DOI: 0

Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 12 nº 25 (agosto/2012 - dezembro/2012) - pág. 01-13
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

O MOVIMENTO DAS ESTRUTURAS MATEMÁTICAS

José Carlos Magossi
Elaine Cristina Catapani Poletti
Universidade Estadual de Campinas– FT –UNICAMP–Brasil

(aceito para publicação em julho de 2012)

Resumo

O objetivo neste artigo é defender a relevância de se observar a matemática sob a ótica de estruturas e objetos e como consequencia, identificar certo movimento dessas estruturas ao longo de sua história. Desenvolvimentos e novas ferramentas da matemática, vista sob a ótica da linguagem, inserem-se numa dimensão onde suas estruturas e objetos são elementos que podem ser observados e alterados. Neste caso, podem ser utilizadas, como uma aplicação, para lançar novas ideias e métodos quando se tratar, por exemplo, de processos de ensino e aprendizagem da matemática, seja em níveis elementares ou em níveis superiores. Nesse texto elencam-se exemplos onde o desenvolvimento da matemática se dá pela alteração e avaliação de estruturas. A busca por padrões nessas estruturas acarreta na abertura de novos ramos da matemática. Entende-se que essa visão, no sentido de movimento estrutural, é saudável àqueles que se aventuram a fazer matemática.

Palavras-chave: Matemática, História, Estruturas Matemáticas.

[THE MOVEMENT OF THE MATHEMATICAL STRUCTURES]

Abstract

The goal in this article is to defend the relevance in observing the math under the optics of structures and objects, and as a consequence, identify certain movement of these structures throughout its history. Developments and new tools of mathematics, from the perspective of language, can be seen in a dimension where your structures and objects are elements that can be seen and changed. In this case, it can be used as an application, to launch new ideas and methods when dealing with, for example, teaching and learning of mathematics, whether in the elementary levels or in higher ones. In this text we list examples where are the development of Mathematics by means of change and evaluation of structures. The search for patterns in these structures leads to the opening of new branches of mathematics. It is understood that this vision, in the sense of structural movement is healthy for those who venture to do math.

Keywords: Mathematics, History, Mathematical Structures.

1. Introdução

A matemática, sob um senso comum, pode ser vista como uma linguagem fortemente adaptada a resolver problemas do mundo real. No dia-a-dia muitos a atribuem como sendo uma linguagem destinada a resolver uma ampla classe de problemas, em dimensões distintas, sejam nas ciências humanas, exatas ou biológicas.

Há sempre uma dedicação exaustiva ao tratar a matemática como sendo útil ao indivíduo humano no desenvolvimento de ferramentas à solução de problemas. No entanto, há uma intersecção nas dimensões citadas acima, de aplicações da matemática a problemas do mundo real, que nem sempre são explicitadas ao se referir a ela. Essa intersecção, comum a todos os problemas de que ela trata, é caracterizada por um agregado de estruturas e objetos. (LANG,1986)

Tais estruturas e objetos são constituintes da matemática, de forma que ela se faz e se refaz dessas estruturas num sentido cumulativo ao longo dos anos. Neste artigo objetiva-se dizer da matemática, sob a ótica de estruturas e objetos e, principalmente, da relevância histórica que estas estruturas têm quando do fazer matemática. Ou seja, explicitar certo "movimento" existente, na matemática, que, se observado com detalhes, mostrará a trajetória histórica escolhida no momento do desenvolvimento de um conceito, bem como favorecerá a busca por caminhos futuros ao desenvolvimento de nova matemática, ao longo de seu processo histórico.

A visualização de estruturas matemáticas neste texto fundamenta-se na intersecção entre os seguintes tópicos:

I. Relevância de problemas históricos no ensino de matemática (TOEPLITZ, 2007);
II. Interação entre matemática superior, matemática do ensino fundamental e médio e aplicações em outras áreas da ciência (KLEIN, 2004a; 2004b);
III. Investigação de características pertinentes à comunicação entre aluno e professor fundamentada na semiótica e teoria da informação (ECO, 2007; SHANNON, 1948; DION, 2006).

