



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Física Gleb Wataghin

Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

Jheovany Henrique Martins Pereira

**Análise de resoluções de problemas por alunos em treinamento
para olimpíadas de matemática**

**Analysis of problem solving by students in training for
mathematics olympics**

Campinas

2023

Jheovany Henrique Martins Pereira

**Análise de resoluções de problemas por alunos em treinamento
para olimpíadas de matemática**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto de Física “Gleb Wataghin” da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, na área de Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Laura Letícia Ramos Rifo

Coorientador: Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira

Este trabalho corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Jheovany Henrique Martins Pereira, e orientada pela Profa. Dra. Laura Letícia Ramos Rifo.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

P414a Pereira, Jheovany Henrique Martins, 1995-
Análise de resoluções de problemas por alunos em treinamento para olimpíadas de matemática / Jheovany Henrique Martins Pereira. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Laura Leticia Ramos Rifo.

Coorientador: Samuel Rocha de Oliveira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. 2. Resolução de problemas. 3. Estratégias heurísticas. 4. Observação (Metodo educacional). I. Rifo, Laura Leticia Ramos, 1970-. II. Oliveira, Samuel Rocha de, 1962-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Analysis of problem solving by students in training for mathematics olympiadas

Palavras-chave em inglês:

Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools

Problem solving

Heuristics strategies

Observation (Educational method)

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Titulação: Mestre em Ensino de Ciências e Matemática

Banca examinadora:

Laura Leticia Ramos Rifo [Orientador]

Nuria de Los Angeles Climent Rodríguez

Mauricio Compiani

Data de defesa: 20-12-2022

Programa de Pós-Graduação: Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-3071-9967>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/5343495463945208>

COMISSÃO
EXAMINADORA
Data: 20/12/2022

Profa. Dra. Laura Letícia Ramos Rifo - IMECC/ UNICAMP - (Presidente –
Orientadora)

Profa. Dra. Nuria de Los Angeles Climent - Universidad de Huelva

Prof. Dr. Maurício Compiani - IG/ UNICAMP

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

DEDICATÓRIA

Aos que lutam diariamente por uma Educação de qualidade, gratuita, laica e acessível para todos.

AGRADECIMENTOS

à Profa. Dra. Laura Rifo pela orientação e pelo cuidado e apoio durante todo esse processo.

à banca de exame de defesa Profa. Dra. Nuria Climent, Prof. Dr. Maurício Compiani, Profa. Dra. Ana Catarina Pontone Hellmeister e Prof. Dr. Marcelo Firer.

à Unicamp, aos órgãos institucionais e a todos os funcionários que possibilitaram a implementação e o funcionamento do nosso polo do POTI na Unicamp.

ao SAE pelas bolsas de permanência aos alunos de graduação que foram parte fundamental no sucesso do projeto.

aos monitores e professores, alunos de graduação e pós-graduação da Unicamp que se dedicaram a colocar em prática nossas ideias.

aos alunos participantes do POTI que foram sujeitos dessa pesquisa e aceitaram participar com tanto empenho.

à Universidade de Huelva, à Profa. Dra. Nuria Climent por me receber e contribuir teoricamente para este trabalho e ao Prof. Dr. José Carrillo (In memoriam), fundamental na elaboração do referencial teórico deste trabalho, por toda a dedicação à pesquisa na área do ensino de matemática.

aos meus amigos que sempre me ajudaram a manter o equilíbrio nos momentos difíceis. Em especial, aos meus colegas de casa, Pedro Mattos e Pedro Vieira pelo carinho e cuidado. Meus amigos mais próximos, Hugo e Lana pela boniteza de viver uma amizade genuína.

aos meus colegas de pós-graduação pelas trocas, em especial, Thailine e Marília.

aos queridos Gabriel Brasil e Lucas Ângelo pela revisão do texto e apoio sempre.

à minha família: avó Lúcia, mãe Kelly, irmãs Anna e Jennifer e pai Cláudio, pelo apoio emocional e paciência nesses anos mais distantes.

ao Gabriel Montini, pelo incentivo e carinho diários.

E também a todos que, de alguma forma, cruzaram e afetaram essa trajetória.

É preciso aprender a ficar submerso por
algum tempo. É preciso aprender (...)

retirado de *O dia em que Gottfried Benn*
pegou onda de Alberto Pucheu

RESUMO

Neste trabalho analisamos um projeto de extensão desenvolvido na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), com alunos de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental de municípios próximos à cidade de Campinas. O foco do projeto é o treinamento para Olimpíadas de Matemática através de uma prática centrada na resolução de problemas. A investigação é de natureza qualitativa e se caracteriza como um estudo observacional. O objetivo do estudo é analisar, do ponto de vista heurístico, os problemas propostos pelo programa nas disciplinas de álgebra e teoria dos números e descrever o processo de desenvolvimento das habilidades para resolver problemas dos alunos participantes a partir de uma análise longitudinal. Os dados foram coletados através de observações e aplicação de problemas a serem resolvidos individualmente. Nossa hipótese é que a partir da participação no projeto, ocorra um desenvolvimento no uso da linguagem matemática pelos alunos e conseqüentemente um avanço no grau de complexidade das estratégias apresentadas. Além disso, enfatizamos o importante papel de metodologias de ensino baseadas na resolução de problemas para um processo de aprendizagem significativo.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Estratégias Heurísticas, Olimpíadas de Matemática, Estudo Observacional.

ABSTRACT

In this thesis, we analyze an extension project developed at the State University of Campinas (Unicamp), with students from the 8th and 9th grades of middle schools from towns surrounding the city of Campinas. The focus of the project is the training of said students for the Mathematical Olympiad through a practice centered on problem solving. The objective of the research is to describe the process of developing heuristic skills, by the participating students, to solving problems. This investigation is qualitative in nature, characterized as an observational study. The data were collected through observations and the application of problems to be solved individually by the students. The analysis of the data collected points to the development of a better understanding and proficiency with heuristic processes by the students throughout their participation in the project. In addition, it emphasizes the important role of problem-based teaching methodologies for a meaningful learning process.

Keywords: Problem Solving, heuristic strategies, Mathematical Olympics, Observational Study.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Polos presenciais do POTI no Brasil

Figura 2 - Alunos e monitores dos programas POTI e PIC 2019

Figura 3 - Resolução de problemas em grupos

Figura 4 - Resolução de problemas em grupos

Figura 5 - Exemplo de resolução do problema T4-1 categoria 1

Figura 6 - Exemplo de solução do problema T4-1 categoria 2

Figura 7 - Exemplo de solução do problema T4-1 categoria 3

Figura 8 - Exemplo de solução do problema T4-2 categoria 1

Figura 9 - Exemplo de solução do problema T4-2 categoria 2

Figura 10 - Exemplo de solução do problema T4-2 categoria 3

Figura 11 - Exemplo 1 de solução do problema A7-1 categoria 1

Figura 12 - Exemplo 2 de solução do problema A7-1 categoria 1

Figura 13 - Exemplo de solução do problema A7-1 categoria 2

Figura 14 - Exemplo de solução do problema A7-2 categoria 1

Figura 15 - Exemplo de solução do problema T8-1 categoria 1

Figura 16 - Exemplo de solução do problema T8-1 categoria 2

Figura 17 - Exemplo de solução do problema T8-1 categoria 3

Figura 18 - Exemplo de solução do problema T8-2 categoria 1

Figura 19 - Exemplo de solução do problema T8-3 categoria 1

Figura 20 - Exemplo de solução do problema T8-4 categoria 1 - Parte 1

Figura 21 - Exemplo de solução do problema T8-4 categoria 2 - Parte 2

Figura 22 - Exemplo de solução do problema A11-1 categoria 1

Figura 23 - Exemplo de solução do problema A11-2 categoria 1

Figura 24 - Exemplo de solução do problema A11-1 categoria 2

Figura 25 - Exemplo de solução do problema A11-3 categoria 1

Figura 26 - Exemplo de solução do problema A11-3 categoria 2

Figura 27 - Exemplo de solução do problema A12-1 categoria 1

Figura 28 - Exemplo de solução do problema A12-2 categoria 1

Figura 29 - Resolução do problema T4-1 do aluno 3

Figura 30 - Resolução do problema T4-2 do aluno 3

Figura 31 - Resolução do problema A7-1 do aluno 3

Figura 32 - Resolução do problema A7-2 do aluno 3

Figura 33 - Resolução do problema T8-1 do aluno 3

Figura 34 - Resolução do problema T8-2 do aluno 3 - Parte 1

Figura 35 - Resolução do problema T8-2 do aluno 3 - Parte 2

Figura 36 - Resolução do problema T8-3 do aluno 3

Figura 37 - Resolução do problema T8-3 do aluno 3

Figura 38 - Resolução do problema T12-1 do aluno 3

Figura 39 - Resolução do problema T12-2 do aluno 3

Figura 40 - Resolução do problema T4-1 do aluno 36

Figura 41 - Resolução do problema T4-2 do aluno 36

Figura 42 - Resolução do problema A7-1 do aluno 36

Figura 43 - Resolução do problema A7-2 do aluno 36

Figura 44 - Resolução do problema T8-1 do aluno 36

Figura 45 - Resolução do problema T8-2 do aluno 36

Figura 46 - Resolução do problema A11-1 do aluno 36

Figura 47 - Resolução do problema A11-2 do aluno 36

Figura 48 - Resolução do problema A11-3 do aluno 36

Figura 49 - Resolução do problema T12-1 do aluno 36

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Cronograma de atividades POTI 2019

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

POTI: Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

IMPA: Instituto de Matemática Pura e Aplicada

OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

SAE: Serviço de Apoio ao Estudante

PROEC: Pró-Reitoria de Extensão e Cultura

SUMÁRIO

MEMORIAL	16
INTRODUÇÃO	17
CAPÍTULO 1 - Contextualizando	
1.1 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)	18
1.2 Olimpíadas de Matemática.....	19
1.3 POTI-UNICAMP.....	20
1.4 Formação dos mediadores.....	24
CAPÍTULO 2 - Marcos Teóricos	
2.1 Resolução de Problemas.....	26
2.2 Estratégias Heurísticas.....	28
CAPÍTULO 3 - Metodologia de Pesquisa	
3.1 Coleta dos dados.....	32
3.2 Análise das resoluções.....	33
CAPÍTULO 4- Análise dos Problemas Propostos	
4.1 Apresentação dos Problemas.....	34
4.2 Categorias encontradas.....	63
CAPÍTULO 5 - Análise Longitudinal	
5.1 Resoluções do aluno 3	64
5.2 Resoluções do aluno 36.....	73
CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
Referências.....	84

ANEXOS

Anexo I - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido aos Responsáveis.....	86
---	-----------

MEMORIAL

A escolha do tema deste trabalho está intimamente ligada à minha trajetória acadêmica. Fui aluno da rede pública de ensino durante toda a minha vida escolar, realizando toda a educação básica na rede estadual de São Paulo e graduação na Universidade Estadual de Campinas.

Durante o ensino médio, tive contato com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), da qual fui medalhista em 2012 e tive a oportunidade de participar do Programa de Iniciação Científica Jr., o PIC, que é um projeto que visa dar acesso aos alunos a cultura matemática básica, além de orientar no rigor da leitura e da escrita de resultados, independência do raciocínio analítico, nas técnicas e métodos, etc. A participação no projeto, sem dúvidas, modificou a minha percepção do que é a Matemática e influenciou na minha escolha do curso de graduação em Matemática.

A decisão pela licenciatura veio depois, pois ainda não havia tido a dimensão da importância da carreira docente. As deficiências da escola pública não me permitiriam acessar um ensino superior de qualidade e gratuito. Também em 2012, conheci o projeto de educação popular “Cursinho Professor Chico Poço” que visa preparar alunos da rede pública para os exames de vestibular. Nesse espaço, o fascínio pela Matemática foi complementado pelo amor ao ensino. Talvez tenha sido a primeira vez que tive a percepção da importância do acesso ao conhecimento historicamente produzido para a formação cidadã.

Já na Universidade, tive a certeza de que o conhecimento que estava adquirindo só faria sentido se o compartilhasse. Então, comecei a dar aulas nesse mesmo projeto de preparação para o vestibular no segundo ano da graduação e em seguida, optei pela modalidade licenciatura. Não havia mais dúvidas.

Ao ingressar no Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, também na Unicamp, tive a oportunidade de auxiliar na coordenação do programa Polo Olímpico de Treinamento Intensivo, o POTI, que é o foco deste trabalho. O POTI une três pontos já mencionados neste memorial que me fazem acreditar e querer falar sobre ele: Matemática, Ensino e acesso ao conhecimento.

INTRODUÇÃO

A resolução de problemas tem sido bastante abordada em pesquisas em educação matemática nas últimas décadas na América Latina e no mundo (D'Ambrosio, 2007; Törner, Schoenfeld and Reiss, 2007). As abordagens são das mais diversas, enfocando desde questões mais filosóficas, passando por aspectos psicológicos e outras direcionadas a práticas pedagógicas que se utilizam da resolução de problemas para o processo de aprendizagem matemático.

Nosso enfoque neste trabalho são as competições olímpicas de matemática e as estratégias heurísticas utilizadas por alunos participantes de um projeto de extensão da Universidade Estadual de Campinas, a Unicamp, criado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, chamado Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo, POTI. O polo apresentado neste trabalho oferece treinamento para as provas olímpicas a alunos de 8º e 9º anos.

A prática pedagógica utilizada no projeto é completamente focada na resolução de problemas e preza pela autonomia dos alunos na proposição de estratégias para solucionar os problemas propostos. O objetivo é que os alunos sejam capazes de adquirir habilidades gerais para resolver problemas diversos.

Uma parte significativa das aulas é realizada em grupos, com cerca de dez alunos, para a discussão de problemas propostos de acordo com o tópico abordado em cada encontro. Cada grupo é acompanhado por um mediador cuja função é auxiliar, a partir de perguntas, na elaboração de estratégias para solucionar os problemas.

Os dados que serão apresentados neste trabalho foram coletados em um segundo momento das aulas, no qual os alunos resolvem os problemas individualmente, a fim de realizar um estudo longitudinal do processo de desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas de cada indivíduo, tais dados foram coletados ao longo de um ano completo do projeto.

A investigação se caracteriza como um estudo observacional descritivo. Nossa proposta é apresentar o conjunto de problemas sugeridos pelo POTI, caracterizando e descrevendo os problemas do ponto de vista das possíveis estratégias heurísticas utilizadas para abordar os problemas, visando possibilitar

aos alunos uma atuação autônoma no processo. Além disso, apresentamos algumas estratégias emergidas dos dados coletados.

