

De fato, multiplicando a desigualdade $-a < x < a$ por -1, obtemos a equivalência $-a < x < a \Leftrightarrow -a < -x < a$. Logo

$$-a < x < a \quad \Rightarrow \quad -a < -x < a \ \text{ e } \ -a < x < a \quad \Rightarrow \quad |x| < a,$$

uma vez que, sempre, $|x| = x$ ou $|x| = -x$. Reciprocamente, de acordo com as propriedades 1 e 3, acima, podemos escrever

$$|x| < a \ \Rightarrow \ |-x| < a \ \text{ e } \ |x| < a \ \Rightarrow \ -x < a \ \text{ e } \ x < a \ \Rightarrow \ -a < x < a.$$

Fonte: Táboas (2008, p. 13).

Somente na página 14 aparece o primeiro exemplo de demonstração ao apresentar a “Desigualdade Triangular” mostrado na Figura 21, ainda sem uma explicação mais específica sobre o que é uma demonstração a palavra foi inserida no corpo do texto como um termo associado e complementar a esse procedimento.

Figura 21 – Primeiro exemplo de demonstração apresentada como demonstração

DESIGUALDADE TRIANGULAR. *Para quaisquer* $a, b \in \mathbb{R}$*:*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{1.1.2}$$

Demonstração. Pela propriedade 3 subseqüente à definição 1.1.2, página 12, valem as seguintes desigualdades:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$
$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Somando membro a membro vem

$$-\big(|a| + |b|\big) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

e, de acordo com a equivalência (1.1.1) com "$\leqslant$" em vez de "$<$", temos $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. $\square$

Fonte: Táboas (2008, p. 14).

As situações apresentadas no livro de Táboas (2008) levantam questões sobre como as demonstrações são vistas pelo autor e como podem ser percebidas pelo leitor enquanto aluno. O fato de as demonstrações serem mencionadas primeiro na forma de exercícios para o leitor indica que se espera que o leitor tenha conhecimento prévio das demonstraçõe, mas pelo exposto por Caldato (2018), deve ser incerto esperar algum preparo prévio sobre como elaborar demonstrações matemáticas em alunos matriculados em cursos de graduação em matemática, sendo tal desenvolvimento uma ação a ser explorada nos cursos de graduação a partir de seus conceitos básicos. Tal posicionamento encontra-se em consonância com as diretrizes curriculares nacionais dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática (MEC, 2002), que propõem o domínio de demonstrações matemáticas como uma das habilidades a serem desenvolvidas pelo indivíduo que passa por essa formação. Nos cursos de formação em matemática, temos disciplinas específicas para desenvolver a proficiência em demonstrações, muitas vezes chamadas de Fundamentos da Matemática, Elementos da Matemática, Análise, Análise na Reta, Análise Real. Como pode ser visto no programa da disciplina Elementos da Matemática, siglas SMA0341 e SLC0603, oferecida pela USP de forma obrigatória para os cursos de Matemática Núcleo Geral (ou seja, Bacharelado e Licenciatura), Bacharelado em Matemática Aplicada e Computação Científica, Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação em Matemática.

> **Noções de lógica.**
>
> **Estratégias de provas:** provas diretas, provas por contrapositiva e por contradição.
>
> **Conjuntos:** subconjuntos, operações com conjuntos, produtos cartesianos. Relações: relações binárias, relações de equivalência, relações de ordem.
>
> **Funções:** conceito, imagem inversa e imagem direta, funções injetoras e sobrejetoras, função inversa, composição de função. Noções de cardinalidade .
>
> **Os números naturais:** Axioma de Peano, indução.
>
> **Os números inteiros:** construção lógico-formal do conjunto dos números inteiros, imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, operações e relação de ordem em $\mathbb{Z}$, valor absoluto, divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, primos, congruências e critérios de divisibilidade.
>
> **Os números racionais:** a divisão em $\mathbb{Z}$, construção dos números racionais, operações e relações de ordem, valor absoluto, números racionais decimais.
>
> (<https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/>. Acesso em: 5 Set. 2022. Negrito nosso, entendemos neste contexto, prova como sinônimo de demonstração)

Cockcroft (1994) sustenta que a compreensão de demonstrações é absolutamente necessária para um aprofundamento formal dos conteúdos que a antecedem e sem tal viés prático, é possível apenas trabalhar a matemática no nível das propriedades operacionais e de aplicação. A ação de abstrair conceitos básicos das demonstrações permite o tratamento de problemas de naturezas mais complexas e segundo o autor, essa capacidade desenvolvida a partir do entendimento das demonstrações aumenta o poder de manipulação da matemática nos níveis já estudados. Hanna, Jahnke e Pulte (2010) argumentam que os matemáticos não usam demonstrações apenas para verificar se uma determinada afirmação é válida, mas que a própria demonstração contém conhecimento matemático que relaciona a afirmação válida às definições assumidas, o que fica evidente quando percebemos as demonstrações nos conteúdos usuais de disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral (Figura 2) ou Álgebra Linear (Figura 23), oferecidas para diversos cursos de graduação no 1º e 2º semestre, até mesmo para as graduações de matemática, em conflito com a ideia de que o domínio das demonstrações se desenvolveria a partir de disciplinas específicas. Esse conflito pode ser intensificado se considerarmos que alguns autores chegam a omitir o termo “demonstração” quando se trata do uso da “estratégia sintática”[4], como no livro “Cálculo com variável” de Plácido Táboas (2008), que trata a demonstração da Figura 20 como exemplo e reservando o nome “demonstração” geralmente para as propriedades mais proeminentes dentro do conteúdo.

Figura 22 – Exercício de Cálculo diferencial com uma variável real

EXEMPLO 2 Prove que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

SOLUÇÃO

1. *Uma análise preliminar do problema (conjecturando um valor para* δ*).* Seja ε um número positivo dado. Queremos encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Porém $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Portanto, queremos δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

isto é, $$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Isso sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon/4$.

Fonte: Stewart (2013, p. 103).

Figura 23 – Exercícios de Álgebra Linear

6. Seja $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{C}\}$. Mostrar que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com a adição e a multiplicação por escalares definidas assim:

(I) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \forall (x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2) \in V$ e

(II) $a(x, y) = (ax, ay), \forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall (x, y) \in V$.

7. Seja $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. Considerando sobre $\mathbb{R}^\infty$ as operações dadas por $(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$ e $a(x_1, x_2, \ldots) = (ax_1, ax_2, \ldots)$, mostrar que $\mathbb{R}^\infty$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

8. Mostrar que todo espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ também é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Fonte: Callioli, Domingues e Costa (2007, p. 50).

4 Hart (1994) denomina por “estratégia sintética” as demonstrações que requerem um entendimento padronizado e ações processuais, como trocar símbolos e associar definições para justificar o resultado, contrariando a necessidade de um domínio conceitual e semântico para demonstrar.

2.2. Aprender a demonstrar

Apesar da importância dada às demonstrações no Ensino Superior, a dificuldade de sua aprendizagem continua sendo objeto de estudo nas pesquisas em Educação Matemática nas últimas décadas. A própria ideia de que a maioria dos alunos pode aprender a demonstrar apenas lendo outras demonstrações disponíveis em livros de matemática já foi contestada 32 anos atrás por Carl Cowen (1991, p. 50), quando relata que seus estudantes medianos após a leitura de demonstrações para algum enunciado, ao pedir que expliquem "a maioria apenas recita as mesmas palavras novamente … não mostrando condições inatas de entenderem o que leram… " (tradução própria).

Hart (1994) investiga as demonstrações de estudantes de matemática em dois cursos de graduação em álgebra abstrata e em um curso inicial de pós-graduação. Embora o propósito do estudo fosse investigar a redação de demonstrações em vez de medir o aprendizado de tópicos elementares da teoria de grupos, as tarefas de demonstração foram escolhidas com a intenção de refletir o nível de compreensão do aluno sobre a teoria elementar de grupos. Os alunos receberam um resumo da teoria de grupo para reduzir a quantidade de variação no desempenho da demonstração devido à capacidade de recordar os fatos necessários. A partir da realização de determinadas demonstrações, os alunos foram classificados de acordo com seus níveis de compreensão de conceitos elementares da teoria de grupos. Descobriu-se que "a quantidade de experiência acadêmica com álgebra abstrata não refletia necessariamente seu nível de compreensão" (p. 56). Brown et al. (1997) em uma análise dos resultados obtidos no estudo de Hart (1994), concluíram que o grau de especificidade do objeto matemático a ser construído mentalmente, decorrente do processo de demonstração, foi o principal motivo do insucesso dos alunos nas demonstrações.

Simon e Blume (1996) consideram que aprender a demonstrar requer o desenvolvimento de três dimensões específicas: 1) O grau de identificação de regularidades e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo; 2) A qualidade explicativa que permite relacionar o conhecimento existente com o resultado; 3) Domínio de técnicas de demonstração e capacidade de operar propriedades matemáticas.

Weber (2001) compara dois grupos de alunos, um formado por graduandos e outro formado por doutorandos, todos da área de matemática e que cursaram álgebra abstrata. Cada participante, com direito a consultar livros ou notas, foi solicitado a demonstrar sete proposições sobre homomorfismos, cujos fatos e teoremas necessários são abordados na maioria dos cursos de graduação em álgebra. A análise deles indicou que a compreensão das demonstrações matemáticas e o conhecimento sintático dos fatos do domínio não são suficientes para demonstrar teoremas, porque entre as demonstrações observadas, os alunos de doutorado tiveram desempenho muito melhor do que os alunos de graduação. Corroborando com os resultados anteriores, temos o estudo de Maslahah, Abadi e Ibrahim (2019) com 12 alunos de graduação em matemática para investigar a construção de demonstrações matemáticas. O estudo constatou que a dificuldade na construção das demonstrações se devia ao conhecimento superficial dos conceitos discutidos e à falta de clareza de como iniciar a demonstração. Weber (2001) relaciona o desempenho da tarefa à experiência com estratégias de resolução de problemas, uma compreensão madura de técnicas de demonstrações específicas de domínio, uma noção mais clara de quais teoremas são mais importantes, quando são ferramentas úteis para o problema e uma noção de quando estratégias sintáticas se aplicam. O autor associa que essas diferenças se devem principalmente ao tempo de experiência dos doutorandos com as demonstrações, aspecto que, comparado ao conhecimento sobre o campo da álgebra abstrata, está mais relacionado ao sucesso na ação de demonstrar.

A dificuldade de escrever demonstrações é abordada no trabalho de Ko e Knuth (2009) sobre desempenho em elaborar demonstrações e de fornecer contra-exemplos para propriedades de funções contínuas por alunos de graduação em matemática. Neste trabalho, os autores observaram que os alunos tinham dificuldade em formular contra-exemplos, mas uma dificuldade ainda maior em construir demonstrações corretas. Enfatizando, em vários casos, a tentativa de dar um contra-exemplo a uma afirmação verdadeira ou demonstrar a validade de uma afirmação falsa. Em relação às dificuldades dos alunos para demonstrar teoremas, Thompson, Senk e Johnson (2012) propõem alguns indicadores das dificuldades comuns que permeiam essa prática. 1) dificuldades na construção e avaliação das demonstrações; 2) dificuldades na leitura e compreensão da demonstração; 3) confusão na compreensão do objetivo da demonstração; 4) falha em fornecer exemplos de conceitos comprovados e não comprovados; 5) falta de conhecimento sobre conceitos, definições e notações relevantes. Doruk e Kaplan (2015) investigaram como 121 estudantes universitários de matemática do segundo ano demonstraram que toda vizinhança de um ponto é um conjunto aberto. Este teorema havia sido ensinado uma semana antes desta atividade ser pedida, e os conceitos relacionados a esta propriedade foram abordados em um tópico comum a todos os participantes. Com isso, os autores afirmam que os participantes tinham conhecimento suficiente para demonstrar o teorema, mas 52 deles apresentaram demonstrações inválidas, que foram revisadas pelo autor com um especialista e identificaram 7 tipos de dificuldades: 1) Expressar definições; 2) Entender o que a propriedade afirma; 3) Usar linguagem matemática e notações apropriadas; 4) Selecionar a estratégia e método de demonstração adequadas; 5) Distinguir conceitos; 6) Criar uma estrutura de demonstração baseada nas definições; 7) Expressar o raciocínio utilizado.

Outro aspecto diretamente relacionado à escrita de demonstrações é a presença e aceitação de normas sociomatemáticas para esse fim. Aspecto tratado por Fukawa-Connelly (2012) na observação de como as normas sociomatemáticas aparecem e mudam durante um curso voltado para o formalismo matemático. Na análise deste autor, as regras resultam de atitudes iniciais do professor/mediador, que, no decorrer do trabalho com os alunos, torna-se menos exigente à medida que os seus alunos adotam as regras como comportamentos aprendidos para aquele contexto. No que se entende por normas sociomatemáticas, o autor postula que certas questões e ações foram aplicadas pelos alunos como necessárias ou suficientes para garantir a validade do que foi exposto, atitudes que em outros contextos poderiam ser vistas como inconvenientes ou desnecessárias, mas que a partir do comportamento do professor, foram aprendidos pelos alunos durante o curso e passaram a fazer parte do contexto das normas sociomatemáticas utilizadas por aquela turma. Azrou e Khelladi (2019) analisaram a dificuldade dos alunos em escreverem demonstrações, pois identificaram argumentos fracos ou mal estruturados em seus textos produzidos, e na investigação desses autores com alunos de graduação em matemática, constataram que há grande diferença no resultado e desempenho do aluno ao realizar atividades que envolvem exercícios de demonstração[5] e de demonstrações reais[6].

2.3. Justaposição na literatura

Desde o início desta pesquisa houve uma dificuldade em alinhar os termos e significados daquilo que definimos como demonstração por justaposição e os encontrados na literatura acadêmica. Para destacar esta dificuldade, em Janeiro de 2023 refizemos uma busca na base de periódicos da CAPES pelos termos demonstração(ões) OU prova(s), E um dos seguintes termos, quebra-cabeça(s), arrastar, justaposição, justapor, encaixar, encaixada(s), peça(s), bloco(s), bloquinho(s), tangível(is), acoplamento, acoplagem, acoplar, junção, juntar, montar, montagem. A busca ocorreu em qualquer tipo de material (Dissertações, Livros, Periódicos, Base de dados, Conjuntos de dados da pesquisa), qualquer idioma, qualquer ano, as pesquisas encontradas que tinham relação com o ensino e aprendizagem de matemática envolviam respectivamente o termo arrastar no sentido de movimentar as construções geométricas em softwares de geometria dinâmica (como GeoGebra), bloco no sentido de bloco teórico-tecnológico ou bloco de conteúdos, peça referente à peça teatral ou peças de um jogo de tabuleiro.

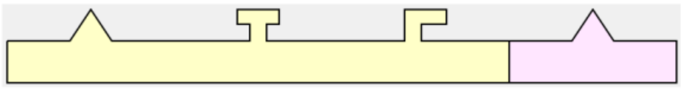
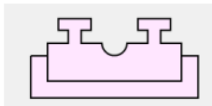
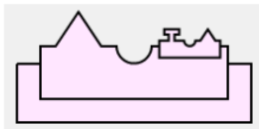
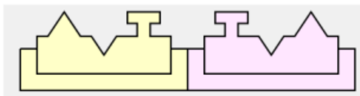
Já nas buscas pelos termos em inglês, encontramos com maior facilidade uma ampla gama de trabalhos que envolviam arrastar e soltar componentes para formar uma demonstração matemática. A citar apenas alguns exemplos temos “A Drag-and-Drop Proof Tactic” de Donato, Strub e Werner (2022), “Click and coLLecT An Interactive Linear Logic Prover” de Callies e Laurent (2021), “Visual theorem proving with the Incredible Proof Machine de Breitner” (2016) e “Polymorphic blocks: Formalism-inspired UI for structured connectors” de Lerner Foster e Griswold (2015). Nestes trabalhos a ação de demonstrar associada à movimentação das componentes de uma demonstração aparece como recursos de assistentes de

5 Nome dado pelos autores (AZROU, KHELLADI, 2019) aos exercícios destinados à aplicação de alguma técnica de demonstração ou lógica de ativação seguindo alguma propriedade recentemente demonstrada.

6 Nome dado pelos autores (AZROU, KHELLADI, 2019) aos exercícios que não resultam de uma aplicação prática de técnicas de demonstrações ou expansão de algum argumento visto em demonstrações anteriores.

demonstração[7], se assemelhando à uma linguagem de programação baseada em blocos com funções genéricas que permitem demonstrar uma ampla gama de enunciados e verificar sua validade lógica automaticamente através de cálculos. Na Figura 24, apresentamos componentes do assistente de demonstração baseado em blocos apresentado por Lerner Foster e Griswold (2015).

Figura 24 – Estrutura de um assistente de demonstração baseado em blocos

Judgment	In Proof Game
$x, y, z \vdash x$	
$\vdash y \Rightarrow y$	
$\vdash x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$	
$x \wedge y \vdash y \wedge x$	

Fonte: Lerner Foster e Griswold (2015, p. 5).

Apesar das semelhanças entre a interação com assistentes de demonstrações baseados em blocos e a forma como definimos demonstrações por justaposição, cabe destacar que os segmentos de texto das demonstrações por justaposição desta tese diferem-se dos assistentes de demonstrações baseados em blocos, pois as componentes dos assistentes de demonstração são objetos genéricos que levam a elaboração de demonstrações gerais, enquanto nas demonstrações por justaposição que definimos, suas componentes podem ser objetos particulares para aquele enunciado. Essas diferenças se destacam principalmente no fato das demonstrações por justaposição a depender das suas segmentações, não poderem ter suas validades verificadas automaticamente mediante processos de cálculo, pois os diferentes usos das componentes formadas

7 Softwares voltados para auxiliar no desenvolvimento de demonstrações formais, por vezes envolvendo editores de texto com funções voltadas para simplificar o processo de elaboração das demonstrações, incluindo segmentos pré-preenchidos ou de preenchimento automático

por segmentos de textos podem alterar de forma imprevisível o encadeamento lógico que leva à interpretação da validade de um enunciado, exigindo que qualquer composição de texto seja avaliada por um especialista para aferir se dada estrutura é válida ou não para um enunciado, inclusive, se algum componente ausente, ou em posição inadequada, compromete ou não a validade da demonstração.

Por outro lado, as demonstrações por justaposição abrangem uma estrutura mais ampla de demonstrações, uma vez que são formadas a partir de segmentações dos seus textos originais, logo qualquer demonstração descrita a partir de um texto poderia ter seu conteúdo segmentado e apresentado em forma de uma demonstração por justaposição, com componentes particulares para aquela demonstração específica, independente da complexidade que cada segmento representa. Isto diferencia a forma como definimos a justaposição de demonstrações dos assistentes de demonstração baseado em blocos, pois poderíamos independente do tamanho de uma demonstração, estipular em quantas partes desejamos segmentá-la. Esta proposta sobretudo, se alinha a uma série de conhecimentos oriundos da prática de professores de matemática que podem ser interpretados como ações de comunidades de práticas na perspectiva de uma prática social específica no ensino da matemática. Fiorentini (2013) expressa que nessas comunidades o conhecimento derivado do fazer é produzido e evidenciado de forma compartilhada entre os pares e isso proporciona tanto a participação dos professores por meio das experiências de seus pares quanto a reiteração de sua abordagem como um grupo com interesses comuns. Como esses conhecimentos são produzidos a partir de iniciativas pessoais baseadas em práticas profissionais e experiências relacionadas, vemos sua disseminação mais ampla por meio de canais de comunicação abertos como publicações de relatos de experiência, páginas pessoais, blogs, canais no YouTube, etc., entre outras mídias disponíveis para compartilhar sua produção na internet, onde encontramos interfaces de justapor demonstrações utilizadas para tratar do tema na Educação Básica.

Embora do termo interface tenha surgido associado a hardware e software, a evolução do conceito leva a considerá-la no sentido dos aspectos cognitivos e emocionais de quem a utiliza. Segundo Laurel (1990) o objetivo das interfaces é levar o usuário a ter mais poder, adaptando o sistema às suas necessidades e interesses para atingir objetivos mais complexos. Rocha e Baranauskas (2003) definem a interface como um local onde ocorre o contato entre duas entidades, incluindo, entre outras, telas de computadores e acrescentam que a interface reflete as propriedades físicas das partes que interagem, as funções a serem executadas e o equilíbrio entre poder de ação e controle. Norman (1999) aponta que o formato da interface reflete o que pode ser feito com ela, dando o exemplo de uma maçaneta, que oferece significado e propósito para interagirmos com cada tipo de porta, mas que a interface também fornece indicadores sobre a situação em que a interação é esperada, neste caso, uma porta de saída de emergência precisaria de uma maçaneta grande, de abertura rápida, exigindo pouca precisão e liberando o acesso ao exterior do ambiente.

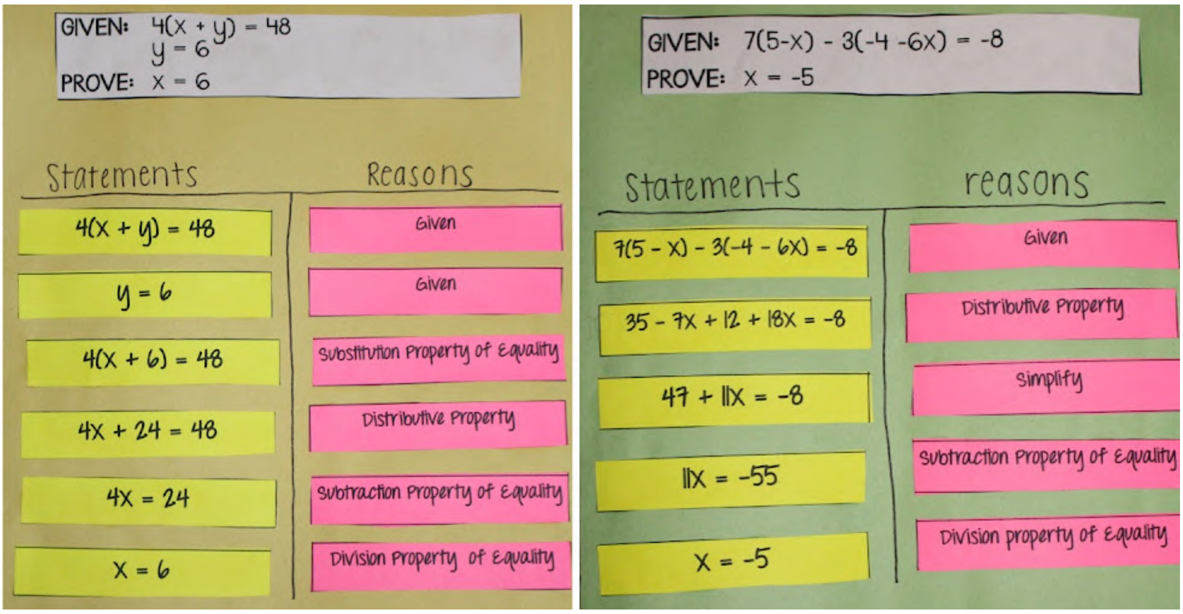
Entre as interfaces de justaposição que surgem para trabalhar com demonstrações na Educação Básica vemos propostas com materiais físicos (como cartões de papel) geralmente chamadas de atividades de “recortar e colar”, e no ambiente digital chamadas de atividades de “arrastar e soltar”. Para ambos os tipos de materiais (físicos ou digitais) podemos perceber que a manipulação de segmentos de texto, seja em formato físico (com as mãos) ou virtual (com mouse, touchpad, touchscreen), constituem um meio tangível de interação com a demonstração, permitindo no decorrer dos agrupamentos, ler e corrigir a partir da substituição de posições para formar uma demonstração válida. Essas interfaces de justaposição de demonstrações podem ser entendidas como estruturas auxiliares para o entendimento de conceitos relacionados a demonstrações, corroborando a discussão de Maher e Speiser (1997) sobre as representações matemáticas em formas concretas e manipuláveis possuírem potencial para auxiliar na elaboração de ideias mais gerais sobre conceitos abstratos. Para melhor ilustrar esses materiais, descreveremos brevemente algumas das interfaces que aparecem nessas comunidades e como são apresentados por seus autores responsáveis.

No blog “Mrs. Newell's Math”[8] encontramos o relato de uma atividade realizada com mais de 50 estudantes da Educação Especial na disciplina de Geometria. De acordo com a descrição, foram dados 10 enunciados aos estudantes com maior fluência no conteúdo, juntamente com todos os segmentos de texto que

8 https://newellssecondarymath.blogspot.com acesso em 19 de novembro de 2022.

compõem suas demonstrações, e aos estudantes com maior dificuldade no conteúdo, cada um dos 10 enunciados foi entregue separadamente com os segmentos de texto que o compunha. A autora relata que após a atividade, os estudantes compreenderam totalmente a demonstração algébrica. Na Figura 25 apresentamos imagens da atividade, publicadas no respectivo blog, onde podemos ver que as chamadas demonstrações são resoluções de sistemas de equações. Vemos que os espaços disponíveis para justapor os segmentos de texto dessas demonstrações estão organizados em duas colunas enunciadas à esquerda para declarações e à direita para justificativas. Os segmentos de texto são divididos em cores mas cabe ao estudante reconhecer que os segmentos em amarelo são declarações e os em rosa são justificativas.