Estruturas matemáticas são entendidas, de modo intuitivo, como objetos e suas relações. Por exemplo: em cursos de matemática elementar é comum dizer, no tocante à propriedade comutativa da multiplicação no conjunto dos números inteiros que: "*a ordem dos fatores não altera o produto*". Neste caso se tem objetos (números inteiros) e relações entre eles (propriedade da multiplicação). No entanto, ao se alterar o objeto – números inteiros – por matrizes, por exemplo, a propriedade comutativa já não vale. Desta forma, verifica-se que existe uma expansão estrutural no sentido histórico entre o surgimento de números inteiros, de matrizes e por conseguinte, das alterações em termos de estruturas. Sob uma ótica particular, intui-se certo *movimento* de estruturas matemáticas.

Analogamente, como outro exemplo, pode-se pensar em uma estrutura matemática como uma armação de varetas e linhas. A armação representa as relações entre os objetos: varetas e linhas. Uma pipa, no seu estado final de construção, é um modelo obtido a partir de apropriadas relações entre varetas e linhas. Nota-se que, com esta estrutura (varetas e linhas), é possível criar outros modelos: caminhões, pontes, casas, etc.; ou seja, de modo análogo à matemática é possível alterar as estruturas, trocando-se os objetos e suas relações.

Ao se trabalhar com estruturas e objetos, na matemática, é possível também fazer matemática quando da modificação dos objetos e suas relações. Estas alterações entre objetos e suas relações que permeiam a matemática num processo histórico é o que se quer chamar de *movimento das estruturas*.

O movimento das estruturas, não só no fazer matemática como também em aplicações tais como nas relações de ensino e aprendizagem, não precisa ser visto somente como um processo construtivo, pois neste movimento há mais do que uma simples justaposição de seus objetos e estruturas. Segue-se Poincaré, para elucidar o termo *construtivo*:

> *"For a construction to be useful and not mere waste of mental effort, for it to serve as a stepping-stone to higher things, it must first of all possess a kind of unity enabling us to see something more than the juxtaposition of its elements."* Henri Poincaré, 1902 (MANBER, 1989, p.1)

Uma das aplicações do movimento das estruturas e objetos, a qual se entende como uma dimensão factível na área educacional, é lançar mão desse movimento na inovação de estratégias voltadas aos processos de ensino e aprendizagem da matemática, seja em níveis elementares ou em níveis superiores.

Na sequencia elencam-se exemplos onde o desenvolvimento da matemática se dá pela alteração de estruturas, deixando em aberto uma indicação de que esse norte pode ser clareador seja no ensino de matemática – exemplo de aplicação – seja no desenvolvimento e na erudição da matemática. Entende-se que, neste caso, a história da matemática, a interação com outras áreas da ciência e a busca por padrões devem estar interconectadas.

2. Estruturas matemáticas

Nesta seção são apresentadas algumas definições de estruturas, sob a ótica matemática, com o intuito de se clarear o conceito e facilitar a compreensão do assunto abordado. Há várias definições e contextos distintos onde se aplicam o termo estruturas, como por exemplo, em Bell & Machover (1977) onde uma estrutura consiste de:

> *a) Uma classe não vazia, chamada de universo (ou domínio) da estrutura; Os membros desse universo são os indivíduos da estrutura;*
> *b) Várias operações sobre o universo;*
> *c) Várias relações sobre o universo.*
> *Um exemplo clássico é a estrutura elementar dos números naturais. Nesta, o conjunto dos números naturais é o universo, há dois indivíduos (0 e 1) e duas operações básicas (adição e multiplicação). A única relação básica é a identidade.* (BELL & MACHOVER, 1977, p.9)

Por outro lado, sob a ótica da linguística, semiótica, Eco (2007) escreve:

> *"(...) Fala-se, então, num termo que define ao mesmo tempo um conjunto, as partes desse conjunto e as relações dessas partes entre si; em*

> *"entidade autônoma de dependências internas", num todo formado de elementos solidários, de tal modo que cada um dependa dos demais e não possa ser o que é senão em virtude da sua relação com ele (...)."* (ECO, 2007, p.252)

Ainda de acordo com este autor,

> *"(...) Uma estrutura é um modelo construído segundo certas operações simplificadoras que me permitem uniformar fenômenos diferentes com base num único ponto de vista."* (ECO, 2007, p.36)

Fatos históricos da matemática revelam a existência de estruturas, de padrões e, de certa forma, como elas se entrelaçam no decorrer da história da matemática, acarretando o que se chama, aqui, de movimento das estruturas matemáticas.

