UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

TOMY FELIXON

Operador derivada pseudo-fracionário ψ-Hilfer e equações diferenciais pseudo-fracionárias

Campinas

2023

Tomy Felixon

Operador derivada pseudo-fracionário ψ-Hilfer e equações diferenciais pseudo-fracionárias

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Supervisor: José Vanterler da Costa Sousa

Co-supervisor: Jayme Morandi Vaz

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Tomy Felixon e orientada pelo Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F335o

Felixon, Tomy, 1988-
Operador derivada pseudo-fracionário 'psi'-Hilfer e equações diferenciais pseudo-fracionárias / Tomy Felixon. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: José Vanterler da Costa Sousa.
Coorientador: Jayme Morandi Vaz.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Derivada fracionária psi-Hilfer. 2. Existência de solução (Equações diferenciais pseudo-fracionárias). 3. Unicidade de solução (Equações diferenciais pseudo-fracionárias). 4. Propriedades pseudo-fracionárias. I. Sousa, José Vanterler da Costa, 1985-. II. Vaz, Jayme Morandi, 1964-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: 'Psi'-Hilfer pseudo-fractional derivative operator and pseudo-fractional differential equations
Palavras-chave em inglês:
psi-Hilfer fractional derivative
Existence of solution (Pseudo-fractional differential equations)
Uniqueness of solution (Pseudo-fractional differential equations)
Pseudo-fractional properties
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
José Vanterler da Costa Sousa [Orientador]
Junior Cesar Alves Soares
Gastão Silves Ferreira Frederico
Data de defesa: 17-03-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0001-0491-3080
- Currículo Lattes do autor: https://lattes.cnpq.br/8393673798613580

Dissertação de Mestrado defendida em 17 de março de 2023 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ VANTERLER DA COSTA SOUSA

Prof(a). Dr(a). JUNIOR CESAR ALVES SOARES

Prof(a). Dr(a). GASTÃO SILVES FERREIRA FREDERICO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Ao meu orientador José Vanterler da Costa Sousa pela disposição em me orientar, pela paciência, pelos incentivos e pelas correções deste trabalho. O trabalho tornou-se possível graças ao seu apoio.

Ao prof. Edmundo Capelas de Oliveira com quem eu tive o primeiro contato com o Cálculo Fracionário e que me indicou o Prof. José Vanterler como orientador.

Aos professores Jayme Vaz Jr, Junior Cesar Alves Soares e Gastão S. F. Frederico pela leitura do trabalho e pelas sugestões e recomendações.

À minha família no Haiti que, mesmo longe, sempre me apoiou incondicionalmente, sempre confiou e acreditou em mim.

Ao prof. Ricardo Miranda Martins que me aconselhou e me encorajou a participar no processo para ingressar no mestrado. Meus agradecimentos pela confiança e pelas palavras de encorajamento. Praticamente, obteve uma ajuda psicológica em um momento que eu estava precisando muito.

À Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), em particular, ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) e a todos os/as professores que contribuíram de uma maneira ou outra na minha formação.

Aos/às amigos/as Arietha Merdedes Mariano Pires, Berno Logis, Dieumettre Jean, Frantz Rousseau Déus, Guerline François, Ismane Desrosiers, Jean Renel François, Johnny Alouizor, Lanousse Petiote, Martha Aurora Parra Pulido e Sudly Saintil que sempre me ajudaram e me apoiaram nos momentos obscuros.

À Fundação Universidade Virtual do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro no programa "Formação didático-pedagógica para cursos na modalidade a distância".

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Fundo de Apoio ao Ensino, Pesquisa e Extensão da Fundação de Desenvolvimento da Unicamp (FAEPEX/Funcamp) - Processo nº 38321-20.

Resumo

O presente trabalho está dividido em duas etapas. Na primeira etapa, temos como objetivo realizar um estudo sistematizado do operador derivada pseudo-fracionário ψ-Hilfer e discutir algumas propriedades clássicas da teoria. De modo especial, vamos investigar as regras g-Leibniz generalizada dos tipos I e II, a transformada g-Laplace e, por fim, a g-integração por partes. Nesse sentido, exemplos e casos particulares dos resultados discutidos durante o trabalho, foram apresentados. Na segunda etapa, dedicamos a discutir a existência e unicidade de solução para uma classe de equações diferenciais pseudo-fracionárias por meio da teoria de ponto fixo e dos teorema de Arzelà-Ascoli e da Convergência Dominada.

Palavras-chave: Operador pseudo-fracionário ψ-Hilfer. Propriedades pseudo-fracionárias. Equações pseudo-fracionárias. Existência. Unicidade.

Abstract

This work is divided into two steps. In the first step, we aim to carry out a systematic study of the ψ-Hilfer pseudo-fractional derivative operator and discuss some classical properties of the theory. In a special way, we will investigate the generalized g-Leibniz rules of types I and II, the g-Laplace transform and, finally, the g-integration by parts. In this sense, examples and particular cases of the results discussed during the work were presented. In the second step, we discuss the existence and uniqueness of solution for a class of pseudo-fractional differential equations by means of fixed point theory and the theorems of Arzelà-Ascoli and Dominated Convergence.

Keywords: ψ-Hilfer pseudo-fractional operator. Pseudo-fractional properties. Pseudo-fractional equations. Existence. Uniqueness.

Sumário

1 Introdução

O cálculo diferencial e integral, introduzido por Newton e Leibniz no final do século XVII, entendeu-se que a noção de derivada de ordem inteira, foi significativa e revolucionária em toda a matemática. Existem inúmeras aplicações em diversas áreas, a saber: engenharias, física, medicina, biologia, estatística, dentre outras. Naquela ocasião, ainda não se tinha ideia do que estaria por vir, pois ainda era recente a noção de derivada. No entanto, muitas novas descobertas estariam por vir, motivados por essa descoberta de grande magnitude. Então, em meados de 1695, uma possível carta entre Marquês de l'Hôpital e Leibniz, teria iniciado as primeiras ideias sobre o cálculo fracionário [39], questionando exatamente a noção de derivada inteira. Em outras palavras, na possível carta, continha o seguinte questionamento "O que aconteceria se na derivada inteira de ordem n, isto é, $\dfrac{d^n}{dt^n}f(t)$, fosse escolhido um valor não inteiro, no caso particular, $\dfrac{1}{2}$"?. Leibniz respondeu: "Isso levará a um paradoxo, do qual um dia serão desenhadas consequências úteis" [16, 25, 40]. Certamente, Leibniz não sabia a importância e revelância da resposta naquele momento, mas hoje a resposta está em todas as áreas. Leibniz estava certo. Não demoraria séculos até que ficasse claro como ele estava certo. O cálculo fracionário é o nome que se popularizou para o cálculo de ordem não inteira, ou ainda, cálculo de ordem arbitrária, pois este é uma extensão do cálculo de ordem inteira, sendo a ordem inteira trocada para uma ordem não inteira podendo, inclusive, ser complexa.

Grunwald [20] e Letnikov [26] introduziram a derivada fracionária denominada atualmente de Grünwald-Letnikov, cuja importância é atacar problemas numéricos e, se baseia na generalização da derivação ordinária de ordem $n \in \mathbb{N}$. Dois anos depois, Sonin [43] introduziu a derivada a fracionária de Riemann-Liouville (DFRL), cuja derivada de ordem arbitrária, equivale à derivada de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária. O primeiro susto que notaram foi, que a DFRL de uma constante é diferente de zero. Nesse mesmo tempo, começaram a indagar, qual seria a interpretação geométrica de uma derivada fracionária. Baseando na definição de DFRL, em 1967, o italiano Michele Caputo [13] propôs uma nova definição de derivada fracionária mais restritiva que a de Riemann-Liouville, chamada derivada fracionária de Caputo (DFC). Na formulação de Caputo, a derivada de ordem arbitrária é a integral de ordem arbitrária de uma derivada de ordem inteira. Com a formulação de Caputo, a derivada fracionária de uma constante é zero. A ideia de introduzir esta nova formulação de derivadas fracionárias surgiu das tentativas de resolver um problema de viscoelasticidade [14]. Desde então, inúmeras definições de derivadas fracionárias foram introduzidas ao longo dos anos. Destacamos algumas: ψ-Caputo, ψ-Riemann–Liouville, Weyl, Hilfer, Katugampola, Hadamard, Caputo–Katugampola, Hilfer–Katugampola, Hilfer–Hadamard, Riemann, Erdélyi–Kober, Riesz, dentre outras [7, 16, 31, 40, 59, 62, 63].

Por muito tempo, não houve um critério para dizer se uma derivada deveria ou não ser chamada de fracionária, apesar da existência de inúmeras definições de derivadas fracionárias. Algumas perguntas foram surgindo, como: "qual é a melhor derivada fracionária para um dado problema? Não convém propor e utilizar derivada fracionária mais geral? Então, em 1975, a fim de responder esses questionamentos, Ross [38] propõe um critério de cinco propriedades que um operador deve satisfazer para poder ser chamado de derivada fracionária. Em 2014, Tenreiro e Ortigueira [34] propuseram o critério que uma determinada derivada deve satisfazer para ser considerada fracionária. A diferença entre o critério proposto por Tenreiro e Ortigueira e o proposto por Bertran Ross é a troca da analiticidade da função pela regra generalizada de Leibniz. Nesse sentido, a pergunta natural que surgiu: as derivadas até então introduzidas, continuariam sendo fracionária? A pergunta de fato é bem consiste, uma vez que a DFC não satisfaz a generalização da regra de Leibniz. Embora não satisfaça esse ponto do critério, a DFC é uma das mais importantes, de modo especial, quando trabalha com problemas de equações diferenciais envolvendo condições iniciais, uma vez que as condições iniciais são de ordem inteira, e não fracionária. Por exemplo, veja o trabalho de Sousa et al. [52] que investiga a solução explicita de um problema de difusão tempo-fracionário via transfomada de Laplace.

A priori, a etapa se uma derivada é considerada fracionária foi estabelecida. Mas mesmo assim, ainda continuava uma dúvida em saber qual melhor derivada fracionária para fitar dados, uma vez como destacado acima, existem várias definições. Então, motivados pelo critério de Ortigueira-Tenreiro e pelas inúmeras derivadas fracionárias existentes, em 2018, Sousa e de Oliveira [59] introduziram a derivada fracionária ψ-Hilfer (DF ψ-Hilfer) de ordem não variável. Em 2019, como a DFC não satisfaz a generalização da regra de Leibniz, no objetivo de satisfazer o critério proposto por Ortigueira-Tenreiro, Sousa e Oliveira [62] introduziram o que chamaram regras do tipo Leibniz I e II. Essas regras se baseiam na escolha de uma função $\psi(\cdot)$ e nos limites $\beta \to 1$ e $\beta \to 0$. A DF ψ-Hilfer contém uma ampla classe de derivadas fracionárias como caso particular e contempla as regra do tipo Leibniz I e II. Então, trabalhar com as DF ψ-Hilfer traz mais vantagens do que trabalhar com as outras derivadas fracionárias [3, 4, 6, 48].

Vale também destacar a importância das derivadas fracionárias com ordem variável, embora algumas propriedades básicas que são satisfeitas quando se trabalha com as derivadas de ordem não variável, acabam não sendo satisfeitas. No entanto, tem suas vantagens que são as aproximações numéricas através de outras derivadas e integrais fracionárias via séries numéricas e modelagem matemática, uma vez que a ordem variável permite escolher funções. Vejam alguns trabalhos que abordam questões teóricas e práticas envolvendo tais tipos de DF [1, 15, 30, 32, 44, 58, 70].

Já sabemos que o cálculo fracionário é uma generalização do cálculo diferencial e integral. Por outro lado, existe uma teoria chamada pseudo-análise que é uma generalização da análise clássica. Em vez de números reais, esta teoria é baseada na semi-condução definida em um intervalo real com pseudo-adição e pseudo-multiplicação. Durante os últimos anos, vários pesquisadores investigaram novas formulações de desigualdades envolvendo integrais fracionárias neste contexto [5, 22, 67]. Desde de 2015, trabalhos como Agahi et al. [5] e Babakhani et al. [9] vêm sendo motivação para uma nova área do cálculo fracionário. Destacamos o trabalho de Babakhani et al. [9], que utilizaram o operador derivada pseudo-fracionária (ODPF) de Riemann-Liouville em relação a outra função. Nesse sentido, motivados pela definição de DF ψ-Hilfer e da teoria de pseudo-análise, em particular, pelos operadores de integração e diferenciação pseudo-fracionários até o momento, Sousa et al. [54] introduziram o operador derivada pseudo-fracionário ψ-Hilfer (ODPF ψ-Hilfer). Um dos objetivos do trabalho, além de proporcionar um operador novo, foi atacar problemas de equações diferenciais e integrais, uma vez que existem questões de grande relevância em aberto.

Atualmente, o cálculo fracionário está bem consolidado com inúmeros pesquisadores dedicando-se de forma eficiente na construção de novos resultados, que garantem a continuidade e expansão do cálculo fracionário e suas aplicações [8, 28, 29, 33, 37, 41, 42, 52, 53, 55, 60, 61, 66]

Uma das questões centrais destes últimos anos tem sido o estudo e o avanço da teoria das equações diferenciais fracionárias e aplicações [11, 12, 19, 49, 51, 56]. Por outro lado, o número crescente de pesquisadores na área e a importância e relevância do diferentes tipos de equações diferenciais fracionárias ganharam destaque e atenção na comunidade científica. Uma das principais causas para discutir propriedades de soluções de equações diferenciais fracionárias se deve ao fato que, o caso fracionário permite realizar certas análises que o caso inteiro não permite devido a ordem do operador de diferenciação variar $n-1 < \alpha < n$ e, em particular, contém o caso inteiro quando $\alpha = 1$. A priori, este é um dos primeiros e principais propósitos. Até então, trabalhos sobre equações diferenciais fracionárias eram discutidos apenas no contexto da Análise clássica. Ender Pap [35] é um dos principais pesquisadores na área g-cálculo que começou a discutir problemas envolvendo equações diferenciais parciais via pseudo-análise. Recentemente, alguns pesquisadores da área manifestaram o interesse nas obras dele e começaram a discutir a ideia de unificar a teoria do g-cálculo, pseudo-análise com cálculo fracionário [22, 59, 64]. Motivados por essas duas áreas, em 2020, Sousa et al. [54] estenderam a DF ψ–Hilfer para pseudo–operadores.

Depois da introdução da DF ψ-Hilfer por Sousa e Oliveira [59] em 2018, uma versão para a transformada de Laplace em relação a outra função ψ já era previsível. Não demorou muito tempo para Jarad e Abdeljaward [23] introduzirem uma versão para a transformada de Laplace com ψ. Em 2020, Fahad et al. [17] introduziram a versão reversa da versão de Jahad que estava faltando. Nesse sentido, a partir dessa versão algumas propriedades tais como: existência, unicidade, estabilidade de soluções de equações diferenciais fracionárias envolvendo DF ψ-Hilfer começaram a ser discutidas [19, 64]. Em 2020, Sousa et al. [64] discutiram também a acessibilidade de sistemas lineares e não lineares no sentido da ODPF ψ-Hilfer em g-cálculo por meio das funções de Mittag-Leffler com um e dois parâmetros.

Este presente trabalho está dividido em quatro etapas: a primeira etapa é fazer um estudo detalhado do ODPF ψ-Hilfer e discutir algumas propriedades importantes. Nesse sentido, a segunda etapa, vamos atacar questões das regras g-Leibniz generalizada dos tipos I e II, bem como a transformada de g-Laplace. Por fim, terceira etapa, a integração por partes, ferramenta de grande valia em diversos ramos da matemática, em particular, na construção de um funcional energia de problemas de equações diferenciais com p-Laplaciano.

Um dos propósitos dessa dissertação, é deixar claro quais são os principais objetivos a ser discutidos em cada capítulo. Para isso, acreditamos que fica melhor destacados da seguinte maneira, a saber:

No Capítulo 2, destinamos para apresentar conceitos fundamentais que envolvem operações de pseudo-adição, pseudo-multiplicação, σ-$\oplus$-medida e de modo geral a teoria de pseudo-análise. Nesse sentido, passamos a apresentação das integral fracionária ψ-Riemann-Liouville e da DF ψ-Hilfer e alguns resultados. Uma vez apresentados tais definições, dedicamos a apresentar os conceitos de operador integral pseudo-fracionária (OIPF) de Riemann-Liouville e das ODPF de Caputo e Riemann-Liouville e algumas propriedades.

No Capítulo 3, serão desenvolvidas três etapas do trabalho. Iniciamos com a introdução do ODPF ψ-Hilfer e investigamos algumas propriedades fundamentais, de suma importância no decorrer da dissertação. Além disso, discutimos alguns casos particulares, propriedade especial deste operador derivada. Faremos a prova dos resultados somente para o ODPF ψ-Hilfer à esquerda; para o caso à direita, elas seguem de maneira análoga.

Por outro lado, como discutido acima, a regra de Leibniz generalizada sendo um ponto do critério que uma determinada derivada deve satisfazer para ser considerada fracionária, então nada mais justo que, investigar as regras g-Leibniz generalizada dos tipos I e II para o ODPF ψ-Hilfer.

A transformada de Laplace é uma ferramenta de grande importância não somente na matemática, mas em diversas áreas, em particular, quando o assunto é investigar solução analítica de equações diferenciais parciais lineares (inteira ou fracionária). Então, para finalizar essa segunda etapa, dedicamos a realizar um estudo da transformada de g-Laplace para o ODPF de Hilfer.

Como sabemos a integração por partes, é de fato importante desde as primeiras ideias do cálculo diferencial e integral, e dado continuidade ao cálculo fracionário e suas inúmeras aplicações. Por outro lado, existem áreas que a ferramenta integração por partes, tem um papel fundamental, como o caso para obter um funcional energia de um equação diferencial fracionária com p-Laplaciano [46, 47, 57, 65], dentre outras utilidades. Então, vale aqui destacar essa ferramenta importante e discutir uma versão da g-integração por partes para o ODPF ψ-Hilfer.

No Capítulo 4, consideramos uma classe de equações pseudo-fracionárias ψ-Hilfer dada por

$$\begin{cases} \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,t_0+}x\,(t) &=& \mathbf{A}x\,(t) \oplus f\,(t, x(t))\,,\ t \in J \\ \mathbb{I}^{1-\gamma;\psi}_{\oplus,\odot,t_0+}x\,(t_0) &=& x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,t_0+}(\cdot)$ é o ODPF ψ-Hilfer de ordem $0 < \alpha \leqslant 1$ e tipo $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\mathbb{I}^{1-\gamma;\psi}_{\oplus,\odot,t_0+}(\cdot)$ é o OIPF de ordem $1-\gamma$ ($\gamma = \alpha - \beta(1-\alpha)$), $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$ e $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua.

Os principais resultados deste capítulo, é apresentar um estudo sobre a existência e unicidade de soluções. Em outras palavras, estamos interessados nos seguintes resultados como segue:

Teorema 1. *Seja $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua satisfazendo a condição de Lipschitz*

$$||f(t, x_1(t)) \ominus f(t, x_2(t))||_g \leqslant_g L \odot ||x_1(t) \ominus x_2(t)||_g, t \in J := [t_0, t_1], L > 0.$$

Então, o valor inicial Eq.(1.1) *tem uma solução única sempre que*

$$M \odot L \odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(t) - \psi(t_0))^{\alpha}}{\alpha}\right) < 1.$$

Teorema 2. *Seja $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que exista uma constante positiva L, tal que*

$$||f(t, x(t))||_g \leqslant_g L \odot ||x(t)||_g, \quad t \in J.$$

Então, o valor inicial Eq.(1.1) *tem solução em J.*

No Capítulo 5, finalizamos a dissertação destacando quais foram os objetivos discutidos, bem como, uma continuação natural desse trabalho e trabalhos futuros para o doutorado.