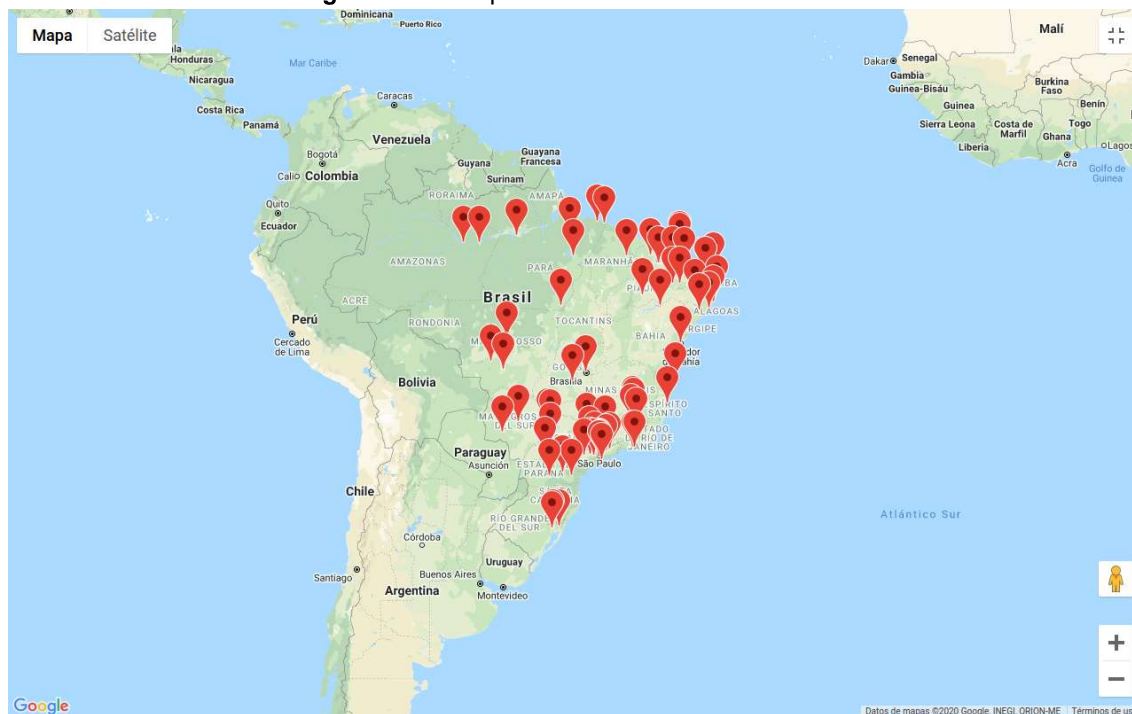
CAPÍTULO 1 - Contextualizando

1.1 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

O programa *Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo* (POTI) é uma iniciativa do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) que visa incentivar a participação e melhorar o desempenho dos alunos nas provas OBMEP e OBM.

Atualmente, o projeto conta com 68 polos presenciais espalhados pelo Brasil, distribuídos por todas as regiões do país (Figura 1). Além desses, o POTI oferece também a modalidade virtual, que visa atender aos alunos de estados ou municípios que não possuam polos presenciais. A participação é gratuita e os alunos podem se inscrever de forma independente, sem a necessidade do intermédio da escola.

Figura 1 - Polos presenciais do POTI no Brasil



Fonte: <https://poti.impa.br/index.php/site/polos>

Os polos possuem total autonomia para as escolhas metodológicas de ensino e para a organização do cronograma de atividades. A única exigência é a aplicação de avaliações no decorrer do ano, preparadas pelo IMPA para registro da participação dos alunos. O material proposto para estudo está disponibilizado na íntegra no site do programa¹.

O Instituto de Matemática Pura e Aplicada também é responsável pela organização da Olimpíada Brasileira de Matemática e outros diversos programas que visam atrair os alunos para um olhar diferenciado sobre o fazer matemática;

1.2 Olimpíadas de Matemática

As principais Olimpíadas Brasileiras de Matemática no país (OBM e OBMEP) atingem milhares de estudantes, sendo consideradas umas das maiores do mundo, e o objetivo principal é estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área. Segundo uma investigação publicada na revista *The Teaching of Mathematics* (DIMAKOS, 2012), as competições matemáticas são o principal fator que influencia os alunos a fazerem Matemática em nível superior.

De acordo com D'Ambrósio (2007), problemas desafiadores apresentados nessas competições matemáticas atraem possíveis matemáticos. Ainda aponta que a Hungria foi uma das pioneiras em utilizar concursos como estratégia educacional, citando a competição Eötvös, criada no início do século XX, como um exemplo dessa prática.

A influência desse tipo de prática atravessou o século XX nas propostas pedagógicas europeias. No entanto, o uso de problemas matemáticos esteve quase sempre vinculado aos tópicos dos currículos (D'AMBROSIO, 2007).

O projeto apresentado neste trabalho não se limita às diretrizes apresentadas nos documentos oficiais e, por ser uma atividade não formal, temos bastante liberdade para abordar os conteúdos matemáticos sugeridos pela coordenação de uma maneira construtiva e que faça sentido para o desenvolvimento de estratégias por parte dos alunos.

¹ <https://potiimpa.br/index.php/site/material>

Na seção seguinte, apresentamos o polo de treinamento instalado na Universidade Estadual de Campinas, pontuando as estratégias pedagógicas adotadas, somente com o objetivo de contextualizar o projeto, já que essa investigação se centra na resolução de problemas realizada pelos alunos.

1.3 POTI-UNICAMP

Em 2018, o Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Unicamp abriu um polo para sediar as atividades do programa, oferecendo aulas e atividades com foco nas provas olímpicas para alunos de 8º e 9º anos finais do Ensino Fundamental.

Em 2019, ano de coleta dos dados, o POTI-UNICAMP contou com a colaboração de cerca de 20 alunos de graduação, sendo principalmente alunos da licenciatura em Matemática que atuaram como monitores e 8 alunos da pós-graduação em Matemática que participaram como tutores, preparando o material das aulas e apresentando o conteúdo a ser trabalhado em cada encontro. As atividades têm como base o conceito de círculos de matemática, inspirado nas experiências da cultura matemática da Europa Oriental, onde existem há mais de um século em países como Rússia e Hungria. Os círculos de matemática são encontros ordinários nos quais os alunos se reúnem sob a orientação de um professor, com o propósito de discutir problemas matemáticos de forma coletiva.

O polo já atingiu cerca de 200 alunos nos anos de 2018 e 2019 de diversos municípios da região de Campinas. O transporte dos alunos é de responsabilidade dos pais, no entanto algumas escolas conseguiram apoio das prefeituras locais para financiar o transporte. Fator que, sem dúvidas, influenciou no sucesso dos índices de permanência dos alunos.

Outro fator importante para garantir a permanência é o financiamento do lanche durante todo o ano letivo que, em 2018, foi garantido por uma campanha de financiamento coletivo através da plataforma Kickante e, em 2019, foi financiado pela Pró Reitoria de Extensão da Unicamp. O espaço físico utilizado nos encontros é dividido com os alunos participantes de outro projeto vinculado à OBMEP, intitulado Programa de Iniciação Científica Jr. (Figura 2).

Figura 2 - Alunos e monitores dos programas POTI e PIC 2019

Fonte: <http://www.ime.unicamp.br/~laurarifo/poti.html> (2019)

Os encontros semanais são divididos em dois momentos de aproximadamente 1h45 com 30 min de intervalo entre eles. A tabela 1 apresenta o cronograma do ano de 2019 que é o período de coleta de dados deste trabalho, com a distribuição das aulas realizadas em cada um dos encontros. O projeto se divide em quatro disciplinas (Álgebra, Teoria dos Números, Combinatória e Geometria) cada uma delas sendo avaliada em três simulados ao longo do ano, resultando em um total de doze avaliações.

Tabela 1 - Cronograma de atividades POTI 2019

30/03	Combinatória/Geometria
06/04	Geometria/Simulado 1
13/04	Álgebra/Combinatória
27/04	Combinatória/Simulado 2
04/05	Álgebra/Simulado 3
11/05	Geometria/Teoria dos Números
18/05	Teoria dos Números/Simulado 4
01/06	Geometria/Simulado 5
08/06	Álgebra/Combinatória
15/06	Combinatória/Simulado 6
29/06	Álgebra/Simulado 7

10/08	Álgebra/Teoria dos Números
17/08	Teoria dos Números/Simulado 8
24/08	Combinatória/Geometria
31/08	Geometria/Simulado 9
14/09	Combinatória/Simulado 10
21/09	Teoria dos Números/Álgebra
28/09	Álgebra/Simulado 11
05/10	Teoria dos Números
19/10	Teoria dos Números/Simulado 12

Fonte: <http://www.ime.unicamp.br/~laurarifo/poti.html> (2019)

O foco das aulas é a Resolução de Problemas e o objetivo principal é que os alunos desenvolvam estratégias heurísticas em grupos a fim de deliberar possíveis soluções para os problemas propostos em cada encontro. Cada grupo, com aproximadamente dez alunos, é acompanhado por um monitor que realiza a mediação do processo de resolução. A formação dos monitores será discutida de forma mais aprofundada ao longo do trabalho, no entanto já destacamos que é parte fundamental do êxito do projeto.

Os primeiros 15 minutos de cada parte das aulas é dedicado a uma breve exposição do conteúdo ou conceito que será abordado na lista de problemas elaborada pelo professor responsável pela aula. Em seguida, os alunos são orientados a se reunirem em grupos, tendo cerca de 1h15 para a resolução dos problemas. Por fim, os últimos 15 minutos são dedicados à discussão de um ou dois problemas que tenha gerado mais conflitos, apontado pelos monitores que acompanharam cada grupo.

Figura 3 - Resolução de problemas em grupos



Fonte: o autor (2019)

Figura 4 - Resolução de problemas em grupos



Fonte: o autor (2019)

A dinâmica de aplicação dos simulados ocupa a segunda parte de alguns encontros. A proposta desse momento é verificar o que os alunos são capazes de realizar individualmente, foco da análise que será apresentada nesse trabalho, sem a mediação dos monitores e/ou dos pares. Cada simulado propõe cinco problemas e os alunos têm 45 minutos para resolvê-los.

Os problemas propostos nessas avaliações são selecionados pelo IMPA e influenciam na preparação das aulas e das listas elaboradas pelos professores, a partir de direcionamentos sugeridos pela coordenadora do projeto. Vale ressaltar que os professores não têm acesso direto aos problemas contidos nos simulados, a fim de evitar que sejam influenciados na escolha dos problemas.

1.4 Formação dos mediadores

Um momento fundamental da nossa prática, como citado anteriormente, ocorre durante as resoluções de problemas em grupo. Os licenciandos que atuam como mediadores no projeto são uma figura chave para guiar esse processo.

Para Vigotski, a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas, fundamentalmente, uma relação mediada. Essa mediação ocorre por meio de produtos culturais, como signos, instrumentos e pelo "outro" (Oliveira, 1993, p.26-27), a partir dos quais se tornam possíveis os processos de interação entre os sujeitos.

O processo de ensino-aprendizagem, sendo uma interação social, ocorre também através de mediações, normalmente, realizadas pelo papel do Professor quando tratamos da educação escolar. A questão que surge é: como realizar essa mediação de modo a auxiliar o desenvolvimento mental dos alunos de forma efetiva? Ou ainda, como "mapear" esse processo de desenvolvimento interno de modo a que possamos orientar as práticas docentes?

Essas questões são fios condutores que guiam a formação realizada com os mediadores que atuam junto ao nosso polo de treinamento. Para isso, os monitores participam de reuniões formativas regulares nas quais são discutidas práticas de mediação que conduzam os alunos no caminho para solucionar um determinado problema.

As reuniões consistem na discussão em grupo de um problema escolhido dentre aqueles que serão propostos aos alunos no encontro seguinte. Cada monitor apresenta a sua resolução para aquele problema e, em seguida, elencamos algumas perguntas que possam ser realizadas aos alunos de modo a guiá-lo em sua resolução autônoma.

Ressaltamos que o protagonismo do processo de resolução está focado na figura do aluno e que o papel dos mediadores é possibilitar que ele ocorra. No próximo capítulo, apontamos alguns conceitos acerca da resolução de problemas que elucidarão a maneira como entendemos essa prática.

CAPÍTULO 2 - Marcos Teóricos

2.1 Resolução de Problemas

A resolução de problemas como metodologia de ensino tem sido tema de muitos estudos nos últimos anos. Törner, Schoenfeld e Reiss (2007), citado em Carrillo e Cruz (2016), apontam que o tópico tem ocupado uma posição de destaque no campo de investigações em educação matemática e também nos documentos oficiais ao redor do mundo.

Por sua vez, D'Ambrósio (2007) aponta que a resolução de problemas tem deixado de aparecer como assunto específico nos currículos e como tema em simpósios e conferências no Brasil. As pesquisas apresentadas frequentemente envolvem assuntos mais restritos, como habilidades em resolver problemas específicos em determinadas áreas da matemática. Outras pesquisas encontradas investigam sobre o uso de ferramentas, como softwares dos mais diversos tipos, no entanto o objetivo é sempre obter as respostas para os problemas.

Tal apontamento nos leva à importância de definirmos o que é um problema matemático e a abordagem pedagógica que trataremos nesta investigação quando nos referirmos à resolução de problemas.

Para Carrillo (1998),

o conceito de problema deve estar associado à aplicação significativa (não mecânica) do conhecimento matemático a situações não familiares, à consciência de tal situação, à existência de dificuldade na hora de se enfrentar tal situação e à possibilidade de resolvê-la aplicando o conhecimento (CARRILLO, 1998a, p.87, tradução nossa)².

Destacamos nessa definição algumas questões que nos são de extrema importância. A primeira delas é referente à aplicação significativa do conhecimento matemático, ou seja, não nos interessa a proposição de exercícios matemáticos

² El concepto de problema debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la consciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento.

mecânicos que sejam resolvidos com a aplicação direta de algoritmos. Como reforçam Krulik e Rudnik (1993), um problema é uma situação com que se defronta um indivíduo para a qual não tem prontamente uma resposta.

A segunda questão que destacamos é em relação à existência de dificuldade para enfrentar o problema. Essa afirmação exige que distingamos os conceitos de **questão, exercício e problema**. Para Krulik e Rudnik (1993), o conceito de questão matemática usualmente apela à memorização e perguntas que exigem respostas diretas. Um exercício matemático tem um enfoque no treinamento de algoritmos já aprendidos anteriormente. Já a noção de problema necessariamente passa pela ideia de desafio, ou seja, o que é um problema para um determinado aluno não necessariamente seja um problema para outro. Por exemplo, o seguinte problema: “Uma avó tem 12 biscoitos e gostaria de dividi-los com seus 4 netos. Quantos biscoitos cada neto receberá?”. É um problema de reparto muito simples para alunos que conhecem a divisão, portanto para eles seria um simples exercício, no entanto para um aluno que está nos anos iniciais do ensino primário essa questão seria possivelmente um problema.

Além disso, as Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991) destacam que

um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel (NCTM, 1991, p.11).

Ou seja, o nível do problema deve ser adequado à capacidade daqueles a quem se propõe para que seja considerado um problema. Tampouco faria sentido propor a alunos do ensino secundário que resolvessem um problema envolvendo cálculos diferenciais.

Blum e Niss (1991), citado em Carrillo (1998) diferenciam a ideia de problema em problemas puros e problemas aplicados, o primeiro se referindo a problemas imersos nas ideias matemáticas e o segundo emergente de contextos reais.

Polya (1986) também diferencia o conceito em dois grupos, sendo eles problemas para resolver, sendo aqueles que pedem que se encontre uma incógnita,

e problemas para demonstrar, que diz respeito a problemas que tem como objetivo realizar uma demonstração ou mostrar a veracidade de alguma afirmação.

Com esses conceitos aclarados, podemos começar a discutir a importância do uso da resolução de problemas como uma potente ferramenta pedagógica para um ensino significativo da matemática.

Para Brown (1978), o que distingue a resolução de problemas de tarefas como a memorização, a aprendizagem de algoritmos e de conceitos é “o fato de poder ser um veículo de aprendizagem, não somente de fatos e habilidades, mas também de estruturas conceituais, estratégias gerais e qualidades pessoais” (Brown, 1978, apud Carrillo, 1998, tradução nossa)³.

Para discutir o tema de maneira mais profunda, é impossível não falar George Polya (1887-1985). Em uma de suas mais conhecidas obras, *A arte de resolver problemas* (1945), Polya apresenta uma abordagem de heurísticas para a resolução de problemas que nos fornece uma ampla base para alicerçar nossa prática investigativa que discutiremos mais a fundo na seção seguinte.

2.2 Estratégias Heurísticas

O termo “heurística” dentro do contexto pedagógico, de acordo com o dicionário Houaiss⁴, tem como definição “método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que se lhe quer ensinar”. Em outras palavras, heurística é o estudo do processo solucionador de um determinado problema, buscando compreender as operações mentais que tenham sido úteis para levar a sua solução.