Não é novidade na matemática a busca e investigações acerca de estruturas. Por exemplo, sob a ótica do grupo francês Bourbaki, a *filosofia* que norteava seu grupo e livros articulava-se em torno de noções consideradas básicas: a unidade matemática, o método axiomático e as estruturas. (MASHAAL, 2006, p. 88)

Para uniformar o raciocínio sobre movimento de estruturas, na sequencia uma contextualização histórica é exibida.

- **Geometrias**

Euclides de Alexandria, um dos mais proeminentes matemáticos da Grécia antiga que viveu por volta de 450 A.C., é conhecido por seus trabalhos em geometria e por ter iniciado o método axiomático nesta área. *Os Elementos*, de Euclides, coleção de 13 livros, trata da geometria plana, foi e ainda é amplamente utilizado por alunos e professores. Nessa obra Euclides utiliza postulados, noções primitivas, axiomas e uma sequencia lógica para demonstrar teoremas da geometria plana (BICUDO 2009). É um clássico sobre construções com régua e compasso e demonstrações a partir de axiomas e regras de inferências lógicas. Em seus livros, Euclides enuncia cinco postulados para a geometria plana. Pode-se dizer, sob a ótica atual, que os postulados são:

1. Por dois pontos pode-se traçar um segmento de reta, tendo-se esses pontos como extremidade do segmento.
2. Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente.
3. A partir de qualquer segmento de reta, pode-se desenhar um círculo tendo-se este segmento como seu raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.

> *5. " (...) Dado uma linha que cruze duas linhas retas de modo que a soma dos ângulos internos do mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então as duas linhas, quando prolongadas, acabarão por se encontrar (naquele lado da linha)(...)."* (MLODINOW, 2004, p.45-46)

O quinto postulado, conhecido como postulado das paralelas pode ser interpretado (uma re-leitura) como: "*para qualquer ponto fora de uma reta (não contido na reta), pode-se traçar uma e somente uma reta paralela a ela"*. Esse postulado não era, para Euclides, muito convincente, pois suspeitava que este quinto postulado, pudesse ser demonstrado a partir dos 4 anteriores – tanto é que protelou ao máximo sua utilização nos *Elementos*.

Como Euclides, outros matemáticos também tiveram a mesma suspeita. Essa interrogação perdurou por quase dois mil anos. A interrupção ocorreu quando em 1823 Johan Bolyai e Nikolay Ivanovich Lobachevsky trabalharam de modo independente com a alteração do quinto postulado de Euclides. Ao invés de tentar demonstrar que ele é consequencia dos 4 anteriores, procederam na violação do quinto postulado, criando com isso novas geometrias, as chamadas geometrias não-euclidianas[1]. (HARTSHOME, 2000; GREENBERG, 1996)

Ainda no que tange à geometria, ao postulado das paralelas e suas interrogações, David Hilbert, matemático alemão, preocupado com lógica e métodos axiomáticos, e com o objetivo de revelar a essência da geometria, faz uma releitura dos *Elementos.* Propõe um simples e completo conjunto de axiomas independentes por meio do qual seria possível provar todos os teoremas da geometria tradicional de Euclides. Essas investigações culminam com o livro *Foundations of Geometry* (HILBERT, 1999-reimpressão), publicado em 1899.

> *"(...) His approach - the original combination of the abstract point of view and the concrete traditional language – was peculiarly effective. "It was as if over a landscape wherein but a few men with a superb sense of orientation had found their way in murky twilight, the sun had risen all at once," one of his later students wrote. By development a set of axioms for euclidean geometry which did not depart too greatly from the spirit of Euclid's own axioms, and by employing a minimum of symbolism, Hilbert was able to present more clearly and more convincingly than Pasch or Peano the new conception of the nature of the axiomatic method (...)."* (REID, 1978, p.61)

> *"(...) Within a few months after its publication, Hilbert's little book on the foundations of geometry was a mathematical best seller (...)."* (REID, 1978, p.64)

Esse exemplo mostra a relevância da matemática vista como estruturas e objetos, pois, muitos séculos se passaram na tentativa, em vão, de se trabalhar com uma estrutura estática, sob a ótica prática, ao se fixar nos padrões comuns do modelo vigente.

O avanço veio do olhar diferenciado, diga-se movimento das estruturas, de alterá-las de modo conveniente e produzir novos caminhos na matemática, possibilitando uma situação na qual a teoria surge primeiro que a aplicação. Após o surgimento das geometrias não-euclidianas, desenvolvimentos tecnológicos foram possíveis, pois, entre outras coisas, ocorreu uma expansão na física de Newton (fundamentada na geometria plana) tendo-se a partir daí as físicas não clássicas.

