UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

CHARLES FERREIRA DOS SANTOS

Zeros da função zeta via espaços de Hardy: densidade, ortogonalidade e semigrupos

Campinas

2022

Charles Ferreira dos Santos

Zeros da função zeta via espaços de Hardy: densidade, ortogonalidade e semigrupos

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Sahibzada Waleed Noor

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Charles Ferreira dos Santos e orientada pelo Prof. Dr. Sahibzada Waleed Noor.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Sa59z

Santos, Charles Ferreira dos, 1991-
Zeros da função zeta via espaços de Hardy : densidade, ortogonalidade e semigrupos / Charles Ferreira dos Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Sahibzada Waleed Noor.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise funcional. 2. Espaços de Hardy. 3. Hipótese de Riemann. 4. Subespaços invariantes. 5. Operadores de Toeplitz. 6. Espaços de De Branges-Rovnyak. I. Noor, Sahibzada Waleed, 1984-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Zeta zeros via Hardy spaces : density, orthogonality and semigroups
Palavras-chave em inglês:
Functional analysis
Hardy spaces
Riemann hypothesis
Invariant subspaces
Toeplitz operators
De Branges-Rovnyak spaces
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Sahibzada Waleed Noor [Orientador]
José Régis Azevedo Varão Filho
Dimitar Kolev Dimitrov
Guilherme Lima Ferreira da Silva
Dan Grigore Timotin
Kobi Kremnizer
Data de defesa: 16-12-2022
Programa de Pós-Graduação: Matemática

dentificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-7914-0027
Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/3409008156195814

Tese de Doutorado defendida em 16 de dezembro de 2022 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). SAHIBZADA WALEED NOOR

Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO

Prof(a). Dr(a). DIMITAR KOLEV DIMITROV

Prof(a). Dr(a). GUILHERME LIMA FERREIRA DA SILVA

Prof(a). Dr(a). DAN GRIGORE TIMOTIN

Prof(a). Dr(a). KOBI KREMNIZER

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a mim mesmo, por concluir este trabalho e não desistir do sonho de ser matemático.

Agradeço também ao meu orientador, Sahibzada Waleed Noor, pelos vários tipos de suporte prestados, pela generosidade, pela parceria e por compartilhar de forma tão empolgante seu encantamento e entusiasmo pela matemática.

Aos Professores Dan Timotin, Kobi Kremnitzer, Dimitar Dimitrov, Guilherme Silva e Régis Varão pela atenção dispensada ao meu trabalho, na condição de membros da banca. Em especial aos dois primeiros, por aceitarem ler meu texto em português.

Ao IMECC e à Unicamp pela estrutura disponibilizada e pela oportunidade a mim dada. Também à UNIVESP, por me admitir como facilitador.

Aos professores que tive na Pós-Graduação, por me ensinarem matemática avançada e como ensiná-la, tanto por exemplos positivos quanto negativos. De forma estendida, a todos os professores que cruzaram minha trajetória. Em especial, aos que tive no Bacharelado em Matemática Computacional do ICT/UNIFESP e, em particular, à minha orientadora de Iniciação Científica, Vanessa Paschoa Ferraz.

Aos meus pais, Rafael e Rose, pelo apoio e torcida de sempre.

À psicóloga que me acompanhou durante quase todo o doutorado, Iara Penteado, por me levar a olhar para o ser humano por trás do matemático.

Aos moradores, ex-moradores e agregados da República Bar do Bira, autenticamente minha casa em Barão Geraldo. Um nome não posso deixar de citar: Thyago Moura, que muito me acrescentou durante a convivência.

Aos colegas de Pós-Graduação do IMECC, pelo tempo compartilhado e pelas discussões, matemáticas ou não. Em especial, a Juan Manzur e ao grupo de pesquisa.

A todos os amigos e pessoas que torceram pelo meu sucesso, dentro e fora do IMECC, da Unicamp e da convivência na minha república. Cada um tem uma parte nesta vitória. Em especial, agradeço à Lívia Thibes, pela amizade profunda, duradoura e que tanto crescimento trouxe tanto a ela quanto a mim.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Meus agradecimentos a esta agência de fomento, a quem lutou contra o desmonte da Ciência e Tecnologia no Brasil nos últimos anos e aos defensores de uma universidade pública, gratuita, de qualidade e de acesso universal.

"If there is a problem you can't solve, then
there is an easier problem you can solve; find it.
(George Pólya)

Resumo

Este trabalho lida com a versão da reformulação de Báez-Duarte para a hipótese de Riemann (RH) no espaço H^2 do disco unitário: RH equivale à densidade de um certo subespaço $\mathcal{N}$. É feito um estudo de um semigrupo de operadores relacionado e seus subespaços invariantes, envolvendo conhecimentos sobre operadores *shift* e álgebras de von Neumann. É determinada a fatoração canônica das funções que geram $\mathcal{N}$. Mostra-se que $\mathcal{N}$ é denso em H^p para $0 < p < 1$ e que a densidade em espaços de expoente maior que 1 implica a existência de semiplanos livres de zeros da função zeta. São exibidas classes de funções que não possuem elementos não nulos ortogonais a $\mathcal{N}$, usando a teoria de dualidade dos espaços de Hardy, operadores de multiplicação ilimitados e espaços de de Branges-Rovnyak.

Palavras-chave: análise funcional; espaços de Hardy; hipótese de Riemann; subespaços invariantes; operadores de Toeplitz; espaços de de Branges-Rovnyak

Abstract

This work deals with the version of Báez-Duarte's reformulation of Riemann hipothesis (RH) in the H^2 space of the unit disc: RH amounts to the density of a certain subspace $\mathcal{N}$. A study of a related operator semigroup is made, involving knowledge about shift operators and von Neumann algebras. The canonical factorization of the functions which span $\mathcal{N}$ is determined. It is shown that $\mathcal{N}$ is dense in H^p for $0 < p < 1$, and the density in spaces of exponent greater than 1 implies the existence of a zero-free half plane for the zeta function. Function classes possessing no non null element orthogonal to $\mathcal{N}$ are exibited, using Hardy space duality theory, unbounded multiplication operators and de Branges-Rovnyak spaces.

Keywords: functional analysis; Hardy spaces; Riemann hypothesis; invariant subspaces; Toeplitz operators; de Branges-Rovnyak spaces

Lista de ilustrações

Lista de símbolos

$\pi(x)$	quantidade de números primos no intervalo $[1, x]$, p. 16
Li	integral logarítmica, p. 16,
ζ	função zeta de Riemann, p. 16
$\operatorname{Re} s$	parte real de um número complexo s, p. 16
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos, pp. 17, 23
$[x]$	parte inteira do número real x, p. 18
$\{x\}$	parte fracionária do número real x, p. 18
f_λ	funções envolvidas no Teorema de Nyman-Beurling, p. 18
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais, incluindo 0, pp. 18, 23
$\mathbb{N}^*$	conjunto dos números naturais positivos, pp. 18, 23
H^p	espaço de Hardy de expoente p do disco unitario, pp. 19, 26
$\mathbb{D}$	disco unitário do plano complexo, pp. 19, 23
$\hat{f}(n)$	coeficiente de ordem n da série de potências da função holomorfa f em torno da origem, pp. 19, 24
h_k	funções envolvidas na versão H^2 do critério de Báez-Duarte, pp. 19, 51
W_n	ver pp. 19, 51
D_n	dilatações em $L^2(0,1)$, p. 20
H_0^2	conjunto dos elementos de H^2 que se anulam na origem, p. 21
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros, p. 23
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais, p. 23
$\overline{D}$	disco unitário fechado, p. 23
$\mathbb{T}$	círculo unitário, p. 23
$\mathbb{C}_\alpha$	semiplano dos números complexos com parte real maior que α, p. 23
x^+	parte positiva no número real x, p. 23

ξ_Y	função característica do conjunto Y, p. 23
$\overline{Y}^X$	fecho do conjunto Y no espaço topológico X, p. 23
∂Y	fronteira do conjunto Y, p. 23
$g\,F$	conjunto $\{g \cdot f \;:\; f \in F\}$, onde F consiste de funções a valores complexos com o mesmo domínio de g, p. 23
$\mathrm{Hol}(\Omega)$	conjunto das funções holomorfas em uma vizinhança do conjunto Ω, p. 23
$\log z$	ramo principal da função logaritmo complexo, p. 24
$\arg z$	argumento do número complexo z, p. 24
O	notação assintótica de Landau, p. 24
$\mathrm{d}m$	medida do comprimento de arco normalizada no círculo unitário, p. 24
L^p	espaço de Lebesgue de expoente p no círculo unitário, p. 24
$\\| \cdot \\|_X$	norma do espaço vetorial normado X, p. 24
$\\| \cdot \\|_p$	norma do espaço H^p ou L^p, pp. 24, 26
$\hat{\phi}(n)$	coeficiente de Fourier de ordem n da função ϕ, p. 24
z	a função variável independente, p. 24
$\mathcal{P}$	conjunto das funções polinomiais complexas, p. 24
ℓ^p	espaço vetorial das sequências p-somáveis de números complexos, p. 24
$\ker A, AX$	núcleo e imagem da trnasformação linear A definida no espaço vetorial X, p. 24
I	operador identidade, p. 24
$\operatorname{span} Y$	subespaço vetorial gerado pelo conjunto Y, p. 24
$\overline{\operatorname{span}}_X\, Y$	subespaço fechado gerado por Y no espaço vetorial topológico X, p. 24
X^*	dual do espaço vetorial topológico X, p. 24
$Y^\perp$	anulador do subconjunto Y ou complemento ortogonal de Y, pp. 24, 25
$\langle x, \phi \rangle$	valor do funcional linear ϕ no vetor x, $\phi(x)$, p. 24
$\mathcal{B}(X)$	conjunto dos operadores lineares limitados no espaço de Banach X, p. 25

$\langle x, y \rangle$	produto interno dos vetores x, y no espaço de Hilbert H, p. 25
$H \ominus X$	complemento ortogonal do conjunto X no espaço de Hilbert H, p. 25
$\sigma(A)$	espectro de A, p. 25
$f(A)$	avaliação da função contínua f no operador linear limitado autoadjunto A por meio do cálculo funcional, p. 25
$A^{1/2}$	raiz quadrada positiva do operador linear positivo A, p. 25
f_r	ver Definição 1.1.3, p. 26
$f^*(\xi)$	limite não tangencial da função f no ponto ξ no disco unitário ou em um semiplano, pp. 26, 41
$S_c(\xi)$	região de convergência não tangencial no disco unitário, p. 26
$P[\nu]$	integral de Poisson da medida ν, p. 27
$H^p(\mathbb{T})$	conjunto das funções que pertencem a L^p cujos coeficientes de Fourier de ordem negativa se anulam, p. 28
p_n	ver Exemplo 1.1.9, p. 29
Λ_α	classe de Lipschitz (ou Hölder) de expoente α, p. 32
Λ_*	classe de Lipschitz simétrica, p. 32
$A(\mathbb{D})$	álgebra do disco, p. 32
$g^{(n)}$	n-ésima derivada da função holomorfa g, p. 33
$BMOA$	conjunto dos elementos de H^1 cuja função de fronteira possui oscilação média limitada, p. 33
S	operador *shift* unilateral, p. 33
N	classe de Nevanlinna, p. 36
N^+	classe de Smirnov, p. 36
P_+	projeção ortogonal de L^2 em H^2, p. 37
T_ϕ	operador de Toeplitz de símbolo ϕ em H^2, pp. 37, 47
$\mathrm{d}A$	medida de área normalizada no disco unitário, p. 38
$\mathrm{d}A_\alpha$	ver Definição 1.5.1, p. 38

A^p_α	conjunto das funções holomorfas no disco unitário p-integráveis com respeito a $\mathrm{d}A_\alpha$, p. 38
$\mathcal{A}$	ver Definição 1.5.1, p. 38
T	ver Teorema 1.5.5, p. 40
D	operador de diferenciação, p. 40
$M_{\frac{1}{1-z}}$	operador de multiplicação por $1/(1-z)$, p. 40
$H^p(\mathbb{C}_\alpha)$	espaço de Hardy de expoente p do semiplano $\mathbb{C}_\alpha$, p. 41
$C_w(\eta)$	região cônica com vértice no ponto w e ângulo máximo de abertura 2η, p. 41
$E_{(s)}$	funcional avaliação no ponto s em $H^2(\mathbb{C}_\alpha)$, p. 41
$\mathcal{M}$	transformada de Mellin, p. 42
$\mathcal{H}(b)$	espaço de de Branges-Rovnyak de símbolo b, p. 43
$\langle\cdot,\cdot\rangle_b$	produto interno de $\mathcal{H}(b)$, p. 43
$\mathcal{H}(\bar{b})$	ver Definição 1.7.1, p. 43
S_b	restrição do *shift* unilateral a $\mathcal{H}(b)$, p. 43
f^+	ver Proposição 1.7.10, p. 45
$\mathrm{dom}(A)$	domínio do operador ilimitado A, p. 47
$\mathcal{G}(A)$	gráfico do operador ilimitado A, p. 47
A^*	adjunto do operador ilimitado A, p. 47
ϕ_α	ver equação (1.9), p. 48
(a_α, b_α)	par pitagórico associado à função ϕ_α, p. 48
$\mathcal{D}_\nu(f)$	integral de Dirichlet da função holomorfa f com respeito à medida ν, p. 49
$\mathcal{D}_\nu$	espaço de Dirichlet com respeito à medida ν, p. 49
δ_ξ	medida de probabilidade concentrada no ponto ξ, p. 49
$\mathcal{D}_\xi$	espaço de Dirichlet local no ponto ξ, p. 49
μ	função aritmética de Möbius, p. 51

δ_{nk}	delta de Kronecker, p. 51
$d(n)$	quantidade de divisores positivos do número natural n, p. 51
g_k	ver Seção 1.11, p. 52
$\mathcal{W}$	semigrupo multiplicativo discreto formado pelos operadores W_n, p. 52
G_k, E	ver Teorema 1.11.3, p. 52
$\mathcal{V}$	conjunto das funções pertencentes a $L^2(0,1)$ que são constantes q.t.p. em cada intervalo $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, p. 52
v_k	ver Teorema 1.11.4, p. 52
$U, \mathcal{H}$	ver Observação 1.11.7, p. 53
γ_k, γ	ver Teorema 1.11.8, p. 53
Ψ, R_k, R	ver Proposição 1.11.9, p. 54
F'	comutante da família de operadores limitados F, p. 61
$p_{m,\lambda}$	ver Observação 2.2.8, p. 64
$W_n^{(\alpha)}$	ver Proposição 3.3.7, p. 70
$T_\phi^{(p)}$	operador de Toeplitz analítico de símbolo ϕ em H^p, p. 72
$\Lambda^{(s)}$	ver Proposição 3.4.1 e Definição 3.4.2, pp. 75, 76
$\phi_k(s)$	ver Definição 3.4.2, p. 76

Sumário

Introdução

Os números primos podem ser pensados como os blocos usados na construção dos inteiros, em vista do teorema fundamental da aritmética. Surge, pois, de forma natural a questão de entender como estes números se distribuem entre os todos os inteiros. Sabe-se desde Euclides que os primos estão em quantidade infinita, mas é desejável uma descrição quantitativa mais apurada, apesar da irregularidade desta distribuição. Mais precisamente, se $\pi(x)$ denota a quantidade de números primos no intervalo $[1, x]$ para $x > 0$, procura-se uma função que aproxime bem $\pi(x)$ à medida que x se torna suficientemente grande.

A primeira função usada para esta finalidade foi proposta por A. M. Legendre, no fim do século XVIII, com base em extensas tabelas numéricas: $\pi(x)$ foi aproximado por $x/(\log x - A)$, onde a constante A vale 1.08366 – é claro que o valor de A é irrelevante se buscamos uma aproximação relativa para $\pi(x)$. Posteriormente, C. F. Gauss conjeturou que a função procurada era a integral logarítmica Li, definida por

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \right), \qquad x > 1\,,$$

mas foi mal sucedido na tentativa de demonstrar sua suposição. Dado que $\mathrm{Li}(x)\ \log x/x \to 1$ quando $x \to \infty$, a conjetura de Gauss equivale a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1\,.$$

A relação acima é conhecida como teorema dos números primos (PNT, do inglês *Prime Number Theorem*). P. Chebyshev avançou em direção ao PNT mostrando que $x/\log x$ é a função que dá a ordem correta de crescimento de $\pi(x)$: existem constantes positivas $a < 1 < b$ satisfazendo

$$a \leqslant \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leqslant b, \qquad x > 0\,.$$

Mais ainda, ele verificou que se $\pi(x)\log x/x$ tem um limite no infinito, deve ser necessariamente 1. A confirmação rigorosa do PNT veio em 1896, obtida de forma independente por J. Hadamard e C. J. de la Valée Poussin.

A demonstração fez uso das propriedades da função ζ, estudada por B. Riemann, aluno de Gauss, em um importante artigo publicado em 1859 entitulado *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*[1]. Define-se ζ inicialmente por meio da fórmula

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 1\,. \tag{1}$$

[1] “Sobre a quantidade de números primos menores que um dado tamanho”, em tradução livre.

Trata-se de uma função holomorfa no semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\}$, que pode ser estendida – de forma única, pelo princípio da extensão analítica – a uma aplicação meromorfa no plano complexo. Sua única singularidade ocorre em $s = 1$, um polo simples de resíduo 1. A propriedade crucial para o PNT era o não anulamento de ζ na reta vertical $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = 1\}$.

A relação entre a função zeta e os números primos já era conhecida antes de Riemann e do desenvolvimento da teoria das funções holomorfas. De fato, foi L. Euler quem introduziu ζ, definida pela expressão (1) para parâmetros reais $s > 1$. A fórmula do produto

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^s}$$

foi obtida por Euler, indicando que propriedades analíticas de ζ se traduzem em aspectos aritméticos dos primos e vice-versa.

No referido artigo de Riemann, foram estudadas as raízes de ζ. Existem zeros triviais, que são os números inteiros pares negativos, enquanto os demais necessariamente estão contidos na faixa crítica $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$ e são simétricos com respeito à reta crítica $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = 1/2\}$. Em meio a estimativas para o número de raízes, foi deixada uma conjetura que permanece em aberto até os dias atuais e ficou conhecida como hipótese de Riemann (RH, do inglês *Riemann hypothesis*).

Conjectura. *Todos os zeros não triviais de ζ possuem parte real igual a 1/2.*

Pela simetria mencionada acima, uma afirmação equivalente a RH é a de que ζ não possui zeros com parte real maior do que 1/2. Uma conjectura, a princípio, mais fraca, porém ainda não demonstrada, é a existência de um semiplano livre de zeros da função zeta da forma $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma\}$, onde $\sigma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Semiplanos desta forma nunca possuem zeros de ζ quando $\sigma \geqslant 1$ e sempre possuem quando $\sigma < 1/2$. De fato, no próprio trabalho de Riemann são determinados os primeiros zeros não triviais com parte imaginária positiva, todos com parte real 1/2.

Um dos aspectos mais importantes da hipótese de Riemann é sua relação com o erro da aproximação do teorema dos números primos. Sabemos que $\operatorname{Li}(x)$ aproxima bem $\pi(x)$ em termos relativos, mas é desejável conhecer a ordem assintótica do erro absoluto. Na virada do século XIX para o XX, H. von Koch demonstrou em [25] que RH implica a seguinte condição: *para alguma constante C temos* $|\pi(x) - \operatorname{Li}(x)| \leqslant C\sqrt{x}\log x$. Como exposto em [13, Section 5.5][2], RH é equivalente a uma estimativa, a princípio, mais fraca: a de que, para todo $\varepsilon > 0$, $|\pi(x) - \operatorname{Li}(x)| \leqslant Cx^{1/2+\varepsilon}/\log x$ para todo x suficientemente grande, onde $C > 0$. Por outro lado, J. E. Littlewood mostrou em [28], de forma incondicional,

[2] O trecho citado do livro de Edwards descreve o erro relativo, enquanto aqui falamos do erro absoluto. No entanto, as afirmações aqui feitas são equivalentes.

que existe $C > 0$ para o qual os conjuntos dos $x > 0$ satisfazendo, respectivamente,

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) > C\frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x} \quad \text{e} \quad \pi(x) - \mathrm{Li}(x) < -C\frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x}$$

são ilimitados. Portanto, RH permite obter um termo de erro próximo ao menor possível no PNT.

Para discussões completas sobre as propriedades de ζ e sua importância para a teoria dos números primos, duas fontes clássicas são as obras de Edwards [13] e Titchmarsh [47]. Uma referência geral em teoria analítica dos números que discute RH e o PNT em detalhes é o livro de Montgomery e Vaughan [32].

Ao longo do século XX, dezenas de afirmações foram demonstradas ser equivalentes à hipótese de Riemann, na tentativa de demonstrá-la ou, ao menos, entender melhor sua dificuldade. Por exemplo, a obra em dois volumes [8, 9] é totalmente dedicada a mostrar estas reformulações.

Uma equivalência de particular relevância para o presente trabalho foi obtida por B. Nyman em 1950 e generalizada por A. Beurling em 1955. Trata-se de traduzir uma questão sobre os zeros da função zeta em um problema de densidade em $L^p((0,1))$, baseado na identidade clássica

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} x^{s-1}\,\mathrm{d}x, \qquad 0 < \mathrm{Re}\, s < 1\,.$$

Aqui, $\{x\}$ denota a parte fracionária de um número real x, ou seja, $\{x\} = x - [x]$, onde $[x]$ é a parte inteira de x. Segue o enunciado formal.

Teorema (Nyman-Beurling, [36, 5])**.** *Seja* $1 < p < \infty$ *e defina*

$$f_\lambda(x) = \left\{\frac{\lambda}{x}\right\} - \lambda\left\{\frac{1}{x}\right\}, \qquad x \in (0,1),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\,.$$

Então, ζ *não se anula no semiplano* $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, s > 1/p\}$ *se, e somente se, a família* $\{f_\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ *gera um subespaço vetorial denso em* $L^p((0,1))$*, o que ocorre se, e somente se, a função constante* 1 *pertence ao fecho deste subespaço.*

O resultado original de Nyman é caso particular $p = 2$, que fornece um critério equivalente à hipótese de Riemann. Em 2002, L. Báez-Duarte publicou um refinamento do teorema de Nyman, mostrando que a constante 1 não precisa ser aproximada por combinações lineares de toda a família $\{f_\lambda : \lambda \geqslant 1\}$, bastando considerar o subconjunto enumerável $\{f_{1/k} : k \in \mathbb{N}^*\}$. Na nossa notação, $\mathbb{N}$ inclui 0 e $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Teorema (Báez-Duarte, [2])**.** *A hipótese de Riemann é verdadeira se, e somente se,* 1 *pertence ao fecho, em* $L^2((0,1))$*, do subespaço vetorial gerado por* $\{f_{1/k} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$*, onde*

$$f_{1/k}(x) = \left\{\frac{1}{kx}\right\} - \frac{1}{k}\left\{\frac{1}{x}\right\}, \qquad x \in (0,1),\ k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\,.$$

Isto ocorre se, e somente se, o referido fecho é o subespaço de $L^2((0,1))$ *formado pelas funções quase sempre constantes em todos os intervalos* $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

No enunciado acima, não é possível que o subespaço fechado gerado pelas $f_{1/k}$ seja todo o $L^2((0,1))$, pois o subespaço das funções q.t.p. constantes em cada subintervalo $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ é fechado e contém todas as $f_{1/k}$. No entanto, RH ainda é equivalente à densidade do subespaço gerado por uma sequência em um espaço de Hilbert separável. Dado que espaços de Hilbert separáveis são sempre isometricamente isomorfos, é possível enunciar critérios equivalentes a RH em qualquer destes espaços. Esta tese se baseia em uma versão do teorema de Báez-Duarte no espaço de Hardy H^2.

Introduzidos por G. H. Hardy em 1915, os espaços H^p $(p > 0)$ consistem das funções holomorfas no disco unitário $\mathbb{D}$ cujas p-médias integrais são limitadas. Sua teoria, revisada sucintamente nas Seções 1.1 e 1.2, é resultado da interação entre medida, integração, análise complexa, funcional e de Fourier. O caso $p = 2$ é especial: $f \in H^2$ se, e somente se, os coeficientes de sua série de potências $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \hat{f}(n) z^n$ satisfazem $\sum |\hat{f}(n)|^2 < \infty$, o que dá um isomorfismo entre H^2 e o clássico espaço de sequências $\ell^2(\mathbb{N})$.

A mencionada versão do teorema de Báez-Duarte em H^2 foi obtida por S. W. Noor, em trabalho publicado em 2019. Deste resultado partiu o esforço de pesquisa que resultou na presente tese.

Teorema (Báez-Duarte em H^2, [35])**.** *Seja* $\mathcal{N}$ *o subespaço vetorial gerado por* $\{h_k : k \geqslant 2\}$, *onde*

$$h_k(z) = \frac{1}{1-z} \log\left(\frac{1 + z + \cdots + z^{k-1}}{k}\right), \qquad z \in \mathbb{D}\,. \tag{2}$$

A hipótese de Riemann é verdadeira se, e somente se, $\mathcal{N}$ *é denso em* H^2, *o que ocorre se, e somente se, a função constante* 1 *pertence ao fecho de* $\mathcal{N}$.

Por meio deste resultado, H^2 traz novas ferramentas para o estudo da hipótese de Riemann. Em particular, surgem duas direções principais de trabalho. Uma delas é centrada em subespaços invariantes e teoria de operadores, enquanto a outra se dá em torno do estudo das funções envolvidas individualmente e de classes a que elas pertencem, o que em inglês se denomina *function theory*. Vamos agora descrever estas duas direções, pontuando as contribuições do presente trabalho.

Operadores e subespaços invariantes

O subespaço $\mathcal{N}$ do teorema de Báez-Duarte-Noor é deixado invariante por cada W_n, $n \geqslant 1$, onde

$$W_n f(z) = (1 + z + \cdots + z^{n-1}) f(z^n), \qquad z \in \mathbb{D}, f \in H^2\,. \tag{3}$$

Os W_n são múltiplos de isometrias de H^2 e formam um semigrupo multiplicativo, no sentido de que W_1 é o operador identidade e $W_{mn} = W_m W_n$ para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}^*$. O Capítulo 2 é dedicado a estes operadores.