Figura 25 – Material físico de justapor resoluções de sistemas de equações lineares



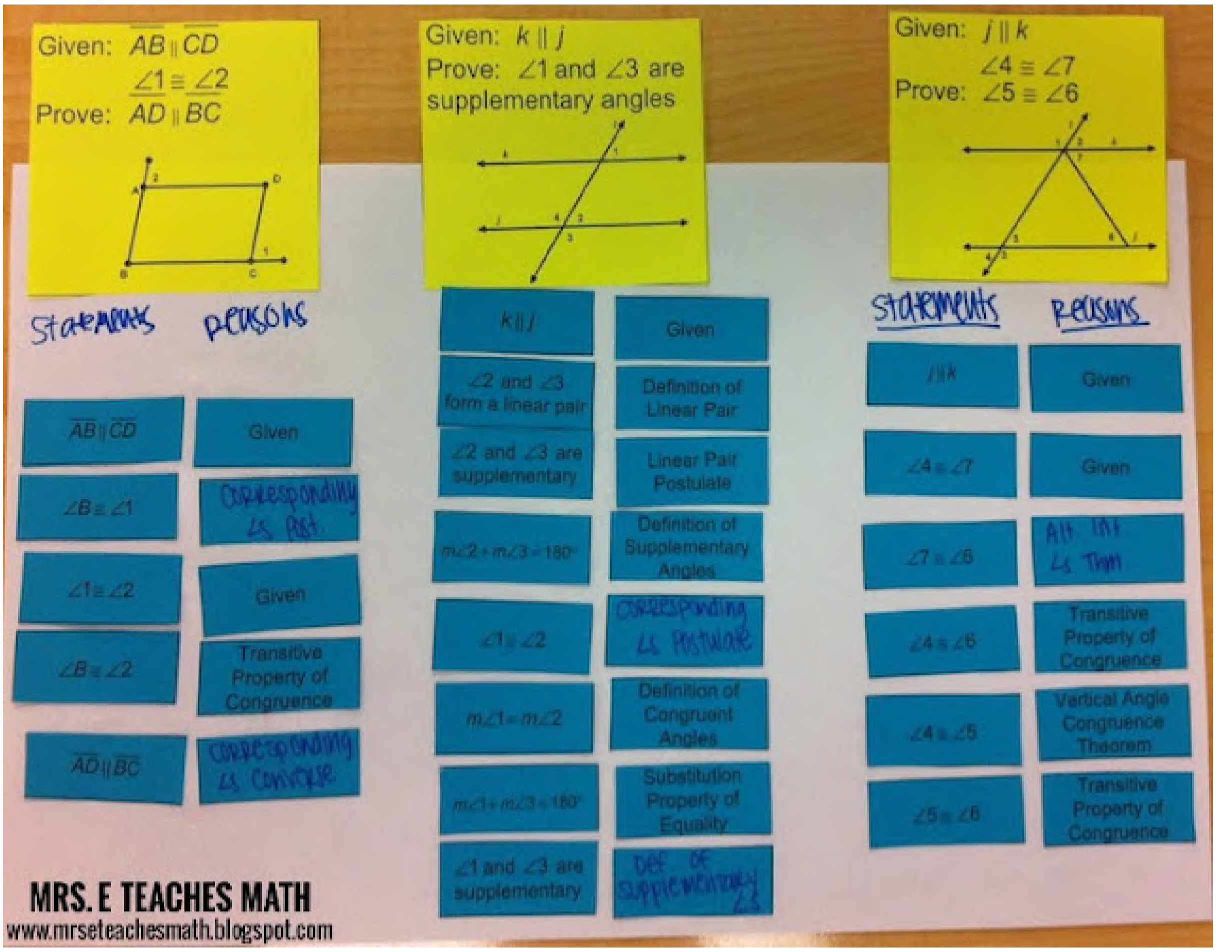
Fonte: <https://newellssecondarymath.blogspot.com/2016/01/algebra-proofs-cut-and-paste-activity.html>. Acesso em: 5 Set. 2022.

No blog “Mrs. E. Teaches Math”[9] encontramos o relato de uma professora sobre a necessidade dos estudantes fazerem demonstrações e sua abordagem proposta para trabalhar este conteúdo a partir do reconhecimento de padrões na

9 <https://www.mrseteachesmath.com/>. Acesso em: 19 Nov. 2022.

determinação dos comportamentos de funções geométricas e algébricas. A professora sugere que os estudantes escrevam demonstrações aplicando o raciocínio da atividade anterior (reconhecimento de padrões), no entanto afirma que os estudantes ficaram estagnados na frente do papel sem saber como colocar o raciocínio em palavras. Percebendo esse problema, a professora inseriu atividades com segmentos de texto das demonstrações, considerando uma forma leve de praticar a formação de sentenças a partir de um banco de palavras como opções a serem escolhidas e substituindo a ação de apagar e reescrever o texto, que julga trabalhosa, pela ação mais simples de rearranjar os segmentos na ordem correta. Na Figura 26 temos algumas das demonstrações que a professora menciona, nelas podemos ver que os enunciados envolvem relações de congruência entre ângulos e triângulos e que os segmentos de texto são divididos em duas colunas, uma para declarações e outra para justificativas. Diferentemente do exemplo anterior, os segmentos de texto são todos da mesma cor e cabe ao estudante atribuir cada segmento de texto como uma declaração ou justificativa.

Figura 26 – Material físico de justapor demonstrações sobre relações de congruências em triângulos

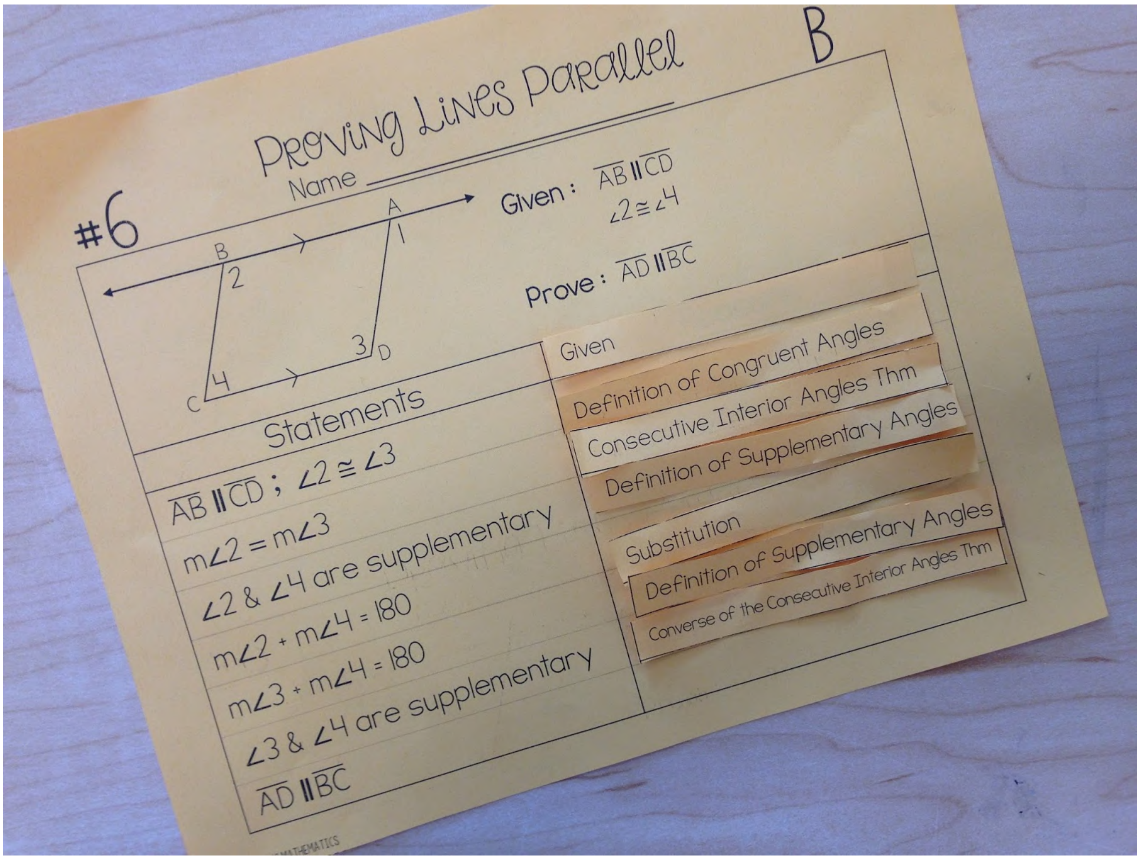


Fonte: <https://www.mrseteachesmath.com/2015/09/teaching-proofs-with-proof-cut-out.html>. Acesso em: 5 Set. 2022.

No blog “Math Dyal”[10] vemos um relato do uso de segmentos de texto para demonstrar a congruência de ângulos e lados, como mostramos na Figura 27, optou-se por trabalhar com a coluna de enunciados pré-preenchida, deixando que os estudantes colocassem os segmentos de texto na coluna de justificativas em ordem.

10 <https://mathdyal.blogspot.com/>. Acesso em: 19 Nov. 2022.

Figura 27 – Material físico de justapor apenas as justificativas das demonstrações sobre relações de congruências em triângulos



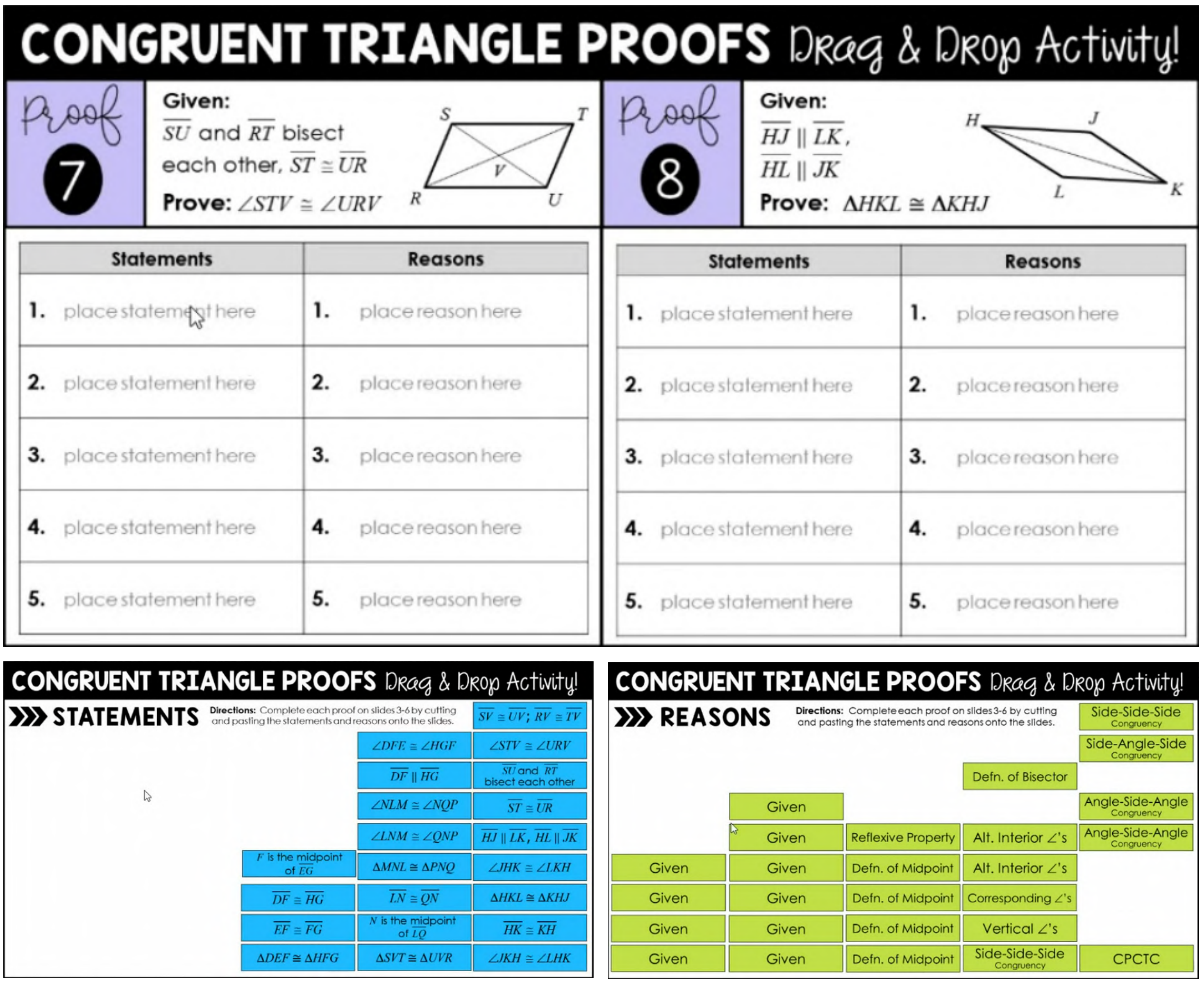
Fonte: <https://mathdyal.blogspot.com/2016/10/how-hole-puncher-saved-day-proving.html>. Acesso em: 5 Set. 2022.

O canal “Cacey Norris”[11] no YouTube mostra o uso de um material desenvolvido em software de apresentação de slides (Google Slides) para recriar a dinâmica das atividades com segmentos de texto de uma demonstração feita no papel. Na Figura 28 vemos que existe um slide com a função de disponibilizar ao usuário todos os segmentos de texto do tipo declaração, diferenciados com a cor azul e necessários para demonstrar as propriedades presentes neste arquivo. Há um slide com segmentos de texto do tipo justificativa, destacados em verde e no slide principal temos duas afirmações sobre a congruência de lados e ângulos para demonstrar de forma semelhante aos exemplos anteriores, ou seja, uma coluna para receber as declarações e outra para as justificativas. É interessante notar que no 2º slide (declarações) não encontramos segmentos de texto repetidos, enquanto no 3º

11 <https://youtu.be/TiAHF9s5hmA>. Acesso em: 19 Nov. 2022.

slide (justificativas) vemos um grande número deles se repetindo, de forma a ter segmentos suficientes para preencher as demonstrações, informando ao usuário o total de segmentos necessários para formar todas as demonstrações.

Figura 28 – Material virtual de justapor elaborado no Google Slides



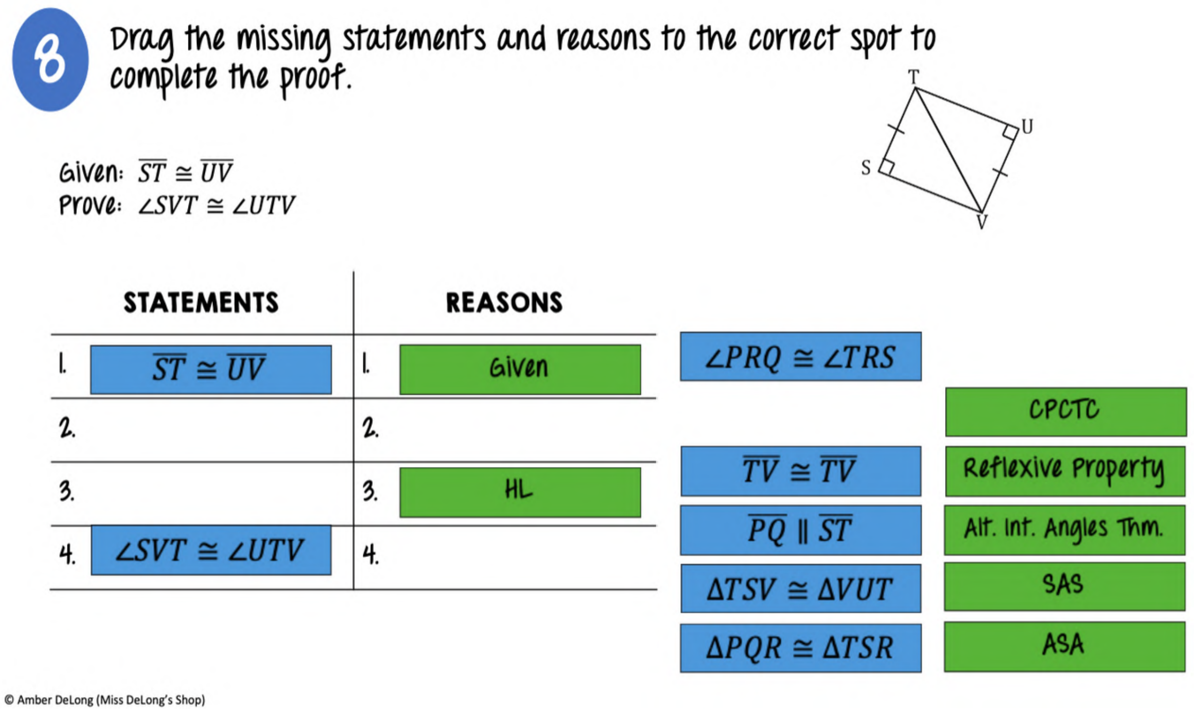
Fonte: <https://youtu.be/TiAHF9s5hmA>. Acesso em: 5 Set. 2022.

No site “Miss DeLong's Shop”[12] eles anunciam um produto desenvolvido no Google Slides e segundo a descrição do anunciante, representa uma alternativa para tornar as demonstrações a serem realizadas mais interativas ou práticas, com foco em demonstrar propriedades de congruência de lados e ângulos. Podemos observar na Figura 29 que a atividade é composta por duas colunas, uma para declarações e outra para justificativas, enquanto os segmentos de texto aparecem diferenciados por cores de acordo com o tipo a que pertencem (declarações ou

12 <https://ampeduplearning.com>. Acesso em: 19 Nov. 2022.

justificativas). Ressalte-se que há espaço para 4 declarações e 4 justificativas na demonstração proposta mas são disponibilizados ao usuário 7 segmentos de cada tipo de texto, nenhum dos quais se repete, portanto, para demonstrar corretamente, também é necessário identificar quais segmentos fazem parte desta demonstração.

Figura 29 – Material virtual de justapor elaborado no Google Slides com 14 segmentos diferentes para preenchimento de 10 espaços



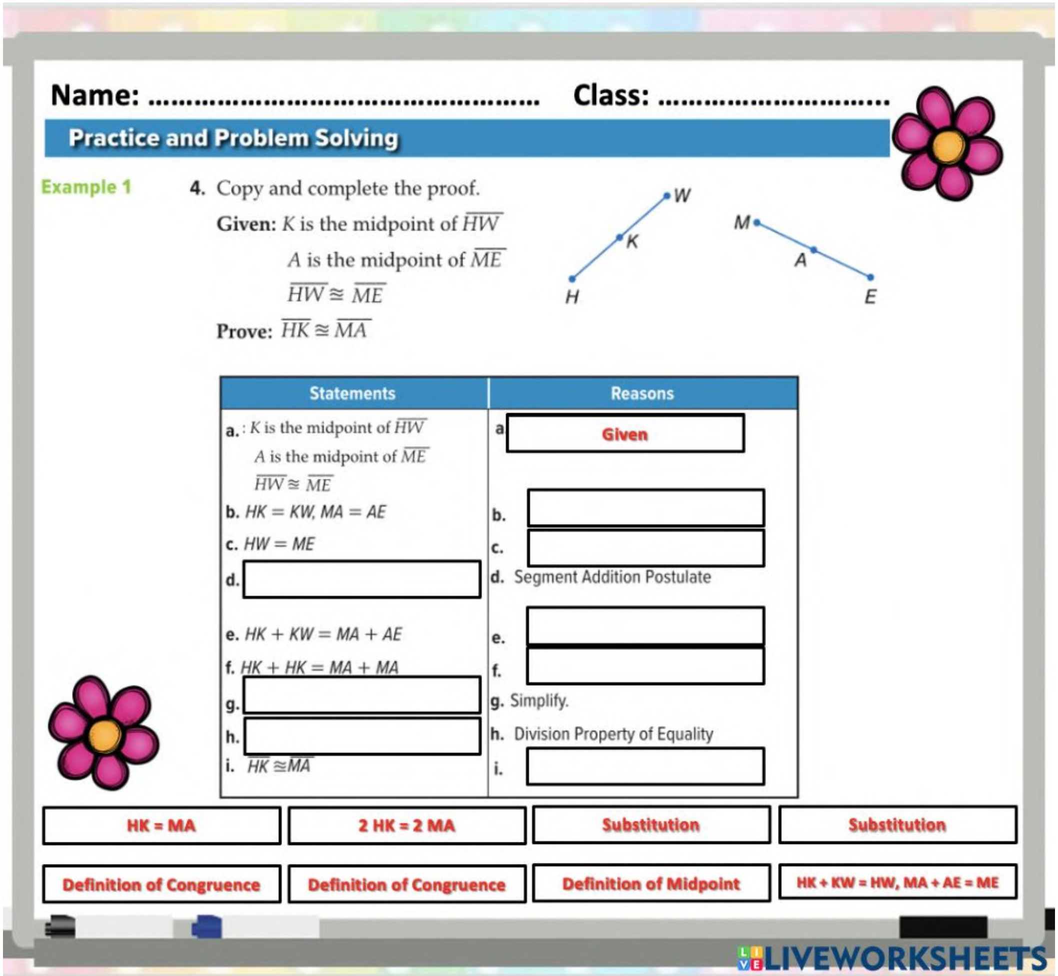
Fonte: <https://ampeduplearning.com/triangle-congruence-proofs-drag-and-drop-activity/>. Acesso em: 5 Set. 2022.

Na página Liveworksheets, o usuário Math_T_2020[13] compartilha algumas atividades de demonstração que envolvem o preenchimento das colunas de declaração e justificativa. Nessas atividades não há distinções entre os tipos de cada segmento de texto, embora no exemplo mostrado na Figura 30 tenhamos inicialmente 6 das 9 declarações e 4 das 9 justificativas já preenchidas, no mesmo exemplo vemos que cabe ao usuário atribuir os 8 segmentos de texto aos 8 espaços disponíveis, embora tenhamos dois segmentos de texto que se repetem uma vez cada. Outros diferenciais dessa atividade são sua estrutura autoajustável, para que

13 <https://www.liveworksheets.com/zs1905031xl>. Acesso em: 19 Nov. 2022.

o software realmente identifique o espaço que o segmento deve ocupar, diferentemente dos exemplos anteriores onde os objetos eram movimentados no Google Slide, e a possibilidade de inserir informações sobre o usuário para enviar a atividade resolvida pelo sistema com verficação automática dos acertos.

Figura 30 – Material virtual de justapor elaborado no LiveWorksSheets com auto-ajuste para a posição das peças e opção para submissão



Fonte: <https://www.liveworksheets.com/zs1905031xl>. Acesso em: 5 Set. 2022.

Assim, investigar a influência de demonstrações por justaposição com graduandos em matemática se revela pertinente para o estudo sobre as demonstrações no currículo e as dificuldades de aprender a demonstrar, dado que é um tema abrangente, não foram encontradas pesquisas em português a este respeito a partir dos descritores utilizados e as pesquisas em língua inglesa discutem a abordagem de demonstrar “arrastando e soltando” que se diferencia da maneira como definimos a ação de justapor uma demonstração, e que se enquadra à abordagem compartilhada em comunidades de professores de matemática.

3. METODOLOGIA

Segundo Flick e Lopes (2013) a pesquisa social resulta da aplicação de metodologias científicas no âmbito das Ciências Sociais. Gil (2008) caracteriza a pesquisa social como aquela que por meio da metodologia científica, permite a aquisição de novos conhecimentos no campo da realidade social. Nosso estudo se enquadra nessa classificação pois investigamos os fatores que influenciam as demonstrações desenvolvidas por graduandos em matemática, para isso reunimos evidências realizando intervenções que utilizam os fatores candidatos a influenciarem as demonstrações desenvolvidas. Desse modo o estudo se enquadra na perspectiva de Gil (2008) como indutivo, sendo este método aquele que se concentra em encontrar casos específicos suficientemente confirmados para inferir uma relação entre os fenômenos. Na pesquisa com abordagem indutiva, entende-se a experiência e observação de fatos ou fenômenos como aquilo que se deseja conhecer para depois compará-los a fim de descobrir as relações entre eles e proceder a uma generalização. Marconi e Lakatos (2003) caracterizam a indução como um processo mental pelo qual a partir de dados particulares suficientemente verificados, infere-se uma verdade geral ou universal, não contida nas partes examinadas e portanto, o objetivo dos argumentos indutivos é levar a conclusões cujo conteúdo seja muito mais amplo do que as premissas nas quais se baseiam.

Os fatores que consideramos candidatos a influenciarem as demonstrações desenvolvidas pelos graduandos em matemática, foram tratados mediante um processo de estudo experimental. Keppel (1991) explica que a pesquisa experimental busca determinar se um tratamento específico influencia um resultado. Creswell (2021) define que uma pesquisa experimental manipula sistematicamente uma ou mais variáveis para avaliar como afetam os resultados de interesse. Na perspectiva de Gil (2008) o experimento científico envolve a seleção das variáveis que seriam capazes de influenciar um fenômeno, definindo as formas de controlar e obter os efeitos que a variável produz sobre o objeto. Para Flick e Lopes (2013) uma investigação experimental é um tipo específico de observação centrada numa intervenção deliberada num determinado grupo e comparada com um segundo grupo em que essa intervenção não ocorreu.

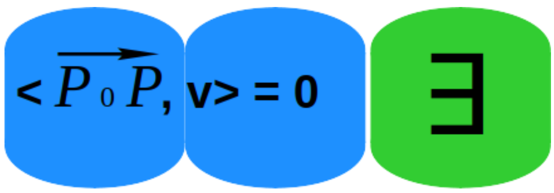
3.1. Procedimentos

A coleta de dados que subsidiou a investigação desta tese ocorreu somente após a aprovação pelo Comitê de Ética e Pesquisa da UNICAMP, em 19 de maio de 2020, do projeto “Quebra-cabeças para demonstrar teoremas” sob responsabilidade do pesquisador e CAAE: 26792719.4.0000.8142. Vale ressaltar que o projeto foi submetido pela última vez em 7 de dezembro de 2019, período em que ainda não era possível imaginar que iríamos enfrentar a pandemia de COVID-19, tendo sido autorizado a recolher dados até ao final de janeiro de 2022 (4 meses antes do governo brasileiro decretar o fim do Estado de Emergência em Saúde Pública de Importância Nacional). Consideramos importante mencionar essas datas para deixar claro que a proposta foi pensada inicialmente em formato físico e presencial, embora o projeto não especifique o ambiente em que as demonstrações seriam realizadas, a intenção e o planejamento do pesquisador foram direcionados para esta ação com cartões de papel ou peças impressas em 3D, pois imaginamos que o trabalho aconteceria em espaços físicos, fora das disciplinas, com pequenos grupos e sempre sob a observação do pesquisador.

Após o decreto que ocasionou a interrupção das atividades presenciais na UNICAMP (em 13 de março de 2020) e até o final de março de 2020, tínhamos a impressão de que a situação voltaria ao normal em breve e poderíamos coletar dados pessoalmente, desta forma continuamos o desenvolvimento de conteúdos fora de qualquer disciplina, com cartões de papel e peças impressas em 3D. Esses cenários presenciais se mostraram inviáveis, dado que a pandemia se estendeu além do nosso período de coleta de dados (maio de 2020 a janeiro de 2022). No final de março de 2020 a duração da pandemia de COVID-19 já era incerta e as atividades acadêmicas da UNICAMP foram mobilizadas para prosseguir remotamente. Passamos a articular como a proposta apresentada e ainda pendente no Comitê de Ética e Pesquisa da UNICAMP poderia ser realizada em contexto virtual sem se desviar do projeto original e nesta ocasião fica clara a necessidade de considerar docentes universitários no estudo, pois surgia uma demanda por recursos para o ensino a distância e de nossa parte, grande interesse em acessar salas de aula virtuais com potenciais participantes.