[1] Diz-se também que Gauss, no período de 1815 a 1824 havia descoberto essas novas geometrias obtidas a partir da alteração do quinto postulado de Euclides, no entanto diz-se que ele discutia-as apenas com os amigos e não as publicou.

- **Álgebra de Boole**

George Boole (1815-1864), matemático e lógico inglês, teve apenas instrução escolar comum, mas de modo autodidata aprendeu vários idiomas, matemática e lógica. Estudou as obras de Laplace e Lagrange e tornou-se amigo de Augustus De Morgan. Essa amizade o levou a se interessar por uma controvérsia sobre lógica que o filósofo escocês Sir Willian Hamilton (1788-1856) havia iniciado com De Morgan. Como resultado dessas discussões Boole publicou The Mathematical Analysis of Logic (BOOLE, 1847). Nessa obra Boole defendia que a Lógica deve estar associada à matemática e não à metafísica, como defendia o filósofo escocês Sir Willian Hamilton. (BOYER, 1974)

> *"(...) Poderíamos com justiça tomar como característica definitiva de um verdadeiro Cálculo, que é um método que se apoia no uso de Símbolos, cujas leis de combinação são conhecidas e gerais, e cujos resultados admitem uma interpretação consistente. É com base nesse princípio geral que eu pretendo estabelecer o Cálculo da Lógica, e que reivindico para ele um lugar entre as formas reconhecidas da Análise Matemática (...)."* (BOYER, 1974, p.428)

Boole dá início à percepção das formas e estruturas, dos padrões matemáticos além dos números e grandezas. É um período onde a matemática ainda se debruçava em questionamentos sobre análise matemática, séries de Fourier e Geometrias não-Euclidianas. A matemática, talvez por conta dos infinitésimos elencados por Newton e Leibniz, vai à duras penas se solidificando, buscando no formalismo uma saída para o entendimento de questões que, observados apenas sob a ótica prática, realidade física, não seriam resolvidas.

> *"(...) Aqui pela primeira vez está claramente expressa a ideia de que a característica essencial da matemática é não tanto seu conteúdo quanto a forma. Se qualquer tópico é apresentado de tal modo que consiste de símbolos e regras precisas de operação sobre esses símbolos, sujeitas apenas à exigência de consistência interna, tal tópico é parte da matemática (...)."*
>
> *"(...) Bertrand Russell firmou que a maior descoberta do século dezenove foi a natureza da matemática pura. Acrescenta a essa asserção as palavras, "A matemática pura foi descoberta por Boole numa obra que ele chamou As Leis do Pensamento. Nessa asserção Russell se refere à obra mais conhecida de Boole, publicada em 1854 (...)."* (BOYER, 1974, p.428-429).

Boole, em 1854, ao publicar sua obra *A Investigation of the Laws of Thought* (BOOLE, 1854), amplia e esclarece suas ideias apresentadas no livro anterior de 1847.

Nota-se que, historicamente, esse foi um período em que a matemática vista como estruturas e objetos ganha solidez. No entanto, uma das grandes aplicações da obra de Boole veio 84 anos mais tarde, com a tese de mestrado de Claude E. Shannon, então pesquisador assistente no departamento de engenharia elétrica no Instituto de Tecnologia de

Massachusetts, Cambridge. No artigo sobre sua tese, Shannon (1938) utiliza da álgebra de Boole para elaborar uma álgebra que se adapte aos circuitos de chaveamentos.

> *"(...) The algebra of Logic[1-3], originated by George Boole, is a symbolic method of investigating logical relationships. The symbols of Boolean algebra admit of two logical interpretations (...)."* (SHANNON, 1938, p.474)

Mais tarde essas ideias foram incorporadas na lógica digital e seriam úteis para o desenvolvimento dos computadores modernos.

- **Séries de Fourier**

Jean Baptiste Joseph Fourier trabalhou com a propagação de calor em corpos sólidos de 1804 a 1807. Submeteu seu trabalho à Academia de Ciências de Paris[2] em 21 de dezembro de 1807. O comitê para criar um relatório sobre seu trabalho consistia de Lagrange, Laplace, Monge e Lacroix. Houve controvérsias quanto ao texto enviado por Fourier. A primeira objeção feita por Lagrange e Laplace, em 1808, era sobre a expansão das series de funções trigonométricas, hoje conhecidas como séries de Fourier. A segunda objeção foi feita por Biot contra a derivação de Fourier das equações de transferência de calor[3]. O trabalho foi rejeitado. No entanto, quando a Academia de Paris, em 1811, fez do tópico condução de calor um grande prêmio, Fourier submeteu uma cópia revisada e o comitê, composto por Lagrange, Laplace, Malus, Haüy e Legendre, decide dar o prêmio a Fourier. Assim, *Théorie Analytique de la Chaleur,* publicado pela academia de Paris em 1822, expõe a solução do problema de condução de calor em termos formais[4].

