



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

ENRIQUE FERNANDO LÓPEZ AGILA

SIMETRIAS DO FLUXO DE RICCI

Campinas

2023

Enrique Fernando López Agila

SIMETRIAS DO FLUXO DE RICCI

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Yuri Dimitrov Bozhkov

Coorientador: Stylianos Dimas

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Enrique Fernando López Agila e orientada pelo Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L881s López Agila, Enrique Fernando, 1989-
Simetrias do fluxo de Ricci / Enrique Fernando López Agila. – Campinas,
SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Yuri Dimitrov Bozhkov.
Coorientador: Stylianos Dimas.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Fluxo de Ricci. 2. Simetrias de Lie. I. Bozhkov, Yuri Dimitrov, 1962-. II.
Dimas, Stylianos. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Symmetries of Ricci flow

Palavras-chave em inglês:

Ricci flow

Lie symmetries

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Stylianos Dimas [Coorientador]

Jayme Morandi Vaz

Christian da Silva Rodrigues

Antônio José da Silva Neto

Paolo Piccione

Data de defesa: 24-03-2023

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-2840-8572>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3770142756607966>

**Tese de Doutorado defendida em 24 de março de 2023 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). STYLIANOS DIMAS

Prof(a). Dr(a). JAYME MORANDI VAZ

Prof(a). Dr(a). CHRISTIAN DA SILVA RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). ANTÔNIO JOSÉ DA SILVA NETO

Prof(a). Dr(a). PAOLO PICCIONE

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Este trabalho é dedicado a minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, minha esposa Daniela, meus pais e irmãos, meu orientador Yuri Bozhkov e co-orientador Stylianos Dimas, meus professores da graduação María Nela Pastuizaca, Borys Álvarez e Guillermo Soriano, meus amigos, e meus professores da pós-graduação, especialmente os professores Christian Rodrigues e José Nazareno. Cada um destas pessoas ajudaram no meu desenvolvimento profissional e pessoal, sem os quais meu caminho teria sido muito mais difícil.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*O Senhor, pois, é aquele que vai adiante de ti;
ele será contigo, não te deixará,
nem te desampará; não temas, nem te espantes.
(Deuteronômio 31:8)*

Resumo

Neste trabalho computamos o grupo de simetria de Lie do fluxo de Ricci de uma variedade diferenciável de dimensão arbitrária, e com métrica genérica, e classificamos sua álgebra de dimensão finita. Adicionalmente, descrevemos um método para obter simetrias de Lie de sistemas de equações diferenciais particulares a partir das simetrias de Lie de sistemas de equações diferenciais gerais. Como uma aplicação estabelecemos o grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci de várias famílias particulares, classificando sua álgebra de Lie em cada caso. Através das simetrias de Lie reduzimos o sistema de equações diferenciais e construímos soluções invariantes.

Palavras-chave: Fluxo de Ricci, grupo de análise moderna.

Abstract

In this work, we compute the group of Lie symmetries of the Ricci flow of an arbitrary dimensional differentiable manifold with generic metric and classify its finite-dimensional algebra. Additionally, we describe a technique for deriving Lie symmetries of specific systems of differential equations from those of generic systems of differential equations. As an application, we establish the group of Lie symmetries of the Ricci flow of several particular families, classifying their Lie algebra in each case. Through Lie symmetries, we reduce the system of differential equations and construct invariant solutions.

Keywords: Ricci flow, modern group analysis.

Lista de tabelas

Tabela 1 – Álgebra de Lie.	57
------------------------------------	----

Lista de símbolos

g	Métrica Riemanniana
Ric_g	Tensor de Ricci de g
G	Grupo de Lie
$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie
X	Gerador Infinitesimal
Γ_f	Gráfico da função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$
$\Delta(x, u^{(k)})$	Equação diferencial de ordem k
Hess_B	Hessiana na métrica g_B
Δ_B	Laplaciano na métrica g_B
∇_B	Gradiente na métrica g_B
Hess	Hessiana na métrica euclídeana
Δ	Laplaciano na métrica euclídeana
∇	Gradiente na métrica euclídeana
∂_t	Derivada parcial com respeito a t
∂_s	Derivada parcial com respeito à variável espacial x^s
$\partial^k u$	O conjunto de todas as derivadas parciais de ordem k com respeito às variáveis independentes de u

Sumário

Introdução	13
1 Preliminares	16
1.1 Teoria de Simetrias de Lie	16
1.1.1 Simetrias de Lie de Equações Algébricas	16
1.1.2 Grupo de Simetrias de Lie de Equações Diferenciais	18
1.1.3 Prolongação	19
1.1.4 Conjuntos ótimos	26
2 Simetrias do Fluxo de Ricci	29
2.1 Condição suficiente	30
2.2 Condição necessária	32
2.3 Grupo de Simetrias de Lie do fluxo de Ricci	45
3 Aplicações	46
3.1 Restrição de Simetrias	47
3.2 Grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci de $B^n \times F^m$ com torção	52
3.3 Grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci em $S^{p+1} \times S^q$	59
3.4 Soluções Invariantes	62
3.4.1 Soluções Invariantes do fluxo de Ricci em métricas torcidas	62
3.4.2 Soluções invariantes para variedades com duas torções	65
4 Considerações Finais	68
 REFERÊNCIAS	 69
 Apêndices	 71
APÊNDICE A Algumas noções básicas	72

Introdução

No século *XIX* Marius Sophus Lie desenvolveu o conceito do grupo contínuo de transformações que deixam invariantes sistemas de equações diferenciais, veja (LIE; ENGEL, 1888). Um dos seus objetivos era descrever um método sistemático para obter tais transformações que na prática eram usadas para resolver tais sistemas de equações. Sophus Lie acabou criando a área chamada grupo-análise de equações diferenciais que é o tópico que estuda tais transformações via a teoria de Lie. No entanto, o trabalho de Lie acabou esquecido, sendo retomado por Ovsiannikov e criando todo um forte grupo de pesquisa. Entre os quais destacamos cientistas como N. Ibragimov e S. Pohozaev os quais foram alunos de Ovsiannikov.

O objeto de interesse neste trabalho é o estudo do fluxo de Ricci do ponto de vista do grupo-análise. Na continuação fazemos uma introdução histórica do fluxo de Ricci.

A história do fluxo de Ricci está relacionada com Poincaré e a classificação de variedades. Henry Jules Poincaré é um dos matemáticos mais importantes da história. Um dos interesses de Poincaré estava ligado na classificação de variedades diferenciáveis, no qual seus primeiros estudos foram com superfícies. Na época dele já era conhecido um resultado de classificação de superfícies fechadas (compactas e sem bordo) e orientáveis em termos do gênero (“número de buracos”) da superfície. Na linha da classificação de superfícies, Poincaré consegue provar um resultado conhecido na literatura como *Geometrização das superfícies*, que estabelece a existência de métricas com curvatura Gaussiana constante, no qual o sinal da curvatura Gaussiana depende do gênero da superfície. Depois de tais resultados gerais surge o problema de tentar fazer classificações semelhantes em variedades de dimensão 3. Assim temos a pergunta: quais são todas as variedades fechadas e orientáveis de dimensão 3? Neste caso Poincaré não consegue avançar devido à complexidade do problema, e escolheu simplificar apenas as variedades com as topologias mais simples possíveis, de grupo de homologia igual à esfera S^3 .

Poincaré conjecturou que a única variedade com todos os grupos de homologia triviais era a esfera S^3 . Provou que sua conjectura era falsa e construiu um exemplo de uma variedade de dimensão 3 com todos os grupos de homologia triviais, mas que não é difeomorfa na esfera S^3 . A ideia geral para provar que não são difeomorfas foi mostrar que tal variedade tem grupo fundamental não trivial. Esta variedade foi chamada *esfera de homologia*, veja (POINCARÉ, 1904). No final do mesmo artigo ele pergunta: é possível que o grupo fundamental de uma variedade seja trivial, mas que esta não seja homeomorfa à esfera? E tal questionamento se tornou uma conjectura: “Toda variedade fechada, orientável, simplesmente conexa de dimensão 3 é homeomorfa à esfera”. Esta foi conhecida como a conjectura de Poincaré.

Nas décadas de 1970 e 1980 William Thurston interessou-se pela geometrização de *variedades primas* de dimensão 3, isto é, se admitem uma métrica Riemanniana com curvatura seccional constante. Nesse assunto ele fez avanços importantes e até o levou a ganhar a *Medalha Field* de 1982, veja por exemplo em (THURSTON, 1982). Esses trabalhos colocam a conjectura de Poincaré em um contexto mais geral (Conjectura de geometrização de Thurston). Um pouco depois, Richard Hamilton inspirado no trabalho de James Eells e Joseph Sampson (EELLS; SAMPSON, 1964) sobre a convergência do fluxo de calor de aplicações harmônicas introduziu uma *versão geométrica* do fluxo de calor, veja (HAMILTON, 1982). Isto é, seja (M^n, g_0) uma variedade Riemanniana e $g(t)$ uma família de métricas. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)}, \quad (1)$$

com $g(0) = g_0$. A equação acima ficou conhecida como o fluxo de Ricci. Hamilton conseguiu provar um teorema de existência para tal fluxo caso M^n seja fechada, e além disso provou que se a métrica g_0 é tal que seu tensor de Ricci for positivo $\operatorname{Ric}_{g_0} > 0$, então M^n é difeomorfa a S^3 , ou seja, ele chegou a uma versão fraca da conjectura de Poincaré. A partir desse momento, o esforço concentrou-se em eliminar a hipótese $\operatorname{Ric}_{g_0} > 0$.

O problema com o fluxo de Ricci é que ele apresenta singularidades em tempos finitos. Grisha Perelman conseguiu entender e classificar tais singularidades e provar a conjectura de Poincaré e a conjectura de geometrização de Thurston, veja em (PERELMAN, 2002; PERELMAN, 2003a; PERELMAN, 2003b). Em resumo, podemos ver a importância da ferramenta do fluxo de Ricci para resolver estes problemas, o qual ainda hoje é um tópico ativo de pesquisa. Como por exemplo o problema de classificação das singularidades do fluxo de Ricci em dimensão 4.

O objetivo deste trabalho é estudar o fluxo de Ricci desde o ponto de vista do grupo de Análise Moderna. Mais concretamente queremos computar os grupos de simetrias de Lie de várias famílias de métricas que satisfazem o fluxo de Ricci, calcular seus sistemas ótimos das suas álgebras de dimensão finita e encontrar soluções invariantes. Até agora só temos a descrição do grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci para o caso bidimensional, veja por exemplo (CIMPOIASU; CONSTANTINESCU, 2006; WANG, 2013). Nesta linha nós damos nossa principal contribuição deste trabalho, a qual é o grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci de uma variedade de dimensão n e métrica arbitrária:

Teorema 1. (*LÓPEZ; DIMAS; BOZHKOV, 2023, Teorema 1*) *O grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci (1) de uma variedade diferenciável de dimensão n com $n \geq 2$ é gerada pelos seguintes geradores infinitesimais:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 &= t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq i}^n g_{ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}}, \\ X_{k+2} &= \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq i}^n \left(g_{ki} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial g_{ij}}, \end{aligned} \quad (2)$$

no qual $\xi^1, \dots, \xi^{n-1}$ e ξ^n são funções arbitrárias e suaves de $x^1, \dots, x^n$, $k \in \{1, \dots, n\}$ e $g = (g_{ij})$ é o tensor métrico.

Também destacamos um método de como obter simetrias de Lie do fluxo de Ricci para famílias de métricas particulares a partir do Teorema 1. Isto é, descrevemos tal método em um contexto geral, veja os Teoremas 2 e 3.

A tese está organizada da seguinte maneira:

- No capítulo 1 introduzimos a teoria básica das simetrias de Lie.
- O capítulo 2 é dedicado à prova do Teorema 1.
- No capítulo 3 descrevemos o método de como obter simetrias de sistemas de Lie de equações diferenciais particulares a partir das simetrias de Lie de equações diferenciais gerais. Usando este método e o Teorema 1 computamos as simetrias do fluxo de Ricci de varias famílias de métricas particulares, calculamos seus conjuntos ótimos e soluções invariantes.
- No capítulo 4 fazemos uma discussão geral do trabalho.

Enunciamos os resultados originais obtidos nesta tese como teoremas enquanto os demais aparecem na forma de proposições.

1 Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar de forma geral a teoria de Simetrias de Lie, a qual se faz estritamente necessária para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

Em geral, assumimos que o leitor está familiarizado com os conceitos de variedades diferenciais e grupos de Lie. Para os não familiarizados recomendamos as seguintes referências (OLVER, 1993, Capítulo 1), (TU, 2011) e (SAN MARTIN, 2016).

Denotaremos M , Ω , e U como variedades diferenciáveis, quando precisarmos especificar a dimensão da mesma escrevemos M^n o qual indica que a variedade diferenciável M tem dimensão n . Dado um grupo de Lie ou grupo de Lie local G , sua álgebra de Lie será denotada como $\mathfrak{g}$, no contexto da teoria de simetrias, e os elementos da álgebra de Lie são chamados *geradores infinitesimais*. A aplicação exponencial do grupo de Lie no campo infinitesimal X , é chamada de grupo a 1-parâmetro, que denotamos como $\exp(tX)$.

1.1 Teoria de Simetrias de Lie

O objetivo desta seção é lançar as bases da teoria de simetrias de Lie com um enfoque geométrico, embasada principalmente nos livros de Olver (OLVER, 1993), Ovsiannikov (OVSIANNIKOV, 1978) e Hydon (HYDON, 2000).

O grupo de simetrias de Lie de um sistema de *equações diferenciais* é o maior grupo local de transformações que atuam nas variáveis independentes e dependentes do sistema com a propriedade de transformar soluções do sistema de equações em outras soluções. Restringimos nossa principal atenção às simetrias dos grupos de Lie locais conexos (simetrias de Lie contínuas). Antes de avançar para o caso das *equações diferenciais*, é vital que tratemos adequadamente da situação mais simples apresentada por grupos de simetrias de Lie de sistemas de equações algébricas.

1.1.1 Simetrias de Lie de Equações Algébricas

Por um sistema de equações algébricas nos referimos ao conjunto de nível

$$F_\nu(x) = 0, \quad \forall \nu \in \{1, \dots, l\},$$

no qual $F_1(x), \dots, F_l(x)$ são funções suaves definidas para $x \in M$. Uma *solução* é um ponto $x \in M$ no qual $F_\nu(x) = 0$, para toda $\nu \in \{1, \dots, l\}$. Um *grupo de simetrias de Lie* de um sistema de equações algébricas é um grupo local de transformações G agindo em M com a propriedade que G mapeia soluções do sistema a soluções do sistema. Em geral podemos definir o conceito de invariância de subconjuntos e conjuntos de nível.

Definição 1. *Seja G um grupo local de transformações agindo em M . Um subconjunto $\mathcal{S} \subset M$ é chamado G -invariante e G é chamado um grupo de simetrias de Lie de $\mathcal{S}$, se $g \cdot x \in \mathcal{S}$ sempre que $x \in \mathcal{S}$, $g \in G$ e $g \cdot x$ esteja bem definida, em que $g \cdot x$ denota a ação do grupo.*

Definição 2. *Seja G um grupo local de transformações agindo em M . Uma função $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma função G -invariante se para todo $x \in M$ e $g \in G$ temos que*

$$F(g \cdot x) = F(x), \quad (1.1)$$

sempre que $g \cdot x$ esteja bem definida.

Exemplo 1. *Considere o grupo a 1-parâmetro de translações em $\mathbb{R}^2$ denotado como G_c*

$$(x, y) \rightarrow (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

no qual c é uma constante fixa. Então a função

$$F(x, y) = x - cy,$$

é G_c -invariante dado que

$$F(x + c\varepsilon, y + \varepsilon) = F(x, y),$$

para todo ε .

A seguinte proposição estreita a relação entre invariância dos conjuntos de nível e a natureza mesma da função ser invariante.

Proposição 1. ([OLVER, 1993, Proposição 2.5](#)) *Se G age em M e $F : M \rightarrow \mathbb{R}^l$ é uma função suave, então F é uma função G -invariante se, e somente se, o conjunto de nível $\{x \in M; F(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}^l$ é um subconjunto G -invariante de M .*

O grande poder da teoria de grupos de Lie reside na crucial observação de que podemos substituir as condições complicadas e não lineares de (1.1) para a invariância de um conjunto ou função pela condição linear de (1.2).

Proposição 2. ([OLVER, 1993, Proposição 2.6](#)) *Seja G um grupo conexo de transformações agindo em M . Uma função suave $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função G -invariante se, e somente se,*

$$X(F)(x) = 0, \quad (1.2)$$

para todo $x \in M$, e para todo gerador infinitesimal X de G .

Observação 1. *Considerando a proposição acima, podemos notar que os geradores infinitesimais podem ser vistos como campos que estão no núcleo da aplicação diferencial dF .*

Para o caso do conjunto solução de um sistema de equações algébricas $F(x) = 0$, o critério de invariância infinitesimal precisa de uma hipótese adicional (carta adaptada).

Proposição 3. (*OLVER, 1993, Teorema 2.8*) *Seja G um grupo de Lie local conexo de transformações agindo em M^m . Seja $F : M^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $l \leq m$ uma aplicação suave, defina o sistema de equações algébricas*

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_l(x)) = \mathbf{0},$$

e suponha que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^l$ seja um valor regular de F . Então G é um grupo de simetrias de Lie do sistema se, e somente se,

$$X(F_v(x)) = 0, \quad \forall v \in \{1, \dots, l\},$$

sempre que $F(x) = \mathbf{0}$, para todo gerador infinitesimal X de G .

Finalmente, introduzimos o conceito de função e conjunto localmente invariante.

Definição 3. *Seja G um grupo local de transformações agindo em M . Um subconjunto $\mathcal{S} \subset M$ é chamado **localmente G -invariante**, se para todo $x \in \mathcal{S}$ existe uma vizinhança G_x da identidade em G , tal que $g \cdot x \in \mathcal{S}$ sempre que $g \in G_x$. Uma função suave $F : U \rightarrow N$, no qual $U \subset M$ é aberto, é chamada **localmente G -invariante**, se para cada $x \in U$ existe uma vizinhança G_x da identidade em G tal que $F(g \cdot x) = F(x)$ para todo $g \in G_x$.*

A seguir abordaremos o conceito de simetria de Lie de uma equação diferencial.

1.1.2 Grupo de Simetrias de Lie de Equações Diferenciais

Suponha que o sistema de equações diferenciais Δ envolve n e q variáveis independentes e dependentes, respectivamente.

Um grupo de simetrias de Lie de Δ é um grupo local de transformações G agindo no conjunto aberto $\mathcal{K} \subset \Omega \times U$ no qual G mapeia soluções de Δ a soluções de Δ . Em geral Ω e U podem ser variedades diferenciáveis.

Detalhamos um pouco melhor o significado de mapear funções a funções. Considere a função $u = f(x)$, e a identificamos com seu gráfico

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset \Omega \times U.$$

Note que Γ_f é uma subvariedade de dimensão q de $\Omega \times U$. Considere o fibrado trivial $(\Gamma_f, \text{pr}_1, \Omega)$, no qual pr_1 é a projeção das coordenadas independentes, as seções de E são funções suaves $s : \Omega \rightarrow E$ tais que

$$\text{pr}_1 \circ s = \text{Id}_\Omega.$$

Supondo que G age suavemente em E e seja a seção $s = \Gamma_f$, a transformação de Γ_f por g é

$$g \cdot \Gamma_f = \{(\hat{x}, \hat{u}) = g \cdot (x, u); (x, u) \in \Gamma_f\},$$

a qual é uma subvariedade dado que g é um difeomorfismo. Porém, o conjunto $g \cdot \Gamma_f$ não é necessariamente o gráfico de outra função. Mas, dado que G age suavemente e o elemento da identidade $e \in G$ ($e \cdot \Gamma_f = \Gamma_f$), pelo teorema da função inversa temos que existe uma vizinhança G_x na identidade G que transforma $g \cdot \Gamma_f = \Gamma_{\hat{f}}$ com a propriedade que $\Gamma_{\hat{f}}$ é o gráfico de uma função suave $\hat{u} = \hat{f}(\hat{x})$.

A seguir definimos o conceito de simetria de Lie de um sistema de equações diferenciais.

Definição 4. *Seja G um grupo de Lie local agindo em $\Omega \times U$. G é um grupo de simetrias de Lie do sistema de equações diferenciais Δ se G transforma soluções do sistema em soluções, isto é, se $u = f(x)$ é uma solução de Δ então $g \cdot \Gamma_f$ é o gráfico de uma função que também é solução de Δ , sempre que $g \cdot \Gamma_f$ estiver bem definida.*

Exemplo 2. *Seja $u_t = u_{xx}$ a equação de calor unidimensional, considere o grupo a 1-parâmetro*

$$g_\varepsilon : (x, t, u) \longmapsto (x + 2\varepsilon t, t, e^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t} u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Então g_ε é um grupo de simetrias. De fato, se $u = f(x, t)$ é solução da equação do calor, a ação do grupo no gráfico desta função é

$$(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}) = (x + 2\varepsilon t, t, e^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t} u),$$

então $t = \hat{t}, x = \hat{x} - 2\varepsilon \hat{t}$. Assim

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{t}) = e^{-\varepsilon \hat{x} + \varepsilon^2 \hat{t}} u(\hat{x} - 2\varepsilon \hat{t}, \hat{t}),$$

e por cálculos diretos é possível provar que

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{u}_{\hat{t}}.$$

O exemplo ilustra uma aplicação do grupo de simetrias de Lie que permite construir soluções novas a partir das já conhecidas.

Na seguinte subseção abordamos o conceito da equação diferencial do ponto de vista geométrico, necessário para aproveitar as ferramentas de invariâncias de equações algébricas.

1.1.3 Prolongação

Devido ao fato que queremos usar a noção de invariância de subconjuntos de uma variedade, precisamos substituir a noção de um sistema de equações diferenciais por

um objeto geométrico. Para fazer isto, primeiro vamos “prolongar” o espaço $\Omega \times U$ e dotar de uma estrutura geométrica a tal espaço. Esta construção é uma versão simplificada da teoria dos fibrados de jatos.

Definição 5. Dado o fibrado $(\Omega \times U, \text{pr}_1, \Omega)$ e uma seção $s = \text{Id}_\Omega \times f$, definimos o k -jato de s em um ponto x por

$$j_x^k s = (s(x), \partial_r f(x)),$$

no qual são tomadas todas as tuplas $r = (r_1, \dots, r_l)$ com $l \leq k$.

Em outras palavras o k -jato carrega toda a informação da função f e das suas derivadas até ordem k .

Definição 6. Dado o fibrado $(\Omega \times U, \text{pr}_1, \Omega)$, o espaço dos jatos de ordem k é

$$\{j_x^k s : x \in \Omega, s \text{ é seção de } (\Omega \times U, \text{pr}_1, \Omega)\},$$

o qual denotamos por $\Omega \times U^{(k)}$.

É possível provar que tal espaço tem estrutura de variedade diferenciável, veja (OLVER, 1993, Capítulo 3) ou (SAUNDERS, 1989, Capítulo 6). Dada uma função suave $u : \Omega \rightarrow U$, podemos associar $\text{pr}^{(k)} u : \Omega \rightarrow U^{(k)}$ dado por $\text{pr}^{(k)} u(x) = (u(x), \partial u(x), \dots, \partial^k u(x))$, e os pontos de seu gráfico pertencem a $\Omega \times U^{(k)}$, os quais por simplicidade denotamos por $(x, u^{(k)})$.