Neste trabalho, quando nos referirmos à heurística, estaremos nos referindo aos métodos e regras empregadas para conduzir à resolução de um problema. Entender esse processo nos dá ferramentas para compreender o desempenho dos alunos quando se deparam com um determinado problema. De acordo com Polya (1978),

³ (...) es el hecho de poder ser vehículo del aprendizaje, no sólo de hechos y destrezas, sino también de estructuras conceptuales, estrategias generales y cualidades personales.

⁴ HOUAISS, Antonio et al. Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

O estudo da heurística tem como objetivos práticos: uma melhor compreensão das operações mentais tipicamente úteis na resolução de problemas que poderia exercer uma influência benéfica sobre o ensino, especialmente sobre o ensino da Matemática. (POLYA, 1978, p. 84)

O passo a passo apresentado por Polya para a resolução de um problema consiste em etapas que nos são úteis para orientar a formação dos mediadores que atuaram juntos aos alunos na resolução dos problemas propostos. São elas:

1ª - Compreensão do Problema -. O primeiro passo é entender o enunciado e para isso é importante fazer perguntas, pois a resposta para essas perguntas pode ser o meio para esse fim. Perguntas como: qual é a incógnita? Ou seja, o que se quer resolver? O que deve ser calculado? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Ou seja, quais são as condições que possuímos e que podemos usar. É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes ou não para determinar a incógnita? Existem condições redundantes ou contraditórias? Faça uma figura. Introduza notação adequada. Separe as condições em partes. Estas perguntas são necessárias para a compreensão das informações contidas no enunciado.

2ª - Fazer a relação entre os dados e a incógnita. Nesta etapa, é importante fazer as seguintes perguntas. Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado de uma forma um pouco diferente? Neste momento devemos buscar uma relação entre o que você está se propondo resolver e algum outro correlato já resolvido, e que possa servir de orientação para a construção da sua solução. Conhece algum problema correlato? Caso você encontre um semelhante ao seu e que você sabe resolver, tente aproveitá-lo analisando os caminhos percorridos até a sua solução e verificando as adaptações necessárias para fazer o seu. Considere a incógnita? Caso não exista nenhuma atividade parecida, divida o que você está trabalhando em partes, fazendo a conexão entre a incógnita e os dados correspondentes, inclusive criando incógnitas auxiliares para cada parte (PÓLYA, 2006, p. 4-7).

Essas etapas descritas por Polya mostram uma sistematização de um processo que não é mecânico, buscando guiar os alunos na aquisição de estratégias que os levem a solucionar um determinado problema. Nesse contexto, o ensino de matemática segue um caminho diferente do tradicional, levando o aluno a uma compreensão significativa do conceito/conteúdo que desejamos trabalhar. Polya (1978) ainda diz que

(...) um ensino que se reduz ao treinamento de técnicas, ao desenvolvimento mecânico de atividades fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa para a imaginação e análise do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso. (POLYA, 1978, p. 12)

Carrillo (1998) sistematiza uma série de heurísticos, baseados em fases gerais para a resolução de problemas matemáticos, deixando claro que está de acordo com Schoenfeld (1987) quando afirma que não existe uma divisão perfeita em fases, mas sim que “concebe as fases como estados pelos quais os alunos passam e às quais podem voltar durante o processo de resolução de problemas” (CARRILLO, 1998, p. 104). As fases apresentadas são: *0. Identificação; 1. Compreensão; 2. Planificação e exploração; 3. Execução; 4. Verificação*

Descreveremos de forma sucinta as fases apresentadas acima a fim de apresentar os heurísticos característicos de cada uma delas. Na fase 0, nomeada de fase de identificação, o aluno detecta a existência de um problema. Aqui nesse ponto, é importante ressaltarmos a subjetividade da definição de problema comentada anteriormente e como cada um se posiciona perante uma situação problemática apresentada. Carrillo (Op.Cit.) traz como exemplo um problema de divisão de uma quantidade ímpar de balas em duas partes iguais, apresentado a uma classe de início da educação primária. Alguns alunos podem dizer que é impossível realizar tal divisão de forma igualitária e que um dos grupos teve má sorte em ficar com uma quantidade menor, e outros podem observar que existe uma série de quantidades as quais não é possível dividir em dois grupos iguais.

A fase 1, referente à compreensão do problema, é o estado no qual o aluno se apropria do problema, criando uma ideia mental da situação apresentada. Os heurísticos para essa fase são: C1 - Organizar a informação; C2 - Exemplificar; C3 - Expressar em outras palavras.

A fase 2, de planificação e exploração, é o momento em que o resolutor elabora um plano para solucionar o problema proposto. Carrillo (1998) aponta que muitas vezes a fase de planificação e exploração são apresentadas separadamente, no entanto, do ponto de vista metacognitivo, o autor defende que devam ser

apresentadas juntas, já que o objetivo do aluno em ambas é obter informações que possibilitem desenvolver uma estratégia para fornecer uma solução coerente. Os heurísticos para essa fase são: PE1 - Simplificar; PE2 - Estimar; PE3 - Buscar regularidades com a intenção de generalizar; PE3a - testar valores; PE4 - Considerar problemas equivalentes; PE5 - Argumentar por contradição; PE6 - Assumir a solução; PE7 - Partir do que se sabe; PE8 - Planejar hierarquicamente a solução; PE9 - Decompor o problema; PE10 - Explorar problemas similares; PE11 - Conjecturar.

A fase 3, de execução, é o estado em que se encontra enquanto desenvolve o plano elaborado na fase anterior. Aqui, vale frisar que não existe uma fronteira muito clara entre as fases. Elas podem ocorrer de forma simultânea e se retroalimentarem.

Por fim, a fase 4, de verificação, é o momento em que se verifica se a solução encontrada faz sentido para o problema que foi proposto.

Como os dados que analisaremos nesta investigação consistem somente nos documentos entregues pelos alunos com as resoluções dos problemas propostos, não é possível identificar e descrever com precisão como o aluno passou por cada uma das fases. A princípio, apresentaremos uma análise dos problemas propostos, indicando a disciplina na qual está inserido, o conteúdo específico abordado no módulo, uma sugestão de solução para o problema, uma sequência de heurísticos como sugestão para auxiliar no processo de mediação da resolução e algumas estratégias de resolução que emergiram da análise dos dados.

Em seguida, apresentaremos uma análise longitudinal das resoluções dos problemas realizadas por dois alunos elencados dentre os participantes.

CAPÍTULO 3 - Metodologia de Pesquisa

3.1 Coleta dos dados

Os sujeitos dessa pesquisa aceitaram e foram autorizados pelos responsáveis a participar da coleta de dados a serem analisados. Os responsáveis foram informados da pesquisa através do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), aprovado pelo CEP - Unicamp, anexado ao fim deste trabalho. (Anexo 1)

A tarefa de organizar os dados, embora pareça fácil, é bastante complexa, pois os materiais coletados nem sempre são fáceis de serem separados ou codificados. Tal tarefa envolve vários passos, e nossa dinâmica consistiu inicialmente em separar o material coletado por data e disciplina para, em seguida, selecionar os alunos que formariam parte do corpus de análise. O critério utilizado para essa seleção foi optar por alunos que participaram de todos os momentos de coleta de dados para que fosse possível realizar uma análise longitudinal mais completa.

Além disso, também selecionamos, dentre as quatro disciplinas trabalhadas no projeto, Álgebra e Teoria dos Números. Utilizamos como critério para realizar essa escolha em parte pela qualidade dos dados, uma vez que os alunos explicitaram melhor suas estratégias nas resoluções dos problemas dessas duas áreas e em outra pelas interseções em alguns conteúdos abordados em ambas.

A categorização das soluções se apoia apenas no material coletado: resoluções escritas entregues pelos alunos para a descrição das resoluções emergidas das respostas dadas.

A partir das resoluções escritas foi possível sistematizar os resultados dos problemas aplicados, realizando as interpretações das estratégias empregadas pelos alunos, categorizando-as a partir das respostas fornecidas pelos alunos aos problemas propostos e agrupando as diferentes estratégias em categorias. O processo de análise dos dados será descrito na seção seguinte.

3.2 Análise das resoluções

A investigação apresentada neste trabalho se caracteriza como um estudo observacional descritivo, visto que tem o objetivo de descrever o processo de resolução de problemas sem realizar intervenções diretas.

Optamos pelo estudo observacional porque entendemos que é a melhor maneira de explorar de forma mais aprofundada as especificidades do contexto em que realizamos a investigação. Além disso, destacamos que o objetivo é estudar um grupo específico de estudantes e não temos a pretensão de fazer generalizações.

A análise realizada se caracteriza como análise de conteúdo e embasamos alguns passos da análise nos escritos de Bardin (2011) sobre o tema. Segundo a teoria de análise de conteúdo apresentada pela autora, a análise foi dividida em três etapas: a pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados e sua interpretação.

A pré-análise consistiu em organizar as resoluções, selecionando quais documentos seriam submetidos à análise. O critério utilizado nesse passo foi a consistência das respostas apresentadas pelos estudantes, de modo a possibilitar uma discussão das estratégias. Em seguida, foram escolhidos aqueles problemas que possuíam uma quantidade significativa de resoluções legíveis e consistentes.

Ainda na pré-análise, iniciamos o esboço de algumas hipóteses que nos auxiliaram na elaboração dos objetivos e de indicadores para fundamentar a interpretação final a partir da leitura “flutuante” dos dados (Bardin, 2011).

A primeira classificação obtida foi a criação de três grupos: Respondidas corretamente, respondidas parcialmente (ou incorretas) e questões em branco.

Inicialmente, tentamos quantificar dentro desses três grupos o erro do aluno numa escala de 0 a 1. No entanto, verificamos a impossibilidade de mensurar com uma mesma régua erros que se apresentaram de naturezas diversas. Além disso, observamos que as diferentes estratégias abordadas pelos alunos nos forneceriam uma análise mais rica dentro do caminho que traçamos na investigação.

Optamos, então, por classificar os dados coletados em categorias de estratégias utilizadas pelos alunos, aplicando o critério de semelhança. A calibragem dessas categorias se deu por meio da análise por pares de uma

pequena amostra dos dados. Esse processo resultou na criação de três grupos de estratégias, chamados daqui em diante de categorias 1, 2 e 3, que serão apresentados no capítulo seguinte.

A exploração do material consistiu na aplicação sistemática dos critérios desenvolvidos na pré-análise, bem como a codificação dos dados para facilitar sua exploração. O tratamento dos resultados e sua interpretação foi realizada com o apoio do referencial teórico abordado anteriormente.

CAPÍTULO 4 - Análise dos Problemas Propostos

Neste capítulo, apresentamos uma análise dos problemas selecionados, propondo uma resolução e elencando possíveis estratégias heurísticas para auxiliar em suas resoluções. Além disso, apresentamos as categorias de estratégias de resolução que emergiram dos dados analisados.

A elaboração das sugestões dos possíveis heurísticos foram baseadas na análise das resoluções dos alunos e acreditamos ser um bom auxílio na mediação do processo, de modo a desenvolver a autonomia dos alunos na prática de resolução de problemas.

4.1 Apresentação dos Problemas

Legenda: T=Teoria dos Números; A=Álgebra. O número que acompanha a letra se refere ao número do simulado em questão e separado por hífen está o número do problema dentro de cada simulado. Assim, T4-1, por exemplo, indica a primeira questão de Teoria dos Números aplicada no quarto simulado do programa.

T4-1 Ao dividir o número inteiro $20 + x$ por 11 obtemos resto 7. Qual é o menor valor inteiro positivo de x ?

(a) 10 (b) 9 (c) 6 (d) 4 (e) 2

Fonte: IMPA (2019)

Disciplina: Teoria dos Números

Tema abordado no simulado: Divisibilidade

Sugestão de resolução:

Escrevendo o algoritmo de Euclides para a divisão na forma $20 + x = 11q + 7$, onde q representa os possíveis quocientes para a divisão e atribuindo possíveis valores para q , obtemos as seguintes possibilidades para a expressão $20 + x$: 7, se $q = 0$; 18, se $q = 1$; 29, se $q = 2$; 40, se $q = 3$ e assim por diante. Como o problema pede o menor valor de x que cumpra as condições, descartamos os valores de $q > 2$. Descartamos também $q = 0$ e $q = 1$, pois nesses casos o valor de x é negativo, portanto o valor correto a ser escolhido é $q = 2$. Sendo assim, para $20 + x = 29$, temos $x = 9$.

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C2 - Exemplificar: exemplificar a situação do enunciado utilizando valores numéricos para a divisão, buscando compreender o significado dos elementos da divisão apresentada.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE3a - testar valores: atribuir valores numéricos à variável x a fim de encontrar uma solução que satisfaça o enunciado.

Categoria 1: Dentre as diferentes estratégias escolhidas pelos alunos, a mais recorrente foi a atribuição, sistemática ou não, de valores à incógnita até que a divisão por 11 deixasse resto 7. Dentro dessa categoria, alguns alunos testaram todos os valores inteiros positivos a partir do 1 e analisaram o resto em cada caso e outros testaram algum valor específico para observar o que aconteceria com o resto e em seguida escolheram valores que se aproximavam do desejado.

Figura 5 - Exemplo de resolução do problema T4-1 categoria 1

$20+x$	$\div 11$	Quociente	Resto
$20+1 = 21$	$\div 11$	1	10
$20+2 = 22$	$\div 11$	2	0
$20+3 = 23$	$\div 11$	2	1
$20+4 = 24$	$\div 11$	2	2
$20+5 = 25$	$\div 11$	2	3
$20+6 = 26$	$\div 11$	2	4
$20+7 = 27$	$\div 11$	2	5
$20+8 = 28$	$\div 11$	2	6
$20+9 = 29$	$\div 11$	2	7

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Categoria 2: Outra estratégia apresentada, que consideramos mais elaborada matematicamente, foi a algebrização do problema, escrevendo o algoritmo de Euclides para a divisão na forma $20 + x = 11q + 7$, que representa os possíveis quocientes para a divisão. Nesse ponto é interessante observar que o aluno insere uma nova incógnita para auxiliar na resolução do problema, como sugerido por Polya.

Figura 6 - Exemplo de solução do problema T4-1 categoria 2

$20+x$
 $\div 11$
 $20+x = 11q + 7$
 $29 = 11 \cdot 2 + 7$ (9)

Se x for:

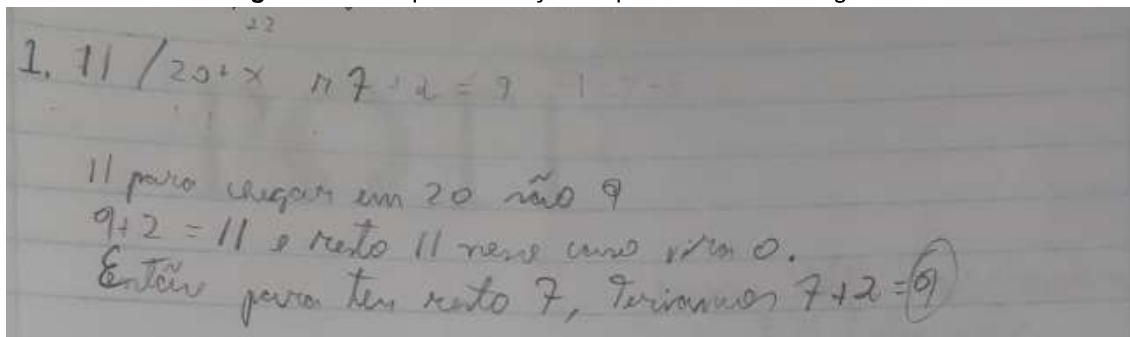
$10 = 20+10 = \frac{30 \times 11}{22} \cdot 2$ $6 = 20+6 = \frac{26 \times 11}{22} \cdot 2$
 $8 = 20+8 = \frac{28 \times 11}{22} \cdot 2$ $4 = 20+4 = \frac{24 \times 11}{22} \cdot 2$
 $7 = 20+7 = \frac{27 \times 11}{22} \cdot 2$

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Categoria 3: Uma terceira estratégia que apareceu de forma menos recorrente, no entanto interessante do ponto de vista de estratégias heurísticas foi iniciar o raciocínio a partir do divisor 11. Nesse caso, o aluno realiza a divisão através de subtrações sucessivas, retirando 11 do dividendo $20 + x$ e obtendo $9 + x$. Para

que o resto seja 0 ao retirar 11 mais uma vez, o valor de x deve ser 2. Então, para que o resto seja 7, temos $x = 7 + 2 = 9$.