Decorreram apenas dois meses entre o início da adaptação da coleta de dados para formato virtual (final de março de 2020), a aprovação do projeto (a 19 de maio de 2020) e o início da coleta de dados no dia 29 de maio de 2020. Ressaltamos que ao colocar docentes universitários nesta pesquisa, nos comprometemos com seus planos didáticos e foi preciso conciliar o que pretendíamos alcançar com o que nos foi concedido naquele espaço partilhado. Isso justifica sobretudo que diante da incerteza de encontrarmos docentes universitários dispostos a colaborar com este trabalho, iniciamos a coleta na primeira oportunidade disponível, embora naquele momento os procedimentos adaptados da coleta de dados ao formato virtual estivessem em amadurecimento. Quando a coleta começou, a interface para justapor demonstrações era um slide com fundo branco, blocos quadrados com fundo e tampa arredondados que carregavam o segmento de texto de demonstração no centro e quando necessário acomodar mais texto, usávamos blocos conectados pelas laterais como pode ser visto na Figura 31.

Figura 31 – Forma dos blocos na 1ª geração



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os enunciados apareciam no canto superior esquerdo e as propriedades conhecidas à direita do enunciado, enquanto os demais blocos foram colocados no canto inferior direito para que as mesmas cores ficassem próximas, as quais tinham papéis associadas aos seus conteúdos, como mostramos na Figura 32.

Laranja: enunciado

Roxo: orientações textuais

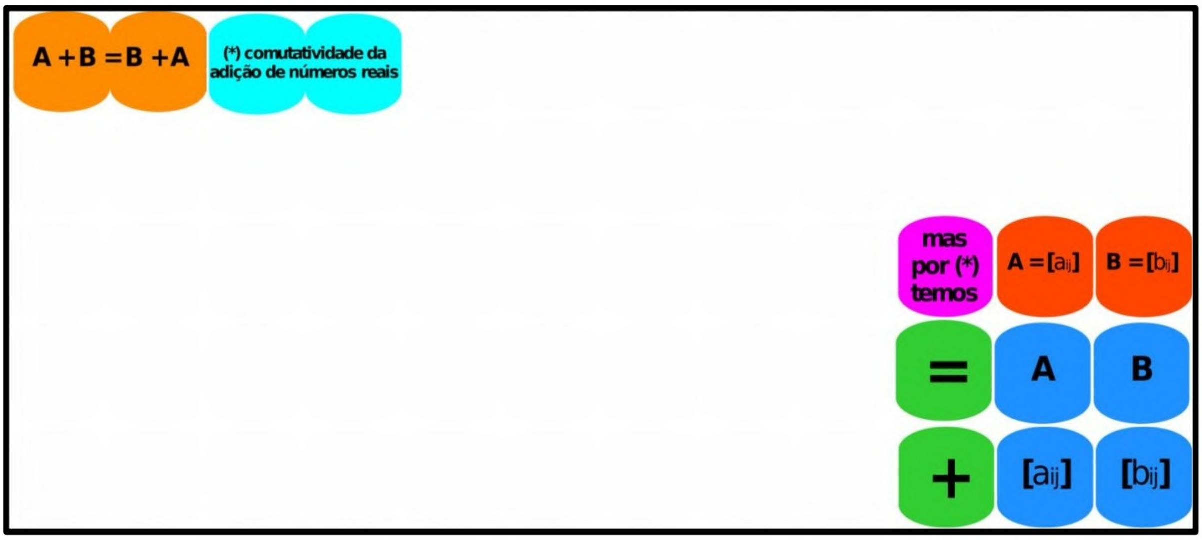
Vermelho: definições

Verde: símbolos matemáticos

Azul: expressões algébricas

Azul claro: propriedades conhecidas

Figura 32 – Layout dos exercícios de justapor demonstrações da 1ª geração



Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando a interface para justapor demonstrações descrita, nossa proposta buscou identificar as influências que a intervenção com demonstrações por justaposição produziria no desenvolvimento de demonstrações, por esta razão, propomos dividir os participantes de acordo com as intervenções que receberiam durante o estudo, denotados como Grupo 1 e Grupo 2. Dividimos em 5 Períodos o intervalo de datas disponibilizado pelos docentes para a realização da nossa coleta nas disciplinas e a depender da situação, dividimos um Período em vários sub-períodos, denotados nesta tese com um ponto seguido do número do respectivo sub-período, por exemplo, se o Período 1 tem 2 sub-períodos, eles serão denotados como Período 1.1 e Período 1.2. A seguir descrevemos o que esperávamos para cada um dos 5 Períodos.

Período 1: Todos os participantes realizam os mesmos exercícios de demonstrar por escrito e depois dividimos aleatoriamente os participantes entre o Grupo 1 e o Grupo 2, de forma que cada grupo tenha a mesma quantidade de participantes que realizaram os exercícios. Período 2: Os participantes do Grupo 1 recebem exercícios para demonstrar por justaposição, os participantes do Grupo 2 recebem exemplos e exercícios para demonstrar por escrito (participantes que não realizam atividades no Período 2, são desconsiderados no estudo). Período 3: Todos os participantes recebem os mesmos exercícios para demonstrar por justaposição e por escrito. Período 4: Os participantes do Grupo 2 recebem exercícios para demonstrar por justaposição, os participantes do Grupo 1 recebem exemplos e exercícios para demonstrar por escrito. Período 5: Todos os participantes recebem os mesmos exercícios para demonstrar por justaposição e por escrito.

Na Tabela 1 representamos os procedimentos descritos, no qual apresentamos os Grupos 1 e 2 na 2ª coluna em vez da 1ª, pois quisemos expressar que o Período 1 (1ª coluna) precede a formação dos Grupos.

Tabela 1 – Períodos 1, 2, 3, 4 e 5

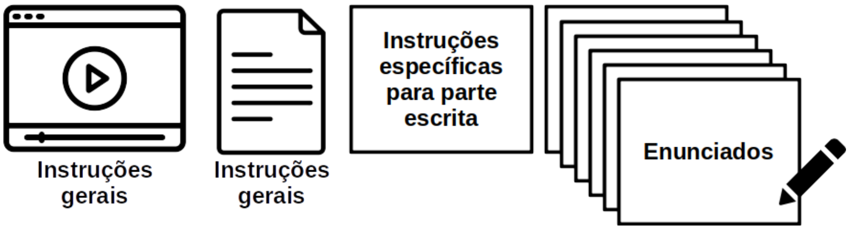
<table>
<tr><th>1º Período</th><th>Grupos</th><th>2º Período</th><th>3º Período</th><th>4º Período</th><th>5º Período</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Exercícios para demonstrar por escrito</td><td>Grupo 1</td><td>Exercícios para demonstrar por justaposição</td><td rowspan="2">Exercícios para demonstrar por escrito e por justaposição</td><td>Exemplos e exercícios para demonstrar por escrito</td><td rowspan="2">Exercícios para demonstrar por escrito e por justaposição</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>Exemplos e exercícios para demonstrar por escrito</td><td>Exercícios para demonstrar por justaposição</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Denominamos instrumentos de coleta o arranjo processual realizado que permitiu reunir dados sobre as demonstrações de cada participante por meio das diferentes intervenções proporcionadas. Sua descrição pretende ilustrar em que medida ocorreram as diferenças entre as Coletas e quais aspectos permaneceram semelhantes assim para a Coleta 1 denotada respectivamente por C1, utilizamos:

- **C1 – Período 1, ambos os Grupos:** Vídeo do pesquisador explicando sobre a pesquisa, a participação dos estudantes, a importância das demonstrações e como ocorreria a coleta na disciplina. Transcrição do vídeo. Slide de fundo branco reforçando orientações sobre o uso do material. 6 slides de fundo branco, cada um com um enunciado a ser demonstrado por escrito.

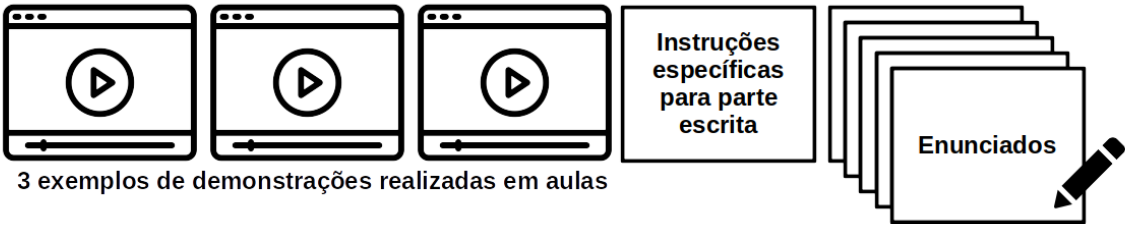
Figura 33 – C1 – Período 1, ambos os Grupos



Fonte: Elaborado pelo autor.

- **C1 – Período 2 para Grupo 1 OU Período 4 para Grupo 2:** 3 vídeos de demonstrações dos mesmos conteúdos, realizadas em sala de aula presencial. Slide de fundo branco reforçando orientações sobre o uso do material. 5 slides de fundo branco com enunciados para demonstrar por escrito.

Figura 34 – C1 – Período 2 para Grupo 1 OU Período 4 para Grupo 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

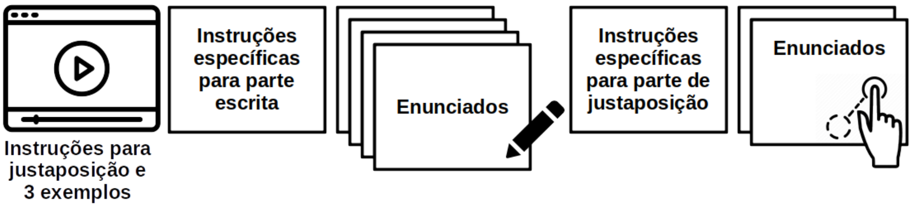
- **C1 – Período 4 para Grupo 1 OU Período 2 para Grupo 2:** Vídeo do pesquisador explicando sobre o ambiente para justapor demonstrações e dando três exemplos com enunciados utilizados no Período 1. Slide de fundo branco reforçando orientações sobre o uso do material. 8 slides de fundo branco com enunciados para justapor demonstrações.

Figura 35 – Período 4 para Grupo 1 OU Período 2 para Grupo 2

Fonte: Elaborado pelo autor.

- **C1 – Período 3 E 5, ambos os Grupos:** Vídeo do pesquisador explicando sobre o ambiente para justapor demonstrações e dando três exemplos com enunciados utilizados no Período 1. Slide de fundo branco reforçando orientações sobre o uso do material. 4 slides de fundo branco com enunciados para demonstrar por escrito. Slide de fundo branco reforçando orientações sobre o uso do material. 2 slides de fundo branco com enunciados para justapor demonstrações.

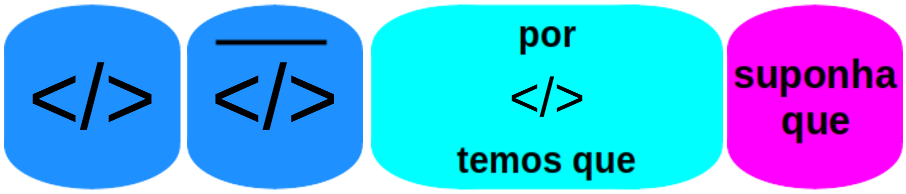
Figura 36 – Período 3 E 5, ambos os Grupos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao longo da Coleta 1 ouvimos críticas e sugestões dos estudantes participantes, dos docentes universitários que cederam espaço para a pesquisa e de outras possíveis parcerias docentes, que nos levaram a modificações na interface para justapor demonstrações. Para diferenciar a interface da Coleta 1 desta nova, passamos a denotar aquela usada na Coleta 1 como Geração 1 e essa por Geração 2. Entre os aspectos ouvidos, consideramos a possibilidade de blocos com conteúdo definido, blocos com conteúdo parcialmente definido e blocos com conteúdo totalmente editável, a possibilidade de editar o conteúdo passou a ser indicada pela presença de </> no bloco. Outra mudança realizada foi substituirmos os blocos individuais conectados lateralmente por blocos com medidas de laterais iguais a blocos individuais conectados na forma de um único bloco alongado, os quais apresentamos na Figura 37.

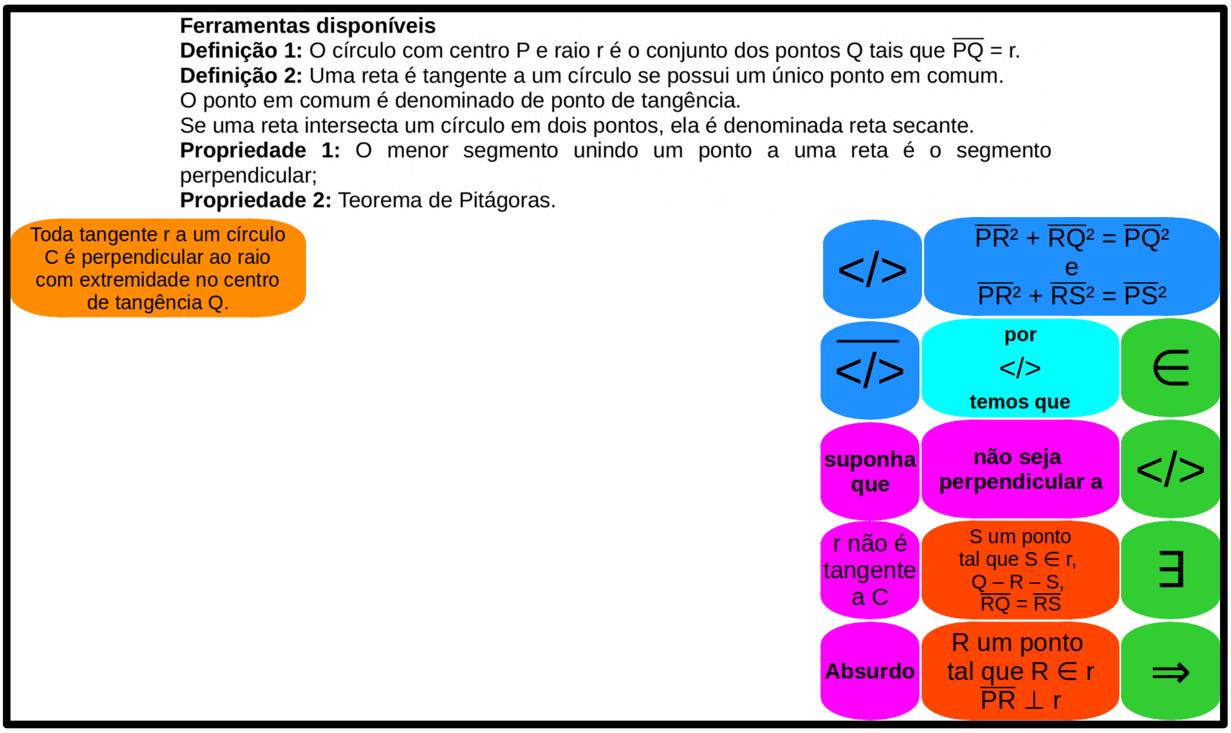
Figura 37 – Forma dos blocos na 2ª geração



Fonte: Elaborado pelo autor.

As propriedades passaram a ser exibidas na parte superior externa ao slide para desocuparem o espaço de justapor a demonstração. Focamos em atribuir rótulos a essas propriedades, como Definição X, Propriedade Y, para que o bloco azul claro, cuja função era indicar qual propriedade/definição, fosse preenchido objetivamente a partir desse rótulo. Os outros aspectos da interface permaneceram semelhantes à primeira geração, como podem ser vistos na Figura 38.

Figura 38 – Layout dos exercícios de justapor demonstrações da 2ª geração

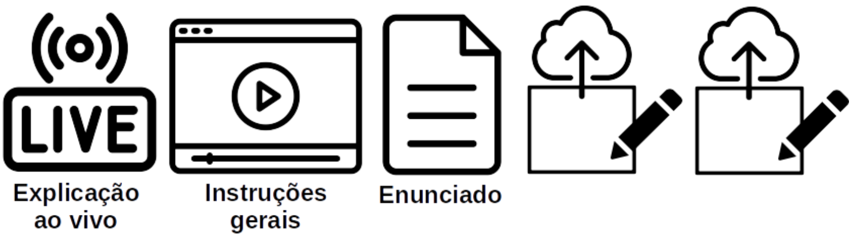


Fonte: Elaborado pelo autor.

Fizemos uso da 2ª geração da interface de justaposição para a Coleta 2, denotada respectivamente por C2, ilustramos como ela ocorreu apresentando seus instrumentos de coleta:

- **C2 – Período 1.1, ambos os Grupos:** Live do pesquisador explicando o trabalho e dando orientações sobre a dinâmica. Vídeo com instruções gerais sobre como funcionaria a dinâmica. Google Forms com propriedades conhecidas e 2 enunciados para demonstrar.

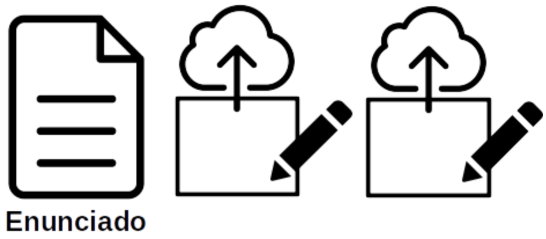
Figura 39 – C2 – Período 1.1, ambos os Grupos



Fonte: Elaborado pelo autor.

■ **C2 – Período 1.2, ambos os Grupos:** Google Forms com propriedades conhecidas e 2 enunciados para demonstrar.

Figura 40 – C2 – Período 1.2, ambos os Grupos



Fonte: Elaborado pelo autor.

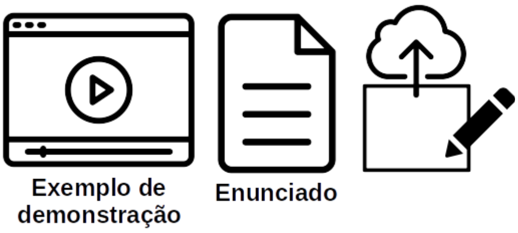
■ **C2 – Período 2 para Grupo 1 OU Período 4 para Grupo 2:** Vídeo do pesquisador explicando sobre o ambiente para justapor demonstrações e dando um exemplo com enunciados utilizados no Período 1. Google Forms com propriedades conhecidas e 2 enunciados para demonstrar por justaposição.

Figura 41 – C2 – Período 2 para Grupo 1 OU Período 4 para Grupo 2

Fonte: Elaborado pelo autor.

■ **C2 – Período 2 para Grupo 2:** Vídeo do pesquisador demonstrando um enunciado do conteúdo atual. Google Forms com propriedades conhecidas e 1 enunciado para demonstrar.

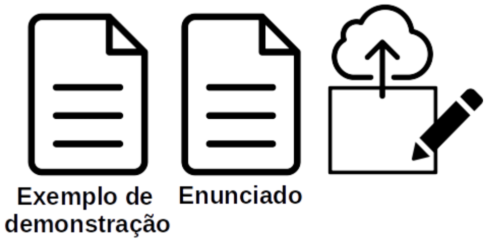
Figura 42 – C2 – Período 2 para Grupo 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

■ **C2 – Período 4 para Grupo 1:** Texto com uma demonstração de enunciado do conteúdo atual. Google Forms com propriedades conhecidas e 1 enunciado para demonstrar.

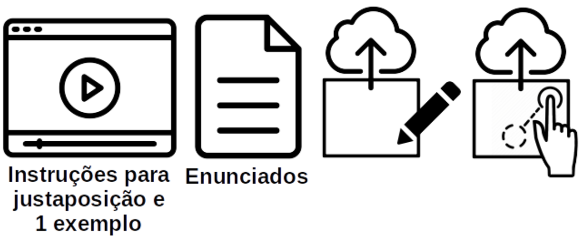
Figura 43 – C2 – Período 4 para Grupo 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

■ **C2 – Período 3 E 5, ambos os Grupos:** Google Forms com propriedades conhecidas, 1 enunciado para demonstrar por escrito e 1 enunciado para demonstrar por justaposição.

Figura 44 – C2 – Período 3 E 5, ambos os Grupos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Durante a Coleta 2 notamos que os segmentos de texto em blocos não pareciam dar aos participantes uma ideia imediata de que deveriam ser justapostos, pois diferente da 1ª geração onde todos os blocos tinham conteúdos de texto, a percepção de que eles deveriam ser justapostos pareceu mais intuitiva do que na 2ª geração onde tínhamos blocos com conteúdo parcialmente preenchido e conteúdo aberto para edição. Isso nos levou a investir em uma estrutura visual que remetesse mais diretamente à ação de justapor segmentos de texto, tornando-os parecidos com peças de quebra-cabeça cujos encaixes preenchessem melhor a tela. Outro aspecto que reconsideramos foi a descrição das cores das peças e suas respectivas funções, porque não ficou claro para os participantes, principalmente nos blocos editáveis, que as cores deveriam remeter a tipos específicos de texto. Notamos também que haviam diferenças na forma como os participantes percebiam as cores dependendo das telas digitais (monitor valvulado, monitor LCD, smartphone, …) utilizadas e também da possibilidade de usuários com daltonismo. Pensando em reparar esta situação, utilizamos o aplicativo web ColorBrewer2[14] para encontrar uma paleta de cores com menor divergência nas telas e que fosse mais facilmente distinguível por pessoas daltônicas. O esquema gerado nessas condições contribuiu para a redução do número total de cores, pois com tais restrições, o software só poderia sugerir uma paleta de até 4 cores, a qual aderimos e atribuímos as respectivas funções com base no total de cores disponíveis:

Verde claro: textos diversos (enunciados ou orientações textuais)

Verde escuro: símbolos matemáticos

Azul escuro: expressões algébricas

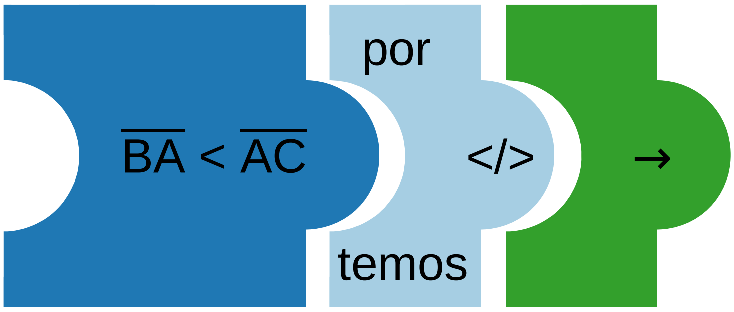
Azul claro: referência à alguma das propriedades conhecidas

Outra mudança nesta geração foi a remoção de partes totalmente editáveis e quase todas as partes parcialmente editáveis, a única exceção que se manteve foi o segmento referente à propriedade conhecida utilizada (Azul claro). Optamos manter essa peça de propriedade conhecida disponível em todas as demonstrações por justaposição, independentemente dela ter sido usada para indicar alguma propriedade na demonstração original, pois isso traria uma dificuldade adicional para

14 <https://colorbrewer2.org>. Acesso em: 30 Jan. 2023.

quem demonstrasse por justaposição, envolvendo decidir se aquela peça era realmente necessária. Quando o conteúdo de uma peça exigia uma largura maior, utilizávamos uma peça com uma largura equivalente ao total de peças justapostas em que o texto se encaixaria, como podem ser vistas na Figura 35.

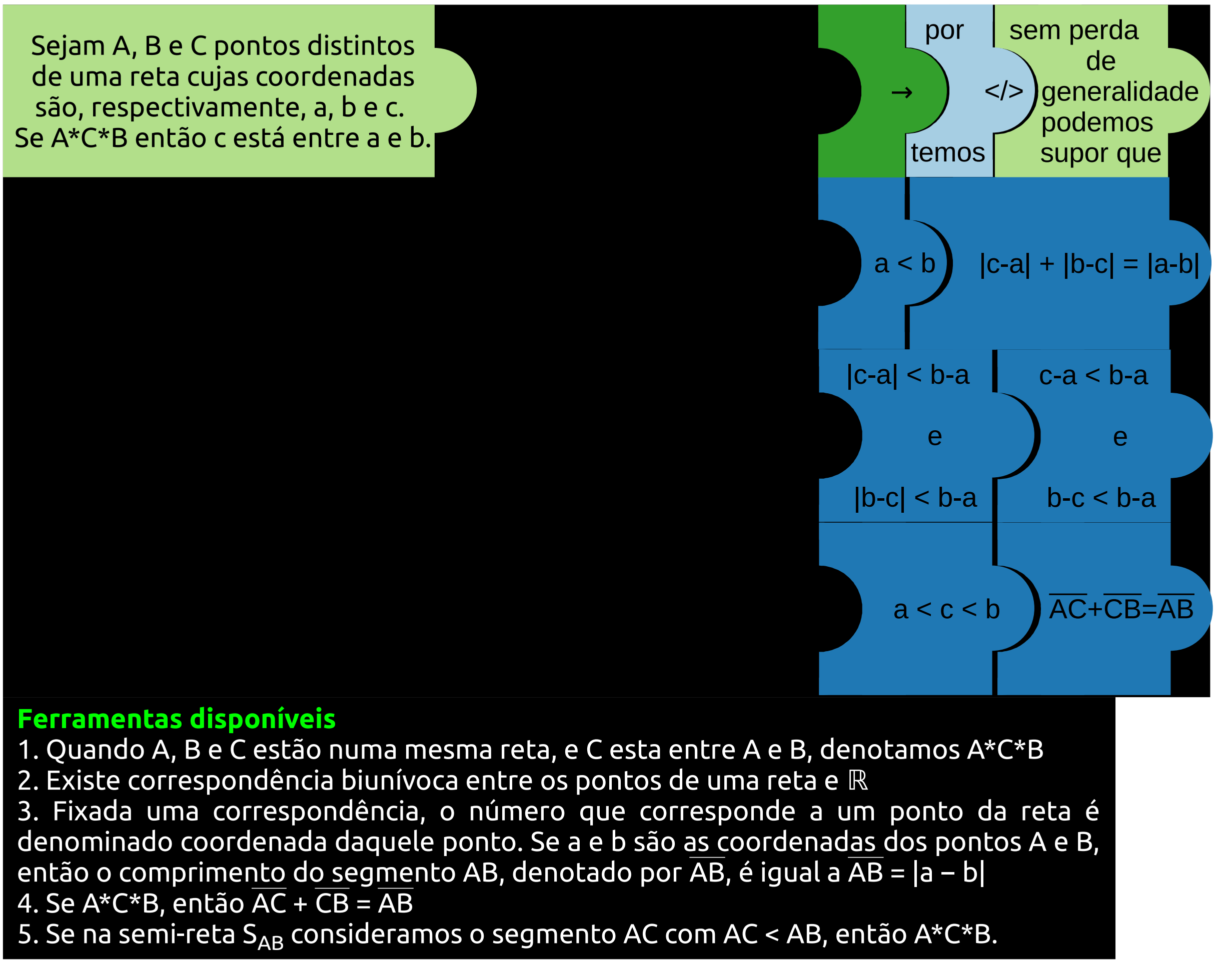
Figura 45 – Forma dos blocos na 3ª geração



Fonte: Elaborado pelo autor.