A questão central da solução exposta por Fourier sobre condução de calor é poder expressar uma função $f(x)$ que determina a temperatura inicial em cada ponto da barra de metal como uma soma infinita de senos e cossenos. As controvérsias na época existiam pelo fato da Análise Matemática não estar ainda em bases sólidas o suficiente para entender quais as classes de funções que podem ser expressas como séries de Fourier. Com o surgimento de novas estruturas matemáticas, particularmente teoria da integral de Lebesgue e espaço de Sobolev, foi possível responder às interrogações expostas com o trabalho de Fourier e sair das dificuldades expostas pelas chamadas séries de Fourier. Essas dificuldades, conforme as palavras de Toeplitz:

> *"(...) ...in the nineteenth century as mathematicians extricated themselves from the morass of apparent contradictions revealed by the introduction of Fourier series (...)."* (TOEPLITZ, 2007, p.v)

Esses trabalhos foram significativos não só para solucionar as dúvidas relativas às séries de Fourier, mas também para solidificar a Análise Matemática. Nota-se, por

---

[2] A Academia de Ciências de Paris passou por mudanças em 1795 e criou-se o Instituto Nacional, sendo a academia um ramo do Instituto.

[3] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Fourier.html

[4] A letra grega sigma na notação $\sum_{i=1}^{i=\infty}$ com limites inferiores e superiores foi introduzida por Fourier em 1820. (GRAHAN et al, 1995)

exemplo, que o cálculo também foi beneficiado por essas séries (caso particular de desenvolvimentos ocorridos na análise de estruturas).

> *“(...) Dirichlet foi um dos primeiros a reconhecer que nem toda função pode ser representada por sua série de Fourier, e produziu os primeiros critérios para a validade dessa representação, em 1829 e 1837. Enquanto isso, a Análise ganhava uma fundamentação mais rigorosa com os trabalhos de Cauchy, Bolzano e outros. Isso propicia as contribuições de Riemann à teoria das séries de Fourier, sem esquecer que ele próprio é responsável por parte desse trabalho da colocação da Análise em uma base sólida. Riemann se propôs a achar condições necessárias e suficientes para que uma função pudesse ser representada por sua série de Fourier. Como obviamente essas questões se ligam à integração de funções, o Cálculo Integral teve de ser posto em base firme. É daí a teoria da integral de Riemann que hoje estudamos (...).”* (FIGUEIREDO, 2005, p.42)

O exposto acima mostra a relevância de séries de Fourier para o aprofundamento do cálculo, da análise matemática e de outras áreas inter-relacionadas. Nota-se a investigação de estruturas como um fator significante para o desenvolvimento da matemática.

- **Hilbert e o livro *Methods of Mathematical Physics***

Em 1924 Richard Courant publicou, em parceria com David Hilbert, seu primeiro volume de *Methods of Mathematical Physics,* antes dos trabalhos de Heisenberg e Schrödinger sobre mecânica quântica. O segundo volume saiu mais tarde em 1937 (REID, 1996, p.97-98, p.198-199). Esses livros: *Methods of Mathematical Physics* (COURANT e HILBERT, 1953; COURANT e HILBERT, 1962) foram importantes tanto para físicos como para matemáticos. Nesses livros Hilbert e Courant tratam de métodos matemáticos que envolvem álgebra de matrizes, equações diferenciais, equações integrais, teoria de autofunções e teoria de infinitamente muitas variáveis. No volume I aparecem os termos – comuns hoje em dia em livros de álgebra linear- *characteristic values*, *proper values e eigenvalues* (COURANT e HILBERT, 1953, p.17). Esses livros tratam de estruturas matemáticas que teriam, anos mais tarde, aplicações às áreas tais como mecânica quântica.