Agora podemos identificar a equação diferencial como uma subvariedade mergulhada e fechada do espaço de jatos. De fato, um sistema de equações diferenciais de k -ésima ordem, com n variáveis independentes e q variáveis dependentes é dado por um sistema de equações diferenciais

$$\Delta_\nu(x, u^{(k)}) = 0, \quad \forall \nu \in \{1, \dots, l\},$$

envolvendo $x = (x^1, \dots, x^n)$, $u = (u^1, \dots, u^q)$ e as derivadas de u com respeito a x até ordem k . As funções $\Delta(x, u^{(k)}) = (\Delta_1(x, u^{(k)}), \dots, \Delta_l(x, u^{(k)}))$ assumiremos sendo suaves em seus argumentos, Δ pode ser vista como uma função suave do espaço de jatos $\Omega \times U^{(k)}$ a $\mathbb{R}^l$,

$$\Delta : \Omega \times U^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}^l.$$

As próprias equações dizem quando a função Δ é zero em $\Omega \times U^{(k)}$, assim $\Delta(x, u^{(k)})$ está determinada pela subvariedade

$$\mathcal{S}_\Delta = \{(x, u^{(k)}) : \Delta(x, u^{(k)}) = \mathbf{0}\} \subset \Omega \times U^{(k)}$$

($\mathcal{S}_\Delta$ é subvariedade fechada de $\Omega \times U^{(k)}$ se o zero é valor regular da aplicação Δ). Podemos identificar o sistema de equações diferenciais com sua subvariedade mergulhada e fechada correspondente, isto é, associar uma equação diferencial a um objeto geométrico. Daqui para frente denotaremos apenas como $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}_\Delta$.

Exemplo 3. Considere a equação de calor unidimensional

$$u_t = u_{xx}.$$

Assim $\Omega = \mathbb{R}^2$ e $U = \mathbb{R}$. Podemos reescrever geometricamente a equação diferencial como

$$\Delta : \Omega \times U^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por $\Delta(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = u_t - u_{xx}$. Dado que 0 é um valor regular da aplicação Δ , temos que

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) \in \Omega \times U^{(2)}; u_t - u_{xx} = 0 \right\},$$

é uma subvariedade mergulhada e fechada de $\Omega \times U^{(2)}$.

Uma solução suave de Δ é uma função suave $u = f(x)$ tal que

$$\Delta_\nu(x, \text{pr}^{(k)} f(x)) = 0, \quad \forall \nu \in \{1, \dots, l\}.$$

Esta condição é equivalente à afirmação de que o gráfico da prolongação $\text{pr}^{(k)} f(x)$ deve estar inteiramente dentro da subvariedade $\mathcal{S}$,

$$\Gamma_f^{(k)} = \{(x, \text{pr}^{(k)} f(x))\} \subset \mathcal{S}.$$

Agora queremos estabelecer o critério infinitesimal de simetria de Lie. Antes precisamos da noção de prolongamento da ação de um grupo local.

Definição 7. Seja G um grupo de Lie local agindo no conjunto aberto $\mathcal{X} \subset \Omega \times U$. Então existe uma ação induzida de G no espaço de jatos $\Omega \times U^{(k)}$ (para elementos g perto da identidade de G), chamada k -ésima **prolongação** de G a qual é definida e denotada como

$$\text{pr}^{(k)} g \cdot (x, u^{(k)}) := \text{pr}^{(k)}(\hat{x}, \hat{u}),$$

no qual $(\hat{x}, \hat{u}) = g \cdot (x, u)$.

Exemplo 4. Considerando o grupo a 1-parâmetro do exemplo 2. Dada uma função suave $u = f(x)$, queremos encontrar

$$\text{pr}^{(1)} g_\varepsilon \cdot (x, t, u, u_x, u_t) = \text{pr}^{(1)}(g_\varepsilon \cdot (x, t, u)).$$

Seja o ponto $(x^0, t^0, u^0, u_x^0, u_t^0) \in X \times U^{(1)}$. Pelo que foi feito no exemplo 2, sabemos que

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{t}) = e^{-\varepsilon \hat{x} + \varepsilon^2 \hat{t}} u(\hat{x} - 2\varepsilon \hat{t}, \hat{t}).$$

Logo

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\hat{x}}(x^0, t^0, u^0, u_x^0, u_t^0) &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(e^{-\varepsilon \hat{x} + \varepsilon^2 \hat{t}} u(\hat{x} - 2\varepsilon \hat{t}, \hat{t}) \right) \Big|_{(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}, \hat{u}_x, \hat{u}_t) = (x^0, t^0, u^0, u_x^0, u_t^0)} \\ &= e^{-\varepsilon x^0 + \varepsilon^2 t^0} (-\varepsilon u^0 + u_x^0), \end{aligned}$$

no qual $\hat{x} = x^0 + 2\varepsilon t^0$ e $\hat{t} = t^0$. De forma análoga

$$\hat{u}_{\hat{t}}(x^0, t^0, u^0, u_x^0, u_t^0) = e^{-\varepsilon x^0 + \varepsilon^2 t^0} (\varepsilon^2 u^0 - 2\varepsilon u_x^0 + u_t^0).$$

Assim

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x^0 + 2\varepsilon t^0, \\ \hat{t} &= t^0, \\ \hat{u} &= e^{-\varepsilon x^0 + \varepsilon^2 t^0} u^0, \\ \hat{u}_{\hat{x}} &= e^{-\varepsilon x^0 + \varepsilon^2 t^0} (-\varepsilon u^0 + u_x^0), \\ \hat{u}_{\hat{t}} &= e^{-\varepsilon x^0 + \varepsilon^2 t^0} (\varepsilon^2 u^0 - 2\varepsilon u_x^0 + u_t^0).\end{aligned}$$

A seguinte Proposição relaciona as simetrias de Lie de uma equação diferencial com a invariância do subconjunto $\mathcal{S}$.

Proposição 4. (*OLVER, 1993, Teorema 2.27*) Seja $\mathcal{K}$ um conjunto aberto de $\Omega \times U$ e suponha que $\Delta(x, u^{(k)}) = 0$ é um sistema de equações diferencial de ordem k definida em $\mathcal{K}$, com a subvariedade fechada correspondente $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}^{(k)}$. Seja G um grupo de Lie local agindo em $\mathcal{K}$ tal que $\text{pr}^{(k)} g \cdot (x, u^{(k)}) \in \mathcal{S}$ sempre que $(x, u^{(k)}) \in \mathcal{S}$, para todo $g \in G$ que esteja bem definido. Então G é um grupo de simetrias de Lie do sistema de equações diferenciais.

O próximo passo é estabelecer o critério de simetria infinitesimal. Primeiro definimos a prolongação de campos aplicada a funções no espaço $\Omega \times U^{(k)}$.

Definição 8. Seja $\mathcal{K} \subset \Omega \times U$ aberto e suponha que X é um campo suave em $\mathcal{K}$, com correspondente grupo a 1-parâmetro $\exp(\varepsilon X)$ (local). Então a k -ésima prolongação de X , denotada por $X^{(k)}$, será o campo suave no espaço $\mathcal{K}^{(k)} \subset \Omega \times U^{(k)}$ tal que

$$X^{(k)}(x, u^{(k)}) := \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\text{pr}^{(k)} \exp(\varepsilon X) \cdot (x, u^{(k)})) \right|_{\varepsilon=0},$$

para todo $(x, u^{(k)}) \in \mathcal{K}^{(k)}$.

Exemplo 5. Pelo que foi feito nos exemplos 2 e 4, por cálculo direto, segue

$$\begin{aligned}\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= 2t, & \left. \frac{d\hat{t}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= 0, & \left. \frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= -xu, \\ \left. \frac{d\hat{u}_x}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= -xu_x - u, & \left. \frac{d\hat{u}_t}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= -xu_t - 2u_x.\end{aligned}$$

Logo

$$X^{(1)} = 2t \frac{\partial}{\partial x} - (xu) \frac{\partial}{\partial u} - (xu_x + u) \frac{\partial}{\partial u_x} - (xu_t + 2u_x) \frac{\partial}{\partial u_t}. \quad (1.3)$$

Temos agora todas as ferramentas para estabelecer o critério infinitesimal de simetria de Lie de um sistema de equações diferenciais.

Proposição 5. ([OLVER, 1993](#), Teorema 2.31) *Crítério de Simetria infinitesimal. Seja*

$$\Delta_\nu(x, u^{(k)}) = 0, \quad \forall \nu \in \{1, \dots, l\},$$

um sistema de equações diferenciais tal que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^l$ é um valor regular da aplicação $\Delta : \Omega \times U^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}^l$. Seja G um grupo de Lie local agindo no aberto $\mathcal{X} \subset \Omega \times U$, e

$$X^{(k)}[\Delta_\nu(x, u^{(k)})] = 0, \quad \forall \nu \in \{1, \dots, l\}, \quad \text{sempre que,} \quad \Delta(x, u^{(k)}) = \mathbf{0}, \quad (1.4)$$

para todo gerador infinitesimal X da álgebra de Lie de G . Então G é um grupo de simetrias de Lie do sistema de equações diferenciais.

Observação 2. *Note que pela unicidade das soluções de equações diferenciais ordinárias cada grupo de simetrias a 1-parâmetro fica unicamente determinado por seu gerador infinitesimal. Por tal motivo é comum referir-se ao gerador infinitesimal X como simetria de Lie.*

Olhando a Proposição 5, surge a pergunta natural se pelo critério de simetria “infinitesimal” (1.4) obtemos todas as simetrias do sistema de equações diferenciais. A resposta é que precisamos de um argumento técnico adicional. O problema está em que se houver um ponto $(x, u^{(k)}) \in \mathcal{S}$ não temos a garantia de que existe alguma função suave que seja solução do sistema de equações e que seu gráfico da k -ésima prolongação passe por este ponto. De fato esta condição é que garante que pelo *critério de simetria infinitesimal* obtemos todas as simetrias, veja ([OLVER, 1993](#), Teorema 2.71). Aqui entra em jogo o Teorema de Cauchy-Kovalevskaya, o qual está relacionado à analiticidade do sistema de equações diferenciais de uma grande família de equações diferenciais com o fato da existência da função com as características discutidas acima, veja ([OLVER, 1993](#), Corolário 2.74).

O próximo passo é determinar uma fórmula explícita para calcular a prolongação de um gerador infinitesimal sem a necessidade de calcular o fluxo $\text{pr}^{(k)} \exp(\varepsilon X) \cdot (x, u^{(k)})$ dado que esta forma em geral é complicada. Antes disso precisamos da definição da derivada total em relação às variáveis independentes x^i no espaço $\Omega \times U^{(k)}$.

Definição 9. *Seja $P(x, u^{(k)})$ uma função suave de x, u e as derivadas de u até ordem k , definida no aberto $\mathcal{X}^{(k)} \subset \Omega \times U^{(k)}$. A **derivada total** de P com respeito a x^i é a única função suave $D_i P(x, u^{(k+1)})$ definida em $\mathcal{X}^{(k+1)}$ e dependente das derivadas de u até ordem $k+1$, com a propriedade que se $u = f(x)$ for uma função suave, então*

$$D_i P(x, \text{pr}^{(k+1)}(f(x))) = \frac{\partial}{\partial x^i} \{P(x, \text{pr}^{(k)}(f(x)))\}.$$

Em outras palavras, $D_i P$ se obtém diferenciando P com respeito a x^i tratando a u e suas derivadas como funções de x . Temos a seguinte proposição.

Proposição 6. Dada $P(x, u^{(k)})$, a i -ésima derivada total de P tem a seguinte forma geral

$$D_i P = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha}, \quad (1.5)$$

em que, $J = (j_1, \dots, j_r)$ e

$$u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J}{\partial x^i} = \frac{\partial^{|J|+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_r}}.$$

Em (1.5) a soma é sobre todos os J tais que $0 \leq |J| \leq k$.

A partir da proposição acima enunciamos a seguinte Proposição.

Proposição 7. (OLVER, 1993, Teorema 2.36) Seja

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \eta_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

o campo definido no conjunto aberto $\mathcal{K} \subset \Omega \times U$. Então a k -ésima prolongação de X é o campo definido no espaço $\mathcal{K}^{(k)} \subset \Omega \times U^{(k)}$ definido como

$$X^{(k)} = X + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \eta_\alpha^J(x, u^{(k)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha},$$

o segundo somatório é sobre todos os multi-índices $J = (j_1, \dots, j_r)$ com $1 \leq j_r \leq n$, $1 \leq r \leq k$. As funções η_α^J são dadas por

$$\eta_\alpha^J(x, u^{(k)}) = D_J \left(\eta_\alpha - \sum_{i=1}^n \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^n \xi^i u_{J,i}^\alpha, \quad (1.6)$$

no qual $u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ e $u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i}$.

Exemplo 6. Considere o grupo de simetrias do exemplo 2. Pelo feito no exemplo 5 seu campo infinitesimal é

$$X = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}$$

Assim $\eta = -xu$, pela Proposição prévia temos que

$$X^{(1)} = X + \eta^x(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_t},$$

devido a (1.6)

$$\begin{aligned} \eta^x &= D_x(-xu - 2tu_x) + 2tu_{xx} \\ &= -u - xu_x. \end{aligned}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned}\eta^t &= D_t(-xu - 2tu_x) + 2tu_{xx} \\ &= -xu_t - 2u_x.\end{aligned}$$

Portanto

$$X^{(1)} = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u} - (u + xu_x) \frac{\partial}{\partial u_x} - (xu_t + 2u_x) \frac{\partial}{\partial u_t}. \quad (1.7)$$

Note que este campo coincide com (1.3).

O seguinte resultado nos diz que o espaço vetorial dos geradores infinitesimais tem uma estrutura de álgebra de Lie.

Proposição 8. (*OLVER, 1993, Teorema 2.39 e Corolário 2.40*) *Seja Δ um sistema de equações diferenciais tais que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^l$ é um valor regular de $\Delta : \Omega \times U^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}^l$. Então, o conjunto de todos os geradores infinitesimais do sistema de equações diferenciais forma uma álgebra de Lie.*

O próximo conceito a discutir é importante do ponto de vista do estudo das leis de conservação e generalizações de simetrias.

Seja

$$X = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

o gerador infinitesimal que é simetria de Lie do sistema de equações diferenciais $\Delta(x, u^{(k)})$. A *característica* de X , denotada por Q_X é o campo infinitesimal no espaço $\Omega \times U^{(1)}$ definido como

$$Q_X = \sum_{\alpha=1}^q Q_\alpha(x, u, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

no qual

$$Q_\alpha(x, u, u^{(1)}) = \eta^\alpha - \sum_{i=1}^n \xi^i u_i^\alpha.$$

Note que $Q_i(x, u, u^{(1)})$ é linear com respeito às derivadas de u . Em geral a teoria de simetrias de Lie pode ser desenvolvida usando características ao invés de campos!

Exemplo 7. *Considere a simetria do exemplo 2. Pelo exemplo 6 seu respectivo campo infinitesimal é*

$$X = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}.$$

Sua correspondente característica é

$$Q_X = (-xu - 2tu_x) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Através dos geradores infinitesimais das simetrias de Lie é possível reduzir o número de variáveis independentes ou a ordem do sistema de equações diferenciais, a priori tal redução pode conduzir a encontrar soluções particulares e em certas ocasiões a solução geral. Elas também podem nos permitir encontrar novas soluções a partir de soluções conhecidas. As soluções que são invariantes por um grupo de simetrias são denominadas *soluções invariantes*. Na próxima seção queremos discutir uma estratégia de como obter todas as soluções invariantes de uma forma eficaz, isto nos leva ao conceito de conjunto ótimo.

1.1.4 Conjuntos ótimos

Seja G o grupo de simetrias de Lie do sistema de equações

$$\Delta(x, u^{(k)}) = 0, \quad (1.8)$$

(vamos supor que a dimensão de G é finita) e seja H^s um subgrupo de Lie de dimensão s . Sabemos que a partir deste subgrupo poderíamos obter uma família de soluções invariantes. Nosso objetivo nesta subseção é dividir o conjunto de todas as soluções invariantes de um sistema de equações diferenciais em classes de equivalência. Duas soluções invariantes são equivalentes se uma pode ser mapeada para a outra por um grupo de simetrias de Lie. A classificação simplifica muito o problema de determinar todas as soluções invariantes. Só é necessário encontrar uma solução invariante (geral) de cada classe; então toda a classe pode ser construída aplicando as simetrias. Essa estratégia minimiza o esforço necessário para obter soluções invariantes.

O seguinte resultado ilustra como é possível obter um método efetivo de tal classificação.

Proposição 9. *Seja G um grupo de Lie que age sobre o aberto $\mathcal{K} \subset \Omega \times U$, e seja $H^s \subset G$ um subgrupo de Lie. Então vale a seguinte proposição: se $\Gamma \subset \mathcal{K}$ é um subconjunto (localmente) invariante por H^s , dado $g \in G$, definido sobre todo Γ , então $g\Gamma = \{gx; x \in \Gamma\}$ é (localmente) invariante pelo subgrupo de conjugação $gH^s g^{-1} = \{ghg^{-1}; h \in H^s\}$.*

Demonstração. Dado que $H^s \Gamma \subset \Gamma$, segue que $gH^s \Gamma \subset g\Gamma$. Assim $gH^s g^{-1}(g\Gamma) \subset g\Gamma$. $\square$

Observação 3. *Como ilustração da Proposição 9, considere o caso $s = 1$. O conjunto Γ deve ser visto como o gráfico de uma função suave $u = f(x)$ que é solução de (1.8). Dado o grupo de simetrias de Lie a 1-parâmetro $(\exp(tX))_t$, a nova solução obtida através da ação deste subgrupo aplicada a Γ mantém a mesma forma se aplicamos a ação do subgrupo $(\exp(rY)\exp(tX)\exp(-rY))_t$, no qual Y é uma simetria de Lie qualquer de (1.8).*

Através deste resultado podemos formular a seguinte proposição.

Proposição 10. (*OLVER, 1993, Proposição 3.6*) *Seja G o grupo de simetrias de Lie do sistema de equações diferenciais (1.8) e seja $H^s \subset G$ um subgrupo de Lie. Se $u = f(x)$ é uma solução de (1.8) e $g \in G$ é outro elemento do grupo, então a função transformada $u = \tilde{f}(x) = g.f(x)$ é uma solução $\tilde{H}^s$ invariante, onde $\tilde{H}^s = g H^s g^{-1}$.*

Uma solução de (1.8) invariante pelo subgrupo H_1^s vamos denotar como (f_1, H_1^s) . Então, podemos definir a relação entre soluções invariantes por algum subgrupo de dimensão s . Dados (f_1, H_1^s) e (f_2, H_2^s) dizemos que f_1 está relacionada com f_2 , $(f_1 \sim f_2)$ se existir $g \in G$ tal que $H_1^s = g H_2^s g^{-1}$.

Não é difícil provar que a relação definida acima é de equivalência e pela Proposição 10 a partir de cada classe de equivalência é possível obter todas as soluções invariantes por algum subgrupo de dimensão s . Em outras palavras o problema de classificação de soluções invariantes por subgrupos se reduz ao problema de classificação de subgrupos por conjugação.

A pergunta é: como classificar os subgrupos de Lie por conjugação? Quando procuramos os subgrupos conexos é possível transformar o problema em um problema de classificação de subálgebras de Lie.

Proposição 11. (*OLVER, 1993, Proposição 3.7*) *Seja H^s e $\tilde{H}^s$ subgrupos de Lie conexos do grupo de Lie G com subálgebras de Lie $\mathfrak{h}$ e $\tilde{\mathfrak{h}}$ respectivamente. Então $\tilde{H}^s = g H^s g^{-1}$ são subgrupos conjugados se e somente se $\tilde{\mathfrak{h}} = \text{Ad}(g)(\mathfrak{h})$ são subálgebras conjugadas.*

Finalmente definimos o conceito de conjunto ótimo.

Definição 10. *Seja G um grupo de Lie. Um Conjunto Ótimo de subgrupos de Lie de dimensão s é uma lista de subgrupos de dimensão s com a propriedade que qualquer subgrupo de Lie de dimensão s é o conjugado de um único da lista. Similarmente, uma lista de subálgebras de dimensão s forma um conjunto ótimo, se toda subálgebra de Lie de dimensão s é equivalente a uma única subálgebra da lista por algum elemento da representação adjunta: $\tilde{\mathfrak{h}} = \text{Ad}(g)(\mathfrak{h})$, $g \in G$.*

Observação 4. *Segue da definição que podemos definir a relação de equivalência entre subálgebras de Lie como*

$$\mathfrak{h}_1 \sim \mathfrak{h}_2,$$

$$\text{se } \mathfrak{h}_1 = e^{\text{ad}(X_1)} \dots e^{\text{ad}(X_n)} \mathfrak{h}_2, \quad X_i \in \mathfrak{g}.$$

Uma ideia para atacar o problema de classificação de dimensão 1 é encontrar funções que sejam invariantes pela representação adjunta, isto é, uma função

$$I : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R},$$

suave, tal que $I(\text{Ad}(g)X) = I(X)$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$. Note que se $I(X_1) \neq I(X_2)$, então X_1 e X_2 não podem ser equivalentes. Para uma construção de tais funções recomendamos (HYDON, 2000, Capítulo 10). Para o caso de construção de conjuntos ótimos de subálgebras de dimensão 2, Ovsiannikov (OVSIANNIKOV, 1978) aborda o problema usando espaços invariantes da aplicação adjunta $\text{ad}(\cdot)$. Para a construção dos conjuntos ótimos em alta dimensão recomendamos a leitura (PATERA; WINTERNITZ; ZASSENHAUS, 1975).

2 Simetrias do Fluxo de Ricci

Neste capítulo, consideramos o problema de determinar o *grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci para uma variedade Riemanniana de dimensão n com $n \geq 2$* .

Seja $(g(t))_t$ uma família de métricas Riemannianas a 1-parâmetro sobre M^n . O fluxo de Ricci é definido como

$$\frac{\partial g}{\partial t} + 2 \text{Ric}_{g(t)} = \mathbf{0},$$

no qual $\text{Ric}_{g(t)}$ é o tensor de Ricci da métrica $g(t)$. Considere o sistema de coordenadas locais (U, x) de M^n , a equação do fluxo de Ricci em coordenadas locais é

$$2R_{\alpha\beta} + \partial_t g_{\alpha\beta} = 0,$$

em que $g_{\alpha\beta}$ são os coeficientes do tensor métrico no tempo t , $\partial_t g_{\alpha\beta}$ denota a derivada parcial com respeito a t de $g_{\alpha\beta}$ e

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \{ -\partial_\gamma \partial_\delta g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\beta \partial_\delta g_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\delta\beta} \} \\ & + g^{\gamma\delta} g^{\tau\rho} \{ \Gamma_{\tau\gamma\alpha} \Gamma_{\rho\delta\beta} - \Gamma_{\tau\gamma\delta} \Gamma_{\rho\alpha\beta} \}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

no qual ∂_s denota a derivada parcial com respeito à varável espacial x^s , e $\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta = \Gamma_{\tau\gamma\alpha} g^{\tau\beta}$ com

$$\Gamma_{\tau\gamma\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\tau\gamma} + \partial_\gamma g_{\tau\alpha} - \partial_\tau g_{\gamma\alpha}).$$

Com a ajuda do software *Wolfram Mathematica usando o pacote SYM*, (DIMAS; TSOUBELIS, 2005) e (DIMAS; TSOUBELIS, 2006), conseguimos calcular o grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci para $n = 2, 3$ e 4, com o qual chegamos à seguinte conjectura:

Conjectura 1. (LÓPEZ; DIMAS; BOZHKOV, 2023) *As simetrias de Lie do fluxo de Ricci $(M^n, g(t))_t$ de uma variedade Riemanniana com $n \geq 2$ é gerada pelos seguintes geradores infinitesimais:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 &= t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq i}^n g_{ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}}, \\ X_{k+2} &= \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq i}^n \left(g_{ki} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial g_{ij}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

no qual $\xi^1, \dots, \xi^{n-1}$ e ξ^n são funções suaves arbitrárias de $x^1, \dots, x^n$, $k \in \{1, \dots, n\}$ e $g = (g_{ij})$ é o tensor métrico.