Usamos uma tela de slide com fundo preto para justapor a demonstração e apresentamos as propriedades conhecidas rotuladas com números no espaço externo ao slide, na parte inferior ou à sua direita. Para preencher a peça referente a propriedades/definições conhecidas bastaria escrever em seu conteúdo o respectivo número. Todas as peças, com exceção do enunciado, possuíam um encaixe à esquerda, esta foi uma decisão que visava indicar que o enunciado mesmo tendo uma cor equivalente às peças da demonstração, teria uma posição bem definida na tela, distinguindo-o de ser usado em qualquer lugar, exceto no início da demonstração como pode ser visto na Figura 46.

Figura 46 – Layout dos exercícios de justapor demonstrações da 3ª geração



Fonte: Elaborado pelo autor.

A 3ª geração da interface de justaposição foi usada nas Coletas 3 e 4, para ilustrar como elas ocorreram apresentamos a seguir os instrumentos da Coleta 3 e na sequência, os instrumentos da Coleta 4, denotadas respectivamente por C3 e C4.

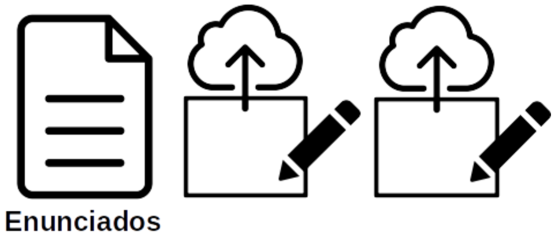
- **C3 – Período 1.1, ambos os Grupos:** Live de 10 a 15 minutos com o pesquisador explicando como funcionaria a coleta. Google Forms com propriedades conhecidas e 2 enunciados para demonstrar por escrito.

Figura 47 – C3 – Período 1.1, ambos os Grupos

Fonte: Elaborado pelo autor.

■ **C3 – Período 1.2, ambos os Grupos:** Google Forms com propriedades conhecidas e 2 enunciados para demonstrar por escrito.

Figura 48 – C3 – Período 1.2, ambos os Grupos



Fonte: Elaborado pelo autor.

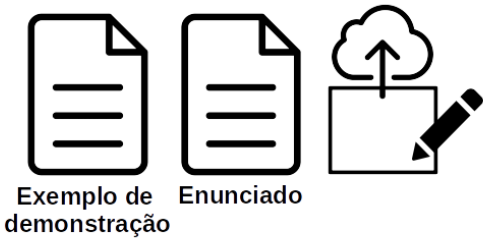
■ **C3 – Período 2 para Grupo 1 OU Período 4 para Grupo 2:** Vídeo do pesquisador explicando sobre o ambiente para justapor demonstrações e dando um exemplo com enunciados utilizados no Período 1. Google Forms com propriedades conhecidas e links para acessar dois enunciados a serem demonstrados por justaposição.

Figura 49 – C3 – Período 2 para Grupo 1 OU Período 4 para Grupo 2

Fonte: Elaborado pelo autor.

■ **C3 – Período 4 para Grupo 1 OU Período 2 para Grupo 2:** Texto com uma demonstração de enunciado do conteúdo atual. Google Forms com propriedades conhecidas e 1 enunciado para demonstrar por escrito.

Figura 50 – C3 – Período 4 para Grupo 1 OU Período 2 para Grupo 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

■ **C3 – Período 3 e 5, ambos os Grupos:** Vídeo do pesquisador explicando sobre o ambiente para justapor demonstrações e dando um exemplo com enunciados utilizados no Período 1. Google Forms com propriedades conhecidas, 1 enunciado para demonstrar por escrito e 1 enunciado para demonstrar por justaposição. Google Forms com propriedades conhecidas, 1 enunciado para demonstrar por escrito e o link de um enunciado para demonstrar por justaposição.

Figura 51 – C3 – Período 3 e 5, ambos os Grupos

Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora apresentamos os instrumentos da Coleta 4.

■ **C4 – Período 1, ambos os Grupos:** Aula ministrada pelo pesquisador sobre o conteúdo dos exercícios, demonstrações, pesquisa em ciências sociais e como seria a dinâmica da coleta de dados. Google Forms com propriedades conhecidas, 6 enunciados para demonstrar por escrito.

Figura 52 – C4 – Período 1, ambos os Grupos

Fonte: Elaborado pelo autor.

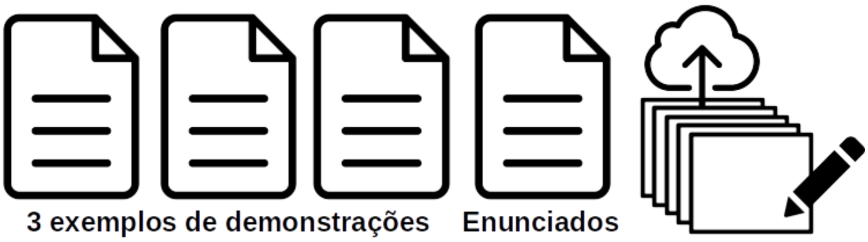
■ **C4 – Período 2 para Grupo 1 OU Período 4 para Grupo 2:** Vídeo do pesquisador explicando sobre o ambiente para justapor demonstrações e dando um exemplo com enunciado utilizado no Período 1. Google Forms com propriedades conhecidas e 8 enunciados para demonstrar por justaposição.

Figura 53 – C4 – Período 2 para Grupo 1 OU Período 4 para Grupo 2

Fonte: Elaborado pelo autor.

■ **C4 – Período 4 para Grupo 1 OU Período 2 para Grupo 2:** Três exemplos de demonstrações do conteúdo atual. Google Forms com propriedades conhecidas e 5 enunciados para demonstrar por escrito.

Figura 54 – C4 – Período 4 para Grupo 1 OU Período 2 para Grupo 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

■ **C4 – Período 3 E 5, ambos os Grupos:** Aula ministrada pelo pesquisador sobre o conteúdo dos exercícios, demonstrações, pesquisa em ciências sociais e como seria a dinâmica da coleta de dados. Vídeo do pesquisador explicando sobre o ambiente para justapor demonstrações e dando um exemplo com enunciados utilizados no Período 1. Google Forms com propriedades conhecidas, 4 enunciados para demonstrar por escrito e 2 links para enunciados a serem demonstrados por justaposição.

Figura 55 – C4 – Período 3 E 5, ambos os Grupos

Fonte: Elaborado pelo autor.

Desconsideramos os participantes que não fizeram as intervenções do 2° período, ou que não tiveram nenhuma demonstração realizada nos Períodos 1, 3 ou 5, ou que por acidente foram alocados ao mesmo tempo no Grupo 1 e 2. Nas Tabelas 2, 3 e 4 apresentamos as respectivas coletas de dados.

Tabela 2: Condições e características das disciplinas referentes às Coletas

	Período	Oferecimento	Créditos	Reserva	Requisito	AVA
Coleta 1	2020.1	1° semestre	30 horas	Matemática, Licenciatura	Nenhum	Google Classroom
Coleta 2	2020.2	4° semestre	90 horas	Matemática, Licenciatura	Geometria Analítica	Moodle
Coleta 3	2021.1	4° semestre	90 horas	Matemática, Licenciatura e Bacharelado	Nenhum	Google Classroom
Coleta 4	2021.1	1° semestre	30 horas	Matemática, Licenciatura	Nenhum	Moodle

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3: Características das Coletas

	Conteúdo	Duração	Incentivo
Coleta 1	Álgebra matricial	29 dias	Presença: 20%
Coleta 2	Geometria euclidiana	89 dias	Nota: +10%
Coleta 3	Geometria euclidiana	112 dias	Presença e Nota: 30%
Coleta 4	Álgebra matricial	18 dias	Presença: 20%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4: Participantes e demonstrações por Coletas, Grupos e Períodos

		Participantes		Demonstrações				
		Por grupo	Total	Periodo 1	Periodo 3	Periodo 5	Por grupo	Total
Coleta 1	**Grupo 1**	10	21	58	60	58	176	350
	Grupo 2	11		64	58	52	174	
Coleta 2	**Grupo 1**	16	26	57	21	16	94	153
	Grupo 2	10		34	11	14	59	
Coleta 3	**Grupo 1**	19	37	69	53	70	192	392
	Grupo 2	18		72	56	72	200	
Coleta 4	**Grupo 1**	4	9	12	6	12	30	100
	Grupo 2	5		28	18	24	70	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os enunciados utilizados nas Coletas e distribuídos em cada um dos seus 5 Períodos encontram-se no Anexo 1 desta tese. Nas Tabelas 5, 6 e 7 utilizamos as notações T(x) para denotar o enunciado x como exercício para demonstrar por escrito, E(y) para denotar o enunciado com a demonstração de exemplo, J(z) o enunciado z como exercício para demonstrar por justaposição.

Tabela 5: Enunciados trabalhados na Coleta 1 e 4

Geração 1	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4	Período 5
Grupo 1	T01 T02 T03 T04 T05 T06	J07 J08 J09 J10 J11 J12 J13 J14	T15 T16 T17 T18 J19 J20	E07 E08 E09 T10 T11 T12 T13 T14	T21 T22 T23 T24 J25 J26
Grupo 2		E07 E08 E09 T10 T11 T12 T13 T14		J07 J08 J09 J10 J11 J12 J13 J14	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6 – Enunciados trabalhados na Coleta 2

Geração 1	Período 1		Período 2			Período 3		Período 4			Período 5	
Grupo 1			J05	J07	J09			E15	E17	E19		
	T01	T03	J06	J08	J10	T11	T13	T16	T18	T20	T21	T23
Grupo 2	T02	T04	E05	E07	E09	J12	J14	J15	J17	J19	J22	J24
			T06	T08	T10			J16	J18	J20		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 7 – Enunciados trabalhados na Coleta 3

Geração 3	Período 1		Período 2			Período 3		Período 4			Período 5		
Grupo 1			J05	J07	J09			E15	E17	E19			
	T01	T03	J06	J08	J10	T11	T13	T16	T18	T20	T21	T23	J25
Grupo 2	T02	T04	E05	E07	E09	J12	J14	J15	J17	J19	J22	J24	J26
			T06	T08	T10			J16	J18	J20			

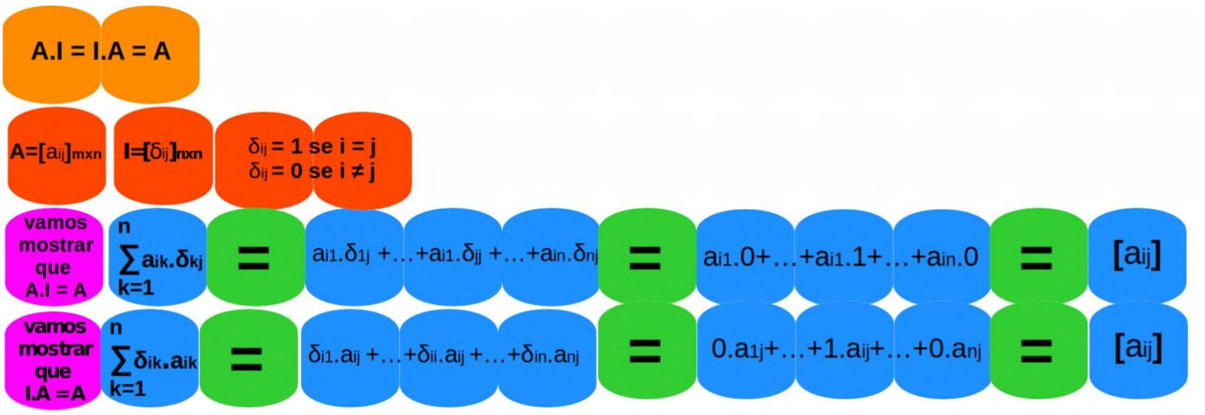
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2. Tratamento dos dados

A análise das demonstrações recebidas começou com uma descrição analítica do conteúdo a fim de direcionar nossa percepção particularmente para os procedimentos realizados, tendo início logo após o recebimento das demonstrações da Coleta 1, quando fornecemos um feedback a todos os estudantes da disciplina sobre seus desempenhos com base nas atividades entregues. Começamos a análise com as demonstrações resolvidas por justaposição, atribuindo a cada enunciado, uma etiqueta diferente aos elementos do conjunto de blocos disponíveis. Utilizamos as letras O, C, R, P, B, G para representar os blocos Laranja (Orange), Ciano, Vermelho (Red), Rosa (Pink), Azul (Blue) e Verde (Green), começando em cada tipo de bloco com o número 1 e avançando de acordo com a maneira como os blocos eram utilizados na demonstração original.

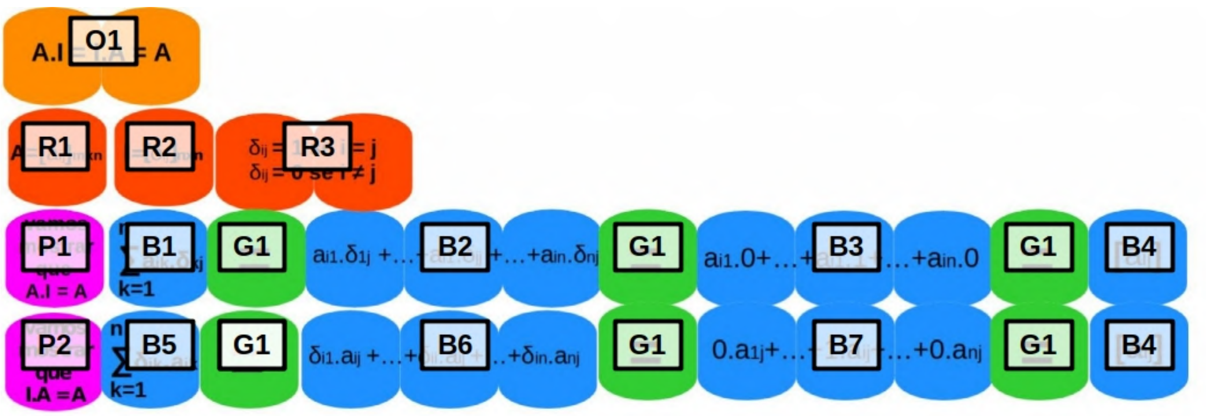
O passo seguinte foi descrever na forma de texto, cada demonstração por justaposição recebida com base neste sistema de etiquetas. Seguimos o padrão de começar na 1ª linha, da esquerda para a direita, separando as etiquetas sequenciais na mesma linha com hífens e indicando a continuação para a linha inferior com uma barra dupla. Para melhor contextualizar essa organização, no exemplo da Figura 56 mostramos uma demonstração por justaposição recebida na Coleta 1 pelo participante 8 (denotado como P-8), pertencente ao Grupo 1 e a forma como ela foi etiquetada na Figura 57, podendo ser reescrita como o código: O1 // R1-R2-R3 // P1-B1-G1-B2-G1-B3-G1-B4 // P2-B5-G1-B6-G1-B7-G1-B4.

Figura 56 – Demonstração do participante 8 (P-8)



Fonte: Acervo do autor.

Figura 57 – Demonstração do participante 8 (P-8), etiquetada



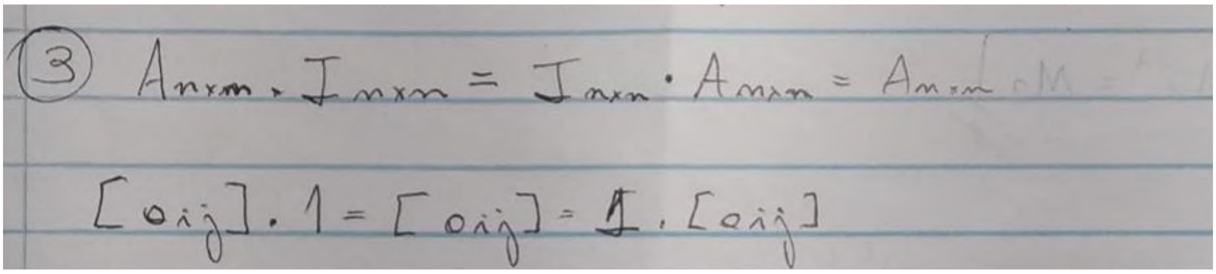
Fonte: Elaborado pelo autor.

A principal vantagem deste sistema de etiquetas foi a possibilidade de colocarmos todas as descrições de demonstrações de um enunciado em uma coluna de planilha eletrônica e organizar automaticamente as demonstrações em ordem alfabética. Isto permitiu de imediato checar quais demonstrações eram idênticas, reduzindo o total de demonstrações a serem avaliadas e também mantendo as demonstrações semelhantes próximas umas das outras, facilitando identificar em que elas se diferenciam. A importância do sistema de etiquetas surge ao notarmos as semelhança entre demonstrações que às vezes decorrem em apenas um bloco com posição trocada, o que fazem-nas parecerem idênticas, mas uma vez que as demonstrações estão etiquetadas e organizadas em ordem alfabética, temos maior clareza sobre onde estão as diferenças em suas estruturas e podemos compreender como afetam o argumento desenvolvido.

Após todas as demonstrações recebidas serem etiquetadas, fizemos suas leituras e atribuimos as devidas observações a cada uma delas, como por exemplo, “as operações foram realizadas antes de definirem as matrizes”, “o resultado está inadequado com a operação realizada”, “o texto justaposto não demonstra o que o enunciado pede”, entre outros aspectos identificados e descritos com o intuito de que o participante pudesse ter uma compreensão mais clara sobre o que precisa melhorar nas suas demonstrações, delegando para demonstrações idênticas as mesmas observações. Essa estratégia ajudou a entender como diferentes percursos podem resultar em demonstrações válidas ou identificar quais omissões e falhas levaram a argumentos inválidos. No caso, a demonstração da Figura 56 em específico foi avaliada como “Ok”, significando estar de acordo com o esperado e não havendo necessidade de serem feitas mais observações a seu respeito.

Com base nas observações feitas para as demonstrações por justaposição, o próximo passo foi avaliar as demonstrações por escrito cujos enunciados fossem os mesmos, o que na Coleta 1 envolveu os enunciados 10, 11, 12, 13 e 14, demonstrados, em momentos diferentes, tanto por escrito como por justaposição. Procuramos aproveitar as observações elaboradas para as demonstrações por justaposição na hora de escrevermos as observações as demonstrações por escrito. Na Figura 58 apresentamos a demonstração por escrito do enunciado 14, recebida na Coleta 1 pelo participante 8 e referente ao mesmo enunciado mostrado na Figura 56, para esta demonstração em específico, a avaliamos como inválida, deixando como observação que a operação apresentada foi de multiplicação por escalar em vez de multiplicação de matrizes.

Figura 58 – Demonstração do enunciado análogo ao da Figura 37



Fonte: Acervo do autor.

A etapa final desse procedimento foi avaliar as demonstrações dos enunciados resolvidos exclusivamente por escrito. Nesta etapa, procuramos aproveitar as observações nas avaliações das demonstrações escritas dos enunciados 10, 11, 12, 13 e 14 para escrever as observações das demais demonstrações. Após avaliadas enviamos seus comentários a cada estudante de forma privada meio seus e-mails institucionais.

Procuramos repetir este procedimento na Coleta seguinte (Coleta 2), mas devido às demonstrações por justaposição da 2ª geração da interface utilizarem blocos com conteúdos parcialmente e totalmente editáveis, o processo de etiquetas se mostrou inviável, pois o papel dos blocos dependeria não só de sua posição, mas também da forma como foi preenchido, tornando assim cada demonstração única, já que admitia a escolha de palavras pelo participante. Isto levou inclusive vários participantes a montarem/escreverem suas demonstrações inteiramente com as peças editáveis, ignorando o efeito das cores que os blocos deveriam representar. Para a análise das respostas recebidas na Coleta 2, começamos pelas demonstrações por justaposição mas sem a descrição delas por etiquetas, já os passos seguintes seguiram análogos aos empregados na Coleta 1, isto é, avaliamos as demonstrações por escrito com mesmos enunciados que as de justaposição e depois avaliamos as demonstrações recebidas exclusivamente por escrito. Essa experiência avaliando as demonstrações favoreceu na percepção de que haviam certos padrões em relação ao que registramos como observações, levando-nos a seguinte tentativa de organização das regularidades apresentada no Quadro 3.

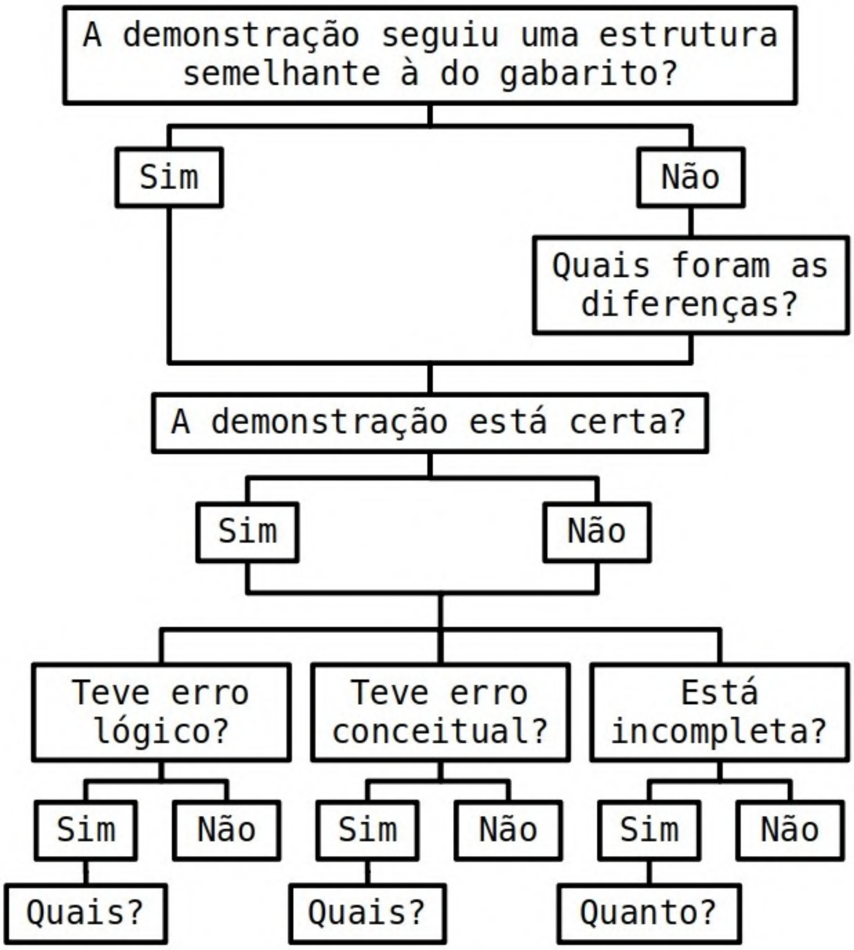
Quadro 3 – Aspectos que se repetiam nas avaliações realizadas

Coisas que podem diferir da estrutura do gabarito
Usar exemplos
Usar ilustrações
Usar passos desnecessários
Escrever por extenso
Caminho alternativo
Tipos de erros lógicos
Erros mínimos (algo que parece apenas uma desatenção ou erro de escrita)
Usou resultado válido para demonstrar o enunciado, porém externo às ferramentas
Usou resultado derivado ou equivalente ao próprio enunciado
Demonstrou a recíproca do enunciado ou algo diferente
Usou apenas uma ilustração para justificar o argumento
Houve falhas no encadeamento lógico da demonstração
Tipos de erros conceituais
Erros mínimos (algo que parece apenas uma desatenção ou erro de escrita)
Assumiu que o enunciado verdadeiro era falso ou o contrário
Tomou uma afirmação inicial falsa
Apresentou um contra-exemplo inválido
Houve falhas na operação das propriedades matemáticas
Tipos de incompletude
Incompletude mínima (ausência de informações que não afetam a compreensão da demonstração)
Usou apenas exemplos
Mostrou uma situação genérica, mas que não cobria o domínio
Faltaram poucos casos a serem tratados
Faltou apenas concluir o resultado
Faltou enunciar definições ou uso das propriedades
Faltou da metade para o final da demonstração
Enunciou o resultado sem mostrar o suficiente do processo
Chegou a um resultado inconclusivo
Não há elementos suficientes para entender o que foi feito

Fonte: Elaborado pelo autor.

Destas observações elaboramos fluxogramas de como avaliar as demonstrações recebidas e após diversas discussões com base nos materiais reunidos até a ocasião, foi elaborado o modelo apresentado na Figura 59.

Figura 59 – Agrupamento para avaliação das demonstrações recebidas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Contudo, em discussão com o orientador sobre esta forma de avaliar, veio em xeque a questão de como discernir erros conceituais de erros lógicos. Pois embora o erro conceitual fosse entendido pelo pesquisador como uma falha no uso ou aplicação das definições/propriedades/relações, enquanto que o erro lógico estaria ligado ao uso indevido de procedimentos, na ação de diferenciar ambos os tipos no corpo do texto de uma demonstração isto parecia pouco claro, visto que um erro lógico poderia provocar erros conceituais ou a recíproca, desse modo consideramos os dois tipos de erros um mesmo agrupamento e organizamos os seguintes agrupamentos para o que e como avaliar as demonstrações recebidas:

1) Seguiu uma estrutura semelhante à do gabarito? Se não, explicar a estrutura.

2) A demonstração pode ser considerada correta? Sim ou não.

3) Há erros de lógica ou conceituais? Se sim, listar os erros encontrados.
4) A demonstração está incompleta? Se sim, apresentar o que faltou.