> *“(...) when [Born and Heisenberg and the Göttingen Theoretical physicists] first discovered matrix mechanics they were having, of course, the same kind of trouble that everybody else had in trying to solve problems and to manipulate and to really do things with matrices. So they had gone to Hilbert for help and Hilbert said the only times he had ever had anything to do with matrices was when they came up as a sort of by-product of the eigenvalues of the boundary-value problem of a differential equation. So if you look for the differential equation which has these matrices you can probably do more with that. They had thought it was a goofy idea and that Hilbert didn't know what he was talking about. So he was having a lot of fun pointing out to them that they could have*

> *discovered Schrödinger's wave mechanics six months earlier if they had paid a little more attention to him."*
>
> *As a result of this almost miraculous recovery Hilbert lived to see what has been called "one of the most dramatic anticipations in the history of mathematical physics (...)."* (REID, 1978, p.182)

- **Poincaré e sua conjectura**

Durante muito tempo, houve na humanidade discussões acerca do formato do planeta terra. Sabe-se que modelos geométricos sobre possíveis formatos do *mundo* vêm sendo discutido desde a Grécia antiga até os dias de hoje. O período das grandes navegações foi marcado por interrogações, misticismo entre outras questões acerca dos possíveis formatos do planeta Terra, haja vista que, esse formato estava estritamente associado, como um ponto significativo na história da humanidade, ao financiamento das navegações. Colombo, por exemplo, acreditava que a Terra tinha formato de uma pera e para ir às Índias, bastava percorrer a parte superior (menor) da "pera". Muito pode ser dito sobre navegações, geometria e história da matemática, no entanto, questiona-se: Seria possível conjecturar sobre potenciais formatos do universo sem lançar mão de estruturas matemáticas?

Ao se estudar História verifica-se vários períodos de intensa discussão, religiosa, científica, etc., sobre o formato do universo. No entanto, Henri Poincaré, por volta de 1904, estabelece uma conjectura sobre um assunto matemático chamado topologia, cuja essência, à primeira vista, é fortemente estrutural e matemática. A conjectura de Poincaré, pela dificuldade de solução, foi incluída nos problemas do milênio[5]. Sua solução ocorreu em 2003 por Grigory Perelman (O'SHEA, 2009). Essa conjectura pode ser vista como o estabelecimento de uma possível forma do universo.

> *"(...) Ao longo do século passado, muitas pessoas dedicaram o trabalho de toda uma vida a ampliar o nosso conhecimento das variedades tridimensionais. Mas a pergunta mais simples sempre resistiu a todos os esforços em busca de uma resposta: entre todas essas variedades tridimensionais, existe alguma que seja diferente da esfera tridimensional em que todo caminho fechado possa se contrair em um ponto? Se essa variedade não existir, então podemos afirmar que o nosso universo é uma esfera tridimensional usando um atlas completo para verificar se todos os caminhos fechados podem ser contraídos a um ponto. A conjectura de Poincaré afirma que essa variedade não existe. De uma maneira mais formal, e dito de uma forma mais positiva, a conjectura de Poincaré é a afirmação de que toda variedade tridimensional compacta na qual qualquer caminho fechado pode ser contraído a um ponto é topologicamemte a mesma coisa que a esfera tridimensional (ou seja, é homeomorfo a ela).*

[5] http://www.claymath.org/millennium.

> *Essa é a pergunta mais fácil que pode ser feita acerca da forma potencial do nosso universo (...).”* (O'SHEA, 2009, p.66)

Entende-se, neste caso, que a estrutura matemática forneceu condições de visualização de uma questão há muito tempo desconhecida. É evidente que em algum momento no futuro alguém possa encontrar uma intuição vinda da natureza que justifique o formato do Universo, mas isso não descarta a importância das estruturas matemáticas como significativas para novas descobertas, sejam na própria matemática ou no mundo real.

- **Algoritmos**

A busca por padrões e estruturas não se limita unicamente à área de matemática e física, no sentido estrito. A busca por estruturas e padrões, aplica-se às áreas outras tais como informática, linguagens de programação, algoritmos, etc. Graham *et al* (1995) publicam o livro *Matemática Concreta* com o objetivo de expor àqueles interessados em linguagens de programação e interessados em compreender os processos contidos no livro *The Art of Computer Programming* (KNUTH,1968; KNUTH,1969; KNUTH,1973) uma metodologia apropriada à busca por padrões e estruturas presentes em problemas que ocorrem em tópicos tais como: somas, relações de recorrências, teoria elementar dos números, coeficientes binomiais, funções geradoras, probabilidade discreta e métodos assintóticos.