Figura 7 - Exemplo de solução do problema T4-1 categoria 3



Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

T4-2 Pedro afirma que exatamente 25% dos seus livros são de ficção científica e $\frac{1}{9}$ dos seus livros são de comédia. Sabendo que Pedro possui entre 50 e 100 livros, quantos livros ele possui?

(A) 50 (B) 56 (C) 64 (D) 72 (E) 96

Fonte: IMPA (2019)

Disciplina: Teoria dos Números

Tema abordado no simulado: Divisibilidade

Sugestão de resolução:

Para encontrar o valor solicitado, devemos buscar por um número inteiro, dado que o enunciado se refere à quantidade de livros, entre 50 e 100, que seja divisível por 4 (para que 25% seja inteiro) e por 9 (para que $\frac{1}{9}$ seja inteiro). Como, os múltiplos de 4 e 9 são (36, 72, 108, ...), a quantidade procurada é 72.

Possíveis heurísticos:

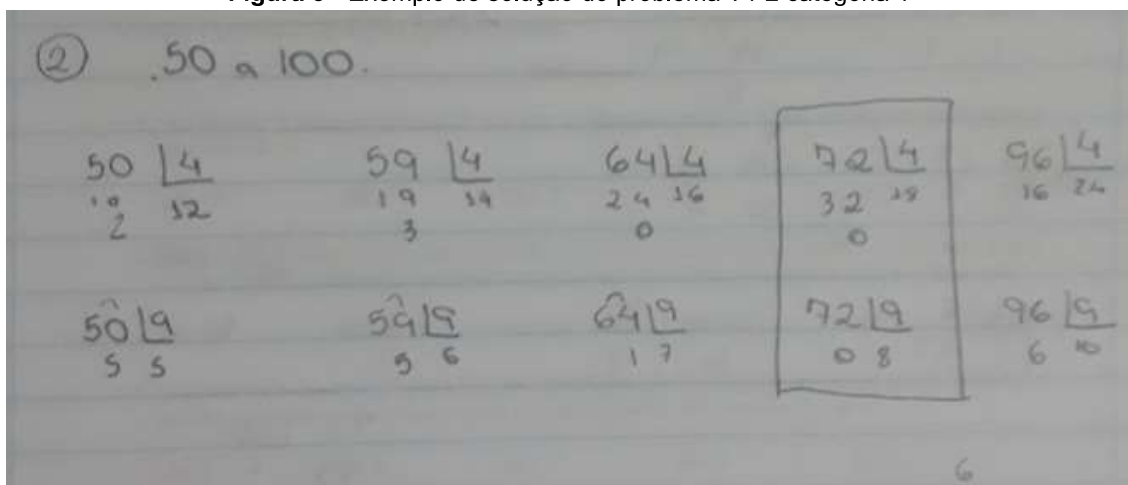
- Fase 1 (de Compreensão):
 - C1 - Organizar a informação: o problema apresenta algumas condições que devem ser satisfeitas pela solução procurada. Um

primeiro passo para a compreensão do problema é identificar essas condições.

- C3 - Expressar em outras palavras: complementando o passo anterior, uma maneira de facilitar o entendimento da situação é expressar essas condições em outros termos como, por exemplo, na resolução proposta.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE6 - Assumir a solução: uma estratégia apresentada pelos alunos foi assumir uma das alternativas como solução e então verificar se esse valor satisfazia as condições. Esse heurístico se apoia também na fase 4 de verificação.

Categoria 1: A estratégia mais recorrente seguida pelos alunos nesse problema envolveu o teste de valores na divisão por 4 e 9, o que revela um entendimento claro do problema. No entanto, por ser um problema de múltipla escolha, por muitas vezes não fica claro se eles de fato comprovaram se a resposta era única ou se simplesmente testaram os valores das alternativas até obter um valor que satisfizesse as condições. A primeira categoria diz respeito aos alunos que encontraram um valor entre 50 e 100 divisível por 4 e 9, testando a divisão das alternativas pelos dois valores e verificando o resto.

Figura 8 - Exemplo de solução do problema T4-2 categoria 1



Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Categoria 2: Nessa segunda categoria, apesar de o aluno se referir às alternativas como um direcionamento na busca da solução, ele não o faz de forma aleatória, mas utilizando o critério de divisibilidade por 9 e em seguida verifica se a alternativa também satisfaz a condição de ser um número inteiro para os livros de ficção científica, que representam 25% do total.

Figura 9 - Exemplo de solução do problema T4-2 categoria 2

2950 é 100
 25% ficção cun.
 $\frac{1}{9}$ critério - $\frac{1}{9}$ significa que o número foi dividido por 9, e o número 50' é dividido por 9 se o soma dos algarismos for divisível.
 Das alternativas, o único número divisível é **72**
 $72 \times 100 = 1800$
 $1800 \times 25 = 450$
 450 são ficção cun.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Categoria 3: Uma outra estratégia que foi apresentada utiliza como caminho para encontrar o valor que satisfaça as condições a ideia de mínimo múltiplo comum (MMC). Consideramos essa estratégia a mais elaborada matematicamente, uma vez que o problema pede um número que seja múltiplo de dois valores simultaneamente. O protocolo do aluno em questão não deixa muito claro se ele de fato entende o caminho que está seguindo, além de cometer alguns erros no uso da notação matemática. Vale ressaltar aqui que esse é um dos primeiros simulados aplicado a eles, portanto ainda estão adquirindo linguagem para expressarem seus raciocínios.

Figura 10 - Exemplo de solução do problema T4-2 categoria 3

Handwritten calculations showing the solution to a problem involving percentages and fractions. The work includes:

- $25\% = \frac{1}{4}$
- $\frac{1}{9} = 11,1\ldots\%$
- A subtraction problem: 2271 (with a circled 72 below it).
- Other calculations: $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{2}{36}$ and $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

A7-1 Na subtração abaixo, cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo que C representa?

$$\begin{array}{r} A \ B \ A \\ - \ C \ A \\ \hline A \ B \end{array}$$

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 7 (e) 9

Fonte: IMPA (2019)

Disciplina: Álgebra

Tema abordado no simulado: Equações e Sistemas

Sugestão de resolução:

Analisando o algoritmo da subtração apresentado, concluímos que $A - A = B = 0$. Em seguida, $B - C = 10 - C = A$, visto que $B = 0$, é necessário transferir uma das A centenas para a casa das dezenas, obtendo dez dezenas. Para encontrar o valor de C, observamos que o resultado da subtração contém zero centenas, portanto $A = 1$. E assim, $C = 9$.

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C1 - Organizar a informação: o problema apresenta as informações ocultas através do algoritmo da subtração. Organizar essas informações é uma maneira de facilitar a busca pelo valor que satisfaça as condições apresentadas.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE8 - Planejar hierarquicamente a solução: a partir da organização das informações na fase anterior, hierarquizar os passos da solução é um caminho para encontrar as delimitações que levam a solução procurada.

Categoria 1: Seguindo o padrão das estratégias classificadas como pertencentes à categoria 1, incluímos as resoluções que buscaram atribuir valores às letras de modo a satisfazer as condições do enunciado. Fica evidente, nesse caso, que esse tipo de estratégia impõe obstáculos na resolução de problemas mais complexos. Em muitos casos, os alunos começam a testar valores e desistem por não conseguirem sistematizar a busca ou realizam algum passo inconsistente matematicamente na escolha dos valores, conforme exemplificado nas duas resoluções abaixo.

Figura 11 - Exemplo 1 de solução do problema A7-1 categoria 1

The image shows handwritten work on lined paper. On the left, a cryptarithm is written: $L - ABA = CA$, with AB written below CA . To the right of this, the values $A=3$, $B=0$, and $C=9$ are written. Further to the right, a subtraction problem is shown: $2303 - 73 = 30$.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Figura 12 - Exemplo 2 de solução do problema A7-1 categoria 1

①
$$\begin{array}{r} ABA \\ - CD \\ \hline 202 \\ - 20 \\ \hline 182 \end{array}$$

fiquei com a soma então não consegui resolver

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Categoria 2: Incluímos na segunda categoria, as resoluções que sistematizaram as informações contidas na aplicação do algoritmo da subtração apresentada. Nesse caso, a resposta não é imediata, sendo necessário buscar algumas relações entre os valores desconhecidos. Todas as resoluções incluídas nessa categoria chegaram, em diferentes ordens, nas conclusões contidas na resolução proposta.

Figura 13 - Exemplo de solução do problema A7-1 categoria 2

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$$\begin{array}{r} ABA \\ - CD \\ \hline 202 \\ - 20 \\ \hline 182 \end{array}$$

AB A ficou da soma algoritmo de cada na comparando com 1. A x 1

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

A7-2 Janaína escreveu no quadro-negro dois números cuja soma é igual a 1357. Ela observou que um desses números poderia ser obtido apagando o algarismo das unidades do outro. Qual é esse algarismo?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Fonte: IMPA (2019)

Disciplina: Álgebra

Tema abordado no simulado: Equações e Sistemas

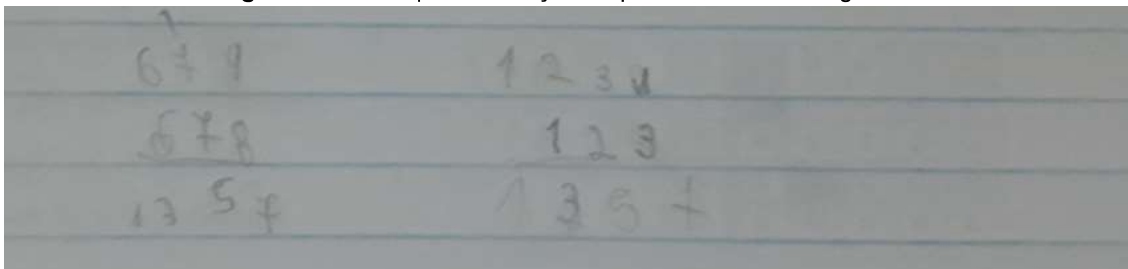
Sugestão de resolução:

Buscamos dois números cuja soma é 1357, sabendo que um deles é da forma ABCD e o outro ABC, com A, B, C e D representando os algarismos que formam esses números. Sabemos que $A=1$, pois o resultado da adição $ABCD+ABC$ possui uma dezena. A partir disso, temos que $B+A = 3$ e portanto $B=2$, pois B é um algarismo, portanto menor que 9. Do mesmo modo, $C+B = 5$, obtendo $C = 3$ e por fim, $D+C=7$, concluindo que $D=4$. Daí, temos que $ABCD = 1234$ e o algarismo das unidades é 4.

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C3 - Expressar em outras palavras: reescrever a situação do enunciado utilizando a linguagem matemática, inserindo símbolos que representem os valores desconhecidos. Expressar a soma citada na forma do algoritmo usual da adição.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE8 - Planejar hierarquicamente a solução: a partir da reescrita sugerida acima, hierarquizar os passos da solução é um caminho para encontrar as delimitações que levam a solução procurada, identificando em qual ordem os passos devem ser executados.

Categoria 1: Incluímos nessa categoria as resoluções não sistemáticas, ou seja, que chegaram em uma solução do problema através de palpites de valores que satisfazem as condições do enunciado.

Figura 14 - Exemplo de solução do problema A7-2 categoria 1

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Os alunos não apresentaram outras estratégias, além da apontada na categoria 1.

T8-1 Um guarda trabalha durante 4 dias consecutivos e descansa no dia seguinte. Após cada dia de descanso ele volta a repetir esse processo, trabalhar 4 dias e descansar 1 dia. Se em certo domingo ele descansa, quantos dias de trabalho o guarda terá até que ele volte a descansar num domingo?

(a) 35 (b) 28 (c) 24 (d) 20 (e) 16

Fonte: IMPA (2019)

Disciplina: Teoria dos Números

Tema abordado no simulado: Congruência

Sugestão de resolução:

Começando a contagem dos dias trabalhados a partir de uma segunda-feira, os dias de descanso serão representados pelos múltiplos de 5, ou seja, sabemos que um determinado dia n será um dia de folga se for da forma $5k$, com k inteiro.

Analogamente, os domingos serão representados pelos múltiplos de 7.

Sendo assim, queremos encontrar o primeiro dia no qual coincidam os fatos de ser um dia de folga e domingo. Ou seja, queremos um dia que seja representado pelo menor número inteiro que seja múltiplo de 5 e 7. $\text{MMC}(5,7)=35$.

Portanto, após 35 dias, o guarda folgará novamente em um domingo. Como a proporção entre dias de folga e dias trabalhados é de 1:4, temos que ele terá trabalhado 28 dias.

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C1 - Organizar a informação: uma sugestão para auxiliar o processo de compreensão do problema é reorganizar os dados em uma tabela (ou calendário) de modo a facilitar a visualização das informações fornecidas. Representaremos por T os dias trabalhados e por F os dias de folga.

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
F	T	T	T	T	F	T
T	T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F
T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T	T
F						

- C2 - Exemplificar: uma outra abordagem possível para compreender o problema é listar alguns dias de folga a partir do processo descrito no enunciado.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE3 - Buscar regularidades com a intenção de generalizar: um plano para enfrentar esse problema é observar a regularidade existente entre os dias de folga, percebendo que são múltiplos de 5, e a regularidade existente na quantidade de dias contidos em uma semana.
 - PE3a - testar valores: complementando o item anterior, podemos buscar alguns palpites e verificar se estes valores satisfazem as condições observadas.
 - PE11 - Conjecturar: A partir da observação realizada no passo anterior, algumas conjecturas podem surgir acerca da “forma” do

número que representará o próximo dia de folga em um domingo. Por exemplo, que esse número deve ser múltiplo de 5 e 7.

Categoria 1: Inclui as soluções que utilizaram a abordagem apresentada no heurístico C1, listando todos os dias trabalhados e de folga até encontrar o dia procurado.

Figura 15 - Exemplo de solução do problema T8-1 categoria 1

4) $7 \text{ dias} = 7 \text{ dias}$

D	S	T	Q	Q	S	S
D	T	T	T	T	D	T
T	T	T	D	T	T	T
T	D	T	T	T	T	D
T	T	T	T	D	T	T
T	T	D	T	T	T	T

D = descontar
T = trabalhar
28 dias
36 dias

De um domingo para o outro de descontar 28 dias de trabalho, porém se descontar com os dias de descontar, ficará 36 dias.

Nono começa descontar no domingo, mas no dia seguinte, então que tem "calendário", de dia T dias que ele trabalha e D = dias que ele descontar.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Categoria 2: inclui soluções que abordaram o problema a partir de alguma sistematização das informações do enunciado, formulando conjecturas sobre a solução procurada.

Figura 16 - Exemplo de solução do problema T8-1 categoria 2

1)
 $7.g = 4.q \rightarrow MM \leq 2P \text{ dias}$

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Obs.: 7 representa os sábados, começando a contar de um domingo e 4 é o total de dias trabalhados por bloco, que deve ser múltiplo de 4 para que o dia seguinte seja uma folga.

Categoria 3: inclui as soluções que identificaram que o próximo dia de folga em um

domingo ocorreria após uma quantidade de dias múltiplo de 5 e 7.