Com esses agrupamentos, reavaliamos as demonstrações recebidas na Coleta 1. Para contextualizar esse processo, apresentamos na Tabela 8 a forma como reavaliamos a demonstração do enunciado das Figura 56 e Figura 58, referentes ao enunciado 14 do participante 8 da Coleta 1.

Tabela 8 – Feedbacks das demonstrações do participante 8

Agrupamentos	J14	T14
Seguiu uma estrutura semelhante à do gabarito? Se não, explicar a estrutura.	Sim	Não. Operou o produto pela identidade como se fosse a matriz vezes um escalar igual a 1
A demonstração pode ser considerada correta? Sim ou não.	Sim	Não
Há erros de lógica ou conceituais? Se sim, listar os erros encontrados.	Não	Sim. Operou o produto das matrizes assumindo que a matriz identidade é um escalar igual a 1
A demonstração está incompleta? Se sim, listar o que faltou.	Não	Não.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma vez elaborados os agrupamentos, nos colocamos a validá-los internamente em uma sessão do PECIMAT (Grupo de pesquisa de Tecnologias Digitais em Educação Matemática e formação de professores) no início de 2021. Neste encontro solicitamos que cada pesquisador participante (todos com experiência nas áreas de Matemática e Educação Matemática) avaliassem nesses 4 agrupamentos, uma demonstração diferente dentre as recebidas na Coleta 1, as respostas desta Coleta foram escolhidas por serem demonstrações diretas de propriedades de matrizes e relativamente simples de avaliar sem a necessidade de se aprofundar no conteúdo. Comparamos essas avaliações com as feitas pelo pesquisador e constatamos que os agrupamentos 1 e 2 foram muito consistentes, porém os agrupamentos 3 e 4 diferiram em aspectos que poderiam ser avaliados como erros ou como ausentes na demonstração. Reconheçamos que não era claro diferenciar objetivamente o desempenho dos participantes a partir dos agrupamentos 3 ou 4, mas mantivemos os agrupamentos 3 e 4 separados apenas para gerar os feedbacks e assim reavaliamos as demonstrações da Coleta 2.

Para avaliar as respostas reunidas nas Coletas 3 e 4 começamos pelo processo de etiquetas, pois embora tivéssemos ainda um bloco com conteúdo parcialmente editável, a sua entrada era mais objetiva, admitindo a escolha entre uma das propriedades ou definições enumeradas. Desse modo, o rótulo desta peça a ser preenchida ficava com a sua letra seguida do símbolo # (hashtag) e quando preenchida, no lugar do # era colocado o valor escolhido pelo participante. Os demais procedimentos de avaliação foram análogos aos aplicados na Coleta 1, mas considerando as observações dentro dos 4 agrupamentos discutidos.

Considerando que os enunciados da Coleta 1 e Coleta 4 foram semelhantes e que tivemos um grande número de participantes, achamos plausível reunir suas demonstrações escritas na tentativa de construir categorias relacionadas à forma como foram avaliadas. Começamos selecionando demonstrações escritas dos Períodos 3 e 5 que envolviam demonstrações diretas e procuramos reunir as avaliações feitas em categorias mais gerais. Com referência aos enunciados apresentados nesta tese no Anexo 1, consideramos neste processo os enunciados T16 e T17 (3º período), T21 e T23 (5º período), as frequências absolutas de respostas para cada enunciado estão expostas na Tabela 9:

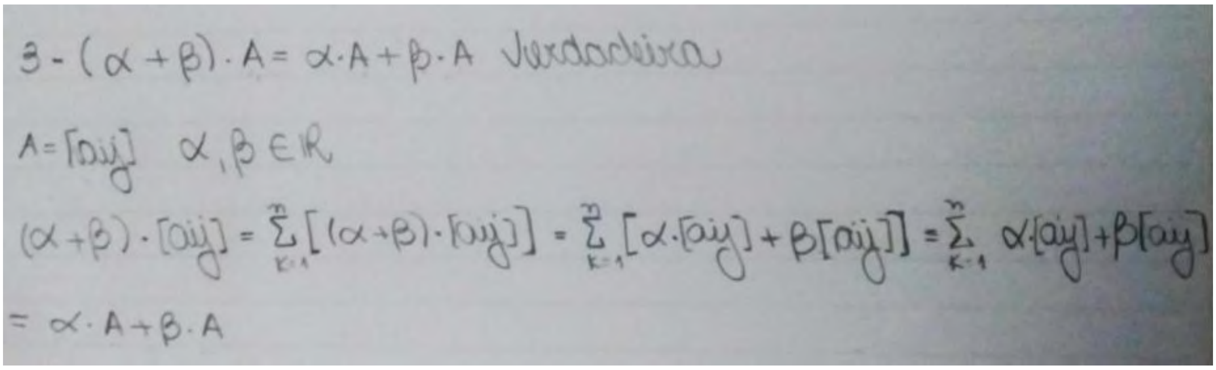
Tabela 9 – Relação de respostas destes 4 enunciados

Coleta	T16	T17	T21	T23	Total
C1	37	34	34	34	139
C4	21	19	26	24	90
Total	58	53	60	58	229

Fonte: Elaborado pelo autor.

Identificamos entre as avaliações realizadas para as demonstrações, aquelas semelhantes a menos das escolhas de palavras e padronizamo-as. Com o objetivo de variarmos o mínimo nas observações e que cada resposta estivesse associada à um único tipo de observação, realizamos uma análise das demonstrações que tinham duas ou mais observações e consideramos se eram combinação de outras observações ou se apareciam sempre de forma combinada. Ao término deste processo, chegamos em 30 tipos distintos de observações, para exemplificar apresentamos uma resposta do enunciado 23 que envolvia demonstrar que “se A for uma matriz qualquer e α e β pertencente aos reais, então (α + β).A = α.A + β.A”, do participante 24 da Coleta 1 como apresentamos na Figura 60.

Figura 60 – Resposta do enunciado 23, pelo participante 24 da Coleta 1



Fonte: Acervo do autor.

Ela foi a única demonstração avaliada com a observação “Passo ausente + Uso errado do somatório”, neste caso o uso errado do somatório refere-se à não necessidade de expressar o produto por escalar através do operador somatório, enquanto que o passo ausente refere-se à necessidade de separar o somatório em dois antes de apresentar o resultado como duas matrizes. Apesar disso, o pesquisador na ocasião de avaliar a demonstração, considerou que a mesma seguia sendo válida. Dos 30 tipos de observações destas avaliações, 27 referiam-se a erros ou falhas no processo de demonstrar, de modo que fizemos sua associação de maneira não excludente nos 7 tipos de erros/dificuldades para demonstrar elencados por Doruk e Kaplan (2015) e apresentados no capítulo de Fundamentação Teórica desta tese. As observações não consideradas como erros ou falhas foram respectivamente: Tipo 1) Demonstração correta, sem falhas, sem aspectos ausentes e usando a abordagem esperada; Tipo 7) Abriu o enunciado por ambos os lados; 9) Complementou a demonstração com um exemplo. Já nos quadros 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, mostramos como cada tipo de erro/dificuldade agrupou nosso conjunto de tipos de observações.

Quadro 4 – Tipos de observações associadas à D1

D1 - Expressar definições	**Tipo**
Uso errado do somatório	13
Erro sintático + Uso errado do somatório	22
Complementou com um exemplo + Erro sintático + Uso errado do somatório	26
Operou matrizes como se fossem números reais + Uso errado do somatório	27
Passo ausente + Uso errado do somatório	30

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 5 – Tipos de observações associadas à D2

D2 - Entender o que a propriedade afirma	**Tipo**
Mostrou para caso genérico que não cobre o domínio	2
Argumentação pouco elaborada + Entendeu errado o enunciado	23
Confundiu propriedades + Considerou a afirmação falsa	24

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 6 – Tipos de observações associadas à D3

D3 - Usar linguagem matemática e notações apropriadas	**Tipo**
Expandiu matriz de tamanho genérico	8
Erro sintático	10
Termo ausente	11
Erro sintático + Passo desnecessário	16
Termo ausente + Passo ausente	17
Argumentação pouco elaborada + Escreveu por extenso parte ou toda a argumentação	18
Operou matrizes como se fossem números reais + Termo ausente	21
Erro sintático + Uso errado do somatório	22
Operou matrizes como se fossem números reais + Escreveu por extenso parte ou toda a argumentação	25
Complementou com um exemplo + Erro sintático + Uso errado do somatório	26
Escreveu por extenso parte ou toda a argumentação + Termo ausente	28

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 7 – Tipos de observações associadas à D4

D4 - Selecionar a estratégia e método de demonstração adequadas	**Tipo**
Mostrou um exemplo	3
Passo desnecessário	14
Erro sintático + Passo desnecessário	16
Argumentação pouco elaborada + Escreveu por extenso parte ou toda a argumentação	18
Abriu o enunciado por ambos os lados + Passo desnecessário	20

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 8 – Tipos de observações associadas à D5

D5 - Distinguir conceitos	**Tipo**
Operou matrizes como se fossem números reais	5
Confundiu propriedades	15
Operou matrizes como se fossem números reais + Confundiu propriedades	19
Operou matrizes como se fossem números reais + Termo ausente	21
Confundiu propriedades + Considerou a afirmação falsa	24
Operou matrizes como se fossem números reais + Escreveu por extenso parte ou toda a argumentação	25
Operou matrizes como se fossem números reais + Uso errado do somatório	27
Usou o que deveria demonstrar + Confundiu propriedades	29

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 9 – Tipos de observações associadas à D6

D6 - Criar uma estrutura de demonstração baseada nas definições	**Tipo**
Usou o que deveria demonstrar	6
Usou o que deveria demonstrar + Confundiu propriedades	29

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 10 – Tipos de observações associadas à D7

D7 - Expressar o raciocínio utilizado	**Tipo**
Argumentação pouco elaborada	4
Passo ausente	12
Termo ausente + Passo ausente	17
Argumentação pouco elaborada + Entendeu errado o enunciado	23
Passo ausente + Uso errado do somatório	30

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3. Análise de dados

Apresentamos alguns termos utilizados na nossa análise de dados:

Hipótese estatística: Brady e Collier (2010) definem hipótese estatística, como uma suposição sobre a relação entre variáveis independentes e uma variável dependente. Figueiredo Filho (2019) define hipótese estatística como a conjectura sobre a relação entre uma variável independente e uma variável dependente e que deve conter variáveis e estabelecer relações esperadas entre elas. Guimarães (2008) trata hipótese estatística como qualquer afirmação sobre a população em estudo e geralmente relacionada a parâmetros populacionais. Bolfarine e Sandoval (2010) definem hipótese estatística como qualquer afirmação sobre a distribuição de probabilidade de uma ou mais variáveis aleatórias, geralmente denotada por H_0 (hipótese nula) a hipótese de interesse. Caso H_0 seja rejeitada, então aceitamos uma hipótese alternativa H_1, que deve ser uma afirmação verdadeira quando a hipótese nula é falsa. Chamamos o teste de hipótese estatística de função de decisão que nos permite manter a hipótese H_0 verdadeira ou manter a hipótese H_1 verdadeira.

P-valor: A probabilidade de significância, também denotada pelo p-valor, é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema que a observada em uma amostra considerando a hipótese nula. O p-valor pode ser interpretado como a probabilidade de ocorrência da hipótese nula, quando o p-valor encontrado estiver abaixo de um valor de significância considerado para aquela pesquisa, no caso das pesquisas em Ciências Sociais, costuma-se considerar esse valor 5%. Em situações em que obtivemos um p-valor abaixo do estimado, podemos rejeitar a hipótese nula e consequentemente assumir que a hipótese alternativa é válida. Guimarães (2008) coloca o p-valor como a probabilidade de cometer um erro tipo 1 (rejeitar H_0 quando ela é verdadeira), com dados de uma amostra específica. Este valor é calculado por software estatístico e comparado com o nível de significância escolhido para a tomada de decisão, se o p-valor for menor que o nível de significância escolhido, rejeita-se $H_{0,}$ caso contrário, não rejeitamos H_0. Figueiredo Filho (2019) afirma que o p-valor é o teste de significância mais utilizado em pesquisas científicas e determina a probabilidade de se obter um valor igual ou mais extremo do que o observado na amostra, assumindo que a hipótese nula é verdadeira. O p-valor é a probabilidade de observar os resultados esperados assumindo que a hipótese nula é verdadeira, portanto quanto menor o p-valor, menor a plausibilidade da hipótese nula.

Teste de significância: Figueiredo Filho (2019) afirma que os testes de significância estatística fornecem uma medida objetiva para tomar decisões sobre a plausibilidade de uma dada hipótese, ou seja, é com base na significância estatística que devemos escolher qual hipótese parece ser verdadeira. Se tivermos evidências suficientes, devemos rejeitar a hipótese nula em termos da hipótese alternativa, por outro lado se a evidência for insuficiente, dizemos que não podemos rejeitar a hipótese nula. Guimarães (2008) afirma que os testes estatísticos são regras de decisão ligadas a um fenômeno populacional, que permitem avaliar com o auxílio de uma amostra, se determinadas hipóteses podem ou não não pode ser rejeitado.

Teste paramétrico: Figueiredo Filho (2019) diz que o termo paramétrico associado a testes estatísticos vem de parâmetro e significa que existem algumas suposições sobre a natureza da distribuição dos dados. Enquanto os testes paramétricos exigem a satisfação de mais suposições, nos testes não paramétricos o pesquisador não precisa assumir certas suposições como verdadeiras para utilizá-las. Guimarães (2008) afirma que a estatística não paramétrica pode ser definida como um conjunto de métodos estatísticos aplicados a dados nos quais os pressupostos distributivos necessários para a aplicação de uma técnica clássica (Intervalo de confiança, Teste de hipóteses) não são cumpridos satisfatoriamente.

Teste Chi²: O teste Chi² é um teste não paramétrico utilizado para comparar a distribuição de variáveis categóricas em uma amostra com a distribuição em outro grupo (por exemplo, linhas e colunas). Se a distribuição da variável categórica não for muito diferente nos grupos, pode-se concluir que a distribuição da variável categórica não está relacionada com a variável dos grupos, em outras palavras, a variável categórica e os grupos são independentes. Este teste compara a distribuição de ocorrências com uma função de distribuição de probabilidade contínua que apresenta algumas limitações quando utilizada com um pequeno número de observações. Um baixo p-valor para este teste nos permite rejeitar a hipótese nula de que a distribuição é aleatória, ou seja, que a variável categórica não está relacionada à variável de grupo e assim, assumir a hipótese alternativa, ou seja, que as ocorrências observadas nas categorias estão associadas aos grupos. Guimarães (2008) afirma que o teste Chi² é um teste de aderência, ou seja, seu objetivo é verificar se uma determinada amostra pode vir de uma determinada população ou distribuição de probabilidade, comumente conhecidos como testes de adesão ou qualidade de ajuste, nesses casos, uma amostra aleatória é tomada e a distribuição da amostra é comparada com a distribuição de interesse. O teste Chi² é amplamente utilizado na análise de dados experimentais, em que o interesse é observar frequências em pelo menos duas, e é um teste de adesão útil para verificar se a frequência observada difere significativamente da frequência esperada.

Nos termos explicitados, nossa análise de dados considerou somente se as demonstrações recebidas nos Períodos 1, 3 e 5 estavam certas ou erradas. Assumimos a hipótese estatística (H_0) para as Coletas 1, 2 e 3 que as quantidades de demonstrações certas ou erradas não têm uma relação com as intervenções realizadas. Avaliamos esta hipótese através do teste de aderência não-paramétrico Chi² rejeitando a hipótese nula (H_0) quando encontrados p-valores abaixo de 5%. Não realizamos testes de aderência para a Coleta 4 devido ao baixo número de participantes. Para aumentarmos nossos casos analisados, escolhemos considerar combinações das demonstrações recebidas nestes 3 Períodos, denotando-os como Período 1+3, Período 1+3+5 e Período 3+5.

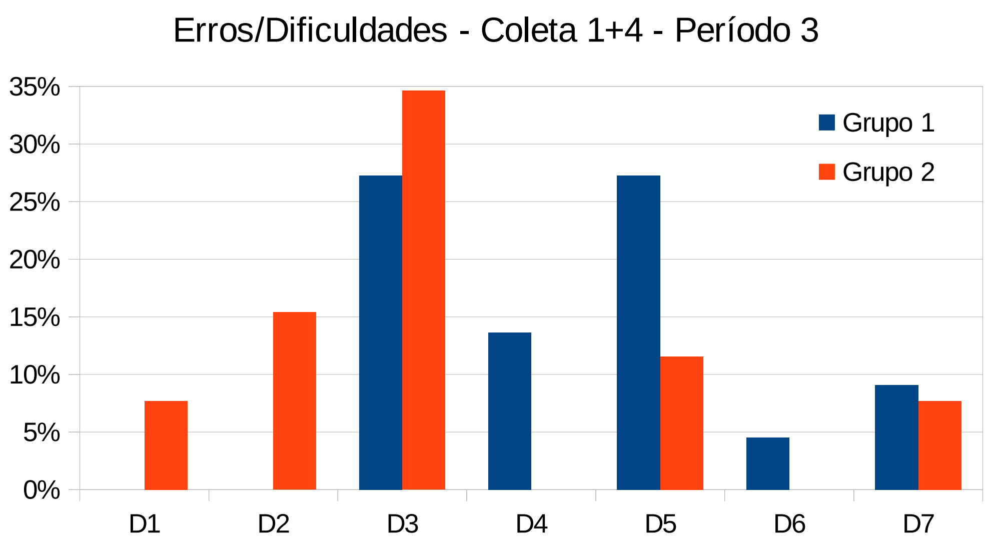
4. RESULTADOS

Nas seções seguintes mostraremos os resultados alcançados a partir dos métodos explicitados, a forma como intepretamos e seu diálogo entre os referenciais teóricos utilizados.

4.1. Erros/dificuldades nas demonstrações escritas

No gráfico abaixo (Figura 61), temos os tipos de observações da Coleta 1+4 referentes ao Período 3 organizadas para cada erro/dificuldade elencado por Doruk e Kaplan (2015) e no Quadro 11, os enunciados que foram demonstrados por escrito pelos participantes neste Período. Nos referimos aos sete erros/dificuldades listados pelos autores por D1 até D7.

Figura 61: Erros/Dificuldades – Coleta 1+4 – Período 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 11: Enunciados verdadeiros da Coleta 1 e Coleta 4, Período 3 para serem demonstrados por escrito

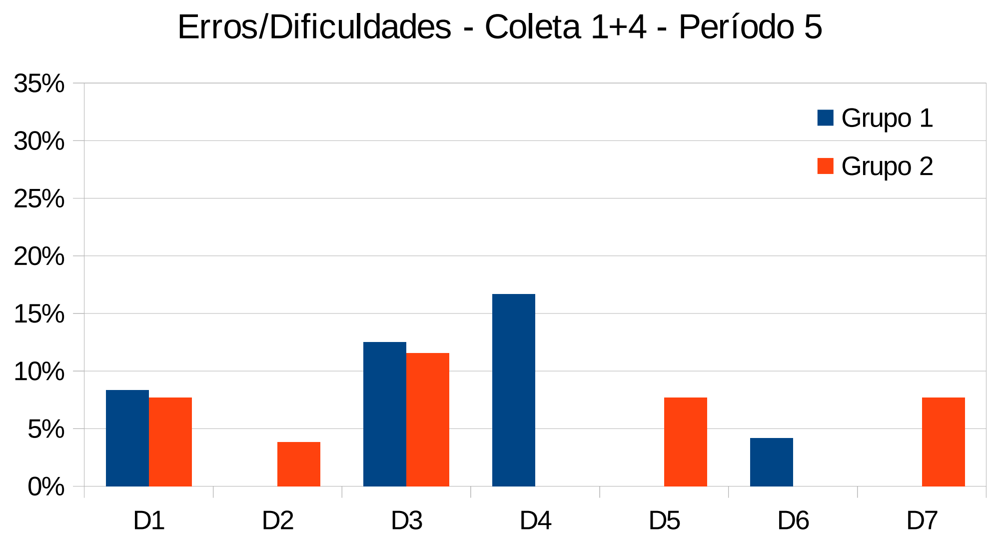
T16	Seja α pertencente aos reais e A uma matriz, então $(\alpha.A)^T = \alpha.A^T$.
T17	Sejam A, B e C matrizes de tamanho nxn então (A.B).C = A.(B.C).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Vemos que D4 (Selecionar a estratégia e método de demonstração adequadas) e D6 (Criar uma estrutura de demonstração baseada nas definições) foram exclusivos do Grupo 1, aparecendo juntos em 18,2% das respostas, já D2 (Entender o que a propriedade afirma) foi exclusivo do Grupo 2, aparecendo em 15,4% das respostas. A maior concentração de respostas ocorreu em D3 (Usar linguagem matemática e notações apropriadas) aparecendo em 27,3% das respostas do Grupo 1 e 34,6% das respostas do Grupo 2.

No gráfico abaixo (Figura 62), temos os tipos de observações da Coleta 1+4 referentes ao Período 5 organizadas para cada erro/dificuldade elencado por Doruk e Kaplan (2015) e no Quadro 12, os enunciados que foram demonstrados por escrito pelos participantes neste Período.

Figura 62: Erros/Dificuldades – Coleta 1+4 – Período 5



Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 12: Enunciados verdadeiros da Coleta 1 e Coleta 4, Período 5 para serem demonstrados por escrito

T21	Seja A uma matriz de tamanho nxn e 0 a matriz nula de tamanho nxn, então A + 0 = A.
T23	Seja A uma matriz qualquer e α e β pertencente aos reais, então $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Vemos que D4 (Selecionar a estratégia e método de demonstração adequadas) e D6 (Criar uma estrutura de demonstração baseada nas definições) foram exclusivos do Grupo 1, aparecendo juntos agora em 20,8% das respostas (+2,6% comparado ao Período 3) e D2 foi exclusivo do Grupo 2, aparecendo agora em 3,8% das respostas (-11,6% comparado ao Período 3). Diferente do Período 3 onde D3 (Usar linguagem matemática e notações apropriadas) teve a maior concentração de respostas, agora no Período 5, tivemos em D3 apenas 12,5% das respostas do Grupo 1 (-14,8% comparado ao Período 3) e 11,5% das respostas do Grupo 2 (-23,1% comparado ao Período 3). Esta redução nas respostas em D4 pode ser um indicativo de que independente da ordem das intervenções, houve um nivelamento na forma como os participantes compreendiam o uso das notações e a linguagem necessárias para demonstrar. Para ambos os Grupos as frequências de respostas nos sete tipos de erros/dificuldades reduziram do Periodo 3 para o Período 5, no caso do Grupo 1 a redução foi de 81,8% para 41,7%, e do Grupo 2 de 76,9% para 38,5%, mudança alavancada por D5 (distinguir conceitos), que para o Grupo 1 reduziu de 27,3% para 0% e no Grupo 2 de 11,5% para 7,7%.

Os resultados apresentados nesta seção dialogam com o apontamento de Hammack (2013) sobre as demonstrações exigirem para além do raciocínio matemático e da aplicação do conhecimento especializado, o uso e aquisição de uma linguagem própria. Isto se nota com a porcentagem de respostas classificadas na dificuldade D3 (Usar linguagem matemática e notações apropriadas) no Período 3 e na sua queda no Período 5, representando que no decorrer da Coleta tivemos a aquisição da linguagem matemática necessária para demonstrar, demandando neste quesito uma influência menor nos erros/dificuldades observados no Período 5. Essa aquisição da linguagem mediante o contato com as demonstrações por justaposição, pode ser interpretado de forma paralela ao que Fukawa-Connelly (2012) observam sobre o efeito de um mediador no processo de aquisição das normas sociomatemáticas em um curso de matemática, resultando de atitudes iniciais mediador (no caso, as estruturas de texto das demonstrações por justaposição), que no decorrer do trabalho com os estudantes, as adotam como comportamentos aprendidos para aquele contexto.

O fato das demonstrações por justaposição poderem ser elaboradas mediante processos de eliminação e análise sintaxica parece justificar que as dificuldades D4 (Selecionar a estratégia e método de demonstração adequadas) e D6 (Criar uma estrutura de demonstração baseada nas definições), ligadas aos processos criativos de demonstrar, vieram a aparecer somente para o Grupo 1, tanto no Período 3 como no Período 5. Pois a prática das demonstrações por justaposição no Período 2 exigiram dos estudantes um esforço menor em entender como criar uma demonstração pra aquele enunciado, uma vez que estariam focados em como combinar os segmentos disponíveis para formar a demonstração daquele enunciado. Hanna, Jahnke e Pulte (2010) argumentam que a própria demonstração contém conhecimento matemático que relaciona a afirmação válida às definições assumidas, o que justifica o fato do Grupo 2 não apresentar estas dificuldades no Período 3, visto que no Período 2 tiveram contato com exercícios de escrever demonstrações acompanhados de exemplos de demonstrações para utilizarem como parâmetros, logo a redução das dificuldades pelo Grupo 1 no Período 5, reflete um efeito do contato com a intervenção de exercícios de escrever demonstrações acompanhados de exemplos de demonstrações vistos no Período 4.

Como no Período 3 as dificuldades D1 (Expressar definições) e D2 (Entender o que a propriedade afirma) aparecem apenas para o Grupo 2, podemos inferir que os participantes do Grupo 1 tiveram no Período 2 um contato maior com a leitura das partes separadas da demonstração, trazendo uma habituação maior com as definições e os papéis das propriedades. Apoiado na discussão de Weber (2015), sobre as diferentes estratégias efetivas de leitura para a compreensão de demonstrações, ler os segmentos das demonstrações por justaposição e suas composições durante o processo de justaposição parece envolver uma estratégia de leitura diferente da leitura de uma demonstração completa com o objetivo de reconhecer ou reproduzir os meios com os quais o raciocínio foi desenvolvido.

4.2. Demonstrações válidas e inválidas

Na Tabela 10 temos os testes de aderência realizados na Coleta 1 cujo p-valor obtido foi abaixo de 5% e no Quadro 13 os enunciados que foram demonstrados pelos participantes nos Períodos analisados, em azul os enunciados de escrever demonstrações, em vermelho os enunciados de justaposição.