2 Preliminares

Neste Capítulo 2, apresentamos e discutimos alguns resultados importantes que são essenciais para a compreensão dos principais resultados deste trabalho. Vamos apresentar a DF ψ-Hilfer no sentido de operadores pseudo-fracionários, envolvendo os símbolos $(\oplus, \odot)$. Para isso, apresentamos primeiramente alguns conceitos decorrentes da pseudo-análise [9, 22, 35, 36, 67].

Seja $I = [a, b] \subset [-\infty, \infty]$. A ordem completa de I será indicada por $\preceq$. Seja $I_+ = \{x|, x \in I, 0 \preceq x\}$.

Definição 2.1. *Uma operação binária $\oplus$ em I é uma pseudo-adição se for comutativa, não decrescente em relação a $\preceq$, contínua, associativa e com elemento zero (neutro) denotado por* 0.

Definição 2.2. *Uma operação binária $\odot$ em I é uma pseudo-multiplicação se for comutativa, positivamente não decrescente, ou seja, $x \preceq y$ implica $x \odot z \preceq y \odot z$ para todo $z \in I_+$, associativa com um elemento unitário $1 \in I$, ou seja, para cada $x \in [a, b]$, $1 \odot x = x$. Além disso, $0 \odot x = 0$ e, que $\odot$ é distributivo sobre $\oplus$, isto é, $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$.*

A estrutura $(I, \oplus, \odot)$ é um semi-anel.

Definição 2.3. *Uma classe importante de pseudo-operações $\oplus$ e $\odot$, pode ser construída com a ajuda de uma função monótona e contínua $g : I \mapsto [0, \infty]$. Dado uma função g, as pseudo-operações $\oplus$ e $\odot$ são definidas por*

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)) \text{ e } x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y)). \tag{2.1}$$

Definição 2.4. *Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos do conjunto X. Uma função conjunto $\mu : \mathcal{A} \mapsto I$ é chamada de σ-$\oplus$-medida, se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mu(\mathcal{A}_i)$ *para qualquer sequência $\{\mathcal{A}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$.*

Definição 2.5. *Sejam as pseudo-operações $\oplus$ e $\odot$ definidas através de uma função monótona e contínua $g : I \mapsto [0, \infty]$.*

1. *A g-integral de uma função mensurável $f : [c, d] \to I$ é dada por*

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot dx = g^{-1}\left(\int_c^d g(f(x))\, dx\right).$$

2. A transformada g-Laplace de f é definida por

$$\mathscr{L}^{\oplus}[f(x)] = g^{-1}\left(\mathscr{L}[g(f(x))]\right)\cdot$$

Definição 2.6. *Seja g o gerador aditivo da pseudo-adição estrito $\oplus$ em I tal que g é continuamente diferenciável em (a,b). A pseudo-multiplicação correspondente $\odot$, sempre será definida como $u \odot v = g^{-1}(g(u)\cdot g(v))$. Se uma função f é diferenciável em (c,d) e tem a mesma monotonicidade que a função g, então a g-derivada de f no ponto $x \in (c,d)$ é definida por*

$$\frac{d^{\oplus}}{dx} f(x) = g^{-1}\left(\frac{d}{dx} g(f(x))\right).$$

Além disso, se existe a e-nésima g-derivada de f, então

$$\frac{d^{(n)\oplus}}{dx} f(x) = g^{-1}\left(\frac{d^n}{dx^n} g(f(x))\right).$$

Definição 2.7. *Seja g um operador de uma pseudo-adição $\oplus$ no intervalo $[-\infty,+\infty]$. As operações binárias $\ominus$ e $\oslash$ em $[-\infty,+\infty]$ são definidas pelas expressões*

$$x \ominus y = g^{-1}(g(x) - g(y)) \qquad e \qquad x \oslash y = g^{-1}\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right).$$

Se as expressões $g(x) - g(y)$ e $\dfrac{g(x)}{g(y)}$ estiverem bem definidas, dizemos que elas são pseudo-subtração e pseudo-divisão consistentes com a pseudo-adição $\oplus$.

Definição 2.8. *Seja $g : [-\infty,+\infty] \mapsto [-\infty,+\infty]$ uma função contínua estritamente crescente e ímpar, tal que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e $g(+\infty) = +\infty$. O sistema de operações pseudo-aritméticas $\{\oplus, \oslash, \odot, \ominus\}$ gerado por essas funções é dito ser um sistema consistente.*

Seja $I = [a,b]$ $(0 < a < b < \infty)$ um intervalo finito no semi-eixo $\mathbb{R}^+$ e sejam $C(I,\mathbb{R})$, $AC^n(I,\mathbb{R})$, $C^n(I,\mathbb{R})$ os espaços de funções contínuas n-vezes absolutamente contínuas e, n-vezes continualmente diferenciáveis em I, respectivamente.

Considere, o espaço normado das funções contínuas f no intervalo I é definido por [55]

$$\|f\|_{C(I,\mathbb{R})} = \max_{t\in I} |f(t)|.$$

Além disso, temos o espaço de funções n-vezes absolutamente contínuas dado por

$$AC^n(I,\mathbb{R}) = \left\{ f : I \to \mathbb{R};\ f^{(n-1)} \in AC(I,\mathbb{R}) \right\}.$$

O espaço ponderado $C_{\gamma,\psi}I$ é definido por [55]

$$C_{\gamma;\psi}(I,\mathbb{R}) = \{ f : (a,b] \to \mathbb{R};\ (\psi(t) - \psi(a))^{\gamma} f(t) \in C(I,\mathbb{R}) \},\ 0 \leqslant \gamma < 1,$$

com sua respectiva norma

$$\|f\|_{C_{\gamma;\psi}(I,\mathbb{R})} = \|(\psi(t) - \psi(a))^{\gamma} f(t)\|_{C(I,\mathbb{R})} = \max_{t\in I} |(\psi(t) - \psi(a))^{\gamma} f(t)|.$$

Nesse sentido, somos motivados a apresentar o espaço ponderado $C^n_{\gamma;\psi}(I,\mathbb{R})$ dado por [55]

$$C^n_{\gamma;\psi}(I,\mathbb{R}) = \left\{f : (a,b] \to \mathbb{R};\ f(t) \in C^{n-1}(I,\mathbb{R});\ f^{(n)}(t) \in C_{\gamma;\psi}(I,\mathbb{R})\right\},\ 0 \leqslant \gamma < 1,$$

com sua respectiva norma

$$\|f\|_{C^n_{\gamma;\psi}(I,\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\|f^{(k)}\right\|_{C(I,\mathbb{R})} + \left\|f^{(n)}\right\|_{C_{\gamma;\psi}(I,\mathbb{R})}.$$

Para $n = 0$, temos $C^0_{\gamma,\psi}(I,\mathbb{R}) = C_{\gamma,\psi}(I,\mathbb{R})$.

Vamos agora apresentar algumas definições sobre integrais fracionárias e DF, bem como algumas propriedades.

Sejam (a,b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ um intervalo finito ou infinito da reta real $\mathbb{R}$ e $\alpha > 0$. Além disso, seja $\psi(x)$ uma função monótona crescente e positiva em (a,b) tendo uma derivada contínua $\psi'(x)$ em (a,b). A integral fracionária à esquerda de ordem α de uma função f em relação à outra função ψ em I é definida por [33]

$$I^{\alpha,\psi}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} f(t)\, dt. \tag{2.2}$$

Suponha que $n - 1 < \alpha < n$ com $n \in \mathbb{N}$, $I = [a,b]$ é um intervalo tal que $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ e $f, \psi \in C^n(I,\mathbb{R})$ são duas funções tais que $\psi(x)$ é crescente e $\psi'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. A DF ψ-Hilfer à esquerda de f de ordem α e tipo $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ denotado por ${}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(\cdot)$, é definida por [33]

$${}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f(x) = I^{\beta(n-\alpha);\psi}_{a+} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^n I^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+} f(x). \tag{2.3}$$

O espaço ponderado $C^{\alpha,\beta}_{\gamma,\psi}(I,\mathbb{R})$ é definido por

$$C^{\alpha,\beta}_{\gamma;\psi}(I,\mathbb{R}) = \left\{f \in C_{\gamma;\psi}(I,\mathbb{R});\ {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f \in C_{\gamma;\psi}(I,\mathbb{R})\right\},\ \gamma = \alpha + \beta(1-\alpha),$$

onde ${}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(\cdot)$ é a DF ψ-Hilfer à esquerda definida acima na Eq.(2.3).

Apresentamos agora dois casos particulares de DF ψ-Hilfer.

1. Tomando o limite $\beta \to 0$ na Eq.(2.3), temos a DF ψ-Riemann-Liouville, dada por

$${}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^n I^{(n-\alpha);\psi}_{a+} f(x). \tag{2.4}$$

2. Tomando o limite $\beta \to 1$ na Eq.(2.3), temos a DF ψ-Caputo, dado por

$$ {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{a+}f(x) = I^{(n-\alpha);\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n} f(x). \tag{2.5}$$

Apresentamos a seguir os OIPF e OIPF em relação a outra função no sentido das DF ψ-Riemann-Liouville e ψ-Caputo, com algumas propriedades fundamentais.

Definição 2.9. [9] *Suponha que o operador $g : I \to [0,\infty]$ da pseudo-adição $\oplus$ e da pseudo-multiplicação $\odot$ seja uma função crescente. Além disso, seja h uma função positiva em $(a,b]$, tendo uma derivada h' contínua em (a,b). O OIPF de Riemann-Liouville à esquerda de ordem $\alpha > 0$ de uma função mensurável $f : I \to I$ em relação a uma função h em I é definida por*

$$\begin{aligned} \mathbb{I}^{n-\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) &:= g^{-1}\left(I^{\alpha;\psi}_{a+}g(f(x))\right) \\ &= \int_{[a,x]}^{\oplus}\left[g^{-1}\left(\frac{\psi(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\odot f(t)\right]dt, \end{aligned}$$

onde $I^{\alpha,\psi}_{a+}(\cdot)$ é definida na Eq.(2.2)*.*

O OIPF ψ-Riemann-Liouville à direita é definida de maneira análoga.

Definição 2.10. (ODPF ψ-Riemann-Liouville) *Suponha que operador $g : I \to [0,\infty]$ da pseudo-adição $\oplus$ e da pseudo-multiplicação $\odot$, seja uma função crescente. Além disso, seja ψ uma função crescente e positiva em $(a,b]$, tendo a derivada ψ' contínua em (a,b) com $\psi'(t) \neq 0$. O ODPF de Riemann-Liouville à esquerda de ordem $n-1 < \alpha < n$ de uma função mensurável $f : I \to I$ em relação a uma função ψ em I é definida por*

$$ {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = g^{-1}\left({}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{a+}g(f(x))\right) = g^{-1}\left(\left(\frac{D}{\psi'(x)}\right)^{n}\right)\odot \mathbb{I}^{n-\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x). \tag{2.6}$$

O ODPF ψ-Riemann-Liouville à direita é definida de maneira análoga.

Definição 2.11. (ODPF ψ-Caputo) *Seja o operador $g : I \to [0,\infty]$ da pseudo-adição $\oplus$ e da pseudo-multiplicação $\odot$ uma função crescente. Além disso, seja ψ uma função crescente e positiva em $(a,b]$, tendo a derivada ψ' contínua em (a,b) com $\psi'(t) \neq 0$. O ODPF de Caputo à esquerda de ordem $n-1 < \alpha < n$ de uma função mensurável $f : I \to I$ em relação a uma função ψ sobre I é definida por*

$$ {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = g^{-1}\left({}^{C}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{a+}g(f(x))\right) = \mathbb{I}^{n-\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}g^{-1}\left(\left(\frac{D}{\psi'(x)}\right)^{n} f(x)\right). \tag{2.7}$$

O ODPF ψ-Caputo à direita é definida de maneira análoga.

Apresentamos agora alguns resultados envolvendo o OIPF de Riemann-Liouville.

Teorema 2.12. *Se $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ e $f : I \mapsto I$ é uma função mensurável, então as seguintes relações são válidas:*

1. $\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}\mathbb{I}^{\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f(x) = \mathbb{I}^{\alpha+\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f(x)$ (Lei de semigrupo);
2. $\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}\mathbb{I}^{\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f(x) = \mathbb{I}^{\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f(x)$ (Comutatividade);
3. $\mathbb{I}^{0;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f(x) = f(x)$ (Identidade);
4. $\mathbb{I}^{1;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f(x) = \int_{[a,x]}^{\oplus} \psi'(t)f(t)\,dt$ (RL).

Demonstração. Veja [9]. □

Teorema 2.13. *Seja $\alpha > 0$ e sejam f_1 e f_2 duas funções mensuráveis em I. Então, para qualquer $\lambda \in I$, temos*

1. $\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(f_1(x) \oplus f_2(x)) = \mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f_1(x) \oplus \mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f_2(x)$ (Linearidade);
2. $\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(\lambda \odot f_1(x)) = \lambda \odot \mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f_1(x)$ (Multiplicação por escalar).

Demonstração. Veja [9]. □

Para outras propriedades fundamentais do OIPF de Riemann-Liouville, veja [9].

Teorema 2.14. *Sejam $f, g \in C^n_{\gamma,\psi}(I, \mathbb{R})$, $\alpha > 0$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Então, temos*

$$^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f(x) = {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k (\psi(x) - \psi(a))^{\gamma-k}.$$

Demonstração. Veja [33]. □

Teorema 2.15. *Sejam $f \in C^n_{\gamma,\psi}(I, \mathbb{R})$, $\alpha > 0$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Então, temos*

$$^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} I^{\alpha;\psi}_{a+} f(x) = f(x).$$

Demonstração. Veja [33]. □

Lema 2.16. *Dado $\delta \in \mathbb{R}$. Considere a função $f(x) = (\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1}$, onde $\delta > n$. Então, para $n-1 < \alpha < n$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, segue que*

$$^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f(x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)} (\psi(x) - \psi(a))^{\delta-\alpha-1}.$$

Demonstração. Veja [33]. □

Lema 2.17. *Sejam $\lambda > 0$, $n-1 < \alpha < n$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Considere a função $f(x) = \mathbb{E}_\alpha\left(\lambda\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^\alpha\right)$, onde $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro. Então,*

$$^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \lambda f(x).$$

Demonstração. Veja [33]. □

Podemos agora provar três teoremas que são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 2.18. *Sejam $n-1 < \alpha < n$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, com $n \in \mathbb{N}$. Seja $f \in C_\gamma^n(I,\mathbb{R})$. Então, temos*

$$^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} D_{a+}^{n\psi} f(x) = {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{n+\alpha;\psi} f(x) \tag{2.8}$$

ou

$$\begin{aligned} ^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x) &= {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{n+\alpha;\psi}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(\psi(x)-\psi(a))^k f_\psi^{[k]}(a)\right] \\ &= {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{n+\alpha;\psi} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{n+\alpha;\psi}(\psi(x)-\psi(a))^k}{k!} f_\psi^{[k]}(a) \\ &= {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{n+\alpha;\psi} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{k-n-\alpha}}{\Gamma(k+1-n-\alpha)} f_\psi^{[k]}(a). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Demonstração. Provamos primeiro a Eq.(2.8). Lembre-se que

$$^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\mu;\psi}\left[\mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x)\right]$$

com $\mu = n(1-\beta)+\beta\alpha$. Agora, considere $f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n g(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} ^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\mu;\psi}\left[\mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n g(x)\right] &= {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\mu;\psi}\left[\mathbb{I}_{a+}^{n-\gamma;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n g(x)\right] \\ &= {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\mu;\psi}\,{}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\gamma;\psi} g(x) \\ &= {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\mu+\gamma;\psi} g(x). \end{aligned}$$

Para obter a Eq.(2.9), basta usar a relação entre as DF ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville. □

Teorema 2.19. *Sejam $n-1 < \alpha < n$, $n-1 < \delta < n$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Considere $f \in C_\gamma^n(I,\mathbb{R})$. Então, temos*

$$^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\,{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\delta,\beta;\psi} f(x) = {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha+\delta,\beta;\psi} f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}}{\Gamma(2-\xi-k-n)} f_\psi^{[n-k]}\mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\delta);\psi} f(a)$$

com $\xi = \alpha+\beta[(\delta-\alpha)-(n+\alpha)]$. Introduzimos a notação

$$f_\psi^{[n-k]} := \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}f(x)\right)^{[n-k]}.$$

Demonstração. Primeiramente, considere a seguinte relação

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} D_{a+}^{\gamma;\psi} f(x) $$

com $\gamma = \alpha + \beta(-\alpha)$. Assim, podemos escrever

$$ \begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\delta,\beta;\psi} f(x) &= \mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ D_{a+}^{\gamma;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\delta,\beta;\psi} f(x) \\ &= \mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ D_{a+}^{\gamma;\psi}\ \mathbb{I}_{a+}^{\overline{\gamma}-\delta;\psi}\ D_{a+}^{\overline{\gamma};\psi} f(x) \\ &= \mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ D_{a+}^{\gamma;\psi}\ \mathbb{I}_{a+}^{-\delta;\psi}\ \mathbb{I}_{a+}^{\overline{\gamma};\psi}\ D_{a+}^{\overline{\gamma};\psi} f(x) \end{aligned} $$

com $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$ e $\overline{\gamma} = \delta + \beta(n-\alpha)$. A última expressão pode ser escrita da seguinte forma

$$ \begin{aligned} & {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\delta,\beta;\psi} f(x) \\ = {} & \mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ D_{a+}^{\gamma;\psi}\ \mathbb{I}_{a+}^{\overline{\gamma}-\delta;\psi} \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\overline{\gamma}-k}}{\overline{\gamma}-k+1} f_{\psi}^{[n-k]} \mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\delta);\psi} f(a) \right] \\ = {} & {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} \mathbb{I}_{a+}^{-\delta;\psi} f(x) - \sum_{k=1}^{n} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} \mathbb{I}_{a+}^{-\delta;\psi} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\overline{\gamma}-k}}{\overline{\gamma}-k+1} f_{\psi}^{[n-k]} \mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\delta);\psi} f(a) \\ = {} & {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} \mathbb{I}_{a+}^{-\delta;\psi} f(x) - \sum_{k=1}^{n} {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\mu;\psi} \mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)-\delta;\psi} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\overline{\gamma}-k}}{\overline{\gamma}-k+1} f_{\psi}^{[n-k]} \mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\delta);\psi} f(a). \end{aligned} \tag{2.10} $$

Observe que para $\overline{\alpha} = 1-\gamma-\delta$ e $\overline{\delta} = \overline{\gamma}-k+1$, temos

$$ \begin{aligned} \mathbb{I}_{a+}^{\overline{\alpha};\psi} (\psi(x)-\psi(a))^{\overline{\delta}-1} &= \frac{\Gamma(\overline{\delta})}{\Gamma(\overline{\alpha}+\overline{\delta})} (\psi(x)-\psi(a))^{\overline{\alpha}+\overline{\delta}-1} \\ &= \frac{\Gamma(\overline{\gamma}-k+1)}{\Gamma(2-\gamma-\delta-k+\overline{\gamma})} (\psi(x)-\psi(a))^{1-\gamma-\delta-k+\overline{\gamma}}. \end{aligned} \tag{2.11} $$

Escolhendo $\overline{\psi} = 1-\gamma-\delta-k+\overline{\gamma}+1$ e $\mu = n(1-\beta)+\alpha\beta$, podemos escrever

$$ {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\mu;\psi} (\psi(x)-\psi(a))^{\overline{\psi}-1} = \frac{\Gamma(\overline{\psi})}{\Gamma(\overline{\psi}-\mu)} (\psi(x)-\psi(a))^{\overline{\psi}-\mu-1}. $$

Então, usando a Eq.(2.10) e simplificando, obtemos:

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\delta,\beta;\psi} f(x) = \underbrace{{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\ \mathbb{I}_{a+}^{-\delta;\psi} f(x)}_{(I)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}}{\Gamma(2-\xi-k-n)} f_{\psi}^{[n-k]} \mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\delta);\psi} f(a), $$

onde $\xi = \alpha - \beta(n+\alpha) + \beta(\delta-\alpha) = \alpha + \beta[(\delta-\alpha)-(n+\alpha)]$.