Na Seção 2.1, verificamos que os adjuntos W_n^* $(n \geqslant 2)$ são operadores universais, ou seja, suas restrições a subespaços invariantes contém múltiplos de cópias isométricas de qualquer operador linear limitado que se pode definir em um espaço de Hilbert separável. Em vista disto, determinar os subespaços invariantes de W_n pode levar à solução do problema do subespaço invariante (ISP, do inglês *invariant subspace problem*). Este é o problema em aberto mais fundamental da teoria dos operadores, que pergunta se qualquer operador linear limitado em um espaço de Hilbert separável possui um subespaço fechado não trivial invariante. Uma descrição abstrata dos subespaços invariantes de uma cópia isométrica de W_n^* já existe, devido a um teorema de Beurling, Lax e Halmos. Na Seção 2.1.10, são colocadas e respondidas duas questões particulares na direção de tornar esta descrição concreta. Tais questões envolvem o operador de multiplicação pela variável independente

$$Sf(z) = zf(z), \qquad z \in \mathbb{D},\ f \in H^2\,.$$

Mais precisamente, para cada $n \geqslant 2$ dado, nos perguntamos quais são os operadores que comutam simultaneamente com S e W_n e os subespaços fechados invariantes comuns a S e W_n. As respectivas respostas são: os operadores de multiplicação por constantes (Teorema 2.1.14) e as imagens de potências de S (Teorema 2.1.15).

Um resultado de B. Xue usa o conceito de álgebra de von Neumann para mostrar que RH vale se, e somente se, o fecho de $\mathcal{N}$ é invariante por todos os adjuntos W_n^*. Na Seção 2.2 apresentamos uma demonstração diferente desta equivalência, obtida em parceria com J. Manzur (Teorema 2.2.6 e Corolário 2.2.7).

É válido mencionar de passagem outro problema em aberto há décadas ao qual os W_n também se relacionam. Trata-se do problema da completude das dilatações periódicas (PDCP, do inglês *Periodic Dilation Completeness Problem*), introduzido na década de 1940 independentemente por A. Beurling e A. Wintner. Para o enunciado, cada $f \in L^2((0,1))$ é identificada com sua extensão ímpar 2-periódica a toda a reta real, a saber

$$f(x) = \begin{cases} f(\{x\}) & \text{se } x > 0\,, \\ -f(-x) & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

O PDCP consiste em determinar as funções $f \in L^2((0,1))$ para as quais o conjunto de dilatações $\{D_n f\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ gera um subespaço denso em $L^2((0,1))$, onde

$$D_n f(x) = f(nx), \qquad n \in \mathbb{N}^*,\ x \in (0,1)\,.$$

Por meio de uma equivalência unitária, este problema pode ser reenunciado como a questão de caracterizar a ciclicidade com respeito a um semigrupo de operadores em

$H_0^2 := \{f \in H^2 : f(0) = 0\}$. Noor mostrou que toda função cíclica com respeito ao semigrupo $\{W_n\}_{n\geqslant 1}$ dá origem a uma função cíclica com respeito ao semigrupo do PDCP (ver [35, Section 6]). No entanto, este tema não é perseguido no presente texto.

Densidade e ortogonalidade

O aspecto *function theory* do teorema de Báez-Duarte-Noor é o tema do Capítulo 3. A Seção 3.1 mostra que as funções h_k são rígidas, no sentido de que são essencialmente determinadas pelo argumento de seus valores de fronteira (Proposição 3.1.7). Como consequência (Corolário 3.1.8), $\mathcal{N}$ não está contido em nenhum subespaço fechado de H^2 da forma ΘH^2, onde Θ é uma função interior – ou seja, holomorfa limitada no disco com valores de fronteira unimodulares q.t.p. no círculo unitário – a menos que Θ seja uma constante. Se esta continência valesse para alguma Θ não constante, a hipótese de Riemann seria automaticamente falsa. Portanto, isto dá um indício a favor de RH.

As demais seções do Capítulo 3 se ocupam das duas questões a seguir.

- *O problema da densidade.* Obter topologias em H^2, mais fracas do que aquela advinda da norma, com respeito à qual $\mathcal{N}$ seja denso.
- *O problema da ortogonalidade.* Encontrar subespaços vetoriais $V \subset H^2$, tão grandes quanto possível, que não contenham funções não identicamente nulas ortogonais a $\mathcal{N}$, ou seja, $V \cap \mathcal{N}^\perp = \{0\}$. RH equivale a encontrar $V = H^2$.

Observamos que cada resposta parcial aos problemas acima implica imediatamente uma versão fraca da hipótese de Riemann, ou seja, uma afirmação implicada por RH mas que pode ser provada incondicionalmente.

Na Seção 3.2, a topologia encontrada para responder ao problema da densidade será aquela herdada dos espaços H^p para expoentes $0 < p < 1$ (Teorema 3.2.3). A estratégia para chegar a este resultado passa pelos operadores W_n definidos em (3), que são contínuos em H^p: é verificado que a constante 1 é cíclica com respeito a este semigrupo e está no H^p-fecho de $\mathcal{N}$, que é invariante por cada W_n. A aproximação de 1 por combinações lineares das h_k seguirá de propriedades de invertibilidade do operador de multiplicação por $1 - z$ entre diferentes espaços de Hardy, aliadas a estimativas equivalentes ao teorema dos números primos envolvendo a função aritmética de Möbius.

Quanto ao problema da ortogonalidade, a Seção 3.3 provê três respostas. A primeira delas, obtida por meio do resultado de densidade mencionado acima e da teoria de dualidade dos espaços de Hardy, é $V = \Lambda_\alpha$, o espaço das funções holomorfas no disco unitário com extensão contínua na fecho e Hölder-contínua de expoente α na fronteira, para $\alpha < 1$ (Teorema 3.3.1). A segunda (Teorema 3.3.8) é

$$V = \{(1-z)^\alpha h + c : h \in H^2,\ c \in \mathbb{C}\}, \qquad 1/2 < \alpha \leqslant 1\,,$$

que apela a resultados sobre operadores de multiplicação ilimitados em H^2 e a profunda teoria dos espaços de de Branges-Rovnyak. A última resposta dada (Teorema 3.3.13) é

$$V = \{(1-z)h + c \,:\, h \in H^q,\ c \in \mathbb{C}\}, \qquad 1 < q \leqslant 2\,,$$

para a qual foi exigida uma extensão do estudo de operadores de multiplicação ilimitados ao contexto H^p, $1 < p < \infty$.

Na Seção 3.4, os problema da densidade e da ortogonalidade serão relacionados à obtenção de semiplanos livres de zeros de ζ. Tratam-se de resultados de colaboradores do autor desta tese, que trazem relevância ao conteúdo do restante do Capítulo 3 do ponto de vista aritmético. Mais precisamente, por meio da introdução de certos funcionais lineares ligando diretamente as funções h_k aos valores de ζ, mostra-se que a densidade de $\mathcal{N}$ em H^p implica a inexistência de zeros de ζ com parte real maior que $1/p$ (Teorema 3.4.5). A densidade em H^1 implicaria o não anulamento de ζ em $\{\operatorname{Re} s \geqslant 1\}$, o semiplano do teorema dos números primos. Por fim, se $\mathcal{N}^\perp$ não contiver qualquer elemento não nulo de algum H^p, $p > 2$, isto resultará (Teorema 3.4.6) no semiplano livre de zeros $\{\operatorname{Re} s > 1 - 1/p\}$.

Organização do texto

Por fim, descrevemos rapidamente as partes constituintes do presente trabalho. O extenso Capítulo 1 reúne conceitos e resultados preliminares usados no restante do trabalho. São trazidos conhecimentos sobre diversos espaços de funções holomorfas – de Hardy, Bergman ponderados, Dirichlet locais, de Branges-Rovnyak e Hardy em semiplanos – bem como uma análise mais detalhada do trabalho de Noor. O Capítulo 2 trata das questões sobre operadores e subespaços invariantes descritas anteriormente, enquanto o Capítulo 3 discute as propriedades das funções h_k, densidade, ortogonalidade e a obtenção de semiplanos livres de zeros. Ao final, segue a bibliografia consultada.

1 Preliminares

Este capítulo reúne os conhecimentos usados no restante do trabalho. As demonstrações da maior parte dos resultados não serão dadas, sendo deixadas as devidas referências. São assumidos como conhecidos os conceitos e resultados básicos de teoria da medida, integração, análise complexa, análise funcional e séries de Fourier, como exposto, por exemplo, em [15], [39] e [40]. Antes das seções contendo pré-requisitos específicos, introduzimos aqui notações e terminologia utilizados durante todo o texto.

Primeiro, denotam-se por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ para os conjuntos de números naturais (incluindo 0), inteiros, reais e complexos, respectivamente. Como já feito na introdução, o conjunto dos naturais não nulos é denotado por $\mathbb{N}^*$. O disco unitário aberto, o disco fechado e o círculo unitário são representados, respectivamente, por $\mathbb{D}$, $\overline{\mathbb{D}}$ e $\mathbb{T}$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, denotaremos

$$\mathbb{C}_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z > \alpha\}\,.$$

Será representada por x^+ a parte positiva de um número real x, isto é, $x^+ = \max\{x, 0\}$. Observamos aqui a seguinte desigualdade de números reais:

$$\log(1 + x) \leqslant \log x + \log 2 \qquad \text{para todo } x \geqslant 1\,. \tag{1.1}$$

Para verificá-la, notamos que a diferença $\log(1 + x) - \log x$ é decrescente, pois sua derivada é $-\frac{1}{x(x+1)} < 0$, e vale $\log 2$ em $x = 1$.

Se X é um conjunto qualquer e $Y \subset X$, denotaremos por ξ_Y a função característica de Y, ou seja,

$$\xi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in Y\,, \\ 0, & \text{se } x \in X \backslash Y\,. \end{cases}$$

Se X é um espaço topológico, o fecho de um conjunto Y em X será por vezes denotado $\overline{Y}^X$, ou simplesmente $\overline{Y}$ quando X estiver subentendido; ∂Y denota a fronteira de Y.

Neste texto, o contradomínio de cada função, caso não seja especificado, será assumido como sendo $\mathbb{C}$. Se f é uma função qualquer e F é um conjunto de funções com o mesmo domínio de f, denota-se

$$gF = \{g \cdot f \,:\, f \in F\}\,.$$

Se X é um conjunto qualquer, a álgebra comutativa das funções contínuas em X será denotada $C(X)$ – trata-se de uma álgebra de Banach com respeito à norma do supremo quando X é um espaço topológico compacto. Se Ω é um subconjunto qualquer de $\mathbb{C}$, por $\operatorname{Hol}(\Omega)$ será entendido a álgebra das funções holomorfas em algum aberto contendo Ω. Ao usar a função logaritmo, será sempre assumido o uso do ramo principal, definido por

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0] \,.$$

Aqui, entende-se que o argumento de um número complexo z satisfaz $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

Por vezes, usaremos a notação assintótica O de Landau: se f, g são funções definidas em $\mathbb{N}$ e g é não negativas, dizemos que $f(n) = O(g(n))$ quando $n \to \infty$ se existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(n)| \leqslant Cg(n)$ para todo n. De forma similar, define-se o significado de $f(z) = O(g(z))$ quando $z \to z_0$ no caso de funções definidas em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

A medida de comprimento de arco normalizada em $\mathbb{T}$ é chamada m, ou seja,

$$\mathrm{d}m(e^{i\theta}) = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \,.$$

A menos de menção em contrário, L^p se refere ao espaço de Lebesgue de expoente p com respeito a m e $\| \cdot \|_p$ se refere à norma de L^p – para um espaço vetorial normado genérico X, será usado $\| \cdot \|_X$. A terminologia "log-integrável" será usada para denominar uma função q.t.p. definida em $\mathbb{T}$ cujo logaritmo do valor absoluto esteja em L^1. Dada $\phi \in L^1$, denota-se por $\hat{\phi}(n)$ o coeficiente de Fourier de ordem n de ϕ, isto é,

$$\hat{\phi}(n) = \int_{\mathbb{T}} \phi(z) z^{-n} \, \mathrm{d}m(z) \,.$$

Se $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, sua expansão em série de potências em torno da origem será denotada

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$$

(esta notação será justificada no Teorema 1.1.7). Usando de um abuso de notação costumeiro, a função dada por $z \mapsto z$ definida em qualquer subconjunto de $\mathbb{C}$ é denotada simplesmente por z. A álgebra gerada por esta função, ou seja, o conjunto das funções polinomiais, será denotado por $\mathcal{P}$. Por ℓ^p, ou $\ell^p(\mathbb{N})$, entende-se o espaço das sequências p-somáveis indexadas por $\mathbb{N}$.

Caso não seja dito algo mais, o corpo subjacente a cada espaço vetorial deste texto será o dos números complexos. O núcleo e a imagem de uma transformação linear A definida em um espaço vetorial X são denotados, respectivamente, $\ker A$ e AX. Assuma que X é um espaço vetorial topológico. O operador identidade em X é denotado I_X ou, mais simplesmente, I. Se $Y \subset X$, $\operatorname{span} Y$ será o subespaço vetorial gerado por Y, enquanto $\overline{\operatorname{span}}\, Y$, ou $\overline{\operatorname{span}}_X\, Y$, é o fecho de $\operatorname{span} Y$ em X. O espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos em X será denotado X^*. O anulador de um conjunto $Y \subset X$, denotado $Y^\perp$, é o conjunto dos elementos de X^* que se anulam em todo ponto de Y. Dados $x \in X$ e $\phi \in X^*$, o valor $\phi(x)$ será denotado por $\langle x, \phi \rangle$, em analogia com a notação de produto interno em espaços de Hilbert – em particular, se f, g são funções q.t.p. definidas em $\mathbb{T}$ tais que $f\overline{g} \in L^1$, $\langle f, g\rangle$ é o mesmo que $\int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\,\mathrm{d}m$. Nesta notação, temos

$$Y^{\perp} = \{\phi \in X^* \,:\, \langle x, \phi\rangle = 0 \;\forall\, x \in Y\}\,.$$

Se X é espaço de Banach, a álgebra de Banach formada pelos seus operadores lineares limitados é denotada por $\mathcal{B}(X)$. Dado $A \in \mathcal{B}(X)$, um subespaço invariante de A é um subespaço fechado $V \subset X$ satisfazendo $AV \subset V$; um subespaço invariante se diz não trivial se não é $\{0\}$ nem todo o X. Um operador $B \in \mathcal{B}(X)$ comuta com A se satisfaz $AB = BA$.

Em um espaço de Hilbert H, o produto interno entre dois vetores x, y é denotado $\langle x, y\rangle_H$ quando se quer enfatizar o espaço. O complemento ortogonal de um conjunto X é $X^{\perp}$ – em vista do teorema de representação de Riesz para espaços de Hilbert, existe uma identificação natural entre o complemento ortogonal e o anulador de X. Por vezes, por questões de clareza, será escrito $H \ominus X = H \cap X^{\perp}$.

Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach com identidade I e $A \in \mathfrak{A}$, o espectro $\sigma(A)$ é o conjunto dos números complexos λ tais que $A - \lambda I$ possui inverso em $\mathfrak{A}$. Quando $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$, onde H é um espaço de Hilbert, todo elemento tem espectro compacto e não vazio. O operador $A \in \mathcal{B}(H)$ é positivo, por definição, se $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ para todo $x \in H$. Isto é denotado por $A \geqslant 0$ e ocorre se, e somente se, A é autoadjunto (isto é, $A = A^*$) e $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$. Neste caso, existe um único operador positivo, denotado $A^{1/2}$, cujo quadrado é A. Em [40, Chapter 12], $A^{1/2}$ é obtido a partir do cálculo funcional para operadores normais, que faz uso de resoluções da identidade. Descreveremos resumidamente outra construção, conceitualmente mais simples, encontrada em [16, Chapter 7]. Assuma A autoadjunto. Se $p \in \mathcal{P}$ tem expressão $p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, então o operador $p(A) := \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$ satisfaz $\|p(A)\| = \sup_{t\in\sigma(A)}|p(t)|$. Se f é uma função contínua em $\sigma(A)$ então existe uma sequência de polinômios $\{p_n\}$ que converge para f uniformemente em $\sigma(A)$, pelo teorema de aproximação de Weierstrass. A sequência $\{p_n(A)\}$ é de Cauchy em $\mathcal{B}(H)$ e, portanto, tem um limite $f(A)$, que independe da sequência $\{p_n\}$ escolhida para aproximar f e comuta com qualquer operador que comute com A. A associação $f \mapsto f(A)$ é um homomorfismo entre as álgebras $C(\sigma(A))$ e $\mathcal{B}(H)$ consistindo dos operadores autoadjuntos e se chama cálculo funcional. No caso em que $A \geqslant 0$, $A^{1/2}$ é o resultado do cálculo funcional para $f(x) = \sqrt{x}$.

Introduzimos ainda alguma terminologia de semigrupos de operadores. Dado um espaço vetorial topológico X, um semigrupo (multiplicativo discreto) de operadores em X é uma sequência de operadores lineares contínuos $\{A_n \,:\, n \in \mathbb{N}^*\}$ satisfazendo $A_1 = I$ e $A_{mn} = A_m A_n$ para quaisquer m, n. A órbita de um elemento $x \in X$ é o conjunto $\{A_n x \,:\, n \in \mathbb{N}^*\}$ e x se diz cíclico se sua órbita gera um subespaço denso em X.

1.1 Os espaços de Hardy do disco unitário

Esta seção se ocupa de descrever os fatos básicos sobre os clássicos espaços de Hardy H^p usados no restante do texto. Entre as diversas as fontes de informação sobre o assunto, citamos [12, 23, 26, 33], bem como [39, Chapter 17]. Vale também mencionar o texto introdutório [31], que se concentra em H^2 e seus operadores. Primeiramente, H^p será apresentado como um espaço de funções holomorfas no disco, naturalmente identificado com um espaço de funções no círculo via valores de fronteira. Esta identificação pode ser feita no sentido contrário pela integral de Poisson. Também, veremos que H^2 coincide com o espaço de funções holomorfas no disco cuja série de potências têm sequência de coeficientes quadrado-somável, conforme definido na Introdução. A referência seguida aqui será [33, Chapters 1-2].

Definição 1.1.1. *Dado $p > 0$, o espaço de Hardy H^p, ou $H^p(\mathbb{D})$, é definido por*

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \ : \ \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(rz)|^p \, \mathrm{d}m(z) < \infty \right\} .$$

Será denotado

$$\|f\|_p = \left(\sup_{r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(rz)|^p \, \mathrm{d}m(z) \right)^{1/p} .$$

Define-se ainda

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty \} ,$$

com a norma do supremo $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$.

Observação 1.1.2. Como será visto logo adiante, não há confusão entre o uso da notação $\| \cdot \|_p$ feito acima e sua utilização para denotar a norma de L^p.

Definição 1.1.3. *Dada $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, define-se*

$$f_r(z) = f(rz), \qquad z \in \mathbb{D}, \ 0 < r < 1 .$$

Definição 1.1.4. *Dados $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ e $\xi \in \mathbb{T}$, dizemos que $f^*(\xi)$ é o limite não tangencial de f em ξ ou, equivalentemente, $f(z)$ converge não tangencialmente para $f^*(\xi)$ quando $z \to \xi$ se para cada $c > 1$ vale*

$$f^*(\xi) = \lim_{\substack{z\to\xi \\ z\in S_c(\xi)}} f(z)$$

quando z tende a ξ dentro da região

$$S_c(\xi) = \{ z \in \mathbb{D} \ : \ |z - \xi| \leqslant c(1 - |z|) \} .$$

Diremos que $f^*(\xi)$ é o limite radial de f em ξ se $f^*(\xi) = \lim_{r\to 1^-} f(r\xi)$.

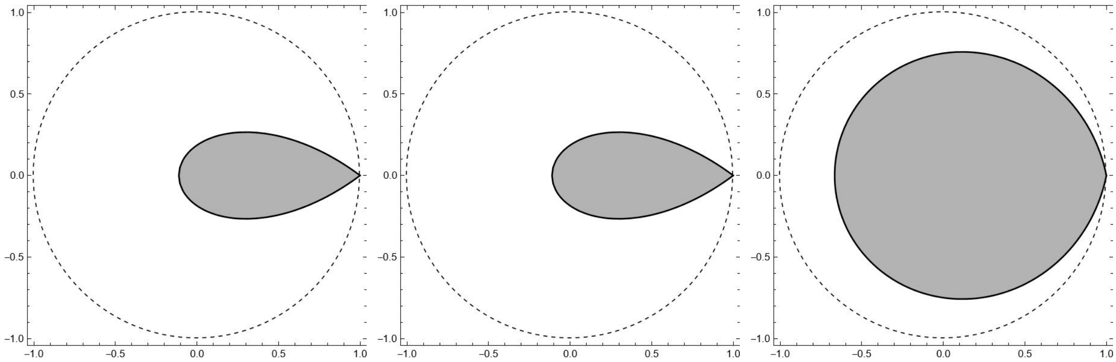

Figura 1 – Regiões de convergência não tangencial $S_{5/4}(1)$, $S_{5/2}(1)$ e $S_5(1)$

Observação 1.1.5. Claramente a definição acima pressupõe a existência de cada limite e, no caso da convergência não tangencial, que o limite é o mesmo para cada $c > 0$. Outra observação trivial é a de que um limite não tangencial deve ser também radial. Exemplos de região de convergência não tangencial ancoradas no ponto 1 são mostrados na Figura 1.

Definição 1.1.6. *Dada $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, a integral de Poisson de ϕ é definida por*

$$P[\phi](z) = \int_{\mathbb{T}} \phi(\xi) \operatorname{Re}\!\left(\frac{\xi + z}{\xi - z}\right) \mathrm{d}m(\xi), \qquad z \in \mathbb{D}\,.$$

Mais geralmente, define-se a integral de Poisson de uma medida complexa ν em $\mathbb{T}$ como

$$P[\nu](z) = \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\!\left(\frac{\xi + z}{\xi - z}\right) \mathrm{d}\nu(\xi), \qquad z \in \mathbb{D}\,.$$

De uma forma bastante resumida, as propriedades mais importantes dos elementos de H^p e dos próprios espaços em si estão contidas no enunciado a seguir. A fatoração canônica, outro resultado de extrema importância, será o tema da Seção 1.2.

Teorema 1.1.7. *Sejam $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ e $p > 0$.*

(a) As médias

$$\|f_r\|_p^p = \int_{\mathbb{T}} |f(rz)|^p \,\mathrm{d}m(z)$$

são crescentes com respeito ao raio $r \in (0, 1)$ – por definição, seu supremo é $\|f\|_p$.

(b) Se $p < q < \infty$ então $H^\infty \subset H^q \subset H^p$. Além disso, $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ para toda $f \in H^q$.

(c) Se $f \in H^p$ então para quase todo $\xi \in \mathbb{T}$ existe o limite não tangencial $f^*(\xi)$. Se $1 \leqslant p \leqslant \infty$ então a função f^* assim q.t.p. definida em $\mathbb{T}$ está em L^p, tem série de Fourier $\sum_{n \geqslant 0} \hat{f}(n) e^{in\theta}$ e sua norma L^p coincide com $\|f\|_p$.

(d) Dado $1 \leqslant p \leqslant \infty$, se $\phi \in L^p$ e $\hat{\phi}(n) = 0$ para todo $n < 0$, então $P[\phi]$ é um elemento de H^p com série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\phi}(n) z^n$ e norma H^p igual a $\|\phi\|_p$.

(e) *Se* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\|\cdot\|_p$ *é uma norma em* H^p *que o torna um espaço de Banach. Caso* $p < 1$, *a métrica* $d(f,g) = \|f-g\|_p^p$ *dá a* H^p *uma estrutura de* F*-espaço, ou seja, um espaço vetorial topológico cuja topologia é invariante por translações e vem de uma métrica completa.*

(f) *Se* $f \in H^p$, *então*

$$f_r \xrightarrow{r \to 1^-} f \quad \begin{cases} \text{em norma} & \text{se } 1 \leqslant p < \infty\,, \\ \text{na topologia fraca*} & \text{se } p = \infty\,. \end{cases}$$

(g) *Se* $f_n \to f$ *em* H^p *então* $f_n \to f$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* $\mathbb{D}$.

(h) *As funções polinomiais são densas em* H^p *para* $0 < p < \infty$. *Em* H^∞, *os polinômios são densos com respeito à topologia fraca*.*

(i) (Princípio da subordinação de Littlewood) *Se* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *é uma função holomorfa então*

$$f \in H^p \implies f \circ \varphi \in H^p \quad e \quad \|f \circ \varphi\|_p \leqslant \left(\frac{1-|\varphi(0)|}{1+|\varphi(0)|}\right)^{1/p} \|f\|_p\,.$$

Pelos itens (c) e (d) do teorema acima, a identificação

$$f(z) = \textstyle\sum_{n=0}^\infty a_n z^n \quad \longleftrightarrow \quad \phi(e^{i\theta}) = \textstyle\sum_{n=0}^\infty a_n e^{in\theta} \tag{1.2}$$

é um isomorfismo isométrico entre H^p e o subespaço fechado de L^p

$$H^p(\mathbb{T}) = \{\phi \in L^p \,:\, \hat{\phi}(n) = 0 \ \forall\, n < 0\}\,.$$

Uma direção de isomorfismo consiste em tomar limites não tangenciais (ou radiais) e outra é o operador integral de Poisson. Assim, H^p pode ser visto também como um subespaço fechado de L^p. Em particular, a topologia fraca* a que se referem os itens (f) e (h) é aquela que H^∞ herda de $L^\infty \cong (L^1)^*$.

Daqui em diante, o mesmo símbolo poderá fazer referência a um elemento de H^p ou à sua correspondente função de fronteira. Em particular, o limite não tangencial de uma função f em um ponto ξ será denotado $f(\xi)$. Observe que esta discussão também justifica a notação $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \hat{f}(n)$, introduzida na página 19.

Cabe aqui uma observação a respeito da demonstração da existência de limites não tangenciais de funções em H^p. Em geral, primeiro demonstra-se este resultado para $p \geqslant 1$ via ferramentas da análise de Fourier. A extensão ao caso $p < 1$ é feita a partir da fatoração canônica, exposta na Seção 1.2.