Tabela 10: COLETA 1

Teste		Grupo 1	Grupo 2	diferença	p-valor
1	Período 1	60,3%	80,0%	19,7%	0,027
2	Período 3 (ex. tradicionais)	55,0%	76,9%	21,9%	0,039
3	Período 5 (ex. tradicionais)	68,4%	91,2%	23,8%	0,017
4	Período 5	72,4%	90,4%	18%	0,016
5	Período 3+5 (ex. tradicionais)	61,5%	83,6%	22,1%	0,002
6	Período 3+5	67,8%	84,5%	16,7%	0,003
7	Período 1+3+5 (ex. tradicionais)	61,0%	82,1%	21,1%	0,000
8	Período 1+3+5	65,3%	83,1%	17,8%	0,000

Teste		P. 1	P. 3+5	diferença	p-valor
9	Grupo 1 (ex. justaposição)	60,3%	80,0%	19,7%	0,039

Fonte: Elaborado pelo autor.

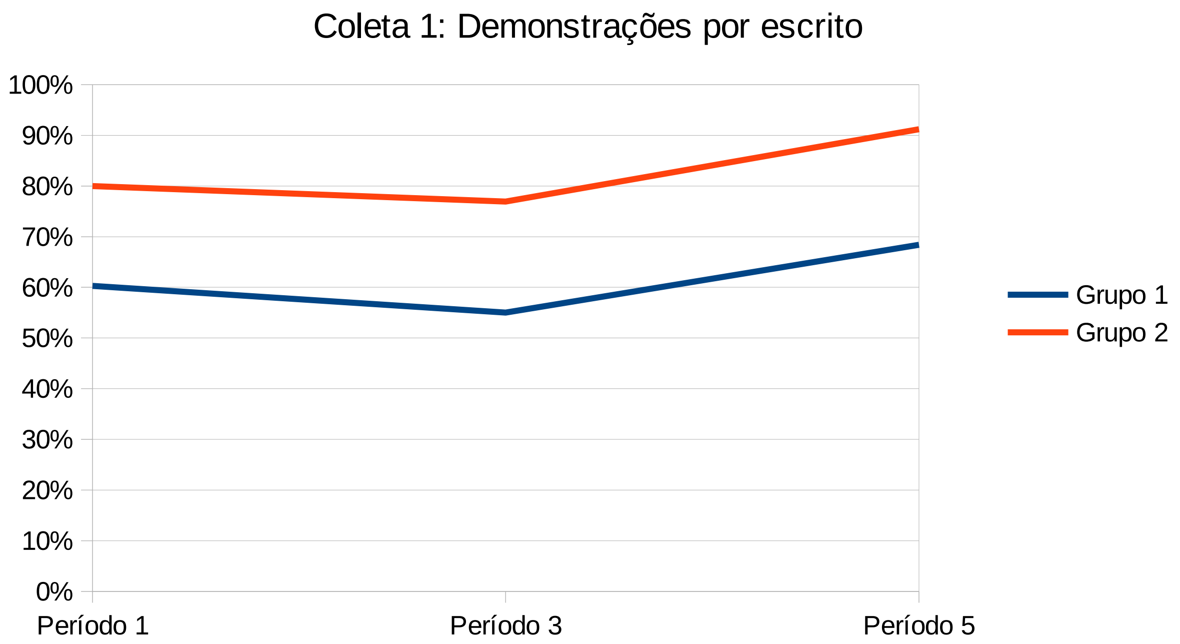
Quadro 13: C1 – Enunciados dos Períodos analisados

Período 1	**Período 3**	**Período 5**
1T) Sejam A e B matrizes de tamanho nxn. Então A.B = B.A. **2T)** Seja A, B e C matrizes de tamanho nxn. Então A.(B+C) = A.B + A.C. **3T)** Seja A uma matriz de tamanho 2x2 e Id a matriz identidade de tamanho 2x2. Se $A^2 = Id$, então A = Id. **4T)** Seja A uma matriz de tamanho nxn, e Id a matriz identidade de tamanho nxn. Se $A^2 = Id$, então A = Id ou A = -Id. **5T)** Seja A uma matriz qualquer, então 1.A = A. **6T)** Seja A e B matrizes de tamanho nxn. Então $(A – B)^T = A^T – B^T$.	**15T)** Seja A e B matrizes nxn, então $(A+B)^2 = A^2 + 2.A.B + B^2$. **16T)** Seja α pertencente aos reais e A uma matriz, então $(α.A)^T = α.A^T$. **17T)** Sejam A, B e C matrizes de tamanho nxn então (A.B).C = A.(B.C). **18T)** Sejam A e B matrizes de tamanho nxn e 0 a matriz nula de tamanho nxn. Se A.B = 0, então A = 0 ou B = 0. **19J)** Sejam A, B e C matrizes de tamanho nxn, então A + (B + C) = (A + B) + C. **20J)** Seja α um real e A e B matrizes de tamanho nxn, então α.(A + B) = α.A + α.B.	**21T)** Seja A uma matriz de tamanho nxn e 0 a matriz nula de tamanho nxn, então A + 0 = A. **22T)** Seja A uma matriz de tamanho nxn, Id a matriz identidade de tamanho nxn e 0 a matriz nula de tamanho nxn. Se $A^3 = A$, então A = Id ou A = 0. **23T)** Seja A uma matriz qualquer e α e β pertencente aos reais, então (α + β).A = α.A + β.A. **24T)** Sejam A e B matrizes nxn e 0 a matriz nula nxn. Se A.B = 0, então B.A = 0. **25J)** Seja α um real e A e B matrizes de tamanho nxn, então (α.A).B = A.(α.B) = α.(A.B). **26J)** Seja A e B matrizes de tamanho nxn, então $(A.B)^T = B^T.A^T$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O teste de aderência 1 aponta que os acertos e erros nas demonstrações desde antes das intervenções (Período 1) já estava associado ao Grupo no qual o estudante pertencia. Esta diferença de aproximadamente 20% pode ser notada quando observamos no gráfico abaixo (Figura 63), as taxas de acertos dos dois Grupos nas demonstrações por escrito dos Períodos 1, 3 e 5. A manutenção desta diferença pode nos indicar que devido aos enunciados se manterem dentro do mesmo tópico (Álgebra Matricial) e as dificuldades variarem pouco (todos eram demonstráveis por contra-exemplo ou pelo método direto), as diferentes intervenções que cada Grupo recebeu, pouco influenciaram no acerto e falha das demonstrações escritas. A redução dos acertos no Período 3 pode ser interpretado como um indicativo da dificuldade que as demonstrações por escrito neste Período trouxeram em comparação ao Período 1, pois se notarmos no Quadro 13, veremos que o enunciado (1T) é um resultado bastante recorrente das aulas envolvendo o produto de Matrizes, isto é, que o produto de Matrizes não é comutativo, e os enunciados (3T) e (4T) que são falsos, ambos podem ser demonstrados por um mesmo contra-exemplo. Agora no Período 3, se notarmos (15T) e (18T) vemos enunciados falsos mais incomuns, aspecto que pode levar a um desenvolvimento errado da demonstração como verdadeira, e no enunciado (17T) temos a presença de uma propriedade envolvendo dois produtos de matrizes, exigindo para sua demonstração o uso de dois somatórios em sequência, aspecto este que não era presente nos enunciados do Período 1 e que pode ter contribuído na dificuldade de ambos os Grupos em demonstrar os enunciados do Período 3. Esta situação do duplo somatório não é presente no Período 5, e ao considerarmos que os enunciados se mantêm no mesmo tópico e que as demonstrações deles eram disponibilizadas aos estudantes após o término de cada Período, é natural esperarmos que viessem a ter maior facilidade nas demonstrações dos enunciados no Período 5 em comparação aos Períodos anteriores. Isto vai de encontro ao que Ko e Knuth (2009) relatam sobre graduandos em matemática terem dificuldades em elaborarem contra-exemplos e ainda mais dificuldade em demonstrar enunciados verdadeiros, por vezes tentando dar um contra-exemplo a uma afirmação verdadeira ou demonstrar a validade de uma afirmação falsa.

Figura 63: Frequência de demonstrações escritas corretamente pelos participantes da Coleta 1 nos Períodos 1, 3 e 5



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os testes de aderência 2 até 8, nos permitem rejeitar a hipótese nula para as situações em que comparamos o Grupo 1 com o Grupo 2 nas demonstrações por escrito em seus diferentes Períodos e combinações de Períodos, e com exceção do Período 3, também nas demonstrações por escrito unidas com as de justaposição. A impossibilidade de rejeitarmos a hipótese nula no Período 3 para as demonstrações por escrito unidas com as de justaposição, apontam que os acertos e erros nesta situação não dependem dos participantes serem do Grupo 1 ou do Grupo 2, assim como o diferencial neste contexto é o surgimento das demonstrações por justaposição para os participantes do Grupo 2, podemos inferir que as demonstrações por justaposição no Período 3 foram mais difíceis para o Grupo 2 do que para o Grupo 1, que pode ser interpretado como resultante do contato que o Grupo 1 com a intervenção do Período 2 envolvendo demonstrar por justaposição.

Esta relação das demonstrações por justaposição pode ser reforçada ao notarmos que apesar do Grupo 2 encontrar-se inicialmente mais preparado para demonstrar por escrito e a diferença se manter na maioria das situações em que as demonstrações por escrito estavam presentes, a variação entre os acertos e erros considerando apenas as demonstrações por justaposição não tem uma relação entre os Grupos. Isto pode ser interpretado como um indicativo de que a primeira intervenção oferecida ao Grupo 1, colocou-os em condições semelhantes aos participantes do Grupo 2 no quesito de demonstrar por justaposição, compensando uma diferença de acertos e erros que residia em cerca de 20%. Este resultado é reforçado quando observamos o teste de aderência 9, no qual os acertos e erros dos participantes do Grupo 1 está associada às demonstrações escritas no Período 1 e por justaposição no Período 3 e 5, revelando uma diferença de 20% a mais quando a forma de demonstrar envolve a justaposição.

Como na Coleta 1 os participantes eram estudantes do primeiro ano da Licenciatura em Matemática, esta diferença anterior a qualquer intervenção, que fez dos acertos do Grupo 2 serem cerca de 20% maior do que a do Grupo 1, parece um reflexo direto daquilo que Caldato (2018) identificou em seu estudo com 78 estudantes também do primeiro ano da Licenciatura em Matemática, que menos de 9% lembravam de ter visto demonstrações na Educação Básica. Desse modo podemos considerar que as formas como os estudantes ingressam no curso de Licenciatura em Matemática carregam diferentes experiências a respeito das demonstrações e Mazzi (2018) destaca que o contato com as demonstrações matemáticas na Educação Básica pode favorecer a compreensão de suas estruturas mais abstratas, o que reforça a visão de Cockcroft (1994) sobre a compreensão de demonstrações ser absolutamente necessária para um aprofundamento formal dos conteúdos que a antecedem e essa capacidade de abstração desenvolvida a partir do entendimento das demonstrações aumenta o poder de manipulação da matemática nos níveis já estudados. Logo, a experiência na Educação Básica pode ter influenciado na nossa suposição inicial de que distribuindo aleatoriamente os participantes entre os Grupo 1 e Grupo 2 no Período 1, teríamos quantidades próximas de graduandos com os mesmos níveis de experiêcias em demonstrar, e que as diferenças mais significativas apareceriam após as intervenções.

Na Tabela 11 temos os testes de aderência realizados na Coleta 2 cujo p-valor obtido foi abaixo de 5% e no Quadro 14 os enunciados que foram demonstrados pelos participantes nos Períodos analisados, em azul os enunciados de escrever demonstrações, em vermelho os enunciados de justaposição.

Tabela 11: COLETA 2

Teste		**P. 1**	**P. 3**	**diferença**	**p-valor**
1	Grupo 1 (ex. tradicionais)	68,4%	36,4%	-32%	0,043

Teste		**P. 1**	**P. 5**	**diferença**	**p-valor**
2	Grupo 2	64,7%	92,9%	28,2%	0,046

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 14: C2 – Enunciados dos Períodos analisados

Período 1	**Período 3 (tradicionais)**	**Período 5 (todos)**
1T) Para uma reta sempre existem pontos que não lhe pertencem. **2T)** Para todo ponto P, existem pelo menos duas retas distintas passando por P. **3T)** A interseção de n-conjuntos convexos é convexa. **4T)** Existe pelo menos uma união de convexos que não seja convexa.	**11T)** Ângulos opostos pelo vértice possuem medidas iguais. **13T)** Dado o triângulo ΔABC, $AC \equiv BC \Leftrightarrow \angle BAC \equiv \angle ABC$.	**21T)** Se vale o Axioma das Paralelas e três retas r, s e t, duas a duas não coincidentes, se r é paralela a s, e s é paralela a t, então r é paralela a t. **22J)** Se vale o Axioma das Paralelas, em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é 180°. **23T)** Retas paralelas são equidistantes, ou seja, se r e s são retas paralelas, então qualquer ponto de r dista igualmente de s. **24J)** Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em nenhum dos testes de aderência realizados entre os participantes do Grupo 1 e do Grupo 2, pudemos rejeitar a hipótese nula de que os acertos e erros dependiam do Grupo ao qual pertencem. Este resultado pode ser interpretado como um indicativo de que os participantes encontravam-se em condições iniciais semelhantes quanto às demonstrações por escrito (Período 1) e ambas as intervenções tiveram influências semelhantes à forma como viriam a demonstrar os enunciados nos Período 3 e Período 5.

O teste de aderência 1 permite rejeitarmos a hipótese nula para os acertos e erros das demonstrações por escrito dos participantes do Grupo 1 do Período 1 em comparação aos mesmos participantes no Período 3. Isto significa que o avanço dos participantes do Período 1 para o Período 3, veio a influenciar negativamente os acertos nas suas demonstrações por escrito. Podemos interpretar esta queda de 36% nos acertos do Grupo 1 como um indicativo de que a intervenção oferecida para estes participantes no Período 2, não acompanhou o preparo necessário para os estudantes demonstrarem por escrito os enunciados do Período 3, já que há um aumento na complexidade das demonstrações do Período 3 em comparação às do Período 1. Sobretudo não podemos rejeitar a hipótese nula para os acertos e erros das demonstrações por escrito dos participantes do Grupo 2 do Período 1 em comparação aos mesmos participantes no Período 3. Isto pode ser um indicativo de que a intervenção oferecida para estes participantes no Período 2 fez com que a variação dos acertos e erros do Período 1 se mantivesse semelhante no Período 3, e como consideramos que a dificuldade dos enunciados do Período 3 foi maior do que no Período 1, então esta intervenção veio a influenciar positivamente os participantes deste Grupo.

Este resultado pode ser reforçado ao notarmos o teste de aderência 2, que permite rejeitarmos a hipótese nula para os acertos e erros dos participantes do Grupo 2 do Período 1 em comparação às demonstrações por escrito e por justaposição dos mesmos participantes no Período 5. Assim, este crescimento de 28% nos acertos em relação às demonstrações iniciais e considerando que há um aumento na dificuldade dos enunciados a serem demonstrados, nos indicam que o arranjo de intervenções oferecidas a estes participantes veio a influenciar positivamente o desenvolvimento de suas demonstrações, tanto por escrito como por justaposição. Hipótese que não pode ser rejeitada para os participantes do Grupo 1, indicando que o arranjo de intervenções oferecidas ao Grupo 2 veio a contribuir mais à elaboração das demonstrações, do que o arranjo de intervenções oferecidas ao Grupo 1.

Na ocasião da Coleta 2, as demonstrações por justaposição (2ª geração do ambiente de justapor demonstrações) tinham segmentos de texto com conteúdos fixos, parcialmente editáveis e totalmente editáveis. Isto de certo modo pode ser entendido como uma dificuldade a mais aplicada aos participantes, pois seria preciso não só identificar onde os segmentos de texto se encaixariam, mas também elaborar quais textos deveriam preenchê-los de modo a formar a demonstração para aquele enunciado. Somando isto à disponibilidade dos principais argumentos pré-elaborados disponíveis na forma de segmentos, temos que a dificuldade em compreender os segmentos de argumentos pode ter ficado em segundo plano, desviando seu protagonismo com a necessidade de determinar o conteúdo de segmentos auxiliares à demonstração. Como mencionado anteriormente, o aumento na complexidade dos enunciados envolvendo tópicos de Geometria Euclidiana e o desvio do foco na ação de justapor demonstrações para a ação de preencher seus segmentos, pode ter contribuído para que o grau de especificidade dos objetos matemáticos a serem construídos no Período 3 viessem a ser os principais motivos para as demonstrações não serem válidas. Uma conclusão análoga àquela que Brown et al. (1997) discute sobre as dificuldades que os graduandos em matemática investigados por Hart (1994) apresentam em relação às demonstrações.

Na Tabela 12 temos os testes de aderência realizados na Coleta 3 cujo p-valor obtido foi abaixo de 5%, e no Quadro 15 os enunciados que foram demonstrados pelos participantes nos Períodos analisados, em azul os enunciados de escrever demonstrações, em vermelho os enunciados de justaposição.

Tabela 12: COLETA 3

Teste		P. 1	P. 3	diferença	p-valor
1	Grupo 2 (ex. justaposição)	84,7%	55,2%	-29,5%	0,001
2	Grupo 2 (ex. todos)	84,7%	64,3%	-20,4%	0,007

Teste		P. 1	P. 3+5	diferença	p-valor
3	Grupo 2 (ex. justaposição)	84,7%	67,1%	-17,6%	0,013
4	Grupo 2 (ex. todos)	84,7%	71,9%	-12,8%	0,039

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 15: C3 – Enunciados dos Períodos analisados

Período 1	Período 3 (todos)	Período 5 (todos)
1T) Duas retas distintas ou não intersectam-se ou intersectam-se em um único ponto. **2T)** Para todo ponto P, existem pelo menos duas retas distintas passando por P. **3T)** As semi-retas S_{AB} e S_{BA} satisfazem a seguinte propriedade: $S_{AB} \cup S_{BA}$ é a reta AB. **4T)** As semi-retas S_{AB} e S_{BA} satisfazem a seguinte propriedad: $S_{AB} \cap S_{BA}$ é o segmento AB.	**11T)** A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º. **12J)** Em todo triângulo existem pelo menos dois ângulos internos agudos. **13T)** Por qualquer ponto de uma reta r, passa uma perpendicular à r. **14J)** A reta perpendicular s que cruza um ponto P da reta r, é única.	**21T)** Se uma reta é perpendicular a um raio de um círculo em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo. **22J)** Toda tangente r a um círculo C é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência Q. **23T)** Todo triângulo é inscritível numa circunferência. **24J)** Dado o triângulo ABC, a circunferência S com centro O e raio r no qual ABC está inscrito, é única. **25J)** Para todo paralelogramo, o ponto de intersecção de suas diagonais é o ponto médio delas. **26J)** Seja o triângulo ABC com altura h em relação ao lado AB. Então sua área é h.AB/2.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em nenhum dos testes de aderência realizados entre os participantes do Grupo 1 e do Grupo 2, pudemos rejeitar a hipótese nula de que os acertos e erros dependiam do Grupo ao qual pertencem. Este resultado pode ser interpretado como um indicativo de que os participantes encontravam-se em condições iniciais semelhantes quanto às demonstrações por escrito (Período 1) e ambas as intervenções tiveram influências semelhantes à forma como viriam a demonstrar os enunciados nos Período 3 e Período 5. No teste de aderência 1 podemos rejeitar a hipótese nula em relação aos acertos e erros entre o Grupo 2 no Período 1 e os mesmos participantes nos enunciados para demonstrar por justaposição no Período 3. Isto é, as demonstrações por justaposição tiveram uma influência negativa nos acertos destes participantes em relação ao Período 1, resultado reforçado quando incluímos no Período 3 as demonstrações por escrito e interpretável como uma consequência da presença de demonstrações por justaposição a serem demonstradas neste Período. Entretanto esta hipótese não pode ser rejeitada para os participantes do Grupo 1, uma interpretação para isto seria que a intervenção oferecida ao Grupo 1 fez com que os participantes deste Grupo tivessem condições semelhantes às que tinham no Período 1, para demonstrar tanto por escrito como por justaposição no Período 3, aspecto que não ocorre ao Grupo 2.

Os testes de aderência 3 e 4, reforçam as conclusões discutidas no parágrafo anterior, mas agora considerando o Período 3 unido ao Período 5. Estes resultados conjuntos nos apontam para uma relação entre o arranjo de intervenções oferecidas aos participantes do Grupo 1 terem permitido os mesmos manterem-se numa faixa próxima de acertos desde o Período 1 até o Período 5, diferente do que ocorreu com os participantes do Grupo 2. Considerando que a dificuldade dos enunciados e complexidade dos tópicos envolvidos em Geometria Euclidiana segue crescente quando mudamos do Período 1 para o Período 3 e deste para o Período 5, manter a faixa de acertos pode ser interpretada como uma influência positiva deste arranjo de intervenções oferecidas aos participantes do Grupo 1.

Podemos associar a influência positiva do arranjo de intervenções oferecida ao Grupo 1 nesta Coleta, com a forma como as demonstrações por justaposição permitiam o tratamento do conteúdo. Pois diferente da Coleta 1 onde os participantes tinham uma experiência variada e em fase de amadurecimento envolvendo demonstrações, aspecto este que condiz com as observações de Weber (2001) e Maslahah, Abadi e Ibrahim (2019), sobre apenas uma compreensão de demonstrações matemáticas e um conhecimento sintático dos fatos de um domínio não serem condições suficientes para a elaboração dos argumentos necessários para as demonstrações. Na Coleta 2 tivemos o aspecto do ambiente de justaposição (2ª geração) trazer uma dificuldade extra à ação de justapor as componentes (elaborar os textos de seus interiores). Na Coleta 3 a estrutura fornecida pelas demonstrações por justaposição amparavam a construção/checagem das demonstrações (por processos de eliminação e análise sintaxica) e exigiam que seus segmentos de texto isolados e combinados fossem lidos várias vezes a medida que a demonstração era formada.

Tanto os resultados da Coleta 2 quanto da Coleta 3 podem ser associados ao que Azrou e Khelladi (2019) discutem a respeito da dificuldade de estudantes de graduação em matemática em elaborarem argumentos para “demonstrações reais”, uma vez que as demonstrações vistas inicialmente na disciplina de Geometria Euclidiana e desenvolvidas no Período 1 deste estudo, se enquadrariam como “exercícios de demonstrações”. Estas diferenças apontam que sem um desenvolvimento na forma como os estudantes demonstram após o Período 1, consequentemente suas taxas de acertos viriam a cair nos Período 3 e Período 5. Mas ao focarmos nas três dimensões que Simon e Blume (1996) apontam como necessárias de se desenvolver para a aprendizagem de demonstrações, podemos dizer que a abordagem de basear-se em exemplos para escrever demonstrações proporciona um maior domínio de técnicas de demonstração e capacidade de operar propriedades matemáticas (dimensão 3), enquanto as demonstrações por justaposição (nas condições utilizadas na Coleta 3), trazem maiores incentivos no grau de identificação de regularidades e raciocínio dedutivo (dimensão 1) e na conexão entre o conhecimento existente com o resultado (dimensão 2).

5. CONSIDERAÇÕES

Encerramos esta tese discutindo como atendemos aos objetivos específicos, ao objetivo geral e à questão de pesquisa, apresentados no final do capítulo de Introdução. Para isso, vamos relacionar os resultados encontrados com aqueles observados em outros estudos apresentados nos capítulos anteriores.

Para atender ao objetivo específico de associar a influencia das demonstrações por justaposição com os erros/dificuldades identificados nas demonstrações escritas, avaliamos as respostas dos participantes das Coletas 1 e da Coleta 4, então organizamos-as em tipos distintos e classificamo-as nas sete categorias de erros/dificuldades apresentadas por Doruk e Kaplan (2015). Isto nos permitiu identificar entres os erros/dificuldades particulares ao Grupo 1 e do Grupo 2, os que mais se ascentuavam nestes Grupos e como variavam entre os Período 3 e Período 5. Concluímos que nestas Coletas a intervenção inicial envolvendo demonstrar por justaposição (Grupo 1 – Período 2) trouxe um maior domínio nos conceitos e definições, mas pouco contribuiu nos processos de escolha de método e elaboração da estrutura de demonstração adequada. Por outro lado, a intervenção inicial de exemplos e exercícios de demonstrar por escrito (Grupo 2 – Período 2), trouxe um maior domínio na escolha de métodos e elaboração da estrutura de demonstração necessária, mas pouco contribuiu para o domínio nos conceitos e definições. Analisando ambos os arranjos de intervenções, vemos que há uma redução geral no total de erros/dificuldades identificados nas respostas dos participantes. Desse modo, esta etapa da investigação nos leva a concluir que para as Coletas 1 e 4 no quesito de presença de erros/dificuldades nas respostas dos participantes, as intervenções investigadas desenvolvem separadamente aspectos diferentes dos erros/dificuldades apontados e se complementam independente da ordem em que são combinadas.

Para atender o objetivo específico de relacionar a influencia das demonstrações por justaposição com o desenvolvimento de demonstrações válidas, organizamos as demonstrações recebidas pelos participantes das Coletas 1, 2 e 3 em certas ou erradas. Então considerando as demonstrações por escrito e por justaposição nos Períodos 1, 3 e 5, aplicamos o teste Chi² para verificar quando era possível rejeitar a hipótese nula, de que os acertos e erros naquele conjunto amostrado são independentes da categoria com que foram alocados. Isto nos mostrou que na Coleta 1 apesar do Grupo 2 ter um melhor preparo na elaboração de demonstrações por escrito válidas anterior às intervenções, quando incluídas as demonstrações por justaposição tal diferença se anulou, fazendo os acertos e erros independentes do Grupo considerado. Estas mesmas análises para a Coleta 2 mostraram que a intervenção inicial envolvendo demonstrar por justaposição contribuiu pouco no preparo dos participantes com os tópicos seguintes de Geometria Euclidiana, aspecto se justifica ao considerarmos que a interface de demonstrar por justaposição (2ª geração) nesta Coleta era mais complexa de se utilizar, trazendo segmentos a serem preenchidos com texto pelos participantes, desviando-se do exercício de analisar o significado dos segmentos e elaborar suas composições até formar a demonstração. Esta hipótese de que a interface de uso mais complexo atrapalhou o preparo dos estudantes é reforçada quando na Coleta 3 a interface de demonstrar por justaposição (3ª geração) estava alterada para uma estrutura mais simples, com encaixes voltados a se parecerem com peças de quebra-cabeças e com exceção do segmento a ser preenchido com o uso de uma propriedade listada, todos os demais segmentos que poderiam ser preenchidos com algum texto foram eliminados. Nesse contexto, vemos que a taxa de acertos dos participantes do Grupo 1 se manteve independente do Período observado, e dado que as demonstrações dos enunciados ficam gradativamente mais difíceis a medida que os tópicos de Geometria Euclidiana avançam, a taxa de acertos deste Grupo não se relacionar ao Período observado revela uma influência positiva das intervenções oferecidas. Isto significa que o arranjo de primeiro apresentar intervenções com demonstrações justapostas (Período 2 – Grupo 1) e depois com exemplos e demonstrações por escrito (Período 4 – Grupo 1) auxiliou estes estudantes a manterem sua taxa de acertos em um nível próximo ao inicial, quando a dificuldade em demonstrar os enunciados era menor.