Figura 17 - Exemplo de solução do problema T8-1 categoria 3

5	4	7
10	8	14
15	12	21
20	16	28
25	20	35
30	24	42
35	28	49
40	32	56
45		63
50		70
55		
60		
65		
70		

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

T8-2 Paula deseja colocar dois algarismos nos espaços livres do número de quatro dígitos 2 _ _ 8 de modo que o número obtido seja divisível por 3. De quantas maneiras ela pode fazer isso?

(a) 19 (b) 20 (c) 29 (d) 30 (e) 33

Disciplina: Teoria dos Números

Tema abordado no simulado: Congruência

Sugestão de resolução:

Sabemos que um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é divisível por 3. Assim, sejam x e y os algarismos das centenas e das dezenas, respectivamente. Assim, temos $2+x+y+8=3k$, com k inteiro. Daí,

$$x+y=3k-10.(x+y+10=3k)$$

Obs.: A soma $x+y$ é limitada por 18, pois x e y representam Algarismos.

Portanto, temos que $x+y$ pode assumir os valores 2, 5, 8, 11, 14, 17. Analisando cada uma das possibilidades:

- $x+y=2$ (3 maneiras)

- $x=0; y=2$
- $x=1; y=1$
- $x=2; y=0$

- $x+y=5$ (6 maneiras)

- $x=0; y=5$
- $x=1; y=4$
- $x=2; y=3$
- $x=3; y=2$
- $x=4; y=1$
- $x=5; y=0$

- $x+y=8$ (9 maneiras)

- $x=0; y=8$
- $x=1; y=7$
- $x=2; y=6$
- $x=3; y=5$
- $x=4; y=4$
- $x=5; y=3$
- $x=6; y=2$
- $x=7; y=1$
- $x=8; y=0$

- $x+y=11$ (8 maneiras)

- $x=2; y=9$
- $x=3; y=8$
- $x=4; y=7$
- $x=5; y=6$
- $x=6; y=5$

- $x=7; y=4$
- $x=8; y=3$
- $x=9; y=2$
- $x+y=14$ (5 maneiras)
 - $x=5; y=9$
 - $x=6; y=8$
 - $x=7; y=7$
 - $x=8; y=6$
 - $x=9; y=5$
- $x+y=17$ (2 maneiras)
 - $x=8; y=9$
 - $x=9; y=8$

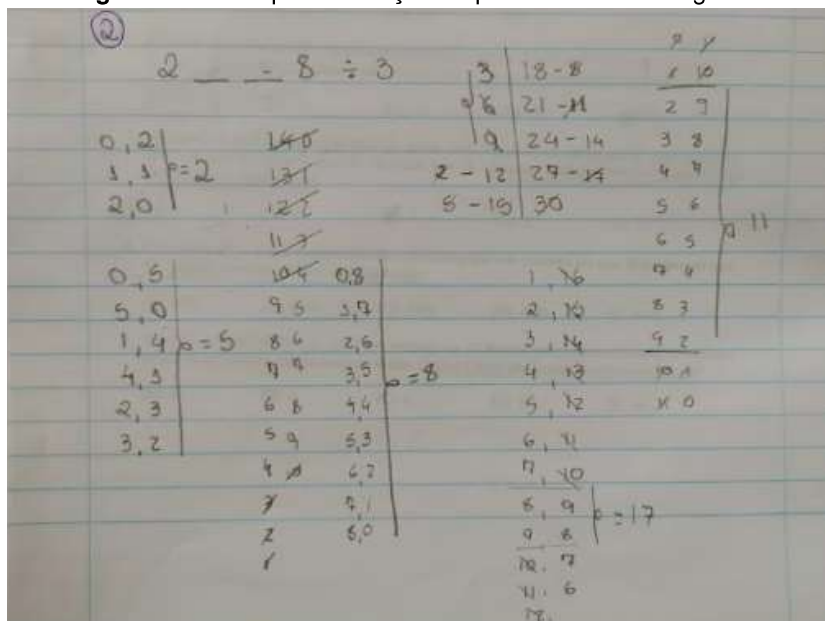
Totalizando 33 maneiras.

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C2 - Exemplificar: substituir as lacunas com valores numéricos e verificar a divisibilidade por 3 a fim de identificar algum critério.
 - C3 - Expressar em outras palavras: a partir dos exemplos do heurístico anterior, buscar uma sentença, matemática ou não, que expresse as condições do enunciado como na resolução proposta.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE3 - Buscar regularidades com a intenção de generalizar: caso não seja conhecido o critério de divisibilidade por 3, o resolutor do problema deve analisar alguns casos com o objetivo de encontrar uma regularidade nos valores que satisfazem a condição do enunciado.
 - PE3a - testar valores: a partir da identificação deste regularidade, testar valores para verificar sua veracidade.
 - PE9 - Decompor o problema: encontrado um critério para identificar os valores desejados, decompor a busca em passos auxilia na sistematização da resolução.

Categoria 1: Essa categoria inclui os alunos que buscaram as soluções possíveis listando os valores que satisfizessem as condições do enunciado.

Figura 18 - Exemplo de solução do problema T8-2 categoria 1



Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Não foram identificadas outras categorias para esse problema.

T8-3 Um inteiro é *específico* quando deixa resto 2 na divisão por 6, resto 5 quando dividido por 9 e resto 7 quando dividido por 11. Existem quantos inteiros positivos específicos de três algarismos?

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2 (e) 1

Disciplina: Teoria dos Números

Tema abordado no simulado: Congruência

Sugestão de resolução:

Seja n um inteiro *específico*. Ou seja, $n = 6.q_1 + 2$; $n = 9.q_2 + 5$; $n = 11.q_3 + 7$. Assim,

queremos n inteiro com três algarismos que satisfaça as três condições acima.

$$99 < n < 1000$$

Note que ao adicionar 4 a n , ele deixará resto 6 na divisão por 6, resto 9 na divisão por 9 e resto 11 na divisão por 11. Mas igualar o resto ao divisor equivale a zerar o resto. Ou seja, $n+4$ é múltiplo de 6, 9 e 11. Assim, os múltiplos de 6, 9 e 11 com três algarismos são {198, 396, 594, 792, 990}.

Portanto, os valores para n são {194, 392, 590, 788, 986} e existem 5 valores que satisfazem as condições.

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C3 - Expressar em outras palavras: traduzir as informações do enunciado utilizando o algoritmo de euclides é uma sugestão para facilitar a sistematização das informações.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE1 - Simplificar: o primeiro passo dado na solução proposta foi o de manipular as equações obtidas a fim de simplificar a busca pelos valores desejados.
 - PE3 - Buscar regularidades com a intenção de generalizar: a partir da simplificação das três informações do enunciado, a busca por regularidades entre elas é um caminho que pode auxiliar para encontrar as soluções.
 - PE3a - testar valores: concomitantemente, atribuir valores às variáveis também é um caminho para generalizar.

Categoria 1: As resoluções incluídas nessa categoria são aquelas que conseguiram sistematizar as informações do enunciado utilizando o algoritmo da divisão. No entanto, nenhum aluno conseguiu avançar no sentido de encontrar a solução

procurada.

Somente a partir das equações encontradas para cada informação do enunciado não é fácil encontrar uma solução que as satisfaça. Um próximo passo possível em direção à solução do problema seria perceber que o “x” buscado não é múltiplo de 6, 9 ou 11, pois em todos os casos deixa resto, mas $x+4$ o é, porém nenhum dos alunos atingiu essa etapa.

Figura 19 - Exemplo de solução do problema T8-3 para a categoria 1

Handwritten student work for problem T8-3. The student has written three division problems:

- $x \div 6$ with remainder 2 and quotient a .
- $x \div 9$ with remainder 5 and quotient a .
- $x \div 11$ with remainder 7 and quotient a .

Below these, the student has written the equation $b = a \cdot 9 + R$ and then three equations for x :

- $x = a \cdot 6 + 2$
- $x = a \cdot 9 + 5$
- $x = a \cdot 11 + 7$

At the bottom, the student has written: "Não sei o que aplicar daqui a ali - ante."

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Não foram apresentadas outras estratégias de resolução.

T8-4 O número $3^{32} - 1$ tem exatamente dois divisores que são maiores do que 75 e menores que 85. Qual é o produto desses dois divisores?

(a) 5852 (b) 6560 (c) 6804 (d) 6888 (e) 6972

Disciplina: Teoria dos Números

Tema abordado no simulado: Congruência

Sugestão de resolução:

Fatorando a expressão $3^{32} - 1$, temos

$$3^{32} - 1 = (3^{16} - 1) \cdot (3^{16} + 1) = (3^8 - 1) \cdot (3^8 + 1) \cdot (3^{16} + 1) = \\ = (3^4 - 1) \cdot (3^4 + 1) \cdot (3^8 + 1) \cdot (3^{16} + 1)$$

Como os divisores procurados estão entre 75 e 85, temos $(3^4 - 1) = 80$ e $(3^4 + 1) = 82$. Portanto, o produto procurado é $80 \cdot 82 = 6560$.

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C3 - Expressar em outras palavras: este problema apresenta um enunciado e uma pergunta bastante objetiva. A única sugestão aqui é subdividir o problema em dois: quem são os divisores de $3^{32} - 1$ entre 75 e 85? E qual é o produto desses valores?
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE9 - Decompor o problema: a partir da primeira pergunta elencada na fase anterior, uma sugestão para elaboração de um plano é novamente subdividir o problema em dois: encontrar a fatoração do número em questão e em seguida buscar os divisores que satisfazem as condições apresentadas. Por fim, realizar o produto dos valores encontrados.

Categoria 1: Resoluções que calcularam as potências de 3 para identificar os divisores da expressão.

Figura 20 - Exemplo de solução do problema T8-4 categoria 1

$3^1 - 3$	$3^6 - 729$	81	243	729
$3^2 - 9$	$3^3 - 27$	$\times 3$	$\times 3$	$\times 3$
$3^3 - 27$	$3^8 - 6561$	243	729	2187
$3^4 - 81$	-1			$\times 3$
$3^5 - 243$	6560			6561

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Categoria 2: Resoluções que iniciaram o desenvolvimento fatorando a expressão no produto da soma pela diferença dos termos.

Figura 21 - Exemplo de solução do problema T8-4 categoria 2 - Parte 1

$$\begin{aligned} 3^{32} - 1^{32} &= (3^{16} + 1)(3^{16} - 1) \\ &= (3^8 + 1)(3^8 - 1) \\ &= (3^4 + 1)(3^4 - 1) \end{aligned}$$

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Figura 21 - Exemplo de solução do problema T8-4 categoria 2 - Parte 2

$$\begin{aligned} (3^4 + 1)(3^4 - 1) &= 81 + 1 = 82 \quad 81 - 1 = 80 \\ 82 \times 80 &= 6560 \end{aligned}$$

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Não foram identificadas outras estratégias de resolução.

A11-1 Paula cortou uma folha de papel em 10 partes. Depois pegou uma dessas partes e voltou a cortá-la em mais 10 partes. Ela repetiu este mesmo processo mais três vezes, fazendo cinco vezes no total. No final, quantos pedaços de papel ela obteve?

(a) 36 (b) 40 (c) 46 (d) 50 (e) 56

Disciplina: Álgebra

Tema abordado no simulado: Recorrências

Sugestão de resolução:

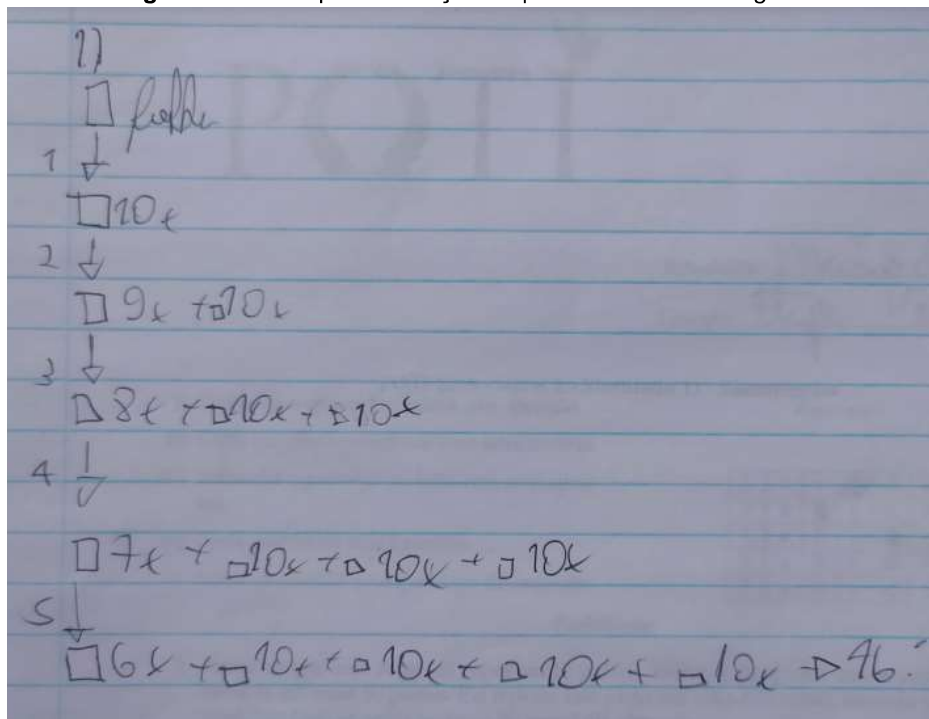
Em cada etapa, com exceção da última, Paula separa 9 pedaços e o décimo é repartido em outros 10 pedaços. Assim, em cinco etapas, teremos $9+9+9+9+10=46$.

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C2 - Exemplificar: uma maneira de compreender a situação apresentada é observar o que ocorre em uma etapa ou mais. Muitas resoluções utilizaram-se de desenhos para ilustrar a situação.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE3 - Buscar regularidades com a intenção de generalizar: a partir da etapa de compreensão, buscar alguma regularidade entre as quantidades obtidas em cada passo da recorrência.

Categoria 1: Resoluções que listaram as etapas da recorrência descrita pelo enunciado.

Figura 22 - Exemplo de solução do problema A11-1 categoria 1



Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Obs.: Existe um erro de interpretação dos passos da recorrência. Nessa resolução, o aluno pega sempre um novo pedaço do papel inicial e não dos novos pedaços obtidos. No entanto, os dois caminhos levam ao mesmo resultado para esse caso. O resolutor encontraria um problema caso esse processo fosse repetido por mais de 10 vezes, pois os pedaços iniciais acabariam. O erro pode estar vinculado a formulação imprecisa do enunciado.

Não foram encontradas outras estratégias de resolução.

A11-2 Pedrinho deseja subir uma escada com 6 degraus. Ele pode subir 1 degrau ou 2 degraus de cada vez. De quantas maneiras diferentes Pedrinho pode subir essa escada? Por exemplo, uma maneira é subir 1 degrau quatro vezes e, em seguida, 2 degraus uma vez. Outra maneira é subir 2 degraus no começo e então subir 1 degrau quatro vezes.

(a) 5 (b) 6 (c) 8 (d) 9 (e) 13

Disciplina: Álgebra

Tema abordado no simulado: Recorrências

Sugestão de resolução:

Podemos dividir a análise em 4 casos, considerando 1, 2, 3, 4, 5 e 6 como os degraus dessa escada:

1º - Subindo de 1 em 1 degrau

1-2-3-4-5-6

2º - Subindo 2 degraus uma vez

2-3-4-5-6

1-3-4-5-6

1-2-4-5-6

1-2-3-5-6

1-2-3-4-6

3º - Subindo 2 degraus duas vezes

2-4-5-6

2-3-5-6

2-3-4-6

1-3-5-6

1-3-4-6

1-2-4-6

4º - Subindo 2 degraus três vezes

2-4-6

Totalizando 13 possibilidades.