> *“(...) Uma vez aprendida a matéria neste livro, tudo de que você, leitor, vai precisar para calcular somas assustadoras, resolver relações de recorrência complexas e descobrir padrões ou estruturas em dados é ter cabeça fria, uma folha grande de papel e uma letra razoável. Você vai ficar tão fluente em técnicas algébricas que muitas vezes vai achar mais fácil obter resultados exatos do que aceitar respostas aproximadas que são válidas apenas em um sentido restrito (...).” (*GRAHAM *et al,* 1995, p.vi*)*

Ainda de acordo com essa referência,

> *“(...) A matemática concreta é cheia de estruturas encantadoras; as manipulações nem sempre são fáceis, mas as respostas podem ser surpreendentemente atraentes (...).” (*GRAHAM *et al*, 1995, p.vi)

Como esses, existem outros exemplos que explicitam o movimento frequente de estruturas na matemática os quais podem possibilitar, sem a preocupação com aplicações ao mundo real (realidade física), a criação de novas estruturas e o surgimento de novos caminhos na matemática.

3. Reflexões

A preocupação exclusiva da matemática vista sob a ótica pragmática pode atropelar a compreensão de conceitos matemáticos que, muitos deles, surgiram apenas de estruturas. Mesmo aqueles conceitos que surgiram de motivações práticas, em algum momento precisaram ser efetivados via alguma estrutura consistente. Uma pergunta que se faz para reflexão, diante de um problema proposto, é: *Como resolvê-lo?*

Se a solução deve vir de um algoritmo, de uma demonstração, então: como resolver este problema sem passar pelo conhecimento de estruturas que suportem esse algoritmo de solução? Se a solução não vier de estruturas e algoritmos associados a elas então: estar-se-ia negando a tese de Church-Turing[6]?

Como caso particular, no que tange ao ensino de matemática, observa-se que alunos se deparam com o estudo de propriedades, por exemplo, de convergência de séries, e questionam sua utilidade. Ao se expor a relevância associada ao contexto histórico e estrutural mostra-se ao aluno que alguns estudos, os quais parecem isolados, tiveram um objetivo bem determinado na história da matemática, como no caso exposto anteriormente sobre séries de Fourier.

Caracterizar e verbalizar que a matemática pode ser vista como uma linguagem composta de estruturas e objetos e não, simplesmente, como uma linguagem adaptada a resolver problemas do dia-a-dia, pode motivar o desenvolvimento da intuição matemática que advém, não só da matemática vista como sendo útil à resolução de problemas práticos do dia-a-dia, mas também de sua visão intrínseca como estruturas e objetos, na busca contínua por padrões e estruturas.

> *"(...) Mathematics consists in discovering and describing certain objects and structures. It is essentially impossible to give an all-encompassing description of these. Hence, instead of such a definition, we simply state that the objects of study of mathematics as we know it are those which you will find described in the mathematical journals of the past two centuries, and leave it that. There are many reasons for studying these objects, among which are aesthetic reasons (some people like them), and practical reasons (some mathematics can be applied).*
> *Physics, on the other hand, consists in describing the empirical world by means of mathematical structures (...)."* (LANG, 1986, p. 379)

Trabalhos de pesquisas outros podem ser esboçados ao se investigar, para uma determinada estrutura, como se deu seu surgimento, quais foram as ideias que permeavam os ares da época e, principalmente, quais ideias ficaram para trás em detrimento daquelas que sobreviveram à poeira do tempo. (KUHN, 1994)

A investigação das estruturas matemáticas fundamentadas em aspectos históricos, entende-se, possibilitará condições de aprofundamento além do simples conhecimento de estruturas e história da matemática.

4. Discussão final

A abordagem proposta neste artigo, uma releitura histórica da matemática no sentido de visualizar suas estruturas e seu movimento, favorece o desenvolvimento da matemática e

[6] Para discussões sobre a Tese de Church-Turing ver Mendelson (1987) e Bell e Machover (1977).

como caso particular a comunicação no processo de ensino e aprendizagem além de interações com as diversas áreas das ciências.

Evidentemente que não se considera trabalhar com estruturas matemáticas abstratas de um modo isolado, mas sim num contexto que permita relacionar estruturas, história da matemática, interações com outras áreas da ciência e busca por padrões. Entende-se que, ao abordar a matemática sob a ótica de estruturas, torna-se possível também a visualização de novas estruturas, além é claro de reunir condições para um melhor entendimento e desenvolvimentos de assuntos matemáticos.