Para atender o objetivo geral de compreender a influencia que demonstrar por justaposição exerce nas demonstrações produzidas, somamos os resultados obtidos nos objetivos específicos a alguns dos referenciais teóricos utilizados para embasar o aspecto multimídia presente na ação de justapor demonstrações. Temos da própria estrutura das demonstrações por justaposição a identificação de ao menos duas mídias combinadas, a textual e a tangível. Na teoria da aprendizagem multimídia (MAYER, 1997), justapor demonstrações pode proporcionar processos de construção da informação que seleciona e conecta ativamente diferentes conhecimentos disponíveis, combinando sistemas cognitivos distintos para processar a informação, tal como identificamos nos resultados da Coleta 3. Justapor demonstrações envolve a leitura dos segmentos da demonstração de suas combinações e o planejamento dos arranjos possíveis, exigindo do estudante uma análise dos segmentos e uma investigação sobre como podem ser combinados para encontrarem uma demonstração válida àquele enunciado, dado o conhecimento de que ao menos uma demonstração pode ser formada como uma combinação das componentes disponíveis. Este é um processo tangível segundo a definição de Ullmer e Ishi (2000) e ocasionado pela interação com as componentes mediadas por sistemas de artefatos físicos como touchscreen, o mouse ou touchpad, servindo de ambiente para a elaboração do argumento necessário demonstrar dado enunciado, como mostramos em um trabalho anterior (SILVA, 20220). Das considerações do objetivo específico 1 (associar a influencia das demonstrações por justaposição com os erros/dificuldades identificados nas demonstrações escritas) as intervenções de justapor demonstrações e de demonstrar por escrito acompanhado de exemplos, são complementares no desenvolvimento dos aspectos necessários para escrever uma demonstração, resultado que associa inclusive ao que Mcluhan (1996) coloca, sobre uma mesma informação ao ser transmitida em diferentes mídias (no nosso caso, textual e tangível) será recebida de formas diferentes pelo mesmo destinatário.

Por fim respondemos a pergunta de pesquisa desta tese, como demonstrar por justaposição influencia as demonstrações desenvolvidas por graduandos em matemática? Com base nas conclusões encontradas através dos objetivos específicos e geral, na discussão que foi construída, nos resultados expostos, interpretados e relacionados com nossos referenciais teóricos, temos que a ação de demonstrar por justaposição envolve uma forma concreta e manipulável de interagir com o conceito abstrato da demonstração matemática. Quando utilizado por estudantes com um conhecimento pouco estruturado de demonstrações matemáticas, seu uso contribui com maior impacto na aquisição da linguagem, notações, propriedades e definições, mas não parece trazer o embasamento necessário para elaborar estruturas que demonstrem um enunciado e nem determinar o método de demonstração. Embora neste cenário, a abordagem de demonstrar por justaposição tenha se mostrado complementar a abordagem de praticar demonstrações por escrito baseadas em exemplos.

Contudo, a dificuldade em demonstrar por justaposição se mostra inerente às demonstrações por escrito, parecendo envolver um conjunto de ações e procedimentos que não são diretamente associados ao sucesso em demonstrar por escrito. Esta situação se destaca quando observamos que ao abrirmos demais as possibilidades de demonstrar por justaposição, incluindo vários segmentos editáveis por demonstração, a associação presente entre demonstrar por justaposição e sua contribuição com as demonstrações por escrito, parecem contribuir pouco. Já quando o ambiente para justapor demonstrações dispõe de uma interação favorável ao estudante com um conhecimento mais estruturado de demonstrações, seu uso se mostra positivo, auxiliando-os a construírem demonstrações para enunciados de tópicos mais avançados, o que corrobora com Maher e Speiser (1997) sobre o potencial de representações matemáticas em formas concretas e manipuláveis auxiliarem na elaboração de ideias mais gerais sobre conceitos abstratos.

5.1. Reflexões e ideias

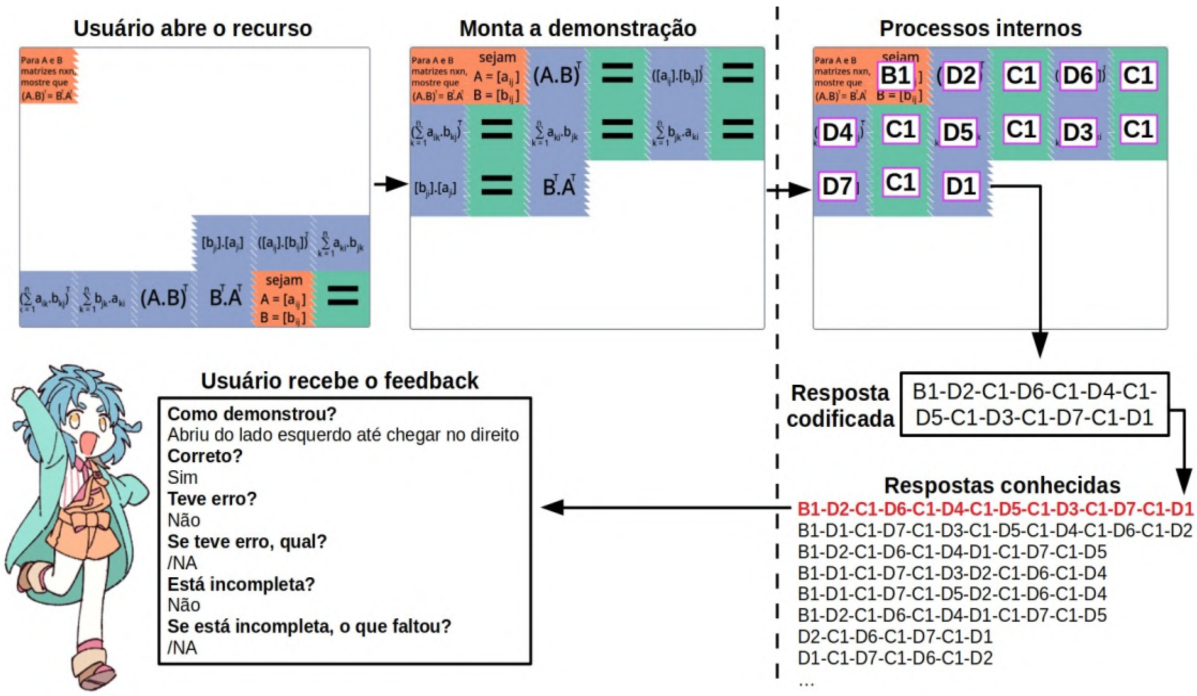
Considerando que o formato remoto, o desenvolvimento da interface de justapor demonstrações e a disponibilidade de disciplinas em que atuamos nas Coletas de dados foram aspectos inerentes do próprio desenrolar da pesquisa, após as reflexões e experiências adquiridas se pudessemos ter feito algo diferente neste processo, seria acrescentarmos nos Períodos 1, 3 e 5 (onde os enunciados a serem demonstrados por escrito e por justaposição aos dois Grupos eram os mesmos), questões envolvendo a compreensão de demonstrações. Estas questões atuariam como um peso comum para a influência das intervenções a ambos os Grupos, uma vez que não haveria uma associação direta entre alguma das intervenções e a compreensão de demonstrações, que pudesse indicar uma influência devido à semelhança da intervenção com a ação subsequente.

Refletindo sobre esta pesquisa como um todo e utilizando-a como base nas atuais condições do pesquisador, caso viessemos a repetí-la, procuraríamos trabalhar com esta abordagem dentro de uma disciplina não reservada para os ingressantes, já que identificamos experiências variadas dos ingressante em relação às demonstrações. Desse modo, trabalhar em uma disciplina reservada a estudantes na metade do curso traria um perfil de participantes com as bases de demonstrações mais fundamentadas, reservando a dificuldade aos próprios tópicos da disciplina. Consideramos acrescentar questões de compreensão de demonstrações, manter um incentivo à participação na condição de nota, a interface para justaposição num formato simples e intuitivo de usar, repetir as Coletas na mesma disciplina oferecida em diferentes semestres com as mesmas questões em cada Período de modo que pudessemos unir as respostas das Coletas para avaliar os erros/dificuldades dos estudantes e comparar os diferentes desempenhos dos Grupos em relação às Coletas realizadas.

Para encerrarmos este texto consideramos relevante destacar que esta tese traz em si um aspecto de inovação a ser reconhecido, como tratado no capítulo de Fundamentação Teórica, os termos encontrados na literatura acadêmica que melhor se aproximavam da ação investigada, não se enquadraram para o contexto estudado, e ainda que pesquisas nesta área existam, nossa investigação cobriu um período bastante singular na história do Ensino Superior no Brasil, marcado pela pandemia de COVID-19. A natureza deste evento é tamanha que Borba, Souto e Canelo Júnior (2022) afirmam ter iniciado a “Quinta fase das tecnologias digitais para o Ensino de Matemática”. A respeito de pesquisas futuras, seguimos na investigação de interfaces para demonstrar por justaposição após as Coletas de dados que culminaram nesta tese e que apresentamos a seguir.

4ª geração (1º semestre de 2021): Enquanto ainda ocorriam as Coletas 3 e 4, submetemos uma proposta para o edital do programa de aceleração de startups OCEAN N2, vinculada à SAMSUNG, UNICAMP, USP e Universidade Federal do Amazonas. Nesta proposta o ambiente de demonstração por justaposição, agora batizado de Arrasta o X, poderia ser um produto educacional para auxiliar estudantes de graduação na aprendizagem de demonstrações. O projeto foi aceito no edital de inovação e no decorrer dos treinamentos, a ideia se desenvolveu em direção a transformá-la em um produto educacional escalonável. Visava transformar o recurso em um software que pudesse amparar com maior assistência os usuários no estudo das demonstrações. Estas questões levaram ao desenvolvimento de uma interface marcada pela presença de um banco de dados interno ao software, que comparava a nova demonstração recebida com aquelas já conhecidas e avaliadas, permitindo um feedback imediato e direcionado a várias demonstrações recém-elaboradas, como mostramos no esquema apresentado na Figura 64.

Figura 64 – Esquema da Geração 4



Fonte: Elaborado pelo autor.

Entre os aspectos que a 4ª geração procurou atender, estava a simplicidade e agilidade, retomando ao fundo branco da 1ª e 2ª geração, e um esquema de 3 cores divergentes com melhor distinção entre daltônicos e menor distorção a depender dos displays. Sua programação ocorreu em Scratch, e procuramos dar às peças um preenchimento total da tela, indicando com pequenos serrilhados laterais que elas deveriam se encaixar apenas lateralmente. Após montar a demonstração, o usuário podia checar automaticamente se existia uma demonstração igual à dele já avaliada no banco de dados do software e em caso positivo, receberia imediatamente o feedback daquela demonstração na forma de diálogo de um personagem estático.

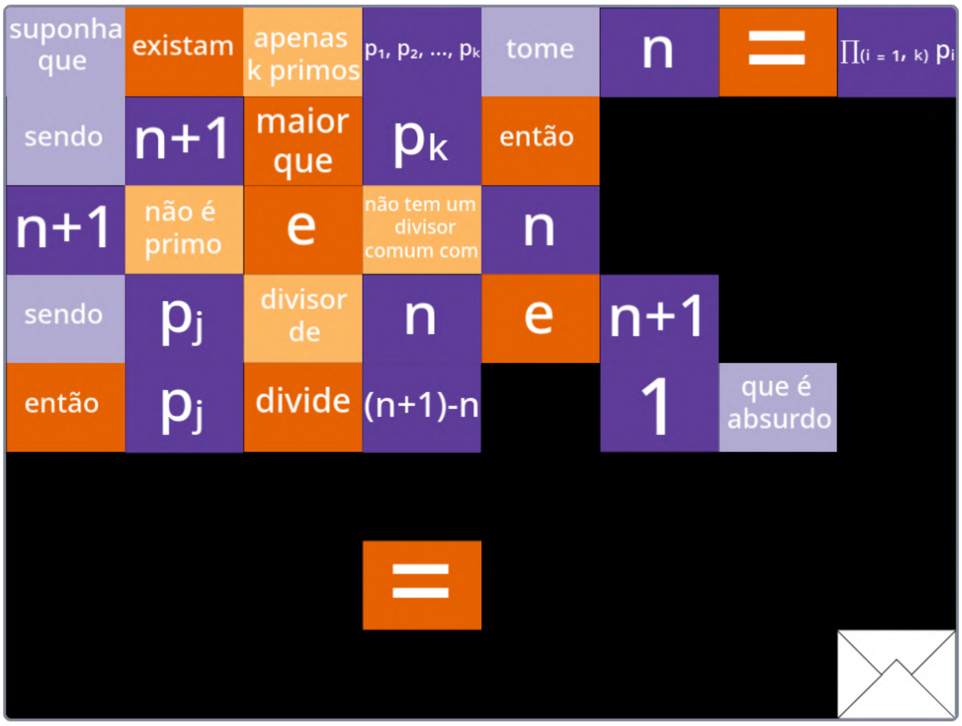
Silva e Oliveira (2021) apresentam a experiência de ministrar um minicurso de introdução às demonstrações matemáticas que utilizou o software Arrasta o X em sua 4ª geração. Este relato apresenta como a interação com os participantes do minicurso realizado se deu em formato online, como o público reagiu ao software e com os recursos auxiliares a ele, desenvolvidos durante o edital de inovação, com a intenção de amparar a experiência e a aprendizagem daquele conteúdo.

Dentre os problemas observados na 4ª geração, estava o espaço em tela, pois embora tenha suportado um conjunto de 24 demonstrações simples de Álgebra Matricial, quando tentamos inserir dentro destes 29 espaços para justapor, demonstrações sobre propriedades de funções, a tela inteira começava a ficar preenchida, dando pouca mobilidade para arranjos e deixando inclusive a própria estrutura do texto bastante estranha de ser lida. Além disso, o mecanismo de verificação automática da demonstração com base em demonstrações conhecidas, para ser efetiva à maioria das demonstrações construídas, exigiria de antemão uma quantidade muito grande de demonstrações registradas, o que depende do conteúdo presente em cada peça, aspecto que variava de acordo com o layout da geração. Isto nos fez reconsiderar a formação de uma base de demonstrações conhecidas até que o layout estivesse mais definido, visto que essa base não poderia ser exportada facilmente para outras gerações.

5ª Geração (2º semestre de 2021): As principais mudanças nesta geração foi aumentar para 63 os espaços em que as peças poderiam ser alocadas na tela como mostramos na Figura 65. Aderimos a um esquema de 4 cores divergentes com facilidade para distinção por daltônicos e menor variação a depender dos displays utilizados e alteramos nesta geração a forma das peças, que passaram a ser retângulos sem serrilhados. Pois embora retângulos com textos não sejam diretamente associados à mover objetos pela tela e encaixá-los como eram nas duas gerações anteriores, enfrentávamos dificuldades referentes aos encaixes das partes e a alocação do conteúdo nas peças, pois serrilhados ou encaixes comprometiam uma parte do espaço já bem restrito que podíamos usar para colocar um conteúdo na peça, e a depender do tamanho não-visível dos conteúdos da peça, as vezes acontecia do computador processar a imagem ocupando posições relativas um pouco diferentes das descritas. Isto causava certos desencaixes nas partes que deveriam se conectar com precisão.

Inserimos nesta geração a função de não sobrepor peças, quando uma peça se sobrepõe a outra, imediatamente desliza para o envelope no canto inferior direito da tela e o mesmo ocorre quando a peça é duplicada, a nova peça desliza até o canto inferior direito da tela, ficando disponível para uso. Ao finalizar a demonstração o usuário podia confirmar seu término apertando uma tecla específica, o que fazia o registro da combinação de suas peças num vetor do software que ficaria armazenado para uso interno e mostraria ao usuário em uma nova janela a demonstração que utilizamos como base para a justaposição. Com isto, esperávamos que o usuário pudesse checar sua própria demonstração com base na original.

Figura 65 – Geração 5



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ainda na 5ª geração, disponibilizamos um curso online formato MOOC com o tema Introdução às demonstrações matemáticas[15], que alcançou 194 inscritos. Nele utilizamos postagens de um blog de divulgação científica da matemática[16] do próprio pesquisador como fonte de conteúdos teóricos sobre demonstrações enquanto o software Arrasta o X permitia que os inscritos praticassem a elaboração de demonstrações. Todavia uma dificuldade que emergiu deste trabalho, é que a condição para que novas demonstrações fossem registradas na base de dados do software era que seus usuários estivessem conectados em suas contas e tivessem um status de Scratcher (que exige alguns requisitos para se obter, como ter a conta criada há mais de 14 dias e verificada por e-mail). Estas questões somaram-se à dificuldade de registrar as demonstrações, então buscamos um jeito de qualquer usuário ter sua demonstração registrada após justapor. No fim desta busca, encontramos o emulador de Scratch Packager-Turbowarp[17] que atendia a estas condições e possibilitava ainda, executar o software de forma mais simples e rápida.

A geração 5 foi marcada pela intenção de armazenarmos as demonstrações de um público geral, que passou a ser possível através do emulador de Scratch, contudo havia uma limitação que nos levou a procurar formas de contorno. Diferente do Scratch que disponibiliza uma página com as últimas 120 atribuições da variável de armazenamento, este emulador não tinha esta função. Podíamos apenas acessar o último valor atribuído a esta variável, embora seu espaço de armazenamento numa única variável fosse muito maior do que todas as variáveis de armazenamento visíveis na página do Scratch. Esta situação nos fez repensar a maneira como poderiamos armazenar as demonstrações numa única variável, de modo que pudéssemos mais tarde recuperá-las.

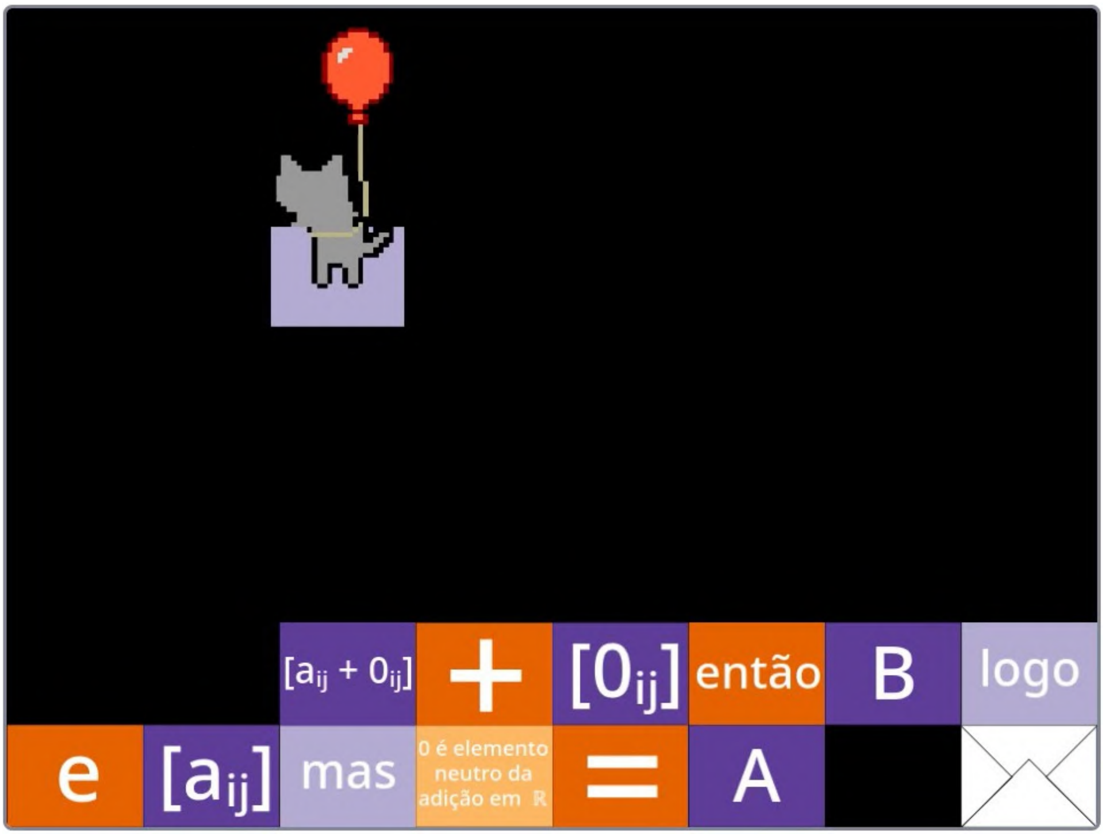
A popularidade desta geração do software proporcionou um convite para usar o recurso virtual educacional como atividade semanal de uma disciplina que viria a ser ministrada no 1º semestre de 2022. Somado a isto, a respectiva pesquisa de doutorado, que levou ao surgimento deste software, passou pelo seu exame de qualificação e com ele emergiu uma questão “se a ação de mover e interagir com as peças em si, viria realmente a contribuir para a elaboração da demonstração

15 <https://www.unicamp.br/unicamp/eventos/2022/02/14/startup-arrasta-o-x-e-blog-zero-oferecem-o-curso-introducao-demonstracoes>. Acesso em: 30 Jan. 2023.
16 <https://www.blogs.unicamp.br/zero/>. Acesso em: 30 Jan. 2023.
17 <https://packager.turbowarp.org/>. Acesso em 30. Jan. 2023.

matemática? Ou se ela ocorria em algum ambiente externo ao software e visava apenas ajustar a demonstração às peças disponíveis", mencionada na Introdução desta tese. A questão era bastante relevante para a pesquisa, pois todos os dados que reunimos até a ocasião eram apenas extratos da demonstração finalizada, faltava esta informação sobre como o processo pelo qual a demonstração ocorria.

6ª Geração (1° semestre de 2022): Para responder às questões levantadas na qualificação e aproveitar a oportunidade de utilizar o software em uma disciplina, iniciamos uma série de mudanças no software que marcaram o início da 6ª geração. Estas mudanças são apresentadas em Silva e Oliveira (2022), destacando a substituição da função de armazenamento interno da demonstração finalizada, por uma função que registrava como cada peça se movimentou ao longo do processo de justaposição. Este registro era ao final da demonstração, apresentada ao estudante na forma de um QR code, que deveria ser a tarefa entregue na disciplina. Escaneando este código, era possível recriar o passo a passo que levou até aquela demonstração. Nesta geração também inserimos um personagem com a função de avatar para interagir com as peças, na forma de um gato amarrado a um balão, que agarrava e soltava as peças na posição selecionada, como mostramos na Figura 66. A intenção no caso era reunir evidências sobre o processo de como os estudantes demonstravam a partir deste ambiente, isto é, se havia ou não um desenvolvimento do argumento a partir da interação de mover as peças.

Figura 66 – Geração 6

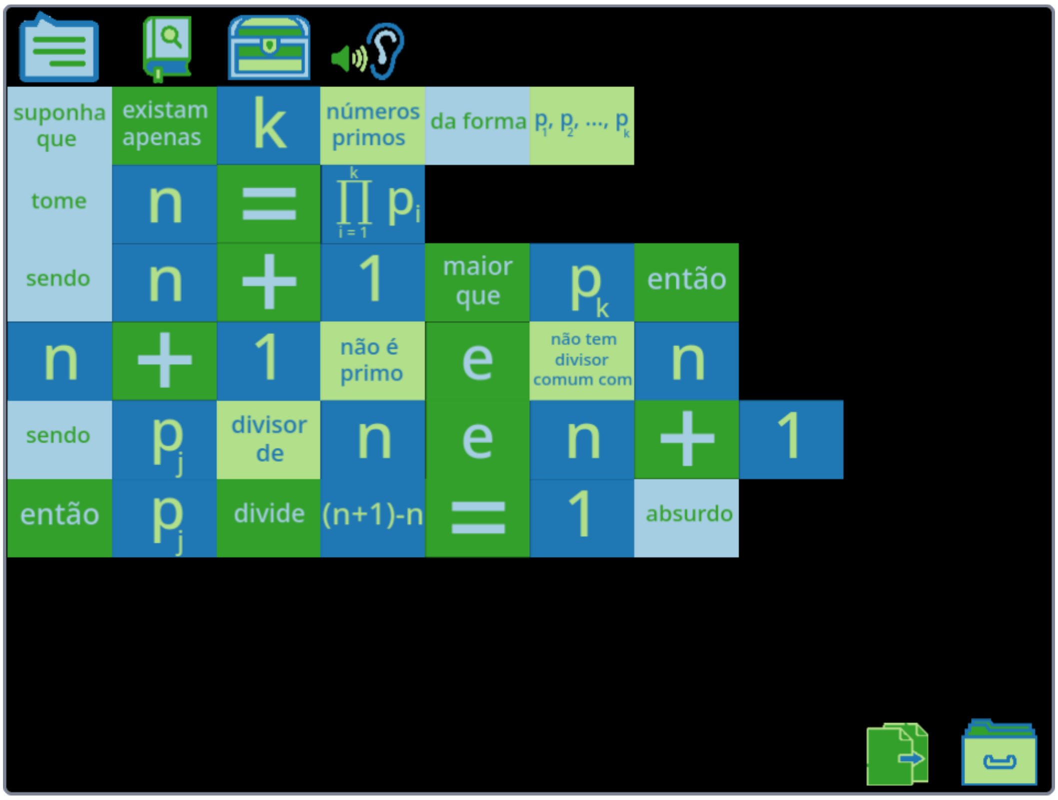


Fonte: Elaborado pelo autor.

O trabalho na disciplina de Geometria Analítica com a geração 6 do Arrasta o X, trouxe as evidências que buscamos para confirmar que a interação com as peças, pode contribuir no desenvolvimento do argumento. Isto foi mencionado na Introdução desta tese, mediante o trabalho de Silva (2022) que apresenta uma sequência de passos realizada por um dos estudantes e faz a interpretação de como estes movimentos indicam processos de elaboração de uma demonstração que não seguem uma construção linear do início, avançando gradativamente até o final.

