UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

TENILSON NEVES SILVA

Análise Matemática de um Modelo de Dois Fluidos com Viscosidade Constante

Campinas

2023

Tenilson Neves Silva

Análise Matemática de um Modelo de Dois Fluidos com Viscosidade Constante

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Gabriela Del Valle Planas

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Tenilson Neves Silva e orientada pela Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38a
Silva, Tenilson Neves, 1997-
Análise matemática de um modelo de dois fluidos com viscosidade constante / Tenilson Neves Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Gabriela Del Valle Planas.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Modelos de campo de fase. 2. Viscosidade. 3. Existência de solução (Equações diferenciais parciais). 4. Unicidade de solução (Equações diferenciais parciais). I. Planas, Gabriela Del Valle, 1972-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Mathematical analysis of a two-fluid model with constant viscosity
Palavras-chave em inglês:
Phase field models
Viscosity
Existence of solution (Partial differential equations)
Uniqueness of solution (Partial differential equations)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Gabriela Del Valle Planas
Bianca Morelli Rodolfo Calsavara
Luís Henrique de Miranda
Data de defesa: 08-03-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0003-4042-1854
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5227212412126630

Dissertação de Mestrado defendida em 08 de março de 2023 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof(a). Dr(a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Prof(a). Dr(a). LUÍS HENRIQUE DE MIRANDA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Às minhas sobrinhas Laysa Fernanda,
Thayla Fernanda, Emilya e Marya Clara.

Agradecimentos

Aos meus pais, Emília Neves (*in memorian*) e Felismino M. da Silva, e ao meu irmão Maurino Neves (Buda), agradeço pelo infinito amor e por me ensinarem a nunca desistir. Sem dúvida são os maiores responsáveis pelas minhas conquistas. Meus agradecimentos também à toda minha família que esteve ao meu lado, me apoiando e me dando forças para enfrentar as dificuldades encontradas.

Agradeço à minha orientadora Gabriela Planas, pela paciência, por compartilhar seus conhecimentos, pelo bom exemplo de profissional e pessoa maravilhosa que é.

Aos meus amigos e colegas da Unicamp agradeço pela amizade, momentos de lazer e de estudos compartilhados.

Meus muitíssimo obrigado ao funcionários e professores do IMECC, pelo apoio e pelos eficientes serviços prestados.

Por fim, mas não menos importante, pelo apoio financeiro ao agraciar-me uma bolsa de estudo com número de processo 130651/2021-4 ao longo desses dois anos de mestrado, meus muitíssimos agradecimentos ao Conselho Nacional de Desensolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

"Se você nasce em uma condição privilegiada,
estudar é seu direito.
Se você nasce em uma condição desprivilegiada,
estudar é sua obrigação."
(Emicida no podcast Mano a Mano com Mano Brown)

Resumo

Nesta dissertação analisamos um modelo bifásico transiente unidimensional para fluxo de gás-líquido isentrópico. O modelo é composto por duas equações de conservação de massa e duas equações de momento para o gás e o líquido, onde as equações de momento envolvem um termo não conservativo relacionado à pressão, um termo de força externa que representa a gravidade e um termo viscoso. O sistema é equipado com condições de fronteira e condições iniciais. Vamos estudar o modelo descrito anteriormente considerando uma lei de gás politrópica, um líquido fracamente compressível e os coeficientes de viscosidade constantes. Fazendo o uso do argumento de iteração, tendo algumas hipóteses sobre as massas iniciais, obtemos a existência e unicidade da solução do modelo para um tempo $T_0 > 0$ que depende dos dados iniciais e dos coeficientes de viscosidade. Esse T_0 pode ser grande se os coeficientes de viscosidade são tomados suficientemente grandes. Além disso, obtemos estimativas superiores e inferiores para as massas.

Palavras-chave: modelo de dois fluidos, coeficiente de viscosidade constante, existência, unicidade.

Abstract

In this dissertation we analyze an one-dimensional transient two-phase model for isentropic liquid-gas flow. The model is composed of two mass conservation and two momentum equations for the gas and liquid, where the momentum equations involve a non-conservative pressure-related term, an external force term representing gravity and viscous term. The system is complemented with boundary conditions and initial conditions. We will study the model described above considering a polytropic gas law, a compressible liquid and constant viscosity coefficients. Using an iterative argument, having some assumptions about the initial masses, we obtain the existence and uniqueness of solutions to the model for a time $T_0 > 0$ that depends on the initial data and the viscosity coefficients. This T_0 can be large is the viscosity coefficients are taken sufficiently large. In addition, we obtain upper-lower bounds for the masses.

Keywords: two-fluid model, constant viscosity coefficient, existence, uniqueness.

Sumário

Introdução

Em fluxos de duas fases ou mais (fluxos multifásicos), a natureza complexa deles, em contraste com os fluxos de uma só fase, origina-se devido à existência de interfaces que mudam dinamicamente, de descontinuidades significativas das propriedades do fluido e de campo de fluxo complicado perto da interface. Quando uma ou ambas as fases se tornam turbulentas, as interações entre os vórtices turbulentos, as estruturas interfaciais e as trocas entre fases individuais introduzem complexidades adicionais [26].

Postas essas complexidades, a necessidade de modelar e prever o comportamento detalhado desses fluxos e os fenômenos que eles manifestam são assuntos de estudo contínuo. Um modelo que se faz presente no estudo de tais fluxos é o *Modelo de Dois Fluidos* (Two-Fluid Model - TFM), no qual trata a fase dispersa com uma segunda fase contínua misturada e interagindo com a fase contínua. As equações de conservação (de massa, momento e energia) são desenvolvidas para os dois fluxos de fluidos; estes incluem os termos de interação modelando a troca de massa, momento e energia entre os dois fluxos [4].

O TFM, além de ajudar nos estudos de fluxos multifásicos, é também de inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento e da indústria, como por exemplo, processos biológicos [20, 25, 24] e indústria petrolífera [13, 16]. Neste trabalho estamos interessados em um modelo de duas fases transiente unidimensional para fluxo isentrópico gás-líquido que é formulado da seguinte maneira [23]:

$$\begin{cases} (n)_t + (nu_g)_x &= 0 \\ (m)_t + (mu_l)_x &= 0 \\ (nu_g)_t + (nu_g^2)_x + \alpha_g (P)_x &= -f_g u_g - C(u_g - u_l) - n\, g + [\mu_g (u_g)_x]_x \\ (mu_l)_t + (mu_l^2)_x + \alpha_l (P)_x &= -f_l u_l - C(u_g - u_l) - m\, g + [\mu_l (u_l)_x]_x . \end{cases} \tag{1}$$

Aqui $m = \alpha_l \rho_l$ e $n = \alpha_g \rho_g$ representam a massa do líquido e do gás, respectivamente. As variáveis desconhecidas, no sistema acima, são:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \text{ fração de volume da fase } i, \\ u_i &= \text{ velocidade da fase } i, \\ \rho_i &= \text{ densidade da fase } i, \\ P &= \text{ pressão comum para ambas as fases} \end{aligned}$$

e os dados conhecidos são:

$$\begin{aligned} \mu_i = &\ \text{viscosidade da fase } i, \\ f_i = &\ \text{forças de atrito da parede}, \\ C = &\ \text{forças interfaciais}, \\ g = &\ \text{constante de gravidade}, \end{aligned}$$

onde $i = l, g$ indicam a fase do líquido e do gás, respectivamente, as frações de volume satisfazem

$$\alpha_l + \alpha_g = 1. \tag{2}$$

No artigo estudado para este trabalho, [15], os autores citam alguns fenômenos que podem surgir no estudo de (1) quando utilizado nas operações de águas profundas. Tais fenômenos são:

(i) zona de transição dinâmica separando regiões de duas fases e de uma fase;

(ii) fortes efeitos de expansão relacionados ao gás comprimido que se move para cima em direção a uma pressão mais baixa;

(iii) termos de atritos complicados para levar em conta padrões de fluxos mais realistas;

(iv) transição de um regime de fluxo para outro;

(v) fluxo de fluidos entre o furo do poço e o reservatório circundante.

Neste trabalho vamos estudar um resultado provado por Steinar Evje e Huanyao Wen no artigo [15] no qual trabalha com um modelo reduzido de (1), onde os efeitos inerciais nas equações do momento são desprezados e os coeficientes de viscosidade μ_l, μ_g são constantes positivas. Logo, o modelo toma a forma

$$\begin{cases} (n)_t + (n\ u_g)_x &= 0 \\ (m)_t + (m\ u_l)_x &= 0 \\ \alpha_g (P)_x &= -n\ g + \mu_g (u_g)_{xx} \\ \alpha_l (P)_x &= -m\ g + \mu_l (u_l)_{xx}. \end{cases} \tag{3}$$

Além disso, considerando uma lei do gás politrópico e um líquido fracamente compressível representado por

$$\rho_g = \frac{P}{a_g^2}, \quad \rho_l = \rho_{l,0} + \frac{P - p_0}{a_l^2} \qquad \left(\kappa_0 \triangleq \rho_{l,0} - \frac{p_0}{a_l^2} > 0 \right), \tag{4}$$

onde $\rho_{l,0}$ e p_0 são a pressão de referência e a densidade dadas como constantes e a_l e a_g são as velocidades do som na fase do líquido e do gás, respectivamente e κ_0 uma constante positiva.

Da relação $\dfrac{m}{\rho_l} + \dfrac{n}{\rho_g} = 1$, temos

$$\rho_g m + \rho_l n = \rho_g \rho_l \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{P}{a_g^2}\right) m + \left(\frac{P}{a_l^2} + \kappa_0\right) n = \left(\frac{P}{a_g^2}\right)\left(\frac{P}{a_l^2} + \kappa_0\right).$$

Daí segue-se que

$$P^2 - a_l^2 P \underbrace{\left(m + \frac{a_g^2}{a_l^2} n - \kappa_0\right)}_{\doteq b} - a_l^2 a_g^2 \underbrace{(\kappa_0 n)}_{\doteq c} = 0$$

e resolvendo a equação acima, obtemos

$$P = \frac{a_l^2}{2}\left[b + \sqrt{b^2 + \frac{4a_g^2}{a_l^2} c}\,\right].$$

Assim,

$$P = P(m,n) = a_l^2(\rho_l - \rho_{l,0}) + p_0 = a_g^2 \rho_g = \frac{a_l^2}{2}\left[b + \sqrt{b^2 + \frac{4a_g^2}{a_l^2} c}\,\right], \tag{5}$$

onde

$$\begin{cases} b \doteq b(m,n) = m + \dfrac{a_g^2}{a_l^2} n - \kappa_0, \\ c \doteq c(m,n) = \kappa_0 n. \end{cases} \tag{6}$$

O modelo (3) é equipado com condição de fronteira

$$u_i(x=0,t) \;=\; u_i(x=1,t) = 0 \qquad i = l,g \quad \text{e} \quad t \in [0,T] \tag{7}$$

e dados inicias

$$m(x,t=0) \;=\; m_0(x), \quad n(x,t=0) = n_0(x) \qquad x \in [0,1]. \tag{8}$$

O modelo (3) é importante em processos onde existem duas fases movendo-se com velocidades individuais separadas e nos quais podemos formular as equações de conservação da massa de cada fase agrupada com as equações de momento separadas. Por exemplo, no trabalho [8] os autores realizam uma nova interpretação do modelo de Keller-Segel utilizando a formulação de duas fases (células e água) e onde o modelo (3) pode ser visto como um submodelo do apresentado no trabalho deles.

O teorema principal deste trabalho expõe a existência e unicidade de uma solução regular do modelo (3) para um tempo $T_0 > 0$ que depende dos dados iniciais e dos coeficientes de viscosidade. O teorema garante que as massas m e n permanecem em $W^{1,r}$ $(r \geqslant 2)$ nesse tempo T_0 que pode ser grande se os coeficientes de viscosidade são tomados suficientemente grandes. Além de dar uma ideia de como atuam os coeficientes de viscosidade sobre a regularidade da solução.

Fazendo uma linearização das equações de conservação das massas combinadas com as equações de partículas e estimativas da energia, na prova do teorema principal utiliza-se a técnica de iteração. Essa iteração cria uma sequência de soluções aproximadas do modelo que converge para uma solução do mesmo.

Em [16] um modelo similar a (3) é descrito sem os termos mg e ng e assumindo o termo de pressão capilar, isto é, a pressão do líquido e do gás são diferentes nas equações do momento. Os autores deste artigo tratam a estabilidade global das soluções perto de um estado de equilíbrio constante. No trabalho de Bresch, Huang e Li [6], eles lidam com um modelo similar (1) com a hipótese que os coeficientes de viscosidade depende linearmente da massa, isto é, $\mu_l = m$ e $\mu_l = n$ e lidam com a existência de solução fraca global do problema proposto.

Vale a pena ressaltar o Modelo de Mistura (Drift-Fluid Model - DFM), o qual foi desenvolvido pela primeira vez por Zuber e Findlay [27]. O DFM é similar a (1) com a diferença que a equação do momento da mistura é a soma das duas equações do momento de (1) junto com a relação

$$u_{mix} = \alpha_l u_l + \alpha_g u_g.$$

Consulte [12, 11, 13, 14, 19, 22] para a boa colocação global de soluções fracas e regulares, bem como, o comportamento ao longo do tempo do DFM, assumindo que as velocidades são iguais, isto é, $u_l = u_g = u$. Para uma versão do modelo de dois fluidos viscosos e compressíveis em espaços com dimensão maior que 1, consulte [5].

O trabalho foi dividido em dois capítulos. No primeiro capítulo apresentamos os conceitos e resultados que são essenciais para o desenvolvimento do seguinte. Mais precisamente, vamos expor uma definição e um resultado da equação do transporte com coeficientes variáveis, algumas definições e resultados da teoria da Análise Funcional, de espaços L^p, da teoria da distribuição e de espaços Sobolev na reta. Ainda neste capítulo apresentaremos desigualdades relevantes para esse estudo, a saber, as desigualdades de Young, de Hölder, de Jensen, de Gronwall. Além disso, abordaremos alguns outros resultados importantes e finalizando o estudo das preliminares, serão apresentados definições e resultados da teoria de espaços a valores vetoriais com um resultado importante e que será de grande utilidade em seguida, a saber, o teorema de Aubin-Lions-Simon.

No capítulo 2, apresentaremos com mais detalhes o artigo [15] e dividimos-lo em três seções. Na seção 2.1, enunciamos formalmente o teorema de existência de soluções para o problema (3) (Teorema 2.1) e fazemos algumas observações. Já na seção 2.2, propomos e provamos seis lemas que são de grande importância na demonstração do Teorema 2.1. Por fim, na seção 2.3, demonstramos o Teorema 2.1, visando facilitar a compreensão do leitor separamos a demonstração em sete subseções: na subseção 2.3.1 construímos um modelo aproximado, através das sequências iterativas, na subseção 2.3.2 provamos a boa definição das sequências, na subseção 2.3.3 mostramos a limitação das sequências nos espaços apropriados, na subseção 2.3.4 trata-se da existência do limites das sequências, já na subseção 2.3.5 investiga a convergência da sequência vizinha das velocidades e por fim, nas subseções 2.3.6 e 2.3.7 abordamos a existência e unicidade da solução do problema proposto, respectivamente.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados preliminares importantes a serem utilizados neste trabalho.

1.1 Notações

- $u_k \to u$ em E denota que u_k converge para u na topologia forte de E, veja Definição 1.3.
- $u_k \rightharpoonup u$ em E denota que u_k converge para u na topologia fraca de E, veja Definição 1.3.
- $f_k \rightharpoonup f$ fraca - $\star$ em E' denota que u_k converge para u na topologia fraca estrela de E', veja Definição 1.3.
- Vamos trabalhar no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\partial\Omega$ a fronteira de Ω.
- Denotaremos o suporte de uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ por
$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}.$$
- Seja m um inteiro não negativo ou $m = \infty$, denotaremos por
$$C^m(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é } m-\text{vezes diferenciável com derivadas contínuas}\}.$$
Em particular,
$$C^0(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ função contínua}\} \text{ e } C^\infty = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega),$$
veja Definição 1.8.
- $C_c^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega);\ \operatorname{supp}(u) \text{ é compacto}\}$, veja Definição 1.9.
- $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções teste, veja Definição 1.11.
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ é Lebesgue mensurável}, \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Veja Definição 1.14.
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o espaço das distribuições sobre Ω, veja Definição 1.22.
- $W^{k,p}(\Omega)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$, denota o espaço de Sobolev, veja Definição 1.37.

- $L^p(I;X)$ e $C(I;X)$, onde X é um espaço de Banach e I um intervalo de $\mathbb{R}$, veja Definição 1.50.

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ é dito multi-índice e denotaremos
$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$
As derivadas de ordem superior serão denotadas por
$$D^\alpha \equiv D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n},$$
onde $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Para as derivadas de primeira ordem usaremos as notações $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$.

- Denotaremos o gradiente da função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ por
$$\nabla_x u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

1.2 Equação do Transporte com Coeficientes Variáveis

Nesta seção, vamos definir e apresentar algumas propriedades de Equação do Transporte com Coeficientes Variáveis. Para maiores detalhes, consultar Golse [18].

Seja $V : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma campo vetorial e $T > 0$. Considere o problema de Cauchy
$$\begin{cases} f_t(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t < T, \\ f(0,x) = f^{in}(x), & . \end{cases}$$
onde $f^{in} \equiv f^{in}(x) \in \mathbb{R}$ é dada, enquanto $f \equiv f(t,x) \in \mathbb{R}$ é desconhecida.

O campo vetorial V satisfaz as seguintes condições:

$(H1)$ cada componente V_i do campo vetorial de V tem derivadas parciais com respeito a variáveis x_j para $j = 1, \ldots, n$, e

$(H2)$ $V \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e $\nabla_x V \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n; M_n(\mathbb{R}))$, onde $M_n(\mathbb{R})$ denota uma matriz de ordem $n \times n$ com entradas reais.

Definição 1.1. *Seja γ a solução do sistema diferencial*
$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma}{ds}(s) = V(s, \gamma(s)) \\ \gamma(t) = x. \end{cases}$$
O conjunto
$$\{(s, \gamma(s)) |\ s \in [0,T]\}$$
é chamado curva característica do operator de transporte $\partial_t + V(t,x) \cdot \nabla_x$ passando por x no tempo $s = t$.

Teorema 1.2. *Assuma que o campo vetorial V satisfaz as condições $(H1)-(H2)$. Então, para cada $t \in [0,T]$ e cada $x \in \mathbb{R}^n$, o sistema de EDO*

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma}{ds}(s) = V(s,\gamma(s)) \\ \gamma(t) = x. \end{cases}$$

tem uma única solução $s \mapsto \gamma(s)$ que é de classe C^1 em $[0,T]$.

Essa solução é daqui em diante denotada por

$$\gamma(s) := X(s,t,x).$$

O mapa X satisfaz as seguintes propriedades:

a) $X \in C^1([0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$;

b) as derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 X}{\partial_s \, \partial_{x_j}}(s,t,x)$ *e* $\dfrac{\partial^2 X}{\partial_{x_j} \partial_s}(s,t,x)$ *existem e*

$$\frac{\partial^2 X}{\partial_s \, \partial_{x_j}}(s,t,x) = \frac{\partial^2 X}{\partial_{x_j} \partial_s}(s,t,x),$$

para todo $(s,t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$ *e todo* $j = 1, \ldots, n$. *Além do mais,*

$$\frac{\partial^2 X}{\partial_s \, \partial_{x_j}} \in C([0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n);$$

c) se V satifaz a condição adicional

$$(H3) \quad V \in C^k([0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \quad e \quad \nabla_x V \in C^k([0,T] \times \mathbb{R}^n; M_n(\mathbb{R}))$$

para algum $k \geqslant 1$, então um tem

$$X \in C^{k+1}([0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Ver [18], p. 19. □

1.3 Análise Funcional

Nesta seção vamos definir e apresentar alguns resultados de Análise Funcional. Para maiores detalhes, consultar [3] e [7].

Definição 1.3. *Sejam E um espaço de Banach e E' o espaço dual de E.*

- *Dizemos que uma sequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ converge para $u \in E$, se*

$$\lim_{k \to \infty} \|u_k - u\|_E = 0.$$

Denotaremos por:

$$u_k \to u.$$

- *Dizemos que uma sequência* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ *converge fracamente para* $u \in E$*, se para qualquer* $f \in E'$ *temos*

$$\langle f, u_k \rangle_{E'\times E} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, u \rangle_{E'\times E}.$$

Denotaremos por:

$$u_k \rightharpoonup u \text{ fraca em } E.$$

- *Dizemos que uma sequência* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E'$ *converge fracamente-*$\star$ *para* $f \in E'$*, se para qualquer* $u \in E$ *temos*

$$\langle f_k, u \rangle_{E'\times E} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, u \rangle_{E'\times E}.$$

Denotaremos por:

$$f_k \rightharpoonup f \text{ fraca-}* \text{ em } E'.$$

Definição 1.4. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach, diremos que* X *está imerso continuamente em* Y *e denotamos por*

$$X \hookrightarrow Y,$$

se $X \subset Y$ *e existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Teorema 1.5. *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo e* (x_n) *uma sequência limitada em* E*. Então, existe uma subsequência* (x_{n_k}) *que converge fracamente em* E*.*

Demonstração. Ver [7], p. 69. □

Teorema 1.6. *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* (f_n) *uma sequência limitada em* E'*. Então, existe uma subsequência* (f_{n_k}) *que converge fracamente-*$\star$ *em* E'*.*

Demonstração. Ver [7], p. 76. □

Definição 1.7. *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *contínua. O suporte de* f *é definido como o fecho em* Ω *do conjunto* $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$ *e denotado por* $\operatorname{supp}(f)$*. Se* $\operatorname{supp}(f)$ *for um conjunto compacto de* Ω*, dizemos que* f *possui suporte compacto. Denotaremos por* $C_c(\Omega)$ *o espaço das funções contínuas em* Ω *com suporte compacto.*

Definição 1.8. *Seja* m *inteiro não-negativo ou* $m = \infty$*. Denotaremos por* $C^m(\Omega)$ *o espaço vetorial das funções com todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a* m *contínuas em* Ω*. Além disso,* $C^0 = C(\Omega)$ *e* $C^\infty = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$*.*

Definição 1.9. *O espaço vetorial das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem todas as derivadas até a ordem m contínuas em Ω e que têm suporte compacto, sendo que esse suporte depende de φ, é denotado por $C_c^m(\Omega)$ (ou $C_c^\infty(\Omega)$ se $m = \infty$).*

Definição 1.10. *Uma sequência $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções de $C_c^\infty(\Omega)$ converge para zero quando existe $K \subset \Omega$ compacto de modo que:*

1. $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$;
2. *Dado* $d \in \mathbb{N}$, *para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^d$,
$$\partial^\alpha \varphi_k \to 0 \quad \textit{uniformente em} \quad K,$$
onde ∂^α *denota o operador derivação de ordem* α *definido por*
$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}},$$
com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ *e* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$.

Definição 1.11. *O espaço vetorial $C_c^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é representado $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω.*

Definição 1.12. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.*

- *Uma função $u : I \to \mathbb{R}^n$ é dita ser absolutamente contínua em I, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*
$$\sum_{k=1}^{l} ||u(b_k) - u(a_k)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$$
para cada número finito de intervalos não sobrepostos (a_k, b_k), $k = 1, \ldots, l$, com $[a_k, b_k] \subset I$ e
$$\sum_{k=1}^{l} |b_k - a_k| < \delta.$$
O espaço de todas as funções absolutamente contínuas $u : I \to \mathbb{R}^n$ é denotado por $AC(I; \mathbb{R}^n)$.

- *Uma função $u : I \to \mathbb{R}^n$ é localmente absolutamente contínua, se for absolutamente contínua em $[a, b]$ para todo intervalo $[a, b] \subset I$. O espaço de todas as funções localmente absolutamente contínuas $u : I \to \mathbb{R}^n$ é denotado por $AC_{loc}(I; \mathbb{R}^n)$.*

Definição 1.13. *Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é chamado $\mathcal{H}^1$-retificável, se existe uma sequência de funções Lipschitz $u_j : I \to \mathbb{R}^n$ tal que*
$$\mathcal{H}^1\left(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} u_j(\mathbb{R})\right) = 0.$$

Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é puramente $\mathcal{H}^1$-irretificável se

$$\mathcal{H}^1\left(\Omega \cap u(\mathbb{R})\right) = 0$$

para toda função Lipschitz $u : I \to \mathbb{R}^n$.

1.4 Espaços de Funções

Nesta seção, apresentaremos a definição e algumas propriedades dos espaços $L^p(\Omega)$, distribuições vetoriais e espaço de Sobolev que serão úteis ao longo desse trabalho. Para maiores detalhes, consultar [3] e [7].

1.4.1 Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.14. *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω com norma*

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad para \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Para $p = \infty$, denotamos $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis de u definidas sobre Ω que são essecialmente limitadas com a norma dada por

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C \in \mathbb{R};\ |u(x)| \leqslant C \quad q.t.p.\ em \quad \Omega\}.$$

Teorema 1.15. *O espaço $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Ver [7], p. 95. □

Teorema 1.16. *O espaço $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração. Ver [7], p. 99. □

Definição 1.17. *Seja $1 \leqslant p < \infty$. A função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita localmente integrável em $L^p(\Omega)$ se f for uma função mensurável e para qualquer conjunto compacto $K \subset \Omega$*

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty.$$

Denotaremos o conjunto dessas funções por $L^p_{loc}(\Omega)$.

Note que se $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, então $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Teorema 1.18. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então $u = 0$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. Ver [7], p. 110. □

Teorema 1.19. *O conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para qualquer $1 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração. Ver [3], p. 63. □

Teorema 1.20. *Sejam $1 < p < \infty$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de $L^p(\Omega)$ que converge fracamente para u em $L^p(\Omega)$. Se*

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p} \leqslant \|u\|_{L^p},$$

então a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente para u.

Demonstração. Ver [3], p. 66. □

1.4.2 Distribuições vetoriais

Definição 1.21. *Uma sequência $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge para algum $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ na qual contém o suporte de φ e de todas as funções φ_k e se para qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, a sequência $(\partial^\alpha \varphi_x)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformente para $\partial^\alpha \varphi$.*

Definição 1.22. *Um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é dita uma distribuição se for contínua no sentido que $T(\varphi_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T(\varphi)$ para qualquer sequência $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$.*

O conjunto das distribuições é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$ e usamos a notação $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}$.

Definição 1.23. *Uma sequência $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ é dita ser convergente para uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se para qualquer $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos*

$$\langle T_k, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}.$$

Definição 1.24. *Para qualquer distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, a derivada de T no sentido de distribuição é a distribuição $\partial^\alpha T$ definida por*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}, \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Teorema 1.25. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então*

$$\langle T_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração. Ver [3], p. 72. □

Teorema 1.26. *Sejam $1 \leqslant p < \infty$.*

- *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ que converge fracamente para $f \in L^p(\Omega)$, então*

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad em \ \mathcal{D}'(\Omega).$$

- *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^\infty(\Omega)$ que converge fracamente-$\star$ para $f \in L^\infty(\Omega)$, então*

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad em \ \mathcal{D}'(\Omega).$$

Demonstração. Ver [3], p. 73. □

1.4.3 Espaços de Sobolev

Definição 1.27. *Sejam $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \ \exists \ u_x \in L^p(I) \ com \ \int_I u\varphi_x \, dx = -\int_I u_x\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C^1_c(I) \right\}.$$

O espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach com as normas

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \begin{cases} (\|u\|^p_{L^p} + \|u_x\|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}} & \text{se} \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ \\ \|u\|_{L^\infty} + \|u_x\|_{L^\infty} & \text{se} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Teorema 1.28. *O espaço $W^{1,p}(I)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração. Ver [7], p. 203. □

Teorema 1.29. *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Se $u \in W^{1,p}(I)$, então existe uma função $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ tal que*

$$u = \tilde{u} \quad q.t.p. \ em \ I \qquad e \qquad \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u_\xi(\xi) d\xi \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demonstração. Ver [7], p. 204. □

Teorema 1.30. *Existe uma constante positiva C (que depende somente de $|I| \leqslant \infty$) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall\, 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Em outras palavras, $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ com a imersão contínua para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Além disso, se I é um intervalo limitado então

- *a imersão $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ é compacta para todo $1 < p \leqslant \infty$.*
- *a imersão $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I)$ é compacta para todo $1 \leqslant q < \infty$.*

Demonstração. Ver [7], p. 213. □

Corolário 1.31. *Seja $u, v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então*

$$uv \in W^{1,p}(I) \qquad e \qquad (uv)_x = u_x v + u v_x.$$

Ademais, vale a fórmula de integração por partes

$$\int_y^x (u_\xi v)(\xi)d\xi = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x (uv_\xi)(\xi)d\xi, \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demonstração. Ver [7], p. 215. □

Definição 1.32. *Dado $1 \leqslant p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_c^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$, equipado com a norma de $W^{1,p}(I)$.*

Observação 1.33. *Se $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$, então $u \in W_0^{1,p}(I)$.*

Teorema 1.34. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leqslant p < \infty$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $u = 0$ em ∂I.*

Demonstração. Ver [7], p. 218. □

Teorema 1.35 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos I um intervalo limitado. Então existe uma constante $C_p > 0$ (dependendo de $|I| < \infty$) tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leqslant C_p\|u_x\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Em outras palavras, em $W_0^{1,p}(I)$, $\|u_x\|_{L^p}$ é uma norma equivalente à norma de $W^{1,p}(I)$.

Demonstração. Ver [7], p. 218. □

Observação 1.36. *Seja $(1 \leqslant p < \infty)$.*

- *O espaço dual de $W_0^{1,p}(I)$ é denotado por $W^{-1,p'}$.*

- *Se I é um intervalo limitado, temos*

$$W_0^{1,p}(I) \subset L^2 \subset W^{-1,p'}$$

com imersão contínua (e imersão densa quando $1 < p < \infty$).