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C2 - Exemplificar: uma maneira de compreender a situação apresentada é observar o que ocorre em cada um dos casos possíveis a partir de exemplos.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE9 - Decompor o problema: a estratégia utilizada para contar os casos totais foi subdividir em casos de acordo com as possíveis maneiras de subir a escada.

Categoria 1: Nenhuma estratégia apresentada levou a resposta correta por falta de sistematização na contagem dos casos.

Figura 23 - Exemplo de solução do problema A11-2 categoria 1

Handwritten mathematical work for problem A11-2, showing various recursive calculations and logical deductions. The work includes equations like $G = (p, q)$, $G = (1, 1)$, $G = (1, 2)$, and $G = (2, 1)$, along with calculations like $G = 1 + 2 = 3$, $G = 2 + 4 = 6$, and $G = 3 + 5 = 8$. There are also notes like "Não existe 1 moeda de ouro = $n=6$ ", "pode fazer o mesmo", "equivalente", and "problema: 2". The work is written on lined paper with some corrections and annotations.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

A11-3 Na sequência que começa com 17, 18, 19, ..., cada termo após o terceiro é calculado subtraindo seu anterior da soma dos dois termos que vieram imediatamente antes desse anterior. Por exemplo, o quarto termo é $17+18-19=16$. Qual é o vigésimo termo dessa sequência?

Dica: calcule alguns termos até perceber um padrão.

(a) -20 (b) -10 (c) -2 (d) 0 (e) 35

Disciplina: Álgebra

Tema abordado no simulado: Recorrências

Sugestão de resolução:

Calculando alguns termos dessa sequência, obtemos:

$$a_4 = 17 + 18 - 19 = 16$$

$$a_5 = 18 + 19 - 16 = 21$$

$$a_6 = 19 + 16 - 21 = 14$$

$$a_7 = 16 + 21 - 14 = 23$$

A partir disso, podemos observar que a sequência pode ser dividida em duas subsequências. Uma para n par que é uma PA decrescente de razão 2. E outra para n ímpar que é uma PA crescente de razão 2.

Assim, podemos escrever duas expressões

$$a_{2n} = a_2 - 2(n - 1)$$

$$a_{2n-1} = a_1 + 2(n - 1)$$

$$\text{Portanto, } a_{20} = a_{2 \cdot 10} = a_2 - 2(10 - 1) = 18 - 18 = 0$$

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C2 - Exemplificar: como o próprio enunciado sugere, calcular alguns termos como exemplo auxilia na compreensão do comportamento da sequência.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE9 - Decompor o problema: a partir da identificação do comportamento da sequência, a estratégia empregada é a divisão do problema em duas subsequências.

Categoria 1: Resoluções que tiveram como estratégia calcular todos os termos até o 20º.

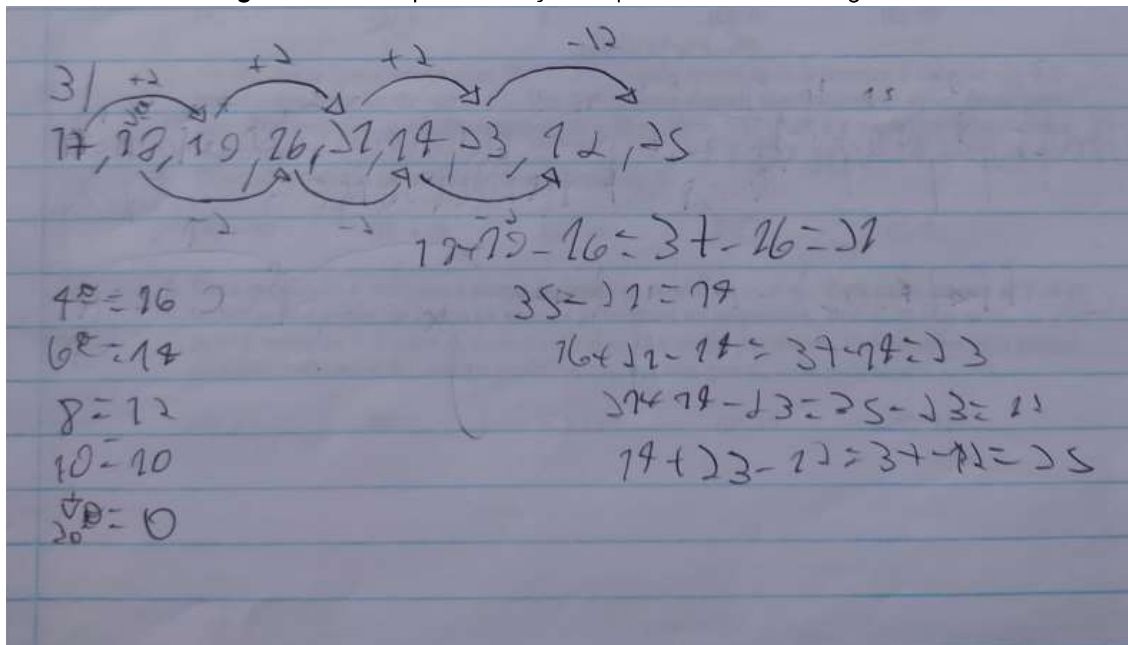
Figura 25 - Exemplo de solução do problema A11-3 categoria 1

Handwritten solution for problem A11-3, category 1. The student lists the sequence: 3) 17, 18, 19, 16, 21, 14, 23, 12, 25, 10. They then calculate terms for even and odd indices separately. For even indices: $18 + 16 - 16 = 21$, $21 + 14 - 23 = 12$, $19 + 16 - 21 = 14$, $16 + 21 - 14 = 23$. For odd indices: 17, 18, 19, 16, 21, 14, 23, 12, 25, 10, 27, 8, 29, 6, 31, 4, 33, 2, 35, 0. A small diagram shows $10 - 4$ with a downward arrow to 10.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Categoria 2: Resoluções que identificaram o padrão da sequência e calcularam o 20º termo a partir desse padrão.

Figura 26 - Exemplo de solução do problema A11-3 categoria 2



Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

T12-1 Determine o número de pares ordenados (a,b) de inteiros positivos tais que $a^2 - b^2 = 91$.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Disciplina: Teoria dos Números

Tema abordado no simulado: Equações Diofantinas

Sugestão de resolução:

Fatorando o lado esquerdo da igualdade, temos $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Como a fatoração em primos de 91 dada por 7×13 é única sem considerar o 1 e a e b são inteiro positivos, podemos concluir que

$a + b = 13$ e $a - b = 7$ ou $a + b = 91$ e $a - b = 1$

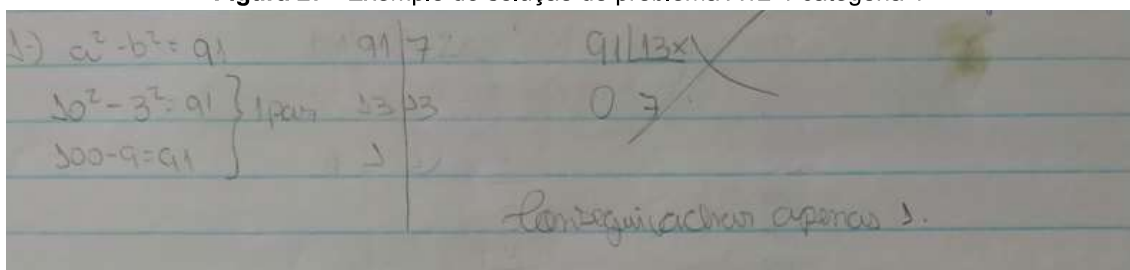
Assim, $a = 10$ e $b = 3$ ou $a = 91$ e $b = 0$ são as únicas soluções para o sistema linear acima.

Possíveis heurísticos:

- Fase 1 (de Compreensão):
 - C2 - Exemplificar: buscar escrever a diferença entre quadrados de números inteiros para compreender o problema.
- Fase 2 (de Planificação e Exploração):
 - PE7 - Partir do que se sabe: utilizar informações prévias, como o teorema fundamental da aritmética para tirar conclusões acerca da solução do problema.

Categoria 1: Resoluções que utilizaram a fatoração de 91 em primos e testaram valores para a e b.

Figura 27 - Exemplo de solução do problema A12-1 categoria 1



Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Não foram apresentadas outras estratégias.

T12-2 Considere a seguinte igualdade $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, com x e y inteiros. Então x é igual a
 (a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0 (e) -1

Disciplina: Teoria dos Números

Tema abordado no simulado: Equações Diofantinas

Não foram apresentadas outras estratégias.

4.2 Categorias encontradas

Na seção anterior, apresentamos os problemas propostos aos alunos e as diferentes estratégias utilizadas por eles para solucioná-los. Classificamos, quando possível, as estratégias em três categorias.

A categoria 1 agrupou estratégias que abordavam o problema a partir de palpites ou tentativas, aleatórias ou sistemáticas, de encontrar valores que satisfizessem as condições descritas no enunciado, listando exemplos ou encontrando casos particulares. Listamos abaixo alguns heurísticos que caracterizam essa categoria, lembrando que nosso foco foi nas fases de *compreensão*, *exploração* e *planificação* por serem as que ficam evidenciadas nas resoluções escritas.

- C2 - Exemplificar
- PE3 - Buscar regularidades com a intenção de generalizar;
- PE3a - testar valores;
- PE6 - Assumir a solução

A categoria 2 incluiu estratégias mais sistemáticas que utilizam ferramentas matemáticas mais elaboradas para abordar os problemas. Os alunos com frequência organizam e reescrevem as informações do enunciado com mais clareza, possibilitando a criação de um plano de resolução para os problemas. Alguns heurísticos típicos dessa categoria foram

- C1 - Organizar a informação;
- C3 - Expressar em outras palavras;
- PE8 - Planejar hierarquicamente a solução;
- PE9 - Decompor o problema;

A categoria 3 ficou reservada a estratégias criativas que, por vezes, se aproximam do heurístico PE3a, no entanto apresentam *insights* que consideramos de um grau maior de sofisticação matemática.

CAPÍTULO 5 - Análise Longitudinal

O objetivo deste capítulo é apresentar uma análise longitudinal das estratégias empregadas pelos alunos ao longo da participação no projeto.

Para isso, selecionamos dois alunos que consideramos bons informantes, levando em consideração dois critérios: dados robustos e resoluções legíveis.

A proposta da análise é identificar se houve amadurecimento no uso da linguagem algébrica para a resolução de problemas. A nossa hipótese era que os alunos, ao longo da participação no projeto e do contato com estratégias diversas para a resolução de problemas, incorporassem uma linguagem mais precisa e matemática que possibilitassem encarar os problemas construindo estratégias mais elaboradas.

5.1 Resoluções do aluno 3

T4-1 (aplicado em 18/05)

Ao dividir o número inteiro $20 + x$ por 11 obtemos resto 7. Qual é o menor valor inteiro positivo de x ?

(a) 10 (b) 9 (c) 6 (d) 4 (e) 2

Fonte: IMPA (2019)

Figura 29 - Resolução do problema T4-1 do aluno 3

Handwritten student work for problem T4-1. The student lists several values of x and performs division by 11 to check the remainder. The correct answer, $x=9$, is circled and marked with a checkmark.

1- $20+x \mid 11$ $\neq$

Tentativas:

- $20+30 \mid 11$
- $30 \mid 11$ $\times$
- $8 \ 2$
- $20+9 \mid 11$ $\checkmark$
- $29 \mid 11$ $\checkmark$
- $7 \ 2$
- $20+6 \mid 11$ $\times$
- $26 \mid 11$ $\times$
- $4 \ 2$
- $20+4 \mid 11$ $\times$
- $24 \mid 11$ $\times$
- $2 \ 2$
- $20+2 \mid 11$ $\times$
- $22 \mid 11$ $\times$
- $0 \ 2$

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: apresenta domínio do algoritmo de euclides e o plano para resolução é consistente, realizando o teste das alternativas. Não apresenta domínio da linguagem algébrica para equacionar o problema como auxílio para encontrar a solução.

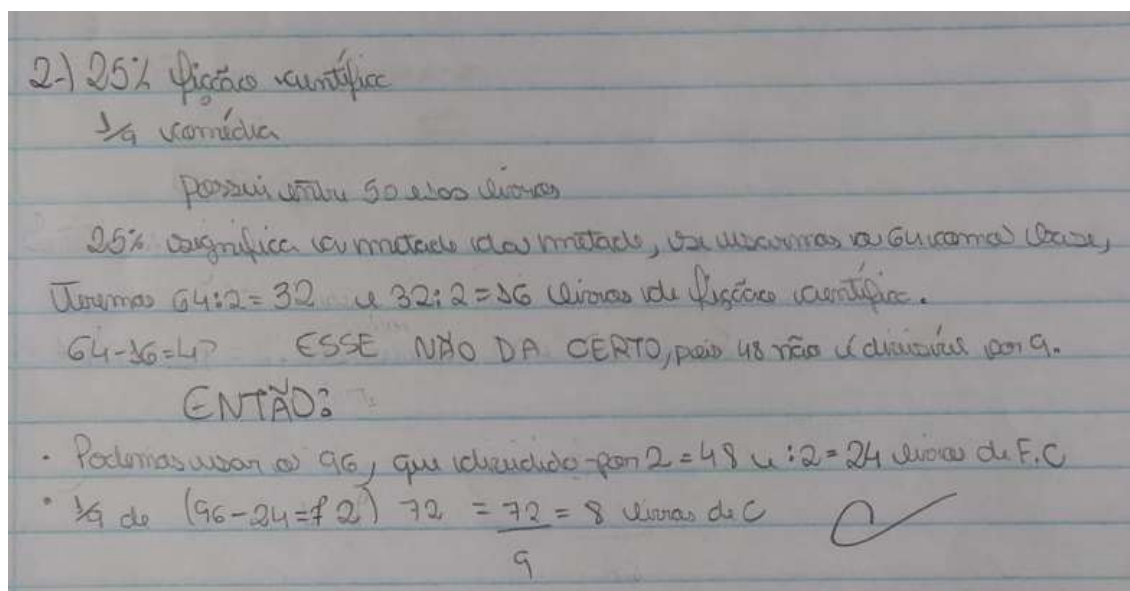
T4-2 (aplicado em 18/05)

Pedro afirma de que exatamente 25% dos seus livros são de ficção científica e $\frac{1}{9}$ dos seus livros são de comédia. Sabendo que Pedro possui entre 50 e 100 livros, quantos livros ele possui?

(A) 50 (B) 56 (C) 64 (D) 72 (E) 96

Fonte: IMPA (2019)

Figura 30 - Resolução do problema T4-2 do aluno 3



Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: testou as alternativas buscando encontrar uma quantidade que satisfaz as condições do enunciado.

A7-1 (aplicado em 29/06)

Na subtração abaixo, cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo que C representa?

$$\begin{array}{r} ABA \\ - CA \\ \hline AB \end{array}$$

- (a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 7 (e) 9

Fonte: IMPA (2019)

Figura 31 - Resolução do problema A7-1 do aluno 3

1-1)
$$\begin{array}{r} A B A \\ - C A \\ \hline A B \end{array}$$

Se A menor $A \cdot B$, $B u = 0$ por qualquer m^2 menor ou igual $u = 0$.

A.1

$$\begin{array}{r} A O A \\ - C A \\ \hline A O \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times A \text{ zero } A \\ - C A \\ \hline A \text{ zero} \end{array} = \begin{array}{r} \times A \text{ so } A \\ - C A \\ \hline A \text{ zero} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \text{ so } A \\ - 9 A \\ \hline A O \end{array} = \begin{array}{r} 0 \text{ so } A \\ - 9 A \\ \hline 0 A O \end{array}$$

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: apresenta bom domínio das propriedades básicas dos números inteiros e a estratégia é bem organizada, apesar de não apresentar uma justificativa clara para o uso de $A=1$.