7ª Geração (2° semestre de 2022): O início da 7ª geração se deu ao repensarmos o uso esperado para o Arrasta o X, pois até então estávamos centrados na ideia do software armazenar os dados que seriam úteis para os pesquisadores, mas pouco nos preocupávamos se o software seria realmente útil a quem está querendo estudar de forma independente, talvez porque sempre o imaginávamos como material complementar a outras formas de estudo. Outra característica que pensamos neste replanejamento foi o aumento do espaço, que até antes era de 63 peças, para 94 peças. Também deixamos ícones interativos para acessar o enunciado, as propriedades conhecidas, a demonstração original e ouvir a demonstração montada. Todos os elementos com layouts utilizando somente o esquema de 4 cores qualitativas para melhor distinção por daltônicos e menor distorção a depender dos displays. Nesta geração também optamos remover o avatar, pois desejamos um ambiente com menos distrações, considerando a quantidade de ícones interativos já presentes. Além disso, inserimos uma função que faz com que a peça seja duplicada ao ser levada no ícone da esquerda no canto inferior direito da tela. Quando uma peça é solta nesta posição, ela retorna a sua posição original, remanescendo no local a peça duplicada. Nesta geração trouxemos uma função que permite ouvir a demonstração justaposta pelo usuário, mas a característica de ouvir a demonstração trouxe alguns dilemas envolvendo a escolha de palavras para representar símbolos e o espaçamento entre as palavras para fossem melhor entendidas. Outras funções presentes nesta geração eram o acesso ao enunciado da demonstração, as propriedades conhecidas e a demonstração original, cada uma com um ícone clicável na tela, como mostramos na Figura 67.

Figura 67 – Geração 7



Fonte: Elaborado pelo autor.

8ª Geração (2° semestre de 2022): A principal razão de avançarmos para a geração 8, foi a busca por uma infraestrutura que pudesse ser utilizada por professores de matemática com grandes quantidades de estudantes em disciplinas regulares. Esta necessidade emergente decorreu de um real planejamento didático do pesquisador para inserir este recurso em suas disciplinas oferecidas à graduação e ao Ensino Médio Técnico. Neste viés, embora o ambiente da geração 7 fosse bastante equipado de recursos, a experiência com as 7 gerações mostraram que todas eram deficitárias no quesito de gerir o envio e recebimento das demonstrações. Em gerações anteriores, como foi mencionado, utilizamos procedimentos de checagens manuais, quando não, ainda precisávamos rotular uma a uma as demonstrações recebidas para fazer uma avaliação mais automatizada.

A adesão ao ambiente da plataforma LiveWorkSheets (mencionado na Fundamentação Teórica como uma das interfaces usadas por professores de matemática) forneceu uma infraestrutura melhor do que a do Scratch em termos de enviar automaticamente as respostas para um sistema gerenciado pelo docente. Em contrapartida o ambiente é voltado para preenchimentos simplificados, no caso, recortes da tela e colagens em outras partes designadas. Apesar disto limitar bastante os aspectos estéticos e a liberdade de formar demonstrações análogas com as mesmas peças, características investidas de forma árdua nas gerações anteriores de Arrasta o X, sua simplificação visava a facilidade com que a submissão pode ser realizada, organizada e o feedback automático devolvido ao estudante. Características que contribuíram para uma melhor gestão do Arrasta o X como atividade regular em sala de aula e de fácil gestão pelo docente, se comparado às formas como este feedback e organização ocorriam em gerações anteriores, que dificultava a sua utilização e o uso das respostas como parâmetro para aulas. Na Figura 68 mostramos o layout da 8ª Geração com os segmentos encaixados.

Figura 68 – Geração 8

Demonstre que se o limite de f: B → ℝ em um ponto existir, então ele é único.

suponha que	$\text{Lim}_{x\to a} f(x) = L_1$ $\text{Lim}_{x\to a} f(x) = L_2$	e seja dado $\varepsilon > 0$, agora tome $\varepsilon/2$	então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ de modo que	se $x \in B$: $0 < \|x - a\| < \delta_1$ $0 < \|x - a\| < \delta_2$
$\Rightarrow \|f(x) - L_1\|$ $\Rightarrow \|f(x) - L_2\|$	$< \varepsilon/2$ $< \varepsilon/2$	escolhendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$	se $x \in B$ e $0 < \|x - a\| < \delta$ temos	$0 \leq \|L_1 - L_2\| =$
$\|L_1 - f(x) +$ $f(x) - L_2\| \leq$	$\|f(x) - L_1\| +$ $\|f(x) - L_2\| <$	$\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, logo $L_1 = L_2$		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Entre as limitações que a conta gratuita do LiveWorkSheets tem, está o limite de 30 worksheets publicados, e o armazenamento das respostas recebidas por 30 dias. Outro aspecto é a dificuldade em utilizá-lo pelo celular, pois parece depender do aparelho para permitir a movimentação das peças com o touch. Algumas das vantagens deste ambiente para a gestão deste conteúdo são seus mecanismos de buscas por datas, estudantes, nível, assunto, além da verificação automática e a possibilidade de acesso às respostas enviadas.

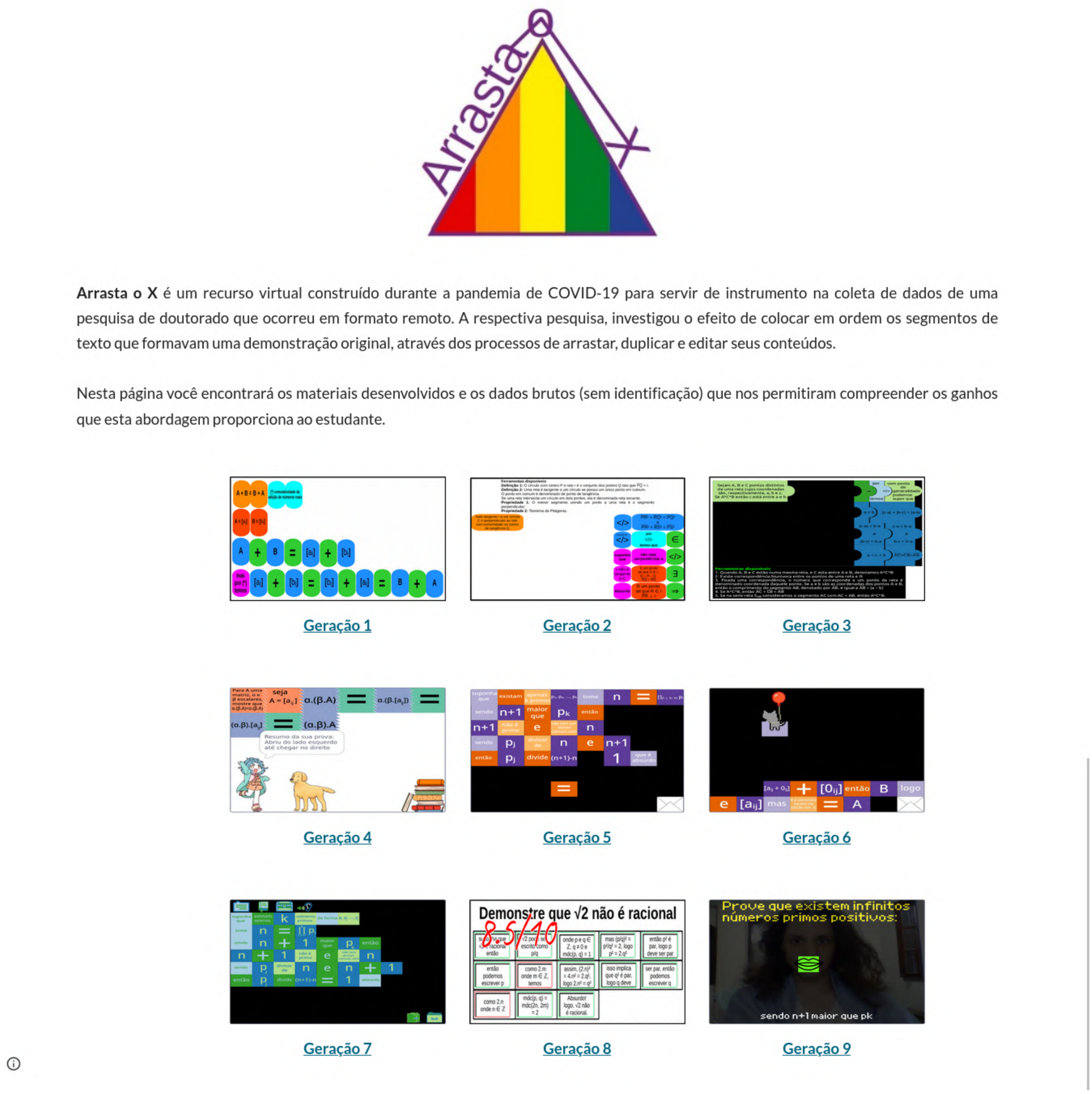
9ª Geração (2º semestre de 2022): Esta geração é marcada pela intencionalidade de explorar formas de interação com os segmentos de uma demonstração por justaposição e que não dependam da coordenação motora. Ainda em fase de protótipo, procuramos dissociar o movimento das componentes ao uso de mouse, touchpad, touchscreen, teclado, entre outros dispositivos que exijam a mobilidade do usuário. Em substituição, fizemos os segmentos de texto selecionáveis a partir de movimentos da boca do usuário, captados pela câmera do próprio dispositivo e associando sua escolha à captura de um som mais alto pelo microfone. Desse modo, passa a ser possível para usuários com mobilidade reduzida, justaporem uma demonstração apenas a partir de seu controle vocal.

Figura 69 – Geração 9

Fonte: Elaborado pelo autor.

Repositório Arrasta o X: Como mencionamos, este trabalho segue em desenvolvimento, somando-se pouco a pouco com as experiências do pesquisador e reflexões sobre os dados. Entendemos que estes resultados e investigações trazem características bastante singulares, de modo a termos o interesse de aumentar seu alcance para mais pesquisadores. As demonstrações recebidas pelos participantes que consentiram, foram editadas pelo pesquisador de modo a remover delas as informações de identificação, e junto às planilhas, versões, demonstrações desenvolvidas em cada geração e informações relacionadas, disponibilizadas ao público no site Arrasta o X[18], criado com o propósito de um repositório para esta investigação e cuja página inicial deste repositório (Figura 70) encerra esta tese.

Figura 70 – Página inicial do repositório Arrasta o X



Fonte: Elaborado pelo autor.

18 <https://sites.google.com/view/arrasta-o-x>. Acesso em: 31 Jan. 2023.

6. REFERÊNCIAS

ALSINA, C.; NELSEN, R. B. **Charming Proofs: A Journey Into Elegant Mathematics**. Mathematical Association of America, 2010, p. 10.

AZROU, N.; KHELLADI, A. Why do students write poor proof texts? A case study on undergraduates' proof writing. **Educational Studies in Mathematics**, v. 102, n. 2, p. 257–274, out. 2019.

BECK, M.; GEOGHEGAN, R.; **The Art of Proof: Basic Training for Deeper Mathematics**. New York, Ny: Springer New York, 2010.

BEN-ARI, M. **Mathematical logic for computer science**. London: Springer, 2012.

BICKERTON, R. T.; J SANGWIN, C. Practical online assessment of mathematical proof. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, p. 1–24, 12 mar. 2021.

BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à Inferência Estatística**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

BRADY, H. E.; COLLIER, D. **Rethinking social inquiry: diverse tools, shared standards**. Lanham, Md.: Rowman & Littlefield Publishers, 2010.

BREITNER, J. Visual Theorem Proving with the Incredible Proof Machine. In **Interactive Theorem Proving: Lecture Notes in Computer Science**, p. 123–139, 2016.

BROWN, A. et al. Learning binary operations, groups, and subgroups. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 16, n. 3, p. 187–239, jan. 1997.

CALDATO, J. **Argumentação, prova e demonstração: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática**. 2018.

219 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

CALLIES, E.; LAURENT, O. Click and coLLecT An Interactive Linear Logic Prover. In **5th International Workshop on Trends in Linear Logic and Applications (TLLA 2021)**. Rome (virtual), Italy. 2021.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. São Paulo: Atual, 2007.

CHEMLA, K. **The history of mathematical proof in ancient traditions**. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

COCKCROFT, S. W. Can the same mathematics program be suitable for all students?: A personal view from mathematics counts, not forgetting standards. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 13, n. 1, p. 37–51, mar. 1994.

COWEN, C. C. Teaching and Testing Mathematics Reading. **The American Mathematical Monthly**, v. 98, n. 1, p. 50, jan. 1991.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa : métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Porto Alegre: Penso, 2021.

DONATO, P.; STRUB, P.; WERNER, B. A Drag-and-Drop Proof Tactic. **CPP ’22**, Philadelphia, PA, USA, p. 17–18, jan. 2022.

DORUK, M.; KAPLAN, A. Prospective mathematics teacher’s difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. **Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**, v. 10, n. 2, p. 315–328, 2015.

DOXIADIS, A. **Tio Petros e a conjetura de Goldbach um romance sobre os desafios da matemática**. [s.l.] São Paulo Editora 34, 2001.

FIGUEIREDO FILHO, D. B. **Métodos quantitativos em ciência política**. Curitiba: Editora Intersaberes, 2019.

FIORENTINI, D. Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities. **Sisyphus — Journal of Education**. Lisboa, v. 1, n. 3, p. 152–181, 2013.

FLICK, U.; LOPES, M. **Introdução à metodologia de pesquisa : um guia para iniciantes**. Porto Alegre Brazil: Penso, 2013.

FUKAWA-CONNELLY, T. Classroom sociomathematical norms for proof presentation in undergraduate in abstract algebra. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 31, n. 3, p. 401–416, set. 2012.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2008.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Rio De Janeiro: Ltc, 1998.

GUIMARÃES, P. R. B. **Métodos quantitativos estatísticos**. Curitiba: IESDE Brasil, 2008.

HAMMACK, R. H. **Book of proof**. Virginia: Virginia Commonwealth University, 2013.

HANNA, G.; JAHNKE, H. N.; PULTE. H. Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and educational perspectives. **Philosophia Mathematica**, v. 19, n. 1, p. 104–104, 26 jul. 2010.

HART, E. A conceptual analysis of the proof-writing performances of expert and novice students in elementary group theory. In. **Research issues in mathematics learning: Preliminary analyses and results.** MAA Notes, Washington: The Mathematical Association of America, 1994, p. 49–62.

HARVEY, J. G.; WAITS, B. K.; DEMANA, F. D. The Influence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra. **The Journal of Mathematical Behavior**, 1995.

KEPPEL, G. **Design and analysis: A researcher’s handbook**. 3. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson, 1991.

KO, Y. Y.; KNUTH, E. Undergraduate mathematics majors’ writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 28, n. 1, p. 68–77, mar. 2009.

LAUREL, B. **The art of human-computer interface design**. Boston, MA, USA: Addison Wesley, 1990.

LERNER, S.; FOSTER, S. R.; GRISWOLD, W. G. Polymorphic blocks: Formalism-inspired UI for structured connectors. In. **CHI. ACM**, 2015.

MAHER, C. A.; SPEISER, R. How far can you go with block towers? **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 16, n. 2, p. 125–132, jan. 1997.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

MASLAHAH, F. N.; ABADI, A. M.; IBRAHIM. Undergraduate students’ difficulties in proving mathematics. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 1320, n. 1, p. 12--72, out. 2019.

MAYER, R. E. Multimedia learning: Are we asking the right questions? **Educational Psychologist**, v. 32, n. 1, p. 1–19, jan. 1997.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio: um foco nos capítulos de geometria**. 2018. 160 f.

Tese (Doutorado em Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MCLUHAN, M. **Os meios de comunicacao: como extensões do homem**. São Paulo: Cultrix, 1996.

MEC, M. CNE/CES no 1.302/2001, aprovado em 6 de novembro de 2001 - **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática**. [s.l: s.n.]. 2002.

NÓBRIGA, J. C. C. **Demonstrações Matemáticas Dinâmicas**. REVEMAT, Florianópolis (SC), v.15, n.1, p.1-21, 2019.

RAV, Y. Why do we prove theorems? **Philosophia Mathematica**. Series III, v. 7, n. 1, p. 5–41, 1999.

ROCHA, H. V.; BARANAUSKAS, M. C. C. **Design e Avaliação de Interfaces Humano-Computador**. Campinas, SP: NIED/UNICAMP, 2003.

ROSSI, R. J. **Theorems, corollaries, lemmas, and methods of proof**. Hoboken, NJ: Wiley-Blackwell, 2006.

SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **The Bell System technical journal**, v. 27, n. 3, p. 379–423, 1948.

SILVA, M. H. P. D. Uma investigação sobre o passo a passo de estudantes na justaposição de demonstrações em Geometria Analítica. In. **III Congresso Brasileiro Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia**, 2022.

SILVA, M. H. P. D.; OLIVEIRA, S. R. Drag and Drop to Proof: um jogo digital para demonstrar teoremas. **Anais do XIII Computer on the Beach - COTB’22**, 13 jul. 2022.

SILVA, M. H. P. D.; OLIVEIRA, S. R. Um software para praticar a escrita de demonstrações no Ensino Médio. In. **Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática**. UNICAMP, Campinas. 2021.

SIMON, M. A.; BLUME, G. W. Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. **The journal of mathematical behavior**, v. 15, n. 1, p. 3–31, 1996.

SINGH, S. **Fermat's Last Theorem**. London, England: Fourth Estate, 1997.

STEWART, J. **Cálculo – vol. 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TÁBOAS, P. Z. **Cálculo em uma Variável Real**. [s.l.] EdUSP, 2008.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2013.

THOMPSON, D. R.; SENK, S. L.; JOHNSON, G. J. Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. **Journal for research in mathematics education**, v. 43, n. 3, p. 253–295, 2012.

ULLMER, B.; ISHI, H. Emerging frameworks for tangible user interfaces. **IBM Systems Journal**, v. 39, n. 3-4, p. 915-931, 2000.

WEBER, K. Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. **International journal of research in undergraduate mathematics education**, v. 1, n. 3, p. 289–314, jul. 2015.

WEBER, K. Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 48, n. 1, p. 101–119, 2001.

ANEXO 1: Enunciados das demonstrações

COLETA 1 E 4 - Período 1	
01	Sejam A e B matrizes de tamanho nxn. Então A.B = B.A.
02	Seja A, B e C matrizes de tamanho nxn. Então A.(B+C) = A.B + A.C.
03	Seja A uma matriz de tamanho 2x2 e Id a matriz identidade de tamanho 2x2. Se A^2 = Id, então A = Id.
04	Seja A uma matriz de tamanho nxn, e Id a matriz identidade de tamanho nxn. Se A^2 = Id, então A = Id ou A = -Id.
05	Seja A uma matriz qualquer, então 1.A = A.
06	Seja A e B matrizes de tamanho nxn. Então $(A – B)^T = A^T – B^T$.

COLETA 1 E 4 - Período 2 e 4	
07	Sejam A e B matrizes nxn, então $(A+B)^T = A^T + B^T$.
08	Seja A e B matrizes de tamanho nxn, e 0 a matriz nula de tamanho nxn. Se A = 0, então A.B = 0.
09	Seja A uma matriz qualquer, então $(A^T)^T = A$.
10	Seja A e B matrizes nxn, então A + B = B + A.
11	Seja A uma matriz de tamanho nxn e 0 a matriz nula de tamanho nxn, então A – A = 0.
12	Seja A uma matriz qualquer e α e β pertencente aos reais. Então α.(β.A) = (α.β).A.
13	Seja A, B e C matrizes de tamanho nxn, então (A+B).C = A.C + B.C.
14	Seja A uma matriz de tamanho nxn e Id a matriz identidade de tamanho nxn. Então A.Id = Id.A = A.

COLETA 1 E 4 - Período 3	
15	Seja A e B matrizes nxn, então $(A+B)^2 = A^2 + 2.A.B + B^2$.
16	Seja α pertencente aos reais e A uma matriz, então $(α.A)^T = α.A^T$.
17	Sejam A, B e C matrizes de tamanho nxn então (A.B).C = A.(B.C).
18	Sejam A e B matrizes de tamanho nxn e 0 a matriz nula de tamanho nxn. Se A.B = 0, então A = 0 ou B = 0.
19	Sejam A, B e C matrizes de tamanho nxn, então A + (B + C) = (A + B) + C.
20	Seja α um real e A e B matrizes de tamanho nxn, então α.(A + B) = α.A + α.B.

COLETA 1 E 4 - Período 5	
21	Seja A uma matriz de tamanho nxn e 0 a matriz nula de tamanho nxn, então A + 0 = A.
22	Seja A uma matriz de tamanho nxn, Id a matriz identidade de tamanho nxn e 0 a matriz nula de tamanho nxn. Se $A^3 = A$, então A = Id ou A = 0.
23	Seja A uma matriz qualquer e α e β pertencente aos reais, então (α + β).A = α.A + β.A.
24	Sejam A e B matrizes nxn e 0 a matriz nula nxn. Se A.B = 0, então B.A = 0.
25	Seja α um real e A e B matrizes de tamanho nxn, então (α.A).B = A.(α.B) = α.(A.B).
26	Seja A e B matrizes de tamanho nxn, então $(A.B)^T = B^T.A^T$.

COLETA 2 - Período 1	
01	Para uma reta sempre existem pontos que não lhe pertencem.
02	Para todo ponto P, existem pelo menos duas retas distintas passando por P.
03	A interseção de n-conjuntos convexos é convexa.
04	Existe pelo menos uma união de convexos que não seja convexa.

COLETA 2 - Período 2	
05	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes
06	Dados dois triângulos ACE e GHJ com AC = GH, Â = Ĝ e Ĉ = Ĥ, então ACE = GHJ.
07	Se vale o axioma da separação do plano, então dado o triângulo ABC, se r é uma reta que intersecta o lado AB, mas $A \notin r$ e $B \notin r$, então r intersecta (pelo menos) um dos outros dois lados.
08	Numa geometria métrica satisfazendo o postulado da separação do plano os conjuntos H_1 e H_2 não são vazios.
09	Se a semirreta $\overrightarrow{AD}$ está entre as semi retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, então, a semirreta $\overrightarrow{AD}$ intersecta o segmento BC.
10	Se vale o postulado da separação do plano, dado o triângulo ABC, se r é uma reta que intersecta o lado AB, $A \notin r$, $B \notin r$, $C \notin r$ e r intersecta AC, então r não intersecta BC.

COLETA 2 - Período 3	
11	Ângulos opostos pelo vértice possuem medidas iguais.
12	Para A, B, C e D pontos distintos tais que C e D estão em semiplanos opostos com relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Então $\angle ABC + \angle ABD = \pi \Rightarrow$ C-B-D.
13	Dado o triângulo ΔABC, $AC \equiv BC \Leftrightarrow \angle BAC \equiv \angle ABC$.
14	Existem ângulos retos.

COLETA 2 - Período 4	
15	Se X = {A, B, C} e Y = {{A, B}, {B, C}, {C, A}}, então o par ordenado Z = (X, Y) define uma geometria.
16	Se X = Y = Ø, então o par ordenado Z = (X, Y) define uma geometria.
17	Toda tangente r a um círculo C é perpendicular ao raio com extremidade no centro de tangência Q.
18	Se uma reta é perpendicular a um raio de um círculo em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo.
19	Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.
20	Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos internos alternados são congruentes.

COLETA 2 - Período 5	
21	Se vale o Axioma das Paralelas e três retas r, s e t, duas a duas não coincidentes, se r é paralela a s, e s é paralela a t, então r é paralela a t.
22	Se vale o Axioma das Paralelas, em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é 180º.
23	Retas paralelas são equidistantes, ou seja, se r e s são retas paralelas, então qualquer ponto de r dista igualmente de s.
24	Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

COLETA 3 - Período 1	
01	Duas retas distintas ou não intersectam-se ou intersectam-se em um único ponto.
02	Para todo ponto P, existem pelo menos duas retas distintas passando por P.
03	As semi-retas S_{AB} e S_{BA} satisfazem a seguinte propriedade: $S_{AB} \cup S_{BA}$ é a reta AB.
04	As semi-retas S_{AB} e S_{BA} satisfazem a seguinte propriedad: $S_{AB} \cap S_{BA}$ é o segmento AB.

COLETA 3 - Período 2	
05	Sejam A, B e C pontos distintos de uma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. Se A*C*B então o número c está entre a e b.
06	Sejam A, B e C pontos distintos de uma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. Se o número c está entre a e b então A*C*B.
07	Em qualquer segmento AB existe um ponto C tal que AC = CB.
08	Em qualquer segmento AB onde existe um ponto C tal que AC = CB, o ponto C será único.
09	Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.
10	Se um triângulo tem dois ângulos congruentes, então ele é isósceles.

COLETA 3 - **Período 3**	
11	A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que 180°.
12	Em todo triângulo existem pelo menos dois ângulos internos agudos.
13	Por qualquer ponto de uma reta r, passa uma perpendicular à r.
14	A reta perpendicular s que cruza um ponto P da reta r, é única.

COLETA 3 - **Período 4**	
15	Se dois lados de um triângulo não são congruentes então seus ângulos opostos não são congruentes.
16	Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas.
17	Considere três retas, r, s e t, duas a duas não coincidentes. Se r é paralela a s e s é paralela a t, então r é paralela a t.
18	Se uma reta intercepta uma de duas retas paralelas, então ela intercepta também a outra.
19	Sejam a, b e c retas paralelas e m e n duas transversais. Suponha que m e n interceptam a, b e c nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se A*B*C, então A'*B'*C'.
20	Sejam a, b e c retas paralelas e m e n duas transversais. Suponha que m e n interceptam a, b e c nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se AB = BC então A'B' = B'C'.

COLETA 3 - **Período 5**	
21	Se uma reta é perpendicular a um raio de um círculo em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo.
22	Toda tangente r a um círculo C é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência Q.
23	Todo triângulo é inscritível numa circunferência.
24	Dado o triângulo ABC, a circunferência S com centro O e raio r no qual ABC está inscrito, é única.
25	Para todo paralelogramo, o ponto de intersecção de suas diagonais é o ponto médio delas.
26	Seja o triângulo ABC com altura h em relação ao lado AB. Então sua área é h.AB/2.