Definição 1.37. *Sejam um número inteiro $m \geqslant 2$ e $1 \leqslant p < \infty$. Definimos, por recorrência, o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I);\ D^1 u \in W^{m-1,p}(I)\right\},$$

com a notação $D^1 u = u_x$, equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{m} \|D^i u\|_{L^p}.$$

Observação 1.38. *Sejam um número inteiro $m \geqslant 2$ e $1 \leqslant p < \infty$.*

- *O espaço $W_0^{m,p}(I)$ é definido como o fecho de $C_c^m(I)$ em $W^{m,p}(I)$.*

- *O conjunto*

$$W_0^{m,p} = \left\{u \in W^{m,p}(I);\ u = D^1 u = \cdots = D^{m-1} u = 0 \ \text{em}\ \partial I\right\}$$

é essencial para notar a diferença entre

$$W_0^{2,p} = \left\{u \in W^{2,p}(I);\ u = D^1 u = 0 \ \text{em}\ \partial I\right\}$$

e

$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p} = \left\{u \in W^{2,p}(I);\ u = 0 \ \text{em}\ \partial I\right\}.$$

1.5 Desigualdades e resultados importantes

Nesta seção seguem algumas desigualdades conhecidas que serão utilizadas ao longo do texto. Para mais detalhes, consultar [10], [3] e [7].

Lema 1.39. *Sejam números reais $a_i \geqslant 0$, com $i = 1, 2 \ldots, n$ e $p \geqslant 1$. Então*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \leqslant n^p \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right).$$

Demonstração. Usando as propriedades do máximo, obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \leqslant (n \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\})^p = n^p \max\{a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p\} \leqslant n^p \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right).$$

□

Definição 1.40. *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Denotamos por p' o expoente conjugado,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Proposição 1.41 (Desigualdade de Young)**.** *Se $1 < p < \infty$ e $a, b \geqslant 0$, então*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Demonstração. Ver [10], p. 622. □

Proposição 1.42 (Desigualdade de Hölder)**.** *Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1} = \int_\Omega |fg| \, dx \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Ver [7], p. 91. □

Proposição 1.43 (Desigualdade de Jensen)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\eta \in L^1(\Omega)$ uma função não-negativa. Para qualquer função f tal que $|f|^p \eta \in L^1(\Omega)$, para algum $1 \leqslant p < \infty$, então $f\eta \in L^1(\Omega)$ e*

$$\left| \int_\Omega f\eta \, dx \right|^p \leqslant \|\eta\|_{L^1}^{p-1} \int_\Omega |f|^p \eta \, dx.$$

Demonstração. Ver [3], p. 59. □

Lema 1.44. *Sejam $|\Omega| < \infty$ e $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Então, $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é uma imersão contínua. Mais precisamente,*

$$\|f\|_{L^p} \leqslant C_\Omega \|f\|_{L^q} \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

Demonstração. Ver [7], p. 118. □

Proposição 1.45 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Seja $\Upsilon(\cdot)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$, que satisfaz para quase todo t a desigualdade diferencial*

$$\Upsilon'(t) \leqslant \phi(t)\Upsilon(t) + \psi(t),$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções não negativas, integráveis em $[0, T]$. Então

$$\Upsilon'(t) \leqslant e^{\int_0^t \phi(s) \, ds} \left(\Upsilon(0) + \int_0^t \psi(s) \, ds \right),$$

para todo $0 \leqslant t \leqslant T$. Em particular, se

$$\Upsilon' \leqslant \phi\Upsilon \text{ em } [0, T] \text{ e } \Upsilon(0) = 0,$$

então

$$\Upsilon \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

Demonstração. Ver [10], p. 624. □

Lema 1.46 (Lema de Gronwall Discreto). *Seja $T > 0$ e considere uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções contínuas não-negativas em $[0, T]$. Assuma que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz, para qualquer n,*

$$a_{n+1}(t) \leqslant A + B\int_0^t a_n(s)ds + C\int_0^t a_{n+1}(s)ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

onde A, B e C são constantes.

1. *Se $A = 0$, existe uma constante $K \geqslant 0$ tal que*

$$a_n(t) \leqslant \frac{K^{n+1}t^n}{n!}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. *Se $A > 0$, existe uma constante $K \geqslant 0$ dependendo de A, B, C tal que*

$$a_n(t) \leqslant Ke^{Kt}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Ver [2], p. 1270. □

Proposição 1.47 (Regra da Cadeia). *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua de Lipschitz localmente e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Então $f \circ u \in AC_{loc}(I)$ para toda $u \in AC_{loc}(I; \mathbb{R}^n)$. Além disso, se o conjunto*

$$\mathcal{F} := \{u : I \to \mathbb{R}^r;\ f \text{ não é diferenciável em } u\}$$

é puramente $\mathcal{H}^1$-irretificável, então

$$(f \circ u)'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_k}(u(x))u_k'(x) \quad \text{quase todo } x \in I,$$

onde $\dfrac{\partial f}{\partial u_k}(u(x))u_k'(x)$ é interpretado como zero sempre que $u_k'(x) = 0$.

Demonstração. Ver [21], p. 145. □

Proposição 1.48. *Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida. Suponha que $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ satisfaz as seguintes condições:*

(i) *$f(x, s)$ é uma função integrável para cada $s \in [a, b]$.*

(ii) *Para quase todo $x \in X$, a derivada $\dfrac{\partial f(x, s)}{\partial s}$ existe para todo $s \in [a, b]$.*

(iii) *Existe uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\left|\frac{\partial f(x, s)}{\partial s}\right| \leqslant g(x).$$

Então, para todo $s \in [a,b]$,

$$\frac{d}{ds}\int_X f(x,s)\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)\, d\mu(x).$$

Demonstração. Ver [17], p. 56. □

Teorema 1.49 (Teorema de Fubini)**.** *Seja $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$. Se $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, então para q.t.p. $x \in \Omega_1$, $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ e $\int_{\Omega_2} F(x,y)\, dy \in L^1_x(\Omega_1)$. Similarmente, para q.t.p. $y \in \Omega_2$, $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ e $\int_{\Omega_1} F(x,y)\, dx \in L^1_y(\Omega_2)$. Além disso,*

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Demonstração. Ver [1], p. 120. □

1.6 Espaços a Valores Vetoriais

Nesta seção, apresentaremos a definição e algumas propriedades dos espaços a valores vetoriais que serão úteis ao longo desse trabalho. Para maiores detalhes, consultar [3] e [10].

Denotaremos por X um espaço de Banach e I um intervalo de $\mathbb{R}$.

Definição 1.50. *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Denotaremos por $L^p(I,X)$, o conjunto das (classes de equivalência das) funções mensuráveis $f : I \to X$ tal que $t \mapsto \|f(t)\|_X$ pertence ao $L^p(I)$.*

- *O espaço $L^p(I,X)$ é de Banach com a norma*

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left[\int_I \|f(t)\|_X^p dt\right]^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad para\ 1 \leqslant p < \infty.$$

- *O espaço $L^\infty(I,X)$ é de Banach com a norma*

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = ess\sup_{t\in I} \|f(t)\|_X < \infty.$$

- *O espaço $C(I,X) := \{f : I \to X;\ f \text{ é função contínua}\}$ é Banach com a norma*

$$\|f\|_{C(I,X)} = \max_{t\in I} \|f(t)\|_X < \infty.$$

Observação 1.51. *Se $1 \leqslant p \leqslant \infty$, o dual topológico de $L^p(I;X)$ se identifica com o espaço $L^{p'}(I;X')$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Demonstra-se também que se X for reflexivo (respectivamente* *separável) e $1 < p < \infty$ (respectivamente $1 \leqslant p < \infty$) então $L^p(I;X)$ é reflexivo e (respectivamente separável). Com esta identificação temos*

$$\langle f, u\rangle_{L^{p'}(I;X')\times L^p(I;X)} = \int_I \langle f(t), u(t)\rangle_{X'\times X} dt,$$

para todo $f \in L^{p'}(I;X')$ e para todo $u \in L^p(I;X)$.

Temos também que o dual topológico de $L^1(I;X)$ se identifica com o espaço $L^\infty(I;X')$.

Definição 1.52. *Sejam $X \subset Y$ dois espaços de Banach e $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$. Dizemos que uma função $u \in L^p(I;X)$ tem uma derivada fraca em $L^q(I;X)$ se existe uma função $g \in L^q(I;Y)$ tal que*

$$\int_I \varphi'(t)u(t)dt = -\int_I \varphi(t)g(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Se tal função g existe, é única e denotamos

$$u'(t) = g(t) \qquad \left(u' \equiv \frac{du}{dt}\right).$$

Definição 1.53. *Seja Y um espaço de Banach. Dizemos que uma função $u : [0,T] \to Y$ é contínua fracamente se para todo $\psi \in Y'$, a função definida por $t \mapsto \langle \psi, u(t)\rangle_{Y'\times Y} \in \mathbb{R}$ é contínua. Denotamos por $C([0,T];Y_{fraca})$, o conjunto das funções $u : [0,T] \to Y$ que são contínuas fracamente.*

Teorema 1.54. *Sejam X espaço de Banach separável e reflexivo, e Y um espaço de Banach, tal que $X \subset Y$ é imersão contínua. Então*

$$L^\infty([0,T];X) \cap C([0,T];Y_{fraca}) = C([0,T];X_{fraca}).$$

Demonstração. Ver [3], p. 95. □

Definição 1.55. *Sejam X e Y dois espaços de Banach tal que X é imerso de maneira contínua e densa em Y, $T > 0$ e $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$. O espaço*

$$E_{p,q} = \{u \in L^p([0,T];\ X) \mid u' \in L^q([0,T];\ Y)\}$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{E_{p,q}} = \|u\|_{L^p([0,T];\ X)} + \|u'\|_{L^q([0,T];\ Y)}.$$

Teorema 1.56. *Seja $u \in E_{p,q}$ com $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$. Então*

1. *$u \in C([0,T];\ Y)$;*

2. *a imersão de $E_{p,q}$ em $C([0,T];\ Y)$ é contínua.*

3. *Além disso, para todos $s, t \in [0, T]$, temos*

$$u(t) - u(s) = \int_s^t u'(\tau)\, d\tau.$$

Demonstração. Ver [3], p. 99. □

Teorema 1.57 (Aubin-Lions-Simon)**.** *Seja $B_0 \subset B_1 \subset B_2$ três espaços de Banach. Assumimos que a imersão de B_1 em B_2 contínua e que a imersão de B_0 em B_1 compacta. Sejam p, q tais que $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Para $T > 0$, definimos*

$$E_{p,q} = \{u \in L^p([0, T];\ B_0) \mid u' \in L^q([0, T];\ B_2)\}.$$

i) Se $p < \infty$, a imersão de $E_{p,q}$ em $L^p([0, T];\ B_1)$ é compacta.

ii) Se $p = \infty$ e $q > 1$, a imersão de $E_{p,q}$ em $C([0, T];\ B_1)$ é compacta.

Demonstração. Ver [3], p. 102. □

2 Teorema Principal

Neste capítulo, vamos apresentar e provar o teorema que garante a existência e unicidade de solução forte do modelo reduzido de duas fases transiente unidimensional para um fluxo isentrópico gás-líquido (3) em $(0,1) \times (0,T_0)$ satisfazendo as condições de fronteira e de dados iniciais (7) e (8), respectivamente.

2.1 Enunciado do Teorema Principal

Nesta seção, enunciamos e fazemos algumas observações do teorema de existência e unicidade de solução forte.

De agora em diante, denotaremos

$$W^{k,p} = W^{k,p}([0,1]) \quad \text{e} \quad L^p = L^p([0,1])$$

para $k = 1, 2$ e $p \in [1, \infty]$.

Teorema 2.1. *Sob uma das hipóteses*

(i)

$$m_0, n_0 \in W^{1,r}, \quad 0 < \kappa_0 < C_1 \leqslant m_0 \leqslant C_2, \quad 0 \leqslant n_0 \leqslant C_3, \quad \textit{em } [0,1], \tag{2.1}$$

onde $r \geqslant 2$ e C_i uma constante positiva para $i = 1, 2, 3$.

(ii)

$$m_0, n_0 \in W^{1,r}, \quad 0 \leqslant m_0 \leqslant C_4 < \kappa_0, \quad 0 \leqslant n_0 \leqslant C_5, \quad \textit{em } [0,1], \tag{2.2}$$

onde $r \geqslant 2$ e C_i uma constante positiva para $i = 4, 5$.

(iii)

$$m_0, n_0 \in W^{1,r}, \quad 0 \leqslant m_0 \leqslant C_6, \quad 0 < C_7 \leqslant n_0 \leqslant C_8, \quad \textit{em } [0,1], \tag{2.3}$$

onde $r \geqslant 2$ e C_i uma constante positiva para $i = 6, 7, 8$.

Existem uma constante positiva T_0 que satisfaz (2.4) e uma única solução (m, n, u_g, u_l) do problema (3), isto é,

$$\begin{cases} (n)_t + (n\ u_g)_x &= 0 \\ (m)_t + (m\ u_l)_x &= 0 \\ \alpha_g(P)_x &= -n\ g + \mu_g(u_g)_{xx} \\ \alpha_l(P)_x &= -m\ g + \mu_l(u_l)_{xx} \end{cases}$$

em $(0,1) \times (0,T_0)$ *com a condição de fronteira*

$$u_i(x=0,t) \;=\; u_i(x=1,t)=0 \qquad i=l,g \quad e \quad t \in [0,T_0]$$

e dados iniciais

$$m(x,t=0) \;=\; m_0(x), \quad n(x,t=0)=n_0(x) \qquad x \in [0,1],$$

onde

$$(m,n) \in C([0,T_0];W^{1,r}), \quad (m_t,n_t) \in C([0,T_0];L^r), \quad (u_l,u_g) \in C([0,T_0];W^{2,r})$$

com $r \geqslant 2$.

Além disso,

- *Sob a hipótese* (2.1),
$$0<\kappa_0<\overline{C_1} \leqslant m \leqslant \frac{C_1C_2}{\overline{C_1}}, \quad e \quad 0 \leqslant n \leqslant \frac{C_1C_3}{\overline{C_1}} \quad em\ [0,1]\times[0,T_0],$$
onde C_i *e* $\overline{C_1}$ *são constantes positivas para* $i=1,2,3$ *e* $\overline{C_1} \in (\kappa_0, C_1)$.

- *Sob a hipótese* (2.2),
$$0 \leqslant m \leqslant \overline{C_4} < \kappa_0, \quad e \quad 0 \leqslant n \leqslant \frac{\overline{C_4}C_5}{C_4} \quad em\ [0,1]\times[0,T_0],$$
onde C_i *e* $\overline{C_4}$ *são constantes positivas para* $i=4,5$ *e* $\overline{C_4} \in (C_4, \kappa_0)$.

- *Sob a hipótese* (2.3),
$$0 \leqslant m \leqslant C_6 e, \quad e \quad 0<\frac{C_7}{e} \leqslant n \leqslant C_8 e \quad em\ [0,1]\times[0,T_0],$$
onde C_i *é constante positiva para* $i=6,7,8$.

Observação 2.2. *A constante positiva* T_0 *satisfaz*

$$\begin{cases} T_0 & \leqslant \min\left\{T_1, T_2, \dfrac{1}{3\overline{C}A_\mu}\right\} \quad para\ hipótese \quad (2.1), \\ T_0 & \leqslant \min\left\{\overline{T_1}, T_2, \dfrac{1}{3\overline{C}A_\mu}\right\} \quad para\ hipótese \quad (2.2), \\ T_0 & \leqslant \min\left\{\overline{\overline{T_1}}, T_2, \dfrac{1}{3\overline{C}A_\mu}\right\} \quad para\ hipótese \quad (2.3), \end{cases} \tag{2.4}$$

onde

$$T_1 \triangleq \frac{1}{C_IA_\mu A_1}\log\left(\frac{C_1}{\overline{\overline{C_1}}}\right) \quad para \quad \overline{C_1} \in (\kappa_0, C_1),$$
$$\overline{T_1} \triangleq \frac{1}{C_IA_\mu A_1}\log\left(\frac{\overline{C_4}}{C_4}\right) \quad para \quad \overline{C_4} \in (C_4, \kappa_0),$$
$$\overline{\overline{T_1}} \triangleq \frac{1}{C_IA_\mu A_1} \quad e \quad T_2 \triangleq \frac{1}{A_\mu A_1}$$

com C_I constante de imersão de Sobolev, A_1 e $\overline{C}$ constantes positivas todas elas são independentes de μ_l e μ_g, exceto a constante $A_\mu = max\left\{\frac{1}{\mu_l}, \frac{1}{\mu_g}\right\}$. Observe que T_0 pode ser escolhido grande se A_μ for suficientemente pequeno, isto é, se os coeficientes de viscosidade μ_l e μ_g forem suficientemente grandes.

Observação 2.3. *No decorrer da prova do Teorema 2.1, precisamos $r > 1$ até lidarmos com os termos de pressão não conservativa $\alpha_g P_x$ e $\alpha_l P_x$. Nos resultados a partir do Lema 2.19 é necessário, de fato, $r \geqslant 2$.*

Observação 2.4. *Sabemos de (4), (5) e (6) que*

$$\rho_g = \frac{P}{a_g^2}, \quad \rho_l = \rho_{l,0} + \frac{P - p_0}{a_l^2} \quad \left(\kappa_0 \triangleq \rho_{l,0} - \frac{p_0}{a_l^2} > 0\right)$$

e

$$P = P(m,n) = a_l^2(\rho_l - \rho_{l,0}) + p_0 = a_g^2 \rho_g = \frac{a_l^2}{2}\left[b + \sqrt{b^2 + \frac{4a_g^2}{a_l^2}c}\,\right],$$

onde

$$\begin{cases} b \doteq b(m,n) = m + \dfrac{a_g^2}{a_l^2}n - \kappa_0, \\ c \doteq c(m,n) = \kappa_0 n. \end{cases}$$

Então,

- *note que $\alpha_l = \alpha_l(m,n) = \dfrac{m}{\rho_l(m,n)}$ está bem definido, pois*

$$\rho_l = \rho_{l,0} + \frac{P - p_0}{a_l^2} \geqslant \rho_{l,0} - \frac{p_0}{a_l^2} = \kappa_0 > 0 \quad para\ m, n \geqslant 0.$$

  Portanto, se $0 \leqslant m \leqslant M$ para alguma constante $M > 0$, então $\alpha_l = \dfrac{m}{\rho_l} \leqslant \dfrac{M}{\kappa_0} < \infty$ e de $\dfrac{m}{\rho_l} + \dfrac{n}{\rho_g} = 1$, segue que $0 \leqslant \alpha_l, \alpha_g \leqslant 1$.

- *derivando ambos os lados de $\rho_g(m,n) = \dfrac{P(m,n)}{a_g^2}$ com relação a m e n e utilizando $P(m,n)$ acima e as definições de b e c, obtemos*

$$\frac{\partial \rho_g(m,n)}{\partial m} = \frac{a_l^2}{2a_g^2}\left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + \frac{4a_g^2}{a_l^2}c}}\right), \quad \frac{\partial \rho_g(m,n)}{\partial n} = \frac{1}{2} + \frac{b + 2\kappa_0}{2\sqrt{b^2 + \frac{4a_g^2}{a_l^2}c}} \tag{2.5}$$

  onde

$$b^2 + \frac{4_g^2}{a_l^2}c = (m - \kappa_0)^2 + 2\frac{a_g^2}{a_l^2}mn + \frac{a_g^4}{a_l^4}n^2 + 2\kappa_0\frac{a_g^2}{a_l^2}n.$$

Observação 2.5. *As três condições* (2.1), (2.2) *e* (2.3) *são necessárias para garantir os limitantes das massas do líquido e do gás (ver Lema 2.13, pág. 57 e Proposição 2.17, pág. 70). E com esses limitantes garanta-se que derivadas de ρ_g, e consequentemente as derivadas de P, estejam bem definidas e sejam limitadas (ver Obvervação 2.4, eq.* (2.5)*, pág. 33 e o Lema 2.7, pág. 38).*

2.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção, enunciamos e demonstramos resultados muito importantes que auxiliarão na demonstração do Teorema 2.1.

Lema 2.6. *Seja $\eta \in L^\infty([0,T];W^{1,r})$ satisfazendo*

$$\eta_t + (\eta\omega)_x = 0, \quad \textit{em quase todo } (0,1)\times(0,T), \tag{2.6}$$

com $\eta_0 \in W^{1,r}$ e $\omega \in L^\infty([0,T];\ W^{2,r} \cap W_0^{1,r})$ $r > 1$. Então

$$\eta \in C([0,T];W^{1,r}) \quad r > 1.$$

Demonstração. Sabemos que

$$\eta \in L^\infty([0,T];W^{1,r}), \quad \omega \in L^\infty([0,T];W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \quad \text{e} \quad \eta_t = -(\eta\omega_x + \eta_x\omega),$$

então

$$\eta_t \in L^\infty([0,T];L^r), \quad r > 1.$$

Assim,

$$\eta \in L^\infty([0,T];W^{1,r}) \quad \text{e} \quad \eta_t \in L^\infty([0,T];L^r)$$

com $r > 1$, consequentemente, do Teorema 1.56 resulta que

$$\eta \in C([0,T];L^r) \Longrightarrow \eta \in C([0,T];L^r_{fraca}), \quad r > 1.$$

Agora, da imensão contínua

$$W^r \subset L^r, \quad r > 1,$$

e do fato que as hipóteses do Teorema 1.54 são satisfeitas com

$$\eta \in L^\infty([0,T];W^{1,r}) \cap C([0,T];L^r_{fraca})$$

deduzimos

$$\eta \in C([0,T];W^{1,r}_{fraca}), \quad \text{com } r > 1.$$

Portanto,

$$\eta \in C([0,T];L^r) \cap C([0,T];W^{1,r}_{fraca}), \quad \text{com } r > 1.$$

Por fim, resta mostrar a continuidade forte em $W^{1,r}$. De (2.6) temos

$$\eta_t + \eta_x \omega + \eta \omega_x = 0. \tag{2.7}$$

Multiplicando por $r\ \eta\ |\eta|^{r-2}$ em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$r\ \eta_t\ \eta\ |\eta|^{r-2} + r\ \eta\ \eta_x\ |\eta|^{r-2}\ \omega + r\ \eta^2\ |\eta|^{r-2}\ \omega_x = 0$$

isso acarreta que

$$(|\eta|^r)_t + (|\eta|^r)_x \omega + r|\eta|^r \omega_x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (|\eta|^r)_t + (|\eta|^r \omega)_x + (r-1)(|\eta|^r \omega_x) = 0.$$

Intergrando a igualdade acima sobre $[0,1]$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_0^1 |\eta|^r(x,t)dx &= -\int_0^1 (|\eta|^r\omega)_x(x,t)dx + (r-1)\int_0^1 (-\omega)_x |\eta|^r(x,t)dx \\ &= -\left[|\eta|^r(1,t)\omega(1,t) - |\eta|^r(0,t)\omega(0,t)\right] + (r-1)\int_0^1 (-\omega)_x|\eta|^r(x,t)dx \end{aligned}$$

e já que $\omega(1,t) = \omega(0,t) = 0$ quase todo $t \in [0,T]$, deduzimos

$$\frac{d}{dt}\|\eta(t)\|^r_{L^r} \leqslant \overline{C}\int_0^1 \left(|\omega_x|\cdot|\eta|^r\right)(x,t)dx \quad \text{quase todo } t \in [0,T]. \tag{2.8}$$

Como $\omega \in L^\infty([0,T]; W^{2,r} \cap W^{1,r}_0)$, então

$$|\omega_x(x,t)| \leqslant \|\omega_x(t)\|_{L^\infty} \leqslant C_I\|\omega_x(t)\|_{W^{1,r}} \leqslant C_I\|\omega(t)\|_{W^{2,r}} < \infty. \tag{2.9}$$

Na 2ª desigualdade usamos o Teorema 1.30 e a 3ª desigualdade resulta da Definição 1.37. Por (2.8) e (2.9), resulta que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\eta(t)\|^r_{L^r} &\leqslant \overline{C}\int_0^1 \left(|\omega_x|\cdot|\eta|^r\right)(x,t)dx \leqslant \overline{C}\|\omega_x(t)\|_{L^\infty}\int_0^1 |\eta|^r(x,t)dx \\ &\leqslant \overline{C}\|\omega_x(t)\|_{W^{1,r}}\int_0^1 |\eta|^r(x,t)dx \leqslant \overline{C}\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\int_0^1 |\eta|^r(x,t)dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\|\eta(t)\|^r_{L^r} \leqslant \overline{C}\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\|\eta(t)\|^r_{L^r} \leqslant \overline{C}\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\|\eta(t)\|^r_{W^{1,r}} \quad \text{quase todo } t \in [0,T]. \tag{2.10}$$

Agora, derivando (2.7) com respeito a variável x e multiplicando por $r\eta_x|\eta_x|^{r-2}$ em ambos os lados, obtemos

$$(|\eta_x|^r)_t + (|\eta_x|^r)_x\omega + 2r|\eta_x|^r\omega_x + r\ \eta\ \eta_x|\eta_x|^{r-2}\omega_{xx} = 0$$

e sendo $(|\eta_x|^r\omega)_x = (|\eta_x|^r)_x\omega + |\eta_x|^r\omega_x$, obtemos

$$(|\eta_x|^r)_t + (|\eta_x|^r\omega)_x + (2r-1)(|\eta_x|^r\omega_x) + r\ \eta\ \eta_x|\eta_x|^{r-2}\omega_{xx} = 0.$$

Integrando sobre $[0,1]$ a igualdade acima, resulta que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 |\eta_x|^r(x,t)dx &= -[|\eta_x|^r(1,t)\omega(1,t) - |\eta_x|^r(0,t)\omega(0,t)] + \\ &+ (2r-1)\int_0^1([-\omega]_x|\eta_x|^r)(x,t)dx + r\int_0^1(\eta\ \eta_x|\eta_x|^{r-2}[-\omega]_{xx})(x,t)dx.\end{aligned}$$

Como $\omega(1,t) = \omega(0,t) = 0$ quase todo $t \in [0,T]$, deduzimos

$$\frac{d}{dt}\|\eta_x(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\left[\int_0^1(|\omega_x||\eta_x|^r)(x,t)dx + \int_0^1(|\eta||\eta_x|^{r-1}|\omega_{xx}|)(x,t)dx\right] =: \overline{C}(I_1 + I_2). \tag{2.11}$$

Primeiro, vamos obter uma estimativa para I_1. De (2.9), temos

$$I_1 = \int_0^1(|w_x||\eta_x|^r)(x,t)dx \leqslant C_I\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\int_0^1|\eta_x|^r(x,t)dx$$

isso implica

$$I_1 \leqslant C_I\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\|\eta_x(t)\|_{L^r}^r. \tag{2.12}$$

Agora, vamos obter uma estimativa para I_2. Do Teorema 1.30, temos

$$|\eta(x,t)| \leqslant \|\eta(t)\|_{L^\infty} \leqslant C_I\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}$$

isso acarreta

$$I_2 = \int_0^1(|\eta||\eta_x|^{r-1}|w_{xx}|)(x,t)dx \leqslant C_I\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}\underbrace{\int_0^1(|\eta_x|^{r-1}|w_{xx}|)(x,t)dx}_{=\Lambda_1}.$$

Usando a Desigualdade de Hölder (Proposição 1.42) em Λ_1, com $r > 1$ e $r' = \dfrac{r}{r-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}I_2 \leqslant C_I\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}\int_0^1(|w_{xx}|\ |\eta_x|^{r-1})(x,t)dx &\leqslant C_I\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}\|\omega_{xx}(t)\|_{L^r}\|\eta_x(t)\|_{L^r}^{r-1} \\ &\leqslant C_I\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\left(\|\eta(t)\|_{L^r} + \|\eta_x(t)\|_{L^r}\right)\|\eta_x(t)\|_{L^r}^{r-1} \\ &= C_I\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}(\|\eta_x(t)\|_{L^r}^r + \underbrace{\|\eta_x(t)\|_{L^r}\|\eta_(t)\|_{L^r}^{r-1}}_{=\Lambda_2}).\end{aligned}$$

Resulta da Desigualdade de Young (Proposição 1.41), com $r > 1$ e $r' = \dfrac{r}{r-1}$, em Λ_2 e reagrupando os termos que

$$I_2 \leqslant C_I\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\left[\left(\frac{r-1}{r}\right)\|\eta(t)\|_{L^r}^r + \left(\frac{r+1}{r}\right)\|\eta_x(t)\|_{L^r}^r\right]. \tag{2.13}$$

Substituindo (2.12) e (2.13) em (2.11), obtemos

$$\frac{d}{dt}\|\eta_x(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\left(\|\eta(t)\|_{L^r}^r + \|\eta_x(t)\|_{L^r}^r\right)$$

e concluímos, da Definição 1.27, que

$$\frac{d}{dt}\|\eta_x(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}^r \qquad \text{quase todo } t \in [0,T] \text{ e } r > 1. \tag{2.14}$$

Por (2.10) e (2.14) resulta que

$$\frac{d}{dt}\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}^r = \frac{d}{dt}\left(\|\eta(t)\|_{L^r}^r + \|\eta_x(t)\|_{L^r}^r\right) \leqslant 2\overline{C}\ \|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}^r$$

para quase todo $t \in [0,T]$ e utilizando a Desigualdade de Gronwall (Proposição 1.45) na desigualdade acima, deduzimos

$$\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}^r \leqslant \|\eta_0\|_{W^{1,r}}^r \exp\left\{2\overline{C}\int_0^T \|\omega(t)\|_{W^{2,r}}dt\right\} \leqslant \widetilde{C} \quad \forall t \in [0,T].$$

Logo,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}^r\} \leqslant \widetilde{C}, \tag{2.15}$$

onde denotamos $\widetilde{C}$ uma constante positiva genérica dependendo somente da norma de ω e dos parametros de $\overline{C}$.

Agora, de (2.14) e (2.15) deduzimos

$$\frac{d}{dt}\|\eta_x(t)\|_{L^r}^r \leqslant 2\overline{C}\|\omega(t)\|_{W^{2,r}}\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}^r \leqslant 2\overline{C}\|\omega(t)\|_{W^{2,r}} \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|\eta(t)\|_{W^{1,r}}^r\} \leqslant \widetilde{C}\|\omega(t)\|_{W^{2,r}},$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|\eta_x(t)\|_{L^r}^r \leqslant \widetilde{C}\|\omega(t)\|_{W^{2,r}} \quad \forall\ t \in [0,T]. \tag{2.16}$$

Integrando (2.16) sobre $[0,t]$, com $t \in [0,T]$, obtemos

$$\|\eta_x(t)\|_{L^r}^r \leqslant \|\eta_{0_x}\|_{L^r}^r + \widetilde{C}\int_0^t \|\omega(s)\|_{W^{2,r}}ds,$$

para todo $t \in [0,T]$. Donde decorre,

$$\limsup_{t\to 0^+}\|\eta_x(t)\|_{L^r}^r \leqslant \|\eta_{0_x}\|_{L^r}^r,$$

logo, do Teorema 1.20 acarreta que

$$\lim_{t\to 0^+}\|\eta_x(t) - \eta_{0_x}\|_{L^r}^r = 0.$$

isso implica na continuidade da η_x em $t = 0$.

Assim, a continuidade de η_x em L^r $(r > 1)$, para qualquer t, segue desse resultado e da observação que, para cada $t_0 \in [0,T]$ fixado, a função

$$\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta}(x,t) = \eta(x, \pm t + t_0)$$

é uma solução forte e única para o P.V.I. similar

$$\widetilde{\eta}_t + (\widetilde{\eta}\,\widetilde{\omega})_x = 0 \quad \text{e} \quad \widetilde{\eta}(x,0) = \eta(x,t_0)$$

onde $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}(x,t) = \pm\omega(x, \pm t + t_0)$, para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$.

Portanto,

$$\eta \in C([0,T]; W^{1,r}) \quad r > 1.$$

$\square$

Lema 2.7. *Sejam $m, n \in C([0,1] \times [0,T])$ satisfazendo alguma das condições abaixo*

- $$0 < \kappa_0 < m \quad e \quad 0 \leqslant n \qquad em \quad [0,1] \times [0,T]; \tag{2.17}$$

ou

- $$0 \leqslant m < \kappa_0 \quad e \quad 0 \leqslant n \qquad em \quad [0,1] \times [0,T]; \tag{2.18}$$

ou

- $$0 \leqslant m \qquad e \qquad 0 < n \qquad em \quad [0,1] \times [0,T] \tag{2.19}$$

então

$$\frac{1}{\delta} \geqslant \frac{1}{f(m,n)} > 0 \tag{2.20}$$

onde δ é uma constante positiva, $f(m,n) := \sqrt{b(m,n)^2 + a_0 c(m,n)}$ e

$$b(m,n)^2 + a_0 c(m,n) = (m-\kappa_0)^2 + 2\frac{a_g^2}{a_l^2}mn + \frac{a_g^4}{a_l^4}n^2 + 2\kappa_0\frac{a_g^2}{a_l^2}n, \quad com \quad a_0 = \frac{4a_g^2}{a_l^2}.$$

Demonstração. Já que

$$b(m,n)^2 + a_0 c(m,n) = (m-\kappa_0)^2 + 2\frac{a_g^2}{a_l^2}mn + \frac{a_g^4}{a_l^4}n^2 + 2\kappa_0\frac{a_g^2}{a_l^2}n, \quad \text{com} \quad a_0 = \frac{4a_g^2}{a_l^2}.$$

Então, por (2.17), temos

$$b(m,n)^2 + a_0 c(m,n) = \underbrace{(m-\kappa_0)^2}_{>0} + \underbrace{2\frac{a_g^2}{a_l^2}mn}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{a_g^4}{a_l^4}n^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{2\kappa_0\frac{a_g^2}{a_l^2}n}_{\geqslant 0}$$

$$\Longrightarrow b(m,n)^2 + a_0 c(m,n) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{b(m,n)^2 + a_0 c(m,n)} > 0.$$

Por (2.18), temos

$$b(m,n)^2 + a_0 c(m,n) = \underbrace{(m-\kappa_0)^2}_{>0} + \underbrace{2\frac{a_g^2}{a_l^2}mn}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{a_g^4}{a_l^4}n^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{2\kappa_0\frac{a_g^2}{a_l^2}n}_{\geqslant 0}$$

$$\Longrightarrow \; b(m,n)^2 + a_0 c(m,n) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{b(m,n)^2 + a_0 c(m,n)} > 0.$$

Por (2.19), temos

$$b(m,n)^2 + a_0 c(m,n) = \underbrace{(m-\kappa_0)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{2\frac{a_g^2}{a_l^2}mn}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{a_g^4}{a_l^4}n^2}_{>0} + \underbrace{2\kappa_0\frac{a_g^2}{a_l^2}n}_{>0}$$

$$\Longrightarrow \; b(m,n)^2 + a_0 c(m,n) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{b(m,n)^2 + a_0 c(m,n)} > 0.$$

Portanto, em qualquer caso,

$$\sqrt{b(m,n)^2 + a_0 c(m,n)} > 0 \quad \text{em} \;\; [0,1]\times[0,T] \;\; \text{e} \;\; \text{com } a_0 = \frac{4a_g^2}{a_l^2}.$$

E, sendo n, m são funções contínuas em $[0,1]\times[0,T]$, então a função

$$f(m,n) := \sqrt{b(m,n)^2 + a_0 c(m,n)} > 0, \quad \text{com } a_0 = \frac{4a_g^2}{a_l^2},$$

é contínua em $[0,1]\times[0,T]$. Logo, existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$f(m,n) \geqslant \delta > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\delta} \geqslant \frac{1}{f(m,n)} > 0.$$

□

Lema 2.8. *Sejam $m, n \in C([0,1]\times[0,T])$ satisfazendo alguma das condições abaixo*

- $$\kappa_0 < \overline{C_1} \leqslant m \leqslant \frac{C_1C_2}{\overline{C_1}}, \quad e \quad 0 \leqslant n \leqslant \frac{C_1C_3}{\overline{C_1}} \quad \text{em } [0,1]\times[0,T]; \tag{2.21}$$

ou

- $$0 \leqslant m \leqslant \overline{C_4} < \kappa_0, \quad e \quad 0 \leqslant n \leqslant \frac{\overline{C_4}C_5}{C_4} \quad \text{em } [0,1]\times[0,T]; \tag{2.22}$$

ou

- $$0 \leqslant m \leqslant C_6 e, \quad e \quad 0 < \frac{C_7}{e} \leqslant n \leqslant C_8 e \quad \text{em } [0,1]\times[0,T]; \tag{2.23}$$

$m = \alpha_l \rho_l$, $n = \alpha_g \rho_g$ satisfazendo $\alpha_l + \alpha_g = 1$ e P satifazendo (4) e (5). Então

$$|\alpha_j(m,n) - \alpha_j(\widetilde{m},\widetilde{n})| \leqslant \lambda_1 \left(|m - \widetilde{m}| + |n - \widetilde{n}|\right), \tag{2.24}$$

onde $j = l, g$, λ_1 é uma constante positiva e $n = n(x,t)$, $\widetilde{n} = n(x,s)$, $m = m(x,t)$ $\widetilde{m} = m(x,s)$ para todo (x,t), $(x,s) \in [0,1] \times [0,T]$.

Demonstração. Denote

$$n = n(x,t), \quad \widetilde{n} = n(x,s) \quad \text{e} \quad m = m(x,t), \quad \widetilde{m} = m(x,s)$$

para todos (x,t), $(x,s) \in [0,1] \times [0,T]$. Pela definição de α_l, temos

$$\begin{aligned} |\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\widetilde{m},\widetilde{n})| &= \left| \frac{m}{\rho_l(m,n)} - \frac{\widetilde{m}}{\rho_l(\widetilde{m},\widetilde{n})} \right| \\ &= \left| \left(\frac{m - \widetilde{m}}{\rho_l(m,n)} \right) + \left(\frac{\widetilde{m}}{\rho_l(m,n)\ \rho_l(\widetilde{m},\widetilde{n})} \right) [\rho_l(\widetilde{m},\widetilde{n}) - \rho_l(m,n)] \right| \\ &\leqslant \frac{|m - \widetilde{m}|}{|\rho_l(m,n)|} + \left| \frac{\widetilde{m}}{\rho_l(m,n)\ \rho_l(\widetilde{m},\widetilde{n})} \right| |\rho_l(m,n) - \rho_l(\widetilde{m},\widetilde{n})|. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Como $\widetilde{m}$ é uma função limitada em $[0,1] \times [0,T]$ e $\rho_l \geqslant \kappa_0 > 0$ [ver (4)], então

$$\frac{1}{|\rho_l(\widetilde{m},\widetilde{n})|} \leqslant \frac{1}{\kappa_0} \quad \text{e} \quad \left| \frac{\widetilde{m}}{\rho_l(m,n)\ \rho_l(\widetilde{m},\widetilde{n})} \right| \leqslant \frac{M}{\kappa_0^2} \tag{2.26}$$

onde M é uma constante positiva. Substituindo (2.26) em (2.25), obtemos

$$|\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\widetilde{m},\widetilde{n})| \leqslant \frac{1}{\kappa_0}\ |m - \widetilde{m}| + \frac{M}{\kappa_0^2}\ |\rho_l(m,n) - \rho_l(\widetilde{m},\widetilde{n})|.$$

Sendo $\rho_l = \rho_{l,0} + \dfrac{P - p_0}{a_l^2}$, então

$$|\rho_l(m,n) - \rho_l(\widetilde{m},\widetilde{n})| = \frac{1}{a_l^2}\ |P(m,n) - P(\widetilde{m},\widetilde{n})|.$$

Isso implica que

$$|\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\widetilde{m},\widetilde{n})| \leqslant \frac{1}{\kappa_0}\ |m - \widetilde{m}| + \frac{M}{(\kappa_0 a_l)^2} |P(m,n) - P(\widetilde{m},\widetilde{n})|. \tag{2.27}$$

Afirmamos que

$$|P(m,n) - P(\widetilde{m},\widetilde{n})| \leqslant a_l^2 |m - \widetilde{m}| + a_g^2 \left(\frac{\delta + \kappa_0}{\delta} \right) |n - \widetilde{n}|.$$

De fato, pela definição de P [ver (5)], temos

$$\begin{aligned}|P(m,n)-P(\tilde m,\tilde n)| &= \frac{a_l^2}{2}\left|(m-\tilde m)+\frac{a_0}{4}(n-\tilde n)+f(m,n)-f(\tilde m,\tilde n)\right|\\ &\leqslant \frac{a_l^2}{2}\left[|m-\tilde m|+\frac{a_0}{4}|n-\tilde n|+|f(m,n)-f(\tilde m,\tilde n)|\right].\end{aligned}$$

Agora, usando definição da função f, multiplicando e dividindo por $f(m,n)+f(\tilde m,\tilde n)$ e arranjando os termos, resulta que

$$|f(m,n)-f(\tilde m,\tilde n)| = |I_3+a_0 I_4| \leqslant |I_3|+a_0|I_4|, \tag{2.28}$$

onde

$$I_3 \ =: \left(\frac{b(m,n)+b(\tilde m,\tilde n)}{f(m,n)+f(\tilde m,\tilde n)}\right)(b(m,n)-b(\tilde m,\tilde n)) \quad \text{e} \quad I_4 =: \frac{c(m,n)-c(\tilde m,\tilde n)}{f(m,n)+f(\tilde m,\tilde n)}.$$

Como $a_0 c(m,n)\geqslant 0$, temos que $f(m,n)\geqslant b(m,n)$ e $f(\tilde m,\tilde n)\geqslant b(\tilde m,\tilde n)$. Então

$$|I_3| = \underbrace{\left|\frac{b(m,n)+b(\tilde m,\tilde n)}{f(m,n)+f(\tilde m,\tilde n)}\right|}_{\leqslant 1}|b(m,n)-b(\tilde m,\tilde m)| \leqslant |b(m,n)-b(\tilde m,\tilde n)| \tag{2.29}$$

e por (2.20)[ver Lema 2.18] , temos

$$|I_4| = \frac{|c(m,n-c(\tilde m,\tilde n)|}{|f(m,n)+f(\tilde m,\tilde n)|} \leqslant \frac{|c(m,n)-c(\tilde m,\tilde n)|}{2\delta}. \tag{2.30}$$

Substituindo (2.29) e (2.30) em (2.28), obtemos

$$|f(m,n)-f(\tilde m,\tilde n)| \leqslant |b(m,n)-b(\tilde m,\tilde n)|+\frac{a_0}{2\delta}|c(m,n)-c(\tilde m,\tilde n)| \tag{2.31}$$

e pela definição de b e c [ver (6)] deduzimos

$$|f(m,n)-f(\tilde m,\tilde n)| \leqslant |m-\tilde m|+\left(\frac{a_0}{4}+\frac{a_0\kappa_0}{2\delta}\right)|n-\tilde n|. \tag{2.32}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}|P(m,n)-P(\tilde m,\tilde n)| &\leqslant \frac{a_l^2}{2}\left[|m-\tilde m|+\frac{a_0}{4}|n-\tilde n|+|f((m,n)-f(\tilde m,\tilde n)|\right]\\ &\leqslant \frac{a_l^2}{2}\left[2|m-\tilde m|+\left(\frac{a_0}{2}+\frac{a_0\kappa_0}{2\delta}\right)|n-\tilde n|\right].\end{aligned}$$

Usando que $a_0 = \dfrac{4a_g^2}{a_l^2}$ obtemos

$$|P(m,n)-P(\tilde m,\tilde n)| \leqslant a_l^2|m-\tilde m|+a_g^2\left(\frac{\delta+\kappa_0}{\delta}\right)|n-\tilde n|. \tag{2.33}$$

Por fim, de (2.27) e (2.33) concluímos

$$
\begin{aligned}
|\alpha_l(m,n)-\alpha_l(\widetilde{m},\widetilde{n})| &\leqslant \frac{1}{\kappa_0}|m-\widetilde{m}| + \frac{M}{\kappa_0^2}\,|m-\widetilde{m}| + \frac{M\ a_g^2}{\kappa_0^2 a_l^2}\left(\frac{\delta+\kappa_0}{\delta}\right)|n-\widetilde{n}| \\
&\leqslant \left(\frac{1}{\kappa_0}+\frac{M}{\kappa_0^2}\right)\,|m-\widetilde{m}| + \frac{M\ a_g^2}{\kappa_0^2 a_l^2}\left(\frac{\delta+\kappa_0}{\delta}\right)|n-\widetilde{n}|. \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
|\alpha_l(m,n)-\alpha_l(\widetilde{m},\widetilde{n})| \leqslant \lambda_1\left(|m-\widetilde{m}|+|n-\widetilde{n}|\right) \qquad (2.35)
$$

e sendo $\alpha_l+\alpha_g=1$, deduzimos

$$
|\alpha_g(m,n)-\alpha_g(\widetilde{m},\widetilde{n})| \leqslant \lambda_1\left(|m-\widetilde{m}|+|n-\widetilde{n}|\right)
$$

com $\lambda_1=\max\left\{\left(\frac{1}{\kappa_0}+\frac{M}{\kappa_0^2}\right),\ \frac{M\ a_g^2(\delta+\kappa_0)}{\kappa_0^2\ a_l^2\ \delta}\right\}$. Isso prova a desigualdade (2.24).

□

Lema 2.9. *Sob as hipóteses do Lema 2.8, temos*

$$
\left|\frac{\partial\rho_g(m,n)}{\partial m}-\frac{\partial\rho_g(\widetilde{m},\widetilde{n})}{\partial m}\right| \leqslant \lambda_2\left(|m-\widetilde{m}|+|n-\widetilde{n}|\right) \qquad (2.36)
$$

e

$$
\left|\frac{\partial\rho_g(m,n)}{\partial n}-\frac{\partial\rho_g(\widetilde{m},\widetilde{n})}{\partial n}\right| \leqslant \lambda_2\left(|m-\widetilde{m}|+|n-\widetilde{n}|\right) \qquad (2.37)
$$

onde λ_i é uma constante positiva com $i=1,2$ e $n=n(x,t)$, $\widetilde{n}=n(x,s)$, $m=m(x,t)$ $\widetilde{m}=m(x,s)$ para todo (x,t), $(x,s)\in[0,1]\times[0,T]$.

Demonstração. De (2.5) e da definição da função f, temos

$$
\frac{\partial\rho_g(m,n)}{\partial m}=\frac{a_l^2}{2a_g^2}\left(1+\frac{b(m,n)}{f(m,n)}\right), \qquad \frac{\partial\rho_g(m,n)}{\partial n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b(m,n)+2\kappa_0}{f(m,n)}\right).
$$

Daí segue-se

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\rho_g(m,n)}{\partial m}-\frac{\partial\rho_g(\widetilde{m},\widetilde{n})}{\partial m}\right| &= \frac{a_l^2}{2a_g^2}\left|\frac{b(m,n)}{f(m,n)}-\frac{b(\widetilde{m},\widetilde{n})}{f(\widetilde{m},\widetilde{n})}\right| \\
= \frac{a_l^2}{2a_g^2}&\left|\frac{b(m,n)-b(\widetilde{m},\widetilde{n})}{f(m,n)}+\left(\frac{b(\widetilde{m},\widetilde{n})}{f(m,n)\ f(\widetilde{m},\widetilde{n})}\right)[f(\widetilde{m},\widetilde{n})-f(m,n)]\right| \\
\leqslant \frac{a_l^2}{2a_g^2}&\left[\frac{|b(m,n)-b(\widetilde{m},\widetilde{n})|}{|f(m,n)|}+\left|\frac{b(\widetilde{m},\widetilde{n})}{f(m,n)\ f(\widetilde{m},\widetilde{n})}\right||f(\widetilde{m},\widetilde{n})-f(m,n)|\right]. \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

Sendo m e n funções limitadas em $[0,1]\times[0,T]$, a função $b(m,n)$ é limitada em $[0,1]\times[0,T]$, ou seja, existe uma constante positiva $\overline{M}$ tal que

$$|b(m,n)| \leqslant \overline{M}.$$

Logo, de (2.20)[ver Lema 2.18] decorre

$$\left|\frac{b(\tilde{m},\tilde{n})}{f(m,n)\, f(\tilde{m},\tilde{n})}\right| \leqslant \frac{\overline{M}}{\delta^2}. \tag{2.39}$$

Substituindo (2.20)[ver Lema 2.18] e (2.39) em (2.38), obtemos

$$\left|\frac{\partial \rho_g(m,n)}{\partial m} - \frac{\partial \rho_g(\tilde{m},\tilde{n})}{\partial m}\right| \leqslant \frac{a_l^2}{2a_g^2\,\delta}|b(m,n)-b(\tilde{m},\tilde{n})| + \frac{a_l^2\overline{M}}{2a_g^2\,\delta^2}|f(\tilde{m},\tilde{n})-f(m,n)|$$

e usando as definições de b e c, (2.32) [ver Lema 2.8] e $a_0 = 4\dfrac{a_g^2}{a_l}$ no lado direito da desigualdade acima, deduzimos

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \rho_g(m,n)}{\partial m} - \frac{\partial \rho_g(\tilde{m},\tilde{n})}{\partial m}\right| &\leqslant \underbrace{\left(\frac{a_l^2}{2a_g^2\,\delta} + \frac{a_l^2\overline{M}}{2a_g^2\,\delta^2}\right)}_{\overline{M}_1}|m-\tilde{m}| + \underbrace{\left(\frac{\overline{M}}{\delta^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\kappa_0}{\delta}\right)+\frac{1}{2\delta}\right)}_{\overline{M}_2}|n-\tilde{n}| \\ &\leqslant \overline{M}_1\,|m-\tilde{m}| + \overline{M}_2\,|n-\tilde{n}|\end{aligned}$$

donde segue (2.36) com $\lambda_2 = \max\{\overline{M}_1, \overline{M}_2\}$.

Com um argumento similar ao utilizado para mostrar (2.36), obtem-se (2.37).

$\square$

Lema 2.10. *Se $m, n \in C([0,T]; W^{1,r})\quad r>1$, u_l, u_g satisfazendo*

$$\begin{cases} \mu_g[u_g]_{xx} = \alpha_g\, P_x + n\, g, \\ \mu_l[u_l]_{xx} = \alpha_l\, P_x + m\, g \end{cases} \tag{2.40}$$

em quase todo $(0,1)\times(0,T)$, com $u_i(0,t) = u_i(1,t) = 0$ para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\left|\frac{\partial P}{\partial m}\right| \leqslant C \quad e \quad \left|\frac{\partial P}{\partial n}\right| \leqslant C, \tag{2.41}$$

então

$$u_i(t) \in W^{2,r} \cap W_0^{1,r}$$

para quase todo $t \in [0,T]$ e $i = l, g$ e $r > 1$.

Demonstração. De (2.40), temos

$$[u_l]_x(x,t) = \frac{1}{\mu_l}\int_0^x (\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)\ d\xi + h_1 \qquad \text{com } h_1 \in \mathbb{R}.$$

Daí segue-se que

$$u_l(x,t) = \frac{1}{\mu_l}\int_0^x\int_0^y (\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)\ d\xi dy + h_1 x + h_2 \qquad \text{com } h_1, h_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.42}$$

Utilizando as condições $u_l(0,t) = u_l(1,t) = 0$ em (2.42), obtemos

$$0 = u_l(0,t) = \frac{1}{\mu_l}\int_0^0\int_0^y (\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)\ d\xi dy + h_2$$

$$0 = u_l(1,t) = \frac{1}{\mu_l}\int_0^1\int_0^y (\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)\ d\xi dy + h_1 + h_2$$

o que implica

$$h_1 = -\frac{1}{\mu_l}\int_0^1\int_0^y (\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)\ d\xi dy \qquad \text{e} \qquad h_2 = 0.$$

Portanto,

$$u_l(x,t) = \frac{1}{\mu_l}\int_0^x\int_0^y (\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)\ d\xi dy - \frac{1}{\mu_l}x\int_0^1\int_0^y (\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)\ d\xi dy \tag{2.43}$$

e

$$[u_l]_x(x,t) = \frac{1}{\mu_l}\int_0^x (\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)\ d\xi - \frac{1}{\mu_l}\int_0^1\int_0^y (\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)\ d\xi dy. \tag{2.44}$$

De $(2.40)_2$, temos

$$\begin{aligned}\|\mu_l[u_l]_{xx}(t)\|_{L^r}^r = \int_0^1 |\mu_l[u_l]_{xx}|^r(x,t)dx &= \int_0^1 |\alpha_l P_x + m\ g|^r(x,t)dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left(|\alpha_l P_x| + |m|\ g\right)^r(x,t)dx\end{aligned}$$

e utilizando Lema 1.39 no lado direito da desigualdade acima, segue

$$\|\mu_l[u_l]_{xx}(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\left[\int_0^1 \left(|\alpha_l|\ |P_x|\right)^r(x,t)dx + \int_0^1 |m|^r(x,t)dx\right].$$

Agora, como $|\alpha_l| \leqslant 1$, resulta

$$\|\mu_l[u_l]_{xx}(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\left[\|P_x(t)\|_{L^r}^r + \|m(t)\|_{L^r}^r\right] \tag{2.45}$$

para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$.

Como $P = P(m,n)$ [ver pág. 11, eq. (5)], temos

$$P_x = \frac{\partial P}{\partial m}(m,n)\ m_x + \frac{\partial P}{\partial n}(m,n)\ n_x.$$

Usando (2.41) e pelo Lema 1.39, resulta

$$|P_x|^r \leqslant C^r\left(|m_x|+|n_x|\right)^r \leqslant (2C)^r\left(|m_x|^r+|n_x|^r\right).$$

Daí

$$\int_0^1 |P_x|^r(x,t)dx \leqslant (2C)^r\left(\int_0^1 |m_x|^r(x,t)dx + \int_0^1 |n_x|^r(x,t)dx\right)$$

e, assim,

$$\|P_x(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\left(\|m_x(t)\|_{L^r}^r + \|n_x(t)\|_{L^r}^r\right), \tag{2.46}$$

para todo $(x,t) \in [0,1]\times[0,T]$.

De (2.45) e (2.46), obtemos

$$\|\mu_l[u_l]_{xx}(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\left(\|n_x(t)\|_{L^r}^r + \|m(t)\|_{W^{1,r}}^r\right). \tag{2.47}$$

Logo, como $m, n \in C\left([0,T]; W^{1,r}\right)$, segue-se

$$[u_l]_{xx}(t) \in L^r \quad \Rightarrow \quad |\mu_l[u_l]_{xx}|^r(t) = |\alpha_l P_x + m\ g|^r(t) \in L^1 \tag{2.48}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Por (2.44), obtemos

$$\begin{aligned}\|[u_l]_x(t)\|_{L^r}^r = \int_0^1 |[u_l]_x|^r(x,t)dx \leqslant \int_0^1 \Bigg(\frac{1}{\mu_l}\left|\int_0^x(\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)d\xi\right| \\ + \frac{1}{\mu_l}\left|\int_0^1\int_0^y(\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)d\xi dy\right|\Bigg)^r dx\end{aligned}$$

e aplicando o Lema 1.39 no lado direito da desigualdade acima, resulta

$$\|[u_l]_x(t)\|_{L^r}^r \leqslant C_\mu\int_0^1\left(\left|\int_0^x(\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)d\xi\right|^r + \left|\int_0^1\int_0^y(\alpha_l P_\xi + m\ g)(\xi,t)d\xi dy\right|^r\right)dx$$

onde C_μ é uma constante positiva dependente de μ_l.

Agora, pela Desigualdade de Jensen (Proposição 1.43), usando a função $\eta(\xi) = 1$, para todo $\xi \in [0,1]$ e (2.48), temos

$$\begin{aligned}\|[u_l]_x(t)\|_{L^r}^r &\leqslant \overline{C_\mu}\int_0^1\left(\int_0^x |\alpha_l P_\xi + m\ g|^r(\xi,t)d\xi + \int_0^1\int_0^y |\alpha_l P_\xi + m\ g|^r(\xi,t)d\xi dy\right)dx \\ &\leqslant \overline{C_\mu}\left(\int_0^1\int_0^1 |\alpha_l P_\xi + m\ g|^r(\xi,t)d\xi dx + \int_0^1\int_0^1\int_0^1 |\alpha_l P_\xi + m\ g|^r(\xi,t)d\xi dy dx\right) \\ &= \overline{C_\mu}\ \|(\alpha_l P_x + m\ g)(t)\|_{L^r}^r,\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$. E pela Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.35), obtemos

$$\|u_l(t)\|^r_{W^{1,r}} \leqslant \|[u_l]_x(t)\|^r_{L^r} \leqslant \overline{C_\mu}\ \|(\alpha_l P_x + m\ g)(t)\|^r_{L^r}, \tag{2.49}$$

para todo $t \in [0,T]$.

De (2.46) e $|\alpha_l| \leqslant 1$, temos

$$\|(\alpha_l P_x)(t)\|^r_{L^r} = \int_0^1 (\underbrace{|\alpha_l|^r}_{\leqslant 1} |P_x|^r)(x,t)dx \leqslant \int_0^1 |P_x|^r(x,t)dx \leqslant \overline{C}\left(\|m_x(t)\|^r_{L^r} + \|n_x(t)\|^r_{L^r}\right)$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|u_l(t)\|_{W^{1,r}} \leqslant \overline{C_\mu}\ \|(\alpha_l P_x + m\ g)(t)\|_{L^r} &\leqslant \overline{C_\mu}\left(\|(\alpha_l P_x)(t)\|_{L^r} + \|m(t)\|_{L^r}\right) \\ &\leqslant \overline{C_\mu}\left(\|m(t)\|^r_{W^{1,r}} + \|n_x(t)\|^r_{L^r}\right), \end{aligned} \tag{2.50}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Portanto de (2.47) e (2.50),

$$\|u_l(t)\|_{W^{2,r}} \leqslant \overline{C_\mu}\left(\|m(t)\|_{W^{1,r}} + \|n_x(t)\|_{L^r}\right). \tag{2.51}$$

onde $t \in [0,T]$ e $\overline{C_\mu}$ uma constante positiva dependendo de μ_l. Similarmente,

$$\|u_g(t)\|_{W^{2,r}} \leqslant \overline{C_\mu}\ \left(\|m_x(t)\|_{L^r} + \|n(t)\|_{W^{1,r}}\right) \tag{2.52}$$

onde $t \in [0,T]$ e $\overline{C_\mu}$ uma constante positiva dependendo de μ_g.

Assim, por (2.51), (2.52), e $m, n \in C\left([0,T]; W^{1,r}\right)$, segue-se

$$u_l(t), u_g(t) \in W^{2,r}$$

e como $u_i(1,t) = u_i(0,t) = 0$, $i = l, g$, concluímos

$$u_l(t), u_g(t) \in W^{2,r} \cap W^{1,r}_0 \quad r > 1$$

para quase todo $t \in [0,T]$. □

Lema 2.11. *Sob as hipóteses Lema 2.10, temos*

$$u_l, u_g \in C([0,T]; W^{2,r} \cap W^{1,r}_0) \quad r > 1.$$

Demonstração. Para simplificar a notação, denotaremos por

$$n = n(x,t), \quad \widetilde{n} = n(x,s) \quad \text{e} \quad m = m(x,t), \quad \widetilde{m} = m(x,s)$$

para todo $(x,t), (x,s) \in [0,1] \times [0,T]$.

Da equação (2.40), temos

$$
\begin{aligned}
|\mu_l[u_l(x,t)-u_l(x,s)]_{xx}| &= |(m-\tilde{m})\, g + \alpha_l(m,n)P_x(m,n) - \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})P_x(\tilde{m},\tilde{n})| \\
&\leqslant |m-\tilde{m}|\, g + |\alpha_l(m,n)-\alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})||P_x(m,n)| + |\alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})||P_x(m,n)-P_x(\tilde{m},\tilde{n})|
\end{aligned}
$$

e como $|\alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})| \leqslant 1$, resulta

$$
\begin{aligned}
&|\mu_l[u_l(x,t)-u_l(x,s)]_{xx}| \\
&\leqslant |m-\tilde{m}|\, g + \underbrace{|\alpha_l(m,n)-\alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})||P_x(m,n)|}_{:=I_5} + \underbrace{|P_x(m,n)-P_x(\tilde{m},\tilde{n})|}_{:=I_6}.
\end{aligned} \tag{2.53}
$$

Primeiro, vamos encontrar uma estimativa para I_6. Sabemos que

$$
P_x(m,n) = \frac{\partial P(m,n)}{\partial m}\, m_x + \frac{\partial P(m,n)}{\partial n}\, n_x = a_g^2 \frac{\partial \rho_g(m,n)}{\partial m} m_x + a_g^2 \frac{\partial \rho_g(m,n)}{\partial n} n_x,
$$

então

$$
\begin{aligned}
I_6 = &\left| a_g^2 \left[\frac{\partial \rho_g}{\partial m}(m,n) - \frac{\partial \rho_g}{\partial m}(\tilde{m},\tilde{n}) \right] m_x + a_g^2 \left[\frac{\partial \rho_g}{\partial n}(m,n) - \frac{\partial \rho_g}{\partial n}(\tilde{m},\tilde{n}) \right] n_x \right. \\
&\left. + a_g^2\, \frac{\partial \rho_g}{\partial m}(\tilde{m},\tilde{n})[m_x-\tilde{m}_x] + a_g^2\, \frac{\partial \rho_g}{\partial n}(\tilde{m},\tilde{n})[n_x-\tilde{n}_x] \right| \\
&\leqslant a_g^2 \left| \frac{\partial \rho_g}{\partial m}(m,n) - \frac{\partial \rho_g}{\partial m}(\tilde{m},\tilde{n}) \right| |m_x| + a_g^2 \left| \frac{\partial \rho_g}{\partial n}(m,n) - \frac{\partial \rho_g}{\partial n}(\tilde{m},\tilde{n}) \right| |n_x| \\
&+ \underbrace{\left| a_g^2\, \frac{\partial \rho_g}{\partial m}(\tilde{m},\tilde{n}) \right|}_{=|\frac{\partial P}{\partial m}(\tilde{m},\tilde{n})|} |m_x-\tilde{m}_x| + \underbrace{\left| a_g^2\, \frac{\partial \rho_g}{\partial n}(\tilde{m},\tilde{n}) \right|}_{=|\frac{\partial P}{\partial n}(\tilde{m},\tilde{n})|} |n_x-\tilde{n}_x|.
\end{aligned}
$$

Utilizando o Lema 2.9 [as desigualdades (2.36) e (2.37)] no 1º e 2º termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_6 \leqslant &\left(|m-\tilde{m}| + |n-\tilde{n}|\right) \left(a_g^2\lambda_2|m_x| + a_g^2\lambda_3|n_x|\right) + \left|\frac{\partial P}{\partial m}(\tilde{m},\tilde{n})\right| |m_x-\tilde{m}_x| \\
&+ \left|\frac{\partial P}{\partial n}(\tilde{m},\tilde{n})\right| |n_x-\tilde{n}_x|
\end{aligned}
$$

e usando (2.41), concluímos

$$
I_6 \leqslant \left(|m-\tilde{m}| + |n-\tilde{n}|\right) \left(a_g^2\lambda_2|m_x| + a_g^2\lambda_3|n_x|\right) + C(|m_x-\tilde{m}_x| + |n_x-\tilde{n}_x|). \tag{2.54}
$$

Agora, vamos obter uma estimativa para I_5. Por (2.41), temos

$$
|P_x(m,n)| \leqslant C(|m_x| + |n_x|). \tag{2.55}
$$

Logo,

$$
I_5 = |\alpha_l(m,n)-\alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})||P_x(m,n)| \leqslant C|\alpha_l(m,n)-\alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})|(|m_x| + |n_x|)
$$

e usando Lema 2.8 [a desigualdade (2.24)], com $j = l$ no lado direito da desigualdade acima, concluímos

$$I_5 \leqslant \lambda_1 C\,(|m - \widetilde{m}| + |n - \widetilde{n}|)\,(|m_x| + |n_x|). \tag{2.56}$$

Por (2.54), (2.56) e (2.53), obtemos

$$|\mu_l[u_l(x,t) - u_l(x,s)]_{xx}| \leqslant \mathcal{C}\,(|m - \widetilde{m}| + |n - \widetilde{n}|)\,(|m_x| + |n_x|) + \mathcal{C}(|m_x - \widetilde{m}_x| + |n_x - \widetilde{n}_x|)$$

onde $\mathcal{C}$ é uma constante positiva.

Elevando ambos os lados da desigualdade acima a $r > 1$, utilizando o Lema 1.39 e integrando ambos os lados a desigualdades acima sobre $[0,1]$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\mu_l[(u_l)_{xx}(t) - (u_l)_{xx}(s)]\|_{L^r}^r &\leqslant \mathcal{C}\Theta(t)(\|m(t) - m(s)\|_{L^r}^r + \|n(t) - n(s)\|_{L^r}^r)\\ &\quad + \mathcal{C}(\|m_x(t) - m_x(s)\|_{L^r}^r + \|n_x(t) - n_x(s)\|_{L^r}^r)\end{aligned} \tag{2.57}$$

onde $\Theta(t) := \|m_x(t)\|_{L^r}^r + \|n_x(t)\|_{L^r}^r$.

Já que $m, n \in C([0,T]; W^{1,r})$, então

$$\mathcal{C}\Theta(t) = \mathcal{C}(\|m_x(t)\|_{L^r}^r + \|n_x(t)\|_{L^r}^r) \leqslant \overline{\mathcal{C}}$$

o que implica

$$\begin{aligned}&\|\mu_l[(u_l)_{xx}(t) - (u_l)_{xx}(s)]\|_{L^r}^r\\ &\leqslant \overline{\mathcal{C}}(\|m(t) - m(s)\|_{L^r}^r + \|n(t) - n(s)\|_{L^r}^r) + \mathcal{C}(\|m_x(t) - m_x(s)\|_{L^r}^r + \|n_x(t) - n_x(s)\|_{L^r}^r).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|(u_l)_{xx}(t) - (u_l)_{xx}(s)\|_{L^r}^r \leqslant \frac{\overline{\overline{\mathcal{C}}}}{(\mu_l)^r}(\|m(t) - m(s)\|_{W^{1,r}}^r + \|n(t) - n(s)\|_{W^{1,r}}^r) \tag{2.58}$$

onde $\overline{\overline{\mathcal{C}}} = \max\{\overline{\mathcal{C}}, \mathcal{C}\}$ é uma constante positiva.

Agora, de (2.44), temos

$$\begin{aligned}|\mu_l[u_l(x,t) - u_l(x,s)]_x| &= \Bigg|\int_0^x [(\alpha_l P_\xi + m\,g)(\xi,t) - (\alpha_l P_\xi + m\,g)(\xi,s)]\,d\xi\\ &- \left(\int_0^1\int_0^y [(\alpha_l P_\xi + m\,g)(\xi,t) - \alpha_l P_\xi + m\,g)(\xi,s)]d\xi dy\right)\Bigg|\\ &\leqslant \left|\int_0^x [\alpha_l(m,n)P_\xi(m,n) - \alpha_l(\widetilde{m},\widetilde{n})P_\xi(\widetilde{m},\widetilde{n})]d\xi\right| + \left|\int_0^x (m - \widetilde{m})g\;d\xi\right|\\ &+ \left|\int_0^1\int_0^y [\alpha_l(m,n)P_\xi(m,n) - \alpha_l(\widetilde{m},\widetilde{n})P_\xi(\widetilde{m},\widetilde{n})]d\xi dy\right| + \left|\int_0^1\int_0^y (m - \widetilde{m})g\;d\xi dy\right|\end{aligned} \tag{2.59}$$

e observe que

$$\begin{aligned}
&\alpha_l(m,n)P_\xi(m,n) - \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})P_\xi(\tilde{m},\tilde{n}) \\
&= [\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})]P_\xi(m,n) + \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})[P_\xi(m,n) - P_\xi(\tilde{m},\tilde{n})].
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Substituindo (2.60) em (2.59), obtemos

$$\begin{aligned}
|\mu_l[u_l(x,t) - u_l(x,s)]_x| &\leqslant \left| g\int_0^x (m-\tilde{m})d\xi \right| + \left| g\int_0^1\int_0^y (m-\tilde{m})d\xi dy \right| \\
&+ \left| \int_0^x ([\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})]P_\xi(m,n) + \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})[P_\xi(m,n) - P_\xi(\tilde{m},\tilde{n})])d\xi \right| \\
&+ \left| \int_0^1\int_0^y ([\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})]P_\xi(m,n) + \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})[P_\xi(m,n) - P_\xi(\tilde{m},\tilde{n})])d\xi dy \right| \\
&\leqslant \left| g\int_0^x (m-\tilde{m})d\xi \right| + \left| g\int_0^1\int_0^y (m-\tilde{m})]d\xi dy \right| + \left| \int_0^x ([\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})]P_\xi(m,n))d\xi \right| \\
&+ \left| \int_0^x (\alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})[P_\xi(m,n) - P_\xi(\tilde{m},\tilde{n})])d\xi \right| + \left| \int_0^1\int_0^y ([\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})]P_\xi(m,n))d\xi dy \right| \\
&+ \left| \int_0^1\int_0^y (\alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})[P_\xi(m,n) - P_\xi(\tilde{m},\tilde{n})])d\xi dy \right|.
\end{aligned}$$

Elevando ambos os lados da desigualdade acima a $r > 1$, utilizando o Lema 1.39 e considerando a função $\eta(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ e (2.48), segue da Desigualdade de Jensen (Proposição 1.43) que

$$\begin{aligned}
|\mu_l[u_l(x,t) - u_l(x,s)]_x|^r &\leqslant \mathcal{M}\Bigg(\int_0^x |(m-\tilde{m})|^r d\xi + \int_0^1\int_0^y |(m-\tilde{m})|^r d\xi dy \\
&+ \int_0^x (|\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})||P_\xi(m,n)|)^r d\xi + \int_0^x (|\alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})||P_\xi(m,n) - P_\xi(\tilde{m},\tilde{n})|)^r d\xi \\
&+ \int_0^1\int_0^y (|\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})||P_\xi(m,n)|)^r d\xi dy \\
&+ \int_0^1\int_0^y (|\alpha_l(\tilde{m},\tilde{n})||P_\xi(m,n) - P_\xi(\tilde{m},\tilde{n})|)^r d\xi dy \Bigg)
\end{aligned}$$

com $\mathcal{M}$ uma constante positiva.

Como $|\alpha(\widetilde{m},\widetilde{n})| \leqslant 1$,

$$|\mu_l[u_l(x,t) - u_l(x,s)]_x|^r \leqslant \mathcal{M}\left(\int_0^1 |(m-\widetilde{m})|^r d\xi + \int_0^1\int_0^1 |(m-\widetilde{m})|^r d\xi dy\right.$$
$$+ \int_0^1 (|\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\widetilde{m},\widetilde{n})||P_\xi(m,n)|)^r d\xi + \int_0^1 |P_\xi(m,n) - P_\xi(\widetilde{m},\widetilde{n})|^r d\xi$$
$$\left.+ \int_0^1\int_0^1 (|\alpha(m,n) - \alpha(\widetilde{m},\widetilde{n})||P_\xi(m,n)|)^r d\xi dy + \int_0^1\int_0^1 |P_\xi(m,n) - P_\xi(\widetilde{m},\widetilde{n})|^r d\xi dy\right)$$
$$= \mathcal{M}\left(\|m(t) - m(s)\|_{L^r}^r + \int_0^1 (|\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\widetilde{m},\widetilde{n})||P_\xi(m,n)|)^r d\xi\right.$$
$$\left.+ \int_0^1 |P_\xi(m,n) - P_\xi(\widetilde{m},\widetilde{n})|^r d\xi\right).$$

Integrando ambos os lados sobre $[0,1]$, obtemos

$$\|\mu_l[(u_l)_x(x,t) - (u_l)_x(x,s)]\|_{L^r}^r \leqslant \mathcal{M}\left(\|m(t) - m(s)\|_{L^r}^r\right.$$
$$\left.+ \int_0^1 (|\alpha_l(m,n) - \alpha_l(\widetilde{m},\widetilde{n})||P_\xi(m,n)|)^r d\xi + \int_0^1 |P_\xi(m,n) - P_\xi(\widetilde{m},\widetilde{n})|^r d\xi\right) \tag{2.61}$$

onde $\mathcal{M}$ é uma constante positiva.

Agora, elevando ambos os lados de (2.54) e (2.56) a $r > 1$, usando o Lema 1.39 no lado direito de cada desigualdade e integrando sobre $[0,1]$, obtemos

$$\int_0^1 |P_\xi(m,n) - P_\xi(\widetilde{m},\widetilde{n})|^r dx \leqslant \overline{\mathcal{K}}\left[\|m_x(t) - m_x(s)\|_{L^r}^r + \|n_x(t) - n_x(s)\|_{L^r}^r\right.$$
$$\left.+ \Theta(t)(\|m(t) - m(s)\|_{L^r}^r + \|n(t) - n(s)\|_{L^r}^r)\right] \tag{2.62}$$

e

$$\int_0^1 (|\alpha(m,n) - \alpha(\widetilde{m},\widetilde{n})||P_\xi(m,n)|)^r d\xi \leqslant \overline{\mathcal{H}}\Theta(t)(\|m(t) - m(s)\|_{L^r}^r + \|n(t) - n(s)\|_{L^r}^r) \tag{2.63}$$

onde $\Theta(t) := \|m_\xi(t)\|_{L^r}^r + \|n_\xi(t)\|_{L^r}^r$ e $\overline{\mathcal{K}}, \overline{\mathcal{H}}$ são constantes positivas.

Substituindo (2.62) e (2.63) em (2.61), temos

$$\|\mu_l[(u_l)_x(t) - (u_l)_x(s)]\|_{L^r}^r \leqslant \overline{\mathcal{M}}[\Theta(t)(\|m(t) - m(s)\|_{L^r}^r + \|n(t) - n(s)\|_{L^r}^r)$$
$$+ \|m(t) - m(s)\|_{W^{1,r}}^r + \|n_x(t) - n_x(s)\|_{L^r}^r],$$

onde $\Theta(t) := \|m_x(t)\|_{L^r}^r + \|n_x(t)\|_{L^r}^r$ e $\overline{\mathcal{M}} = \max\{\mathcal{M}, \mathcal{M}(\overline{\mathcal{K}} + \overline{\mathcal{H}}), \mathcal{M}\overline{\mathcal{H}}\}$.

Logo,

$$\|\mu_l[(u_l)_x(t) - (u_l)_x(s)]\|_{L^r}^r dx \leqslant \overline{\mathcal{M}}\Theta(t)(\|m(t) - m(s)\|_{W^{1,r}}^r + \|n(t) - n(s)\|_{W^{1,r}}^r) \tag{2.64}$$

e sendo $\|m_x(t)\|_{L^r}$ e $\|n_x(t)\|_{L^r}$ são limitadas por uma constante (pois $m, n \in C([0,T]; W^{1,r})$), então

$$\overline{\mathcal{M}}\Theta(t) = \overline{\mathcal{M}}(\|m_\xi(t)\|_{L^r}^r + \|n_\xi(t)\|_{L^r}^r) \leqslant \overline{\overline{\mathcal{M}}} \tag{2.65}$$

onde $\overline{\overline{\mathcal{M}}}$ é uma constante positiva.

Assim, de (2.64) e (2.65) resulta

$$\|(u_l)_x(t) - (u_l)_x(s)\|_{L^r}^r \leqslant \frac{\overline{\overline{\mathcal{M}}}}{(\mu_l)^r}(\|m(t) - m(s)\|_{W^{1,r}}^r + \|n(t) - n(s)\|_{W^{1,r}}^r)$$

e pela Desigualdade de Poincaré (Proposição 1.35), segue-se

$$\|u_l(t) - u_l(s)\|_{W^{1,r}} \leqslant \frac{\overline{\overline{\mathcal{M}}}}{(\mu_l)^r}(\|m(t) - m(s)\|_{W^{1,r}}^r + \|n(t) - n(s)\|_{W^{1,r}}^r) \tag{2.66}$$

onde $\overline{\overline{\mathcal{M}}}$ é uma constante positiva.

Por (2.58) e (2.66), temos

$$\|u_l(t) - u_l(s)\|_{W^{2,r}} \leqslant \left(\frac{\overline{\overline{\mathcal{C}}} + \overline{\overline{\mathcal{M}}}}{(\mu_l)^r}\right)(\|m(t) - m(s)\|_{W^{1,r}}^r + \|n(t) - n(s)\|_{W^{1,r}}^r)$$

e por hipótese, $m, n \in C([0,T]; W^{1,r})$, segue que

$$\lim_{t \to s} \|u_l(t) - u_l(s)\|_{W^{2,r}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u_l \in C([0,T]; W^{2,r}).$$

Como $u_l(1,t) = u_l(0,t) = 0$, quase todo $t \in [0,T]$ e $u_l \in C([0,T]; W^{2,r})$, concluímos

$$u_l \in C([0,T]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \quad r > 1.$$

Similarmente,

$$u_g \in C([0,T]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \quad r > 1.$$

□

2.3 Demonstração do Teorema Principal

Nesta seção, desenvolvemos completamente a prova do Teorema 2.1. Para facilitar a compreensão a prova foi dividida em subseções.

Seja

$$S \triangleq S_{T_0,A_1} = \left\{v \in C\left([0,T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}\right) \mid \|v\|_{C([0,T_0];W^{2,1})} \leqslant A_\mu A_1\right\} \tag{2.67}$$

onde $r > 1$, $A_\mu = \max\left\{\dfrac{1}{\mu_g}, \dfrac{1}{\mu_l}\right\}$, T_0 satisfaz (2.4) e

$$5Ce^{C_I}(\|m_{0,x}\|_{L^1} + \|n_{0,x}\|_{L^1} + 2C) + 5g\|m_0\|_{L^1} + 5g\|n_0\|_{L^1} \leqslant A_1,$$

onde g é a constante de gravidade, e é número de Euler, C_I uma constante de imersão de Sobolev, C é uma constante positiva que depende somente dos dados inicias (8) e outros parâmetros do modelo conhecidos, mas independente dos coeficientes de viscosidades μ_l e μ_g e $A_1 > 0$ uma constante que também é independente de μ_g e μ_l.

2.3.1 Construção de uma sequência iterativa

Nesta subseção, construímos um sistema de aproximação através de uma sequência iterativa, seguindo o raciocinio análogo em [9] da seguinte forma:

Seja $(u_l^0, u_g^0) = (0, 0)$ e

$$\begin{cases} (n^k)_t + (n^k u_g^{k-1})_x &= 0, \\ (m^k)_t + (m^k u_l^{k-1})_x &= 0, \\ \alpha_g^k (P^k)_x &= -n^k\, g + \mu_g (u_g^k)_{xx}, \\ \alpha_l^k (P^k)_x &= -m^k\, g + \mu_l (u_l^k)_{xx}, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0, T_0), \end{cases} \tag{2.68}$$

com os dados iniciais e as condições de fronteira:

$$(m^k, n^k)(x, 0) = (m_0, n_0)(x) \quad \text{para} \quad x \in [0, 1] \tag{2.69}$$

e

$$(u_l^k, u_g^k)(0, t) = (u_l^k, u_g^k)(1, t) = (0, 0) \quad \text{para} \quad t \geqslant 0, \tag{2.70}$$

para $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\alpha_g^k = \alpha_g(m^k, n^k)$, $\alpha_l^k = \alpha_l(m^k, n^k)$ e $P^k = P(m^k, n^k)$.

2.3.2 Boa definição da sequência

Nesta subseção, dedicamos a mostrar os espaços nos quais n^k, m^k, u_l^k e u_g^k estão definidas e que $u_g^k, u_l^k \in S$ [ver eq. (2.67)] com $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

É imediato que para $j = 0$ o resultado é verdadeiro. De fato,

$$(u_l^0, u_g^0) = (0, 0) \in S.$$

Suponha que o resultado vale para $j = k - 1$, isto é, $(u_g^{k-1}, u_l^{k-1}) \in S$. Então

$$u_i^{k-1} \in C([0, T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad i = l, g. \tag{2.71}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $r > 1$ e $i = l, g$.

Lema 2.12. *Dados $u_g^{k-1}, u_l^{k-1} \in C([0,T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r})$, então existem n^k e m^k satisfazendo $(2.68)_1$ e $(2.68)_2$, respectivamente, tais que*

$$m^k, n^k \in C([0,T_0]; W^{1,r}) \tag{2.72}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$.

Demonstração. De $(2.68)_1$, temos

$$n_t^k(x,t) + \left(n_x^k\, u_g^{k-1}\right)(x,t) = -\left(n^k u_{g,x}^{k-1}\right)(x,t).$$

Pela Regra da Cadeia (Proposição 1.47), resulta

$$\begin{aligned}\frac{dn^k}{d\tau}(X_g^k(\tau;x,t),\tau) &= n_\tau^k(X^k(\tau;x,t),\tau) + n_{X_g^k}^k(X_g^k(\tau;x,t),\tau)\,\frac{dX_g^k}{d\tau}(\tau;x,t)\\ &= -n^k(X_g^k(\tau;x,t),\tau)\; u_{g,X_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau),\end{aligned}$$

onde X_g^k é a solução da equação característica:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_g^k(\tau;x,t)}{d\tau} & = u_g^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau), \quad \tau \in (0,T_0],\\ X_g^k(t;x,t) & = x \end{cases} \tag{2.73}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e $(x,t) \in [0,1] \times [0,T_0]$. O que implica

$$\frac{dn^k}{d\tau}(X_g^k(\tau;x,t),\tau) = -n^k(X_g^k(\tau;x,t),\tau)\; u_{g,X_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)$$

e resolvendo a EDO acima, obtemos

$$n^k(x,t) = n_0\left(X_g^k(0;x,t)\right)\exp\left\{-\int_0^t u_{g,X_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)\,d\tau\right\}. \tag{2.74}$$

Similarmente, temos

$$m^k(x,t) = m_0\left(X_l^k(0;x,t)\right)\exp\left\{-\int_0^t u_{l,X_l^k}^{k-1}(X_l^k(\tau;x,t),\tau)\,d\tau\right\} \tag{2.75}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $(x,t) \in [0,1]\times[0,T_0]$, onde X_l^k é a solução de (2.73) com u_g^{k-1} substituido por u_l^{k-1}.

Para todo $t \in [0,T_0]$, temos

$$\int_0^t u_{g,x}^{k-1}(x,s)\,ds \leqslant \int_0^{T_0} \|u_{g,x}^{k-1}(s)\|_{L^\infty} ds,$$

e segue de (2.74) que

$$\inf_{x\in[0,1]} n_0(x)\exp\left\{-\int_0^{T_0}\|u_{g,x}^{k-1}(s)\|_{L^\infty}ds\right\} \leqslant n^k(x,t) \leqslant \sup_{x\in[0,1]} n_0(x)\exp\left\{\int_0^{T_0}\|u_{g,x}^{k-1}(s)\|_{L^\infty}ds\right\}. \tag{2.76}$$

De maneira análoga, para m^k,

$$\inf_{x\in[0,1]} m_0(x)\exp\left\{-\int_0^{T_0} \|u_{l,x}^{k-1}(s)\|_{L^\infty}ds\right\} \leqslant m^k(x,t) \leqslant \sup_{x\in[0,1]} m_0(x)\exp\left\{\int_0^{T_0} \|u_{l,x}^{k-1}(s)\|_{L^\infty}ds\right\} \tag{2.77}$$

para todo $(x,t)\in[0,1]\times[0,T_0]$ e $k\in\mathbb{N}$. Donde decorre,

$$m^k, n^k \in L^\infty\left([0,1]\times[0,T_0]\right) \quad \forall k\in\mathbb{N} \tag{2.78}$$

e por consequência,

$$m^k, n^k \in L^\infty\left([0,T_0];L^r\right) \quad \forall k\in\mathbb{N} \text{ e } r>1. \tag{2.79}$$

Derivando (2.74) com respeito a x e usando a Regra da Cadeia (Proposição 1.47), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} n_x^k(x,t) &= \frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k}\,\frac{\partial X_g^k}{\partial x}(0;x,t)\,\exp\left\{-\int_0^t u_{g,X_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)d\tau\right\} \\ &+ \underbrace{n_0(X_g^k(0;x,t))\,\exp\left\{-\int_0^t u_{g,X_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)d\tau\right\}}_{n^k(x,t)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_0^t u_{g,X_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)d\tau\right). \end{aligned} \tag{2.80}$$

Sabendo que $X_g^k(\tau;x,t)$ é solução de (2.73), então pelo Teorema 1.2 temos que $X_g^k(\tau;x,t)$ é única e suas derivadas parciais com respeito a τ, x, t são contínuas em $[0,T_0]\times[0,1]\times[0,T_0]$. Além disso,

$$\frac{\partial^2 X_g^k}{\partial\tau\,\partial x}(\tau;x,t) = \frac{\partial^2 X_g^k}{\partial x\,\partial\tau}(\tau;x,t) \tag{2.81}$$

para todo $(\tau;x,t)\in[0,T_0]\times[0,1]\times[0,T_0]$ e $k\in\mathbb{N}$.

Logo, por $(2.73)_1$ e (2.81), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial X_g^k}{\partial x}(\tau;x,t)\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[u_g^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)\right] = u_{g,X_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)\,\frac{\partial X_g^k}{\partial x}(\tau;x,t) \\ \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial X_g^k}{\partial x}(\tau;x,t)\right] &= u_{g,X_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)\,\frac{\partial X_g^k}{\partial x}(\tau;x,t) \end{aligned}$$

e daí segue-se

$$\frac{\partial X_g^k}{\partial x}(\tau;x,t) = \exp\left\{\int_t^\tau u_{g,X_g^k}^{k-1}(X_g^k(s;x,t),s)ds\right\}, \tag{2.82}$$

pois $\dfrac{\partial X_g^k}{\partial x}(t;x,t)=1$, para todo $k\in\mathbb{N}$.

Utilizando (2.82) e a Proposição 1.48 no 1º e 2º termos do lado direito da igualdade (2.80), respectivamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
n_x^k(x,t) = {} & \frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k} \exp\left\{-2\int_0^t u^{k-1}_{g,X_g^k}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)d\tau\right\} \\
& - n^k(x,t)\int_0^t u^{k-1}_{g,X_g^k X_g^k}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)\,\frac{\partial X_g^k(\tau;x,t))}{\partial x}d\tau.
\end{aligned} \tag{2.83}
$$

De maneira análoga, para m^k, temos

$$
\begin{aligned}
m_x^k(x,t) = {} & \frac{dm_0(X_l^k(0;x,t))}{dX_l^k} \exp\left\{-2\int_0^t u^{k-1}_{l,X_l^k}(X_l^k(\tau;x,t),\tau)d\tau\right\} \\
& - m^k(x,t)\int_0^t u^{k-1}_{l,X_l^k X_l^k}(X_l^k(\tau;x,t),\tau)\,\frac{\partial X_l^k(\tau;x,t))}{\partial x}d\tau.
\end{aligned} \tag{2.84}
$$

De (2.83), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant \int_0^1 & \left(\left|\frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k}\right| \exp\left\{-2\int_0^t u^{k-1}_{g,X_g^k}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)d\tau\right\}\right. \\
& \left. + |n^k(x,t)|\int_0^t |u^{k-1}_{g,X_g^k X_g^k}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)|\left|\frac{\partial X_g^k(\tau;x,t))}{\partial x}\right|d\tau\right)^r dx.
\end{aligned}
$$

e por (2.78) resulta que

$$
\begin{aligned}
\|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant \int_0^1 & \left(\left|\frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k}\right| \exp\left\{-2\int_0^t u^{k-1}_{g,X_g^k}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)d\tau\right\}\right. \\
& \left. + \|n^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])}\int_0^t |u^{k-1}_{g,X_g^k X_g^k}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)|\left|\frac{\partial X_g^k(\tau;x,t))}{\partial x}\right|d\tau\right)^r dx.
\end{aligned} \tag{2.85}
$$

para todo $t \in [0,T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$.

Agora,

- Se $t < \tau$, então

$$
\int_t^\tau u^{k-1}_{g,x}(x,s)ds \leqslant \int_t^\tau \|u^{k-1}_{g,x}(s)\|_{L^\infty}ds;
$$

- Se $\tau < t$, então

$$
-\int_\tau^t u^{k-1}_{g,x}(x,s)ds \leqslant \int_\tau^t \|u^{k-1}_{g,x}(s)\|_{L^\infty}ds.
$$

Das duas desigualdades acima e de (2.82), concluímos

$$
\left|\frac{\partial X_g^k(\tau;x,t)}{\partial x}\right| \leqslant \exp\left\{\int_t^\tau \|u^{k-1}_{g,X_g^k}(s)\|_{L^\infty}ds\right\} \tag{2.86}
$$

e além disso,

$$-2\int_0^t u_{g,x}^{k-1}(x,s)ds \leqslant \int_0^{T_0} \|u_{g,x}^{k-1}(s)\|_{L^\infty}ds \tag{2.87}$$

para todo $(x,t) \in [0,1\,] \times [0,T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$.

Segue de (2.85), (2.86) e (2.87) que

$$\begin{aligned}
\|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant & \int_0^1 \left(\exp\left\{ \int_0^{T_0} \|u_{g,X_g^k}^{k-1}(s)\|_{L^\infty} ds \right\} \left| \frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k} \right| \right. \\
& \left. +\exp\left\{ \int_t^{\tau} \|u_{g,X_g^k}^{k-1}(s)\|_{L^\infty} ds \right\} \|n^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \int_0^t |u_{g,X_g^kX_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)|\, d\tau \right)^r dx \\
& \leqslant \left(\exp\left\{ \int_0^{T_0} \|u_{g,X_g^k}^{k-1}(t)\|_{L^\infty} dt \right\} \right)^r \int_0^1 \left(\left| \frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k} \right| \right. \\
& \left. + \|n^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \int_0^t |u_{g,X_g^kX_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)| d\tau \right)^r dx.
\end{aligned}$$

E usando o Lema 1.39 obtemos

$$\begin{aligned}
\|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant & \left(2\,\exp\left\{ \int_0^{T_0} \|u_{g,X_g^k}^{k-1}(t)\|_{L^\infty} dt \right\} \right)^r \int_0^1 \left(\left| \frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k} \right|^r \right. \\
& \left. + \left(\|n^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \right)^r \left(\int_0^t |u_{g,X_g^kX_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)|\, d\tau \right)^r \right) dx
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$.

Por (2.71), tem-se

$$u_g^{k-1}(t) \in W^{2,r} \Rightarrow u_{g,xx}^{k-1}(t) \in L^r \Rightarrow |u_{g,xx}^{k-1}|^r(t) \in L^1 \quad \forall\, t \in [0,T_0],\ k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad r > 1$$

e usando a função $\eta(x) = 1$, para todo $x \in [0,1]$, resulta da Desigualdade de Jensen (Proposição 1.43) que

$$\begin{aligned}
\|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant & \left(2\,\exp\left\{ \int_0^{T_0} \|u_{g,X_g^k}^{k-1}(t)\|_{L^\infty} dt \right\} \right)^r \left(\int_0^1 \left| \frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k} \right|^r dx \right. \\
& \left. + \left(\|n^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \right)^r \overline{C} \int_0^1 \int_0^t |u_{g,X_g^kX_g^k}^{k-1}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)|^r d\tau\, dx \right) \quad \forall t \in [0,T_0], \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

e onde $\overline{C}$ é uma constante positiva independente de t e k.

Empregando o fato que o fluxo preserva a medida e pelo Teorema de Fubini (Teorema 1.49), obtém-se

$$\begin{aligned}
\|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant & \left(2\,\exp\left\{ \int_0^{T_0} \|u_{g,x}^{k-1}(t)\|_{L^\infty} dt \right\} \right)^r \left(\|n_{0,x}\|_{L^r}^r \right. \\
& \left. + \left(\|n^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \right)^r \overline{C} \int_0^t \|u_{g,xx}^{k-1}(\tau)\|_{L^r}^r d\tau \right)
\end{aligned} \tag{2.88}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$. E dado que $n_0 \in W^{1,r}$(hipótese geral) e $u_g^{k-1} \in C\left([0, T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}\right)$ [Ver (2.71)], concluímos de (2.88) que

$$n_x^k \in L^\infty([0, T_0]; L^r) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad r > 1. \tag{2.89}$$

Assim, por (2.79) e (2.89), obtemos

$$n^k \in L^\infty([0, T_0]; W^{1,r}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad r > 1$$

e similarmente,

$$m^k \in L^\infty([0, T_0]; W^{1,r}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad r > 1.$$

Agora, observe que as hipóteses do Lema 2.6 são todas satisfeitas, pois: $m_0, n_0 \in W^{1,r}$(hipótese geral), vale $u_l^{k-1}, u_g^{k-1} \in C\left([0, T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}\right)$[Ver (2.71)] e, por (2.74) e (2.75), n^k e m^k satisfazem as equações $(2.68)_1$ e $(2.68)_2$, respectivamente, com $n^k, m^k \in L^\infty([0, T_0]; W^{1,r})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Donde resulta

$$n^k, m^k \in C\left([0, T_0]; W^{1,r}\right)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$. □

Lema 2.13. *Para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0, T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$:*

- *Sob a hipótese (2.1), temos*

$$\kappa_0 < \overline{C_1} \leqslant m^k \leqslant \frac{C_1 C_2}{\overline{C_1}}, \quad e \quad 0 \leqslant n^k \leqslant \frac{C_1 C_3}{\overline{C_1}} \tag{2.90}$$

onde $\overline{C_1} \in (\kappa_0, C_1)$ e $T_0 \leqslant T_1$.

- *Sob a hipótese (2.2), temos*

$$0 \leqslant m^k \leqslant \overline{C_4} < \kappa_0, \quad e \quad 0 \leqslant n^k \leqslant \frac{\overline{C_4} C_5}{C_4} \tag{2.91}$$

onde $\overline{C_4} \in (C_4, \kappa_0)$ e $T_0 \leqslant \overline{T_1}$.

- *Sob a hipótese (2.3), temos*

$$0 \leqslant m^k \leqslant C_6 e, \quad e \quad \frac{C_7}{e} \leqslant n^k \leqslant C_8 e \tag{2.92}$$

onde $T_0 \leqslant \overline{\overline{T_1}}$.

Além disso, existe uma constante $C > 0$ independente de k, T_0, A_μ e A_1 tal que

$$\begin{cases} \left\| \dfrac{\partial P(m^k, n^k)}{\partial m^k} \right\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C, \qquad \left\| \dfrac{\partial P(m^k, n^k)}{\partial n^k} \right\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C \\ \|m^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C \quad e \quad \|n^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C \end{cases} \tag{2.93}$$

onde T_0 satisfaz (2.4).

Demonstração. Já que $u_l^{k-1}, u_g^{k-1} \in S$ [ver pág. 49, eq. (2.67)], então

$$\|u_{i,x}^{k-1}(t)\|_{L^\infty} \leqslant C_I \|u_{i,x}^{k-1}(t)\|_{W^{1,1}} \leqslant C_I \|u_i^{k-1}(t)\|_{W^{2,1}} \leqslant C_I A_\mu A_1 \tag{2.94}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $i = g, l$ e onde C_I uma constante positiva de imersão.

Sob a hipótese (2.1), temos

$$C_1 \exp\{-C_I A_\mu A_1 T_0\} \leqslant m^k \leqslant C_2 \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\}, \quad \text{e} \quad 0 \leqslant n^k \leqslant C_3 \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\}$$

em $[0, 1] \times [0, T_0]$, onde utilizamos (2.76) , (2.77) e (2.94). Nesse caso, como

$$T_0 \leqslant \frac{1}{C_I A_\mu A_1} \log\left(\frac{C_1}{\overline{C_1}}\right) \triangleq T_1 \tag{2.95}$$

para $\overline{C_1} \in (\kappa_0, C_1)$, obtemos

$$\kappa_0 < \overline{C_1} \leqslant m^k \leqslant \frac{C_1 C_2}{\overline{C_1}}, \quad \text{e} \quad 0 \leqslant n^k \leqslant \frac{C_1 C_3}{\overline{C_1}} \quad \text{em } [0, 1] \times [0, T_0],$$

onde $T_0 \leqslant T_1$.

Sob a hipótese (2.2), temos

$$0 \leqslant m^k \leqslant C_4 \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\}, \quad \text{e} \quad 0 \leqslant n^k \leqslant C_5 \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\}$$

em $[0, 1] \times [0, T_0]$, onde utilizamos (2.76) , (2.77) e (2.94). Nesse caso, como

$$T_0 \leqslant \frac{1}{C_I A_\mu A_1} \log\left(\frac{\overline{C_4}}{C_4}\right) \triangleq \overline{T_1} \tag{2.96}$$

para $\overline{C_4} \in (C_4, \kappa_0)$, então

$$0 \leqslant m^k \leqslant \overline{C_4} < \kappa_0, \quad \text{e} \quad 0 \leqslant n^k \leqslant \frac{\overline{C_4} C_5}{C_4} \quad \text{em } [0, 1] \times [0, T_0],$$

onde $T_0 \leqslant \overline{T_1}$.

Sob a hipótese (2.3), temos

$$0 \leqslant m^k \leqslant C_6 \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\}, \quad \text{e} \quad C_7 \exp\{-A_\mu A_1 T_0\} \leqslant n^k \leqslant C_8 \exp\{A_\mu A_1 T_0\}$$

em $[0,1]\times[0,T_0]$, onde utilizamos (2.76) , (2.77) e (2.94). Nesse caso, como

$$T_0 \leqslant \frac{1}{C_I A_\mu A_1} \triangleq \overline{\overline{T_1}}, \tag{2.97}$$

então

$$0 \leqslant m^k \leqslant C_6 e, \quad \text{e} \quad \frac{C_7}{e} \leqslant n^k \leqslant C_8 e \quad \text{em } [0,1]\times[0,T_0],$$

onde $T_0 \leqslant \overline{\overline{T_1}}$.

Segue de (2.90), (2.91) e (2.92) que m^k e n^k são funções limitadas em $[0,1]\times[0,T_0]$. Daí, existe $C>0$ tal que

$$\|m^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C \quad \text{e} \quad \|n^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C$$

onde T_0 satisfaz (2.95), (2.96) ou (2.97) e C é uma constante positiva que é independente de k, T_0, A_μ e A_1.

De $P(m^k,n^k) = a_g^2\rho_g(m^k,n^k)$ e de (2.5), resulta

$$\frac{\partial P(m^k,n^k)}{\partial m^k} = \frac{a_l^2}{2}\left(1+\frac{b^k}{\sqrt{(b^k)^2+\frac{4c^k a_g^2}{a_l^2}}}\right).$$

E, já que $b^k \leqslant \sqrt{(b^k)^2+\dfrac{4c^k a_g^2}{a_l^2}}$, então

$$\frac{b^k}{\sqrt{(b^k)^2+\frac{4c^k a_g^2}{a_l^2}}} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial P(m^k,n^k)}{\partial m^k}\right| \leqslant a_l^2$$

para todo $(x,t)\in[0,1]\times[0,T_0]$. Assim, obtemos a seguinte estimativa

$$\left\|\frac{\partial P(m^k,n^k)}{\partial m^k}\right\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C$$

onde T_0 satisfaz (2.95), (2.96) ou (2.97) e C é uma constante positiva que é independente de k, T_0, A_μ e A_1.

Além disso, de $P(m^k,n^k) = a_g^2\rho_g(m^k,n^k)$ e de (2.5), obtemos

$$\frac{\partial P(m^k,n^k)}{\partial n^k} = \frac{a_g^2}{2}\left(1+\frac{b^k+2\kappa_0}{\sqrt{(b^k)^2+\frac{4c^k a_g^2}{a_l^2}}}\right).$$

Pelo Lema 2.7, temos

$$\frac{1}{\delta} \geqslant \frac{1}{\sqrt{(b^k)^2+\frac{4c^k a_g^2}{a_l^2}}} > 0.$$

E sob as hipóteses (2.1)-(2.3) as funções m^k e n^k são limitadas em $[0,1] \times [0,T_0]$, então

$$b^k + 2\kappa_0 = m^k + \frac{a_g^2}{a_l^2} n^k + \kappa_0$$

é limitada em $[0,1] \times [0,T_0]$, isto é, existe $\theta > 0$ tal que

$$|b^k + 2\kappa_0| \leqslant \theta \quad \text{ em } [0,1] \times [0,T_0]. \tag{2.98}$$

Logo,

$$\left| \frac{\partial P(m^k, n^k)}{\partial n^k} \right| \leqslant \frac{a_g^2}{2} \left(1 + \frac{|b^k + 2\kappa_0|}{\left| \sqrt{(b^k)^2 + \frac{4c^k a_g^2}{a_l^2}} \right|} \right) \leqslant \frac{a_g^2}{2} \left(1 + \frac{\theta}{\delta} \right)$$

para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0,T_0]$ e daí, podemos obter a seguinte estimativa

$$\left\| \frac{\partial P(m^k, n^k)}{\partial n^k} \right\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C$$

onde T_0 satisfaz (2.95), (2.96) ou (2.97) e C é uma constante positiva que é independente de k, T_0, A_μ e A_1.

Portanto, existe C é uma constante positiva independente de k, T_0, A_μ e A_1 tal que

$$\begin{cases} \left\| \dfrac{\partial P(m^k, n^k)}{\partial m^k} \right\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C, \qquad \left\| \dfrac{\partial P(m^k, n^k)}{\partial n^k} \right\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C \\ \|m^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C \quad \text{e} \quad \|n^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])} \leqslant C \end{cases}$$

onde T_0 satisfaz (2.95), (2.96) ou (2.97).

□

Lema 2.14. *Se $m^k, n^k \in C([0,T_0]; W^{1,r})$ $r > 1$, então existem u_g^k e u_l^k satisfazendo $(2.68)_3$ e $(2.68)_4$, respectivamente, tais que*

$$u_g^k, u_l^k \in S$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Com um argumento análogo ao utilizado em (2.43), obtemos

$$u_g^k(x,t) = \frac{1}{\mu_g} \int_0^x \int_0^y \left(\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g \right)(\xi, t)\, d\xi dy - \frac{1}{\mu_g} x \int_0^1 \int_0^y \left(\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g \right)(\xi, t)\, d\xi dy$$

e

$$u_l^k(x,t) = \frac{1}{\mu_l}\int_0^x\int_0^y \left(\alpha_l^k P_\xi^k + m^k g\right)(\xi,t)\, d\xi dy - \frac{1}{\mu_l} x \int_0^1\int_0^y \left(\alpha_l^k P_\xi^k + m^k g\right)(\xi,t)\, d\xi dy$$

para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0,T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$.

Note que u_g^k e u_l^k satisfazem $(2.68)_3$ e $(2.68)_4$, respectivamente, sendo que $(u_g^k, u_l^k)(0,t) = (u_g^k, u_l^k)(1,t) = (0,0)$, para todo $t \in [0,T_0]$. Do Lema 2.13 [ver $(2.93)_1$], resulta

$$\left|\frac{\partial P(m^k,n^k)}{\partial n^k}\right| \leqslant C \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial P(m^k,n^k)}{\partial m^k}\right| \leqslant C \quad \forall (x,t) \in [0,1]\times[0,T_0],\ k \in \mathbb{N}$$

e além disso, como $m^k, n^k \in C([0,T_0]; W^{1,r})$, segue dos Lemas 2.10 e 2.11 que

$$u_g^k \in C([0,T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad r > 1$$

e similarmente, temos

$$u_l^k \in C([0,T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad r > 1.$$

Portanto,

$$u_g^k, u_l^k \in C([0,T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \tag{2.99}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$.

Agora, vamos obter as estimativas para $\|u_i^k\|_{C([0,T_0];W^{2,1})}$ com $i = l, g$. Derivando $u_g^k(x,t)$ com relação a variável x, obtém-se

$$u_{g,x}^k(x,t) = \frac{1}{\mu_g}\int_0^x (\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g)(\xi,t)\, d\xi - \frac{1}{\mu_g}\int_0^1\int_0^y (\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g)(\xi,t)\, d\xi dy \tag{2.100}$$

para todo $(x,t) \in [0,1] \times 0, T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$. Daí segue-se que

$$\begin{aligned}
\|u_{g,x}^k(t)\|_{L^1} &= \int_0^1 |u_{g,x}^k(x,t)|\, dx \leqslant \frac{1}{\mu_g}\int_0^1 \left(\left|\int_0^x (\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g)(\xi,t)\, d\xi\right|\right) dx + \\
&+ \frac{1}{\mu_g}\int_0^1 \left(\left|\int_0^1\int_0^y (\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g)(\xi,t)\, d\xi dy\right|\right) dx \\
&\leqslant \frac{1}{\mu_g}\int_0^1 \left|\int_0^x (\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g)(\xi,t) d\xi\right| dx + \frac{1}{\mu_g}\left|\int_0^1\int_0^y (\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g)(\xi,t) d\xi dy\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\mu_g}\left(\int_0^1\int_0^x |\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g|(\xi,t)\, d\xi dx + \int_0^1\int_0^y |\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g|(\xi,t) d\xi dy\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\mu_g}\left(\int_0^1\int_0^1 |\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g|(\xi,t)\, d\xi dx + \int_0^1\int_0^1 |\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g|(\xi,t) d\xi dy\right) \\
&= \frac{2}{\mu_g}\|(\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g)(t)\|_{L^1} \quad \Longrightarrow \|u_{g,x}^k(t)\|_{L^1} \leqslant \frac{2}{\mu_g}\|(\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g)(t)\|_{L^1} \quad \forall t \in [0,T_0].
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.35), obtemos

$$\|u_g^k(t)\|_{W^{1,1}} \leqslant \frac{2}{\mu_g}\|(\alpha_g^k P_\xi^k + n^k g)(t)\|_{L^1}$$

e por $(2.68)_3$, temos

$$\|(u_g^k)_{xx}(t)\|_{L^1} = \frac{1}{\mu_g}\|(\alpha_g^k P_x^k + n^k g)(t)\|_{L^1}$$

para todo $t \in [0, T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo, pela Definição 1.37, resulta

$$\|u_g^k(t)\|_{W^{2,1}} \leqslant \frac{5}{\mu_g}\|(\alpha_g^k P_x^k + n^k g)(t)\|_{L^1} \leqslant \frac{5}{\mu_g}\left(\|(\alpha_g^k P_x^k)(t)\|_{L^1} + g\|n^k(t)\|_{L^1}\right), \tag{2.101}$$

para todo $t \in [0, T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$.

Como $P^k = P(m^k, n^k)$ [ver pág. 11, eq. (5)], derivando P^k com relação x e utilizando (2.5), obtemos

$$P_x^k = \frac{\partial P}{\partial m^k}\, m_x^k + \frac{\partial P}{\partial n^k}\, n_x^k.$$

E usando $(2.93)_1$, deduzimos

$$|P_x^k| \leqslant \left|\frac{\partial P}{\partial m^k}\right| |m_x^k| + \left|\frac{\partial P}{\partial n^k}\right| |n_x^k| \leqslant C\left(|m_x^k| + |n_x^k|\right). \tag{2.102}$$

Já que $|\alpha_g^k| \leqslant 1$, então

$$\|(\alpha_g^k P_x^k)(t)\|_{L^1} = \int_0^1 (|\alpha_g^k|\,|P_x^k|)(x,t)dx \leqslant \int_0^1 |P_x^k|(x,t)dx \leqslant C\left(\|m_x^k(t)\|_{L^1} + \|n_x^k(t)\|_{L^1}\right)$$

o que acarreta

$$\|(\alpha_g^k P_\xi^k)(t)\|_{L^1} \leqslant C\left(\|m_x^k(t)\|_{L^1} + \|n_x^k(t)\|_{L^1}\right) \quad \forall t \in [0, T_0]. \tag{2.103}$$

Por (2.101) e (2.103), segue-se

$$\begin{aligned}\|u_g^k(t)\|_{W^{2,1}} &\leqslant \frac{5}{\mu_g}\left[C\left(\|m_x^k(t)\|_{L^1} + \|n_x^k(t)\|_{L^1}\right) + g\|n^k(t)\|_{L^1}\right] \\ &\leqslant 5A_\mu\left[C\left(\|m_x^k(t)\|_{L^1} + \|n_x^k(t)\|_{L^1}\right) + g\|n_0\|_{L^1}\right]\end{aligned} \tag{2.104}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, onde temos usado o fato que $\int_0^1 n^k(x,t)dx = \int_0^1 n_0(x)dx$ (isso resulta de $(2.68)_1$). Usando um raciocínio análogo ao anterior, temos

$$\|u_l^k(t)\|_{W^{2,1}} \leqslant 5A_\mu\left[C\left(\|m_x^k(t)\|_{L^1} + \|n_x^k(t)\|_{L^1}\right) + g\|m_0\|_{L^1}\right] \tag{2.105}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, onde temos usado o fato que $\int_0^1 m^k(x,t)dx = \int_0^1 m_0(x)dx$ (isso resulta de $(2.68)_2$).

Por fim, vamos obter estimativas L^1 para n_x^k e m_x^k. Em virtude de (2.83), temos

$$\int_0^1 |n_x^k(x,t)|\,dx \leqslant \int_0^1 \left(\left| \frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k} \right| \exp\left\{ -2 \int_0^t u^{k-1}_{g,X_g^k}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)d\tau \right\} \right) dx$$
$$+ \int_0^1 \left(|n^k(x,t)| \int_0^t |u^{k-1}_{g,X_g^k X_g^k}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)| \left| \frac{\partial X_g^k(\tau;x,t))}{\partial x} \right| d\tau \right) dx.$$

Utilizando (2.87), (2.86), $u_g^{k-1} \in S$ e das imersões $W^{2,1} \subset W^{1,1} \subset L^\infty$ no lado direito da desigualdade acima, obtemos

$$\int_0^1 |n_x^k(x,t)|\,dx \leqslant \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\} \int_0^1 \left| \frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k} \right| dx$$
$$+ \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\} |n^k(x,t)| \int_0^1 \int_0^t |u^{k-1}_{g,X_g^k X_g^k}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)|\,d\tau dx$$

e por $(2.93)_2$, temos

$$\int_0^1 |n_x^k(x,t)|\,dx \leqslant \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\} \int_0^1 \left| \frac{dn_0(X_g^k(0;x,t))}{dX_g^k} \right| dx$$
$$+ \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\} C \int_0^1 \int_0^t |u^{k-1}_{g,X_g^k X_g^k}(X_g^k(\tau;x,t),\tau)|\,d\tau dx.$$

Agora, utilizando o Teorema de Fubini (Teorema 1.49) e o fato de que o fluxo preserva a medida, obtemos

$$\|n_x^k(t)\|_{L^1} \leqslant\ \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\} \|n_{0,x}\|_{L^1} + \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\} C \int_0^t \int_0^1 |u^{k-1}_{g,xx}(x,\tau)|\,dx d\tau.$$

Para todo $t \in [0,T_0]$ e $u_g^{k-1} \in S$, tem-se

$$\int_0^t \int_0^1 |u^{k-1}_{g,xx}(x,s)|\,dx ds \leqslant \int_0^{T_0} \|u_g^{k-1}(s)\|_{W^{2,1}}\,ds \leqslant A_\mu A_1 T_0,$$

logo,

$$\|n_x^k(t)\|_{L^1} \leqslant\ \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\} \left(\|n_{0,x}\|_{L^1} + C A_\mu A_1 T_0 \right), \quad \text{para todo } t \in [0,T_0]. \tag{2.106}$$

Similarmente, temos

$$\|m_x^k(t)\|_{L^1} \leqslant\ \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\} \left(\|m_{0,x}\|_{L^1} + C A_\mu A_1 T_0 \right). \quad \text{para todo } t \in [0,T_0]. \tag{2.107}$$

Já que $T_2 = \dfrac{1}{A_\mu A_1}$ e T_0 satisfaz

$$\begin{aligned} T_0 &\leqslant \min\{T_1, T_2\} \quad \text{pela hipótese (2.1)}, \\ T_0 &\leqslant \min\{\overline{T_1}, T_2\} \quad \text{pela hipótese (2.2)}, \\ T_0 &\leqslant \min\{\overline{\overline{T_1}}, T_2\} \quad \text{pela hipótese (2.3)}, \end{aligned}$$

e temos

$$T_0 \leqslant T_2 \quad \Longleftrightarrow \quad A_\mu A_1 T_0 \leqslant 1$$

isso implica, por (2.106) e (2.107), que

$$\|n_x^k(t)\|_{L^1} \leqslant e^{C_I}(\|n_{0,x}\|_{L^1} + C) \quad \text{e} \quad \|m_x^k(t)\|_{L^1} \leqslant e^{C_I}(\|m_{0,x}\|_{L^1} + C).$$

Logo,

$$\|n_x^k(t)\|_{L^1} + \|m_x^k(t)\|_{L^1} \leqslant e^{C_I}(\|n_{0,x}\|_{L^1} + \|m_{0,x}\|_{L^1} + 2C) \tag{2.108}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, onde C_I é uma constante positiva de imersão e uma escolha apropriada de C independente de k, A_μ, A_1 e T_0.

Substituindo (2.108) em (2.104) e (2.105), obtemos

$$\|u_g^k(t)\|_{W^{2,1}} \leqslant A_\mu \left[5Ce^{C_I}(\|n_{0,x}\|_{L^1} + \|m_{0,x}\|_{L^1} + 2C) + 5g\|n_0\|_{L^1}\right]$$

e

$$\|u_l^k(t)\|_{W^{2,1}} \leqslant A_\mu \left[5Ce^{C_I}(\|n_{0,x}\|_{L^1} + \|m_{0,x}\|_{L^1} + 2C) + 5g\|m_0\|_{L^1}\right]$$

e sendo $A_1 > 0$ uma constante independente de k, μ_l e μ_g tal que

$$5Ce^{C_I}(\|m_{0,x}\|_{L^1} + \|n_{0,x}\|_{L^1} + 2C) + 5g\|m_0\|_{L^1} + 5g\|n_0\|_{L^1} \leqslant A_1,$$

obtemos

$$\|u_g^k(t)\|_{W^{2,1}} \leqslant A_\mu A_1 \quad \text{e} \quad \|u_l^k(t)\|_{W^{2,1}} \leqslant A_\mu A_1$$

para todo $t \in [0, T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$.

Assim, para as hipóteses (2.1)-(2.3), temos

$$\|u_g^k\|_{C([0,T_0];W^{2,1})} \leqslant A_\mu A_1 \quad \text{e} \quad \|u_l^k\|_{C([0,T_0];W^{2,1})} \leqslant A_\mu A_1, \tag{2.109}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e, por (2.99) e (2.109), concluímos que

$$(u_g^j, u_l^j) \in S \qquad \forall j = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

□

Sabendo que

$$u_l^{k-1}, u_g^{k-1} \in C([0,T]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \quad \text{e} \quad m^k, n^k \in C([0,T]; W^{1,r}),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$. Então, da imersão $W^{2,r} \subset W^{1,r}$ e do Corolário 1.31, segue-se

$$m^k u_l^{k-1} \in C([0,T]; W^{1,r}) \quad \text{e} \quad n^k u_g^{k-1} \in C([0,T]; W^{1,r}).$$

E das equações $(2.68)_1$ e $(2.68)_2$, resulta que

$$m_t^k, n_t^k \in C([0,T]; L^r) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad r > 1.$$

Portanto,

$$(m^k, n^k) \in C\left([0,T_0]; W^{1,r}\right) \cap C^1\left([0,T_0]; L^r\right) \quad \text{e} \quad (u_g^k, u_l^k) \in C\left([0,T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}\right)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$.

2.3.3 Limitação das sequências

Nesta subseção, vamos provar a limitação uniforme das sequências (m^k, n^k) e (u_l^k, u_g^k) em $C\left([0,T_0]; W^{1,r}\right)$ e $C\left([0,T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}\right)$, respectivamente, com $r > 1$.

Lema 2.15. *As sequências (m^k, n^k) e (u_l^k, u_g^k) são uniformemente limitadas em $C\left([0,T_0]; W^{1,r}\right)$ e $C\left([0,T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}\right)$, respectivamente, com $r > 1$.*

Demonstração. Com um argumento análogo ao utilizado para provar (2.49), obtemos

$$\|u_g^k(t)\|_{W^{1,r}} \leqslant \overline{C_\mu}\, \|(\alpha_g^k P_x^k + n^k g)(t)\|_{L^r}$$

e por $(2.68)_3$,

$$\|(u_g^k)_{xx}(t)\|_{L^r} = \frac{1}{\mu_g}\|(\alpha_g^k P_x^k + n^k g)(t)\|_{L^r} \quad \forall t \in [0,T_0] \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Definição 1.37, resulta

$$\|u_g^k(t)\|_{W^{2,r}} \leqslant \overline{C_\mu}\, \|(\alpha_g^k P_x^k + n^k g)(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{C_\mu}\, \left(\|(\alpha_g^k P_x^k)(t)\|_{L^r} + g\|n^k(t)\|_{L^r}\right) \tag{2.110}$$

para todo $t \in [0,T_0]$, $r > 1$ e $\overline{C_\mu}$ é uma constante positiva que depende de μ_g e independente de k e t.

De $(2.93)_2$, temos

$$|n^k(x,t)| \leqslant C \quad \text{e} \quad |m^k(x,t)| \leqslant C$$

para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0,T_0]$. Isso implica que

$$\begin{cases} \|n^k(t)\|_{L^r}^r = \displaystyle\int_0^1 |n^k(x,t)|^r dx \leqslant C^r \\ \\ \|m^k(t)\|_{L^r}^r = \displaystyle\int_0^1 |m^k(x,t)|^r dx \leqslant C^r \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \|n^k(t)\|_{L^r} \leqslant C \\ \\ \|m^k(t)\|_{L^r} \leqslant C \end{cases}.$$

Logo,

$$\|n^k(t)\|_{L^r} \leqslant C \quad \text{e} \quad \|m^k(t)\|_{L^r} \leqslant C \tag{2.111}$$

para todo $t \in [0, T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$.

Por (2.102) e pelo Lema 1.39, resulta

$$|P_x^k|^r \leqslant C^r \left(|m_x^k| + |n_x^k|\right)^r \leqslant (2C)^r \left(|m_x^k|^r + |n_x^k|^r\right).$$

Donde decorre

$$\int_0^1 |P_x^k|^r(x,t)dx \leqslant \overline{C}\left(\|m_x^k(t)\|_{L^r}^r + \|n_x^k(t)\|_{L^r}^r\right),$$

para todo $t \in [0, T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$. Já que $|\alpha_g^k| \leqslant 1$, temos

$$\|(\alpha_g^k P_x^k)(t)\|_{L^r}^r = \int_0^1 (|\alpha_g^k||P_x^k|)^r(x,t)dx \leqslant \int_0^1 |P_x^k|^r(x,t)dx \leqslant \overline{C}\left(\|m_x^k(t)\|_{L^r}^r + \|n_x^k(t)\|_{L^r}^r\right).$$

Assim,

$$\|(\alpha_g^k P_x^k)(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{C}\left(\|m_x^k(t)\|_{L^r} + \|n_x^k(t)\|_{L^r}\right) \quad \forall t \in [0, T_0],\ k \in \mathbb{N} \text{ e } r > 1. \tag{2.112}$$

Por (2.110), (2.111) e (2.112), obtemos

$$\|u_g^k(t)\|_{W^{2,r}} \leqslant \overline{C_\mu}\ \left(\|m_x^k(t)\|_{L^r} + \|n_x^k(t)\|_{L^r}\right) + \overline{C_\mu}. \tag{2.113}$$

Similarmente,

$$\|u_l^k(t)\|_{W^{2,r}} \leqslant \overline{C_\mu}\ \left(\|m_x^k(t)\|_{L^r} + \|n_x^k(t)\|_{L^r}\right) + \overline{C_\mu} \tag{2.114}$$

onde $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$, $r > 1$ e $\overline{C_\mu}$ uma constante positiva dependendo dos coeficientes de viscosidade e independente de k e t.

Agora, vamos obter estimativas L^r de m_x^k e n_x^k, para todo $k \in \mathbb{N}$. De (2.88), temos

$$\begin{aligned}\|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant \left(2\ \exp\left\{\int_0^{T_0} \|u_{g,x}^{k-1}(t)\|_{L^\infty} dt\right\}\right)^r \Bigg(&\|n_{0,x}\|_{L^r}^r \\ &+ \ \left(\|n^k\|_{L^\infty([0,1]\times[0,T_0])}\right)^r \overline{C}\int_0^t \|u_{g,xx}^{k-1}(\tau)\|_{L^r}^r d\tau\Bigg).\end{aligned}$$

Aplicando $(2.93)_2$ e (2.94), obtemos

$$\|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant (2\ \exp\{C_I A_\mu A_1 T_0\})^r \left(\|n_{0,x}\|_{L^r}^r + (C)^r\, \overline{C}\int_0^t \|u_{g,xx}^{k-1}(\tau)\|_{L^r}^r d\tau\right)$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$.

Portanto,

$$\|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C_\mu} + \overline{C_\mu}\int_0^t \|u_{g,xx}^{k-1}(\tau)\|_{L^r}^r d\tau$$

e, similarmente,

$$\|m_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C_\mu} + \overline{C_\mu} \int_0^t \|u_{l,xx}^{k-1}(\tau)\|_{L^r}^r d\tau$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$, $r > 1$ e $\overline{C_\mu}$ uma constante positiva que depende de μ e independente de k e t.

Das desigualdades (2.113) e (2.114), obtemos

$$\|u_{i,xx}^{k-1}(t)\|_{L^r}^r \leqslant \|u_i^{k-1}(t)\|_{W^{2,r}}^r \leqslant \overline{C_\mu} \left(\|m_x^{k-1}(t)\|_{L^r}^r + \|n_x^{k-1}(t)\|_{L^r}^r\right) + \overline{C_\mu}, \quad i = g, l.$$

Daí deduz-se que

$$\|m_x^k(t)\|_{L^r}^r + \|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C_\mu} + \overline{C_\mu} \int_0^t \left(\|m_x^{k-1}(\tau)\|_{L^r}^r + \|n_x^{k-1}(\tau)\|_{L^r}^r\right) d\tau,$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$, $r > 1$ e $\overline{C_\mu}$ é constante positiva que depende de μ e independente de k e t.

Aplicando o Lema Gronwall Discreto (Lema 1.46) na desigualdade acima, existe uma constante $K > 0$, independente de k e t, tal que

$$\|m_x^k(t)\|_{L^r}^r + \|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant Ke^{Kt}, \quad \forall t \in [0, T_0] \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Daí segue-se que

$$\|m_x^k(t)\|_{L^r}^r + \|n_x^k(t)\|_{L^r}^r \leqslant Ke^{KT_0}, \tag{2.115}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$.

Por fim, empregando (2.111) e (2.115) na Definição 1.27, obtemos

$$\|m^k(t)\|_{W^{1,r}} \leqslant \underbrace{Ke^{KT_0} + C}_{\overline{K}} \quad \text{e} \quad \|n^k(t)\|_{W^{1,r}} \leqslant \underbrace{Ke^{KT_0} + C}_{\overline{K}}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$, onde $\overline{K}$ é constante positiva independente de t e k. Portanto,

$$\|m^k\|_{C([0,T_0];W^{1,r})} = \max_{t \in [0,T_0]} \|m^k(t)\|_{W^{1,r}} \leqslant \overline{K} \tag{2.116}$$

e

$$\|n^k\|_{C([0,T_0];W^{1,r})} = \max_{t \in [0,T_0]} \|n^k(t)\|_{W^{1,r}} \leqslant \overline{K} \tag{2.117}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, as sequências de funções $\left(m^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ e $\left(n^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ são uniformemente limitadas em $C([0, T_0]; W^{1,r})$ com $r > 1$.

Agora, substituindo (2.115) em (2.113) e (2.114), obtemos

$$\|u_g^k(t)\|_{W^{2,r}} \leqslant \underbrace{\overline{C_\mu}\ Ke^{KT_0} + \overline{C_\mu}}_{K_\mu} \quad \text{e} \quad \|u_l^k(t)\|_{W^{2,r}} \leqslant \underbrace{\overline{C_\mu}\ Ke^{KT_0} + \overline{C_\mu}}_{K_\mu}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$, onde K_μ é constante positiva independente de t e k. Portanto,

$$\|u_i^k\|_{C([0,T_0];W^{2,r})} = \max_{t\in[0,T_0]} \|u_i^k(t)\|_{W^{2,r}} \leqslant K_\mu, \quad \text{com} \quad i = g, l, \tag{2.118}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, as sequências de funções $\left(u_g^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ e $\left(u_l^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ são uniformemente limitadas em $C([0, T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r})$ com $r > 1$. □

2.3.4 Limites das sequências e o argumento da compacidade

Nesta subseção, destinamos a mostrar que as sequências n^k, m^k, u_l^k e u_g^k tem subsequências que convergem fraca - $\star$. Além disso, com o argumento da compacidade vamos provar que os limites de n^k, m^k são contínuas em $[0, 1] \times [0, T_0]$ e a convergência forte.

Proposição 2.16. *Existe uma subsequência* $(u_l^{k_i}, u_g^{k_i}, n^{k_i}, m^{k_i})_{i=1}^\infty$ *de* (u_l^k, u_g^k, n^k, m^k) *e* (u_l, u_g, n, m) *tais que*

$$\begin{aligned}
\left(u_g^{k_i}, u_l^{k_i}\right) &\rightharpoonup (u_g, u_l) && \textit{fraca - } \star \textit{ em } L^\infty([0, T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \\
\left(m^{k_i}, n^{k_i}\right) &\rightharpoonup (m, n) && \textit{fraca - } \star \textit{ em } L^\infty([0, T_0]; W^{1,r}) \\
\left(m_t^{k_i}, n_t^{k_i}\right) &\rightharpoonup (m_t, n_t) && \textit{fraca - } \star \textit{ em } L^\infty([0, T_0]; L^r)
\end{aligned} \tag{2.119}$$

quando $k_i \to \infty$, *onde* $(u_g, u_l) \in L^\infty([0, T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}), (m, n) \in L^\infty([0, T_0]; W^{1,r})$ *e* $(m_t, n_t) \in L^\infty([0, T_0]; L^r)$ *com* $r > 1$.

Demonstração. Sabemos do Lema 2.15 que as sequências de funções $\left(m^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ e $\left(u_g^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(u_l^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ são uniformemente limitadas em $C([0, T_0]; W^{1,r})$ e $C([0, T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r})$, respectivamente. Então, $\left(m^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ e $\left(u_g^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(u_l^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ são uniformemente limitadas em $L^\infty([0, T_0]; W^{1,r})$ e $L^\infty([0, T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r})$, respectivamente.

Pela Observação 1.51 e o Teorema 1.6, existem subsequências $\left(m^{k_i}\right)_{k_i\in\mathbb{N}}$, $\left(n^{k_i}\right)_{k_i\in\mathbb{N}}$ e $\left(u_g^{k_i}\right)_{k_i\in\mathbb{N}}$ e $\left(u_l^{k_i}\right)_{k_i\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\begin{aligned}
\left(u_g^{k_i}, u_l^{k_i}\right) &\rightharpoonup (u_g, u_l) && \text{fraca - } \star \text{ em } L^\infty([0, T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \\
\left(m^{k_i}, n^{k_i}\right) &\rightharpoonup (m, n) && \text{fraca - } \star \text{ em } L^\infty([0, T_0]; W^{1,r})
\end{aligned} \tag{2.120}$$

com $(m, n) \in L^\infty([0, T_0]; W^{1,r})$ e $(u_g, u_l) \in L^\infty([0, T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r})$.

Como n^k é limitada em $[0, 1] \times [0, T_0]$ e $u_g^{k-1} \in S$, segue de $(2.68)_1$ que

$$\begin{aligned}
\|n_t^k(t)\|_{L^r} &= \|(n^k u_{g,x}^{k-1} + n_x^k u_g^{k-1})(t)\|_{L^r} \leqslant \|(n^k u_{g,x}^{k-1})(t)\|_{L^r} + \|(n_x^k u_g^{k-1})(t)\|_{L^r} \\
&\leqslant \|n^k(t)\|_{L^\infty} \|u_{g,x}^{k-1}(t)\|_{L^r} + \|u_g^{k-1}(t)\|_{L^\infty} \|n_x^k(t)\|_{L^r} \leqslant C\|u_{g,x}^{k-1}(t)\|_{L^r} + C_I A_\mu A_1 \|n_x^k(t)\|_{L^r} \\
&\leqslant C\|u_g^{k-1}(t)\|_{W^{2,r}} + C_I A_\mu A_1 \|n^k(t)\|_{W^{1,r}}
\end{aligned}$$

e por (2.117) e (2.118), deduzimos

$$\|n_t^k(t)\|_{L^r} \leqslant \underbrace{CK_\mu + C_I A_\mu A_1 \overline{K}}_{\overline{K}_\mu} \implies \|n_t^k(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{K}_\mu$$

para todo $t \in [0, T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$, onde $\overline{K}_\mu$ é uma constante positiva independente de t e $k \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$\|n_t^k\|_{L^\infty([0,T_0];L^r)} \leqslant \overline{K}_\mu$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, a sequência de funções $(n_t^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty([0, T_0]; L^r)$. Pela Observação 1.51 e o Teorema 1.6, existe uma subsequência $\left(n_t^{k_i}\right)_{k_i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$n_t^{k_i} \overset{k_i\to\infty}{\rightharpoonup} f \quad \text{fraca - } \star \text{ em } L^\infty([0, T_0]; L^r) \tag{2.121}$$

com $f \in L^\infty([0, T_0]; L^r)$.

Afirmamos que $f = n_t$. De fato, por (2.121) temos

$$\int_0^{T_0}\int_0^1 n_t^{k_i}(x,t)\varphi(x,t)dxdt \overset{k_i\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{T_0}\int_0^1 f(x,t)\varphi(x,t)dxdt \tag{2.122}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}((0, 1) \times (0, T_0))$. Por outro lado, temos

$$\int_0^{T_0}\int_0^1 n_t^{k_i}(x,t)\varphi(x,t)dxdt = -\int_0^{T_0}\int_0^1 n^{k_i}(x,t)\varphi_t(x,t)dxdt$$

e de $(2.120)_2$, obtemos

$$-\int_0^{T_0}\int_0^1 n^{k_i}(x,t)\varphi_t(x,t)dxdt \overset{k_i\to\infty}{\longrightarrow} -\int_0^{T_0}\int_0^1 n(x,t)\varphi_t(x,t)dxdt = \int_0^{T_0}\int_0^1 n_t(x,t)\varphi(x,t)dxdt.$$

Logo,

$$\int_0^{T_0}\int_0^1 n_t^{k_i}(x,t)\varphi(x,t)dxdt \overset{k_i\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{T_0}\int_0^1 n_t(x,t)\varphi(x,t)dxdt \tag{2.123}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}((0, 1) \times (0, T_0))$.

Por (2.122), (2.123) e a unicidade do limite, segue que

$$\int_0^{T_0}\int_0^1 f(x,t)\varphi(x,t)dxdt = \int_0^{T_0}\int_0^1 n_t(x,t)\varphi(x,t)dxdt$$
$$\implies \int_0^{T_0}\int_0^1 [f(x,t) - n_t(x,t)]\varphi(x,t)dxdt = 0 \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}((0,1)\times(0,T_0)).$$

E pelo Teorema 1.18, resulta

$$f = n_t \quad \text{q.t.p. em } (0, 1) \times (0, T_0).$$

Portanto,

$$n_t^{k_i} \overset{k_i \to \infty}{\rightharpoonup} n_t \quad \text{fraca - } \star \text{ em } L^\infty([0,T_0];L^r)$$

com $n_t \in L^\infty([0,T_0];L^r)$. De modo análogo,

$$m_t^{k_i} \overset{k_i \to \infty}{\rightharpoonup} m_t \quad \text{fraca - } \star \text{ em } L^\infty([0,T_0];L^r)$$

com $m_t \in L^\infty([0,T_0];L^r)$.

Resumindo, existe uma subsequência $(u_l^{k_i}, u_g^{k_i}, n^{k_i}, m^{k_i})_{k_i=1}^\infty$ de (u_l^k, u_g^k, n^k, m^k) e (u_l, u_g, n, m) tais que

$$\begin{aligned}
\left(u_g^{k_i}, u_l^{k_i}\right) &\rightharpoonup (u_g, u_l) && \text{fraca - } \star \text{ em } L^\infty([0,T_0];W^{2,r} \cap W_0^{1,r}) \\
\left(m^{k_i}, n^{k_i}\right) &\rightharpoonup (m, n) && \text{fraca - } \star \text{ em } L^\infty([0,T_0];W^{1,r}) \\
\left(m_t^{k_i}, n_t^{k_i}\right) &\rightharpoonup (m_t, n_t) && \text{fraca - } \star \text{ em } L^\infty([0,T_0];L^r)
\end{aligned}$$

quando $k_i \to \infty$, onde $(u_g, u_l) \in L^\infty([0,T_0];W^{2,r} \cap W_0^{1,r}), (m,n) \in L^\infty([0,T_0];W^{1,r})$ e $(m_t, n_t) \in L^\infty([0,T_0];L^r)$. Isso termina a prova de (2.119).

$\square$

Proposição 2.17. *Existe uma subsequência $(n^{k_i}, m^{k_i})_{i=1}^\infty$ de (n^k, m^k) e (n,m) tais que*

$$\begin{cases} n^{k_i} \to n \\ \\ m^{k_i} \to m \end{cases} \qquad \text{em} \quad C([0,1] \times [0,T_0]) \tag{2.124}$$

quando $k_i \to \infty$, com $m, n \in C([0,1] \times [0,T_0])$.

Ademais,

- *Sob a hipótese (2.1),*

$$\kappa_0 < \overline{C_1} \leqslant m \leqslant \frac{C_1 C_2}{\overline{C_1}}, \quad e \quad 0 \leqslant n \leqslant \frac{C_1 C_3}{\overline{C_1}} \quad \text{em } [0,1] \times [0,T_0], \tag{2.125}$$

  onde C_i e $\overline{C_1}$ são constantes positivas para $i = 1,2,3$ e $\overline{C_1} \in (\kappa_0, C_1)$.

- *Sob a hipótese (2.2),*

$$0 \leqslant m \leqslant \overline{C_4} < \kappa_0, \quad e \quad 0 \leqslant n \leqslant \frac{\overline{C_4} C_5}{C_4} \quad \text{em } [0,1] \times [0,T_0], \tag{2.126}$$

  onde C_i e $\overline{C_4}$ são constantes positivas para $i = 4,5$ e $\overline{C_4} \in (C_4, \kappa_0)$.

- *Sob a hipótese (2.3),*

$$0 \leqslant m \leqslant C_6 e, \quad e \quad \frac{C_7}{e} \leqslant n \leqslant C_8 e \quad \text{em } [0,1] \times [0,T_0], \tag{2.127}$$

  onde C_i é constante positiva para $i = 6,7,8$.

Demonstração. Pela Proposição 2.16, a sequência $\left(m^{k_i}, n^{k_i}\right)$ converge para (m,n) em $E_{\infty,\infty}$ (Definição 1.55 com $p = q = \infty$) e pelo Teorema de Aubin-Lion-Simon (Teorema 1.57-ii), com $B_0 = W^{1,r}$, $B_1 = C([0,1])$ e $B_2 = L^r$ com $r > 1$, existe uma subsequência ainda denotada por k_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$), sem perda generalidade, tal que

$$\begin{cases} n^{k_i} \to n \\ \\ m^{k_i} \to m \end{cases} \qquad \text{em } C([0,1] \times [0,T_0])$$

quando $k_i \to \infty$. Assim, obtemos a convergência forte de $\left(m^{k_i}, n^{k_i}\right)$ para (m,n) em $C([0,1] \times [0,T_0])$. Resta provar (2.125), (2.126) e (2.127).

- Sob a hipótese (2.1), segue de (2.90) que

$$\kappa_0 < \overline{C_1} \leqslant m^{k_i} \leqslant \frac{C_1 C_2}{\overline{C_1}}, \quad \text{e} \quad 0 \leqslant n^{k_i} \leqslant \frac{C_1 C_3}{\overline{C_1}} \quad \text{em } [0,1] \times [0,T_0],$$

  onde $T_0 \leqslant T_1$. E usando (2.124), obtemos

$$\kappa_0 < \overline{C_1} \leqslant m \leqslant \frac{C_1 C_2}{\overline{C_1}}, \quad \text{e} \quad 0 \leqslant n \leqslant \frac{C_1 C_3}{\overline{C_1}} \quad \text{em } [0,1] \times [0,T_0],$$

  onde $T_0 \leqslant \min\{T_1, T_2\}$.

- Sob a hipótese (2.2), segue de (2.91) que

$$0 \leqslant m^{k_i} \leqslant \overline{C_4} < \kappa_0, \quad \text{e} \quad 0 \leqslant n^{k_i} \leqslant \frac{\overline{C_4} C_5}{C_4} \quad \text{em } [0,1] \times [0,T_0],$$

  onde $T_0 \leqslant \overline{T_1}$. E usando (2.124), obtemos

$$0 \leqslant m \leqslant \overline{C_4} < \kappa_0, \quad \text{e} \quad 0 \leqslant n \leqslant \frac{\overline{C_4} C_5}{C_4} \quad \text{em } [0,1] \times [0,T_0],$$

  onde $T_0 \leqslant \min\{\overline{T_1}, T_2\}$.

- Sob a hipótese (2.3), segue de (2.92) que

$$0 \leqslant m^{k_i} \leqslant C_6 e, \quad \text{e} \quad \frac{C_7}{e} \leqslant n^{k_i} \leqslant C_8 e \quad \text{em } [0,1] \times [0,T_0],$$

  onde $T_0 \leqslant \overline{\overline{T_1}}$. E usando (2.124), obtemos

$$0 \leqslant m \leqslant C_6 e, \quad \text{e} \quad \frac{C_7}{e} \leqslant n \leqslant C_8 e \quad \text{em } [0,1] \times [0,T_0],$$

  onde $T_0 \leqslant \min\{\overline{\overline{T_1}}, T_2\}$. Com isso concluímos a prova da Proposição 2.17.

$\square$

2.3.5 Convergência de $(u_l^{k_i-1}, u_g^{k_i-1})$

Na Proposição 2.16 mostramos que existe uma subsequência $(u_l^{k_i}, u_g^{k_i})$ convergindo para (u_l, u_g) quando $k_i \to \infty$. Nesta subseção, verificaremos que $(u_l^{k_i-1}, u_g^{k_i-1})$ também converge para (u_l, u_g) quando $k_i \to \infty$. Esta verificação se faz necessária, uma vez que ambas aparecem no sistema de aproximação.

Para esse propósito, necessitamos das estimativas da diferença entre $m^{k+1}(n^{k+1})$ e $m^k(n^k)$, uma vez que existe uma relação entre a velocidade e a massa devido a equação momento . Denote por $\overline{m}^{k+1} = m^{k+1} - m^k$ e $\overline{n}^{k+1} = n^{k+1} - n^k$, então

$$\begin{cases} \overline{m}_t^{k+1} + \overline{m}_x^{k+1} u_l^k + m_x^k(u_l^k - u_l^{k-1}) + \overline{m}^{k+1}[u_l^k]_x + m^k(u_l^k - u_l^{k-1})_x = 0, \\ \overline{m}^{k+1}(x, 0) = 0 \end{cases} \tag{2.128}$$

e

$$\begin{cases} \overline{n}_t^{k+1} + \overline{n}_x^{k+1} u_g^k + n_x^k(u_g^k - u_g^{k-1}) + \overline{n}^{k+1}[u_g^k]_x + n^k(u_g^k - u_g^{k-1})_x = 0, \\ \overline{n}^{k+1}(x, 0) = 0 \end{cases} \tag{2.129}$$

para $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T_0]$.

Lema 2.18. *Para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$, temos*

$$\frac{d}{dt}\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\|(u_l^k - u_l^{k-1})_x(t)|\|_{L^r}\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1} + \overline{C}A_\mu\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r \tag{2.130}$$

e

$$\frac{d}{dt}\|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\|(u_g^k - u_g^{k-1})_x(t)|\|_{L^r}\|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1} + \overline{C}A_\mu\|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r, \tag{2.131}$$

onde $\overline{C}$ é uma constante genérica positiva dependendo somente dos dados iniciais e outras constantes conhecidas, mas independente de k e A_μ.

Demonstração. Multiplicando ambos os lados de $(2.128)_1$ por $r\,|\overline{m}^{k+1}|^{r-2}\,\overline{m}^{k+1}$ e arranjando os termos, segue

$$(|\overline{m}^{k+1}|^r)_t + (|\overline{m}^{k+1}|^r)_x u_l^k + r|\overline{m}^{k+1}|^{r-2}\overline{m}^{k+1} m_x^k(u_l^k - u_l^{k-1}) + r|\overline{m}^{k+1}|^r[u_l^k]_x + \\ + r\,|\overline{m}^{k+1}|^{r-2}\,\overline{m}^{k+1} m^k(u_l^k - u_l^{k-1})_x = 0,$$

equivalentemente,

$$(|\overline{m}^{k+1}|^r)_t + (|\overline{m}^{k+1}|^r u_l^k)_x + r|\overline{m}^{k+1}|^{r-2}\overline{m}^{k+1} m_x^k(u_l^k - u_l^{k-1}) + (r-1)(|\overline{m}^{k+1}|^r[u_l^k]_x) + \\ + r\,|\overline{m}^{k+1}|^{r-2}\,\overline{m}^{k+1} m^k(u_l^k - u_l^{k-1})_x = 0,$$

para todo $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$.

Integrando na variável x sobre $[0,1]$, obtemos

$$\int_0^1 (|\overline{m}^{k+1}|^r)_t(x,t)dx = -\left\{\left(|\overline{m}^{k+1}|^r(1,t)u_l^k(1,t) - |\overline{m}^{k+1}|^r(0,t)u_l^k(0,t)\right)\right.$$
$$+ (r-1)\int_0^1 \left[|\overline{m}^{k+1}|^r[u_l^k]_x\right](x,t)dx + r\int_0^1 \left[|\overline{m}^{k+1}|^{r-2}\overline{m}^{k+1}m_x^k(u_l^k - u_l^{k-1})\right](x,t)dx$$
$$\left.+ r\int_0^1 \left[|\overline{m}^{k+1}|^{r-2}\,\overline{m}^{k+1}m^k(u_l^k - u_l^{k-1})_x\right](x,t)dx\right\}$$

e como $u_l^k(1,t) = u_l^k(0,t) = 0$, resulta

$$\int_0^1 (|\overline{m}^{k+1}|^r)_t(x,t)dx = -\left\{(r-1)\int_0^1 \left[|\overline{m}^{k+1}|^r[u_l^k]_x\right](x,t)dx\right.$$
$$+ r\int_0^1 \left[|\overline{m}^{k+1}|^{r-2}\overline{m}^{k+1}m_x^k(u_l^k - u_l^{k-1})\right](x,t)dx$$
$$\left.+ r\int_0^1 \left[|\overline{m}^{k+1}|^{r-2}\,\overline{m}^{k+1}m^k(u_l^k - u_l^{k-1})_x\right](x,t)dx\right\}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 (|\overline{m}^{k+1}|^r)(x,t)dx \leqslant \underbrace{(r-1)\int_0^1 \left[|\overline{m}^{k+1}|^r|[u_l^k]_x|\right](x,t)dx}_{:=I_7}$$
$$+ \underbrace{r\int_0^1 \left[|\overline{m}^{k+1}|^{r-1}|m_x^k||u_l^k - u_l^{k-1}|\right](x,t)dx}_{:=I_8}$$
$$+ \underbrace{r\int_0^1 \left[|\overline{m}^{k+1}|^{r-1}|m^k||(u_l^k - u_l^{k-1})_x|\right](x,t)dx}_{:=I_9} \tag{2.132}$$

para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0,T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$.

Agora, vamos obter estimativas para I_j com $j = 7, 8$ e 9. Primeiro, encontraremos a estimativa de I_7, como $u_l^k \in S$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$|[u_l^k]_x|(x,t) \leqslant \|[u_l^k]_x(t)\|_{L^\infty} \leqslant C_I\|[u_l^k]_x(t)\|_{W^{1,1}} \leqslant C_I\|u_l^k(t)\|_{W^{2,1}} \leqslant C_I A_1 A_\mu.$$

Donde

$$I_7 = (r-1)\int_0^1 \left(|\overline{m}^{k+1}|^r|[u_l^k]_x|\right)(x,t)dx \leqslant \overline{C}A_\mu\int_0^1 |\overline{m}^{k+1}|^r|(x,t)dx$$
$$\Longrightarrow \quad I_7 \leqslant \overline{C}A_\mu\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r \tag{2.133}$$

para todo $t \in [0,T_0]$.

Agora, vamos encontrar uma estimativa de I_8. Para todo $t \in [0,T_0]$ e $k \in \mathbb{N}$

$$I_8 \leqslant r\|(u_l^k - u_l^{k-1})(t)\|_{L^\infty}\int_0^1 \left(|m_x^k|\,|\overline{m}^{k+1}|^{r-1}\right)(x,t)dx.$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder (Proposição 1.42) no lado direito da desigualdade acima, com $r' = \dfrac{r}{r-1}$, $r > 1$, e usando a Imersão de Sobolev (Teorema 1.30), obtemos

$$\begin{aligned} I_8 &\leqslant r\|(u_l^k - u_l^{k-1})(t)\|_{L^\infty} \int_0^1 \left(|m_x^k|\,|\overline{m}^{k+1}|^{r-1}\right)(x,t)dx \\ &\leqslant r\, C_I\|(u_l^k - u_l^{k-1})(t)\|_{W^{1,r}}\|m_x^k(t)\|_{L^r}\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1} \end{aligned} \tag{2.134}$$

para todo $t \in [0, T_0]$ e todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $u_l^k(t) \in W_0^{1,r}$, então $(u_l^k - u_l^{k-1})(t) \in W_0^{1,r}$ para todo $t \in [0, T_0]$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Daí aplicando a Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.35), deduzimos

$$I_8 \leqslant \overline{C}\|(u_l^k - u_l^{k-1})_x(t)\|_{L^r}\|m_x^k(t)\|_{L^r}\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1}. \tag{2.135}$$

E já que a sequência $(m_x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em L^r [Ver (2.116)], resulta de (2.135) que

$$I_8 \leqslant \overline{C}\|(u_l^k - u_l^{k-1})_x(t)\|_{L^r}\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1}, \tag{2.136}$$

onde $\overline{C}$ é uma constante genérica positiva dependendo somente dos dados iniciais e outras constantes conhecidas, mas independente de k e A_μ.

Por fim, vamos encontrar uma estimativa para I_9. Por (2.116), temos

$$|m^k|(x,t) \leqslant C$$

para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0, T_0]$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Daí segue-se que

$$I_9 = r\int_0^1 \left(|\overline{m}^{k+1}|^{r-1}|m^k||(u_l^k - u_l^{k-1})_x|\right)(x,t)dx \leqslant \overline{C}\int_0^1 \left(|(u_l^k - u_l^{k-1})_x||\overline{m}^{k+1}|^{r-1}\right)(x,t)dx$$

e aplicando a Desigualdade de Hölder (Proposição 1.42) no lado direito da última desigualdade acima, com $r' = \dfrac{r}{r-1}$, $r > 1$, obtemos

$$I_9 \leqslant \overline{C}\|(u_l^k - u_l^{k-1})_x(t)|\|_{L^r}\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1} \tag{2.137}$$

para todo $t \in [0, T_0]$ e todo $k \in \mathbb{N}$.

Por (2.132), (2.133), (2.136) e (2.137), concluímos

$$\frac{d}{dt}\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\|(u_l^k - u_l^{k-1})_x(t)|\|_{L^r}\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1} + \overline{C}A_\mu\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r,$$

onde $\overline{C}$ é uma constante genérica positiva dependendo somente dos dados iniciais e outras constantes conhecidas, mas independente de k e A_μ. Similarmente,

$$\frac{d}{dt}\|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C}\|(u_g^k - u_g^{k-1})_x(t)|\|_{L^r}\|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1} + \overline{C}A_\mu\|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$. $\square$

Lema 2.19. *Para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r \geqslant 2$, temos*

$$\|[u_l^k - u_l^{k-1}]_x(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{C} A_\mu \left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right) \tag{2.138}$$

e

$$\|[u_g^k - u_g^{k-1}]_x(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{C} A_\mu \left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right). \tag{2.139}$$

Demonstração. Relembremos que

$$\alpha_l^k = \alpha_l(m^k, n^k) \quad \text{e} \quad P^k = P(m^k, n^k)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. E observe que $u_l^k - u_l^{k-1}$ é solução da equação

$$\begin{aligned}
\mu_l[u_l^k - u_l^{k-1}]_{xx} &= \alpha_l^k P_x^k - \alpha_l^{k-1} P_x^{k-1} + \overbrace{(m^k - m^{k-1})}^{\overline{m}^k} g \\
&= (\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1}) P_x^k + \alpha_l^{k-1}[P^k - P^{k-1}]_x + \overline{m}^k g \\
&= (\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1}) P_x^k + (\alpha_l^{k-1}[P^k - P^{k-1}])_x - [\alpha_l^{k-1}]_x [P^k - P^{k-1}] + \overline{m}^k g.
\end{aligned}$$

Daí segue-se, de forma análogo à (2.44),

$$\begin{aligned}
\mu_l[u_l^k - u_l^{k-1}]_x(x,t) &= \int_0^x \left[(\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1}) P_\xi^k\right](\xi,t) d\xi - \int_0^x \left[(\alpha_l^{k-1})_\xi (P^k - P^{k-1})\right](\xi,t) d\xi \\
&+ \left[\alpha_l^{k-1}(P^k - P^{k-1})\right](\xi,t) + g\int_0^x \overline{m}^k(\xi,t) d\xi + \int_0^1 \int_0^y [(\alpha_l^{k-1})_\xi (P^k - P^{k-1})](\xi,t) d\xi dy \\
&- \int_0^1 \int_0^y \left[(\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1}) P_\xi^k\right](\xi,t) d\xi dy - \int_0^1 \left[\alpha_l^{k-1}(P^k - P^{k-1})\right](\xi,t) d\xi S \\
&- g\int_0^1 \int_0^y \overline{m}^k(\xi,t) d\xi dy.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mu_l |(u_l^k - u_l^{k-1})_x|(x,t) &\leqslant 2\|[(\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1}) P_\xi^k](t)\|_{L^1} + 2\|[(\alpha_l^{k-1})_\xi (P^k - P^{k-1})](t)\|_{L^1} \\
&+ |\alpha_l^{k-1}(P^k - P^{k-1})|(\xi,t) + \int_0^1 |\left[\alpha_l^{k-1}(P^k - P^{k-1})\right]|(\xi,t) d\xi + g\int_0^1 |\overline{m}^k(\xi,t)| d\xi.
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Elevando ambos lados de (2.140) a $r > 1$ e aplicando o Lema 1.39 e utilizando a Desigualdade de Jensen (Proposição 1.43) nos três últimos termos do lado direito da desigualdade acima, com $\eta(\xi) = 1$ para todo $\xi \in [0,1]$, deduzimos

$$\begin{aligned}
\mu_l^r |(u_l^k - u_l^{k-1})_x|^r(x,t) &\leqslant \overline{C} \Big(\|[(\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1}) P_\xi^k](t)\|_{L^1}^r + \|[(\alpha_l^{k-1})_\xi (P^k - P^{k-1})](t)\|_{L^1}^r \\
&+ |\alpha_l^{k-1}(P^k - P^{k-1})|^r(\xi,t) + \|[\alpha_l^{k-1}(P^k - P^{k-1})](t)\|_{L^r}^r + \|\overline{m}^k(t)\|_{L^r}^r \Big).
\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados sobre $[0,1]$, obtemos

$$\|(u_l^k - u_l^{k-1})_x(t)\|_{L^r} \leqslant \frac{\overline{C}}{\mu_l}\Big(\|[(\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1})P_x^k](t)\|_{L^1} + \|[(\alpha_l^{k-1})_x(P^k - P^{k-1})](t)\|_{L^1}$$
$$+ \|[\alpha_l^{k-1}(P^k - P^{k-1})](t)\|\|_{L^r} + \|\overline{m}^k(t)\|_{L^r}\Big) \tag{2.141}$$

para todo $t \in [0, T_0]$ e todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora, vamos estimar o lado direito da desigualdade acima. Note que com argumentos análogos aos utilizandos em (2.33) e (2.34), obtemos

$$\begin{cases} |\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1}| \leqslant \overline{C}\left(|\overline{m}^k| + |\overline{n}^k|\right) & \text{e} \\ |P^k - P^{k-1}| \leqslant \overline{C}\left(|\overline{m}^k| + |\overline{n}^k|\right) \end{cases} \tag{2.142}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sabemos que

$$(\alpha_l)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{\rho_l(m,n)}\right) = \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{m}{\rho_l^2}\frac{1}{a_l^2}\frac{\partial P}{\partial m}\right) m_x - \left(\frac{m}{\rho_l^2}\frac{1}{a_l^2}\frac{\partial P}{\partial n}\right) n_x$$

e

$$P_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(P(m,n)\right) = \frac{\partial P}{\partial m}\, m_x + \frac{\partial P}{\partial n}\, n_x.$$

Então

$$|(\alpha_l)_x| \leqslant \left(\left|\frac{1}{\rho_l}\right| + \left|\frac{m}{\rho_l^2}\right| \frac{1}{a_l^2}\left|\frac{\partial P}{\partial m}\right|\right)|m_x| + \left(\left|\frac{m}{\rho_l^2}\right| \frac{1}{a_l^2}\left|\frac{\partial P}{\partial n}\right|\right)|n_x|$$

e

$$|P_x| \leqslant \left|\frac{\partial P}{\partial m}\right| |m_x| + \left|\frac{\partial P}{\partial n}\right| |n_x|.$$

Como $\rho_l \geqslant \kappa_0 > 0$, $\dfrac{m}{\rho_l} \leqslant \dfrac{M}{\kappa_0}$ [ver Observação 2.4] e vale (2.93), então

$$\begin{aligned} |(\alpha_l)_x| &\leqslant \left(\left|\frac{1}{\rho_l}\right| + \left|\frac{m}{\rho_l^2}\right| \frac{1}{a_l^2}\left|\frac{\partial P}{\partial m}\right|\right)|m_x| + \left(\left|\frac{m}{\rho_l^2}\right| \frac{1}{a_l^2}\left|\frac{\partial P}{\partial n}\right|\right)|n_x| \\ &\leqslant \left(\frac{1}{\kappa_0} + \frac{M}{\kappa_0^2}\frac{1}{a_l^2}\,C\right)|m_x| + \left(\frac{M}{\kappa_0^2}\frac{1}{a_l^2}\,C\right)|n_x| \leqslant \overline{C}\left(|m_x| + |n_x|\right) \end{aligned}$$

e

$$|P_x| \leqslant \left|\frac{\partial P}{\partial m}\right| |m_x| + \left|\frac{\partial P}{\partial n}\right| |n_x| \leqslant C\left(|m_x| + |n_x|\right),$$

donde concluímos

$$|(\alpha_l)_x| \leqslant \overline{C}\left(|m_x| + |n_x|\right) \quad \text{e} \quad |P_x| \leqslant \overline{C}\left(|m_x| + |n_x|\right). \tag{2.143}$$

Portanto,

$$|(\alpha_l^{k-1})_x| \leqslant \overline{C}\left(|m_x^{k-1}| + |n_x^{k-1}|\right) \quad \text{e} \quad |P_x^k| \leqslant \overline{C}\left(|m_x^k| + |n_x^k|\right)$$

onde $\overline{C}$ é uma constante positiva independente de k e dos coeficientes de viscosidades.

Assim, P_x^k e $(\alpha_l^{k-1})_x$ são limitadas em L^r independente de k, tendo em vista que m_x^k e n_x^k são limitadas em L^r independente de k. Isto é,

$$\begin{cases} \|P_x^k(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{K} \\ \|(\alpha_l^{k-1})_x(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{K}, \end{cases} \tag{2.144}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 1$.

Se $\dfrac{r}{r-1} \leqslant r$, ou seja, $r \geqslant 2$ então, usando a Desigualdade de Hölder (Proposição 1.42) e o Lema 1.44, obtemos

$$\begin{aligned} \|[(\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1})P_x^k](t)\|_{L^1}^r &\leqslant \left(\int_0^1 |\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1}|^r(x,t)dx\right)\left(\int_0^1 |P_x^k|^{\frac{r}{r-1}}(x,t)dx\right)^{r-1} \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1}|^r(x,t)dx\right)\left(\int_0^1 |P_x^k|^r(x,t)dx\right)^{r-1} \\ &\leqslant \overline{K}^{r(r-1)}\left(\int_0^1 |\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1}|^r(x,t)dx\right) \\ &\leqslant \overline{C}\left(\int_0^1 \left(|\overline{m}^k|^r + |\overline{n}^k|^r\right)(x,t)dx\right). \end{aligned}$$

Na 3ª e 4ª desigualdades acima utilizamos $(2.144)_1$ e $(2.142)_1$, Lema 1.39, respectivamente. Daí segue-se que

$$\|[(\alpha_l^k - \alpha_l^{k-1})P_x^k](t)\|_{L^1} \leqslant \overline{C}\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right) \tag{2.145}$$

e com um argumento análogo utilizado acima, temos

$$\|[(\alpha_l^{k-1})_x(P^k - P^{k-1})](t)\|_{L^1} \leqslant \overline{C}\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right). \tag{2.146}$$

Da Observação 2.4, $|\alpha_l^{k-1}| \leqslant 1$, implica que

$$\begin{aligned} \|[\alpha_l^{k-1}(P^k - P^{k-1})](t)\|_{L^r}^r &= \int_0^1 [\underbrace{|\alpha_l^{k-1}|^r}_{\leqslant 1} |P^k - P^{k-1}|^r](x,t)dx \\ &\leqslant \int_0^1 |P^k - P^{k-1}|^r(x,t)dx \\ &\leqslant \overline{C}\left(\int_0^1 \left(|\overline{m}^k| + |\overline{n}^k|\right)^r(x,t)dx\right) \\ &\leqslant \overline{C}\left(\int_0^1 \left(|\overline{m}^k|^r + |\overline{n}^k|^r\right)(x,t)dx\right). \end{aligned}$$

Na 2ª e 3ª desigualdades acima utilizamos $(2.142)_2$ e o Lema 1.39, respectivamente.

Assim,

$$\|[\alpha_l^{k-1}(P^k - P^{k-1})](t)\|_{L^r} \leqslant \overline{C}\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right) \tag{2.147}$$

e combinando (2.141), (2.145), (2.146) e (2.147), obtemos

$$\|[u_l^k - u_l^{k-1}]_x(t)\|_{L^r} \leqslant \frac{\overline{C}}{\mu_l}\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right) \leqslant \overline{C}A_\mu\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right)$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r \geqslant 2$.

Portanto,

$$\|[u_l^k - u_l^{k-1}]_x(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{C}A_\mu\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right)$$

e similarmente, temos

$$\|[u_g^k - u_g^{k-1}]_x(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{C}A_\mu\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right)$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e $r \geqslant 2$. □

Lema 2.20. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos*

$$\max_{t\,\in\,[0,T_0]}\left\{\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r\right\} \leqslant \frac{1}{2}\max_{t\,\in\,[0,T_0]}\left\{\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}^r\right\}. \tag{2.148}$$

Além disso,

$$\max_{t\,\in\,[0,T_0]}\left\{\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r\right\} \leqslant \overline{C}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \tag{2.149}$$

com $r \geqslant 2$.

Demonstração. Primeiro vamos provar (2.148). Agrupando (2.130), (2.131) (Lema 2.18), (2.138),(2.139) (Lema 2.19) e depois utilizando a Desigualdade de Young (Proposição 1.41), com $p = r \geqslant 2$ e $p' = \dfrac{r}{r-1}$, segue-se que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r) \leqslant \overline{C}A_\mu\left(\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r\right)\\
&+\overline{C}A_\mu\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right)\left(\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1} + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1}\right)\\
&\leqslant \overline{C}A_\mu\left(\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r\right) + \overline{C}A_\mu\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r} + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}\right)^r\\
&+\overline{C}A_\mu\left(\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1} + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^{r-1}\right)^{\frac{r}{r-1}}
\end{aligned}$$

e aplicando o Lema 1.39 nos dois últimos termos da desigualdade acima, concluímos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r) \leqslant \overline{C}A_\mu\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}^r\right)\\
&+\overline{C}A_\mu\left(\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r\right)
\end{aligned} \tag{2.150}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e com $r \geqslant 2$.

Integrando ambos os lados de (2.150) sobre $[0, t]$, para um dado $t \in [0, T_0]$ e como $\overline{m}^{k+1}(x, 0) = \overline{n}^{k+1}(x, 0) = 0$, para todo $x \in [0, 1]$ [Ver $(2.128)_2$ e $(2.129)_2$], então concluímos que

$$\begin{aligned}\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r \leqslant \overline{C} A_\mu \int_0^t \left(\|\overline{m}^k(s)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^k(s)\|_{L^r}^r\right) ds \\ + \overline{C} A_\mu \int_0^t \left(\|\overline{m}^{k+1}(s)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(s)\|_{L^r}^r\right) ds\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $k \in \mathbb{N}$ e com $r \geqslant 2$.

Tomando o máximo em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\max_{t \in [0,T_0]} \left\{\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r\right\} \leqslant \overline{C} A_\mu T_0 \max_{t \in [0,T_0]} \left\{\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}^r\right\} + \\ + \overline{C} A_\mu T_0 \max_{t \in [0,T_0]} \left\{\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r\right\}\end{aligned}$$

e como $T_0 \leqslant \dfrac{1}{3\overline{C} A_\mu}$, isto é, $\overline{C} A_\mu T_0 \leqslant \dfrac{1}{3}$ segue que

$$\begin{aligned}\max_{t \in [0,T_0]} \left\{\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r\right\} \leqslant \frac{1}{3} \left\{\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}^r\right\} + \\ + \frac{1}{3} \max_{t \in [0,T_0]} \left\{\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r\right\}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\max_{t \in [0,T_0]} \left\{\|\overline{m}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{k+1}(t)\|_{L^r}^r\right\} \leqslant \frac{1}{2} \max_{t \in [0,T_0]} \left\{\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}^r\right\}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e com $r \geqslant 2$.

Por fim, vamos provar (2.149). Para tanto, utilizaremos o Princípio de Indução Finita. Sabemos que m^k e n^k são limitadas em $C([0, T_0]; W^{1,r})$ uniformemente [vejam (2.116) e (2.117)]. Então

$$\max_{t \in [0,T_0]} \left\{\|\overline{m}^2(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^2(t)\|_{L^r}^r\right\} \leqslant \overline{C}.$$

Daí segue-se que

$$\max_{t \in [0,T_0]} \left\{\|\overline{m}^{1+1}(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^{1+1}(t)\|_{L^r}^r\right\} \leqslant \overline{C} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}$$

e, assim, para $k = 1$ a desigualdade (2.149) é verdadeira.

Suponha que para $k = l - 1$ a desigualdade (2.149) seja verdadeira, isto é,

$$\max_{t \in [0,T_0]} \left\{\|\overline{m}^l(t)\|_{L^r}^r + \|\overline{n}^l(t)\|_{L^r}^r\right\} \leqslant \overline{C} \left(\frac{1}{2}\right)^{l-2}, \text{ com } l \in \mathbb{N}. \quad \text{(Hipótese de Indução)}$$

De (2.148) e da Hipótese de Indução, temos

$$\max_{t\in[0,T_0]}\left\{\|\overline{m}^{l+1}(t)\|_{L^r}^r+\|\overline{n}^{l+1}(t)\|_{L^r}^r\right\}\leqslant\frac{1}{2}\max_{t\in[0,T_0]}\left\{\|\overline{m}^{l}(t)\|_{L^r}^r+\|\overline{n}^{l}(t)\|_{L^r}^r\right\}\leqslant\frac{1}{2}\left[\overline{C}\left(\frac{1}{2}\right)^{l-2}\right]$$
$$=\overline{C}\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1},$$

ou seja,

$$\max_{t\in[0,T_0]}\left\{\|\overline{m}^{l+1}(t)\|_{L^r}^r+\|\overline{n}^{l+1}(t)\|_{L^r}^r\right\}\leqslant\overline{C}\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1},\ \text{com } l\in\mathbb{N}.$$

Assim, a desigualdade (2.149) é verdadeira para $k=l$ e, pelo Princípio de Indução, (2.149) vale para todo $k\in\mathbb{N}$ e com $r\geqslant 2$.

□

Proposição 2.21. *Quando $k_i\to\infty$, temos*

$$\|u_j^{k_i-1}-u_j\|_{L^\infty\left([0,T_0];W_0^{1,r}\right)}\longrightarrow 0 \tag{2.151}$$

onde u_l e u_g são os encontrados na Proposição 2.16 e $r\geqslant 2$.

Demonstração. Para todo $t\in[0,T_0]$, segue de (2.138) (Lema 2.19) que

$$\begin{aligned}\|[u_l^k-u_l^{k-1}]_x(t)\|_{L^r}^r&\leqslant\overline{C}A_\mu^r\left(\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r}^r+\|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}^r\right)\\&\leqslant\overline{C}A_\mu^r\max_{t\in[0,T_0]}\left\{\|\overline{m}^k(t)\|_{L^r}^r+\|\overline{n}^k(t)\|_{L^r}^r\right\}\\&\leqslant\overline{C}A_\mu^r\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.\end{aligned}$$

Na 1ª desigualdades acima, utilizamos o Lema 1.39 e última desigualdade acima utilizamos o Lema 2.20. E de modo análogo, obtemos

$$\|[u_g^k-u_g^{k-1}]_x(t)\|_{L^r}^r\leqslant\overline{C}A_\mu^r\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.$$

para todo $t\in[0,T_0]$ e $k\in\mathbb{N}$.

Logo,

$$\|[u_j^k-u_j^{k-1}]_x(t)\|_{L^r}^r\leqslant\overline{C}A_\mu^r\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \tag{2.152}$$

para todo $t\in[0,T_0]$, $r\geqslant 2$, $k\in\mathbb{N}$ e $j=l,g$.

Sabemos que, para todo $t\in[0,T_0]$ e $k\in\mathbb{N}$, temos

$$u_j^k(t)\in W_0^{1,r},\quad \text{com } j=l,g.$$

Então, da Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.35) e (2.152) resulta

$$\|[u_j^k - u_j^{k-1}](t)\|_{W^{1,r}} \leqslant C_r \|[u_j^k - u_j^{k-1}]_x(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{C} A_\mu \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

para todo $t \in [0, T_0]$, $r \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$ e $j = l, g$.

Observe que o lado direito da desigualdade acima não depende de t, isso implica que

$$\|u_j^k - u_j^{k-1}\|_{L^\infty\left([0,T_0];W_0^{1,r}\right)} \leqslant \overline{C} A_\mu \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

com $j = l, g$ e quando $k \to \infty$. Então, obtemos

$$\|u_j^k - u_j^{k-1}\|_{L^\infty\left([0,T_0];W_0^{1,r}\right)} \longrightarrow 0,$$

isto é, a sequência $\left(u_j^k\right)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy no espaço $L^\infty\left([0, T_0]; W_0^{1,r}\right)$, com $j = l, g$.

Já que o espaço $L^\infty\left([0, T_0]; W_0^{1,r}\right)$ é Banach (Definição 1.50), então existem $a, b \in L^\infty\left([0, T_0]; W_0^{1,r}\right)$ tais que

$$\|u_l^k - a\|_{L^\infty\left([0,T_0];W_0^{1,r}\right)} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|u_g^k - b\|_{L^\infty\left([0,T_0];W_0^{1,r}\right)} \longrightarrow 0$$

quando $k \to \infty$. Donde decorre que as subsequências $\left(u_l^{k_i-1}, u_g^{k_i-1}\right)$ e $\left(u_l^{k_i}, u_g^{k_i}\right)$ de $\left(u_l^k, u_g^k\right)$ também convergem para (a, b) em $L^\infty\left([0, T_0]; W_0^{1,r}\right)$.

Por $(2.119)_1$ e pela unicidade do limite fraco, obtemos

$$a = u_l \qquad \text{e} \qquad b = u_g$$

com isso concluímos que

$$\|u_j^{k_i-1} - u_j\|_{L^\infty\left([0,T_0];W_0^{1,r}\right)} \longrightarrow 0,$$

quando $k_i \to \infty$ com $j = l, g$ e $r \geqslant 2$.

□

2.3.6 Existência da solução do Teorema Principal

Nesta subseção, vamos mostrar a existência da solução do Teorema 2.1, sabendo que as sequências convergem, como provado na subseção 2.3.4 (ver Proposição 2.16) e na subseção 2.3.5 (ver Proposição 2.21).

Proposição 2.22. *Seja (u_l, u_g, n, m) o limite da sequência encontrado na Proposição 2.16. Então,*

$$\begin{aligned} n_t + (n u_g)_x &= 0 \\ m_t + (m u_l)_x &= 0 \end{aligned} \tag{2.153}$$

em quase todo $(0,1) \times (0, T_0)$.

Demonstração. Seja $\Omega = (0,1) \times (0, T_0)$. Então, para k_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, temos

$$n_t^{k_i} + \left(n^{k_i} u_g^{k_i - 1}\right)_x = 0$$

isso acarreta

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \left[n_t^{k_i}(x,t) + \left(n^{k_i} u_g^{k_i-1}\right)_x (x,t)\right] \varphi(x,t) dx dt \\ &= \int_\Omega \left(n_t^{k_i} \varphi\right)(x,t) dx dt - \int_\Omega \left[\left(n^{k_i} u_g^{k_i-1}\right) \varphi_x\right](x,t) dx dt \end{aligned} \tag{2.154}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Vamos provar que

$$\int_\Omega \left(n_t^{k_i} \varphi\right)(x,t) dx dt \quad \longrightarrow \quad \int_\Omega \left(n_t \varphi\right)(x,t) dx dt \tag{2.155}$$

e

$$\int_\Omega \left[\left(n^{k_i} u_g^{k_i-1}\right) \varphi_x\right](x,t) dx dt \quad \longrightarrow \quad \int_\Omega \left[\left(n u_g\right) \varphi_x\right](x,t) dx dt \tag{2.156}$$

quando $k_i \to \infty$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qualquer.

Primeiro mostremos (2.155). Por $(2.119)_3$, temos

$$\left(n_t^{k_i} - n_t\right) \rightharpoonup 0 \quad \text{fraca-}* \text{ em } L^\infty([0,T_0]; L^r)$$

e do Teorema 1.26, resulta

$$\int_\Omega \left[\left(n_t^{k_i} - n_t\right) \varphi\right](x,t) dx dt \quad \longrightarrow \quad 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega \left(n_t^{k_i} \varphi\right)(x,t) dx dt \quad \longrightarrow \quad \int_\Omega \left(n_t \varphi\right)(x,t) dx dt$$

quando $k_i \to \infty$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qualquer.

Agora, vamos mostrar (2.156). Note que

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \left[\left(n^{k_i} u_g^{k_i-1}\right) \varphi_x\right](x,t) dx dt - \int_\Omega \left[\left(n u_g\right) \varphi_x\right](x,t) dx dt \right| \\ &\leqslant \left| \int_\Omega \left[\left(n^{k_i} - n\right) u_g^{k_i-1} \varphi_x\right](x,t) dx dt \right| + \left| \int_\Omega \left[\left(u_g^{k_i-1} - u_g\right) n \varphi_x\right](x,t) dx dt \right| := L_1 + L_2 \end{aligned} \tag{2.157}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Considerando a parte L_1, nós temos

$$
\begin{aligned}
L_1 =: \left| \int_\Omega \left[\left(n^{k_i} - n \right) u_g^{k_i-1} \varphi_x \right] (x,t) dxdt \right| &\leqslant \int_\Omega \left(|n^{k_i} - n| \, |u_g^{k_i-1}| \, |\varphi_x| \right) (x,t) \, dxdt \\
&\leqslant \|n^{k_i} - n\|_{C([0,1]\times[0,T_0])} \int_\Omega \left(|u_g^{k_i-1}| \, |\varphi_x| \right) (x,t) \, dxdt \\
&\leqslant \|n^{k_i} - n\|_{C([0,1]\times[0,T_0])} \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_g^{k_i-1}|(x,t) \, dxdt \\
&\leqslant C \|n^{k_i} - n\|_{C([0,1]\times[0,T_0])},
\end{aligned}
$$

pois $\|u_g^{k_i-1}\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C$. Da desigualdade acima juntamente com $(2.124)_1$ concluímos

$$
L_1 \longrightarrow 0, \text{ quando } k_i \to \infty. \tag{2.158}
$$

Agora, vamos considerar a parte L_2. Afirmamos que $n\varphi_x \in L^1([0,T_0]; W^{-1,r'})$, onde r' é o conjugado de r.

De fato, como $n \in L^\infty([0,T_0]; W^{1,r})$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos

$$
n\varphi_x \in L^\infty([0,T_0]; W_0^{1,r})
$$

e imersão $L^\infty([0,T_0]; W_0^{1,r}) \subset L^1([0,T_0]; W^{-1,r'})$, concluímos

$$
n\varphi_x \in L^1([0,T_0]; W^{-1,r'}).
$$

Sabemos por (2.151) (Proposição 2.21) que

$$
\left(u_g^{k_i-1} - u_g \right) \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^\infty([0,T_0]; W_0^{1,r})
$$

quando $k_i \to \infty$ e, além disso, sabemos que $n\varphi_x \in L^1([0,T_0]; W^{-1,r'}) = \left(L^\infty([0,T_0]; W_0^{1,r} \right)'$. Então, Teorema 1.26, resulta que

$$
\int_\Omega \left[\left(u_g^{k_i-1} - u_g \right) n\varphi_x \right] (x,t) dxdt \quad \longrightarrow \quad 0
$$

e daí obtemos

$$
L_2 =: \left| \int_\Omega \left[\left(u_g^{k_i-1} - u_g \right) n\varphi_x \right] (x,t) dxdt \right| \quad \longrightarrow \quad 0 \quad \text{quando } k_i \to \infty. \tag{2.159}
$$

Logo, de (2.158) e (2.159), resulta

$$
L_1 + L_2 \quad \longrightarrow \quad 0 \quad \text{quando } k_i \to \infty.
$$

E por (2.157), concluímos

$$
\int_\Omega \left[\left(n^{k_i} u_g^{k_i-1} \right) \varphi_x \right] (x,t) dxdt \quad \longrightarrow \quad \int_\Omega \left[(n u_g) \, \varphi_x \right] (x,t) dxdt
$$

quando $k_i \to \infty$ e todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Agora, aplicando o limite em ambos os lados de (2.154), temos

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k_i\to\infty}\left[\int_\Omega \left(n_t^{k_i}\varphi\right)(x,t)dxdt - \int_\Omega \left[\left(n^{k_i}u_g^{k_i-1}\right)\varphi_x\right](x,t)dxdt\right] \\
&= \lim_{k_i\to\infty}\int_\Omega \left(n_t^{k_i}\varphi\right)(x,t)dxdt - \lim_{k_i\to\infty}\int_\Omega \left[\left(n^{k_i}u_g^{k_i-1}\right)\varphi_x\right](x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

e utilizando (2.155) e (2.156) na igualdade acima, segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (n_t\varphi)(x,t)dxdt - \int_\Omega \left[(nu_g)\varphi_x\right](x,t)dxdt \\
&= \int_\Omega (n_t\varphi)(x,t)dxdt + \int_\Omega \left[(nu_g)_x\varphi\right](x,t)dxdt \\
&= \int_\Omega \left[(n_t(x,t) + (nu_g)_x(x,t)\right]\varphi(x,t)dxdt
\end{aligned} \tag{2.160}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ com $\Omega = (0,1)\times(0,T_0)$.

Agora, do Teorema 1.18 e de (2.160), resulta

$$n_t + (nu_g)_x = 0 \quad \text{em quase todo } (0,1)\times(0,T_0).$$

Usando um raciocínio análogo ao anterior, obtemos

$$m_t + (mu_l)_x = 0 \quad \text{em quase todo } (0,1)\times(0,T_0)$$

e concluímos a demonstração.

□

Lema 2.23. *Quando $k_i \to \infty$, temos*

$$(\alpha_l^{k_i}, \alpha_g^{k_i}, P^{k_i}) \longrightarrow (\alpha_l, \alpha_g, P) \qquad \text{em } C([0,1]\times[0,T_0]) \tag{2.161}$$

onde $\alpha_1 = \dfrac{m}{\rho_l}$, $\alpha_g = \dfrac{n}{\rho_g}$ *satisfazendo* (2) *e* P *satisfazendo* (4) *e* (5).

Demonstração. Lembremos que

$$P^k = P(m^k,n^k) = \frac{a_l^2}{2}\left[b^k + \sqrt{(b^k)^2 + \frac{4a_g^2c^k}{a_l^2}}\,\right], \quad m^k = \alpha_l^k\rho_l^k \quad \text{e} \quad n^k = \alpha_g^k\rho_g^k,$$

onde

$$\begin{cases} b^k \doteq b(m^k,n^k) = m^k + \dfrac{a_g^2}{a_l^2}n^k - \kappa_0, \\ c^k \doteq c(m^k,n^k) = \kappa_0 n^k \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \rho_g^k = \dfrac{P^k}{a_g^2}, \\ \rho_l^k = \rho_{l,0} + \dfrac{P^k - p_0}{a_l^2} \qquad \left(\kappa_0 \triangleq \rho_{l,0} - \dfrac{p_0}{a_l^2} > 0 \right) \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. De (2.124) segue-se

$$\begin{cases} \lim\limits_{k_i \to \infty} b^{k_i} = b \\ \\ \lim\limits_{k_i \to \infty} c^{k_i} = c \end{cases} \qquad \text{em } C([0,1] \times [0,T_0])$$

e, consequentemente,

$$\lim_{k_i \to \infty} P^{k_i} = P \qquad \text{em } C([0,1] \times [0,T_0]).$$

Assim,

$$\begin{cases} \lim\limits_{k_i \to \infty} \rho_g^{k_i} = \lim\limits_{k_i \to \infty} \left(\dfrac{P^{k_i}}{a_g^2} \right) = \dfrac{P}{a_g^2} = \rho_g \\ \\ \lim\limits_{k_i \to \infty} \rho_l^{k_i} = \lim\limits_{k_i \to \infty} \left(\rho_{l,0} + \dfrac{P^{k_i} - p_0}{a_l^2} \right) = \rho_{l,0} + \dfrac{P - p_0}{a_l^2} = \rho_l \end{cases} \qquad \text{em } C([0,1] \times [0,T_0])$$

e sendo $\rho_l^{k_i} \geqslant \kappa_0 > 0$, para todo k_i, então

$$\lim_{k_i \to \infty} \alpha_l^{k_i} = \lim_{k_i \to \infty} \frac{m_i^k}{\rho_l^{k_i}} = \frac{m}{\rho_l} = \alpha_l$$

em $C([0,1] \times [0,T_0])$.

Da relação $\alpha_l^{k_i} + \alpha_g^{k_i} = 1$, decorre

$$\lim_{k_i \to \infty} \alpha_g^{k_i} = \lim_{k_i \to \infty} \left(1 - \alpha_l^{k_i}\right) = 1 - \alpha_l = \alpha_g$$

em $C([0,1] \times [0,T_0])$ e o lema fica provado. □

Proposição 2.24. *Seja* (u_l, u_g, n, m) *o limite da sequência encontrado na Proposição 2.16 e* α_l, α_g, P *dados no Lema 2.23. Então,*

$$\begin{aligned} \alpha_g P_x + n\, g &= \mu_g \left[u_g\right]_{xx} \\ \alpha_l P_x + m\, g &= \mu_l \left[u_l\right]_{xx} \end{aligned} \tag{2.162}$$

em quase todo $(0,1) \times (0,T_0)$.

Demonstração. Para k_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, temos

$$\alpha_g^{k_i} P_x^{k_i} + n^{k_i} g - \mu_g \left[u_g^{k_i}\right]_{xx} = 0$$

isso implica

$$0 = \int_\Omega \left(\alpha_g^{k_i} P_x^{k_i} \varphi\right)(x,t)dxdt + g\int_\Omega \left(n^{k_i}\varphi\right)(x,t)dxdt - \mu_g \int_\Omega \left(\left[u_g^{k_i}\right]_{xx}\varphi\right)(x,t)dxdt \tag{2.163}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ com $\Omega = (0,1)\times(0,T_0)$.

Daí, precisamos mostrar os seguintes:

$$\int_\Omega \left(n^{k_i}\varphi\right)(x,t)dxdt \quad \longrightarrow \quad \int_\Omega (n\varphi)(x,t)dxdt, \tag{2.164}$$

$$\int_\Omega \left(\left[u_g^{k_i}\right]_{xx}\varphi\right)(x,t)dxdt \quad \longrightarrow \quad \int_\Omega \left([u_g]_{xx}\varphi\right)(x,t)dxdt \tag{2.165}$$

e

$$\int_\Omega \left(\alpha_g^{k_i} P_x^{k_i}\varphi\right)(x,t)dxdt \quad \longrightarrow \quad \int_\Omega \left(\alpha_g P_x \varphi\right)(x,t)dxdt \tag{2.166}$$

quando $k_i \to \infty$ e todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Para (2.164), temos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \left(n^{k_i}\varphi\right)(x,t)dxdt - \int_\Omega (n\varphi)(x,t)dxdt\right| &= \left|\int_\Omega \left[\left(n^{k_i} - n\right)\varphi\right](x,t)dxdt\right| \\ &\leqslant \int_\Omega \left(\left|n^{k_i} - n\right| |\varphi|\right)(x,t)dxdt \\ &\leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|n^{k_i} - n\right\|_{C([0,1]\times[0,T_0])}\end{aligned}$$

e utilizando $(2.124)_1$ no lado direito da desiguadade acima, concluímos (2.164).

Por $(2.119)_1$, resulta

$$\left(u_g^{k_i} - u_g\right) \rightharpoonup 0 \quad \text{fraca-}* \text{ em } L^\infty([0,T_0]; W^{2,r})$$

quando $k_i \to \infty$. Então, pelo Teorema 1.26, em particular

$$\int_\Omega \left[\left(u_g^{k_i} - u_g\right)_{xx}\varphi\right](x,t)dxdt \quad \longrightarrow \quad 0$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, quando $k_i \to \infty$.

Logo,

$$\left|\int_\Omega \left(\left[u_g^{k_i}\right]_{xx}\varphi\right)(x,t)dxdt - \int_\Omega \left([u_g]_{xx}\varphi\right)(x,t)dxdt\right| = \left|\int_\Omega \left[\left(u_g^{k_i} - u_g\right)_{xx}\varphi\right](x,t)dxdt\right| \longrightarrow 0$$

e, consequentemente, vale (2.165).

Por fim, vamos mostrar (2.166). Temos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left(\alpha_g^{k_i} P_x^{k_i} \varphi\right)(x,t)dxdt - \int_\Omega \left(\alpha_g P_x \varphi\right)(x,t)dxdt \right| \\
&\leqslant \left| \int_\Omega \left[\left(\alpha_g^{k_i} - \alpha_g\right) P_x^{k_i} \varphi\right](x,t)dxdt \right| + \left| \int_\Omega \left[\left(P^{k_i} - P\right)_x (\alpha_g \varphi)\right](x,t)dxdt \right| =: L_3 + L_4
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Já que $|P_x^{k_i}| \leqslant \overline{C}\left(|m_x^{k_i}| + |n_x^{k_i}|\right)$ [Veja (2.143)], então

$$\begin{aligned}
L_3 := \left| \int_\Omega \left[\left(\alpha_g^{k_i} - \alpha_g\right) P_x^{k_i} \varphi\right](x,t)dxdt \right| &\leqslant \int_\Omega \left(|\alpha_g^{k_i} - \alpha_g|\, |P_x^{k_i}|\, |\varphi|\right)(x,t)dxdt \\
&\leqslant \|\alpha_g^{k_i} - \alpha_g\|_{C([0,1]\times[0,T_0])} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |P_x^{k_i}|(x,t)dxdt \\
&\leqslant \|\alpha_g^{k_i} - \alpha_g\|_{C([0,1]\times[0,T_0])} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\|n_x^{k_i}(t)\|_{L^1} + \|m_x^{k_i}(t)\|_{L^1}\right)
\end{aligned}$$

e utilizando (2.108) no lado direito da desigualdade, obtemos

$$L_3 \leqslant \overline{C}\|\alpha_g^{k_i} - \alpha_g\|_{C([0,1]\times[0,T_0])} \tag{2.167}$$

onde $\overline{C}$ é uma constante positiva. Assim, de $(2.161)_1$ e (2.167), resulta

$$L_3 \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad \text{quando } k_i \to \infty.$$

Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \left[\left(P^{k_i} - P\right)_x (\alpha_g \varphi)\right](x,t)dxdt = -\int_\Omega \left[\left(P^{k_i} - P\right)(\alpha_g \varphi)_x\right](x,t)dxdt$$

isso acarreta que

$$\begin{aligned}
L_4 := \left| \int_\Omega \left[\left(P^{k_i} - P\right)_x (\alpha_g \varphi)\right](x,t)dxdt \right| &= \left| \int_\Omega \left[\left(P^{k_i} - P\right)(\alpha_g \varphi)_x\right](x,t)dxdt \right| \qquad (2.168) \\
\leqslant \int_\Omega \left(|P^{k_i} - P|\, |(\alpha_g \varphi)_x|\right)(x,t)dxdt &\leqslant \|P^{k_i} - P\|_{C([0,1]\times[0,T_0])} \int_\Omega |(\alpha_g \varphi)_x|(x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\int_\Omega |(\alpha_g\, \varphi)_x|(x,t)dxdt \ < \ \infty$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. De fato, como

$$(\alpha_g\, \varphi)_x = [\alpha_g]_x\, \varphi + \alpha_g\, \varphi_x,$$

temos

$$|(\alpha_g\ \varphi)_x| \leqslant |[\alpha_g]_x|\ |\varphi| + |\alpha_g|\ |\varphi_x|.$$

Já que $\alpha_g = \dfrac{n}{\rho_g}$, então com um argumento análogo ao aplicado para provar que $|[\alpha_l]_x| \leqslant \overline{C}\,(|m_x| + |n_x|)$ em (2.143), obtemos

$$|[\alpha_g]_x| \leqslant \overline{C}\,(|m_x| + |n_x|)$$

e sendo $|\alpha_l| \leqslant 1$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|(\alpha_g\ \varphi)_x|\right)(x,t)dxdt &\leqslant \int_\Omega \left(|[\alpha_g]_x|\ |\varphi|\right)(x,t)dxdt + \int_\Omega (\underbrace{|\alpha_g|}_{\leqslant 1}\ |\varphi_x|)(x,t)dxdt \\
&\leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |[\alpha_g]_x|(x,t)dxdt + \int_\Omega |\varphi_x|(x,t)dxdt \\
&\leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\|m_x(t)\|_{L^1} + \|n_x(t)\|_{L^1}\right) + \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad (2.169)
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Segue da semicontinuidade inferior da norma e (2.108), podemos obter

$$\begin{aligned}
\|n_x(t)\|_{L^1} + \|m_x(t)\|_{L^1} &\leqslant \liminf_{k\to\infty} \left(\|n_x^k(t)\|_{L^1} + \|m_x^k(t)\|_{L^1}\right) \\
&\leqslant e^{C_I}(\|n_{0,x}\|_{L^1} + \|m_{0,x}\|_{L^1} + 2C) \qquad (2.170)
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_0]$. Assim, por (2.169) e (2.170), deduz-se

$$\int_\Omega |(\alpha_g\ \varphi)_x|(x,t)dxdt \leqslant \overline{C} \qquad (2.171)$$

onde $\overline{C}$ é uma constante positiva.

Usando (2.171) no lado direito da desigualdade (2.168), obtemos

$$L_4 \leqslant \overline{C}\|P^{k_i} - P\|_{C([0,1]\times[0,T_0])} \quad \longrightarrow \quad 0.$$

Donde decorre

$$L_4 \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad \text{quando } k_i \to \infty,$$

já que $P^{k_i} \longrightarrow P$ em $C\left([0,1] \times [0,T_0]\right)$ [Veja $(2.161)_3$].

Assim,

$$L_3 + L_4 \quad \longrightarrow \quad 0,$$

quando $k_i \to \infty$ e, portanto, provamos (2.166).

Agora, tomando o limite em ambos os lados da igualdade de (2.163) e utilizando (2.164),(2.165) e (2.166), obtemos

$$\int_{\Omega} \left[\left(\alpha_g P_x + n\ g - \mu_g \left[u_g \right]_{xx} \right) \varphi \right] (x,t) dx dt = 0 \tag{2.172}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Aplicando o Teorema 1.18 em (2.172), concluímos

$$\alpha_g P_x + n\ g - \mu_g \left[u_g \right]_{xx} = 0 \quad \text{em quase todo } (0,1) \times (0,T_0).$$

E com racíonicio análogo, obtemos

$$\alpha_l P_x + m\ g - \mu_l \left[u_l \right]_{xx} = 0 \quad \text{em quase todo } (0,1) \times (0,T_0).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha_g P_x + n\ g &= \mu_g \left[u_g \right]_{xx} \\ \alpha_l P_x + m\ g &= \mu_l \left[u_l \right]_{xx} \end{aligned}$$

em quase todo $(0,1) \times (0,T_0)$.

$\square$

Proposição 2.25. *Seja (u_l, u_g, n, m) o limite da sequência encontrado na Proposição 2.16. Então,*

$$m(x,0) = m_0(x), \quad n(x,0) = n_0(x)$$

para todo $x \in [0,1]$. Além disso,

$$(m,n) \in C\left([0,T_0]; W^{1,r}\right) \cap C^1\left([0,T_0]; L^r\right) \quad e \quad (u_g,u_l) \in C\left([0,T_0]; W^{2,r} \cap W_0^{1,r}\right).$$

Demonstração. De (2.69), temos

$$m^{k_i}(x,0) = m_0(x) \quad \text{e} \quad n^{k_i}(x,0) = n_0(x)$$

para todos $x \in [0,1]$ e k_i $(i = 1,2,3,\ldots)$ e sabemos, por (2.124), que

$$\left\{ \begin{array}{l} n^{k_i} \to n \\ \\ m^{k_i} \to m \end{array} \right. \quad \text{em } C([0,1] \times [0,T_0])$$

quando $k_i \to \infty$. Então,

$$\begin{aligned} m_0(x) &= \lim_{k_i \to \infty} m^{k_i}(x,0) = m(x,0) \implies m(x,0) = m_0(x) \\ n_0(x) &= \lim_{k_i \to \infty} n^{k_i}(x,0) = n(x,0) \implies n(x,0) = n_0(x) \qquad \forall x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Agora, segue da Proposição 2.17 [(2.125), (2.126) e (2.127)] que m e n são funções limitadas em $[0,1]\times[0,T_0]$. Logo,

$$m,n \in L^\infty\left([0,1]\times[0,T_0]\right) \quad \Rightarrow \quad m,n\in L^\infty\left([0,T_0];L^r\right)$$

e com uma argumento análogo ao utilizado em (2.89),obtemos

$$m_x,n_x \in L^\infty\left([0,T_0];L^r\right).$$

Portanto,

$$m,n\in L^\infty\left([0,T_0];W^{1,r}\right)$$

e sabendo que n e m são soluções das equações $(2.153)_1$ e $(2.153)_2$ (ver Proposição 2.22), respectivamente, com $n_0,m_0\in W^{1,r}$. Além disso, sabendo por $(2.119)_1$ (ver Proposição 2.16) que

$$u_g,u_l\in L^\infty\left([0,T_0];W^{2,r}\cap W_0^{1,r}\right).$$

Então, do Lema 2.6, deduzimos

$$n,m\in C([0,T_0];W^{1,r}).$$

Por $(2.161)_3$, temos

$$P=P(m,n)=\frac{a_l^2}{2}\left[b+\sqrt{b^2+\frac{4a_g^2c}{a_l^2}}\,\right].$$

Com um argumento semelhante ao utilizado para provar $(2.93)_1$, uma vez que (2.125), (2.126) e (2.127) valem, obtemos

$$\left|\frac{\partial P}{\partial m}(m,n)\right|\leqslant C \quad e \quad \left|\frac{\partial P}{\partial n}(m,n)\right|\leqslant C.$$

E, sabendo que $n,m\in C([0,T_0];W^{1,r})$ e $u_g,u_l\in L^\infty\left([0,T_0];W^{2,r}\cap W_0^{1,r}\right)$ (Proposição 2.16) com u_g e u_l satisfazendo as equações $(2.162)_1$ e $(2.162)_2$ (Proposição 2.24), respectivamente. Segue, do Lema 2.11, que

$$u_g,u_l\in C([0,T];W^{2,r}\cap W_0^{1,r}).$$

Por fim, já que $n,m\in C([0,T_0];W^{1,r})$ e $u_g,u_l\in C([0,T];W^{2,r}\cap W_0^{1,r})$, das equações $(2.153)_1$ e $(2.153)_2$,obtemos

$$n_t,m_t\in C([0,T_0];L^r).$$

Logo,

$$(m,n)\in C([0,T_0];W^{1,r})\cap C^1([0,T_0];L^r) \quad \text{e} \quad (u_g,u_l)\in C\left([0,T_0];W^{2,r}\cap W_0^{1,r}\right).$$

□

Portanto, das Proposições 2.22, 2.24 e 2.25, concluímos que o limite (m, n, u_l, u_g) encontrado na Proposição 2.16 é solução do problema (3) em $(0,1) \times (0, T_0)$ satisfazendo as condições de fronteira e de dados iniciais (7) e (8), respectivamente, com

$$(m,n) \in C([0,T_0]; W^{1,r}) \cap C^1([0,T_0]; L^r) \quad \text{e} \quad (u_l, u_g) \in C([0,T_0]; W^{2,r}).$$

2.3.7 Unicidade da solução do Teorema Principal

Na subseção 2.3.6, mostramos o limite da sequência encontrado na subseção 2.3.4, Proposição 2.16, é solução do problema (3) em $(0,1) \times (0, T_0)$ com as condições de fronteira e de dados iniciais (7) e (8), respectivamente. Nesta subseção, vamos dedicar a provar que tal solução é única.

Proposição 2.26. *Sejam* $(m_1, n_1, u_{1l}, u_{1g})$ *e* $(m_2, n_2, u_{2l}, u_{2g})$ *duas soluções do Problema* (3) *com as mesmas condições de fronteira e de valor inicial, isto é,*

$$\begin{cases} (n_j)_t + (n_j u_{j_g})_x &= 0 \\ (m_j)_t + (m_j u_{j_l})_x = 0 \\ \alpha_{j_g}[P_j]_x + g\, n_j &= \mu_g [u_{j_g}]_{xx} \\ \alpha_{j_l}[P_j]_x + g\, m_j &= \mu_l [u_{j_l}]_{xx} \\ u_{j_g}(x=0,t) &= u_{j_g}(x=1,t) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \\ u_{j_l}(x=0,t) &= u_{j_l}(x=1,t) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \\ m_j(x,t=0) &= m_0(x), \quad n_j(x,t=0) = n_0(x) \qquad x \in [0,1], \end{cases} \tag{2.173}$$

com

$$(m_j, n_j) \in C([0,T_0]; W^{1,r}) \cap C^1([0,T_0]; L^r) \quad e \quad (u_{j_l}, u_{j_g}) \in C([0,T_0]; W^{2,r}),$$

para $j = 1$ *e* 2*. Então*

$$n_1 = n_2, \quad m_1 = m_2, \quad u_{1l} = u_{2l} \quad e \quad u_{1g} = u_{2g} \quad em\ [0,1] \times [0,T_0].$$

Demonstração. Por (2.173), temos

$$\begin{aligned} (n_1)_t - (n_2)_t = -\left[\left(n_1 u_{1g}\right)_x - \left(n_2 u_{2g}\right)_x\right] = -\big\{(n_1)_x \left(u_{1g} - u_{2g}\right) + (n_1 - n_2)(u_{1g})_x \\ + u_{2g}[(n_1)_x - (n_2)_x] + n_2\left[\left(u_{1g}\right)_x - \left(u_{2g}\right)_x\right]\big\}. \end{aligned} \tag{2.174}$$

e

$$\begin{aligned} (m_1)_t - (m_2)_t = -\left[(m_1 u_{1l})_x - (m_2 u_{2l})_x\right] = -\big\{(m_1)_x (u_{1l} - u_{2l}) + (m_1 - m_2)(u_{1l})_x \\ + u_{2l}[(m_1)_x - (m_2)_x] + m_2\left[(u_{1l})_x - (u_{2l})_x\right]\big\}. \end{aligned} \tag{2.175}$$

Utilizando o mesmo argumento que foi usado para mostrar (2.130) (Lema 2.18) em (2.174) e (2.175), obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^r\right) \leqslant \overline{C}\left(\|(u_{1g}-u_{2g})_x(t)\|_{L^r}\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^{r-1}+\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^r\right) \tag{2.176}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^r\right) \leqslant \overline{C}\left(\|(u_{1l}-u_{2l})_x(t)\|_{L^r}\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^{r-1}+\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^r\right), \tag{2.177}$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Como

$$\begin{aligned}
[u_{1l}(x,t)-u_{2l}]_x(x,t) &= \frac{1}{\mu_l}\int_0^x [(\alpha_{1l}-\alpha_{2l})(P_1)_\xi](\xi,t)d\xi - \frac{1}{\mu_l}\int_0^x [\alpha_{1l}(P_1-P_2)]_\xi(\xi,t)d\xi \\
&+ \frac{1}{\mu_l}\int_0^x \Big[(\alpha_{1l})_\xi (P_1-P_2)\Big](\xi,t)d\xi + g\int_0^x (m_1-m_2)(\xi,t)d\xi \\
&- \frac{1}{\mu_l}\int_0^1\int_0^y \left[(\alpha_{1l}-\alpha_{2l})P_{1\xi}\right](\xi,t)d\xi dy + \frac{1}{\mu_l}\int_0^1\int_0^y [\alpha_{1l}(P_1-P_2)]_\xi(\xi,t)d\xi dy \\
&- \frac{1}{\mu_l}\int_0^1\int_0^y \Big[(\alpha_{1l})_\xi (P_1-P_2)\Big](\xi,t)d\xi dy - g\,x\int_0^1\int_0^y (m_1-m_2)(\xi,t)d\xi dy,
\end{aligned}$$

segue-se, com argumento semelhante ao utilizado em (2.138) (Lema 2.19), que

$$\|(u_{1l}-u_{2l})_x(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{C}_\mu\left(\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}+\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}\right) \tag{2.178}$$

e de forma similar, temos

$$\|(u_{1g}-u_{2g})_x(t)\|_{L^r} \leqslant \overline{C}_\mu\left(\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}+\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}\right) \tag{2.179}$$

para todo $t \in [0, T_0]$ e para toda $\overline{C}_\mu$ constante positiva independente de t.

Combinando (2.176), (2.177), (2.178) e (2.179), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^r+\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^r\right) &\leqslant \overline{C}[\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^r+\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^r \\
&+ \left(\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}+\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}\right)\left(\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^{r-1}+\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^{r-1}\right)]
\end{aligned} \tag{2.180}$$

e utilizando a Desigualdade de Young (ver Proposição 1.41), com $r' = \dfrac{r}{r-1}$ e $r \geqslant 2$, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^r+\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^r\right) &\leqslant \overline{C}\Big[\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^r+\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^r \\
&+ \frac{1}{r}\left(\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}+\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}\right)^r \\
&+ \frac{r-1}{r}\left(\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^{r-1}+\|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^{r-1}\right)^{\frac{r}{r-1}}\Big].
\end{aligned}$$

Por fim, aplicando o Lema 1.39 nos dois últimos termos do lado direito da desigualdade acima, deduzimos

$$\frac{d}{dt}(\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^r + \|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^r) \leqslant \overline{C}\left(\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^r + \|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^r\right),$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Dos valores iniciais [ver $(2.173)_7$], segue

$$n_1(x,0) - n_2(x,0) = n_0(x) - n_0(x) = 0 \quad \text{e} \quad m_1(x,0) - m_2(x,0) = m_0(x) - m_0(x) = 0,$$

para todo $x \in [0,1]$. Daí deduz-se

$$\underbrace{\|n_1(0)-n_2(0)\|_{L^r}^r}_{=0} + \underbrace{\|m_1(0)-m_2(0)\|_{L^r}^r}_{=0} = 0.$$

Assim,

$$\Psi'(t) \leqslant \overline{C}\ \Psi(t) \qquad \text{e} \qquad \Psi(0) = 0$$

onde $\Psi(t) = \|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^r + \|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^r$, para todo $t \in [0, T_0]$ e $\overline{C}$ uma constante positiva.

Segue da Desigualdade de Gronwall (ver Proposição 1.45) que

$$\|n_1(t)-n_2(t)\|_{L^r}^r + \|m_1(t)-m_2(t)\|_{L^r}^r = 0$$

para todo $t \in [0, T_0]$. Portanto,

$$n_1(x,t) = n_2(x,t) \qquad \text{e} \qquad m_1(x,t) = m_2(x,t)$$

para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0, T_0]$.

Lembremos que

$$\rho_{j_g} = \frac{P_j}{a_g^2}, \quad \rho_{j_l} = \rho_{l,0} + \frac{P_j - p_0}{a_l^2} \quad \text{e} \quad P_j = P(m_j, n_j) = \frac{a_l^2}{2}\left[b_j + \sqrt{b^2 + \frac{4a_g^2}{a_l^2}c_j}\,\right],$$

onde

$$\begin{cases} b_j \doteq b(m_j, n_j) = m_j + \dfrac{a_g^2}{a_l^2}n_j - \kappa_0, \\ c_j \doteq c(m_j, n_j) = \kappa_0 n_j. \end{cases}$$

Já que $n_1 = n_2$ e $m_1 = m_2$, então

$$b_1 = b_2 \quad \text{e} \quad c_1 = c_2 \quad \Longrightarrow \quad P_1 = P_2 \quad \Longrightarrow \quad \rho_{1_g} = \rho_{2_g} \quad \text{e} \quad \rho_{1_l} = \rho_{2_l}.$$

E sendo $\alpha_{j_g} = \dfrac{n_j}{\rho_{j_g}}$, $\alpha_{j_l} = \dfrac{m_j}{\rho_{j_l}}$, concluímos que

$$\alpha_{1_g} = \alpha_{2_g} \quad \text{e} \quad \alpha_{1_l} = \alpha_{2_l}.$$

Provado que $n_1 = n_2$, $P_1 = P_2$ e $\alpha_{1g} = \alpha_{2g}$, segue da equação $(2.173)_3$ que

$$[u_{1g}]_{xx} = [u_{2g}]_{xx} \quad \Longrightarrow \quad [u_{1g} - u_{2g}]_x = h_1 \quad \Longrightarrow \quad [u_{1g} - u_{2g}] = h_1 x + h_2$$

com $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$. Utilizando as condições de fronteira $(2.173)_5$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = u_{1g}(0,t) - u_{2g}(0,t) = h_2 \quad &\Longrightarrow h_2 = 0 \\ 0 = u_{1g}(1,t) - u_{2g}(1,t) = h_1 \quad &\Longrightarrow h_1 = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_0]$. Donde concluímos que

$$u_{1g}(x,t) - u_{2g}(x,t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u_{1g}(x,t) = u_{2g}(x,t).$$

De forma similar,

$$u_{1l}(x,t) - u_{2l}(x,t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u_{1l}(x,t) = u_{2l}(x,t)$$

para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0, T_0]$.

Assim,

$$n_1 = n_2, \quad m_1 = m_2, \quad u_{1l} = u_{2l} \quad \text{e} \quad u_{1g} = u_{2g} \quad \text{em } [0,1] \times [0, T_0].$$

□

Portanto, das seções 2.3.6 e 2.3.7, concluímos que existe uma única solução (m, n, u_l, u_g) em $(0,1) \times (0, T_0)$.

Referências

[1] Bartle, R. G. *The Elements of Integration.* John Wiley, 1966.

[2] Boudin, L., Desvillettes, L., Grandmont, C., and Moussa, A. Global existence of solutions for the coupled vlasov and navier-stokes equations. *Differential and Integral Equations 22*, 11/12 (2009), 1247–1271.

[3] Boyer, F., and Fabrice, P. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models.* Springer New York, 2013.

[4] Brennen, C. E. *Fundamentals of Multiphase Flow.* Cambridge University Press, 2005.

[5] Bresch, D., Desjardins, B., Ghidaglia, J.-M., and Grenier, E. Global weak solutions to a generic two-fluid model. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 196*, 2 (2010), 599–629.

[6] Bresch, D., Huang, X., and Li, J. Global weak solutions to one-dimensional non-conservative viscous compressible two-phase system. *Communications in Mathematical Physics 309*, 3 (2012), 737–755.

[7] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, vol. 2. Springer, 2011.

[8] Byrne, H. M., and Owen, M. R. A new interpretation of the keller-segel model based on multiphase modelling. *Jornal of Mathematical Biology 49*, 6 (2004), 604–626.

[9] Cho, Y., Choe, H. J., and Kim, H. Unique solvability of the initial boundary value problems for compressible viscous fluids. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 83*, 2 (2004), 243–275.

[10] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, vol. 19. American Mathematical Soc., 2010.

[11] Evje, S. Weak solutions for a gas-liquid model relevant for describing gas-kick in oil wells. *SIAM Journal on Mathematical Analysis 43*, 4 (2011), 1887–1922.

[12] Evje, S., Flåtten, T., and Friis, H. A. Global weak solutions for a viscous liquid–gas model with transition to single-phase gas flow and vacuum. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 70*, 11 (2009), 3864–3886.

[13] Evje, S., and Karlsen, K. H. Global existence of weak solutions for a viscous two-phase model. *Journal of Differential Equations 245*, 9 (2008), 2660–2703.

[14] Evje, S., and Karlsen, K. H. Global weak solutions for a viscous liquid-gas model with singular pressure law. *Communications on Pure & Applied Analysis 8*, 6 (2009), 1867.

[15] Evje, S., and Wen, H. Analysis of a compressible two-fluid stokes system with constant viscosity. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics 17*, 3 (2015), 423–436.

[16] Evje, S., and Wen, H. Stability of a compressible two-fluid hyperbolic–elliptic system arising in fluid mechanics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications 31* (2016), 610–629.

[17] Folland, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, vol. 40. John Wiley & Sons, 1999.

[18] Golse, F. *Mean Field Kinetic Equations.* Course of Polytechnique, 2013.

[19] Hao, C., and Li, H.-L. Well-posedness for a multidimensional viscous liquid-gas two-phase flow model. *SIAM Journal on Mathematical Analysis 44*, 3 (2012), 1304–1332.

[20] Lemon, G., King, J. R., Byrne, H. M., Jensen, O. E., and Shakesheff, K. M. Mathematical modelling of engineered tissue growth using a multiphase porous flow mixture theory. *Journal of Mathematical Biology 52*, 5 (2006), 571–594.

[21] Leoni, G. *A first course in Sobolev spaces.* American Mathematical Soc., 2017.

[22] Liu, Q., and Zhu, C. Asymptotic behavior of a viscous liquid-gas model with mass-dependent viscosity and vacuum. *Journal of Differential Equations 252*, 3 (2012), 2492–2519.

[23] Prosperetti, A., and Tryggvason, G. *Computational Methods for Multiphase Flow.* Cambridge University Press, 2009.

[24] Waldeland, J. O., and Evje, S. Competing tumor cell migration mechanisms caused by interstitial fluid flow. *Journal of Biomechanics 81* (2018), 22–35.

[25] Waldeland, J. O., and Evje, S. A multiphase model for exploring tumor cell migration driven by autologous chemotaxis. *Chemical Engineering Science 191* (2018), 268–287.

[26] Yeoh, G. H., and Tu, J. *Computational Techniques for Multiphase Flows.* Butterworth-Heinemann, 2019.

[27] Zuber, N., and Findlay, J. A. Average volumetric concentration in two-phase flow systems. *Trans. ASME, J. Heat Transfer 87* (1965), 453–468.