A7-2 (aplicado em 29/06)

Janaína escreveu no quadro-negro dois números cuja soma é igual a 1357. Ela observou que um desses números poderia ser obtido apagando o algarismo das unidades do outro. Qual é esse algarismo?

- (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Fonte: IMPA (2019)

Figura 32 - Resolução do problema A7-2 do aluno 3

2.) $X + y = 1357$
 $X - \text{AU} = y$ (AU = algoritmo de Euler)
 - não consegui desenvolver

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: não desenvolveu

T8-1 (aplicado em 17/08)

Um guarda trabalha durante 4 dias consecutivos e descansa no dia seguinte. Após cada dia de descanso ele volta a repetir esse processo, trabalhar 4 dias e descansar 1 dia. Se em certo domingo ele descansa, quantos dias de trabalho o guarda terá até que ele volte a descansar num domingo?

(a) 35 (b) 28 (c) 24 (d) 20 (e) 16

Fonte: IMPA (2019)

Figura 33 - Resolução do problema T8-1 do aluno 3

1.) $\text{período} = 7 \text{ dias}$

D	S	T	Q	Q	S	S
□	T	T	T	T	□	T
T	T	T	□	T	T	T
T	□	T	T	T	T	□
T	T	T	T	□	T	T
T	T	□	T	T	T	T
□						

□ = descanso
 T = trabalha
 28 dias
 36 dias

De um domingo para o outro de descanso são 28 dias de trabalho, porém se começarmos num dia de descanso, ficarei 36 dias.

Não consegui desenvolver por algoritmo de Euler. Então fiz um "calendário", onde T = dias que ele trabalha e □ = dias que ele descansa.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: optou por organizar a informação no formato de uma tabela, listando os dias de trabalho e descanso até encontrar um dia que satisfizesse as condições do enunciado, apresentando uma resolução por extensão, com descrição sistemática, sem buscar por padrões.

T8-2 (aplicado em 17/08)

Paula deseja colocar dois algarismos nos espaços livres do número de quatro dígitos 2_ _8 de modo que o número obtido seja divisível por 3. De quantas maneiras ela pode fazer isso?

(a) 19 (b) 20 (c) 29 (d) 30 (e) 33

Fonte: IMPA (2019)

Figura 34 - Resolução do problema T8-2 do aluno 3 - Parte 1

2) 2 _ _ 8 → divisível por 3

O número 3, quando se usa como o número que vai dividir, tem uma "seguinte". Se somarmos os algarismos da número e o result-
tado for divisível por 3, este número é divisível. Ex:

- * 12 → $1+2=3:3=1$
- * 27 → $2+7=9:3=3$
- * 48 → $4+8=12:3=4$

Substituições:

2 1 1 8 $3+9=12:3=4$ 2118 é divisível por 3.	2 1 4 8 $3+12=15:3=5$ $3+15=18:3=6$ 2148 } 2178 } 3 2118 }	2 2 0 8 $4+8=12:3=4$ $4+11=15:3=5$ $4+14=18:3=6$ $4+17=21:3=7$ 2208 2238 2268 2298
2 1 7 8, 2 1 8, 2 1 1 8, 2 1 4 8, 2 1 7 8, 2 2 0 8, 2 2 3 8, 2 2 6 8, 2 2 9 8, 2 2 6 8, 2 2 9 8, 2 2 9 8, 2 2 9 8		

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Figura 35 - Resolução do problema T8-2 do aluno 3 - Parte 2

Handwritten calculations for problem T8-2, showing the process of finding numbers that satisfy specific modular conditions. The work is organized into two rows of four columns each.

Row 1 (Numbers 23 to 26):

- 23: $23 \div 8 = 2 \text{ R } 7$. Calculations: $5 + 10 = 15 \div 3 = 5$; $5 + 13 = 18 \div 3 = 6$; $5 + 16 = 21 \div 3 = 7$. Result: 2328.
- 24: $24 \div 8 = 3 \text{ R } 0$. Calculations: 2418 , 2478 , 2448 . Result: 2448.
- 25: $25 \div 8 = 3 \text{ R } 1$. Calculations: 2508 , 2538 , 2568 , 2598 . Result: 2598.
- 26: $26 \div 8 = 3 \text{ R } 2$. Calculations: 2628 , 2658 , 2688 . Result: 2688.

Row 2 (Numbers 27 to 29):

- 27: $27 \div 8 = 3 \text{ R } 3$. Calculations: 2718 , 2748 , 2778 . Result: 2778.
- 28: $28 \div 8 = 3 \text{ R } 4$. Calculations: 2808 , 2838 , 2868 , 2898 . Result: 2898.
- 29: $29 \div 8 = 3 \text{ R } 5$. Calculations: 2928 , 2958 , 2988 . Result: 2988.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: entende o critério a ser utilizado e tem um bom plano para a resolução. Apresentou uma boa sistematização, fixando algarismos e estudando as possibilidades para os demais, no entanto esqueceu de contabilizar alguns casos.

T8-3 (aplicado em 17/08)

Um inteiro é *específico* quando deixa resto 2 na divisão por 6, resto 5 quando dividido por 9 e resto 7 quando dividido por 11. Existem quantos inteiros positivos específicos de três algarismos?

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2 (e) 1

Fonte: IMPA (2019)

Figura 36 - Resolução do problema T8-3 do aluno 3

Handwritten work for problem T8-3, showing the modular conditions and the student's attempt to find a common solution.

Conditions:

- $x \equiv 2 \pmod{6}$
- $x \equiv 5 \pmod{9}$
- $x \equiv 7 \pmod{11}$

Student's notes:

- 6, 9, 11
- 5
- 7
- Não consegui relacionar
- a variável, pois não tem a fórmula

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: Não desenvolveu, mas foi capaz de reescrever o valor desconhecido algebricamente com as três informações do enunciado.

T8-4 (aplicado em 17/08)

O número $3^{32} - 1$ tem exatamente dois divisores que são maiores do que 75 e menores que 85. Qual é o produto desses dois divisores?

(a) 5852 (b) 6560 (c) 6804 (d) 6888 (e) 6972

Fonte: IMPA (2019)

Figura 37 - Resolução do problema T8-3 do aluno 3

4-) $(3^4)^2$
 $(3^4)^2 + (3^4)^2$
 $(3^4)^2$
 $81 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 81 = 3^{32}$
 $\checkmark 6561 \quad \checkmark 6561$
 $\checkmark$
 $46279721 - 1$
 46279720
 divisível por 75 e 80

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: utilizou incorretamente as propriedades básicas de potência, tentando reduzir o expoente com a propriedade da multiplicação dos expoentes, no entanto não identificou o produto notável esperado para facilitar a resolução e, portanto, não encontrou a solução correta.

A11-1 (aplicado em 28/09)

Paula cortou uma folha de papel em 10 partes. Depois pegou uma dessas partes e voltou a cortá-la em mais 10 partes. Ela repetiu este mesmo processo mais três vezes, fazendo cinco vezes no total. No final quantos pedaços de papel ela obteve?

(a) 36 (b) 40 (c) 46 (d) 50 (e) 56

Fonte: IMPA (2019)

Análise: o aluno não estava presente na data de aplicação.

A11-2 (aplicado em 28/09)

Pedrinho deseja subir uma escada com 6 degraus. Ele pode subir 1 degrau ou 2 degraus de cada vez. De quantas maneiras diferentes Pedrinho pode subir essa escada? Por exemplo, uma maneira é subir 1 degrau quatro vezes e, em seguida, 2 degraus uma vez. Outra maneira é subir 2 degraus no começo e então subir 1 degrau quatro vezes.

(a) 5 (b) 6 (c) 8 (d) 9 (e) 13

Fonte: IMPA (2019)

Análise: o aluno não estava presente na data de aplicação.

A11-3 (aplicado em 28/09)

Na sequência que começa com 17, 18, 19, ..., cada termo após o terceiro é calculado subtraindo seu anterior da soma dos dois termos que vieram imediatamente antes desse anterior. Por exemplo, o quarto termo é $17+18-19=16$. Qual é o vigésimo termo dessa sequência?

Dica: calcule alguns termos até perceber um padrão.

(a) -20 (b) -10 (c) -2 (d) 0 (e) 35

Fonte: IMPA (2019)

Análise: o aluno não estava presente na data de aplicação.

T12-1 (aplicado em 19/10)

T12-1 Determine o número de pares ordenados (a,b) de inteiros positivos tais que $a^2-b^2=91$.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Fonte: IMPA (2019)

Figura 38 - Resolução do problema T12-1 do aluno 3

1) $a^2 - b^2 = 91$

$10^2 - 3^2 = 91$

$100 - 9 = 91$

a	b	$a^2 - b^2$
10	3	91
13	2	169 - 4 = 165
14	5	196 - 25 = 171

Consegui achar apenas 1.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: encontrou a fatoração em primos do número 91, mas aparentemente não utilizou essa informação para garantir a unicidade da solução encontrada. Consistentemente com soluções anteriores, usou tentativa para encontrar um par (a,b) que fosse solução.

T12-2 (aplicado em 19/10)

T12-2 Considere a seguinte igualdade $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, com x e y inteiros. Então x é igual a
 (a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0 (e) -1

Fonte: IMPA (2019)

Figura 39 - Resolução do problema T12-2 do aluno 3

The image shows handwritten work on lined paper. The student starts with the equation $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$. They then incorrectly simplify the right side to $3^{y+2} - 3^y$ (which is correct) but then write $4+2 = 3^{y+2} - 3^y$, indicating a substitution error. This leads to $6 = 3^{y+2} - 3^y$, then $6 = 9 - 3$, and finally $6 = 6$, which is a tautology, not a solution for x.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: a estratégia foi atribuir valores às variáveis x e y, novamente por tentativa, mas cometeu um erro ao calcular a potência 3^3 , o que levou à solução incorreta.

Apesar do aumento da complexidade das questões ao longo dos simulados, o aluno 3 apresentou uma boa capacidade de elaborar planos consistentes de resolução, ainda que na maioria das vezes a estratégia principal tenha sido a tentativa de encontrar soluções a partir de palpites. Não foi possível verificar se o aluno se apropriou de novas ferramentas matemáticas para resolver os problemas, mas vale ressaltar que o aluno passou a utilizar a escrita algébrica para sistematizar as informações do enunciado como, por exemplo, nos problemas T4-1 e T8-3.

5.2 Resoluções do aluno 36

T4-1 (aplicado em 18/05)

Ao dividir o número inteiro $20 + x$ por 11 obtemos resto 7. Qual é o menor valor inteiro positivo de x ?

(a) 10 (b) 9 (c) 6 (d) 4 (e) 2

Fonte: IMPA (2019)

Figura 40 - Resolução do problema T4-1 do aluno 36

The image shows a handwritten solution on lined paper. At the top, the student has written $11 \overline{) 20 + 9} = 20 \overline{) 11}$. Below this, they have written -22 and 2 under the 11, with a horizontal line above the 2. Below the line, they have written 2 . At the bottom, they have written $x = 9$.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: O aluno utilizou tentativa para encontrar a solução que satisfizesse as condições do enunciado, possivelmente guiado pelas alternativas apresentadas e verificou a resposta corretamente.

T4-2 (aplicado em 18/05)

Pedro afirma de que exatamente 25% dos seus livros são de ficção científica e $\frac{1}{9}$ dos seus livros são de comédia. Sabendo que Pedro possui entre 50 e 100 livros, quantos livros ele possui?

(A) 50 (B) 56 (C) 64 (D) 72 (E) 96

Fonte: IMPA (2019)

Figura 41 - Resolução do problema T4-2 do aluno 36

$$\begin{array}{r} 72 \overline{) 4} \\ +4 \\ \hline 32 \\ -32 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \overline{) 9} \\ -72 \\ \hline 0 \end{array}$$

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: Novamente, o aluno buscou a alternativa que satisfizesse as condições exigidas pelo enunciado, ser divisível por 4 e por 9, e verificou corretamente.

A7-1 (aplicado em 29/06)

Na subtração abaixo, cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo que C representa?

$$\begin{array}{r} ABA \\ - CA \\ \hline AB \end{array}$$

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 7 (e) 9

Fonte: IMPA (2019)

Figura 42 - Resolução do problema A7-1 do aluno 36

$$\begin{array}{r} 010 \\ 101 \\ - 11 \\ \hline 10 \end{array}$$

$B = 0$
 $A = 1$
 $C = 9$

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: Concluiu corretamente que $B=0$ a partir da subtração das unidades. Não argumenta com clareza qual foi o raciocínio utilizado para concluir que $A=1$ e $C=9$. Aparentemente, utilizou tentativa e verificou se o palpite satisfazia as condições.

A7-2 (aplicado em 29/06)

Janaína escreveu no quadro-negro dois números cuja soma é igual a 1357. Ela observou que um desses números poderia ser obtido apagando o algarismo das unidades do outro. Qual é esse algarismo?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Fonte: IMPA (2019)

Figura 43 - Resolução do problema A7-2 do aluno 36

Handwritten work showing the student's attempt to solve the problem. On the left, the student sets up the equations $x + y = 1357$ and $y = x$, then substitutes to get $x + 2y = x + 1357$, leading to $2y = 1357$ and $y = \frac{1357}{2} = 678,5$. On the right, a long division of 1357 by 2 is shown, resulting in 678,5.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: O aluno apresenta uso inadequado da linguagem algébrica e do raciocínio lógico-dedutivo, ao concluir que $y=x$. As informações do enunciado não foram algebrizadas corretamente.

T8-1 (aplicado em 17/08)

Um guarda trabalha durante 4 dias consecutivos e descansa no dia seguinte. Após cada dia de descanso ele volta a repetir esse processo, trabalhar 4 dias e descansar 1 dia. Se em certo domingo ele descansa, quantos dias de trabalho o guarda terá até que ele volte a descansar num domingo?

(a) 35 (b) 28 (c) 24 (d) 20 (e) 16

Fonte: IMPA (2019)

Figura 44 - Resolução do problema T8-1 do aluno 36

	DESCANÇOS	
DO	+5	
SEX	+5	1 descanso
QUA	+5	
SE	+5	
SA	+5	
QUI	+5	
TE	+5	
DO	35 dias totais	
	- 7 dias de descanso	
	28 dias de trabalho	

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: observou que cada ciclo tem 5 dias e buscou quantos ciclos foram necessários para finalizar em um domingo.

T8-2 (aplicado em 17/08)

Paula deseja colocar dois algarismos nos espaços livres do número de quatro dígitos 2_ _8 de modo que o número obtido seja divisível por 3. De quantas maneiras ela pode fazer isso?

(a) 19 (b) 20 (c) 29 (d) 30 (e) 33

Fonte: IMPA (2019)

Figura 45 - Resolução do problema T8-2 do aluno 36

Todos n° que seja $\div 3$ deve ter como resultado um n° que seja divisível por 3. Ex: 3, 6, 9, 12, 15, 18, etc.

2 _ _ 8

QUANTIDADE DE VEZES QUE

FUNÇÃO POR:

0 = 9 + 9 + 9 = 3	4
9 = 9 + 9 + 9 = 3	5
18 = 9 + 9 + 9 = 3	7
27 = 3	10
36 = 3	
45 = 3	
54 = 3	
63 = 3	
72 = 3	
81 = 3	
90 = 3	
99 = 3	
30	

4344 | 15
 465 96
 0294
 -296
 24
 450
 - 45
 405

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: testou os valores que tornavam o número divisível por 3, fixando o segundo algarismo e variando o terceiro. Observou alguns casos e generalizou, sem levar em conta que se a escolha do segundo algarismo tornar a soma um múltiplo de 3, o terceiro algarismo pode também ser 0, totalizando quatro possibilidades nesses casos. Por exemplo, se a escolha do segundo algarismo for 2, a soma dos algarismos é igual a 12 e o terceiro algarismo pode ser igual a 0, 3, 6 ou 9 garantindo a divisibilidade por 3.

T8-3 (aplicado em 17/08)

Um inteiro é *específico* quando deixa resto 2 na divisão por 6, resto 5 quando dividido por 9 e resto 7 quando dividido por 11. Existem quantos inteiros positivos específicos de três algarismos?

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2 (e) 1

Fonte: IMPA (2019)

Análise: o aluno deixou a questão em branco.

T8-4 (aplicado em 17/08)

O número $3^{32} - 1$ tem exatamente dois divisores que são maiores do que 75 e menores que 85. Qual é o produto desses dois divisores?

(a) 5852 (b) 6560 (c) 6804 (d) 6888 (e) 6972

Fonte: IMPA (2019)

Análise: o aluno deixou a questão em branco.

A11-1 (aplicado em 28/09)

Paula cortou uma folha de papel em 10 partes. Depois pegou uma dessas partes e voltou a cortá-la em mais 10 partes. Ela repetiu este mesmo processo mais três vezes, fazendo cinco vezes no total. No final quantos pedaços de papel ela obteve?

(a) 36 (b) 40 (c) 46 (d) 50 (e) 56

Fonte: IMPA (2019)

Figura 46 - Resolução do problema A11-1 do aluno 36

Handwritten solution for problem A11-1:

Left side (vertical subtraction):

$$\begin{array}{r} 46 - 10 \\ 30 - 3 \\ 22 - 1 \\ 11 - 9 \\ 9 - 9 \\ 0 \end{array}$$

Right side (horizontal sequence):

$$10P - 1P = 9P = 9P - 1P = 8P = 8P - 1P = 7P = 7P - 1P = 6P = 6P - 1P = 5P = 5P - 1P = 4P$$

Both sides result in 46P.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: apesar do uso impreciso da notação matemática, o raciocínio está correto e o aluno também verificou a solução com a conta indicada ao lado esquerdo.

A11-2 (aplicado em 28/09)

Pedrinho deseja subir uma escada com 6 degraus. Ele pode subir 1 degrau ou 2 degraus de cada vez. De quantas maneiras diferentes Pedrinho pode subir essa escada? Por exemplo, uma maneira é subir 1 degrau quatro vezes e, em seguida, 2 degraus uma vez. Outra maneira é subir 2 degraus no começo e então subir 1 degrau quatro vezes.

(a) 5 (b) 6 (c) 8 (d) 9 (e) 13

Fonte: IMPA (2019)

Figura 47 - Resolução do problema A11-2 do aluno 36

Handwritten solution for problem A11-2:

For $n=6$:

$$6 = (0, 1) \Rightarrow \text{Não existe 1 maneira de subir } n=6 \quad 1m$$

$$6 = (1, 0) \Rightarrow \text{Não existe 1 maneira de subir } n=6 \quad 1m$$

For $n=5$:

$$5 = (0, 1) + (1, 0)$$

For $n=4$:

$$4 = (0, 1) + (1, 0) + (1, 0) + (1, 0)$$

For $n=3$:

$$3 = (0, 1) + (1, 0) + (1, 0)$$

For $n=2$:

$$2 = (0, 1) + (1, 0)$$

For $n=1$:

$$1 = (0, 1)$$

For $n=0$:

$$0 = (0, 0)$$

Final result for $n=6$:

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: a estratégia do aluno é consistente, considerando inicialmente o total de passos, avançando somente um degrau; depois considera o total de passos avançando somente dois degraus; em seguida, faz uma combinação linear destes casos, sabendo que o total é igual a seis passos. A falta de organização faz ele se perder na contagem dos casos.

A11-3 (aplicado em 28/09)

Na sequência que começa com 17, 18, 19, ..., cada termo após o terceiro é calculado subtraindo seu anterior da soma dos dois termos que vieram imediatamente antes desse anterior. Por exemplo, o quarto termo é $17+18-19=16$.

Qual é o vigésimo termo dessa sequência?

Dica: calcule alguns termos até perceber um padrão.

(a) -20 (b) -10 (c) -2 (d) 0 (e) 35

Fonte: IMPA (2019)

Figura 48 - Resolução do problema A11-3 do aluno 36

3/ $18+19-20=16$
 $19+20-21=18$
 $20+21-22=19$
 $21+22-23=20$

padrão = resultado repetido duas vezes, depois não - ne 2.

18
+ 19
37
- 20
17

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: erro de interpretação do problema. O aluno não compreendeu a regra de formação da sequência, apesar de buscar um padrão na sequência e tentar chegar a uma resposta usando esse padrão.

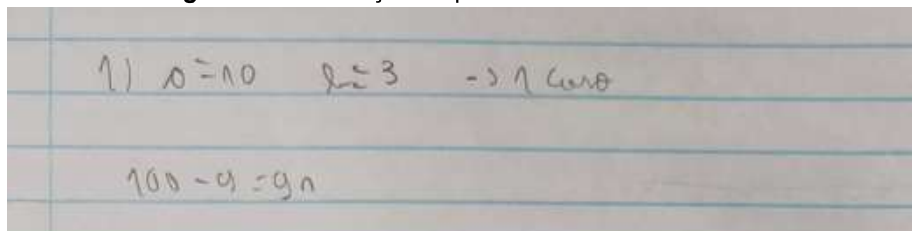
T12-1 (aplicado em 19/10)

T12-1 Determine o número de pares ordenados (a,b) de inteiros positivos tais que $a^2 - b^2 = 91$.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Fonte: IMPA (2019)

Figura 49 - Resolução do problema T12-1 do aluno 36



Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: encontrou uma das soluções possíveis. Não encontrou uma estratégia que mostrasse que essa solução é única ou se existem outras.

T12-2 (aplicado em 19/10)

T12-2 Considere a seguinte igualdade $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, com x e y inteiros.

Então x é igual a

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0 (e) -1

Fonte: IMPA (2019)

Figura 50 - Resolução do problema T12-2 do aluno 36

The image shows a student's handwritten work on lined paper. At the top, the equation $2^{x+1} + 2^x = 3^{x+2} - 3^x$ is written. Below it, there are several attempts at solving the equation using trial and error. The student writes $2^{1+1} + 2^1 = 3^{1+2} - 3^1$ and $2^{2+1} + 2^2 = 3^{2+2} - 3^2$. There are also several crossed-out calculations and diagrams. The student eventually finds that $x=2$ is a solution, writing $24 = 24$ and $24 = 24$ with a checkmark. The work is messy, with many corrections and crossed-out lines.

Fonte: dados coletados pelo autor (2019)

Análise: atribuiu valores às variáveis (na ordem 1, 2, 3) e encontrou um par que satisfizesse a equação. Aparentemente, sua tentativa foi guiada pelas alternativas apresentadas pelo problema.

O aluno cria bons planos de resolução, envolvendo tentativa e erro ou construção. Ao longo dos problemas é possível perceber a introdução de elementos algébricos na organização da resolução, inclusive facilitando os palpites como, por exemplo, no problema A11-2.

De modo geral, não foi possível identificar os avanços dos alunos ao longo da participação no projeto. Atribuímos essa dificuldade ao aumento do grau de dificuldade dos problemas propostos ao longo da coleta de dados, impossibilitando que os alunos apresentassem soluções à grande parte destes.

Na seção seguinte, apresentamos algumas sugestões de caminhos alternativos que poderiam levar a dados mais consistentes e, conseqüentemente, a análises mais completas.

Considerações finais

Os desafios de um estudo observacional perpassam por vários níveis. O primeiro deles é definir o que se pretende analisar. O segundo é desenhar a coleta de dados de modo a responder às perguntas pretendidas.

Nossa proposta inicial era caracterizar as habilidades dos alunos participantes na resolução dos problemas propostos. No entanto, percebemos que os dados coletados eram insuficientes para levar a conclusões acerca do desenvolvimento dessas habilidades por dois motivos. Primeiramente, os problemas aplicados aos alunos eram elaborados pelo programa de treinamento e não foi possível desenhar problemas que possibilitassem uma análise dos tipos de estratégias heurísticas abordados no marco teórico. Além disso, o aumento no grau de dificuldade dos problemas propostos, por vezes, impossibilitou que os alunos apresentassem soluções, tornando inviável uma análise longitudinal.

Uma alternativa a ser aplicada em futuros trabalhos aborda os seguintes pontos: desenho prévio do caso, propondo problemas que evidenciem determinadas estratégias. Análise imediata dos dados coletados para possíveis ajustes no método. Aplicação de entrevistas com os sujeitos de pesquisa para complementar as análises realizadas.

O caminho que optamos seguir foi o de realizar uma análise descritiva mais focada nos problemas propostos, utilizando a teoria apresentada sobre resolução de problemas. Desse modo, o ponto central estudado neste trabalho se deslocou para os problemas matemáticos, focado no material disponibilizado pelo IMPA.

Acreditamos que o material apresentado é de grande utilidade para direcionar futuras investigações que explorem olimpíadas científicas, nas quais o desenvolvimento de um trabalho que preza pela autonomia dos estudantes na resolução de problemas é fundamental.

Com o apoio de dados mais robustos, seria possível identificar e, simultaneamente, incentivar a apropriação de novas estratégias heurísticas através de mediações direcionadas, bem como descobrir novas perguntas que auxiliem na formação dos professores que atuam como mediadores deste processo, trazendo a teoria apresentada para a prática e a observação da prática para fundamentar a formação teórica.

O uso da teoria Vygotskyana, citada neste trabalho, acerca da zona de desenvolvimento proximal certamente auxiliaria na compreensão do processo de aquisição de tais habilidades ao analisar a mediação realizada pelos monitores e pelos pares durante a resolução de problemas em grupos. Uma sugestão para investigações futuras é dar foco às perguntas mediadoras e como elas auxiliam na incorporação de novas estratégias, mapeando as etapas que o estudante atingiu sozinho, chamada por Vygotsky de nível de desenvolvimento real, e as etapas alcançadas após o processo de mediação, chamada de nível de desenvolvimento potencial.

Por fim, este trabalho implicou em mudanças diretas na prática utilizada nas aulas do POTI. Atualmente, os monitores passaram a discutir e elaborar as listas de problemas propostas aos alunos, visando um alinhamento entre o proposto e o observado durante as mediações. As reuniões de formação seguem o formato citado na seção 1.4, porém com a possibilidade de realizar modificações nos problemas de acordo com as necessidades emergidas da discussão. Desse modo, tornou-se possível o desenho de problemas que proporcionem as estratégias heurísticas desejadas.

Referências

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 1 ed. São Paulo: Edições 70, 2011.

BARICHELO, L. **Análise de resoluções de problemas de cálculo diferencial em um ambiente de interação escrita**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2008.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRANSKI et al. Metodologia do estudo de casos aplicada à logística. ANPET, 2001

CARRILLO, J. **Modos de Resolver Problemas y Concepciones sobre la Matemática y su Enseñanza**. TESE (Doutorado) - Facultad de Educación, Universidad de Huelva. Huelva. 1998.

Carrillo, J., & Cruz, J. (2016). Problem posing and questioning: two tools to help solve problems. En P. Felmer, E. Pehkonen, J. Kilpatrick (Eds.), **Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives** (pp. 23-36). New York: Springer.

DIMAKOS, G; TYRLIS, I; SPYROS, F. Factors that influence students to do mathematics. **The Teaching of Mathematics**. v. 15, n. 1, p. 43-54, 2012.

D'AMBRÓSIO, U. Problem solving: a personal perspective from Brazil. **ZDM Mathematics Education**. n. 39, p. 515–521, 2007.

HOUAISS, A. et al. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

Krulik, S. & Rudnik, J. A. **Reasoning and Problem Solving – A Handbook for Elementary School Teachers**. Massachusetts: Allyn and Bacon, 1993.

NCTM. Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar. (Tradução portuguesa do original em inglês de 1989). Lisboa: APM & IIE, 1991.

OLIVEIRA, M. K. Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento - um processo sócio-histórico. 4. ed. São Paulo : Scipione, 1997.

POLYA, G. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

_____. **A Arte de Resolver Problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e Adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

STEINLE, V.; STACEY, K. Persistence of Decimal Misconceptions and Readiness to Move to Expertise. In: **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 2004.

Törner, G., Schoenfeld, A., & Reiss, K. (2007). Problem solving around the world: summing up the state of the art. **ZDM**, ed. 39, 353.

VIGOTSKI, L. S.. A formação social da mente. 7a. edição. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ZASLAVSKY, O. An empirical classification model for errors in high school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, 18(1), p. 3–14, 1987.

Anexos

Anexo I-TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO AOS RESPONSÁVEIS

Polo Olímpico de Treinamento Intensivo: Habilidades desenvolvidas na preparação de alunos para Olimpíadas de Matemática

Jheovany Henrique Martins Pereira

Laura Rifo

Número do CAAE: 86136818.5.0000.8142

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se 3 houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Os objetivos deste estudo consistem em identificar e mensurar os impactos no desenvolvimento de habilidades matemáticas em alunos do ensino básico pela participação nas atividades do programa POTI. Caso você autorize, seu(sua) filho(a) irá participar de atividades que possibilitem verificar o seu desempenho. A participação dele(a) não é obrigatória e, a qualquer momento, poderá desistir da participação. Tal recusa não trará prejuízos em sua relação com o pesquisador ou com o Programa. Tudo foi planejado para minimizar os riscos de sua participação na pesquisa, porém se ele(a) sentir desconforto com as perguntas, dificuldade ou desinteresse poderá interromper a participação e, se for o caso, conversar com o pesquisador sobre o assunto.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: -Preencher um questionário visando obter informações sobre a escola e seu rendimento, preferência por tipos de atividades que poderiam ser realizadas no programa, o ambiente familiar e as expectativas do aluno a respeito do programa e dos seus estudos futuros; -Avaliação inicial com a intenção de mapear e mensurar as habilidades selecionadas a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais, dos alunos ao início do programa; -Aplicação de desafios matemáticos que possibilitem avaliar o nível de raciocínio lógico; -Acompanhamento constante das atividades presenciais e das atividades a serem realizadas no fórum online; -Avaliação final a ser comparada à primeira.

Desconfortos e riscos:

Você **não** deve participar deste estudo se sentir desconforto com as perguntas, dificuldade ou desinteresse. Caso ocorra, ele poderá interromper a participação e, se houver

interesse, conversar com o pesquisador sobre o assunto. A participação não é obrigatória e, a qualquer momento, o sujeito poderá desistir da participação. Tal recusa não trará prejuízos em sua relação com o pesquisador ou com o Programa.

Benefícios:

A participação poderá contribuir para um melhor entendimento do processo de aprendizagem da Matemática.

Acompanhamento e assistência:

Ao identificar dificuldades no desempenho do participante no programa, serão tomadas as medidas necessárias para auxiliar na permanência e bem-estar do aluno no projeto. Ao fim do projeto, os participantes receberão os resultados das análises com suas identidades devidamente preservadas.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Ressarcimento e indenização:

A pesquisa será realizada durante o decorrer do programa, não havendo alteração na rotina do participante. Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com o pesquisador Jheovany Henrique Martins Pereira, residente em Rua Gilberto Pattaro, 150-Barão Geraldo/Campinas, (11)976902395, jheovany.martins@gmail.com. Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UNICAMP das 08:30hs às 11:30hs e das 13:00hs às 17:00hs na Rua: Tessália Vieira de Camargo, 126; CEP 13083-887 Campinas – SP; telefone (19) 3521-8936 ou (19) 3521-7187; e-mail: cep@fcm.unicamp.br. **O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).** O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas **Consentimento livre e esclarecido:** Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar:

Nome do(a) participante: _____

_____ Data: ____/____/____.
(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Responsabilidade do Pesquisador: Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo

de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

_____ Data: ____/____/____.

(Assinatura do pesquisador)