O termo (I) na última equação pode ser reescrito como

$$ \begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\ \mathbb{I}_{a+}^{-\delta;\psi} f(x) &= {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\mu;\psi} \left[\mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)-\delta;\psi} f(x) \right] \\ &= {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\overline{\mu}-\beta\delta;\psi} \left(\mathbb{I}_{a+}^{\overline{\xi}-\beta\delta;\psi} f(x) \right) \end{aligned} $$

onde $\overline{\mu} = n - \beta(n-\alpha) + \beta\delta$ e $\overline{\xi} = (1-\beta)(n-\alpha) - \delta + \beta\delta$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha+\delta,\beta;\psi} f\,(x) &= \mathbb{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha-\delta);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^{n} \mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha-\delta);\psi} f(x) \\ &= {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\mu;\psi} \left[\mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)-\delta+\delta\beta;\psi} f\,(x) \right] \end{aligned}$$

onde $\mu = n - \beta(n-\alpha) + \beta\delta$. Então, finalmente obtemos

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\, {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\delta,\beta;\psi} f(x) = {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha+\delta,\beta;\psi} f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}}{\Gamma(2-\xi-k-n)} f_{\psi}^{[n-k]} \mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\delta);\psi} f(a)$$

com $\xi = \alpha + \beta[(\delta-\alpha) - (n+\alpha)]$, concluindo a prova. $\square$

Teorema 2.20. *Seja $f \in C^{1}(I,\mathbb{R})$, $\alpha \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Então, temos*

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\, \mathbb{I}_{a+}^{\delta;\psi} f(x) = \mathbb{I}_{a+}^{\widetilde{\gamma}-\delta;\psi} f(x), \tag{2.12}$$

com $\alpha \geqslant \delta \geqslant 0$ e $\widetilde{\gamma} = \alpha + 2\beta(1-\alpha)$.

Demonstração. De fato, lembre-se que

$${}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\, \mathbb{I}_{a+}^{\delta;\psi} f(x) = \mathbb{I}_{a+}^{\alpha-\delta;\psi} f(x),$$

onde $\alpha \geqslant \delta \geqslant 0$. Usando a relação

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathbb{I}_{a+}^{\alpha-\delta;\psi}\; {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x),$$

com $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\, \mathbb{I}_{a+}^{\delta;\psi} f(x) &= \mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\; {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\, \mathbb{I}_{a+}^{\delta;\psi} f(x) \\ &= \mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\, \mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\delta;\psi} f(x) \\ &= \mathbb{I}_{a+}^{2\gamma-\alpha-\delta;\psi} f(x) \\ &= \mathbb{I}_{a+}^{\widetilde{\gamma}-\delta;\psi} f(x), \end{aligned}$$

com $\widetilde{\gamma} = \alpha + 2\beta(1-\alpha)$. $\square$

3 Operador derivada pseudo-fracionário ψ-Hilfer e propriedades

Os operadores pseudo-fracionários, nessa década tem chamado muito atenção de grupos de pesquisadores. A priori, os primeiros trabalhos abordavam questões de desigualdades envolvendo integrais pseudo-fracionárias de vários tipos, a saber: Hermite–Hadamard, Chebyshev, Hadamard e Jensen, dentre outras. No entanto, perceberam que era possível extender os resultados de pseudo-análise para operadores de diferenciação de ordem não inteira. Então, nesse sentido, em 2018 Babakhani et al. [9] foi o primeiro a investigar uma classe de integrais e derivadas fracionárias com respeito a outra função. O presente trabalho, abordam propriedades interessantes que abriram novas oportunidades de pesquisa no cálculo fracionário. Então, é indiscutível a relevância e impacto que o cálculo fracionário, ao longo desses quase 347 anos de existência vem proporcionando a comunidade científica.

Neste Capítulo 3, faremos um estudo detalhado do ODPF ψ-Hilfer e apresentamos algumas de suas propriedades importantes e úteis do cálculo fracionário. Por outro lado, vamos atacar duas questões interessantes que é um dos pontos do critério de Ortigueira-Tenreiro, no contexto da função ψ, conhecido como, regra g-Leibniz tipos I e II. Nesse sentido, a transformada g-Laplace e a integração por partes, fecham o capítulo.

Definição 3.1. *Sejam $I := [a,b]$ um intervalo e um gerador $g : I \to [0,\infty]$ da pseudo-adição $\oplus$ e da pseudo-multiplicação $\odot$ uma função crescente. Além disso, seja $\psi \in C^n(I,\mathbb{R})$ uma função crescente e positiva em $(a,b]$, cuja derivada ψ' é contínua em (a,b) e $\psi'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. O ODPF ψ-Hilfer à esquerda de ordem $n-1 < \alpha < n$ e tipo $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ de uma função mensurável $f : I \to I$ é definida por*

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) &= g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} g(f(t))\right) \\ &= \mathbb{I}^{\beta(n-\alpha);\psi}_{\oplus,\ominus,a+}\, g^{-1}\left(\left(\frac{d}{\psi'(x)}\right)^n\right) \odot \mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde ${}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(\cdot)$ é definida como na Eq.(2.3).

O ODPF ψ-Hilfer à direita é definida de maneira análoga.

Para simplificar as expressões e a prova de alguns resultados, introduzimos as seguintes notações

$$f^{[n]}_{\psi+} f(x) := \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f(x)$$

e

$$f^{[n]}_{\psi-} f(x) := \left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f(x).$$

Com essas notações, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) &= \mathbb{I}^{\gamma-\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}\ {}^{H}\mathbb{D}^{\gamma;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f(x)\\
&= g^{-1}\left(I^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+}g\left({}^{H}\mathbb{D}^{\gamma;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f(x)\right)\right)\\
&= g^{-1}\left(I^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+}g\left(g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\gamma;\psi}_{a+}g(f(x))\right)\right)\right)\\
&= g^{-1}\left(I^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+}\ {}^{H}\mathbb{D}^{\gamma;\psi}_{a+}f(x)\right),
\end{aligned}$$

onde $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$.

Discutimos aqui apenas três casos particulares de operadores de diferenciação pseudo-fracionários. Outros casos podem ser obtidos a partir de escolhas apropriadas da função $\psi(\cdot)$ e dos limites $\beta\to 0$ e $\beta\to 1$.

Tomando o limite $\beta\to 1$ em ambos os lados da Eq.(3.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\alpha,1;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) &= g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,1;\psi}_{a+}g(f(t))\right)\\
&= \mathbb{I}^{n-\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}g^{-1}\left(\left(\frac{d}{\psi'(x)}\right)^{n}\right)\odot f(t)\\
&\equiv {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)
\end{aligned}\tag{3.2}$$

que é exatamente o ODPF ψ-Caputo dado pela Eq.(2.7).

Por outro lado, tomando o limite $\beta\to 0$ em ambos os lados da Eq.(3.1), obtemos:

$$\mathbb{H}^{\alpha,0;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)=\left(\left(\frac{d}{\psi'(x)}\right)^{n}\right)\odot\mathbb{I}^{n-\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f(x)={}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\tag{3.3}$$

que é exatamente o ODPF ψ-Riemann-Liouville, dado pela Eq.(2.6).

Tomando $\psi(x)=x$ na Eq.(3.1), obtemos o ODPF de Hilfer, dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\alpha,\beta}_{\oplus,\odot,a+}f(x) &= g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a+}g(f(x))\right)\\
&= \mathbb{I}^{\beta(n-\alpha)}_{\oplus,\ominus,a+}g^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n}\odot\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{\oplus,\ominus,a+}f(x).
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Observação 3.2.

1. O ODPF ψ-Hilfer é global.

2. Observe que apresentamos apenas três casos particulares para o ODPF ψ-Hilfer. No entanto, é possível obter uma ampla classe de outros operadores diferenciais pseudo-fracionários usando diferentes funções $\psi(\cdot)$ e escolhendo os limites $\beta\to 1$ ou $\beta\to 0$. Para isso, é suficiente notar que o ODPF ψ-Hilfer é definido por meio da derivada fracionária ψ-Hilfer, como na Eq.(13), uma vez que já se conhece seus inúmeros casos particulares.

Embora os resultados investigados aqui sejam válidos para o intervalo I, eles podem ser discutidos em qualquer intervalo $[c,d]$ [26].

Portanto, chegamos ao primeiro resultado do ODPF ψ-Hilfer, dado pelo seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Seja $f : I \mapsto I$ uma função mensurável. Se $n \in \mathbb{N}$, então temos*

1. $\mathbb{H}^{0,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = f(x)$;
2. $\mathbb{H}^{1,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = g^{-1}\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\psi'(x)}\right) g(f(x))\right)$;
3. $\mathbb{H}^{n,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\psi'(x)}\right)^{(n)\oplus} \dfrac{f(x)}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{d}{\psi'(x)}\right)^{(n)\oplus} f(x)$.

Demonstração. **Item 1.** Introduzimos o operador $g^{-1}g = gg^{-1} = I$ (Aqui, I é o operador de identidade). Usando ${}^H\mathbb{D}^{0,\beta;\psi}_{a+} f(x) = f(x)$ e **Definição 2.6**, para $\alpha = 0$, temos

$$\mathbb{H}^{0,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{0,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right) \Rightarrow \mathbb{H}^{0,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = g^{-1}(g(f(x))),$$

que implica em

$${}^H\mathbb{D}^{0,\beta;\psi}_{a+} g(f(x)) = g(f(x)) \Rightarrow \mathbb{H}^{0,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = f(x),$$

pois, $g^{-1}g = I$. Sendo assim, concluímos a prova do item 1.

Item 2. Usando ${}^H\mathbb{D}^{1,\beta;\psi}_{a+} f(x) = \dfrac{f^{(1)}(x)}{\psi'(x)}$ e a **Definição 2.6**, para $\alpha = 1$, temos

$$\mathbb{H}^{1,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{1,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right) \cdot \Rightarrow \mathbb{H}^{1,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = g^{-1}\left(\frac{g(f)^{(1)}(x)}{\psi'(x)}\right),$$

pois ${}^H\mathbb{D}^{1,\beta;\psi}_{a+} f(x) = \dfrac{f^{(1)}(x)}{\psi'(x)}$, que implica em $\mathbb{H}^{1,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = g^{-1}\left(\left(\dfrac{D}{\psi'(x)}\right) g(f(x))\right)$, que conclui a prova do item 2.

Item 3. Por definição, temos

$$\mathbb{H}^{n,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{n,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right).$$

Usando a relação ${}^H\mathbb{D}^{n,\beta;\psi}_{a+} f(x) = \left(\dfrac{1}{\psi'(x)}\dfrac{\mathrm{d}}{dx}\right)^n$, temos $\mathbb{H}^{n,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{n,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right)$. Agora, usando a seguinte relação da **Definição 2.6**: $\dfrac{\mathrm{d}^{(n)\oplus}}{\mathrm{d}x} f(x) = g^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} g(f(x))\right)$, obtemos $\mathbb{H}^{n,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+} f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\psi'(x)}\right)^{(n)\oplus} \dfrac{f(x)}{\mathrm{d}x}$. Concluímos a prova do Item 3. Portanto, a prova do teorema. □

Agora, vamos enfatizar a linearidade do ODPF ψ-Hilfer.

Teorema 3.4. *Sejam $\alpha > 0$ e f_1, f_2 duas funções mensuráveis em I. Então, para todo $\lambda \in I$, temos*

1. $\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(f_1(t)\oplus f_2(t)) = \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f_1(t)\oplus \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f_2(t)$;

2. $\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(\lambda\odot f_1(t)) = \lambda\odot \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f_1(t)$.

Demonstração. **Item 1.** De fato, temos

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(f_1(t)\oplus f_2(t)) \\
= \; & g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_1(t)\oplus f_2(t))\right) \\
= \; & g^{-1}\left[{}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g\left(g^{-1}\left(g(f_1(t))+g(f_2(t))\right)\right)\right] \\
= \; & g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_1(t))+g(f_2(t))\right) \\
= \; & g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_1(t))+{}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_2(t))\right) \\
= \; & g^{-1}\left[g\left(g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_1(t))\right)\right)+g\left(g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_2(t))\right)\right)\right] \\
& g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_1(t))\right)\oplus g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_2(t))\right) \\
= \; & \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f_1(t)\oplus \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}f_2(t).
\end{aligned}
$$

Item 2. Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(\lambda\odot f_1(t)) &= g^{-1}\left[{}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(\lambda\odot f_1(t))\right] \\
&= g^{-1}\left[{}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g\left(g^{-1}\left(g(\lambda)g(f_1\left(t\right))\right)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[{}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\left(g\left(\lambda\right)g\left(f_1\left(t\right)\right)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[g(\lambda)^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_1(t))\right] \\
&= g^{-1}\left[g(\lambda)g\left(g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_1(t))\right)\right)\right] \\
&= \lambda\odot g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f_1(t))\right) \\
&= \lambda\odot \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f_1\left(t\right)
\end{aligned}
$$

o que completa a prova. □

Exemplo 3.5. *Sejam $g(x)=x^{\widetilde{\beta}}$ com $\widetilde{\beta}\in\mathbb{R}$ e $f(x)=\psi(x)-\psi(a)$. Os pseudo-operadores correspondentes são $x\oplus y=\sqrt[\widetilde{\beta}]{x^{\widetilde{\beta}}+y^{\widetilde{\beta}}}$ e $x\odot y=xy$. Então, o ODPF ψ-Hilfer de f é dada por:*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) &= g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f(x))\right) \\
&= g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(\psi(x)-\psi(a))^{\widetilde{\beta}}\right) \\
&= g^{-1}\left(\frac{\Gamma(\widetilde{\beta}+1)}{\Gamma(\widetilde{\beta}+1-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{\widetilde{\beta}-\alpha}\right) \\
&= \sqrt[\widetilde{\beta}]{\frac{\Gamma(\widetilde{\beta}+1)}{\Gamma(\widetilde{\beta}+1-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{\widetilde{\beta}-\alpha}}
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

com $\psi(x) > \psi(a)$.

Agora vamos discutir a Eq.(3.5). *Primeiro, tome* $\psi(x) = x$. *Assim, segue que*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;x}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = \sqrt[\tilde{\beta}]{\frac{\Gamma(\widetilde{\beta}+1)}{\Gamma(\widetilde{\beta}+1-\alpha)}(x-a)^{\tilde{\beta}-\alpha}}, \qquad x > a. \tag{3.6}$$

Observe que o resultado é o mesmo independente da escolha de β, *ou seja, não muda se* $\beta \to 1$ *ou* $\beta \to 0$, *pois o segundo membro da* Eq.(3.6) *não depende de* β.

Escolhendo $\psi(x) = x^\rho$, *obtemos*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;x^\rho}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = \sqrt[\tilde{\beta}]{\frac{\Gamma(\widetilde{\beta}+1)}{\Gamma(\widetilde{\beta}+1-\alpha)}(x^\rho-a^\rho)^{\tilde{\beta}-\alpha}}, \qquad x > a.$$

Para $\psi(x) = \ln x$, *obtemos*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\ln x}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = \sqrt[\tilde{\beta}]{\frac{\Gamma(\widetilde{\beta}+1)}{\Gamma(\widetilde{\beta}+1-\alpha)}(\ln x-\ln a)^{\tilde{\beta}-\alpha}}, \qquad x > a > 0.$$

Por outro lado, fixando os parâmetros como $\widetilde{\beta} = 1 = \alpha$, *temos*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}(\psi(x)-\psi(a))^0 = 1.$$

Concluímos com dois casos particulares. Primeiro, para $\widetilde{\beta} = 1$, *obtemos*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{1-\alpha}.$$

Por outro lado, para $\widetilde{\beta} = 1/2$ *e* $\alpha = 1/2$, *obtemos*

$$\mathbb{H}^{1/2,\beta;x^\rho}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)}(\psi(x)-\psi(a))^{1/2-1/2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Observe que temos uma grande variedade de resultados decorrentes das escolhas dos parâmetros $\widetilde{\beta}$, α e da função $\psi(x)$. Aqui, restringimos aos casos mostrados acima.

Outro exemplo interessante é o caso da função Mittag–Leffler de um parâmetro, denotada como $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$, que apresentamos a seguir.

Exemplo 3.6. *Sejam* $g(x) = x$ *e* $f(x) = \mathbb{E}_\alpha\left(\lambda(\psi(x)-\psi(a))^\alpha\right)$ *com* $\alpha > 0$.

Os pseudo-operadores correspondentes são $x \oplus y = x + y$ *e* $x \odot y = xy$. *Então, o ODPF* ψ*-Hilfer de* f, *é dada por*

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) &= g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right) \\
&= g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} \left(\mathbb{E}_\alpha(\lambda(\psi(x)-\psi(a))^\alpha)\right)\right) \\
&= g^{-1}\left(\lambda\mathbb{E}_\alpha(\lambda(\psi(x)-\psi(a))^\alpha)\right) \\
&= \lambda\mathbb{E}_\alpha(\lambda(\psi(x)-\psi(a))^\alpha) \\
&= \lambda f(x).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.7. *Sejam $g(x) = (x+a)^\beta$ e $f(x) = (\psi(x) - \psi(a))^\alpha$ com $\alpha > 0$ e $\alpha > \beta$. Então, o ODPF ψ-Hilfer de f, é dada por*

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) &= g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right) \\
&= g^{-1}\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\left((\psi(x)-\psi(a))^\alpha + a)^\beta\right)\right) \\
&= g^{-1}\left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}((\psi(x)-\psi(a))^\alpha + a)^{\beta-\alpha}\right) \\
&= \sqrt[\beta]{\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}((\psi(x)-\psi(a)^\alpha + a))^{\beta-\alpha}} - a
\end{aligned}$$

com $\psi(x) > \psi(a)$ e $g^{-1}(x) = \sqrt[\beta]{x} - a$.

Teorema 3.8. *Seja g um gerador de uma pseudo-adição $\oplus$ no intervalo $[-\infty, +\infty]$. Então, para $\alpha > 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ e $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^{n,\oplus} f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{n-\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=0}^{n-1} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}((\psi(x)-\psi(a))^{k-n-\alpha})\right]$$

com $C_k = \dfrac{(g\circ f)^{[k]}_\psi(a)}{\Gamma(k-n-\alpha+1)}$.