O objetivo principal daqui em diante é provar a conjectura. Assim organizamos este capítulo da seguinte forma: na próxima seção provamos uma condição de suficiência

para um campo gerador infinitesimal ser uma simetria do fluxo de Ricci, na seção 2.3 demonstramos a condição necessária para um campo gerador infinitesimal ser uma simetria de Lie do fluxo de Ricci, na seção 2.4 finalmente apresentamos o argumento formal que garante que o critério infinitesimal nos permite obter todas as simetrias de Lie do fluxo de Ricci, bem como a classificação da sua álgebra de Lie de dimensão finita.

2.1 Condição suficiente

O objetivo principal nesta seção é apresentar uma *condição de suficiência* para um campo gerador infinitesimal ser simetria de Lie do fluxo de Ricci. Em concreto provaremos que os geradores infinitesimais descritos na conjectura são simetrias de Lie do fluxo de Ricci, para isto computamos seus fluxos a 1-parâmetro e provamos que mapeiam soluções do fluxo de Ricci a soluções.

- O grupo a 1-parâmetro gerado por X_1 é

$$\Psi_\varepsilon(x, t, g_{ij}) = (\hat{x}, \hat{t}, \hat{g}_{ij}) = (x, t + \varepsilon, g_{ij}),$$

segue que

$$\hat{g}_{ij}(\hat{x}, \hat{t}) = g(\hat{x}, \hat{t} - \varepsilon).$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{g}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{\partial}{\partial t} g(\hat{x}, \hat{t} - \varepsilon) \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} g(\hat{x}, t) = -2 \operatorname{Ric}_{g(\hat{x}, t)} = -2 \operatorname{Ric}_{g(\hat{x}, \hat{t} - \varepsilon)} = -2 \operatorname{Ric}_{\hat{g}(\hat{x}, \hat{t})}.$$

Portanto, X_1 é simetria de Lie do fluxo de Ricci.

- Para X_2 , note que o tensor de Ricci é invariante por “scalings”, isto é, $\operatorname{Ric}_{cg} = \operatorname{Ric}_g$ para todo $c > 0$, veja (BESSE, 2007, Teorema 1.159). Por outro lado, o grupo a 1-parâmetro gerado por X_2 é

$$\Psi_\varepsilon(x, t, g_{ij}) = (\hat{x}, \hat{t}, \hat{g}_{ij}) = (x, e^\varepsilon t, e^\varepsilon g_{ij}),$$

com o qual

$$\hat{g}_{ij}(\hat{x}, \hat{t}) = e^\varepsilon g_{ij}(\hat{x}, e^{-\varepsilon} \hat{t}).$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{g}(\hat{x}, \hat{t}) &= e^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} g(\hat{x}, e^{-\varepsilon} \hat{t}) \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} g(\hat{x}, t) = -2 \operatorname{Ric}_{g(\hat{x}, t)} \\ &= -2 \operatorname{Ric}_{e^\varepsilon g(\hat{x}, e^{-\varepsilon} \hat{t})} = -2 \operatorname{Ric}_{\hat{g}(\hat{x}, \hat{t})}. \end{aligned}$$

Portanto, X_2 é simetria de Lie do fluxo de Ricci.

- Finalmente, analisamos os geradores infinitesimais X_{k+2} da Conjectura. Provamos que eles são simetrias de Lie e surgem devido ao fato das equações do fluxo de Ricci serem independentes do sistema de coordenadas (equação tensorial). Seja $\hat{x} = \Psi_\varepsilon(x)$ o fluxo de:

$$\begin{cases} \left. \frac{d\hat{x}^k}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \xi^k(x), \\ \left. \hat{x}^k \right|_{\varepsilon=0} &= x^k. \end{cases}$$

Considere g_{ij} o tensor métrico em coordenadas x . Sabemos que o tensor métrico em coordenadas $\hat{x}$ é determinado pela seguinte relação:

$$\hat{g}_{sl} = \sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^s} \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^l}. \quad (2.3)$$

Analisamos $\frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^k}$ ao redor de $\varepsilon = 0$. Pelas propriedades de fluxo:

$$x^i = (\Xi_\varepsilon(\hat{x}^i))^{-1} = (\Xi_\varepsilon^i)^{-1} = \Xi_{-\varepsilon}^i.$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^s} &= \left. \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^s} \right|_{\varepsilon=0} + \left. \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^s} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + o(\varepsilon^2) \\ &= \delta_{is} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^s} \left(\left. \frac{d\Xi_{-\varepsilon}^i}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) \varepsilon + o(\varepsilon^2) \\ &= \delta_{is} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \varepsilon + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Analogamente

$$\frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^l} = \delta_{jl} - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} \varepsilon + o(\varepsilon^2). \quad (2.5)$$

Por simples análise de (2.3), (2.4) e (2.5) temos que

$$\begin{aligned} \hat{g}_{sl} &= \sum_{i,j} g_{ij} \left(\delta_{is} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \varepsilon + o(\varepsilon^2) \right) \left(\delta_{jl} - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} \varepsilon + o(\varepsilon^2) \right) \\ &= g_{sl} - \sum_i \left(g_{si} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + g_{il} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \right) \varepsilon + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Esta última expressão nos diz que podemos encontrar $(\hat{x}^k, \hat{g}_{sl})$ resolvendo

$$\begin{cases} \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\hat{x}^k, \hat{g}_{sl}) \right|_{\varepsilon=0} &= \left(\xi^k(x), - \sum_i \left(g_{si} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + g_{il} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \right) \right), \\ \left. (\hat{x}^k, \hat{g}_{sl}) \right|_{\varepsilon=0} &= (x^k, g_{sl}). \end{cases}$$

Em outras palavras, X_{k+2} é simetria de Lie do fluxo de Ricci se, e somente se, o fluxo de Ricci é invariante pelo sistema de coordenadas, o qual é bem conhecido devido ao fato de ser uma equação tensorial. Portanto, X_{k+2} é simetria de Lie do fluxo de Ricci.

2.2 Condição necessária

Pelo que foi feito na seção anterior, a conjectura funciona como uma condição suficiente, de fato o fluxo de Ricci admite o grupo de simetrias de Lie com álgebra de Lie gerada pelo menos por (2.2). Para provar a conjectura basta mostrar que uma condição necessária para um gerador infinitesimal ser simetria de Lie é ser combinação linear de (2.2). Isto será feito a seguir.

Demonstração. (LÓPEZ; DIMAS; BOZHKOV, 2023) Queremos aplicar o critério infinitesimal para encontrar a condição de simetria de Lie. Em contexto com a Proposição 5, temos $\Omega = M^n \times \mathbb{R}$. Antes precisamos provar que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ é um valor regular da aplicação

$$\Delta : \Omega \times U^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2},$$

dada por

$$\Delta_{\alpha\beta}(x, t, g^{(2)}) = \partial_t g_{\alpha\beta} + 2 R_{\alpha\beta}.$$

Seja $(x, t, g^{(2)}) \in \Delta^{-1}(\{\mathbf{0}\})$, por cálculo direto a transformação linear $\frac{\partial \Delta}{\partial(\partial_t g_{\alpha\beta})}$ tem uma submatriz com determinante 1. Assim, a aplicação $d\Delta(x, t, g^{(2)})$ é sobrejetora. Portanto, o zero é um valor regular da aplicação Δ e podemos aplicar a Proposição 5.

Vamos supor que

$$X = \xi^t(t, x_1, \dots, x_n, g) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\mu(t, x_1, \dots, x_n, g) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta_{(\mu\nu)}(t, x_1, \dots, x_n, g) \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}},$$

é uma simetria de Lie do fluxo de Ricci. A notação nos índices $(\mu\nu)$ na função η indica que $\mu \leq \nu$, isto é feito pela simetria dos tensores da equação do fluxo de Ricci e assim para que as variáveis dependentes não sejam contadas duas vezes.

Usando esta forma genérica podemos chegar às equações determinantes, para resolvê-las empregamos a abordagem de Marchildon (MARCHILDON, 1998). Primeiro descrevemos algumas propriedades elementares.

Note que $\partial_\alpha g_{\tau\gamma} = \Gamma_{\tau\gamma\alpha} + \Gamma_{\gamma\tau\alpha}$. Por outro lado, dado que $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{I}$ temos $\frac{\partial}{\partial g_{\kappa\lambda}} \mathbf{g}^{-1}\mathbf{g} + \mathbf{g}^{-1} \frac{\partial}{\partial g_{\kappa\lambda}} \mathbf{g} = \mathbf{0}$, denotamos $(\mathbf{g}^{-1})_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ e $(\mathbf{g})_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Assim, a última equação é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial g_{\kappa\lambda}} g^{\mu\nu} = - \left(\mathbf{g}^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial g_{\kappa\lambda}} \mathbf{g}^{-1} \right)_{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial g_{\kappa\lambda}} g_{k\lambda} \right) g^{\nu\lambda},$$

assim

$$-\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial g_{\kappa\lambda}} = X^{\mu\nu\kappa\lambda} = \begin{cases} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} & \text{se } \kappa \neq \lambda, \\ g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} & \text{se } \kappa = \lambda. \end{cases}$$

Dado que $X^{\mu\nu k\lambda} = X_a^{\nu k\lambda} g^{\mu a} = X_{ab}^{k\lambda} g^{b\nu} g^{\mu a}$, temos

$$X_{\mu}^{\nu\kappa\lambda} = \begin{cases} \delta_{\mu}^{\kappa} g^{\nu\lambda} + \delta_{\mu}^{\lambda} g^{\nu\kappa} & \text{se } \kappa \neq \lambda, \\ \delta_{\mu}^{\kappa} g^{\nu\lambda} & \text{se } \kappa = \lambda, \end{cases} \quad (2.6)$$

e

$$X_{\mu\nu}^{\kappa\lambda} = \begin{cases} \delta_{\mu}^{\kappa} \delta_{\nu}^{\lambda} + \delta_{\mu}^{\lambda} \delta_{\nu}^{\kappa} & \text{se } \kappa \neq \lambda, \\ \delta_{\mu}^{\kappa} \delta_{\nu}^{\lambda} & \text{se } \kappa = \lambda. \end{cases}$$

Em particular

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{k\lambda}} &= X_{\mu\nu}^{k\lambda}, \\ \frac{\partial(\partial_{\gamma}\partial_{\delta}g_{\alpha\beta})}{\partial(\partial_k\partial_{\lambda}g_{\mu\nu})} &= X_{\gamma\delta}^{k\lambda} X_{\alpha\beta}^{\mu\nu}, \\ 2\frac{\partial\Gamma_{\tau\gamma\alpha}}{\partial(\partial_kg_{\mu\nu})} &= \delta_{\alpha}^k X_{\tau\gamma}^{\mu\nu} + \delta_{\gamma}^k X_{\tau\alpha}^{\mu\nu} - \delta_{\tau}^k X_{\gamma\alpha}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Precisamos expressar as derivadas parciais do tensor de Ricci com respeito a $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas parciais. De (2.1), (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_{\kappa}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu})} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_{\kappa}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu})} \left(\frac{g^{\gamma\delta}}{2} \{-\partial_{\gamma}\partial_{\delta}g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}g_{\gamma\delta} + \partial_{\beta}\partial_{\delta}g_{\alpha\gamma} + \partial_{\alpha}\partial_{\gamma}g_{\delta\beta}\} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \{-X_{\gamma\delta}^{\kappa\lambda} X_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - X_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} X_{\gamma\delta}^{\mu\nu} + X_{\delta\beta}^{\kappa\lambda} X_{\gamma\alpha}^{\mu\nu} + X_{\gamma\alpha}^{\kappa\lambda} X_{\delta\beta}^{\mu\nu}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_{\kappa}g_{\mu\nu})} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_{\kappa}g_{\mu\nu})} (g^{\gamma\delta} g^{\tau\rho} \{\Gamma_{\tau\gamma\alpha}\Gamma_{\rho\delta\beta} - \Gamma_{\tau\gamma\delta}\Gamma_{\rho\alpha\beta}\}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} g^{\tau\rho} \{[\delta_{\alpha}^{\kappa} X_{\tau\gamma}^{\mu\nu} + \delta_{\gamma}^{\kappa} X_{\tau\alpha}^{\mu\nu} - \delta_{\tau}^{\kappa} X_{\gamma\alpha}^{\mu\nu}] \Gamma_{\rho\delta\beta} \\ &\quad + [\delta_{\beta}^{\kappa} X_{\rho\delta}^{\mu\nu} + \delta_{\delta}^{\kappa} X_{\rho\beta}^{\mu\nu} - \delta_{\rho}^{\kappa} X_{\delta\beta}^{\mu\nu}] \Gamma_{\tau\gamma\alpha} \\ &\quad - [\delta_{\delta}^{\kappa} X_{\tau\gamma}^{\mu\nu} + \delta_{\gamma}^{\kappa} X_{\tau\delta}^{\mu\nu} - \delta_{\tau}^{\kappa} X_{\gamma\delta}^{\mu\nu}] \Gamma_{\rho\alpha\beta} \\ &\quad - [\delta_{\beta}^{\kappa} X_{\rho\alpha}^{\mu\nu} + \delta_{\alpha}^{\kappa} X_{\rho\beta}^{\mu\nu} - \delta_{\rho}^{\kappa} X_{\alpha\beta}^{\mu\nu}] \Gamma_{\tau\gamma\delta}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} \{\partial_{\gamma}\partial_{\delta}g_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}\partial_{\beta}g_{\gamma\delta} - \partial_{\delta}\partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}\partial_{\alpha}g_{\delta\beta}\} X^{\gamma\delta\mu\nu} \\ &\quad - \{\Gamma_{\tau\gamma\alpha}\Gamma_{\rho\delta\beta} - \Gamma_{\tau\gamma\delta}\Gamma_{\rho\alpha\beta}\} \{g^{\gamma\delta} X^{\tau\rho\mu\nu} + g^{\tau\rho} X^{\gamma\delta\mu\nu}\}. \end{aligned}$$

Note que para todo tensor métrico A , temos

$$A_{(\mu\nu)} X_{\gamma\delta}^{\mu\nu} = A_{\gamma\delta}. \quad (2.8)$$

A segunda prolongação X é

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= \xi^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta_{(\mu\nu)} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} + \eta_{(\mu\nu)k} \frac{\partial}{\partial(\partial_k g_{\mu\nu})} + \eta_{(\mu\nu)t} \frac{\partial}{\partial(\partial_t g_{\mu\nu})} \\ &\quad + \eta_{(\mu\nu)(k\lambda)} \frac{\partial}{\partial(\partial_k \partial_{\lambda} g_{\mu\nu})}. \end{aligned}$$

Portanto, para obter as condições de linearização, precisamos primeiro expandir as equações

$$\begin{aligned}
X^{(2)} \left(R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_t g_{\alpha\beta} \right) &= \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta t} + \frac{\eta^{\gamma\delta}}{2} \{ \partial_\gamma \partial_\delta g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial_\beta g_{\gamma\delta} - \partial_\delta \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma \partial_\alpha g_{\delta\beta} \} \\
&\quad - \{ \Gamma_{\tau\gamma\alpha} \Gamma_{\rho\delta\beta} - \Gamma_{\tau\gamma\delta} \Gamma_{\rho\alpha\beta} \} \{ g^{\gamma\delta} \eta^{\tau\rho} + g^{\tau\rho} \eta^{\gamma\delta} \} \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} g^{\tau\rho} \{ [\eta_{\tau\gamma\alpha} + \eta_{\tau\alpha\gamma} - \eta_{\gamma\alpha\tau}] \Gamma_{\rho\delta\beta} + [\eta_{\rho\delta\beta} + \eta_{\rho\beta\delta} - \eta_{\delta\beta\rho}] \Gamma_{\tau\gamma\alpha} \} \\
&\quad - [\eta_{\tau\gamma\delta} + \eta_{\tau\delta\gamma} - \eta_{\gamma\delta\tau}] \Gamma_{\rho\alpha\beta} - [\eta_{\rho\alpha\beta} + \eta_{\rho\beta\alpha} - \eta_{\alpha\beta\rho}] \Gamma_{\tau\gamma\delta} \} \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \{ -\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} - \eta_{\gamma\delta\alpha\beta} + \eta_{\gamma\alpha\delta\beta} + \eta_{\delta\beta\gamma\alpha} \} = 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

no qual

$$\eta^{\gamma\delta} = \sum_{a \leq b} \eta_{ab} X^{\gamma\delta ab} = \eta_{(ab)} X^{\gamma\delta ab}.$$

As funções $\eta_{\tau\gamma\alpha}$, $\eta_{\tau\gamma t}$ e $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ são dadas pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned}
\eta_{\tau\gamma\alpha} &= D_\alpha(\eta_{\tau\gamma} - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\tau\gamma} - \xi^t \partial_t g_{\tau\gamma}) + \xi^\sigma \partial_\alpha \partial_\sigma g^{\tau\gamma} + \xi^t \partial_\alpha \partial_t g^{\tau\gamma}, \\
\eta_{\tau\gamma t} &= D_t(\eta_{\tau\gamma} - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\tau\gamma} - \xi^t \partial_t g_{\tau\gamma}) + \xi^\sigma \partial_t \partial_\sigma g^{\tau\gamma} + \xi^t \partial_t \partial_t g^{\tau\gamma}, \\
\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} &= D_\gamma D_\delta(\eta_{\alpha\beta} - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\alpha\beta} - \xi^t \partial_t g_{\alpha\beta}) + \xi^\sigma \partial_\gamma \partial_\delta \partial_\sigma g_{\alpha\beta} + \xi^t \partial_\gamma \partial_\delta \partial_t g_{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

veja a Proposição 7. Aqui D_α e D_t denotam a derivada total com respeito a x^α e t , respetivamente, isto é

$$\begin{aligned}
D_\alpha &= \partial_\alpha + \partial_\alpha g_{(\mu\nu)} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} + \partial_\alpha \partial_\kappa g_{(\mu\nu)} \frac{\partial}{\partial (\partial_\kappa g_{\mu\nu})} + \partial_\alpha \partial_{(\kappa} \partial_{\lambda)} g_{(\mu\nu)} \frac{\partial}{\partial (\partial_\kappa \partial_\lambda g_{\mu\nu})}, \\
D_t &= \partial_t + \partial_t g_{(\mu\nu)} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} + \partial_t \partial_\kappa g_{(\mu\nu)} \frac{\partial}{\partial (\partial_\kappa g_{\mu\nu})} + \partial_t \partial_{(\kappa} \partial_{\lambda)} g_{(\mu\nu)} \frac{\partial}{\partial (\partial_\kappa \partial_\lambda g_{\mu\nu})}.
\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\eta_{\tau\gamma\alpha} &= \partial_\alpha \eta_{\tau\gamma} - [\partial_\sigma g_{\tau\gamma}] \partial_\alpha \xi^\sigma - [\partial_t g_{\tau\gamma}] \partial_\alpha \xi^t + \partial_\alpha g_{(\mu\nu)} \frac{\partial \eta_{\tau\gamma}}{\partial g_{\mu\nu}} \\
&\quad - [\partial_\alpha g_{(\mu\nu)}] \partial_\sigma g_{\tau\gamma} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} - [\partial_\alpha g_{(\mu\nu)}] \partial_t g_{\tau\gamma} \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}}, \\
\eta_{\tau\gamma t} &= \partial_t \eta_{\tau\gamma} - [\partial_\sigma g_{\tau\gamma}] \partial_t \xi^\sigma - [\partial_t g_{\tau\gamma}] \partial_t \xi^t + \partial_t g_{(\mu\nu)} \frac{\partial \eta_{\tau\gamma}}{\partial g_{\mu\nu}} \\
&\quad - [\partial_t g_{(\mu\nu)}] \partial_\sigma g_{\tau\gamma} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} - [\partial_t g_{(\mu\nu)}] \partial_t g_{\tau\gamma} \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

e

$$\begin{aligned}
\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = & \partial_\gamma \partial_\delta \eta_{\alpha\beta} - \partial_\gamma \partial_\delta \xi^\sigma (\partial_\sigma g_{\alpha\beta}) - \partial_\gamma \partial_\delta \xi^t (\partial_t g_{\alpha\beta}) + (\partial_\delta g_{(\mu\nu)}) \partial_\gamma \left(\frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \\
& + \partial_\gamma g_{(\mu\nu)} \partial_\delta \left(\frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} \right) - (\partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) (\partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \partial_\delta \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \\
& - (\partial_\delta g_{(\mu\nu)}) (\partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \partial_\gamma \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} \right) - (\partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) (\partial_t g_{\alpha\beta}) \partial_\delta \left(\frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \\
& - (\partial_\delta g_{(\mu\nu)}) (\partial_t g_{\alpha\beta}) \partial_\gamma \left(\frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}} \right) + (\partial_\delta g_{(ab)}) (\partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) \frac{\partial^2 \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu} \partial g_{ab}} \\
& - (\partial_\delta g_{(ab)}) (\partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) (\partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu} \partial g_{ab}} - (\partial_\delta g_{(ab)}) (\partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) (\partial_t g_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2 \xi^t}{\partial g_{\mu\nu} \partial g_{ab}} \quad (2.11) \\
& - (\partial_\delta \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \partial_\gamma \xi^\sigma - (\partial_\gamma \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \partial_\delta \xi^\sigma - (\partial_\delta \partial_t g_{\alpha\beta}) \partial_\gamma \xi^t - (\partial_\gamma \partial_t g_{\alpha\beta}) \partial_\delta \xi^t \\
& + (\partial_\gamma \partial_\delta g_{(\mu\nu)}) \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} - (\partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) (\partial_\delta \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} - (\partial_\delta g_{(\mu\nu)}) (\partial_\gamma \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} \\
& - (\partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) (\partial_\delta \partial_t g_{\alpha\beta}) \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}} - (\partial_\delta g_{(\mu\nu)}) (\partial_\gamma \partial_t g_{\alpha\beta}) \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}} \\
& - (\partial_\sigma g_{\alpha\beta}) (\partial_\delta \partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} - (\partial_t g_{\alpha\beta}) (\partial_\delta \partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos as condições de linearização — tendo em mente que a família métrica a 1-parâmetro deve satisfazer a equação do fluxo de Ricci, $2R_{\alpha\beta} + \partial_t g_{\alpha\beta} = 0$.

Estratégia: das condições de simetria linearizada extraímos as equações determinantes. Porém, a ideia é começar resolvendo as equações determinantes envolvendo derivadas do tensor métrico que não aparecem na equação do fluxo de Ricci. Depois continuamos com os termos que envolvem derivadas de ordem superior da métrica e finalmente aqueles envolvendo as derivadas do tensor métrico de ordem inferior, pois as correspondentes equações determinantes são geralmente muito mais fáceis de resolver nesta ordem.

Usando as expressões de $X^{\mu\nu\kappa\lambda}$, $X_\mu^{\nu\kappa\lambda}$ e $X_{\kappa\lambda}^{\mu\nu}$ podemos reescrever certos termos, por exemplo

$$\begin{aligned}
g^{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{(\mu\nu)}} \partial_t g_{\gamma\delta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} &= \partial_t g_{(cd)} (\partial_a \partial_b g_{(\mu\nu)}) \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_a^\alpha \delta_b^\beta X_{\gamma\delta}^{cd} g^{\gamma\delta} \\
&= \partial_t g_{(cd)} (\partial_a \partial_b g_{(\mu\nu)}) \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_a^\alpha \delta_b^\beta G^{cd}, \quad (2.12)
\end{aligned}$$

no qual

$$G^{\rho\sigma} = \begin{cases} g^{\rho\sigma} & \text{if } \rho = \sigma, \\ 2g^{\rho\sigma} & \text{if } \rho \neq \sigma. \end{cases}$$

Renomeando os índices no lado direito de (2.12), $c \rightarrow \rho$, $a \rightarrow \delta$, $d \rightarrow \kappa$ e $b \rightarrow \gamma$ obtemos

$$g^{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{(\mu\nu)}} \partial_t g_{\gamma\delta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} = \partial_t g_{(\rho\kappa)} (\partial_\delta \partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta G^{\rho\kappa}.$$

Agora estamos prontos para extrair alguns dos coeficientes. Tenha em mente (2.6), (2.7) e (2.8) as quais usaremos repetidamente.

Dos termos $\partial g \partial^2 g$: note que os únicos componentes em (2.9) que incluem os termos $\partial g \partial^2 g$ são $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\eta_{\gamma\delta\alpha\beta}$, $\eta_{\gamma\alpha\delta\beta}$ e $\eta_{\delta\beta\gamma\alpha}$, dado que o fluxo de Ricci não envolve os termos $\partial_t g \partial_\kappa \partial_\sigma g$, temos nossa primeira família de equações determinantes:

$$g^{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{(\mu\nu)}} \{ \partial_t g_{\alpha\beta} \partial_\delta \partial_\gamma g_{\mu\nu} + \partial_t g_{\gamma\delta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} - \partial_t g_{\alpha\gamma} \partial_\delta \partial_\beta g_{\mu\nu} - \partial_t g_{\delta\beta} \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\mu\nu} \} = 0. \quad (2.13)$$

Reescrevendo a equação previa até ter o mesmo índice nas derivadas de g , obtemos

$$\partial_t g_{(\rho\kappa)} (\partial_\delta \partial_\gamma g_{(\mu\nu)}) \frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}} (g^{\gamma\delta} X_{\alpha\beta}^{\rho\kappa} + \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta G^{\rho\kappa} - \delta_\gamma^\beta X_\alpha^{\delta\rho\kappa} - \delta_\delta^\alpha X_\beta^{\gamma\rho\kappa}) = 0. \quad (2.14)$$

Caso $\kappa = \rho = \beta$, $\delta = \gamma = \alpha$, $\alpha \neq \beta$: da equação (2.14) segue que

$$\frac{\partial \xi^t}{\partial g_{(\mu\nu)}} (g^{\alpha\alpha} X_{\alpha\beta}^{\beta\beta} - X_\beta^{\alpha\beta\beta}) = 0,$$

assim

$$\frac{\partial \xi^t}{\partial g_{\mu\nu}} g^{\alpha\beta} = 0.$$

para todo $\mu \leq \nu$. Portanto, ξ^t só depende de x e t .

Observe que, os termos $\partial_i g \partial_t \partial_j g$ são multiplicados por $\frac{\partial \xi^t}{\partial g_{(\mu\nu)}}$, assim eles se anulam.

Dado que no fluxo de Ricci não existem termos de $\partial_\kappa g \partial_\sigma \partial_\rho g$ obtemos

$$\begin{aligned} g^{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{(\mu\nu)}} \{ & \partial_\gamma g_{\mu\nu} \partial_\delta \partial_\sigma g_{\alpha\beta} + \partial_\delta g_{\mu\nu} \partial_\gamma \partial_\sigma g_{\alpha\beta} + \partial_\sigma g_{\alpha\beta} \partial_\delta \partial_\gamma g_{\mu\nu} + \partial_\alpha g_{\mu\nu} \partial_\beta \partial_\sigma g_{\gamma\delta} \\ & + \partial_\beta g_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\sigma g_{\gamma\delta} + \partial_\sigma g_{\gamma\delta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} - \partial_\delta g_{\mu\nu} \partial_\beta \partial_\sigma g_{\alpha\gamma} - \partial_\beta g_{\mu\nu} \partial_\delta \partial_\sigma g_{\alpha\gamma} \\ & - \partial_\sigma g_{\alpha\gamma} \partial_\delta \partial_\beta g_{\mu\nu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\sigma g_{\delta\beta} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \partial_\gamma \partial_\sigma g_{\delta\beta} - \partial_\sigma g_{\delta\beta} \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\mu\nu} \} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Reescrevendo (2.15) segue que

$$\begin{aligned} \partial_\gamma g_{(\mu\nu)} \partial_\delta \partial_\sigma g_{(\rho\kappa)} \left\{ & 2g^{\gamma\delta} X_{\alpha\beta}^{\rho\kappa} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} + g^{\sigma\delta} X_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial g_{\rho\kappa}} + (\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta + \delta_\alpha^\delta \delta_\beta^\gamma) G^{\rho\kappa} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} \right. \\ & + \delta_\alpha^\delta \delta_\beta^\sigma G^{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial g_{\rho\kappa}} - \delta_\beta^\delta X_\alpha^{\gamma\rho\kappa} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} - \delta_\beta^\gamma X_\alpha^{\delta\rho\kappa} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} - \delta_\beta^\sigma X_\alpha^{\delta\mu\nu} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial g_{\rho\kappa}} \\ & \left. - \delta_\alpha^\delta X_\beta^{\gamma\kappa\rho} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} - \delta_\alpha^\gamma X_\beta^{\delta\kappa\rho} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial g_{\mu\nu}} - \delta_\alpha^\sigma X_\beta^{\delta\nu\mu} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial g_{\rho\kappa}} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

No que segue, denotamos índices fixos com um chapéu $\hat{\cdot}$.

Caso $\delta = \sigma = \kappa = \hat{\kappa}$, $\alpha \neq \hat{\kappa}$, $\beta \neq \hat{\kappa}$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$: A partir de (2.16) tem-se

$$0 = g^{\hat{\kappa}\hat{\kappa}} X_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial g_{\rho\hat{\kappa}}},$$

isto é

$$0 = \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial g_{\rho\hat{\kappa}}},$$

para todo γ e $\rho \leq \hat{\kappa}$. Então, ξ^γ só depende x e t .

Dos termos $\partial^2 g$: aplicando o mesmo argumento de (2.13) e (2.16), temos o próximo conjunto de equações determinantes

$$g^{\gamma\delta}\{\partial_\delta\partial_t g_{\alpha\beta}\partial_\gamma\xi^t + \partial_\gamma\partial_t g_{\alpha\beta}\partial_\delta\xi^t + \partial_\beta\partial_t g_{\gamma\delta}\partial_\alpha\xi^t + \partial_\alpha\partial_t g_{\gamma\delta}\partial_\beta\xi^t - \partial_\beta\partial_t g_{\gamma\alpha}\partial_\delta\xi^t \\ - \partial_\delta\partial_t g_{\gamma\alpha}\partial_\beta\xi^t - \partial_\alpha\partial_t g_{\delta\beta}\partial_\gamma\xi^t - \partial_\gamma\partial_t g_{\delta\beta}\partial_\alpha\xi^t\} = 0.$$

Reorganizando os índices, pode-se mostrar que as equações anteriores se tornam

$$\partial_\gamma\xi^t\partial_\delta\partial_t g_{(\rho\kappa)}\left(2X_{\alpha\beta}^{\rho\kappa}g^{\gamma\delta} + G^{\rho\kappa}(\delta_\beta^\delta\delta_\alpha^\gamma + \delta_\alpha^\delta\delta_\beta^\gamma) - X_\alpha^{\gamma\rho\kappa}\delta_\beta^\delta\right. \\ \left.- X_\alpha^{\delta\rho\kappa}\delta_\beta^\gamma - X_\beta^{\gamma\rho\kappa}\delta_\alpha^\delta - \delta_\alpha^\gamma X_\beta^{\delta\rho\kappa}\right) = 0. \quad (2.17)$$

Caso $\gamma = \delta = \alpha = \beta, \rho = \kappa = \hat{\kappa}, \hat{\kappa} \neq \beta$: da equação (2.17), vemos que é necessário que

$$(\partial_\beta\xi^t)g^{\hat{\kappa}\hat{\kappa}} = 0.$$

Assim

$$\partial_\beta\xi^t = 0,$$

para todo β . Portanto, ξ^t depende só de t .

No seguinte passo agrupamos os termos que contêm apenas segundas derivadas espaciais do tensor métrico. No entanto, como temos que $2R_{\alpha\beta} + \partial_t g_{\alpha\beta} = 0$, devemos também considerar os termos que contêm $\partial_t g_{\alpha\beta}$. Assim

$$+ \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(-\partial_\gamma\partial_\delta g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\beta\partial_\delta g_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha\partial_\gamma g_{\delta\beta})\partial_t\xi^t - \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(-\partial_\gamma\partial_\delta g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu g_{\gamma\delta} \\ + \partial_\nu\partial_\delta g_{\mu\gamma} + \partial_\mu\partial_\gamma g_{\nu\delta})\frac{\partial\eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\mu\nu)}} + \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(\partial_\gamma\partial_\delta g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\gamma\delta} - \partial_\delta\partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma\partial_\alpha g_{\delta\beta}) \\ + \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\partial_\gamma\xi^\sigma\partial_\delta\partial_\sigma g_{\alpha\beta} + \partial_\delta\xi^\sigma\partial_\gamma\partial_\sigma g_{\alpha\beta} - \partial_\gamma\partial_\delta g_{(\mu\nu)}\frac{\partial\eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}}\right) + \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\partial_\beta\xi^\sigma\partial_\alpha\partial_\sigma g_{\gamma\delta} \right. \\ \left. + \partial_\alpha\xi^\sigma\partial_\beta\partial_\sigma g_{\gamma\delta} - \partial_\alpha\partial_\beta g_{(\mu\nu)}\frac{\partial\eta_{\gamma\delta}}{\partial g_{\mu\nu}}\right) - \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\partial_\beta\xi^\sigma\partial_\delta\partial_\sigma g_{\gamma\alpha} + \partial_\delta\xi^\sigma\partial_\beta\partial_\sigma g_{\gamma\alpha} - \partial_\delta\partial_\beta g_{(\mu\nu)}\frac{\partial\eta_{\gamma\alpha}}{\partial g_{\mu\nu}}\right) \\ - \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\partial_\gamma\xi^\sigma\partial_\alpha\partial_\sigma g_{\delta\beta} + \partial_\alpha\xi^\sigma\partial_\gamma\partial_\sigma g_{\delta\beta} - \partial_\gamma\partial_\alpha g_{(\mu\nu)}\frac{\partial\eta_{\delta\beta}}{\partial g_{\mu\nu}}\right) = 0.$$

Reorganizando os índices, temos:

$$\partial_\gamma\partial_\delta g_{\rho\sigma}\left(\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\sigma\eta^{\gamma\delta} + \delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta\eta^{\rho\sigma} - \delta_\alpha^\sigma\delta_\beta^\delta\eta^{\rho\gamma} - \delta_\beta^\sigma\delta_\delta^\alpha\eta^{\gamma\rho} + 2\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\sigma g^{\kappa\gamma}\partial_\kappa\xi^\delta - \frac{\partial\eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\rho\sigma)}}g^{\gamma\delta} \right. \\ \left. + \delta_\gamma^\beta g^{\rho\sigma}\partial_\alpha\xi^\delta + \delta_\gamma^\alpha g^{\rho\sigma}\partial_\beta\xi^\delta - \delta_\gamma^\sigma\delta_\delta^\beta g^{\mu\nu}\frac{\partial\eta_{\mu\nu}}{\partial g_{(\rho\sigma)}} - \delta_\alpha^\sigma\delta_\gamma^\beta g^{\rho\kappa}\partial_\kappa\xi^\delta - \delta_\alpha^\sigma g^{\rho\gamma}\partial_\beta\xi^\delta \right. \\ \left. + \delta_\delta^\beta g^{\kappa\gamma}\frac{\partial\eta_{\kappa\alpha}}{\partial g_{(\rho\sigma)}} - \delta_\beta^\sigma\delta_\gamma^\alpha g^{\kappa\rho}\partial_\kappa\xi^\delta - \delta_\beta^\sigma g^{\gamma\rho}\partial_\alpha\xi^\delta + \delta_\delta^\alpha g^{\gamma\kappa}\frac{\partial\eta_{\kappa\beta}}{\partial g_{(\rho\sigma)}} + \{-\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\sigma g^{\gamma\delta} - g^{\rho\sigma}\delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta \right. \\ \left. + \delta_\rho^\alpha\delta_\gamma^\beta g^{\sigma\delta} + \delta_\beta^\sigma\delta_\alpha^\gamma g^{\delta\rho}\}\partial_t\xi^t + g^{\gamma\delta}\frac{\partial\eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\rho\sigma)}} + g^{\rho\sigma}\frac{\partial\eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\gamma\delta)}} - g^{\delta\sigma}\frac{\partial\eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\gamma\rho)}} - g^{\sigma\delta}\frac{\partial\eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\rho\gamma)}}\right) = 0. \quad (2.18)$$

Caso $\sigma = \gamma = \delta = \rho = \hat{\rho}, \hat{\rho} \neq \alpha \neq \beta$: da equação (2.18) temos

$$\frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\hat{\rho}\hat{\rho}}} g^{\hat{\rho}\hat{\rho}} = 0,$$

em consequência

$$\eta_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(g_{\alpha\rho}, g_{\beta\rho}, g_{\alpha\alpha}, g_{\beta\beta}, g_{\kappa\rho}, x, t), \quad (2.19)$$

com $\alpha \neq \rho \neq \beta \neq \kappa$.

Caso $\rho = \sigma = \alpha, \gamma = \delta = \hat{\delta}, \alpha \neq \hat{\delta} \neq \beta$: da equação (2.18), temos a seguinte equação determinante

$$-g^{\alpha\hat{\delta}} \partial_{\beta} \xi^{\hat{\delta}} - g^{\hat{\delta}\alpha} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\hat{\delta}}} = 0.$$

Usando (2.19) segue que

$$\eta_{\alpha\beta} = - \left(\sum_{\kappa \neq \beta, \alpha} g_{\alpha\kappa} \partial_{\beta} \xi^{\kappa} \right) + F_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta}, g_{\delta\beta}, g_{\beta\beta}, g_{\alpha\alpha}, g_{\kappa\delta}, x, t), \quad (2.20)$$

com $\alpha \neq \beta \neq \delta \neq \kappa$.

Caso $\rho = \sigma = \beta, \gamma = \delta = \hat{\delta}, \beta \neq \hat{\delta} \neq \alpha$: da equação (2.18) segue:

$$-g^{\beta\hat{\delta}} \partial_{\alpha} \xi^{\hat{\delta}} - g^{\hat{\delta}\beta} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\beta\hat{\delta}}} = 0. \quad (2.21)$$

Tendo em mente (2.20), da equação (2.21) segue que:

$$\eta_{\alpha\beta} = - \left(\sum_{\kappa \neq \beta, \alpha} g_{\alpha\kappa} \partial_{\beta} \xi^{\kappa} + g_{\beta\kappa} \partial_{\alpha} \xi^{\kappa} \right) + F_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta}, g_{\beta\beta}, g_{\alpha\alpha}, g_{\kappa\delta}, x, t), \quad (2.22)$$

com $\alpha \neq \beta \neq \delta \neq \kappa$.

Observe que a única maneira de $\eta_{\alpha\beta}$ depender de $g_{\kappa\delta}$ com $\alpha \neq \beta \neq \kappa \neq \delta$ é que $n \geq 4$, nosso próximo objetivo é provar que $\frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\kappa\delta}} = 0$. Obviamente consideramos para o próximo passo $n \geq 4$.

Caso $\delta = \gamma, \alpha, \beta \neq \delta$: da equação (2.18). Nós temos:

$$\begin{aligned} & \partial_{\delta} \partial_{\delta} g_{\rho\sigma} \left(\delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\beta}^{\sigma} \eta^{\delta\delta} + 2 \delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\beta}^{\sigma} g^{\kappa\delta} \partial_{\kappa} \xi^{\delta} - g^{\delta\delta} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\rho\sigma)}} - \delta_{\alpha}^{\sigma} g^{\rho\delta} \partial_{\beta} \xi^{\delta} - \delta_{\beta}^{\sigma} g^{\rho\delta} \partial_{\alpha} \xi^{\delta} \right. \\ & \quad - \delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\beta}^{\sigma} g^{\delta\delta} \partial_t \xi^t + g^{\delta\delta} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\rho\sigma)}} + g^{\rho\sigma} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\delta\delta}} - g^{\delta\sigma} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\delta\rho)}} \\ & \quad \left. - g^{\sigma\delta} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\rho\delta)}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, se $\rho \neq \sigma$, e pelo fato de $\partial_\delta \partial_\delta g_{\rho\sigma} = \partial_\delta \partial_\delta g_{\rho\sigma}$, precisamos simetrizar a expressão acima para os índices ρ e σ , o resultado é

$$\begin{aligned} \partial_\delta \partial_\delta g_{\rho\sigma} & \left((\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma + \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho) \eta^{\delta\delta} + 2(\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma + \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho) g^{\kappa\delta} \partial_\kappa \xi^\delta - g^{\delta\delta} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\rho\sigma}} - (\delta_\alpha^\sigma g^{\rho\delta} \right. \\ & \quad \left. + \delta_\alpha^\rho g^{\sigma\delta}) \partial_\beta \xi^\delta - (\delta_\beta^\sigma g^{\delta\rho} + \delta_\beta^\rho g^{\delta\sigma}) \partial_\alpha \xi^\delta - (\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma + \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho) g^{\delta\delta} \partial_t \xi^t \right. \\ & \quad \left. + g^{\delta\delta} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\rho\sigma}} + 2g^{\rho\sigma} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\delta\delta}} - \left(g^{\delta\sigma} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\delta\rho)}} + g^{\delta\rho} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\delta\sigma)}} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(g^{\sigma\delta} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\rho\delta)}} + g^{\rho\delta} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\sigma\delta)}} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Finalmente, se $\sigma = \delta = \hat{\delta}$, $\rho = \hat{\rho}$ e $\hat{\rho} \neq \beta \neq \alpha \neq \hat{\delta}$, temos a seguinte equação determinante:

$$\frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\hat{\rho}\hat{\delta}}} g^{\hat{\delta}\hat{\delta}} = 0. \quad (2.24)$$

De (2.22) e (2.24) segue:

$$\eta_{\alpha\beta} = - \left(\sum_{\kappa \neq \beta, \alpha} g_{\alpha\kappa} \partial_\beta \xi^\kappa + g_{\beta\kappa} \partial_\alpha \xi^\kappa \right) + F_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta}, g_{\beta\beta}, g_{\alpha\alpha}, x, t), \quad (2.25)$$

com $\alpha \neq \beta$.

Caso $\sigma = \gamma = \delta = \rho = \hat{\rho}$, $\alpha = \beta$, e $\hat{\rho} \neq \beta$: da equação (2.18), obtemos a seguinte equação determinante:

$$g^{\hat{\rho}\hat{\rho}} \frac{\partial \eta_{\alpha\alpha}}{\partial g_{\hat{\rho}\hat{\rho}}} = 0.$$

Portanto

$$\eta_{\alpha\alpha} = F_{\alpha\alpha}(g_{\alpha\rho}, g_{\alpha\alpha}, g_{\rho\kappa}, x, t), \quad (2.26)$$

com $\rho \neq \alpha \neq \kappa$.

Caso $\sigma = \rho = \hat{\rho}$, $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta = \hat{\delta}$, e $\hat{\rho} \neq \alpha \neq \hat{\delta}$: da equação (2.18), segue a equação determinante

$$-g^{\hat{\delta}\hat{\rho}} \frac{\partial \eta_{\alpha\alpha}}{\partial g_{\hat{\delta}\hat{\rho}}} = 0. \quad (2.27)$$

Por (2.26) e (2.27), segue que:

$$\eta_{\alpha\alpha} = F_{\alpha\alpha}(g_{\alpha\rho}, g_{\alpha\alpha}, x, t), \quad (2.28)$$

com $\alpha \neq \rho$.

Caso $\delta = \gamma = \alpha$, $\sigma = \rho = \hat{\rho}$, e $\alpha \neq \hat{\rho} \neq \beta$: da equação (2.18) e (2.22), temos a seguinte equação determinante:

$$g^{\hat{\rho}\hat{\rho}} \left(\partial_\beta \xi^\alpha + \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\alpha}} \right) + g^{\alpha\hat{\rho}} \left(\frac{\partial \eta_{\hat{\rho}\beta}}{\partial g_{\hat{\rho}\hat{\rho}}} + \partial_\beta \xi^{\hat{\rho}} \right) = 0,$$

derivando esta última equação em relação a $g_{\alpha\hat{\rho}}$

$$\frac{\partial g^{\hat{\rho}\hat{\rho}}}{\partial g_{\alpha\hat{\rho}}} \left(\partial_{\beta} \xi^{\alpha} + \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\alpha}} \right) + \frac{\partial g^{\alpha\hat{\rho}}}{\partial g_{\alpha\hat{\rho}}} \left(\frac{\partial \eta_{\hat{\rho}\beta}}{\partial g_{\hat{\rho}\hat{\rho}}} + \partial_{\beta} \xi^{\hat{\rho}} \right) = 0.$$

Observe que as expressões entre parênteses não dependem de $g_{\alpha\rho}$, veja (2.20). Manipulando a equação acima, podemos mostrar que esta equação é equivalente a:

$$(g^{\alpha\alpha} g^{\hat{\rho}\hat{\rho}} - g^{\alpha\hat{\rho}} g^{\alpha\hat{\rho}}) \left(\frac{\partial \eta_{\hat{\rho}\beta}}{\partial g_{\hat{\rho}\hat{\rho}}} + \partial_{\beta} \xi^{\hat{\rho}} \right) = 0.$$

Por outro lado, dado que g^{-1} é uma matriz positiva definida, temos que $(g^{\alpha\alpha} g^{\hat{\rho}\hat{\rho}} - g^{\alpha\hat{\rho}} g^{\alpha\hat{\rho}}) > 0$. Assim:

$$\frac{\partial \eta_{\hat{\rho}\beta}}{\partial g_{\hat{\rho}\hat{\rho}}} + \partial_{\beta} \xi^{\hat{\rho}} = 0,$$

para todo $\hat{\rho} \neq \beta$. Usando isto último e (2.25) segue que

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} &= - \left(\sum_{\kappa} g_{\alpha\kappa} \partial_{\beta} \xi^{\kappa} + g_{\beta\kappa} \partial_{\alpha} \xi^{\kappa} \right) + F_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta}, x, t) \\ &= - g_{\alpha\kappa} \partial_{\beta} \xi^{\kappa} - g_{\beta\kappa} \partial_{\alpha} \xi^{\kappa} + F_{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta}, x, t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

com $\alpha \neq \beta$.

Caso $\rho = \beta = \alpha$, $\gamma = \sigma = \delta = \hat{\delta}$, e $\alpha \neq \hat{\delta}$: da equação (2.23), obtemos a seguinte equação determinante:

$$-2g^{\hat{\delta}\hat{\delta}} \partial_{\alpha} \xi^{\hat{\delta}} - g^{\hat{\delta}\hat{\delta}} \frac{\partial \eta_{\alpha\alpha}}{\partial g_{\alpha\hat{\delta}}} = 0. \quad (2.30)$$

Juntando (2.30) e (2.28), segue que:

$$\eta_{\alpha\alpha} = -2 \sum_{\kappa \neq \alpha} g_{\kappa\alpha} \partial_{\alpha} \xi^{\kappa} + \hat{F}_{\alpha\alpha}(g_{\alpha\alpha}, x, t).$$

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\alpha} &= -2 \sum_{\kappa=1}^n g_{\kappa\alpha} \partial_{\alpha} \xi^{\kappa} + F_{\alpha\alpha}(g_{\alpha\alpha}, x, t) \\ &= -2g_{\kappa\alpha} \partial_{\alpha} \xi^{\kappa} + F_{\alpha\alpha}(g_{\alpha\alpha}, x, t). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Caso $\rho = \sigma = \alpha = \beta$, $\gamma = \delta = \hat{\delta}$, e $\hat{\delta} \neq \alpha$: da equação (2.18), segue a equação determinante:

$$\eta^{\hat{\delta}\hat{\delta}} + 2g^{\kappa\hat{\delta}} \partial_{\kappa} \xi^{\hat{\delta}} - g^{\hat{\delta}\hat{\delta}} \partial_t \xi^t = 0.$$

Usando (2.29) e (2.31), obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^{\hat{\delta}\hat{\delta}} + 2g^{\kappa\hat{\delta}} \partial_{\kappa} \xi^{\hat{\delta}} - g^{\hat{\delta}\hat{\delta}} \partial_t \xi^t \\ &= \eta_{ab} g^{\hat{\delta}a} g^{\hat{\delta}b} + 2g^{\kappa\hat{\delta}} \partial_{\kappa} \xi^{\hat{\delta}} - g^{\hat{\delta}\hat{\delta}} \partial_t \xi^t \\ &= F_{ab} g^{\hat{\delta}a} g^{\hat{\delta}b} - (g_{a\kappa} \partial_b \xi^{\kappa} + g_{b\kappa} \partial_a \xi^{\kappa}) g^{\hat{\delta}a} g^{\hat{\delta}b} + 2g^{\kappa\hat{\delta}} \partial_{\kappa} \xi^{\hat{\delta}} - g^{\hat{\delta}\hat{\delta}} \partial_t \xi^t \\ &= F_{ab} g^{\hat{\delta}a} g^{\hat{\delta}b} - g^{\hat{\delta}\hat{\delta}} \partial_t \xi^t. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Diferenciando em relação a $g_{\delta\delta}$ e fazendo simplificações elementares, pode-se mostrar que:

$$g^{\delta\delta} \frac{\partial F_{\delta\delta}}{\partial g_{\delta\delta}} - F_{ab} g^{a\delta} g^{b\delta} = 0. \quad (2.33)$$

Combinando (2.32) e (2.33), podemos concluir que:

$$F_{\delta\delta} = \partial_t \xi^t g_{\delta\delta} + \hat{F}_{\delta\delta}(x, t). \quad (2.34)$$

Caso $\gamma = \delta = \alpha, \rho = \sigma = \beta$, e $\alpha \neq \beta$: da equação (2.18), temos a seguinte equação determinante:

$$\begin{aligned} -\eta^{\alpha\beta} - (g^{\kappa\beta} \partial_\kappa \xi^\alpha + g^{\kappa\alpha} \partial_\kappa \xi^\beta) - g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \xi^\alpha - \partial_\beta \xi^\beta) \\ + g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \eta_{\beta\beta}}{\partial g_{\beta\beta}} - \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}} \right) + g^{\alpha\beta} \partial_t \xi^t = 0. \end{aligned}$$

Usando (2.29) e (2.31), esta última equação torna-se:

$$0 = -F_{ab} g^{\alpha a} g^{\beta b} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}} - g^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\beta\beta}}{\partial g_{\beta\beta}} + g^{\alpha\beta} \partial_t \xi^t.$$

Por (2.34), segue:

$$0 = -F_{ab} g^{\alpha a} g^{\beta b} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}}, \quad (2.35)$$

para todo $\alpha \neq \beta$.

Diferenciando em relação a $g_{\hat{\kappa}\hat{\kappa}}$ com $\hat{\kappa} \neq \alpha \neq \beta$,

$$\begin{aligned} 0 &= -g^{\alpha\hat{\kappa}} g^{\beta\hat{\kappa}} \frac{\partial F_{\hat{\kappa}\hat{\kappa}}}{\partial g_{\hat{\kappa}\hat{\kappa}}} + F_{ab} \left[g^{\alpha\hat{\kappa}} g^{a\hat{\kappa}} g^{b\beta} + g^{a\alpha} g^{\beta\hat{\kappa}} g^{b\hat{\kappa}} \right] - g^{\alpha\hat{\kappa}} g^{\beta\hat{\kappa}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}} \\ &= -\partial_t \xi^t g^{\alpha\hat{\kappa}} g^{\beta\hat{\kappa}} + g^{\alpha\hat{\kappa}} g^{\beta\hat{\kappa}} \frac{\partial F_{\hat{\kappa}\beta}}{\partial g_{\hat{\kappa}\beta}} + g^{\beta\hat{\kappa}} g^{\alpha\hat{\kappa}} \frac{\partial F_{\alpha\hat{\kappa}}}{\partial g_{\alpha\hat{\kappa}}} - g^{\alpha\hat{\kappa}} g^{\beta\hat{\kappa}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}} \\ &= g^{\alpha\hat{\kappa}} g^{\beta\hat{\kappa}} \left(-\partial_t \xi^t + \frac{\partial F_{\hat{\kappa}\beta}}{\partial g_{\hat{\kappa}\beta}} + \frac{\partial F_{\hat{\kappa}\alpha}}{\partial g_{\hat{\kappa}\alpha}} - \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}} \right), \end{aligned}$$

para todo $\hat{\kappa} \neq \alpha \neq \beta$. Portanto:

$$0 = -\partial_t \xi^t + \frac{\partial F_{\hat{\kappa}\beta}}{\partial g_{\hat{\kappa}\beta}} + \frac{\partial F_{\hat{\kappa}\alpha}}{\partial g_{\hat{\kappa}\alpha}} - \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}}.$$

E podemos concluir que:

$$F_{\alpha\beta} = \hat{F}_{\alpha\beta}^1(x, t) g_{\alpha\beta} + \hat{F}_{\alpha\beta}^2(x, t),$$

para todo $\alpha \neq \beta$, veja (2.29).

Agora, diferenciando a equação (2.35) em relação a $g_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}}(g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta} + g^{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}) + F_{ab}\left((g^{\alpha\alpha}g^{a\beta} + g^{\alpha\beta}g^{a\alpha})g^{\beta b}\right. \\
&\quad \left.+ g^{\alpha a}(g^{\alpha\beta}g^{\beta b} + g^{\beta\beta}g^{\alpha b})\right) - (g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta} + g^{\alpha\beta}g^{\beta\alpha})\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}} \\
&= -2\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}}(g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta} + g^{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}) + \frac{\partial F_{\beta\beta}}{\partial g_{\beta\beta}}g^{\beta\beta}g^{\alpha\alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}}g^{\beta\alpha}g^{\alpha\beta} \\
&\quad + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}}g^{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + \frac{\partial F_{\beta\beta}}{\partial g_{\beta\beta}}g^{\beta\beta}g^{\alpha\alpha} \\
&= 2g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}\left(-\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}} + \partial_t\xi^t\right),
\end{aligned}$$

para todo $\alpha \neq \beta$. Assim:

$$0 = -\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}} + \partial_t\xi^t.$$

Portanto:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_t\xi^t g_{\alpha\beta} + \hat{F}_{\alpha\beta}(x, t), \quad (2.36)$$

para todo $\beta \neq \alpha$. Juntando (2.34) e (2.36), temos que:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_t\xi^t g_{\alpha\beta} + \hat{F}_{\alpha\beta}(x, t), \quad (2.37)$$

para todo α, β .

Dos termos ∂g : por simplicidade, deixamos as derivadas parciais da métrica em termos dos símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\alpha\sigma})\partial_t\xi^\sigma + \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}g^{\tau\rho}\left\{(\partial_\alpha\eta_{\tau\gamma} + \partial_\gamma\eta_{\tau\alpha} - \partial_\tau\eta_{\gamma\alpha})\Gamma_{\rho\delta\beta}\right. \\
&+ (\partial_\beta\eta_{\rho\delta} + \partial_\delta\eta_{\rho\beta} - \partial_\rho\eta_{\delta\beta})\Gamma_{\tau\gamma\alpha} - (\partial_\delta\eta_{\tau\gamma} + \partial_\gamma\eta_{\tau\delta} - \partial_\tau\eta_{\gamma\delta})\Gamma_{\rho\alpha\beta} \\
&\left.- (\partial_\beta\eta_{\rho\alpha} + \partial_\alpha\eta_{\rho\beta} - \partial_\rho\eta_{\alpha\beta})\Gamma_{\tau\gamma\delta}\right\} + \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left[\partial_\gamma\partial_\delta\xi^\sigma(\Gamma_{\alpha\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\alpha\sigma})\right. \\
&+ \partial_\alpha\partial_\beta\xi^\sigma(\Gamma_{\gamma\delta\sigma} + \Gamma_{\delta\gamma\sigma}) - \partial_\delta\partial_\beta\xi^\sigma(\Gamma_{\gamma\alpha\sigma} + \Gamma_{\alpha\gamma\sigma}) - \partial_\gamma\partial_\alpha\xi^\sigma(\Gamma_{\delta\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\delta\sigma}) \\
&- 2\partial_\gamma\left(\frac{\partial\eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\mu\nu)}}\right)(\Gamma_{\mu\nu\delta} + \Gamma_{\nu\mu\delta}) - \partial_\alpha\left(\frac{\partial\eta_{\gamma\delta}}{\partial g_{(\mu\nu)}}\right)(\Gamma_{\mu\nu\beta} + \Gamma_{\nu\mu\beta}) \\
&- \partial_\beta\left(\frac{\partial\eta_{\gamma\delta}}{\partial g_{(\mu\nu)}}\right)(\Gamma_{\mu\nu\alpha} + \Gamma_{\nu\mu\alpha}) + \partial_\delta\left(\frac{\partial\eta_{\gamma\alpha}}{\partial g_{(\mu\nu)}}\right)(\Gamma_{\mu\nu\beta} + \Gamma_{\nu\mu\beta}) \\
&+ \partial_\beta\left(\frac{\partial\eta_{\gamma\alpha}}{\partial g_{(\mu\nu)}}\right)(\Gamma_{\mu\nu\delta} + \Gamma_{\nu\mu\delta}) + \partial_\gamma\left(\frac{\partial\eta_{\delta\beta}}{\partial g_{(\mu\nu)}}\right)(\Gamma_{\mu\nu\alpha} + \Gamma_{\nu\mu\alpha}) \\
&\left.+ \partial_\alpha\left(\frac{\partial\eta_{\delta\beta}}{\partial g_{(\mu\nu)}}\right)(\Gamma_{\mu\nu\gamma} + \Gamma_{\nu\mu\gamma})\right] = 0.
\end{aligned} \quad (2.38)$$

Por outro lado, note que:

$$\partial_\gamma\left(\frac{\partial\eta_{\alpha\beta}}{\partial g_{(\mu\nu)}}\right)(\Gamma_{\mu\nu\delta} + \Gamma_{\nu\mu\delta}) = \partial_\gamma\left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial g_{\alpha\beta}}\right)(\Gamma_{\alpha\beta\delta} + \Gamma_{\mu\delta}),$$

veja (2.29) e (2.31). Usando (2.29) e (2.31), a equação (2.38) se transforma a:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\alpha\sigma})\partial_t\xi^\sigma + \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}g^{\tau\rho}\left\{(\partial_\alpha\hat{F}_{\tau\gamma} + \partial_\gamma\hat{F}_{\tau\alpha} - \partial_\tau\hat{F}_{\gamma\alpha})\Gamma_{\rho\delta\beta}\right. \\ & + (\partial_\beta\hat{F}_{\rho\delta} + \partial_\delta\hat{F}_{\rho\beta} - \partial_\rho\hat{F}_{\delta\beta})\Gamma_{\tau\gamma\alpha} - (\partial_\delta\hat{F}_{\tau\gamma} + \partial_\gamma\hat{F}_{\tau\delta} - \partial_\tau\hat{F}_{\gamma\delta})\Gamma_{\rho\alpha\beta} \\ & \left. - (\partial_\beta\hat{F}_{\rho\alpha} + \partial_\alpha\hat{F}_{\rho\beta} - \partial_\rho\hat{F}_{\alpha\beta})\Gamma_{\tau\gamma\delta}\right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Reorganizando os índices e considerando a simetria $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\nu\mu}$, da equação (2.39) segue:

$$\begin{aligned} & \left\{g^{\tau\lambda}(\delta_\nu^\beta g^{\gamma\mu} + \delta_\mu^\beta g^{\gamma\nu})(\partial_\alpha\hat{F}_{\tau\gamma} + \partial_\gamma\hat{F}_{\tau\alpha} - \partial_\tau\hat{F}_{\gamma\alpha}) + g^{\lambda\rho}(\delta_\nu^\alpha g^{\mu\delta} + \delta_\mu^\alpha g^{\nu\delta})\right. \\ & (\partial_\beta\hat{F}_{\rho\delta} + \partial_\delta\hat{F}_{\rho\beta} - \partial_\rho\hat{F}_{\delta\beta}) - g^{\tau\lambda}g^{\gamma\delta}(\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta + \delta_\nu^\alpha\delta_\mu^\beta)(\partial_\delta\hat{F}_{\tau\gamma} + \partial_\gamma\hat{F}_{\tau\delta} - \partial_\tau\hat{F}_{\gamma\delta}) \\ & - 2g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}(\partial_\beta\hat{F}_{\rho\alpha} + \partial_\alpha\hat{F}_{\rho\beta} - \partial_\rho\hat{F}_{\alpha\beta}) - \delta_\lambda^\alpha(\delta_\mu^\beta\partial_t\xi^\nu + \delta_\nu^\beta\partial_t\xi^\mu) - \partial_\lambda^\beta(\delta_\mu^\alpha\partial_t\xi^\nu \\ & \left. + \delta_\nu^\alpha\partial_t\xi^\mu)\right\}\frac{1}{2}\Gamma_{\lambda\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Caso $\mu \neq \alpha, \nu \neq \alpha, \mu \neq \beta, \lambda = \hat{\lambda}, \text{ e } \nu \neq \beta$: da equação anterior temos a seguinte equação determinante:

$$0 = g^{\lambda\rho}(\partial_\beta\hat{F}_{\rho\alpha} + \partial_\alpha\hat{F}_{\rho\beta} - \partial_\rho\hat{F}_{\alpha\beta}),$$

para $\alpha, \beta, \hat{\lambda}$. Como $\hat{F}_{\rho\alpha}$ só depende de x e t , veja (2.37), podemos concluir que:

$$0 = \partial_\beta F_{\hat{\rho}\alpha} + \partial_\alpha F_{\hat{\rho}\beta} - \partial_{\hat{\rho}} F_{\alpha\beta},$$

para toda $\alpha, \beta, \hat{\rho}$. Permutando os índices e o fato de que $\hat{F}_{\alpha\beta} = \hat{F}_{\beta\alpha}$, temos:

$$\partial_{\hat{\rho}} F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha F_{\hat{\rho}\beta} + \partial_\beta F_{\alpha\hat{\rho}} = \partial_{\hat{\rho}} F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\alpha\hat{\rho}} + \partial_\beta F_{\alpha\hat{\rho}},$$

segue que:

$$\partial_\beta \hat{F}_{\hat{\rho}\alpha} = 0,$$

para todo $\beta, \hat{\rho}, \alpha$. Em particular, $\hat{F}_{\alpha\beta}$ só depende de t :

$$F_{\alpha\beta} = \partial_t \xi^t g_{\alpha\beta} + \hat{F}_{\alpha\beta}(t). \quad (2.41)$$

Dado que $F_{\alpha\beta}$ só depende de t e $g_{\alpha\beta}$, a expressão (2.40) se simplifica a:

$$\left\{-\delta_\lambda^\alpha(\delta_\mu^\beta\partial_t\xi^\nu + \delta_\nu^\beta\partial_t\xi^\mu) - \partial_\lambda^\beta(\delta_\mu^\alpha\partial_t\xi^\nu + \delta_\nu^\alpha\partial_t\xi^\mu)\right\}\frac{1}{2}\Gamma_{\lambda\mu\nu} = 0.$$

Caso $\alpha = \lambda, \mu = \beta, \alpha \neq \beta, \text{ e } \nu = \hat{\nu}$: da equação acima, obtemos a próxima equação determinante:

$$\partial_t \xi^{\hat{\nu}} + \delta_\nu^\beta \partial_t \xi^\beta = 0,$$

para todo $\beta, \hat{\nu}$. Então:

$$\partial_t \xi^\beta = 0,$$

para todo β . Isto significa que ξ^β é só função de x .

Termos que não contêm derivadas do tensor métrico: segue a equação determinante

$$0 = g_{\alpha\beta} \partial_t \partial_t \xi^t + \partial_t \hat{F}_{\alpha\beta}. \quad (2.42)$$

Então

$$\partial_t \partial_t \xi^t = 0.$$

Assim, $\xi^t = a_1 t + a_2$ com a_1 e a_2 constantes. Da equação (2.42), podemos concluir

$$\partial_t \hat{F}_{\alpha\beta} = 0,$$

Devido a (2.41) segue

$$F_{\alpha\beta} = a_1 g_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}, \quad (2.43)$$

no qual $C_{\alpha\beta}$ é constante.

Dos termos $\partial g \partial g$: temos que:

$$0 = \{\Gamma_{\tau\gamma\alpha} \Gamma_{\rho\delta\beta} - \Gamma_{\tau\gamma\delta} \Gamma_{\rho\alpha\beta}\} \{g^{\gamma\delta} g^{d\rho} g^{c\tau} + g^{\tau\rho} g^{d\delta} g^{c\gamma}\} C_{cd},$$

para todo α e β . Reorganizando os índices:

$$\Gamma_{\tau\gamma a} \Gamma_{\rho\delta\beta} \left(\delta_\alpha^a (g^{\gamma\delta} g^{d\rho} g^{c\tau} + g^{\tau\rho} g^{d\delta} g^{c\gamma}) - \delta_\alpha^\delta (g^{\gamma a} g^{d\rho} g^{c\tau} + g^{\tau\rho} g^{da} g^{c\gamma}) \right) C_{cd}.$$

Caso $\gamma = a = \tau = \alpha$, e $\rho = \delta = \beta$: da equação acima, temos a seguinte equação determinante:

$$\Gamma_{\alpha\alpha\alpha} \Gamma_{\beta\beta\beta} \left(g^{\alpha\beta} g^{d\beta} g^{c\alpha} \right) C_{cd} = 0,$$

assim:

$$\left(g^{\alpha\beta} g^{d\beta} g^{c\alpha} \right) C_{cd} = 0.$$

Derivando esta equação por $\frac{\partial}{\partial g^{\beta\beta}} \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}}$, obtemos:

$$g^{c\alpha} C_{c\beta} + g^{\alpha\beta} C_{\beta\beta} = 0.$$

A partir desta equação, temos:

$$C_{\beta\beta} = 0, \quad C_{\alpha\beta} = 0.$$

Juntando tudo, podemos concluir que uma condição necessária para X ser uma simetria de Lie do fluxo de Ricci é que seja da forma:

$$X = (a_0 + a_1 t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} - \left(g_{ki} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} - a_1 g_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial g_{(ij)}}.$$

Isto é, X precisa ser combinação linear dos geradores infinitesimais da conjectura. $\square$

2.3 Grupo de Simetrias de Lie do fluxo de Ricci

Finalmente, podemos concluir que para um gerador infinitesimal X ser simetria de Lie do fluxo de Ricci através do critério infinitesimal é condição necessária e suficiente que este seja combinação linear dos geradores infinitesimais da conjectura. Agora precisamos argumentar porque com o critério infinitesimal temos todas as simetrias de Lie, sendo suficiente provar que as aplicações:

$$\Delta_{\alpha\beta} : \Omega \times U^{(2)} \rightarrow \mathbb{R},$$

dadas por

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(x, t, g^{(2)}) = & \frac{1}{2} \partial_t g_{\alpha\beta} + g^{\gamma\delta} g^{\tau\rho} \{ \Gamma_{\tau\gamma\alpha} \Gamma_{\rho\delta\beta} - \Gamma_{\tau\gamma\delta} \Gamma_{\rho\alpha\beta} \} \\ & + \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \{ -\partial_\gamma \partial_\delta g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\beta \partial_\delta g_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\delta\beta} \}, \end{aligned}$$

são analíticas, veja o Teorema 2.72, 2.73 e o Corolário 2.74 (OLVER, 1993). As funções $\Gamma_{\tau\gamma\alpha}$ e $-\partial_\gamma \partial_\delta g_{\alpha\beta}$ são analíticas pois são polinomiais nas entradas e a função $g^{\gamma\delta}$ também é analítica. Dado que a soma e o produto de funções analíticas é analítica, podemos concluir que $\Delta_{\alpha\beta}$ é analítica. Assim, temos a prova completa do Teorema 1.

Agora, classificamos a álgebra de dimensão finita do Teorema 1.

Proposição 12. *O conjunto ótimo unidimensional associado à álgebra de Lie $\text{Span}\{X_1, X_2\}$ é $\{X_1, X_2\}$, enquanto o conjunto ótimo bidimensional é trivialmente toda a álgebra de Lie $\text{Span}\{X_1, X_2\}$.*

Demonstração. Note que $[X_1, X_2] = X_1$. Seja $X = k^1 X_1 + k^2 X_2$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, considere inicialmente $k^2 \neq 0$, pode-se tomar $X = k^1 X_1 + X_2$. Logo, $\text{Ad}(\exp(k^1 X_1))X = X_2$. Portanto, X_2 é um elemento do conjunto ótimo, para o caso $k^2 = 0$, segue que X_1 é um elemento do conjunto ótimo. $\square$

3 Aplicações

Neste capítulo estamos interessados em determinar o grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci de certas famílias de métricas torcidas e conformes. Introduzimos brevemente o que é uma variedade torcida e fixamos algumas notações.

Dadas duas variedades Riemannianas (B^n, g_B) e (F^m, g_F) e uma função de deformação suave positiva ψ em B^n , vamos considerar a variedade produto $B^n \times F^m$ com a métrica $g = \pi_1^* g_B + (\psi \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_F$, onde π_1 e π_2 são as projeções naturais sobre B^n e F^m , respectivamente. Nessas condições, $(B^n \times F^m, g)$ é chamada de *variedade torcida* com variedade base B^n e fibra F^m . Os campos nas variedades B^n e F^m denotamos como $\mathfrak{L}(B^n)$ e $\mathfrak{L}(F^m)$ respectivamente.

Queremos estudar o fluxo de Ricci na variedade torcida $M = B^n \times F^m$ onde

$$(B^n, g_B) = \left(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\psi^2(x)} dx^i \otimes dx^i \right).$$

De forma mais precisa, nas próximas três seções vamos determinar o grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci quando a família a 1-parâmetro que resolve o fluxo de Ricci é da forma:

$$g = \frac{1}{\psi^2(x, t)} dx^i \otimes dx^i + \varphi^2(x, t)(g_{can}), \quad (3.1)$$

onde ψ , φ são funções suaves positivas e na qual (F^m, g_{can}) é uma variedade de Einstein. O fluxo de Ricci em variedades torcidas tem sido extensivamente estudado, veja por exemplo (ANGENENT; KNOPF, 2004), (IVEY, 1994), (OLIYNYK; WOOLGAR, 2007), e (MA; XU, 2011). Uma das principais motivações do estudo desta família é o estudo do fluxo de Ricci quando a métrica no tempo $t = 0$ é uma métrica torcida com fibra sendo uma variedade de Einstein, pois devido ao fato que o fluxo de Ricci preserva o grupo de isometria da métrica inicial, para o caso acima isso significa que o fluxo de Ricci preserva a estrutura torcida em todo tempo, veja (OLIYNYK; WOOLGAR, 2007). No contexto mais explícito de soluções auto-similares, veja (BORGES; TENENBLAT, 2022; LÓPEZ; NAZARENO, 2022).

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na próxima seção 3.1, discutimos quando a restrição de simetrias de Lie de sistemas gerais a particulares é uma simetria de Lie do sistema particular. Na seção 3.2 vamos determinar o grupo de simetrias de Lie da família (3.1). A partir desta, determinamos o grupo de simetrias de Lie quando o fluxo de Ricci é conforme à métrica euclideana e de S^{n+1} com fluxo com simetria rotacional. Na seção 3.3 estudamos as simetrias de Lie do fluxo de Ricci na variedade $S^{p+1} \times S^q$ com dupla torção. Finalmente, na seção 3.4 usamos o grupo de simetrias de Lie finito-dimensional para procurar soluções invariantes.

3.1 Restrição de Simetrias

O método pelo qual calculamos as simetrias de Lie é proposto por nós, o qual consiste em restringir as simetrias do fluxo de Ricci de uma métrica geral para uma família de métrica com uma forma particular. Tal método representa vantagens em termos de simplicidade de cálculo (LÓPEZ; DIMAS; BOZHKO, 2023).

Nesta seção queremos justificar a forma na qual computamos o grupo de simetrias de Lie deste capítulo.

Caso Modelo: queremos determinar o grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci para uma variedade de dimensão 2, na qual a família de métricas a 1-parâmetro que satisfaz o fluxo de Ricci é da forma:

$$g(x^1, x^2, t) = e^{u(x^1, x^2, t)} (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2). \quad (3.2)$$

Podemos reformular o problema da seguinte forma: os espaços das variáveis independentes e dependentes do fluxo de Ricci de dimensão 2 é $\Omega \simeq \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ e U respectivamente. Considere a aplicação linear:

$$\hat{H} : U \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

dada por $\hat{H}(g) = (g_{11} - g_{22}, g_{12})$ e defina

$$H : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

no qual $H(x, g) = \hat{H}(g)$. Considere os seguintes conjuntos

$$S_0 = \{(x^1, x^2, t, g) \in \Omega \times U; (x^1, x^2, t, g) \in H^{-1}(\{\mathbf{0}\})\}, \quad S_1 = \text{pr}^{(1)}(S_0), \quad S_2 = \text{pr}^{(2)}(S_0).$$

Note que S_0 é uma subvariedade mergulhada e fechada de $\Omega \times U$, basta ver que $\mathbf{0}$ seja valor regular de H . Ainda mais, dado que $\hat{H}$ é uma aplicação linear de posto completo, S_1 e S_2 são imagens inversas de valores regulares e assim são subvariedades mergulhadas e fechadas de $\Omega \times U^{(1)}$ e $\Omega \times U^{(2)}$ respectivamente.

O problema de encontrar as simetrias de Lie do fluxo de Ricci para métricas a 1-parâmetro da forma (3.2) é equivalente a encontrar o grupo de simetrias de Lie da subvariedade:

$$\mathcal{P} = \left\{ (x^1, x^2, t, g^{(2)}) \in \Omega \times U^{(2)} \cap S_2; 2 \text{Ric}_g + \partial_t g = 0 \right\} = \mathcal{S} \cap S_2,$$

no qual

$$\mathcal{S} = \left\{ (x^1, x^2, t, g^{(2)}) \in \Omega \times U^{(2)}; 2 \text{Ric}_g + \partial_t g = 0 \right\}.$$

Estamos tentados a “restringir” as simetrias de Lie de $\mathcal{S}$ a S_2 para obter simetrias de Lie de (3.2). Provamos que de fato a restrição de simetrias de $\mathcal{S}$ nos permite obter simetrias de Lie de $\mathcal{P}$, isto fazemos em um contexto mais geral.

Seja $\Delta(x, u^{(k)}) = \mathbf{0}$ um sistema de equações diferenciais, no qual $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^l$ é valor regular da aplicação $\Delta : \Omega \times U^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}^l$. Identificamos a equação diferencial como a respectiva subvariedade mergulhada e fechada $\mathcal{S} \subset \Omega \times U^{(k)}$ dada por:

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, u^{(k)}) \in \Omega \times U^{(k)}, \Delta(x, u^{(k)}) = \mathbf{0} \right\}. \quad (3.3)$$

Considere a aplicação linear $\hat{H} : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ tal que o posto de H seja s , defina

$$H : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^s, \quad (3.4)$$

dado por $H(x, u) = J(x) + \hat{H}(u)$, onde J é uma aplicação suave de Ω a $\mathbb{R}^s$. Considere o conjunto:

$$S_0 = \{(x, u) \in \Omega \times U; (x, u) \in H^{-1}(\{\mathbf{0}\})\}.$$

Note que S_0 é uma subvariedade mergulhada e fechada de $\Omega \times U$ basta ver que $\mathbf{0}$ é valor regular de H (aqui usamos o fato que a aplicação linear $\hat{H}$ tem posto s). Ainda mais, dado que $\hat{H}$ é uma aplicação linear de posto s , temos que $S_l = \text{pr}^{(l)}(S_0)$ para $l \in \{1, \dots, k\}$ é imagem inversa de um valor regular. Assim S_l é uma subvariedade mergulhada e fechada de $\Omega \times U^{(l)}$.

Suponha que para a simetria de Lie Q_X de $\mathcal{S}$ temos que $Q_X \in T_{(x, u^{(1)})} S_1$ sempre que $(x, u^{(1)}) \in S_1$. Então, se restringimos a simetria de Lie Q_X a S_1 obtemos simetrias de Lie do sistema:

$$\Delta \Big|_{S_k} = 0, \quad (3.5)$$

denotamos:

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, u^{(k)}) \in S_k; \Delta \Big|_{S_k} (x, u^{(k)}) = 0 \right\}.$$

Escrevemos de forma precisa o que queremos dizer com isto.

Começamos lembrando que vamos usar o critério infinitesimal para provar que as restrições de simetrias de Lie são simetrias de Lie, razão pela qual precisamos que $\mathbf{0}$ seja valor regular do sistema (3.5). Lembremos que um grupo de simetrias de Lie a 1-parâmetro de $\mathcal{S}$ representado por seu gerador infinitesimal escrita na sua forma canônica Q_X é uma seção do fibrado tangente de um aberto de $\Omega \times U^{(1)}$ com a propriedade que:

$$Q_X^{(k)}(\Delta) \Big|_{\mathcal{S}} = 0. \quad (3.6)$$

Sem perda de generalidade, considere que Q_X seja uma seção sobre todo o fibrado tangente de $\Omega \times U^{(1)}$. Isto é, Q_X é uma aplicação:

$$Q_X : \Omega \times U^{(1)} \rightarrow T(\Omega \times U^{(1)}), \quad (3.7)$$

suave com a propriedade que $\pi \circ Q_X = \text{Id}_{\Omega \times U^{(1)}}$ no qual π é uma aplicação da projeção do fibrado $(\Omega \times U^{(1)}, \pi, T(\Omega \times U^{(1)}))$. Com restrição de Q_X a S_1 queremos dizer:

1. Restringimos o domínio da aplicação (3.7) a S_1

$$Q_X|_{S_1} : S_1 \rightarrow T(\Omega \times U^{(1)}).$$

2. Já que $Q_X(x, u^{(1)}) \in T_{(x, u^{(1)})} S_1$ sempre que $(x, u^{(1)}) \in S_1$, podemos definir uma aplicação da forma

$$Q_{\hat{X}} : S_1 \rightarrow T(S_1).$$

Pelo fato que S_1 é uma subvariedade mergulhada de $\Omega \times U^{(1)}$, $Q_{\hat{X}}$ é uma aplicação suave. Por outro lado, a aplicação inclusão $i : S_1 \rightarrow \Omega \times U^{(1)}$ é um mergulho. Assim, a aplicação projeção do fibrado $(S_1, \hat{\pi}, T(S_1))$ é $\hat{\pi} = \pi \circ i$, logo $\hat{\pi} \circ Q_{\hat{X}} = \text{Id}_{S_1}$. Portanto, $Q_{\hat{X}}$ é uma seção do fibrado tangente de S_1 .

Agora provamos que $Q_{\hat{X}}$ é uma simetria de Lie de $\Delta|_{S_2}$. Daqui para frente consideramos $(x, u^{(1)}) \in S_1$.

- Note que

$$\exp(\varepsilon Q_X) \cdot (x, u^{(1)}) = \exp(\varepsilon Q_{\hat{X}}) \cdot (x, u^{(1)}) \in S_1,$$

para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, aqui usamos o fato que $Q_X(x, u^{(1)}) \in T_{(x, u^{(1)})} S_1$ e $S_1 \subset \Omega \times U^{(1)}$ é uma subvariedade mergulhada. Para detalhes veja a Proposição 15.

- Veja que

$$\begin{aligned} (\text{pr}^{(k)} \exp(\varepsilon Q_X)) \cdot (x, u^{(k)}) &:= \text{pr}^{(k)}(\exp(\varepsilon Q_X) \cdot (x, u^{(1)})) \\ &= \text{pr}^{(k)}(\exp(\varepsilon Q_{\hat{X}}) \cdot (x, u^{(1)})) \in S_k, \end{aligned}$$

para pontos $(x, u^{(k)}) \in S_k$. Para detalhes da igualdade veja a Proposição 15.

- A prolongação do campo restrito é a mesma prolongação do campo para pontos na subvariedade mergulhada, isto é,

$$Q_X^{(k)}(x, u^{(k)}) = \frac{d}{d\varepsilon} (\text{pr}^{(k)}(\exp(\varepsilon Q_{\hat{X}}) \cdot (x, u^{(1)}))) \Big|_{\varepsilon=0} = Q_{\hat{X}}^{(k)} \in T_{(x, u^{(k)})} S_k,$$

para pontos $(x, u^{(k)}) \in S_k$.

- O ponto chave é que nestas condições temos que

$$Q_{\hat{X}}^{(k)}(\Delta|_{S_k})|_{\mathcal{P}} = Q_X^{(k)}(\Delta)|_{S_k \cap \mathcal{P}} = 0,$$

onde usamos o fato que $Q_X^{(k)}(x, u^{(k)}) \in T_{(x, u^{(k)})} S_k$ sempre que $(x, u^{(k)}) \in S_k$ e $S_k \subset \Omega \times U^{(k)}$ é uma subvariedade mergulhada, para detalhes veja a Proposição 13. A ultima igualdade é devido a Q_X ser simetria de Lie e podemos usar (3.6). Portanto, $Q_{\hat{X}}$ é simetria de Lie de $\mathcal{P}$.

Observação 5. No caso acima consideramos a hipóteses:

$$Q_X(x, u) \in T_{(x, u^{(1)})} S_1 \quad \text{sempre que} \quad (x, u^{(1)}) \in S_1. \quad (3.8)$$

Porém, tomando uma simetria de Lie geral do fluxo de Ricci de dimensão 2 com métrica arbitrária temos que a condição acima não é satisfeita. Mas, podemos restringir Q_X de tal forma que (3.8) seja válida e verificar que ainda segue sendo simetria de Lie do sistema geral. No caso modelo por exemplo, uma simetria de Lie do fluxo de Ricci na variedade de dimensão 2 com uma métrica geral é:

$$X = (c_1 + c_2 t) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \xi^k(x^1, x^2) \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j \geq i}^2 \left(c_2 g_{ij} - \sum_{k=1}^2 g_{ki} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial g_{ij}},$$

veja o Teorema 1. Escrevemos X na sua forma canônica.

$$Q_X = Q^{ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}},$$

no qual

$$Q^{ij} = -(c_1 + c_2 t) \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} - \sum_{k=1}^2 \xi^k(x^1, x^2) \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + c_2 g_{ij} - \sum_{k=1}^2 g_{ki} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}.$$

Dado $(\hat{x}, \hat{g}^{(1)}) = \text{pr}^{(1)}(x^1, x^2, t, g_{11}, 0, g_{11}) \in S_1$, temos que os coeficientes de Q_X neste ponto são:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= -(c_1 + c_2 t) \frac{\partial g_{11}}{\partial t} - \sum_{k=1}^2 \xi^k(x^1, x^2) \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} + c_2 g_{11} - 2g_{11} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}, \\ Q_{12} &= -g_{11} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} - g_{11} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1}, \\ Q_{22} &= -(c_1 + c_2 t) \frac{\partial g_{11}}{\partial t} - \sum_{k=1}^2 \xi^k(x^1, x^2) \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} + c_2 g_{11} - 2g_{11} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

e pedir que $Q(\hat{x}, \hat{g}^{(1)}) \in T_{(x, \hat{g}^{(1)})} S_1$ é necessário e suficiente que $Q_{11} = Q_{22}$ e $Q_{12} = 0$. Por (3.9), isto é, equivalente a

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} = \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} = 0. \quad (3.10)$$

Defina Q_Y como Q_X restrito às condições que ξ^1 e ξ^2 satisfazem (3.10). Note que Q_Y segue sendo uma simetria de Lie do fluxo de Ricci de uma métrica geral bidimensional, veja o Teorema 1. Então, podemos aplicar o discutido acima para obter simetrias de Lie do fluxo de Ricci de (3.2). Devido à forma (3.2) procuramos

$$\hat{Q} = \hat{Q}_Y(x^1, x^2, t, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u},$$

com a condição que

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{\hat{Y}}e^u &= \hat{Q}(e^u) = Q(g_{11})\Big|_{\text{pr}^{(1)}(x^1, x^2, t, u)} = -(c_1, c_2 t) \frac{\partial u}{\partial t} e^u - \sum_{k=1}^2 \xi^k \frac{\partial u}{\partial x^k} e^u + e^u \left(c_2 - 2 \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right), \\ 0 &= \hat{Q}(e^u) = Q(g_{12})\Big|_{\text{pr}^{(1)}(x^1, x^2, t, u)} = -e^u \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) = 0, \\ \hat{Q}_{\hat{Y}}e^u &= \hat{Q}(e^u) = Q(g_{11})\Big|_{\text{pr}^{(1)}(x^1, x^2, t, u)} = -(c_1, c_2 t) \frac{\partial u}{\partial t} e^u - \sum_{k=1}^2 \xi^k \frac{\partial u}{\partial x^k} e^u + e^u \left(c_2 - 2 \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right).\end{aligned}$$

Assim

$$\hat{Q}_{\hat{Y}} = -(c_1 + c_2 t) \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^2 \xi^k \frac{\partial u}{\partial x^k} + c_2 - 2 \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1},$$

tal que ξ^1 e ξ^2 satisfazem (3.10). Escrevendo a simetria de Lie na sua forma de gerador infinitesimal

$$\hat{Y} = (c_1 + c_2 t) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \xi^k(x^1, x^2) \frac{\partial}{\partial x^k} + \left(c_2 - 2 \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (3.11)$$

no qual ξ^1 e ξ^2 satisfazem (3.10). Note que as equações (3.10) são as equações de Cauchy-Riemann. Em (CIMPOIASU; CONSTANTINESCU, 2006) os autores obtiveram a mesma álgebra de Lie resolvendo as equações determinantes.

Note que na discussão da restrição de simetrias de acima, usamos a forma da função H dada por (3.4), apenas para o argumento que $S_l = \text{pr}^{(l)}(S_0)$ seja uma subvariedade mergulhada e fechada de $\Omega \times U^{(l)}$ com $l \in \{1, \dots, k\}$. Assim, demonstramos o seguinte Teorema.

Teorema 2. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\Delta_\nu(x, u^{(k)}) = 0, \quad \forall \nu \in \{1, \dots, l\}, \quad (3.12)$$

tais que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^l$ é valor regular da aplicação $\Delta : \Omega \times U^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}^l$.

Suponha que temos um sistema de equações diferenciais $\hat{\Delta} = \Delta\Big|_{S_k}$ no qual $S_0 \subset \Omega \times U$ e $S_l = \text{pr}^{(l)} S_0$ são subvariedades mergulhadas e fechadas de $\Omega \times U^{(l)}$ para $l \in \{1, \dots, k\}$ (o novo sistema de equações é definido como a restrição de certas variáveis independentes e dependentes do sistema (3.12)), e este sistema de equações é tal que a aplicação $\hat{\Delta}$ também tem $\mathbf{0}$ como valor regular. Então, seja Q_X uma simetria de Lie de (3.12) com a propriedade que

$$Q_X(x, u^{(1)}) \in T_{(x, u^{(1)})} S_1 \text{ sempre que } (x, u^{(1)}) \in S_1.$$

Então, $Q_{\hat{X}} = Q_X\Big|_{S_1}$ é simetria de Lie de $\hat{\Delta}$.

O seguinte Teorema nos diz quando as simetrias de Lie obtidas através da restrição formam uma álgebra de Lie.

Teorema 3. *Nas condições do Teorema acima, se as simetrias de Lie do sistema (3.12) a restringir formam uma álgebra de Lie, então as simetrias de Lie obtidas através da restrição formam uma álgebra de Lie.*

Demonstração. Segue direto do Teorema 2 e da Proposição 14. $\square$

Em resumo, a estratégia para obter simetrias de Lie do fluxo de Ricci de famílias de métricas particulares a partir das simetrias de Lie de uma métrica genérica (geral) é:

1. Definir a subvariedade mergulhada fechada $S_0 \subset \Omega \times U$, como no Teorema 2, verificar que $\mathbf{0}$ é valor regular do sistema restrito.
2. Encontrar qual é a simetria de Lie mais geral da métrica genérica com a propriedade
$$Q_X(\hat{x}, \hat{g}^{(1)}) \in T_{(\hat{x}, \hat{g}^{(1)})} S_1 \quad \text{sempre que} \quad (\hat{x}, \hat{g}^{(1)}) \in S_1. \quad (3.13)$$
3. Reescrever o campo Q_X nas coordenadas de S_1 .

3.2 Grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci de $B^n \times F^m$ com torção

Nesta seção queremos determinar o grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci quando a família a 1-parâmetro que resolve o fluxo de Ricci é da forma (3.1) com g_{can} sendo uma métrica de Einstein. Precisamos separar o caso em que a fibra seja homotética à métrica euclideana.

Teorema 4. *(LÓPEZ; DIMAS; BOZHKOVA, 2023, Teorema 3) O grupo de Simetrias de Lie do fluxo de Ricci de (3.1), com (F^m, g_{can}) sendo uma variedade de Einstein tal que g_{can} não é uma métrica homotética à métrica euclideana, é gerada por:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 &= t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\psi}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ X_{k+2} &= \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x} + \psi \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \psi}, \end{aligned}$$

no qual $\xi^k(x)$ são funções suaves de $\mathbb{R}^n$ com $k \in \{1, \dots, n\}$, tal que

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0 \quad e \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} = 0, \quad (3.14)$$

com $i \neq j$.

Demonstração. Calculando de forma explícita as equações do fluxo de Ricci de (3.1)

$$\hat{\Delta}(x, t, \psi^{(2)}, \varphi^{(2)}) = (\Delta_1, \Delta_2),$$

no qual

$$\Delta_1 = (n-2) \frac{\psi_{ij}}{\psi} + \left(\frac{\Delta\psi}{\psi} - \frac{\psi_t}{\psi^3} - (n-1) \frac{|\nabla\psi|^2}{\psi^2} \right) \delta_{ij} - \frac{m}{\varphi} \left(\varphi_{ij} + \frac{\psi_i \varphi_j + \psi_j \varphi_i}{\psi} - \frac{\langle \nabla\psi, \nabla\varphi \rangle}{\psi} \delta_{ij} \right),$$

$$\Delta_2 = \varphi \varphi_t + \mu - \varphi \psi^2 \left(\Delta\varphi - (n-2) \frac{\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle}{\psi} \right) - (m-1) \psi^2 |\nabla\varphi|^2,$$

(Estas equações serão deduzidas com detalhes na seção 3.4), não é difícil ver que $\mathbf{0}$ é valor regular da aplicação $\hat{\Delta}$. Então, podemos aplicar o critério infinitesimal para construir simetrias.

Começamos tomando uma simetria de Lie geral do Teorema 1.

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \sum_{k=1}^{n+m} X_{2+k},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Assim, temos que

$$X = (c_1 + c_2 t) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n+m} \xi^k(x^1, \dots, x^{n+m}) \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j \geq i}^{n+m} \left(c_2 g_{ij} - \sum_{k=1}^{n+m} g_{ki} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial g_{ij}},$$

escrevendo X na sua forma canônica

$$Q_X = \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j \geq i}^{n+m} Q^{ij}(x, t, g^{(1)}) \frac{\partial}{\partial g_{ij}}, \quad (3.15)$$

no qual

$$Q^{ij} = -(c_1 + c_2 t) \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n+m} \xi^k(x) \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + c_2 g_{ij} - \sum_{k=1}^{n+m} g_{ki} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}.$$

Neste caso temos que $\Omega \simeq \mathbb{B}^n \times \mathbb{F}^m \times \mathbb{R}$. Defina a aplicação

$$H : \Omega \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^{(1+n)(2+n)/2},$$

dada por:

$$H(x, t, g) = \mathbf{g} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\psi^2(x^1, \dots, x^n, t)} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \varphi^2(x^1, \dots, x^n, t) g_{can} \end{pmatrix}.$$

Defina o conjunto:

$$S_0 = \{(x, t, g) \in \Omega \times \mathbb{U}; (x, t, g) \in H^{-1}(\{\mathbf{0}\})\}.$$

Note que a aplicação H satisfaz as hipóteses do Teorema 2. Aqui vamos fazer de forma direta. Isto é, encontramos o campo

$$Q = Q_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + Q_\psi \frac{\partial}{\partial \psi},$$

no qual Q_φ e Q_ψ são funções suaves e dependentes de $(x^1, \dots, x^n, t, \varphi^{(1)}, \psi^{(1)})$ tal que

$$Q_X = Q, \quad (3.16)$$

para pontos $(x, t, g^{(1)}) \in S_1$. No final argumentaremos que o campo tangente a S_1 ainda é simetria de Lie de uma família de métricas gerais de dimensão $n + m$. Portanto, podemos aplicar o Teorema 2. Tenha em mente (3.16) a qual usaremos repetidas vezes.

Considerando as restrições acima temos

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\psi^3} Q_\psi &= Q_X(g_{ii}) \Big|_{(x,t,\varphi,\psi)} \\ &= \left(c_2 - 2 \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \right) \frac{1}{\psi^2} - (c_1 + c_2 t) \left(\frac{-2\psi_t}{\psi^3} \right) - \xi^k \left(\frac{-2\psi_{x^k}}{\psi^3} \right), \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim

$$Q_\psi = - \left(\frac{c_2}{2} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \right) \psi - (c_1 + c_2 t) \psi_t - \xi^k \psi_{x^k}. \quad (3.17)$$

Em adição, segue que

$$Q_\psi = -\frac{\psi^3}{2} Q_X(g_{ii}) \Big|_{(x,t,\varphi,\psi)} = -\frac{\psi^3}{2} Q_X(g_{jj}) \Big|_{(x,t,\varphi,\psi)}, \quad (3.18)$$

para $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Observando (3.17), podemos ver que (3.18) é válido se e somente se

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^j}, \quad (3.19)$$

com $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ com $i \neq j$, temos que

$$0 = Q_X(g_{ij}) \Big|_{(x,t,\varphi,\psi)} = -\frac{1}{\psi^2} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right).$$

O qual é equivalente a

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0,$$

para todo $i \neq j$.

Para $i \in \{1, \dots, n\}$ e $l \in \{1, \dots, m\}$. Segue que

$$0 = Q_X(g_{i,n+l}) \Big|_{(x,t,\varphi,\psi)} = - \left(\frac{1}{\psi^2} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{l+n}} + \varphi^2 \frac{\partial \xi^{l+n}}{\partial x^i} \right). \quad (3.20)$$

Neste caso $\partial \xi^i / \partial x^{l+n}$ representa as derivadas parciais da função ξ^i com respeito às coordenadas $l+n$ da fibra. Por outro lado, como ξ depende só das variáveis independentes, podemos concluir que as primeiras n funções ξ^i só dependem das primeiras n variáveis independentes e as últimas m funções de ξ^i dependem só das últimas m variáveis independentes. Isto é,

$$\xi^i(x^1, \dots, x^n) \quad \text{e} \quad \xi^{l+n}(x^{n+1}, \dots, x^{n+m}), \quad (3.21)$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $l \in \{1, \dots, m\}$. Para $l, p \in \{1, \dots, m\}$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\varphi Q_\varphi(g_{can})_{l,p} &= Q_X(g_{n+l,n+p}) \Big|_{(x,t,\varphi,\psi)} \\ &= \varphi^2 \left(c_2(g_{can})_{lp} - (g_{can})_{kl} \frac{\partial \xi^{n+k}}{\partial x^{n+p}} - (g_{can})_{kp} \frac{\partial \xi^{n+k}}{\partial x^{n+l}} \right) \\ &\quad - 2(c_1 + c_2 t) \varphi \varphi_t (g_{can})_{lp} - \xi^{n+k} \varphi^2 \frac{\partial (g_{can})_{lp}}{\partial x^{n+k}} - 2\varphi \varphi_{x_s} \xi^s (g_{can})_{l,p}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

nesta última equação $k \in \{1, \dots, m\}$ e $s \in \{1, \dots, n\}$. Note que Q_φ não depende de g_{can} (os coeficientes da métrica canônica não são constantes). Portanto,

$$\xi^{n+k} \frac{\partial (g_{can})_{lp}}{\partial x^{n+k}} = 0, \quad \text{for } k \in \{1, \dots, m\}.$$

Assim, $\xi^{n+k} = 0$, para $k \in \{1, \dots, m\}$, logo

$$Q_\varphi = \frac{c_2}{2} \varphi - (c_1 + c_2 t) \varphi_t - \xi^s \varphi_{x_s}. \quad (3.23)$$

Resumindo o que foi apresentado, temos que

$$X = (c_1 + 2c_2 t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} + c_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} \psi - c_2 \psi \right) \frac{\partial}{\partial \psi},$$

com $k \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} = 0$ e $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0$ quando $i \neq j$.

Finalmente, se restringimos os coeficientes do campo (3.15) ao caso em que $\xi^{n+k} = 0$, para $k \in \{1, \dots, m\}$ e $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} = 0$ e $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0$ quando $i \neq j$ para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, temos que este novo campo continua sendo uma simetria de Lie do fluxo de Ricci de uma família de métricas gerais de dimensão $n+m$. Em outras palavras, o componente tangente S_1 continua sendo uma simetria de Lie de uma métrica geral de dimensão $n+m$. Assim, podemos concluir a prova do Teorema. $\square$

Agora voltamos nossa atenção para o caso especial onde a fibra é o espaço euclidiano dotado da métrica canônica.

Teorema 5. (*LÓPEZ; DIMAS; BOZHKOV, 2023, Teorema 4*) O grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci de (3.1), com F^m sendo $\mathbb{R}^m$ dotado da métrica canônica, é gerado por:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 &= \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ X_3 &= t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\psi}{2} \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ X_{k+3} &= \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x} + \psi \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \psi}, \end{aligned}$$

no qual $\xi^k(x)$ são funções suaves de $\mathbb{R}^n$ com $k \in \{1, \dots, n\}$, tal que

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0 \quad e \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} = 0, \quad (3.24)$$

com $i \neq j$.

Demonstração. Seguindo a prova anterior, temos que Q_ψ ainda é determinado pela expressão dada por (3.17), ξ^i com $i \in \{1, \dots, n\}$ continuam satisfazendo as equações de Cauchy Riemann, as condições (3.21) ainda são válidas e as Eqs. (3.22) são transformadas a

$$\begin{aligned} 2\varphi Q_\varphi \delta_{l,p} &= Q_X(g_{n+l,n+p}) \Big|_{(x,t,\varphi,\psi)} \\ &= \varphi^2 \left(c_2(\delta_{lp} - \frac{\partial \xi^{n+l}}{\partial x^{n+p}} - \frac{\partial \xi^{n+p}}{\partial x^{n+l}}) \right. \\ &\quad \left. - 2(c_1 + c_2 t) \varphi \varphi_t \delta_{lp} - 2\varphi \varphi_{x_s} \xi^s \delta_{l,p}, \right. \end{aligned} \quad (3.25)$$

para $l, p \in \{1, \dots, m\}$, a partir do qual é possível concluir que

$$Q_\varphi = \frac{c_2}{2} \varphi - (c_1 + c_2 t) \varphi_t - \xi^s \varphi_{x_s} + c_3 \varphi. \quad (3.26)$$

com $c_3 \in \mathbb{R}$. Considerando o que foi apresentado, temos que

$$X = (c_1 + 2c_2 t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} + (c_2 + c_3 \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} \psi - c_2 \psi \right) \frac{\partial}{\partial \psi},$$

com $k \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} = 0$ e $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0$, quando $i \neq j$.

O argumento final da prova do Teorema anterior é análogo. Assim, podemos concluir a prova do Teorema. $\square$

A diferença dos casos anteriores é que a álgebra de Lie de dimensão finita é tridimensional. Vamos fazer a construção dos conjuntos ótimos para esta álgebra. Começamos com o conjunto ótimo de dimensão 1.

Computamos sua álgebra de Lie, conforme mostrado na seguinte Tabela.

Tabela 1 – Álgebra de Lie.

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	X_1
X_2	0	0	0
X_3	$-X_1$	0	0

Veja que:

$$\mathfrak{g} = \text{Span}\{X_1, X_2, X_3\} = \text{Span}\{X_2\} \oplus \text{Span}\{X_1, X_3\}.$$

Pela Proposição 12, temos que um conjunto ótimo de dimensão 1 para $\text{Span}\{X_1, X_3\}$ é o conjunto $\{X_1, X_3\}$. Então, para construir o conjunto ótimo de $\mathfrak{g}$, basta considerar os elementos $\{X_2 + \alpha X_1, X_2 + \alpha X_3, X_1, X_3\}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e podendo ainda simplificar $X_2 + \alpha X_1$ e $X_2 + \alpha X_3$. Note que

$$\text{Ad}(e^{\beta X_3})(X_2 + \alpha X_1) = X_2 + e^{\beta} \alpha X_1,$$

e neste caso temos apenas três classes e podemos tomar como representantes $\{X_2 + X_1, X_2 - X_1, X_2\}$, o elemento $X_2 + \alpha X_3$ não se pode simplificar mais. Portanto, o conjunto:

$$S_1 = \{X_2 + X_1, X_2 - X_1, X_2 + \alpha X_3, X_1, X_3\},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ é um conjunto ótimo de dimensão 1 para $\mathfrak{g}$.

Agora fazemos a construção do conjunto ótimo de dimensão 2, seguindo as ideias de Ovsiannikov (OVSIANNIKOV, 1978).

Dada a subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de dimensão 2. Fixamos uma base $B = \{Y_1, Y_2\}$ de $\mathfrak{h}$. Segue que, Y_1 está relacionado com um único elemento do conjunto ótimo de dimensão 1. Portanto, para encontrar as subálgebras de dimensão 2 e em particular para a construção de nosso conjunto ótimo podemos começar tomando Y_1 sendo um elemento de S_1 . Agora, procuramos os Y_2 tal que, $[Y_1, Y_2] = \mu Y_1 + \beta Y_2$ com $\mu, \beta \in \mathbb{R}$ e $\{Y_1, Y_2\}$ linearmente independente. Como $\mathfrak{h}$ é um espaço vetorial, podemos reduzir a procura de:

$$[Y_1, Y_2] = \beta Y_2. \quad (3.27)$$

De fato, seja Y_2 tal que $\{Y_1, Y_2\}$ são linearmente independentes e $[Y_1, Y_2] = \mu Y_1 + \beta Y_2$ com $\mu \neq 0$, defina $\tilde{Y}_2 = Y_1 + \frac{\beta}{\mu} Y_2$, segue que:

$$[Y_1, \tilde{Y}_2] = \frac{\beta}{\mu} (\mu Y_1 + \beta Y_2) = \beta \tilde{Y}_2.$$

e $\text{Span}\{Y_1, Y_2\} = \text{Span}\{Y_1, \tilde{Y}_2\}$.

Resumindo, se reduz à classificação das subálgebras formadas a partir de todos os auto-espaços formados pelo conjunto ótimo de dimensão 1. Assim:

1. Começamos com $X_2 + X_1$, o auto-espço dos autovetores da aplicação $ad(X_2 + X_1)$ com autovalor zero é $\text{Span}\{X_1, X_2\}$. Portanto, podemos tomar por simplicidade como único representante a álgebra $\text{Span}\{X_1, X_2\}$.
2. No caso $X_2 - X_1$, temos uma única classe a qual coincide com a classe anterior.
3. No caso $X_2 + \alpha X_3$, o auto-espço dos autovetores da aplicação $ad(X_2 + \alpha X_3)$ com autovalor zero é $\text{Span}\{X_2, X_3\}$, com autovalor $-\alpha$ é $\text{Span}\{X_1\}$. Assim, temos os representantes $\text{Span}\{X_2, X_3\}$ e $\text{Span}\{X_2 + \alpha X_3, X_1\}$.
4. No caso X_1 , o auto-espço dos autovetores da aplicação $ad(X_1)$ com autovalor zero é $\text{Span}\{X_2, X_3\}$. Assim, este caso não acrescenta elementos no conjunto ótimo.
5. No caso X_3 , o auto-espço dos autovetores da aplicação $ad(X_3)$ com autovalor zero é $\text{Span}\{X_2, X_3\}$, com autovalor -1 é $\text{Span}\{X_1\}$. Assim, podemos tomar como representante $\text{Span}\{X_1, X_3\}$.

Resumindo o que foi apresentado, e olhando com cuidado de não repetir alguma classe temos que o conjunto ótimo de dimensão 2 é:

$$S_2 = \{\text{Span}\{X_2 + \alpha X_3, X_1\}, \text{Span}\{X_2, X_3\}, \text{Span}\{X_1, X_3\}\}, \quad (3.28)$$

por último, temos trivialmente que:

$$S_3 = \mathfrak{g}, \quad (3.29)$$

é um conjunto ótimo de dimensão 3 de $\mathfrak{g}$. Podemos enunciar de forma direta.

Teorema 6. *Os conjuntos ótimos da álgebra de Lie de dimensão finita do Teorema 5 são:*

$$\begin{aligned} S_1 &= \{X_2 + X_1, X_2 - X_1, X_2 + \alpha X_3, X_1, X_3\}, \\ S_2 &= \{\text{Span}\{X_2 + \alpha X_3, X_1\}, \text{Span}\{X_2, X_3\}, \text{Span}\{X_1, X_3\}\}, \\ S_3 &= \{\text{Span}\{X_1, X_2, X_3\}\}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Os próximos dois Teoremas são uma consequência imediata do Teorema 4.

Teorema 7. (*LÓPEZ; DIMAS; BOZHKOV, 2023, Corolário 1*) O grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci em $\mathbb{R}^n$ com fluxo conforme, isto é,

$$g = \frac{1}{\psi^2(x, t)} dx^i \otimes dx^i,$$

é gerado por:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 &= t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\psi}{2} \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ X_3 &= \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} + \psi \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

no qual $\xi^k(x)$ são funções suaves de $\mathbb{R}^n$ com $k \in \{1, \dots, n\}$, satisfazendo

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0 \quad e, \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} = 0, \quad (3.32)$$

com $i \neq j$.

Demonstração. O resultado segue imediatamente da primeira parte da prova do Teorema 4. $\square$

Teorema 8. O grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci em S^{n+1} da família

$$g = \frac{1}{\psi^2(x, t)} dx \otimes dx + \varphi^2(x, t)(g_{can}),$$

no qual g_{can} sendo a métrica canônica da esfera de dimensão n é gerado pelos seguintes campos:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 &= t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\psi}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ X_3 &= \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} + \psi \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi}, \end{aligned}$$

no qual $\xi(x)$ é uma função arbitrária de x .

Observação 6. Os conjuntos ótimos do grupo de simetrias de Lie de dimensão finita dos Teoremas 4, 7 e 8 são dados pela Proposição 12.

3.3 Grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci em $S^{p+1} \times S^q$.

Agora restringimos nossa atenção aos fluxos que evoluem a partir de uma métrica inicial fixa que é cohomogênea em relação à ação natural $SO(p+1) \times SO(q+1)$.

Isto é, consideramos as métricas produto duplamente deformadas em $S^{p+1} \times S^q$ com $p \geq 2$ e $q \geq 1$, no qual o grupo a 1-parâmetro que satisfaz o fluxo de Ricci é da forma:

$$g = \chi^2(x, t)dx \otimes dx + \varphi^2(x, t)g_{S_{can}^p} + \psi^2(x, t)g_{S_{can}^q}, \quad (3.33)$$

no qual $g_{S_{can}^p}$ e $g_{S_{can}^q}$ denotam as métricas canônicas da esfera de dimensão p e q respectivamente. Este tipo de fluxo tem sido extensamente estudado em (STOLARSKI, 2019).

Teorema 9. (LÓPEZ; DIMAS; BOZHKO, 2023, Teorema 5) *O grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci em $S^{p+1} \times S^q$ da família (3.33) é gerado pelos seguintes campos:*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.34)$$

$$X_2 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (3.35)$$

$$X_3 = \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} - \chi \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (3.36)$$

no qual ξ é uma função suave arbitrária de x .

Demonstração. Tomamos uma simetria de Lie geral do Teorema (1):

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \sum_{1 \leq k \leq p+q+1} X_{2+k},$$

escrevendo X na sua forma característica

$$Q_X = \sum_{i=1}^{1+p+q} \sum_{j \geq i}^{1+p+q} Q^{ij}(x, t, g^{(1)}) \frac{\partial}{\partial g_{ij}}, \quad (3.37)$$

no qual

$$Q^{ij} = -(c_1 + c_2 t) \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{1+p+q} \xi^k(x) \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + c_2 g_{ij} - \sum_{k=1}^{1+p+q} g_{ki} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}.$$

Defina a aplicação

$$H : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^{(1+p+q)(2+p+q)/2},$$

dada por:

$$H(x, t, g) = \left(g_{11} - \chi(x^1, t)^2, g_{ij}, g_{k_1+1, l_1+1} - \varphi^2(x^1, t)(g_{can}^p)_{kl}, g_{k_2+1, l_2+1} - \psi^2(x^1, t)(g_{can}^q)_{kl} \right),$$

com $k_1, l_1 \in \{1, \dots, p\}$ e $k_2, l_2 \in \{1, \dots, q\}$ e os i, j são os índices faltantes da métrica g . Note que a função H satisfaz as hipóteses do Teorema 2. Defina o conjunto

$$S_0 = \{(x, t, g) \in \Omega \times U; (x, t, g) \in H^{-1}(\{0\})\}.$$

Similarmente ao caso com uma torção, encontramos o campo

$$Q = Q_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + Q_\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + Q_\chi \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (3.38)$$

no qual Q_φ , Q_ψ e Q_χ são funções suaves e dependentes de $(x^1, t, \varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, \chi^{(1)})$ tal que

$$Q_X = Q, \quad (3.39)$$

para pontos $(x, t, g^{(1)}) \in S_1$. No final argumentaremos que o campo tangente a S_1 ainda é simetria de Lie de uma métrica geral de dimensão $1 + p + q$. Portanto, podemos aplicar o Teorema 2. Tenha em mente (3.39) a qual usaremos repetidas vezes.

$$2\chi Q_X = Q_X(g_{11}) \Big|_{(x,t,g^{(1)})} = -2\chi \frac{\partial \chi}{\partial t} (c_1 + c_2 t) - 2\chi \frac{\partial \chi}{\partial x^1} \xi^1 + c_2 \chi^2 - 2\chi^2 \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1},$$

logo, ξ^1 apenas é função de x^1 e

$$Q_X = -\frac{\partial \chi}{\partial t} (c_1 + c_2 t) - \frac{\partial \chi}{\partial x^1} \xi^1(x^1) + c_2 \frac{\chi}{2} - \frac{\chi}{2} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}. \quad (3.40)$$

Para $1 \leq i \leq p$, segue

$$0 = Q_X(g_{1,i+1}) \Big|_{(x,t,g^{(1)})} = -\psi^2 \sum_{k=1}^p (g_{S_{can}^p})_{ki} \frac{\partial \xi^{k+1}}{\partial x^1}.$$

Assim, ξ^{k+1} é independente de x^1 com $k \in \{1, \dots, p\}$, de forma análoga para $g_{1,i+1}$ com $i \in \{p+1, 1+q\}$ tem-se que ξ^{k+1} é independente de x^1 com $k \in \{1, \dots, p+q\}$. Por outro lado

$$\begin{aligned} 2\varphi(g_{S_{can}^p})_{ij} Q_\varphi &= Q_X(g_{1+i,1+j}) \Big|_{(x,t,g^{(1)})} \\ &= \left(-2\varphi(c_1 + c_2 t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2\varphi \xi^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + c_2 \varphi^2 \right) (g_{S_{can}^p})_{ij} \\ &\quad - \sum_{k=2}^{1+p} \xi^k \varphi^2 \frac{\partial (g_{S_{can}^p})_{ij}}{\partial x^k} - \varphi^2 \sum_{k=2}^{1+p} (g_{S_{can}^p})_{k-1,i} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + (g_{S_{can}^p})_{k-1,j} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Logo $\xi^k = 0$ para $k \in \{2, 1+p\}$ e

$$Q_\varphi = -(c_1 + c_2 t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \frac{c_2}{2} \varphi. \quad (3.41)$$

Para $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq q$ segue que

$$0 = Q_X(g_{1+i,1+p+j}) \Big|_{(x,t,g^{(1)})} = -\psi^2 \sum_{k=2+p}^{1+p+q} (g_{S_{can}^q})_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{1+i}}.$$

Assim, ξ^k depende só de $x^{2+p}, \dots, x^{1+p+q}$ para $k \in \{2+p, \dots, 1+p+q\}$.

Para $1 \leq i \leq j \leq q$, temos

$$\begin{aligned} 2\psi(g_{S_{can}^q})_{ij}Q_\psi &= Q_X(g_{1+p+i,1+p+j})\Big|_{(x,t,g^{(1)})} \\ &= \left(-2\psi(c_1 + c_2t)\frac{\partial\psi}{\partial t} - 2\psi\xi^1\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + c_2\psi^2\right)(g_{S_{can}^q})_{ij} \\ &\quad - \sum_{k=2+p}^{1+p+q} \xi^k\psi^2\frac{\partial(g_{S_{can}^q})_{ij}}{\partial x^k} - \psi^2 \sum_{k=2+p}^{1+p+q} (g_{S_{can}^q})_{k-1-p,i}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j} + (g_{S_{can}^p})_{k-1-p,j}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Logo $\xi^k = 0$ para $k \in \{2, 1+p+q\}$ e

$$Q_\psi = -(c_1 + c_2t)\frac{\partial\psi}{\partial t} - \xi^1\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \frac{c_2}{2}\psi. \quad (3.42)$$

Finalmente, note que se restringimos o campo (3.37) ao caso $\xi^1(x^1)$ e $\xi^{k+1} = 0$ para $k \in \{1, \dots, p+q\}$, este novo campo segue sendo uma simetria de Lie do fluxo de Ricci de uma família de métricas gerais de dimensão $1+p+q$. Assim, pelo Teorema 2, o campo (3.38), com χ , φ e ψ dadas pelas expressões (3.40), (3.41) e (3.42) respectivamente, é uma simetria de Lie do fluxo de Ricci de (3.33). Escrevendo este campo na sua forma de gerador infinitesimal obtemos

$$Y = (c_1 + 2c_2t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x^1)\frac{\partial}{\partial x^1} + \chi\left(c_2 - \frac{\partial\xi}{\partial x^1}\right)\frac{\partial}{\partial\chi} + c_2\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + c_2\psi\frac{\partial}{\partial\psi}, \quad (3.43)$$

no qual $\xi(x^1)$ é uma função suave arbitrária de x^1 e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

3.4 Soluções Invariantes

Nesta seção pretendemos usar o grupo de simetrias de Lie de dimensão finita para encontrar soluções invariantes explícitas do fluxo de Ricci de família de métricas torcidas. Começamos com o caso de uma torção.

3.4.1 Soluções Invariantes do fluxo de Ricci em métricas torcidas

Primeiro, precisamos expressar explicitamente as equações do fluxo de Ricci para a família de métricas (3.1). Começamos computando o tensor de Ricci de uma métrica torcida. Sabemos que

$$\begin{aligned} \text{Ric}_g(\tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \text{Ric}_{g_B}(Y, Z) - \frac{m}{\varphi}\nabla_B^2\varphi(Y, Z), \\ \text{Ric}_g(\tilde{Y}, \tilde{V}) &= 0, \\ \text{Ric}_g(\tilde{V}, \tilde{W}) &= \text{Ric}_{g_{can}}(V, W) - \left(\frac{\Delta_B\varphi}{\varphi} + \frac{|\nabla_B\varphi|^2}{\varphi^2}(m-1)\right)g(\tilde{V}, \tilde{W}), \end{aligned} \quad (3.44)$$

para todo $Y, Z \in \mathfrak{L}(B^n)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(F^m)$, veja a Proposição 9.106 em (BESSE, 2007) ou (BISHOP; O'NEILL, 1969). Por outro lado, considere $(p, q) \in B^n \times F^m$, onde $\{\partial_1^B, \dots, \partial_n^B\}$

e $\{\partial_1^F, \dots, \partial_m^F\}$ é uma base coordenada de $T_p B^n$ e $T_q F^m$ respectivamente. Então

$$\text{Ric}_g(\tilde{\partial}_i^B, \tilde{\partial}_j^B) = \text{Ric}_{g_B}(\partial_i^B, \partial_j^B) - \frac{m}{\varphi} \nabla_B^2 \varphi(\partial_i^B, \partial_j^B).$$

Pela teoria conforme, sabemos que

$$\text{Ric}_{g_B}(\partial_i^B, \partial_j^B) = (n-2) \frac{\psi_{ij}}{\psi} + \left(\frac{\Delta \psi}{\psi} - (n-1) \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi^2} \right) \delta_{ij},$$

e

$$\nabla_B^2 \varphi(\partial_i^B, \partial_j^B) = \varphi_{ij} + \frac{\psi_i \varphi_j + \psi_j \varphi_i}{\psi} - \frac{\langle \nabla \psi, \nabla \varphi \rangle}{\psi} \delta_{ij},$$

veja o Teorema 1.159 em (BESSE, 2007). Assim

$$\begin{aligned} \text{Ric}_g(\tilde{\partial}_i^B, \tilde{\partial}_j^B) &= (n-2) \frac{\psi_{ij}}{\psi} + \left(\frac{\Delta \psi}{\psi} - (n-1) \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi^2} \right) \delta_{ij} \\ &\quad - \frac{m}{\varphi} \left(\varphi_{ij} + \frac{\psi_i \varphi_j + \psi_j \varphi_i}{\psi} - \frac{\langle \nabla \psi, \nabla \varphi \rangle}{\psi} \delta_{ij} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \text{Ric}_g(\tilde{\partial}_i^F, \tilde{\partial}_j^F) &= \text{Ric}_{g_{can}}(\partial_i^F, \partial_j^F) - \left(\frac{\Delta_B \varphi}{\varphi} + \frac{|\nabla_B \varphi|^2}{\varphi^2} (m-1) \right) g(\tilde{\partial}_i^F, \tilde{\partial}_j^F) \\ &= \mu(g_{can})_{ij} - \left(\frac{\Delta_B \varphi}{\varphi} + \frac{|\nabla_B \varphi|^2}{\varphi^2} (m-1) \right) \varphi^2 (g_{can})_{ij}. \end{aligned}$$

Mais uma vez, da teoria conforme, temos

$$\text{Ric}_g(\tilde{\partial}_i^F, \tilde{\partial}_j^F) = \left\{ \mu - \psi^2 \varphi^2 \left(\frac{\Delta \varphi}{\varphi} - (n-2) \frac{\langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle}{\psi \varphi} + (m-1) \frac{|\nabla \varphi|^2}{\varphi^2} \right) \right\} (g_{can})_{ij}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \text{Ric}_g &= \left((n-2) \frac{\psi_{ij}}{\psi} + \left(\frac{\Delta \psi}{\psi} - (n-1) \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi^2} \right) \delta_{ij} - \frac{m}{\varphi} \left(\varphi_{ij} + \frac{\psi_i \varphi_j + \psi_j \varphi_i}{\psi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\langle \nabla \psi, \nabla \varphi \rangle}{\psi} \delta_{ij} \right) \right) dx_i \otimes dx_j + \left(\mu - \varphi \psi^2 \left(\Delta \varphi - (n-2) \frac{\langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle}{\psi} \right) \right. \\ &\quad \left. - (m-1) \psi^2 |\nabla \varphi|^2 \right) g_{can}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Feito isto, a família de métricas (3.1) satisfaz a equação do fluxo de Ricci se e somente se o seguinte sistema for satisfeito

$$\begin{aligned} \frac{\psi_t}{\psi^3} \delta_{ij} &= (n-2) \frac{\psi_{ij}}{\psi} + \left(\frac{\Delta \psi}{\psi} - (n-1) \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi^2} \right) \delta_{ij} - \frac{m}{\varphi} \left(\varphi_{ij} + \frac{\psi_i \varphi_j + \psi_j \varphi_i}{\psi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle \nabla \psi, \nabla \varphi \rangle}{\psi} \delta_{ij} \right), \\ -\varphi \varphi_t &= \mu - \varphi \psi^2 \left(\Delta \varphi - (n-2) \frac{\langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle}{\psi} \right) - (m-1) \psi^2 |\nabla \varphi|^2, \end{aligned} \quad (3.46)$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Em segundo lugar, usamos as simetrias de Lie encontradas na seção 3.2 para reduzir o sistema de equações (3.46):

Note que $\{X_1, X_2\}$ é o conjunto ótimo unidimensional associado à subálgebra de dimensão finita do Teorema 4, veja a Proposição 12. Assim, basta considerar, por exemplo, a simetria X_2 aplicando a ela o grupo de transformações de um parâmetro gerado por X_1 , neste caso, $t \rightarrow t + \varepsilon$. Ou seja, vamos empregar a simetria

$$X = (1 + 2kt) \frac{\partial}{\partial t} - k\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + k\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

no qual escolhimos $\varepsilon = \frac{1}{2k}$, com $k \neq 0$. Portanto, as condições de superfície invariantes são:

$$\begin{cases} k\psi + (1 + 2kt) \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \\ k\varphi - (1 + 2kt) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

Resolvendo o sistema (3.47) pelo método das características obtemos

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2kt}} F(x), \\ \varphi &= \sqrt{1 + 2kt} G(x), \end{aligned}$$

onde F e G são funções suaves positivas de x . Substituindo essas expressões de ψ e ϕ para o sistema (3.46), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{k}{F^2} \delta_{ij} &= (n-2) \frac{F_{ij}}{F} + \left(\frac{\Delta F}{F} - (n-1) \frac{|\nabla F|^2}{F^2} \right) \delta_{ij} - \frac{m}{G} \left(G_{ij} + \frac{F_i G_j + F_j G_i}{F} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle \nabla F, \nabla G \rangle}{F} \delta_{ij} \right), \\ -kG^2 &= \mu - GF^2 \left(\Delta G - (n-2) \frac{\langle \nabla G, \nabla F \rangle}{F} \right) - (m-1) F^2 |\nabla G|^2, \end{aligned} \quad (3.48)$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Tendo em vista a dificuldade de resolver o sistema anterior, vamos reduzi-lo ainda mais considerando o caso em que a base tem dimensão 1 e a fibra é a esfera canônica, isto é, $M^1 \times S^m$. Por esta redução, o sistema (3.48) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{k}{F^2} &= \frac{m}{G} \left(G_{xx} + \frac{F_x G_x}{F} \right), \\ kG^2 &= -\mu + \frac{k}{m} G^2 + (m-1) F^2 G_x^2, \end{aligned} \quad (3.49)$$

no qual $\mu = m - 1$. Manipulando as equações acima, não é difícil ver que a seguinte equação é satisfeita

$$(FG_x)^2 = \frac{k}{m} G^2 + 1 \implies G_x = \pm \frac{1}{F} \sqrt{\frac{k}{m} G^2 + 1}.$$

Integrando obtemos

$$G(x) = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \sinh \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \int_{x_0}^x \frac{d\tau}{F(\tau)} \right), & k > 0, \\ \pm \sqrt{\frac{m}{-k}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{-k}{m}} \int_{x_0}^x \frac{d\tau}{F(\tau)} \right), & k < 0. \end{cases}$$

Observe que esta solução satisfaz identicamente a primeira equação do sistema (3.49). Além disso, a solução sugere a seguinte parametrização:

$$s(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\tau}{F(\tau)}.$$

Assim

$$\frac{(1 + 2kt)}{F^2(x)} dx \otimes dx = (1 + 2kt) ds \otimes ds.$$

Tendo todas as soluções do sistema (3.49) em mãos, quando $k \neq 0$, chegamos às seguintes soluções do fluxo de Ricci para o caso torcido de $M^1 \times S^m$:

$$\begin{aligned} g &= (1 + 2k^2t) \left(ds \otimes ds + \frac{m}{k^2} \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{k^2}{m}} s \right) g_{can} \right), \\ g &= (1 - 2k^2t) \left(ds \otimes ds + \frac{m}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\sqrt{\frac{k^2}{m}} s \right) g_{can} \right), \end{aligned}$$

quando $k \neq 0$. A primeira métrica produz a métrica chamada hiperbólica padrão no $m + 1$ -espaço, veja (MA; XU, 2011). Ambas são soluções bem conhecidas na bibliografia encontradas independentemente uma da outra. Este é um exemplo de como as simetrias podem unificar soluções encontradas com diferentes métodos.

3.4.2 Soluções invariantes para variedades com duas torções

Em primeiro lugar, precisamos expressar explicitamente o tensor de Ricci de (3.33)

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}_g &= \left(-\frac{p}{\varphi} \left(\varphi_{xx} - \frac{\varphi_x \chi_x}{\chi} \right) - \frac{q}{\psi} \left(\psi_{xx} - \frac{\psi_x \chi_x}{\chi} \right) \right) dx \otimes dx \\ &+ \left((p-1) - \frac{\varphi^2}{\chi^2} \left[\frac{1}{\varphi} \left(\varphi_{xx} - \frac{\varphi_x \chi_x}{\chi} \right) + (p-1) \left(\frac{\varphi_x}{\varphi} \right)^2 + q \left(\frac{\varphi_x \psi_x}{\varphi \psi} \right) \right] \right) g_{S_{can}^p} \\ &+ \left((q-1) - \frac{\psi^2}{\chi^2} \left[\frac{1}{\psi} \left(\psi_{xx} - \frac{\psi_x \chi_x}{\chi} \right) + (q-1) \left(\frac{\psi_x}{\psi} \right)^2 + p \left(\frac{\varphi_x \psi_x}{\psi \varphi} \right) \right] \right) g_{S_{can}^q}, \end{aligned}$$

veja (PETERSEN, 2006). Assim, não é difícil mostrar que as equações do fluxo de Ricci explícitas de (3.33) são

$$\begin{aligned}
\chi\chi_t &= \frac{p}{\varphi} \left(\varphi_{xx} - \frac{\varphi_x \chi_x}{\chi} \right) + \frac{q}{\psi} \left(\psi_{xx} - \frac{\psi_x \chi_x}{\chi} \right), \\
\varphi\varphi_t &= -(p-1) + \frac{\varphi^2}{\chi^2} \left[\frac{1}{\varphi} \left(\varphi_{xx} - \frac{\varphi_x \chi_x}{\chi} \right) + (p-1) \left(\frac{\varphi_x}{\varphi} \right)^2 + q \left(\frac{\varphi_x \psi_x}{\varphi\psi} \right) \right], \\
\psi\psi_t &= -(q-1) + \frac{\psi^2}{\chi^2} \left[\frac{1}{\psi} \left(\psi_{xx} - \frac{\psi_x \chi_x}{\chi} \right) + (q-1) \left(\frac{\psi_x}{\psi} \right)^2 + p \left(\frac{\varphi_x \psi_x}{\psi\varphi} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Pelo mesmo argumento da seção anterior, faremos uso da simetria de Lie

$$X = (1 + 2kt) \frac{\partial}{\partial t} + k\chi \frac{\partial}{\partial \chi} + k\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + k\psi \frac{\partial}{\partial \psi},$$

onde $k \neq 0$. Portanto, as condições de superfície invariantes correspondentes são

$$\begin{aligned}
Q_\chi &= k\chi - (1 + 2tk)\chi_t = 0, \\
Q_\varphi &= k\varphi - (1 + 2kt)\varphi_t = 0, \\
Q_\psi &= k\psi - (1 + 2kt)\psi_t = 0.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Resolvendo o sistema (3.51), obtemos

$$\begin{aligned}
\chi(x, t) &= \sqrt{1 + 2tk} F(x), \\
\varphi(x, t) &= \sqrt{1 + 2tk} G(x), \\
\psi(x, t) &= \sqrt{1 + 2tk} H(x).
\end{aligned}$$

Inserindo essas expressões de χ , ψ e φ no sistema (3.50), chegamos ao sistema reduzido

$$\begin{aligned}
kF^2 &= \frac{p}{G} \left(G'' - \frac{G'F'}{F} \right) + \frac{q}{H} \left(H'' - \frac{H'F'}{F} \right), \\
kG^2 &= -(p-1) + \left(\frac{G}{F} \right)^2 \left(\frac{G''}{G} - \frac{G'F'}{FG} + (p-1) \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + q \left(\frac{G'H'}{GH} \right) \right), \\
kH^2 &= -(q-1) + \left(\frac{H}{F} \right)^2 \left(\frac{H''}{H} - \frac{H'F'}{FH} + (q-1) \left(\frac{H'}{H} \right)^2 + p \left(\frac{G'H'}{GH} \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Inspirando-nos no procedimento de obtenção das soluções para o caso das variedades produtos com uma torção, começamos por parametrizar pelo comprimento de arco a base

$$s(x) = \int_{x_0}^x F(\tau) d\tau.$$

O sistema (3.52) se transforma a

$$\begin{aligned}
k &= p \frac{G''(s)}{G(s)} + q \frac{H''(s)}{H(s)}, \\
k &= \frac{G''(s)}{G(s)} + (p-1) \left(\frac{G'(s)^2 - 1}{G(s)^2} \right) + q \frac{G'(s)H'(s)}{G(s)H(s)}, \\
k &= \frac{H''(s)}{H(s)} + (q-1) \left(\frac{H'(s)^2 - 1}{H(s)^2} \right) + p \frac{G'(s)H'(s)}{G(s)H(s)}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Mais uma vez, olhando para as soluções encontradas na subseção anterior, começamos a procurar soluções particulares da mesma forma. Nossa investigação foi frutífera, as seguintes funções

$$G = \pm \sqrt{\frac{p+q}{-k}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{-k}{p+q}} s \right) \quad \text{e} \quad H = \pm \sqrt{\frac{p+q}{-k}} \cos \left(\sqrt{\frac{-k}{p+q}} s \right),$$

$$G = \pm \sqrt{\frac{(p-1)(p+q)}{-k(p+q-1)}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{-k}{p+q}} s \right) \quad \text{e} \quad H = \pm \sqrt{\frac{(q-1)(p+q)}{-k(p+q-1)}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{-k}{p+q}} s \right),$$

para $k < 0$, enquanto

$$G = \pm \sqrt{\frac{(p-1)(p+q)}{k(p+q-1)}} \sinh \left(\sqrt{\frac{k}{p+q}} s \right) \quad \text{e} \quad H = \pm \sqrt{\frac{(q-1)(p+q)}{k(p+q-1)}} \sinh \left(\sqrt{\frac{k}{p+q}} s \right),$$

para $k > 0$, são de fato soluções do sistema (3.53).

Portanto, nosso estudo produz as seguintes soluções especiais.

Teorema 10. (*LÓPEZ; DIMAS; BOZHKOVA, 2023*) *As seguintes famílias de métricas a 1-parâmetro são soluções do fluxo de Ricci (3.33)*

$$g(s, t) = (1 - 2k^2 t) ds \otimes ds + (1 - 2k^2 t) \frac{p+q}{k^2} \operatorname{sen}^2 \left(\sqrt{\frac{k^2}{p+q}} s \right) g_{S_{can}^p}$$

$$+ (1 - 2k^2 t) \frac{p+q}{k^2} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k^2}{p+q}} s \right) g_{S_{can}^q},$$

$$g(s, t) = (1 - 2k^2 t) ds \otimes ds + (1 - 2k^2 t) \frac{(p-1)(p+q)}{k^2(p+q-1)} \operatorname{sen}^2 \left(\sqrt{\frac{k^2}{p+q}} s \right) g_{S_{can}^p}$$

$$+ (1 - 2k^2 t) \frac{(q-1)(p+q)}{k^2(p+q-1)} \operatorname{sen}^2 \left(\sqrt{\frac{k^2}{p+q}} s \right) g_{S_{can}^q},$$

$$g(s, t) = (1 + 2k^2 t) ds \otimes ds + (1 + 2k^2 t) \frac{(p-1)(p+q)}{k^2(p+q-1)} \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{k^2}{p+q}} s \right) g_{S_{can}^p}$$

$$+ (1 + 2k^2 t) \frac{(q-1)(p+q)}{k^2(p+q-1)} \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{k^2}{p+q}} s \right) g_{S_{can}^q},$$

onde $k \neq 0$.

Até onde sabemos, essas soluções são novas na literatura. O qual seria outra contribuição do nosso trabalho.

4 Considerações Finais

Neste trabalho aplicamos com sucesso a teoria de simetrias de Lie para determinar o grupo de simetrias de Lie do fluxo de Ricci em dimensões arbitrárias. Usando suas propriedades algébricas, podemos “reciclá-los” para obter rapidamente simetrias de Lie do fluxo de Ricci para várias famílias de métricas. Uma tarefa que pode ser muito desafiadora se começarmos sempre do zero, tendo em mente que mesmo uma métrica quadridimensional produz um sistema de equações determinantes que envolve quase dois milhões de equações diferenciais parciais!

Infelizmente, as simetrias clássicas, sendo uma noção muito ampla que pode ser aplicada virtualmente a qualquer tipo de sistema de equações diferenciais, têm uma desvantagem muito séria; elas geralmente não nos ajudarão a obter os tipos de soluções que estamos procurando. E isso é evidente no nosso caso: a subálgebra de dimensão infinita apenas aponta para a natureza tensorial do nosso sistema, enquanto a finita diz, por um lado, que o sistema é autônomo e, por outro, nos conduz a considerar soluções separáveis. Soluções que são válidas se e somente se a variedade inicial for de Einstein. Fato que limita nossas escolhas quanto à condição inicial a ser considerada. Uma saída possível é considerar tipos de simetrias mais “exóticas”, como as não clássicas, veja a seção 9.3 em (HYDON, 2000). Em suma, simetrias não clássicas são simetrias admitidas apenas por famílias específicas de soluções de uma equação diferencial e não pela própria equação diferencial, como é o caso das simetrias clássicas. Embora nossos estudos iniciais fossem promissores, nenhuma das simetrias não clássicas encontradas forneceu soluções não triviais. Isso não é uma surpresa, pois os sistemas de equações diferenciais envolvidos agora são não lineares. Um dos objetivos futuros é a realização de uma classificação mais exhaustiva a fim de obter simetrias não clássicas que possam fornecer soluções do problema do fluxo de Ricci de algum interesse.

Referências

- ANGENENT, S.; KNOPF, D. An example of neckpinching for Ricci flow on S^{n+1} . *Mathematical Research Letters*, v. 11, n. 4, p. 493–518, 2004. Citado na página 46.
- BESSE, A. *Einstein manifolds*. 1. ed. Berlin: Classics in Mathematics. Springer, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 30, 62 e 63.
- BISHOP, R.; O'NEILL, B. Manifolds of negative curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 145, p. 1–49, 1969. Citado na página 62.
- BORGES, V.; TENENBLAT, K. Ricci almost solitons on semi-riemannian warped products. *Mathematische Nachrichten*, v. 295, n. 1, p. 22–43, 2022. Citado na página 46.
- CIMPOIASU, R.; CONSTANTINESCU, R. Symmetries and invariants for the 2D-Ricci flow model. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, v. 13, p. 285–292, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 51.
- DIMAS, S.; TSOUBELIS, D. Sym: A new symmetry-finding package for mathematica. In: *The 10th international conference in modern group analysis*. [S.l.]: University of Cyprus, Nicosia, 2005. p. 64–70. Citado na página 29.
- _____. A new mathematica-based program for solving overdetermined systems of pdes. In: *8th International Mathematica Symposium*. [S.l.]: Avignon France, 2006. Citado na página 29.
- EELLS, J.; SAMPSON, J. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *American Journal of Mathematics*, v. 86, n. 1, p. 109–160, 1964. Citado na página 14.
- HAMILTON, R. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, v. 17, n. 2, p. 255–306, 1982. Citado na página 14.
- HYDON, P. *Symmetry methods for differential equations: a beginner's guide*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 16, 28 e 68.
- IVEY, T. The Ricci flow on radially symmetric $\mathbb{R}^3$. *Communications in Partial Differential Equations*, v. 19, n. 9-10, p. 1481–1500, 1994. Citado na página 46.
- LIE, S.; ENGEL, F. *Theorie der Transformationsgruppen*. Leipzig: BG Teubner, 1888. Citado na página 13.
- LÓPEZ, E.; DIMAS, S.; BOZHKO, Y. Symmetries of Ricci flows. *arXiv preprint math/2212.13630*, 2023. Citado 9 vezes nas páginas 15, 29, 32, 47, 52, 56, 59, 60 e 67.
- LÓPEZ, E.; NAZARENO, J. Geometrical and analytical results for Einstein solitons. *arXiv preprint math/2208.01025*, 2022. Citado na página 46.
- MA, L.; XU, X. Ricci flow with hyperbolic warped product metrics. *Mathematische Nachrichten*, v. 284, n. 5-6, p. 739–746, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 65.

- MARCHILDON, L. Lie symmetries of Einstein's vacuum equations in n dimensions. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, v. 5, n. 1, p. 68–81, 1998. Citado na página 32.
- OLIYNYK, T.; WOOLGAR, E. Rotationally symmetric Ricci flow on asymptotically flat manifolds. *Communications in Analysis and Geometry*, v. 15, n. 3, p. 535–568, 2007. Citado na página 46.
- OLVER, P. *Applications of Lie groups to differential equations*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1993. Citado 10 vezes nas páginas 16, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 27 e 45.
- OVSIIANNIKOV, L. V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii*. Moscow: Nauka, 1978. Citado 3 vezes nas páginas 16, 28 e 57.
- PATERA, J.; WINTERNITZ, P.; ZASSENHAUS, H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. general method and the Poincaré group. *Journal of Mathematical Physics*, v. 16, n. 8, p. 1597–1614, 1975. Citado na página 28.
- PERELMAN, G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv preprint math/0211159*, 2002. Citado na página 14.
- _____. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. *arXiv preprint math/0307245*, 2003. Citado na página 14.
- _____. Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv preprint math/0303109*, 2003. Citado na página 14.
- PETERSEN, P. *Riemannian geometry*. 3. ed. Cham: Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2006. Citado na página 65.
- POINCARÉ, M. Cinquième complément à l'analysis situs. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, v. 18, n. 1, p. 45–110, 1904. Citado na página 13.
- SAN MARTIN, L. Grupos de Lie. *Editora Unicamp*, 2016. Citado na página 16.
- SAUNDERS, D. J. *The geometry of jet bundles*. New York: Cambridge University Press, 1989. Citado na página 20.
- STOLARSKI, M. Curvature blow-up in doubly-warped product metrics evolving by Ricci flow. *arXiv preprint arXiv:1905.00087*, 2019. Citado na página 60.
- THURSTON, W. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, v. 6, n. 3, p. 357–381, 1982. Citado na página 14.
- TU, L. Manifolds. In: *An Introduction to Manifolds*. New York: Springer, 2011. p. 47–83. Citado na página 16.
- WANG, J. Symmetries and solutions to geometrical flows. *Science China Mathematics*, v. 56, n. 8, p. 1689–1704, 2013. Citado na página 14.

Apêndices

APÊNDICE A – Algumas noções básicas

Por motivos de completitude apresentamos alguns resultados básicos que serão utilizadas na seção 3.1.

Proposição 13. *Seja M^m uma variedade diferenciável e $N^n \subset M^m$ uma subvariedade mergulhada. Seja X um campo definido sobre M^m com a propriedade que*

$$X(p) \in T_p N^n, \text{ sempre que } p \in N^n.$$

Então para toda função diferenciável f de M^m temos que:

$$X \Big|_{N^n} \left(f \Big|_{N^n} \right) = X(f) \Big|_{N^n}, \quad (\text{A.1})$$

no qual $X \Big|_{N^n}$ denota o campo X restrito a N^n e a imagem restrita a TN , $f \Big|_{N^n}$ denota a função f restrita a N^n .

Demonstração. Dado que $N^n \subset M^m$ está mergulhada, temos que $X \Big|_{N^n}$ é um campo (“suave”). Seja $p \in N^n$. Existe uma carta adaptada (x, U) com a propriedade que:

$$x(q) = (x^1(q), \dots, x^n(q), 0, \dots, 0) \text{ sempre que } q \in U \cap N^n.$$

Escrevendo X na carta adaptada é

$$X \Big|_U (q) = \sum_{i=1}^m a^i(x(q)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q,$$

no qual a^i são funções suaves em $x(U) \subset \mathbb{R}^m$. Note que a propriedade que $X(p) \in T_p N^n$, sempre que $p \in N^n$, implica que $a^i(x(p)) = 0$ para $i \in \{n+1, \dots, m\}$. Assim

$$X \Big|_{U \cap N^n} = \sum_{i=1}^n a^i(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Logo

$$X \Big|_{U \cap N^n} \left(f \Big|_{U \cap N^n} \right) (p) = \sum_{i=1}^n a^i(x^1(p), \dots, x^n(p), 0, \dots, 0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \quad (\text{A.2})$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} X(f)(p) &= \sum_{i=1}^m a^i(x^1(p), \dots, x^n(p), 0, \dots, 0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n a^i(x^1(p), \dots, x^n(p), 0, \dots, 0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Note que as expressões (A.3) e (A.2) coincidem no ponto p e dado que o ponto $p \in N^n$ é arbitrário, podemos concluir a declaração do Teorema. $\square$

Proposição 14. *Seja M^m uma variedade diferenciável e $N^n \subset M^m$ uma subvariedade mergulhada. Sejam X, Y campos definidos sobre M^m com a propriedade que*

$$X(p), Y(p) \in T_p N^n, \text{ sempre que } p \in N^n.$$

Então, o campo $[X, Y]$ tem a mesma propriedade.

Demonstração. A prova é análoga à prova da Proposição 13. □

Proposição 15. *Sejam M^m, N^n variedades diferenciáveis e o campo X descrito como na Proposição 13, denotamos $\hat{X} = X|_{N^n}$. Adicionalmente suponha que N^n é uma subvariedade mergulhada e fechada. Considere as seguintes equações diferenciais ordinárias*

$$\begin{cases} \frac{d\psi(x, \varepsilon)}{d\varepsilon} = X(x), \\ \psi(x, 0) = x, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\psi}(x, \varepsilon)}{d\varepsilon} = \hat{X}(x), \\ \hat{\psi}(x, 0) = x, \end{cases}$$

definidas em M^m e N^n respectivamente. Então

$$\psi(x, \varepsilon) = \hat{\psi}(x, \varepsilon) \text{ para } \varepsilon \text{ suficientemente pequeno sempre que } x \in N^n.$$

Demonstração. Em toda a prova vamos a considerar $x \in N^n$. Sabemos que os fluxos estão determinados por

$$\begin{aligned} \psi(x, \varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^n}{n!} X^n(x), \\ \hat{\psi}(x, \varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^n}{n!} \hat{X}^n(x). \end{aligned}$$

Pela Proposição 13 sabemos que $X(x) = \hat{X}(x)$. Assim, $X^n(x) = \hat{X}^n(x)$. Então

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^n}{n!} X^n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^n}{n!} \hat{X}^n(x).$$

Dado que as séries são convergentes e N^n é uma subvariedade fechada, segue que $\psi(x, \varepsilon) = \hat{\psi}(x, \varepsilon)$ para ε suficientemente pequeno. □