Observação 1.1.8 (O caso $p = 2$)**.** Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$ então a série de potências $f(z) = \sum a_n z^n$ converge absolutamente sempre que $|z| < 1$, definindo assim uma função holomorfa em $\mathbb{D}$. Além disso, um cálculo simples mostra que $\int_{\mathbb{T}} |f(rz)|^2 \, \mathrm{d}m(z) = \sum |a_n|^2 r^{2n}$. Portanto, $H^2(\mathbb{D})$ pode ser visto como o espaço de Hilbert separável das séries de potências centradas na origem com coeficientes quadrado-somáveis, que é isometricamente isomorfo a ℓ^2 via a identificação (1.2). O produto interno pode ser expresso como

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} \, .$$

Uma base ortonormal para este espaço é formada pelos monômios $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemplo 1.1.9. *Considere* $p_n(z) = nz^n - \sum_{j=0}^{n-1} z^j$, $n \geqslant 1$. *Então,* $\left\{ \sqrt{\frac{1}{n(n+1)}} p_n \ : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *é uma base ortonormal de* H^2.

Demonstração. Temos

$$n > k \implies \langle p_n, p_k \rangle_{H^2} = \langle -z^k, kz^k \rangle + \sum_{j=0}^{k-1} \langle -z^j, -z^j \rangle = k - k = 0 \, ,$$

o que mostra que $\langle p_n, p_k \rangle = 0$ sempre que $n \neq k$, ou seja, $\{p_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortogonal. Cálculo elementar semelhante mostra que $\|p_n\|_2^2 = n^2 + n = n(n+1)$ se $n \geqslant 1$. Assim, o conjunto mencionado é ortonormal. Resta mostrar que seu complemento ortogonal é trivial. Se $f \perp p_n$ para todo $n \geqslant 1$ então $n\hat{f}(n) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}(j) = 0$, logo

$$\begin{aligned}
\hat{f}(1) &= \hat{f}(0), \\
\hat{f}(2) &= \frac{\hat{f}(1) + \hat{f}(0)}{2} = \hat{f}(0), \\
&\vdots \\
\hat{f}(n) &= \frac{\hat{f}(n-1) + \cdots + \hat{f}(0)}{n} = \hat{f}(0) \quad \forall n \geqslant 1 \, ,
\end{aligned}$$

por indução. Uma vez que $\sum |\hat{f}(n)|^2 = \sum |\hat{f}(0)|^2 < \infty$, isto só pode ocorrer se $\hat{f}(0) = 0$ e, portanto, $f = 0$. $\square$

Exemplo 1.1.10. *Dado* $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1-z)^\alpha$ *é integrável em* $\mathbb{T}$ *se e somente se* $\alpha > -1$. *Assim,* $(1-z)^\alpha \in H^p$ *se e somente se* $\alpha > -1/p$.

Demonstração. Observe inicialmente que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|1-z|} \, \mathrm{d}m(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 - e^{i\theta}|} \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}} \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos\theta}} \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\cos\theta}} \, \mathrm{d}\theta \, .
\end{aligned}$$

Usando a regra de L'Hospital do cálculo, temos

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\cos\theta}}}{\frac{1}{\theta}} = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}} = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{2\sqrt{1-\cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta} = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{1}{\cos\theta\sqrt{1-\cos\theta}} = +\infty\,.$$

Assim, para qualquer $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{1-\cos\theta} \geqslant M/\theta$ em $(0,\delta)$ e então

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|1-z|}\,\mathrm{d}m(z) \geqslant \frac{M}{2\pi\sqrt{2}} \int_0^\delta \frac{1}{\theta}\,\mathrm{d}\theta = +\infty\,,$$

pois $1/\theta$ tem primitiva $\log\theta$, que possui limite $-\infty$ na origem. Segue que $1/(1-z)$ não está em L^1 e, portanto, em qualquer L^p para $p \geqslant 1$.[1]

Resta verificar que $(1-z)^{-\alpha}$ é integrável no círculo para $0 < \alpha < 1$. Temos

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|1-z|^\alpha}\,\mathrm{d}m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{[(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta]^\alpha}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\operatorname{sen}^{2\alpha}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Uma vez que

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^{2\alpha}\theta}{\theta^{2\alpha}} = \lim_{\theta\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)^{2\alpha} = 1\,,$$

dado $c > 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{\operatorname{sen}^{2\alpha}\theta} \leqslant \frac{c}{\theta^{2\alpha}}$ para todo $\theta \in (0,\delta)$, o que implica

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|1-z|^\alpha}\,\mathrm{d}m(z) \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta \frac{c}{\theta^{2\alpha}}\,\mathrm{d}\theta + \int_\delta^\pi \frac{1}{\operatorname{sen}^{2\alpha}\delta}\,\mathrm{d}\theta\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{c\delta^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} + \frac{\pi-\delta}{\operatorname{sen}^{2\alpha}\delta}\right) < \infty\,,$$

como desejado. □

O Capítulo 3 fará uso de um resultado de limitação do operador de multiplicação por potências de $1-z$ entre diferentes espaços de Hardy. Trata-se de uma consequência de uma versão menos conhecida da desigualdade de Hölder [22, Theorem 13.6].

Teorema 1.1.11. *Sejam $0 < r < 1$ e s satisfazendo $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, de forma que $s < 0$. Considere uma medida ν em um conjunto X qualquer e sejam f, g funções não negativas ν-mensuráveis. Se $f^r, g^s \in L^1(\nu)$ e $\int_X g^s\,\mathrm{d}\nu > 0$, então $fg \in L^1(\nu)$ e*

$$\int_X fg\,\mathrm{d}\nu \geqslant \left(\int_X f^r\,\mathrm{d}\nu\right)^{1/r} \left(\int_X g^s\,\mathrm{d}\nu\right)^{1/s}.$$

Proposição 1.1.12. *Sejam $\alpha > 0$ e $0 < q < p$. Então, o operador de multiplicação por $(1-z)^{-\alpha}$ é bem definido e contínuo de H^p em H^q para $q < 1/\alpha$ e $p > \dfrac{q}{1-\alpha q}$.*

Demonstração. Considere $h \in H^p$, $r = q/p$ e s satisfazendo $(1/r) + (1/s) = 1$. Note que $0 < r < 1$ e $s < 0$, de forma que estamos em condições de aplicar o Teorema 1.1.11. Para $z \in \mathbb{T}$, faça $f(z) = |h(z)/(1-z)^\alpha|^p$ e $g(z) = |1-z|^{\alpha p}$. Então,

$$f(z)^r = \left|\frac{h(z)}{(1-z)^\alpha}\right|^q, \quad g(z)^s = |1-z|^{\alpha p s} \quad \text{e} \quad fg(z) = |h(z)|^p\,.$$

[1] Esta conclusão também é obtida facilmente a partir da teoria das séries de Fourier: o lema de Riemann-Lebesgue (ver, por exemplo, [39, p. 103]) diz que a sequência de coeficientes de Fourier de toda função em L^1 converge para 0, o que não ocorre para $1/(1-z) = \sum_{n=0}^\infty z^n$.

Logo,

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{h(z)}{(1-z)^{\alpha}}\right|^{q} \mathrm{d}m(z)\right)^{p/q} \leqslant \frac{\int_{\mathbb{T}} |h(z)|^{p} \,\mathrm{d}m(z)}{\left(\int_{\mathbb{T}} |1-z|^{\alpha p s} \,\mathrm{d}m(z)\right)^{-1/s}} \tag{1.3}$$

e a condição $0 < \int_{\mathbb{T}} g^{s} \,\mathrm{d}m < \infty$ é satisfeita se e somente se $\alpha p s > -1$, em vista do Exemplo 1.1.10. Temos

$$\alpha p s > -1 \iff \alpha p < -\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - 1 \iff \frac{p}{q} = \frac{1}{r} > \alpha p + 1 \iff q < \frac{p}{\alpha p + 1}$$

e a última desigualdade só pode ser satisfeita para algum p se $q < 1/\alpha$. Neste caso, isolando p, temos $p > q/(1-\alpha q)$. O resultado do enunciado segue de (1.3). □

Isolamos aqui dois casos particulares do resultado acima que serão de utilidade no Capítulo 3. Um deles segue ao tomar $\alpha = 1$ e o outro, $q = 2$ e $\alpha < 1/2$.

Corolário 1.1.13. *O operador de multiplicação por* $1/(1-z)$ *é contínuo de* H^p *em* H^q *para* $q < 1$ *e* $p > q/(1-q)$.

Corolário 1.1.14. *Se* $0 < \alpha < 1/2$ *então o operador de multiplicação por* $1/(1-z)^{\alpha}$ *é contínuo de* H^p *em* H^2 *para* $p > 2/(1-2\alpha)$.

Listamos alguns resultados específicos que serão necessários no Capítulo 3. Seguem abaixo algumas desigualdades e estimativas sobre funções em H^p [12, Theorems 3.15, 6.1, 6.3, 6.4].

Teorema 1.1.15 (Desigualdade de Hardy)**.** *Se* $f \in H^1$ *então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n+1} \leqslant \pi \|f\|_1 .$$

Teorema 1.1.16. *Sejam* $1 \leqslant q \leqslant 2$ *e* $p \geqslant 2$ *seu expoente conjugado. Se* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^q$, *então* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *define uma função em* H^p *satisfazendo*

$$\|f\|_p \leqslant \|\{a_n\}\|_{\ell^q} .$$

Observação 1.1.17. O Teorema 1.1.16 é uma consequência imediata da desigualdade de Hausdorff-Young da análise de Fourier (ver, por exemplo, [39, Theorem 12.12]).

Teorema 1.1.18. *Se* $2 \leqslant q < \infty$ *e* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *satisfaz* $\sum n^{q-2} |\hat{f}(n)|^q < \infty$ *então* $f \in H^q$ *e*

$$\|f\|_q \leqslant C \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{q-2} |\hat{f}(n)|^q\right)^{1/q}$$

para uma constante C *que depende apenas de* q.

Teorema 1.1.19. *Se* $0 < p \leqslant 1$ *então*

$$|\hat{f}(n)| \leqslant C n^{1/p-1} \|f\|_p \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, f \in H^p .$$

Enunciamos agora a descrição de $(H^p)^*$ para $p \in (1, \infty)$ [12, Theorem 7.3] e $p \in (0, 1)$ [12, Theorem 7.5]. O primeiro caso é consequência da conhecida dualidade entre espaços L^p, enquanto o segundo exige, para seu enunciado, a introdução de outras classes de funções.

Teorema 1.1.20. *Dado $1 < p < \infty$, $\phi \in (H^p)^*$ se, e somente se, existe uma $g \in H^q$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que*

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{T}} f\,\overline{g}\,\mathrm{d}m, \qquad f \in H^p\,.$$

A função g é unicamente determinada e satisfaz $\|\phi\|_{(H^p)^*} \leqslant \|g\|_q$.

Definição 1.1.21. *Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e 2π-periódica. Dado $\alpha \leqslant 1$, dizemos que $\phi \in \Lambda_\alpha$ se satisfaz a condição de Lipschitz (ou Hölder) de expoente α: existe $C > 0$ tal que*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\,;$$

define-se que $\varphi \in \Lambda_*$ se existe $C > 0$ tal que

$$|\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x)| \leqslant Ah \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ h > 0\,.$$

Definição 1.1.22. *A álgebra do disco, denotada $A(\mathbb{D})$, é o conjunto das funções holomorfas em $\mathbb{D}$ que possuem extensão contínua a $\overline{\mathbb{D}}$. Dada $f \in A(\mathbb{D})$, dizemos que $f \in \Lambda_\alpha$ se a função de fronteira $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ pertence a Λ_α; $f \in \Lambda_*$ se $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ está em Λ_*.*

Exemplo 1.1.23. *Para $0 < \alpha < 1$, $(1 - z)^\alpha \in \Lambda_\alpha$.*

Demonstração. Notamos que

$$\begin{aligned}
z = e^{i\theta}, \xi = e^{it} \in \mathbb{T} \implies |(1 - z)^\alpha - (1 - \xi)^\alpha|& \\
&= |\exp\left(\alpha \log(1 - z)\right) - \exp\left(\alpha \log(1 - \xi)\right)| \\
&= \left|\exp\left(\alpha \int_0^z \frac{-\mathrm{d}w}{1 - w}\right) - \exp\left(\alpha \int_0^\xi \frac{-\mathrm{d}w}{1 - w}\right)\right| \\
&\overset{z \to \xi}{=} O\left(\left|\exp\left(\alpha \int_0^z \frac{-\mathrm{d}w}{1 - w} - \alpha \int_0^\xi \frac{-\mathrm{d}w}{1 - w}\right)\right|\right),
\end{aligned}$$

onde a constante implicada não depende de ξ, visto que exp é Lipschitz-contínua em cada região limitada do plano complexo. Uma vez que

$$\begin{aligned}
\left|\exp\left(\alpha \int_0^z \frac{-\mathrm{d}w}{1 - w} - \alpha \int_0^\xi \frac{-\mathrm{d}w}{1 - w}\right)\right| &= \left|\exp\left(\alpha \int_\xi^z \frac{-\mathrm{d}w}{1 - w}\right)\right| \\
&= \exp\left(\alpha \operatorname{Re} \int_\xi^z \frac{-\mathrm{d}w}{1 - w}\right) \\
&= \exp\left(\alpha \operatorname{Re} \log(z - \xi)\right) \\
&= \exp\left(\alpha \log|z - \xi|\right) = |z - \xi|^\alpha = O(|\theta - t|^\alpha)\,,
\end{aligned}$$

segue que $(1 - z)^\alpha \in \Lambda_\alpha$. ☐

Teorema 1.1.24. *Dado $0 < p < 1$, todo funcional linear ϕ em H^p é da forma*

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{T}} f\,\overline{g}\,\mathrm{d}m, \qquad f \in H^p\,, \tag{1.4}$$

para uma $g \in A(\mathbb{D})$ unicamente determinada. Mais precisamente, $\phi \in (H^p)^*$ se e somente se vale (1.4) *com*

$$g^{(n-1)} \in \begin{cases} \Lambda_{1/p-n} & \textit{se } \dfrac{1}{n+1} < p < \dfrac{1}{n} \textit{ com } n \in \mathbb{N}^*, \\ \Lambda_* & \textit{se } p = \dfrac{1}{n+1} \textit{ com } n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

onde $g^{(n-1)}$ denota a $(n-1)$-ésima derivada.

Observação 1.1.25. O dual de H^1 contém mas não é igual a H^∞. De fato, os funcionais lineares contínuos em H^1 são da forma $f \mapsto \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} f\overline{g_r}\,\mathrm{d}m$, onde g pertence ao espaço $BMOA$, formado pelos elementos de H^1 cuja função de fronteira têm oscilação média limitada no cíulo (consultar [19]).

1.2 O *shift* unilateral e a fatoração canônica

Esta seção expõe a teoria de fatoração de funções H^p, que é intimamente ligada ao operador *shift* unilateral. Os conceitos e resultados deste trecho são extraídos de [33, Chapters 2-3].

Definição 1.2.1. *O operador shift unilateral é $S : \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \to \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ dado por*

$$Sf(z) = z\,f(z), \qquad z \in \mathbb{D},\ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\,.$$

O *shift* S é a multiplicação pela variável independente. Expressando em termos de série de potências,

$$Sf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^{n+1}\,.$$

Como um operador em espaços de sequências, S age como a associação

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)\,,$$

de onde vem o nome *shift*. É imediato ver que $SH^p \subset H^p$ para todo $p > 0$ e a restrição $S|_{H^p}$ é uma isometria. Daqui em diante, S poderá denotar qualquer uma destas restrições, a depender do contexto.

Definição 1.2.2. *Uma função interior é uma $f \in H^\infty$ tal que $|f| = 1$ q.t.p. em $\mathbb{T}$.*

Definição 1.2.3. *Dada uma sequência – finita ou infinita – $\{z_n\}$ em $\mathbb{D}$, o produto de Blaschke associado a esta sequência é a função*

$$B(z) = \prod_n \frac{\overline{z_n}}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n} z}$$

definida no conjunto de pontos onde o produto converge. Convenciona-se que o fator correspondente a z_j é z caso $z_j = 0$. Uma função interior singular é uma u da forma

$$u(z) = c \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} \, \mathrm{d}\mu(\xi)\right), \qquad z \in \mathbb{D},$$

onde μ é uma medida de Borel em $\mathbb{T}$ singular com respeito a m e $c \in \mathbb{T}$.

Se $|z| = 1$ então $|(z - z_n)/(1 - \overline{z_n} z)| = 1$. Portanto, produtos de Blaschke com uma quantidade finita de fatores são funções interiores. A função u associada a uma medida singular μ também é interior: se A é o suporte de μ então $m(A) = 0$ e $|u(z)| = 1$ sempre que $z \in \mathbb{T} \backslash A$. De fato, estes dois tipos de função e seus produtos são essencialmente todas as funções interiores possíveis.

Teorema 1.2.4. *A respeito de funções interiores, valem as seguintes afirmações.*

(a) Se $f \in H^p$ para algum $p > 0$ e $\{z_j\}$ é sua sequência de zeros em $\mathbb{D}$, repetidos de acordo com suas multiplicidades, então vale a condição de Blaschke

$$\sum_n (1 - |z_j|) < \infty\,. \tag{1.5}$$

Por outro lado, se $\{z_j\}$ é uma sequência em $\mathbb{D}$ satisfazendo (1.5) *então o produto de Blaschke associado converge uniformemente em compactos e define uma função interior cujos zeros são precisamente os z_j, com multiplicidade igual ao respectivo número de repetições na sequência.*

(b) Uma função interior é singular se e somente se não possui zeros em $\mathbb{D}$.

(c) Toda função interior é o resultado da multiplicação entre um produto de Blaschke e uma função singular. Os fatores são unicamente determinados, a menos de constantes multiplicativas unimodulares.

Exemplo 1.2.5. *Considere $\mu = \delta_1$ a medida de Dirac em concentrada no ponto* 1*. A função interior singular associada é*

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1 + z}{1 - z}\right), \qquad z \in \mathbb{D}\,.$$

Observamos que

$$z \in \mathbb{T} \backslash \{1\} \implies f(z) = \exp\left(-\frac{2i \operatorname{Im} z}{|1 - z|^2}\right) \in \mathbb{T}\,,$$

o que dá uma verificação direta de que $|f| = 1$ q.t.p. no círculo.

O teorema a seguir costumeiramente leva o nome de A. Beurling, que obteve o caso $p = 2$ no artigo [4]. Este é o primeiro exemplo de resultado que traduz afirmações sobre operadores e/ou subespaços invariantes em propriedades de funções holomorfas, o que, historicamente, deu um grande impulso ao desenvolvimento da teoria de espaços vetoriais de funções holomorfas.

Teorema 1.2.6. *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Um subespaço fechado de H^p é invariante por S se e somente se é da forma $\Theta H^p = \{\Theta f : f \in H^p\}$ para alguma função interior Θ.*

Observação 1.2.7. O Teorema 1.2.6 indica que o reticulado dos subespaços invariantes de S é completamente descrito pelas funções interiores. De fato, ao menos no caso $p = 2$, esta relação é ainda mais profunda: se $V = BH^2$ e B é um produto de Blaschke, a quantidade de zeros de B coincide com a codimensão de V (ver [31, Theorem 2.6.8]).

Definição 1.2.8. *Uma função exterior é uma $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$ da forma*

$$h(z) = c \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} \log k(\xi)\, \mathrm{d}m(\xi)\right), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.6}$$

onde $c \in \mathbb{T}$ e k é uma função positiva q.t.p. em $\mathbb{T}$ tal que $\log k \in L^1$.

Teorema 1.2.9. *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Uma função $f \in H^p$ é exterior se e somente se é S-cíclica. Neste caso, na representação (1.6), $k = |f|$ q.t.p. em $\mathbb{T}$.*

Observação 1.2.10. Uma observação bem simples: f é S-cíclica em H^p se e somente se $f\mathcal{P} = \{fp : p \in \mathcal{P}\}$ é denso em H^p. Se $f \in H^\infty$, ambas as condições equivalem a fH^p ser denso em H^p.

Observação 1.2.11. Mostrar a ciclicidade com respeito ao *shift* de uma função em um certo H^p equivale a mostrar ciclicidade em qualquer outro H^q a que a mesma função pertença, em vista da forma que uma função exterior deve ter (Definição 1.2.8). Em particular, pode-se tirar vantagem do fato de H^2 ser espaço de Hilbert: se $f \in H^2$ então f é exterior se e somente se $\{S^n f : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$.

Exemplo 1.2.12. *A função $z - \xi$ é exterior se e somente se $|\xi| \geqslant 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.9 e a observação que o segue, a propriedade de ser exterior equivale à nulidade de $H^2 \ominus \operatorname{span}\{S^n(z - \xi) : n \in \mathbb{N}\}$. Assim, suponha que $f \in H^2$ e $f \perp S^n(z - \xi)$ para todo $n \geqslant 0$. Por um argumento imediato de indução, $\hat{f}(n) = \xi^n \hat{f}(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso $|\xi| \geqslant 1$, isto viola a convergência de $\sum |\hat{f}(n)|^2$, a não ser que $\hat{f}(0) = 0$ e portanto $f = 0$, mostrando a ciclicidade. Caso $|\xi| < 1$, um cálculo direto mostra que $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n z^n \in H^2 \ominus \operatorname{span}\{S^n(z - \xi) : n \in \mathbb{N}\}$, de forma que $z - \xi$ não é cíclico. □

Os resultados do enunciado a seguir podem ser encontrados em [33, Subsection 3.1.1]. Em particular, há critérios para determinar se uma função é exterior, úteis quando a verificação pela Definição 1.2.8 é muito difícil.

Proposição 1.2.13. *Valem as seguintes afirmações.*

(a) Se h é uma função exterior, então h possui limites radiais q.t.p. em $\mathbb{T}$. Ainda, $h \in H^p$ se e somente se a função de fronteira está em L^p.

(b) Se $h \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ e $\mathrm{Re}\, h \geqslant 0$ em $\mathbb{D}$, então h é exterior. Mais geralmente, h é exterior se sua imagem estiver contida na região entre duas semirretas partindo da origem do plano complexo.

(c) Produtos e quocientes de funções exteriores são exteriores. Funções exteriores elevadas a potências reais resultam em funções exteriores.

(d) Se $h \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$, então h é exterior se e somente se não se anula em $\mathbb{D}$.

Exemplo 1.2.14. *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1-z)^\alpha$ é exterior. Portanto, se $p \geqslant 1$ e $\alpha > -1/p$ (ver Exemplo 1.1.10) então $(1-z)^\alpha$ é cíclica com respeito ao* shift *em H^p.*

Segue o enunciado do celebrado teorema da fatoração canônica, principal resultado desta subseção. Ele está enunciado para $p \geqslant 1$, mas será imediatamente estendido para $p < 1$ após o estudo da classe de Smirnov na Seção 1.3.

Teorema 1.2.15 (Fatoração canônica)**.** *Dado $1 \leqslant p \leqslant \infty$, toda $f \in H^p$ é da forma $f = \Theta h$, onde Θ é interior e h é exterior, sendo ambas unicamente determinadas a menos de constantes multiplicativas unimodulares.*

Definição 1.2.16. *Se $f = \Theta h$ como no teorema anterior, chamaremos Θ e h, respectivamente, de parte interior e parte exterior de f.*

1.3 A classe de Smirnov

A classe de Smirnov N^+ é uma álgebra de funções holomorfas no disco unitário que contém H^2. De fato, é a maior classe onde vale a fatoração canônica. Seguem algumas propriedades elementares de funções em N^+, retiradas de [33, Section 3.3].

Definição 1.3.1. *A classe de Nevanlinna N é definida por*

$$N = \{g/h \, : \, g, h \in H^\infty, \, h(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{D}\}.$$

Define-se a classe de Smirnov N^+ como

$$N^+ = \{g/h \, : \, g, h \in H^\infty, \, h \text{ exterior}\}.$$

Proposição 1.3.2. *Valem as seguintes afirmações.*

(a) As classes de Nevanlinna e Smirnov são subálgebras de Hol($\mathbb{D}$)*, satisfazendo as inclusões*

$$\bigcup_{p>0} H^p \subset N^+ \subset N \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\,.$$

(b) Toda função em N possui limites radiais q.t.p. em $\mathbb{T}$ e sua função de fronteira é log-integrável, a menos que seja identicamente nula.

(c) Toda função exterior pertence a N^+. Mais precisamente,

$$N^+ = \{g\,h : g \textit{ interior},\ h \textit{ exterior}\}\,.$$

(d) Se um produto de elementos de N^+ é uma função exterior, então cada fator é exterior. Em particular, unidades de N^+ são funções exteriores.

(e) Vale um princípio da máximo generalizado: se $f, g \in N^+$ e $|f| \leqslant |g|$ em $\mathbb{T}$ então $|f| \leqslant |g|$ em $\mathbb{D}$.

(f) Tem-se $H^p = N^+ \cap L^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Observação 1.3.3. O item (c) do teorema acima diz que N^+ é precisamente a classe das funções onde vale a fatoração canônica na forma do Teorema 1.2.15. Em particular, isso estende a fatoração às funções em H^p para $0 < p < 1$.

1.4 Operadores de Toeplitz

Uma classe concreta de operadores em H^2 extensamente estudada é a dos operadores de Toeplitz, que têm o *shift* como caso particular mais importante. Fontes detalhadas sobre o assunto são [11] e [34]. Nesta seção, enunciamos alguns resultados extraídos de [31, Chapter 3].

Definição 1.4.1. *Denote por P_+ a projeção ortogonal de L^2 sobre H^2. Dada $\phi \in L^\infty$, define-se $T_\phi : H^2 \to H^2$, chamado operador de Toeplitz com símbolo ϕ, por*

$$T_\phi f = P_+(\phi f)\,.$$

Se $\phi \in H^\infty$, T_ϕ se diz analítico, enquanto T_ϕ é chamado coanalítico caso $\overline{\phi} \in H^\infty$.

Observação 1.4.2. Um operador de Toeplitz analítico é nada mais que a multiplicação pelo símbolo. De fato, se $\phi \in H^\infty$ e $f \in H^2$ então $\phi f \in H^2$, logo $T_\phi f = \phi f$. Em particular, como mencionado antes, $T_z = S$.

Teorema 1.4.3. *Dado $A \in \mathcal{B}(H^2)$, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) $A = T_\phi$ para alguma $\phi \in L^\infty$;

(ii) $S^*AS = A$;

(iii) *a matriz de* A *com respeito à base ortonormal* $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$ *é da forma*

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & \cdots \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \cdots \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} & \cdots \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Caso $A = T_\phi$, *em* (1.7) *temos* $c_k = \hat{\phi}(k)$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.4.4. *Uma matriz infinita da forma* (1.7) *é chamada matriz de Toeplitz. Uma matriz de Toeplitz finita é uma matriz quadrada obtida do truncamento de uma matriz de Toeplitz.*

Teorema 1.4.5. *Dado* $A \in \mathcal{B}(H^2)$, A *é um operador de Toeplitz analítico se e somente se* $SA = AS$. *Neste caso, o símbolo é* $\phi = A1$.

Teorema 1.4.6. *Para cada* $\phi \in L^\infty$, $T_\phi \in \mathcal{B}(H)$ *e* $\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. *Além disso,* $T_\phi^* = T_{\overline{\phi}}$.

Teorema 1.4.7. *Sejam* $\phi, \psi \in L^\infty$. *Então* $T_\psi T_\phi = T_{\phi\psi}$ *caso* T_ϕ *seja analítico ou* T_ψ *seja coanalítico.*

1.5 Espaços de Bergman ponderados

Introduzimos aqui brevemente os espaços de Bergman ponderados, conforme apresentados na primeira seção de [21], uma ampla fonte de informação sobre o assunto. O objetivo é exibir um isomorfismo entre H^2 e um destes espaços em particular.

Definição 1.5.1. *Dado* $\alpha \in (-1, \infty)$, *defina sobre* $\mathbb{D}$ *a medida*[2]

$$\mathrm{d}A_\alpha(z) = (1 - |z|^2)^\alpha \, \mathrm{d}A(z)\,,$$

onde $\mathrm{d}A$ *é medida de área normalizada*

$$\mathrm{d}A(z) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta, \qquad z = x + iy = re^{i\theta}\,.$$

Para cada $p \in (0, \infty)$, *define-se o espaço de Bergman* A^p_α *por*

$$A^p_\alpha = \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)\,.$$

Denotaremos

$$\mathcal{A} = A^2_1\,.$$

[2] Em [21], esta medida é definida com um fator multiplicativo $(\alpha + 1)$, que não será usado aqui. Claro, a teoria qualitativa resultante permanece inalterada.

Observação 1.5.2. O espaço que originalmente levou o nome de Bergman é A_0^2.

Teorema 1.5.3. *Dados $p > 0$ e $\alpha > -1$, valem as seguintes afirmações.*

(a) Para $p \geqslant 1$, A_α^p é subespaço fechado de $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ e, portanto, espaço de Banach. Para $0 < p < 1$, uma métrica completa invariante por trnaslações é dada por $d(f,g) = \int_{\mathbb{D}} |f-g|^p \, \mathrm{d}A_\alpha$.

(b) À medida que $r \to 1^-$, $f_r \to f$ em A_α^p.

(c) As funções polinomiais formam um conjunto denso em A_α^p.

(d) Se $f_n \to f$ na norma de A_α^p então $f_n \to f$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.

O espaço de interesse neste trabalho é $\mathcal{A}$. Como se pode esperar, tiraremos vantagem da estrutura de Hilbert aqui existente.

Proposição 1.5.4. *Dados $n, k \in \mathbb{N}$,*

$$\langle z^n, z^k \rangle_{\mathcal{A}} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k\,, \\ \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} & \text{se } n = k\,. \end{cases}$$

Portanto, $\left\{ \sqrt{(n+1)(n+2)} z^n \;:\; n \in \mathbb{N} \right\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{A}$ e o produto interno deste espaço pode ser expresso por

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}}{(n+1)(n+2)}\,.$$

Ainda, $f \in \mathcal{A}$ se e somente se $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ e $\sum \frac{|\hat{f}(n)|^2}{(n+1)(n+2)} < \infty$.

Demonstração. Se $n \neq k$ então $\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} \, \mathrm{d}\theta$, logo

$$\langle z^n, z^k \rangle_{\mathcal{A}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)\, r^{n+k} e^{i(n-k)\theta} \, \mathrm{d}\theta \, r \, \mathrm{d}r = 0\,.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle z^n, z^n \rangle_{\mathcal{A}} &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)\, r^{2n} \, \mathrm{d}\theta \, r \, \mathrm{d}r \\ &= 4 \int_0^1 (r^{2n+1} - r^{2n+3}) \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{2n+2} - \frac{2}{2n+4} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\,. \end{aligned}$$

As demais afirmações do enunciado seguem por verificação imediata. □

Como mencionado no início da seção, demonstraremos agora um isomorfismo entre H^2 e $\mathcal{A}$. O enunciado e a demonstração foram extraídos de [14, Lemma 7.2.3].

Teorema 1.5.5. *Considere* $T : \operatorname{Hol}(\mathbb{D}) \to \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$ *dado por*

$$Tf(z) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(1-z)f(z)]}{1-z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

A restrição de T *a* H^2 *é um isomorfismo isométrico entre* H^2 *e* $\mathcal{A}$.

Demonstração. Seja $\left\{\sqrt{\frac{1}{n(n+1)}}p_n \,:\, n \geqslant 1\right\}$ a base ortonormal de H^2 do Exemplo 1.1.9. Começamos verificando que T aplica esta base em uma base ortonormal de $\mathcal{A}$. De fato,

$$(z-1)p_n(z) = nz^{n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} z^{j+1} - \left(nz^n - \sum_{j=0}^{n-1} z^j\right) = nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1$$

$$\therefore \quad Tp_n(z) = \frac{n(n+1)z^n - n(n+1)z^{n-1}}{z-1} = n(n+1)z^{n-1}$$

$$\therefore \quad T\left(\sqrt{\tfrac{1}{n(n+1)}}p_n\right) = \sqrt{\tfrac{1}{n(n+1)}}z^n \quad \forall\, n \geqslant 1,$$

como se queria mostrar.

Segue que $\|Tf\|_{\mathcal{A}} = \|f\|_2$ sempre que $f \in \operatorname{span}\{p_n : n \geqslant 1\}$. Agora, seja $f \in H^2$ e tome uma sequência $\{f_n\}$ em $\operatorname{span}\{p_n\}$ tal que $f_n \to f$ em norma. Em particular, $f_n \to f$ uniformemente em compactos e, então, $Tf_n \to f$ uniformemente em compactos. Por outro lado, $\|Tf_n - Tf_k\|_{\mathcal{A}} = \|f_n - f_k\|_2$, o que implica que $\{Tf_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{A}$. Por completude, $Tf_n \xrightarrow{\mathcal{A}} g$ para uma certa g e, como esta convergência também se dá uniformemente em compactos, devemos ter $g = Tf$. Logo, $Tf_n \xrightarrow{\mathcal{A}} Tf$ e $\|Tf\|_{\mathcal{A}} = \|f\|_2$. Portanto, T é isométrico de H^2 em $\mathcal{A}$.

Resta mostrar que a $TH^2 = \mathcal{A}$. Basta verificar que a imagem de $T|_{H^2}$ é fechada em $\mathcal{A}$, pois ela já contém um subespaço denso formado pelos polinômios. Seja $g = \lim Tf_n$, $f_n \in H^2$, sendo o limite na norma de $\mathcal{A}$. Por argumento semelhante ao do parágrafo anterior, $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em H^2, logo tem um limite f. Como $f_n \to f$ uniformemente em compactos, da mesma forma $Tf_n \to Tf$. Dado que $Tf_n \to g$ uniformemente em compactos, segue que $g = Tf$, ou seja, $g \in TH^2$. □

Observação 1.5.6. Outra expressão para o operador T acima é

$$T = D - M_{\frac{1}{1-z}},$$

onde D é o operador de diferenciação e $M_{\frac{1}{1-z}}$ é a multiplicação por $1/(1-z)$.

1.6 Espaços de Hardy em um semiplano

Listamos aqui alguns resultados relativos aos espaços H^p de um semiplano, com ênfase particular no caso $p = 2$. Seguiremos o que é feito para o semiplano $\mathbb{C}_0$ em [23, Chapter 8], mas enunciando os resultados para $\mathbb{C}_\alpha$ com α real genérico, visto que nosso interesse é em $\mathbb{C}_{1/2}$.

Definição 1.6.1. *Dado $p > 0$, definimos*

$$H^p(\mathbb{C}_\alpha) = \left\{ f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C}_\alpha) \,:\, \|f\|^p_{H^p(\mathbb{C}_\alpha)} := \sup_{\sigma > \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + it)|^p \, \mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Observação 1.6.2. Devido à não limitação de $\mathbb{C}_\alpha$, o espaço $H^\infty(\mathbb{C}_\alpha)$ das funções holomorfas limitadas no semiplano não está contido em H^p neste caso. De fato, H^p não contém as constantes. Observamos também que a aplicação conforme

$$z \in \mathbb{D} \longleftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{C}_0$$

não envia $H^p(\mathbb{D})$ em $H^p(\mathbb{C}_0)$. Assim, a teoria H^p em semiplanos é diferente do caso do disco, embora, como veremos abaixo, alguns aspectos se mantenham similares.

Teorema 1.6.3. *Sejam $p \geqslant 1$ e $f \in H^p(\mathbb{C}_\alpha)$.*

(a) Para quase todo $t \in \mathbb{R}$, existe o limite não tangencial $f^*(\alpha + it)$, ou seja,

$$f^*(\alpha + it) = \lim_{\substack{z \to \alpha + it \\ z \in C_{\alpha+it}(\eta)}} f(z) \qquad \text{para todo } \eta < \frac{\pi}{2},$$

onde $C_w(\eta) = \{w + re^{i\theta} \,:\, r > 0,\, -\eta < \theta < \eta\}$ é a região cônica com vértice em w e abertura máxima 2η.

(b) A função de fronteira $t \mapsto f^*(\alpha + it)$ está em $L^p(\mathbb{R})$ e

$$f(\sigma + it) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha + i\tau) \, \frac{\sigma - \alpha}{(\sigma - \alpha)^2 + (t - \tau)^2} \, \mathrm{d}\tau \,. \tag{1.8}$$

(c) As funções $f_\sigma(t) = f(\sigma + it)$ convergem na norma L^p para $t \mapsto f^*(\alpha + it)$.

Observação 1.6.4. Segue das afirmações do enunciado acima que a $L^p(\mathbb{R})$-norma de $t \mapsto f^*(\alpha + it)$ coincide com $\|f\|_{H^p(\mathbb{C}_\alpha)}$.

A identidade (1.8) é chamada fórmula integral de Poisson para o semiplano. No caso $p = 2$, obteremos uma consequência importante: a limitação dos funcionais de avaliação.

Proposição 1.6.5. *Dado $s \in \mathbb{C}_\alpha$, o funcional de avaliação em s, dado por*

$$E_{(s)} f = f(s), \qquad f \in H^2(\mathbb{C}_\alpha)\,,$$

é linear e limitado em $H^2(\mathbb{C}_\alpha)$.

Demonstração. Seja $s = \sigma + it$. A linearidade de $E_{(s)}$ é evidente. Para a limitação, é suficiente mostrar que $\tau \mapsto \frac{\sigma-\alpha}{(\sigma-\alpha)^2+i(t-\tau)^2}$ define uma função em $L^2(\mathbb{R})$, pois neste caso a desigualdade de Cauchy-Schwarz irá implicar que

$$|f(s)| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(\alpha+i\tau)|^2 \, \mathrm{d}\tau\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sigma-\alpha}{(\sigma-\alpha)^2+i(t-\tau)^2}\right|^2 \mathrm{d}\tau\right)^{1/2} \leqslant C\|f\|_{H^2(\mathbb{C}_\alpha)}\,.$$

Note que

$$\frac{\sigma-\alpha}{(\sigma-\alpha)^2+i(t-\tau)^2} = \frac{\operatorname{Re}(s-(\alpha+i\tau))}{|s-(\alpha+i\tau)|^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-(\alpha+i\tau)} + \frac{1}{\overline{s}-(\alpha-i\tau)}\right].$$

Temos

$$\frac{\left|\frac{1}{s-(\alpha+i\tau)}\right|^2}{\frac{1}{\tau^2}} = \left|\frac{1}{\frac{s}{\tau}-\left(\frac{\alpha}{\tau}+i\right)}\right|^2 \xrightarrow{|\tau|\to\infty} \left|\frac{1}{i}\right|^2 = 1$$

e $1/\tau^2$ é integrável em $\mathbb{R}\backslash(-\delta,\delta)$ para cada $\delta > 0$. Visto que $\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{s-(\alpha+i\tau)} = \frac{1}{s-\alpha}$, podemos escolher $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{1}{s-(\alpha+i\tau)}\right|^2 < M := |s-\alpha|^{-2}$ sempre que $|\tau| < M$ e, portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{s-(\alpha+i\tau)}\right|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant C\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right)\frac{1}{\tau}^2 \, \mathrm{d}\tau + 2\delta M < \infty\,,$$

como desejado. □

Encerramos a seção exibindo um isomorfismo entre $L^2(0,1)$ e $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$, dado pela transformada de Mellin. Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em [29, p. 35], que se baseia em [3, p. 142].

Definição 1.6.6. *Dada $f \in L^2(0,1)$, sua transformada de Mellin é definida por*

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^1 f(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x, \quad s \in \mathbb{C}_{1/2}\,.$$

Teorema 1.6.7. *O operador $\mathcal{M}$ é um isomorfismo isométrico entre $L^2(0,1)$ e $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$.*

1.7 Espaços de de Branges-Rovnyak

Esta seção trata de certos espaços de Hilbert contidos em H^2, que são o tema principal da obra em dois volumes [16, 17], bem como do livro [43] e do artigo expositório [46]. Para motivar sua definição, será descrita sucintamente a construção dos chamados espaços complementares feita em [17, Chapter 16]. Dada uma contração entre espaços de Hilbert $A : H_1 \to H_2$, denota-se por $\mathcal{M}(A)$ a imagem de A com estrutura de espaço de Hilbert "emprestada" de H_1 da seguinte forma:

$$\langle Ax, Ay\rangle_{\mathcal{M}(A)} = \langle P_{(\ker A)^\perp}x, P_{(\ker A)^\perp}y\rangle_{H_1}, \qquad x, y \in H_1\,,$$

onde $P_{(\ker A)^\perp}$ é a projeção ortogonal de H_1 em $H_1 \ominus \ker A$. Nota-se que o produto interno de $\mathcal{M}(A)$ está bem definido, ou seja, independe da escolha de x e y. Se $G \subset H$ são dois espaços de Hilbert, onde G não necessariamente herda o produto interno de H, G se diz contrativamente contido em H se a inclusão $G \hookrightarrow H$ é uma contração. Segue [17, Theorem 16.3] que isto ocorre se e somente G coincide com $\mathcal{M}(A)$, com igualdade tanto de elementos quanto de produtos internos, para alguma contração A de outro espaço de Hilbert em H.

Considerando ainda uma contração $A : H_1 \to H_2$ dada, o operador $I - AA^*$ é positivo e portanto tem uma raiz quadrada positiva $(I - AA^*)^{1/2}$. Define-se, pois, $\mathcal{H}(A) = \mathcal{M}((I - AA^*)^{1/2})$. Esta construção abstrata é, então, aplicada ao caso particular de um operador de Toeplitz analítico T_b cujo símbolo está na bola unitária fechada de H^∞. Os espaços resultantes levam o nome de L. de Branges e J. Rovnyak, os autores que os introduziram originalmente [6], mas tiveram seu estudo fortemente expandido e aprofundado por D. Sarason [42, 41].

Definição 1.7.1. *Seja $b \in H^\infty$, com $\|b\|_\infty \leqslant 1$. O espaço de de Branges-Rovnyak com símbolo b, denotado $\mathcal{H}(b)$, é o espaço de Hilbert consistindo da imagem de H^2 pelo operador $(I - T_bT_b^*)^{1/2}$, com o produto interno*

$$\langle (I - T_bT_b^*)^{1/2} f, (I - T_bT_b^*)^{1/2} g \rangle_b = \langle f, g \rangle, \qquad f, g \in H^2 .$$

Define-se ainda $\mathcal{H}(\bar{b}) = (I - T_b^*T_b)^{1/2} H^2$.

Definição 1.7.2. *Dada $b \in H^\infty$ com $\|b\|_\infty \leqslant 1$, diremos que b é um símbolo extremo se for um ponto extremo da bola unitária fechada de H^∞. Caso contrário, b se diz um símbolo não extremo.*

Teorema 1.7.3. *A fim de que um elemento b da bola unitária de H^∞ seja um ponto extremo, é necessário e suficiente que*

$$\int_{\mathbb{T}} \log(1 - |b|^2)\, \mathrm{d}m = -\infty .$$

O teorema acima pode ser encontrado em [23, p. 138]. A teoria de $\mathcal{H}(b)$ apresenta diferenças significativas a depender do fato de b ser ou não um símbolo extremo. Por exemplo, $S\mathcal{H}(b) \subset \mathcal{H}(b)$ se e somente b é não extremo [17, Corollary 20.20]. O caso de relevância para este trabalho é o dos símbolos não extremos, onde se pode encontrar uma classe grande de funções contida em $\mathcal{H}(b)$ [17, Theorem 24.6].

Teorema 1.7.4. *Se b é símbolo não extremo, então* $\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathcal{H}(b)$.

Esboço de demonstração. Daremos apenas as ideias principais da demonstração, cujos detalhes podem ser encontrados em [17, p. 320]. Como já mencionado, $\mathcal{H}(b)$ é shift-invariante no caso não extremo. Denotando por S_b a restrição de S a $\mathcal{H}(b)$ verifica-se que S_b é limitado e seu espectro é o disco unitário fechado. Assim, se $h \in \mathrm{Hol}(R\mathbb{D})$ com $R > 1$ então $h(S_b)$ pode ser definido via cálculo funcional de Dunford-Riesz e pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{H}(b))$. Por fim, verifica-se que este operador coincide com a multiplicação por h e, portanto, $h = h(S_b)1 \in \mathcal{H}(b)$. □

Observação 1.7.5. Em [17, Chapter 25] é provado que a inclusão $\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathcal{H}(b)$ é, de fato, equivalente à não extremalidade de b.

Introduzimos agora a noção de par pitagórico, importante para o estudo de $\mathcal{H}(b)$ no caso não extremo. As definições e resultados a seguir podem ser encontrados em ver [17, Section 23.1, Section 23.9]. A fonte original é [45].

Definição 1.7.6. *Sejam $a, b \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ tais que:*

(i) a, b pertencem à bola unitária fechada de H^∞;

(ii) b é ponto não extremo;

(ii) $|a|^2 + |b|^2 = 1$ q.t.p. em $\mathbb{T}$;

(iii) a é exterior e $a(0) > 0$.

Nestas condições, a é chamado parceiro pitagórico de b e (a, b) é chamado par pitagórico.

Observação 1.7.7. Todo símbolo não extremo b possui um parceiro pitagórico a. Basta tomar a na forma da expressão (1.6), com $k = \sqrt{1 - |b|^2}$ em $\mathbb{T}$.

Proposição 1.7.8. *Seja $\phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Então, $\phi \in N^+$ se e somente se $\phi = b/a$ para algum par pitagórico (a, b). Neste caso, o par é unicamente determinado.*

Demonstração. Se $\phi = b/a$ como no enunciado então ϕ é quociente de duas funções H^∞ com denominador exterior, logo $\phi \in N^+$. Resta verificar a implicação contrária.

Suponha $\phi \in N^+$. Caso exista um par (a, b) como no enunciado, ele necessariamente deve satisfazer

$$|\phi|^2 = \frac{|b|^2}{|a|^2} = \frac{1 - |a|^2}{|a|^2} \quad \therefore \quad |a|^2 = \frac{1}{1 + |\phi|^2} \text{ q.t.p. em } \mathbb{T}\,.$$

Assim, defina a pela expressão (1.6), com $k = 1/\sqrt{1 + |\phi|^2}$ e $c \in \mathbb{T}$ tal que $a(0) > 0$, e tome $b = \phi \cdot a$. Vejamos que k é log-integrável e, portanto, a é exterior. Usando a desigualdade (1.1), temos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \log(1 + |\phi|^2) \\ &= \log\big((1 + |\phi|^2)\chi_{\{|\phi|<1\}}\big) + \log\big(1 + |\phi|^2)\chi_{\{|\phi|\geqslant 1\}}\big) \\ &\leqslant \log 2 + \log 2 + \log(|\phi|^2) \;=\; 2\log 2 + 2\log|\phi| \;\in\; L^1\,, \end{aligned}$$

resultando que $k = -\frac{1}{2}\log(1+|\phi|^2) \in L^1$. Assim, verifica-se imediatamente que a e b satisfazem as condições para formar um par pitagórico. $\square$

Observação 1.7.9 ([45, Remark 3.2])**.** Se $\phi \in N^+$ é uma função racional e (a, b) é o par pitagórico satisfazendo $\phi = b/a$, então a e b são racionais e os zeros de a em $\mathbb{T}$ são exatamente os polos de ϕ, com coincidência de multiplicidades. Para verificar isto, escreva $\phi = b/a = p/q$, onde p, q são polinômios coprimos. Então, em quase todo ponto de $\mathbb{T}$,

$$|a|^2 = \frac{1}{1+|\phi|^2} = \frac{1}{1+|p/q|^2} = \frac{|q|^2}{|p|^2+|q|^2}\,.$$

Sendo $|p|^2 + |q|^2$ um polinômio trigonométrico positivo em $\mathbb{T}$, o clássico teorema de Fejér-Riesz garante a existência de um polinômio r sem raízes em $\mathbb{D}$ tal que $|r|^2 = |p|^2 + |q|^2$ em $\mathbb{D}$. Multiplicando por uma constante unimodular, se necessário, pode-se assumir $q(0)/r(0) > 0$. Note que q/r é racional e seus zeros são exatamente os polos de ϕ, com igualdade das respectivas multiplicidades. Por um lado, a é a única função exterior tal que $|a| = |q/r|$ q.t.p. em $\mathbb{T}$ e $a(0) > 0$. Por outro lado, q/r é exterior pela Proposição 1.2.13, pois é resultados de produtos e quocientes de funções da forma $z - \xi$ para $\xi \notin \mathbb{D}$, que por sua vez são exteriores (Exemplo 1.2.12). Segue que $a = q/r$.

Proposição 1.7.10. *Sejam (a, b) um par pitagórico e $f \in H^2$. Então, $f \in \mathcal{H}(b)$ se, e somente se, $T_{\overline{b}}f \in T_{\overline{a}}H^2$. Neste caso, existe uma única $f^+ \in H^2$ satisfazendo $T_{\overline{b}}f = T_{\overline{a}}f^+$.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em quatro passos.

Passo 1. Se A é uma contração em um espaço de Hilbert H, então vale a igualdade $A^*(I - AA^*)^{1/2} = (I - A^*A)^{1/2}A^*$.

Dado que o operador $I - AA^*$ é positívo, seu espectro está contido em $[0, +\infty)$ e, portanto, a função raiz quadrada pode ser uniformemente aproximada neste espectro por uma sequência de funções polinomiais q_n. Segue que $q_n(I - AA^*) \to (I - AA^*)^{1/2}$ na norma de $\mathcal{B}(H)$. Agora,

$$A^*(I - AA^*) = A^* - A^*AA^* = (I - A^*A)A^*\,.$$

Por indução, segue que $A^*(I - AA^*)^k = (I - AA^*)^k A^*$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$A^*q_n(I - AA^*) = q_n(I - A^*A)A^*$$

e a afirmação pretendida segue fazendo $n \to \infty$.

Passo 2. Dada uma contração A em um espaço de Hilbert H, um elemento $x \in H$ pertence à imagem de $(I - AA^*)^{1/2}$ se e somente se $A^*x \in (I - A^*A)^{1/2}H$.

Se $x \in (I - AA^*)^{1/2}H$ então, pelo Passo 1,

$$A^*x \in A^*(I - AA^*)^{1/2}H = (I - A^*A)^{1/2}A^*H \subset (I - A^*A)^{1/2}H\,.$$

Para mostrar a implicação contrária, suponha que $A^*x \in (I - A^*A)^{1/2}H$. Desta forma, $A^*x = (I - A^*A)^{1/2}y$ para algum $y \in H$, logo

$$\begin{aligned} x &= AA^*x + (I - AA^*)x \\ &= A(I - A^*A)^{1/2}y + (I - AA^*)x \\ &= (I - AA^*)^{1/2}A^*y + (I - AA^*)^{1/2}(I - AA^*)^{1/2}x \\ &= (I - AA^*)^{1/2}(A^*y + (I - AA^*)x) \ \in \ (I - AA^*)^{1/2}H\,. \end{aligned}$$

Passo 3. Se A e B são operadores limitados em um espaço de Hilbert H satisfazendo $AA^* = BB^*$ então $AH = BH$.

Vejamos que a aplicação $B^*x \in B^*H \mapsto A^*x \in A^*H$ está bem definida, ou seja, se $B^*x = B^*y$ então $A^*x = A^*y$. De fato,

$$B^*x = B^*y \implies BB^*x = BB^*y \implies \|A^*(x-y)\|^2 = \|B^*(x-y)\|^2 = 0 \implies A^*x = A^*y\,.$$

Chamemos de $D : B^*H \to A^*H$ a aplicação assim definida. O argumento acima mostra que D é isométrica (considerando nas imagens de B^* e A^* a norma herdada de H) e, portanto, se estende de forma única a uma aplicação linear contínua do fecho B^*H ao fecho de A^*H. Além disso, $DB^*x = A^*x$ para todo $x \in H$, por construção. Estendendo D a todo o H definindo $Dx = 0$ para $x \perp B^*H$, segue que $D \in \mathcal{B}(H)$ e $DB^* = A^*$, ou seja, $A = BD^*$. Isto implica imediatamente que $AH \subset BH$. Repetindo a construção com A e B trocados, segue que $BH \subset AH$ e, portanto, as imagens coincidem.

Passo 4. Vale a proposição.

Começamos observando que

$$T_{\overline{a}}T_a = T_{|a|^2} = T_{1-|b|^2} = I - T_{\overline{b}}T_b$$

e $(I - T_{\overline{b}}T_b)^{1/2}$ é autoadjunto, pois é positivo. Desta forma, podemos tomar $A = T_{\overline{a}}$ e $B = (I - T_{\overline{b}}T_b)^{1/2}$ no Passo 3 para concluir que $\mathcal{H}(\overline{b}) = T_{\overline{a}}H^2$. Agora, tomando $A = T_b$ no Passo 2, temos $f \in \mathcal{H}(b)$ se e somente se $T_{\overline{b}}f \in \mathcal{H}(\overline{b}) = T_{\overline{a}}H^2$. Segue a primeira afirmação do enunciado da proposição. A existência de f^+ está, portanto, estabelecida. A unicidade segue do fato de que $T_{\overline{a}}$ é injetivo, o que ocorre porque seu adjunto T_a tem imagem densa, visto que a é exterior. □

Observação 1.7.11. A construção feita no Passo 3 da demonstração acima é um caso particular de um resultado devido a R. Douglas (ver [16, Theorem 7.11]): se H_1, H_2, H são espaços de Hilbert e $A : H_1 \to H$ e $B : H_2 \to H$ são operadores limitados, então $AA^* \leqslant c^2BB^*$ para alguma constante $c > 0$ (ou seja, $c^2BB^* - AA^*$ é positivo) se e somente se existe $C : H_1 \to H_2$ linear limitado tal que $\|C\| \leqslant c$ e $A = BC$.

1.8 Operadores de Toeplitz ilimitados

Esta seção tem como objetivo apresentar a conexão que os espaços de de Branges-Rovnyak de símbolos não extremos mantêm com operadores de multiplicação ilimitados. Antes, precisamos introduzir fundamentos de operadores ilimitados, em particular a noção de operador adjunto. Este trecho do texto será baseado em [7, Section 2.6].

Definição 1.8.1. *Um operador linear ilimitado – ou, simplesmente, operador ilimitado – é uma transformação linear* $A : \mathrm{dom}(A) \subset X \to Y$*, onde* X, Y *são espaços vetoriais normados e* $\mathrm{dom}(A)$ *é um subespaço vetorial de* X*. Se* $\mathrm{dom}(A)$ *é denso em* X*, dizemos que* A *é densamnte definido. O operador* A *se diz fechado se seu gráfico*

$$\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) \,:\, x \in \mathrm{dom}(A)\}$$

é fechado em $X \times Y$*.*

Observação 1.8.2. De acordo com esta terminologia, um operador linear limitado é um caso particular de operador ilimitado. Sendo assim, “ilimitado” neste contexto não significa o mesmo que “não limitado”.

Definição 1.8.3. *Sejam* X, Y *espaços de Banach e* $A : \mathrm{dom}(A) \subset X \to Y$ *um operador linear ilimitado densamente definido. Dado* $\psi \in Y^*$*, dizemos que* $\psi \in \mathrm{dom}(A^*)$ *caso o funcional linear* $x \mapsto \langle Ax, \psi\rangle$ *seja limitado em* $\mathrm{dom}(A)$*. Neste caso, define-se* $A^*\psi$ *como a única extensão linear limitada deste funcional a todo o* X*. O operador ilimitado* A^* *assim definido se chama o adjunto de* A*.*

Observação 1.8.4. A densidade de $\mathrm{dom}(A)$ em X assegura a unicidade e, portanto, a boa definição de $A^*\psi$. Além disso, segue da definição que $\psi \in \mathrm{dom}(A^*)$ se, e somente se, existe $\phi \in X^*$ tal que $\langle x, \phi\rangle = \langle Ax, \psi\rangle$ para todo $x \in \mathrm{dom}(A)$, caso em que $\phi = A^*\psi$. Em outros termos, o operador adjunto é definido pela equação

$$\langle x, A^*\psi\rangle = \langle Ax, \psi\rangle \qquad \forall\, x \in \mathrm{dom}(A),\ \psi \in \mathrm{dom}(A^*)\,.$$

Por fim, se A é limitado então A^* também o é e suas normas de operador coincidem (ver [7, p. 44]). Com isto, a definição acima estende a noção usual de ajunto de um operador limitado em um espaço de Hilbert.

Segue a prometida conexão entre operadores de Toeplitz ilimitados e espaços $\mathcal{H}(b)$. A referência é o trabalho de Sarason [45] (ver também [17, Section 23.9]).

Definição 1.8.5. *Dada* $\phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$*, o operador de Toeplitz com símbolo* ϕ *é definido no domínio*

$$\mathrm{dom}(T_\phi) = \{f \in H^2 : \phi f \in H^2\}$$

pela expressão $T_\phi f = \phi f$*.*

Proposição 1.8.6. *Seja $\phi \in N^+$ e considere o par pitagórico (a,b) tal que $\phi = b/a$.*

(a) O domínio de T_ϕ é aH^2.

(b) O domínio de T_ϕ^* é $\mathcal{H}(b)$.

Demonstração. Demonstremos as duas afirmações acima.

(a) Se $f \in H^2$ então $\phi a f = bf \in H^2$, logo $af \in \mathrm{dom}(T_\phi)$. Assim, $aH^2 \subset \mathrm{dom}(T_\phi)$. Para mostrar a inclusão contrária, suponha que $f \in \mathrm{dom}(T_\phi)$, ou seja, $\phi f \in H^2$. Então, q.t.p. em $\mathbb{T}$,

$$\left|\frac{f}{a}\right|^2 = \frac{|f|^2(|b|^2 + |a|^2)}{|a|^2} = |\phi f|^2 + |f|^2 \in L^1 \quad \therefore \quad f/a \in L^2 .$$

Como $f/a \in N^+$, segue da Proposição 1.3.2-(f) que $f/a \in H^2$, ou seja, $f \in aH^2$. Assim, $\mathrm{dom}(T_\phi) = aH^2$.

(b) Dada $f \in H^2$, temos a seguinte cadeia de equivalências:

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{dom}(T_\phi^*) &\iff \exists g \in H^2 \ : \ \langle h, g\rangle = \langle T_\phi h, f\rangle \ \forall\, h \in \mathrm{dom}(T_\phi) = aH^2 \\ &\iff \exists g \in H^2 \ : \ \langle a\psi, g\rangle = \langle \phi a \psi, f\rangle \ \forall\, \psi \in H^2 \\ &\iff \exists g \in H^2 \ : \ \langle \psi, T_a^* g\rangle = \langle T_b \psi, f\rangle \ \forall\, \psi \in H^2 \\ &\iff \exists g \in H^2 \ : \ \langle \psi, T_{\bar a} g\rangle = \langle \psi, T_{\bar b} f\rangle \ \forall\, \psi \in H^2 \\ &\iff \exists g \in H^2 \ : \ T_{\bar b} f = T_{\bar a} g . \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.7.10, a última condição acima quer dizer precisamente que $f \in \mathcal{H}(b)$ e $g = f^+$. Desta forma, $\mathrm{dom}(T_\phi^*) = \mathcal{H}(b)$. $\square$

Observação 1.8.7. Nota-se que a função g da demonstração acima também coincide com $T_\phi^* f$. Portanto, $T_\phi^* f = f^+$.

Encerramos a seção com um exemplo concreto de espaço de de Branges-Rovnyak, que será relevante neste trabalho. Dado $\alpha > 0$, denote

$$\phi_\alpha(z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.9}$$

e seja (a_α, b_α) o par pitagórico associado. Aqui, nosso interesse é no caso $0 < \alpha \leqslant 1$. O resultado a seguir foi retirado de [27, Theorem 3.2].[3]

[3] O resultado de Łanucha e Nowak de fato caracteriza $\mathcal{H}(b_\alpha)$ para todo $\alpha > 0$, mas este trabalho faz uso apenas dos casos $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ e $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Proposição 1.8.8. *Temos*

$$\mathcal{H}(b_\alpha) = \mathrm{dom}(T^*_{\phi_\alpha}) = \begin{cases} (1-z)^\alpha H^2 & \text{se } 0 < \alpha < 1/2\,, \\ \overline{(1-z)^{1/2} H^2}^{\mathcal{H}(b_{1/2})} & \text{se } \alpha = 1/2\,, \\ (1-z)^\alpha H^2 + \mathbb{C} & \text{se } 1/2 < \alpha < 3/2\,. \end{cases}$$

Em particular, tomando $\alpha = 1$ temos $\mathrm{dom}(T^*_{1/(1-z)}) = (1-z)H^2 + \mathbb{C} = \mathcal{D}_1$, que é o espaço de Dirichlet local em 1, que veremos na próxima seção.

1.9 Espaços de Dirichlet locais

Apresentamos agora outra classe de espaços de Hilbert de funções holomorfas: os espaços de Dirichlet locais, que são tratados em detalhes em [14, Chapter 7]. Como veremos adiante, eles coincidem com espaços de de Branges-Rovnyak.

Definição 1.9.1. *Seja ν uma medida de Borel positiva em $\mathbb{T}$. Define-se a integral de Dirichlet com respeito a ν como*

$$\mathcal{D}_\nu(f) = \int_{\mathbb{T}} |f'(z)|^2 P[\nu](z)\,\mathrm{d}A(z), \qquad f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\,.$$

O espaço de Dirichlet com respeito a ν é

$$\mathcal{D}_\nu = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \mathcal{D}_\nu(f) < \infty\}\,.$$

No caso em que $\nu = \delta_\xi$ é a medida de probabilidade concentrada no ponto $\xi \in \mathbb{T}$, denotam-se $\mathcal{D}_\xi(f) = \mathcal{D}_{\delta_\xi}(f)$ e $\mathcal{D}_\xi = \mathcal{D}_{\delta_\xi}$, e $\mathcal{D}_\xi$ é chamado espaço de Dirichlet local em ξ.

Observação 1.9.2. A expressão $\|\mathcal{D}_\mu\|^2 = \|f\|_2^2 + \mathcal{D}_\mu(f)$ define uma norma em $\mathcal{D}_\mu$ que o torna um espaço de Hilbert. No entanto, não será feito uso disto no trabalho.

Observação 1.9.3. Espaços de Dirichlet locais são maximais (em relação à inclusão) entre os $\mathcal{D}_\nu$ com respeito a medidas que contenham átomos, ou seja, pontos ξ tais que $\nu(\{\xi\}) > 0$. De fato, se $c = \nu(\{\xi\}) > 0$ então $\rho = \nu - c\delta_\xi$ é uma medida positiva, logo $\delta_\xi = c^{-1}(\nu - \rho) \leqslant c^{-1}\nu$, de forma que

$$f \in \mathcal{D}_\nu \implies \mathcal{D}_\xi(f) \leqslant c^{-1}\mathcal{D}_\nu(f) < \infty \implies f \in \mathcal{D}_\xi \quad \therefore \quad \mathcal{D}_\nu \subset \mathcal{D}_\xi\,.$$

Os elementos dos espaços de Dirichlet locais possuem uma caracterização concreta. Seu enunciado, dado a seguir, pode ser encontrado em [14, Theorem 7.2.1].

Teorema 1.9.4. *Sejam $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ e $\xi \in \mathbb{T}$. Então, $f \in \mathcal{D}_\xi$ se e somente se existem $c \in \mathbb{C}$ e $g \in H^2$ tais que*

$$f(z) = (\xi - z)g(z) + c\,, \qquad z \in \mathbb{D}\,.$$

Demonstração. Começamos observando que não há perda de generalidade em considerar $\xi = 1$, em vista da mudança de variável $z \mapsto \xi z$. Agora, por definição,

$$f \in \mathcal{D}_1 \iff \int_{\mathbb{T}} |f'(z)| \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \, \mathrm{d}A(z) < \infty \iff \frac{f'}{1-z} \in \mathcal{A},$$

onde $\mathcal{A}$ é o espaço de Bergman ponderado da Seção 1.5. Em vista do Teorema 1.5.5, isto ocorre se e somente se $f'/(1-z) = Tg$ para alguma $g \in H^2$. Notando que

$$\frac{f'(z)}{(1-z)} = Tg(z) = \frac{[(1-z)g(z)]'}{1-z} \iff f'(z) = [(1-z)g(z)]' \iff f(z) = (1-z)g(z)+c,$$

segue o resultado. □

Espaços de Dirichlet com respeito a medidas finitamente suportadas coincidem com espaços de de Branges-Rovnyak com símbolos racionais. O enunciado a seguir foi retirado de [10, Theorem 4.1, Lemma 4.2, Lemma 4.3].

Proposição 1.9.5. *Sejam (a, b) um par pitagórico e μ uma medida de Borel positiva em $\mathbb{T}$. Suponha que a e b são racionais. A fim de que seja válida a igualdade $\mathcal{D}_\mu = \mathcal{H}(b)$, é necessário e suficiente que os zeros $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ de a em $\mathbb{T}$ sejam todos simples e o suporte de μ seja exatamente o conjunto destes zeros. Neste caso, ambos os espaços coincidem com*

$$\left\{ p + \textstyle\prod_{j=1}^n (z-\lambda_j) g : g \in H^2,\ p \in \operatorname{span}\{z^j\}_{j=0}^{n-1} \right\}.$$

Como consequência imediata do resultado acima, juntamente com a Proposição 1.8.6 e a Proposição 1.7.9, temos o seguinte.

Corolário 1.9.6. *Suponha que $\phi \in N^+$ é uma função racional cujos polos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ em $\mathbb{T}$ são todos simples e μ é uma medida suportada em $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Então, $\operatorname{dom}(T_\phi^*)$ coincide com $\mathcal{D}_\mu = \prod_{j=1}^n (z-\lambda_j) H^2 + \operatorname{span}\{1, z, \ldots, z^{n-1}\}$. Em particular, se $\xi \in \mathbb{T}$ e $\phi(z) = 1/(\xi - z)$, então $\operatorname{dom}(T_\phi^*) = \mathcal{D}_\xi$.*

Observação 1.9.7. Em [44, Proposition 2], Sarason mostrou a igualdade $\mathcal{D}_\xi = \mathcal{H}(b)$, onde (a, b) é o par pitagórico associado ao símbolo $\phi(z) = 1/(\xi - z)$. As normas destes espaços também coincidem. A Proposição 1.9.5 é, na verdade, uma extensão deste resultado.

1.10 Estimativas da teoria dos números

Este trabalho faz uso de algumas estimativas envolvendo funções aritméticas. Começamos com a definição da função de Möbius e o enunciado de sua propriedade mais fundamental [1, Theorem 2.1].

Definição 1.10.1. *A função arimética de Möbius* $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ *é definida por*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \textit{se } n = 1\,, \\ (-1)^k & \textit{se } n \textit{ é o produto de } k \textit{ primos distintos,} \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema 1.10.2. *Para* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1n} = \begin{cases} 1 & \textit{se } n = 1\,, \\ 0 & \textit{se } n > 1 \end{cases}$$

onde δ_{nk} *é o delta de Kronecker e o somatório se estende sobre os divisores de* n.

Cada uma das identidades do enunciado a seguir não só é válida como equivale ao teorema dos números primos. Uma destas equivalências é demonstrada em [32, p. 248] e a outra, em [32, Exercise 6.2.16, Exercise 8.1.4].

Teorema 1.10.3. *Valem as identidades*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0 \quad \textit{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(k)\log k}{k} = -1\,.$$

A última estimativa necessária diz respeito ao número de divisores de um número natural. Ela é demonstrada em [1, p. 296] como consequência do teorema dos números primos, mas o exercício 13.13 da mesma referência verifica sua validade de forma elementar.

Teorema 1.10.4. *Seja* $d(n)$ *a quantidade de divisores positivos de um número natural* n. *Para todo* $\varepsilon > 0$, $d(n) = O(n^\varepsilon)$.

Observação 1.10.5. A afirmação deste teorema é equivalente a $d(n) = o(x^\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, visto que $n^{\varepsilon'} = o(n^\varepsilon)$ quando $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Uma estimativa mais refinada pode ser encontrada em [20, Chapter 18]: dado $\varepsilon > 0$, $d(n) < 2^{(1+\varepsilon)\log n/\log\log n}$ para todo n suficientemente grande, mas $d(n) > 2^{(1-\varepsilon)\log n/\log\log n}$ para uma quantidade infinita de naturais n. No entanto, este trabalho fará uso apenas do Teorema 1.10.4.

1.11 A versão H^2 do teorema de Báez-Duarte

Esta seção é dedicada ao resultado central para esta tese, a versão de Noor do critério de Báez-Duarte para a hipótese de Riemann em H^2, obtida e explorada no artigo [35]. O enunciado, já dado na Introdução, será repetido, por questões de referência. Algumas notações que serão adotadas até o final do texto: $\mathcal{N} = \operatorname{span}\{h_k : k \geqslant 2\}$, onde

$$h_k(z) = \frac{1}{1-z} \log\left(\frac{1 + z + \cdots + z^{k-1}}{k}\right), \qquad z \in \mathbb{D},\ k \geqslant 2\,,$$

$$g_k(z) = (I - S)h_k(z) = \log\left(\frac{1 + z + \cdots + z^{k-1}}{k}\right), \qquad z \in \mathbb{D},\ k \geqslant 2\,,$$
$$W_n f(z) = (1 + z + \cdots + z^{n-1})\, f(z^n), \qquad z \in \mathbb{D},\ f \in H^2,\ n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Como já mencionado, $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é um semigrupo em $\mathcal{B}(H^2)$ e $W_n\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$. A invariância de $\mathcal{N}$ é consequência da igualdade

$$W_n h_k = h_{nk} - h_n, \qquad n, k \geqslant 2\,, \tag{1.10}$$

verificada por cálculo direto.

Teorema 1.11.1 ([35, Theorem 8])**.** *A hipótese de Riemann é verdadeira se e somente se $\mathcal{N}$ é denso em H^2, o que acontece se e somente se o fecho de $\mathcal{N}$ contém algum vetor $\mathcal{W}$-cíclico.*

Observação 1.11.2. A função constante 1 é cíclica com respeito ao semigrupo $\mathcal{W}$ em todo H^p, $p > 0$. Isto segue de dois fatos. O primeiro é que a órbita de 1 por $\mathcal{W}$, a saber $\{1 + z + \cdots + z^{n-1} : n \in \mathbb{N}^*\}$, gera o subespaço dos polinômios, que é denso. O segundo é a continuidade de cada W_n. De fato, o operador de composição $f \mapsto f \circ \varphi_n$, onde $\varphi_n(z) = z^n$, é contínuo pelo princípio da subordinação de Littlewood (Teorema 1.1.7-(i)) e a multiplicação por $1 + z + \cdots + z^{n-1}$ também é contínua, pois o símbolo é limitado. Assim, W_n é a composição de dois operadores contínuos. Portanto, $\mathcal{N}$ é denso em qualquer H^p se e somente se seu fecho contém 1.

Introduziremos aqui alguns espaços de Hilbert intermediários e seus isomorfismos isométricos que permitem obter o teorema de Noor a partir do resultado de Báez-Duarte. Uma exposição detalhada, incluindo todas as demonstrações dos resultados abaixo, pode ser vista nas seções 2.2 e 3.1 da dissertação [29]. As notações introduzidas no resto desta seção serão mantidas até o fim do texto.

Teorema 1.11.3 ([3, Theorem 2])**.** *Considere as funções dadas por*

$$E(s) = \frac{1}{s}, \quad G_k(s) = (k^{-s} - k^{-1})\frac{\zeta(s)}{s}, \qquad k \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\,.$$

As funções acima pertencem a $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$. Além disso, a hipótese de Riemann vale se e somente se $E \in \overline{\operatorname{span}}_{H^2(\mathbb{C}_{1/2})}\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Teorema 1.11.4 ([2, Theorem 1], [3, Theorem 7])**.** *Seja $\mathcal{V}$ o subespaço fechado de $L^2(0,1)$ formado pela funções que são q.t.p. constantes em cada subintervalo $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Considere*

$$v_k(x) = \left\{\frac{1}{kx}\right\} - \frac{1}{k}\left\{\frac{1}{x}\right\}, \qquad k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2,\ x \in (0,1)\,.$$

São equivalentes as seguintes afirmações:

(i) vale a hipótese de Riemann;

(ii) a constante 1 *está no fecho de* $\operatorname{span}\{v_k\}_{k=2}^{\infty}$ *em* $L^2(0,1)$*;*

(iii) $\overline{\operatorname{span}}_{L^2(0,1)}\{v_k : k \geqslant 2\} = \mathcal{V}$.

Observação 1.11.5. Notamos inicialmente que precisamos de $k \geqslant 2$ no enunciado acima, pois v_1 é a função nula. Para uma rápida verificação de que $v_k \in \mathcal{V}$, lembramos da definição $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ para todo t real. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} &\implies n \leqslant \frac{1}{x} < n+1\,, \quad \frac{n}{k} < \frac{1}{kx} < \frac{n+1}{k} \\
&\implies \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n\,, \quad \left\lfloor \frac{1}{kx} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \\
&\implies v_k(x) = \frac{1}{k}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{kx} \right\rfloor = \frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \left\{ \frac{n}{k} \right\}\,,
\end{aligned}$$

garantindo que v_k é constante em $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$.

Observação 1.11.6. A equivalência entre os itens *(i)* e *(ii)* do teorema acima consiste em mostrar que $\mathcal{M}1 = E$ e $\mathcal{M}v_k = -G_k$, onde $\mathcal{M}$ é a transformada de Mellin, e usar a propriedade de isomorfismo isométro do Teorema 1.6.7. Para mostrar a equivalência com a condição *(iii)*, constroi-se um semigrupo que deixa $\overline{\operatorname{span}}\{v_k\}$ invariante e tem 1 como vetor cíclico.

Observação 1.11.7. Para cada $f \in \mathcal{V}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, defina $Uf(n)$ como sendo o valor que f assume q.t.p em $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Então,

$$\|f\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|Uf(n)|^2}{n(n+1)}\,.$$

Portanto, isto define um isomorfismo isométrico U entre $\mathcal{V}$ e o espaço que será chamado $\mathcal{H}$, cuja estrutura de Hilbert é dada pelo produto interno

$$\langle \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \overline{b_n}}{n(n+1)}\,.$$

Notamos que $\gamma_k := Uv_k$ $(k \geqslant 2)$ é a sequência periódica

$$\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \cdots \frac{k-1}{k}, 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \cdots \frac{k-1}{k}, 0, \cdots \right)$$

e $\gamma := U(1) = (1, 1, 1, \ldots)$.

Teorema 1.11.8 ([3, Theorem 1])**.** *Sejam* γ *e* γ_k *como acima. Então, são equivalentes:*

(i) vale a hipótese de Riemann;

(ii) $\gamma \in \overline{\operatorname{span}}_{\mathcal{H}}\{\gamma_k\}_{k=2}^{\infty}$*;*

(iii) $\operatorname{span}\{\gamma_k : k \geqslant 2\}$ *é denso em* $\mathcal{H}$.

É a partir deste enunciado que o Teorema 1.11.1 é obtido em [35, Section 2]. A estratégia é usar mais isomorfismos isométricos e identificar os vetores correspondentes.

Proposição 1.11.9. *A associação*

$$\Psi(a_1, a_2, a_3, \ldots)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n, \qquad z \in \mathbb{D}\,,$$

define um isomorfismo isométrico $\Psi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é o espaço introduzido na Definição 1.5.1.[4] *Além disso, $\Psi\gamma = R$ e $\Psi\gamma_k = R_k$, onde*

$$R(z) = \frac{1}{1-z}, \quad R_k(z) = \frac{1}{1-z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\log(1 + z + \cdots + z^{n-1})\right], \qquad z \in \mathbb{D},\ k \geqslant 2\,.$$

Proposição 1.11.10 ([35, pp. 247-248])**.** *Seja $T : H^2 \to \mathcal{A}$ o isomorfismo do Teorema 1.5.5. Então, $Th_k = R_k$ e $T1 = -R$.*

Os espaços e aplicações lineares envolvidos nesta discussão são apresentados esquematicamente na Figura 2. Enunciamos a seguir alguns resultados de [35], que serão fortalecidos nas seções 3.2 e 3.3 deste trabalho.

Proposição 1.11.11 ([35, Lemma 11])**.** *Vale a igualdade*

$$\sum_{k \geqslant 2} \frac{\mu(k)}{k} g_k = 1 - z\,,$$

com convergência na norma de H^2.

Teorema 1.11.12 ([35, Theorem 9])**.** *O subespaço gerado por $\{g_k : k \geqslant 2\}$ é denso em H^2.*

Teorema 1.11.13 ([35, Theorem 10])**.** *Com respeito à topologia da convergência uniforme em compactos, $\mathcal{N}$ é denso em H^2.*

Teorema 1.11.14. *Vale que $\mathcal{N}^{\perp} \cap \mathcal{D}_1 = \{0\}$. Em particular, nenhuma função holomorfa em vizinhanças de $\overline{\mathbb{D}}$ é ortogonal a todas as h_k, a não ser que seja identicamente nula.*

Os dois últimos resultados acima são versões fracas da hipótese de Riemann e dão respostas parciais a questões levantadas na Introdução. O Teorema 1.11.13 responde ao problema da densidade, enquanto o Teorema 1.11.14 visa o problema da ortogonalidade. Como já dito, no Capítulo 3 estas respostas serão fortalecidas.

Esta seção termina com um resultado contido mas não enunciado no trabalho de Noor. Trata-se de uma observação imediata, mas interessante, relacionando RH com invariância pelo *shift*.

[4] Esta afirmação é uma consequência imediata da Proposição 1.5.4.

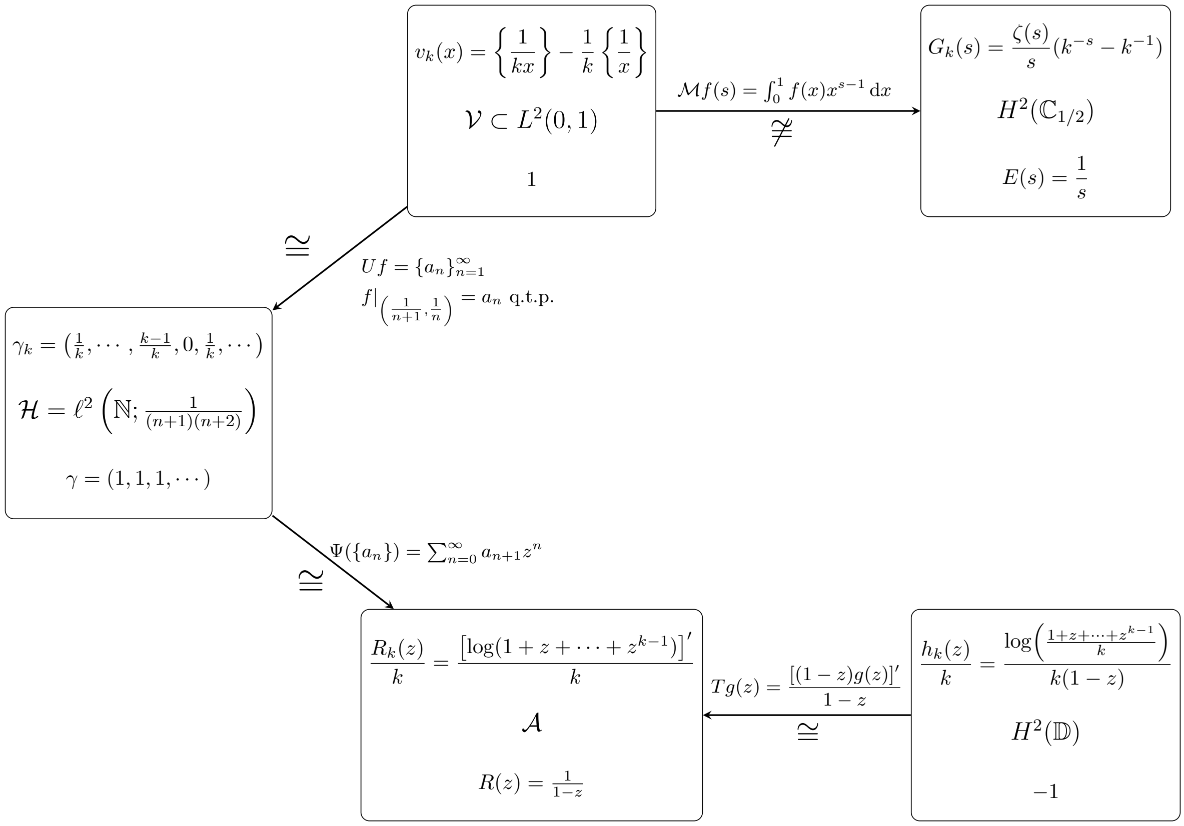

Figura 2 – Espaços envolvidos na versão H^2 do critério de Báez-Duarte

Corolário 1.11.15. *A hipótese de Riemann é verdadeira se e somente se o H^2-fecho de $\mathcal{N}$ é S-invariante.*

Demonstração. Se vale RH então, pelo Teorema 1.11.1, $\overline{\mathcal{N}} = H^2$, que é obviamente S-invariante. Por outro lado, se $\overline{\mathcal{N}}$ é invariante por S então ele deve conter todas as $g_k = (I - S)h_k$ e portanto ser todo o H^2, pelo Teorema 1.11.12. □

Observação 1.11.16. A afirmação demonstrada por este corolário pode ser fraseada na seguinte forma: o menor subespaço fechado S invariante de H^2 contendo todas as h_k é todo o H^2. Isto será fortalecido na Seção 3.1.

2 Subespaços invariantes

Este capítulo é focado no semigrupo $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$, uma vez que cada um de seus elementos deixa $\mathcal{N}$ invariante, de acordo com o que foi discutido na Seção 1.11. Na Seção 2.1, é mostrado que os W_n são múltiplos escalares de operadores *shift* de multiplicidade infinita e portanto seus adjuntos são universais. A Seção 2.2 apresenta um critério equivalente à hipótese de Riemann devido a B. Xue [49]. Trata-se de uma consequência do fato de que a única álgebra de von Neumann que contém todos os W_n é $\mathcal{B}(H^2)$, para o qual é dada uma nova demonstração, feita em parceria com J. Manzur. Os pré-requisitos sobre operadores *shift* e álgebras de von Neumann serão introduzidos em cada seção, na medida do necessário.

2.1 Os operadores W_n como *shifts*

O problema do subespaço invariante (ISP), descrito na Introdução, pergunta se todo operador linear limitado em um espaço de Hilbert separável deixa invariante um subespaço fechado próprio não trivial. Múltiplos dos W_n pertencem a uma classe especial de isometrias, os operadores *shift*, e seus adjuntos são universais. Veremos a relação destes fatos com o ISP e colocaremos duas questões relacionadas, para as quais são dadas respostas parciais. Iniciamos com conceitos e resultados preliminares, retirados de [38, Chapter 1]. Aqui, H denota um espaço de Hilbert separável dado – o espaço de Hardy H^2 poderá ser chamado $H^2(\mathbb{D})$ quando houver algum perigo de confusão na notação.

Definição 2.1.1. *Um operador $U \in \mathcal{B}(H)$ é um* shift *se é uma isometria e $(U^*)^n x \to 0$ para todo $x \in H$. A multiplicidade de um* shift *U é a dimensão de* $\ker U^*$.

Teorema 2.1.2. *Uma isometria $U \in \mathcal{B}(H)$ é um* shift *se e somente se $\bigcap_{n=0}^{\infty} U^n H = \{0\}$.*

Teorema 2.1.3. *Dois operadores* shift *são unitariamente equivalentes se e somente se têm a mesma multiplicidade.*

Exemplo 2.1.4. *Considere a soma direta de espaços de Hilbert $\ell^2(H) = \oplus_{n=0}^{\infty} H$ e o operador $S_H : \ell^2(H) \to \ell^2(H)$ dado por*

$$S_H(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots)\,.$$

Então, S_H é um shift *de multiplicidade* $\dim H$. *Portanto, todo* shift *de multiplicidade n – finita ou não – é unitariamente equivalente a S_H, onde* $\dim_H = n$. *Em particular, $S_{\mathbb{C}}$ é unitariamente equivalente ao* shift *S de $H^2(\mathbb{D})$.*

Definição 2.1.5. *Um operador $U \in \mathcal{B}(H)$ é universal se para qualquer $A \in \mathcal{B}(H)$ existirem um subespaço V de H, invariante por U, e um $c \in \mathbb{C}$ tais que $U|_V$ é unitariamente equivalente a cA.*

Teorema 2.1.6. *Suponha que $A \in \mathcal{B}(H)$, $\|A\| \leqslant 1$, $A^n x \to 0$ para todo $x \in H$ e $U \in \mathcal{B}(H)$ é um* shift *de multiplicidade maior ou igual a* $\dim \overline{(I - A^*A)H}^H$. *Então, existe um subespaço V, invariante por U^*, tal que $U^*|_V$ é unitariamente equivalente a A. Em particular, (considerando múltiplos escalares de A, se necessário), o adjunto de qualquer* shift *de multiplicidade infinita é universal.*

O resultado enunciado abaixo é retirado de [38, Section 1.12], onde é chamado Teorema de Beurling-Lax. Trata-se de uma descrição abstrata dos subespaços invariantes de um operador *shift* que generaliza o Teorema de Beurling (Teorema 1.2.6, $p = 2$).

Definição 2.1.7. *Um operador $A \in \mathcal{B}(H)$ se diz parcialmente isométrico se sua restrição a $(\ker A)^\perp$ é uma isometria.*

Teorema 2.1.8. *Dado um* shift *$U \in \mathcal{B}(H)$, um subespaço V de H é U-invariante se e somente se $V = AH$ para algum $A \in \mathcal{B}(H)$ parcialmente isométrico que comuta com U.*

Observação 2.1.9. Vejamos o que o Teorema 2.1.8 diz no caso particular em que $H = H^2(\mathbb{D})$ e $U = S$. Ou seja, devemos encontrar os $A \in \mathcal{B}(H^2)$ que comutam com S e são parcialmente isométricos. Pelo Teorema 1.4.5, os operadores que comutam com S são precisamente os T_ϕ, onde $\phi \in H^\infty$. Destes, os que são parcialemte isométricos devem necessariamente isométricos, pois $\ker T_\phi = \{0\}$. Se ϕ é uma função interior, então T_ϕ é isométrico, como se pode verificar diretamente. Vejamos que vale a afirmação recíproca. Se T_ϕ é isométrico então, por um lado, $|\phi| \leqslant 1$ q.t.p. em $\mathbb{T}$ (Teorema 1.4.6) e, por outro,

$$\int_{\mathbb{T}} (1 - |\phi|^2)\, \mathrm{d}m = 1 - \|\phi\|_2^2 = 1 - \|1\|_2^2 = 0\,,$$

implicando que $|\phi| = 1$ q.t.p no círculo, ou seja, ϕ é interior. Assim, a conclusão do Teorema de Beurling-Lax neste caso concorda com o Teorema 1.2.6.

O restante da seção apresenta contribuição nossa. Vejamos que para cada $n \geqslant 2$ o operador W_n é múltiplo de um *shift* de multiplicidade infinita. Para tanto, é útil verificar a ação de W_n em cada $f \in H^2$ em termos dos coeficientes da expansão $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{f}(k) z^k$:

$$W_n f(z) = (1 + z + \cdots + z^{n-1}) f(z^n) = \textstyle\sum_{k=0}^\infty \hat{f}(k)(1 + z + \cdots + z^{n-1}) z^{nk}\,.$$

Segue que

$$W_n f(z) = \sum_{k=0}^\infty \hat{f}(k) \left(z^{nk} + z^{nk+1} + \cdots + z^{n(k+1)-1}\right), \tag{2.1}$$

ou seja, a sequência de coeficientes da expansão de Taylor-Fourier de $W_n f$ é da forma

$$\big(\underbrace{\hat{f}(0),\ldots,\hat{f}(0)}_{n\text{ componentes}},\underbrace{\hat{f}(1),\ldots,\hat{f}(1)}_{n\text{ componentes}},\ldots,\underbrace{\hat{f}(k),\ldots,\hat{f}(k)}_{n\text{ componentes}},\ldots\big)\,.$$

O próximo passo é identificar o adjunto de W_n. Dadas $f, g \in H^2$, pela expressão de $W_n f$ obtida acima,

$$(f, W_n^* g) = (W_n f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)\left(\overline{\hat{g}(nk)} + \overline{\hat{g}(nk+1)} + \cdots + \overline{\hat{g}(n(k+1)-1)}\right)$$

e portanto, dado que $W_n^* g$ é unicamente determinado pelos seus produtos internos com elementos arbitrários de H^2,

$$W_n^* g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\big(\hat{g}(nk) + \hat{g}(nk+1) + \cdots + \hat{g}(n(k+1)-1)\big)z^k\,. \tag{2.2}$$

Em outros termos, a sequência dos coeficientes da expansão de $W_n^* g$ tem a forma

$$\big(\hat{g}(0) + \cdots + \hat{g}(k-1)\,,\ \hat{g}(k) + \cdots + \hat{g}(2k-1)\,,\ \ldots\,,\ \hat{g}(nk) + \cdots + \hat{g}(n(k+1)-1)\,,\ \ldots\big)\,.$$

Estes cálculos podem ser levados um pouco mais adiante: das equações (2.1) e (2.2) segue que

$$W_n^* W_n f = \sum_{k=0}^{\infty}\big(\underbrace{\hat{f}(k) + \hat{f}(k) + \cdots + \hat{f}(k)}_{n\text{ parcelas}}\big)z^k = nf(z)\,.$$

Assim, $W_n^* W_n = nI$ e portanto $n^{-1/2}W_n$ é uma isometria de H^2.

Teorema 2.1.10. *Para cada $n \geqslant 2$, $n^{-1/2}W_n$ é um shift de multiplicidade infinita.*

Demonstração. Em vista do Teorema 2.1.2, para mostrar que $n^{-1/2}W_n$ é um *shift* basta verificar que $\bigcap_{j=0}^{\infty} W_n^j H^2 = \{0\}$. Se $f \in W_n^j H^2$ para algum j, a expressão (2.1) mostra que os primeiros j coeficientes da expansão de f em série de potências devem ser iguais. Logo, uma $f \in \bigcap_{j=0}^{\infty} W_n^j H^2$ deve ter todos os coeficientes idênticos, o que é possível apenas caso $f = 0$.

Para determinar a multiplicidade, a expressão (2.2) sugere certos polinômios que estejam em $\ker W_n^*$. Considere $f_k(z) = \sum_{j=0}^{n-2} z^{nk+j} - (n-1)z^{n(k+1)-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$W_n^* f_k = \left[\sum_{j=0}^{n-2} \hat{f}_k(nk+j) - \hat{f}_k(n(k+1)-1)\right] z^k = \left[\sum_{j=0}^{n-2} 1 - (n-1)\right] z^k = 0\,.$$

Segue que $f_k \in \ker W_n^*$ para todo k e portanto $\dim\ker W_n^* = \infty$. □

Corolário 2.1.11. *Todos os W_n, com $n \geqslant 2$, são similares entre si.*

Demonstração. Os $n^{-1/2}W_n$ são todos *shifts* de multiplicidade infinita, logo devem unitariamente equivalentes, pelo Teorema 2.1.3. $\square$

Corolário 2.1.12. *Cada W_n^*, com $n \geqslant 2$, é universal.*

Demonstração. Imediato do Teorema 2.1.6. $\square$

Pela universalidade dos W_n^*, em princípio, pode-se usar o Teorema de Beurling-Lax para determinar todos os seus subespaços invariantes, o que poderia levar a uma solução do ISP. No entanto, o uso prático deste resultado é difícil, em vista da natureza abstrata de sua formulação. Encontrar diretamente estes subespaços invariantes também não é um problema tratável.

Formulamos aqui dois problemas, relacionando a obtenção dos subespaços W_n-invariantes com o *shift* S. O primeiro deles é encontrar os operadores que comutam tanto com W_n quanto com S, ou seja (Teorema 1.4.5), os operadores de Toeplitz analíticos comutando com W_n – determinar todos os operadores que comutam com W_n, conforme visto acima, é de dificuldade equivalente ao ISP. O segundo é determinar diretamente os subespaços invariantes por W_n que também são S-invariantes. Exibimos adiante as respostas às duas questões, precedidas de um lema.

Lema 2.1.13. *Dada $\phi \in H^2$, se existir $n \geqslant 2$ tal que $\phi(z^n) = \phi(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, então ϕ é constante.*

Demonstração. Em termos da série de potências, a hipótese significa que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\phi}(k) z^{nmk} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\phi}(k) z^{mk} .$$

Por comparação de coeficientes, $\hat{\phi}(k) = 0$ sempre que k não for múltiplo de n. Assim, a expansão de ϕ é $\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\phi}(nk) z^{nk}$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\phi}(k) z^{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\phi}(nk) z^{nk} .$$

Novamente comparando coeficientes, tem-se $\hat{\phi}(nk) = \hat{\phi}(k)$ para todo k, logo $\hat{\phi}(n^j k) = \hat{\phi}(k)$ para quaisquer $k, j \in \mathbb{N}$, por indução em j. Assim, para $k \geqslant 1$,

$$\|\phi\|_2^2 \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} |\hat{\phi}(n^j k)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\hat{\phi}(k)|^2$$

e o somatório da direita só pode ser finito se $\hat{\phi}(k) = 0$. Segue que $\phi = \hat{\phi}(0)$. $\square$

Teorema 2.1.14. *Dados $n \geqslant 2$ e $\phi \in H^\infty$, T_ϕ comuta com W_n se e, somente se, ϕ é constante.*

Demonstração. A parte "se" é óbvia. Para a implicação "somente se", suponha que $W_n T_\phi f = T_\phi W_n f$ para toda $f \in H^2$. Em particular, tomando $f = 1$, temos $W_n \phi = \phi \cdot W_n 1$, ou seja,

$$(1 + z + \cdots + z^{n-1})\,\phi(z^n) = \phi(z)(1 + z + \cdots + z^{n-1}), \qquad z \in \mathbb{D}\,,$$

implicando que

$$\phi(z^n) = \phi(z)\,.$$

Pelo Lema 2.1.13, ϕ é constante. □

Teorema 2.1.15. *Dado $n \geqslant 2$, V é um subespaço invariante comum a W_n e S se, e somente se, $V = S^m H^2$ para algum $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. É imediato verificar que $S^m H^2$ é invariante tanto por W_n quanto por S. Portanto, basta mostrar que todo subespaço invariante V comum a W_n e S deve ter esta forma. Pelo Teorema de Beurling (Teorema 1.2.6), $V = \Theta H^2$ para alguma função interior Θ. Uma vez que Θ pode ser escrita unicamente como um produto de Blaschke multiplicado por uma função singular (Teorema 1.2.4), o enunciado equivale a mostrar que o único possível zero de Θ é $z_0 = 0$ e que a parte singular é constante.

Se $W_n(\Theta H^2) \subset \Theta H^2$ então para cada $f \in H^2$ existe $g \in H^2$ tal que

$$(1 + z + \cdots + z^{n-1})\Theta f(z^n) = \Theta g(z)\,.$$

Em particular, tomando f como sendo a constante 1, temos

$$(1 + z + \cdots + z^{n-1})\Theta(z^n) = \Theta(z) g(z)$$

para alguma $g \in H^2$. Pela unicidade da fatoração canônica, Θ não pode dividir a função exterior $1 + z + \cdots + z^{n-1}$. Logo $\Theta(z)$ divide $\Theta(z^n)$.

Agora, suponha que $\Theta(z_0) = 0$ para algum $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. Então, $\Theta(z_0^{jn}) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$, por indução. Mas $z_0^{jn} \xrightarrow{j\to\infty} 0$, logo $1 - |z_0^{jn}| \geqslant 1/2$ para todo j suficientemente grande, implicando que $\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |z_0^{jn}|) = \infty$, o que viola a condição de Blaschke (1.5). Portanto, temos uma contradição e Θ não pode se anular fora da origem. Assim, $\Theta(z) = z^m u(z)$ para certos $m \in \mathbb{N}$ e u interior singular.

A demonstração terminará ao se mostrar que u é constante. Sabemos que

$$(1 + z + \cdots + z^{n-1}) z^{nm} u(z^n) = z^m u(z) g(z)\,.$$

Apelando novamente para a unicidade da fatoração canônica, vemos que $u(z)$ não pode dividir $1 + z + \cdots + z^{n-1}$ nem z^{nm} e, portanto, deve dividir $u(z^n)$. Ou seja, existe $v \in H^2$ tal que

$$u(z^n) = v(z)u(z)\,.$$

Considerando os limites radiais quando $|z| \to 1$, é imediato ver que v é interior. Em particular, isto implica que $|v| \leqslant 1$ em $\mathbb{D}$. Além disso, v não se anula no disco, pois u não se anula. Logo, $v(0) = 1$. Aplicando o princípio do módulo máximo, concluímos que v é a constante 1, ou seja, $u(z^n) = u(z)$. Pelo Lema 2.1.13, u é constante. □

2.2 A álgebra de von Neumann gerada pelos W_n

Começamos esta seção com conceitos e resultados preliminares sobre álgebras de von Neumann. Reproduzimos aqui o tratamento de [24, Chapter 5] sobre o assunto. Posteriormente, isto será relacionado com os operadores W_n e seus adjuntos. Por ora, H denotará um espaço de Hilbert dado.

Definição 2.2.1. *A topologia fraca dos operadores é a topologia mais fraca em $\mathcal{B}(H)$ que torna contínuos os funcionais*

$$T \mapsto \langle Tx, y\rangle, \qquad x, y \in H\,.$$

Uma álgebra de von Neumann é uma subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ autoadjunta, ou seja, que contém os adjuntos de todos os seus elementos, fechada na topologia fraca de operadores e que contém a identidade.

Definição 2.2.2. *O comutante de uma família $F \subset \mathcal{B}(H)$, denotado F', é o conjunto*

$$F' = \{T \in \mathcal{B}(H) : TU = UT\ \forall U \in F\}\,.$$

Teorema 2.2.3 (Teorema do duplo comutante de von Neumann)**.** *Se $\mathfrak{A}$ é uma subálgebra autoadjunta de $\mathcal{B}(H)$ que contém a identidade, então seu fecho na topologia fraca de operadores coincide com $(\mathfrak{A}')'$. Em particular, se $\mathfrak{A}$ é a álgebra de von Neumann gerada por uma família $F \subset \mathcal{B}(H)$ então $(F')' = \mathfrak{A}$.*

Uma vez que $\mathcal{N}$ é invariante por todos os W_n, é natural se perguntar qual a menor álgebra de von Neumann que os contém. Em [49], B. Xue encontrou a resposta: toda a $\mathcal{B}(H^2)$.[1] Como consequência, a hipótese de Riemann é equivalente à invariância de $\mathcal{N}$ pelos W_n^*. O objetivo da seção é apresentar uma demonstração original do resultado de Xue, obtida em parceria com J. Manzur. A Proposição 2.2.5, resultado auxiliar importante, é devida a Manzur (ver [30, Theorem 2.2.1]).

[1] Na verdade, Xue trabalhou no contexto unitariamente equivalente do espaço de Bergman ponderado $\mathcal{A}$, mas seus resultados podem imediatamente ser recuperados para H^2 por meio do isomorfismo T do Teorema 1.5.5.

Proposição 2.2.4. *A função $1 - z$ é $\mathcal{W}$-cíclica.*

Demonstração. Será verificado que o complemento ortogonal de $\{W_n(1-z) : n \in \mathbb{N}^*\}$ é trivial. Por definição, $W_n(1-z) = 1 + z + \cdots + z^{n-1} - z^n - z^{n+1} - \cdots - z^{2n-1}$, logo

$$\begin{aligned}(f, W_n(1-z)) = 0 &\iff (f, 1 + z + \cdots + z^{n-1} - z^n - z^{n+1} - \cdots - z^{2n-1}) = 0\\ &\iff \hat{f}(0) + \cdots + \hat{f}(n-1) - \Big[\hat{f}(n) + \cdots + \hat{f}(2n-1)\Big] = 0\,.\end{aligned}$$

Assim, se $f \perp W_n(1-z)$ para todo n então

$$\sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}(j) = \sum_{j=n}^{2n-1} \hat{f}(j), \qquad n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{2.3}$$

A estratégia para o restante da demonstração é tomar valores particulares de n em (2.3) que permitam concluir o anulamento dos coeficientes $\hat{f}(n)$. Considerando inicialmente potências sucessivas de 2,

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies \hat{f}(1) = \hat{f}(0)\\ n = 2 &\implies \hat{f}(3) + \hat{f}(2) = \hat{f}(1) + \hat{f}(0) = 2\hat{f}(0)\end{aligned}$$

e, por indução,

$$n = 2^{k-1} \implies \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \hat{f}(j) = 2^k \hat{f}(0)\,.$$

Um novo uso de indução mostra que

$$\sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} \hat{f}(j) = (2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2)\hat{f}(0) = (2^{k+1} - 2)\hat{f}(0)\,.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtém-se

$$(2^{k+1} - 2)|\hat{f}(0)| \leqslant \sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} |\hat{f}(j)| \leqslant (2^{k+1})^{1/2} \left(\sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} |\hat{f}(j)|^2\right)^{1/2} \leqslant 2^{(k+1)/2}\|f\|_2$$

e, portanto,

$$\frac{2^{k+1} - 2}{2^{(k+1)/2}}|\hat{f}(0)| \leqslant \|f\|_2 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}\,.$$

Isto levará a um absurdo quando $k \to \infty$, a menos que $\hat{f}(0) = 0$. Portanto, $\hat{f}(1)$ também se anula, pois coincide com $\hat{f}(0)$.

Suponha por indução que $\hat{f}(j) = 0$ para todo $j = 0, 1, \cdots, n-1$. O objetivo é mostrar que $\hat{f}(n) = 0$, concluindo a demonstração. Aplicando repetidamente (2.3) e argumentos de indução análogos aos usados no parágrafo anterior, tem-se

$$\sum_{j=n+1}^{2(n+1)-1} \hat{f}(j) = \sum_{j=0}^{n} \hat{f}(j) = \hat{f}(n)$$
$$\sum_{j=2(n+1)}^{4(n+1)-1} \hat{f}(j) = \sum_{j=0}^{2(n+1)-1} \hat{f}(j) = 2\hat{f}(n)$$
$$\vdots$$
$$\sum_{j=2^k(n+1)}^{2^{k+1}(n+1)-1} \hat{f}(j) = 2^k \hat{f}(n)$$
$$\therefore \quad \sum_{j=0}^{2^{k+1}(n+1)-1} \hat{f}(j) = \sum_{j=1}^{k} 2^j \hat{f}(n) = (2^{k+1}-2)\hat{f}(0)\,.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\frac{2^{k+1}-2}{2^{(k+1)/2}(n+1)^{1/2}} |\hat{f}(0)| \leqslant \sum_{j=0}^{2^{k+1}(n+1)-1} |\hat{f}(j)|^2 \leqslant \|f\|_2\,,$$

garantindo que $\hat{f}(n) = 0$ ao fazer $k \to \infty$. $\square$

Proposição 2.2.5. *O espaço vetorial* $\bigcap_{n=2}^{\infty} \ker W_n^*$ *é gerado por* $1 - z$.

Demonstração. Será usada a equação (2.2) repetidas vezes. Primeiramente, é imediato que $1 - z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \ker W_n^*$. Se f está na intersecção destes núcleos, $\widehat{W_2 f}(0) = \hat{f}(0) + \hat{f}(1) = 0$, logo $\hat{f}(1) = -\hat{f}(0)$. Além disso,

$$0 = \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(j) = \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(j) \quad \forall\, k \geqslant 3\,.$$

Fazendo $k = 3$, segue que $\hat{f}(2) = 0$ e, por indução, $\hat{f}(k) = 0$ para todo $k \geqslant 2$. Portanto,

$$f(z) = \hat{f}(0) + \hat{f}(1)\, z = \hat{f}(0)\,(1 - z)\,,$$

de forma que $f \in \operatorname{span}\{1 - z\}$. $\square$

Teorema 2.2.6. *A menor álgebra de von Neumann contendo o semigrupo* $\mathcal{W}$ *é* $\mathcal{B}(H^2)$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{A}$ esta álgebra. Pelo teorema do duplo comutante (Teorema 2.2.3), $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}')'$, logo é suficiente mostrar que $\mathfrak{A}' = \overline{\operatorname{span}}_{\mathcal{B}(H^2)}\{I\}$, pois $\{I\}' = \mathcal{B}(H^2)$. Seja $A \in \mathfrak{A}'$. Então, A comuta com todos os W_n^* e, em particular,

$$W_n^* A(1 - z) = A W_n^*(1 - z) = 0, \qquad n \geqslant 2\,,$$

ou seja, $A(1 - z) \in \bigcap_{n \geqslant 2} \ker W_n^*$. Pela Proposição 2.2.5, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$A(1 - z) = \lambda(1 - z)\,.$$

A fim de mostrar que $A = \lambda I$, é suficiente verificar que A coincide com λI nos vetores $h_n := W_n(1-z)$, $n \geqslant 1$, pois a Proposição 2.2.4 garante que eles geram todo o H^2. De fato, A comuta com todos os W_n, logo

$$Ah_n = AW_n(1-z) = W_nA(1-z) = \lambda W_n(1-z) = \lambda h_n$$

para todo $n \geqslant 1$. $\square$

Corolário 2.2.7. *A hipótese de Riemann é verdadeira se e somente se o H^2-fecho de $\mathcal{N}$ é invariante por W_n^* para todo $n \geqslant 1$.*

Demonstração. Se vale RH então $\overline{\mathcal{N}} = H^2$ é invariante por qualquer operador. Por outro lado, se cada W_n^* deixa $\overline{\mathcal{N}}$ invariante, então o mesmo deve ocorrer para qualquer operador na menor álgebra fechada na topologia fraca que contém $\{W_n : n \geqslant 1\} \cup \{W_n^* : n \geqslant 1\}$, que é todo o $\mathcal{B}(H^2)$, isto é, $\overline{\mathcal{N}}$ deve ser H^2. $\square$

Observação 2.2.8. Os resultados acima foram fortalecidos por J. Manzur em sua tese [30]. Lá é demonstrado que os polinômios

$$p_{m,\lambda}(z) = z^m + \cdots + z - \lambda, \qquad m \geqslant 1,\ |\lambda + 1| > \sqrt{m+1}\,,$$

são cíclicos com respeito a $\mathcal{W}$, estendendo a Proposição 2.2.4. A Proposição 2.2.5 foi generalizada, com demonstração análoga, da seguinte forma:

$$\bigcap_{k=n+1}^{\infty} \ker W_k^* = \operatorname{span}\{1 - z^k : 1 \leqslant k \leqslant n\}, \qquad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Por fim, foi obtido o seguinte critério para a hipótese de Riemann que implica o Corolário 2.2.7: para cada $n \geqslant 2$, RH vale se e somente se $\mathcal{N}^\perp$ é W_n-invariante.

3 Classes de funções

Este capítulo se ocupa da *function theory* envolvida no teorema de Báez-Duarte-Noor. Isto é, $\mathcal{N}$ é estudado a partir de propriedades das h_k e das $g_k = (I - S)h_k$. Na Seção 3.1, é usada a noção de rigidez de um elemento de H^1 para mostrar que as h_k são exteriores. A Seção 3.2 se ocupa do problema da densidade, mencionado na Introdução, mostrando que $\mathcal{N}$ é denso em H^p para $0 < p < 1$. A Seção 3.3 trata do problema da ortogonalidade, mostrando a validade da relação $V \cap \mathcal{N}^\perp = \{0\}$ para os subespaços $V = (1-z)^\alpha H^2 + \mathbb{C}$ ($\alpha > 1/2$) e $V = H^2 \cap ((I - S)H^q + \mathbb{C})$ ($q > 1$). Por fim, a Seção 3.4 mostra como certos funcionais lineares introduzidos por A. Ghosh permitem a obtenção de semiplanos livres de zeros da função zeta de Riemann a partir das abordagens de densidade e ortogonalidade descritas neste capítulo. Em particular, se eventualmente for demonstrada a densidade de $\mathcal{N}$ em H^p para algum $p > 1$ ou, de forma dual, que $\mathcal{N}^\perp$ não possui funções não nulas pertencendo a H^q para algum $q \in (1, \infty)$, isto dará imediatamente um semiplano inédito.

3.1 Rigidez e fatoração canônica

Dada a importância da fatoração canônica na teoria dos espaços de Hardy, é natural se perguntar como as funções h_k são fatoradas. Uma relação com a hipótese de Riemann é a seguinte: se existir um fator interior não constante Θ comum a todas as h_k então $\mathcal{N} \subset \Theta H^2$, o que implica a falsidade da hipótese de Riemann. No entanto, veremos nesta seção que isto está longe de ser o caso, pois cada h_k é exterior. Isto seguirá de uma propriedade mais forte, a saber a rigidez, que pode ser caracterizada em termos da geometria da esfera unitária do espaço de Banach H^1. As definições e resultados a seguir foram retiradas de [16, Chapter 6].

Definição 3.1.1. *Dada $f \in H^1$, dizemos que f é rígida se as únicas funções $g \in H^1$ que satisfazem $\arg f = \arg g$ q.t.p. no círculo unitário são da forma $g = \lambda f$ com $\lambda > 0$. Equivalentemente, f é rígida se para toda $g \in H^1$*

$$\frac{f}{|f|} = \frac{g}{|g|} \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{T} \implies g = \lambda f, \quad \lambda > 0\,.$$

Definição 3.1.2. *Seja Ω um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado X. Dizemos que $x \in \Omega$ é ponto extremo de Ω se para quaisquer $x_1, x_2 \in \Omega$ satisfazendo $x = (x_1 + x_2)/2$ vale necessariamente $x = x_1$ ou $x = x_2$. Chamamos x um ponto exposto de Ω se existe $\phi \in X^*$ com a seguinte propriedade: $\operatorname{Re}\phi(x) > \operatorname{Re}\phi(y)$ para todo $y \in \Omega \backslash \{x\}$; neste caso, ϕ é chamado funcional expositor de x.*

Observação 3.1.3. Um fato conhecido é o de que todo ponto exposto de Ω é necessariamente um ponto extremo. Vejamos um argumento simples para isto. Considere um ponto exposto x com funcional expositor ϕ e suponha por contradição que existem $x_1, x_2 \in \Omega\backslash\{x\}$ tais que $x = (x_1 + x_2)/2$. Então, $\operatorname{Re}\phi(x_1), \operatorname{Re}\phi(x_2) < \operatorname{Re}\phi(x)$ e

$$\operatorname{Re}\phi(x_1) = \operatorname{Re}\phi(2x - x_2) = 2\operatorname{Re}(\phi x) - \operatorname{Re}(\phi x_2) > 2\operatorname{Re}\phi x - \operatorname{Re}\phi x = \operatorname{Re}\phi x\,.$$

Isto é uma contradição, mostrando que x é extremo.

O enunciado a seguir relaciona funções rígidas e exteriores com as noções geométricas acima. As afirmações podem ser encontradas em [16, Theorems 6.8, 6.15].

Teorema 3.1.4. *Seja $f \in H^1$.*

(a) A fim de que f seja ponto extremo da bola unitária fechada de H^1, é necessário e suficiente que f seja exterior e $\|f\|_1 = 1$.

(b) A fim de que f seja ponto exposto da bola unitária fechada de H^1, é necessário e suficiente que f seja rígida e $\|f\|_1 = 1$.

Portanto, toda função rígida é exterior.

Observação 3.1.5. Se f é rígida e tem H^1-norma igual a 1, seu funcional expositor na bola unitária de H^1 é único e tem uma forma conhecida [16, Lemma 6.13]:

$$g \in H^1 \mapsto \int_{\mathbb{T}} g\frac{\overline{f}}{|f|}\,\mathrm{d}m\,.$$

Teorema 3.1.6. *Se $f \in H^1$ é não identicamente nula e existe $h \in H^\infty$ não identicamente nula tal que* $\operatorname{Re}(fh) \geqslant 0$ *q.t.p. em $\mathbb{T}$, então f é rígida.*

O resultado anterior dá um critério suficiente prático para encontrar funções rígidas e foi retirado de [16, Theorem 6.23]. Nossa contribuição nesta seção é a aplicação deste critério às h_k.

Proposição 3.1.7. *Para cada $k \geqslant 2$, h_k é rígida e, portanto, exterior.*

Demonstração. Em vista do último teorema, é suficiente verificar que $-g_k = (z-1)h_k$ tem parte real não negativa. De fato,

$$\begin{aligned} |z| < 1 &\implies \left|\frac{1 + z + \cdots + z^{k-1}}{k}\right| \leqslant 1 \\ &\implies \log\left|\frac{1 + z + \cdots + z^{k-1}}{k}\right| \leqslant 0 \\ &\implies \operatorname{Re}(-g_k(z)) = -\operatorname{Re}\left(\log\left(\frac{1 + z + \cdots + z^{k-1}}{k}\right)\right) \geqslant 0\,, \end{aligned}$$

como desejado. □

Corolário 3.1.8. *Dado $k \geqslant 2$, menor subespaço fechado S-invariante de H^2 contendo h_k é todo o H^2.*

Observação 3.1.9. O corolário acima não só é mais forte que o Corolário 1.11.15 como é demonstrado sem o uso de resultados aritméticos profundos. O citado resultado, consequência da densidade de $\operatorname{span}\{g_k : k \geqslant 2\}$ em H^2, utiliza o teorema dos números primos na forma do Teorema 1.10.3.

3.2 O problema da densidade

Voltamos à tarefa, enunciada na Introdução, de encontrar topologias em H^2 que sejam mais fracas do que as da norma e garantam a densidade de $\mathcal{N}$. A topologia encontrada aqui é a de H^p para $p < 1$ (Teorema 3.2.3). Isto dá uma versão fraca da hipótese de Riemann mais forte que o Teorema 1.11.13, uma vez que convergência em H^p implica convergência uniforme em compactos do disco.

Ocorrerá aqui pequeno abuso de notação e terminologia: se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ for tal que $\{\hat{f}(n)\} \in \ell^q$, denotaremos a norma ℓ^q desta sequência por $\|f\|_{\ell^q}$. Diremos ainda que $f_n \to f$ em ℓ^q se $\|f_n - f\|_{\ell^q} \to 0$.

Proposição 3.2.1. *Para todo $q > 1$, vale a convergência*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\mu(k)}{k} g_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - z \quad \text{em} \quad \ell^q\,.$$

Demonstração. Vejamos inicialmente que a sequência de coeficientes de cada g_k de fato está em ℓ^q. A expansão $\log(1-z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$ é válida para $|z| < 1$, pois os dois lados têm a mesma derivada e coincidem em $z = 0$. Assim,

$$g_k(z) = \log(1 - z^k) - \log(1 - z) - \log k = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{jk}}{j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} - \log k\,.$$

Como $\{1/j\}_{j=1}^{\infty}$ está em ℓ^q (mas não em ℓ^1), o mesmo vale para a sequência de coeficientes de $\log(1 - z^k)$, demonstrando a afirmação feita.

Agora, escrevemos

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\mu(k)}{k} g_k(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \log(1 - z^k) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \log(1 - z) - \sum_{k=2}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \log k$$

e notamos que, pelo Teorema 1.10.3, $\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \log(1-z) \to 0$ e $\sum_{k=2}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \log k \to -1$ em norma. Portanto, resta verificar que $\phi_n \to 0$ em ℓ^q, onde

$$\phi_n(z) = z + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \log(1 - z^k)\,.$$

Reescrevendo $\phi_n(z)$ e fazendo uma inversão de ordem da soma,

$$\phi_n(z) = z - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{jk}}{j} = z - \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{jk}}{jk} = z - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \sum_{\substack{d|j \\ 1\leqslant d\leqslant n}} \mu(d) .$$

Usando o Teorema 1.10.2, temos

$$\phi_n(z) = z - \sum_{j=1}^{n} \frac{z^j}{j} \sum_{d|j} \mu(d) - \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \sum_{\substack{d|j \\ 1\leqslant d\leqslant n}} \mu(d) = - \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \sum_{\substack{d|j \\ 1\leqslant d\leqslant n}} \mu(d) .$$

A soma acima será estimada usando o Teorema 1.10.4: notando que

$$\left| \sum_{\substack{d|j \\ 1\leqslant d\leqslant n}} \mu(d) \right| \leqslant \sum_{\substack{d|j \\ 1\leqslant d\leqslant n}} |\mu(d)| \leqslant \sum_{\substack{d|j \\ 1\leqslant d\leqslant n}} 1 \leqslant \sum_{d|j} 1 = d(j) ,$$

temos

$$\|\phi_n\|_{\ell^q}^q = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^q} \left| \sum_{\substack{d|j \\ 1\leqslant d\leqslant n}} \mu(d) \right|^q \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{d(j)^q}{j^q} = O\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{j^{\varepsilon q}}{j^q} \right)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Escolhendo ε pequeno o suficiente de forma que $\varepsilon q - q < -1$, segue que $\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{\varepsilon q - q} \to 0$ quando $n \to \infty$ e, portanto, $\|\phi_n\|_{\ell^q} \to 0$. □

Proposição 3.2.2. *Para todo* $p \in (0, \infty)$*, vale a convergência*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\mu(k)}{k} g_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - z \quad em \quad H^p .$$

Demonstração. Em vista do Teorema 1.1.7-(b), podemos nos restringir ao caso $p \geqslant 2$. Seja $q \leqslant 2$ o expoente conjugado a p. Pelo Teorema 1.1.16 e Proposição 3.2.1,

$$\left\| \sum_{k=2}^{n} \frac{\mu(k)}{k} g_k - (1 - z) \right\|_p \leqslant \left\| \sum_{k=2}^{n} \frac{\mu(k)}{k} g_k - (1 - z) \right\|_{\ell^q} \to 0$$

quando $n \to \infty$. □

Estamos em posição de enunciar e provar o principal resultado desta seção. A ideia essencial é aplicar "divisão por $1 - z$" (da forma feita no Corolário 1.1.13) à relação de convergência da última proposição.

Teorema 3.2.3. *Para* $0 < q < 1$, $\mathcal{N}$ *é denso em* H^q.

Demonstração. Pela Observação 1.11.2, o enunciado equivale a verificar que a constante 1 pertence a $\overline{\mathrm{span}}_{H^q}\{h_k \,:\, k \geqslant 2\}$. Dado $q < 1$, seja p suficientemente grande de forma que o Corolário 1.1.13 se aplique. Portanto, segue da Proposição 3.2.2 a convergência

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\mu(k)}{k} h_k \to 1$$

na norma de H^q. □

3.3 O problema da ortogonalidade

Voltamo-nos à tarefa de encontrar conjuntos $V \subset H^2$, tão grandes quanto possível, satisfazendo $\mathcal{N}^\perp \cap V = \{0\}$, que foi chamada na Introdução de problema da ortogonalidade. Esta seção dá três respostas parciais a este problema. Uma delas é $V = (1-z)^\alpha H^2 + \mathbb{C}$, $1/2 < \alpha \leqslant 1$ (Teorema 3.3.8), que coincide com um espaço do tipo de Branges-Rovnyak. Outra é $V = H^2 \cap ((I-S)H^q + \mathbb{C})$, $q \leqslant 2$ (Teorema 3.3.13), obtida por meio do estudo de operadores de multiplicação ilimitados em H^p. Ambos os resultados contêm o Teorema 1.11.14 e estendem, em direções diferentes, o método utilizado para demonstrá-lo em [35]. No entanto, a resposta que daremos primeiro vem da dualidade entre espaços de Hardy de expoentes pequenos e classes de Lipschitz (ver Definição 1.1.22).

Teorema 3.3.1. *Para cada $\alpha \in (0,1)$, $\mathcal{N}^\perp \cap \Lambda_\alpha = \{0\}$.*

Demonstração. Seja $p = 1/(\alpha+1)$, ou seja, $\alpha = 1/p - 1$ (portanto, $1/2 < p < 1$). Se $g \in \Lambda_\alpha$ então, pelo Teorema 1.1.24, $L_g f = \int_{\mathbb{T}} f \overline{g}\, dm$ define um funcional linear limitado em H^p. Se, além disso, $g \perp \mathcal{N}$ em H^2 então L_g se anula em $\mathcal{N}$. Pela densidade de $\mathcal{N}$ em H^p (Teorema 3.2.3), L_g deve ser o funcional nulo, ou seja, $g = 0$. $\square$

Observação 3.3.2. Para $\alpha < 1$, o expoente p da demonstração acima está no intervalo $(1/2, 1)$. O argumento acima mostra que $\mathcal{N}^\perp \cap (H^p)^* = \{0\}$ para todo $p \in (0,1)$ – aqui identificamos cada $(H^p)^*$ com o respectivo espaço de funções do Teorema 1.1.20. No entanto, à medida que p diminui, H^p fica maior e seu dual fica menor. Assim, o teorema anterior é interessante apenas para expoentes suficientemente próximos de 1. Outro fenômeno que ocorre para expoentes próximos de 0 é a crescente regularidade dos elementos do espaço dual. Por exemplo, se $p > 1/n$ então todo elemento de $(H^p)^*$ deve ter ao menos $n-1$ derivadas contínuas na fronteira.

Observação 3.3.3. O Teorema 3.3.1 não implica e nem é implicado pelo Teorema 1.11.14, pois $\mathcal{D}_1 \nsubseteq \bigcup_{0<\alpha<1} \Lambda_\alpha \nsubseteq \mathcal{D}_1$. As g_k são exemplos de funções em $\mathcal{D}_1$ que não estão em $A(\mathbb{D})$, logo em nenhuma classe de Lipschitz. De fato, cada g_k tem singularidades nas raízes k-ésimas da unidade diferentes de 1. Por outro lado, um exemplo de elemento de $\Lambda_\alpha \backslash \mathcal{D}_1$ é $(1-z)^\alpha$, onde $0 < \alpha < 1/2$. Esta função pertence a Λ_α pelo Exemplo 1.1.23 e não está em $\mathcal{D}_1$ pelo Teorema 1.9.4, pois se $(1-z)^\alpha = (1-z)g(z) + c$ então c é o limite radial em 1, que é 0, e $g(z) = (1-z)^{\alpha-1}$, que não pertence a H^2.

Agora, nos moveremos em direção aos demais resultados anunciados no início da seção. O primeiro passo é reduzir o problema da ortogonalidade a outra questão envolvendo densidade. Isto é feito pelo resultado abstrato a seguir, que será posteriormente especializado para operadores de Toeplitz ilimitados em H^2.

Lema 3.3.4. *Sejam E, F espaços de Banach, $T : \mathrm{dom}(T) \subset E \to F$ um operador densamente definido, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em F e $V = \overline{\mathrm{span}}_F\{y_k\}$. Suponha que:*

(i) *T^* é injetivo;*

(ii) *existe uma sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{dom}(T)$ tal que $\operatorname{span}\{x_k\}$ é denso em E e $Tx_k = y_k$ para todo k.*

Então, $V^\perp \cap \operatorname{dom}(T^*) = \{0\}$.

Demonstração. Se $g \in V^\perp \cap \operatorname{dom}(T^*)$ então

$$\langle x_k, T^*g\rangle = \langle Tx_k, g\rangle = \langle y_k, g\rangle = 0 \quad \forall\, k\,.$$

A condição (ii) implica que $T^*g = 0$, enquanto (i) garante que $g = 0$. $\square$

Proposição 3.3.5. *Sejam $\phi \in N^+$ sem zeros em $\mathbb{D}$ e (b, a) o par pitagórico associado. Suponha que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^2$ é tal que $\{f_k/\phi \,:\, k \in \mathbb{N}\}$ está contido e gera um subespaço denso em H^2. Então, $(\operatorname{span}\{f_k\})^\perp \cap \mathcal{H}(b) = \{0\}$.*

Demonstração. A imagem de T_ϕ é aH^2, que é densa em H^2, pois a é uma função exterior. Segue que T_ϕ^* é injetivo, logo $(\operatorname{span}\{f_k\})^\perp \cap \operatorname{dom}(T_\phi^*) = \{0\}$, pelo Lema 3.3.4. O resultado segue, uma vez que, pela Proposição 1.8.6, $\operatorname{dom}(T_\phi^*) = \mathcal{H}(b)$. $\square$

Corolário 3.3.6. *Nas condições da Proposição 3.3.5, se $\{h_k/\phi \,:\, k \geqslant 2\}$ está contido e gera um subespaço denso em H^2, então $\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{H}(b) = \{0\}$.*

Agora, particularizaremos a análise acima para o caso $\phi = \phi_\alpha$, onde

$$\phi_\alpha(z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha}, \qquad z \in \mathbb{D},\ \alpha > 0$$

(ver Proposição 1.8.8). O objetivo é mostrar que $(1-z)^\alpha\mathcal{N}$ é denso em H^2 para certos valores de α. A estratégia será encontrar um semigrupo de operadores que deixa este subespaço vetorial invariante e um vetor cíclico contido no fecho.

Proposição 3.3.7. *Seja $\alpha > 0$.*

(a) *Para $\alpha \leqslant 1$,*

$$W_n^{(\alpha)} f = (1/\phi_\alpha)\cdot W_n(\phi_\alpha f)\,, \quad f \in H^2,\ n \in \mathbb{N}^*\,,$$

define um semigrupo de operadores limitados em H^2.

(b) *Vale a relação*

$$W_n^{(\alpha)}\left((1-z)^\alpha h_k\right) = (1-z)^\alpha h_{nk} - (1-z)^\alpha h_n\,, \qquad n, k \geqslant 2, \quad 0 < \alpha \leqslant 1\,.$$

Em particular, $W_n^{(\alpha)}(1-z)^\alpha\mathcal{N} \subset (1-z)^\alpha\mathcal{N}$.

(c) *Se* $\alpha > 1/2$*, então*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\mu(k)}{k}(1-z)^{\alpha} h_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-z)^{\alpha} \qquad \text{em } H^2\,.$$

Em particular, $(1-z)^{\alpha} \in \overline{\operatorname{span}}_{H^2}(1-z)^{\alpha}\mathcal{N}$.

(d) *Para* $1/2 < \alpha \leqslant 1$*,* $1/\phi_\alpha$ *é uma função* $\{W_n^{(\alpha)}\}$*-cíclica.*

(e) *Se* $\alpha > 1/2$ *então* $(1-z)^{\alpha}\mathcal{N}$ *é denso em* H^2*.*

Demonstração. Segue a demonstração de cada item do enunciado.

(a) Uma vez que ϕ_α é uma função ilimitada em $\mathbb{D}$, não é imediatamente claro que $W_n^{(\alpha)}$ é um operador limitado. Mas, pela definição,

$$\begin{aligned} W_n^{(\alpha)} f(z) &= (1-z)^{\alpha} \cdot W_n\big((1-z)^{-\alpha} f\big)(z) \\ &= (1-z)^{\alpha}(1+z+\cdots+z^{n-1})(1-z^n)^{-\alpha} f(z^n) \\ &= (1+z+\cdots+z^{n-1})^{1-\alpha} f(z^n)\,. \end{aligned}$$

Como $1-\alpha \geqslant 0$, $(1+z+\cdots+z^{n-1})^{1-\alpha}$ é limitada em $\mathbb{D}$, Assim, W_n é um operador de composição ponderado e, portanto, limitado em H^2. É imediato ver que $W_1^{(\alpha)}$ é a identidade, enquanto a multiplicatividade segue da propriedade análoga para os W_n:

$$W_n^{(\alpha)} W_m^{(\alpha)} f = \frac{W_n(\phi_\alpha \cdot W_m^{(\alpha)} f)}{\phi_\alpha} = \frac{W_n\big(W_m^{(\alpha)}(\phi_\alpha f)\big)}{\phi_\alpha} = \frac{1}{\phi_\alpha} W_{nm}(\phi_\alpha f) = W_{nm}^{(\alpha)} f\,.$$

Portanto, $\{W_n^{(\alpha)} : n \in \mathbb{N}^*\}$ é um semigrupo.

(b) De (1.10) segue que

$$W_n^{(\alpha)}\left((1-z)^{\alpha} h_k\right) = \phi_\alpha \cdot W_n\left(\phi_\alpha \cdot (h_k/\phi_\alpha)\right) = \phi_\alpha(h_{nk} - h_n) = (1-z)^{\alpha} h_{nk} - (1-z)^{\alpha} h_n\,.$$

(c) Dado que $(1-z)^{\alpha} h_k(z) = (1-z)^{\alpha-1} g_k(z)$, o enunciado equivale a mostrar que (fazendo $\beta = 1-\alpha$)

$$(1-z)^{-\beta} \sum_{k=2}^{n} \frac{\mu(k)}{k} g_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-z)^{-\beta}(1-z) \qquad \text{em } H^2 \text{ sempre que } \beta < 1/2\,.$$

O resultado segue aplicando "divisão por $1-z$" na relação de convergência da Proposição 3.2.2: basta usar o Corolário 1.1.14 com p suficientemente grande.

(d) Temos

$$W_n^{(\alpha)}(1/\phi_\alpha) = (1/\phi_\alpha) \cdot W_n 1 = (1-z)^{\alpha}(1+z+\cdots+z^{n-1})$$

e então o subespaço vetorial gerado pela órbita de $(1-z)^{\alpha}$ é denso em H^2, pois $(1-z)^{\alpha}$ é uma função exterior. Assim, $(1-z)^{\alpha}$ é cíclico.

(e) No caso $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, segue imediatamente dos itens (b), (c) e (d). Se $\alpha > 1$ então, para cada $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$, $(1-z)^\alpha \mathcal{N}$ é a imagem do subespaço denso $(1-z)^\beta \mathcal{N}$ pelo operador de multiplicação por $(1-z)^{\alpha-\beta}$, que é limitado e tem imagem densa – potências reais de $1-z$ são funções exteriores. □

Teorema 3.3.8. *Para* $1/2 < \alpha \leqslant 1$, $\mathcal{N}^\perp \cap \big((1-z)^\alpha H^2 + \mathbb{C}\big) = \{0\}$.

Demonstração. Pela Proposição 3.3.7 e pelo Corolário 3.3.6, temos $\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{H}(b_\alpha) = \{0\}$. O resultado segue da caracterização de $\mathcal{H}(b_\alpha)$ da Proposição 1.8.8. □

Observação 3.3.9. É evidente que o Teorema 3.3.8 implica o Teorema 1.11.14, pois $\mathcal{D}_1 \subset (1-z)^\alpha + \mathbb{C}$. A continência é, de fato, estrita se $\alpha < 1$. Para ver isto, note que $(1-z)^{1/2} = (1-z)^\alpha (1-2)^{1/2-\alpha}$ e $1/2 - \alpha > -1/2$, logo $(1-2)^{1/2-\alpha} \in H^2$ (ver Exemplo 1.1.10). Assim, $(1-z)^{1/2} \in (1-z)^\alpha H^2$. Por outro lado, $f \in \mathcal{D}_1$ se e somente se $\frac{f(z)-f^*(1)}{1-z} \in L^2$. Neste caso, o limite radial é 0 e $(1-z)^{1/2}/(1-z) = (1-z)^{-1/2} \notin L^2$.

O mesmo argumento do Teorema 3.3.8 mostra o seguinte: se $(1-z)^\alpha \mathcal{N}$ é denso em H^2 para algum $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ então $\mathcal{N}^\perp \cap (1-z)^\alpha H^2 = \{0\}$. No entanto, como será visto na Seção 3.4, há uma boa razão para que esta densidade ainda não tenha sido provada para $\alpha < 1/2$: isto implicaria a obtenção de semiplanos livres de zeros da função zeta de Riemann que ainda não são conhecidos.

Para obter o próximo resultado de ortogonalidade, faremos uma incursão nos operadores de Toeplitz analíticos ilimitados em H^p, $p > 1$, obtendo resultados paralelos aos obtidos por Sarason [45], Richter e Sundberg [37] no caso $p = 2$. Os operadores de multiplicação, ou seja, operadores de Toeplitz limitados em H^p são tratados em detalhes em [48].

Definição 3.3.10. *Dados* $p \in (1, \infty)$ *e* $\phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$*, define-se o operador de Toeplitz (analítico) de símbolo* ϕ *em* H^p *por*

$$T_\phi^{(p)} f = \phi \cdot f, \qquad f \in \mathrm{dom}(T_\phi^{(p)})\,,$$

com domínio

$$\mathrm{dom}(T_\phi^{(p)}) = \{f \in H^p \,:\, \phi f \in H^p\}\,.$$

O sobrescrito da notação $T_\phi^{(p)}$ pode ser omitido por questões de clareza. O domínio é todo o H^p se e somente se $\phi \in H^\infty$, caso em que o operador é limitado – demonstra-se em [48, Proposition 2] que a norma é igual a $\|\phi\|_\infty$. O próximo objetivo imediato é caracterizar o domínio do adjunto no caso $\phi \in N^+$, com vistas ao problema da ortogonalidade, mas isto será feito para símbolos com uma forma particular.

Proposição 3.3.11. *Sejam* $p > 1$ *e* $\phi \in N^+$*. Suponha que a parte exterior de* ϕ *tem inversa em* H^∞*. Escrevendo* $\phi = b/a$ *com* $a, b \in H^\infty$ *e* a *exterior, vale o seguinte.*

(a) O domínio de $T_\phi^{(p)}$ *é* aH^p.

(b) Temos $g \in \operatorname{dom}(T_\phi^{(p)})^*$ *se e somente se existe* $h \in H^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) *tal que* $T_{\overline{b}}g = T_{\overline{a}}h$.

Demonstração. Reescrevendo a hipótese, se $\phi = \Theta\psi$, com Θ interior e ψ exterior, então $1/\psi$ é limitada.

(a) Se $f = ah$ com $h \in H^p$, então $\phi f = \phi a h = bh \in H^p$, pois $b \in H^\infty$. Isto mostra que $aH^p \subset \operatorname{dom}(T_\phi^{(p)})$. Para a inclusão contrária, suponha que $\phi f \in H^p$. Então, q.t.p. sobre $\mathbb{T}$,

$$\left|\frac{f}{a}\right|^p = \left|\frac{\phi f}{b}\right|^p = \left|\frac{\phi f}{\Theta\psi}\right|^p = \left|\frac{\phi f}{\psi}\right|^p \leqslant \|1/\psi\|_\infty |\phi f|^p\,,$$

logo $f/a \in L^p$. Dado que $f/a \in N^+$, segue que $f/a \in H^p$, ou seja, $f \in aH^p$.

(b) Lembrando que o adjunto de um operador de Toeplitz analítico é o operador com símbolo conjugado,

$$\begin{aligned} g \in \operatorname{dom}(T_\phi^*) &\iff \exists h \in H^q \ :\ \langle f, h\rangle = \langle T_\phi f, g\rangle \quad \forall\, f \in \operatorname{dom}(T_\phi) = aH^p \\ &\iff \exists h \in H^q \ :\ \langle af, h\rangle = \langle \phi a f, g\rangle \quad \forall\, f \in H^p \\ &\iff \exists h \in H^q \ :\ \langle f, T_{\overline{a}}h\rangle = \langle bf, g\rangle = \langle f, T_{\overline{b}}g\rangle \quad \forall\, f \in H^p\,. \end{aligned}$$

A última linha diz precisamente que $T_{\overline{a}}h = T_{\overline{b}}g$. □

Especializaremos o resultado acima para o símbolo $\phi(z) = 1/(\xi - z)$ ($\xi \in \mathbb{T}$), onde podemos tomar $b(z) = 1$ e $a(z) = \xi - z$. Antes de prosseguir, faremos uma digressão sobre a hipótese imposta sobre ϕ. É uma condição restritiva, embora satisfeita no caso particular de interesse. Ela poderia ser evitada se b e a fossem construídos de outra forma, brevemente descrita a seguir. O ponto crucial para a validade das conclusões da Proposição 3.3.11 é a verificação de que $\operatorname{dom}((T_\phi^{(p)})^*) \subset aH^p$.

Se tomarmos a como a única função exterior com valor positivo na origem e módulo igual a $\sqrt[p]{1/(1 + |\phi|^p)}$ q.t.p. no círculo unitário, fazendo $b = \phi a$, temos uma decomposição unicamente determinada $\phi = b/a$ tal que $|a|^p + |b|^p = 1$ q.t.p. em $\mathbb{T}$, a é exterior e $a(0) = 0$, generalizando imediatamente a noção de par pitagórico. Note que qualquer símbolo em N^+ pode ser decomposto neste forma e que, neste caso,

$$\phi f \in H^p \implies \left|\frac{f}{a}\right|^p = \left|\frac{\phi f}{b}\right|^p = \left|\frac{\phi f}{b}\right|^p (|a|^p + |b|^p) = |f|^p + |\phi f|^p \in L^1 \implies f/a \in H^p\,,$$

o que implica $\operatorname{dom}(T_\phi^{(p)}) \subset aH^p$. Observe também que, no caso particular $p = 2$, o domínio de T_ϕ^* é $\mathcal{H}(b)$. Embora a construção deste parágrafo valha em maior generalidade, há uma desvantagem: a dificuldade de se determinar explicitamente a e b para um símbolo concreto ϕ. Por isso, o contexto da Proposição 3.3.11 será preferido, mesmo com a restrição imposta.

Voltando ao caso $b(z) = 1$ e $a(z) = \xi - z$, o domínio de $(T^{(p)}_{1/(\xi-z)})^*$ pode ser determinado explicitamente a partir da demonstração de [37, Proposition 2.4]. Parte do resultado citado é o caso particular $p = q = 2$ do enunciado a seguir.

Proposição 3.3.12. *Se* $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $\xi \in \mathbb{T}$, *então*

$$\mathrm{dom}((T^{(p)}_{1/(\xi-z)})^*) = (\overline{\xi}I - S^*)H^q = (\xi I - S)H^q + \mathbb{C}\,.$$

Demonstração. Dado que $T_{\overline{a}}h = T^*_{\xi-z}h = (\xi I - S)^*h$, a Proposição 3.3.11 implica que $g \in \mathrm{dom}(T^*_\phi)$ se e somente se $g \in (\overline{\xi}I - S^*)H^q$. Portanto, o que devemos mostrar é a igualdade $(\overline{\xi}I - S^*)H^q = (\xi I - S)H^q + \mathbb{C}$.

Por um lado, seja $G = (\overline{\xi}I - S^*)g$, $g \in H^q$. Usando o fato de que $SS^*g = g - g(0)$, podemos escrever

$$G = \overline{\xi}g - S^*g = \overline{\xi}(SS^*g + g(0)) - \xi\overline{\xi}S^*g = (\xi I - S)(-\overline{\xi}S^*g) + \overline{\xi}g(0)\,,$$

mostrando que $(\overline{\xi}I - S^*)H^q \subset (\xi I - S)H^q + \mathbb{C}$. Para mostrar a inclusão contrária, tome $H = (\xi I - S)h + c$, com $h \in H^q$ e $c \in \mathbb{C}$, e defina $g = \xi(c + Sh)$. Uma vez que $S^*S = I$ e $S^*c = 0$, temos

$$(\overline{\xi}I - S^*)g = (\overline{\xi}I - S^*)(\xi c + \xi Sh) = c - Sh - \xi S^*c + \xi S^*Sh = c + (\xi I - S)h = H$$

e, portanto, $H \in (\overline{\xi}I - S^*)H^q$. □

Teorema 3.3.13. *Para* $1 < q \leqslant 2$, $(H^2 \ominus \mathcal{N}) \cap ((I - S)H^q + \mathbb{C}) = \{0\}$.

Demonstração. Uma vez que $\{g_k\}_{k=2}^\infty = \{h_k/\frac{1}{(1-z)}\}_{k=2}^\infty$ gera um subespaço denso em H^p, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, segue do Lema 3.3.4 que $\mathcal{N}^{\perp(q)} \cap \mathrm{dom}((T^{(p)}_{1/(1-z)})^*) = \{0\}$, onde $\mathcal{N}^{\perp(q)}$ denota o anulador de $\mathcal{N}$ em H^q. Assim, $\mathcal{N}^{\perp(q)} \cap ((I - S)H^q + \mathbb{C}) = \{0\}$, pela Proposição 3.3.12. Uma vez que $\mathcal{N}^{\perp(q)} \cap H^2 = H^2 \ominus \mathcal{N}$, segue o resultado. □

Observação 3.3.14. Claramente $\mathcal{D}_1 \subset (I - S)H^q + \mathbb{C}$, logo o resultado acima implica o Teorema 1.11.14. De forma semelhante ao que foi argumentado na Observação 3.3.9, verifica-se que a continência é estrita: um exemplo é $(1 - z)^\alpha$, onde $1 - 1/q < \alpha < 1/2$.

3.4 Zeros de ζ via densidade e ortogonalidade

Vejamos agora como os resultados das seções anteriores levam a condições suficientes para a obtenção de semiplanos livres de zero da função ζ em termos de $\mathcal{N}$. É devida a A. Ghosh a introdução dos funcionais lineares $\Lambda^{(s)}$, definidos abaixo, que conectam diretamente as funções h_k com ζ. W. Noor obteve o Teorema 3.4.5. Estes dois pesquisadores trabalhavam em conjunto com K. Kremnitzer em projeto que posteriormente envolveu o autor da presente tese e resultou no *preprint* [18]. Embora não sejam de autoria própria, os resultados desta seção foram aqui incluídos por darem relevância aritmética ao que foi desenvolvido anteriormente neste capítulo.

A fim de apresentar os funcionais de Ghosh, relembramos aqui a cadeia de aplicações lineares

$$H^2(\mathbb{D}) \xleftrightarrow{T} \mathcal{A} \xleftrightarrow{\Psi^{-1}} \mathcal{H} \xleftrightarrow{U^{-1}} L^2(0,1) \xrightarrow{\mathcal{M}} H^2(\mathbb{C}_{1/2}),$$

descrita na Seção 1.11, e do operador de avaliação $E_{(s)}$, definido na Seção 1.6.

Proposição 3.4.1. *Se $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ então*

$$\Lambda^{(s)} f = \mathcal{M}U^{-1}\Psi^{-1}Tf(s)$$

define um funcional linear limitado em H^2, que satisfaz

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(s)}\, 1 &= -\frac{1}{s}\,, \\
\Lambda^{(s)} \frac{h_k}{k} &= -\frac{\zeta(s)}{s}(k^{-s} - k^{-1})\,, \qquad k \geqslant 2\,, \\
\Lambda^{(s)} z^k &= -\frac{1}{s}\left((k+1)^{1-s} - k^{1-s}\right)\,, \qquad k \geqslant 1\,,
\end{aligned}$$

Demonstração. Sendo a composição das aplicações lineares limitadas T, Ψ^{-1}, U^{-1}, $\mathcal{M}$ e $E_{(s)}$, $\Lambda^{(s)}$ também deve ser linear limitado. Vamos, pois, determinar os valores deste funcional indicados no enunciado.

Primeiramente, temos

$$1 \xrightarrow{T} -R \xrightarrow{\Psi^{-1}} -\gamma \xrightarrow{U^{-1}} -1 \xrightarrow{\mathcal{M}} -\frac{1}{s}\,.$$

No último passo acima, a transformada de Mellin da constante -1 é obtida por uma integral elementar. Além disso, segue da Seção 1.11 que

$$\frac{h_k}{k} \xrightarrow{T} R_k \xrightarrow{\Psi^{-1}} \gamma_k \xrightarrow{U^{-1}} v_k \xrightarrow{\mathcal{M}} -G_k\,.$$

Assim, $\Lambda^{(s)}\frac{h_k}{k} = -G_k(s) = -\frac{\zeta(s)}{s}(k^{-s} - k^{-1})$. Por fim, avaliemos $\Lambda^{(s)}z^k$. Temos

$$Tz^k = \frac{kz^{k-1} - (k+1)z^k}{1-z} = kz^k - \frac{z^k}{1-z} = kz^{k-1} - \sum_{n=k}^{\infty} z^n$$

e a sequência resultante da aplicação de Ψ^{-1} é

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1 \text{ zeros}}, k, -1, -1, -1, \ldots)\,.$$

Logo, a menos de medida nula,

$$U^{-1}\Psi^{-1}Tz^k\,(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \dfrac{1}{k} < x < 1\,, \\ k, & \text{se } \dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}\,, \\ 1, & \text{se } 0 < x < \dfrac{1}{k+1} \end{cases}$$

e esta função tem transformada de Mellin

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} kx^{s-1}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{k+1}} x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{s}\left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right) - \frac{1}{s}(k+1)^{-s} = -\frac{(k+1)^{1-s} - k^{-s}}{s}\,.$$

Segue a expressão para $\Lambda^{(s)} z^k$ do enunciado. □

Definição 3.4.2. *Se $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ e $s \in \mathbb{C}_0$, definimos*

$$\Lambda^{(s)} f = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)\phi_k(s)\,, \qquad \text{onde} \qquad \phi_k(s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{s}, & \text{se } k = 0\,, \\ -\dfrac{1}{s}\left((k+1)^{1-s} - k^{1-s}\right), & \text{se } k \geqslant 1\,, \end{cases}$$

caso a série convirja.

Lema 3.4.3. *Dado $s \in \mathbb{C}_0$, $\phi_k(s) = O(k^{-\operatorname{Re} s})$.*

Demonstração. Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\begin{aligned} |\phi_k(s)| &= \left| \frac{1-s}{s} \left(\int_0^{k+1} x^{-s}\,\mathrm{d}x - \int_0^{k+1} x^{-s}\,\mathrm{d}x \right) \right| \\ &\leqslant \left| \frac{1-s}{s} \right| \int_k^{k+1} |x^{-s}|\,\mathrm{d}x \\ &= C \int_k^{k+1} |x^{-\operatorname{Re} s} x^{-i \operatorname{Im} s}|\,\mathrm{d}x \\ &= C \int_k^{k+1} x^{-\operatorname{Re} s}\,\mathrm{d}x \;\leqslant\; C k^{-\operatorname{Re} s}\,, \end{aligned}$$

com $C = |(1-s)/s|$. □

Proposição 3.4.4. *Se $0 < p \leqslant 2$ e $\operatorname{Re} s > 1/p$ então $\Lambda^{(s)}$ é limitado em H^p. Se $\operatorname{Re} s \geqslant 1$ então $\Lambda^{(s)}$ é limitado em H^1.*

Demonstração. Será dividida em 3 casos, sempre usando o Lema 3.4.3.

Caso $p = 1$. Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\Lambda^{(s)} f| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)||\phi_n(s)| \leqslant \frac{|\hat{f}(0)|}{|s|} + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n^{\operatorname{Re} s}}\,.$$

Se $\operatorname{Re} s \geqslant 1$ então $\frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} = O\left(\frac{1}{n+1}\right)$ quando $n \to \infty$. Logo, usando a desigualdade de Hardy (Teorema 1.1.15),

$$|\Lambda^{(s)} f| \leqslant \frac{\|f\|_1}{|s|} + C' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n+1} \leqslant (|s|^{-1} + C'\pi)\|f\|_1$$

para algum $C' > 0$. Como s é fixado, segue que $\Lambda^{(s)} \in (H^1)^*$.

Caso $0 < p < 1$. Aplicando o Teorema 1.1.19, temos

$$|\Lambda^{(s)} f| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)||\phi_n(s)| \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} n^{1/p-1} n^{-\operatorname{Re} s} \|f\|_p \leqslant C \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} \right) \|f\|_p$$

para algum $C > 0$, onde $\alpha = 1/p - 1 - \operatorname{Re} s < -1$.

Caso $1 < p \leqslant 2$. Começamos notando que

$$\Lambda^{(s)} f = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\phi_k(\overline{s})} = \langle f, \kappa_{\overline{s}} \rangle ,$$

onde $\kappa_s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(s) z^n$. É suficiente mostrar que $\kappa_s \in H^q$ sempre que $s \in \mathbb{C}_{1/p}$, onde $q = \frac{p}{p-1} \leqslant 2$ é o expoente conjugado a p. Para algum $C > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2} |\phi_n(s)|^q \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2} n^{-p \operatorname{Re} s/(p-1)} = C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} ,$$

onde $\alpha = q - 2 - \frac{p \operatorname{Re} s}{p-1} < \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1} - 2 = -1$. Segue do Teorema 1.1.18 que $\kappa_s \in H^q$. $\square$

Teorema 3.4.5. *Se* $0 < p \leqslant 2$ *e* $\mathcal{N}$ *é denso em* H^p, *então* $\zeta(s) \neq 0$ *sempre que* $\operatorname{Re} s > 1/p$.

Demonstração. Se $\zeta(s_0) = 0$ para algum $s_0 \in \mathbb{C}_{1/p}$ então $\Lambda^{(s_0)}$ se anula em todo $\mathcal{N}$, pela Proposição 3.4.1. Sob a hipótese de densidade, isto implicaria que $\Lambda^{(s_0)}$ é o funcional nulo, contradizendo o fato de que $\Lambda^{(s_0)} 1 = -1/s_0$. $\square$

Como último resultado do texto, vejamos agora o problema da ortogonalidade se relaciona com a obtenção de semiplanos livres de zeros de ζ.

Teorema 3.4.6. *Seja* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

(a) Se $(1-z)^{\alpha}\mathcal{N}$ *é denso em* H^2, *então* $\mathcal{N}^{\perp} \cap (1-z)^{\alpha} H^2 = \{0\}$.

(b) Para todo $p > 2/(1-2\alpha)$, $H^p \subset (1-z)^{\alpha} H^2$.

(c) Se $p > 2$ *e* $\mathcal{N}^{\perp} \cap H^p = \{0\}$ *então* $\zeta(s) \neq 0$ *para todo* $s \in \mathbb{C}_{1-1/p}$.

(d) Se $(1-z)^{\alpha}\mathcal{N}$ *é denso em* H^2, *então* $\zeta(s) \neq 0$ *sempre que* $\operatorname{Re} s > (2-2\alpha)/2$.

Demonstração. Segue a demonstração de cada afirmação.

(a) Como já notado na Seção 3.3, a demonstração é a mesma do Teorema 3.3.8.

(b) Isto é apenas um reenunciado do Corolário 1.1.14.

(c) Seja q o expoente conjugado a p. Se $\mathcal{N}$ não é denso em H^q então, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear limitado não nulo em H^q que se anula em $\mathcal{N}$. Pelo Teorema 1.1.20, este funcional é da forma $f \mapsto \langle f, g \rangle$, com $g \in H^p$, logo $\langle f, g \rangle = 0$ para toda $f \in \mathcal{N}$. Segue que $g \perp \mathcal{N}$ em H^2 e, pela hipótese, $g = 0$, uma contradição. Portanto, $\mathcal{N}$ é denso em H^q e, pelo Teorema 3.4.5, ζ não possui zeros em $\mathbb{C}_{1/q} = \mathbb{C}_{1-1/p}$.

(d) Consequência imediata dos itens anteriores. $\square$

Referências

[1] APOSTOL, T. M., *Introduction to analytic number theory*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[2] BÁEZ-DUARTE, L., A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **14** (2003) 5–11.

[3] BAGCHI, B., On Nyman, Beurling and Baez-Duarte's Hilbert space reformulation of the Riemann hypothesis. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **116** (2006) 137–146.

[4] BEURLING, A., On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. *Acta Math.* **81** (1948) 239–255.

[5] BEURLING, A., A closure problem related to the Riemann zeta-function. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **41** (1955) 312–314.

[6] DE BRANGES, L., ROVNYAK, J., *Square summable power series*. Holt, Rinehart and Winston, New York-Toronto, Ont.-London, 1966.

[7] BREZIS, H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext, Springer, New York, 2011.

[8] BROUGHAN, K., *Equivalents of the Riemann hypothesis. Vol. 1*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, v. 164. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[9] BROUGHAN, K., *Equivalents of the Riemann hypothesis. Vol. 2*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, v. 165. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[10] COSTARA, C., RANSFORD, T., Which de Branges-Rovnyak spaces are Dirichlet spaces (and vice versa)? *J. Funct. Anal.* **265** (2013) 3204–3218.

[11] DOUGLAS, R. G., *Banach algebra techniques in operator theory*, *Graduate Texts in Mathematics*, v. 179. Second ed., Springer-Verlag, New York, 1998.

[12] DUREN, P. L., *Theory of H^p spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38, Academic Press, New York-London, 1970.

[13] EDWARDS, H. M., *Riemann's zeta function*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974.

[14] EL-FALLAH, O., KELLAY, K., MASHREGHI, J., RANSFORD, T., *A primer on the Dirichlet space*, *Cambridge Tracts in Mathematics*, v. 203. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[15] FOLLAND, G. B., *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York), second ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[16] FRICAIN, E., MASHREGHI, J., *The theory of* $\mathcal{H}(b)$ *spaces. Vol. 1*, *New Mathematical Monographs*, v. 20. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[17] FRICAIN, E., MASHREGHI, J., *The theory of* $\mathcal{H}(b)$ *spaces. Vol. 2*, *New Mathematical Monographs*, v. 21. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[18] GHOSH, A., KREMNIZER, K., NOOR, S. W., SANTOS, C. F., Zero-free half-planes of the ζ-function via spaces of analytic functions, 2022, arXiv:2206.00434 [math.NT], preprint.

[19] GIRELA, D., Analytic functions of bounded mean oscillation. *Complex function spaces (Mekrijärvi, 1999)*, *Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser.*, v. 4, Univ. Joensuu, Joensuu, 2001, pp. 61–170.

[20] HARDY, G. H., WRIGHT, E. M., *An introduction to the theory of numbers*. Sixth ed., Oxford University Press, Oxford, 2008, revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles.

[21] HEDENMALM, H., KORENBLUM, B., ZHU, K., *Theory of Bergman spaces*, *Graduate Texts in Mathematics*, v. 199. Springer-Verlag, New York, 2000.

[22] HEWITT, E., STROMBERG, K., *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Springer-Verlag, New York, 1965.

[23] HOFFMAN, K., *Banach spaces of analytic functions*. Prentice-Hall Series in Modern Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[24] KADISON, R. V., RINGROSE, J. R., *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, *Graduate Studies in Mathematics*, v. 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, elementary theory, Reprint of the 1983 original.

[25] VON KOCH, H., Sur la distribution des nombres premiers. *Acta Math.* **24** (1901) 159–182.

[26] KOOSIS, P., *Introduction to* H_p *spaces*, *Cambridge Tracts in Mathematics*, v. 115. Second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1998, with two appendices by V. P. Havin [Viktor Petrovich Khavin].

[27] ŁANUCHA, B., NOWAK, M. T., Examples of de Branges–Rovnyak spaces generated by nonextreme functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **44** (2019) 449–457.

[28] LITTLEWOOD, J. E., Sur la distribution des nombres premiers. *C. R. Acad. Sci Paris* **158** (1914) 1869–1872.

[29] MANZUR VILLA, J. C., *A abordagem de Nyman-Beurling para a hipótese de Riemann.* Mestrado em matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017.

[30] MANZUR VILLA, J. C., *A weighted composition semigroup related to the Riemann hypothesis.* Doutorado em matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2022.

[31] MARTÍNEZ-AVENDAÑO, R. A., ROSENTHAL, P., *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*, *Graduate Texts in Mathematics*, v. 237. Springer, New York, 2007.

[32] MONTGOMERY, H. L., VAUGHAN, R. C., *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, v. 97. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[33] NIKOLSKI, N., *Hardy spaces*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, v. 179. Cambridge University Press, Cambridge, 2019.

[34] NIKOLSKI, N., *Toeplitz matrices and operators*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, v. 182. Cambridge University Press, Cambridge, 2020, translated from the French edition by Danièle Gibbons and Greg Gibbons.

[35] NOOR, S. W., A Hardy space analysis of the Báez-Duarte criterion for the RH. *Adv. Math.* **350** (2019) 242–255.

[36] NYMAN, B., *On the One-Dimensional Translation Group and Semi-Group in Certain Function Spaces.* University of Uppsala, Uppsala, 1950, thesis.

[37] RICHTER, S., SUNDBERG, C., A formula for the local Dirichlet integral. *Michigan Math. J.* **38** (1991) 355–379.

[38] ROSENBLUM, M., ROVNYAK, J., *Hardy classes and operator theory.* Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985, oxford Science Publications.

[39] RUDIN, W., *Real and complex analysis.* Third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[40] RUDIN, W., *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics, second ed., McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[41] SARASON, D., Doubly shift-invariant spaces in H^2. *J. Operator Theory* **16** (1986) 75–97.

[42] SARASON, D., Shift-invariant spaces from the Brangesian point of view. *The Bieberbach conjecture (West Lafayette, Ind., 1985)*, *Math. Surveys Monogr.*, v. 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 153–166.

[43] SARASON, D., *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, *University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences*, v. 10. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994, a Wiley-Interscience Publication.

[44] SARASON, D., Local Dirichlet spaces as de Branges-Rovnyak spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997) 2133–2139.

[45] SARASON, D., Unbounded Toeplitz operators. *Integral Equations Operator Theory* **61** (2008) 281–298.

[46] TIMOTIN, D., A short introduction to de Branges–Rovnyak spaces. *Invariant subspaces of the shift operator*, *Contemp. Math.*, v. 638, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, pp. 21–38.

[47] TITCHMARSH, E. C., *The theory of the Riemann zeta-function*. Second ed., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986, edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.

[48] VUKOTIĆ, D., Analytic Toeplitz operators on the Hardy space H^p: a survey. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **10** (2003) 101–113.

[49] XUE, B., On a Hilbert space reformulation of Riemann hypothesis, 2019, arXiv:1911.04029 [math.NT], preprint.