Demonstração. De fato, usando o **Teorema 2.18**

$$ {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^n f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{n-\alpha;\psi}_{a+} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{k-n-\alpha}}{\Gamma(k-n+1-\alpha)} f^{[k]}_\psi(a),$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^{n,\oplus} f(x) \\
= \;& g^{-1}\left[{}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} g\left(\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^{n,\oplus} f(x)\right)\right] \\
= \;& g^{-1}\left[{}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} g\left(g^{-1}\left(\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^{n} g(f(x))\right)\right)\right] \\
= \;& g^{-1}\left[{}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^{n} g(f(x))\right] \\
= \;& g^{-1}\left[{}^{RL}\mathbb{D}^{n-\alpha,\beta;\psi}_{a+} g(f(x)) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{k-n-\alpha}}{\Gamma(k-n-\alpha+1)}(g\circ f)^{[k]}_\psi(a)\right] \\
= \;& g^{-1}\left[{}^{RL}\mathbb{D}^{n-\alpha,\beta;\psi}_{a+} g(f(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} C_k(\psi(x)-\psi(a))^{k-n-\alpha}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g^{-1}\left[g\left(g^{-1}\left({}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{n-\alpha,\beta;\psi}g(f(x))\right)\right)-\sum_{k=0}^{n-1}g\left(g^{-1}\left(C_k(\psi(x)-\psi(a))^{k-n-\alpha}\right)\right)\right]\\
&= g^{-1}\left[g\left(g^{-1}\left({}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{n-\alpha,\beta;\psi}g(f(x))\right)\right)\right]-\\
&\quad -g^{-1}\left[g\left(g^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}g\left(g^{-1}\left(C_k(\psi(x)-\psi(a))^{k-n-\alpha}\right)\right)\right)\right)\right]\\
&= g^{-1}\left[g\left(g^{-1}\left({}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{n-\alpha,\beta;\psi}g(f(x))\right)\right)\right]-\\
&\quad -g^{-1}\left[g^{-1}\left(C_0(\psi(x)-\psi(a))^{-n-\alpha}\right)\oplus\cdots\oplus g^{-1}\left(C_{n-1}(\psi(x)-\psi(a))^{-1-\alpha}\right)\right]\\
&= g^{-1}\left[{}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{n-\alpha,\beta;\psi}g(f(x))\right]\ominus\left[\bigoplus_{k=0}^{n-1}g^{-1}\left(C_k(\psi(x)-\psi(a))^{k-\alpha-n}\right)\right]\\
&= {}^{RL}\mathbb{D}_{\oplus,\odot,a+}^{n-\alpha;\psi}f(x)\ominus\left[\bigoplus_{k=0}^{n-1}g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{k-\alpha-n}\right)\right],
\end{aligned}
$$

que conclui a prova. □

Tomando $\psi(x)=x$ no **Teorema 3.8**, concluímos que o resultado também é válido para a DFH.

O próximo resultado, é uma relação entre os ODPF de Hilfer e Riemann-Liouville.

Teorema 3.9. *Seja g um gerador de uma pseudo-adição $\oplus$ no intervalo $[-\infty,+\infty]$. Então, para $\alpha>0$, $0\leqslant\beta\leqslant 1$ e $n\in\mathbb{N}$, obtemos*

$$
\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n,\oplus}f(x)={}^{RL}\mathbb{D}_{\oplus,\odot,a+}^{n-\alpha}f(x)\ominus\left[\bigoplus_{k=0}^{n-1}g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}((x-a)^{k-\alpha-n})\right].
$$

Demonstração. Tomando $\psi(x)=x$, segue que $\psi'(x)=1$ e $\psi(x)-\psi(a)=(x-a)$. Substituindo no **Teorema 3.8**, obtemos:

$$
\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n,\oplus}f(x)={}^{RL}\mathbb{D}_{\oplus,\odot,a+}^{n-\alpha}f(x)\ominus\left[\bigoplus_{k=0}^{n-1}g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}((x-a)^{k-\alpha-n})\right].
$$

□

Os próximos dois resultados, são consequência direta do **Teorema 3.8**. O primeiro caso a ser discutido, é quando $\beta=1$, e obtemos um resultado para a DFC. No segundo caso, tomando $\beta=0$, obtemos uma versão do teorema com a DFRL.

Teorema 3.10. *Seja g um gerador de uma pseudo-adição $\oplus$ no intervalo $[-\infty,+\infty]$. Então, para $\alpha>0$, $\beta=1$ e $n\in\mathbb{N}$, temos*

$$
{}^{C}\mathbb{D}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{(n),\oplus}f(x)={}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{n+\alpha}f(x).
$$

Demonstração. A prova, segue diretamente do **Teorema 3.8**. □

Teorema 3.11. *Seja g um gerador de uma pseudo-adição $\oplus$ no intervalo $[-\infty, +\infty]$. Então, para $\alpha > 0$, $\beta = 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{(n),\oplus} f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{n-\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=0}^{n-1} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}((x-a)^{k-\alpha-n})\right].$$

Demonstração. Usando o **Teorema 3.8**, obtemos

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n,\oplus} f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{n-\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=0}^{n-1} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}((\psi(x)-\psi(a))^{k-n-\alpha})\right].$$

Para $\beta = 0$, temos

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n,\oplus} f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{(n),\oplus} f(x).$$

Tomando $\psi(x) = x$, temos que $\psi'(x) = 1$ e $\psi(x) - \psi(a) = (x-a)$.

Então, para $\beta = 0$, $\psi(x) = x$ e, substituindo as igualdades acima no **Teorema 3.8**, obtemos

$$^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{(n),\oplus} f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{n-\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=0}^{n-1} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}((x-a)^{k-\alpha-n})\right],$$

que concluí a prova.

□

Corolário 3.12. *Considerando $C_k = 0$ no* **Teorema 3.8**, *temos*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{(n),\oplus} f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{n-\alpha,\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x).$$

Demonstração. Usando o **Teorema 3.8**, segue que

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n,\oplus} f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{n-\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=0}^{n-1} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}((\psi(x)-\psi(a))^{k-n-\alpha})\right].$$

Agora, tomando $C_k = 0$, obtemos

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n,\oplus} f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{n-\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x).$$

□

Como visto no **Teorema 3.8**, temos uma relação entre os ODPF ψ-Hilfer e ψ-Riemann-Liouville. O próximo resultado, é discutir uma versão de semi-grupo a menos de uma parcela conforme o teorema a seguir.

Teorema 3.13. *Sejam g como na* **Definição 2.6** *e $0 < n-1 < \alpha, \delta < n$. Então, vale a seguinte relação*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = \mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right] \quad (3.7)$$

com $\xi = \alpha + \beta[(\delta-\alpha)-(n+\alpha)]$.

Demonstração. Usando a relação (veja o **Teorema 2.19**)

$${}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\,{}^{H}\mathbb{D}^{\delta,\beta;\psi}_{a+} f(x) = {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{a+} f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}}{\Gamma(2-\xi-k-n)} f_{\psi}^{[n-k]}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\delta);\psi}_{a+} f(a)$$

e a **Definição 2.6**, podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) \\
= {} & g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\, g\left(\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x)\right)\right) \\
= {} & g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\, g\left(g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\delta,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right)\right)\right) = g^{-1}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\,{}^{H}\mathbb{D}^{\delta,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right] \\
= {} & g^{-1}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{a+} g(f(x)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}}{\Gamma(2-\xi-k-n)} f_{\psi}^{[n-k]}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\delta);\psi}_{a+} f(a)\right] \\
= {} & g^{-1}\left[g\left(g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right)\right)\right] - \\
& -g^{-1}\left[g\left(g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} g\left(g^{-1}\left(C_k(\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right)\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

onde

$$C_k := \frac{f_{\psi}^{[n-k]}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\delta);\psi}_{a+} f(a)}{\Gamma(2-\xi-k-n)}.$$

A última equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
& \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) \\
= {} & g^{-1}\left[g\left(g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right)\right) - \right. \\
& \left. -g\left(g^{-1}\left(C_1(\psi(x)-\psi(a))^{-\xi-n}\right) \oplus \cdots \oplus g^{-1}\left(C_n(\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-2n}\right)\right)\right] \\
= {} & g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{a+} g(f(x))\right) \ominus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}\left(C_k(\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right] \\
= {} & \mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right],
\end{aligned}$$

que conclui a prova. □

Teorema 3.14. *Sejam g como na* **Definição 2.6** *e $0 < n-1 < \alpha, \delta < n$. Tomando $\beta = 0$ na* Eq.(3.7)*, obtemos*

$${}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha,\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,{}^{RL}\mathbb{D}^{\delta,\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha+\delta,\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right],$$

com $\xi = \alpha$.

Demonstração. Usando o **Teorema 3.13**, temos

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right].$$

Tomando $\beta = 0$, obtemos

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha,\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,{}^{RL}\mathbb{D}^{\delta,\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)$$

e

$$\mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha+\delta,\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x).$$

Substituindo as igualdades acima no **Teorema 3.13**, obtemos o resultado desejado. □

Teorema 3.15. *Sejam g como na* **Definição 2.6** *e $0 < n-1 < \alpha, \delta < n$. Tomando $\beta = 1$ na* Eq.(3.7)*, obtemos*

$$^{C}\mathbb{D}^{\alpha,\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,{}^{C}\mathbb{D}^{\delta,\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha+\delta,\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\delta-k+\alpha}\right)\right],$$

com $\xi = \delta - n - \alpha$.

Demonstração. Do **Teorema 3.13**, temos

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right].$$

Tomando $\beta = 1$, segue que

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha,\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,{}^{C}\mathbb{D}^{\delta,\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)$$

e

$$\mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha+\delta,\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x).$$

Note que $\xi = \delta - n - \alpha \Rightarrow \delta = \xi + n + \alpha \Rightarrow -n + 1 - \xi - k \Rightarrow (\delta - n - \alpha) + 1 - k - n \Rightarrow -\xi - k + 1 - n = -\delta - k + 1 + \alpha$. Substituindo $-\xi - k + 1 - n$ por $-\delta - k + 1 + \alpha$, e usando as duas igualdades acima no **Teorema 3.13**, obtemos

$$^{C}\mathbb{D}^{\alpha,\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,{}^{C}\mathbb{D}^{\delta,\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha+\delta,\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\delta-k+\alpha}\right)\right],$$

que conclui a demonstração.

□

Corolário 3.16. *Considere dois ODPF ψ-Hilfer,* $\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}$ *e* $\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}$. *Então, temos*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)$$

se, e somente se, a seguinte condição for válida

$$C_k = f^{[n-k]}_{\psi}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\delta);\psi}_{a+}f(a) = 0$$

com $k = 1, \dots, n-1$.

Demonstração. $\Longrightarrow$) Vamos provar a primeira implicação. Suponhamos que

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x).$$

Por meio do **Teorema 3.13**, temos

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) - \mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \ominus\left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right].$$

Usando a hipótese, temos

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) - \mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = 0.$$

As duas últimas igualdades acima implicam que

$$\ominus\left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right] = 0.$$

Da **Definição 2.6**, como g é continuamente diferenciável no intervalo dado, e f é diferenciável no intervalo dado e tem a mesma monotonicidade que a função g, então $g^{-1}((\psi(x)-\psi(a)) \neq 0$. Então,

$$\ominus\left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right] = 0$$

implica que $C_k = 0$, para todo $k = 1, \dots, n$. Isso prova a primeira implicação.

$\Longleftarrow$) Suponhamos que $C_k = 0$, para todo $k = 1, \dots, n-1$, então temos

$$\ominus\left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{1-\xi-k-n}\right)\right] = 0.$$

Usando a igualdade acima no **Teorema 3.13**, obtemos

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha+\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)$$

que conclui a prova. □

Teorema 3.17. *Sejam $\alpha \geqslant 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ e $f \in C^1(I,\mathbb{R})$. Então, temos a seguinte relação*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\, \mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = f(x).$$

Demonstração. Usando a relação ${}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\, \mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+} f(x) = f(x)$ (veja o **Teorema 2.15**), a **Definição 3.1** e o operador identidade $g^{-1}g = gg^{-1} = I$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\, \mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f\,(x) &= g^{-1}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\, g\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\, g\left(g^{-1}\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+} f(x)\right)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+} f(x)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[g\left(f\,(x)\right)\right] \\
&= f\,(x)\,,
\end{aligned}$$

que conclui a prova. □

Teorema 3.18. *Sejam $\alpha, \delta \geqslant 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ e $f \in C^1(I,\mathbb{R})$. Então, temos*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\, \mathbb{I}^{\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = \mathbb{I}^{\widetilde{\gamma}-\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x), \tag{3.8}$$

com $\widetilde{\gamma} = \alpha + 2\beta(1-\alpha)$.

Demonstração. De fato, com as hipóteses acima, vale o seguinte resultado do **Teorema 2.20**

$${}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\, \mathbb{I}^{\delta;\psi}_{a+} f(x) = \mathbb{I}^{\widetilde{\gamma}-\delta;\psi}_{a+} f(x).$$

Agora, usando o **Teorema 2.20**, a **Definição 3.1** e o operador identidade $g^{-1}g = gg^{-1} = I$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\, \mathbb{I}^{\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) &= g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\, g\left(\mathbb{I}^{\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x)\right)\right) \\
&= g^{-1}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\, g\left(g^{-1}\left(\mathbb{I}^{\delta;\psi}_{a+} f(x)\right)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\, \mathbb{I}^{\delta;\psi}_{a+} g\left(f\,(x)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[\mathbb{I}^{\widetilde{\gamma}-\delta;\psi}_{a+} g\left(f\,(x)\right)\right] \\
&= \mathbb{I}^{\widetilde{\gamma}-\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f\,(x)
\end{aligned}$$

que completa a prova. □

Como antes, apresentamos como corolário um caso particular associado à DF ψ-Riemann-Liouville, obtida da Eq.(3.8) com $\beta = 0$.

Corolário 3.19. *Sejam $\alpha, \delta \geqslant 0$, e $f \in C^1(I,\mathbb{R})$. Tomando $\beta = 0$ na* Eq.(3.8) *obtemos*

$${}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\, \mathbb{I}^{\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x) = \mathbb{I}^{\alpha-\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x).$$

Demonstração. Tomando $\beta = 0$ no **Teorema 3.18**, temos

$$^{RL}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{I}^{\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{I}^{\widetilde{\gamma}-\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)$$

com $\widetilde{\gamma} = \alpha + 2\beta(1-\alpha)$. Note que $\widetilde{\gamma} = \alpha + 2\beta(1-\alpha)$ e $\beta = 0 \Longrightarrow \widetilde{\gamma} = \alpha$.

Assim, do **Teorema 3.18**, com $\widetilde{\gamma} = \alpha$ e $\beta = 0$, obtemos

$$^{RL}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{I}^{\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{I}^{\alpha-\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x),$$

o que conclui a prova. □

Teorema 3.20. *Sejam g como na* **Definição 2.6**, *$f \in C^n(I,\mathbb{R})$, $0 < n-1 < \alpha < n$, e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Então, temos*

$$\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right)\right], \tag{3.9}$$

onde $C_k = \dfrac{(g\circ f)^{[n-k]}_{\psi}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}g(f(a))}{\Gamma(\gamma-k+1)}$ *com* $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$.

Demonstração. Vamos começar com a seguinte relação [33]

$$\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+}\,{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}f^{[n-k]}_{\psi}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}f(a), \tag{3.10}$$

com $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$. Usando a Eq.(3.10) e o operador identidade $g^{-1}g = gg^{-1} = I$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\\
=\;& g^{-1}\left[\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+}g\left(\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\right)\right]\\
=\;& g^{-1}\left[\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+}g\left(g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x)\right)\right)\right]\\
=\;& g^{-1}\left[\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+}\,{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f(x))\right]\\
=\;& g^{-1}\left[g(f(x)) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}(g\circ f)^{[n-k]}_{\psi}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}g(f(a))\right]\\
=\;& g^{-1}\left[g(f(x)) - \sum_{k=1}^{n}C_k(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right]
\end{aligned}$$

onde

$$C_k = \frac{(g\circ f)^{[n-k]}_{\psi}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}g(f(a))}{\Gamma(\gamma-k+1)}.$$

Novamente pelo operador identidade $gg^{-1} = I$, segue que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\\
=\;& g^{-1}\left[g(f(x)) - g\left(g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} g\left(g^{-1}\left(C_k(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right)\right)\right)\right)\right]\\
=\;& g^{-1}\left[g(f(x)) - g\left(g^{-1}\left(C_0(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right)\oplus\cdots\oplus g^{-1}\left(C_n(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right)\right)\right]\\
=\;& f(x)\ominus\left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right)\right],
\end{aligned}$$

o que completa a prova. □

Corolário 3.21. *Se* $(g\circ f)^{[n-k]}_{\psi}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}g(f(a)) = 0$ *na* Eq.(3.9), *para* $k = 1,\ldots,n$, *então*

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = f(x) = \mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x).$$

Demonstração. De fato, como $C_k = \dfrac{(g\circ f)^{[n-k]}_{\psi}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}g(f(a))}{\Gamma(\gamma-k+1)}$ e pela hipótese $(g\circ f)^{[n-k]}_{\psi}\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}g(f(a)) = 0$, então $C_k = 0$. Substituindo C_k no **Teorema 3.20**, obtemos

$$\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = f(x).$$

A outra identidade é imediata. □

Teorema 3.22. *Sejam g o mesmo como na* **Definição 2.6**, $f\in C^n(I,\mathbb{R})$, $0 < n-1 < \alpha,\delta < n$, *e* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. *Então, temos*

$$\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\,\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{I}^{\alpha-\delta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\ominus\left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right)\right], \tag{3.11}$$

com $\alpha \geqslant \delta$ *e* $\gamma = \alpha+\beta(n-\alpha)$.

Demonstração. A prova é igual à prova do **Teorema 3.20**. □

Teorema 3.23. *Sejam* $f,h\in C^n(I,\mathbb{R})$, $\alpha > 0$ *e* $0\leqslant\beta\leqslant 1$. *Então,*

$$\mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\delta,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x)\oplus\left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right)\right]. \tag{3.12}$$

Demonstração. Começamos com a seguinte identidade (veja **Teorema 2.14**)

$${}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x) = {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}h(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}.$$

Note que podemos, escrever

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x) \Leftrightarrow g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f(x))\right) = g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(h(x))\right).$$

Aplicando g à esquerda em ambos os lados, temos $\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x)$ se, e somente se, $g\left(g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f(x))\right)\right) = g\left(g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(h(x))\right)\right)$. Nesse sentido, segue que

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x) \Leftrightarrow {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f(x)) = {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(h(x)).$$

Consequentemente,

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x) \Leftrightarrow {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f(x)) - {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(h(x)) = 0.$$

Usando o resultado do **Teorema 2.14**, temos

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x) \Leftrightarrow g(f(x)) = g(h(x)) + \sum_{k=1}^{n} C_k(\psi(x) - \psi(a))^{\gamma-k}.$$

Introduzindo o operador inverso g^{-1} e usando o fato $gg^{-1} = I$, obtemos as seguintes

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{-1}\left[g(h(x)) + \sum_{k=1}^{n} g\left(g^{-1}\left(C_k(\psi(x) - \psi(a))^{\gamma-k}\right)\right)\right];$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g^{-1}\left[g(h(x)) + g\left(g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} g\left(g^{-1}\left(C_k(\psi(x) - \psi(a))^{\gamma-k}\right)\right)\right)\right)\right]$$

e

$$\Leftrightarrow f(x) = $$
$$g^{-1}\left[g(h(x)) + g\left(g^{-1}\left(C_1(\psi(x) - \psi(a))^{\gamma-k} \oplus \cdots \oplus g^{-1}\left(C_n(\psi(x) - \psi(a))^{\gamma-k}\right)\right)\right)\right].$$

Por fim, concluímos que

$$\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x) \oplus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}(\psi(x) - \psi(a))^{\gamma-k}\right].$$

□

Corolário 3.24. *Sejam $f, h \in C^n(I, \mathbb{R})$, $\alpha > 0$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Tomando $\psi(x) = x$ em* Eq.(3.12)*, temos*

$$\mathbb{H}^{\delta,\beta}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = \mathbb{H}^{\delta,\beta}_{\oplus,\odot,a+}h(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x) \oplus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}\left((x-a)^{\gamma-k}\right)\right].$$

Demonstração. Se $\psi(x) = x$, temos que $\psi(x) - \psi(a) = x - a$. Substituindo $(\psi(x) - \psi(a))$ por $(x - a)$ no **Teorema 3.23**, obtemos o resultado desejado. □

Teorema 3.25. *Sejam $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Se $f \in C^{m+n}(a, b)$, com $m, n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\right)^k \left(\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\right)^m f(x) = g^{-1}(C_k) \odot g^{-1}\left((\psi(x) - \psi(a))^{k\alpha}\right)$$

com

$$C_k = \frac{{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(g \circ f)(c)}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

onde c é uma constante.