Abrem-se caminhos na matemática, com a busca por padrões e análise de estruturas, para investigações de problemas que possam ser desenvolvidos sem o esforço braçal, lançando mão de análises estruturais pertinentes aos problemas investigados. A história da matemática e sua contextualização auxiliam no estabelecimento de conexões com outras áreas da ciência, facilitando a comunicação, no sentido educacional, no processo de ensino e aprendizagem.

Bibliografia

BELL, John Lane, MACHOVER, Moshé. 1977. *A Course in Mathematical Logic.* North-Holland, Amsterdam.

BICUDO, Irineu. 2009. *Os Elementos* de Euclides. Tradução. Editora UNESP, Rio Claro.

BOYER, Carl. 1974. *História da Matemática*, São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda.

BOOLE, George. 1847. *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning.* Macmillan, Barclay and Macmillan. Cambridge, UK.

BOOLE, George. 1854. *An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* London: Walton and Maberly, 1854; reprinted in 1958: Dover Publications, New York.

COURANT, Richard, HILBERT, David. 1953. *Methods of Mathematical Physics, volume I*. John Wiley& Sons, New York.

COURANT, Richard, HILBERT, David. 1962. *Methods of Mathematical Physics, volume II: Partial Differential Equations*. John Wiley& Sons, New York.

DION, Emmanuel. 1997. *Invitation à la théorie de l'information.* Éditions du Seuil. Série Sciences. Paris.

ECO, Umberto. 2007. *A Estrutura Ausente*, São Paulo, Editora Perspectiva.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes. 2005. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada- IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro.

GRAHAM, Ronald L., KNUTH, Donald E., PATASHNIK, Oren. 1995. *Matemática Concreta - Fundamentos para a Ciência da Computação*. LTC Editora, Rio de Janeiro.

GREENBERG, M. J. 1996. *Euclidean and Non-Euclidean Geometry, Development and History.* W. H. Freeman and Co.

HARTSHOME, R. 2000. *Geometry: Euclid and beyond*. Springer-Verlag.New York.

HILBERT, David. 1999. *Foundations of Geometry.* Open Court. New York.

KLEIN, Felix. 2004a. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Arithmetic, Algebra and Analysis*, New York, Dover Publications.

KLEIN, Felix. 2004b. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, New York, *Geometry.* Dover Publications.
KNUTH, Donald E. 1968. *The Art of Computer Programming*, *volume 1: Fundamental Algorithms.* Addison-Wesley, New York.
KNUTH, Donald E. 1969. *The Art of Computer Programming*, *volume 2: Seminumerical Algorithms.* Addison-Wesley, New York.
KNUTH, Donald E. 1973. *The Art of Computer Programming*, *volume 3: Sorting and Searching.* Addison-Wesley, New York.
KUHN, Thomas. 1994. *A Estrutura das Revoluções Científicas.* Editora Perspectiva, São Paulo.
LANG, Serge. 1986. *A First Course in Calculus-Fifth Edition.* Springer-Verlag, New York.
MANBER, Udi. 1989. *Introduction to Algorithms - A Creative Approach.* Addison-Wesley, New York.
MASHAAL, M. 2006. *Quem é Bourbaki?* Scientific American Brasil. Gênios da Ciência, n^0.12. Duetto Editorial, São Paulo, 2006
MENDELSON, Elliot. 1987. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall, New York.
MLODINOW, Leonard. 2004. *A Janela de Euclides*. São Paulo, Geração Editorial.
O'SHEA, Donal. 2009. *A Solução de Poincaré - Em Busca Da Forma Do Universo.* Editora Record, São Paulo.
TOEPLITZ, Otto. 2007. *The Calculus – A Genetic Approach*, Chicago, Chicago University Press.
REID, Constance. 1978. *Hilbert*. New York, Springer-Verlag.
REID, Constance. 1996. *Courant*. New York, Copernicus, Springer-Verlag.
SHANNON, Claude E.. 1938. *Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits. Transactions American Institute of Electrical Engineers, 57, 713-723.*
SHANNON, C. *A mathematical theory of communication*. Bell System Technical Journal, v. 27, p. 379-423, 623-656, 1948.

José Carlos Magossi
E-mail: magossi@ft.unicamp.br

Elaine Cristina Catapani Poletti
E-mail: elainec@ft.unicamp.br

Faculdade de Tecnologia - FT - Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP.