UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Kauê Orlando Pereira

Identidades polinomiais e seus invariantes numéricos

Campinas
2023

Kauê Orlando Pereira

Identidades polinomiais e seus invariantes numéricos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Kauê Orlando Pereira e orientada pelo Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

Campinas
2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P414i

Pereira, Kauê Orlando, 1998-
Identidades polinomiais e seus invariantes numéricos / Kauê Orlando Pereira. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. PI-expoentes. 2. PI-álgebras. I. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

<u>Informações Complementares</u>

Título em outro idioma: Polynomial identities and their numerical invariants
Palavras-chave em inglês:
PI-exponents
PI-algebras
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]
Thiago Castilho de Mello
Antonio Ioppolo
Data de defesa: 28-02-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-5989-3240
- Currículo Lattes do autor: https://lattes.cnpq.br/1732212871733461

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2023 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PLAMEN KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). ANTONIO IOPPOLO

Prof(a). Dr(a). THIAGO CASTILHO DE MELLO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela vida, pela sabedoria, saúde e principalmente por me auxiliar nos momentos mais difíceis da carreira, sempre me mantendo confiante, sem medo, e acima de tudo, fortificando meu coração para cada obstáculo que poderia ocorrer.

Agradeço aos meus pais Cláudio e Ana, e minha tia Luciana, por todo apoio, principalmente nos primeiros anos de graduação.

Agradeço a meu orientador Plamen pela dedicação para com meu trabalho, sempre me auxiliando na matemática, no inglês, e pela motivação também desde a graduação, e inspiração, que me despertou esse amor pela álgebra.

Agradeço os professores da banca Thiago Castilho e Antonio Ioppolo pela dedicação na correção do meu texto, tais foram fundamentais e aprendi muito com as correções.

Agradeço a minha noiva Caroline, por toda paciência, carinho e ajuda principalmente nos tropeços gramaticais.

Agradeço a todos os amigos, em especial Vinícius Von, Arthur, Beatriz, Karina, Samuel, André, Flaviano (Juba), Júlio, Guilherme (da praia), Pedro, Leonardo (Leu), Ever, Sebastian, e meu amigo de longa data Severino.

Agradeço a todos os professores do IMECC, em especial ao Marcelo Santos, Adriano Moura, Lucio Centrone, Gabriel Ponce, Dessislava Hristova, Artem Lopatin, Douglas Duarte, Paulo Ruffino e Diego Ledesma, por todo o incentivo até hoje.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim, agradeço ao apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) no projeto 2020/16595-7.

"Tu és meu refúgio e meu baluarte,
Deus meu em quem confio"
(Bíblia sagrada, salmo 91)

Resumo:

O principal objetivo desta dissertação foi mostrar varias caracterizações de variedades com crescimento polinomial em suas codimensões, tema no qual seguimos os trabalhos de Kemer, Giambruno e Zaicev. Para este feito foi necessário um embasamento na teoria do PI expoente. Neste trabalho provamos o famoso teorema de Giambruno e Zaicev sobre a existência do PI expoente, e para tal prova foi necessário um grande embasamento nos trabalhos de Kemer sobre superalgebras e o Envelope de Grassmann, bem como a bem desenvolvida teoria das representações do grupo simétrico S_n.

Palavras chaves: PI expoente, PI teoria, crescimento polinomial.

Abstract:

The main goal of this dissertation is to show several characterizations of varieties with polynomial growth in their codimensions, following the works of Kemer, Giambruno and Zaicev. In order to achieve this goal, it was necessary to develop a theoretical background on the theory of the PI exponent. In this work we prove the famous theorem due Giambruno and Zaicev about the existence of the PI exponent, and to this end it is necessary to have the foundation of the works of Kemer on superalgebras and the Grassmann Envelope, as well as the theory of representations of the symmetric group S_n.
Keywords: PI exponent, PI theory, polynomial growth.

Sumário

Introdução

Um pouco de história

A pesquisa em álgebra comutativa possibilitou responder a uma série de problemas da geometria algébrica, tais como encontrar os polinômios em variáveis comutativas que se anulam em um dado conjunto de pontos no espaço euclidiano, estudar as propriedades de um conjunto o qual é definido como a solução de um sistema de equações algébricas, ou ainda responder se sob certas condições existe uma equivalência entre um dado sistema infinito de equações algébricas e algum sistema finito de tais equações. Motivando-se destes, e de outros problemas clássicos da geometria algébrica, a PI teoria busca estudar questões semelhantes às descritas acima, porém em um ambiente onde o conjunto de pontos no espaço euclidiano é trocado por álgebras associativas e os polinômios em variáveis comutativas por aqueles nas variáveis não comutativas, elementos da conhecida álgebra associativa livre (ou de maneira equivalente, álgebra tensorial de um espaço vetorial).

O pioneiro do estudo de álgebras com identidades polinomiais pode ser considerado Sylvester o qual em meados de 1880 resolveu por completo um problema na área de invariantes para matrizes 2×2. Em 1922 e 1936 Dehn e Wagner, respectivamente, em estudos sobre geometria projetiva, tiveram um primeiro contato com resultados básicos em PI álgebras. Em 1943, em seu trabalho sobre planos projetivos, Hall mostrou que apenas corpos em geral e a álgebra generalizada dos quatérnios sobre seu centro satisfaziam a identidade polinomial

$$(xy - yx)^2 z - z(xy - yx)^2 = 0.$$

Ressaltamos que esta mesma identidade foi revelada nos trabalhos de Dehn e de Wagner, no contexto das matrizes de ordem 2.

Apoiado neste artigo, Kaplansky em 1948, em seu trabalho "Rings with a polynomial identity", sugeriu que a existência de uma identidade polinomial estava interligada de forma intrínseca com alguma condição de finitude da respectiva álgebra. Este resultado motivou grande interesse no estudo da PI-teoria. Em meados dos anos 50, 60 e 70, Jacobson, Posner, Malcev, Shirshov, Kostrikin, Kaplansky, Levitzki, Amitsur, Razmyslov, fizeram varias contribuições extremamente importantes na área de PI-álgebras.

Um marco importante nesta área foi quando Specht em 1950 propôs um problema que anos depois viria a ser conhecido como o famoso "problema de Specht", no qual ele questionava se o T-ideal de uma álgebra associativa sobre um corpo de característica 0 poderia ser finitamente gerado como um T-ideal. Tal problema foi resolvido parcialmente (isto é, para algumas classes de álgebras) por vários autores. Foi em 1984–1986 quando Kemer desenvolveu uma teoria extremamente complexa na qual mostrava que os T-ideais se comportavam de forma semelhante aos ideais na álgebra dos polinômios em variáveis comutativas. Como consequência, Kemer resolveu em afirmativo o problema de Specht. Entretanto, a prova de Kemer é uma prova de existência; na prática tentar descrever um conjunto finito gerador de um T-ideal de alguma álgebra é uma tarefa extremamente complicada. Por exemplo tal conjunto de geradores é conhecido apenas para as álgebras das matrizes $n\times n$, $n \leq 2$. Devido a este impasse, foi necessária uma outra abordagem para o estudo das identidades polinomiais, a conhecida como "abordagem combinatória"a qual foi introduzida em 1972 por Regev, e é amplamente utilizada até hoje. Posteriormente vários autores, utilizando esta abordagem, obtiveram avanços relevantes no estudo das identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra, ou uma variedade de álgebras. A seguir iremos descrever alguns trabalhos que foram estudados neste texto, os quais são devidos a Kemer, Giambruno e Zaicev. Vale ressaltar que embora deixemos de citar alguns, houve mais pesquisadores que fizeram contribuições imensas nesta área. Para mais informações históricas indicamos fortemente as bibliografias [10], [19].

Tema principal da dissertação

Trabalhando com um corpo K de característica 0, pode-se ver via o processo de linearização, que dada uma identidade polinomial na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$, esta é equivalente a um sistema finito de identidades polinomiais multilineares. Seja P_n o espaço vetorial dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ na álgebra $K\langle X\rangle$, e seja R uma álgebra sobre K. Dado que T-ideais são invariantes por endomorfismos, pode-se ver que P_n, bem como $P_n \cap T(R)$, possuem estruturas de S_n-módulos. Disto, segue que $P_n/P_n \cap T(R)$ também tem a estrutura de um S_n-módulo, e portanto, pode-se utilizar a teoria das representações de S_n para decompor $P_n/P_n \cap T(R)$ como soma direta de S_n-módulos irredutíveis. Em particular, define-se a n-ésima codimensão de R como sendo $c_n(R) = \dim P_n/P_n \cap T(R)$, e então pode-se falar da sequência das codimensões de uma álgebra. Em [36], Regev mostrou que a sequência das codimensões $(c_n(R))_n$ é exponencialmente limitada, consequentemente, como $\dim P_n = n!$, e o crescimento fatorial é maior que o crescimento exponencial, concluí-se que para n suficientemente grande, $P_n \cap T(R)$ se torna quase que inteiramente P_n. Portanto a dimensão de $P_n \cap T(R)$ se torna muito alta, de forma que não é muito viável estudar tal espaço, e uma alternativa seria o estudo de $P_n/P_n \cap T(R)$. Baseado nisso, tornou-se muito mais factível estudar o comportamento assintótico das codimensões de uma álgebra ao invés de estudar de forma concreta os T-ideais. Ainda quando R é uma álgebra sobre K, uma das ferramentas mais poderosas para estudar comportamentos assintóticos das codimensões de R é o chamado PI expoente, o qual é definido por

$$\exp R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(R)}.$$

Em meados dos anos 80, Amitsur conjecturou que o limite acima sempre existia e era um inteiro não negativo, tal conjectura foi confirmada por Giambruno e Zaicev, em [17], o qual é o famoso teorema sobre a existência e integralidade do PI expoente. Vale ressaltar que Kemer já havia mostrado que só há duas possibilidades para o crescimento das codimensões de uma álgebra: crescimento exponencial ou polinomial. Tendo em mãos a existência do PI expoente, bem como sua integralidade, nosso objetivo neste texto foi estudar caracterizações de variedades com crescimento polinomial, por exemplo uma das caracterizações é que uma variedade $\mathscr{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $\exp \mathscr{V} \leq 1$. Outras caracterizações, mais interessantes, mas que exigem mais conceitos, serão dadas adiante.

Um breve passeio pelos capítulos

Os capítulos 1 e 2 são dedicados à apresentação de conceitos básicos na teoria das álgebras associativas e PI álgebras respectivamente. No primeiro capítulo apresentamos conceitos fundamentais na teoria dos módulos e na teoria das álgebras sobre um corpo. Neste mesmo capítulo, não poderiam faltar os clássicos teoremas de Wedderburn–Artin e o teorema de Wedderburn–Malcev, os quais iremos brevemente discorrer.

O teorema de Wedderburn–Artin é de extrema importância na teoria das álgebras associativas pois ele permite "transportar"problemas envolvendo álgebras semissimples para problemas envolvendo uma soma direta de álgebras matriciais, pois o mesmo estabelece que uma álgebra semissimples é isomorfa a uma soma direta de álgebras matriciais sobre determinados anéis de divisão.

O teorema de Wedderburn–Malcev pode ser pensado como uma decomposição de uma álgebra em duas partes, uma parte que pode ser encarada como matrizes, ou pelo menos soma direta de álgebras matriciais, e a outra como sendo uma parte mais "difícil"de trabalhar mas que temos um certo conhecimento a respeito. Em outras palavras, se A é uma álgebra sobre um corpo K pode-se escrever $A = B \oplus rad(A)$, onde B é uma álgebra semissimples e $rad(A)$ é o radical de Jacobson de A. Observe que a decomposição acima é soma direta de subespaços vetoriais, pois B não precisa ser um ideal em A. Se combinado ainda com o teorema de Wedderburn-Artin podemos escrever

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k \oplus rad(A)$$

onde para cada $1 \leq i \leq k$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ e D_i um anel de divisão tal que $A_i \cong M_{n_i}(D_i)$.

Em nosso texto utilizamos constantemente a combinação destes dois teoremas, e de fato, são eles que permitem darmos um "palpite"de quem seria o PI expoente de uma álgebra, como veremos no capítulo 11, e tornar mais "brando"o estudo do PI expoente. As principais bibliografias utilizadas aqui foram [7], [21], [43], [2], [28], [33], [41], [29].

No capítulo 3 introduzimos um invariante numérico que é extremamente útil na teoria das PI álgebras: as séries de Hilbert, as quais estão profundamente interligadas com a sequência das codimensões. Além disso, mostramos um resultado conhecido como "processo de linearização", o qual diz que em característica 0, qualquer identidade polinomial na álgebra associativa livre é equivalente a um sistema finito de identidades multilineares. Este processo possibilita trabalhar com identidades multilineares ao invés de identidades polinomiais quaisquer. Utilizamos para este capítulo o livro de Drensky [10].

Já nos capítulos 4,5 e 6, os principais feitos podem ser resumidos abaixo:

1. Identidades polinomiais na álgebra de Grassmann.

2. Identidades polinomiais na álgebra das matrizes triangulares superiores.

3. Matrizes genéricas

4. O teorema de Amitsur–Levitzki.

5. Polinômios centrais: Construção de Formanek.

Em 1. e 2. os principais resultados apresentados foram os teoremas 4.3 e 4.8, nos quais mostramos que as identidades polinomiais $[x_1, x_2, x_3] = 0$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}] = 0$ formam respectivamente uma base das identidades polinomiais na álgebra de Grassmann G e na álgebra das matrizes triangulares superiores $k \times k$, $U_k(K)$.

Trabalhamos também em 3. com as matrizes genéricas. Nesta seção procuramos evidenciar a maior parte dos detalhes, enfatizando a ideia de especialização, e mostrando o clássico isomorfismo da álgebra das matrizes genéricas R_n com $F(varM_n(K))$, a álgebra relativamente livre determinada por $M_n(K)$.

No tópico 4. foi enfatizado o teorema de Amitsur–Levitzki, o qual estabelece que a identidade standard $s_{2n}(x_1, \ldots, x_n)$ é, a menos de múltiplos escalares, a única identidade polinomial de grau $2n$ na álgebra das matrizes $M_n(K)$. Além disso, se houver alguma outra identidade em $M_n(K)$ necessariamente o grau desta deve ser maior que $2n$. Utilizamos a demonstração dada por Rosset em [40] a qual se baseia na ideia de reduzir o estudo para $M_n(\mathbb{Q})$ e posteriormente utilizar propriedades envolvendo o traço de uma matriz e a álgebra de Grassmann.

Em seguida, em 5. definimos o conceito de polinômios centrais, e utilizando a construção de Formanek, [11], construímos usando matrizes genéricas, um polinômio central na álgebra das matrizes $M_n(K)$, $n \geq 1$. Uma consequência fácil disso é que se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é central em $M_n(K)$, $n > 1$, então $f = 0$ é uma identidade polinomial em $M_{n-1}(K)$.

Nos capítulos 7, 8 e 9, três grandes tópicos foram elucidados, tais estão em ordem abaixo e serão, de maneira breve, individualmente discorridos. O primeiro, o teorema da codimensão de Regev, foi de extrema importância pois como já mencionamos, seu conteúdo mostrou que era muito mais viável trabalhar com o quociente $P_n/P_n \cap T(R)$ de uma álgebra R sobre K ao invés de $P_n \cap T(R)$. Este teorema foi a base para mostrar que produto tensorial de duas PI álgebras era de novo uma PI álgebra, o qual é o segundo tópico em questão. E o último deles é sobre as representações irredutíveis de S_n, que foram a base para se construir o conteúdo dos capítulos seguintes. Nesta seção as principais referências foram [19], [7], [36] e [31].

1. O teorema da codimensão de Regev.

2. Produto tensorial de PI-álgebras.

3. Representações do grupo simétrico S_n $(n \geq 1)$ e aplicações destas às PI-álgebras.

O teorema da codimensão de Regev afirma que se R é uma PI-álgebra que possui uma identidade polinomial de grau $d \geq 1$, então a sequência das codimensões $(c_n(R))_n$, é exponencialmente limitada. Mais precisamente, mostramos que $c_n(R) \leq (d-1)^{2n}$, para cada $n = 0, 1, \ldots$ Para sua demonstração, nos baseamos naquela dada por Latyshev em [31] a qual faz uso do lema de Dilworth e utiliza os conceitos de permutação d-good e d-bad para mostrar que $P_n/P_n \cap T(R)$ é gerado por $x_{\pi(1)}x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} + P_n \cap T(R)$, onde $\pi \in S_n$ é uma permutação d-good.

Em 2. mostramos dois resultados, o primeiro deles fornece uma cota superior para a sequência das codimensões $(c_n(R \otimes S))_n$ do produto tensorial de duas PI-álgebras R e S: $c_n(R \otimes S) \leq c_n(R)c_n(S)$, para cada $n = 0, 1, \ldots$ Isso foi essencial para o teorema 7.10, que o produto tensorial de duas PI-álgebras é de novo uma PI-álgebra. Nesta subseção utilizamos o artigo [36]. Além disso, procuramos detalhar a demonstração de alguns resultados e evidenciando os pontos importantes do artigo. Como última observação sobre 1. e 2., vale mencionar que o corpo K em questão poderia ser tomado sendo arbitrário.

No tópico 3. utilizando o livro de Curtis e Reiner ([7]), fizemos uma revisão da teoria das representações do grupo simétrico S_n. Para a demonstração do principal resultado desta seção (teorema 8.39) usamos as tabelas e diagramas de Young. Posteriormente, na seção 9 apresentamos algumas aplicações da teoria de representações de S_n às PI-álgebras, como por exemplo estudamos $PL_n = P_n \cap L(X)$, álgebra dos polinômios multilineares de Lie de grau n e as representações irredutíveis do grupo geral linear $GL_m(K)$.

O capítulo 10 é dedicado às superalgebras e ao envelope de Grassmann, conceitos que formam o alicerce para a demonstração no capítulo 11 do teorema de Giambruno e Zaicev. Para estes dois utilizamos [16], [19] e [37]. Podemos resumir o capítulo 10 e 11 no esquema de demonstração deste teorema:

1. Mostra-se que o resultado do teorema é válido para o envelope de Grassmann de alguma superalgebra, primeiro finitamente gerada, e depois de dimensão finita.

2. Utilizando técnicas desenvolvidas por Kemer, se demonstra o teorema para o caso geral.

De forma extremamente resumida, no item 1. se faz o uso constante dos diagramas de Young na obtenção de condições para que uma dada partição induza uma identidade no envelope de Grassmann de uma superalgebra. Em relação ao item 2. o que está por trás é o teorema de Kemer: para qualquer variedade não trivial $\mathscr{V}$, existe uma superalgebra de dimensão finita $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ tal que $\mathscr{V} = var(G(A))$.

Por fim, o capítulo 12 é o principal do nosso trabalho. Os tópicos abordados são:

1. Separação de T-ideais pela álgebra de Grassmann.

2. Classificação de variedades com crescimento quase polinomial.

3. Caracterização de variedades com crescimento polinomial.

O primeiro dos tópicos foi de extrema importância para os demais, pois vimos como a álgebra de Grassmann G pode interferir no ideal de identidades de uma variedade apenas estando contida nela. Mais precisamente, dentre as outras caracterizações apresentadas no teorema 12.5 vimos que se $\mathscr{V}$ é uma variedade não própria de álgebras associativas, então $\mathscr{V}$ é gerada por uma álgebra de dimensão finita se, e somente se, $G \notin \mathscr{V}$. Este resultado foi utilizado em 3. para fornecer duas caracterizações de variedades com crescimento polinomial: se $\mathscr{V}$ é uma variedade não própria, então $\mathscr{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $\exp \mathscr{V} \leq 1$ e este último se, e somente se, G, $UT_2 \notin \mathscr{V}$. Outras duas caracterizações foram fornecidas e estas se encontram no teorema 12.21. Em relação a 2. vimos que existem variedades com crescimento exponencial, com a propriedade de que suas subvariedades próprias têm crescimento polinomial, tais são chamadas de variedades com crescimento quase polinomial. Dois exemplos de tais variedades são $var(G)$ e $var(UT_2)$. O mais interessante é que estas são as únicas variedades com crescimento quase polinomial, ver teorema 12.14. Para o estudo de tais tópicos utilizamos os trabalhos de Kemer ([23], [24]) Giambruno e Zaicev ([18]).

Algumas palavras ao leitor

Para nosso propósito na dissertação, a caracterização de variedades com crescimento polinomial, trabalhamos sobre corpos de característica 0. Entretanto, sempre que possível, tentamos evidenciar caso alguma parte do texto não precisasse de restrições no corpo. Neste texto tentamos detalhar os resultados e sempre que possível demonstrá-los. Porém às vezes, para não fugir muito do objetivo do texto, apenas referências foram dadas. Adicionamos no primeiro capítulo apenas algumas definições pertinentes a nosso trabalho, como por exemplo a definição de módulos e álgebras sobre um corpo, logo é importante ressaltar que estaremos assumindo uma certa familiaridade do leitor com conceitos introdutórios básicos em álgebras, tais como teoria dos grupos, álgebra linear e rudimentos na teoria das álgebras comutativas. O leitor interessado pode ver estes conceitos básicos em ([2], [29], [41], [43]).

1 Conceitos básicos em álgebras associativas

Todos os anéis trabalhados aqui serão anéis com unidade, por isso às vezes iremos apenas considerar um anel qualquer sem fazer qualquer alusão ao fato deste possuir unidade. Aqui usamos os livros de [28], [29], [41] e [21].

Definição 1.1. *Seja R um anel. Um R-módulo à esquerda é um grupo abeliano aditivo M equipado com um produto de R (multiplicação escalar) $\cdot : R\times M \to M$, $(r,m)\mapsto r\cdot m$, satisfazendo os seguintes axiomas: Para quaisquer r,$r' \in R$ e m,$m' \in M$*

- 1) $r\cdot(m+m') = r\cdot m + r\cdot m'$
- 2) $(r+r')\cdot m = r\cdot m + r'\cdot m$
- 3) $(rr')\cdot m = r(r'\cdot m)$
- 4) $1\cdot m = m$.

Notação: É comum na definição acima escrever rm ao invés de $r\cdot m$. Além disso, um R-módulo à esquerda M é frequentemente denotado por ${}_RM$.

• Se R é um anel qualquer, um R-módulo á direita N é um grupo aditivo abeliano munido de um produto $\cdot : R\times N \to N$, $(r,n)\mapsto nr$ satisfazendo condições análogas às estabelecidas em 1.1.

• Se M é um R-módulo à esquerda, um subconjunto $N \subseteq M$ é um submódulo de M se N tem a estrutura de um R-módulo. Equivalentemente, N é um submódulo de M se, e somente se, N é fechado pela adição, e $rN \subseteq N$, para qualquer $r\in R$.

Notação: Se R é um anel qualquer e I é um ideal à esquerda em R, iremos escrever $I \trianglelefteq_l R$, e caso I seja um ideal à direita, $I \trianglelefteq_r R$. Além disso, se I é um ideal bilateral (escreve-se apenas ideal), a notação será $I \trianglelefteq R$. Por fim, se M é um R-módulo à esquerda ou à direita e N for um submódulo de M, então escreveremos $N \leq M$.

Definição 1.2. *Uma K-álgebra ou álgebra sobre o corpo K, é um espaço vetorial A munido de uma operação $\cdot : A\times A \to A$ satisfazendo*

1) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
2) $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$
3) $(\alpha a)\cdot b = a\cdot(\alpha b) = \alpha(a\cdot b)$
4) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

para quaisquer a, b, $c\in A$ e $\alpha \in K$.

Notação: No contexto da definição acima, é comum omitir "$\cdot$ ", isto é, ao invés de $a\cdot b$, escreve-se simplesmente ab.

• Dada uma álgebra A, o subconjunto $S\subseteq A$ é uma subálgebra de A, se para quaisquer s, $r\in S$, $sr\in S$. Além disso, $I\subseteq A$ é um ideal à esquerda (respectivamente à direita) se I é subespaço e $RI\subseteq I$ (respectivamente $IR \subseteq I$). Um subconjunto $J\subseteq A$ que é um ideal à esquerda e à direita é chamado de ideal bilateral ou simplesmente ideal.

• Um anel D é uma álgebra de divisão, se $1\neq 0$ e cada elemento não nulo de D possui inverso multiplicativo. Vejamos que se D é uma álgebra de divisão, então $Z(D)$ é um corpo. Para isso, basta verificar que se $0\neq x\in Z(D)$, então $x^{-1}\in Z(D)$. Dado $y\in D$

$$x^{-1}y = (xy^{-1})^{-1} = (y^{-1}x)^{-1} = yx^{-1}$$

e assim, de fato, $x^{-1}\in Z(D)$.

Exemplo 1.3. 1) *O espaço vetorial $M_n(K)$ munido do produto usual de matrizes tem uma estrutura de álgebra.*

2) *Considere $\mathbb{H}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com base $\{1,i,j,k\}$ e com um produto "$\cdot$"definido entre os elementos da base pela tabela*

$\cdot$	*1*	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

*A álgebra real $(\mathbb{H},\cdot)$ é chamada de **álgebra dos quatérnios reais.** Ela é de divisão.*

Definição 1.4. *Se R é um anel e M, N são R-módulos à esquerda, então uma função $f\colon M \to N$ é um homomorfismo de R-módulos à esquerda se satisfaz*

1) $f(m+m') = f(m) + f(m')$

2) $f(rm) = rf(m)$

para quaisquer m, $m' \in M$ e $r \in R$.

Observação: A definição de um R-homomorfismo de módulos à direita é análoga à feita na definição acima.

• Um homomorfismo de R-módulos à esquerda f é um monomorfismo (ou mergulho) caso f seja injetor, um epimorfismo se for sobrejetor, e um isomorfismo se esta for uma função biunívoca.

Exemplo 1.5. *A função $L\colon R \to End({}_RR)$, $\quad r \mapsto [L(r)\colon R \to R, \quad a \mapsto ra]$ é um homomorfismo de anéis.*

Definição 1.6. *Sejam $(A_1, *)$, $(A_2, \star)$ duas álgebras sobre um corpo K. Uma transformação linear $\phi\colon A_1 \to A_2$ é um homomorfismo de álgebras se $\phi(a * b) = \phi(a) \star \phi(b)$, para quaisquer a, $b \in A_1$.*

• Os conceitos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo para homomorfismo de álgebras são análogos aos estabelecidos após a definição 1.4.

Definição 1.7. *Seja R um anel e $U \subseteq R$ um subconjunto qualquer. Considerando os conjuntos*

$$\Omega_l = \{I \trianglelefteq_l R : U \subseteq I\}, \quad \Omega_r = \{I \trianglelefteq_r R : U \subseteq I\}, \quad \Omega = \{I \trianglelefteq R : U \subseteq I\}$$

dizemos que os ideais unilaterais $(U)_l = \bigcap_{I \in \Omega_l} I$, $(U)_r = \bigcap_{J \in \Omega_r} J$ são os ideias à esquerda e à direita, respectivamente, gerados pelo conjunto U. Além disso, o ideal $(U) = \bigcap_{Y \in \Omega} Y$ é o ideal gerado por U.

Proposição 1.8. *Com as notações da definição acima, temos*

$$(U)_l = \{\sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda u_\lambda, \quad r_\lambda \in R, u_\lambda \in U, \quad |\Lambda| < \infty\}, \quad (U)_r = \{\sum_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda r_\lambda, \quad r_\lambda \in R, u_\lambda \in U, \quad |\Lambda| < \infty\}$$

e

$$(U) = \{\sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda u_\lambda r_\lambda, \quad r_\lambda, s_\lambda \in R, u_\lambda \in U, \quad |\Lambda| < \infty\}.$$

• Seja M um R-módulo à esquerda e $X \subseteq M$, o submódulo (X) obtido pela intersecção de todos submódulos de M que contenham X é chamado de o submódulo de M gerado por X. Segue que $(X) = \{\sum_{\mu \in \Lambda} r_\lambda x_\lambda, r_\lambda \in R, x_\lambda \in X \quad |\Lambda| < \infty\}$.

Definição 1.9. *(Módulos livres) Um R-módulo à esquerda F é **livre** se existe um conjunto (finito ou não) de índices Λ tal que $F \cong \bigoplus_\lambda R_\lambda$ onde $R_\lambda = (b_\lambda) \cong R$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Além disso, $\mathcal{B} = \{b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ é uma base de F.*

Proposição 1.10. *(Propriedade universal de módulos livres) Seja F um R-módulo à esquerda livre com base $\mathcal{B}$. Então, para qualquer R-módulo à esquerda M e cada função $\gamma\colon \mathcal{B} \to M$ existe um único R-homomorfismo de módulos à esquerda $g\colon F \to M$ tal que o diagrama abaixo comuta, isto é, $g\mid_{\mathcal{B}} = \gamma$.*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, dotted, "g"] & \\
\mathcal{B} \arrow[u, bend left, "i"] \arrow[r, "\gamma"'] & M
\end{tikzcd}$$

1.1 O teorema de Wedderburn–Artin

Definição 1.11. *a) Diremos que um R-módulo à esquerda M é **simples**, se os únicos submódulos de M são os triviais, isto é, 0 e M.*

*b) Diremos que um R-módulo à esquerda M é **semissimples** (ou **completamente redutível**), se para cada $N \leq M$, existe $N' \leq M$ tal que $M = N \oplus N'$.*

• Se M é semissimples e $N \leq M$, então N e M/N são semissimples.

Definição 1.12. *Um anel R é simples se este não possui ideais bilaterais diferentes dos triviais.*

Teorema 1.13. *Para um R-módulo M, as afirmações são equivalentes*
1) *M é semissimples.*
2) *Existe uma família de submódulos simples $\mathcal{F}$ tal que $M = \bigoplus_{N \in \mathcal{F}} N$.*
3) *Existe uma família de submódulos simples $\mathcal{G}$ tal que $M = \sum_{U \in \mathcal{G}} U$.*

Definição 1.14. *Diz-se que um anel R é semissimples à esquerda, se R é semissimples como um R-módulo esquerda. Análogo à direita.*

Definição 1.15. *Dizemos que um R-módulo à esquerda V é fiel se não existe $0 \neq r \in R$ tal que $rv = 0$ para todo $v \in V$.*

Teorema 1.16. *Para um anel R as afirmações são equivalentes*
1) *${}_RR$ é semissimples.*
2) *Todos os R-módulos à esquerda são semissimples.*
3) *Se $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta*[1] *de R-módulos à esquerda, então $M \cong N \oplus P$.*

• Seja R um anel semissimples à esquerda. Então, pode-se escrever $R = \bigoplus_{i \in \Lambda} L_i$, onde cada L_i é um ideal minimal à esquerda. Dessa forma, para cada $i \in \Lambda$, existem $e_i \in L_i$ tais que $1 = \sum_{i \in \Lambda} e_i$.

Agora, vejamos que se $r \in R$ e $r = \sum_{i \in \Lambda} r_i$, então, dado que $r = 1r$, segue que para cada $i \in \Lambda$, $r_i = re_i$, e como consequência tem-se que se $e_i = 0$, então $L_i = 0$, para cada $i \in \Lambda$. Portanto, a menos de indexação, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $R = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_m$.

• Segue em particular do item acima que se R é semissimples à esquerda, então R é artiniano e noetheriano à esquerda.

Vamos agora descrever a estrutura de um anel semissimples.

• Um anel de divisão D é simples pois qualquer ideal não nulo em D contém a unidade de D. Além disso, ${}_DD$ é simples como um D-módulo à esquerda. Em particular, qualquer espaço vetorial V sobre D é semissimples.

O teorema abaixo caracteriza os ideais bilaterais na álgebras das matrizes.

Teorema 1.17. *Seja R um anel e $M_n(R)$ o anel das matrizes $n \times n$ sobre R. Então, se $I \trianglelefteq M_n(R)$, existe $\mathscr{J} \trianglelefteq R$ tal que $I = M_n(\mathscr{J})$. Em particular, se R é simples, então $M_n(R)$ é simples.*

Observação 1.18. *Dado um anel R, definimos o anel oposto de R (e escreve-se R^{op}) definindo o seguinte produto em R: $x \star y := yx, \quad x, y \in R$.*

Seja V um R-módulo à esquerda e $End({}_RV)$ o anel dos R-homomorfismos à esquerda de V. Observemos que escrevendo de forma natural a ação de $End({}_RV)$ em V, $(f(v), \quad v \in V, f \in End({}_RV))$, o grupo aditivo V se torna um $(End({}_RV))^{op}$-módulo à direita. De fato, é suficiente verificar a 4º) condição na definição de módulos: Dados f, $g \in End({}_RV)$ e $v \in V$, temos $v(f \star g) = v(gf) = gf(v)$, $(vf)g = f(v)g = g(f(v)) = gf(v)$.

Isso é equivalente a exigir que $End({}_RV)$ aja em V à direita, isto é, podemos considerar $(v)f$ ao invés de $f(v)$, $f \in End({}_RV), v \in V$. De forma análoga se faz isso para módulos à direita. Neste caso, se V é um R-módulo à direita, então $End(V_R)$ age em V pela esquerda, ou seja, via a ação $f(v)$, $f \in End(V_R)$, $v \in V$. Feita esta observação, podemos transitar livremente por estas duas noções.

Proposição 1.19. *Seja D um anel de divisão e $R = M_n(D)$. Então*
1) *R é simples, semissimples à esquerda, artiniano à esquerda e noetheriano à esquerda.*
2) *R tem (a menos de isomorfismo) um único módulo simples à esquerda V. Além disso, R age de forma fiel sobre V e*

$${}_RR \cong nV = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n}.$$

3) *O anel $End({}_RV)$ visto como um anel de operadores à direita em V é isomorfo a D.*

Teorema 1.20. *(Teorema de Wedderburn-Artin) Seja R um anel qualquer semissimples à esquerda. Então*

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r)$$

onde $D_1,\ldots,D_r$ são anéis de divisão adequados e $n_1,\ldots,n_r \in \mathbb{Z}_{>0}$. Além disso, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, n_j e D_j são unicamente determinados e há exatamente r submódulos simples à esquerda sobre R que são dois a dois não isomorfos.

[1]Uma sequência de módulos e homomorfismos $\longrightarrow N_1 \xrightarrow{f_1} N_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \quad N_i \xrightarrow{f_i} N_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$ é dita exata se para cada i, $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$. Uma sequência exata da forma $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ é chamada de sequência exata curta.

Antes de demonstrarmos o teorema de Wedderburn-Artin iremos fazer alguns resultados auxiliares que irão nos ajudar na sua demonstração.

Lema 1.21. *Seja R um anel com ideais indecomponíveis $B_1,\ldots,B_r$ e $B'_1,\ldots,B'_s$ tais que*

$$R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r = B'_1 \oplus \cdots \oplus B'_s.$$

Então $r = s$ e existe $\sigma \in S_r$ tal que $B'_i = B_{\sigma(i)}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Demonstração. Considerando a primeira soma $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ podemos escrever $B_i = Re_iR$, onde e_i é um idempotente central que atua como unidade em B_i. Dessa forma, $B_1,\ldots,B_r$ podem ser considerados anéis e o ideal B'_1 é da forma $B'_1 = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$, onde $I_1, \ldots, I_r$ são ideais respectivamente em $B_1, \ldots, B_r$. Dado que B'_1 é indecomponível, existe $j_1 \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tal que $B'_1 = 0 \oplus \cdots I_{j_1} \oplus 0 \cdots \oplus 0$, e assim, $B'_1 \subseteq B_{j_1}$. Analogamente mostra-se que $B_{j_1} \subseteq B'_k$ para algum $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, e como consequência, $B'_1 \subseteq B'_k$. Logo $k = 1$, e portanto $B'_1 = B_{j_1}$. Procedendo dessa forma, concluí-se que $r = s$, e se tomarmos $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$ teremos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ vale, $B'_i = B_{\sigma(i)}$. □

Lema 1.22. *(Schur) Sejam R um anel e V um R-módulo à esquerda simples. Então $End(_RV)$ é um anel de divisão.*

Demonstração. Dado $0 \neq f \in End(_RV)$ precisamos mostrar que f possui uma inversa. É claro que se possuir esta deve estar em $End(_RV)$ pois $f^{-1}(rx) = f^{-1}(f(ry)) = ry = rf^{-1}(f(y)) = rf^{-1}(x)$.

Agora, se $f \neq 0$ então $f\colon {_RV} \to {_RV}$ deve ser injetora pois como V é simples, $Ker(f) = V$ ou $Ker(f) = 0$, o primeiro caso não pode ser verificado pois f não é nula, só resta então $Ker(f) = 0$. Analogamente se vê que $Im(f) = V$. Dessa forma, f é um isomorfismo e portanto f^{-1} existe. □

Agora, seja $\mathfrak{a}$ um ideal minimal à esquerda de um anel R e $\mathscr{D}_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{b} \trianglelefteq_l R : \quad \mathfrak{b}-minimal \quad {_R\mathfrak{a}} \cong {_R\mathfrak{b}}\}$. Dessa forma, podemos considerar a soma $B_{\mathfrak{a}} := \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{D}_{\mathfrak{a}}} \mathfrak{b}$.

Lema 1.23. *Utilizando a notação acima temos:*
a) $B_{\mathfrak{a}}$ é um ideal de R.
b) Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}$ são dois ideais minimais à esquerda em R não isomorfos, então $B_{\mathfrak{a}}B_{\mathfrak{d}} = 0$.

Demonstração. Por conta da definição de $B_{\mathfrak{a}}$, para mostrarmos $a)$ é suficiente ver que para qualquer ideal minimal à esquerda $\mathfrak{b} \in \mathscr{D}_{\mathfrak{a}}$ e qualquer $r \in R$ tem-se $\mathfrak{b}r \subseteq B_{\mathfrak{a}}$. Dado $r \in R$ considere o homomorfismo de R-módulos $T_r\colon \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}r$, $b \mapsto br$.

Dessa forma, como $\mathfrak{b}$ é minimal, $T_r \equiv 0$ (i.e $\mathfrak{b}r = 0$) ou $\mathfrak{b}r \cong \mathfrak{b} \cong \mathfrak{a}$. Em cada um dos casos, $\mathfrak{b}r \subseteq B_{\mathfrak{a}}$.

Em $b)$, notemos que se $\mathfrak{a}\mathfrak{d} = 0$, então para $\mathfrak{b} \in \mathscr{D}_{\mathfrak{a}}$ e $\mathfrak{c} \in \mathscr{D}_{\mathfrak{d}}$, temos $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = 0$. De fato, suponha por absurdo que $\mathfrak{b}\mathfrak{c} \neq 0$. Dessa forma, existe $0 \neq x = bc \in \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, com $b \in \mathfrak{b}$ e $c \in \mathfrak{c}$, e portanto, se definirmos

$$\psi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{c}, \quad y \mapsto yc$$

tem-se que ψ é um homomorfismo de R-módulos não trivial, e com isso, pelo lema de Schur, $\mathfrak{b} \cong \mathfrak{c}$, o qual é um absurdo. Logo, $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = 0$, e por arbitrariedade de $\mathfrak{b} \in \mathscr{D}_{\mathfrak{a}}$ e $\mathfrak{c} \in \mathscr{D}_{\mathfrak{d}}$, concluí-se que $B_{\mathfrak{a}}B_{\mathfrak{d}} = 0$.

Com isso, do feito acima para se mostrar $b)$, é suficiente ver que $\mathfrak{a}\mathfrak{d} = 0$. Suponha que exista $d \in \mathfrak{d}$ tal que $\mathfrak{a}d \neq 0$. Dessa forma, $\mathfrak{a}d = \mathfrak{d}$. Porém, analogamente ao visto na parte $a)$, $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}d = \mathfrak{d}$. □

Lema 1.24. *Seja $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ um R-módulo à esquerda. Se $V_1 \cong V_2 \cong \cdots \cong V_n \cong L$, então*

$$End(_RV) \cong M_n(End(_RL)).$$

Demonstração. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ denote por ϕ_i um isomorfismo de V_i para L. Defina

$$\theta\colon End(_RV) \to M_n(End(_RV)), \quad (\phi_j \pi_j f \iota_i \phi_i^{-1})_{ij}$$

onde π_j e ι_i são as projeções e injeções canônicas respectivamente. Afirmamos que θ é um isomorfismo de anéis. De fato, note que

$$\theta(f)\theta(g) = \left(\sum_k (\phi_j \pi_j g \iota_k \phi_k^{-1})(\phi_k \pi_k f \iota_i \phi_i^{-1}) \right)_{ij} = \left(\sum_k (\phi_j \pi_j g \iota_k \pi_k f \iota_i \phi_i^{-1}) \right)_{ij}$$

e assim

$$\theta(f)\theta(g) = \left(\phi_j\pi_j g\sum_k(\iota_k\pi_k)f\iota_i\phi_i^{-1})\right)_{ij} = \left(\phi_j\pi_j gf\iota_i\phi_i^{-1})\right)_{ij} = \theta(fg)$$

pois $\sum_k \iota_k\pi_k$ é a identidade em $End(_RV)$. É imediato ver que θ é homomorfismo de grupos aditivos. Agora, seja $A \in M_n(End(_RV)) = (y_{ij})_{ij}$. Observando que se $i \neq j$, $\pi_i\iota_j \neq 0$, defina $f\colon V \to V$ por $f(x) = \sum_{h,s}\iota_h\phi_h^{-1}y_{hs}\phi_s\pi_s$.

É imediato que f é um homomorfismo de módulos e além disso, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos

$$\phi_j\pi_j\sum_{h,s}\iota_h\phi_h^{-1}y_{hs}\phi_s\pi_s\iota_i\phi_i^{-1} = \sum_{h,s}\phi_j\pi_j\iota_h\phi_h^{-1}y_{hs}\phi_s\pi_s\iota_i\phi_i^{-1} = y_{ij}$$

logo, $\theta(f) = A$. Mostra-se facilmente que θ é injetora. □

• A partir de um anel R, pode-se construir outro anel R^{op} no qual o conjunto base é o próprio R mas o produto é definido

$$s \star t := ts, \quad \text{para quaisquer} \quad s, t \in R.$$

Tal anel é chamado de anel oposto de R.

A próxima proposição não será demonstrada, porém o procedimento de sua prova é rotineiro e pode ser encontrado na página 530 de [41].

Proposição 1.25. *Se R é um anel, então $M_n(R^{op}) \cong (M_n(R))^{op}$.*

Observação 1.26. *Observemos que $R^{op} \cong End(_RR)$. De fato, defina $\phi\colon End(_RR) \to R^{op}$ por $\phi(f) = f(1)$ e vejamos que $\phi(f \circ g) = f \circ g(1) = f(g(1)) = f(g(1) \cdot 1) = g(1)f(1)$. Por outro lado, se $\star$ denota o produto no anel oposto, i.e. $s \star t = ts$, então $\phi(f) \star \phi(g) = \phi(g)\phi(f) = g(1)f(1)$. Portanto $\phi(f \circ g) = \phi(f) \star \phi(g) = \phi(g)\phi(f)$; o fato de ϕ ser biunívoca é imediato.*

Corolário 1.27. *Se V é um módulo à esquerda sobre um anel de divisão D e $\dim_D V = n$, então*

$$End(_DV) \cong M_n(D)^{op}.$$

Demonstração. Podemos decompor V como soma direta de módulos de dimensão 1 sobre D da seguinte forma $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. Além disso, como $\dim_D V_i = 1$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, segue que $V_1 \cong \cdots \cong V_n \cong D$, e portanto, pelo lema 1.24

$$End(_DV) \cong M_n(End(_DD)) \overset{1.26}{\cong} M_n(D^{op}) \overset{1.25}{\cong} M_n(D)^{op}.$$ □

Por fim, enunciaremos o teorema de Jordan–Hölder cuja demonstração pode ser encontrada em [33] (pág. 162).

Uma sequência de R-módulos da forma $0 = M_r \subsetneqq M_{r-1} \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_0 = M$ que não admite nenhum refinamento próprio é uma sequência de composição. Esta última condição é equivalente a exigir que para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$ o módulo quociente M_i/M_{i+1} seja simples.

Teorema 1.28. *(Teorema de Jordan-Hölder) Sejam M um R-módulo e*

$$0 = M_r \subsetneqq M_{r-1} \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_0 = M, \quad 0 = N_s \subsetneqq N_{s-1} \subsetneqq \cdots \subsetneqq N_1 \subsetneqq N_0 = M$$

duas sequências de decomposição em M. Então, $r = s$ e existe uma permutação μ do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$ tal que $M_i/M_{i+1} \cong N_{\mu(i)}/N_{\mu(i)+1}$.

Vamos então à demonstração do teorema de Wedderburn-Artin.

Demonstração. (Teorema de Wedderburn–Artin) Suponha que R seja semissimples. Dessa forma, por definição, podemos decompor $_RR$ como soma direta de ideais minimais à esquerda

$$_RR = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \mathfrak{a}_r \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \tag{1}$$

Sem perda de generalidade pode-se assumir que $\{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r\}$ é um sistema completo de ideais minimais à esquerda, isto é, para cada $i \in \{r+1, \ldots, n\}$, $\mathfrak{a}_i$ é isomorfo a um dos $\mathfrak{a}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, e os ideais $\{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r\}$ não são isomorfos entre si. Agora, definindo $B_1 = B_{\mathfrak{a}_1}, \ldots, B_r = B_{\mathfrak{a}_r}$, tem-se pelo lema 1.21 que cada B_i é um ideal de R, $B_iB_j = 0$ para cada $i \neq j$ e além disso $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$.

A Eq. 1 induz na seguinte sequência de decomposição

$$0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_j \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n = R.$$

Se $\mathfrak{a}$ é outro ideal minimal à esquerda de R, podemos considerar outra sequência de composição para R da forma $0 \subseteq \mathfrak{a} \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n = R$, e portanto, pelo teorema de Jordan–Hölder, existe $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tal que $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}$, e assim, $B_{\mathfrak{a}} = B_k$. Dado que R é artiniano à esquerda, B_i também é, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Vamos mostrar agora que $B_1, \ldots, B_r$ são simples. Dado $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, seja $0 \neq I$ um ideal de B_i. Dado $r \in R$ escreva, $r = r_1 + \cdots + r_r$, e assim, se $x \in I$

$$rx = r_1x + \cdots + r_ix \cdots + \cdots + r_rx = r_ix \in B_i \subseteq R$$

e portanto, I é um ideal de R. Dessa forma, existe um ideal minimal à esquerda $\mathfrak{a} \subseteq I$. Como $\mathfrak{a} \subseteq B_i$, segue que $B_{\mathfrak{a}} = B_i$. Vamos mostrar que qualquer $\mathfrak{b} \in \mathscr{D}_{\mathfrak{a}}$ deve necessariamente estar contido em I. Seja $\mathfrak{b} \in \mathscr{D}_{\mathfrak{a}}$ e considere um isomorfismo $\Phi\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{a}$ é um somando direto de R, existe um elemento idempotente $e \in \mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{a} = Re$. Com isso $\mathfrak{a}e = (Re)e = \mathfrak{a}$ e como implicação, $\mathfrak{b} = \Phi(\mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a}e) = \mathfrak{a}\phi(e) \subseteq I$. Segue então que $B_i = B_{\mathfrak{a}} \subseteq I$ e assim, $I = B_i$.

Dessa forma, podemos escrever R da forma $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$ e assim

$$R^{op} \cong End(R_R) \cong End(_RB_1) \oplus \cdots \oplus End(_RB_r). \tag{2}$$

Agora, pelo lema 1.24, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$End(_RB_j) \cong M_{n_j}(End(_R\mathfrak{a}_j))$$

por outro lado, pelo lema de Schur, 1.22 $D_j := End(_R\mathfrak{a}_j)$ é um anel de divisão. Concluímos então que $R^{op} \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r)$. Mas, pelo corolário 1.27

$$R = (R^{op})^{op} \cong M_{n_1}(D_1)^{op} \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r)^{op} \cong M_{n_1}(D_1^{op}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r^{op})$$

e daí, primeira parte do teorema segue pois $D_1^{op}, \ldots, D_r^{op}$, também são anéis de divisão. A parte da unicidade do teorema segue pelo lema 1.21. □

1.2 O radical de Jacobson

Iremos aqui brevemente discorrer sobre o radical de Jacobson, o qual é um ideal de extrema importância no estudo dos anéis: supondo que o anel em questão é artiniano à esquerda, um anel é semissimples se, e somente se, seu radical de Jacobson é nulo (1.34) . Ele é utilizado para demonstrar o teorema de Hopkins e Levitzki, o qual diz que se um anel é artiniano à esquerda, então este é também noetheriano à esquerda. A recíproca entretanto de tal resultado não é verdadeira, basta considerar o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$, este é noetheriano pelo teorema fundamental da aritmética porém não é artiniano pois por exemplo a cadeia decrescente: $\cdots \subseteq 8\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$ não se estabiliza. Um outro exemplo mais sofisticado é o anel triangular $A = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ (para mais detalhes ver [28]).

Nota: Os resultados nesta subseção são encontrados facilmente na literatura, por exemplo em [41], e por esta razão não iremos demonstrá-los.

Definição 1.29. *Dado um anel R, o radical de Jacobson de R (denotado por $rad(R)$) é definido como sendo a interseção de todos os ideais maximais à esquerda em R.*

Exemplo 1.30. *1) Se $R = \mathbb{Z}$, como em qualquer domínio de fatoração única os ideais primos são maximais, segue que*

$$rad(\mathbb{Z}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(R)} \mathfrak{p} = \bigcap_{p \in \mathbb{Z}-primo} (p) = 0.$$

2) Se R é uma álgebra afim sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$, i.e R é finitamente gerada como uma $\mathbb{C}$-álgebra, então podemos escrever $R \cong \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]/\mathfrak{a}$ onde $\mathfrak{a}$ é um ideal em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$. Se definirmos o radical de $\mathfrak{a}$ como sendo

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m] : \quad f^r \in \mathfrak{a}, \quad para\ algum \quad r \in \mathbb{N}\}$$

pelo teorema de Hilbert Nullstellensatz ([43], Theorem 14.6), $\sqrt{a}$ é a interseção de todos os ideais maximais de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$ contendo $\mathfrak{a}$. Dessa forma, segue imediatamente que $rad(R) = \sqrt{(0)}$.

3) Pode-se verificar (vide página 61- exemplo (7) de [28]) $rad(M_n(R)) = M_n(rad(R))$ para qualquer anel R e $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.31. *Dado um anel R, as condições são equivalentes*

a) $x \in rad(R)$

b) Para cada $r \in R$, o elemento $y = 1 - rx$ tem uma inversa à esquerda.

c) Dado qualquer R-módulo simples à esquerda M $xM = 0$.

Proposição 1.32. *1) Se R é um anel e I é um ideal à esquerda em R o qual é nilpotente, então $I \subseteq rad(R)$.*

2) Se R é um anel artiniano à esquerda, então $rad(R)$ é um ideal à esquerda nilpotente.

Embora tenhamos começado a definição do radical de Jacobson a partir de ideais maximais à esquerda, poderíamos ter começado este a partir dos ideais maximais à direita, e isto é garantido pelo resultado abaixo, o qual implica que ambas as definições coincidem. Em outras palavras, $rad(R)$ é um ideal bilateral de R.

Proposição 1.33. *1) Se R é um anel e $U(R)$ é o grupo (multiplicativo) dos elementos invertíveis de R, então $rad(R) = \{x \in R : 1 + rxs \in U(R), \quad para \quad quaisquer \quad r, s \in R\}$.*

2) Se R é um anel e P é a interseção de todos seus ideais maximais à direita, então $P = rad(R)$.

Teorema 1.34. *Um anel R é semissimples à esquerda se, e somente se, R é artiniano à esquerda e $rad(R) = 0$.*

• A condição de cadeia decrescente é necessária. De fato, seja $R = \mathbb{Z}$, então R não é artiniano à esquerda pois, por exemplo, a cadeia $2\mathbb{Z} \supsetneq 2^2\mathbb{Z} \supsetneq 2^3\mathbb{Z} \supsetneq \cdots \supsetneq 2^n\mathbb{Z} \supsetneq \cdots$ é uma cadeia decrescente em R que não se estabiliza. Por outro lado, R não é semissimples pois qualquer ideal J em R intersecta $2\mathbb{Z}$. Entretanto, como visto acima $rad(R) = 0$.

1.3 Anéis primos e semiprimos

Lembremos de alguns resultados sobre anéis comutativos com unidade.

Seja R um anel comutativo com unidade e $\mathfrak{p}$ um ideal em R. Diz-se que $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de R se $\mathfrak{p} \neq R$ e além disso, dados $a, b \in R$ tais que $ab \in \mathfrak{p}$, então $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$. Dizemos que um ideal $\mathfrak{n}$ em R é um ideal radical, se a seguinte condição é satisfeita:

$$\text{Sempre que } a \in R \text{ é tal que existe } m \in \mathbb{N} \text{ com } a^m \in \mathfrak{n}, \text{ então } a \in \mathfrak{n}.$$

Proposição 1.35. *Seja R um anel comutativo com unidade. Então um ideal próprio $\mathfrak{n} \trianglelefteq R$ é radical se, e somente se, existe uma família de ideais primos em R cuja interseção é $\mathfrak{n}$. Se $\mathfrak{n} = R$, então considera-se que $\mathfrak{n}$ é uma interseção vazia de ideais primos.*

Além disso, ainda no caso em que R é um anel comutativo com unidade, dado $\mathfrak{a} \trianglelefteq R$, pelo lema de Zorn, existe um ideal radical minimal contendo $\mathfrak{a}$, o qual denota-se por $\sqrt{\mathfrak{a}}$. Além disso, pela proposição acima, $\sqrt{\mathfrak{a}}$ é a interseção de todos os ideais primos de R que contém $\mathfrak{a}$. Por fim, lembrando que o nilradical de uma álgebra comutativa é o ideal dos elementos nilpotentes, tem-se que

$$Nil(R) = \sqrt{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(R)} \mathfrak{p}.$$

Iremos agora focar em generalizar tais resultados para a classe dos anéis não comutativos com unidade. Daqui em diante nesta subseção, R é um anel associativo qualquer com unidade.

Definição 1.36. *Um ideal $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ é um ideal primo em R se $\mathfrak{p} \neq R$ e para quaisquer ideais I, J em R, a inclusão $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ implica que $I \subseteq \mathfrak{p}$ ou $J \subseteq \mathfrak{p}$.*

• Dado $a \in R$, iremos escrever $(a) := RaR$ para o ideal gerado por a em R.

Proposição 1.37. *Para um ideal próprio $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ são equivalentes*

a) $\mathfrak{p}$ é primo.

b) Para a, $b \in R$, tem-se a propriedade: $\quad (a)(b) \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{p} \quad ou \quad b \in \mathfrak{p}.$

c) Para a, $b \in R$, tem-se a propriedade: $\quad aRb \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{p} \quad ou \quad b \in \mathfrak{p}.$

d) Dados I, $J \trianglelefteq_l R$, tem-se a propriedade: $\quad IJ \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad I \subseteq \mathfrak{p} \quad ou \quad J \subseteq \mathfrak{p}.$

e) Dados I, $J \trianglelefteq_r R$, tem-se a propriedade: $\quad IJ \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad I \subseteq \mathfrak{p} \quad ou \quad J \subseteq \mathfrak{p}.$

• Qualquer ideal maximal $\mathfrak{m}$ em R é primo. De fato, sejam I, J dois ideais em R tais que $I \nsubseteq \mathfrak{m}$ e $J \nsubseteq \mathfrak{m}$. Então, por maximalidade de $\mathfrak{m}$ segue que $I + \mathfrak{m} = R = J + \mathfrak{m}$ e assim, $R = (I + \mathfrak{m})(J + \mathfrak{m}) = \mathfrak{m} + IJ$ donde segue que $IJ \nsubseteq \mathfrak{m}$.

Definição 1.38. *Um conjunto $\mathcal{S} \neq \emptyset$, $\mathcal{S} \subseteq R$, é um m-sistema, se para quaisquer a, $b \in S$, existe $r \in R$ tal que $arb \in \mathcal{S}$.*

• Todo conjunto multiplicativamente fechado $\mathcal{S} \subseteq R$ é um m-sistema. A recíproca não é verdadeira, pois se $0 \neq a \in R$, então defina $\mathcal{S} = \{a, a^2, a^4, a^8, \ldots\}$. Com isso, a, $a^2 \in \mathcal{S}$, mas $a(a^2) = a^3 \notin \mathcal{S}$. Entretanto, dado $l \in \mathbb{N}$, se $r = a$, segue que $ara^{2l} = a(a)a^{2l} = a^{2l+2} = a^{2(l+1)} \in \mathcal{S}$.

Corolário 1.39. *Seja $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$. Então, $\mathfrak{p}$ é primo se, e somente se, $R \setminus \mathfrak{p}$ é um m-sistema.*

Proposição 1.40. *Seja $\mathcal{S} \subseteq R$ um m-sistema e $\mathfrak{p}$ um ideal maximal com respeito a propriedade $(*)$*

$$(*) \qquad L \trianglelefteq R \quad tal \quad que \quad L \cap \mathcal{S} = \emptyset.$$

Então, $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de R.

Definição 1.41. *Dado $I \trianglelefteq R$, denota-se o radical de I por*

$$\sqrt{I} := \{s \in R \mid cada \quad m-sistema \quad \mathcal{S} \ni s, \quad intersecta \quad I\}.$$

• Segue da definição acima que $\sqrt{I} \subseteq \{s \in R : s^n \in I \quad \text{para algum} \quad n \geq 1\}$.
De fato, seja $s \in R$ e considere o m-sistema $\mathcal{S} = \{s, s^2, s^3, \ldots, s^k, \ldots\}$. Dado que $s \in S$, $S \cap I \neq \emptyset$, e portanto, existe $k \geq 1$ tal que $s^k \in I$.

Observação 1.42. *Seja R um anel comutativo. Assuma que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s^n \in I$ e seja $\mathcal{S}$ um m-sistema qualquer contendo s. Vejamos que por definição de um m-sistema, existe $r_1 \in R$ tal que $s^2 r_1 = s r_1 s \in \mathcal{S}$, $r_2 \in R$ tal que $s^3 r_2 \in \mathcal{S}$ e assim por diante. Em particular, existe $r \in R$ tal que $s^n r \in \mathcal{S}$, donde segue que $s^n r \in \mathcal{S} \cap I$. Assim, $s \in \sqrt{I}$. Concluímos então que no caso comutativo a definição de radical de um ideal coincide com a definição clássica do mesmo. Além disso, neste caso tem-se também que $\sqrt{I}$ é um ideal de R.*

Teorema 1.43. *Seja R um anel qualquer e I um ideal em R. Então, $\sqrt{I}$ é igual a interseção de todos os ideais primos contendo I. Em particular, $\sqrt{I}$ é um ideal de R.*

Definição 1.44. *Dizemos que um ideal $\mathfrak{q} \trianglelefteq R$ é semiprimo, se para qualquer ideal I de R satisfazendo $I^2 \subseteq \mathfrak{q}$, tem-se que $I \subseteq \mathfrak{q}$.*

Proposição 1.45. *Se $\mathfrak{q}$ é um ideal de R, as afirmações são equivalentes:*
a) $\mathfrak{q}$ é semiprimo.
b) Se $a \in R$ então $(a)^2 \subseteq \mathfrak{q}$ implica $a \in \mathfrak{q}$.
c) Se $a \in R$ então $aRa \subseteq \mathfrak{q}$ implica $a \in \mathfrak{q}$.
d) Para qualquer ideal à esquerda J de R temos que $J^2 \subseteq \mathfrak{q}$ implica $J \subseteq \mathfrak{q}$.
e) Para qualquer ideal à direita $\widetilde{J}$ de R temos que $\widetilde{J}^2 \subseteq \mathfrak{q}$ implica $\widetilde{J} \subseteq \mathfrak{q}$.

Definição 1.46. *Diz-se que um conjunto $\mathcal{N} \subseteq R$ é um n-sistema, se para qualquer $a \in \mathcal{N}$, existe $r \in R$ tal que $ara \in \mathcal{N}$.*

• Segue da proposição acima que um ideal $\mathfrak{q} \trianglelefteq R$ é semiprimo se e somente se $R \setminus \mathfrak{q}$ é um n-sistema.

Lema 1.47. *Seja $\mathcal{N}$ um n-sistema em um anel R e seja $a \in \mathcal{N}$. Então, existe um m-sistema $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ tal que $a \in \mathcal{M}$.*

Teorema 1.48. *Para qualquer ideal $J \trianglelefteq R$, as afirmações são equivalentes*
1) J é um ideal semiprimo.
2) J é uma interseção de ideais primos.
3) $J = \sqrt{J}$.

Corolário 1.49. *Para qualquer ideal J em R, $\sqrt{J}$ é o menor ideal semiprimo em R que contém J.*

Definição 1.50. *Seja R um anel qualquer. Então, o nilradical inferior de Baer é definido como sendo*

$$Nil_* R := \sqrt{(0)}.$$

• O nilradical inferior de Baer $Nil_* R$ é o menor ideal semiprimo em R e além disso, se $Spec(R)$ denota o conjunto dos ideais primos em R, segue que

$$Nil_* R = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(R)} \mathfrak{p}.$$

O ideal $Nil_* R$ é chamado de radical primo de R.
• Como $Nil_* R$ é um nil ideal segue que $Nil_* R \subseteq rad(R)$.

Definição 1.51. *Diremos que um anel R é primo (respectivamente semiprimo) se 0 é um ideal primo (respectivamente semiprimo) em R.*

Observação 1.52. *Em anéis comutativos, anéis primos correspondem a domínios e anéis semiprimos a anéis reduzidos. Além disso, se A é um anel comutativo $Nil_*A = NilA$.*

Proposição 1.53. *As afirmações são equivalentes*
a) R é um anel semiprimo.
b) $Nil_*R = 0$.
c) R não tem ideal nilpotente diferente de 0.
d) R não tem ideal nilpotente à esquerda diferente de 0.

Vejamos que domínios sempre são anéis primos, da mesma forma em que anéis reduzidos são semiprimos. Além disso, se R é um anel qualquer, então R/Nil_*R é um anel semiprimo. De fato, vejamos que $0_{R/Nil_*R} = Nil_*R/Nil_*R$ e assim

$$\sqrt{0_{R/Nil_*R}} = \sqrt{Nil_*R}/Nil_*R = Nil_*R/Nil_*R = 0_{R/Nil_*R}.$$

Se R é um anel J-semissimples, segue de $Nil_*R \subseteq rad(R)$ que $Nil_*R = 0$ e R é semiprimo.

Podemos caracterizar anéis primos em termos matriciais, como mostra o resultado abaixo. Além disso, este é válido trocando-se a palavra "primo"por "semiprimo"e a demonstração deste fato segue as mesmas linhas da demonstração do primeiro.

Proposição 1.54. *Um anel R é primo se, e somente se, $M_n(R)$ é primo.*

Lema 1.55. *(Lema de Brauer) Seja $I \trianglelefteq_l R$ minimal. Então, $I^2 = 0$ ou $I = Re$, onde $e \in I$ é um elemento nilpotente.*

Corolário 1.56. *Se I é um ideal minimal à esquerda em um anel semiprimo R, segue que $I = Re$, por algum elemento idempotente $e \in I$.*

Demonstração. Dado que $I^2 \neq 0$, o resultado segue do lema de Brauer 1.55. □

Teorema 1.57. *Para qualquer anel R, as afirmações são equivalentes*
a) R é semissimples.
b) R é semiprimo e artiniano à esquerda.

1.4 Estrutura dos anéis primitivos e o teorema da densidade de Jacobson

• Um anel semiprimitivo é um anel J-semissimples.

• Lembremos que um R-módulo à esquerda N é fiel se, o único elemento $r \in R$ tal que $rn = 0$, para todo $n \in N$, é o zero de R.

Definição 1.58. *Um anel R é primitivo à esquerda (respectivamente à direita) se R tem um R-módulo à esquerda simples e fiel.*

Proposição 1.59. *Um anel R é semiprimitivo se, e somente se, R tem um módulo à esquerda semissimples M o qual é fiel.*

Adendo histórico: Em 1964, George Bergman construiu em [5] um exemplo de um anel primitivo à esquerda que não é primitivo à direita.

Definição 1.60. *Um ideal $J \trianglelefteq R$ é primitivo à esquerda (respectivamente direita) se R/J é primitivo à esquerda (respectivamente direita).*

Proposição 1.61. *Um ideal $I \trianglelefteq R$ é primitivo à esquerda se, e somente se, existe um R-módulo à esquerda M o qual é simples e além disso, $I = ann(M)$.*

Corolário 1.62. *O radical de Jacobson $rad(R)$ é a interseção de todos os ideais de R primitivos à esquerda.*

Proposição 1.63. *Um anel simples R é primitivo à esquerda. Além disso, um anel primitivo à esquerda é ambos, semiprimitivo e primo.*

O diagrama abaixo resume bem as implicações de anéis primitivos à esquerda, simples, semissimples, semiprimos, semiprimitivos e primos.

$$\begin{tikzcd} \text{Semissimples} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Semiprimitivo} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Semiprimo} \\ \text{Simples} \arrow[u, Rightarrow, "\text{(Se Artiniano)}"] \arrow[r, Rightarrow] & \text{Primitivo à esquerda} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{Primo} \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

O resultado abaixo mostra-nos que as implicações horizontais podem ser trocadas por equivalências na classe dos anéis artinianos à esquerda.

Proposição 1.64. *Seja R um anel artiniano à esquerda.*
1) *R é semissimples se e somente se R é semiprimitivo e se e somente se R é semiprimo.*
2) *R é simples se e somente se R é primitivo à esquerda e se e somente se R é primo.*

Proposição 1.65. *Um anel comutativo R é um anel primitivo à esquerda $\Leftrightarrow$ R é um corpo.*

Seja D um anel de divisão e V_D um D-espaço vetorial à direita e seja $E = End(V_D)$, o qual opera à esquerda em V_D. Então, vejamos que V_D é um E-módulo à esquerda simples e fiel. Para a primeira afirmação, vejamos que se U é um submódulo não trivial de V_D, então existe $0 \neq w \in V_D \setminus U$ e assim, seja $u \in U$ e $\mathcal{B}$ uma base de V_D tal que $u \in \mathcal{B}$. Dessa forma, existe uma transformação linear $\phi \in E$ tal que $\phi(v) = v$ para todo $v \in \mathcal{B} \setminus \{u\}$ e $\phi(u) = w$.

Com isso, segue que $\phi(U) \nsubseteq U$, donde concluí-se que de fato, V_D é simples como um E-módulo. A fieldade de V_D como um E-módulo é imediata. Mostramos então que o anel $E = End(V_D)$ é primitivo à esquerda. Disto, se $\dim_D V_D = \infty$, E é um anel primitivo à esquerda, não comutativo, não simples e nem artiniano.

O próximo resultado irá nos mostrar que na classe dos anéis que possuem ideais minimais unilaterais, ser primitivo à esquerda é equivalente a ser primitivo à direita, sua demonstração pode ser encontrada em [28].

Teorema 1.66. *Seja R um anel com um ideal minimal à esquerda I. Então, as afirmações são equivalentes:*
1) *R é primo.*
2) *R é primitivo à esquerda.*
3) *R é primitivo à direita.*

Se estas propriedades se verificam, então R tem também um ideal minimal à direita J. Qualquer R-módulo à esquerda (respectivamente à direita) simples e fiel é isomorfo à ${}_RI$ (respectivamente J_R).

• Sejam R, A dois anéis e $V = {}_RV_A$ um (R, A)-bimódulo. Então, se $E = End(V_A)$, diz-se que R age densamente em V_A, se para qualquer $f \in E$ e quaisquer $v_1, \ldots, v_k \in V$, existe $r \in R$ tal que $rv_i = f(v_i), \quad i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Lema 1.67. *Na notação acima, assuma que ${}_RM$ é um R-módulo semissimples e $A = End({}_RM)$. Então, qualquer R-submódulo W de V é um E-submódulo.*

Teorema 1.68. *(Teorema da densidade) Seja R um anel e V um R-módulo à esquerda semissimples. Então, se $A = End({}_RV)$, segue que R age densamente em V_A.*

• Seja V_D um espaço vetorial à direita sobre um anel de divisão D e seja $E = End(V_D)$. Um subconjunto $S \subseteq E$ é chamado de m-transitivo em V se para qualquer conjunto linearmente independentes $\{v_1, \ldots, v_k\}$ $(k \leq m)$ e $\{v'_1, \ldots, v'_k\}$, conjunto arbitrário de vetores, existe $s \in S$ tal que $s(v_i) = v'_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

• Com as notações do item acima, $S \subseteq E$ é denso no conjunto das transformações lineares de V_D se S é m-transitivo para cada $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.69. *(Estrutura dos anéis primitivos à esquerda) Seja R um anel primitivo à esquerda e V um R-módulo à esquerda simples e fiel. Seja D o anel de divisão $End({}_RV)$. Então, R é isomorfo a um anel denso no anel das transformações lineares de V_D. Além disso*
1) *Se R é artiniano à esquerda, então $n := \dim_D V < \infty$ e $R \cong M_n(D)$.*
2) *Se R não é artiniano à esquerda, então $\dim_D V = \infty$ e além disso, para qualquer $n > 0$, existe um subanel R_n de R o qual admite um epimorfismo de anéis sobre $M_n(D)$.*

O próximo resultado mostra-nos como obter informações sobre a densidade de um subconjunto das transformações lineares baseado apenas na 2-transitividade.

Teorema 1.70. *Seja D um anel de divisão e V um D-espaço vetorial à direita. Então, se R é um subanel de $End(V_D)$, temos:*

1) R é 1-transitivo se, e somente se, ${}_RV$ é um R-módulo à esquerda simples. Se este é o caso, R é um anel primitivo à esquerda.

2) As afirmações são equivalentes

2.1) R é 2-transitivo.

2.2) R é 1-transitivo e $D = End({}_RV)$.

2.3) R é denso em $E := End(V_D)$.

Exemplo 1.71. *Seja V um espaço vetorial à direita sobre um anel de divisão D e $E = End(V_D)$. Se R é um subanel de E e $0 \neq I \trianglelefteq R$, então R é denso em E se, e somente se I é denso em E.*

Demonstração. É imediado que se I for denso em E, então R também será denso em E.

Suponha agora que R seja denso em E e sem perda de generalidade, assuma que $I = (a) = RaR$ e seja $w \in V$ tal que $aw \neq 0$. Por um lado, dado $m \in \mathbb{N}$, $\{v_1, \dots, v_m\}$ conjunto linearmente independente em V_D e $\{v'_1, \dots, v'_m\}$ um conjunto qualquer de vetores em V_D. Por outro lado, como R é denso em E, tem-se que $R(aw) = V$ e portanto, existem $r_1, \dots, r_m \in R$ tais que $r_j(aw) = v'_j$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Mais uma vez pela densidade de R, existem $s_1, \dots, s_m \in R$ tais que $s_i v_j = \delta_{ij} w$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Defina $\alpha = \sum_i r_i a s_i \in I$. Assim, para qualquer $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\alpha v_j = \sum_i r_i a s_i v_j = r_j a(w) = r_j(aw) = v'_j$. □

1.5 Álgebras centrais simples

Definição 1.72. *Seja A uma K-álgebra. Diz-se que A é uma álgebra central simples se A é simples e $Z(A) \cong K$.*

Lema 1.73. *Se A é uma álgebra central simples sobre K e B é uma álgebra simples tal que $K \subseteq Z(B)$ (na realidade K é isomorfo a uma subalgebra de $Z(B)$) então $A \otimes_K B$ é simples.*

Veja acima que caso B não seja simples, então existe $x \neq 0$ tal que $0 \neq (1 \otimes_K B)x(1 \otimes_K B) \subseteq I$ e se I for um ideal minimal, existe $0 \neq x \in I$ tal que $I = (A \otimes_K B)x(A \otimes_K B)$.

Teorema 1.74. *Se A, B são álgebras centrais simples sobre K, então $A \otimes_K B$ é central simples.*

Teorema 1.75. *Se D é uma álgebra de divisão de dimensão finita sobre seu centro $Z(D)$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dim_{Z(D)} D = m^2$.*

Demonstração. Considere $\overline{Z(D)}$ o fecho algébrico de $Z(D)$. Como D é uma álgebra de divisão, segue que D é simples, e portanto, D é central simples. Dessa forma, segue pelo lema 1.73 que $\overline{D} := D \otimes_{Z(D)} \overline{Z(D)}$ é simples. Além disso, $\dim_{Z(D)} D = \dim_{\overline{Z(D)}} \overline{D}$. Como $\overline{D}$ é simples e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, pelo teorema de Werdderburn–Artin, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{D} \cong M_m(\overline{Z(D)})$. Concluí-se que $\dim_{Z(D)} D = \dim_{\overline{Z(D)}} \overline{D} = m^2$. □

Corolário 1.76. *Se A é uma álgebra simples de dimensão finita sobre seu centro $Z(A)$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dim_{Z(D)} A = n^2$.*

1.6 Álgebras separáveis

Comecemos com um resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [7] (teorema 69.4).

Teorema 1.77. *Seja K/F extensão separável de corpos, e seja A uma álgebra semissimples sobre F. Então, $A_F = A \otimes_F K$ é uma álgebra semissimples sobre K.*

• Em particular, se $F = \overline{K}$, o fecho algébrico de K, então $A_{\overline{K}} = A \otimes_K \overline{K}$ é uma álgebra semissimples caso A o seja.

Definição 1.78. *Dizemos que uma K-álgebra A é separável se $A_E = A \otimes_K E$ é semissimples sobre E para cada extensão E/K.*

Teorema 1.79. *Uma K-álgebra A é separável se, e somente se, existem E/K e $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, tais que $A_E \cong M_{n_1}(E) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(E)$.*

Vamos fornecer um critério mais refinado para se determinar se uma dada álgebra é ou não separável, sem passarmos pelo problema de procurar uma extensão E/K tal que A_E é semissimples.

Definição 1.80. *Uma K-álgebra A é uma álgebra de Frobenius, se existe uma forma bilinear não degenerada $f\colon A \times A \to K$ tal que $f(ab,c) = f(a,bc)$, para quaisquer a, b, $c \in A$.*

Exemplo 1.81. *Seja A uma K-álgebra separável. Então, pelo teorema acima, existe E/K e $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tais que $A_E = A \otimes_K E \cong M_{n_1}(E) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(E)$.*

Agora, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ seja $\mathscr{S}_k = \{e_{ij}^{(k)} \mid i,j \in \{1, 2, \ldots, n_k\}\}$ a base canônica de $M_{n_k}(E)$. Dessa forma, $\mathscr{S} := \mathscr{S}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{S}_r$ sem perda de generalidade pode ser considerada uma base de A_E. Além disso, os elementos de $\mathscr{S}$ satisfazem $e_{ij}^{(k)} e_{pq}^{(s)} = \delta_{ks}\delta_{jp}e_{iq}^{(k)}$.

Denote por f_E é única forma bilinear $f_E\colon A_E \times A_E \to K$ satisfazendo $f(e_{ij}^{(k)}, e_{pq}^{(s)}) = \delta_{ks}\delta_{jp}\delta_{iq}$.

Dado que $[f_E]_{\mathscr{S}}$ é a matriz identidade, tem-se que f_E é não degenerada. Agora, observemos que

$$f_E(e_{ij}^{(k)} e_{\alpha\beta}^{(l)}, e_{pq}^{(s)}) = f_E(\delta_{kl}\delta_{j\alpha}e_{i\beta}^{(l)}, e_{pq}^{(s)}) = \delta_{kl}\delta_{j\alpha} f_E(e_{i\beta}^{(l)}, e_{pq}^{(s)}) = \delta_{kl}\delta_{j\alpha}\delta_{ls}\delta_{\beta p}\delta_{iq}.$$

Por outro lado

$$f_E(e_{ij}^{(k)}, e_{\alpha\beta}^{(l)} e_{pq}^{(s)}) = f_E(e_{ij}^{(k)}, \delta_{ls}\delta_{\beta p}e_{\alpha q}^{(l)}) = \delta_{ls}\delta_{\beta p} f_E(e_{ij}^{(k)}, e_{\alpha q}^{(l)}) = \delta_{ls}\delta_{\beta p}\delta_{kl}\delta_{j\alpha}\delta_{iq}$$

donde tem-se que $f_E(e_{ij}^{(k)}, e_{\alpha\beta}^{(l)} e_{pq}^{(s)}) = f_E(e_{ij}^{(k)} e_{\alpha\beta}^{(l)}, e_{pq}^{(s)})$. Assim, f_E é associativa nos elementos básicos, e portanto é associativa em A_E. E como implicação, A_E é uma álgebra de Frobenius.

A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrada em [7] (teorema 71.6).

Teorema 1.82. *Seja A uma K-álgebra de dimensão finita n. São equivalentes:*
a) A é uma álgebra separável
b) A é uma álgebra de Frobenius associada a uma forma bilinear f na qual

$$Z(A) = \Big\{ \sum_i b_i a a_i, \quad a \in A \Big\}$$

onde $\{a_1, \ldots, a_n\}$ e $\{b_1, \ldots, b_n\}$ são bases de A duais em relação a f.

1.7 O teorema de Wedderburn–Malcev

Comecemos com uma definição algébrica que será fundamental nesta seção.

Definição 1.83. *Sejam A uma K-álgebra e $K \subseteq F$ uma extensão de corpos de K. Diz-se que F é um splitting field para A se $A_F := A \otimes_K F$ é simples.*

A prova da proposição abaixo pode ser encontrada na página 106 de [28].

Proposição 1.84. *Utilizando a notação da definição acima temos:*

a) F é um splitting field para A se, e somente se, $A_F/rad(A_F)$ é uma soma direta de álgebras matriciais sobre K.

b) F é um splitting field para A se, e somente se, F é um splitting field para $A/rad(A)$.

c) $\overline{K}$ é um splitting field para A.

Lema 1.85. *Seja I um ideal nil de A. Então:*

a) Cada elemento idempotente de A/I pode ser levantado[2] para um elemento idempotente de A.

b) Qualquer conjunto de elementos idempotentes ortogonais de A/I pode ser levantado para um conjunto de elementos idempotentes ortogonais de A.

c) Cada conjunto de matrizes unitárias $n \times n$ de A/I pode ser levantado para um conjunto de matrizes unitárias $n \times n$ de A.

Demonstração. *a)* Seja $\overline{e} = e + I$ um elemento idempotente de A/I, isto é, $\overline{e}^2 - \overline{e} = 0$, ou seja, $e^2 - e \in I$. Dado que I é nil, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(e^2 - e)^k = 0$ e utilizando o binômio de Newton, existe $f \in K[x]$ tal que $e^k = e^{k+1}f(e)$. Dessa forma, para cada $t \in \mathbb{N}$ $e^k = e^{k+t}(f(e))^t$.

E assim $(ef(e))^{2k} = (e^{2k}f(e)^k)f(e)^k = e^k f(e)^k = (ef(e))^k$. Portanto $b = (ef(e))^k$ é idempotente. De $\overline{e}^k = \overline{e}^{2k}$ concluí-se que $\overline{b} = \overline{(ef(e))^k} = \overline{e}^k \overline{f(e)}^k = \overline{e^{2k}f(e)^k} = \overline{e}^k = \overline{e}$.

b) Sejam $f_1, \ldots, f_n \in A/I$ idempotentes ortogonais. Suponha que $f_1, \ldots, f_{n-1}$ podem ser levantados para idempotentes ortogonais $e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$. Defina $e' := e_1 + \cdots + e_{n-1}$. Por *a)* existe

[2]Seja I um ideal de uma álgebra A e $\overline{x} \in A/I$, dizemos que x pode ser levantado para um elemento de A se existe $a \in A$ tal que $\overline{a} = \overline{x}$.

um idempotente $g \in A$ com $\overline{g} = f_n$. Notemos que $\overline{e'g} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right) f_n = f_1 f_n + \cdots + f_{n-1} f_n = 0$. Logo $e'g \in I$. Considere $g_1 := (1 - e'g)^{-1} g (1 - e'g)$ e vejamos que

$$g_1^2 = (1 - e'g)^{-1} g (1 - e'g)(1 - e'g)^{-1} g (1 - e'g) = (1 - e'g)^{-1} g (1 - e'g) = g_1.$$

Além disso $\overline{g_1} = \overline{(1 - e'g)^{-1}} \cdot \overline{g} \cdot \overline{(1 - e'g)} = \overline{1} \cdot \overline{g} \cdot \overline{1} = \overline{g} = f_n$. Dado que e', g' são idempotentes e $e'g - ge' \in I$, tem-se que $e'g = ge'$ e portanto $(1 - e'g)g = g -' eg = g - ge' = g(1 - ge')$, logo $g = (1 - e'g)^{-1} g (1 - e')$. Disso segue que $g_1 g = g^2 (1 - e')e' = g(e' - e'^2) = 0$ e assim, definindo $e_n := (1 - e')g_1$ concluí-se que $\overline{e_n} = f_n$ e $e_n e' = e' e_n = 0$.

Por fim, para quaisquer $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tem-se que $e' e_i = e_i e' = e_i$, e como consequência

$$e_n e_i = e_n e' e_i = 0, \quad e_i e_n = e_i e' e_n = 0$$

o qual mostra que e_n é o elemento idempotente desejado.

c) Sejam f_{ij} matrizes unitárias $n \times n$ em A/I. Por *b*), os elementos f_{11}, $\ldots$, f_{nn} podem ser levantados para $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ ortogonais idempotentes. Precisamos agora levantar f_{ij} para $e_{ij} \in A$ se $i \neq j$. Seja a_{ij} matriz $n \times n$ em A tal que $\overline{a_{ij}} = f_{ij}$ e defina $e_{i1} = e_{ii} a_{i1} e_{11}$. Observemos que

$$\overline{e_{i1}} = \overline{e_{ii}} \cdot \overline{a_{i1}} \cdot \overline{e_{11}} = f_{ii} f_{i1} f_{11} = f_{ii} f_{i1} = f_{i1}.$$

Agora, se definirmos $b_i = e_{11} - a_{1i} e_{i1}$, então $\overline{b_i} = f_{11} - f_{1i} f_{i1} = 0$, e portanto $b_i \in I$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e isso nos mostra que $1 - b_i$ é invertível, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Com isso, definindo $e_{1i} = d_i a_{1i} e_{ii}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tem-se que $\overline{e_{1i}} = \overline{d_i} \cdot \overline{a_{1i}} \cdot \overline{e_{ii}} = f_{1i} f_{ii} = f_{1i}$ e além disso, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vale $e_{1i} e_{i1} = d_i a_{1i} e_{ii} e_{i1} = d_i a_{1i} e_{i1} e_{11} = d_i (e_{11} - b_i) e_{11} = d_i (1 - b_i) e_{11} = e_{11}$.

Consequentemente $(e_{ii} - e_{i1} e_{1i})^2 = e_{ii}^2 - e_{ii} e_{i1} e_{1i} - e_{i1} e_{1i} e_{ii} + (e_{i1} e_{1i})^2 = e_{ii} - e_{i1} e_{1i}$ é um idempotente em I, e $e_{ii} = e_{i1} e_{1i}$. Definindo $e_{ij} := e_{i1} e_{1j}$ tem-se o resultado. □

Proposição 1.86. *Seja A uma K-álgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica* 0 *e J seu radical de Jacobson. Então, existe uma subalgebra semissimples B tal que $A = B \oplus J$.*

Demonstração. **Passo 1:** Suponha que K seja um corpo algebricamente fechado. Escrevendo $\overline{A} := A/J$, existem n_1, $\ldots$, $n_r \in \mathbb{N}$ tais que $\overline{A} = M_{n_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(K)$.

Sejam $f_1, \ldots, f_r \in \overline{A}$ idempotentes ortogonais tais que $1_{\overline{A}} = f_1 + \cdots + f_r$. Dado que J é nilpotente, pelo lema 1.85, existem e_1, $\ldots$, $e_r \in A$ idempotentes ortogonais tais que $\pi(e_i) = f_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, onde $\pi \colon A \to \overline{A}$ é a projeção canônica. Para cada $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$, defina $A_t := e_t A e_t$.

Então, para cada $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\overline{A_t} = f_t \overline{A} f_t = M_{n_t}(K) f_t = M_{n_t}(K)$. Além disso, cada matriz canônica unitária $e_{ij} \in M_{n_t}(K)$ pode ser levantada a uma matriz unitária $x_{ij}^{(t)}$ de A_t. Defina $B_t = \sum_{ij} K x_{ij}^{(t)}$, então $B_t \cong M_{n_t}(K) \cong \overline{A}_t$.

Dessa forma $B = \bigoplus_{i=1}^r B_i \cong \bigoplus_{i=1}^r \overline{A_i} \cong \overline{A}$. É imediato que $B \cap J = 0$, pois para cada $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$ temos $B_t \cap J = 0$. Logo tem-se que $(B + J)/J \cong B/B \cap J \cong B \cong \overline{A}$ e assim, $A = B \oplus J$.

Passo 2: Suponha que K seja um corpo arbitrário e $J^2 = 0$. Seja $\{a_1, \ldots, a_n\}$ base de A sobre K tal que $\{a_1 + J, \ldots, a_m + J\}$ formem uma base de $\overline{A} = A/J$. Dados $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ escreva

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^{(k)} a_k, \quad \alpha_{ij}^{(k)} \in K.$$

Disso segue que para $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ vale $\overline{a_i} \cdot \overline{a_j} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ij}^{(k)} \overline{a_k}$, $\quad \alpha_{ij}^{(k)} \in K$.

Para encontrarmos uma subalgebra $C \subseteq A$ com $C \cap J = 0$ e $C \cong \overline{A}$ é suficiente encontrarmos escalares x_{ij} para os quais os elementos $b_i = a_i + \sum_{j=m+1}^n x_{ij} a_j$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sejam linearmente independentes sobre K, e possuam as mesmas constantes de estrutura que $\overline{A}$. Isso irá nos fornecer um isomorfismo entre C e $\overline{A}$.

Para cada i, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ podemos impor isto sob a forma do sistema

$$\Big(a_i + \sum_{t=m+1}^{n} x_{it} a_t\Big)\Big(a_j + \sum_{t=m+1}^{n} x_{jt} a_t\Big) = \sum_{k=1}^{m} \Big(a_k + \sum_{t=m+1}^{n} x_{kt} a_t\Big)$$

e dado que $J^2 = 0$ tem-se que

$$a_i a_j + \sum_{t=m+1}^{n} x_{jt} a_i a_t + \sum_{t=m+1}^{n} x_{it} a_t a_j = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ij}^{(k)} a_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=m+1}^{n} x_{kt} a_t$$

e por comparação dos coeficientes em relação a a_k, para $k \in \{m+1, \ldots, n\}$ obtemos

$$\alpha_{ij}^{(k)} + \sum_{t=m+1}^{n} \alpha_{it}^{(k)} x_{jt} + \sum_{t=m+1}^{n} \alpha_{tj}^{(k)} x_{it} = \sum_{s=1}^{m} \alpha_{ij}^{(s)} x_{sk}.$$

Portanto, procurar uma subalgebra C satisfazendo $C \cap J = 0$ e $C \cong \overline{A}$ é equivalente a resolver o sistema linear:

$$\alpha_{ij}^{(k)} + \sum_{t=m+1}^{n} \alpha_{it}^{(k)} x_{jt} + \sum_{t=m+1}^{n} \alpha_{tj}^{(k)} x_{it} = \sum_{s=1}^{m} \alpha_{ij}^{(s)} x_{sk}, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad k \in \{m+1, \ldots, n\} \quad (3)$$

Considere $F = \overline{K}$, o qual é um splitting field para $\overline{A}$ (e portanto para A). Dessa forma a álgebra $A_F = A \otimes_K F$ satisfaz $n = \dim_K A = \dim_F A_F$ e $A_F/rad(A_F) \cong A_F/(J \otimes_K F) \cong A/J \otimes_K F = \overline{A} \otimes_K F$. Pelo **passo 1** pode-se decompor $A_F = B_1 \oplus rad(A_F) = B_1 \oplus (A \otimes_K F)$ onde B_1 é uma subalgebra semissimples de A_F. Observemos que sob a extensão de escalares as constantes de estrutura não mudam. De fato, $\{a_1 \otimes 1, a_2 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1\}$ é uma base de A_F e assim, para quaisquer i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, vale $(a_i \otimes 1)(a_j \otimes 1) = a_i a_j \otimes 1 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ij}^{(k)} (a_k \otimes 1)$.

Dado que $A_F = B_1 \oplus rad(A_F)$ o sistema 3 possui uma solução em F. Porém, como todos os coeficientes de 3 estão em K, e as constantes de estrutura permaneceram as mesmas, segue que tal solução também está em K. Como consequência, existe uma subalgebra semissimples $C \subseteq A$ tal que $A = C \oplus J$.

Passo 3: Caso geral. Vamos proceder por indução. Comecemos observando que pelo **passo 2** podemos assumir que $J^2 \neq 0$. Dessa forma, $B = A/J^2 \neq A$. Dado que $\dim_K B < \dim_K A$, por hipótese de indução podemos escrever, $B = D \oplus rad(B)$, onde D é uma subalgebra semissimples. Agora, notando que $rad(B) = rad(A)/J^2 = J/J^2$ tem-se pelo teorema do isomorfismo que $D \cong B/rad(B) = (A/J^2)/(J/J^2) \cong A/J$.

Seja $\pi \colon A \to B$ a projeção canônica de A em $B = A/J^2$ e defina $P := \pi^{-1}(D)$. Com isso $\pi_{|P} : P \to D$ é sobrejetora cujo núcleo é $P \cap J^2$ e assim, pelo primeiro teorema do isomorfismo $D \cong P/P \cap J^2$.

Como $rad(D) = 0$ segue que $rad(P) = P \cap J^2$. Mais uma vez, por hipótese de indução, existe uma subalgebra T semissimples de P tal que $P = T \oplus rad(P) = T \oplus (P \cap J^2)$ e $T \cong P/P \cap J^2 \cong D$.

Em suma, temos $T \cong D \cong P/P \cap J^2 \cong A/J$, $\quad e \quad P = T \oplus (P \cap J^2)$. Logo $T + J = T + (P \cap J^2) + J = P + J = A$, e $T \cap J \subseteq T \cap (P \cap J^2) = 0$, donde segue que $A = T \oplus J$. □

Observação 1.87. *Dado a existência de uma subalgebra semissimples B de A tal que $A = B \oplus J$, garantida pela proposição 1.86, pelo lema de Zorn pode-se escolher C subalgebra maximal semissimples tal que $A = C \oplus J$.*

Definição 1.88. *Sejam A uma K-álgebra e N um $(A, A)-$bimódulo. Dizemos que uma transformação linear $f \colon A \to N$ é uma derivação generalizada, se $f(ab) = af(b) + f(a)b$, para quaisquer a, $b \in A$.*

Lema 1.89. *Seja A uma K-álgebra semissimples de dimensão finita, e N um $(A, A)-$bimódulo. Se K é um splitting field A e $f \colon A \to N$ é uma derivação, então existe $u \in N$ tal que $f(\cdot) = [\cdot, u]$.*

Demonstração. A menos de considerar as componentes da soma direta de A como álgebras simples, pode-se assumir que A seja simples e portanto, como K é um splitting field A, tem-se que $A = M_n(K)$. Agora, considere as bases de A dadas por

$$\alpha = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}, e_{21}, \ldots, e_{nn}\}, \quad \beta = \{(1/n)e_{11}, (1/n)e_{21}, \ldots, (1/n)e_{n1}, (1/n)e_{12}, \ldots, (1/n)e_{nn}\}.$$

Temos $\sum_{i,j} e_{ij}(1/n)e_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (1/n)(\sum_{i=1}^{n} e_{ii}) = n \cdot I/n = I$ onde I é a matriz identidade. Seja $a = (\alpha_{ij})_{ij} \in A$ e note que $e_{ij}a = e_{ij}(\alpha_{11}e_{11} + \alpha_{12}e_{12} + \cdots + \cdots + \alpha_{nn}e_{nn}) = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl} e_{il}$. Por outro lado

$$a(1/n)e_{ji} = ((\alpha_{11}e_{11} + \alpha_{12}e_{12} + \cdots + \cdots + \alpha_{nn}e_{nn}))(1/n)e_{ji} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_{ki}.$$

Para visualizarmos melhor a propriedade acima, denote respectivamente por $a_1, \ldots, a_{n^2}$ e $a'_1, \ldots, a'_{n^2}$, os elementos de α e β. Então, o de cima nos diz que dado $a \in A$

$$a_i a = \sum_{k=1}^{n^2} y_{ik} a_k \quad \Rightarrow \quad a a'_i = \sum_{k=1}^{n^2} y_{ki} a'_k. \quad (4)$$

e além disso $\sum_{i=1}^{n^2} a_i a_i' = I$. Agora, se $f\colon A \to N$ é uma derivação, defina $u := \sum_{i=1}^{n} a_i' f(a_i)$. Dado $a \in A$ pode-se escrever $a = \sum_{i=1}^{n^2} y_{ij} a_j$ e assim $[a, u] = au - ua = \sum_{i=1}^{n^2} aa_i' f(a_i) - \sum_{k=1}^{n^2} a_k' f(a_k) a$. Como f é uma derivação, a igualdade acima se torna

$$[a, u] = \sum_{i=1}^{n^2} aa_i' f(a_i) - \sum_{i=1}^{n^2} a_i' f(a_i a) + \sum_{i=1}^{n^2} a_i' a_i f(a)$$

e assim, por 4 tem-se que $[a, u] = \sum_{i,j} a_j' y_{ji} f(a_i) - \sum_{i,j} a_i' y_{ij} f(a_j) + f(a) = 0 + f(a) = f(a)$. □

Proposição 1.90. *Seja A uma K-álgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica 0. Sabe-se que podemos escrever $A = B_1 \oplus J$, onde B_1 é uma subalgebra semissimples de A maximal. Se B_2 for outra subalgebra semissimples de A maximal, existe $u \in J$ tal que $B_2 = (1 + u)B_1(1 + u)^{-1}$.*

Demonstração. **Passo 1:** Suponha que K seja um corpo algebricamente fechado. Considere os homomorfismos de K-álgebras $\pi\colon A \to A/J$ a projeção canônica, e para cada $i = 1, 2$, $\phi_i\colon A/J \to A$ definida por $\phi_i(a + J) = f_i(a)$ onde $f_i\colon A \to A$ é uma função linear que se anula em J e age como identidade em B_i. Vamos tornar J um $(A/J, A/J)$-bimódulo definindo $x \cdot \overline{a} = x\phi_2(\overline{a})$, $\overline{a} \cdot x = \phi_1(\overline{a})x$, $x \in J$, $\quad \overline{a} \in A/J$.

Além disso, defina $f\colon A/J \to A$, $\quad \overline{a} \mapsto \phi_1(\overline{a}) - \phi_2(\overline{a})$. Notemos que $f(A/J) \subseteq J$. Dado $\overline{a} \in A/J$, temos $\pi(f(\overline{a})) = \pi(\phi_1(\overline{a}) - \phi_2(\overline{a})) = \pi\phi_1(\overline{a}) - \pi\phi_2(\overline{a}) = \overline{a} - \overline{a} = 0$, onde a última igualdade segue do fato de que $\pi\phi_i = Id_{A/J}$, $i = 1, 2$. Também

$$f(\overline{a} \cdot \overline{b}) = \phi_1(\overline{a} \cdot \overline{b}) - \phi_2(\overline{a} \cdot \overline{b}) = \phi_1(\overline{a})(\phi_1(\overline{b}) - \phi_2(\overline{b})) + (\phi_1(\overline{a}) - \phi_2(\overline{a}))\phi_2(\overline{a})$$

e assim $f(\overline{a} \cdot \overline{b}) = \phi_1(\overline{a})f(\overline{b}) + f(\overline{a})\phi_2(\overline{b}) = \overline{a} \cdot f(\overline{b}) + f(\overline{a}) \cdot \overline{b}$, $\overline{a}$, $\overline{b} \in A/J$, donde segue que f é uma derivação. Pelo lema 1.89 existe $u \in J$ tal que $f(\overline{a}) = \phi_1(\overline{a}) - \phi_2(\overline{a}) = [\overline{a}, u] = \overline{a} \cdot u - u \cdot \overline{a}$, $\overline{a} \in A/J$. Em outras palavras

$$\phi_1(\overline{a}) - \phi_2(\overline{a}) = \phi_1(\overline{a})u - u\phi_2(\overline{a}), \quad \overline{a} \in A/J \tag{5}$$

Dado que $1 - u$ é invertível, $\phi_1(\overline{a}) = (1 - u)\phi_2(\overline{a})(1 - u)^{-1}$, $\quad \overline{a} \in A/J$, o qual implica que $B_1 = (1 - u)B_2(1 - u)^{-1}$.

Passo 2: Suponha que K seja um corpo de característica 0. Sejam π, ϕ_1, ϕ_2 homomorfismos como no **passo 1.** Seja $F = \overline{K}$ e considere $A_F = A \otimes_K F$, $A_F/(J \otimes_K F) \cong (A/J) \otimes_K F$. Logo os homomorfismos acima podem ser estendidos para homomorfismos $\pi', \phi_1', \phi_2'\colon (A/J) \otimes_K F \to A \otimes_K F$.

O ponto chave para se demonstrar o **passo 1** foi a existência de um elemento $u \in J$ satisfazendo a equação 5. Considerando uma base de A e base de J, como a dada na proposição 1.86 a equação 5 se transforma num sistema de equações (avaliando as funções nos elementos básicos). Nesta mesma base escolhida, considere a base associada em $A \otimes_K F$. Utilizando os homomorfismos π',ϕ_1', ϕ_2' podemos escrever um sistema análogo a 5 variando os elementos na base de $A \otimes_K F$. Pelo **passo 1** este último possui uma solução em F. Porém, dado que todos os coeficientes deste sistema estão em K segue que tal solução pertence a K, o qual conclui o resultado. □

Os resultados nas proposições 1.86 e 1.90 podem ser resumidos no teorema abaixo, o qual é devido a Wedderburn e Malcev.

Teorema 1.91. *(Teorema de Wedderburn e Malcev) Seja A uma K-álgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica 0 e J seu radical de Jacobson. Então, existe uma subalgebra semissimples maximal B tal que $A = B \oplus J$. Além disso, se $B' \subseteq A$ é outra subalgebra semissimples maximal tal que $A = B' \oplus J$, então existe $x \in J$ tal que $B = (1 - x)B'(1 - x)^{-1}$.*

2 Conceitos básicos em PI-Álgebras

Dado X um conjunto, denotemos por $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa com unidade livremente gerada por X, isto é, $K\langle X\rangle$, é o espaço vetorial sobre K cujos elementos básicos são palavras da forma

$$x_{i_1}\cdots x_{i_n},\quad x_{i_j}\in X,\quad n=0,1,2,\dots$$

com multiplicação definida em tais elementos por

$$(x_{i_1}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}\cdots x_{j_m})=x_{i_1}\cdots x_{i_n}x_{j_1}\cdots x_{j_m}.$$

Uma observação extremamente importante é que $K\langle X\langle$ é livre no conjunto de todas as álgebras associativas com unidade. Em outras palavras, se A é qualquer álgebra associativa com unidade, e $\widetilde{\varphi}: X\to A$ é uma função, então existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\varphi: K\langle X\rangle\to A$ satisfazendo $\varphi_{|X}=\widetilde{\varphi}$.

Fixe $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$.

Definição 2.1. *Sejam $f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\in K\langle X\rangle$ e R uma álgebra associativa. Diz-se que f é uma identidade polinomial para R se, $f(r_1,r_2,\dots,r_n)=0\quad$ para todo $r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n\in R$.*

A álgebra R é uma PI-álgebra se existe $0\neq f\in K\langle X\rangle$ tal que $f\equiv 0$ em R.

Lema 2.2. *$f\in K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial para R se, e somente se, f pertence ao núcleo de todo homomorfismo $K\langle X\rangle\to R$.*

Demonstração. Basta notar que se $\psi\colon K\langle X\rangle\to R$ é um homomorfismo de álgebras associativas, então $Ker(\psi)=\{g(x_1,\dots,x_n)\in K\langle X\rangle\mid g(\psi(x_1),\dots,\psi(x_n))=0\}$. □

Exemplo 2.3. *Dado $f(x_1,x_2)=[x_1,x_2]$, isto é, $f(x_1,x_2)=x_1x_2-x_2x_1$, então R é uma álgebra comutativa se, e somente se, f é uma identidade polinomial para R.*

Exemplo 2.4. *Seja S_n o grupo simétrico e suponha que $\dim(R)<n$. Agora, consideremos a expressão*

$$s_n(r_1,r_2,\dots,r_n)=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)r_{\sigma(1)}\cdots r_{\sigma(n)}$$

então, notemos que:

- *$s_n(r_1,\dots,r_n)$ é antissimétrico. De fato, se $\tau=(i,j)$ é uma transposição, então*

$$\tau\cdot s_n(r_1,\dots,r_i,\dots,r_j,\dots,r_n)=s_n(r_1,\dots,r_j,\dots,r_i,\dots,r_n)$$

e portanto, dado que $sign(\sigma\tau)=-sign(\sigma)$, segue que

$$s_n(r_1,\dots,r_j,\dots,r_i,\dots,r_n)=-s_n(r_1,\dots,r_i,\dots,r_j,\dots,r_n)$$

donde segue que s_n é antissimétrica.

- *Como $\dim(R)<n$, quaisquer elementos $r_1,\ \dots,\ r_n\in R$ são linearmente dependentes, e portanto, como $s_n(r_1,\dots,r_n)$ é antissimétrica, segue que $s_n(r_1,\dots,r_n)=0$. (A demonstração de tal fato é exatamente igual a demonstração de que o determinante de uma matriz $n\times n$ é nulo se as colunas, ou as linhas, forem linearmente dependentes).*

Dessa última observação, concluímos que se $\dim(R)<n$, o polinômio

$$s_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$$

*é uma identidade polinomial em R. Neste caso, diz-se que R satisfaz a **identidade standard** de grau n.*

Exemplo 2.5. *(Identidade de Capelli) Nas condições do exemplo acima, defina o seguinte polinômio*

$$d_n(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_{n+1})=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)y_1x_{\sigma(1)}y_2\cdots y_nx_{\sigma(n)}y_{n+1}.$$

Argumento semelhante ao do exemplo anterior mostra que d_n é antissimétrico em $x_1,\ \dots,\ x_n$ e que $d(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_{n+1})=0$ em R. Diz-se que R satisfaz a identidade de Capelli de grau n.

Exemplo 2.6. *Dado que $\dim(M_n(K))=n^2$, segue que $M_n(K)$ satisfaz a identidade standard e a identidade de Capelli de grau n^2+1.*

Mais adiante vamos ver o famoso resultado conhecido como teorema de Amitsur-Levitzki, o qual diz que o conjunto das matrizes $M_n(K)$ satisfaz a identidade standard de grau $2n$.

Definição 2.7. *Seja V um espaço vetorial com base ordenada $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. A álgebra de Grassmann é a álgebra associativa $E = E(V)$ gerada por $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ junto com as relações*

$$e_ie_j + e_je_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

Lema 2.8. *A álgebra de Grassmann como espaço vetorial é gerada pelos vetores da forma*

$$e_{i_1} \cdots e_{i_n} : \quad i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_n, \quad n \geq 0.$$

Demonstração. Notemos que para todos i, $j \in \{1, 2, \ldots\}$, $e_ie_j + e_je_i = 0$ implica que $e_ie_j = -e_je_i$.

Agora, considere o monômio $u = e_{i_1} \cdots (e_je_i)e_{i_s} \cdots e_{i_p}$ onde $i < j$. Uma redução em u produz o elemento $u' = -e_{i_1} \cdots (e_ie_j)e_{i_s} \cdots e_{i_p}$. Dessa forma, concluímos que para toda permutação $\sigma \in S_n$, o monômio $e_{i_1} \cdots e_{i_n}$, pode ser levado por meio das reduções em $e_{\sigma(i_1)} \cdots e_{\sigma(i_s)}$. Em outras palavras

$$e_{\sigma(i_1)} \cdots e_{\sigma(i_n)} = sign(\sigma)e_{i_1} \cdots e_{i_n}.$$

Agora, como todo elemento $y \in E$ é da forma $y = \sum\limits_{\substack{k_1,\ldots,k_p \\ p \leq |P|}} \alpha_{(k_1,\ldots,k_p)}e_{k_1} \cdots e_{k_p}$, com $P \subseteq \mathbb{N}$ subconjunto finito, segue que de fato E é gerado pelos elementos como no enunciado. □

• Os geradores de E estabelecidos no lema 2.8 são linearmente independentes. De fato, denote o conjunto de tais geradores por $\mathfrak{E}$ e considere o conjunto

$$\Gamma_{\mathfrak{E}} = \{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \exists \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K \setminus \{0\} \quad e \quad u_1, \ldots, u_m \in \mathfrak{E} \quad tais \quad que \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_iu_i = 0\}.$$

Se $\Gamma_{\mathfrak{E}} \neq \{0\}$, pelo princípio da boa ordenação em $\mathbb{N}$, existe um menor elemento $m > 1$, bem como α_1, $\ldots$, $\alpha_m \in K \setminus \{0\}$ e u_1, $\ldots$, $u_m \in \mathfrak{E}$ tais que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_iu_i = 0$.

Agora, seja $e_r \in V$ tal que e_r aparece em u_1 mas não aparece em u_2. Dessa forma, segue que $e_ru_1 = 0$ e portanto

$$\sum_{i=2}^{m} \alpha_ie_ru_i = \sum_{i=2}^{m} \alpha_iw_i = 0, \quad onde \quad w_i = e_ru_i, i \in \{2, \ldots, m\}$$

o qual é um absurdo pela minimalidade de m. Disto, concluí-se que $\Gamma_{\mathfrak{E}} = \{0\}$, e assim, os elementos em $\mathfrak{E}$ são linearmente independentes.

Segue do último item acima e do lema 2.8 que $\{1\} \cup \mathfrak{E}$ é uma base de E sobre K.

Lema 2.9. *Se J é o ideal em $K\langle X\rangle$ gerado pelos elementos $x_ix_j + x_jx_i$, i, $j \in \{1, 2, \ldots\}$, então $K\langle X\rangle/J \cong E$.*

Demonstração. Já sabemos que E possui como base os elementos da forma

$$e_{i_i}e_{i_2} \cdots e_{i_p}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_p \quad p \in \mathbb{N}.$$

Agora, considere o mapa $X \to E$ dado por $x_i \mapsto e_i$. Como $K\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa livre, existe um homomorfismo de álgebras associativas $\psi\colon K\langle X\rangle \to E$ tal que $\psi(x_i) = e_i$. Além disso, por construção de ψ, $J \subseteq Ker(\psi)$ e portanto, ψ induz um mapa $\widetilde{\psi}\colon K\langle X\rangle \to E$ dado por $x + J \mapsto \psi(x)$.

Afirmamos que os vetores da forma $x_{i_1} \cdots x_{i_p}$, $i_1 < \cdots < i_p$ são linearmente independentes em $K\langle X\rangle$. De fato, como $\psi(x_{i_1} \cdots x_{i_p}) = e_{i_1} \cdots e_{i_p}$, uma dependência linear de alguns vetores da forma $x_{i_1} \cdots x_{i_p}$ implicaria uma dependência linear dos respectivos $e_{i_1} \cdots e_{i_p}$, o que é um absurdo. Com isso, concluímos que $Ker(\psi) = J$ e assim, $\widetilde{\psi}$ é um isomorfismo de álgebras associativas. □

Exemplo 2.10. *O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$ é uma identidade polinomial na álgebra de Grassmann E. Para verificarmos isso, notemos inicialmente que f é linear em cada entrada, portanto é suficiente provar o resultado para elementos da base de E. Considere os elementos $r_1 = e_{i_1} \cdots e_{i_n}$ e $r_2 = e_{j_1}$, $j_1 \neq \{i_1, \ldots, i_n\}$.*

Temos $[r_1, r_2] = e_{i_1} \cdots e_{i_n}e_{j_1} - e_{j_1}e_{i_1} \cdots e_{i_n}$, logo, após n transposições ao elemento $e_{j_1}e_{i_1} \cdots e_{i_n}$ chegamos em $e_{j_1}e_{i_1} \cdots e_{i_n} = (-1)^ne_{i_1} \cdots e_{i_n}e_{j_1}$ e $[r_1, r_2] = (1 - (-1)^n)e_{i_1} \cdots e_{i_n}e_{j_1}$.

Portanto, se $r_2 = e_{j_1}e_{j_1} \cdots e_{j_m}$ podemos proceder por indução em $m > 0$ para mostrar que

$$[r_1, r_2] = (1 - (-1)^{mn})e_{i_1} \cdots e_{i_n}e_{j_1}e_{j_1} \cdots e_{j_m}.$$

Logo, $[r_1, r_2] \neq 0$ se, e somente se m e n são ambos ímpares, donde segue que $[r_1, r_2]$ tem um tamanho par. Consequentemente, para qualquer $r_3 = e_{k_1} \cdots e_{k_l}$ temos $[[r_1, r_2], r_3] = 0$.

Definição 2.11. *O comutador de Lie de comprimento n, com $n > 1$, é definido indutivamente por $[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$.*

Exemplo 2.12. *O polinômio $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ é uma identidade polinomial em $E \otimes E$. Neste caso, diz-se que $E \otimes E$ satisfaz a* ***propriedade central-por-metabeliana****.*

Exemplo 2.13. *Sejam $R = M_2(K)$, e_{ij} a matriz que possui 1 nas entradas (i, j) e 0 nas outras. Por verificação imediata, segue que*

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] + [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3]$$

onde $\circ$ é um produto definido no conjunto das matrizes por $l_1 \circ l_2 = l_1 l_2 + l_2 l_1, \quad l_1, l_2 \in R$.

Considere agora a base de $M_2(K)$ dada por $\mathcal{B} = \{e, e_{11}, e_{12}, e_{21}\}$, onde $e = e_{11} + e_{22}$.

Lembremos também que $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, e que $[e, e_{11}] = [e, e_{12}] = [e, e_{21}] = 0$. Dessa forma, temos que $s_4(e, e_{11}, e_{12}, e_{21}) = 0$. Portanto, como $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ é multilinear

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad x_i \in R, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Exemplo 2.14. *O* ***polinômio de Hall*** *definido por $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$, é uma identidade polinomial em $R = M_2(K)$. Para tal verificação, lembremos que o polinômio característico de uma matriz $r \in R$ é dado por $c_r(x) = x^2 - tr(r)x + \det(r)$.*

Por outro lado, pelo teorema de Cayley–Hamilton $0 = c_r(r) = r^2 - tr(r)r + \det(r)$. Se $r = [x_1, x_2]$ temos que $tr(r) = 0$, e a expressão acima se torna $[x_1, x_2]^2 + \det(r) = 0$, ou seja, $[x_1, x_2]^2 \in K$, donde segue que $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ para quaisquer x_1, x_2, $x_3 \in R$.

Definição 2.15. *Um ideal $J \trianglelefteq K\langle X\rangle$ é dito um T-ideal se $\phi(J) \subseteq J$, para todos os endomorfismos ϕ em $K\langle X\rangle$.*

Exemplo 2.16. *Se R é uma álgebra, o conjunto $T(R)$ de todas as identidades polinomiais de R é um T-ideal em $K\langle X\rangle$. De fato, dado qualquer endomorfismo ϕ em $K\langle X\rangle$, seja $w_i = \phi(x_i)$, para $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Dessa forma temos que $\phi(f(x_1, \ldots, x_m)) = f(w_1, \ldots, w_m) = 0$. Por conta que $T(R)$ é um T-ideal, diz-se que $T(R)$ é o T-ideal de R.*

O próximo resultado mostra-nos que a partir de um T-ideal $K\langle X\rangle$ é possível construir uma álgebra associativa na qual este ideal é um T-ideal.

Proposição 2.17. *Dado um ideal T-ideal U em $K\langle X\rangle$, existe uma álgebra associativa R tal que $T(R) = U$.*

Demonstração. Defina $R := K\langle X\rangle/U$ e seja $f(x_1, \ldots, x_m) \in U$. Dados quaisquer elementos $\overline{w}_1 = w_1 + U, \ldots, \overline{w}_m = w_m + U$ em R, por conta de U ser um T-ideal segue que $f(w_1, \ldots, w_m) \in U$ e portanto, $f(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_m) = \overline{0}$, e assim, $U \subseteq T(R)$. Reciprocamente, se $f(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ e $f \notin U$, então $f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m) \neq \overline{0}$ e isso implica que $f \notin T(R)$, ou seja, mostramos que $T(R) \subseteq U$. Do feito, concluí-se que $T(R) = U$. $\square$

Dada uma família não vazia $\mathcal{F} \subseteq K\langle X\rangle$, a classe $\mathscr{V}$ de todas as álgebras associativas que satisfazem as identidades polinomiais de $\mathcal{F}$ é chamada de **variedade** determinada por $\mathcal{F}$. Além disso, se $\mathcal{F} = \{f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \mid i \in I\}$, então denota-se por $\langle f_i \mid i \in I\rangle^T$ o menor T-ideal que contém $\mathcal{F}$, ou seja, $\langle f_i \mid i \in I\rangle^T$ é a intersecção de todos os T-ideais que contêm $\mathcal{F}$.

Sabe-se que para conhecer um endomorfismo ϕ em $K\langle X\rangle$ basta a imagem dos elementos em X (pois $K\langle X\rangle$ é livre em X), isto é, basta saber quem são os $\phi(x_i)$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Dessa forma, se $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$, então os elementos em $\langle f_i \mid i \in I\rangle^T$ são da forma

$$\sum_{i \in I} u_i f_i(w_{i_1}, \ldots, w_{i_{n_i}})v_i, \quad w_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle X\rangle.$$

Definição 2.18. *Para um conjunto não vazio Y fixado, a álgebra $F_Y(\mathscr{V})$ na variedade $\mathscr{V}$ é uma* ***álgebra relativamente livre*** *de $\mathscr{V}$ se esta satisfaz*

i) $F_Y(\mathscr{V})$ é gerada por Y.

ii) $F_Y(\mathscr{V})$ é livre na classe $\mathscr{V}$. Isto é, dada qualquer $R \in \mathscr{V}$, todo mapa $Y \to R$ pode ser estendido para um homomorfismo de álgebras associativas $F_Y(\mathscr{V}) \to R$.

Notação: Se $|Y| = m$, então escreve-se $F_m(\mathscr{V}) := F_Y(\mathscr{V})$. Caso $|Y|$ seja infinito enumerável, escrevemos simplesmente $F(\mathscr{V})$ ao invés de $F_\infty(\mathscr{V})$.

Proposição 2.19. *(Existência de álgebras relativamente livres em $K\langle X\rangle$) Seja $\mathscr{V}$ uma variedade definida por uma família $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$. Então a álgebra $F := K\langle X\rangle/\langle f_i \mid i \in I\rangle^T$ é uma álgebra relativamente livre de $\mathscr{V}$ com conjunto de geradores $\overline{X} = \{x + \langle f_i \mid i \in I\rangle^T \mid x \in X\}$.*

Observação: O resultado acima vale para qualquer conjunto Y. No caso geral, toma-se o quociente de $K\langle Y\rangle$ pelo ideal J gerado por $\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i}) : g_j \in K\langle Y\rangle, \quad i \in I\}$ e $\overline{Y} := \{y + J : y \in Y\}$ como conjunto de geradores. (c.f. [10] pág. 23).

Teorema 2.20. *Existe uma correspondência biunívoca π entre os T-ideais de $K\langle X\rangle$ e a variedade das álgebras associativas. Além disso, π é uma correspondência de Galois, isto é, para quaisquer T-ideais V_1 e V_2, $V_1 \subseteq V_2$ se e somente se $\pi(V_2) \subseteq \pi(V_1)$.*

Definição 2.21. *Se $\mathscr{V}$ é uma variedade e R é uma álgebra sobre K tal que $T(\mathfrak{V}) = T(R)$, então diz-se que $\mathfrak{V}$ é uma variedade gerada por R, e escreve-se $\mathfrak{V} = var(R)$.*

- Dada uma variedade $\mathscr{V}$, se $R := K\langle X\rangle/T(\mathscr{V})$, então $T(R) = T(\mathscr{V})$.

Definição 2.22. *Diz-se que uma identidade polinomial $g(x_1, \ldots, x_m)$ é uma consequência das identidades polinomiais $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$, $i \in I$, se qualquer álgebra que satisfaz $f_i = 0$, também satisfaz $g = 0$. Em outras palavras, $g \in \langle f_i : i \in I\rangle^T$.*

3 Invariantes Numéricos de T-Ideais

3.1 Séries de Hilbert

Definição 3.1. *Considere* $f(x_1,\ldots,x_m)=\sum_j \alpha_j x_{i_1}\cdots x_{i_{d_j}} \in K\langle X\rangle$, $\alpha_j\in K$.

a) $f(x_1,\ldots,x_m)$ *é dito* ***homogêneo de grau*** d *se todos os monômios* $x_{i_1}\cdots x_{i_{d_j}}$ *com coeficientes não nulos, tem o mesmo grau* d.

b) $f(x_1,\ldots,x_m)$ *é dito* ***multihomogêneo*** *de multigrau* $(d_1,\ldots,d_m)$*, se cada variável* x_i *aparece o mesmo número de vezes* d_i *em todos os monômios.*

c) $f(x_1,\ldots,x_m)$ *é* ***multilinear*** *se é multihomogêneo de multigrau* $(1,1,\ldots,1)$.

Exemplo 3.2. *Na álgebra associativa* $\mathbb{R}\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle$

a) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=7x_1x_2x_3x_1x_4-3x_1^2x_4x_3x_2+6x_2^3x_1x_3-x_3x_4x_2x_1x_3$ *é homogêneo de grau* 5.

b) $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_1^2x_4^2+x_2x_1x_4x_1^2x_4+8x_1^2x_4x_2x_1x_4$ *é multihomogêneo de multigrau* $(3,1,0,2)$.

c) $h(x_1,x_2,x_3,x_4)=8x_1x_2x_3x_4+7x_1x_4x_3x_2-x_3x_2x_1x_4$ *é multilinear de grau* 4.

- Qualquer polinômio multilinear $f(x_1,\ldots,x_m)$ de grau m em $K\langle X\rangle$ tem a forma

$$f(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{\sigma\in S_m} a_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(m)} \tag{6}$$

onde $a_\sigma\in K$ para todo $\sigma\in S_m$.

Teorema 3.3. *Se* $f(x_1,\ldots,x_m)$ *é um polinômio multilinear alternado de grau* m*, então* f *é um múltiplo do polinômio standard.*

Demonstração. Escrevemos $f(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{\sigma\in S_m}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m)}$. Considere uma transposição da forma $\tau=(i,j)$, então, como f é alternado temos

$$f(x_1,\ldots x_j,\ldots x_i,\ldots x_m)=(-1)^\tau f(x_1,\cdots x_i,\ldots x_j,\cdots x_m)$$

e assim, em particular devemos ter

$$\alpha_\tau x_1\cdots x_i\cdots x_j\cdots x_m=(-1)^\tau\alpha_1x_1\cdots x_i\cdots x_j\cdots x_m$$

logo, concluí-se que $\alpha_\tau=(-1)^\tau\alpha_1$ e assim, por arbitrariedade da transposição tomada, segue que para toda transposição $\mu\in S_m$, $\alpha_\mu=(-1)^\mu\alpha_1$.

Agora, dada uma permutação $\sigma\in S_m$, escreva $\sigma=\widetilde{\sigma}\tau$. Assim, temos que $f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)})=(-1)^{\widetilde{\sigma}}f(x_{\tau(1)},\ldots,x_{\tau(m)})=(-1)^{\widetilde{\sigma}}(-1)^\tau f(x_1,\ldots,x_m)$. E segue pelo mesmo raciocínio anterior que $\alpha_1=(-1)^{\widetilde{\sigma}\tau}\alpha_\sigma$. Logo, $\alpha_\sigma=(-1)^\sigma\alpha_1$. Disto, segue que $f=\alpha_1 s_m$. □

Definição 3.4. *i) Um* K*-espaço vetorial* V *é graduado, se existem subespaços* $V^{(n)}\subseteq V$, $n\geq 0$*, tais que* $V=\bigoplus_{n\geq 0}V^{(n)}$*, e* $V^{(n)}$ *são as componentes homogêneas de grau* n *de* V.

ii) Seja A *uma* K*-álgebra, dizemos que* A *é graduada se,* A *é graduada como um* K*-espaço vetorial e as componentes homogêneas satisfazem* $A^{(m)}A^{(n)}\subseteq A^{(m+n)}$*, para quaisquer* m, $n\in\mathbb{N}$.

Exemplo 3.5. *a) O espaço vetorial* $K[x_1,\ldots,x_m]$ *é graduado. Seja* $V^{(0)}:=K$ *e para cada* $n>0$*, defina* $V^{(n)}=span_K\{x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}:\sum_i n_i=n\}$*. Logo* $K[x_1,\ldots,x_m]=\bigoplus_{n\geq 0}V^{(n)}$.

Quando $K[x_1,\ldots,x_m]$ *é soma direta dos subespaços definidos acima, este é* ***graduado por grau.***

b) Pode-se graduar o espaço vetorial $K\langle x_1,\ldots,x_m\rangle$ *de forma análoga feita no item a). Para ver isso, seja* $\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$*, e defina* $U^{(0)}:=K$ *e para cada* $n>0$

$$U^{(n)}=span_K\{x_{i_1}\cdots x_{i_n}:(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\cdots\times\mathbb{N}_0\}$$

com isso, segue que $K\langle x_1,\ldots,x_r\rangle=\bigoplus_{n\geq 0}U^{(n)}$.

Mantendo as notações de a) e b) notemos também que[1]

$$\dim(V^{(n)})=\binom{n+m-1}{m-1},\qquad \dim U^{(n)}=m^n.$$

[1]Para se encontrar a dimensão de $V^{(n)}$ utilizamos o fato de que existem $\binom{n+m-1}{m-1}$ soluções inteiras não negativas para a equação $x_1+\cdots+x_m=n$.

Definição 3.6. *i) Diremos que um K-espaço vetorial V é* ***multigraduado*** *se é soma direta de subespaços $V^{(n_1,\dots,n_m)}$, onde $(n_1,\dots,n_m) \in \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0^m$. Em outras palavras*

$$V = \bigoplus_{(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}_0^m} V^{(n_1,\dots,n_m)}$$

Além disso, $V^{(n_1,\dots,n_m)}$ é chamado de uma componente de grau $(n_1,\dots,n_m)$.

ii) Seja A uma K-álgebra, dizemos que A é multigraduada se A é multigraduada como um K-espaço vetorial e além do mais, as componentes homogêneas satisfazem, $A^{(k_1,\dots,k_m)}A^{(n_1,\dots,n_m)} \subseteq A^{(k_1+n_1,\dots,k_m+n_m)}$, para quaisquer $k_1,\ \dots,\ k_m,\ n_1,\ \dots,\ n_m \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.7. *a) Em $K[x_1,\dots,x_m]$, para cada m-upla $(n_1,\dots,n_m) \in \mathbb{N}_0^m$ defina*

$$V^{(n_1,\dots,n_m)} = span_K\{x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}\}.$$

Com isso, concluímos que $K[x_1,\dots,x_m] = \bigoplus_{(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}_0^m} V^{(n_1,\dots,n_m)}$ donde segue que $K[x_1,\dots,x_m]$ é um espaço vetorial multigraduado.

b) Analogamente se mostra que $K\langle x_1,\dots,x_m\rangle$ é multigraduado. A diferença entretanto aqui, é que define-se $U^{(n_1,\dots,n_m)}$ como o espaço vetorial gerado pelos polinômios de multigrau $(n_1,\dots,n_m)$ (no sentido de 3.1).

Observemos ainda que para cada m-upla $(n_1,\dots,n_m) \in \mathbb{N}_0^m$ $\dim(V^{(n_1,\dots,n_m)}) = 1$ e

$$\dim(U^{(n_1,\dots,n_m)}) = \binom{n_1+n_2+\cdots+n_m}{n_1,n_2,\dots,n_m}$$

onde a dimensão de $U^{(n_1,\dots,n_m)}$ é exatamente a quantidade de polinômios distintos de multigrau $(n_1,\dots,n_m)$ que há em $K\langle x_1,\dots,x_m\rangle$[2]

Antes de prosseguirmos, relembremos alguns resultados combinatórios, os quais podem serem vistos com mais detalhes em [39].

Resultado 3.8. *Para cada $t \in K$ e $d \in \mathbb{N}$, segue da fórmula do binômio de Newton que*

$$\frac{1}{(1-t)^d} = \sum_{k\geq 0}\binom{d+k-1}{d-1}t^k.$$

Teorema 3.9. *(Teorema Multinomial) Sejam $t_1,\dots,t_r$ elementos arbitrários num corpo K, então*

$$\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_r)\\ n_1+\cdots+n_r=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_r}t_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_r^{n_r} = (t_1+\cdots+t_r)^n.$$

Vamos ilustrar como pode-se calcular a dimensão de uma componente homogênea de grau n de uma álgebra graduada. Para efeito, considere $A = K[x,y]$ e $I = (x^3y, x^2y^4)$. Então, pode-se graduar I da seguinte forma $I = \bigoplus_{n\geq 0} I^{(n)}$ onde para cada $n \geq 0$

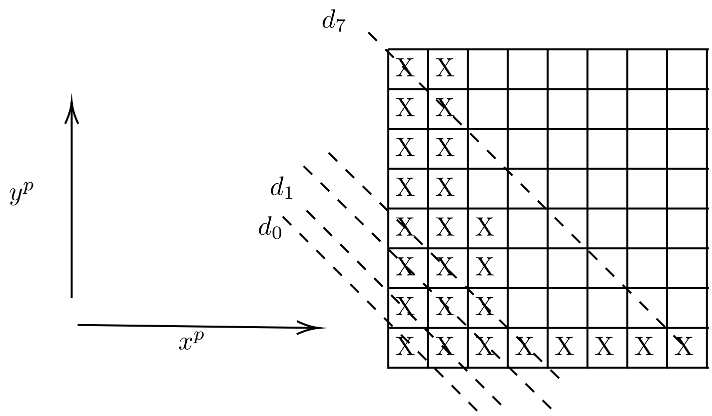
$$I^{(n)} = span_K\{x^{p+3}y^{q+1} : \quad p+q+4=n\} + span_K\{x^{p+2}y^{q+4} : \quad p+q+6=n\}.$$

Em outras palavras, um elemento x^py^q constitui um gerador de $I^{(n)}$, se $p+q+4=n$ ou $p+q+6=n$. Por exemplo, se $n=6$, uma base de $I^{(6)}$ é dada por $\{x^4y^2, x^5y, x^3y^3, x^2y^4\}$. Agora, observemos que

$$A/I \cong K[x] \oplus K[y] \oplus span_K\{xy^j : j\geq 1\} \oplus span_K\{x^2y, x^2y^2, x^2y^3\}$$

e portanto este recebe uma graduação natural (por contagem de grau) induzida de cada soma direta acima. Dessa forma, podemos colecionar no quadriculado abaixo os elementos básicos de A de acordo com a seguinte regra: Um par ordenado (p,q) representa o monômio x^py^q. Notemos que considerado a j-ésima diagonal principal que passa pelo diagrama, a quantidade de quadrados que tal corta é exatamente a dimensão da j-ésima componente homogênea de A. Além disso, os quadrados marcados com X representam os elementos básicos de A/I, enquanto que os não marcados representam os de I.

[2]Para calcular a dimensão de $U^{(n_1,\dots,n_m)}$ utilizamos o fato de que a quantidade de anagramas com k posições que se pode formar com a sequência $x_1,\dots,x_m$, levando em conta que x_i se repete n_i vezes é exatamente $\binom{k}{n_1,n_2,\dots,n_m}$, onde $\binom{k}{n_1,n_2,\dots,n_m} = \frac{k!}{n_1!\cdots n_m!}$ é chamado de **coeficiente multinomial**.



Do diagrama acima, percebemos que da sexta componente homogênea de A/I em diante, a dimensão se estabiliza em 3 e portanto, a dimensão da n-ésima componente de I para $n \geq 6$, é dada pelo número de elementos da diagonal do quadrado $j+1 \times j+1$ menos 3 unidades. De outra forma, $\dim I^{(n)} = (n+1) - 3 = n - 2$.

Definição 3.10. *(Séries de Hilbert) Seja V espaço vetorial graduado satisfazendo $V = \bigoplus_{n\geq 0} V^{(n)}$ onde $\dim(V^{(n)}) < \infty$ para cada $n \geq 0$.*

A série de potências formal Hilb$(V,t) := \sum_{n\geq 0} \dim(V^{(n)})t^n$ é chamada de a série de Hilbert de V.

- Se $f(t)$ é uma função qualquer, escrevemos $\mathrm{Hilb}(V,t) = f(t)$ se a série $\mathrm{Hilb}(V,t)$ converge em alguma vizinhança aberta de 0, e além disso em tal vizinhança $\mathrm{Hilb}(V,t) = f(t)$.

Exemplo 3.11. *Segue do exemplo 3.5 a) e do resultado 3.8 que*

$$Hilb(K[x_1,\ldots,x_m],t) = \frac{1}{(1-t)^m}.$$

Por outro lado, segue de 3.5 b) que

$$Hilb(K\langle x_1,\ldots,x_m\rangle,t) = \sum_{n\geq 0}\dim(U^{(n)})t^n = \sum_{n\geq 0}(mt)^n = \frac{1}{1-mt}.$$

Definição 3.12. *(Série de Hilbert em várias variáveis) Seja V espaço vetorial multigraduado, tal que*

$$V = \bigoplus_{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}_0^m} V^{(n_1,\ldots,n_m)}$$

onde $\dim(V^{(n_1,\ldots,n_m)}) < \infty$, para cada $(n_1,\ldots,n_m) \in \mathbb{N}_0^m$.

Então, a série de Hilbert de V é definida como sendo a série de potências formal

$$Hilb(V,t_1,\ldots,t_m) = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}_0^m} \dim(V^{(n_1,\ldots,n_m)})t_1^{n_1}\cdots t_m^{n_m}.$$

Exemplo 3.13. *Segue do exemplo 3.7 a) que*

$$Hilb(K[x_1,\ldots,x_m],t_1,\ldots,t_m) = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)} t_1^{n_1}\cdots t_m^{n_m} = \left(\sum_{n_1\geq 0} t_1^{n_1}\right)\cdots\left(\sum_{n_m\geq 0} t_m^{n_m}\right) = \prod_{k=1}^{m}\frac{1}{(1-t_k)}.$$

Da mesma forma, utilizando 3.7-b) e o teorema binomial (3.9) tem-se que

$$Hilb(K\langle x_1,\ldots,x_m\rangle,t_1,\ldots,t_m) = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)} \binom{n_1+n_2+\cdots+n_m}{n_1,n_2,\ldots,n_m} t_1^{n_1}\cdots t_m^{n_m} = \sum_{n\geq 0}(t_1+\cdots+t_m)^n$$

donde segue que $Hilb(K\langle x_1,\ldots,x_m\rangle,t_1,\ldots,t_m) = \dfrac{1}{1-(t_1+\cdots+t_m)}$.

3.2 Processo de Linearização

Dado $n \in \mathbb{N}$ denotemos por P_n o espaço vetorial dos polinômios em $K\langle X\rangle$ que são multilineares de grau n. Os monômios $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)}, \sigma \in S_n$, são distintos, e portanto linearmente independentes, e assim, o conjunto $\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é uma base de P_n, em particular, $\dim(P_n) = n!$. Antes de prosseguir, relembremos um resultado que irá nos auxiliar no que segue.

Lema 3.14. *(Determinante de Vandermonde) Sejam D um anel comutativo e $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in D$. Então*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2^{n-1} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(\xi_j - \xi_i)$$

Agora, suponha que K tenha infinitos elementos e considere um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ escrito da seguinte forma

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1 (i.e x_1 aparece i-vezes em cada monômio f_i), $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Sejam $J := \langle f\rangle^T$ e $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ elementos distintos dois a dois em K. Dado que J é um T-ideal, $f(\xi_k x_1, \ldots, x_n) \in J$, para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ (pois $x_i \mapsto \xi_k x, x_i \mapsto x_i, i \neq 1$, é um endomorfismo). Ou seja, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$f(\xi_k x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \xi_k^i f_i(x_1, \ldots, x_m) \in J.$$

Dessa forma, módulo J, a equação acima se torna

$$\sum_{i=0}^{n} \xi_k^i (f_i(x_1, \ldots, x_m) + J) = 0. \tag{7}$$

Por outro lado, a matriz associada do sistema 7 é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2^{n-1} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

isto é, M é a matriz de Vandermonde. Portanto, pelo lema 3.14, $\det(M) = \prod_{i<j}(\xi_j - \xi_i) \neq 0$, donde segue que a matriz do sistema acima é invertível. Portanto temos solução única do mesmo, e assim segue que para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $f_i \in J$. Em outras palavras, as identidades polinomiais $f_i = 0$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, seguem de $f = 0$.

Por indução, seguindo o raciocínio feito acima, temos

Proposição 3.15. *Seja K um corpo infinito. Se $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ é uma identidade polinomial para a álgebra associativa R, então cada componente homogênea de f é uma identidade polinomial para R. Analogamente, cada componente multihomogênea de f é uma identidade polinomial para R.*

Notação: Se $g(x_1, \ldots, x_m)$ é um polinômio homogêneo então o grau de g em relação a x_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, é denotado por $\deg_{x_j} g$.

Proposição 3.16. *Se uma álgebra R satisfaz uma identidade de grau l, então R satisfaz também uma identidade multilinear de grau $\leq l$.*

Demonstração. Seja $f(x_1, \ldots, x_m)$ uma identidade polinomial para R. Se para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, a variável x_j aparece com grau ≤ 1 em cada monômio de f, então a menos de omitir algumas delas, temos uma identidade multilinear para R. Sem perda de generalidade, assuma que $\deg_{x_1} f = d > 1$ e considere o polinômio

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) - f(y_1, x_2, \ldots, x_m) - f(y_2, x_2, \ldots, x_m).$$

Dado que f é uma identidade polinomial para R, por definição h também é. Vamos argumentar que $h \neq 0$, suponha então por absurdo que $h \equiv 0$. Como $K\langle X\rangle$ é livre em X, existe um endomorfismo $\phi\colon K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ tal que $\phi(y_1) = \phi(y_2) = x_1$, e $\phi(x_j) = x_j$ para todo $2 \leq j \leq m$. Então

$$0 = h(\phi(y_1, \phi(y_2), x_2, \ldots, x_m) = h(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(2x_1, x_2, \ldots, x_m) - 2f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

isto é

$$2f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(2x_1, x_2, \ldots, x_m) \tag{8}$$

Escrevendo $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$, onde f_j é uma soma de monômios de f de grau j em x_1, usando 8 e o fato de que $\deg_{x_1} f = d$, tem-se que

$$-f_0 + (2^2 - 2)f_2 + \cdots + (2^d - 2)f_d = 0.$$

Mas isso implicaria que $d \leq 1$, absurdo. Segue que $h \neq 0$, e como $\deg_{y_1} h = d - 1$, temos o resultado por indução. $\square$

Proposição 3.17. *Suponha que $char(K) = 0$ e considere $f(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$. Então $f = 0$ é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares.*

Demonstração. Pela proposição 3.15 é suficiente mostrar o resultado supondo que f é multihomogêneo. Se $\deg_{x_1} f = 1$, não há nada para provar. Suponha sem perda de generalidade que $d := \deg_{x_1} f$, $d > 1$ e por hipótese de indução o resultado é válido para polinômios de grau menor que d. Considere também $J := \langle f\rangle^T$. Dado que $f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) \in J$, pois J é um T-ideal, podemos escrever

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m) \tag{9}$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Dado que $\deg_{y_1} f < d$ e $\deg_{y_2} f < d$, por hipótese de indução, obtemos um conjunto de identidades polinomiais multilineares para cada $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ que são consequências de f_i, e mais uma vez pela observação acima, um conjunto de identidades polinomiais multilineares consequências de $f = 0$. Reciprocamente, aplicando o teorema do binômio de Newton a $f(y_1 + y_1, x_2, \ldots, x_m)$, e comparando com 9, tem-se que $f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_m) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_m)$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$. E portanto, dado que $char(K) = 0$, segue que se $f_i = 0$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$, então $f = 0$. $\square$

O processo de redução de uma identidade polinomial em um sistema de identidades polinomiais multilineares feitos acima, é chamado de **processo de linearização.** Por conta de 3.17, sempre que tivermos $char(K) = 0$, muitos dos resultados serão enunciados para identidades polinomiais multilineares.

Corolário 3.18. *Se $char(K) = 0$, todo T-ideal é gerado por seus elementos multilineares.*

Exemplo 3.19. *Suponha que $K = \mathbb{R}$, vamos encontrar um sistema de identidades polinomiais multilineares equivalentes a $x_1x_2x_1 + 2x_2^2x_3 = 0$. Notemos inicialmente que os monômios de f são $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_1$ e $p(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2x_3$, e além do mais, tais não são multilineares. Vamos começar linearizando $g(x_1, x_2, x_3)$:*

Defina $h_1(y_1, y_2, x_2, x_3) = g(y_1 + y_2, x_2, x_3) - g(y_1, x_2, x_3) - g(y_2, x_2, x_3)$, isto é, $h_1(y_1, y_2, x_2, x_3) = y_1x_2y_2 + y_2x_2y_1$, o qual é um polinômio multilinear em $\mathbb{R}\langle x_1, x_2\rangle$. Para linearizar $p(x_1, x_2, x_3)$ definimos

$$h_2(x_1, y_1, y_2, x_3) = p(x_1, y_1 + y_2, x_3) - p(x_1, y_1, x_3) - p(x_1, y_2, x_3)$$

ou seja, $h_2(z_1, z_2, x_3) = z_1z_2x_3 + z_2z_1x_3$, que é multilinear em $\mathbb{R}\langle x_2, x_3\rangle$. Como consequência, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ é equivalente ao sistema de identidades multilineares

$$\begin{cases} y_1x_2y_2 + y_2x_2y_1 = 0 \\ z_1z_2x_3 + z_2z_1x_3 = 0 \end{cases}.$$

Se $u_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3x_2 + x_2x_3x_1$ e $u_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_2x_1x_3$, segue que u_1, $u_2 \in \langle f\rangle^T$.

Exemplo 3.20. *Suponha que $char(K) = 0$, vamos aplicar o processo de linearização ao polinômio $p(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2][x_2, x_3]$. Considere o polinômio*

$$q(x_1, y_1, y_2, x_3) = p(x_1, y_1 + y_2, x_3) - p(x_1, y_1, x_3) - p(x_1, y_2, x_3)$$

isto é, $q(x_1, y_1, y_2, x_3) = [x_1, y_1 + y_2][y_1 + y_2, x_3] - [x_1, y_1][y_1, x_3] - [x_1, y_2][y_2, x_3]$, e assim

$$q(x_1, y_1, y_2, x_3) = [x_1, y_1][y_2, x_3] + [x_1, y_2][y_1, x_3]$$

e portanto, $p(x_1, x_2, x_3) = 0$ é equivalente à identidade multilinear $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] = 0$.

Definição 3.21. *(Codimensão) Seja R uma $PI-$álgebra e $T(R)$ seu T-ideal. Então o número*

$$c_n(R) := \dim(P_n/P_n \cap T(R)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

é chamado de a n-ésima codimensão do T-ideal $T(R)$. A série de codimensões e série exponencial de codimensões de R são definidas respectivamente por

$$c(R, t) = \sum_{n \geq 0} c_n(R) t^n, \qquad \widetilde{c}(R, t) = \sum_{n \geq 0} c_n(R) \frac{t^n}{n!}.$$

Se o T-ideal $T(R)$ é multihomogêneo em $K\langle X \rangle$ denota-se por $Hilb(F_m(R), t_1, \ldots, t_m)$ a série de Hilbert de uma álgebra relativamente livre de posto m em $var(R)$. Se estamos interessados na série de Hilbert de uma variável escrevemos

$$Hilb_m(var(R), t) = \sum_{n \geq 0} \dim(F_m^{(n)}(R)) t^n.$$

Em característica 0, devido ao processo de linearização, devemos estudar $P_n \cap T(R)$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$ Entretanto, o teorema de Regev 7.8 mostra-nos que isso não é nada prático, pois segundo este, se $T(R) \neq 0$, existe uma constante $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$c_n(R) \leq a^n$$

para cada $n = 0,\ 1,\ \ldots$ Além disso, a sequência (a^n) tem crescimento muito mais lento do que a sequência fatorial $(n!)$. E portanto, dado que $\dim P_n = n!$, para n suficientemente grande $P_n \cap T(R)$ torna-se quase todo P_n e por isso, é muito mais conveniente estudar o quociente $P_n/P_n \cap T(R)$.

3.3 Breve introdução aos polinômios próprios

Definição 3.22. *Sejam L um espaço vetorial sobre K e $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ uma função. Diz-se que $[\cdot,\cdot]$ define em L uma estrutura de álgebra de Lie (ou simplesmente que L é uma álgebra de Lie) se:*

1. *$[\cdot,\cdot]$ é bilinear.*
2. *$[x, x] = 0$ para qualquer $x \in L$.*
3. *$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para quaisquer $x,\ y,\ z \in L$.*

A última condição que $[\cdot,\cdot]$ precisa satisfazer é conhecida como **identidade de Jacobi.**

Definição 3.23. *Se R é uma álgebra associativa com unidade e uma álgebra de Lie G é isomorfa a uma subalgebra de $R^{(-)}$, dizemos que R é um envelope da álgebra de Lie G. A álgebra associativa unitária $U(G)$ é a álgebra universal envolvente da álgebra de Lie G, se G é uma subalgebra de $U(G)^{(-)}$ e $U(G)$ tem a seguinte propriedade universal:*

Propriedade Universal: *Para qualquer álgebra associativa R com unidade e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\phi\colon G \to R^{(-)}$, existe único homomorfismo de álgebras associativas $\psi\colon U(G) \to R$ tal que $\psi_{|G} = \phi$.*

O próximo teorema garante-nos a existência de um envelope universal e mostra-nos ainda como encontrar uma base de $U(G)$ a partir de uma base de G.

Teorema 3.24. *(Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt) Qualquer álgebra de Lie G (sobre corpo) possui único, a menos de isomorfismo, envelope universal $U(G)$. Se G possui uma base $\{e_i \mid i \in I\}$, e o conjunto de índices I possui uma relação de ordem $\leq$, então o conjunto $\{1, e_{i_1} \cdots e_{i_p} \mid i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_p,\quad i_k \in I \text{ e } p = 1, 2, \ldots\}$, é uma base de $U(G)$.*

Teorema 3.25. *(Teorema de Witt) Considere $L(X)$ a subalgebra de Lie de $K\langle X\rangle^{(-)}$ gerada pelo conjunto X. Então, se $\widehat{L}$ é a álgebra de Lie livre gerada por X, segue que $L(X) \cong \widehat{L}$. Além disso, $U(L(X)) = K\langle X\rangle$.*

Definição 3.26. *(Identidades polinomiais próprias) Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é um polinômio próprio (ou comutador), se este é da forma*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{i,\ldots,j}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \cdots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}], \quad a_{i,\ldots,j} \in K.$$

• Denotamos por B o conjunto dos polinômios comutadores em $K\langle X\rangle$ e

$$B_m := B \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle, \quad m = 1, 2, \ldots$$

é o conjunto dos polinômios comutadores em m variáveis;

$$\Gamma_n := B \cap P_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

é o conjunto de todos os polinômios comutadores multilineares de grau n.

• Seja $\mathscr{B}_L$ uma base da álgebra de Lie livre $L(X)$ constituída por elementos da forma

$$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, [x_{i_1}, x_{i_2}],\, [x_{j_1}, x_{j_2}],\, \ldots,\, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}],\, \ldots$$

Em $\mathscr{B}_L$, considere a relação de ordem $(<)$ na qual todas as variáveis precedem os comutadores e sempre tem-se $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \cdots < [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]$.

Proposição 3.27. $i)$ *Considere $L(X)$ a álgebra de Lie livre com base $\mathscr{B}_L$. Então os elementos da forma*

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \cdots [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]^c$$

onde $a_1, \ldots, a_m, b, \ldots, c \geq 0$, formam uma base de $K\langle X\rangle$. Além disso, os elementos básicos de $K\langle X\rangle$ com $a_1 = \cdots = a_m = 0$ formam uma base do espaço vetorial dos polinômios próprios.

$ii)$ Se R é uma PI-álgebra com unidade sobre um corpo infinito K, então todas as identidades de R seguem das identidades em $T(R) \cap B$. Ademais, se $char(K) = 0$, então todas as identidades de R seguem daquelas em $T(R) \cap \Gamma_n$, $n = 2, 3, \ldots$

Demonstração. $i)$ Segue do teorema de Witt que $U(L(X)) = K\langle X\rangle$ e portanto a primeira parte de $i)$ segue do teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt aplicado em $G = L(X)$. Agora, sempre que tivermos produtos que estão na ordem errada, por exemplo

$$\cdots [x_{b_1}, \ldots, x_{b_l}][x_{a_1}, \ldots, x_{a_k}] \cdots, \quad [x_{b_1}, \ldots, x_{b_l}] > [x_{a_1}, \ldots, x_{a_k}]$$

então, substituímos tal produto por

$$[x_{b_1}, \ldots, x_{b_l}][x_{a_1}, \ldots, x_{a_k}] = [x_{a_1}, \ldots, x_{a_k}][x_{b_1}, \ldots, x_{b_l}] - [[x_{b_1}, \ldots, x_{b_l}], [x_{a_1}, \ldots, x_{a_k}]]$$

Dessa forma, dado que o segundo membro da soma acima pertence a $L(X)$, por argumentos indutivos, segue que os elementos de B são combinação linear de elementos da forma

$$[x_{i_1}, x_{i_2}]^b \cdots [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]^c$$

e assim, tem-se a última afirmação de $i)$.

$ii)$ Seja $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ uma identidade polinomial de R. É suficiente pela proposição 3.15 assumir que f é homogêneo em cada uma de suas variáveis. Escreva f da forma

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} w_a(x_1, \ldots, x_m), \quad \alpha_a \in K$$

onde $w_a(x_1, \ldots, x_m)$ é uma combinação linear de

$$[x_{i_1}, x_{i_2}]^b \cdots [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]^c.$$

Notemos agora que $[x_i, 1] = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots$, e portanto por indução segue que substituindo 1 em qualquer variável em um comutador da forma $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}]$ este se anula. Segue pelo teorema do binômio de Newton e do fato de que $f(1 + x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ que

$$f(1 + x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum \alpha_a \sum_{t=1}^{a_1} \binom{a_1}{t} x_1^t x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} w_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(R).$$

A componente homogênea de menor grau com respeito a x_1 é obtida dos termos acima com a_1 maximal entre aqueles com $\alpha_a \neq 0$, pois veja que seus monômios são da forma $\alpha_a x_1^0 x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} w_a$. Assim, utilizando a proposição 3.15 segue que

$$g(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{a_1 \quad max} \alpha_a x_1^0 x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} w_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(R).$$

Agora, fixando a_1 maximal como acima, suponha por hipótese de indução que

$$\sum_{j<a_1} \alpha_a x_1^j x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} w_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(R).$$

Dado que o polinômio $h(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m) - x_1^{a_1} g(x_1, \ldots, x_m)$ envolve termos de valores menores que a_1, por hipótese de indução

$$\sum_{a_1 \quad fixado} \alpha_a x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} w_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(R)$$

logo, $w_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(R)$ e resultado do teorema segue. A parte multilinear é análoga. □

A base de Γ_n dado no próximo teorema é chamada de **base de Specht.**

Notação: Dizemos que o comutator $[x_1, \ldots, x_s]$ é normado à esquerda se

$$[x_1, \ldots, x_s] = [[x_1, \ldots, x_{s-1}], x_s].$$

Teorema 3.28. *Uma base de Γ_n, para $n \geq 2$, consiste dos seguintes produtos de comutadores*

$$[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] \cdots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}]$$

sujeito as restrições:

i) Todos os produtos são multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

ii) Cada fator $[x_{p_1}, \ldots, x_{p_s}]$ é um comutador normado à esquerda de comprimento ≥ 2 e além disso, $p_1 > p_2 < \cdots < p_s$.

iii) O comprimento dos termos de cada um dos produtos está em ordem crescente.

iv) Se em um produto tivermos $\cdots [x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_s}][x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_s}] \cdots$ então tem-se $p_1 < q_1$.

Agora, dada uma PI-álgebra R sobre um corpo de característica 0, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ defina, $\Gamma_n(R) := \Gamma_n/(\Gamma_n \cap T(R))$ e $\gamma_n(R) := \dim \Gamma_n(R)$. A sequência (γ_n) é chamada de **sequência de codimensões próprias**. Analogamente ao feito anteriormente, define-se a **série de codimensões próprias** e a **série exponencial de codimensões próprias** como sendo respectivamente

$$\gamma(R,t) = \sum_{n\geq 0} \gamma_n(R) t^n, \qquad \widetilde{\gamma}(R,t) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n(R) \frac{t^n}{n!}.$$

Teorema 3.29. *Seja a R uma PI-álgebra sobre um corpo infinito K.*

i) Se

$$\mathscr{C} := \{w_j(x_1, \ldots, x_m) \mid j \in \mathbb{N}\}$$

é uma base de $B_m(R)$, onde

$$B_m(R) := (K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \cap B)/(T(R) \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \cap B)$$

então, o conjunto

$$\mathscr{D} := \{x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} g(x_1, \ldots, x_m) : g \in \mathscr{C}, a_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m\}$$

é uma base da álgebra relativamente livre $F_m(R)$.

ii) As séries de Hilbert da álgebra relativamente livre $F_m(R)$ e de seus elementos próprios $B_m(R)$ são relacionadas por

$$Hilb(F_m(R), t_1, \ldots, t_m) = Hilb(B_m(R), t_1, \ldots, t_m) = Hilb(B_m(R), t_1, \ldots, t_m) \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-t_i}$$

e

$$Hilb(F_m(R), t) = Hilb(B_m(R), t) \frac{1}{1-t}.$$

iii) Se o conjunto $\mathscr{E} = \{u_{jk}(x_1, \ldots, x_k) : j \in \{1, 2, \ldots, \gamma_k(R)\}\}$ *é uma base de* $\Gamma_k(R)$*, então* $P_n(R)$ *tem uma base formada por elementos da forma*

$$x_{p_1} \cdots x_{p_{n-k}} u_{jk}(x_{q_1}, \ldots, x_{q_k}), \quad j = 1, 2, \ldots, \gamma_k(R), \quad k = 1, 2, \ldots, n, p_1 < \cdots < p_{n-k}, \quad q_1 < \cdots < q_k.$$

iv) Sobre codimensões, séries de codimensão e séries exponencial de codimensão temos

$$c_n(R) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k(R) \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad c(R, t) = \frac{1}{1-t} \gamma\left(R, \frac{t}{1-t}\right), \qquad \widetilde{c}(R, t) = e^t \widetilde{\gamma}(R, t).$$

4 Identidades polinomiais de algumas álgebras conhecidas

Iremos descrever bases para as identidades polinomiais das álgebras de Grassmann e das matrizes triangulares superiores sobre um corpo K de característica 0. Iremos nos apoiar em [10], o qual utiliza a teoria dos polinômios próprios afim de descrever os T-ideais das álgebras supracitadas. Embora seja muito difícil descrever de forma explicita o T-ideal de uma álgebra qualquer (por exemplo não se tem ideia de qual seja uma base para as identidades polinomiais de $M_3(K)$, com $char(K) = 0$), vários autores fizeram isso para algumas álgebras clássicas, bem como trabalharam em resultados extremamente importantes que permeiam esta seção, abaixo descrevemos rapidamente alguns destes.

• Em [30], Latyshev encontrou uma base para as identidades polinomiais na álgebra de Grassmann em corpos de característica 0, e posteriormente em [27], Krakowski e Regev, utilizando a teoria das representações de S_n, fizeram este mesmo feito.

• Em [32] Maltsev exibiu uma base para as identidades polinomiais da álgebra das matrizes triangulares superiores.

• Siderov ([44]), Kalyulaid([22]), Polin ([34]) e Vovsi ([45]) descreveram o T-ideal da álgebra das matrizes triangulares superiores sobre corpos arbitrários.

• Em [35], Razmyslov exibiu uma base de $T(M_2(K))$, com K sendo um corpo de característica 0. Posteriormente, em [26], Koshlukov exibiu uma base para as identidades polinomiais de $M_2(K)$ onde K é um corpo infinito de característica $p \neq 2$.

• Sobre corpos de característica $p > 0$, Giambruno e Koshlukov em [14] descreveram uma base para as identidades polinomiais da álgebra de Grassmann.

• Em [12] Genov exibiu uma base para as identidades polinomiais de $M_3(\mathbb{F})$, e em [13] Genov e Siderov fizeram o mesmo para $M_4(\mathbb{F})$, quando $\mathbb{F}$ é corpo finito.

4.1 Identidades polinomiais na álgebra de Grassmann

Lema 4.1. *Considere o T-ideal $H := \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. Então $[x_1, x_2][x_2, x_3] \in H$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] \in H$.*

Observação 4.2. *Se u, v, $w \in K\langle X \rangle$, então, abrindo os colchetes, temos que $[uv, w] = [u, w]v + u[v, w]$ e $[w, uv] = [w, u]v + u[w, v]$.*

Demonstração. Considerando um endomorfismo que envia $x_i \mapsto x_i$ se $i \neq 2$ e $x_2 \mapsto x_2^2$, segue que $[x_1, x_2^2, x_3] \in H$.

Por outro lado, pela observação 4.2, tem-se que $[x_1, x_2^2, x_3] = [[x_1, x_2]x_2 + x_2[x_1, x_2], x_3]$. Pela bilinearidade do comutador

$$[[x_1, x_2]x_2 + x_2[x_1, x_2], x_3] = [[x_1, x_2]x_2, x_3] + [x_2[x_1, x_2], x_3] \in H$$

e mais uma vez aplicando a observação na equação acima

$$[x_1, x_2, x_3]x_2 + [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] + x_2[x_1, x_2, x_3] \in H,$$

donde concluímos que $[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] \in H$.

Agora, vejamos que

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] = 2[x_1, x_2][x_2, x_3] + [[x_2, x_3], [x_1, x_2]].$$

Se considerarmos o endomorfismo

$$\mu \colon x_1 \mapsto x_2, \quad \mu \colon x_2 \mapsto x_3, \quad \mu \colon x_3 \mapsto [x_1, x_2] \quad \text{e} \quad \mu \colon x_i \mapsto x_i \text{ se } i \neq \{1, 2, 3\},$$

concluímos que $[[x_2, x_3], [x_1, x_2]] = [x_2, x_3, [x_1, x_2]] = [\mu(x_1), \mu(x_2), \mu(x_3)] \in H$. Logo

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \in H.$$

Como visto no exemplo 3.20, $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$ é a linearização de $[x_1, x_2][x_2, x_3]$, e como resultado, $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] \in H$. □

Teorema 4.3. *Suponha que $char(K) = 0$ e seja E a álgebra de Grassmann (definida em 2.7) de um espaço vetorial de dimensão infinita. Então, temos:*

a) $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$.

b) As codimensões de E satisfazem $c_n(E) = 2^{n-1}$, para todo $n = 1, 2, \ldots$;

$$c(E, t) = \sum_{n \geq 0} c_n(E) t^n = \frac{1+t}{1-2t}, \qquad \tilde{c}(E, t) = \sum_{n \geq 0} c_n(E) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2}(1 + e^{2t}).$$

c) As séries de Hilbert da álgebra relativamente livre $F_m(E)$ são

$$Hilb(F_m(E), t_1, \dots, t_m) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{m}\frac{1+t_i}{1-t_i}, \qquad Hilb(F_m(E), t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^m.$$

Observação 4.4. *Seja V_m um K-espaço vetorial com base $\{e_1, \dots, e_m\}$ e considere a álgebra de Grassmann $E(V_m)$. Denotando por $\bigwedge^k(V_m)$ a k-ésima potência exterior em V_m, tem-se a decomposição de $E(V_m)$, $E(V_m) = K \oplus \bigwedge^1(V_m) \oplus \bigwedge^2(V_m) \oplus \cdots \oplus \bigwedge^m(V_m)$ e em particular, uma base de $E(V_m)$ consiste de 1 e dos elementos da forma: $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_p}$, com $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m$ e $p \in \{1, 2, \dots, m\}$.*

Portanto, definindo $V^{(k_1,\dots,k_m)}$ como sendo o espaço gerado pelos monômios nos quais e_j aparece uma quantidade k_j de vezes segue que $E(V_m) = \bigoplus_{(k_1,\dots,k_m)} V^{(k_1,\dots,k_m)}$. É imediato também que $\dim(V^{(k_1,\dots,k_m)}) = 1$ e que $k_i \in \{0,1\}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, por definição da álgebra de Grassmann. Logo, a série de Hilbert de $E(V_m)$ é dada por

$$Hilb(E(V_m), t_1, \dots, t_m) = 1 + \sum_{1\leq j\leq m} t_j + \cdots + \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq m} t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_p} + \cdots + t_1t_2\cdots t_m.$$

Para cada $p \in \{1, 2, \dots, m\}$ temos

$$e_p(t_1, \dots, t_m) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq m} t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_p}, \qquad e_0(t_1, \dots, t_m) = 1,$$

onde $e_j(t_1, \dots, t_m)$ é o j-ésimo polinômio simétrico elementar. Conclui-se que

$$Hilb(E(V_m), t_1, \dots, t_m) = \sum_{j=0}^{m} e_j(t_1, \dots, t_m).$$

Por outro lado, dado que

$$\prod_{i=0}^{m}(x - t_i) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k e_k(t_1, \dots, t_m)x^{m-k} \tag{10}$$

tem-se em particular de 10 que $\sum_{j=0}^{m} e_j(t_1, \dots, t_m) = \prod_{i=1}^{m}(1 + t_i)$.

Com isso, chegamos finalmente a igualdade

$$Hilb(E(V_m), t_1, \dots, t_m) = \sum_{j=0}^{m} e_j(t_1, \dots, t_m) = \prod_{i=1}^{m}(1 + t_i). \tag{11}$$

Demonstração. Pela proposição 3.27 cada T-ideal é gerado por seus elementos próprios, isto é , as identidades de E seguem de $T(E) \cap B$. Como $char(K) = 0$, o T-ideal $T(E)$ é homogêneo (pois todo corpo de característica 0 é em particular infinito).

a) Sabe-se do exemplo 2.10 que $[x_1, x_2, x_3] = 0$ em E, e assim, $\langle[x_1, x_2, x_3]\rangle^T \subseteq T(E)$.

Considere agora um elemento da forma $v = [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]\cdots[x_{j_1}, \dots, x_{j_l}]$ e sua imagem módulo $\langle[x_1, x_2, x_3]\rangle^T$

$$\overline{v} = [\overline{x}_{i_1}, \dots, \overline{x}_{i_k}]\cdots[\overline{x}_{j_1}, \dots, \overline{x}_{j_l}].$$

Se $v \notin \langle[x_1, x_2, x_3]\rangle^T$, então v é da forma $v = [x_{i_1}, x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]$.

Dessa forma, por conta da anti-simetria de $[\cdot,\cdot]$ e do lema 4.1, o elemento $\overline{v}$ altera apenas de sinal mediante uma permutação de variáveis, e assim, se em particular tivermos x_{i_q} igual a x_{i_p} em v, então $\overline{v} = 0$, isto é, $v \in \langle[x_1, x_2, x_3]\rangle^T$. Concluímos que $B/(B \cap \langle[x_1, x_2, x_3]\rangle^T)$ é gerado pelo conjunto $\mathscr{U}$ formado por elementos da forma

$$[\overline{x}_{j_1}, \overline{x}_{j_2}]\cdots[\overline{x}_{j_{2p-1}}, \overline{x}_{j_{2p}}], \quad j_1 < j_2 \cdots < j_{2p-1} < j_{2p}, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Precisamos ainda mostrar que combinação linear não trivial de elementos em $\mathscr{U}$ não pode ser uma identidade polinomial em E. Cada elemento de $\mathscr{U}$ é unicamente determinado pelo seu multigrau, logo é suficiente ver que nenhum elemento em $\mathscr{U}$ é identidade em E. Para isso, basta vermos que para cada $p = 0, 1, 2, \dots$

$$[e_1, e_2]\cdots[e_{2p-1}, e_{2p}] = 2^p e_1\cdots e_{2p} \neq 0.$$

b) Segue do raciocínio acima que se $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{2k}(E)$ é gerado por $[x_1, x_2]\cdots[x_{2k-1}, x_{2k}]$ e $\Gamma_{2k+1}(E) = 0$. Portanto concluímos que

$$\gamma_n(E) = \dim\Gamma_n(E) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$$

e portanto, $\gamma(E,t) = \sum_{n\geq 0} t^{2n} = \frac{1}{1-t^2}$ e $\widetilde{\gamma}(E,t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

Segue do teorema 3.29-*iv*) que

$$c_n(E) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1/2(1+(-1)^k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}.$$

Usando as fórmulas de $\gamma(E,t)$ e $\widetilde{\gamma}(E,t)$ concluímos que

$$c(E,t) = \sum_{n\geq 0} c_n(E)t^n = \frac{1+t}{1-2t}, \qquad \widetilde{c}(E,t) = \sum_{n\geq 0} c_n(E)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2}(1+e^{2t}).$$

c) Por *a*), segue que o conjunto

$$\mathscr{L} := \{[\overline{x}_{i_1}, \overline{x}_{i_2}]\cdots[\overline{x}_{i_{2k-1}}, \overline{x}_{i_{2k}}] : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k-1} < i_{2k} \leq m, \quad k = 0, 1, \ldots\}$$

é uma base de $B_m(E)$. Agora, denotemos por s_j a ocorrência de $\overline{x}_j$ num produto da forma

$$\{[\overline{x}_{i_1}, \overline{x}_{i_2}]\cdots[\overline{x}_{i_{2k-1}}, \overline{x}_{i_{2k}}] : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k-1} < i_{2k} \leq m$$

dado que $\overline{x}_j$ só pode aparecer em um dos comutadores acima, segue que se o comprimento do produto de dois comutadores for k, então $s_j = 2^k$. Por outro lado, como $|\mathscr{L}| < \infty$, dado uma m-upla $(n_1, \ldots, n_m)$, denotamos (caso exista) por $e_{(n_1,\ldots,n_m)}$ o único elemento em $\mathscr{L}$ no qual

$$n_j = \min\{1, s_j\}, \quad j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

onde s_j é a ocorrência de $\overline{x}_j$ em $e_{(n_1,\ldots,n_m)}$. Definimos $U^{(n_1,\ldots,n_m)}$ como sendo o espaço gerado por $e_{(n_1,\ldots,n_m)}$ [3]. No caso em que não existe um elemento satisfazendo a condição acima, para uma dada m-upla $(k_1, \ldots, k_m)$, colocamos $U^{(k_1,\ldots,k_m)} = (0)$.

Dessa forma, segue que

$$B_m(E) = \bigoplus_{(n_1,\ldots,n_m)} U^{(n_1,\ldots,n_m)}$$

e portanto

$$Hilb(B_m(E), t_1, \ldots, t_m) = 1 + \sum_{1\leq i_1 < i_2 \leq m} t_{i_1}t_{i_2} + \cdots + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2p} \leq m} t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_{2p}}$$

onde $p = m/2$ se m é par e $p = (m-1)/2$ se m é ímpar. Com isso, concluímos que

$$Hilb(B_m(E), t_1, \ldots, t_m) = \sum_{k\geq 0} e_{2k}(t_1, \ldots, t_m) = \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{m}(1-t_i) + \prod_{i=1}^{m}(1+t_i)\right)$$

e assim, utilizando 3.29-iii) segue que

$$Hilb(F_m(E), t_1, \ldots, t_m) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{m}\frac{1+t_i}{1-t_i}, \qquad Hilb(F_m(E), t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^m. \qquad \square$$

Denote por E_k a álgebra de Grassmann do espaço vetorial V_k de dimensão finita $k > 1$.

Observação 4.5. *Seja $n \in \mathbb{N}$, então temos a seguinte representação*

$$s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \frac{1}{2^n}\sum_{\sigma \in S_{2n}} sign(\sigma)[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\cdots[x_{\sigma(2n-1)}, x_{\sigma(2n)}]. \tag{12}$$

Veremos uma ideia de prova para o caso $n = 2$. Considere por exemplo o elemento $l = x_1x_2x_3x_4 + x_2x_1x_4x_3 + x_2x_1x_4x_3 - x_1x_2x_4x_3 - x_2x_1x_3x_4$, o qual é obtido de $x_1x_2x_3x_4$ via soma das ações das permutações $\sigma_1 = e$, $\sigma_2 = (1,2)(3,4), \sigma_3 = (3,4), \sigma_4 = (1,2)$ levando em conta seus sinais. Dessa forma, notemos que

$$a_1 := sign(\sigma_1)[x_{\sigma_1(1)}, x_{\sigma_1(2)}][x_{\sigma_1(3)}, x_{\sigma_1(4)}] = x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2x_4x_3 - x_2x_1x_3x_4 + x_2x_1x_4x_3$$

[3] A condição imposta será satisfeita quando a m-upla possui quase todos elementos nulos a menos de alguns em algumas posições, além disso aqueles que não são nulos, são iguais e da forma 2^l onde $l \in \mathbb{N}$

$$a_2 := sign(\sigma_2)[x_{\sigma_2(2)}, x_{\sigma_2(2)}][x_{\sigma_2(3)}, x_{\sigma_2(4)}] = x_2x_1x_4x_3 - x_2x_1x_3x_4 - x_1x_2x_4x_3 + x_1x_2x_3x_4$$
$$a_3 := sign(\sigma_3)[x_{\sigma_3(2)}, x_{\sigma_3(2)}][x_{\sigma_3(3)}, x_{\sigma_3(4)}] = -\big(x_1x_2x_4x_3 - x_1x_2x_3x_4 - x_2x_1x_4x_3 + x_2x_1x_3x_4\big)$$
$$a_4 := sign(\sigma_4)[x_{\sigma_4(2)}, x_{\sigma_4(2)}][x_{\sigma_4(3)}, x_{\sigma_4(4)}] = -\big(x_2x_1x_3x_4 - x_2x_1x_4x_3 - x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4x_3\big)$$

e portanto segue que $\frac{1}{2^2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = l$. *Procedendo dessa forma pode-se mostrar que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *a equação 12 é verificada.*

Utilizando a representação 12 e o lema 4.1 concluí-se que módulo $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ *tem-se*

$$2^n s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = (2n)![x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] \tag{13}$$

donde concluímos que se $char(K) = p > 0$ *e* $p < 2k$ *então* s_{2n} *é uma identidade na álgebra de Grassmann de dimensão infinita. Se* $char(K) = 0$ *ou* $char(K) > 2n$ *então módulo* $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, *as identidades* s_{2n} *e* $[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]$ *são equivalentes.*

Vejamos que a observação 4.5 conta-nos que em característica diferente de 0 algumas coisas podem mudar uma vez que se $char(K) = 0$ então $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ não é uma identidade na álgebra de Grassmann de dimensão infinita, pois $s_{2n}(e_1, \ldots, e_{2n}) \neq 0$. Na realidade, utilizando 13 pode-se mostrar que se $char(K) = p > 0$, s_k é uma identidade polinomial na álgebra de Grassmann se, e somente se, $k \geq p + 1$. Latyshev mostrou em [30] que poderíamos ainda encarar todas as identidades polinomiais na álgebra de Grassmann de dimensão infinita como sendo consequências da identidade $[x_1, x_2, x_3] = 0$ se a característica de K for diferente de 2 e $|K| = \infty$. O próximo teorema diz exatamente isso, e sua demonstração pode ser encontrada em [14].

Teorema 4.6. *Se* K *é um corpo infinito de característica* $p \neq 2$ *e* E *é uma álgebra de Grassmann de dimensão infinita, então todas as identidades polinomiais em* E *são consequências de* $[x_1, x_2, x_3] = 0$.

4.2 Identidades polinomiais das matrizes triangulares superiores

Antes de começarmos, vamos mostrar um resultado que servirá de motivação para o que se segue.

Resultado 4.7. *Seja* $UT_n(K)$ *a álgebra das matrizes triangulares superiores* $n \times n$. *Então,* $UT_n(K)$ *satisfaz as identidades polinomiais* $[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0$ *e* $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = 0$.

Demonstração. Vamos dividir a prova em alguns passos.

Passo 1: Se r_1, $r_2 \in UT_n(K)$, então $[r_1, r_2] \in UT_n(K)$, e além disso os elementos da diagonal de $[r_1, r_2]$ são todos nulos. Esta afirmação é de fácil verificação, usando se as propriedades do produto matricial.

Passo 2: O produto de n matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal, é nulo. Para demonstrar esta afirmação, observamos que o produto de duas matrizes deste tipo (com zeros na diagonal), vai ter zeros nas posições $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(n - 1, n)$. Multiplicando esta matriz com outra matriz triangular superior com zeros na diagonal, vai resultar em matriz onde todas entradas (i, i), $(i, i + 1)$, $(i, i + 2)$ são iguais a 0. Continuando este processo, obtemos o resultado.

Passo 3: Segue da observação 4.5 que $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = 0, \quad$ para quaisquer x_1, ..., $x_{2n} \in UT_n(K)$. □

Na realidade, como vamos ver mais adiante, $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial não só em $UT_n(K)$, mas em todo $M_n(K)$, o qual é o conteúdo do teorema de Amitsur e Levitzki.

O próximo teorema fornece-nos uma base para as identidades polinomiais em $UT_n(K)$ bem como uma base para o espaço vetorial da álgebra relativamente livre $F(UT_n(K))$.

Teorema 4.8. *Sejam* K *um corpo infinito e* $UT_k(K)$ *a álgebra das matrizes triangulares superiores* $k \times k$. *Então*

i) A identidade polinomial

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}] = 0. \tag{14}$$

forma uma base das identidades polinomiais de $UT_k(K)$.

ii) O conjunto de todos os produtos da forma

$$x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} [x_{i_{11}}, x_{i_{21}}, \ldots, x_{i_{p_1 1}}] \cdots [x_{i_{1r}}, x_{i_{2r}}, \ldots, x_{i_{p_r r}}]$$

onde o número de comutadores r *é* $\leq k - 1$, *e os índices em cada comutador* $[x_{i_{1s}}, x_{i_{2s}}, \ldots, x_{i_{p_s s}}]$ *satisfazem* $i_{1s} > i_{2s} \leq i_{3s} \leq \cdots \leq i_{p_s s}$, *forma uma base da álgebra relativamente livre* $F(UT_k(K))$.

A prova usa de novo os polinômios próprios, semelhante a feita para a álgebra de Grassmann.

Ideia para demonstração:

$(\star)$: Módulo a identidade (14) cada elemento de $K\langle X\rangle$ é uma combinação linear de elementos como na parte *ii*) do enunciado.

$(\star\star)$: Nenhuma combinação linear finita dos elementos citados em $(\star)$ é identidade em $UT_k(K)$.

Demonstração. Tendo em vista 4.7, precisamos mostrar apenas que todas as identidades polinomiais de $UT_k(K)$ seguem da identidade (14).

Dado que pela proposição 3.27-*ii*), as identidades polinomiais de $UT_k(K)$ seguem daquelas em $T(UT_k(K)) \cap B$, é suficiente trabalhar utilizando estas últimas. Denote por $\mathfrak{T}_k$ a variedade definida pela identidade polinomial 14 e considere a álgebra relativamente livre $F(\mathfrak{T}_k) = K\langle X\rangle/T(\mathfrak{T}_k)$ onde $T(\mathfrak{T}_k) = \langle [x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}]\rangle^T$. Vamos fornecer a demonstração para os casos $k = 2$ e $k = 3$, sendo o caso geral análogo, embora tecnicamente mais complicado.

Caso $k = 2$: Dado que $[x_1, x_2][x_3, x_4] = 0$ em $F(\mathfrak{T}_2)$, concluímos que $B(\mathfrak{T}_2)$ é gerado por 1 e por todos os comutadores da forma $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}], \quad n \geq 2$.

Agora, notemos que em $F(\mathfrak{T}_2)$

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_1, x_2, x_4, x_3] = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = [x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_3, x_4][x_1, x_2] = 0$$

e dado que toda permutação em S_p $(p \geq 2)$ pode ser escrita como um produto de transposições, segue que para qualquer $\sigma \in S_p$

$$[y_1, y_2, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}] = [y_1, y_2, x_1, \ldots, x_p], \quad em \quad F(\mathfrak{T}_2). \tag{15}$$

Antes de prosseguirmos relembremos a identidade de Jacobi: Se $f, g, h \in K\langle X\rangle$ então

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0, \qquad (Jacobi).$$

Por outro lado, por conta da anti-simetria de $[\cdot, \cdot]$ e da identidade de Jacobi, segue que

$$[x_1, x_2] = -[x_2, x_1] \tag{16}$$

e

$$[x_3, x_2, x_1] = [x_3, x_1, x_2] - [x_2, x_1, x_3]. \tag{17}$$

Com isso, segue de 15, 16 e 17 que $B(\mathfrak{T}_2)$ é gerado por $\mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ consiste de 1 e os elementos da forma $[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_n}]$, onde$i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \cdots \leq i_n$.

Resta-nos verificar que módulo o T-ideal de $UT_2(K)$, $\mathcal{U}$ é linearmente independente.

Considere a seguinte combinação linear não trivial de elementos em $\mathcal{U}$

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_i \alpha_i [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}] = 0. \tag{18}$$

Fixemos agora um índice s_1 o qual é o maximal entre todos os primeiros índices com a propriedade de que o coeficiente que acompanha o comutador no qual este pertence é não nulo. Agora, defina

$$\widetilde{x}_{s_1} = e_{12} + \xi_{s_1} e_{22}, \qquad \widetilde{x}_j = \xi_j e_{22}, \quad j \neq s_1.$$

Note que se num comutador da forma $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]$ tivemos todos os índices diferentes de s_1, então $[\widetilde{x}_{i_1}, \ldots, \widetilde{x}_{i_n}] = 0$. Portanto, usando o fato de que $e_{22}e_{12} = 0$ e $e_{12}e_{22} = e_{12}$ concluímos que

$$f(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m) = \left(\sum_{s_1 \quad fixado} \alpha_i \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_n} \right) e_{12}$$

e portanto, dado que K é infinito, podemos fazer uma escolha dos elementos $\{\xi_j : j \neq s_1\}$ de forma que $f(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m) \neq 0$, donde segue que todos os $\alpha_i' s$ em 18 são nulos. Por fim, o resultado do teorema para $k = 2$ segue do teorema 3.29-*i*).

Caso $k = 3$**:** Neste caso

$$[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] = 0, \quad em \quad F(\mathfrak{T}_3)$$

e por argumentos semelhantes aos feitos no caso $k = 2$, segue que se $\mathcal{V}$ é o conjunto formado por 1 e os elementos da forma

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}], \quad n \geq 2, \qquad [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}][x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_q}],$$

então $\mathcal{V}$ gera $B(\mathfrak{T}_3)$. Agora, dado que $[[y_1, y_2], [y_3, y_4], y_5] = [[y_1, y_2, y_5], [y_3, y_4]] + [[y_1, y_2], [y_3, y_4, y_5]]$, segue por indução que $[[y_1, \ldots, y_a], [z_1, \ldots, z_b], [t_1, \ldots, t_c]]$ é uma combinação linear de produtos de dois comutadores. Além disso, mais uma vez pelos mesmos argumentos feitos no caso $k = 2$, se $\widetilde{\mathcal{V}}$ é o conjunto contendo 1 e elementos da forma

$$[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}], \quad i_1 > i_2 \leq \cdots \leq i_n, \tag{19}$$

$$[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}][x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}] \quad i_1 > i_2 \leq \cdots \leq i_p \quad j_1 > j_2 \leq \cdots \leq j_q, \tag{20}$$

então $\widetilde{\mathcal{V}}$ gera $B(\mathfrak{T}_3)$. Portanto, para se concluir a demonstração do teorema no caso $k = 3$ é suficiente mostrar que $\widetilde{\mathcal{V}}$ é um conjunto linearmente independente. Agora, vejamos que qualquer combinação linear em $\widetilde{\mathcal{V}}$ é de uma das formas abaixo

A: Combinação linear somente de elementos do tipo 19.

B: Combinação linear somente de elementos do tipo 20.

C: Combinação linear mista de elementos do tipo 19 e 20.

Logo, se analisarmos uma determinada combinação linear $h(x_1, \ldots, x_m) = 0$ não trivial do tipo A ou C, e substituirmos as variáveis $x_i \in U_3(K)$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, por matrizes 2×2 mergulhadas em $UT_3(K)$, isto é, matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

então recairemos no caso $k = 2$ e o que permite-nos concluir que todos os coeficientes de $h(x_1, \ldots, x_m)$ são nulos. Dessa forma, precisamos apenas analisar combinações lineares do tipo B, isto é, da forma

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{ij}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}][x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}] = 0, \quad \alpha_{ij} \in K. \tag{21}$$

Da equação 21 considere um par maximal (s_1, r_1) dentre todos aqueles em que $\alpha_{ij} \neq 0$, isto é, primeiro selecionamos s_1 maximal como no caso $k = 2$ e posteriormente entre todos os pares (com s_1 fixado na primeira coordenada) os maximais na segunda coordenada. E assim, se $r_1 \neq s_1$ defina

$$\widehat{x}_{s_1} = e_{12} + \xi_{s_1} e_{22} + \nu_{s_1} e_{33}, \quad \widehat{x}_{r_1} = e_{23} + \xi_{r_1} e_{22} + \nu_{r_1} e_{33}$$

e

$$\widehat{x}_l = \xi_l e_{22} + \nu_l e_{33}, \quad l \neq s_1, r_1, \quad \text{caso} \quad s_1 \neq r_1$$

onde $\xi_{s_1}, \xi_{r_1}, \xi_l, \nu_{s_1}, \nu_{r_1} \in K$. Caso $s_1 = r_1$

$$\widehat{x}_{r_1} = e_{12} + e_{23} + \xi_{s_1} e_{22} + \nu_{s_1} e_{33}$$

e dado que $e_{ij} e_{kl} = e_{il}$ se $j = k$ e $e_{ij} e_{kl} = e_{il} = 0$ se $j \neq k$, segue que

$$f(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_m) = \left(\sum \alpha_{ij} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_p} (\nu_{j_2} - \xi_{j_2}) \cdots (\nu_{j_q} - \xi_{j_q})\right) e_{13}$$

e portanto, os números $\{\xi_l : l \neq s_1, r_1\}$ e $\{\nu_l : l \neq s_1, r_1\}$ podem ser tomados de forma que $f(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_m) \neq 0$, donde segue que todos os coeficientes de 21 são nulos e assim, o teorema para o caso $k = 3$ segue mais uma vez por 3.29-i). □

Exemplo 4.9. *Seja K um corpo de característica 0, e R a álgebra das matrizes 3×3 triangulares superiores, com entradas em K, da forma*

$$\begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Então $T(R) = \langle [x_1, x_2, x_3], s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle^T$.

Primeiro vamos verificar que $[x_1, x_2, x_3] = 0$ e $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, são identidades polinomiais em R. Se e_{ij} denota a (i, j)-matriz canônica de $M_3(K)$, então o conjunto de vetores $\mathcal{L} := \{e = e_{11} + e_{22} + e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}\}$ forma uma base de R. Além do mais, por conta da multilinearidade do comutador e da anti-simetria, é suficiente verificarmos que $[x_1, x_2, x_3] = 0$ nos elementos de $\mathcal{L}$. Este processo é canônico e para ilustrar, vamos calcular apenas uma igualdade.

Vejamos que $[e, e_{12}, e_{13}] = [e_{11}, e_{12}, e_{13}] + [e_{22}, e_{12}, e_{13}] + [e_{33}, e_{12}, e_{13}]$ *e dado que* $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, *temos* $[e_{11}, e_{12}] = e_{12}$, $[e_{22}, e_{12}] = -e_{12}$, $[e_{33}, e_{12}] = 0$. *Com isso concluímos que*

$$[e_{11}, e_{12}, e_{13}] = [e_{12}, e_{13}] = 0, [e_{22}, e_{12}, e_{13}] = -[e_{12}, e_{13}] = 0, [e_{33}, e_{12}, e_{13}] = [0, e_{13}] = 0$$

donde segue que $[e, e_{12}, e_{13}] = 0$. *Analogamente se faz nos outros casos. A identidade* $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ *segue do resultado 4.7. Dessa forma, concluímos que* $\langle [x_1, x_2, x_3], s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\rangle^T \subseteq T(R)$.

Utilizando contas semelhantes às feitas no teorema 4.3, pode-se concluir que os elementos da forma

$$[x_{i_1}, x_{i_2}] : i_1 < i_2$$

constituem uma base de $B/(B \cap \langle [x_1, x_2, x_3], s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\rangle^T)$. *Com isso, precisamos mostrar que nenhuma combinação linear dos elementos acima pode ser uma identidade em* R. *Dado que* $char(K) = 0$, *o ideal* $T(R)$ *é homogêneo e portanto para mostrar que combinação linear dos elementos acima não pode ser uma identidade em* R, *é suficiente mostrar que um elemento da forma* $[x_{i_1}, x_{i_2}]$ *não pode ser uma identidade em* R, *o qual segue por exemplo do fato de que* $[e_{12}, e_{23}] = e_{13} \neq 0$.

5 Matrizes genéricas e o teorema de Amitsur-Levitzki

5.1 Matrizes genéricas

Notação: Se $\mathscr{I} \subseteq K\langle X\rangle$, denota-se por $var\mathscr{I}$ a variedade das álgebras associativas que satisfazem as identidades de $\mathscr{I}$. Se $\mathscr{I} = T(R)$, onde R é uma álgebra associativa, escreve-se $varR := var\mathscr{I}$.

Iremos nesta seção estudar uma ferramenta que será de extrema importância para o estudo de $F(varM_n(K))$, onde K é um corpo e $n \in \mathbb{N}$.

• Dado $n \geq 1$, denota-se por Ω_n a K-álgebra comutativa polinomial

$$\Omega_n := K\Big[y_{pq}^{(i)} \mid p, q = 1, 2, \ldots, n, \quad i \in \mathbb{N}\Big].$$

• Se $\{e_{ij} \mid i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ são as matrizes canônicas de $M_n(K)$, as matrizes

$$y_i := \sum_{p,q=1}^{n} y_{pq}^{(i)} e_{pq} = \begin{pmatrix} y_{11}^{(i)} & y_{12}^{(i)} & . & . & . & y_{1n}^{(i)} \\ y_{21}^{(i)} & y_{22}^{(i)} & . & . & . & y_{2n}^{(i)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ y_{n1}^{(i)} & y_{n2}^{(i)} & . & . & . & y_{nn}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

são chamadas de as **matrizes genéricas** $n \times n$.

• Denota-se por R_n a álgebra gerada pelas matrizes genéricas $\{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e por R_{nd} a álgebra gerada pelas primeiras d primeiras matrizes genéricas.

Considere o mapa $\widetilde{\rho} \mid X \to R_n, \quad x_i \mapsto y_i$. Dado que $K\langle X\rangle$ é livre em X, existe um (único) homomorfismo de K-álgebras $\rho\colon K\langle X\rangle \to R_n$ tal que $\rho_{|X} = \widetilde{\rho}$. Além disso, por definição, ρ é sobrejetor.

Observação 5.1. *(Especialização de matrizes genéricas) Seja C uma K-álgebra comutativa. Dados $a_1, \ldots, a_h \in M_n(C)$, onde $a_i = (a_{pq}^{(i)})_{pq}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, por conta da álgebra polinomial ser livre no conjunto das álgebras comutativas, existe um homomorfismo de álgebras $\nu\colon \Omega_n \to C$ tal que se $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, temos $\nu\Big(y_{pq}^{(i)}\Big) = a_{pq}^{(i)}, \quad p, q = 1, 2, \ldots, n,$ e ν é 0 em $y_{pq}^{(j)}, \quad j > h$.*

Dessa forma, o homomorfismo induzido

$$\nu_n\colon R_n \to M_n(C), \quad (c_{ij}) \mapsto (\nu(c_{ij}))_{ij}$$

é tal que $\nu(y_i) = a_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$. O mapa ν_n é chamado de uma especialização de matrizes genéricas.

Proposição 5.2. *a) Se K é um corpo infinito e $n \geq 1$, então $R_n \cong F(varM_n(K))$.*

b) Se K é um corpo finito e P/K é uma extensão infinita de K, então $R_n \cong F(varM_n(P))$.

Demonstração. Seja P um corpo tal que $K \subseteq P$. Vamos mostrar apenas b), pois a) segue imediatamente fazendo $K = P$. Sejam $\pi\colon K\langle X\rangle \to F(varM_n(P))$ o homomorfismo canônico e $\rho\colon K\langle X\rangle \to R_n$ o homomorfismo definido acima. Se mostrarmos que $N = ker(\pi) = ker(\rho)$ então o resultado segue pois pelo primeiro teorema do isomorfismo $F(var(M_n(P))) \cong K\langle X\rangle/N \cong R_n$.

Assim, para que $ker(\pi) = ker(\rho)$ é suficiente mostrar que $f(x_1, \ldots, x_m)$ é PI em $M_n(P)$ se e somente se $f(y_1, \ldots, y_m) = 0$ em R_n.

Se $f(x_1, \ldots, x_m)$ é PI em $M_n(C)$ e $f(y_1, \ldots, y_m) \neq 0$, então, dado que P é infinito, existe uma especialização $\nu_n\colon K\langle X\rangle \to M_n(C)$ tal que $\nu_n(f(y_1, \ldots, y_n)) = c \neq 0$ e portanto

$$0 = f(\nu_n(y_1), \ldots, \nu(y_m)) = \nu_n(f(y_1, \ldots, y_m)) \neq 0$$

o qual é um absurdo. Logo, segue que $f(y_1, \ldots, y_m) = 0$. Reciprocamente, suponha que $f(y_1, \ldots, y_m) = 0$ em R_n. Dadas quaisquer matrizes $r_1, \ldots, r_m \in M_n(C)$, considere a especialização

$$\mu_n\colon K\langle X\rangle \to M_n(C), \qquad \mu_n(y_i) = 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \qquad \mu_n(y_j) = 0, \quad j > m.$$

Então, tem-se que $f(r_1, \ldots, r_m) = f(\mu_n(y_1), \ldots, \mu_n(y_m)) = \mu_n(f(y_1, \ldots, y_m)) = \mu_n(0) = 0.$ □

Observação 5.3. *Considere a matriz*

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & . & . & 0 & \alpha_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Então, segue que

$$a - xI = \begin{pmatrix} -x & 0 & . & . & 0 & \alpha_0 \\ 1 & -x & . & . & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & . & . & 0 & \alpha_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & \alpha_{n-1} - x \end{pmatrix}$$

e portanto, pela expansão de Laplace

$$\det(a - xI) = (-1)^{n+1}\alpha_0\epsilon_0(x) + (-1)^{n+2}\alpha_1\epsilon_1(x) + \cdots + (\alpha_{n-1} - x)(-1)^{n+n}\epsilon_{n-1}(x)$$

onde $\epsilon_k(x)$ é a matriz obtida de $a - xI$ retirando-se a $k+1$-ésima linha e n-ésima coluna. Portanto temos $\epsilon_0(x) = 1$, $\epsilon_k(x) = (-1)^k x^k$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, e assim

$$\det(a - xI) = (-1)^n(-\alpha_0 - \alpha x - \cdots - \alpha_{n-1}x^{n-1} + x^n).$$

Logo $\det(a - xI) = (-1)^n(x^n - (\alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0))$.

• Lembremos que se $p(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 \in K[z]$ é um polinômio qualquer, então define-se o **discriminante** de $p(z)$ como sendo o escalar $D(p) := c_n^{2n-2}\prod_{i<j}^{n}(r_i - r_j)^2$ onde r_1, ..., r_n são as raízes de $p(z)$ em $\overline{K}$.

Lema 5.4. *Os autovalores da matriz genérica $n \times n$ y_1 são dois a dois distintos.*

Demonstração. Dado que Ω_n mergulha de forma natural em seu corpo de frações, faz sentido considerar as entradas de y_1 em $frac(\Omega_n)$. Seja $f_{y_1}(x)$ o polinômio característico de y_1, suponha por contradição que f_{y_1} tenha raízes de multiplicidade maior que 1. Então, por definição de discriminante, segue que $D(f_{y_1}) = 0$. Por outro lado, dada qualquer matriz $a \in M_n(K)$, existe uma especialização $\psi\colon R_n \to M_n(K)$ tal que $\psi(y_1) = a, \psi(I_{R^n}) = I$, onde I_{R_n} é a matriz identidade em R_n, e assim, se f_a é o polinômio característico de a

$$f_a(x) = \det(a - xI) = \det(\psi(y_1) - x\psi(I_{R_n})) = \det(\psi(y_1 - xI)).$$

Disso segue que $D(f_a) = 0$, pois se r_1, ..., r_n são as raízes de f_{y_1}, então $\psi(r_1)$, ..., $\psi(r_n)$ são as raízes de f_a. Porém isso é um absurdo quando K é infinito, pois podemos escolher l_1, ..., $l_n \in K$ tais que em K, $l_i - l_j \neq 0$ para quaisquer $i < j$, e assim se $a = diag(l_1, \ldots, l_n)$, segue que $D(f_a) \neq 0$.

Se K é finito, sem perda de generalidade pode-se supor que $K = \mathbb{F}_p$, onde p é um número primo, e assim dado que qualquer extensão finita de corpos $L/\mathbb{F}_p$ é separável, pode-se escolher um polinômio $g \in \mathbb{F}_p[x]$ irredutível e com todas as raízes de multiplicidade 1 e assim, se a é a matriz companheira de g (pela 5.3) segue que $D(f_a) = D(g) \neq 0$.

Concluímos então que de fato, f_{y_1} não pode ter raízes de multiplicidade maior que 1. □

Observação 5.5. *Considere o corpo algebricamente fechado $L_n := \overline{frac(\Omega_n)}$. Dado que a matriz y_1 não tem autovalores de multiplicidade maior que 1 em $M_n(L)$, tem-se que seu polinômio minimal só possui fatores primos de grau 1 e assim, y_1 é diagonalizável, donde segue que existe $z \in M_n(L)$ invertível tal que $u_1 = z^{-1}u_1 z$ é diagonal. Além disso, para cada $i > 1$ defina $u_i := z^{-1}y_i z$.*

Dessa forma, se U_n é a álgebra gerada pelos elementos u_1, ..., u_n, ... segue que a função $\varrho\colon R_n \to U_n$, $g \mapsto z^{-1}gz$ fornece um isomorfismo entre U_n e R_n.

Defina $y'_1 := \sum_{p=1}^{n} y_{pp}^{(1)} e_{pp}$ e $y'_i := y_i$, $i > 1$, e seja R'_{na} álgebra gerada por estes elementos.

Proposição 5.6. *Nas notações do item acima, tem-se que $R'_n \cong R_n$.*

Demonstração. Considere as notações da observação 5.5. Dado que $y'_1, \ldots, y'_n, \ldots$ são especializações respectivamente de $y_1, \ldots, y_n, \ldots$, existe um homomorfismo de K-álgebras $\omega\colon R_n \to R'_n$ tal que $\omega(y_i) = y'_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Analogamente, dado que $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ são especializações de $y'_1, \ldots, y'_n, \ldots$, por um argumento semelhante ao feito no começo da seção, existe $\nu\colon R'_n \to U_n$ tal que $\nu(y'_i) = u_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Segue que $\nu \circ \omega(y_i) = \nu(y'_i) = u_i = \varrho(y_i)$, para cada $i \in \mathbb{N}$ e portanto, $\nu \circ \omega = \varrho$. Assim, $ker(\omega) = 0$, e ω é um isomorfismo, pois ω é sobrejetora. □

Corolário 5.7. *Pode-se assumir que em R_n a primeira matriz genérica é diagonal e a segunda tem a mesma primeira linha e mesma primeira coluna.*

Demonstração. A menos de escrever uma notação com mais índices, é suficiente provar esse resultado para $n = 3$. Existe uma conjugação por um elemento $z \in M_3(L)$ tal que y'_1 tem a forma desejada. A segunda matriz genérica em R'_n é $w_2 = z^{-1}y_2z$, a qual escrevemos na forma

$$w_2 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}.$$

Considere a matriz diagonal $D = diag(1, \mu, \eta) \in M_3(L)$, então $D^{-1}w_2D$ tem a forma

$$D^{-1}w_2D = \begin{pmatrix} w_{11} & \mu w_{12} & \eta w_{13} \\ \mu^{-1}w_{21} & * & * \\ \eta^{-1}w_{31} & * & * \end{pmatrix}.$$

Escolhendo μ como uma das raízes de $x^2w_{12} - w_{21} \in L[x]$ e η como uma das raízes de $x^2w_{13} - w_{31} \in L[x]$, temos que a matriz $D^{-1}w_2D$ tem a forma do enunciado. Além do mais, $D^{-1}y_1D$ é uma matriz diagonal, e assim considerando a conjugação por D obteremos uma álgebra R''_n que satisfaz as condições impostas pelo corolário e $R''_n \cong R_n$. □

Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo infinito K com base $\mathcal{A} := \{a_1, \ldots, a_m\}$ e defina $\Omega_A = K[z_p^{(i)} \mid p = 1, 2, \ldots, m \quad i = 1, 2, \ldots]$. Dado $i \in \mathbb{N}$ defina também $z_i := \sum_{p=1}^{m} z_p^{(i)} a_p$.

Agora, assumindo que os elementos de Ω_A comutam com os elementos de $\mathcal{A}$, faz sentido considerar a álgebra R_A gerada pelos elementos $z_1, z_2, \ldots$

Observe que em R_A a multiplicação dos elementos de $\mathcal{A}$ é como em A.

• Considere o homomorfismo induzido $\zeta\colon R_A \to \Omega_A \otimes A$ definido nos elementos $\{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$ por $\zeta(\sum_{p=1}^{m} z_p^{(i)} a_p) = \sum_{p=1}^{m} z_p^{(i)} \otimes a_p$. Como os elementos de $\mathcal{A}$ são linearmente independentes, segue que ζ é injetora e portanto R_A mergulha em $\Omega_A \otimes A$. Com isso, a multiplicação em R_A pode ser vista como a induzida em $\Omega_A \otimes A$.

A demonstração do próximo resultado é análoga à de 5.2, a única diferença é que os homomorfismos canônicos tomados no lugar de ρ e π são respectivamente $K\langle X\rangle \to R_A$, $K\langle X\rangle \to F(varA)$.

Proposição 5.8. *Sejam $A, \mathcal{A}$ e R_A como acima. Então $R_A \cong F(varA)$.*

5.2 O teorema de Amitsur–Levitzki

O objetivo desta seção é demonstrarmos o teorema de Amitsur–Levitzki. Iremos utilizar aqui [19] e [9]. A demonstração original desse teorema foi dada em [1], a qual usava essencialmente fatos combinatórios, entretanto varias outras provas diferentes foram dadas. Aqui iremos nos concentrar na demonstração dada por Rosset. Outra bem conhecida é a dada por Razmyslov, a qual pode ser encontrada em [10] ou mesmo em [19].

Nesta seção, fixemos $n \geq 2$. Foi introduzido nos exemplos 2.4 e 2.5 as identidades standard e de Capelli. Além disso, vimos que $M_n(K)$ satisfaz a identidade standard e a identidade de Capelli de grau $n^2 + 1$. O lema abaixo estabelece o grau mínimo para uma identidade em $M_n(K)$.

Lema 5.9. *A álgebra das matrizes $M_n(K)$ não satisfaz identidade polinomial de grau menor que $2n$.*

Demonstração. *a*) Suponha que $M_n(K)$ satisfaz uma identidade polinomial de grau $k < 2n$ então podemos escrever $f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0$, $\alpha_\sigma \in K$. Considere os elementos da base canônica de $M_n(K)$: $e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, e_{33}, e_{32}, \ldots, e_{pq}$, onde $p = q$ ou $p = q - 1$. Então de $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, segue que

$$0 = f(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, e_{33}, e_{32}, \ldots, e_{pq}) = \alpha_{(1)}e_{1p}$$

e assim, $\alpha_{(1)} = 0$.

Podemos fazer um raciocínio análogo para mostrar que $\alpha_\sigma = 0$, para toda $\sigma \in S_k$. Por exemplo, se quisermos mostrar que $\alpha_{(1,2)} = 0$, basta olhar para $f(e_{12}, e_{11}, e_{22}, e_{23}, e_{33}, e_{32}, \ldots, e_{pq})$. Com isso, concluímos que a única identidade de grau $< 2n$ em $M_n(K)$ é a identidade nula. $\square$

Lema 5.10. *Se $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial em $M_n(\mathbb{Q})$, então para qualquer corpo K, $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade em $M_n(K)$.*

Demonstração. Suponha que $char(K) = p > 0$. Dado que $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade em $M_n(\mathbb{Q})$, com coeficientes ± 1, segue que $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade em $M_n(\mathbb{Z})$. Considere $\mathbb{Z}_p$ o corpo com p elementos e o homomorfismo $\phi_p\colon M_n(Z) \to M_n(\mathbb{Z}_p)$, $(a_{ij})_{ij} \mapsto (a_{ij} + p\mathbb{Z})_{ij}$. Se $r_1, \ldots, r_{2n} \in M_n(\mathbb{Z}_p)$, existem $l_1, \ldots, l_{2n} \in M_n(\mathbb{Z})$ com $\phi_p(l_j) = r_j$ para cada j. Portanto $s_{2n}(r_1, \ldots, r_{2n}) = s_{2n}(\phi_p(l_1), \ldots, \phi_p(l_{2n})) = \phi_p(s_{2n}(l_1, \ldots, l_{2n})) = \phi_p(0) = 0$. Logo, $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial em $M_n(\mathbb{Z}_p)$. Seja $P \subseteq K$ tal que $P \cong \mathbb{Z}_p$, pela multilinearidade de $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é suficiente mostrar que s_{2n} se anula nos elementos canônicos $\{e_{ij} \mid i, j\}$. Como cada $e_{ij} \in M_n(P) \subseteq M_n(K)$, o resultado segue. Faz-se o mesmo raciocínio se $char(K) = 0$. $\square$

Lema 5.11. *i) Sejam $\xi_1, \ldots, \xi_n$ os autovalores da matriz $a \in M_n(K)$ e seja $e_q(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ o q-ésimo polinômio simétrico em $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Então*

$$a^n + \sum_{q=1}^{n} (-1)^q e_q(\xi_1, \ldots, \xi_n) a^{n-q} = 0, \qquad tr(a^q) = \xi_1^q + \cdots + \xi_n^q.$$

ii) Quando $char(K) = 0$ os coeficientes $e_q(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ podem ser expressos como polinômios com coeficientes racionais de $tr(a^q)$, $q = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração. i) O polinômio característico $c(x)$ de a é $c(x) = \prod_{i=1}^n (x - \xi_i)$ e portanto, pelo teorema de Cayley–Hamilton $a^n + \sum_{q=1}^n (a - \xi_q) = \sum_{q=1}^n (-1)^q e_q(\xi_1, \ldots, \xi_n) a^{n-q} = 0$. A igualdade do traço segue imediatamente da forma de Jordan de a. (Este fato pode ser demonstrado diretamente, sem usar a forma de Jordan.)

ii) Considere os polinômios de Newton $p_q = p_q(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_1^q + \cdots + \xi_n^q$, $q = 1, 2, \ldots, n$. Pelas fórmulas de Newton, se $q \leq n$ então $p_q - e_1 p_{q-1} + e_2 p_{q-2} + \cdots + (-1)^{q-1} q e_q = 0$, e cada e_q é um polinômio em termos de p_q. $\square$

• Segue do lema acima que em característica 0, se $a \in M_n(K)$ é tal que $tr(a) = tr(a^2) = \cdots = tr(a^n) = 0$ então $a^n = 0$.

Lema 5.12. *Seja C uma álgebra comutativa sobre $\mathbb{Q}$ e $a \in M_n(C)$. Se $tr(a^q) = 0$ para $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então $a^n = 0$.*

Demonstração. Seja $a \in M_n(C)$. Sabe-se do lema 5.11 que $a^n = \sum_{q=1}^n \alpha_q a^{n-q}$, onde α_q é um polinômio sem termo constante e com coeficientes racionais, em $tr(a^r)$, onde $r = 1, 2, \ldots, q$. Se Y é um conjunto qualquer e K é um corpo, então a mesma fórmula acima é verificada em $K[Y]$ pois $K[Y]$ mergulha em $frac(K[Y])$ (via $x \mapsto x/1$). Dado que a álgebra polinomial é livre na variedade de todas as álgebras comutativas, existe um homomorfismo de álgebras comutativas $\phi\colon K[C] \to C$ tal que $\phi(x) = x$, para todo $x \in C$. Aqui consideramos $K[C]$ como sendo $C \otimes_{\mathbb{Q}} K$. Dessa forma, ψ induz um homomorfismo $\widetilde{\phi}\colon M_n(K[C]) \to M_n(C)$ definido por $\widetilde{\phi}((a_{ij})_{ij}) = (\phi(a_{ij})))_{ij}$.

Por definição de $\widetilde{\phi}$ segue que se $a \in M_n(K[C])$ então $tr(\widetilde{\phi}(a)) = \phi(tr(a))$. Isso implica que

$$a^n = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q(\phi(tr(a)), \ldots, \phi(tr(a^q)) a^{n-q}$$

donde segue que se $tr(a^q) = 0$ para todo $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então $a^n = 0$. $\square$

Teorema 5.13. *(Teorema de Amitsur-Levitzki [1]) Se K é um corpo qualquer, então $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial em $M_n(K)$.*

Antes da demonstração do teorema 5.13 vamos fixar algumas notações e fazer algumas observações.

• Seja E a álgebra de Grassman sobre $\mathbb{Q}$. Então $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 é o subespaço de E gerado pelos monômios com uma quantidade par de $e_i's$ e E_1 é o subespaço de G gerado pelos monômios com uma quantidade ímpar de $e_i's$.

• Se $a, b \in M_n(E_1)$, então $tr(ab) = -tr(ba)$. Isso segue do fato de que se w e u são dois monômios em E_1, então $wu = -uw$.

Observação 5.14. *Sejam $l \geq 1$ e $t_1, \ldots, t_{2l} \in M_n(D)$, onde D é um corpo de característica $\neq 2$. Então $tr(s_{2l}(t_1, \ldots, t_{2l})) = 0$.*

De fato, considere em $M_n(E_1)$ o elemento $t = \sum_{i=1}^{2l} t_i e_i$. Se $\mu \in S_{2l}$, vale $e_{\mu(1)} \cdots e_{\mu(2l)} = (-1)^\mu e_1 \cdots e_{2l}$. Logo tem-se que $t^{2l} = \sum_{\mu \in S_{2l}} (-1)^\mu t_{\mu(1)} \cdots t_{\mu(2l)} e_1 \cdots e_{2l} = s_{2l}(t_1, \ldots, t_{2l}) e_1 \cdots e_{2l}$.

Por outro lado $tr(t^{2l}) = tr(tt^{2l-1}) = -tr(t^{2l-1}t) = -tr(t^{2l})$, e como $char(D) \neq 2$, concluímos que $tr(t^{2l}) = 0$. Consequentemente $0 = tr(t^{2l}) = tr(s_{2l}(t_1, \ldots, t_{2l}))e_1 \cdots e_{2l}$, donde $tr(s_{2l}(t_1, \ldots, t_{2l}))$.

Demonstração. (do Teorema 5.13)

Do lema 5.10, é suficiente considerar $K = \mathbb{Q}$. Agora, mantendo as notações E, E_0, E_1 do último item, segue do desenvolvimento do exemplo 2.10 que se $r_1 = e_{i_1} \cdots e_{i_n}$ e $r_2 = e_{j_1} \cdots e_{j_m}$ então obtemos $[r_1, r_2] = (1 - (-1)^{mn}) e_{i_1} \cdots e_{i_n} e_{j_1} e_{j_1} \cdots e_{j_m}$. Logo se r_1, $r_2 \in E_0$, então $r_1 r_2 = r_2 r_1$, isto é, E_0 é uma subálgebra comutativa de E. Sejam $r_1, \ldots, r_{2n} \in M_n(\mathbb{Q})$, e defina $b := r_1 e_1 + \cdots + r_{2n} e_{2n} \in M_n(E_1)$. Da argumentação da observação 5.14 segue que $b^{2n} = s_{2n}(r_1, \ldots, r_{2n}) e_1 \cdots e_{2n}$ e portanto, como $e_1 \cdots e_{2n}$ é elemento da base de E, temos $s_{2n}(r_1, \ldots, r_{2n}) = 0$ se e somente se $b^{2n} = 0$.

Para concluirmos a demonstração do teorema é suficiente verificar que $b^{2n} = 0$. Para isso, observemos que se $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então $tr(b^{2\alpha}) = tr(bb^{2\alpha-1}) = -tr(b^{2\alpha-1}b) = -tr(b^{2\alpha})$ e assim, $tr(b^{2\alpha}) = 0$. Dessa forma, se $a := b^2 \in M_n(E_0)$, temos $tr(a) = tr(a^2) = \cdots = tr(a^n) = 0$. Portanto, pelo lema 5.12, $a^n = 0$, isto é, $b^{2n} = 0$. $\square$

Sabemos então que o menor grau de uma identidade polinomial em $M_n(K)$ é $2n$, e pelo teorema de Amitsur-Levitzki, $s_{2n} \in T(M_n(K))$. Porém, poderíamos nos perguntar se há mais alguma outra identidade de grau $2n$ e se existe alguma relação desta com s_{2n}. O resultado abaixo responde tais questões quando o corpo K em questão tem característica diferente de 2.

Proposição 5.15. *Suponha que $char(K) \neq 2$. Se $f(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade multilinear de grau $2n$ em $M_n(K)$, então $f(x_1, \ldots, x_{2n}) = \alpha s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$, $\alpha \in K$.*

Demonstração. Considere $g(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(2n)} = 0$ uma identidade polinomial de grau $2n$ em $M_n(K)$. Avaliando g respectivamente na $2n$-upla $(e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, \ldots, e_{n-1,n}, e_{nn})$ tem-se que os únicos termos de g que não são nulos são os associados a $\sigma = (1)$ e $\sigma = (1, 2)$, logo segue que

$$g(e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, \ldots, e_{n-1,n}, e_{nn}) = \alpha_{(1)} e_{1n} + \alpha_{(1,2)} e_{1n} = (\alpha_{(1)} + \alpha_{(1,2)}) e_{1n} = 0$$

donde segue que $\alpha_{(1,2)} = -\alpha_{(1)} = (-1)^{(1,2)} \alpha_{(1)}$. Se $1 \leq i \leq 2n$

$$g(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, \ldots, e_{i-1,i}, e_{ii}, e_{ii}, e_{i,i+1}, \ldots, e_{n-1,n}, e_{nn}) = (\alpha_{(1)} + \alpha_{(2i-1,2i)}) e_{1n} = 0$$

e portanto $\alpha_{(2i-1,2i)} = (-1)^{(2i-1,2i)} \alpha_{(1)} = -1\alpha_{(1)}$. Por outro lado, se $1 \leq k \leq 2n$

$$g(e_{12}, e_{22}, e_{23}, \ldots, e_{i-1,i}, e_{kk}, e_{kk}, \ldots, e_{n-1,n}, e_{nn}, e_{n,1}) = (\alpha_{(1)} + \alpha_{(2k-2,2k-1)}) e_{1n}$$

e assim $\alpha_{(2k-2,2k-1)} = (-1)^{(2k-2,2k-1)} \alpha_{(1)} = -1\alpha_{(1)}$.

Em suma, concluímos que para todas as transposições da forma $\tau = (i, i+1)$, $1 \leq i \leq 2n-1$, temos $\alpha_\tau = (-1)^\tau \alpha_{(1)} = -\alpha_{(1)}$. Agora, dado $\mu \in S_{2n}$, vejamos que

$$0 = f(x_{\mu(1)}, \ldots, x_{\mu(2n)}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \alpha_\sigma x_{\mu\sigma(1)} \cdots x_{\mu\sigma(2n)} = \sum_{\rho \in S_{2n}} \alpha_{\mu^{-1}\rho} x_{\rho(1)} \cdots x_{\rho(2n)}.$$

Substituindo acima σ por σ^{-1} e comparando os monômios $\alpha_\sigma x_1 \cdots x_{2n}$ e $\alpha_{\sigma\rho} x_{\rho(1)} \cdots x_{\rho(2n)}$, onde $\rho = (i, i+1)$ chegamos que $\alpha_{\sigma(i,i+1)} = (-1)^{(i,i+1)} \alpha_\sigma$. E dado que $S_{2n} = \langle (1,2), (2,3), \ldots, (2n-1, 2n) \rangle$, concluí-se que $\alpha_\sigma = (-1)^\sigma \alpha_{(1)}$. $\square$

Em resumo, nesta seção obtemos:

1. Se K é um corpo qualquer s_{2n} é uma identidade polinomial para $M_n(K)$.

2. $M_n(K)$ não satisfaz nenhuma identidade polinomial de grau menor que $2n$.

3. Se $char(K) \neq 2$, então qualquer identidade polinomial em $M_n(K)$ de grau $2n$ é múltiplo de s_{2n}.

6 Polinômios centrais na álgebra das matrizes

Definição 6.1. *Seja R uma álgebra. O polinômio $c(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ é um* ***polinômio central*** *para R, se $c(x_1, \ldots, x_n)$ satisfaz*

- *$c(x_1, \ldots, x_m)$ não tem termo constante.*
- *$c(r_1, \ldots, r_m) \in Z(R)$, para todos $r_1, \ldots, r_m \in R$.*
- *$c(x_1, \ldots, x_m) = 0$ não é uma identidade polinomial em R.*

• Já vimos no exemplo 2.14 que o polinômio de Hall $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ é uma identidade polinomial em $M_2(K)$ e portanto, se definirmos $c(x_1, x_2) := [x_1, x_2]^2$ segue que para quaisquer r_1, $r_2 \in M_2(K)$ vale $c(r_1, r_2) \in Z(M_2(K))$.

Por outro lado, $c(x_1, x_2) = 0$ não é uma identidade polinomial em $M_2(K)$ pois

$$c(e_{12}, e_{21}) = [e_{12}, e_{21}]^2 = (e_{11} - e_{22})^2 \neq 0$$

donde concluí-se que $c(x_1, x_2)$ é um polinômio central em $M_2(K)$. O polinômio $c(x_1, x_2) = [x_1, x_2]^2$ será chamado de o polinômio de Wagner-Hall.

• De forma análoga a feita no exemplo anterior, utilizando o exemplo 2.10 concluímos que $c(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é um polinômio central para a álgebra de Grassmann E.

Adendo histórico: Por muitos anos, o polinômio de Wagner-Hall era o único polinômio central conhecido para a álgebra matricial $M_2(K)$ e até então não tinha informações a respeito de polinômios centrais em $M_n(K)$ para $n > 2$. Em meados de 1956 Kaplansky levantou o seguinte problema

($\circledast$) Problema de Kaplansky para polinômios centrais (P.K.P.C): Existem polinômios centrais na álgebra matricial $M_n(K)$ se $n > 2$?

O problema ($\circledast$) foi resolvido de forma independente por Formanek e por Razmyslov. Nesta breve seção, iremos discutir a construção de Formanek [11] de um polinômio central em $M_n(K)$ para $n > 2$.

Notação: Mantendo fixo o corpo K, lembremos que R_n é a álgebra gerada pelas matrizes genéricas $n \times n$ $(y_1, \ldots, y_n, \ldots)$.

Sabemos pelo 5.4 que os autovalores da matriz genérica y_1 são dois a dois distintos. Além de tudo, segue da prova de 5.4 que os autovalores de y_1 são algebricamente independentes sobre K.

Proposição 6.2. *Seja $f(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ tal que $f(y_1', y_2, \ldots, y_m)$ é uma matriz não nula e escalar, onde y_1' foi definida anteriormente como $y_1' = \sum_{p=1}^{n} y_{pp}^{(1)} e_{pp}$. Então $f(x_1, \ldots, x_m)$ é um polinômio central em $M_n(K)$.*

Demonstração. Seja $\Upsilon := \{y_{ij}^{(t)} \mid 1 \leq i, j \leq n, t \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$ e considere o fecho algébrico $P := \overline{K(\Upsilon)}$. Segue do Lema 5.4 que existe uma matriz invertível a tal que $z_1 := a^{-1} y_1 a$ é uma matriz diagonal. Defina $z_t := a^{-1} y_t a, \quad t \in \{2, \ldots, m\}$.

Então, usando a especialização $\varphi \colon y_1' \mapsto z_1$ e $\varphi \colon y_i \mapsto z_i, i > 1$, tem-se que

$$a^{-1} f(y_1, \ldots, y_m) a = f(a^{-1} y_1 a, a^{-1} y_2 a, \ldots, a^{-1} y_m a) = \varphi(f(y_1', y_2, \ldots, y_m))$$

e portanto, por hipótese, $f(y_1, \ldots, y_m)$ é uma matriz escalar diferente de 0. Agora, por especialização em y_1, ..., y_m, concluí-se que $f(a_1, \ldots, a_m) \in Z(M_n(K))$ para quaisquer a_1, ..., $a_m \in M_n(K)$, donde segue que $f(x_1, \ldots, x_m)$ é um polinômio central em $M_n(K)$. □

Teorema 6.3. *(Formanek [11]) Para cada $n \geq 1$, $M_n(K)$ tem um polinômio central.*

Demonstração. Seja $K[\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}]$ o anel polinomial nas variáveis comutativas ξ_1, ..., ξ_{n+1} e consideremos $K\langle \zeta, x_1, \ldots, x_n\rangle$. Considere o homomorfismo $\varphi \colon K[\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}] \to K\langle \zeta, x_1, \ldots, x_n\rangle$ de K-espaços vetoriais, definido nos monômios de $K[\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}]$ pela regra

$$\varphi(\xi_1^{a_1}, \ldots, \xi_{n+1}^{a_{n+1}}) = \zeta^{a_1} x_1 \zeta^{a_2} x_2 \cdots x_{n-1} \zeta^{a_n} x_n \zeta^{a_{n+1}}$$

e estendido por linearidade. Definimos

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) = \left(\prod_{2 \leq i \leq n} (\xi_1 - \xi_i)(\xi_{i+1} - \xi_i) \right) \left(\prod_{2 \leq j < l \leq n} (\xi_j - \xi_l)^2 \right) \tag{22}$$

e $G(\zeta, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(g(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}))$. Vamos mostrar que o polinômio

$$f(\zeta, x_1, \ldots, x_n) := G(\zeta, x_1, \ldots, x_n) + G(\zeta, x_2, \ldots, x_n, x_1) + \cdots + G(\zeta, x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

é um polinômio central para $M_n(K)$. Defina inicialmente $\widetilde{\zeta} := \sum_{p=1}^{n} \xi_p e_{pp}$.

Segue da proposição 6.2 que para mostrar que $f(\zeta, x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio central em $M_n(K)$, é suficiente ver que $f(\widetilde{\zeta}, y_2, \ldots, y_n)$ é uma matriz escalar não nula. Nossos monômios são os seguintes: $\zeta^{a_1} x_1 \zeta^{a_2} x_2 \cdots x_{n-1} \zeta^{a_n} x_n \zeta^{a_{n+1}}$. Segue que cada termo de $f(\zeta, x_1, \ldots, x_n)$ é linear em x_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e assim $f(\zeta, x_1, \ldots, x_n)$ é linear em cada x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Concluímos que para mostrarmos que $f(\widetilde{\zeta}, y_1, \ldots, y_n)$ é uma matriz escalar não nula, basta verificar que $f(\widetilde{\zeta}, e_{i_1 j_1}, \ldots, e_{i_n j_n})$ é uma matriz escalar não nula.

Vejamos agora que $\widetilde{\zeta}^{a_j} = \sum_{p=1}^{n} \xi_p^{a_j} e_{pp}$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e assim, conclui-se que

$$\widetilde{\zeta}^{a_1} e_{i_1 j_1} \widetilde{\zeta}^{a_2} e_{i_2 j_2} \cdots \widetilde{\zeta}^{a_n} e_{i_n j_n} \widetilde{\zeta}^{a_{n+1}} = \xi_{i_1}^{a_1} \xi_{i_2}^{a_2} \cdots \xi_{i_n}^{a_n} \xi_{j_n}^{a_{n+1}} e_{i_1 j_1} e_{i_2 j_2} \cdots e_{i_n j_n}$$

donde segue que $G(\widetilde{\zeta}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_n j_n}) = g(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}, \xi_{j_n}) e_{i_1 j_1} \cdots e_{i_n j_n}$. Se $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $j_n \neq i_1$ por definição de g, $g(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}, \xi_{j_n}) = 0$. Caso $j_n = i_1$, concluímos que $g(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}, \xi_{j_n}) = \prod_{1 \leq s < t \leq n} (\xi_s - \xi_t)^2$, e assim, na situação $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \ldots, j_{n-1} = i_n, j_n = i_1$ temos

$$G(\widetilde{\zeta}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_n j_n}) = \prod_{1 \leq s < t \leq n} (\xi_s - \xi_t)^2 e_{i_1 i_1}.$$

Logo G é nulo em todos os outros casos. Repetindo o raciocínio para $G(\zeta, x_2, \ldots, x_n, x_1)$, $\ldots$, $G(\zeta, x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$, concluímos que $f(\widetilde{\zeta}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_n j_n}) = \alpha I_n$ onde I_n é a matriz identidade $n \times n$ e $\alpha = \prod_{1 \leq s < t \leq n} (\xi_s - \xi_t)^2$. Como $\xi_1, \ldots, \xi_n$ são distintos, $\alpha \neq 0$ e f é um polinômio central para $M_n(K)$. □

Observação 6.4. *Dado $n > 1$, seja $a \in M_{n-1}(K)$ e defina $u(a) \in M_n(K)$ por*

$$u(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1(n-1)} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2(n-1)} & 0 \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & . & . & . & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

então a transformação K-linear

$$\iota \colon M_{n-1}(K) \to M_n(K), \quad a \mapsto u(a)$$

define um mergulho de $M_{n-1}(K)$ em $M_n(K)$.

Proposição 6.5. *Se $f(x_1, \ldots, x_m)$ é um polinômio central em $M_n(K)$ $(n > 1)$, então f é uma identidade polinomial em $M_{n-1}(K)$.*

Demonstração. Sabe-se pela observação acima que $M_{n-1}(K)$ mergulha em $M_n(K)$. Como $M_{n-1}(K)$ é fechado em relação ao produto usual em $M_n(K)$, segue que $f(a_1, \ldots, a_m) \in M_{n-1}(K)$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_m \in M_{n-1}(K)$. Por outro lado, como $Z(M_n(K)) = KI_n$, segue que $f(a_1, \ldots, a_m) \in M_{n-1}(K) \cap KI_n = \{0\}$ e portanto, $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$, donde segue que $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ é uma identidade em $M_{n-1}(K)$. □

7 O teorema da codimensão de Regev e sua aplicação ao produto tensorial de PI-álgebras

7.1 O teorema da codimensão de Regev

Iremos mostrar nesta subseção que a sequência das codimensões de uma PI-álgebra qualquer é exponencialmente limitada. Iremos nos apoiar em [19] o qual se baseou da demonstração dada por Latyshev em [31]. Além disso, nesta seção o corpo base K será arbitrário.

Lembremos que se R é uma PI-álgebra e $T(R)$ é seu T-ideal, então para cada $m \in \mathbb{N}_0$ o número

$$c_m(R) = \dim(P_m/P_m \cap T(R))$$

é chamado de m-ésima codimensão de $T(R)$ (ou de R). Aqui P_m é o espaço vetorial dos polinômios em $K\langle X\rangle$ que são multilineares de grau m. Além disso, (c_m) é a sequência das codimensões de R.

A noção de conjunto parcialmente ordenado, bem como de cadeia ou anticadeia, serão também relembrados abaixo.

• Dado um conjunto $\mathscr{P}$ e uma relação $\prec$, diz-se que $\mathscr{P}$ é parcialmente ordenado se $\prec$ satisfaz

1) (Transitividade) Dados a, b, $c \in \mathscr{P}$ tais que $a \prec b$ e $b \prec c$, então $a \prec c$.

3) (Antissimetria) Se a, $b \in \mathscr{P}$ são tais que $a \prec b$ e $b \prec a$, então $a = b$.

Notação: Comumente se diz que $(\mathscr{P}, \prec)$ é parcialmente ordenado.

• Se $(\mathscr{P}, \prec)$ é parcialmente ordenado, dizemos que os elementos $a_1, \ldots, a_l \in \mathscr{P}$ formam uma **cadeia**, se a menos de ordenação $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_l$.

• Se $(\mathscr{P}, \prec)$ é parcialmente ordenado, dizemos que os elementos $a_1, \ldots, a_l \in \mathscr{P}$ formam uma **anticadeia**, se não há entre eles dois elementos comparáveis (na relação $\prec$).

O resultado abaixo é conhecido como lema de Dilworth, sua demonstração pode ser encontrada na página 82 de [20].

Lema 7.1. *(Lema de Dilworth) Seja $\mathscr{P}$ um conjunto parcialmente ordenado e suponha que exista $l \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{P}$ contenha uma anticadeia com l elementos e não contenha nenhuma com $l+1$ elementos. Então, existem l cadeias disjuntas $I_1, \ldots, I_l$ em $\mathscr{P}$ tais que para todo $x \in \mathscr{P}$, existe $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que $x \in I_j$.*

Definição 7.2. *Dado um inteiro $2 \leq d \leq n$, uma permutação $\sigma \in S_n$ é d-ruim se existem inteiros $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$ tais que $\sigma(i_1) > \sigma(i_2) > \cdots > \sigma(i_d)$.*

Caso contrário, isto é, se para quaisquer inteiros $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$ existem índices $1 \leq k < l \leq d$ tais que $\sigma(i_k) < \sigma(i_l)$, a permutação σ é chamada de d-boa.

Para os próximos resultados, fixamos o conjunto $\mathscr{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Observação 7.3. *Dado $\sigma \in S_n$, defina em $\mathscr{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ a relação: $i \prec j$ quando $i < j$ e $\sigma(i) < \sigma(j)$.*

Então, $(\mathscr{N}, \prec)$ é parcialmente ordenado. A antissimetria é imediata. Verificaremos a transitividade. Se $i \prec j$ e $j \prec l$, então $i < j < l$ e $\sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(l)$, e assim, $i \prec l$.

Lema 7.4. *Sejam $2 \leq d \leq n$ e $\sigma \in S_n$ uma permutação d-boa. Então, existe um número $k \leq d-1$ tal que $\mathscr{N} = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ com a seguinte propriedade: Para todo $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e a, $b \in I_j$, com $a < b$, segue que $\sigma(a) < \sigma(b)$.*

Demonstração. Considere em $\mathscr{N}$ a relação $\prec$ definida na observação 7.3. Por outro lado, dado que σ é d-boa, em todo subconjunto $\{u_1, \ldots, u_d\} \subseteq \mathscr{N}$ existem u_i e u_j com $u_i < u_j$ e $\sigma(u_i) < \sigma(u_j)$, isto é $u_i \prec u_j$. Segue que $\mathscr{N}$ não contém nenhuma anticadeia de comprimento d, e portanto pelo lema 7.1, existem $k \leq d-1$ e $I_1, \ldots, I_k$ cadeias disjuntas em $\mathscr{N}$ tais que $\mathscr{N} = I_1 \cup \cdots \cup I_k$.

Logo para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e a, $b \in I_i$, com $a < b$ temos $\sigma(a) < \sigma(b)$. □

Lema 7.5. *Dado $2 \leq d \leq n$, denote por $\mathfrak{B}_d$ o conjunto de todas as permutações em S_n que são d-boa. Então $|\mathfrak{B}_d| \leq (d-1)^{2n}$.*

Demonstração. Seja σ uma permutação d-boa. Pelo mesmo argumento usado na demonstração do lema anterior, existem em $\mathscr{N}$ cadeias $I_1, \ldots, I_k$, com $k \leq d-1$ tais que $\mathscr{N} = I_1 \cup \cdots \cup I_k$.

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ escreva $I_j = \{i_1^{(j)}, \ldots, i_{r_j}^{(j)}\}$, onde $r_j \in \mathbb{N}$ e $1 \prec i_1^{(j)} \prec \cdots \prec i_{r_j}^{(j)} \prec n$.

Definimos as funções

$$\varsigma_\sigma \colon \mathscr{N} \to \{1, 2, \ldots, d-1\}, \quad e \quad \theta_\sigma \colon \mathscr{N} \to \{1, 2, \ldots, d-1\}$$

por $\varsigma_\sigma(i_p^{(j)}) = j$, $\theta_\sigma(\sigma(i_p^{(j)})) = j$, onde $1 \leq p \leq r_j$, e $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Suponha que σ e π sejam duas permutações d-boa tais que $\varsigma_\sigma \equiv \varsigma_\pi$ e $\theta_\sigma \equiv \theta_\pi$. Então, se existissem r, $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $\sigma(s) < \sigma(r)$ e $\pi(r) < \pi(s)$, então r e s não poderiam estar nas mesmas cadeias das respectivas decomposições de $\mathscr{N}$, e isso implicaria em particular a não igualdade das funções acima, um absurdo. Concluímos que $\sigma \equiv \pi$. E assim tem-se que cada permutação d-boa determina um único par de funções $(\varsigma_\sigma, \theta_\sigma)$. Por outro lado, dado que existem exatamente $(d-1)^n$ funções $f \colon \mathscr{N} \to \{1, 2, \ldots, d-1\}$, segue que $|\mathfrak{B}_d| \leq (d-1)^{2n}$. □

- Um monômio $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)} \in P_m$ é chamado de d-bom (respectivamente d-ruim) se a permutação σ for d-boa (respectivamente d-ruim).

Observação 7.6. *(Ordem lexicográfica) Seja R uma PI-álgebra. Podemos definir uma ordem lexicográfica nos monômios em $P_n/P_n \cap T(R)$ da seguinte forma*

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} + (P_n \cap T(R)) < x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)} + (P_n \cap T(R))$$

quando existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\sigma(1) = \tau(1), \ldots, \sigma(k) = \tau(k), \sigma(k+1) < \tau(k+1)$.

Lema 7.7. *Seja R uma PI-álgebra com uma identidade polinomial de grau $d \geq 1$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, P_n é gerado módulo $P_n \cap T(R)$ por monômios da forma $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$, onde π é d-boa.*

Demonstração. Pelo processo de linearização, é suficiente supor que R satisfaça uma identidade multilinear de grau d da forma

$$x_1 \cdots x_d - \sum_{\sigma \in S_d, \sigma \neq 1} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(d)} \equiv 0.$$

Agora, suponha por absurdo que $P_n/P_n \cap T(R)$ não sera gerado por polinômios d-bons. Em relação à ordem lexicográfica definida em 7.6, escolhemos um monômio minimal d-ruim

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \cdots x_{i_n} + (P_n \cap T(R)).$$

Então, em particular a permutação $\mu \in S_n$ tal que $\mu(j) = i_j$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, é d-ruim. E assim, existem d índices $1 \leq \beta_1 < \cdots < \beta_d \leq n$ tais que $\mu(\beta_1) > \cdots > \mu(\beta_d)$.

Dado que $\beta_j \in \{i_1, \ldots, i_n\}$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, definimos

$$\xi_0 = x_{i_1} \cdots x_{\mu(\beta_1 - 1)} + (P_n \cap T(R)),$$

$$\xi_1 = x_{\mu(\beta_1)} \cdots x_{\mu(\beta_2 - 1)} + (P_n \cap T(R))$$
$$\xi_2 = x_{\mu(\beta_2)} \cdots x_{\mu(\beta_3 - 1)} + (P_n \cap T(R))$$
$$\vdots$$
$$\xi_d = x_{\mu(\beta_d)} \cdots x_{i_n} + (P_n \cap T(R)).$$

Pela ordem lexicográfica, segue que $\xi_1 > \cdots > \xi_d$, e portanto, para cada $1 \neq \sigma \in S_d$, $\xi_0 \xi_{\sigma(1)} \cdots \xi_{\sigma(d)} < \xi_0 \xi_1 \cdots \xi_d = f$.

Pela minimalidade de f, segue que para qualquer $1 \neq \sigma \in S_d$, $\xi_0 \xi_{\sigma(1)} \cdots \xi_{\sigma(d)}$ é uma combinação linear de monômios d-bons. Como

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \xi_0 \xi_1 \cdots \xi_d = \sum_{\sigma \in S_d, \sigma \neq 1} \alpha_\sigma \xi_0 \xi_{\sigma(1)} \cdots \xi_{\sigma(d)},$$

concluímos que f é uma combinação linear de monômios d-bons em $P_n \cap T(R)$ o qual é um absurdo por hipótese. Disto, concluímos que $P_n/P_n \cap T(R)$ é gerado por monômios d-bons. □

Teorema 7.8. *(Teorema da codimensão de Regev) Seja R uma PI-álgebra com uma identidade polinomial de grau $d \geq 1$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ vale $c_n(R) \leq (d-1)^{2n}$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, denotemos por $G_{d,n}$ o conjunto dos monômios em $P_n/P_n \cap T(R)$ da forma $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$, onde π é d-boa. Pelo lema 7.7, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ temos $\dim(P_n/P_n \cap T(R)) = \dim(span(G_{d,n}))$. Lema 7.5 implica em $\dim(span(G_{d,n})) \leq (d-1)^{2n}$.

Logo, concluí-se que $c_n(R) \leq (d-1)^{2n}$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$. □

7.2 Produto tensorial de PI-álgebras

Vamos mostrar que o problema de Kaplansky sobre se produto tensorial de PI-álgebras é de novo uma PI-álgebra, tem resposta afirmativa. A prova deste fato foi dada por Regev em 1971 em [36].

Teorema 7.9. *Sejam R, S duas PI-álgebras sobre um corpo arbitrário K. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n(R \otimes S) \leq c_n(R)c_n(S)$.*

Demonstração. Fixemos $n \geq 1$. Sejam $F(R)$ e $F(S)$ as álgebras relativamente livres de posto enumerável, com seus respectivos geradores livres $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots\}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots\}$. Definimos $p := c_n(R)$ e $q := c_n(S)$, bem como

$$\mathcal{L}_n = \{m_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, m_p(u_1, \ldots, u_n))\}, \qquad \mathcal{M}_n = \{r_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, r_p(v_1, \ldots, v_n))\}$$

bases de $P_n/(P_n \cap T(R))$ e $P_n/(P_n \cap T(S))$ respectivamente. Dessa forma, o conjunto

$$\mathcal{R}_n = \{m_i(u_1, \ldots, u_n) \otimes r_j(v_1, \ldots, v_n) \mid i \in \{1, 2, \ldots, p\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, 2, \ldots, q\}\}$$

é uma base de $(P_n/(P_n \cap T(R))) \otimes (P_n/(P_n \cap T(S)))$. Em particular, o polinômio multilinear $f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma z_{\sigma(1)} \cdots z_{\sigma(n)}$, é tal que $f(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n)$ é uma combinação linear dos elementos em $\mathcal{R}_n$ pois

$$f(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (u_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(1)}) \cdots (u_{\sigma(n)} \otimes v_{\sigma(n)})$$

e como para cada $\sigma \in S_n$ temos $(u_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(1)}) \cdots (u_{\sigma(n)} \otimes v_{\sigma(n)}) = (u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(n)}) \otimes (v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)})$, segue que

$$f(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) = \sum_{\sigma} \alpha_\sigma (u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(n)}) \otimes (v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)}).$$

E assim, dados quaisquer polinômios multilineares $f_1, \ldots, f_{pq+1}$, existem elementos $\beta_1, \ldots, \beta_{pq+1} \in K$, os quais não são todos nulos, tais que $(\beta_1 f_1 + \cdots + \beta_{pq+1} f_{pq+1})(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) = 0$ em $F(R) \otimes F(B)$. Agora, dados $\theta_1, \ldots, \theta_n \in R$ e $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \in S$, como $F(R)$ e $F(S)$ são livres em $\mathcal{U}$ e em $\mathcal{V}$ respectivamente, segue que existem homomorfismos $\phi_{\mathcal{U}} \colon F(R) \to R$ e $\phi_{\mathcal{V}} \colon F(S) \to S$ tais que

$$\phi_{\mathcal{U}}(u_i) = \begin{cases} \theta_i, & se \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ 0, & se \quad i \geq n \end{cases}, \qquad \phi_{\mathcal{V}}(v_i) = \begin{cases} \vartheta_i, & se \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ 0, & se \quad i \geq n \end{cases}.$$

Estendendo por bilinearidade, definimos $\varphi \colon F(R) \times F(S) \to R \otimes S$ o qual age nos elementos básicos de $F(R) \times F(S)$ via a regra $\varphi(u_i, v_j) = \phi_{\mathcal{U}}(u_i) \otimes \phi_{\mathcal{V}}(v_j), \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma função linear $\psi \colon F(R) \otimes F(S) \to R \otimes S$ tal que $\psi \circ \otimes = \varphi$. Logo, escrevendo $g := \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_{pq+1} f_{pq+1}$ concluímos que

$$g(\theta_1 \otimes \vartheta_1, \ldots, \theta_n \otimes \vartheta_n) = g(\psi(u_1 \otimes v_1), \ldots, \psi(u_n \otimes v_n)) = \psi(g(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n)) = 0.$$

Como g é multilinear, segue que este é uma identidade polinomial em $R \otimes S$. Para concluir a demonstração do teorema, notemos que se a dimensão de $P_n/(P_n \cap T(R \otimes S))$ excedesse pq, então deveriam existir monômios multilineares $f_1, \ldots, f_{pq+1}$ tais que $c_1 f_1 + \cdots + c_{pq+1} f_{pq+1} = 0$ em $R \otimes S$ se, e somente se, $c_1 = \cdots = c_{pq+1} = 0$. Mas isso é um absurdo devido à construção acima. Concluí-se que de fato $c_n(R \otimes S) \leq c_n(R)c_n(S)$. □

Teorema 7.10. *(Teorema de Regev) Se R e S são suas PI-álgebras, então $R \otimes S$ também é uma PI-álgebra.*

Demonstração. Pelo teorema da codimensão de Regev 7.8, existem $d, l \in \mathbb{Z}$ tais que $c_n(R) \leq d^n$ e $c_n(S) \leq l^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, por 7.9, $c_n(R \otimes S) \leq (dl)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n! > k^n$. Com isso, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_0! > (dl)^{m_0}$, e assim $c_{m_0}(R \otimes S) < m_0!$, e portanto, $R \otimes S$ satisfaz uma identidade polinomial multilinear não trivial de grau m_0. □

8 Representações do grupo simétrico S_n

Nesta seção iremos revisar resultados em teoria de representações de grupos finitos, bem como descrever as representações do grupo simétrico S_n. Iremos utilizar as bibliografias [10], [42] e [7]. O corpo K em questão aqui será assumido ser algebricamente fechado e de característica zero.

8.1 Algumas definições e resultados básicos da teoria de grupos

Definição 8.1. *Dado um grupo G, os elementos x, $y \in G$ são conjugados se existe $g \in G$ tal que $y = g^{-1}xg$.*

- Se G é um grupo, a relação $\sim$ definida por $x \sim y$ quando x e y são conjugados, é uma relação de equivalência em G. Denota-se por x^G a classe de conjugação de $x \in G$ em relação a $\sim$.
- Podemos escrever G como a união disjunta $G = \bigcup_{x \in G} x^G$.
- Se G é um grupo abeliano, $x^G = \{x\}$, para todo $x \in G$.
- Seja $D_6 = \langle r, s \mid r^3 = s^2 = 1, \quad s^{-1}rs = r^{-1}\rangle$ o grupo diedral de ordem 6, isto é, D_6 são todas as simetrias de um triângulo equilátero. Por definição $D_6 = \{1, r, r^2, s, rs, r^2s\}$ e as classes de conjugação de D_6 são $1^{D_6} = \{1\}$, $r^{D_6} = \{r, r^2\}$, $s^{D_6} = \{s, rs, r^2s\}$.

Definição 8.2. *Seja G um grupo, o conjunto $C_G(x) = \{g \in G : xg = gx\}$ é o **centralizador** de x em G.*

Observação: É comum denotar o centralizador de x em G por $St_G(x)$.

- Se G é um grupo e $x \in G$, temos $|x^G| = [G : C_G(x)]$. Em particular, $|x^G|$ divide $|G|$.
- Se $Z(G)$ é o centro de G, então $|x^G| = 1$ se, e somente se, $gxg^{-1} = x \Leftrightarrow x \in Z(G)$.
- (Equação de classe) Seja G um grupo finito, e $x_1, \dots, x_l$ representantes das classes de conjugação. Então $|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|$. A equação abaixo é a **equação de classe** de G.

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} [G : C_G(x_i)]. \tag{23}$$

Proposição 8.3. *Seja $x \in S_n$ um k-ciclo, isto é, $x = (i_1, \dots, i_k)$ e seja $g \in S_n$. Então $gxg^{-1} = (g(i_1), \dots, g(i_k))$.*

Teorema 8.4. *Dada $\sigma \in S_n$, a classe de conjugação σ^{S_n} consiste de todas as permutações do mesmo tipo cíclico de σ.*

Definição 8.5. *Uma partição de n (em não mais que k partes) é uma k-tupla de inteiros não negativos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ em ordem decrescente, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_k \geq 0$ tal que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$.*
Notação: *$\lambda \vdash n$, ou $\lambda \in Part(n)$.*

Notações: Duas partições são identificadas se elas diferem apenas por uma sequência de zeros. Por exemplo $(5, 4, 2, 0, 0, 0) = (5, 4, 2, 0) = (5, 4, 2)$. Escrevemos um elemento elevado a alguma potência natural para indicar a quantidade de vezes que este ocorre em tal partição, por exemplo $(4, 2^3, 1^7) = (4, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

8.2 Representações de grupos finitos

Definição 8.6. *Sejam V um espaço vetorial sobre K e G um grupo. Uma representação de G em V é um homomorfismo de grupos $\rho\colon G \to GL(V)$. O grau de uma representação de G em V é a dimensão de V.*

Exemplo 8.7. *Seja G o grupo diedral $D_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, o grupo de simetrias de um quadrado. Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $A^4 = B^2 = 1$ e $B^{-1}AB = A^{-1}$, temos que $\rho\colon G \to GL_2(K)$, $a^ib^j \mapsto A^iB^j$ é um homomorfismo de grupos, e portanto ρ é uma representação de G de grau 2.

Definição 8.8. *(Álgebra do grupo) Seja G um grupo. A K-álgebra KG com base $\{g \mid g \in G\}$ e com multiplicação entre elementos induzida pelo produto de G, é chamada de álgebra do grupo G. Mais explicitamente $KG := \bigoplus_{g\in G} Kg$. Além disso $(\sum_{g\in G} a_g g)\cdot(\sum_{h\in G} b_h h) := \sum_{z\in G}(\sum_{gh=z} a_g b_h)z$ para quaisquer $\sum_{g\in G} a_g g$ e $\sum_{h\in G} b_h h$ em KG.*

Exemplo 8.9. *Se $G = \langle x\rangle$ é um grupo cíclico infinito, então $\{1, x^{\pm 1}, x^{\pm 2}, \ldots\}$ é uma base de KG e a multiplicação é induzida por $x^k x^l = x^{k+l}$, k, $l \in \mathbb{Z}$. Temos a identificação de KG com a K-álgebra das séries de Laurent $K[x, x^{-1}]$.*

Definição 8.10. *Sejam G um grupo e V um espaço vetorial sobre K.*

*a) Uma representação $\rho\colon G \to GL(V)$ é dita **fiel** se $Ker(\rho) = \{e\}$, onde e é o elemento neutro de G.*

b) Se $\rho\colon G \to GL(V)$ e $\widetilde{\rho}\colon G \to GL(\widetilde{V})$ são representações de um grupo G, então ρ e $\widetilde{\rho}$ são isomorfas (equivalentes), ($\rho \cong \widetilde{\rho}$) se existe um isomorfismo $\theta\colon V \to \widetilde{V}$ tal que $(\theta\circ\rho(g)) \equiv (\widetilde{\rho}(g)\circ\theta)$, para todo $g \in G$.

*c) Dados um subespaço $W \subseteq V$ e uma representação $\rho\colon G \to GL(V)$ tal que $\rho(g)(W) = W$, para todo $g \in G$, a representação $\psi\colon G \to GL(W)$, $\quad g \mapsto \rho(g)_{|W}$ é uma **sub-representação** de ϕ. Ademais, ψ é **própria** se W não é trivial, isto é, se $W \neq \{0\}$ e $W \neq V$.*

- Sejam $\rho\colon G \to GL(V)$ e $\nu\colon G \to GL(U)$ duas representações de G, então o homomorfismo de grupos $\rho\oplus\nu\colon G \to GL(V\oplus U)$, dado por $\rho\oplus\nu(g)(v,u) = \rho(g)(v)\oplus\nu(g)(u)$ é a soma direta de ρ e ν.

- Na mesma notação do item acima, o homomorfismo $\rho\otimes\nu\colon G \to GL(V\otimes U)$ definido por $\rho\otimes\nu(g)(v\otimes u) = \rho(g)(v)\otimes\nu(g)(u)$ é o produto tensorial das representações ρ e ν.

Definição 8.11. *Uma representação $\rho\colon G \to GL(V)$ é **irredutível** se esta não admite sub-representações próprias. Diz-se que ρ é **completamente redutível** se existem representações irredutíveis cuja soma direta é ρ.*

Se $\rho\colon G \to GL(V)$ é uma representação de G em V, então existe uma ação natural de G em V induzida por ρ, a saber

$$gv := \rho(g)(v), \quad g \in G \quad \text{e} \quad v \in V. \tag{24}$$

Assim o espaço vetorial V se torna um KG-módulo (ou um G-módulo). Reciprocamente, se existe uma ação de um grupo num espaço vetorial, esta induz uma representação no mesmo sentido natural. Portanto diz-se que V é um G-módulo ao invés de deixar explicito a representação $\rho\colon G \to GL(V)$.

• (Representação regular) Dado um grupo G, o homomorfismo de grupos $r_G\colon G \to GL(KG)$ definido por $r_G(g)(\sum_{h\in G} a_h h) = \sum_{h\in G} a_h gh$ onde $g \in G$ e $\sum_{h\in G} a_h h \in KG$ é a **representação regular** de G.

Observação 8.12. *A representação regular de um grupo G induz naturalmente em KG uma estrutura de um G-módulo à esquerda. Daqui em diante, sempre iremos assumir que G age em KG dessa forma.*

• Uma representação $\rho\colon G \to GL(V)$ é **decomponível** se ela possui uma sub-representação própria, e é **redutível** se ρ é soma direta de sub-representações próprias.

Proposição 8.13. *Seja $\rho\colon G \to GL(V)$ uma representação de um grupo V num espaço vetorial de dimensão m. Então ϕ é decomponível se, e somente se, existe uma base $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, .., v_m\}$ tal que todas as matrizes $\phi(g)$, $g \in G$ têm a forma*

$$\phi(g) = \begin{pmatrix} a_g & 0 \\ b_g & c_g \end{pmatrix}$$

onde a_g, b_g e c_g são matrizes de tamanho $k\times k$, $\quad (m-k)\times k$ e $(m-k)\times(m-k)$ respectivamente.

Teorema 8.14. *(Teorema de Maschke) Se G é um grupo finito, a K-álgebra KG é semissimples. Isto é, se U é um G-submódulo de KG, existe um G-submódulo W de KG tal que $KG = U\oplus W$.*

- Observamos que o teorema de Maschke é válido em situação mais geral: o corpo K pode ser de característica positiva p, desde que p não divida a ordem de G.

- Se K é algebricamente fechado, segue do teorema de Maschke e do teorema de Wedderburn–Artin 1.20 que existem inteiros não negativos $d_1, \ldots, d_r$ tais que $KG \cong M_{d_1}(K)\oplus M_{d_2}(K)\oplus \cdots \oplus M_{d_r}(K)$.

- Se G é um grupo finito, então toda representação de G é semissimples.

Seja V um G-módulo irredutível e $v \in V \setminus \{0\}$. Defina um homomorfismo de G-módulos, $\phi\colon KG \to V$, $\sum_{g\in G} a_g g \mapsto \sum_{g\in G} a_g gv$. Como $Ker(\phi)$ é um G-submódulo de KG, pelo teorema de Maschke, existe um G-submódulo $\mathfrak{m}$ de KG tal que

$$KG = Ker(\phi) \oplus \mathfrak{m}. \tag{25}$$

Os G-submódulos de KG são ideais à esquerda em KG, logo $Ker(\phi)$ e $\mathfrak{m}$ são ideais à esquerda em KG. Temos $KG/Ker(\phi) \cong V$. Por outro lado, de (25), $KG/Ker(\phi) \cong \mathfrak{m}$, e assim, concluímos que $V \cong \mathfrak{m}$.

Como V é irredutível, segue que $\mathfrak{m}$ é um ideal minimal à esquerda em KG. Podemos resumir isso acima no seguinte resultado

Proposição 8.15. *Seja G um grupo finito. Então, todo G-módulo irredutível V é isomorfo a um ideal minimal à esquerda em KG.*

Proposição 8.16. *Sejam G um grupo finito e $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que*

$$KG \cong M_{d_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{d_r}(K). \tag{26}$$

Se V é um G-módulo irredutível, então V é um espaço vetorial de dimensão d_i, para algum $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, com a ação canônica de $M_{d_i}(K) \leq KG$ e tal que se $j \neq i$ e $x \in M_{d_j}(K)$, então $x \cdot v = 0$, para todo $v \in V$.

Corolário 8.17. *Se G é um grupo finito, existe apenas uma quantidade finita de representações irredutíveis de G que não sejam isomorfas.*

- Segue do corolário 8.17 que dado um grupo finito G, existe um sistema de G-módulos irredutíveis $(V_1, \dots, V_r)$ tal que qualquer G-módulo irredutível V é isomorfo a algum dos V_i, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Seja agora W um G-módulo, e $W_1, \dots, W_s$ G-submódulos irredutíveis de W tal que $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$.

Então, se m_i é a quantidade de submódulos $W_1, \dots, W_s$ que são isomorfos a V_i, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, denotamos $W = m_1V_1 \oplus m_2 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus m_rV_r$.

Além disso, $m_1, \dots, m_r$ são chamados de **multiplicidades** de $V_1, \dots, V_r$ respectivamente em W.

Proposição 8.18. *(Lema de Schur) Sejam $\rho\colon G \to GL(V)$, $\rho'\colon G \to GL(V')$ duas representações irredutíveis de G e $f : V \to V'$ uma transformação linear satisfazendo $\rho'(g) \circ f = f \circ \rho(g)$, para qualquer $g \in G$. Então*

1) Se ρ e ρ' não são equivalentes, $f \equiv 0$.

2) Se $V = V'$, $\rho = \rho'$, então $f = \lambda 1_V$, onde $\lambda \in K$.

Em relação ao lema de Schur 8.18, observemos que V e V' podem ser considerados G-módulos se definirmos as respectivas ações: $g \cdot v := \rho(g)(v)$ e $g \star v' := \rho'(g)(v')$, para quaisquer $g \in G$, $v \in V$ e $v' \in V'$. Se $f : V \to V'$ é uma transformação linear satisfazendo $\rho'(g) \circ f = f \circ \rho(g)$, para qualquer $g \in G$, então dados $v \in V$ e $g \in G$

$$f(g \cdot v) = f(\rho(g)(v)) = \rho'(g)(f(v)) = g \star f(v)$$

e assim, f é um homomorfismo de G-módulos. Dessa forma, pelo lema de Schur 1.22, o homomorfismo f só pode ser nulo ou $V = V'$ e existe a inversa de f. Agora, seja λ um autovalor de f (existe pois estamos assumindo que K é algebricamente fechado) e defina $f' = f - \lambda 1_V$. Em particular, como f tem inversa, f' também tem, e assim, $Ker(f') = V$. Logo, $f' \equiv 0$ e portanto $f = \lambda 1_V$. Concluí-se então que 8.18 pode ser considerado um corolário do resultado mais geral 1.22.

Proposição 8.19. *Sejam $R = M_d(K)$ e $\mathscr{I}$ o conjunto dos ideais à esquerda em R que são minimais.*

i) Se $I \in \mathscr{I}$, existe $\kappa \in I$ tal que $\kappa^2 = \kappa$, isto é, existe um elemento idempotente em I.

ii) Se L é um ideal minimal à esquerda em KG, então existe um elemento idempotente $e \in L$ tal que $L = (KG)e$.

Definição 8.20. *Seja $\phi\colon G \to GL(V)$ uma representação de dimensão finita de um grupo G. A função*

$$\chi_\phi\colon G \to K, \quad g \mapsto tr_V(\phi(g))$$

*é chamada de **carácter** de ϕ. Se ϕ é irredutível, χ_ϕ é chamada de **carácter irredutível** de ϕ.*

Proposição 8.21. *a) Seja $\phi\colon G \to GL(V)$ uma representação de dimensão finita de um grupo G. Então, se $h, g \in G$ são conjugados, segue que $\chi_\phi(g) = \chi_\phi(h)$.*

b) Se $\phi\colon G \to GL(V)$ e $\psi\colon G \to GL(W)$ são duas representações de dimensão finita de G, então $\chi_{\phi\oplus\psi} = \chi_\phi + \chi_\psi$ e $\chi_{\phi\otimes\psi} = \chi_\phi\chi_\psi$.

Teorema 8.22. *Seja G um grupo finito e seja K um corpo algebricamente fechado.*

a) Toda representação de dimensão finita de G é determinada, a menos de isomorfismo, por seu carácter.

b) Se $(V_1, \dots, V_r)$ é o sistema de representações irredutíveis de G, segue que r é exatamente o número de classes de conjugação de G.

Proposição 8.23. *Seja K um corpo algebricamente fechado e r_G a representação regular de um grupo finito G.*

a) $\chi_{r_G}(g) = \begin{cases} |G|, & g = e \\ 0, & g \neq 0 \end{cases}$ *, onde e é o elemento neutro em G.*

b) Se $\chi_1, \dots, \chi_r$ são os caracteres irredutíveis de G cujos graus são $d_1, \dots, d_r$ respectivamente. Então, tem-se que $\chi_{r_G} = d_1\chi_1 + \cdots + d_r\chi_r$.

Considere $\rho\colon Q \to GL(V)$ uma representação irredutível do grupo abeliano Q. Notemos que em virtude da comutatividade de Q $\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g)$, para quaisquer $g, h \in Q$.

Agora, fixemos $h \in Q$ qualquer e considere o isomorfismo $f\colon V \to V$, $f(v) = \rho(h)(v)$. Então, pelo lema de Schur 8.18, existe $\lambda_h \in K$ tal que $f(v) = \lambda_h v$ para qualquer $v \in V$.

Dessa forma, por arbitrariedade de $h \in Q$, concluí-se que para qualquer $g \in Q$ $\rho(g) \equiv \lambda_g 1_V$.

Se $\dim(V) > 1$, então considere W um subespaço próprio de V. Por conta da condição acima, concluí-se que $\rho(g)(W) = W$ para qualquer $g \in Q$, porém isso é um absurdo dado que V é um Q-módulo irredutível. Dessa forma, segue que $\dim(V) = 1$. Resumindo:

Proposição 8.24. *Cada representação irredutível de um grupo finito abeliano Q sobre K tem grau* 1.

Agora, se Q é um grupo abeliano o conjunto $\widehat{Q} = Hom(Q, K^*)$ dos homomorfismos do grupo Q no grupo multiplicativo K^*, munido do produto $\chi\chi'(a) = \chi(a)\chi'(a)$, $\chi, \chi' \in \widehat{Q}$, $a \in Q$, tem estrutura de monoide, cuja identidade é o homomorfismo $\chi_1\colon Q \to K^*$, $x \mapsto 1$. Por outro lado, dado $\chi \in Hom(Q, K^*)$ defina $\overline{\chi}\colon Q \to K^*$ por $\overline{\chi}(g) = \chi(g^{-1})$. Dessa forma, como $\overline{\chi} \in Hom(Q, K^*)$ e $\chi\overline{\chi} = \overline{\chi}\chi = \chi_1$, pela arbitrariedade de χ, tem-se que $\widehat{Q}$ munido do produto acima é um grupo. Usando Teorema 8.22 concluímos que o número de representações irredutíveis de Q é exatamente $|Q|$ e assim, como todos os elementos de $\widehat{Q}$ são homomorfismos irredutíveis de Q em K^* segue que $\widehat{Q} = \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$, onde χ_j, $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, são os caracteres irredutíveis de Q e χ_1 é o carácter trivial.

Teorema 8.25. *Se Q é um grupo abeliano finito e $\widehat{Q}$ é o grupo definido acima, $\widehat{Q} \cong Q$.*

- (Tabela de Caracteres) Para grupos de ordem pequena, podemos organizar as representações irredutíveis de tal grupo utilizando uma tabela $\mathbf{T}_G$, a qual é montada da seguinte forma

- As linhas de $\mathbf{T}_G$ representam os caracteres irredutíveis de G.
- As colunas de $\mathbf{T}_G$ representam as classes de conjugação de G.
- As entradas de $\mathbf{T}_G$ são os valores dos caracteres nas respectivas classes de conjugação.

Exemplo 8.26. *Se $G = D_8$ é o grupo diedral (exemplo 8.7), então $G = \{1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$. As classes de conjugação de G são $\{1\}$, $\{r^2\}$, $\{r, r^3\}$, $\{s, r^2s\}$, $\{rs, r^3s\}$. Então $\boldsymbol{T}_G$ é dada por*

G	1	r^2	r	s	rs
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	1
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	2	0	0	0

8.3 Representações do grupo simétrico S_n

Queremos descrever as representações irredutíveis do grupo S_n, isto é, os S_n-módulos irredutíveis. Primeiro estudamos os diagramas de Young. Nos baseamos em [7]. Primeiro observamos que no caso de S_n, em característica 0, o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$ cinde. Isto é, as representações irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$ permanecem irredutíveis sobre qualquer corpo K de característica 0. Ainda mais, um sistema completo de representações irredutíveis e não isomorfas sobre K sempre pode ser definido sobre $\mathbb{Q}$.

Definição 8.27. *(Tabela de Young) Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k) \vdash n$, a tabela de Young associado a λ é um subconjunto finito de $\mathbb{Z}^2$, definido como sendo o conjunto*

$$T_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, \lambda_i\}.$$

Uma das notações do diagrama de Young é a de representar os elementos por blocos organizados em linhas e colunas. O arranjo de blocos segue a seguinte regra

($\star$) A primeira coordenada i (indexamento de linha) cresce de cima para baixo

($\star\star$) : O indexamento na segunda coordenada j (i.e, índice das colunas) cresce da esquerda para a direita.

Por exemplo, se $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ é uma partição de $n = 12$, então

$$T_{(5,4,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & \\ \cline{1-4} & \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

• Um **diagrama de Young** D de uma partição $\lambda \vdash n$ é um preenchimento dos blocos de T_λ com os números $\{1, 2, \ldots, n\}$ em uma ordem qualquer.

Considerando o diagrama $T_{(5,4,2,1)}$, podemos preenche-lo por exemplo da forma

$$D = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 8 & 9 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 11 \\ \cline{1-4} 3 & 10 \\ \cline{1-2} 12 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Dado um diagrama D associado a uma partição λ de n, denotemos seus elementos por l_{ij}. Diz-se que uma permutação $p \in S_n$ é uma permutação de linha de D se a imagem de cada linha de D, via ação de p, permanece nesta mesma linha. Em outras palavras, se $[\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_r}]$ é uma linha qualquer de D, então $p(\lambda_{i_j}) \in \{\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_r}\}$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ e p fixa todos os números nas demais linhas de D. Se $p \in S_n$ é uma permutação de linha de D, iremos escrever $p - (R.P)$. Dessa forma, podemos definir

$$R(D) := \{p \in S_n \mid p - (R.P)\}.$$

Analogamente, define-se a permutação de coluna de um diagrama de Young D e denota-se o conjunto de tais permutações por $C(D)$. Além disso, $R(D)$ e $C(D)$ são subgrupos de S_n.

Exemplo 8.28. *Considere o seguinte diagrama de Young associado a partição $\lambda = (3, 2, 1)$ de $n = 6$:*

$$D = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Se $m < n$, S_m mergulha em S_n, logo $R(D) = (1, 2, 3)S_3 \oplus (4, 6)S_2$ e $C(D) = (1, 4, 5)S_3 \oplus (2, 6)S_2$.

• Se D é um diagrama de Young associado a uma partição $\lambda \vdash n$, então $R(D) \cap C(D) = (1)$. De fato, se $\sigma \in R(D) \cap C(D)$, σ fixa todos os elementos fora de uma linha i de D, e portanto segue que $\sigma = (1)$.

• Se p, $p' \in R(D)$ e q, $q' \in C(D)$, então $pq = p'q'$ implica que $p = p'$ e $q = q'$. Basta notarmos que $pq = p'q'$ se e somente se $(p')^{-1}p = q^{-1}q'$. Portanto, de $R(D) \cap C(D) = (1)$, segue que $p = p'$ e $q = q'$.

Agora, se D e um diagrama de Young associado a partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, definimos o simetrizador de Young associado a D como sendo

$$e(D) = \sum_{p \in R(D), q \in C(D)} (-1)^q pq = \Big(\sum_{p \in R(D)} p\Big)\Big(\sum_{q \in C(D)} (-1)^q q\Big) \tag{27}$$

onde $(-1)^q := sign(q)$. Veja que $e(D) \in KS_n$ e além do mais, pelo último item acima, segue que $e(D) \neq 0$. Se $p_1 \in R(D)$ e $q_1 \in C(D)$, então

$$p_1 e(D) = \sum_{p,q} (-1)^q p_1 pq = e(D) \quad e \quad e(D)q_1 = \sum_{p,q} (-1)^q pqq_1 = (-1)^{q_1} e(D).$$

Agora, dada uma partição $\lambda \vdash n$, associamos o ideal à esquerda $(KS_n)e(D)$, onde D é qualquer diagrama obtido a partir da tabela de Young T_λ. Vamos mostrar que os ideais da forma acima são minimais e que se D e D' são diagramas de Young associados à tabela de Young T_λ, então $(KS_n)e(D) \cong (KS_n)e(D')$, e que diferentes tabelas produzem ideais minimais não isomorfos.

Lema 8.29. *Sejam $D' = gD$ e $h \in S_n$. Se a entrada (i,j) de D está na posição (i',j') de hD, então a entrada (i,j) de D' está na posição (i',j') de $ghg^{-1}D'$.*

Demonstração. Suponha que α seja o número na posição (i,j) de D que está na posição (i',j') de hD. Então, segue que se β é o número na posição (i',j') de D, temos $h(\beta) = \alpha$. Por outro lado, o elemento na posição (i,j) de D' é $g(\alpha)$, e assim, este se encontra na posição (i',j') de $ghg^{-1}D'$. De fato, dado que $g(\beta)$ se encontra na posição (i',j') de D', temos que $ghg^{-1}(g(\beta)) = gh(\beta) = g(\alpha)$. □

Corolário 8.30. *Dado $g \in S_n$ e D um diagrama de Young associado a uma partição $\lambda \vdash n$, temos*
a) $R(gD) = gR(D)g^{-1}$
b) $C(gD) = gC(D)g^{-1}$
c) $e(gD) = ge(D)g^{-1}$.

Demonstração. Vamos provar *a*), sendo que *b*) segue pelo mesmo argumento e *c*) segue usando (27). Seja $p \in R(D)$, então se α é o elemento na posição (i,l) de D, segue que $p(\alpha)$ está na posição (i,k) e portanto, pelo lema acima, gpg^{-1} move um elemento da linha (i,l) de gD para a posição (i,k) de $gpg^{-1}(gD)$. Assim

$$p \in R(D) \Rightarrow gpg^{-1} \in R(gD), \quad (\circledast)$$

e por um argumento semelhante, segue que

$$gpg^{-1} \in R(gD) \Rightarrow p \in R(D) \qquad (\circledast\circledast).$$

Dessa forma, se $q \in R(gD)$, de $(\circledast\circledast)$, segue que $g(g^{-1}qg)g^{-1} \in R(gD)$, logo $g^{-1}qg \in R(D)$ e $q \in gR(D)g^{-1}$. A recíproca é imediata por $(\circledast)$. □

Observação 8.31. *Seja $\lambda \vdash n$, D e D' diagramas de Young associados a λ. Então $(KS_n)e(D)$ e $\cong (KS_n)e(D')$ são isomorfos como S_n-módulos.*

Seja $\tau \in S_n$ tal que $\tau D = D'$, então pelo 8.30-c), segue que

$$(KS_n)e(D') = (KS_n)e(\tau D) = (KS_n)(\tau e(D)\tau^{-1}) = (KS_n)e(D)\tau^{-1}$$

pois $(KS_n)\tau = KS_n$. Defina $\psi\colon (KS_n)e(D) \to (KS_n)e(D')$, $\quad x \mapsto xg^{-1}$. Então ψ é um homomorfismo de S_n-módulos. Notemos que $xg^{-1} = x'g^{-1}$ se e somente se $x = x'$.

Logo ψ é injetora. Segue do fato de que $(KS_n)e(D') = (KS_n)e(D)g^{-1}$ que ψ é sobrejetora, e portanto ψ é um isomorfismo.

Para o próximo lema vale fazermos as seguintes notações
- Diz-se que x, $y \in D$ são **colineares** se eles estão na mesma linha.
- Diz-se que x, $y \in D$ são **co-colunares** se eles estão na mesma coluna.

Lema 8.32. *Seja D um diagrama de Young associado a uma partição $\lambda \vdash n$. Então, se $x \in S_n$, existem $p \in R(D)$ e $q \in C(D)$ tais que $x = pq$ se, e somente se, nenhum dos elementos colineares em D são co-colunares em xD.*

Demonstração. Seja $x = pq, p \in R(D)$ e $q \in C(D)$ e s, r dois elementos colineares em D. Segue que estes são colineares em pD também. Como $xD = pqD = (pqp^{-1})pD$, e pqp^{-1} é uma permutação de colunas de pD, segue que r e s devem estar em colunas diferentes de $x = (pqp^{-1})pD$, donde segue que r e s não são co-colunares.

Reciprocamente, vamos assumir que não existem elementos colineares em D que sejam co-colunares em xD, e portanto se α, β são co-colunares em xD, estes podem serem colineares em D. Em particular, se $l_1 = [a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1}]$ é a primeira coluna de gD, segue que os elementos de l_1 devem necessariamente estar em linhas diferentes e assim, existe $p_1 \in R(D)$ tal que para todo $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $p_1(a_{j1})$ deve pertencer à primeira coluna de p_1D. Repetindo esse processo, concluímos que existe $p \in R(D)$ tal que as colunas de xD e de pD consistem dos mesmos elementos os quais eventualmente estarão em diferentes posições. Logo, existe $q' \in C(pD)$ tal que $xD = q'(pD)$.

O corolário 8.30 implica que $q' = pqp^{-1}$ para algum $q \in C(D)$. Então $xD = q'(pD) = pqp^{-1}(pD) = pqD$ e com isso, concluí-se que $x = pq$. □

Notação: Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ e $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k)$ são ambas partições de n. Se no primeiro índice i no qual as tabelas diferem tivermos $\lambda_i > \lambda'_i$ então iremos escrever

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_h\} > \{\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k\}.$$

Lema 8.33. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ e $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k)$ partições de n tais que $\{\lambda_1, \ldots \lambda_h\} > \{\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k\}$, e D, D' diagramas de Young associados respectivamente a λ e λ'. Então $e(D')e(D) = 0$.*

Demonstração. Vamos mostrar que existem dois elementos que são colineares em D e co-colunares em D'. Suponha por absurdo que não há dois elementos que são colineares em D e co-colunares em D', e assim em particular, as λ_1 entradas de D devem ocorrer em colunas diferentes de D', e portanto $\lambda_1 \leq \lambda'_1$, donde segue que $\lambda_1 = \lambda'_1$. Além disso, existe $\tau \in S_n$ tal que $D'' = \tau D'$ tem a primeira linha igual a de D, e assim, pelo mesmo argumento acima, $\lambda_2 = \lambda'_2$. Repetindo esse processo, concluímos que $\lambda_1 = \lambda'_1$, $\lambda_2 = \lambda'_2$, $\ldots$, $\lambda_h = \lambda'_k$, o qual é um absurdo. Disto, segue que existem α e β elementos colineares em D que são co-colunares em D'. Agora, se $t = (\alpha, \beta)$ então $t \in R(D)$ e $t \in C(D')$ então segue que

$$e(D')e(D) = e(D')(1)e(D) = e(D')tte(D) = (-1)^t e(D')e(D) = -e(D')e(D)$$

e portanto $e(D')e(D) = 0$. □

Vejamos agora que se D é um diagrama de Young associado a uma partição λ de n e $p \in R(D)$, $q \in C(D)$ então dado $\gamma \in K$, tem-se que $p\gamma e(D)q = (-1)^q \gamma e(D)$. O resultado abaixo mostra-nos que a propriedade acima caracteriza $e(D)$, e sua demonstração pode ser encontrada em [19].

Lema 8.34. *Sejam D um diagrama de Young e $x \in KS_n$ satisfazendo $pxq = (-1)^q x$, para todo $p \in R(D)$ e $q \in C(D)$. Então, existe $\gamma \in K$ tal que $x = \gamma e(D)$.*

Proposição 8.35. *Existe $0 \neq \gamma \in K$ tal que $e(D)^2 = \gamma e(D)$.*

Demonstração. Se $p \in R(D)$ e $q \in C(D)$ então $pe(D)^2 q = pe(D)e(D)q = (-1)^q e(D)$ e portanto, pelo lema 8.34 existe $\gamma \in K$ tal que $e(D)^2 = \gamma e(D)$.

Falta mostrarmos que $\gamma \neq 0$. Considere o S_n-homomorfismo de módulos $T\colon KS_n \to KS_n$, $x \mapsto xe(D)$.

Seja $\mathcal{B} := \{\sigma_1 = (1), \sigma_2, \ldots, \sigma_{n!}\}$ uma base de KS_n sobre K. Se $e(D) = \sum_{j=1}^{n!} \alpha_j \sigma_j$, segue que $T(\sigma_1) = (1)e(D) = e(D)$, $T(\sigma_2) = \alpha_1 \sigma_2 + \sum_{j=2}^{n!} \alpha_j \sigma_2 \sigma_j$.

Isto é, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n!\}$ $T(\sigma_i) = \alpha_1 \sigma_i + \sum_{j \neq 1} \alpha_j \sigma_i \sigma_j$. Portanto o traço da matriz de T em relação a $\mathcal{B}$ é $n!$, pois $\alpha_1 = 1$, já que (1) ocorre com coeficiente (1) em $e(D)$. Agora, seja $d := \dim_K (KS_n)e(D)$, então, $d \geq 1$ e existe $\mathcal{A} := \{v_1, \ldots, v_d\}$ base de $(KS_n)e(D)$ sobre K. Considere um completamento de $\mathcal{A}$ até uma base $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_{n!}\}$ de KS_n. Notemos que se $x \in (KS_n)e(D)$, então $x = ae(D)$, e assim, $xe(D) = ae(D)e(D) = \gamma ae(D)$. Segue $T(v_j) = \gamma v_j$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

Dado que $T(v_i) \in (KS_n)e(D)$, para cada $i \in \{d+1, \ldots, n!\}$, a matriz de T em relação à base $\mathcal{C}$ é

$$\begin{pmatrix} \gamma I_d & L \\ 0_{(n!-d)\times d} & 0_{(n!-d)\times(n!-d)} \end{pmatrix}$$

e L é uma matriz $d \times (n! - d)$. Em particular, o traço de tal matriz é $d\gamma$. Como o traço não depende da base de KS_n escolhida, segue que $\gamma d = n!$, donde tem-se que $\gamma \neq 0$. □

Antes de prosseguirmos, vamos relembrar um resultado clássico da teoria das álgebras.

Proposição 8.36. *Um ideal à esquerda $(KS_n)e$ gerado por um elemento idempotente e, é minimal se, e somente se, $e(KS_n)e$ é um anel de divisão.*

Proposição 8.37. *Seja D um diagrama de Young de alguma partição de n. Então, o ideal à esquerda $(KS_n)e(D)$ é minimal em KS_n.*

Demonstração. Seja γ como na proposição 8.35 e $u = \gamma^{-1}e(D) \neq 0$. Então, segue que

$$u^2 = \gamma^{-1}e(D)\gamma^{-1}e(D) = \gamma^{-1}\gamma^{-1}e(D)^2 = \gamma^{-1}e(D) = u$$

e portanto u é idempotente. Além disso $(KS_n)u = (KS_n)e(D)$ e $u(KS_n)u = e(D)(KS_n)e(D)$.

Para mostrarmos que $(KS_n)u$ é um ideal minimal à esquerda em KS_n é suficiente mostrar que $u(KS_n)u$ é um anel de divisão, isto é $U(u(KS_n)u) = u(KS_n)u \setminus \{0\}$. Seja $x \in u(KS_n)u$, então existe $y \in KS_n$ tal que $x = e(D)ye(D)$, logo $pxq = pe(D)ye(D)q = e(D)ye(D)(-1)^q = (-1)^q x$, para quaisquer $p \in R(D)$ e $q \in C(D)$. Segue do lema 8.34 que existe $\varepsilon(x) \in K$ tal que $x = \varepsilon(x)e(D)$. Consequentemente $u(KS_n)u = Ku \cong K$, donde segue que $u(KS_n)u$ é um corpo e em particular um anel de divisão. Como $(KS_n)u$ é minimal, segue que $(KS_n)e(D)$ é minimal em KS_n, pois ambos são iguais, como visto acima. □

Proposição 8.38. *Sejam D e D' diagramas de Young associados a diferentes tabelas. Então, $(KS_n)e(D)$ e $(KS_n)e(D')$ não são isomorfos.*

Demonstração. Sejam γ e γ' tais como na proposição 8.35. Então, se $u = \gamma^{-1}e(D)$ e $u' = (\gamma')^{-1}e(D')$, é suficiente mostrar que $(KS_n)u$ e $(KS_n)u'$ não são isomorfos. Suponha por absurdo que $(KS_n)u$ e $(KS_n)u'$ sejam isomorfos. Dado que $(KS_n)u$ e $(KS_n)u'$ são ideais minimais à esquerda, existe $a \in KS_n$ tal que $(KS_n)u = ((KS_n)u')a$. Logo existe $b \in KS_n$ tal que $u = bu'a$, donde

$$u = u^2 = bu'au. \tag{28}$$

Por outro lado, se $g \in S_n$, segue que $u'gu = u'(gug^{-1})g = (u'gug^{-1})g$. Segue do lema 8.33 e do corolário 8.30 que $u'gug^{-1} = 0$. Assim, da equação 28 tem-se que $u = 0$, o que é um absurdo. □

Podemos resumir 8.31,8.37 e 8.38 no teorema abaixo.

Teorema 8.39. *(Representações irredutíveis de S_n) A cada partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ tem-se uma tabela de Young associada, e além disso, cada tabela dá origem a um diagrama de Young. Para cada diagrama de Young D, definindo*

$$e(D) = \sum_{p \in R(D), q \in C(D)} (-1)^q pq$$

temos que:

a) Cada ideal à esquerda $(KS_n)e(D)$ é minimal em KS_n, e portanto $(KS_n)e(D)$ é um S_n-módulo irredutível. Além do mais, existe $u \in KS_n$ idempotente tal que $(KS_n)u = (KS_n)e(D)$.

b) Se D e D' são dois diagramas de Young associados à mesma tabela de Young, então $(KS_n)e(D) \cong (KS_n)e(D')$.

c) Se D e D' são associados a tabelas de Young diferentes, então $(KS_n)e(D)$ e $(KS_n)e(D')$ não são isomorfos. Portanto, o conjunto abaixo fornece-nos um sistema completo de S_n-módulos irredutíveis

$$\{(KS_n)e(D) \mid D \in \Gamma\}$$

onde Γ é o conjunto de todos os diagramas de Young provenientes de tabelas de Young distintas (apenas um diagrama relacionado a cada tabela).

Notação: Dada uma partição $\lambda \vdash n$, denota-se respectivamente por $M(\lambda)$ e χ_λ o S_n-módulo irredutível associado a λ e seu carácter.

• Um diagrama de Young D é **semistandard** se suas entradas não decrescem da esquerda para a direita nas linhas e crescem de cima para baixo nas colunas. Por exemplo a tabela abaixo é semistandard

1	2	2
2	5	
4		

enquanto que

3	2	2
1	5	
4		

não é semistandard.

• Diz-se que um diagrama de Young D é **standard** se este é semistandard e além disso, cada número natural $1, 2, \ldots, n$ aparece apenas uma vez em D. Por exemplo

1	3	4
2	5	
6		

é um diagrama standard.

• Seja T_λ uma tabela de Young associada a partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, denota-se por λ'_j o comprimento da j-ésima coluna de T_λ. Além disso, se $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_l)$, então λ' e sua tabela de Young $T_{\lambda'}$ são chamados de conjugados de λ e T_λ respectivamente.

• Dada uma tabela de Young T_λ, o (i, j)-**gancho** de T_λ, consiste da j-ésima caixa da i-ésima linha de T_λ juntamente com as $\lambda_i - j$ caixas a direita e as $\lambda'_j - i$ caixas abaixo. Além do mais, o comprimento do (i, j)-gancho de T_λ, denotado por h_{ij}, é exatamente $h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$. Por exemplo, se

$$T_\lambda = \ydiagram{5,4,2,1}$$

então o $(1, 2)$-gancho de T_λ é

$$\begin{ytableau} {} & X & X & X & X \\ {} & X & {} & {} \\ {} & X \\ {} \end{ytableau}.$$

O teorema abaixo mostra como calcular a dimensão dos S_n-módulos irredutíveis $M(\lambda)$.

Teorema 8.40. *Seja λ uma partição de n. i) A dimensão $d_\lambda := \dim_K M(\lambda)$ é igual ao número de diagramas standards associados a partição λ.*

ii) (Fórmula do Gancho) Seja $B(\lambda)$ o conjunto das caixas (i, j) da tabela de Young T_λ. Então

$$d_\lambda = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{(i,j) \in B(\lambda)} h_{ij}}.$$

A demonstração do item b) do teorema acima é puramente combinatória. Vamos dar uma ideia da prova considerando uma partição λ do número 6, dada por $\lambda = (3, 2, 1)$. Dado qualquer preenchimento de T_λ, digamos

$$D_\lambda = \begin{ytableau} a & b & c \\ d & e \\ f \end{ytableau}$$

então a probabilidade ϱ de D_λ ser um diagrama standard é dada pelo produto das probabilidades do número preenchido em cada caixa de D_λ ser o menor em seu gancho, isto é

$$\varrho = P(a < b, a < d, a < c, a < f).P(b < c, b < e)P(d < e, d < f)$$

e assim, segue que

$$P(a < b, a < d, a < c, a < f) = \frac{1}{5}, \quad P(b < c, b < e) = \frac{1}{3}, \quad P(d < e, d < f) = \frac{1}{3}.$$

Portanto $\varrho = \frac{1}{5}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{45}$. Agora, dado que

$$\varrho = \frac{\# \quad diag.total}{\# \quad diag.standard} = \frac{6!}{\# \quad diag.standard}$$

tem-se que $\# \quad diag.standard = \frac{6!}{45} = 16$.

Os dois lemas abaixo irão nos auxiliar nas próximas seções, suas demonstrações são encontradas na página 52 de [19].

Lema 8.41. *Seja M um S_n-módulo à esquerda irredutível com carácter $\chi_M = \chi_\lambda$, $\lambda \vdash n$ [3] Então, existe $0 \neq g \in M$ e um diagrama de Young D_λ associado a λ tal que $M = (KS_n)e(D_\lambda)g$.*

Se D'_λ é outro diagrama de Young associado a λ, existe $0 \neq g' \in M$ tal que $M = (KS_n)e(D'_\lambda)g'$.

[3] Seja R uma álgebra de dimensão finita sobre K e M um R-módulo à esquerda também de dimensão finita sobre um corpo K, define-se o carácter $\chi(M) = \chi_M : R \to K$ por $\chi_M(a) = tr(L_a)$, onde L_a é o endomorfismo em M cuja imagem de cada $m \in M$ é $am \in M$.

Lema 8.42. *Seja D_λ um diagrama de Young associado a uma partição $\lambda \vdash n$. Seja M um S_n-módulo tal que $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$, onde para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, M_j é um S_n-submódulo irredutível de M tal que $\chi_{M_j} = \chi_\lambda$. Então m é a cardinalidade do maior conjunto linearmente independente $\{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq M$ tal que $\sigma g_i = g_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $\sigma \in R(D_\lambda)$.*

Finalizamos esta seção enunciando o teorema das "ramificações"(em inglês, "Branching's Theorem"), o qual será utilizado no resultado que precede o teorema de Giambruno e Zaicev sobre a existência do PI-expoente.

Seja G um grupo finito e H subgrupo de G. Qualquer G-módulo V pode ser considerado um H-módulo via restrição da ação à H, o qual é denotado por $V \downarrow H$. Reciprocamente, se V é um H-módulo, então $KG \otimes_{KH} V$ tem uma estrutura natural de um G-módulo (via a ação $g \cdot (\sum_\sigma \alpha_\sigma)\sigma \otimes v := (\sum_\sigma \alpha_\sigma \sigma \otimes v))$. Este último G-módulo é denotado por $V \uparrow G$.

Observação 8.43. *O grupo S_n mergulha em S_{n+1} via o monomorfismo $\kappa\colon S_n \to S_{n+1}$ definido por* $\kappa \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n & n+1 \end{pmatrix}$.

Teorema 8.44. *(Teorema das ramificações) Considere o grupo simétrico S_n mergulhado em S_{n+1} via a função definida na observação 8.43.*

a) Se $\lambda \vdash n$, então

$$M_\lambda \uparrow S_{n+1} \cong \sum_{\mu \in \lambda^+} M_\mu$$

onde λ^+ é o conjunto de todas as partições de $n+1$ nos quais os diagramas de Young são obtidos de T_λ adicionando-se uma caixa.

b) Se $\mu \vdash n+1$, então

$$M_\mu \downarrow S_n \cong \sum_{\lambda \in \mu^-} M_\lambda$$

onde μ^- é o conjunto de todas as partições de n nos quais os diagramas de Young são obtidos de T_μ excluindo-se uma caixa.

9 Aplicações da teoria de representações do grupo simétrico S_n às PI-álgebras

Assim como na seção anterior, o corpo K em questão será assumido de característica 0. Nosso objetivo será examinar a ação de S_n em P_n e transferir alguns problemas de PI-álgebras na linguagem das representações do grupo simétrico S_n.

• P_n denota o conjunto de todos os polinômios multilineares de grau n em $K\langle X\rangle$.

Dado $\sigma \in S_n$, defina a seguinte ação de S_n em P_n

$$\sigma\Big(\sum \alpha_i x_{i_1}\cdots x_{i_n}\Big) := \sum \alpha_i x_{\sigma(i_1)}\cdots x_{\sigma(i_n)}, \quad \textit{onde} \quad x_{i_1}\cdots x_{i_n} \in P_n \quad \textit{e} \quad \alpha_i \in K. \tag{29}$$

Não é difícil ver que (29) define em P_n uma estrutura de S_n-módulo à esquerda. Vamos mostrar no próximo resultado que na realidade, como S_n-módulos à esquerda, P_n e KS_n são isomorfos.

Proposição 9.1. *Como S_n-módulos à esquerda $P_n \cong KS_n$.*

Demonstração. Sabe-se que $\mathcal{F} := \{x_{\mu(1)}\cdots x_{\mu(n)} \mid \mu \in S_n\}$ é uma base de P_n. A função $\iota\colon KS_n \to P_n$ é definido estendendo-se por linearidade a regra $\mu \in KS_n \mapsto x_{\mu(1)}\cdots x_{\mu(n)} \in P_n$.

Ademais, dado que

$$\iota\left(\mu\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i\sigma_i\Big)\right) = \iota\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\mu\sigma_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{\mu\sigma_i(1)}\cdots x_{\mu\sigma_i(n)} = \mu\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i x_{\sigma_i(1)}\cdots x_{\sigma_i(n)}\Big)$$

concluímos que ι é um homomorfismo de S_n-módulos também.

Considere $u = \sum_{j=1}^{k} a_j\sigma_j \in KS_n$, com $\phi(u) = 0$, segue que $0 = \sum_{j=1}^{k} a_j x_{\sigma_j(1)}\cdots x_{\sigma_j(n)}$. Logo $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. A sobrejetividade de ϕ é imediata da definição. □

• Se U é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então $U \cap P_n$ é um submódulo de P_n. É suficiente mostrarmos que se $\sigma \in S_n$ e $f(x_1,\dots,x_m) \in U\cap P_n$, então $\sigma f \in U\cap P_n$. Para vermos isso, note que como U é invariante por qualquer endomorfismo de $K\langle X\rangle$. Segue que qualquer rearranjo das variáveis x_1, …, x_m em f, permanece em U, em particular $\sigma(f(x_1,\dots,x_m)) = f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)}) \in U\cap P_n$.

• Considere a álgebra de Lie livre $L(X)$, como uma subalgebra de Lie de $K\langle X\rangle$, a qual foi estabelecida no teorema de Witt 3.25. Denota-se por $PL_n := P_n \cap L(X)$ o conjunto dos polinômios multilineares de Lie de grau n.

Proposição 9.2. *Utilizando a notação estabelecida logo após o teorema 8.39, segue que como S_n-módulos à esquerda*

a) $PL_1 \cong M(1)$

b) $PL_2 \cong M(1,1)$.

c) $PL_3 \cong M(2,1)$.

Demonstração. *a)* Imediato pois PL_1 é gerado por x_1 e S_1 tem somente a representação trivial.

b) Dado que PL_2 é gerado por $[x_2,x_1]$ concluí-se que $\dim PL_2 = 1$ e assim, PL_2 é um S_2-módulo irredutível. Seja agora χ o carácter irredutível de PL_2. De $(1,2)[x_1,x_2] = -[x_1,x_2]$ concluí-se que $\chi = sign$, onde $sign$ é o carácter sinal em S_2, e assim $PL_2 \cong M(1,1)$.

c) Lembremos inicialmente da tabela de caracteres de S_3

S_3	(1)	$(1,2)$	$(1,2,3)$
(3)	1	1	1
$(2,1)$	2	0	-1
$(1,1,1)$	1	-1	1

Vamos mostrar que PL_3 é um S_3-módulo irredutível. Seja M um submódulo irredutível de PL_3 e $0 \neq f \in M$. Como PL_3 é gerado por $[x_2,x_1,x_3]$ e $[x_3,x_1,x_2]$, existem $a,b \in K$ tais que $f(x_1,x_2,x_3) = a[x_2,x_1,x_3] + b[x_3,x_1,x_2]$. Pela identidade de Jacobi

$$[x_1,x_2,x_3] = -[x_2,x_1,x_3] + [x_3,x_1,x_2]. \tag{30}$$

Por outro lado

$$(1,2)[x_2,x_1,x_3] = [x_1,x_2,x_3] = [[x_1,x_2],x_3] = -[[x_2,x_1],x_3] = -[x_2,x_1,x_3].$$

Também, utilizando 30 segue que

$$(1,2)f(x_1,x_2,x_3) = -(a+b)[x_2,x_1,x_3] + b[x_3,x_1,x_2].$$

Sabendo que $f,(1,2) \in M$, concluí-se das contas acima que $(2a+b)[x_2,x_1,x_3] \in M$. E assim, se $2a+b \neq 0$ e $b \neq 0$, $[x_2,x_1,x_3],[x_3,x_1,x_2] \in M$. Logo, $M = PL_3$. Se $b = 0$, então $f(x_1,x_2,x_3) = a[x_2,x_1,x_3]$ e $(2,3)f(x_1,x_2,x_3) = a[x_3,x_1,x_2]$, donde segue que $M = PL_3$.

Finalmente, se $2a+b = 0$, sem perda de generalidade pode-se supor que $a = 1$ e $b = -2$, e disto, tem-se que $f(x_1,x_2,x_3) = [x_2,x_1,x_3] - 2[x_3,x_1,x_2]$ e $(2,3)f(x_1,x_2,x_3) = -2[x_2,x_1,x_3] + [x_2,x_1,x_3] \in M$. Logo, segue que se l_1 e $l_2 \in K$ são tais que $l_1 f + l_2(2,3)f = 0$, então $l_1 = l_2 = 0$. Como $M \subseteq PL_3$ e $\dim PL_3 = 2$, tem-se que $M = PL_3$. Mostramos então que PL_3 é um S_3-módulo irredutível de dimensão 2. Por outro lado, a menos de isomorfismo $M(2,1)$ é o único S_3-módulo irredutível de dimensão 2, logo temos $PL_3 \cong M(2,1)$. □

Observação 9.3. *Na demonstração da proposição 9.2 analizamos no item b) o carácter do S_2-módulo PL_2 para se concluir que $PL_2 \cong M(1,1)$. Poderíamos ter utilizado este mesmo método no item c). Seja χ o carácter de PL_3 associado à representação natural $\mu\colon S_3 \to GL(PL_3)$. Denotando por $v_1 := [x_2,x_1,x_3]$ e $v_2 := [x_3,x_1,x_2]$, os elementos da base de PL_3, segue que $(2,3)v_1 = v_2$ e $(2,3)v_2 = v_1$. Logo $\mu((2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Logo $\chi((2,3)) = tr(\mu((2,3))) = 0$ e $\chi((1,2)) = \chi((2,3)) = \chi((1,3))$.*

Por outro lado, segue de 30 que $(1,2,3)v_1 = -v_1 + v_2$ e $(1,2,3)v_2 = -v_1$. Então $\mu((1,2,3)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Assim $\chi((1,2,3)) = \chi((1,3,2)) = -1$.

Vemos que $\chi = \chi_{(2,1)}$ e portanto $PL_3 \cong M(2,1)$.

Proposição 9.4. *Como isomorfismo de S_4-módulos temos $PL_4 \cong M(3,1) \oplus M(2,1,1)$.*

Demonstração. Usamos o método da observação 9.3 e o fato de que o carácter de qualquer representação de um grupo G é uma combinação linear dos carácteres irredutíveis de G. Lembremos que a tabela de caracteres de S_4 é

S_4	(1)	$(1,2)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2)(3,4)$
(4)	1	1	1	1	1
$(3,1)$	3	1	0	-1	-1
$(2,2)$	2	0	-1	0	2
$(2,1,1)$	3	-1	0	1	-1
$(1,1,1,1)$	1	-1	1	-1	1

.

Se χ é o carácter de PL_4, então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\chi = \alpha_1\chi_{(4)} + \alpha_2\chi_{(3,1)} + \alpha_3\chi_{(2,2)} + \alpha_4\chi_{(2,1,1)} + \alpha_5\chi_{(1,1,1,1)}$$

e avaliando nos representantes das classes de conjugação chegamos ao sistema linear

$$\begin{pmatrix} \chi((1)) \\ \chi((1,2)) \\ \chi((1,2,3)) \\ \chi((1,2,3,4)) \\ \chi((1,2)(3,4)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Para resolvermos o sistema precisamos encontrar o valor de χ nos elementos do lado esquerdo de (31). Os vetores $v_1 = [x_2,x_1,x_3,x_4]$, $v_2 = [x_3,x_1,x_2,x_4]$, $v_3 = [x_4,x_1,x_2,x_3]$, $v_4 = [[x_2,x_1],[x_4,x_3]]$, $v_5 = [[x_3,x_1],[x_4,x_2]]$, $v_6 = [[x_4,x_1],[x_3,x_2]]$ formam uma base de PL_4 e $\dim PL_4 = 6$. Segue que $\chi((1)) = 6$. Notemos que

$$[x,y,z,w] = [[x,y,z],w] = [[[x,y],z],w] = [[x,y],z,w]. \tag{32}$$

E assim, temos as análises nas classes de conjugação:

1º) classe $((1,2))$:

$(3,4)v_1 = [x_2,x_1,x_4,x_3] \overset{32}{=} [[x_2,x_1],x_4,x_3] \overset{30}{=} v_4 + [[x_2,x_1],x_3,x_4] \overset{32}{=} v_4 + v_1$.

Ademais

$$(3,4)v_2 = [x_4,x_1,x_2,x_3] = v_3$$

$$(3,4)v_3 = [x_3,x_1,x_2,x_4] = v_2$$

$$(3,4)v_4 = [[x_2,x_1],[x_3,x_4]] = -v_4$$
$$(3,4)v_5 = [[x_4,x_1],[x_3,x_2]] = v_6$$
$$(3,4)v_6 = [[x_3,x_1],[x_4,x_2]] = v_5.$$

2º) classe $((1,2,3))$**:**

$$(2,4,3)v_1 = [x_4,x_1,x_2,x_3] = v_3$$
$$(2,4,3)v_2 = [x_2,x_1,x_4,x_3] = [x_2,x_1,x_4,x_3] = v_4 + v_1$$
$$(2,4,3)v_3 = [x_3,x_1,x_4,x_2] = [[x_3,x_1],x_4,x_2] = -[[x_4,x_2],[x_3,x_1]] + [[x_3,x_1],x_2,x_4] = v_5 + v_2$$

$$(2,4,3)v_4 = [[x_4,x_1],[x_3,x_2]] = v_6$$
$$(2,4,3)v_5 = [[x_2,x_1],[x_3,x_4]] = v_4$$
$$(2,4,3)v_6 = [[x_3,x_1],[x_2,x_4]] = -[[x_3,x_1],[x_4,x_2]] = -v_5.$$

3º) classe $((1,2,3,4))$**:**

$$(1,2,4,3)v_1 = [x_4,x_2,x_1,x_3] \overset{30}{=} -[x_2,x_1,x_4,x_3] + [x_4,x_1,x_2,x_3] = -v_1 - v_4 + v_3$$

$$(1,2,4,3)v_2 = [x_1,x_2,x_4,x_3] = -[x_2,x_1,x_4,x_3] = -v_1 - v_4$$
$$(1,2,4,3)v_3 = [x_3,x_2,x_4,x_1] = [[x_3,x_2],x_1,x_4] \overset{30}{=} -v_6 + [x_3,x_2,x_1,x_4] \overset{30}{=} -v_6 - v_1 - v_2$$
$$(1,2,4,3)v_4 = [[x_4,x_2],[x_3,x_1]] = -v_5$$
$$(1,2,4,3)v_5 = [[x_1,x_2],[x_3,x_4]] = v_4$$
$$(1,2,4,3)v_6 = [[x_3,x_2],[x_1,x_4]] = v_6.$$

4º) classe $((1,2)(3,4))$**:**

$$(1,2)(3,4)v_1 = [x_1,x_2,x_4,x_3] = -v_4 - v_1$$
$$(1,2)(3,4)v_2 = [x_4,x_2,x_1,x_3] = -v_1 - v_4 + v_3$$
$$(1,2)(3,4)v_3 = [x_3,x_2,x_1,x_4] = -v_1 - v_2$$
$$(1,2)(3,4)v_4 = [[x_1,x_2],[x_3,x_4]] = v_4$$
$$(1,2)(3,4)v_5 = [[x_4,x_2],[x_3,x_1]] = -v_5$$
$$(1,2)(3,4)v_6 = [[x_3,x_2],[x_4,x_1]] = -v_6.$$

Com isso, segue que

$$\chi((1,2)) = 1+0+0-1+0+0 = 0$$
$$\chi((1,2,3)) = 0+0+0+0+0+0 = 0$$
$$\chi((1,2,3,4)) = -1+0+0+0+0+1 = 0$$
$$\chi((1,2)(3,4)) = -1+0+0+1-1-1 = -2$$

e portanto a solução de (31) é

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Segue que $\chi = \chi_{3,1} + \chi_{2,1,1}$. Concluímos que $PL_4 \cong M(3,1) \oplus M(2,1,1)$. □

Vamos agora descrever a estrutura do espaço das identidades polinomiais na linguagem das representações de S_n. A demonstração de tais resultados podem ser encontradas nas páginas 56 e 57 de [19].

Teorema 9.5. *Sejam* $f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_r(x_1,\ldots,x_n),g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_s(x_1,\ldots,x_n)$ *polinômios em* P_n. *Então* $\langle f_1,\ldots,f_r\rangle^T = \langle g_1,\ldots,g_s\rangle^T$ *se, e somente se* $\bigoplus_{i=1}^r (KS_n)f_i = \bigoplus_{i=1}^s (KS_n)g_i$.

Teorema 9.6. *Dado qualquer polinômio multilinear $f \in P_n$, existem polinômios $g_1, \ldots, g_r \in P_n$ e diagramas de Young $D_1, \ldots, D_r$ associados respectivamente à partições $\lambda(1), \ldots, \lambda(r)$ de n tais que $(KS_n)f = \bigoplus_{j=1}^{r}(KS_n)e(D_j)g_j$.*

Recordamos alguns fatos sobre as representações irredutíveis do grupo dos operadores lineares invertíveis (General linear group). Seja U um espaço vetorial, $GL(U)$ é o grupo dos operadores lineares invertíveis $g\colon U \to U$. Se $d = \dim U$, escrevemos $GL_d(K) := GL(U)$.

• Quando $\dim U = m < \infty$, $GL_m(K)$ é isomorfo ao grupos das matrizes invertíveis $m \times m$ com entradas em K.

Definição 9.7. *Sejam $GL_s(K) = GL(W)$ e $\phi\colon GL_m(K) \to GL_s(K)$ uma representação de $GL_s(K)$. Dizemos que ϕ é* ***polinomial*** *(e W é um GL_m-módulo polinomial), se as entradas de $\phi(g)$, onde $g \in GL_d(K)$, são funções polinomiais das entradas de g. Em outras palavras, se $\phi(g) = (\phi_{pq}(g))_{pq}$ e $g = (a_{ij})_{ij}$ então $\phi_{pq}(g)$ é um polinômio nas entradas a_{ij} de g.*

Daqui em diante, fixamos um espaço vetorial V_m sobre K com base $\mathcal{A} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e escrevemos $K\langle V_m\rangle = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$.

• Mantendo as notações da definição acima, ϕ é representação **polinomial homogênea** de grau d se para todos $1 \leq p, q \leq n$, e $g \in GL_m(K)$, $\phi_{pq}(g)$ é homogêneo de grau d.

• Podemos estender a ação natural de $GL_m(K)$ nos monômios de $K\langle V_m\rangle$ (e como consequência, em todo elemento de $K\langle V_m\rangle$) da seguinte forma $g(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) = g(x_{i_1})\cdots g(x_{i_n})$, $g \in GL_m(K)$ e $x_{i_1}\cdots x_{i_n} \in K\langle V_m\rangle$.

Esta ação define em $K\langle V_m\rangle$ uma estrutura de $GL_m(K)$-módulo.

Proposição 9.8. *Considerando o $GL_m(K)$-módulo $K\langle V_m\rangle$ e denotando por $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ a componente homogênea de grau n em $K\langle V_m\rangle$, para $n \in \mathbb{N}_0$ temos:*

i) Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ é um $GL_m(K)$-submódulo de $K\langle V_m\rangle$.

ii) Para cada T-ideal U de $K\langle X\rangle$, os espaços vetoriais $U \cap K\langle V_m\rangle$ e $U \cap (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ são submódulos de $K\langle V_m\rangle$.

iii) Cada submódulo W de $K\langle V_m\rangle$ é uma soma direta de suas componentes homogêneas $W \cap (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$.

Demonstração. *i)* Basta mostrar que a ação de $GL_m(K)$ em $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ é $GL_m(K)$-invariante. Seja $x_{i_1}\cdots x_{i_n}$ um monômio de grau n. Se $g \in GL_m(K)$, como g é invertível, $\{g(x_1), \ldots, g(x_m)\}$ é uma base de V_m, e assim $g(x_{i_1})\cdots g(x_{i_n})$ é um monômio de grau n.

ii) Assim, como em *i)*, mostraremos que $U \cap K\langle V_m\rangle$ e $U \cap (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ são $GL_m(K)$-invariantes. Seja $f \in U \cap K\langle V_m\rangle$; como U é completamente invariante, $g(f(x_1, \ldots, x_m)) = f(g(x_1), \ldots, g(x_m)) \in U$ para $g \in GL_m(K)$. Logo $U \cap K\langle V_m\rangle$ é $GL_m(K)$-invariante. Utilizando o mesmo argumento feito para $U \cap K\langle V_m\rangle$, e item *i)*, segue que $U \cap (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ é $GL_m(K)$-invariante.

iii) Seja W um submódulo de $K\langle V_m\rangle$ e $f \in W$. Se $\kappa = \deg f$ temos $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_\kappa$, onde f_n é a componente homogênea de grau n de f. Sejam $0 \neq \alpha \in K$ e I_m a matriz identidade de $GL_m(K)$. Se $x_{i_1}\cdots x_{i_n}$ é um monômio de f_n, temos $(\alpha I_m)(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) = (\alpha x_{i_1})\cdots(\alpha x_{i_n}) = \alpha^n x_{i_1}\cdots x_{i_n}$.

Para cada $n \in \{0, 1, \ldots, \kappa\}$, temos $(\alpha I_m)f_n = \alpha^n f_n$.

Agora, sejam $\alpha_0, \ldots, \alpha_\kappa \in K \setminus 0$ dois a dois distintos. Dado que W é um $GL_m(K)$ módulo, temos que $(\alpha_j I_m)f = f_0 + \alpha_j f_1 + \alpha_j^2 f_2 + \cdots + \alpha_j^\kappa f_\kappa \in W$, para cada $j \in \{0, 1, \ldots, \kappa\}$.

A equação acima é $(f_0 + W) + \alpha_j(f_1 + W) + \alpha_j^2(f_2 + W) + \cdots + \alpha_j^\kappa(f_\kappa + W) = 0$, para cada $j \in \{0, 1, \ldots, \kappa\}$, módulo W.

A matriz $\mathbf{a}$ associada ao sistema acima é

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_0^\kappa \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_1^\kappa \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_\kappa & \alpha_\kappa^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_\kappa^\kappa \end{pmatrix}$$

e pelo lema 3.14 $\det \mathbf{a} = \prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$. Logo $f_j + W = 0$, para cada $j \in \{0, 1, \ldots, \kappa\}$. Em outras palavras $f_j \in W$, para cada $j \in \{0, 1, \ldots, \kappa\}$. Como $f \in W$ é arbitrário, concluímos que $W = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} W \cap (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$. □

Teorema 9.9. *i) Cada representação polinomial de $GL_m(K)$ é uma soma direta de sub-representações polinomiais homogêneas que são irredutíveis.*

ii) Cada $GL_m(K)$-módulo polinomial homogêneo irredutível de grau $n \geq 0$ é isomorfo a um submódulo de $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$.

• Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$, um diagrama de Young D tem conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, onde $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$, se D é preenchido com α_1 números 1, α_2 números 2 e assim por diante.

Teorema 9.10. *i) As representações não isomorfas homogêneas polinomiais irredutíveis de $GL_m(K)$ de grau $n \geq 0$ estão em correspondência biunívoca com as partições $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ de n. Denota-se por $W_m(\lambda)$ o $GL_m(K)$-módulo irredutível associado a λ.*

ii) Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \vdash n$. O $GL_m(K)$-módulo $W_m(\lambda)$ é isomorfo a um submódulo de $(K\langle V_m \rangle)^{(n)}$. O $GL_m(K)-$módulo $(K\langle V_m \rangle)^{(n)}$ tem uma decomposição $(K\langle V_m \rangle)^{(n)} \cong \sum_{\lambda \in \Omega} d_\lambda W_m(\lambda)$, onde Ω é o conjunto das partições $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ tais que $k \leq m$, e d_λ é a dimensão do S_n-módulo irredutível $M(\lambda)$.

iii) O espaço vetorial $W_m(\lambda)$ é multihomogêneo, visto como um subespaço de $(K\langle V_m \rangle)^{(n)}$. A dimensão de suas componentes homogêneas $W_m^{(\eta_1, \ldots, \eta_m)}$ é igual ao número de diagramas de Young semistandards associados a λ, de conteúdo $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$.

iv) Dados $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{Z}$, defina em $K[t_1, \ldots, t_m]$ o seguinte polinômio

$$D(\mu_1, \ldots, \mu) = \det \begin{pmatrix} t_1^{\mu_1} & t_2^{\mu_1} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_1} & t_m^{\mu_1} \\ t_1^{\mu_2} & t_2^{\mu_2} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_2} & t_m^{\mu_2} \\ . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \\ t_1^{\mu_{m-1}} & t_2^{\mu_{m-1}} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_{m-1}} & t_m^{\mu_{m-1}} \\ t_1^{\mu_m} & t_2^{\mu_m} & \ldots & t_{m-1}^{\mu_m} & t_m^{\mu_m} \end{pmatrix}.$$

A série de Hilbert $Hilb(W_m(\lambda), t_1, \ldots, t_m) = \sum \dim W_m^{(\eta_1, \ldots, \eta_m)} t_1^{\eta_1} \cdots t_m^{\eta_m}$ é um polinômio simétrico e

$$Hilb(W_m(\lambda), t_1, \ldots, t_m) = \frac{D(\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \ldots, \lambda_{m-1} + 1, \lambda_m)}{D(m-1, m-2, \ldots, 1, 0)}.$$

• A função $S_\lambda(t_1, \ldots, t_m) = Hilb(W_m(\lambda), t_1, \ldots, t_m)$ do teorema acima é chamada de **função de Schur** associada a λ.

Vamos encontrar a função de Schur associada às partições (n) e (1^n). Primeiro encontramos a função de Schur para a partição de 3, $\lambda = (2, 1)$.

Exemplo 9.11. *Utilizando a notação do teorema 9.9 seja $n = m = 3$. Precisamos ver quantos são os diagramas de Young semistandard de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, onde $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$, com $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$. As únicas possibilidades de triplas são $(1, 1, 1)$ ou $(2, 1, 0)$.*

Diagramas semistandards de conteúdo $(1, 1, 1)$: *As únicas possibilidades são*

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Diagramas semistandards de conteúdo $(2, 1, 0)$: *A única possibilidade de diagrama é*

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Segue que $\dim W_3^{(1,1,1)} = 2$ *e* $\dim W_3^{(2,1,0)} = 1$ *e como $S_{(2,1)}$ é simétrico, tem-se que*

$$S_{(2,1)}(t_1, t_2, t_3) = 2t_1t_2t_3 + t_1^2 + t_1t_2^2 + t_1^2t_3 + t_1t_3^2 + t_2^2t_3 + t_2t_3^2.$$

Exemplo 9.12. *Vejamos que se $\lambda = (n)$, $n > 0$, então a tabela de Young é composta apenas de uma linha com n caixas. Dessa forma, dado $m \in \mathbb{N}$ há exatamente*

$$\#\{(n_1, \ldots, n_m) \mid n_1 + \cdots + n_m = n, \quad n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m\}$$

possibilidades de m-uplas para os conteúdos. Além disso, fixado um tal conteúdo $(n_1, \ldots, n_m)$, há apenas uma possibilidade de disposição de seus elementos. Disto, segue que $\dim W_m^{(n_1, \ldots, n_m)} = 1$, *e assim*

$$S_{(n)}(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{n_1 + \cdots + n_m = n} t_1^{n_1} \cdots t_m^{n_m}.$$

Para $\lambda = (1^n)$, T_λ é composto de uma coluna com n caixas e cada linha é composta apenas de uma única caixa. E por definição de diagramas semistandards, dado $m < n$ não se pode preencher todas as *caixas de T_λ (pois isso implicaria que alguns elementos irão se repetir e em diagramas semistandards as colunas crescem de cima para baixo) o qual implica que $S_{(1^n)}(t_1, \ldots, t_m) = 0$. Por outro lado, dado $m \geq n$ temos exatamente*

$$\#\{(n_1, \ldots, n_m) : 1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_n \leq m\}$$

possibilidades de conteúdos e além disso, em cada um há apenas uma única disposição de elementos em T_λ, consequentemente

$$S_{(1^n)}(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m} t_{i_1} \cdots t_{i_n}$$

o qual é o polinômio simétrico $e_n(t_1, \ldots, t_m)$.

Uma das principais aplicações da teoria das representações de $GL_n(K)$ é mostrar que há uma equivalência nos resultados obtidos nas identidades multilineares e naqueles de identidades homogêneas em $GL_n(K)$. O teorema abaixo foi provado primeiramente por Berele em [3] e posteriormente, utilizando outros métodos, por Drensky em [8]. Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [10].

Teorema 9.13. *Seja $\mathscr{V}$ uma variedade de álgebras associativas e considere para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $P_n(\mathscr{V}) = P_n/P_n \cap T(\mathscr{V})$, com decomposição $P_n(\mathscr{V}) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda M(\lambda)$.*

Então $F_n(\mathscr{V}) \cong \bigoplus_{m \geq 0} \bigoplus_{\lambda \vdash m} m'_\lambda W_n(\lambda)$. Mais ainda, $m_\lambda = m'_\lambda$ para cada $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $m'_\lambda = 0$ sempre que $\lambda_{n+1} > 0$.

10 Envelope de Grassmann de uma superalgebra

Nesta seção iremos estudar algumas estruturas especiais que se podem adicionar em uma álgebra a fim de estudar suas identidades polinomiais. Iremos introduzir aqui conceitos clássicos como, graduação por grupos, G-ação, e o envelope de Grassmann. Embora há resultados extremamente importantes no que tange álgebras graduadas, nosso objetivo será classificar uma coleção particular de graduações em álgebras, as chamadas superalgebras, ou álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas sobre um corpo K de característica 0 e algebricamente fechado. Iremos dar um enfoque para uma construção que envolve produtos tensoriais de uma álgebra A e a álgebra de Grassmann,o chamado envelope de Grassmann de A. A razão para tal estudo é o teorema 10.31, o qual afirma que estudar as identidades polinomiais satisfeitas por uma variedade, é equivalente a estudar as identidades polinomiais de um envelope de Grassmann de uma superalgebra de dimensão finita. Este é um resultado devido a Kemer.

Neste trabalho consideramos álgebras associativas. Ressaltamos que a teoria de Kemer não se estende imediatamente para álgebras não associativas.

10.1 Graduação de álgebras por grupos

Iremos começar trabalhando com uma álgebra A sobre um corpo K e G um grupo qualquer.

Definição 10.1. *A álgebra A é G-graduada se para cada $g \in G$, existe um subespaço $A^{(g)} \subseteq A$ tal que*

1) $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$

2) Para quaisquer $g, h \in G$ tem-se $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$.

*Os espaços $A^{(g)}$, $g \in G$, são chamados de **componentes homogêneas** de A; um elemento $0 \neq a \in A$ é chamado de homogêneo de grau h, se $a \in A^{(h)}$.*

• Um ideal $I \trianglelefteq A$ é graduado se $I = \bigoplus_{g\in G}(I \cap A^{(g)})$. Analogamente se definem subespaços e subalgebras graduadas.

• Se $H \leq G$, então $B := \bigoplus_{h\in G} A^{(h)}$ é uma subalgebra graduada de A.

• Sejam $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ e $B = \bigoplus_{g\in G} B^{(g)}$ duas álgebras G-graduadas. Uma função $\Phi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras G-graduadas se Φ é um homomorfismo de álgebras e Φ preserva a graduação, isto é, $\Phi(A^{(g)}) \subseteq B^{(g)}$, para cada $g \in G$.

Exemplo 10.2. *(Graduação trivial) Seja A uma álgebra e G um grupo. Definindo $A^{(e)} := A$, $A^{(g)} := 0$, se $g \neq e$ onde e é o elemento neutro de G, temos uma G-graduação para A. Ela é chamada de **graduação trivial**.*

Exemplo 10.3. *1) Se $A = K\langle X\rangle$ definimos uma $\mathbb{Z}$-graduação para A assim: $A^{(n)} = 0$ se $n \geq 0$ e $A^{(n)} = span_K\{x_{i_1} \cdots x_{i_n} : x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in X\}$.*

2) A álgebra de grupo $A = KG$ pode ser naturalmente graduada por G definido-se, para cada $g \in G$, $A^{(g)} = span_K\{g\}$.

Exemplo 10.4. *Considere $A = M_n(K)$, onde K é um corpo contendo uma n-ésima raiz primitiva da unidade ε e $G := \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, onde $|a| = n$ e $|b| = n$. Vamos mostrar que podemos definir em A uma G-graduação. Para isso, considere as matrizes*

$$S = diag(\varepsilon^{n-1}, \varepsilon^{n-2}, \ldots, \varepsilon^{n-(n-1)}, 1), \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Cálculo direto mostra que

$$ST = \varepsilon TS, \quad S^n = T^n = I. \tag{33}$$

O conjunto $\mathcal{B} = \{S^iT^j : i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ é uma base de $M_n(K)$: como $|\mathcal{B}| = n^2$, basta verificar que seus elementos são linearmente independentes. Sejam $z_1, \ldots, z_n$ variáveis tais que

$$z_1S + z_2S^2 + \cdots + z_nS^n = 0. \tag{34}$$

Como S é diagonal, $S^t = diag(\varepsilon^{tn-t}, \varepsilon^{tn-2t}, \ldots, 1)$. Logo, o sistema (34) fica

$$\begin{cases} z_1\varepsilon^{n-1} + z_2(\varepsilon^{n-1})^2 + z_3(\varepsilon^{n-1})^3 + \cdots + z_n = 0 \\ z_1\varepsilon^{n-2} + z_2(\varepsilon^{n-2})^2 + z_3(\varepsilon^{n-2})^3 + \cdots + z_n = 0 \\ \cdots \\ z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n = 0 \end{cases}$$

A matriz do sistema é a matriz de Vandermonde cujo determinante é dado por (3.14). Como ε é uma n-ésima raiz primitiva da unidade, o determinante é $\neq 0$. Segue que temos solução única para (33), $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$. Assim $S, S^2, \ldots, S^n$ são linearmente independentes. Por outro lado, $\det T = (-1)^{n+1} \neq 0$. Se $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ não são todos nulos, $\alpha_1 ST^j + \alpha_2 S^2T^j + \cdots + \alpha_n S^nT^j \neq 0$. Disto, segue que $\mathcal{B}$ é linearmente independente e portanto uma base de $M_n(K)$.

Por fim, para cada $g = a^ib^j \in G$, denote por $M_n(K)^{(g)}$ o espaço

$$M_n(K)^{(g)} = span_K\{S^iT^j\}.$$

É imediato que

$$M_n(K) = \bigoplus_{g\in G} M_n^{(g)}.$$

Além disso, utilizando 33 segue que se $b = S^iT^j$ e $c = S^kT^l$ então

$$bc = (S^iT^j)(S^kT^l) = \varepsilon^{lk}(S^iT^j)(T^lS^k) = \varepsilon^{lk}S^iT^{j+l}S^k = \varepsilon^{lk}\varepsilon^{n-(jk+lk)}S^{i+k}T^{j+l} = \varepsilon^{n-jk}S^{i+k}T^{j+l}$$

e portanto, tem-se que

$$M_n(K)^gM_n(K)^h \subseteq M_n(K)^{gh}$$

e assim, $M_n(K)$ possui uma estrutura de G-graduação.

Seja G um grupo abeliano de ordem n e A uma álgebra sobre um corpo K, de característica 0 e contendo uma n-ésima raiz primitiva da unidade. Assumimos que $G \subseteq Aut(A)$; usamos a notação exponencial $a^g := g(a)$, $g \in G$, $a \in A$.

A ação de G em A descrita acima estende para uma ação de FG em A da seguinte forma

$$a^{\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_n g_n} = \alpha_1 a^{g_1} + \cdots + \alpha_n a^{g_n}, \quad g_1, \ldots, g_n \in G, \quad a \in A, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K.$$

Seja $\widehat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ o conjunto dos carácteres irredutíveis de G. Como vimos na observação após a proposição 8.24, o conjunto $\widehat{G}$ munido do produto $(\chi_i\chi_j)(g) = \chi_i(g)\chi_j(g)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $g \in G$, é um grupo. Pelo teorema 8.25, tem-se que $\widehat{G} \cong G$. Pela proposição 8.15 de [28], para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, os elementos $f_i = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_i(g_j^{-1})g_j$ são os idempotentes centrais minimais de KG. Isto é

$$KG = \bigoplus_{i=1}^{n} f_i(KG) \quad \text{e} \quad f_i(KG) \cong M_{n_i}(K), \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Sejam ψ, ϕ: $G \to K$ e defina $(\phi \mid \psi) := \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \phi(g)\psi(g^{-1})$. Pode-se mostrar que $(\phi \mid \psi)$ é um produto interno, veja [42].

Proposição 10.5. *Os caracteres irredutíveis de um grupo finito G, constituem uma base ortonormal das funções de classe de G para K com relação ao produto interno $(\cdot \mid \cdot)$.*

Vejamos agora que se $g \in G$ e $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$gf_i = g\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_i(g_j^{-1})g_jg\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi(g^{-1}g_j^{-1}g)g_jg = \chi(g)\left(\sum_{j=1}^{n} \chi(g^{-1}g_j^{-1})g_jg\right) = \chi(g)f_i.$$

Para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definimos $A^{(\chi_i)} = \{a \in A \mid a^g = \chi_i(g)a$, para todo $g \in G\}$.

Lema 10.6. *Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos $A^{(\chi_i)} = span_K\{a^{f_i} \mid a \in A\}$.*

Demonstração. Seja $a \in A^{(\chi_i)}$, por um lado $1 = f_1 + \cdots + f_n$. Logo $a = a^1 = a^{f_1} + \cdots + a^{f_n}$, e se $g \in G$, vale $a^g = a^{gf_1} + \cdots + a^{gf_n}$.

Isso é equivalente a
$$a^g = \chi_1(g)a^{f_1} + \cdots + \chi_n(g)a^{f_n}. \tag{35}$$
Por outro lado, como $a \in A^{(\chi_i)}$, temos $a^g = \chi_i(g)a$.

Agora, se $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, da última igualdade, de 35 e do fato de que $f_i f_j = \delta_{ij}$, segue $0 = (\chi_l(g) - \chi_i(g))a^{f_l}$. Disto, segue que $a^{f_l} = 0 \quad$ se $l \neq i$, e portanto $a = a^{f_i}$. □

Segue em particular de 10.6 que
$$A = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} A^{(\chi)} \tag{36}$$
Se χ, $\psi \in \widehat{G}$, $a \in A^{(\chi)}$ e $b \in A^{(\psi)}$, para qualquer $g \in G$ vale $a^g = \chi(g)a, \quad$ e $\quad b = \psi(g)b$. Logo
$$(ab)^g = g(ab) = g(a)g(b) = a^g b^g = \chi(g)\psi(g)ab = (\chi\psi)(g)ab.$$
Segue que $A^{(\chi)}A^{\psi} \subseteq A^{(\chi\psi)}$. Pela observação acima e (36) concluímos que A é $\widehat{G}$-graduada e, como $\widehat{G} \cong G$, podemos resumir como segue.

Proposição 10.7. *Para G e K como acima, qualquer álgebra A sobre K com uma G-ação admite uma G-graduação. A recíproca também vale.*

Demonstração. Basta mostrar a veracidade da recíproca. Seja $C = \bigoplus_{h \in H} C^{(h)}$ uma álgebra graduada por um grupo abeliano H de ordem k. Se $\widehat{H} = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$, define-se uma $\widehat{G}$-ação em C por $\psi_l(a) = \sum_{g \in G} \psi_l(g)a_g$, $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$, e $a = \sum_{g \in G} a_g$, $a_g \in A^{(g)}$ para cada $g \in G$.

Dado que $G \cong \widehat{G}$, usamos o isomorfismo $\varpi \colon G \to \widehat{G}$ para definir uma G-ação em A da seguinte forma $g \cdot a := \varpi(g)(a)$. □

Teorema 10.8. *Seja G um grupo abeliano finito e K um corpo que contém uma $|G|$-ésima raiz primitiva da unidade. Então, mediante a $\widehat{G}$-ação numa álgebra G-graduada A, como na proposição acima, um subespaço $V \subseteq A$ é graduado se, e somente se, V é invariante sob a $\widehat{G}$-ação. Um elemento $a \in A$ é homogêneo na G-graduação se, e somente se, a é um autovetor para todo $\chi \in \widehat{G}$.*

Demonstração. Suponha V um subespaço graduado cujas componentes homogêneas são $V^{(g)}$, $g \in G$. Se $a \in V^{(g)}$, segue que $a = a_g$, donde temos que $\chi(a) = \chi(g)a_g$.

Logo $\chi(V^{(g)}) \subseteq V^{(g)}$. Se $a_g \in V^{(g)}$, defina $b = (\chi(g))^{-1}a_g$, então $\chi(b) = a_g$, e $\chi(V^{(g)}) = V^{(g)}$, Portanto $\chi(V) = V$.

Reciprocamente se V não é um subespaço G graduado, existe $v \in V$ tal que $v = v_{g_1} + \cdots + v_{g_l}$, $l \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_l \in G$, e para todo $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ temos $v_{g_j} \notin V$.

Seja $\chi \in \widehat{G}$ tal que $\chi(g_1) = \lambda$ e $\chi(g_2) = \mu$, $\lambda \neq \mu$. Como V é invariante sob a ação de $\widehat{G}$, segue que $z = \lambda v - \chi(v) \in V$, o que implica que a soma começando de v_{g_2} (pois v_{g_1} não aparece em z) pertence a V. Procedendo dessa forma, concluímos que existe $s \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que $v_{g_s} \in V$, o que é um absurdo. Para a última afirmação do teorema, basta considerar $V = span_K\{a\}$, então $a \in A$ é homogêneo se, e somente se, para qualquer $\chi \in \widehat{G}$, existe $\lambda_\chi \in K$ tal que $\chi(a) = \lambda_\chi a$. □

Exemplo 10.9. *Considere o grupo cíclico de ordem 2, $G = \langle \varphi \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. A tabela de caracteres de G é*

G	0	1
χ	*1*	*1*
ψ	*1*	*-1*

e assim $\widehat{G} = \{\chi, \psi\}$. Se A é uma álgebra com G-ação, A tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação estabelecida por $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ onde $A^{(0)} = \{a \in A : \varphi(a) = a\}$, $A^{(1)} = \{a \in A : \varphi(a) = -a\}$.

Se A^G é o conjunto dos ponto fixos por G, $A^{(0)} = A^G$. Vejamos também que segundo a $\widehat{G}$-ação definida acima $\psi(x) = \begin{cases} x & se \quad x \in A^{(0)} \\ -x & se \quad x \in A^{(1)} \end{cases}$.

Definição 10.10. *As álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas são chamadas de* ***superalgebras.*** *Se A é uma superalgebra com $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$, então $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são chamadas de as componentes par e ímpar de A respectivamente.*

Observação 10.11. *Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superalgebra sobre o corpo K, com $char(K) = 0$. Então, o operador linear $f\colon A \to A$ definido por $f(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$ é um automorfismo tal que $|f| = \begin{cases} 1, & se \quad A = A^{(0)} \\ 2, & se \quad A^{(1)} \neq 0 \end{cases}$, onde $|u|$ é a ordem de um elemento u em $Aut(A)$.*

10.2 Álgebras livres com G-ação

Definição 10.12. *Seja A uma álgebra sobre um corpo K. Um operador linear invertível $\phi\colon A \to A$ é um antiautomorfismo se $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$, para quaisquer a, $b \in A$.*

• O conjunto dos antiautomorfismos e automorfismos de uma álgebra A é denotado por $Aut^*(A)$. Com a operação usual de composição, este torna-se um grupo e $Aut(A) \leq Aut^*(A)$.
• Se A é uma álgebra comutativa, então é imediato que $Aut^*(A) = Aut(A)$ e neste caso $[Aut^*(A) : Aut(A)] = 1$.

Observação 10.13. *Notemos que se φ, ψ são dois antiautomorfismos, então $\varphi \circ \psi(ab) = \varphi(\psi(b)\psi(a)) = (\varphi \circ \psi)(a)(\varphi \circ \psi)(b)$, para quaisquer a, $b \in A$. Logo $\varphi\psi \in Aut(A)$. Se φ é um antiautomorfismo, sua inversa também o é.*

Se $[Aut^*(A) : Aut(A)] > 2$, existem antiautomorfismos ϕ, $\varphi \in Aut^*(A)$ tais que $\phi Aut(A) \neq \varphi Aut(A)$. Pela observação acima $\varphi^{-1}\phi \in Aut(A)$, donde tem-se que $\phi Aut(A) = \varphi Aut(A)$, o qual é uma contradição. Concluímos que $[Aut^*(A) : Aut(A)] \leq 2$.

Agora, seja G um grupo finito e $H \leq G$ tal que $[G : H] \leq 2$. Se X é um conjunto no qual G age, denotamos por $K\langle X \mid G\rangle$ a álgebra $K\langle Z\rangle$, onde $Z = \{x^g \mid x \in X, \quad g \in G\}$.

Definimos em Z uma G-ação, estendemos para os monômios de $K\langle X \mid G\rangle$, e por linearidade para os elementos de $K\langle X \mid G\rangle$. Explicitamente a G-ação em Z fica $(x^g)^h = x^{hg}$, $x \in X$, h, $g \in G$. E se $v = \alpha x_{i_1}^{g_{i_1}} \cdots x_{i_k}^{g_{i_k}}$, $w = \beta x_{p_1}^{g_{p_1}} \cdots x_{p_s}^{g_{p_s}}$ são dois monômios em $K\langle X \mid G\rangle$ pomos

$$\begin{cases} (vw)^h = (\alpha\beta x_{i_1}^{g_{i_1}} \cdots x_{i_k}^{i_k} x_{p_1}^{g_{p_1}} \cdots x_{p_s}^{g_{p_s}})^h = \alpha\beta(x_{i_1}^{hg_{i_1}} \cdots x_{i_k}^{hi_k})(x_{p_1}^{hg_{p_1}} \cdots x_{p_s}^{hg_{p_s}}), & se \quad h \in H \\ (vw)^h = (\alpha\beta x_{i_1}^{g_{i_1}} \cdots x_{i_k}^{i_k} x_{p_1}^{g_{p_1}} \cdots x_{p_s}^{g_{p_s}})^h = \alpha\beta(x_{p_1}^{hg_{p_1}} \cdots x_{p_s}^{hg_{p_s}})(x_{i_1}^{hg_{i_1}} \cdots x_{i_k}^{hi_k}), & se \quad h \in G \setminus H \end{cases}.$$

• A álgebra $K\langle X \mid G\rangle$ é chamada de **álgebra livre em** X com G-ação. Os elementos de $K\langle X \mid G\rangle$ são chamados de G-polinômios.

Adendo: Embora $K\langle X \mid G\rangle$ não carregue a notação de H, é importante notarmos que este está de forma intrínseca associado a H, uma vez que a G-ação é definida levando-se em conta a separação dos elementos que estão em H. Na próxima proposição, H será a parte apenas dos automorfismos do grupo G, isto é, H irá "separar"os antiautomorfismos de G.

Exemplo 10.14. *Seja $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $G = S_3$, $H = A_3 = \langle(1,2,3)\rangle$ e $v = x_1^{(1,2)} x_2^{(2,3)} x_3^{(1,2,3)}$ um monômio em $K\langle X \mid S_3\rangle$. Então $(1,2,3)v = x_1^{(1,2,3)(1,2)} x_2^{(1,2,3)(2,3)} x_3^{(1,2,3)(1,2,3)} = x_1^{(1,3)} x_2^{(1,2)} x_3^{(1,3,2)}$ pois $(1,2,3) \in H$ e $(1,2)v = x_1^{(1,2)(1,2)} x_2^{(2,3)(1,2)} x_3^{(1,2,3)(1,2)} = x_1^{(1)} x_2^{(1,3,2)} x_3^{(1,3)}$, pois $(1,2) \in S_3 \setminus H$.*

Proposição 10.15. *(Propriedade universal) Seja A uma K-álgebra e $G \leq Aut^*(A)$ um grupo finito. Se $H = Aut(A) \cap G$, então $[G : H] \leq 2$ e além disso, $K\langle X \mid G\rangle$ tem a seguinte propriedade universal: Para cada função $\varphi\colon X \to A$, existe um único homomorfismo de álgebras $\widetilde{\varphi} : K\langle X \mid G\rangle \to A$ tal que $\widetilde{\phi}(v^g) = \widetilde{\phi}(v)^{(g)}$ para cada monômio $v \in K\langle X \mid G\rangle$, e além do mais, $\widetilde{\phi}_{|X} = \phi$.*

• Seja $\mathcal{F}(X, A)$ o conjunto das funções de X em A, baseados na proposição acima podemos definir a coleção de homomorfismos $\widetilde{\Phi} = \{\widetilde{\phi} : \phi \in \mathcal{F}(X, A)\}$. O ideal $Id^G(A) = \bigcap_{\widetilde{\phi} \in \widetilde{\Phi}} Ker(\widetilde{\phi})$ é o ideal das G-identidades de A. Um polinômio $f(x_1^{g_1}, \ldots, x_n^{g_n})$ é uma G-identidade para A se $f(a_1^{g_1}, \ldots, a_n^{g_n}) = 0$, para quaisquer a_1, $\ldots$, $a_n \in A$. Neste caso, escrevemos $f \equiv 0$. Com essa notação, o ideal das G-identidades de A é escrito como $Id^G(A) = \{f \in K\langle X \mid G\rangle \mid f \equiv 0, \quad em \quad A\}$.

• Se $w \in K\langle X \mid G\rangle$ é um monômio, define-se o grau de w em relação a variável x (e escreve-se como $\deg_x w$), $x \in X$, como sendo o número de vezes que x^g aparece em w, sem considerar o elemento $g \in G$.

Resultado 10.16. *Seja A uma álgebra sobre o corpo K e $G \subseteq Aut^*(A)$ um grupo abeliano finito. Então, se f_1, $\ldots$, $f_{|G|}$ são os idempotentes centrais minimais de KG, segue que $K\langle X \mid G\rangle$ é livremente gerado como uma álgebra pelo conjunto $\{x^{f_1}, \ldots, x^{f_{|G|}} : x \in X\}$.*

Demonstração. Observe que dado $x \in X$, $x = x^1 = x^{f_1+\cdots+f_{|G|}} = x^{f_1} + \cdots + x^{f_{|G|}}$ e assim, se $g \in G$, $x^g = x^{g1} = x^{g(f_1+\cdots+f_{|G|})} = x^{gf_1} + \cdots + x^{gf_{|G|}}$. Portanto, $span_K\{x^g \mid g \in G, x \in X\} = span_K\{x^{f_1}, \ldots, x^{f_{|G|}} \mid x \in X\}$, donde segue que $K\langle X \mid G\rangle$ é livremente gerado como uma álgebra pelo conjunto $\{x^{f_1}, \ldots, x^{f_{|G|}} \mid x \in X\}$. $\square$

Observação 10.17. *Seja Y um conjunto enumerável, $k \in \mathbb{N}$ e $\zeta \colon Y \to \mathbb{N}$ uma bijeção entre Y e $\mathbb{N}$. Dado $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, defina $N_j = \{m \in \mathbb{N} \mid m \equiv j \mod k\}$ e $M_j := \zeta^{-1}(N_j)$. Então $\mathbb{N} = \bigcup_{j=0}^{k-1} N_j$, e $Y = \bigcup\limits_{j=0}^{k-1} U_j$.*

Considere $K\langle X\rangle$, com X enumerável e G um grupo finito. Para cada $g \in G$, pela observação 10.17, para cada $g \in G$, escrevemos $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots, x_n^{(g)}, \ldots\}$ e apresentamos X como a união disjunta $X = \bigcup\limits_{g \in G} X_g$. Os elementos de X_g são chamados homogêneos de grau g.

Dado um monômio $w = x_{i_1}^{(g_1)} \cdots x_{i_t}^{(g_t)} \in K\langle X\rangle$, define-se o grau homogêneo de w como sendo $g_1 \cdots g_t$ e denota-se por $K\langle X\rangle^{(g)}$ o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado pelos monômios cujo grau homogêneo é g. Isso define uma G-graduação em $K\langle X\rangle$ pois $K\langle X\rangle = \bigoplus_{g \in G} K\langle X\rangle^{(g)}$ e $K\langle X\rangle^{(g)} K\langle X\rangle^{(h)} \subseteq K\langle X\rangle^{(gh)}$.

Denota-se a álgebra acima, munida de tal G-graduação, por $K\langle X\rangle^{gr}$. Esta é chamada de **álgebra livre G-graduada de posto enumerável sobre K.**

Proposição 10.18. 1) *A álgebra $K\langle X\rangle^{gr}$ tem a propriedade universal: Dada uma álgebra G-graduada A e uma função $\psi \colon X \to A$ tal que $\psi(X_g) \subseteq A^{(g)}$, existe um único homomorfismo de álgebras G-graduadas $\widetilde{\psi} \colon K\langle X\rangle^{gr} \to A$ tal que $\widetilde{\psi}_{|X} = \psi$. Denotamos por $\widetilde{\Psi}$ o conjunto desses homomorfismos.*

2) *O conjunto $Id^{gr}(A) = \{f \in K\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \quad em \quad A\}$ é um ideal; além disso $Id^{gr}(A) = \bigcap_{\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}} Ker(\widehat{\psi})$.*

A próxima proposição relaciona $K\langle X \mid G\rangle$ e $K\langle X\rangle^{gr}$, veja sua demonstração em [19].

Proposição 10.19. *Seja A uma K-álgebra e $G \subseteq Aut^*(A)$ um grupo abeliano finito. Se $char(K) = 0$ e K contém uma $|G|$-ésima raiz primitiva da unidade, então $K\langle X \mid G\rangle = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} K\langle X \mid G\rangle^{(\chi)}$ é a álgebra livre $\widehat{G}$-graduada sobre K e $Id^G(A) = Id^{gr}(A)$.*

Seja $\phi \in Aut^*(A)$ tal que $\phi^2 = 1$, considere $P = \langle \phi \rangle$, um grupo finito de ordem 2 e $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável. Usando a tabela de caracteres do exemplo 10.9, os idempotentes centrais minimais de KP são $f_1 = \dfrac{1+\phi}{2}$, $\quad f_2 = \dfrac{1-\phi}{2}$. Pelo resultado 10.16, $K\langle X \mid P\rangle$ é livremente gerada pelo conjunto $X_1 := \{x_i + x_i^{\phi}, x_i - x_i^{\phi} \colon i \in \{1, 2, \ldots\}\}$ isto é $K\langle X \mid P\rangle = K\langle X_1\rangle$.

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots\}$ definimos $y_i : x_i + x_i^{\phi}$, $z_i = x_i - x_i^{\phi}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$, $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$. Logo $K\langle Z, Y\rangle = K\langle X_1\rangle = K\langle X \mid P\rangle$.

Segue que $K\langle Y, Z\rangle$ é uma superalgebra, mais explicitamente $K\langle Y, Z\rangle = K\langle Y, Z\rangle^{(0)} \oplus K\langle Y, Z\rangle^{(1)}$ onde $K\langle Y, Z\rangle^{(0)}$ é gerado pelos monômios com uma quantidade par de variáveis de Z (aqueles que possuem grau homogêneo 0) e $K\langle Y, Z\rangle^{(1)}$ gerado pelos monômios tendo uma quantidade ímpar de variáveis de Z (aqueles que possuem grau homogêneo 1). Por exemplo $y_2 y_4 z_1 z_4 y_7 z_1 y_9 z_3$ é um monômio em $K\langle Y, Z\rangle^{(0)}$ pois $1 + 1 + 1 + 1 = 0$ em $\mathbb{Z}_2$.

- A superalgebra $K\langle Y, Z\rangle$ é chamada de **superalgebra livre em** Y e Z sobre K.

10.3 Descrição das superalgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e de característica 0.

Vamos recordar a descrição das superalgebras simples de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados e de característica zero. Esta foi dada por C.T.C. Wall, nós seguimos a exposição de [19].

Assuma K algebricamente fechado e $char(K) = 0$. Já vimos no teorema de Wedderburn–Artin que qualquer álgebra semissimples A é isomorfa a soma direta de álgebras matriciais sobre anéis de divisão, isto é, existem pares (D_1, n_1), $\ldots$, (D_r, n_r), onde D_i é um anel de divisão e $n_i \in \mathbb{N}$, tais que $A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{r_r}(D_r)$. Se A tem dimensão finita sobre K e K é algebricamente fechado $D_j = K$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. E assim, $A \cong M_{n_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(K)$.

Observação 10.20. *Em virtude do exemplo 10.9, dada uma álgebra A com $\phi \in Aut(A)$ tal que $\phi^2 = 1$, A pode ser vista como uma superalgebra. Reciprocamente, devido à observação 10.11, dada uma superalgebra A, $A^{(1)} \neq 0$, existe $\phi \in Aut(A)$ tal que $\phi^2 = 1$.*

Definição 10.21. *a) Dada uma álgebra A e $\phi \in Aut(A)$, diz-se que A é $\phi-$simples se $A^2 \neq 0$ e para cada $I \trianglelefteq A$ tal que $I^\phi = I$, então $I = A$ ou $I = 0$.*

b) Se A é uma superalgebra, ela é uma superalgebra simples quando $A^2 \neq 0$ e A não tem ideais próprios homogêneos.

O resultado abaixo é uma generalização do teorema de Wedderburn–Artin e do teorema de Wedderburn–Malcev.

Teorema 10.22 ([19], Theorem 3.4.4)**.** *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K com um automorfismo ou antiautomorfismo $\varphi \in Aut^*(A)$ tal que $\varphi^2 = 1$. Então*

a) $rad(A)^\varphi = rad(A)$

b) Se A é uma álgebra φ-simples, então ou A é simples, ou existe uma subálgebra simples $B \subseteq A$ tal que $A = B \oplus B^\varphi$.

c) Se A é semissimples, existem subalgebras φ-simples $A_1, \ldots, A_m$ tais que $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$.

d) Se $char(K) = 0$, então existe uma subalgebra semissimples maximal tal que $B^\varphi = B$.

Vamos fornecer alguns exemplos de superalgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K de característica 0. Em seguida veremos que a menos de isomorfismo estas são as únicas superalgebras simples de dimensão finita.

Exemplo 10.23. *Seja K um corpo algebricamente fechado de característica* 0.

(1) Se $A = M_n(K)$, então A admite uma estrutura de $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial definida por $A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = 0$. Dado que $M_n(K)$ é simples, A é uma superalgebra simples de dimensão finita.

(2) Sejam $k \geq l > 0$ e

$$A = M_{k,l}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \mid P \in M_k(K), Q \in M_{k,l}(K), R \in M_{l,k}(K), S \in M_l(K) \right\}$$

com $\mathbb{Z}_2$-graduação definida por

$$A^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \right\}, \qquad A^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demonstra-se que A é uma superalgebra simples de dimensão finita.

(3) Considere $A = M_n(K \oplus cK)$, onde $c^2 = 1$ com $\mathbb{Z}_2$-graduação dada por $A^{(0)} = M_n(K)$, $A^{(1)} = cM_n(K)$. Não é difícil ver que A é semissimples e não tem ideais graduados.

Os lemas abaixo bem como o teorema 10.22 são utilizados para demonstrar o principal resultado desta seção.

Lema 10.24. *Seja A uma superalgebra simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K com $char(K) = 0$. Então, $A^{(0)}$ é semissimples.*

Lema 10.25. *Seja $A \cong M_n(K)$ com elemento unidade $e \in A$ e seja $B = M_r(K)$ uma subalgebra de A tal que $e \in B$. Então, se $C_A(B)$ é o centralizador de B em A, tem-se que $A = BC_A(B)$.*

Teorema 10.26. *Seja A uma superalgebra simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K com $char(K) = 0$. Então uma e apenas uma das opções abaixo é verificada*

a) $A \cong M_n(K)$.

b) $A \cong M_{k,l}(K)$, $\quad k \geq l > 0$.

c) $A \cong M_n(K \oplus cK)$, $\quad$, onde $c^2 = 1$.

10.4 Envelope de Grassmann

Vamos relembrar um pouco sobre variedades, as quais foram discutidas no capítulo 2. É imediato da definição de um T-ideal gerado por um conjunto $\mathcal{F} \subseteq K\langle X \rangle$ que se $\mathscr{V}(\mathcal{F})$ é a variedade determinada por $\mathcal{F}$, então $\mathscr{V}(\mathcal{F}) = \mathscr{V}(\langle \mathcal{F} \rangle^T)$. Utilizando a proposição2.17, mostra-se que $\langle \mathcal{F} \rangle^T = \bigcap_{A \in \mathscr{V}(\mathcal{F})} T(A)$.

Recordemos que se $\mathscr{V}$ é uma variedade e R é uma K-álgebra com $T(R) = T(\mathscr{V})$, então $\mathscr{V}$ é a variedade gerada por R e escreve-se $\mathscr{V} = var(R)$.

Considere a superalgebra livre $K\langle Y, Z \rangle = K\langle Y, Z \rangle^{(0)} \oplus K\langle Y, Z \rangle^{(1)}$, definida no final da subseção 10.2. Se $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ é uma superalgebra, um polinômio $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in K\langle Y, Z \rangle$ é uma superidentidade de A se $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A^{(0)}$ e $b_1, \ldots, b_m \in A^{(1)}$.

Um ideal graduado $I = I^{(0)} \oplus I^{(1)}$ de $K\langle Y, Z \rangle$ é um T_2-ideal se $\phi(I) \subseteq I$, para todo endomorfismo graduado ϕ: $K\langle Y, Z \rangle \to K\langle Y, Z \rangle$. Um exemplo de T_2-ideal é $Id^{gr}(A)$, o ideal graduado das superidentidades de A.

Definição 10.27. *Dado um conjunto não vazio $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{(0)} \cup \mathcal{S}^{(1)}$ de $K\langle X\rangle$, a classe de todas as superalgebras A tais que $f \equiv 0$ em A, para todo $f \in \mathcal{S}$ é chamada de supervariedade definida por $\mathcal{S}$.*

Se G é a álgebra de Grassmann, já vimos que G possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural dada por $G = G^{(0)} \oplus G^{(1)}$. Aqui $G^{(0)}$ é o subespaço de G gerado por todos os monômios de comprimento par e $E^{(1)}$ é o gerado por aqueles de comprimento ímpar.

Definição 10.28. *(Envelope de Grassmann) Se $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ é uma superalgebra, a álgebra*

$$G(A) = (A^{(0)} \otimes G^{(0)}) \oplus (A^{(1)} \otimes G^{(1)})$$

é chamada de o envelope de Grassmann de A.

Vamos relacionar as identidades graduadas multilineares de A com as de $G(A)$. Denotemos por $P_{k,m}$ o espaço dos polinômios multilineares de $K\langle Y, Z\rangle$ nas variáveis $y_1, \ldots, y_k$ e $z_1, \ldots, z_m$. Se $f \in P_{k,m}$ pode-se escrever

$$f(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ W=(w_0,w_1,\ldots,w_m)}} \alpha_{\sigma,W} w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \cdots w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m$$

onde $w_0, w_1, \ldots, w_m$ são monômios multilineares em $y_1, \ldots, y_k$ e $\alpha_{\sigma,W} \in K$. Por exemplo, se $k = m = 3$, o polinômio $f(y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3) = y_1 z_1 y_2 y_3 z_2 z_3$ pertence a $P_{3,3}$.

A transformação linear $\widetilde{\ }: P_{k,m} \to P_{k,m}$, $f \mapsto \widetilde{f}$ onde $\widetilde{f}$ é definida por

$$\widetilde{f}(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ W=(w_0,w_1,\ldots,w_m)}} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma,W} w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \cdots w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Lema 10.29. *Seja $f \in P_{k,m}$. Então*

1) f é uma identidade multilinear graduada de $G(A)$ se, e somente se, $\widetilde{f}$ é uma identidade multilinear graduada de A.

2) $\widetilde{\widetilde{f}} = f$.

Demonstração. 1) Sejam $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k \in A^{(0)}$, $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m \in A^{(1)}$ elementos homogêneos de A e $g_1, \ldots, g_k \in G^{(0)}$, $h_1, \ldots, h_m \in G^{(1)}$ elementos homogêneos em G. Fixe um monômio

$$w = a_0(y_1, \ldots, y_k) z_{\sigma(1)} \cdots z_{\sigma(m)} a_m(y_1, \ldots, y_k)$$

e seja

$$\overline{w} = w(\overline{y}_1 \otimes g_1, \overline{y}_2 \otimes g_2, \ldots, \overline{y}_k \otimes g_k, \overline{z}_1 \otimes h_1, \ldots, \overline{z}_m \otimes h_m).$$

Temos que $g_1, \ldots, g_k \in Z(G)$ e que $h_1, \ldots, h_m$ anticomutam. Logo

$$\overline{w} = a_0(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \overline{z}_1 \cdots \overline{z}_m a(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \otimes g_1 \cdots g_k h_{\sigma(1)} \cdots h_{\sigma(m)}.$$

Como $h_{\sigma(1)} \cdots h_{\sigma(m)} = (-1)^\sigma h_1 \cdots h_m$, segue que

$$\overline{w} = (-1)^\sigma a_0(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \overline{z}_{\sigma(1)} \cdots \overline{z}_{\sigma(m)} a_m(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m) \otimes g_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_m$$

portanto, se $f \in P_{k,m}$, então

$$f(\overline{y}_1 \otimes g_1, \ldots, \overline{y}_k \otimes g_k, \overline{z}_1 \otimes h_1, \ldots, \overline{z}_m \otimes h_m) = \widetilde{f}(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \otimes g_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_m.$$

Logo $f \equiv 0$ em $G(A)$ se, e somente se, $\widetilde{f} \equiv 0$ em A. □

Os dois teoremas abaixo são de extrema importância nos capítulos subsequentes. Em particular, o teorema 10.31 é uma "melhoria"de 10.30. Ambos são devidos a Kemer, sendo o primeiro deles estabelecido em 1984 em [6] e o segundo em [25].

Teorema 10.30. *(Teorema de Kemer-1984) Dada qualquer variedade não trivial $\mathscr{V}$, existe uma superalgebra finitamente gerada $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ tal que $\mathscr{V} = var(G(A))$. Além disso, A visto como uma álgebra no sentido usual, satisfaz uma identidade polinomial não trivial.*

Teorema 10.31. *(Teorema de Kemer-1988) Para qualquer variedade não trivial $\mathscr{V}$, existe uma superalgebra de dimensão finita $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ tal que $\mathscr{V} = var(G(A))$.*

11 Resultados principais 1: Existência e integralidade do PI-expoente de uma PI-álgebra

11.1 cocarácteres de PI-álgebras

Se R é uma PI-álgebra, P_n é um S_n-módulo à esquerda, e $P_n(R) = P_n/T(R) \cap P_n$ também é um S_n-módulo à esquerda.

Definição 11.1. *Seja R uma PI-álgebra, para cada $n \in \mathbb{N}$, o carácter*

$$\chi_n(R) = \chi_{P_n(R)} = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(R)\chi_\lambda$$

onde χ_λ é o carácter de $M(\lambda)$ e $m_\lambda(R)$ é a multiplicidade com que $M(\lambda)$ aparece em $P_n(R)$, é chamado de o n-ésimo cocarácter de R. A sequência $(\chi_n(R))_n$ é chamada de a sequência dos cocaracteres de R.

Exemplo 11.2. *Se R é comutativa com unidade, temos $T(R) = K\langle X\rangle[K\langle X\rangle, K\langle X\rangle]K\langle X\rangle$. Considere a função $\varphi\colon K\langle X\rangle \to K[X]$ definida sobre os monômios de $K\langle X\rangle$ por $\varphi(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$, onde para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, k_j é a quantidade de vezes que o termo x_j aparece em $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$. Depois estendemos φ por linearidade. Então φ é um homomorfismo de álgebras e $Ker(\varphi) = T(R)$. Segue pelo primeiro teorema do isomorfismo que $F(R) = K\langle X\rangle/T(R) \cong K[X]$, e portanto para cada $n \in \mathbb{N}_0$ temos $P_n(R) \cong span_K\{x_1 \cdots x_n\}$. Se $\sigma \in S_n$ então $\sigma(x_1 \cdots x_n) = x_1 \cdots x_n$, logo $P_n(R)$ é o módulo trivial de S_n, e assim $\chi_n(R) = \chi_{(n)}$.*

Teorema 11.3. *Seja R uma PI-álgebra com n-ésimo cocarácter $\chi_n(R)$. Para uma partição $\mu \vdash n$, a multiplicidade $m_\mu(R)$ é nula se, e somente se, para qualquer diagrama de Young D_μ e para qualquer polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, a álgebra R satisfaz a identidade polinomial $e(D_\mu)f \equiv 0$.*

Demonstração. Sabemos pelos resultados da seção 1.1 que $KS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} B_\lambda$ e para cada $\lambda \vdash n$, o ideal bilateral minimal B_λ é dado por $B_\lambda = \bigoplus_{j=1}^{d_\lambda}(KS_n)e(D_j)$. Aqui D_1, D_2, …, D_{d_λ} são todos os diagramas standard de Young associados a λ. Além disso, temos a decomposição $P_n = Q \oplus J$, onde $Q = P_n \cap T(R)$ e $J \cong P_n(R)$. Se $\mu \vdash n$, $m_\mu(R)$ é nulo se, e somente se, $M(\mu)$ não é um somando direto de $P_n(R)$, isto é, se, e somente se, $B_\mu J = 0$. Agora, notemos que $B_\mu J = 0$ implica que

$$B_\mu P_n = B_\mu(Q \oplus J) = B_\mu Q \oplus B_\mu J = B_\mu Q \subseteq Q$$

Se $D'_1, \ldots, D'_{d_\mu}$ são os diagramas standard de Young associados a μ, segue que $B_\mu P_n \subseteq Q$ se e somente se $e(D'_j)f \in Q$, para qualquer $j \in \{1, 2, \ldots, d_\mu\}$ e $f \in P_n$.

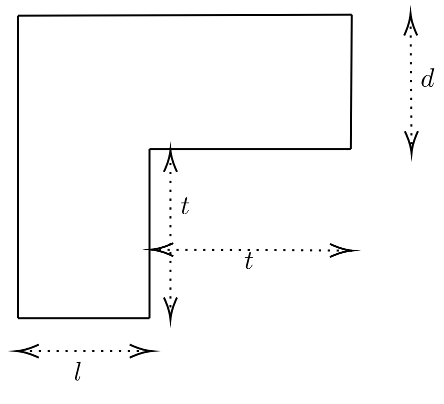
Portanto, dado um diagrama de Young D_μ, tem-se que $e(D_\mu)f \equiv 0$ é uma identidade polinomial em R. ☐

• Um polinômio multilinear $f \in P_n$ corresponde a D_λ, o diagrama de Young associado a λ, se existe $f_0 \in P_n$ tal que $f = e(D_\lambda)f_0$. Procedemos com o conhecido teorema do gancho, demonstrado por Amitsur e Regev em [38].

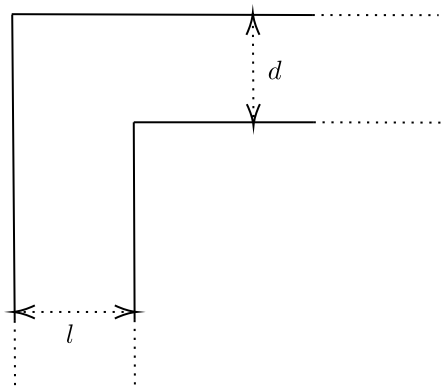
Se (d, l, t) é uma tripla de números inteiros positivos, definimos a partição

$$h(d, l, t) = (\underbrace{l + t, l + t, \ldots, l + t}_{d} \underbrace{l, l, \ldots, l}_{t}) \tag{37}$$

cujo diagrama de Young de $h(d, l, t)$ tem a forma abaixo.



Se $d,\, l \geq 0$ o conjunto $H(d,l) = \bigcup_{n\geq 1}\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \vdash n \mid \lambda_{d+1} \leq l\}$ é o **gancho infinito** de braço d e perna l. O gancho infinito $H(d,l)$ é o conjunto de todos as tabelas de Young que vivem na região esboçada abaixo.



Uma partição $\lambda \vdash n$ pertence ao gancho infinito $H(d,l)$ e escreve-se $\lambda \in H(d,l)$ se a correspondente tabela de Young T_λ pertence a $H(d,l)$. Logo uma partição em $H(d,l)$ não pode exceder l após o $d+1$-ésimo termo de λ. Ainda, se M é um S_n-módulo com carácter $\chi_M = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ então, escreve-se $\chi_M \subseteq H(d,l)$ se $\mu \in H(d,l)$ para todas partições $\mu \vdash n$ com $m_\mu \neq 0$.

Teorema 11.4. *(Teorema do Gancho) Se R é uma PI-álgebra, existem inteiros $d,\, l \geq 0$ tais que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\chi_n(R) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ \lambda\in H(d,l)}} m_\lambda(R)\chi_\lambda$.*

No Exemplo 2.5 definimos o polinômio de Capelli de grau n como sendo

$$d_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{n+1}) = \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \cdots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1}.$$

Uma álgebra R satisfaz a identidade de Capelli de grau n se R satisfaz $d_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{n+1})$ com qualquer atribuição de $1's$ nos $y_i's$.

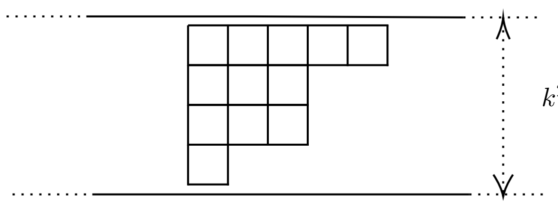
Segue o teorema da faixa (Strip theorem) o qual caracteriza a sequência de cocarácteres de todas as PI-álgebras que satisfazem a identidade de Capelli de grau n. A demonstração pode ser encontrada em [37]. Antes porém uma notação: Se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \vdash n$ é uma partição de n, denota-se o comprimento m de λ por $h(\lambda) = m$.

Teorema 11.5. *(Teorema da Faixa) Seja R uma PI-álgebra e seja $\chi_n(R) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(R)\chi_\lambda$ seu n-ésimo cocarácter. Então, R satisfaz a identidade de Capelli de grau k se, e somente se $m_\lambda = 0$ para toda partição $\lambda \vdash n$ tal que $h(\lambda) \geq k$.*

Seja R uma álgebra com $\dim(R) = k$, então como visto no exemplo 2.5, R satisfaz uma identidade de Capelli de grau $k+1$ e assim, por 11.5 temos o resultado abaixo.

Teorema 11.6. *Se $\dim(R) = k$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$ $\chi_n(R) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ h(\lambda)\leq k}} m_\lambda(R)\chi_\lambda$.*

Exemplo 11.7. *Por 2.6 e 11.6, qualquer cocarácter da álgebra das matrizes $M_k(K)$ se encontra numa faixa de altura k^2.*



11.2 PI-expoente de uma PI-álgebra

Seja R uma PI-álgebra sobre um corpo K de característica 0 e seja $(c_n(R))$ a sequência de suas codimensões. Sem perda de generalidade pode-se assumir que R não é nilpotente. Caso contrário, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_1x_2\cdots x_N = 0$ é uma identidade polinomial em R, e portanto $P_n \subseteq T(R)$, para todo $n \geq N$. Logo $P_n(R) = 0,\quad$ para todo $n \geq N$. Assim, para cada $n \geq N$, $c_n(R) = 0$.

Assumimos R não nilpotente, $c_n(R) \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema de Regev 7.8 existe uma constante $a \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq c_n(R) \leq a^n$. Isso implica que a sequência $(\sqrt[n]{c_n(R)})_n$ é limitada.

Definição 11.8. *Nas condições acima, define-se o expoente inferior de R como sendo* $\underline{\exp}R = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(R)}$ *e o expoente superior de R como sendo* $\overline{\exp}R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(R)}$.

Quando $\underline{\exp}R = \overline{\exp}R$ *então* $(\sqrt[n]{c_n(R)})_n$ *é convergente, e define-se o* PI***-expoente*** *de R como sendo* $\exp R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(R)}$.

Aqui desenvolvemos ferramentas para que possamos demonstrar o teorema de Giambruno e Zaceiv [17] que garante a existência do PI-expoente para PI-álgebras sobre corpos de característica 0, conjecturado por Amitsur em 1980.

Se $\mathscr{V}$ é uma variedade e $\chi_n(\mathscr{V}) = \sum_{\lambda\mapsto n} m_\lambda \chi_\lambda$ é seu n-ésimo cocarácter[3], define-se o n-ésimo co-comprimento de $\mathscr{V}$ como sendo o número $l_n(\mathscr{V}) = \sum_{\lambda\mapsto n} m_\lambda$.

O próximo teorema é devido a Berele e Regev, e sua demonstração pode ser encontrada em [4] ou em [19]. Iremos demonstrar apenas um dos resultados que é utilizado em sua demonstração; sua demonstração será necessária mais adiante.

Lema 11.9. *Seja $\mathscr{V}$ uma variedade não trivial e seja $H(d,l)$ um gancho infinito tal que $\chi_n(\mathscr{V}) \subseteq H(d,l)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, o número de partições $\lambda \vdash n$ para o qual $m_\lambda \neq 0$ é limitado por $(n+1)^{d+l}$.*

Demonstração. A inclusão $\lambda \in H(d,l)$ implica que as caixas da tabela de Young T_λ se encontram nas d primeiras linhas e l colunas. O comprimento das d primeiras linhas de T_λ, isto é, os inteiros $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ satisfazem $0 \leq \lambda_i \leq n$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Portanto, temos no máximo $(n+1)^d$ opções para os valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$. Similarmente, temos $(n+1)^l$ opções para a escolha dos comprimentos de das l primeiras colunas de T_λ (ou equivalentemente as l primeiras linhas da tabela conjugada $T_{\lambda'}$). Logo o número total de tabelas de Young T_λ de $\lambda \in H(d,l)$ é limitado por $(n+1)^{d+l}$. □

Teorema 11.10. *(Berele e Regev) Se $\mathscr{V}$ uma variedade não trivial, existem $c > 0$ e $k > 0$ tais que*

$$l_n(\mathscr{V}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda \leq cn^k.$$

O teorema abaixo mostra-nos que a codimensão de uma álgebra de dimensão finita não excede sua dimensão elevado a alguma potência natural.

Teorema 11.11. *Seja R uma álgebra de dimensão finita d. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n(R) \leq d^n$.*

Segue que se $d = \dim R < \infty$, então $\overline{\exp}R \leq d$: $\overline{exp}(R) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(R)} = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq N} \sqrt[n]{c_n(R)}$ Portanto, pelo teorema anterior $\overline{exp}(R) = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq N} \sqrt[n]{c_n(R)} \leq \inf_{N\in\mathbb{N}} d = d$.

Adendo desta seção: Fixamos A uma superalgebra de dimensão finita sobre K, $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$. Fixamos K algebricamente fechado e de característica 0, por exemplo, $K = \mathbb{C}$.

Denote por $\phi \in Aut(A)$ o automorfismo de ordem 2 associado a A (10.11). Pelo teorema de Wedderburn-Malcev 1.91 , pode-se escrever $A = A_{ss} \oplus J$, onde $J = rad(A)$ e A_{ss} é uma subalgebra maximal semissimples. Então J é um ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado[4], e além disso, por conta do teorema 10.22, sem perda de generalidade pode-se supor que $A_{ss}^\phi = A_{ss}$, e assim, segue que A_{ss} é $\mathbb{Z}_2$-graduada. Fixemos $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, onde A_i são superalgebras simples.

Dado que $m := \dim A < \infty$, A é artiniana à esquerda e portanto J é um ideal nilpotente, isto é, existe $p > 0$ tal que $J^p = 0$.

Seja Θ o conjunto de todos os produtos da forma

$$B_1 J B_2 J \cdots J B_t \neq 0 \tag{38}$$

onde $t \in \mathbb{N}$, $B_1, \ldots, B_t \in \{A_1, \ldots, A_k\}$ e além disso, $B_i \neq B_j$ se $i \neq j$. Defina

$$q = \max\Big\{ \dim(B_1 \oplus \cdots \oplus B_r) \mid B_1 J B_2 J \cdots J B_r \in \Theta \Big\}.$$

[3]Se $\mathscr{V}$ é uma variedade não trivial e U é uma PI-álgebra tal que $\mathscr{V} = var(U)$, então o n-ésimo cocarácter de $\mathscr{V}$ é definido como sendo o n-ésimo cocarácter de U.

[4]Suponha que exista $x \in J$ tal que $x = x_0 + x_1$, onde $x_0, x_1 \notin J$. Então, como $\phi(J) = J$, segue que $\phi(x_1) + \phi(x_2) \in J$, isto é, $x_0 - x_1 \in J$. Como consequência, $(x_0 - x_1) + x \in J$, o qual implica que $x_0 \in J$, mas isso é um absurdo por hipótese. Logo, J é um ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado.

Lema 11.12. *Sejam B_1, ..., B_t superalgebras simples não necessariamente distintas provenientes do conjunto $\{A_1, \dots, A_t\}$. Se*

$$B_1 J B_2 J \cdots J B_t \neq 0 \tag{39}$$

então $\dim(B_1 \oplus \cdots \oplus B_t) \leq q$.

Demonstração. Se em (39) alguma superalgebra, digamos B_1, aparece mais de uma vez, podemos supor que $B_j = B_1$, para $1 < j \leq t$. Como $B_1 J$, $J B_1 \subseteq J$, o produto $B_1 J B_2 J \cdots J B_1 J \cdots J B_t \neq 0$ pode ser reduzido a um produto em Θ, e portanto $\dim(B_1 \oplus \cdots \oplus B_t) \leq q$. □

Observação 11.13. *Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(0)} \cup \mathcal{C}^{(1)}$ uma base homogênea de A a qual é uma união das bases homogêneas de A_1, ..., A_k e J respectivamente. Sejam c_1, ..., c_s elementos homogêneos distintos de $\mathcal{C} \cap A_{ss}$ e suponha que $s > q$. Então, qualquer produto de A que contém os elementos c_1, ..., c_s deve ser nulo em A. De fato, se o produto é da forma $c_1 x_1 c_2 x_2 \cdots x_{s-1} c_s$, onde x_1, ..., $x_{s-1} \in J$, pelo lema 11.12 tem-se que $c_1 x_1 c_2 x_2 \cdots x_{s-1} c_s = 0$.*

Pela definição de q, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\dim A_i \leq q$. Concluímos que c_1, ..., c_s não podem estar simultaneamente numa mesma A_i. Suponha que existam monômios m_1, ..., m_s (alguns dos quais podem ser o monômio 1) em A tais que $M = m_1 c_1 m_2 c_2 \cdots m_s c_s m_{s+1} \neq 0$.

Escreva $m_2 = x m_2'$ e suponha que $c_1 \in A_1$. Como $A_j A_i = 0$, para $i \neq j$, então x não pode estar em nenhum A_i com $i \neq 1$, logo $x \in A_1$ ou $x \in J$. Se $x \in J$, então $m_2 \in J$ e assim temos $c_1 m_2 c_2 = c_1 j c_2$, $j \in J$. Caso $m_2 \in A_1$, então c_2 deve também estar em A_1. Analogamente, escrevendo $m_3 = y m_3'$ vê-se que y ou está na mesma componente de c_2 ou este pertence a J. Procedendo dessa forma, iremos concluir uma das três possibilidades, ou c_1, ..., $c_s \in A_1$ ou $m_1 c_1 m_2 \cdots c_s m_{s+1}$ é da forma $m_1 c_1 m_2 \cdots c_s m_{s+1} = m_1 c_1 x_2 c_2 \cdots x_s c_s m_{s+1}$, x_2, ..., $x_s \in J$, ou ainda teríamos uma intercalação de produtos da forma $c' j c$, onde $j \in J$ e c, c' estão em componentes diferentes, juntamente com um produto pertencente a uma mesma componente. Os dois primeiros casos são impossíveis como visto acima. No último caso, suponha $s = q + 1$. O produto que precisamos ver se é nulo ou não, tem a forma

$$z := c_1 j_1 c_2 j_2 c_3 j_3 c_4 \cdots c_{\alpha-1} j_\alpha c_{\alpha+1} m_{\alpha+1} c_{\alpha+1} \cdots m_s c_s,$$

onde $\alpha \geq 1$, $c_1 \in A_1$, $c_2 \in A_2$, ..., $c_\alpha \in A_\alpha$, $c_{\alpha+1}$, ..., $c_s \in A_{\alpha+1}$ e j_1, ..., $j_\alpha \in J$.

Se $\alpha = 1$ então c_2, ..., $c_s \in A_2$ e neste caso $s - 1 \leq \dim A_2 < q$. Mas isso é um absurdo pois $s - 1 = q$. Logo por indução basta analisar o caso $\alpha = 2$, então c_3, ..., $c_s \in A_3$, donde $\dim A_3 \geq s - 2$. Mas $\dim A_3 \leq s - 2$, pois caso contrário, A_1 ou A_2 seriam 0, logo, $\dim A_3 = s - 2$. Consequentemente, dado que $\dim(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k) = s$, concluí-se que $A_4 = A_5 = \cdots = A_k = 0$. E portanto, $\dim A_1 = \dim A_2 = 1$, e $\dim A_3 = s - 2$. Dessa forma, como

$$\dim A_1 + \dim A_2 + \dim A_3 = s > q$$

temos que $A_1 J A_2 J A_3 = 0$, e em particular, $z = 0$.

Para o próximo lema, lembremos que se $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t) \vdash m$, então escreve-se $\lambda \leq \mu$ se $k \leq t$ e $\lambda_1 \leq \mu_1, \dots, \lambda_k \leq \mu_k$.

Relembramos que $G(A) = (E^{(0)} \otimes A^{(0)}) \oplus (E^{(1)} \otimes A^{(1)})$ é o envelope de Grassmann de A.

A observação 11.13 é utilizada na demonstração do próximo lema, esta pode ser encontrada em [19, Lemma 6.2.2].

Lema 11.14. *([19, Lemma 6.2.2]) Seja $\lambda \geq h(d, l, t)$, onde $d + l > q$, $t > (d + l)m + p$, m é a dimensão de A, p o índice de nilpotência do radical de Jacobson de A e q definido como na observação anterior. Se f é um polinômio multilinear correspondente a D_λ, então $f \in T(G(A))$.*

Como S_n-módulos à esquerda, P_n é identificado com KS_n, logo $P_n \equiv KS_n = \oplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$, onde $\{I_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ são os ideais minimais bilaterais.

Corolário 11.15. *Suponha $d + l = q + 1$ e $t = (m + 1)^2$, $m = \dim A$. Então* $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \geq h(d,l,t)} I_\lambda \subseteq T(G(A))$.

Demonstração. Seja $\lambda \geq h(d, l, t)$. Dado que $q \leq m$ e $p < m$, tem-se que

$$t = (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1 = m^2 + m + m + 1 > m^2 + m + p + 1 = m(m+1) + p + 1 \geq m(q+1) + p + 1$$

e assim, tem-se que $t > (d + l)m + p$. Pelo lema 11.14, dado um diagrama de Young D_λ, $e(D_\lambda) KS_n \subseteq T(G(A))$. Segue que $I_\lambda = (KS_n) e(D_\lambda)(KS_n) \subseteq T(G(A))$. □

O próximo lema diz-nos que a soma das dimensões das representações irredutíveis de S_n associadas a diagramas de Young que se encontram dentro do gancho infinito $H(d, l)$, é polinomialmente limitada.

Lema 11.16. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash n'$, tais que $\mu \leq \lambda$. Se $n - n' \leq c$, então $d_\mu \leq d_\lambda \leq n^c d_\mu$.*

Lema 11.17. *Existem constantes $C > 0$ e $r > 0$ tais que* $\displaystyle\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(d,l)}} d_\lambda \leq Cn^r(d+l)^n$.

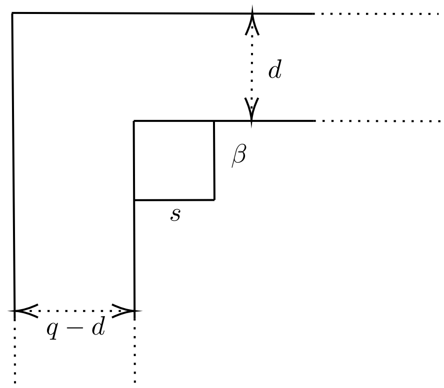
Além disso, existem a, $b > 0$ tais que a igualdade assintótica[5] $d_{h(d,l,k)} \simeq an^b(d+l)^n$, *com $h(d,l,k) \vdash n$ é verificada.*

Observação 11.18. *Seja $\chi_n(G(A)) = \displaystyle\sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ o n-ésimo cocarácter de $G(A)$. Se $\lambda \vdash n$ é tal que $\lambda \geq h(d,l,t)$, onde $d + l = q + 1$ e $t > (m+1)^2$, então pelo corolário 11.15 segue que $e(D_\lambda)KS_n \subseteq T(G(A))$ e portanto pelo teorema 11.3, concluí-se que $m_\lambda = 0$.*

Proposição 11.19. *Seja A uma superalgebra de dimensão finita m e seja q definido como anteriormente. Então, existem constantes C_1, $r_1 > 0$ dependendo apenas de m, tais que para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n(G(A)) \leq C_1 n^{r_1} q^n$.*

Demonstração. Seja $\chi_n(G(A)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ o n-ésimo cocarácter de $G(A)$. Se $\lambda \vdash n$ é tal que $\lambda \geq h(d,l,t)$ com $d + l = q + 1$ e $t = (m+1)^2$, então pela observação 11.18 segue que $m_\lambda = 0$.

Se $\lambda \neq n$ é tal que $m_\lambda \neq 0$, então a tabela de Young T_λ está contida em $H(d, q-d) \cup (s^\beta)$, para algum $d \geq 0$, (o qual é representado na figura abaixo), onde $s = (m+1)^2 + m - q + d$ e $\beta = (m+1)^2 + m - d$.



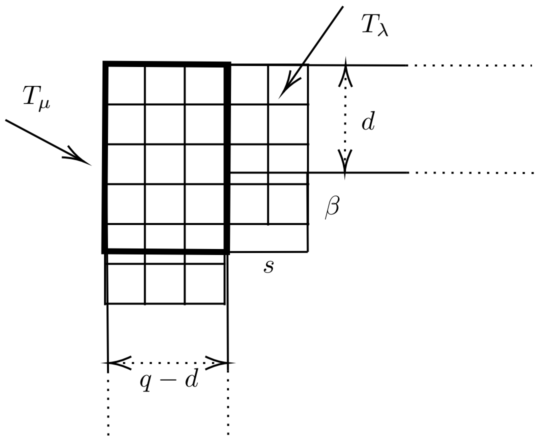
De fato, escreva $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ e suponha que exista $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tal que $\lambda_i > (m+1)^2 + m$. Seja $d \in \{1, 2, \ldots, r\}$ o maior inteiro tal que $\lambda_d > (m+1)^2 + m$. Se $d > q$, segue que a tabela de Young T_λ está fora da tabela de Young de $h(q+1, 0, (m+1)^2)$, isto é, $\lambda \geq h(q+1, 0, (m+1)^2)$, mas isso implicaria que $m_\lambda = 0$, um absurdo. Se $\lambda_{(m+1)^2+m+1} \geq q - d + 1$, então a tabela de Young T_λ contém o diagrama T_η, onde

$$\eta = (\underbrace{(m+1)^2 + m + 1, \ldots, (m+1)^2 + m + 1}_{k}, \underbrace{q - d + 1, \ldots, q - d + 1}_{(m+1)^2+m+1-d}).$$

Como $(m+1)^2 + m + 1 - (q - d + 1) \geq (m+1)^2$ e $(m+1)^2 + m + 1 - d \geq (m+1)^2$, segue que vale $\eta \geq h(d, q-d+1, (m+1)^2)$, donde $\lambda \geq \eta \geq h(d, q-d+1, (m+1)^2)$. Assim, $m_\lambda = 0$, o que é mais uma vez um absurdo. Portanto $\lambda_{(m+1)^2+m+1} \leq q - d$, e T_λ está contido em $H(d, q-d)$. Como implicação, sem perda de generalidade assumimos que $\lambda_1 \leq (m+1)^2 + m$ (se λ não satisfazer tal condição, pode-se tomar um sub-diagrama μ que o satisfaz). Além disso, $\lambda_{(m+1)^2+m+1} \leq q$, caso contrário $m_\lambda = 0$, pois teríamos $\lambda \geq h(0, (q+1), (m+1)^2)$. Concluí-se que T_λ está contido em $H(0, q) \cup (s^\beta)$.

Segue que se $m_\lambda \neq 0$, existe $\mu \vdash n'$, $n' \in \mathbb{N}$, tal que $T_\mu \subseteq T_\lambda$, e este último está contido em $H(d, q-d)$, para algum $d \geq 0$. Portanto $n - n' \leq c$, onde $c = s\beta$. A figura abaixo ilustra esta última passagem.

[5] Diz-se que $f(n)$ e $g(n)$ são iguais assintoticamente, e escreve-se $f(n) \simeq g(n)$ se $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)} = 1$



Pelo lema 11.16

$$d_\mu \leq d_\lambda \leq n^c d_\mu. \tag{40}$$

Agora, seja $\mathscr{R} = \{\lambda \vdash m_\lambda \neq 0\}$ e notemos que pelo teorema de Berele e Regev 11.10, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $m_\lambda \leq n^M$, para todo $\lambda \in \mathscr{R}$. Segue $c_n(G(A)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda \leq n^M \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in \mathscr{R}}} d_\lambda$ e da equação (40) $c_n(G(A)) \leq n^{M+c} \sum_{j=0}^{q} \sum_{n'=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\mu \vdash n' \\ \mu \in H(j,q-j)}} d_\mu \right) \underbrace{\leq}_{Lema.11.17} n^{M+c} \sum_{j=0}^{q} \sum_{n'=1}^{n} C(n')^r q^{n'}$. Mas $n' \leq n$, logo

$$c_n(G(A)) \leq n^{M+c} \sum_{j=0}^{q} \sum_{n'=1}^{n} Cn^r q^n = n^{M+c} C n^r q^n \left(\sum_{j=0}^{q} 1 \right) \left(\sum_{n'=1}^{n} 1 \right) = Cn^{M+c+r} q^n n(q+1),$$

donde segue que $c_n(G(A)) \leq C(q+1) n^{M+c+r+1} q^n$. Logo, para concluir a demonstração, basta tomar $C_1 = C(q+1)$ e $r_1 = M + c + r + 1$. □

Lema 11.20. *Sejam A uma superalgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K e $B_1 J B_2 J \cdots J B_r \neq 0$, para algumas subalgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas distintas $B_1, \ldots, B_r$. Sejam $f_1, \ldots, f_r$ polinômios multilineares em variáveis distintas tais que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $f_i \notin T(G(B_i))$. Então, se $u_1, v_1, w_1, \ldots, w_{r-1}, u_r, v_r$ são novas variáveis, o polinômio multilinear*

$$u_1 f_1 v_1 w_1 u_2 f_2 v_2 w_2 \cdots w_{r-1} u_r f_r v_r$$

não é uma identidade de $G(A)$.

Demonstração. Pela classificação das superalgebras de dimensão finita, podemos supor, sem perda de generalidade, que A é uma álgebra do tipo $a), b)$ ou $c)$ de 10.26.

Por hipótese, existem matrizes homogêneas (as quais podem ser tomadas como sendo da forma e_{ij} ou ce_{ij}, dependendo se B_j é isomorfa a $M_{k,l}(K)$ ou $M_k(K \oplus cK)$ respectivamente) $b_1 \in B_1, \ldots, b_r \in B_r$ e $e_1, \ldots, e_{r-1} \in J$ tais que $b_1 e_1 b_2 \cdots e_{r-1} b_r \neq 0$.

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ escreva $f_i = f_i(x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)})$, onde $n_i \in \mathbb{N}$. Como $f_i \notin T(G(B_i))$, existem elementos homogêneos $\widetilde{x}_1^{(i)}, \ldots, \widetilde{x}_{n_i}^{(i)} \in B_i$ e $g_1^{(i)}, \ldots, g_{n_i}^{(i)} \in G$ tais que $f_i(\widetilde{x}_1^{(i)} \otimes g_1^{(i)}, \ldots, \widetilde{x}_{n_i}^{(i)} \otimes g_{n_i}^{(i)}) \neq 0$.

Os polinômios $f_1, \ldots, f_r$ podem ser considerados graduados considerando em cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ que uma variável $\widetilde{x}_j^{(i)}$ é par caso $\widetilde{x}_j^{(i)} \in B_i^{(0)}$ e ímpar caso contrário. Dessa forma, pelo final da prova do lema 10.29, segue que $f_i(\widetilde{x}_1^{(i)} \otimes g_1^{(i)}, \ldots, \widetilde{x}_{n_i}^{(i)} \otimes g_{n_i}^{(i)}) = \widetilde{f}(\widetilde{x}_1^{(i)}, \ldots, \widetilde{x}_{n_i}^{(i)}) \otimes g_1^{(i)} \cdots g_{n_i}^{(i)}$. e tem-se também que $\widetilde{b}_i = \widetilde{f}(\widetilde{x}_1^{(i)}, \ldots, \widetilde{x}_{n_i}^{(i)}) \neq 0$.

Se $a_i, c_i \in B_i$ são tais que $a_i \widetilde{b}_i c_i = b_i \neq 0$. Com isso, o polinômio $g_i(u_i, x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}, v_i) = u_i \widetilde{f}_i v_i$ é tal que $g_i(a_i, \widetilde{x}_1^{(i)}, \ldots, \widetilde{x}_{n_i}^{(i)}, c_i) = b_i$.

Sejam $h_i, h_i', t_i \in G$ de mesmo grau homogêneo que a_i, e_i e c_i respectivamente. Então, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$, obtemos

$$(a_i \otimes h_i) f_i(\widetilde{x}_1^{(i)} \otimes g_1^{(i)}, \ldots, \widetilde{x}_{n_i}^{(i)} \otimes g_{n_i}^{(i)})(c_i \otimes h_i')(e_i \otimes t_i) = a_i \widetilde{f}_i(\widetilde{x}_1^{(i)}, \ldots, \widetilde{x}_{n_i}^{(i)}) c_i e_i \otimes h_i g_1^{(i)} \cdots g_{n_i}^{(i)} h_i' t_i,$$

donde segue que

$$(a_i \otimes h_i) f_i(\widetilde{x}_1^{(i)} \otimes g_1^{(i)}, \ldots, \widetilde{x}_{n_i}^{(i)} \otimes g_{n_i}^{(i)})(c_i \otimes h_i')(e_i \otimes t_i) = b_i e_i \otimes h_i g_1^{(i)} \cdots g_{n_i}^{(i)} h_i' t_i.$$

Como $\dim G = \infty$, existem h_i, h_i', t_i, $g_1^{(j)}, \ldots, g_{n_i}^{(j)}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, tais que

$$h_1 g_1^{(1)} \cdots g_{n_1}^{(1)} h_1' t_1 h_2 g_1^{(2)} \cdots g_{n_2}^{(2)} h_2' t_2 \cdots t_{r-1} h_r g_1^{(r)} \cdots g_{n_r}^{(r)} h_r' \neq 0.$$

Consequentemente, se o polinômio $u_1 f_1 v_1 w_1 u_2 f_2 v_2 w_2 \cdots w_{r-1} u_r f_r v_r$ for avaliado em

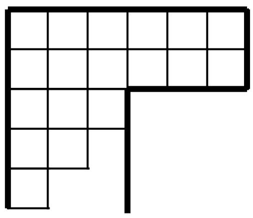
$$u_i = a_i \otimes h_i, \quad v_i = c_i \otimes h_i', \quad w_i = e_i \otimes t_i, \quad x_1^{(j)} = \widetilde{x}_1^{(i)} \otimes g_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)} = \widetilde{x}_{n_i}^{(i)} \otimes g_{n_i}^{(i)}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

obtemos o resultado do lema. □

Faremos uma alusão ao processo de colagem de diagramas de Young e evidenciar dois resultados que são utilizados na demonstração do teorema principal desta seção.

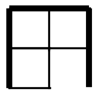
Exemplo introdutório 1: Sejam $\lambda_1 = (6, 6, 3, 2, 1) \vdash 18$ e $\lambda_2 = (2, 1) \vdash 3$. Considere as respectivas tabelas de Young T_{λ_1} e T_{λ_2}:

λ_1 :



$h(2,\ 3, 3)$

λ_2 :



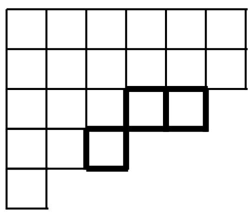
$h(1, 1, 1)$

as quais são inseridas em $h(2, 3, 3)$ e $h(1, 1, 1)$ respectivamente. Então, podemos "colar"(sinônimo aqui de justaposição) T_{λ_1} e T_{λ_2} via a regra

- Colar a primeira linha de T_{λ_2} a $(2 + 1)$-ésima linha de T_{λ_1}.
- Colar a segunda linha de T_{λ_2} a $(2 + 2)$-ésima linha de T_{λ_1}.

E com isso, obtemos o diagrama abaixo, o qual é denotado por $T_{\lambda_1} \star T_{\lambda_2}$

λ :



$T_{\lambda_1} \star T_{\lambda_2}$

notemos além disso que $\lambda \vdash 21$.

Construção geral da tabela de Young:

Considere as partições $\lambda_1 \vdash n_1$, $\lambda_2 \vdash n_2$, $\ldots$, $\lambda_r \vdash n_r$ e suponha que elas satisfazem

$$h(d_i, l_i, t_i - s_i) \leq \lambda_i \leq h(d_i, l_i, t_i), \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, 2, \ldots, r\} \tag{41}$$

onde h_i, l_i, t_i são inteiros positivos, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, e além disso

$$t_i - s_i \geq t_{i+1} + l_{i+1}, \quad \text{e} \quad t_i - s_i \geq t_{i+1} + d_{i+1} \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, 2, \ldots, r\}. \tag{42}$$

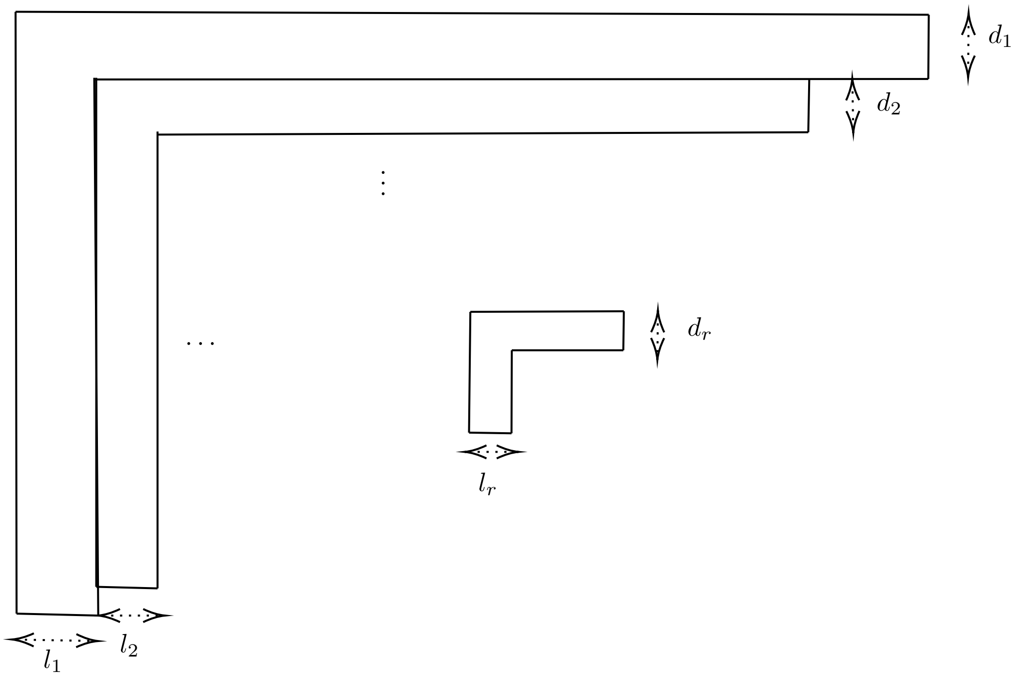
Denote por $T_1 = T_{\lambda_1}, \ldots, T_r = T_{\lambda_r}$ os respectivos diagramas de Young e $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_r$ os comprimentos das primeiras $d_1, \ldots, d_r$ linhas de $T_1, \ldots, T_r$ respectivamente. Análogo para as colunas, onde $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_r$ denota os comprimentos das primeiras $l_1, \ldots, l_r$ colunas de $T_1, \ldots, T_r$ respectivamente. A condição (41) diz-nos que $l_i + t_i - s_i \leq \mathcal{L}_i \leq l_i + t_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, e similarmente $d_i + t_i - s_i \leq \mathcal{K}_i \leq d_i + t_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

A condição 42 permite-nos colar os diagramas seguindo a seguinte regra

- Colar a primeira linha de T_2 a $d_1 + 1$-ésima linha de T_1.
- Colar a segunda linha de T_2 a $d_1 + 2$-ésima linha de T_1.

  $\vdots$

e assim por diante. Isto é, juntamos a j-ésima linha de T_2 a $d_1 + j$-ésima linha de T_1. O mesmo processo se faz com T_i e T_{i+1}, onde formamos a tabela denotada por $T_i \star T_{i+1}$, cujo número de caixas é $n_i + n_{i+1}$. Por indução, formamos a tabela $T_\lambda = T_1 \star T_2 \star \cdots \star T_r$, onde $\lambda \vdash (n_1 + \cdots + n_r)$. Abaixo ilustramos essa colagem de tabelas.



Vamos agora mostrar como podemos fazer colagem de diagramas de Young, para isso, iremos nos apoiar no exemplo anterior.

Exemplo introdutório 2: Sejam $\lambda_1 = (6,6,3,2,1) \vdash 18$ e $\lambda_2 = (2,1) \vdash 3$. Considere os diagramas de Young

$D_{\lambda_1} =$

1	2	5	8	9	11
4	3	17	18	15	16
7	14	12			
13	10				
6					

$D_{\lambda_2} =$

1	3
2	

Baseados na construção acima, podemos "colar" D_{λ_1} em D_{λ_2} da mesma forma com que fizemos com a tabela de Young, porém antes fazendo a seguinte modificação:

Adiciona-se $n_1 = 18$ a cada entrada de D_{λ_2}

e assim, obtemos um novo diagrama:

$D'_{\lambda_2} =$

19	21
20	

Posteriormente adicionamos (analogamente ao feito acima) D_{λ_1} e D'_{λ_2}, obtendo o diagrama $D_{\lambda_1} \star D'_{\lambda_2}$

$D_{\lambda_1} \star D'_{\lambda_2} =$

1	2	5	8	9	11
4	3	17	18	15	16
7	14	12	19	21	
13	10	20			
6					

Construção geral do diagrama de Young:

Sejam $D_1, \ldots, D_r$ diagramas de Young correspondentes a $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Para cada $j \in \{1,2,\ldots,r\}$, denote por $\alpha_{uv}^{(j)}$ as entradas de D_j e escreva $D_j = T_j(\alpha_{uv}^{(j)})$.

Se $j \in \{2,\ldots,r\}$, formamos o diagrama $D'_j = T_j(\alpha_{uv}^{(j)} + n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1})$. Com isso temos $D'_2 = T_2(\alpha_{uv}^{(2)} + n_1)$, $D'_3 = T_3(\alpha_{uv}^{(3)} + n_1 + n_2)$, $D'_4 = T_4(\alpha_{uv}^{(4)} + n_1 + n_2 + n_3)$. Analogamente à colagem de tabelas feita acima, construímos o diagrama $D_\lambda = D_1 \star D'_2 \star \cdots \star D'_r$.

Agora, definimos $N_j = \begin{cases} \{1,2,\ldots,n_1\} & se \quad j=1 \\ \{n_1 + \cdots + n_{j-1} + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_j\}, & se \quad j \in \{2,\ldots,n\}. \end{cases}$

Se $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ temos a união disjunta $N = N_1 \cup \cdots \cup N_r$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, considere S_{n_j} o grupo simétrico agindo sobre N_j, e portanto $KS_{n_1}, \ldots, KS_{n_r}$ podem ser mergulhados em KS_n. Além disso $KS_{n_j} \cap KS_{n_i} = Ke$, para quaisquer $i \neq j$.

Lema 11.21. *Suponha que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ satisfazem as condições 41 e 42 e $D_1, \ldots, D_r$ são os diagramas de Young correspondentes. Se $D_\lambda = D_1 \star D_2 \star \cdots \star D_r$, então $e(D_\lambda) = e(D_1) \cdots e(D_r) + b$ onde b é uma combinação linear de $\sigma \in S_n$ que satisfazem $\sigma(N_i) \nsubseteq N_i$, para algum $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.*

O próximo lema será usado para demonstrar o teorema de Giambruno e Zaicev sobre a existência e integralidade do PI expoente. As demonstrações de 11.21 e 11.22 podem ser encontradas em [17] ou [19].

Lema 11.22. *Seja A uma superalgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K. Sejam $B_1, \ldots, B_r$ subalgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas de A tais que $B_1 J B_2 J \cdots J B_r \neq 0$ e*

$$d = \dim(B_1^{(0)} \oplus \cdots \oplus B_r^{(0)}), \quad l = \dim(B_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus B_r^{(1)}).$$

Então, para todo inteiro positivo $t \geq 2 \dim A$, existe uma partição $\lambda \vdash n$ com $h(d, l, 2t-s) \leq \lambda h(d, l, 2t)$, onde $s = 4 \dim A$. Além disso, existe um diagrama de Young D_λ tal que $e(D_\lambda) f \notin T(G(A))$ onde $f(x_1, \ldots, x_n)$ é algum polinômio multilinear com $\deg f \leq n + 3 \dim A$.

Lema 11.23. *Seja A uma superalgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0. Seja $q \geq 0$ como definido após (38). Então, existem constantes C_1, C_2, r_1, r_2 que dependem de $\dim A$ tais que $C_2 \neq 0$, e para cada n suficientemente grande, valem as desigualdades*

$$C_2 n^{r_2} q^n \leq c_n(G(A)) \leq C_1 n^{n_1} q^n.$$

Em particular, $\exp G(A)$ existe.

Demonstração. Sejam $d := \dim(B_1^{(0)} \oplus \cdots B_r^{(0)})$, $l := \dim(B_1^{(1)} \oplus \cdots B_r^{(1)})$ e $m := \dim A$.

Se $N \in \mathbb{N}$ com $N > 7m^2 + 3m$, pelo algoritmo de Euclides pode-se escrever $N - dl - 3m = t(2q) + r$, onde $0 \leq r \leq 2q - 1$. Observamos que $t(2q) + r + dl + 3m > 7m^2 + 3m \Leftrightarrow t(2q) + r + dl > 7m^2$.

Por outro lado, como $d + l = q$, tem-se que $d \leq q$ e $l \leq q$ e portanto $dl \leq q^2$, em particular $dl < m^2$. Segue que $t(2m) + 2m + m^2 > t(2q) + r + dl > 7m^2$ se e somente se $2t + 2 + m > 7m$, se e somente se $2t + 2 > 6m$ e se e somente se $t > 3m - 1$. Como $(3m-1) - 2m = m - 1 \geq 0$, concluímos que $t > 2m$. Pelo lema 11.22 existem n, $\lambda \vdash n$ com $h(d, l, 2t - 4m) \leq \lambda \leq h(d, l, 2t)$.

Existe f um polinômio multilinear, tal que $n \leq \deg f \leq n + 3m$, e um diagrama de Young D_λ satisfazendo $e(D_\lambda) f \notin T(G(A))$. Se $c = \deg f$, definimos

$$f'(x_1, \ldots, x_c, x_{c+1}, \ldots, x_N) = f(x_1, \ldots, x_c) x_{c+1} \cdots x_N.$$

Segue que se $\widehat{x}_i = x_i \otimes h_i$, onde $x_i \in A$ e $h_i \in G$ são elementos homogêneos, para $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, então

$$f'(x_1 \otimes h_1, \ldots, x_c \otimes h_c, x_{c+1} \otimes h_{c+1}, \ldots, x_N \otimes h_N) = f(x_1 \otimes h_1, \ldots, x_c \otimes h_c) x_{c+1} \cdots x_N \otimes h_{c+1} \cdots h_N.$$

Pela definição de $\widetilde{f}$ segue que $f'(x_1 \otimes h_1, \ldots, x_c \otimes h_c, x_{c+1} \otimes h_{c+1}, \ldots, x_N \otimes h_N) = (\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_c) \otimes h_1 \cdots h_c) x_{c+1} \cdots x_N \otimes h_{c+1} \cdots h_N$, isto é

$$f'(x_1 \otimes h_1, \ldots, x_c \otimes h_c, x_{c+1} \otimes h_{c+1}, \ldots, x_N \otimes h_N) = \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_c) x_{c+1} \cdots x_N \otimes h_1 \cdots h_N.$$

Em particular

$$e(D_\lambda) f'(x_1 \otimes h_1, \ldots, x_c \otimes h_c, x_{c+1} \otimes h_{c+1}, \ldots, x_N \otimes h_N) = e(D_\lambda) \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_c) x_{c+1} \cdots x_N \otimes h_1 \cdots h_N.$$

Dado que $\widetilde{e(D_\lambda)} f = e(D_\lambda) \widetilde{f}$, a igualdade acima se torna

$$e(D_\lambda) f'(x_1 \otimes h_1, \ldots, x_c \otimes h_c, x_{c+1} \otimes h_{c+1}, \ldots, x_N \otimes h_N) = \widetilde{e(D_\lambda)} f(x_1, \ldots, x_c) x_{c+1} \cdots x_N \otimes h_1 \cdots h_N.$$

Como $e(D_\lambda) f \notin T(G(A))$, pelo lema 10.29, $\widetilde{e(D_\lambda)} f \notin T(A)$ e assim, existem elementos homogêneos $w_1, \ldots, w_c \in A$ tais que $\widetilde{e(D_\lambda)} f(w_1, \ldots, w_c) \neq 0$.

Existe elemento homogêneo da forma $b = e_{ij}$ ou $b = c e_{ij}$ tal que $\widetilde{e(D_\lambda)} f(w_1, \ldots, w_c) b \neq 0$. Assim, se $w_{c+1} = b$ e $w_{c+2} = \cdots = w_N = e_{jj}$ temos que

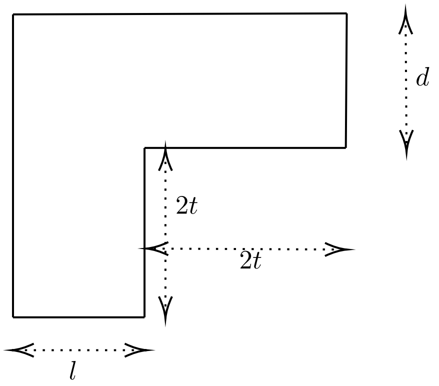
$$\widetilde{e(D_\lambda)} f(w_1, \ldots, w_c) w_{c+1} w_{c+2} \cdots w_N = \widetilde{e(D_\lambda)} f(w_1, \ldots, w_c) b e_{jj} = \widetilde{e(D_\lambda)} f(w_1, \ldots, w_c) b \neq 0.$$

Por outro lado, como $\dim G = \infty$, existem $g_1, \ldots, g_N \in G$ tais que $g_1 \cdots g_N \neq 0$. Logo

$$f'(w_1 \otimes g_1, \ldots, w_c \otimes g_c, w_{c+1} \otimes g_{c+1}, \ldots, w_N \otimes g_N) \neq 0.$$

Isto é, $e(D_\lambda)f' \notin T(G(A))$.

Como $\lambda \leq h(d, l, 2t)$, T_λ está contido no diagrama



e assim $(2t+l)d+2tl = 2td+ld+2tl+2t(d+l)+ld = 2tq+ld > n$. Analogamente, de $\lambda \geq h(d, l, 2t-4m)$ segue que $n \geq d(2t - 4m + l) + (2t - 4m)l = 2t(l + d) - 4md + dl - 4ml = 2tq - 4mq + dl$. Pelo teorema da ramificação 8.44 segue que $KS_N e(D_\lambda)f' \subseteq \bigoplus\limits_{\substack{\mu \vdash N \\ \mu \geq N}} I_\mu f'$, onde I_μ é o ideal minimal bilateral de KS_N correspondente a μ. Consequentemente, existe $\mu \geq \lambda$ e um diagrama de Young D_μ tal que $KS_N e(D_\mu)f' \nsubseteq T(G(A))$.

Em particular, $c_N(g(A)) \neq 0$ e além disso $c_N(G(A)) \geq d_\mu \geq d_{h(d,l,2t-4m)}$. Observemos que

$$N - |h(d, l, 2t - 4m)| = N - (2tq - 4mq + dl) = 2tq + dl + 3mr - 2tq + 4mq - dl = 3m + r + 4mq.$$

Como $r < 2q < 2m$, temos $N - |h(d, l, 2t - 4m)| = 3m + r + 4mq < 3m + 2m + 4m^2 = 4m^2 + 5m$. Pelo lema 11.16, $d_\mu \geq N^{-4m^2-3m} d_{h(d,l,2t-4m)}$.

Agora por 11.17, $d_{h(d,l,2t-4m)} \simeq_{k\to\infty} ak^b(d + l)^k = ak^bq^k$ donde existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ e $d_{h(d,l,2t-4m)} \geq ak^bq^k$.

Se $n > \max\{N, k_0\}$, concluí-se que existem constantes C_2, r_2, com $C_2 \neq 0$, as quais dependem somente de $m = \dim A$, e tais que $c_n(G(A)) \geq C_2 n^{r_2} q^n$.

A outra desigualdade segue da proposição 11.19. □

Estamos já em posição para demonstrar o teorema de existência do PI-expoente. Entretanto, gostaríamos de retirar a hipótese de o corpo K ser algebricamente fechado. Para tanto relacionamos a codimensão da álgebra $A \otimes_F K$ com a de A, onde F denota um corpo de característica 0 e K é uma extensão de F. O próximo resultado irá fazer isso. Não iremos demonstrá-lo aqui.

Teorema 11.24. *([19]) Sejam F um corpo de característica 0 e A uma F-álgebra. Se K é uma extensão de F, com K um corpo algebricamente fechado, então $c_n(A \otimes_F K) = c_n(A)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Além disso $m_\lambda(A \otimes_F K) = m_\lambda(A)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 11.25. *(Teorema de Giambruno e Zaicev) Seja R uma PI-álgebra sobre um corpo K de característica 0. Então, existe um inteiro $q \geq 0$ e constantes C_1, C_2, r_1, r_2, com C_1, $C_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $C_2 \neq 0$, tais que para n suficientemente grande*

$$C_2 n^{r_2} q^n \leq c_n(R) \leq C_1 n^{r_1} q^n.$$

Em particular, $\exp R$ existe e $\exp R \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Demonstração. Pelo teorema 11.24, pode-se assumir sem perda de generalidade que K é um corpo algebricamente fechado. Por outro lado, pelo teorema de Kemer (10.31) existe A uma superalgebra de dimensão finita sobre K tal que $T(R) = T(G(A))$ e em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ $c_n(R) = c_n(G(A))$. O resultado segue imediatamente do lema 11.23. □

Proposição 11.26. *a) Se $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{V}$ são variedades de álgebras, então $\exp \mathscr{U} \leq \exp \mathscr{V}$.*

b) Se A, B são PI-álgebras, então $\exp A \oplus B = \max\{\exp A, \exp B\}$.

Exemplo 11.27. *Dada uma lista de inteiros* $(d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{Z}_{>0}$, *denota-se por* $UT(d_1, \ldots, d_m)$ *o subconjunto de* $M_{d_1 + \cdots d_m}(K)$ *consistindo das matrizes triangulares superiores em blocos*

$$A = \begin{pmatrix} L_1 & \cdots & C_{1m} \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \\ 0 & \cdots & L_m \end{pmatrix}$$

onde $L_1, \ldots, L_m$ *são matrizes quadradas de ordem* $d_1 \times d_1, \ldots, d_m \times d_m$ *respectivamente, e* C_{ij} *são matrizes retangulares de tamanhos apropriados. Denotando por* B_{ij} *o subespaço das matrizes de mesma ordem que* C_{ij}, *por abuso de notação pode-se escrever*

$$UT(d_1, \ldots, d_m) = \begin{pmatrix} M_{d_1}(K) & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ 0 & M_{d_2}(K) & \cdots & B_{2m} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & M_{d_m}(K) \end{pmatrix}.$$

Então $UT(d_1, \ldots, d_m)$ *é uma subálgebra de* $M_{d_1 + \cdots + d_m}(K)$. *Suponha que* $m = 2$, *vamos primeiro calcular* $\exp UT(d_1, d_2)$. *Considere o ideal* H *de* $UT(d_1, d_2)$ *dado por*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma base de H *é* $\mathcal{H} = \{e_{ij} : \quad 1 \leq i \leq d_1, \quad d_1 < j \leq d_1 + d_2\}$.

Segue que H *é um nil ideal, e portanto,* $H \subseteq rad(UT(d_1, d_2))$. *Considere agora a função*

$$\psi\colon UT(d_1, d_2) \to M_{d_1}(K) \oplus M_{d_2}(K), \qquad \psi \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

É imediato que ψ *é um epimorfismo de álgebras e além disso,* $Ker(\psi) = H$. *Pelo primeiro teorema do isomorfismo segue que* $UT(d_1, d_2)/H \cong M_{d_1}(K) \oplus M_{d_2}(K)$. *Como* $M_{d_1}(K) \oplus M_{d_2}$ *é semissimples, segue que* $rad(UT(d_1, d_2)/H) = rad(UT(d_1, d_2))/H = 0$ *donde tem-se que* $rad(UT(d_1, d_2)) \subseteq H$ *e portanto que* $rad(UT(d_1, d_2)) = H$.

Notemos agora que $e_{11} e_{1,d_1+1} e_{d_1+1,d_1+1} = e_{d_1+1,d_1+1}$ *e segue que* $M_{d_1}(K) B_{12} M_{d_2}(K) \neq 0$. *Logo*

$$\exp UT(d_1, d_2) = \dim M_{d_1}(K) + \dim M_{d_2}(K) = d_1^2 + d_2^2.$$

No caso geral o resultado segue de forma análoga, notando que $rad(UT(d_1, \ldots, d_m)) \cong \oplus_{i<j} B_{ij}$. *De fato, qualquer matriz*

$$A \in G, \quad \text{onde} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & B_{2m} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

é nilpotente, donde tem-se que $rad(UT(d_1, \ldots, d_m)) \subseteq G$. *Pelo mesmo raciocínio feito na construção da função* ψ *acima, concluí-se que* $rad(UT(d_1, \ldots, d_m)) = G \cong \bigoplus_{i<j} B_{ij}$. *Consequentemente, segue que* $\exp UT(d_1, \ldots, d_m) = d_1^2 + \cdots + d_m^2$.

Teorema 11.28. *Seja* A *uma álgebra de dimensão finita* K *de característica* 0. *Então*

a) $\exp A \leq \dim A$

b) Considere Ω *o conjunto de todas as subálgebras simples* $B \subseteq A$ *e* $d = \max\{\dim_{Z(B)} B : B \in \Omega\}$. *Se* $B \in \Omega$ *é tal que* $\dim_{Z(B)} B = d$, *segue que* $\exp A = \dim_{Z(B)} B$.

Em particular, se A *é simples* $\exp A = \dim_{Z(A)} A$.

c) A álgebra A *é central e simples sobre* K *se, e somente se,* $\exp A = \dim_K A$.

12 Resultados principais 2: Caracterização das variedades de álgebras associativas cujas codimensões têm crescimento polinomial

Nesta seção iremos fornecer caracterizações de variedades com crescimento polinomial das suas codimensões, o principal resultado é teorema 12.21, o qual fornece 4 caracterizações. Os resultados trabalhados aqui são devidos a Giambruno, Zaicev ([18]) e Kemer ([24]).

12.1 Separação de T-ideais de PI-álgebras pela álgebra de Grassmann

Proposição 12.1. *Seja G a álgebra de Grassmann sobre K. Então, cada S_n-módulo irredutível aparece com multiplicidade 1 em $P_n/P_n \cap T(G)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e além disso todas as partições associadas estão em $H(1,1)$. Em outras palavras, para cada $n \in \mathbb{N}$*

$$\chi_n(G) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \subseteq H(1,1)}} \chi_\lambda.$$

Demonstração. Seja λ uma partição de n com $\lambda \subseteq H(1,1)$. Então $\lambda = (k,1,1,\ldots,1) = (k,1^{n-k})$. Considere o diagrama de Young D_λ dado por

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & \cdots & \cdots & k \\
\hline
k+1 \\
\cline{1-1}
\vdots \\
\cline{1-1}
n-1 \\
\cline{1-1}
n \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

Nas notações da seção 8 segue que $R(D_\lambda) = S_k$, e $C(D_\lambda) = (1,k+1,\ldots,n)S_{n-k+1}$.

Considere agora um monômio $w = x_1 \cdots x_n$. Vejamos que se $w_k = e(D_\lambda)w$, então como $\tau \in C(D_\lambda)$ fixa os elementos $\{2,3,\ldots,k\}$, temos

$$w_k = (\sum_{\sigma \in R(D_\lambda)} \sigma)(\sum_{\tau \in C(D_\lambda)} (-1)^\tau x_{\tau(1)} x_2 \cdots x_k x_{\tau(k+1)} \cdots x_{\tau(n)}).$$

Vamos mostrar que $w_k \notin T(G)$. Isso implica que na soma $\chi_n(G) = \sum_{\mu \vdash n} m_\mu \chi_\mu$, todas as partições da forma $\mu^{(k)} = (k,1^{n-k})$ são tais que $m_{\mu^{(k)}} \geq 1$. Considere os elementos $\widetilde{x}_1 = e_1$, $\widetilde{x}_{k+1} = e_2$, $\ldots$, $\widetilde{x}_n = e_{n-k+1}$, e $\widetilde{x}_2 = e_{n-k+2}e_{n-k+3}$, $\widetilde{x}_3 = e_{n-k+4}e_{n-k+5}$, $\ldots$, $\widetilde{x}_{k-1} = e_{n-1}e_{n+1}$, $\widetilde{x}_k = e_{n+k-2}e_{n+k-1}$.

Como $\widetilde{x}_2$, $\ldots$, $\widetilde{x}_k \in G^{(0)}$ segue que

$$w_k(\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n) = \left(\sum_{\sigma \in R(D_\lambda)} \sigma\right) \widetilde{x}_2 \cdots \widetilde{x}_k \Big(s_{n-k+1}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_{k+1},\ldots,\widetilde{x}_n)\Big).$$

Por outro lado, $s_{n-k+1}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_{k+1},\ldots,\widetilde{x}_n) = (n-k+1)!e_1 \cdots e_{n-k+1} \neq 0$, donde tem-se que

$$w_k(\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n) = (n-k+1)! \left(\sum_{\sigma \in S_k} \sigma\right) \widetilde{x}_2 \cdots \widetilde{x}_n (n-k+1)! e_1 \cdots e_{n-k+1}.$$

Logo $w_k(\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n) = (n-k+1)!k!e_1 \cdots e_{n+k-1} \neq 0$.

Sabe-se do teorema 4.3 que $c_n(G) = 2^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e também que $c_n(G) = \sum_{\lambda \vdash n} \deg \chi_\lambda$.

Para cada $\mu^{(k)} \vdash n$, em cada entrada de $T_{\mu^{(k)}}$ o comprimento do gancho (i,j) é dado por

$$h_{11} = k-1+n-k+1 = n, \quad h_{1j} = j-1, \quad j \in \{2,\ldots,k\}, \quad h_{l1} = l-1, \quad l \in \{k+1,\ldots,n\}$$

e pela fórmula do gancho 8.40

$$\deg \chi_{\mu^{(k)}} = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}} = \frac{n!}{n \cdot 2 \cdots k-1 \cdots k \cdots n-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Como $\sum_{\lambda\vdash n}\deg\chi_\lambda \geq \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$, concluí-se que $\chi_n(G) = \sum_{k=1}^{n}\chi_{\mu^{(k)}} = \sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \lambda\subseteq H(1,1)}}\chi_\lambda$. $\square$

Resumimos no teorema abaixo os resultados conhecidos sobre a álgebra de Grassmann sobre corpos de característica 0. Foram estabelecidos na seção 4.1 bem como na proposição 12.1.

Teorema 12.2. *Seja G uma álgebra de Grassmann sobre um corpo K de característica 0. Então, são verificados:*

a) $T(G) = \langle[[x_1,x_2],x_3]\rangle^T$

b) $c_n(G) = 2^{n-1}$, *para todo* $n\in\mathbb{N}$.

c) $\chi_n(G) = \displaystyle\sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \lambda\subseteq H(1,1)}}\chi_\lambda$.

Segue de imediato de c) que $l_n(G) = n$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Proposição 12.3. *Seja $\mathscr{V}$ uma variedade de álgebras associativas sobre um corpo de característica 0. Então, $\mathscr{V}$ satisfaz uma identidade standard se, e somente se $\mathscr{V}$ não contém G.*

Antes da demonstração da proposição acima, precisamos de alguns fatos.

Dado $k\geq 1$, sabe-se que $e_{(1^k)} = \sum_{\sigma\in S_k}(-1)^\sigma\sigma$. Considere $r,l\geq 0$ tais que $r+l+1=k$ e a subdivisão $\{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_l,t\} = \{1,2,\dots,k\}$.

Afirmamos que $e_{(1^k)}[[x_{i_1}\cdots x_{i_r}, x_{j_1}\cdots x_{j_l}],x_t] = 0$.

Ao invés de agir com S_k no conjunto $\{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_l,t\}$, é suficiente supormos que $i_1 = 1,\dots,$ $i_r = r, j_1 = r+1,\dots, j_l = k-1, t = k$. Notemos que se $p(x_1,\dots,x_k) = e_{(1^k)}[[x_1\cdots x_r, x_{r+1}\cdots x_{k-1}],x_k]$, então $p(x_1,\dots,x_k) = A+B+C+D$ onde

$$A = x_1\cdots x_k, B = -x_{r+1}\cdots x_{k-1}x_1\cdots x_rx_k, C = -x_kx_1\cdots x_{k-1}, D = x_kx_{r+1}\cdots x_{k-1}x_1\cdots x_r.$$

Por conta do teorema 3.3, existe $\alpha\in K$ tal que $e_{(1^k)}p(x_1,\dots,x_k) = \alpha s_k(x_1,\dots,x_k)$. Dessa forma

$$e_{(1^k)}A + e_{(1^k)}B + e_{(1^k)}C + e_{(1)^k}D = \alpha e_{(1)^k}s_k = \alpha k!s_k$$

logo, os monômios de $e_{(1^k)}A+e_{(1^k)}B+e_{(1^k)}C+e_{(1)^k}D$ possuem o mesmo coeficiente em $e_{(1^k)}$, e assim, basta calcularmos o coeficiente $a\in K$ de $x_1\cdots x_k$ em $e_{(1^k)}p$. Se a_A, a_B, a_C, a_D são os coeficientes de $x_1\cdots x_k$ em $e_{(1^k)}A, e_{(1^k)}B, e_{(1^k)}C, e_{(1^k)}D$ respectivamente, então $a_A+a_B+a_C+a_D = a$.

Note agora que para se obter $x_1x_2\cdots x_jx_{r+1}\cdots x_{k-1}x_{j+1}\cdots x_k$ precisa-se agir em B com exatamente $p = k-r-1$ transposições, e disto, concluí-se que $a_B = -(-1)^{rp}$.

De forma análoga mostra-se que $a_C = (-1)^{k-1}$ e $a_D = (-1)^{rp}(-1)^{k-1}$. Como $a_A = 1$ e $k-1 = p+r$ tem-se que

$$a = 1-(-1)^{rp}-(-1)^{r+p}+(-1)^{rp}(-1)^{r+p} = (1-(-1)^{rp})(1-(-1)^{r+p})$$

donde segue que $a=0$ pois não importa a paridade de p,r, ou $(-1)^{rp}=1$ ou $(-1)^{r+p}=1$.

Vamos então para a demonstração da proposição acima.

Demonstração. $(\Rightarrow)$: Suponha que $\mathscr{V}$ satisfaça a identidade standard de grau m.

Dado que $s_m(e_1,\dots,e_m) = m!e_1\cdots e_m \neq 0$, segue que $G\notin\mathscr{V}$.

$(\Leftarrow)$: Suponha que f é um polinômio multilinear, $f\in T(\mathscr{V})$ e $f\notin T(G)$. Notemos que se p,q,a e b são monômios em $K\langle X\rangle$, pela observação 4.2 segue que $[[p,q],ab] = [[p,q],a]b + a[[p,q],b]$.

Por outro lado, por 12.2 temos que os elementos de $T(G)$ podem ser escritos como combinação linear de elementos da forma

$$a[[x_{i_1}\cdots x_{i_k}, x_{j_1}\cdots x_{j_l}],x_r]b \tag{43}$$

onde a,b são monômios de grau ≥ 0.

Lema 4.1 implica que para cada $n\in\mathbb{N}$, $P_n/P_n\cap T(G)$ é gerado por elementos da forma

$$x_{i_1}\cdots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}]\cdots[x_{j_{2m-1}},x_{j_{2m}}] + P_n\cap T(G) \tag{44}$$

com

$$i_1<\cdots<i_k, \quad j_1<j_2\cdots j_{2m}, \quad 2m+k=n, \quad e \quad \{i_1,\dots,i_k\}\cap\{j_1,\dots,j_{2m}\} = \emptyset. \tag{45}$$

Dado que $f\in P_n$ mas $f\notin T(G)$, pode-se assumir sem perda de generalidade que um elemento da forma

$$x_1\cdots x_k[x_{k+1},x_{k+2}]\cdots[x_{n-1},x_n] \tag{46}$$

aparece na soma de f com coeficiente 1. Substituindo em f os elementos $x_1, \ldots, x_k$ por respectivamente $[x_1, y_1], \ldots, [x_k, y_k]$, obtemos o polinômio $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ o qual é também uma identidade de $\mathscr{V}$. Qualquer avaliação $\phi\colon X \to K\langle X\rangle$ em g é ainda uma identidade polinomial, e além disso, se $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{2m}\} \neq \{1, 2, \ldots, n\}$, pelo lema 4.1, segue que

$$x_{i_1} \cdots x_{i_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] \in T(G).$$

Portanto $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = [x_1, y_1] \cdots [x_k, y_k][x_{k+1}, x_{k+2}] \cdots [x_{n-1}, x_n] + h$, onde $h \in P_n \cap T(G)$. Renomeando as variáveis, temos $g = [x_1, x_2] \cdots [x_{2q-1}, x_{2q}] + h$, onde $h \in P_{2q} \cap T(G)$ é uma combinação linear de elementos da forma 43. Vejamos que se $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l, r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 2q\}$ e ainda se $S_{\{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l,r\}}$ denota o conjunto das permutações do conjunto $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l, r\}$, então denotaremos

$$v = \sum_{\sigma \in S_{\{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l,r\}}} (-1)^\sigma \sigma.$$

Então existe $\mathbf{a} \in KS_{2q}$ tal que $e_{(1^{2q})} = \mathbf{a}v$.

Sem perda de generalidade podemos supor $h = a[[x_{i_1} \cdots x_{i_k}, x_{j_1} \cdots x_{j_l}], x_r]b$, onde a, b são monômios de grau ≥ 0. Pelo argumento utilizado após o enunciado da proposição, tem-se que $e_{(1^{2q})}h = \mathbf{a}vh = 0$. Pela observação 4.5, $\dfrac{1}{2^q} e_{(1^{2q})} g = \dfrac{1}{2^q} e_{(1^{2q})}[x_1, x_2] \cdots [x_{2q-1}, x_{2q}] = s_{2q}$.

Segue que s_{2q} é uma identidade em $\mathscr{V}$. □

Corolário 12.4. *Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superalgebra tal que $G(A)$ satisfaz uma identidade standard. Então o ideal $AA^{(1)}A$ é nilpotente.*

Demonstração. Suponha primeiro que K seja um corpo algebricamente fechado. É suficiente mostrarmos que $A^{(1)} \subseteq J$, onde $J = rad(A)$.

Vamos analisar primeiro o caso em que A é semissimples e $A^{(1)} \neq 0$. Pelo teorema de Wedderburn-Artin e o teorema de classificação de superalgebras simples de dimensão finita 10.26, A pode ser escrito como uma soma direta de superalgebras simples, as quais são da forma $M_k(K)$, $M_{k,l}(K)$ ou $M_k(K \oplus cK)$, com $c^2 = 1$. Como $A^{(1)} \neq 0$, pelo menos uma das componentes da soma direta de A é da forma $M_{k,l}(K)$ ou $M_k(K \oplus cK)$.

Se $M_{k,l}(K)$ é uma dessas álgebras simples da decomposição de A, e $k \geq l > 1$, considere o homomorfismo de álgebras

$$\psi\colon M_{1,1}(K) \to M_{k,l}(K) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ae_{1,1} + be_{1,k+1} + ce_{k+1,1} + de_{k+1,k+1}.$$

Dado que ψ é injetor, segue que $M_{1,1} \cong \psi(M_{(1,1)})$. Dessa forma, sem perda de generalidade pode-se supor que $M_{1,1}(K)$ é uma subalgebra de $M_{k,l}(K)$, e portanto $G(A)$ contém a subalgebra

$$F = (K(e_{11} + e_{22}) \otimes G^{(0)}) \oplus (K(e_{12} + e_{21}) \otimes G^{(1)}).$$

Dado que G mergulha em F e $\dim F = \dim G$, concluí-se que $F \cong G$. Porém isso é um absurdo pois G não satisfaz nenhuma identidade standard. Logo, $M_{k,l}(K)$ não é uma dessas álgebras.

Caso $M_k(K \oplus cK)$ seja uma destas álgebras simples, então como $K \oplus cK$ pode ser considerado uma subalgebra de $M_k(K \oplus cK)$, segue que $G(A)$ contém a subalgebra

$$G(K \oplus cK) = ((K \oplus cK) \otimes G^{(0)}) \oplus ((K \oplus cK) \otimes G^{(1)})$$

a qual é isomorfa a G pois $\dim(K \otimes cK) = 1$, e assim, como no caso anterior, obtemos uma contradição. E assim, $M_k(K \oplus cK)$ não pode ser uma dessas álgebras simples. Consequentemente, A não pode ser semissimples.

Como A não é semissimples, seu radical de Jacobson J é não nulo, e assim, podemos considerar a álgebra A/J a qual é semissimples e $G(A/J)$ satisfaz também uma identidade standard. Consequentemente, pelo feito acima, $A^{(1)}/J = 0$, donde tem-se que $A^{(1)} \subseteq J$.

Resta-nos ainda considerar o caso em que K é um corpo qualquer de característica 0. Nesta situação, se $L = \overline{K}$ é o fecho de K, defina $A_L = A \otimes_K L$ e $G_L = G \otimes_K L$. Então, como

$$G_L(A_L) \cong \Big((A^0 \otimes G^{(0)}) \otimes L \otimes L\Big) \bigoplus \Big((A^{(1)}) \otimes G^{(1)} \otimes L \otimes L\Big),$$

tem-se que $G_L(A_L)$ satisfaz a identidade standard se, e somente se, $G(A)$ satisfaz a identidade standard. E assim, aplica-se a primeira parte à G_L e A_L. □

O próximo teorema é o principal desta subseção, ele caracteriza variedades que são geradas por álgebras de dimensão finita em termos da álgebra de Grassmann. De maneira menos formal, pode-se dizer que a álgebra de Grassmann separa T-ideais de variedades geradas por álgebras de dimensão finita.

Teorema 12.5. *Dada uma variedade $\mathscr{V}$, são equivalentes:*
a) $\mathscr{V} = var(A)$, onde A é uma álgebra de dimensão finita.
b) $\mathscr{V}$ satisfaz uma identidade de Capelli.
c) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\chi_n(\mathscr{V}) \subseteq H(d,0)$, para algum $d \geq 1$.
d) $\mathscr{V}$ satisfaz uma identidade standard.
e) $G \notin \mathscr{V}$.

Demonstração. A implicação $a) \Rightarrow b)$ segue por 11.6; $b)$ e $c)$ são equivalentes por 11.5. Se uma variedade satisfaz uma identidade de Capelli, então por definição, esta satisfaz uma identidade standard, donde segue que $b)$ implica $d)$. Por outro lado, pela proposição 12.3 tem-se que $d)$, $e)$ são equivalentes. Resta mostrar que $e)$ implica $a)$. Pelo segundo teorema de Kemer 10.31, existe uma superalgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ de dimensão finita tal que $\mathscr{V} = var(G(A))$.

Pelo corolário 12.4, o ideal $AA^{(1)}A$ é nilpotente, portanto, $I = G(A)(A^{(1)} \otimes G^{(1)})G(A)$ também é nilpotente, e existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I^m = 0$. Logo qualquer produto contendo m fatores da forma $a \otimes g$, $a \in A^{(1)}$, $g \in G^{(1)}$, deve ser nulo. Seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ uma base de $A^{(1)}$ e $t = max\{k, m\}$, se $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ representa os geradores de G, defina $\mathscr{E} = \{a_i \otimes e_j : 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq t\}$. Considere C a subalgebra de $G(A)$ gerada por $A^{(0)} \otimes 1$ juntamente com $\mathscr{E}$. Então C tem a forma

$$C = \left\{ \sum_{j \in J} \alpha_j r_{1,j} \cdots r_{n_j,j} \mid |J| < \infty, \quad r_{1,j}, \ldots, r_{n_j,j} \in (A^0 \otimes 1) \cup \mathscr{E}, \quad \alpha_j \in K \right\}.$$

Além disso, $C = C^{(0)} \oplus C^{(1)}$ e $\dim C < \infty$. Vamos mostrar que $\mathscr{V} = var(C)$. , Notemos que isso equivale a $T(\mathscr{V}) = T(C)$.

Dado que C é uma subálgebra de $G(A)$, e $T(\mathscr{V}) = T(G(A))$, segue que $T(C) \subseteq T(G(A))$. Portanto, é suficiente ver que se $f \notin T(G(A))$, então $f \notin T(C)$. Para isso, considere $f \notin T(G(A))$. Existem b_1, $\ldots$, $b_s \in A^{(0)}$, g_1, $\ldots$, $g_s \in G^{(0)}$, a_{i_1}, $\ldots$, $a_{i_{n-s}} \in A^{(1)}$, h_1, $\ldots$, $h_{n-s} \in G^{(1)}$ tais que

$$f(b_1 \otimes g_1, \ldots, b_s \otimes g_s, a_{i_1} \otimes h_1, \ldots, a_{i_{n-s}} \otimes h_{n-s}) \neq 0. \tag{47}$$

Reagrupando os elementos da avaliação em 47 obtemos um polinômio $u(x_1, \ldots, x_n)$ tal que

$$f(b_1 \otimes g_1, \ldots, b_s \otimes g_s, a_{i_1} \otimes h_1, \ldots, a_{i_{n-s}} \otimes h_{n-s}) = u(b_1, \ldots, b_s, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-s}}) \otimes g_1 \cdots g_s h_1 \cdots h_{n-s} \neq 0. \tag{48}$$

Concluí-se de 48 que em particular $(g_1 \cdots g_s)h_1 \cdots h_{n-s} \neq 0$. Disso segue que $n - s < m \leq t$. Dessa forma, podemos avaliar $f(x_1, \ldots, x_n)$ nos elementos $b_1 \otimes 1$, $\ldots$, $b_s \otimes 1$, $a_{i_1} \otimes e_1$, $\ldots$, $a_{i_{n-s}} \otimes e_{n-s} \in C$. Assim

$$f(b_1 \otimes 1, \ldots, b_s \otimes 1, a_{i_1} \otimes h_1, \ldots, a_{i_{n-s}} \otimes h_{n-s}) = u(b_1, \ldots, b_s, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-s}}) \otimes h_1 \cdots h_{n-s} \neq 0$$

implicando que $f \notin T(C)$. Concluímos então que $T(G(A)) = T(C)$ e portanto $\mathscr{V} = var(C)$. □

12.2 Caracterizações de variedades de crescimento polinomial

Primeiro estabelecemos alguns resultados a respeito dos elementos idempotentes que definem as representações irredutíveis de S_n, bem como alguns fatos clássicos sobre o PI-expoente.

Lema 12.6. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash n'$, com $n' \leq n$, e suponha $\lambda \geq \mu$. Seja D_λ o diagrama de Young no qual os inteiros $1, 2, \ldots, n'$ são arranjados em um subdiagrama D_μ. Então, existem a, $b \in KS_n$ com $e_{D_\lambda} = ae(D_\mu)b$.*

Demonstração. Por hipótese, $R(D_\mu)$ e $C(D_\mu)$ são subgrupos de $R(D_\lambda)$ e $C(D_\lambda)$ respectivamente. Dessa forma, tem-se a união disjunta em classes laterais à esquerda e à direita respectivamente

$$R(D_\lambda) = \bigcup_i \tau_i R(D_\mu), \quad e \quad C(D_\lambda) = \bigcup_i C(D_\mu)\sigma_i.$$

Dessa forma, como

$$e(D_\lambda) = \sum_{\tau \in R(D_\lambda), \sigma \in C(D_\lambda)} (-1)^\sigma \tau\sigma = \left(\sum_{\tau \in R(D_\lambda)} \tau \right) \left(\sum_{\sigma \in C(D_\lambda)} (-1)^\sigma \sigma \right)$$

segue que

$$e(D_\lambda) = \left(\sum_i \tau_i\right)\left(\sum_{\tau\in R(D_\mu)} \tau\right)\left(\sum_{\sigma\in C(D_\mu)} (-1)^\sigma \sigma\right)\left(\sum_j (-1)^{\sigma_j}\sigma_j\right)$$

e assim, se $a = \sum_i \tau_i$ e $b = \sum_j (-1)^{\sigma_j}\sigma_j$, então $e(D_\lambda) = ae(D_\mu)b$. □

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada na página 139 de [19].

Lema 12.7. *Seja d um inteiro positivo e $\lambda \vdash n$, com $\lambda = (k^d)$, onde $kd = n$. Então, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_0$ $d_\lambda = \deg \chi_\lambda > \dfrac{d^n}{n^{1/2d(d-1)}}$.*

Lema 12.8. *a) Se $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{V}$ são variedades de álgebras, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $c_n(\mathscr{U}) \leq c_n(\mathscr{V})$ e portanto, $\exp \mathscr{U} \leq \exp \mathscr{V}$.*

b) Se R e S são duas PI-álgebras, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $c_n(R \oplus S) \leq c_n(R) + c_n(S)$. Segue disso que $\exp R \oplus S = \max\{\exp A, \exp B\}$.

Teorema 12.9. *Dada uma PI-álgebra R, são equivalentes:*

a) A sequência $(c_n(R))_n$ é polinomialmente limitada.

b) $\exp R \leq 1$

c) Existe uma constante $q \in \mathbb{N}$ tal que $\chi_n(R) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ |\lambda|-\lambda_1\leq q}} m_\lambda \chi_\lambda$ onde para cada $\lambda \vdash n$, $|\lambda| - \lambda_1$ denota a quantidade de caixas que estão abaixo da primeira coluna da tabela de Young T_λ.

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b) : Por hipótese, existem $C, t > 0$ tais que $c_n(R) \leq Cn^t$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, segue que $\exp R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(R)} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{Cn^t} = 1$.

Suponha sem perda de generalidade que para qualquer $q > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ e $\lambda \vdash N$ tal que $\lambda_2 := m \geq q$ e $m_\lambda \neq 0$ na decomposição de $\chi_N(R)$. Considere agora D_λ o diagrama de Young obtido preenchendo-se a primeira linha da esquerda pra direita (começando na posição $(1,1)$) com os números $1, 3, \ldots 2m-1$ e na segunda linha (começando em $(2,1)$) com $2, 4, \ldots, 2m$. Tal diagrama é esboçado na figura abaixo.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 3 & 5 & \cdots & \cdots & 2m-1 \\
\hline
2 & 4 & 6 & \cdots & 2m & \\
\cline{1-5}
\ & & & \multicolumn{3}{c}{} \\
\cline{1-3}
\ & & & \multicolumn{3}{c}{} \\
\cline{1-3}
\ & & & \multicolumn{3}{c}{} \\
\cline{1-3}
\end{array}$$

Dado que $m_\lambda \neq 0$, pelo teorema 11.3 existe um diagrama de Young D_λ e um polinômio $f \in P_N$ tal que $e(D_\lambda)f$ não é uma identidade em R. Sem perda de generalidade, pode-se assumir que f é da forma $f(x_1, \ldots, x_N) = \alpha x_{\varpi(1)} \cdots x_{\varpi(N)}$ onde $\varpi \in S_N$. Considere agora S_{2m} mergulhado como um subgrupo de S_N via

$$\iota\colon S_{2m} \to S_N, \quad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m & 2m+1 & \cdots N \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(2m) & 2m+1 & \cdots N \end{pmatrix}.$$

Se $\mu = (m, m) \vdash 2m$, então $\mu \leq \lambda$. Assim, se D_μ é o diagrama associado a μ, pelo lema 12.6 segue que $e(D_\lambda)$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos da forma $\tau e(D_\mu)\sigma$, onde $\tau, \sigma \in S_N$. Dado que $e(D_\lambda)f$ não é uma identidade em R, existe um polinômio multilinear g (o qual também pode ser assumido ser um monômio) tal que $e(D_\mu)g$ não é uma identidade em R. Escreva $g(x_1, \ldots, x_n) = a_0 x_{\xi(1)} a_1 \cdots a_{2m-1} x_{\xi(2m)} a_{2m}$, onde $\xi \in S_{2m}$ e $a_0, \ldots, a_{2m}$ são monômios em $x_{2m+1}, \ldots, x_N$ de grau ≥ 0. Considere agora as novas variáveis $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_{2m-1}$ definidas da seguinte forma: ς_j é uma nova indeterminada caso $\deg a_j \geq 1$ e $\varsigma_j = 1$, caso $\deg a_j = 0$. Dessa forma, dado que $e(D_\mu)g$ não é uma identidade em R, concluí-se que $e(D_\mu)h = e(D_\mu)x_{\xi(1)}\varsigma_1 \cdots \varsigma_{2m-1} x_{\xi(2m)}$, onde $h = x_{\xi(1)}\varsigma_1 \cdots \varsigma_{2m-1} x_{\xi(2m)}$. Portanto, h é um polinômio multilinear em $x_1, \ldots, x_k$, onde $2m \leq k \leq 4m$. Considere agora M o $S_{2m}-$submódulo irredutível de P_k gerado por $e(D_\mu)h$. Dado que $\chi_M = \chi_\mu$, pelo lema 12.7 $d_\mu = \deg \chi_\mu > \dfrac{2^{2m}}{2m}$. Logo $c_k(R) = \dim \dfrac{P_k}{P_k \cap T(R)} > \dfrac{2^{2m}}{2m} > \dfrac{2^{\frac{k}{2}}}{k}$ pois $\dfrac{k}{2} < 2m \leq k$. Com isso, mostramos que dado $q > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$, com $2q \leq 2m \leq k$ tal que $c_k(R) > \dfrac{(\sqrt{2})^k}{k}$, e portanto $\sqrt[k]{c_k(R)} > \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[k]{k}} > 1$.

Mas isso contraria o fato de que $\exp R \leq 1$. Conclui-se que todos os caracteres irredutíveis que aparecem com multiplicidade $\neq 0$ em $\chi_n(R)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, correspondem a diagramas de Young onde a segunda linha é limitada por uma constante C, isto é, para cada $\lambda \vdash n$, então $\lambda_2 \leq C$. Agora, dado que $\exp R \leq 1$ e $\exp G = 2$ (teorema 12.2) segue que $G \notin var(R)$, pois caso contrário $\exp G \leq \exp R$ o que é um absurdo. Pela proposição 12.3, temos que R satisfaz alguma identidade standard, e assim, pelo teorema 12.5, existe $d > 0$ tal que para todo $\lambda \vdash n$, $n \in \mathbb{N}$, com $m_\lambda \neq 0$, vale $\lambda \in H(d, 0)$ implicando que se $q = Cd$, temos $|\lambda| - \lambda_1 \leq q$ o qual prova $c)$.

$c) \Rightarrow a)$: Suponha que para todo $n \geq 1$ vale $\chi_n(R) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 \leq q}} m_\lambda \chi_\lambda$.

Fixe um $n \geq 1$. Dado que $\lambda_1 \geq n - q$, se h_{ij} denota o (i, j)-gancho de T_λ segue que $h_{11} \geq n - q$, $h_{12} \geq n - q - 1, \ldots, h_{1\lambda_1} \geq 1$. Pela formula do gancho (8.40)

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in B(\lambda)} h_{ij}} \leq \frac{n!}{(n-q)!} \leq n^q.$$

Como $P_n \equiv KS_n$ e $\chi_{reg} = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \chi_\lambda$, temos $m_\lambda \leq d_\lambda \leq n^q$. Portanto $c_n(R) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \deg \chi_\lambda \leq \#\{\lambda : \lambda \vdash n, n - \lambda_1 \leq q\} n^{2q}$.

Porém $\#\{\lambda \mid \lambda \vdash n, n - \lambda_1 \leq q\} \leq q^2$ uma vez que para cada $\lambda \vdash n$ com $n - \lambda_1 \leq q$, T_λ está contido no diagrama de Young T_η, onde $\eta = (q^n)$. Concluí-se que $c_n(A) \leq q^2 n^{2q}$ donde segue $a)$. □

Vejamos que pela prova do teorema acima, se $\mathscr{V}$ é uma variedade tal que $\exp \mathscr{V} \leq 1$, então existe $d > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $\chi_n(\mathscr{V}) \subseteq H(d, 0)$ e com isso, pelo teorema 12.5 existe uma PI-álgebra de dimensão finita A satisfazendo $\mathscr{V} = varA$.

Corolário 12.10. *Se $\mathscr{V}$ é uma variedade com $\exp \mathscr{V} \leq 1$, existe uma PI-álgebra de dimensão finita A tal que $\mathscr{V} = varA$.*

Uma variedade $\mathscr{V}$ é dita ter **crescimento polinomial** se a sequência de codimensões $(c_n(\mathscr{V}))_n$ é polinomialmente limitada. Em seguida, vamos fornecer uma caracterização de tais variedades.

Teorema 12.11. *(Kemer-1979) Dada uma variedade $\mathscr{V}$, temos que $\exp \mathscr{V} \leq 1$ se, e somente se, G, $UT_2(K) \notin \mathscr{V}$.*

Demonstração. Sabe-se já que $\exp G = 2$, e $\exp UT_2(K) = 2$, pelo exemplo 11.27, uma vez que $UT_2(K) = UT(1, 1)$. Logo se $\exp \mathscr{V} \leq 1$, então G, $UT_2(K) \notin \mathscr{V}$.

Reciprocamente, assuma que G, $UT_2(K) \notin \mathscr{V}$. Como $G \notin \mathscr{V}$, pelo teorema 12.5 existe uma álgebra de dimensão finita A tal que $\mathscr{V} = varA$. Pelo teorema de Wedderburn-Malcev, pode-se escrever $A = A_1 \oplus \cdots A_k \oplus J$ onde para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, A_j é uma subalgebra simples e $A_j \cong M_{n_j}(K)$.

Suponha que exista $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $n_i > 1$. Nestas condições, $UT_2(K)$ pode ser visto como uma subalgebra de $M_{n_i}(K)$ (colocando as matrizes de $UT_2(K)$ no canto superior esquerdo das matrizes em $M_{n_i}(K)$ que possuem todas as outras entradas nulas), e assim, $UT_2(K)$ pode ser considerado uma subalgebra de A, porém isso é um absurdo pois $UT_2 \notin \mathscr{V}$. Segue $A_1 \cong A_2 \cong \cdots A_k \cong M_1(K) \cong K$.

Suponha que existam α, $\beta \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tais que $A_\alpha J A_\beta \neq 0$, e sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ as unidades em A_α e A_β respectivamente. Se para todo $x \in J$, $\varepsilon_1 x \varepsilon_2 = 0$, dados $a \in A_\alpha$ e $b \in A_\beta$, $axb = a\varepsilon_1 x \varepsilon_2 b = 0$, donde segue que $A_\alpha J A_\beta = 0$, o que é um absurdo por hipótese. Dessa forma, existe $x \in J$ tal que $y := \varepsilon_1 x \varepsilon_2 \neq 0$.

Considere B a subalgebra de A gerada por $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, y\}$. Então

$$B = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} a_i s_{1,i} \cdots s_{t_i,i}, \quad a_i \in K, \quad t_i \in \mathbb{N}, \quad s_{1,i}, \ldots, s_{t_i,i} \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, y\}, \quad m \in \mathbb{N} \Big\}$$

e além disso

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_2 \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_1(\varepsilon_1 x \varepsilon_2) = \varepsilon_1 x \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 x \varepsilon_2 \varepsilon_2 = \varepsilon_1 x \varepsilon_2 \tag{49}$$

Considere a única transformação linear $\varphi : B \to UT_2$ satisfazendo $\varphi(\varepsilon_1) = e_{11}$, $\varphi(\varepsilon_2) = e_{22}$, $\varphi(y) = e_{12}$.

Pelas equações estabelecidas em (49), segue que φ é um homomorfismo de álgebras. Como φ é sobrejetora e $\dim B = \dim UT_2 = 3$, concluímos que φ é um isomorfismo. Porém, isso implicaria que $UT_2 \in \mathscr{V}$ o qual é um absurdo. Isso nos mostra que

$$q = \max \Big\{ \dim(B_1 \oplus \cdots \oplus B_r) \mid B_1 J B_2 J \cdots J B_r \in \Theta \Big\} \leq 1,$$

onde Θ é o conjunto de todas as álgebras distintas dois a dois $B_1, \ldots, B_r \in \{A_1, \ldots, A_k\}$.

Dessa forma, por definição do PI-expoente de A, temos que $\exp A \leq 1$, e assim, $\exp \mathscr{V} \leq 1$. □

Definição 12.12. *Uma variedade $\mathscr{V}$ tem crescimento* ***quase polinomial*** *se $\mathscr{V}$ tem crescimento exponencial, mas qualquer subvariedade $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{V}$ tem crescimento polinomial.*

Exemplo 12.13. *As variedades, $var(G)$, $var(UT_2)$ são de crescimento quase polinomial. De fato, seja $\mathscr{M}$ uma subvariedade própria de $var(G)$. Se $G \in \mathscr{M}$, então $T(\mathscr{M}) = T(G)$, o que implicaria que $\mathscr{M} = var(G)$. Dessa forma, tem-se que $G \notin \mathscr{M}$ e portanto, pelo teorema 12.5 existe uma K-álgebra de dimensão finita Q tal que $\mathscr{M} = var(Q)$, isto é, $T(\mathscr{M}) = T(Q)$. Pelo teorema de Wedderburn-Malcev podemos escrever $Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m \oplus rad(Q)$ onde $Q_1, \ldots, Q_m$ são K-álgebras simples de dimensão finita. Como na prova do teorema 12.11, K pode ser assumido algebricamente fechado, e assim, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $Q_i \cong M_{n_i}(K)$.*

Caso algum $n_i > 1$, teríamos cópias de $M_2(K)$ em Q, porém isso extrapola o crescimento polinomial de $var(G)$, uma vez que $\dim M_2(K) = 4$ e $\exp G = 2$. Segue $Q_1 \cong Q_2 \cong \cdots \cong Q_m \cong K$.

Por outro lado, se existissem $k, l \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tais que $Q_l rad(Q) Q_k \neq 0$, então como vimos na demonstração do teorema acima, Q conteria cópias de UT_2, e assim $UT_2 \in \mathscr{M} \subseteq var(G)$. Segue que $T(G) \subseteq T(UT_2)$, em particular, $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ é uma identidade de G. Porém, vejamos que se $G = G(V)$, onde V é um espaço vetorial sobre K com base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$, então, como $char(K) = 0$ $[e_1, e_2][e_3, e_4] = 4e_1e_2e_3e_4 \neq 0$, um absurdo. Segue que $\exp \mathscr{M} \leq 1$. Analogamente se mostra que $var(UT_2)$ é uma variedade de crescimento quase polinomial.

O próximo resultado nos mostra que as variedades de crescimento quase polinomial são apenas as do exemplo acima.

Teorema 12.14. *$var(G)$, $var(UT_2)$ são as únicas variedades de crescimento quase polinomial.*

Demonstração. Seja $\mathscr{T}$ uma variedade de crescimento quase polinomial a qual é diferente de $var(G)$ e $var(UT_2)$. Então, em particular, tem-se que $\exp \mathscr{T} > 1$ e portanto, por 12.11, G ou UT_2 estão em $\mathscr{T}$. Porém, isso implicaria que $var(G)$ ou $var(UT_2)$ seriam subvariedades de $\mathscr{T}$, mas isso é um absurdo pois $\exp G = \exp UT_2 = 2$.

□

O teorema abaixo fornece-nos uma outra caracterização de variedades de crescimento polinomial.

Teorema 12.15. *(Giambruno e Zaicev-2001, [18]) Seja $\mathscr{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo algebricamente fechado K. Então, $\exp \mathscr{V} \leq 1$ se, e somente se, $\mathscr{V} = var(A)$, onde A é uma álgebra de dimensão finita satisfazendo os itens abaixo:*

1) Existem K-álgebras $A_0, A_1, \ldots, A_m$, tais que $A_i = B_i + J_i$, onde $B_i \cong K$ e J_i é um ideal nilpotente de A_i, os quais são ideais à direita em A, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, e $A = A_0 \oplus A_1 \cdots \oplus A_m$.

2) Para cada $k, l \in \{1, 2, \ldots, m\}$, com $l \neq k$ $A_l A_k = 0$, $B_l A_0 = 0$. Neste caso $T(A) = T(A_1 \oplus A_0) \cap \cdots \cap T(A_m \oplus A_0) \cap T(J)$, onde J é o radical de Jacobson de A.

Demonstração. Suponha primeiro que $\exp \mathscr{V} \leq 1$. Pelo corolário 12.10, existe uma álgebra de dimensão finita A tal que $\mathscr{V} = var(A)$. Pelo teorema de Wedderburn-Malcev, $A = B_1 \oplus \cdots B_m \oplus J$, onde $B_1, \ldots, B_m$ são álgebras simples. Dado que $\exp A \leq 1$, pela construção do PI-expoente, devemos ter $B_l J B_k = 0$, para quaisquer $l \neq k$. Além disso $\dim B_k = 1$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Seja $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ e considere $\{e_1, \ldots, e_m\}$ conjunto de idempotentes ortogonais e centrais em B, isto é $e_i^2 = e_i$, $e_i \in Z(B)$, $e_i e_j = 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, e também $1_B = e_1 + \cdots + e_m$. Aqui 1_B é a unidade de B.

Dessa forma, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $e_i B = B_i \cong K$. Observemos que se $BJ = 0$, então pode-se tomar no enunciado $J_1 = \cdots = J_m = 0$ e $A_0 = J$, donde temos a soma direta $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, a qual satisfaz 2) trivialmente. Caso contrário, isto é, se $BJ \neq 0$, notemos que dado $0 \neq z \in BJ \subseteq J$, existem $x \in J$ e $b \in B$ tais que

$$z = bx = (e_1 b + \cdots e_m b)x = e_1 bx + \cdots e_m bx = e_1 u + \cdots e_m u, \quad u = bx \in J.$$

Definindo $J_i := e_i J$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ temos que $BJ = J_1 + \cdots + J_m$.

Além disso, se $x \in J_i \cap J_k$, com $i \neq k$, então $x = e_i z = e_k z$, $\quad z \in J$ donde segue que $0 = e_i e_k z = e_i e_i z = e_i z = x$. Por outro lado, dados $w, u \in J$, temos $(e_i w)(e_k u) = (e_i w e_k) u = 0$, pois $B_i J B_k = 0$. Logo, podemos escrever $BJ = J_1 \oplus \cdots \oplus J_m$. Como consequência, podemos decompor J da seguinte forma $J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_m \oplus J_0$, onde $J_0 = \{x \in J \mid Bx = 0\}$.

Notemos que dado $l \neq k$, $b_l \in B_l$, $b_k \in B_k$, x, $y \in J$

$$(b_l + e_l x)(b_k + e_k y) = b_l b_k + b_l e_k y + e_l x b_k + e_l x e_k y = e_l e_k b_l b_k + b_l e_l e_k y + e_l x b_k + e_l x e_k = 0,$$

pois $B_l J B_k = 0$ e $e_l e_k = 0$. Por definição, $B_i J_0 = 0$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Dessa forma, se $A_0 = J_0$, $A_1 = B_1 + J_1$, $\ldots$, $A_m = B_m + J_m$, então estes satisfazem 2) e também $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$.

É imediato também que $J_1, \ldots, J_m$ são ideais à direita nilpotentes, pois cada um destes está em J o qual é nilpotente pois $\dim A < \infty$.

Reciprocamente, suponha que $\mathscr{V} = varA$, onde A é uma álgebra de dimensão finita satisfazendo 1) e 2). Segue de 2) que para quaisquer $l \neq k$ vale $B_lJ_k = B_lB_k = J_lJ_k = J_lB_k = 0$, e além disso, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $B_iA_0 = 0$. Então $J := A_0 \oplus J_1 \oplus \cdots \oplus J_m$ é um ideal nilpotente de A. Além disso, temos a decomposição $A = B_1 \oplus \cdots B_m \oplus J$. Notemos também que

$$B_lJB_k = B_lA_0B_k + B_lJ_1B_k + \cdots + B_lJ_mB_k = B_lJ_lB_k = 0.$$

Segue que $B_lJB_k = 0$ para quaisquer $l \neq k$ e portanto, por definição do PI-expoente, e pelo fato de que $\dim B_i = 1$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tem-se que $\exp \mathscr{V} = \exp A \leq 1$.

Agora vamos demonstrar a segunda parte. Se $f \in T(A)$, então $f \in T(A_1 \oplus A_0) \cap \cdots \cap T(A_m \oplus A_0) \cap T(J)$. Logo, basta mostrar a recíproca. Suponha que exista $f \in T(A_1 \oplus A_0) \cap \cdots \cap T(A_m \oplus A_0) \cap T(J)$ multilinear tal que $f \notin T(A)$. Escreva $f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{\tau \in S_s} a_\tau x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(s)}$. Sejam $r_1, \ldots, r_s \in A$ tais que $f(r_1, \ldots, r_s) \neq 0$. Como $f \in T(J)$, existe $r_\beta \in \{r_1, \ldots, r_s\}$ tal que $r_\beta \notin J$. Por linearidade, podemos assumir $r_\beta \in B_\eta$, com $\eta \in \{1, 2, \ldots, m\}$, e os demais $r_i's$ estão em componentes $A_j's$. Assim, existe monômio $M(x_1, \ldots, x_s)$ de f tal que

$$M = a_\tau r_{\tau(1)} \cdots r_\beta \cdots r_{\tau(s)} \neq 0. \tag{50}$$

Afirmamos que para cada $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$, A_l é um ideal à direita em A. De fato, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ com $k \neq l$ $A_lB_k = A_lJ_k = 0$, e também, como J_l é ideal à direita em A e $B_lA_0 = 0$,

$$A_lA_0 = (B_l + J_l)A_0 = B_lA_0 + J_lA_0 = J_lA_0 \subseteq J_l.$$

Se existisse algum índice, digamos $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tal que $r_{\tau(t)} \notin A_\eta \cup A_0$, então $r_{\tau(t)}$ estaria à direita ou à esquerda de r_β. No primeiro caso

$$M = r_{\tau(1)} \cdots r_\beta \cdots r_{\tau(t)} \cdots r_{\tau(m)} = r_{\tau(1)} \cdots a r_{\tau(t)} \cdots r_{\tau(m)} = 0,$$

pois $a = r_\beta \cdots r_{\tau(t-1)} \in A_\eta$. No segundo caso, mais uma vez teríamos $M = 0$, e portanto ambas são absurdas pois $M \neq 0$. Concluí-se que $r_1, \ldots, r_{\beta-1}, r_{\beta+1}, \ldots, r_m \in A_\eta \cup A_0$.

Logo $f \notin T(A_\eta \oplus A_0)$, o que é um absurdo por hipótese. □

Corolário 12.16. *Seja $\mathscr{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo algebricamente fechado K. Então, $\exp \mathscr{V} \leq 1$ se, e somente se, $\mathscr{V} = var(C_0 \oplus \cdots \oplus C_m)$, onde $C_0, \ldots, C_m$ são K-álgebras de dimensão finita tais que $\dim(C_i/rad(C_i)) \leq 1$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$.*

Demonstração. Suponha que $\exp \mathscr{V} \leq 1$, então existe uma K-álgebra de dimensão finita A tal que $\mathscr{V} = var(A)$ e além disso, $A = A_0 \oplus \cdots \oplus A_m$, onde $A_0 = J_0$, $A_1 = B_1 \oplus J_1, \ldots, A_m = B_m \oplus J_m$ são como no teorema 12.15. Temos também que

$$T(\mathscr{V}) = T(A_1 \oplus A_0) \cap T(A_2 \oplus A_0) \cap \cdots \cap T(A_m \oplus A_0) \cap T(J). \tag{51}$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, defina $C_i := A_i \oplus A_0 = B_i \oplus J_i \oplus A_0 \quad$ e $\quad C_0 := J$.

Notemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $J_i \oplus A_0$ é um ideal em C_i. Sabemos que A_0, J_i são ideais a direita em A, e portanto, é suficiente mostrarmos que estes são ideais à esquerda em C_i. Porém, $(J_i \oplus A_0)(J_i \oplus A_0) \subseteq J_i \oplus A_0$, logo é suficiente ver que $B_i(J_i \oplus A_0) \subseteq J_i \oplus A_0$. Para isso, notemos que $B_i(J_i \oplus A_0) = B_iJ_i \oplus B_iA_0 = B_iJ_i \subseteq J_i$.

Pelo teorema 12.15, J_i e A_0 são nilpotentes, e portanto $J_i \oplus A_0 \subseteq rad(C_i)$. Por outro lado $C_i/(J_i \oplus A_0) \cong B_i \cong K$ e assim, $rad(C_i/J_i \oplus A_0) = 0$. Segue que $rad(C_i) \subseteq J_i \oplus A_0$, e como consequência, $rad(C_i) = J_i \oplus A_0$.

Então $\dim C_i/rad(C_i) = 1$.

Caso $i = 0$, $rad(C_0) = J$ e $\dim C_0/rad(C_0) = 0 \leq 1$. Por fim, de 51 tem-se que

$$T(\mathscr{V}) = T(C_0) \cap T(C_1) \cap \cdots \cap T(C_m) = T(C_0 \oplus \cdots \oplus C_m).$$

Reciprocamente, suponha que $\mathscr{V} = var(C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_m)$, onde $C_0, C_1, \ldots, C_m$ são K-álgebras de dimensão finita tais que $\dim(C_i/rad(C_i)) \leq 1$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Pode-se escrever $C_i = D_i \oplus rad(C_i)$, onde $D_i \cong K$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Pelo teorema 12.15, $\exp C_i \leq 1$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Dessa forma, pelo lema 12.8, temos que $\exp \mathscr{V} = \exp(C_0 \oplus \cdots C_m) \leq 1$. □

Iremos demonstrar um análogo ao corolário 12.16 para corpos quaisquer de característica zero. Daqui em diante, o corpo K em questão será de característica 0.

Lema 12.17. *Seja D uma $\overline{K}$-álgebra semissimples de dimensão finita. Então, existe uma base $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de D sobre $\overline{K}$ tal que suas constantes de estruturas são racionais. Isto é, para quaisquer i, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $u_i u_j = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ij}^k u_k$, com $\alpha_{ij}^k \in \mathbb{Q}$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

Demonstração. Pelo teorema de Wedderburn-Artin, $D \cong M_{n_1}(\overline{K}) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(\overline{K})$ para alguns n_1, $\ldots$, $n_s \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$, seja $\beta_k := \{e_{ij}^{(k)} \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, n_k\}\}$ a base canônica de $M_{n_k}(\overline{K})$. Dessa forma, $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_s$ é uma base de $M_{n_1}(\overline{K}) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(\overline{K})$. Além disso, esta satisfaz

$$e_{ij}^{(k)} e_{pq}^{(r)} = \delta_{kr}\delta_{jp} e_{iq}^{(k)} \tag{52}$$

e as constantes de estrutura de β são racionais. Logo, se $\psi\colon M_{n_1}(\overline{K}) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(\overline{K}) \to D$ é isomorfismo, segue que $\alpha = \psi(\beta)$ é uma base de D a qual satisfaz

$$\psi(e_{ij}^{(k)})\psi(e_{pq}^{(r)}) = \psi(e_{ij}^{(k)} e_{pq}^{(r)}) = \delta_{kr}\delta_{jp}\psi(e_{iq}^{(k)})$$

donde segue que as constantes de estrutura de α são racionais. $\square$

Lema 12.18. *Se R, S, R_1, S_1 são K-álgebras tais que $var(R) = var(R_1)$, $var(S) = var(S_1)$, então $var(R \oplus S) = var(R_1 \oplus S_1)$.*

Demonstração. Como $var(R) = var(R_1)$, e $var(S) = var(S_1)$, concluímos que $I := T(R) = T(R_1)$, $P := T(S) = T(S_1)$, e portanto $T(R \oplus R_1) = I \cap P = T(S \oplus S_1)$. Segue que $var(R \oplus R_1) = var(S \oplus S_1)$. $\square$

Lema 12.19. *Seja A uma K-álgebra de dimensão finita sobre $\overline{K}$. Então, existe uma álgebra de dimensão finita C sobre K tal que $var(A) = var(C)$ e $\dim_K C/rad(C) = \dim_K A/J$, onde J é o radical de Jacobson de A.*

Demonstração. Pelo teorema de Wedderburn-Malcev pode-se escrever $A = B \oplus J$, onde B é uma álgebra de dimensão finita semissimples sobre $\overline{K}$ e J é o radical de Jacobson de A. Pelo lema 12.17, existe uma base $\alpha = \{u_1, \ldots, u_m\}$ de B sobre $\overline{K}$ cujas constantes de estrutura são racionais. Logo, $V = span_K\{u_1, \ldots, u_m\}$ é uma K-álgebra de dimensão finita. Agora, seja $\gamma = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de J sobre $\overline{K}$ e seja C a K-subalgebra de A gerada por $\alpha \cup \gamma$. Como J é um ideal nilpotente em A, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $J^k = 0$ e portanto, qualquer produto com uma quantidade maior ou igual que k de elementos de J deve ser nulo. Mas as constantes de estrutura de $\{u_1, \ldots, u_m\}$ estão em K, segue $\dim_K C < \infty$. Seja $\widetilde{I}$ o ideal de C gerado por γ, e suponha que $\{\nu_1, \ldots, \nu_d\}$ seja uma base de C sobre K. Como J é ideal, e V é uma K-álgebra, sem perda de generalidade podemos supor $\nu_1 = u_1$, $\ldots$, $\nu_m = u_m$ e os outros ν_j, para $j \in \{m+1, \ldots, p\}$, são produtos de elementos de γ. Se $\widehat{I}$ é o ideal gerado por γ em C, então necessariamente deve-se ter $\widetilde{I} = rad(C)$, pois se $y \in rad(C) \setminus \widetilde{I}$ então $y \in V$, porém isso é um absurdo pois y é nilpotente. Consequentemente $rad(C) = \widetilde{I}$ e assim $\dim_K(C/rad(C)) = \dim_{\overline{K}} B = \dim_{\overline{K}}(A/J)$.

Para a primeira afirmação, vejamos que $T(A) \subseteq T(C)$, pois $C \subseteq A$. Reciprocamente, seja $f(x_1, \ldots, x_l)$ uma identidade multilinear em C. Para quaisquer y_1, $\ldots$, $y_l \in \alpha \cup \gamma$, $f(y_1, \ldots, y_l) = 0$. Logo, por linearidade f é uma identidade em A, e assim $T(A) = T(C)$, e portanto $var(A) = var(C)$. $\square$

Teorema 12.20. *Dada uma variedade de álgebras $\mathscr{V}$, então $\exp \mathscr{V} \leq 1$ se, e somente se, existem K-álgebras A_1, $\ldots$, A_m de dimensão finita sobre K tais que $\mathscr{V} = var(A_1 \oplus \cdots A_m)$ e $\dim\Big(A_i/rad(A_i)\Big) \leq 1$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

Demonstração. Suponha que $\exp \mathscr{V} \leq 1$. Pelo corolário 12.10, existe uma K-álgebra A de dimensão finita tal que $\mathscr{V} = var(A)$. Considere a $\overline{K}$-álgebra $A_{\overline{K}} = A \otimes_K \overline{K}$, então $var(A_{\overline{K}}) = var(A)$, e pelo teorema 11.24, $c_n(A_{\overline{K}}) = c_n(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(c_n(A))$ é polinomialmente limitada, segue que $A_{\overline{K}}$ gera uma variedade de crescimento polinomial sobre $\overline{K}$, isto é, $var(A_{\overline{K}}) = \mathscr{W}$ com $\exp \mathscr{W} \leq 1$. Pelo corolário 12.16, existem $\overline{K}$-álgebras de dimensão finita L_1, $\ldots$, L_m tais que $\mathscr{W} = var(A_{\overline{K}}) = var(L_1 \oplus \cdots \oplus L_m)$. Além disso $\dim(L_k/rad(L_k)) \leq 1$, para qualquer $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Como A e $A_{\overline{K}}$ têm as mesmas K-identidades polinomiais, segue que $L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$ também possui as mesmas K-identidades polinomiais, e $\mathscr{W} = var(L_1 \oplus \cdots L_m) = var(A_{\overline{K}}) = var(A) = \mathscr{V}$.

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, pelo lema 12.19 existe uma K-álgebra de dimensão finita, A_j, tal que $var(A_j) = var(L_j)$, e $\dim_K(A_j/rad(A_j)) = \dim_K(L_j/rad(L_j))$. Portanto, pelo lema 12.18, $var(A_1 \oplus \cdots \oplus A_m) = var(L_1 \oplus \cdots \oplus L_m) = \mathscr{V}$. $\square$

Podemos refinar o resultado do teorema 12.9 e colecionar as outras caracterizações de variedades de crescimento polinomial obtidas até aqui no último e principal teorema do nosso trabalho.

Teorema 12.21. *Dada uma variedade de álgebras $\mathscr{V}$, as seguintes condições são equivalentes:*

a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, existem constantes $C, t \in \mathbb{N}$ tais que $c_n(\mathscr{V}) \leq Cn^t$.

b) $\exp \mathscr{V} \leq 1$.

c) G, $UT_2 \notin \mathscr{V}$.

d) Existem K-álgebras de dimensão finita $A_1, \ldots, A_m$ tais que $\mathscr{V} = var(A_1 \oplus \cdots A_m)$ e para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ vale $\dim(A_i/rad(A_i)) \leq 1$.

e) Se $\mathscr{V} = var(A)$, onde A é uma K-álgebra de dimensão finita, e $q \in \mathbb{N}$ é tal que $rad(A)^q = 0$, então $\chi_n(\mathscr{V}) = \sum\limits_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 < q}} m_\lambda \chi_\lambda, \quad$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por 12.9,12.10, 12.11 e 12.20, tem-se que *a*), *b*), *c*) e *d*) são equivalentes. Precisamos então mostrar que *d*) implica *e*), e depois que *e*) implica *a*).

Segue de 11.24 e do fato de que $rad(A \otimes_K \overline{K})^q = rad(A)^q \otimes_K \overline{K} = 0$, que $rad(A)^q = 0$, que é suficiente supor que K é um corpo algebricamente fechado. Pelo teorema 12.9, *e*) implica *a*). Assim, basta mostrarmos que se $\exp \mathscr{V} \leq 1$, então $\chi_n(\mathscr{V}) = \sum\limits_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 < q}} m_\lambda \chi_\lambda, \quad$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $q \in \mathbb{N}$ é tal que $rad(A)^q = 0$. Suponha que existam $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \vdash n$ tais que $|\lambda| - \lambda_1 \geq q$ e $m_\lambda \neq 0$.

Pelo teorema 11.3, existe um diagrama de Young D_λ e um polinômio multilinear $f \in P_n$ tais que $e(D_\lambda)f \notin T(A)$. Considere $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_t)$ $(t = \lambda_1)$ a partição conjugada de λ. Sem perda de generalidade, suponha $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}$, $\tau \in S_n$, então

$$e(D_\lambda)f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{p \in R(D_\lambda) \\ q \in C(D_\lambda)}} (-1)^q p x_{q\tau(1)} \cdots x_{q\tau(n)}$$

Suponha que na k-ésima coluna de D_λ (i.e, λ'_k) tenham os números $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n_k}}$. E para cada $p \in R(D_\lambda)$, observe que se $\sigma \in (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n_k}})S_{n_k}$, então

$$(-1)^\sigma \sigma \sum_{q \in (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n_k}})S_{n_k}} (-1)^q p x_{\tau(1)} \cdots x_{q(a_{i_1})} \cdots x_{q(a_{i_2})} \cdots x_{q(a_{i_j})} \cdots x_{q(a_{i_{n_k}})} \cdots x_{\tau(n)}$$

é igual a

$$\sum_{q \in (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n_k}})S_{n_k}} (-1)^{\sigma q} p x_{\tau(1)} \cdots x_{\sigma q(a_{i_1})} \cdots x_{\sigma q(a_{i_2})} \cdots x_{\sigma q(a_{i_j})} \cdots x_{\sigma q(a_{i_{n_k}})} \cdots x_{\tau(n)}.$$

O ciclo $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n_k}}) \in S_{n_k}$ é transitivo, logo a última soma é igual a

$$\sum_{q \in (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n_k}})S_{n_k}} (-1)^q p x_{\tau(1)} \cdots x_{q(a_{i_1})} \cdots x_{q(a_{i_2})} \cdots x_{q(a_{i_j})} \cdots x_{q(a_{i_{n_k}})} \cdots x_{\tau(n)}.$$

Dessa forma, concluí-se que $e(D_\lambda)f$ é uma combinação linear de polinômios alternados em t conjuntos disjuntos de variáveis $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t$ respectivamente. Denote um destes polinômios por g.

Considere a decomposição de Wedderburn-Malcev $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \oplus J$, onde $J = rad(A)$. Seja $\mathscr{A} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_m \cup \mathscr{J}$ uma base de A, uma união de bases de $B_1, \ldots, B_m$ e J respectivamente. Como já sabemos, para quaisquer i, j com $i \neq j$

$$\dim B_i = 1, \quad B_i B_j = 0 = B_i J B_j. \tag{53}$$

Segue de 53, do fato de que $|\lambda| \geq q$, e $J^q = 0$, que para se ter uma avaliação não nula em g devemos substituir as variáveis por elementos de apenas uma componente, digamos B_1 e as restantes de J. Como $\dim B_1 = 1$, em cada um dos t conjuntos de variáveis nos quais g é alternado podemos substituir apenas um elemento de B_1 (caso contrário obteríamos 0 pois qualquer polinômio alternado quando substituído em dois valores múltiplos um do outro deve se anular) . Dessa forma, restam-nos $|\lambda| - t = |\lambda| - \lambda_1$ avaliações em elementos de J. Porém isso implicaria que $g \equiv 0$ em A, pois estamos assumindo que $|\lambda| - \lambda_1 \geq q$ e $J^q = 0$, mas isso é um absurdo. Logo, por arbitrariedade do polinômio g acima concluí-se o resultado. □

Uma K-álgebra A é dita ter crescimento linear se existe $C > 0$ tal que $c_n(A) \leq Cn$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere agora as álgebras matriciais definidas por

$$M_1 = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & b & c \\ 0 & \lambda & d \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda, b, c, d \in K \right\}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$M_7 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda, b, c, d \in K \right\}.$$

Em [15], Giambruno e La Mattina forneceram 2 caracterizações para álgebras de crescimento linear em termos das álgebras acima.

Teorema 12.22. *(Giambruno-La Mattina) Seja A uma K-álgebra. São equivalentes:*

a) A tem crescimento linear.

b) M_3, M_4, M_5, M_6, $M_7 \notin var(A)$.

c) $var(A) = var(Y)$, onde Y é uma das álgebras: N, $C \oplus N$, $M_1 \oplus N$, $M_2 \oplus N$ ou $M_1 \oplus M_2 \oplus N$, onde N é uma álgebra nilpotente e C é uma álgebra comutativa.

Referências

[1] A. S. Amitsur and J. Levitzki. Minimal identities for algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1(4):449–463, 1950.

[2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra. Reading, Mass.* Boca Raton, 1969.

[3] A. Berele. Homogeneous polynomial identities. *Israel journal of mathematics*, 42:258–272, 1982.

[4] A. Berele and A. Regev. Applications of hook young diagrams to pi algebras. *Journal of algebra*, 82(2):559–567, 1983.

[5] G. M. Bergman. A ring primitive on the right but not on the left. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 15(3):473–475, 1964.

[6] D. M. Correa and P. Koshlukov. Specht property of varieties of graded lie algebras. *arXiv preprint arXiv:2208.08550*, 2022.

[7] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* American Mathematical Soc., 1966.

[8] V. Drensky. Codimensions of t-ideals and hilbert series of relatively free algebras. *Journal of Algebra*, 91(1):1–17, 1984.

[9] V. Drensky and E. Formanek. *Polynomial identity rings.* Birkhäuser, 2012.

[10] V. S. Drensky. *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra.* Springer Verlag, 2000.

[11] E. Formanek. Central polynomials for matrix rings. *Journal of Algebra*, 23(1):129–132, 1972.

[12] G. K. Genov. Basis for identities of a third-order matrix algebra over a finite field. *Algebra i logika*, 20(4):365–388, 1981.

[13] G. K. Genov and P. N. Siderov. A basis of the identities of the fourth order matrix algebra over a finite field. i, ii. *Serdica*, 8(1982):351–366, 1982.

[14] A. Giambruno and P. Koshlukov. On the identities of the grassmann algebras in characteristic $p > 0$. *Israel Journal of Mathematics*, 122:305–316, 2001.

[15] A. Giambruno and D. La Mattina. Pi-algebras with slow codimension growth. *Journal of Algebra*, 284(1):371–391, 2005.

[16] A. Giambruno and M. Zaicev. On codimension growth of finitely generated associative algebras. *Advances in Mathematics*, 140(2):145–155, 1998.

[17] A. Giambruno and M. Zaicev. Exponential codimension growth of pi algebras: an exact estimate. *Advances in Mathematics*, 142(2):221–243, 1999.

[18] A. Giambruno and M. Zaicev. A characterization of algebras with polynomial growth of the codimensions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(1):59–67, 2001.

[19] A. Giambruno and M. Zaicev. *Polynomial identities and asymptotic methods.* American Mathematical Soc., 2005.

[20] M. Hall Jr. Combinatorial theory, blaisdell publ. *Co., Waltham Mass*, 1967.

[21] I. N. Herstein. *Noncommutative rings*, volume 15. American Mathematical Soc., 1994.

[22] U. Kalyulaid. Triangular products and stability of representations. *Candidate's Dissertation, Tartu State Univ*, 1978.

[23] A. Kemer. T-ideals with power growth of the codimensions are specht. *Siberian mathematical journal*, 19(1):37–48, 1978.

[24] A. Kemer. Varieties of finite rank. In *Proc. 15-th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsk*, volume 2, page 73, 1979.

[25] A. R. Kemer. *Ideals of identities of associative algebras.* American Mathematical Soc., 1991.

[26] P. Koshlukov. Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic p$\neq$ 2. *Journal of Algebra*, 241(1):410–434, 2001.

[27] D. Krakowski and A. Regev. The polynomial identities of the grassmann algebra. *Transactions of the American mathematical Society*, 181:429–438, 1973.

[28] T. Y. Lam. *A first course in noncommutative rings*. Springer, 1991.

[29] S. Lang. *Algebra*. Springer Science & Business Media, 2012.

[30] V. N. Latyshev. On the choice of basis in a t-ideal. *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 4(5):1122–1127, 1963.

[31] V. N. Latyshev. On regev's theorem on identities in a tensor product of pi-algebras. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 27(4):213–214, 1972.

[32] Y. N. Malltsev. Basis for identities of the algebra of upper triangular matrices. *Algebra and Logic*, 10(4):242–247, 1971.

[33] F. C. P. Milies. *Anéis e módulos*. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 1972.

[34] S. Polin. Identities of the algebra of triangular matrices. *Siberian Mathematical Journal*, 21(4):638–645, 1980.

[35] Y. P. Razmyslov. Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero. *Algebra and Logic*, 12(1):47–63, 1973.

[36] A. Regev. Existence of identities in $A \otimes B$. *Israel Journal of Mathematics*, 11:131–152, 1972.

[37] A. Regev. Algebras satisfying a capelli identity. *Israel Journal of Mathematics*, 33:149–154, 1979.

[38] A. Regev and S. Amitsur. Pi-algebras and their cocharacters. *Journal of Algebra*, 78(1):248–254, 1982.

[39] S. Ross. *A first course in probability*. Pearson, 2010.

[40] S. Rosset. A new proof of the amitsur-levitski identity. *Israel Journal of Mathematics*, 23:187–188, 1976.

[41] J. J. Rotman. *Advanced modern algebra*. American Mathematical Soc., 2010.

[42] J. P. Serre et al. *Linear representations of finite groups*. Springer, 1977.

[43] R. Y. Sharp. *Steps in commutative algebra*. Cambridge university press, 2000.

[44] P. N. Siderov. A basis for identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field. *Pliska Stud. Math. Bulgar*, 2:143–152, 1981.

[45] S. M. Vovsi. *Triangular products of group representations and their applications*. Springer Science & Business Media, 2012.