Demonstração. Por definição, temos

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\right)^k \left(\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\right)^m f(x) &= g^{-1}\left[\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+}\right)^k g\left(\left(\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\right)^m f(x)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+}\right)^k g\left(g^{-1}\left(\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\right)^m g(f(x))\right)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+}\right)^k \left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\right)^m g(f(x))\right].
\end{aligned}$$

Agora, usando a relação [33]

$$\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{a+}\right)^k \left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\right)^m f(x) = \frac{\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\right)^m f\left(c\right)\left(\psi\left(x\right)-\psi\left(a\right)\right)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)},$$

obtemos

$$\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\right)^k \left(\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\right)^m f(x) = \frac{\left({}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\right)^m f\left(c\right)\left(\psi\left(x\right)-\psi\left(a\right)\right)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}.$$

Introduzindo a notação

$$C_k = \frac{{}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\left(g\circ f\right)\left(c\right)}{\Gamma\left(\alpha k+1\right)}.$$

Finalmente, obtemos

$$\left(\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\right)^k \left(\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\right)^m f(x) = g^{-1}(C_k)\odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{k\alpha}\right),$$

que completa a prova. □

A seguir vale a pena destacar fazer algumas observações:

Observação 3.26. *1. Vale ressaltar que todos os resultados investigados acima são válidos para seus respectivos casos particulares, a partir da particular escolha de $\psi(\cdot)$, a, b e dos limites $\beta\to 1$ e $\beta\to 0$.*

2. Para todos os casos particulares que envolvem a função $\ln(\cdot)$*, é importante lembrar que no intervalo de integração, o valor de $a>0$.*

3. Como visto, discutimos resultados apenas para o ODPF *ψ-Hilfer à esquerda. No entanto, todos os resultados acima, todos são válidos para o* ODPF *à direita.*

Embora os resultados apresentados até o momento tenham sido discutidos apenas para o lado esquerdo do ODPF *ψ-Hilfer, resultados análogos são validos para o caso do lado direito.*

Os próximos passos deste presente trabalho, é discutir três ferramentas de suma importância para atacar diversos problemas, a saber: regras g-Leibniz generalizada dos tipos I e II; transformada g-Laplace e integração por partes.

3.0.1 Regras g-Leibniz generalizada dos tipos I e II

Sabe-se que um dos pontos que compõem o critério de Ortigueira-Tenreiro [34], é a regra de Leibniz generalizada. Em 2019 Teodoro et al. [45], realizou um trabalho revisando os tipos de derivadas que até o certo momento, seriam consideradas fracionárias. Como destacado, é possível notar que muitas derivadas, consideradas fracionárias, não satisfazem exatamente a regra de Leibniz generalizada. Recentemente Zhang e Liu fizeram uma abordagem sobre a regra de Leibniz para a DFC de ordem variável e algumas abordagens sobre simetrias de Lie. O que se tem notado, que a partir do trabalho de Sousa e Oliveira [62], sobre as regras de Leibniz generalizada do tipo I e II, outros trabalhos vem sendo realizados nesse sentido [69, 70], de modo particular, o trabalho envolvendo os operadores pseudo-fracionários [54]. Então, nesta presente seção, vamos realizar um estudo das regras de Leibniz generalizada do tipo I e II associados ao ODPF ψ-Hilfer.

Para o tipo I, introduzimos a regra g-Leibniz generalizada correspondente através do teorema a seguir.

Teorema 3.27. *Sejam $0 < \alpha < 1$ e $I = [a,b]$ com $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Considere $\psi \in C(I,\mathbb{R})$ uma função crescente com $\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ e $f, h \in C(I,\mathbb{R})$ de modo que $f(x) \odot h(x) \in I$. Então, temos*

$$\begin{aligned} & \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}\left(f(x) \odot h(x)\right) \\ = & \bigoplus_{\ell=0}^{\infty}\bigoplus_{m=0}^{\infty}\left[g^{-1}\left(C_{\ell m}\right) \odot D^{m}_{\oplus} f(x) \odot {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{\oplus,\odot,a+} h(x)\right] \ominus \\ & \left[\bigoplus_{k=0}^{\infty}\left(g^{-1}(C_k) \odot \mathbb{I}^{\varepsilon+k;\psi}_{\oplus,\odot,a+} h(a) \odot g^{-1}(d_k) \odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

onde $\varepsilon = (1-\beta)(1-\alpha)$, $C_k = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ k \end{pmatrix}$, $C_{\ell m} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ m-\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha+\varepsilon \\ \ell \end{pmatrix}$ *e* $d_k = \dfrac{(h \circ f)^{[k]}(a)}{\Gamma(\beta(1+\alpha))}$.

Demonstração. Dado a relação [62]

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(fh)(x) \quad = & \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{pmatrix} -\varepsilon \\ m-\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha+\varepsilon \\ \ell \end{pmatrix} f^{(m)}(x)\, {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{a+} h(x) \\ & -\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} -\varepsilon \\ k \end{pmatrix}\mathbb{I}^{\varepsilon+k;\psi}_{a+} h(a) f^{(k)}(a)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}, \end{aligned}$$

podemos escrever

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}\left(f(x)\odot h(x)\right) \\
= \; & g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(f(x)\odot h(x))\right) \\
= \; & g^{-1}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\left(g(f(x))g(h(x))\right)\right] \\
= \; & g^{-1}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{m-\ell}\binom{\alpha+\varepsilon}{\ell}(g\circ f)^{(m)}(x)\,{}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{a+}(g\circ h)(x)\right. \\
= \; & \left.\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathbb{I}^{\varepsilon+k;\psi}_{a+}(g\circ h)(a)(g\circ f)^{(k)}(a)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right] \\
= \; & g^{-1}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{\ell m}(g\circ f)^{(m)}(x)\,{}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{a+}(g\circ h)(x)\right. \\
& \left.-\sum_{k=0}^{\infty}C_{k}\mathbb{I}^{\varepsilon+k;\psi}_{a+}(g\circ h)(a)(g\circ f)^{(k)}(a)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right] \\
= \; & g^{-1}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}g\left(g^{-1}\left(C_{\ell m}(g\circ f)^{(m)}(x)\,{}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{a+}(g\circ h)(x)\right)\right)\right. \\
& \left.-\sum_{k=0}^{\infty}g\left(g^{-1}\left(C_{k}\mathbb{I}^{\varepsilon+k;\psi}_{a+}(g\circ h)(a)(g\circ f)^{(k)}(a)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right)\right)\right] \\
= \; & g^{-1}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}g\left(g^{-1}\left(C_{\ell m}(g\circ f)^{(m)}(x)\,{}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{a+}(g\circ h)(x)\right)\right)\right]\ominus \\
& g^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}g\left(g^{-1}\left(C_{k}\mathbb{I}^{\varepsilon+k;\psi}_{a+}(g\circ h)(a)(g\circ f)^{(k)}(a)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right)\right)\right].
\end{aligned}
$$

Então, temos:

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\left(f\left(x\right)\odot h\left(x\right)\right) \\
= \; & \bigoplus_{\ell=0}^{\infty}\bigoplus_{m=0}^{\infty}\underbrace{g^{-1}\left(C_{\ell m}(g\circ f)^{m}(x)\,{}^{\mathsf{RL}}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{a+}(g\circ h)(x)\right)}_{(I)} \\
& \ominus\left[\bigoplus_{k=0}^{\infty}\underbrace{g^{-1}\left(C_{k}\mathbb{I}^{\varepsilon+k;\psi}_{a+}(g\circ h)(a)(g\circ f)^{(k)}(a)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right)}_{(II)}\right].
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Agora vamos atacar (I) e (II), conforme dada na Eq.(3.13). Primeiro, consideremos a seguinte expressão (I). Então, temos:

$$
I = g^{-1}\left(C_{\ell m}(g\circ f)^{m}(x)\,{}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{a+}(g\circ h)(x)\right). \tag{3.14}
$$

Introduzindo o operador indentidade, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
I &= g^{-1}\left[g\left(g^{-1}(C_{\ell m})\right)\, g\left(g^{-1}((g\circ f)^{m}(x))\right)\, g\left(g^{-1}\left({}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi}(g\circ h)(x)\right)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[g\left(g^{-1}(C_{\ell m})\right)\, g(D_{\oplus}^{m} f(x))\, g\left({}^{RL}\mathbb{D}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha-m;\psi} h(x)\right)\right] \\
&= g^{-1}(C_{\ell m}) \odot D_{\oplus}^{m} f(x) \odot {}^{RL}\mathbb{D}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha-m;\psi} h(x). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para expressão (II), temos:

$$II = g^{-1}\left[C_k \mathbb{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}(g\circ h)(a)(g\circ f)^{(k)}(a)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right].$$

Como acima, introduzimos o operador identidade, e obtemos:

$$\begin{aligned}
II &= g^{-1}\left[g(g^{-1}(C_k))\, g\left(\mathbb{I}_{\oplus,\odot,a+}^{\varepsilon+k;\psi} h(a)\right)\, g(g^{-1}(d_k))\, g\left(g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}\right)\right)\right] \\
&= g^{-1}(C_k) \odot \mathbb{I}_{\oplus,\odot,a+}^{\varepsilon+k;\psi} h(a) \odot g^{-1}(d_k) \odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}\right). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Nesse sentido, substituindo as Eq.(3.15) e Eq.(3.16) na Eq.(3.13), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi}(f(x)\odot h(x)) \\
&= \bigoplus_{\ell=0}^{\infty}\bigoplus_{m=0}^{\infty}\left[g^{-1}(C_{\ell m}) \odot D_{\oplus}^{m} f(x) \odot {}^{RL}\mathbb{D}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha-m;\psi} h(x)\right] \ominus \\
&\quad \left[\bigoplus_{k=0}^{\infty}\left(g^{-1}(C_k) \odot \mathbb{I}_{\oplus,\odot,a+}^{\varepsilon+k;\psi} h(a) \odot g^{-1}(d_k) \odot g^{-1}\left((\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}\right)\right)\right],
\end{aligned}$$

com $C_k = \binom{-\varepsilon}{k}$, $C_{\ell m} = \binom{-\varepsilon}{m-\ell}\binom{\alpha+\varepsilon}{\ell}$ e $d_k = \dfrac{(h\circ f)^{[k]}(a)}{\Gamma(\beta(1+\alpha))}$, o que completa a prova. □

Finalmente, para regra de g-Leibniz generalizada tipo II, apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 3.28. *Sejam $0<\alpha<1$ e $I=[a,b]$ com $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. Considere $\psi\in C(I,\mathbb{R})$ uma função crescente com $\psi(x)\neq 0$, $\forall x\in I$ e $f,h\in C(I,\mathbb{R})$ de modo que $f(x)\odot h(x)\in I$. Então, temos*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H}_{\oplus,\ominus,a+}^{\alpha,\beta;\psi}(f(x)\odot h(x)) \\
&= \bigoplus_{m=0}^{\infty}\left[g^{-1}(C_m) \odot D_{\oplus}^{m} f(x) \odot \mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha-m;\psi} h(x)\right] \oplus \\
&\quad \bigoplus_{k=0}^{\infty}\left[g^{-1}(C_k) \odot \mathbb{I}_{\oplus,\odot,a+}^{\varepsilon-k;\psi} h(a) \odot \left(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a)\right) \odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right)\right],
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon=(1-\beta)(1-\alpha)$, $C_m=\binom{\alpha}{m}$ *e* $C_k=\binom{-\varepsilon}{k}$.

Demonstração. Usando a definição do ODPF ψ-Hilfer e a seguinte relação [62]

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fh)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}h(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathbb{I}_{a+}^{\varepsilon-k;\psi}h(a)(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon=(1-\beta)(1-\alpha)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} &\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi}(f(x)\odot h(x)) \\ =\;& g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}g(f(x)\odot h(x))\right) \\ =\;& g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}g(f(x))g(h(x)))\right) \\ =\;& \left[\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}(g\circ f)^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}(g\circ h)(x)\right. \\ &\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathbb{I}_{a+}^{\varepsilon-k;\psi}(g\circ h)(a)\left((g\circ f)^{(k)}(x)-(g\circ f)^{(k)}(a)\right)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right] \\ =\;& g^{-1}\left[\sum_{m=0}^{\infty}C_m(g\circ f)^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}(g\circ h)(x)\right. \\ &\left.+\sum_{k=0}^{\infty}C_k\mathbb{I}_{a+}^{\varepsilon-k;\psi}(g\circ h)(a)\left((g\circ f)^{(k)}(x)-(g\circ f)^{(k)}(a)\right)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Agora, usando $gg^{-1}=I$ na Eq.(3.17), obtemos:

$$\begin{aligned} &\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi}(f(x)\odot h(x)) \\ =\;& g^{-1}\left[\sum_{m=0}^{\infty}g\left(g^{-1}\left(C_m(g\circ f)^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}(g\circ h)(x)\right)\right)\right. \\ &+\sum_{k=0}^{\infty}g\left(g^{-1}\left(C_k\mathbb{I}_{a+}^{\varepsilon-k;\psi}(g\circ h)(a)\left((g\circ f)^{(k)}(x)\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left.\left.-(g\circ f)^{(k)}(a)\right)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g^{-1}\left[\sum_{m=0}^{\infty} g\left(g^{-1}\left(C_m (g\circ f)^{(m)}(x)\, {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}(g\circ h)(x)\right)\right)\right] \oplus \\
&\quad g^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} g\left(g^{-1}\left(C_k \mathbb{I}_{a+}^{\varepsilon-k;\psi}(g\circ h)(a)\left((g\circ f)^{(k)}(x) - \right.\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.\left.(g\circ f)^{(k)}(a)\right)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right)\right)\right] \\
&= \bigoplus_{m=0}^{\infty}\left[\underbrace{g^{-1}\left(C_m (g\circ f)^{(m)}(x)\, {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}(g\circ h)(x)\right)}_{(i)}\right] \oplus \\
&\quad \bigoplus_{k=0}^{\infty}\left[\underbrace{g^{-1}\left(C_k \mathbb{I}_{a+}^{\varepsilon-k;\psi}(g\circ h)(a)\left((g\circ f)^{(k)}(x) - (g\circ f)^{(k)}(a)\right)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right)}_{(ii)}\right].
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Vamos discutir as expressões (i) e (ii) destacadas na Eq.(3.18). Para (i), podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\text{(i)} &= g^{-1}\left(C_m (g\circ f)^{(m)}(x)\, {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}(g\circ h)(x)\right) \\
&= g^{-1}\left[g\left(g^{-1}(C_m)\right) g\left(g^{-1}\left((g\circ f)^{(m)}(x)\right)\right) g\left(g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}(g\circ h)(x)\right)\right)\right] \\
&= g^{-1}\left[g\left(g^{-1}(C_m)\right) g\left(D_{\oplus}^{m} f(x)\right) g\left(\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha-m,\beta;\psi} h(x)\right)\right] \\
&= g^{-1}(C_m)\odot D_{\oplus}^{m} f(x)\odot \mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha-m,\beta;\psi} h(x).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Por outro lado, para (ii), temos

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)} &= g^{-1}\left(C_k \mathbb{I}_{a+}^{\varepsilon-k;\psi}(g\circ h)(a)\left((g\circ f)^{(k)}(x) - (g\circ f)^{(k)}(a)\right)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right) \\
&= g^{-1}\left[g\left(g^{-1}(C_k)\right) g\left(\mathbb{I}_{\oplus,\odot,a+}^{\varepsilon-k;\psi} h(a)\right)\left((g\circ f)^{(k)}(x)\right) - (g\circ f)^{(k)}(a)\right. \\
&\quad \left. g\left(g^{-1}\left(\frac{\psi(x)-\psi(a)^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right)\right)\right] \\
&= g^{-1}(C_k)\odot \mathbb{I}_{\oplus,\odot,a+}^{\varepsilon-k;\psi} h(a)\odot\left(f^{(k)}(x) - f^{(k)}(a)\right)\odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right).
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Substituindo as Eq.(3.19) e Eq.(3.20) na Eq.(3.18), segue

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(f(x)\odot h(x)) \\
=& \bigoplus_{m=0}^{\infty}\left[g^{-1}(C_k)\odot D^m_{\oplus}f(x)\odot \mathbb{H}^{\alpha-m;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x)\right]\oplus \\
& \bigoplus_{k=0}^{\infty}\left[g^{-1}(C_k)\odot \mathbb{I}^{\varepsilon+k;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(a)\odot\left(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a)\right)\odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\right)\right]
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon=(1-\beta)(1-\alpha)$, $C_m=\binom{\alpha}{m}$ e $C_k=\binom{-\varepsilon}{k}$. Portanto, concluímos a prova.

□

A seguir, dois casos particulares da regra g-Leibniz generalizada tipo II para os ODPF ψ-Riemann-Liouville e ψ-Caputo.

Teorema 3.29. *Sejam $0<\alpha<1$ e $I=[a,b]$ com $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. Considere $\psi\in C(I,\mathbb{R})$ uma função crescente com $\psi(x)\neq 0$, $\forall x\in I$ e $f,h\in C(I,\mathbb{R})$, de modo que $f(x)\odot h(x)\in I$. Tomando $\beta=1$ no* **Teorema 3.28**, *obtemos a regra g-Leibniz generalizada para o ODPF ψ-Caputo, dada por*

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(f(x)\odot h(x)) &= \bigoplus_{m=0}^{\infty}\left[g^{-1}(C_m)\odot D^m_{\oplus}f(x)\odot {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x)\right]\oplus \\
&\quad \left[h(a)\odot(f(x)-f(a))\odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right)\right]
\end{aligned}$$

onde $C_m=\binom{\alpha}{m}$.

Demonstração. Para $\beta=1$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}(f(x)\odot h(x)) &= \mathbb{H}^{\alpha,1;\psi}_{\oplus,\odot,a+}(f(x)\odot h(x)) \\
&= {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(f(x)\odot h(x))
\end{aligned}$$

e $\varepsilon=(1-\beta)(1-\alpha)$, $\varepsilon=(1-1)(1-\alpha)=0$.

Como $\varepsilon=0$, então $C_k=1$, pois $C_k=\binom{-\varepsilon}{k}$. Logo temos a seguinte identidade

$$g^{-1}(C_k)\odot \mathbb{I}^{\varepsilon-k;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(a)=h(a).$$

Assim, tomando $\beta=1$ no **Teorema 3.28**, obtemos

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(f(x)\odot h(x)) &= \bigoplus_{m=0}^{\infty}\left[g^{-1}(C_m)\odot D^m_{\oplus}f(x)\odot {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{\oplus,\odot,a+}h(x)\right]\oplus \\
&\quad \left[h(a)\odot(f(x)-f(a))\odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right)\right].
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.30. *Seja $0 < \alpha < 1$ e $I = [a, b]$ com $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Considere $\psi \in C(I, \mathbb{R})$ uma função crescente tal que $\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ e $f, h \in C(I, \mathbb{R})$, tal que $f(x) \odot h(x) \in I$. Escolhendo $\beta = 0$ no* **Teorema 3.28**, *obtemos a regra g-Leibniz generalizada para o ODPF ψ-Riemann-Liouville, dada por*

$$^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(f(x) \odot h(x)) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \left[g^{-1}(C_m) \odot \mathrm{D}^m_{\oplus} f(x) \odot {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{\oplus,\odot,a+} h(x) \right]$$

onde $C_m = \binom{1-\alpha}{m}$.

Demonstração. Com $\beta = 0$, segue que $\dfrac{1}{\Gamma(\beta(1-\alpha))} = 0$. Assim,
$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \left[g^{-1}(C_k) \odot \mathbb{I}^{\varepsilon+k;\psi}_{\oplus,\odot,a+} h(a) \odot \left(f^{(k)}(x) - f^{(k)}(a) \right) \odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\varepsilon-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))} \right) \right] = 0.$$

Portanto, tomando $\beta = 0$ no **Teorema 3.28**, concluímos

$$^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\ominus,a+}(f(x) \odot h(x)) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \left[g^{-1}(C_m) \odot \mathrm{D}^m_{\oplus} f(x) \odot {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha-m;\psi}_{\oplus,\odot,a+} h(x) \right].$$

□

Aqui também vale a observação feita na seção anterior, sobre os possíveis casos particulares, a partir da escolha de ψ. A próxima etapa, é fazer uma abordagem da transformada g-Laplace.

3.0.2 Transformada g-Laplace

Na literatura, existem muitos métodos diferentes para resolver equações diferenciais fracionárias analiticamente ou numericamente, e desenvolver métodos adequados para encontrar soluções analíticas para equações diferenciais fracionárias é uma das tarefas mais desafiadoras no cálculo fracionário. Nos últimos anos, alguns pesquisadores têm-se interessado em introduzir e estudar extensões fracionárias das transformadas integrais clássicas, como as transformadas de Laplace e Fourier, dentre outras [10, 18, 23, 24, 68]. Em particular, a transformada de Laplace, juntamente com seus análogas e extensões, tem sido considerada uma ferramenta eficaz para obtenção de soluções analíticas para algumas classes de equações diferenciais fracionárias. Por outro lado, vale também destacar as transformadas de Laplace no contexto de pseudo-análise e cálculo fracionário [50, 54].

Nesta seção, vamos nos concentrar especificamente em uma transformada g-Laplace generalizada. Este operador funciona bem em conjunto com as integrais e derivadas fracionárias em relação às funções. Para essa seção, usamos como texto base, o trabalho de Sousa et al. [54].

Teorema 3.31. *Sejam g o mesmo que na* **Definição 2.6**, $0 < n-1 \leqslant \alpha < n$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ *e $s \in \mathbb{R}$. Então, a transformada g-Laplace do ODPF de Hilfer de ordem α é dada por*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\oplus}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\right] &= \left[g^{-1}(s^{\alpha})\odot\mathscr{L}^{\oplus}(f(x))\right]\\ &\ominus \left[\bigoplus_{k=0}^{n-1} g^{-1}\left(s^{n(1-\beta)+\alpha\beta-k-1}\right)\odot \mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha)-k}_{\oplus,\odot,a+}f(0)\right].\end{aligned} \tag{3.21}$$

Demonstração. Lembrando que a transformada de Laplace da DF de Hilfer é dada por [21]

$$\mathscr{L}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{0^+}f(x)\right] = s^{\alpha}\mathscr{L}[f(x)] - s^{\beta(\alpha-1}\left(\mathbb{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)}_{0^+}f\right)(0^+), \tag{3.22}$$

onde

$$\left(\mathbb{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)}_{0^+}f\right)(0^+) = \lim_{t\to 0^+}\left(\mathbb{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)}_{0^+}f\right)(x),$$

então, podemos escrever

$$\mathscr{L}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{0^+}f(x)\right] = s^{\alpha}\mathscr{L}[f(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n(1-\beta)+\alpha\beta-k-1}\left(\mathbb{I}^{(1-\beta)(n-\alpha)-k}_{0^+}f\right)(0).$$

Note que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\oplus}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\right] &= g^{-1}\left[\mathscr{L}\left(g\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{\oplus,\odot,0^+}f(x)\right)\right)\right]\\ &= g^{-1}\left[\mathscr{L}\left(g\left(g^{-1}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{\oplus,\odot,0^+}g(f(x))\right)\right)\right)\right]\\ &= g^{-1}\left[\mathscr{L}\left({}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{\oplus,\odot,0^+}g(f(x))\right)\right].\end{aligned} \tag{3.23}$$

Usando as Eq.(3.22) e Eq.(3.23), obtemos

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}^{\oplus}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\right]\\ =\ & g^{-1}\left[s^{\alpha}\mathscr{L}[g(f(x))] - \sum_{k=0}^{n-1}s^{n(1-\beta)+\alpha\beta-k-1}\left(I^{(1-\beta)(n-\alpha)-k}_{0^+}(g\circ f)\right)(0^+)\right]\\ =\ & g^{-1}\left[g\left(g^{-1}\left(s^{\alpha}\mathscr{L}[g(f(x))]\right)\right)\right.\\ & \left.-g\left(g^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}g\left(g^{-1}\left(s^{n(1-\beta)+\alpha\beta-k-1}\left(I^{(1-\beta)(n-\alpha)-k}_{0^+}(g\circ f)\right)(0^+)\right)\right)\right)\right)\right]\\ =\ & g^{-1}\left[g\left(g^{-1}\left(s^{\alpha}\mathscr{L}[g(f(x))]\right)\right)\right.\\ & \left.-g\left(g^{-1}\left(s^{n(1-\beta)+\alpha\beta-1}C_0\right)\oplus\cdots\oplus g^{-1}\left(s^{n(1-\beta)+\alpha\beta-n}C_{n-1}\right)\right)\right]\\ =\ & g^{-1}\left(s^{\alpha}\mathscr{L}[g(f(x))]\right)\ominus\left[\bigoplus_{k=0}^{n-1}g^{-1}\left(s^{n(1-\beta)+\alpha\beta-k-1}C_k\right)\right]\\ =\ & \left(g^{-1}(s^{\alpha})\odot g^{-1}\left(\mathscr{L}[g(f(x))]\right)\right)\ominus\\ & \left[\bigoplus_{k=0}^{n-1}g^{-1}\left(s^{n(1-\beta)+\alpha\beta-k-1}C_k\ I^{(1-\beta)(n-\alpha)-k}_{0^+}(g\circ f)(0)\right)\right]\\ =\ & \left(g^{-1}(s^{\alpha})\odot\mathscr{L}^{\oplus}[f(x)]\right)\ominus\left[\bigoplus_{k=0}^{n-1}g^{-1}\left(s^{n(1-\beta)+\alpha\beta-k-1}\right)\odot I^{(1-\beta)(n-\alpha)-k}_{\oplus,\odot;0+}f(0)\right].\end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova. $\square$

Teorema 3.32. *Sejam g o mesmo gerador como na* **Definição 2.6**, $0 < n-1 \leqslant \alpha < n$ *e* $s \in \mathbb{R}$. *Então, tomando* $\beta = 0$ *no* **Teorema 3.31**, *obtemos a transformada g-Laplace do ODPF de Riemann-Liouville de ordem α, dada por*

$$\mathscr{L}^{\oplus}\left[{}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\right] = \left[g^{-1}(s^{\alpha}) \odot \mathscr{L}^{\oplus}(f(x))\right] \ominus \left[\bigoplus_{k=0}^{n-1} g^{-1}\left(s^{n-k-1}\right) \odot \mathbb{I}^{n-\alpha-k}_{\oplus,\odot,a+}f(0)\right].$$

Demonstração. Para $\beta = 0$, temos

$$\mathscr{L}^{\oplus}\left[{}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\right] = \mathscr{L}^{\oplus}\left[{}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\right], \tag{3.24}$$

$n(1-\beta) + \alpha\beta - k - 1 = n - k - 1$ e $(1-\beta)(n-\alpha) - k = n - \alpha - k$.

Então, para $\beta = 0$, substituindo a Eq.(3.24) na Eq.(3.21) (veja **Teorema 3.31**), obtemos

$$\mathscr{L}^{\oplus}\left[{}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha}_{\oplus,\odot,a+}f(x)\right] = \left[g^{-1}(s^{\alpha}) \odot \mathscr{L}^{\oplus}(f(x))\right] \ominus \left[\bigoplus_{k=0}^{n-1} g^{-1}\left(s^{n-k-1}\right) \odot \mathbb{I}^{n-\alpha-k}_{\oplus,\odot,a+}f(0)\right]$$

o que conclui a prova. $\square$

Observação 3.33. *Note que transformada g-Laplace abordada é para os operadores de diferenciação pseudo-fracionários clássicos. Embora não abordamos a transformada g-Laplace para os ODPF com respeito a função ψ, recomendamos o seguinte trabalho para uma leitura* [50].

Para finalizar essa primeira etapa, fechamos com uma abordagem da g-integração por partes do ODPF ψ-Hilfer.

3.0.3 g-Integração por partes

É indiscutível a importância que a integração por partes tem nos cálculos clássico e fracionário, na análise matemática, dentre outras áreas [2, 27, 46, 50, 65]. O interesse da integração fracionária por partes pode ser ilustrado pelo fato de que, quando combinada com uma mudança preliminar de variável, ela nos permite transformar uma integral de Riemann-Stieltjes não absolutamente convergente de um par de funções contínuas que limitam a variação de potência p-th e q-th, respectivamente, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, em uma integral elementar de um produto de funções contínuas. Isso nos aproxima muito de ideias da teoria elementar de séries não absolutamente convergentes, como concebida por Abel, Dirichlet e outros [27].

Por outro lado, quando o assunto é existência e multiplicidade de soluções fracas para equações diferenciais fracionárias com p-Laplaciano, a integração por partes de derivadas fracionárias, é de grande relevância, uma vez que é de suma importância encontrar o funcional energia que será utilizado para minimizar a solução na variedade de Nehari [46, 47, 57]. Existem outras aplicações de grande importância. Nesse sentido, nesta seção vamos fazer um breve estudo sobre a g-integração por partes do ODPF ψ-Hilfer e apresentar alguns casos particulares.

Para isso, primeiramente considere o seguinte teorema:

Teorema 3.34. [65] *Suponha que* $0 < \alpha \leqslant 1$ *e* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. *Então*

$$\int_a^b \left({}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) \right) g(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, \psi'(t)\ {}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} \left(\frac{g(t)}{\psi'(t)} \right) dt \tag{3.25}$$

para quaisquer $f \in AC^1$ *e* $g \in C^1$ *satisfazendo a condição* $f(a) = f(b) = 0$.

Por meio do **Teorema 3.34**, discutimos a g-integração por partes para o ODPF ψ-Hilfer.

Teorema 3.35. *Sejam* f *uma função mensurável em* $[a,b]$ *e* g *um gerador de pseudo-adição* $\oplus$ *no intervalo* $[-\infty,\infty]$. *Para* $0 < \alpha \leqslant 1$ *e* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, *temos*

$$\begin{aligned} & \int_{[a,b]}^{\oplus} \left[\left(\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) \right) \odot h(x) \right] \odot dx \\ = \ & \int_{[a,b]}^{\oplus} \left[g^{-1}(\psi'(x)) \odot f(x) \odot \mathbb{H}_{\oplus,\odot,b-}^{\alpha,\beta;\psi} \left(h(x) \oslash g^{-1}(\psi'(x)) \right) \right] \odot dx. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Demonstração. De fato, usando a **Definição 3.1**, $g^{-1}g = I$ e o **Teorema 3.34**, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{[a,b]}^{\oplus} \left[\left(\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) \right) \odot h(x) \right] \odot dx \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b g \left(\left(\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) \right) \odot h(x) \right) dx \right] \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b g \left(g^{-1} \left\{ g \left(\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) \right) g(h(x)) \right\} \right) dx \right] \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b g \left(\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) \right) g(h(x))\, dx \right] \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b g \left(g^{-1} \;\left({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} g(f(x)) \right) \right) g(h(x))\, dx \right] \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b \left({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} g(f(x)) \right) g(h(x))\, dx \right] \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b g(f(x))\, \psi'(x) \;\; {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} \left(\frac{g(h(x))}{\psi'(x)} \right) dx \right] \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b g(f(x))\, \psi'(x) \;\; {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} \left(g \left(g^{-1} \left(\frac{g(h(x))}{\psi'(x)} \right) \right) \right) dx \right] \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b g(f(x))\, \psi'(x) \;\; g \left(g^{-1} \left({}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} \left(g \left(g^{-1} \left(\frac{g(h(x))}{\psi'(x)} \right) \right) \right) \right) \right) dx \right] \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b g \left\{ g^{-1}(g(f(x)))\, g^{-1}(\psi'(x)) \;\; g^{-1} \left(g \left(\mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi} \left(g^{-1} \left(\frac{g(h(x))}{\psi'(x)} \right) \right) \right) \right) \right\} dx \right] \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b g \left\{ f(x) \odot g^{-1}(\psi'(x)) \odot \mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi} \left(g^{-1} \left(\frac{g(h(x))}{\psi'(x)} \right) \right) \right\} dx \right] \\
= \;& g^{-1} \left[\int_a^b g \left\{ f(x) \odot g^{-1}(\psi'(x)) \odot \mathbb{H}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha,\beta;\psi} \left(h(x) \oslash g^{-1}(\psi'(x)) \right) \right\} dx \right] \\
= \;& \int_{[a,b]}^{\oplus} \left[g^{-1}(\psi'(x)) \odot f(x) \odot \mathbb{H}_{\oplus,\odot,b-}^{\alpha,\beta;\psi} \left(h(x) \oslash g^{-1}(\psi'(x)) \right) \right] \odot dx.
\end{aligned}
$$

□

A seguir alguns casos particulares do **Teorema 3.35**.

Teorema 3.36. (ODPF ψ-Caputo) *Sejam f uma função mensurável em $[a,b]$ e g um gerador de pseudo-adição $\oplus$ no intervalo $[-\infty,\infty]$. Para $0 < \alpha \leqslant 1$ e tomando o limite $\beta \to 1$ na* Eq.(3.26)*, temos*

$$
\begin{aligned}
&\int_{[a,b]}^{\oplus} \left[\left({}^{C}\mathbb{D}_{\oplus,\odot,a+}^{\alpha;\psi} f(x) \right) \odot h(x) \right] \odot dx \\
= \;& \int_{[a,b]}^{\oplus} \left[g^{-1}(\psi'(x)) \odot f(x) \odot \;\; {}^{C}\mathbb{D}_{\oplus,\odot,b-}^{\alpha;\psi} \left(h(x) \oslash g^{-1}(\psi'(x)) \right) \right] \odot dx.
\end{aligned}
$$

Teorema 3.37. (ODPF de Caputo) *Sejam f uma função mensurável em $[a,b]$ e g g um gerador de pseudo-adição $\oplus$ no intervalo $[-\infty,\infty]$. Se $0 < \alpha \leqslant 1$ e se tomarmos o limite*

$\beta \to 1$ *e escolhermos* $\psi(x) = x$ *na* Eq.(3.26), *obtemos*

$$\int_{[a,b]}^{\oplus} \left[\left({}^{C}\mathbb{D}^{\alpha}_{\oplus,\odot,a+} f(x)\right) \odot h(x)\right] \odot dx = \int_{[a,b]}^{\oplus} \left[f(x) \odot {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha}_{\oplus,\odot,b-} h(x)\right] \odot dx.$$

Teorema 3.38. (ODPF $\psi-$Riemann-Liouville) *Sejam f uma função mensurável em $[a,b]$ e g um gerador de pseudo-adição $\oplus$ no intervalo $[-\infty,\infty]$. Se $0<\alpha\leqslant 1$ e se tomarmos o limite $\beta\to 0$ na* Eq.(3.26), *temos*

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,b]}^{\oplus} \left[\left({}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+} f(x)\right) \odot h(x)\right] \odot dx \\
= &\int_{[a,b]}^{\oplus} \left[g^{-1}\left(\psi'(x)\right) \odot f(x) \odot {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,b-} \left(h(x) \oslash g^{-1}\left(\psi'(x)\right)\right)\right] \odot dx.
\end{aligned}$$

Teorema 3.39. (ODPF de Riemann-Liouville *Sejam f uma função mensurável em $[a,b]$ e g um gerador de pseudo-adição $\oplus$ no intervalo $[-\infty,\infty]$. Se $0<\alpha\leqslant 1$ se tomarmos o limite $\beta\to 0$ e ecolhermos $\psi(x)=x$ na* Eq.(3.26), *temos*

$$\int_{[a,b]}^{\oplus} \left[\left({}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha}_{\oplus,\odot,a+} f(x)\right) \odot h(x)\right] \odot dx = \int_{[a,b]}^{\oplus} \left[f(x) \odot {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha}_{\oplus,\odot,b-} h(x)\right] \odot dx.$$

Teorema 3.40. (ODPF de Hadamard) *Sejam f uma função mensurável em $[a,b]$ e g um gerador de pseudo-adição $\oplus$ no intervalo $[-\infty,\infty]$. Se $0<\alpha\leqslant 1$ se tomarmos o limite $\beta\to 0$ e escolhermos $\psi(x)=ln(x)$ $(x>0)$ na* Eq.(3.26), *temos*

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,b]}^{\oplus} \left[\left({}^{HD}\mathbb{D}^{\alpha}_{\oplus,\odot,a+} f(x)\right) \odot h(x)\right] \odot dx \\
= &\int_{[a,b]}^{\oplus} \left[g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \odot f(x) \odot {}^{HD}\mathbb{D}^{\alpha}_{\oplus,\odot,b-} \left(h(x) \oslash g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \odot dx.
\end{aligned}$$

Finalizamos o Capítulo 3, com o estudo do ODPF ψ-Hilfer e abordamos algumas propriedades importantes, de modo especial: a regra g-Leibniz generalizada dos tipos I e II, a transformada g-Laplace e a integração por partes do ODPF ψ-Hilfer. Existem outras inúmeras propriedades que são possíveis de ser investigadas a partir dessa teoria de g-cálculo fracionário, no entanto, restringimos as apresentadas aqui. Por exemplo, veja o trabalho de Sousa et al. [50, 59], para outras possíveis propriedades.

4 Existência e Unicidade de soluções de uma equação pseudo-fracionária ψ-Hilfer

Como abordado no Capítulo 1, a importância das equações diferenciais fracionárias em diversos aspectos, em particular, quando envolvem fenômenos físicos, de fato tem chamado a atenção nesses últimos anos e ganhado cada vez mais destaque na comunidade científica. No entanto, problemas de equações diferenciais pseudo-fracionários, é mais recente ainda, o que torna mais atritivo a área. Embora seja uma área em crescimento com poucas ferramentas para se trabalhar, não implica que é tarefa fácil e muito menos simples obter resultados, uma vez que envolve funções que precisam de certos cuidados, de modo especial, as funções g e ψ. Neste Capítulo 4, vamos apresentar um estudo sobre a existência e unicidade de soluções de uma classe de equações pseudo-fracionária ψ-Hilfer via teoria do ponto fixo de Banach, o teorema de Arzelà-Ascoli e teorema do ponto fixo de Schauder.

Na teoria de equações diferenciais de modo geral, quando um dos objetivos é discutir a existência e unicidade de solução, ao invés de atacar o problema direto, uma maneira especial, é mostrar que o problema é equivalente a uma equação integro diferencial, e discutir os objetivos através da mesma. Outra maneira, é utilizar aproximações sucessivas. No caso envolvendo operadores fracionários, de forma que obtem-se uma relação envolvendo a função de Mittag-Leffler. Nesse sentido, antes de iniciar a discussão dos principais resultados deste capítulo, é de suma importância a abordagem do seguinte lema:

Lema 1. *Para $0 < \alpha \leqslant 1$, a solução do problema (1.1) é dada por:*

$$\begin{aligned} x(t) = \quad & x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t) - \psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)\right) \odot \\ & \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot ds \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \\ & \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Demonstração. Aplicando à esquerda o operador $\mathbb{I}^{1-\gamma;\psi}_{\oplus,\odot,t_0+}(\cdot)$ em ambos os lados do problema (1.1) e usando a seguinte propriedade

$$\mathbb{I}^{\alpha;\psi}_{\oplus,\odot,a+}\mathbb{H}^{\alpha,\beta;\psi}_{\oplus,\odot,a+}f(x) = f(x) \ominus \left[\bigoplus_{k=1}^{n} g^{-1}\left(C_k\right) \odot g^{-1}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right]$$

com $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$ e $C_k = \dfrac{(g \circ f)^{[n-k]}\mathbb{I}^{1-\gamma;\psi}_{\oplus,\odot,t_0+}g(f(a))}{\Gamma(\gamma-k+1)}$, e $n = 1$, obtemos

$$x(t) \ominus \left[g^{-1}\left(C_1\right) \odot g^{-1}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}\right] = \mathbb{I}^{1-\gamma;\psi}_{\oplus,\odot,t_0+}(\mathbf{A}x(t) \oplus f(t,x(t))),$$

o que implica $x(t) = g^{-1}\left(C_1\right) \odot g^{-1}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k} \oplus \mathbb{I}^{1-\gamma;\psi}_{\oplus,\odot,t_0+}(\mathbf{A}x(t) \oplus f(t,x(t)))$.

Usando a definição do OIPF ψ-Riemann-Liouville, obtemos

$$\begin{aligned} x(t) \;&=\; g^{-1}\left(C_1\right) \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-k} \\ &\oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \odot \left(\mathbf{A}x(s) \oplus f(s,x(s))\right) \odot ds \end{aligned} \tag{4.2}$$

com $C_1 = \dfrac{I^{1-\gamma;\psi}_{t_0+} g(x(t))}{\Gamma(\gamma)}$.

Substituindo C_1 na equação anterior e aplicando o operador da identidade $I = g^{-1}g$, obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) \;&=\; \frac{\mathbb{I}^{1-\gamma;\psi}_{\oplus,\odot,t_0+} x\left(t_0\right)}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-k} \\ &\oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \odot \left(\mathbf{A}x(s) \oplus f(s,x(s))\right) \odot ds. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Agora, através de aproximações sucessivas, vamos obter uma expressão para a equação anterior. Consideremos

$$x_0(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}$$

e

$$\begin{aligned} x_m(t) =& \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \\ &\oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \odot \left(\mathbf{A}x_{m-1}(s) \oplus f(s,x(s))\right) \odot ds. \end{aligned}$$

Para $m = 1$, temos

$$\begin{aligned} x_1(t) =& \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \\ &\oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \odot \left(\mathbf{A}x_0(s) \oplus f(s,x(s))\right) \odot ds. \end{aligned}$$

Substituindo $x_0(t)$ por $\dfrac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}$ e aplicando a definição do OIPF

ψ-Riemann-Liouville na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
x_1(t) =& x_0(t) \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \odot (\mathbf{A}x_0(s) \oplus f(s,x(s))) \odot ds \\
=& \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \\
& \odot \left(\mathbf{A}\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(s)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \oplus f(s,x(s))\right) \odot ds \\
=& \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \oplus \\
& \mathbf{A}\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \odot g^{-1}\left(\psi(s)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \odot ds \\
& \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds \\
=& \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \oplus \mathbf{A}\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot \mathbb{I}_{\oplus,\odot,t_0+}^{\alpha;\psi}\left(g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\right) \\
& \oplus \mathbb{I}_{\oplus,\odot,t_0+}^{\alpha;\psi} f(t,x(t)).
\end{aligned}$$

Para $m=2$, segue que

$$\begin{aligned}
x_2(t) =& \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \\
& \odot (\mathbf{A}x_1(s) \oplus f(s,x(s))) \odot ds.
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão de $x_1(t)$ obtida anteriormente, e aplicando a definição da OIPF ψ-Riemann-Liouville na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
& x_2(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \\
& \odot (\mathbf{A}x_1(s) \oplus f(s,x(s))) \odot ds \\
& = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \\
& \odot \mathbf{A}\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot g^{-1}\left(\psi(s)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1} \odot ds \\
& \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \odot \mathbf{A}^2\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} \odot \mathbb{I}_{\oplus,\odot,t_0+}^{\alpha;\psi} g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1}\right) \odot ds \\
& \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \odot \mathbf{A} \odot \mathbb{I}_{\oplus,\odot,t_0+}^{\alpha;\psi} \odot f(s,x(s)) \odot ds \\
& \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds \\
& = x_0 \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} \sum_{k=0}^{2} \mathbf{A}^k \odot g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}\right) \frac{g^{-1}\left((\psi(s)-\psi\left(t_0\right))^{\gamma-1}\right)}{\Gamma(\gamma)} \odot ds \\
& \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} \sum_{k=1}^{2} \mathbf{A}^k \odot g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds.
\end{aligned}$$

Continuando esse processo, obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
& x_m(t) \\
= \;& x_0 \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} \sum_{k=0}^{m} \mathbf{A}^k \odot g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}\right) \frac{g^{-1}\left((\psi(s)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right)}{\Gamma(\gamma)} \odot ds \\
\oplus \;& \int_{[t_0,t]}^{\oplus} \sum_{k=0}^{m} \mathbf{A}^k \odot g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os lados como $m \to \infty$ na Eq.(4.4), e usando a definição da função de Mittag-Leffler, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \lim_{m\to\infty} x_m(t) \\
= \;& x_0 \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \odot g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k+\gamma)}\right) g^{-1}\left((\psi(s)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \\
\odot \;& ds \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \odot g^{-1}\left(\frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds \\
= \;& x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot ds \\
\oplus \;& \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned}
x(t) = \;& x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \\
& \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot ds \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \\
& \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds.
\end{aligned}$$

□

O resultado a seguir, tem como objetivo mostrar que a solução dada pelo Lema 1 (veja Eq.(4.1)) escrita através de um operador F, é uma contração e, consequentemente por meio do teorema de ponto fixo de Banach, o problema (1.1), detém de uma única solução.

Demonstração. (**Teorema 1**) Para a prova do resultado, vamos considerar

$$X = \left\{x, x \in \mathbb{C}, \mathbb{H}^{\alpha,\beta,\psi}_{\oplus,\odot,t_0^+} x \in \mathbb{C}\right\}$$

sendo um espaço de Banach dotado da norma

$$\|x\|_{X,g} = \|x\|_g.$$

Sabemos que, para $0 < \alpha \leqslant 1$, a solução do problema (1.1), é dada por:

$$
\begin{aligned}
x(t) = \quad & x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \\
& \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot ds \\
& \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \\
& \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds.
\end{aligned}
$$

Agora, considere o operador $F : X \to X$ dado por:

$$
\begin{aligned}
& Fx(t) = \\
& x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot ds \\
\oplus \; & \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds.
\end{aligned}
$$

A prova do teorema será realizada em dois passos.

No primeiro passo, vamos provar que: $F(B_r) \subset B_r$, isto é, mostraremos que $F(x) \in B_r$, onde B_r é a bola fechada de raio $r > 0$ em X, ou seja, $\|f(t,0)\|_g$ e

$$
\|\mathbb{E}_{\alpha,i}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi(t)-\psi(t_0)\right)^{\alpha}\right)\|_g \leqslant_g M, \quad i = \alpha, \gamma
$$

e

$$
r > \max 2\left\{\|x_0\|_g \odot g^{-1}\left((\psi(T)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot M \oplus M \odot L \odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(t)-\psi(t_0))^{\alpha}}{\alpha}\right)\right\}.
$$

No segundo passo, mostraremos que F é uma contração em X.

Passo 1. Para $x \in B_r$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
& \|Fx(t)\| = \\
& \|x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot ds \\
\oplus \; & \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds\|.
\end{aligned}
$$

Usando a definição de g-norma, segue que:

$$
\begin{aligned}
\|Fx(t)\| \leqslant & \|x_0\| \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \\
& \|\mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right)\| \odot ds \\
& \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \\
& \odot \|\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right)\| \odot \|f(s,x(s))\| \odot ds.
\end{aligned}
$$

Sabemos que a função ψ é monotona crescente e positiva e que $\psi' \neq 0$, e a função g também é crescente. Como a função de Mittag-Leffler $\mathbb{E}_{\alpha,\gamma}(z)$ converge para todo argumento de z, obtemos:

$$\|Fx(t)\| \leqslant \|x_0\| \odot g^{-1}\left((\psi(T)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot M \oplus M \odot L \odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(t)-\psi(t_0))^{\alpha}}{\alpha}\right).$$

Tomando

$$r > \max 2\left\{\|x_0\|_g \odot g^{-1}\left((\psi(T)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot M \oplus M \odot L \odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(t)-\psi(t_0))^{\alpha}}{\alpha}\right)\right\},$$

temos que $\|Fx(t)\| \leqslant r$, $t \in J$, ou seja, $\|Fx\|_g \leqslant r$. Assim, provamos que $Fx \in B_r$, para todo $x \in B_r$.

Passo 2. Vamos mostrar que F é uma contração em X.

Para todo $x, y \in X$ e para todo $t \in J$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\|(Fx)(t) \ominus (Fy)(t)\|_g \\
= \;& \| \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot \\
& f(s,x(s)) \odot ds \ominus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \\
& \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot f(s,y(s)) \odot ds \ominus \|_g.
\end{aligned}$$

Usando a definição de g-norma, segue que

$$\begin{aligned}
&\|(Fx)(t) \ominus (Fy)(t)\|_g \\
\leqslant \;& \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \|\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right)\|_g \odot \\
& \|f(s,x(s)) \ominus f(s,y(s))\|_g \odot ds.
\end{aligned}$$

Nesse sentido, temos

$$\begin{aligned}
\int_{[t_0,t]}^{\oplus} \left(g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right)\right) \odot ds &= g^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} \left(\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right)\right) \odot ds\right) \\
&= g^{-1}\left(\frac{(\psi(t)-\psi(t_0))^{\alpha}}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Agora, como f é Lipschitz e $\|\mathbb{E}_{\alpha,i}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi(t)-\psi(t_0)\right)^{\alpha}\right)\|_g \leqslant_g M, \quad i = \alpha$, obtemos:

$$\|(Fx)(t) \ominus (Fy)(t)\|_g \leqslant M \odot L \odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(t)-\psi(t_0))^{\alpha}}{\alpha}\right) \odot ||x \ominus y||.$$

Por hipótese $M \odot L \odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(t)-\psi(t_0))^{\alpha}}{\alpha}\right) < 1$, então concluímos que F é uma contração. Assim, da prova dos **Passos 1 e 2** e do teorema do ponto fixo de Banach, obtemos o resultado desejado. $\square$

Para finalizar o presente capítulo, vamos utilizar o teorema do ponto fixo de Schauder e Teorema da Convergência Dominada, e discutir o seguinte resultado:

Demonstração. (**Teorema 2**) Usaremos o teorema de ponto fixo de Schauder para provar que F definido por

$$\begin{aligned} Fx(t) &= x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \\ & \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}) \odot ds \oplus \\ & \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \\ & \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}) \odot f(s,x(s)) \odot ds \end{aligned}$$

tem um ponto fixo.

A prova será feita em 3 passos. No primeiro passo, vamos mostrar que F é contínua. No segundo momento, vamos mostrar que $F : X \to X$ é limitada, e no terceiro passo, mostraremos que $F : X \to X$ é definida em um conjunto equicontínua.

Passo 1. Vamos mostrar que $F : X \to X$ é contínua.

Seja x_n uma sequência em $\mathbb{R}^n$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ em X. Então, temos

$$\begin{aligned} & \left\|(Fx_n)(t) \ominus (Fx)(t)\right\|_g \\ = & \; ||x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}) \odot ds \\ & \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}) \odot f(s,x_n(s)) \odot ds \\ & \ominus x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}) \odot ds \\ & \oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}) \odot f(s,x(s)) \odot ds||. \end{aligned}$$

Usando as propriedades da norma, e o fato de que

$$\left\|\mathbb{E}_{\alpha,i}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(t_0))^{\alpha})\right\|_g \leqslant_g M, \quad i=\alpha,\gamma$$

segue que

$$\begin{aligned} & \left\|(Fx_n)(t) \ominus (Fx)(t)\right\|_g \\ & \underset{g}{\leqslant} \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \left\|\mathbb{E}_{\alpha,\gamma}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha})\right\|_g \\ & \odot \left\|f(s,x_n(s)) \ominus f(s,x(s))\right\|_g \odot ds \\ & \leqslant M \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \left\|f(s,x_n(s)) \ominus f(s,x(s))\right\|_g \odot ds. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como f é contínua e limitada e g é contínua, então pelo Teorema da Convergência Dominada, deduzimos que a integração tende a zero quando n tende a infinito. Desta forma, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \|(Fx_n)(t) \ominus (Fx)(t)\|_g = 0$. Logo, segue que F é contínua.

Passo 2. Vamos mostrar que $F : X \to X$ é limitada.

De fato, é suficiente mostrar que qualquer que seja $r > 0$, existe um constante positiva $L > 0$, tal que para todo $x \in B_r = \{x \in X : \|x\|_g \leqslant r\}$, $Fx \in B_L = \{x \in X : \|Fx\|_g \leqslant L\}$. Note que

$$\begin{aligned}
&\|Fx(t)\|_g \\
= \;& \|x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}) \odot ds \\
&\oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \\
&\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}) \odot f(s,x(s)) \odot ds\|_g .
\end{aligned}$$

Usando a definição de g-norma, a definição $\int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s))\, ds$, a continuidade de f, o Teorema do Valor Médio e o fato de que $\|\mathbb{E}_{\alpha,i}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(t_0))^{\alpha})\|_g \leqslant_g M, \quad i = \alpha,\gamma$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|Fx(t)\|_g \;\leqslant\;& g\,\|x_0\|_g \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \\
&\odot \|\mathbb{E}_{\alpha,\gamma}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha})\|_g \odot ds \\
&\oplus \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \|\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(g(\mathbf{A})(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha})\|_g \\
&\odot \|f(s,x(s))\|_g \odot ds \\
&\leqslant \|x_0\|_g \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot M \odot g^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} \psi'(s) ds\right) \\
&\oplus M \odot L \odot \int_{[t_0,t]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \|x(s)\|_g \odot ds \\
&\leqslant \|x_0\|_g \odot g^{-1}\left((\psi(t)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot M \odot g^{-1}(\psi(t)-\psi(t_0)) \\
&\oplus M \odot L \odot \|x\|_g \odot g^{-1}\left(\frac{(\psi(t)-\psi(t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right) \\
=\;& L.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|Fx\|_g \leqslant_g L$, ou seja, F é limitada em um conjunto equicontínuo.

Passo 3. Vamos mostrar que $F : X \to X$ é definida em um conjunto equicontínua.

Sejam $t_1, t_2 \in J$ com $t_1 < t_2$ e B_r um subconjunto de X como no passo anterior.

Seja $x \in B_r$, então temos:

$$
\begin{aligned}
& \left\|(Fx)(t_2) \ominus (Fx)(t_1)\right\|_g \\
= \; & \| x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t_2)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \\
& \int_{[t_0,t_2]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot ds \\
& \oplus \int_{[t_0,t_2]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot \\
& F(s,x(s)) \odot ds \ominus x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t_1)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \\
& \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot ds \\
& \ominus \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(ts))^{\alpha-1}\right) \odot \\
& \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds \|_g \\
= \; & \| x_0 \odot g^{-1}\left((\psi(t_2)-\psi(t_0))^{\gamma-1}\right) \odot \\
& \left\{ \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot ds \right. \\
& \left. \oplus \int_{[t_1,t_2]}^{\oplus} g^{-1}(\psi'(s)) \odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot ds \right\} \\
& \oplus \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha-1}\right) \odot \\
& \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha}\right) \odot f(s,x(s)) \odot ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\oplus \int_{[t_1,t_2]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\\
&\odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha}\right)\odot f(s,x(s))\odot ds\\
&\ominus x_0 \odot g^{-1}\left(\left(\psi\left(t_1\right)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\right)\\
&\odot \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)\right)\odot \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha}\right)\odot ds\\
&\ominus \int_{[t_0,t_1]^{\oplus}}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\\
&\odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha}\right)\odot f(s,x(s))\odot ds\|_g\\
\leqslant\ & \|x_0\|_g \odot g^{-1}\left(\left(\psi\left(t_2\right)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\right)\odot\left(\left(\psi\left(t_1\right)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\right)\\
&\odot \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)\right)\odot\\
&\|\mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha}\right)\ominus \mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha}\right)\|_g \odot ds\\
&\oplus \int_{[t_1,t_2]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)\right)\odot \|\mathbb{E}_{\alpha,\gamma}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha}\right)\|_g \odot ds\\
&\oplus \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus} \|g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha}\right)\ominus\\
&g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\odot \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha}\right)\|_g \odot \| f(s,x(s))\|_g \odot ds\\
&\oplus \int_{[t_1,t_2]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\\
&\odot \|\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left(g(\mathbf{A})\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha}\right)\|_g \odot \|f(s,x(s))\|_g \odot ds\\
&\leqslant \|x_0\|_g \odot g^{-1}\left(\psi\left(t_2\right)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\Big)\\
&\odot g^{-1}\left(\left(\psi\left(t_1\right)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\right)\odot \int_{[t_0,\,t_1|^{\oplus}} g^{-1}\left(\psi'(s)\right)\odot\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|g(A)^k\|_g \left\|\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha k}\ominus\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha k}\right\|_g}{\Gamma(\alpha k+\gamma)}\odot ds\\
&\oplus M \odot \int_{[t_1,t_2]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)\right)\odot ds\\
&\oplus \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus}\left\{\|g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\|_g \odot \sum_{k=0}^{\infty}\|g(\mathbf{A})^k\|_g \frac{\left\|\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha k}\right\|_g}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\ominus\right.\\
&\left.\|g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\|_g \odot \sum_{k=0}^{\infty}\|g(\mathbf{A})^k\|_g \frac{\left\|\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha k}\right\|_g}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right\}\\
&\odot L_1\|x(s)\|_g \odot ds \oplus M \odot \int_{[t_1,t_2]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\odot L_1\|x(s)\|_g \odot ds\\
\leqslant\ & {}_g\|x_0\|_g \odot g^{-1}\left(\left(\psi\left(t_2\right)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\right)\odot g^{-1}\left(\left(\psi\left(t_1\right)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\right)\odot
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M & \odot \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus} g^{-1}\left(\psi'^{-1}\left(\psi\left(t_1\right)-\psi\left(t_2\right)\right) \oplus L_1 \odot \|x\|_g \odot\right. \\
& \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus}\left\{\left\|g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\right\|_g \odot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\|\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha k}\right\|_g}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} \odot\right. \\
& \left.\left\|g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\right\|_g \odot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\|\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha k}\right\|_g}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right\} \odot ds \\
\oplus & \quad M \odot L_1 \odot \|x\|_g \odot g^{-1}\left(\frac{\left(\psi\left(t_2\right)-\psi\left(t_1\right)\right)^\alpha}{\alpha}\right) \\
\leqslant_g & \quad \left\|x_0\right\|_g \odot g^{-1}\left(\left(\psi\left(t_2\right)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\right) \odot g^{-1}\left(\left(\psi\left(t_1\right)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\right) \\
\odot & \quad M \odot g^{-1}\left(\psi\left(t_1\right)-\psi\left(t_0\right)\right) \oplus M \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right) \\
\oplus & \quad L_1 \odot \|x\|_g \odot \int_{[t_0,t_1]}^{\oplus}\left\{\left\|g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\right\|_g \odot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\|\left(\psi\left(t_2\right)-\psi(s)\right)^{\alpha k}\right\|_g}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right. \\
& \left.\ominus\left\|g^{-1}\left(\psi'(s)\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha-1}\right)\right\|_g \odot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\|\left(\psi\left(t_1\right)-\psi(s)\right)^{\alpha k}\right\|_g}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right\} \odot ds \\
\oplus & \quad M \odot L_1 \odot \|x\|_g \odot g^{-1}\left(\frac{\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^\alpha}{\alpha}\right) \\
\leqslant & \quad \left\|x_0\right\|_g \odot g^{-1}\left(\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^{\gamma-1}\right) \odot M \oplus M \odot g^{-1}\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right) \\
\oplus & \quad M \odot L_1\|x\|_g \odot g^{-1}\left(\frac{\left(\psi(t)-\psi\left(t_0\right)\right)^\alpha}{\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Como a função de Mittag-Leffler é uniformemente limitada, podemos trocar o somatório e integração. Como $t_1 \to t_2$, deduzimos que $\|Fx\,(t_2) - Fx\,(t_1)\|_g \to 0$. Consequentemente dos **Passos 1 a 3** e do teorema de Arzelà-Ascoli, concluímos que $F : X \to X$ é contínua e completamente contínua. Portanto, F é completamente contínua. Segue do teorema do ponto fixo de Schauder, o problema da (1.1) tem solução. O que conclui a prova. □

5 Considerações Finais

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre o ODPF ψ-Hilfer e discutimos algumas propriedades básicas que foram provadas e, em certos momentos apresentados alguns casos particulares. Além do mais, alguns exemplos foram discutidos. Por outro lado, existem propriedades que tratamos como especiais, por se tratar de ferramentas essenciais em determinadas áreas, a saber: a regra generalizada g-Leibniz tipos I e II, a transformada g-Laplace e, por fim, a integração por partes. Vale ressaltar, que tais propriedades especiais, como mencionadas, foram apresentadas separadamente, com o intuito de destacar em cada início das respectivas seções, uma breve introdução da importância de cada uma delas. Nesse sentido, suas respectivas provas, foram apresentadas, bem como casos particulares. Durante o trabalho, sempre deixamos claro, que por mais que apresentamos alguns casos particulares dos resultados investigados, outros eram possíveis a partir da particular escolha da função $\psi(\cdot)$, do parâmetro a e dos limites $\beta \to 0$ e $\beta \to 1$. Para a realização deste trabalho, só foi possível, a partir da introdução do Capítulo 2. No Capítulo 4 realizamos um estudo sobre a existência e unicidade de soluções de uma classe de equação pseudo-fracionária ψ-Hilfer por meio da teoria de ponto fixo, do teorema de Arzelà-Ascoli e do teorema convergência dominada.

Para finalizar este presente trabalho, algumas questões e ideias no decorrer deste trabalho foram surgindo e uma continuação natural para o doutorado é apenas uma consequência. Dentre as questões levantadas destacamos:

1. No primeiro momento, uma continuação natural seria investigar a controlabilidade, dependência contínua dos dados e a atratividade de soluções de equações diferenciais pseudo-fracionária.

2. É possível a partir da teoria de operador derivada pseudo-fracionário ψ-Hilfer, atacar questões envolvendo equações diferenciais com p-Laplaciano? Em caso afirmativo, quais consequências importantes que traria a teoria?

3. Como visto no decorrer do trabalho a importância da unificação das áreas de Análise, pseudo-análise e cálculo fracionário para apresentar esse trabalho. Seria possível trabalhar essas questões aqui investigadas com a teoria de escala-temporal?

Outras questões certamente surgem a medida que se trabalha em um dos pontos acima destacados, em especial, no item 2, que é possível levantar outras questões como problemas de dupla fase e problemas do tipo Kirchhoff.

Referências

[1] Abdelawad, T., Mlaiki, N., and Aabdo, M. S. Caputo-type fractional systems with variable order depending on the impulses and changin the kernel. *Fractals* (2022), 2240219. Citado na página 10.

[2] Abdeljawad, T., Atangana, A., Gómez-Aguilar, J. F., and Jarad, F. On a more general fractional integration by parts formulae and applications. *Physica A: Stat. Mech. Appl. 536* (2019), 122494. Citado na página 46.

[3] Abdo, M. S., Panchal, S. K., and Hussien, H. S. Fractional integro-differential equations with nonlocal conditions and ψ–Hilfer fractional derivative. *Math. Modell. Anal. 24*, 4 (2019), 564–584. Citado na página 10.

[4] Abdo, M. S., Thabet, S., and Ahmad, B. The existence and Ulam–Hyers stability results for ψ-Hilfer fractional integrodifferential equations. *J. Pseudo-Diff. Operators Appl. 11*, 4 (2020), 1757–1780. Citado na página 10.

[5] Agahi, H., Babakhani, A., and Mesiar, R. Pseudo-fractional integral inequality of Chebyshev type. *Information Sci. 301* (2015), 161–168. Citado na página 11.

[6] Almalahi, M. A., Abdo, M. S., and Panchal, S. K. Existence and Ulam–Hyers stability results of a coupled system of ψ-Hilfer sequential fractional differential equations. *Results Appl. Math. 10* (2021), 100142. Citado na página 10.

[7] Almeida, R. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 44* (2017), 460–481. Citado na página 10.

[8] Babaei, A., Moghaddam, B. P., Banihashemi, S., and Machado, J. A. T. Numerical solution of variable-order fractional integro-partial differential equations via Sinc collocation method based on single and double exponential transformations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 82* (2020), 104985. Citado na página 11.

[9] Babakhani, A., Yadollahzadeh, M., and Neamaty, A. Some properties of pseudo-fractional operators. *J. Pseudo-Diff. Operators Appl. 9*, 3 (2018), 677–700. Citado 5 vezes nas páginas 11, 14, 17, 18 e 22.

[10] Bailey, D. H., and Swarztrauber, P. N. The fractional Fourier transform and applications. *SIAM Review 33*, 3 (1991), 389–404. Citado na página 44.

[11] Balachandran, K., Govindaraj, V., Rodriguez-Germa, L., and Trujillo, J. J. Controllability of nonlinear higher order fractional dynamical systems. *Nonlinear Dyn. 71* (2013), 605–612. Citado na página 11.

[12] Borisut, P., Kumam, P., Ahmed, I., and Jirakitpuwapat, W. Existence and uniqueness for ψ-Hilfer fractional differential equation with nonlocal multi-point condition. *Math. Meth. Appl. Sci. 44*, 3 (2021), 2506–2520. Citado na página 11.

[13] Caputo, M. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. *Geophysical J. Inter. 13*, 5 (1967), 529–539. Citado na página 9.

[14] Caputo, M. Elasticity and dissipation zanichelli, 1969. Citado na página 9.

[15] DarAssi, M. H., Safi, M. A., Khan, M. A., Beigi, A., Aly, A. A., and Alshahrani, M. Y. A mathematical model for SARS-CoV-2 in variable-order fractional derivative. *The European Phys. J. Special Topics* (2022), 1–10. Citado na página 10.

[16] Diethelm, K. The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using operators of Caputo type, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

[17] Fahad, H. M., ur Rehman, M., and Fernandez, A. On laplace transforms with respect to functions and their applications to fractional differential equations. *Math. Meth. Appl. Sci.* (2021). Citado na página 11.

[18] Fernandez, A., Baleanu, D., and Fokas, A. S. Solving pdes of fractional order using the unified transform method. *Appl. Math. Comput. 339* (2018), 738–749. Citado na página 44.

[19] Frederico, G. S. F., Vanterler da C. Sousa, J. S., and Babakhani, A. Existence and uniqueness of global solution for a Cauchy problem and g-variational calculus. *Comput. Appl. Math. 40*, 6 (2021), 233. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.

[20] Grunwald, A. K. Uber"begrente"Derivationen und deren Anwedung. *Zangew Math und Phys 12* (1867), 441–480. Citado na página 9.

[21] Hilfer, R. *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific, 2000. Citado na página 45.

[22] Hosseini, M., Babakhani, A., Agahi, H., and Rasouli, S. H. On pseudo-fractional integral inequalities related to Hermite–Hadamard type. *Soft Computing 20*, 7 (2016), 2521–2529. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.

[23] Jarad, F., and Abdeljawad, T. Generalized fractional derivatives and Laplace transform. *Disc. Cont. Dyn. Sys.-Series S 13*, 3 (2020). Citado 2 vezes nas páginas 11 e 44.

[24] Kerr, F. H. Namias fractional Fourier transforms on l^2 and applications to differential equations. *J. Math. Anal. Appl. 136*, 2 (1988), 404–418. Citado na página 44.

[25] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204. Elsevier, Amsterdam., 2006. Citado na página 9.

[26] Letnikov, A. V. Theory of differentiation with an arbtraly indicator. *Matem Sbornik 3* (1868), 1–68. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 23.

[27] Love, E. R., and Young, L. C. On fractional integration by parts. *Proc. London Math. Soc. 2*, 1 (1938), 1–35. Citado na página 46.

[28] Luo, D., Wang, J. R., and Fečkan, M. Applying fractional calculus to analyze economic growth modelling. *J. Appl. Math. Stat. Infor. 14*, 1 (2018), 25–36. Citado na página 11.

[29] Machado, J. A. T., Silva, M. F., Barbosa, R. S., Jesus, I. S., Reis, C. M., Marcos, M. G., and Galhano, A. F. Some applications of fractional calculus in engineering. *Math. Probl. Engineering 2010* (2010). Citado na página 11.

[30] Moghaddam, B. P., and Machado, J. A. T. Extended algorithms for approximating variable order fractional derivatives with applications. *J. Sci. Comput. 71*, 3 (2017), 1351–1374. Citado na página 10.

[31] Oliveira, D. S., and Oliveira, E. C. d. Hilfer–Katugampola fractional derivatives. *Comput. Appl. Math. 37*, 3 (2018), 3672–3690. Citado na página 10.

[32] Oliveira, D. S., Vanterler da C. Sousa, J., and Frederico, G. S. F. Pseudo-fractional operators of variable order and applications. *Soft Computing 26*, 10 (2022), 4587–4605. Citado na página 10.

[33] Oliveira, E. C., and Vanterler da C. Sousa, J. Ulam–Hyers–Rassias stability for a class of fractional integro-differential equations. *Results Math. 73*, 3 (2018), 1–16. Citado 6 vezes nas páginas 11, 16, 18, 19, 34 e 37.

[34] Ortigueira, M. D., and Machado, J. A. T. What is a fractional derivative? *J. Comput. Phys. 293* (2015), 4–13. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 38.

[35] Pap, E. Pseudo-additive measures and their applications. In *Handbook of measure theory*. Elsevier, 2002, pp. 1403–1468. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.

[36] PAP, E. Applications of the generated pseudo-analysis to nonlinear partial differential equations. *Contemporary Math. 377* (2005), 239–260. Citado na página 14.

[37] RASHEED, A., AND ANWAR, M. S. Simulations of variable concentration aspects in a fractional nonlinear viscoelastic fluid flow. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 65* (2018), 216–230. Citado na página 11.

[38] ROSS, B. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. *Frac. Calc. Appl.* (1975), 1–36. Citado na página 10.

[39] ROSS, B. The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Math. 4*, 1 (1977), 75–89. Citado na página 9.

[40] SAMKO, S. G., KILBAS, A. A., AND MARICHEV, O. I. *Fractional integrals and derivatives*, vol. 1. Gordon and breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

[41] SAYEVAND, K., AND MACHADO, J. A. T. An accurate and cost-efficient numerical approach to analyze the initial and boundary value problems of fractional multi-order. *Comput. Appl. Math. 37*, 5 (2018), 6582–6600. Citado na página 11.

[42] SILVA, C. J., AND TORRES, D. F. M. Stability of a fractional HIV/AIDS model. *Math. Comput. Simul. 164* (2019), 180–190. Citado na página 11.

[43] SONIN, N. Y. On differentiation with arbitrary index. *Moscow Matem. Sbornik 6*, 1 (1869), 1–38. Citado na página 9.

[44] TAVARES, D., ALMEIDA, R., AND TORRES, D. F. M. Caputo derivatives of fractional variable order: numerical approximations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 35* (2016), 69–87. Citado na página 10.

[45] TEODORO, G. S., MACHADO, J. A. T., AND OLIVEIRA, E. C. D. A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *J. Comput. Phys. 388* (2019), 195–208. Citado na página 38.

[46] VANTERLER DA C. SOUSA, J. Nehari manifold and bifurcation for a ψ-Hilfer fractional p-Laplacian. *Math. Meth. Appl. Sci. 44*, 11 (2021), 9616–9628. Citado 3 vezes nas páginas 13, 46 e 47.

[47] VANTERLER DA C. SOUSA, J. Existence and uniqueness of solutions for the fractional differential equations with p-Laplacian in $\mathbb{H}_p^{\nu,\beta;\psi}$. *J. Appl. Anal. Comput. 12*, 2 (2022), 622–661. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 47.

[48] VANTERLER DA C. SOUSA, J., BENCHOHRA, M., AND N'GUEREKATA, G. M. Attractivity for differential equations of fractional order and ψ-Hilfer type. *Frac. Calc. Appl. Anal. 23*, 4 (2020), 1188–1207. Citado na página 10.

[49] Vanterler da C. Sousa, J., Benchohra, M., and N'Guérékata, G. M. Attractivity for differential equations of fractional order and ψ-Hilfer type. *Frac. Cal. Appl. Anal. 23*, 4 (2020), 1188–1207. Citado na página 11.

[50] Vanterler da C. Sousa, J., Camargo, R. F., Capelas de Oliveira, E., and Frederico, G. S. F. Pseudo-fractional differential equations and generalized g-Laplace transform. *J. Pseudo-Diff. Operators Appl. 12*, 3 (2021), 1–27. Citado 3 vezes nas páginas 44, 46 e 49.

[51] Vanterler da C. Sousa, J., de Oliveira, E. C., and Kucche, K. D. On the fractional functional differential equation with abstract volterra operator. *Bull. Braz. Math. Soc., New Series 50*, 4 (2019), 803–822. Citado na página 11.

[52] Vanterler da C. Sousa, J., de Oliveira, E. C., and Magna, L. A. Fractional calculus and the ESR test. *AIMS Math. 2*, 4 (2017), 692–705. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

[53] Vanterler da C. Sousa, J., dos Santos, M. N. N., Magna, L. A., and Oliveira, E. C. d. Validation of a fractional model for erythrocyte sedimentation rate. *Comput. Appl. Math. 37*, 5 (2018), 6903–6919. Citado na página 11.

[54] Vanterler da C. Sousa, J., Frederico, G. S. F., and Oliveira, E. C. d. ψ-Hilfer pseudo-fractional operator: new results about fractional calculus. *Comput. Appl. Math. 39*, 4 (2020), 1–33. Citado 3 vezes nas páginas 11, 38 e 44.

[55] Vanterler da C. Sousa, J., Kucche, K. D. ., and Oliveira, E. C. d. Stability of ψ-Hilfer impulsive fractional differential equations. *Appl. Math. Lett. 88* (2019), 73–80. Citado 3 vezes nas páginas 11, 15 e 16.

[56] Vanterler da C. Sousa, J., Kucche, K. D., and de Oliveira, E. C. Stability of ψ-Hilfer impulsive fractional differential equations. *Appl. Math. Lett. 88* (2019), 73–80. Citado na página 11.

[57] Vanterler da C. Sousa, J., Ledesma, C. T., Pigossi, M., and Zuo, J. Nehari manifold for weighted singular fractional p-Laplace equations. *Bull. Braz. Math. Soc.* (2022), 1–31. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 47.

[58] Vanterler da C. Sousa, J., Machado, J. A., and Oliveira, E. C. d. The ψ-Hilfer fractional calculus of variable order and its applications. *Comput. Appl. Math. 39*, 4 (2020), 1–35. Citado na página 10.

[59] Vanterler da C. Sousa, J., and Oliveira, E. C. d. On the ψ-Hilfer fractional derivative. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 60* (2018), 72–91. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 49.

[60] Vanterler da C. Sousa, J., and Oliveira, E. C. d. Ulam–Hyers stability of a nonlinear fractional Volterra integro-differential equation. *Appl. Math. Lett. 81* (2018), 50–56. Citado na página 11.

[61] Vanterler da C. Sousa, J., and Oliveira, E. C. d. A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ-Hilfer operator. *Diff. Equ. Appl. 11*, 1 (2019), 87–106. Citado na página 11.

[62] Vanterler da C. Sousa, J., and Oliveira, E. C. d. Leibniz type rule: ψ-Hilfer fractional operator. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 77* (2019), 305–311. Citado 3 vezes nas páginas 10, 38 e 41.

[63] Vanterler da C. Sousa, J., and Oliveira, E. C. d. On the ψ-fractional integral and applications. *Comput. Appl. Math. 38*, 1 (2019). Citado na página 10.

[64] Vanterler da C. Sousa, J., Vellappandi, M., Govindaraj, V., and Frederico, G. S. Reachability of fractional dynamical systems using ψ-Hilfer pseudo-fractional derivative. *J. Math. Phys. 62*, 8 (2021), 082703. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.

[65] Vanterler da C. Sousa, J., Zuo, J., and ORegan, D. The Nehari manifold for a ψ-Hilfer fractional p-Laplacian. *Applicable Anal.* (2021), 1–31. Citado 3 vezes nas páginas 13, 46 e 47.

[66] Wang, J., Ibrahim, A. G., Fečkan, M., and Zhou, Y. Controllability of fractional non-instantaneous impulsive differential inclusions without compactness. *IMA J. Math. Control Infor. 36*, 2 (2019), 443–460. Citado na página 11.

[67] Yadollahzadeh, M., Babakhani, A., and Neamaty, A. Hermite–Hadamard's inequality for pseudo-fractional integral operators. *Stochastic Anal. Appl. 37*, 4 (2019), 620–635. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.

[68] Zayed, A. I. A class of fractional integral transforms: a generalization of the fractional Fourier transform. *IEEE transactions on signal processing 50*, 3 (2002), 619–627. Citado na página 44.

[69] Zhang, Z.-Y., Lin, Z.-X., and Guo, L.-L. Variable-order fractional derivative under Hadamard's finite-part integral: Leibniz-type rule and its applications. *Nonlinear Dyn. 108*, 2 (2022), 1641–1653. Citado na página 38.

[70] Zhang, Z.-Y., and Liu, C.-B. Leibniz-type rule of variable-order fractional derivative and application to build Lie symmetry framework. *Appl. Math. Comput. 430* (2022), 127268. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 38.