

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Relatório Final
Trabalho de Conclusão de Curso

Aperfeiçoamento do Modelo de Empenamento de Eixo por Viga Curva via Elementos Finitos em Máquinas Rotativas

Autor: **Eduardo Carneiro Pereira**

Orientador: **Prof. Dr. Katia Lucchesi Cavalca Dedini**

Colaborador: **Dr. Felipe da Silva Tuckmantel**

Curso: Engenharia Engenharia Mecânica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Comissão de Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Campinas, Dezembro de 2021

S.P. – Brasil

Dedicatória:

Dedico este trabalho ao meu pai, Fernando Xavier Pereira que, desde meu início de vida, nunca mediu esforços para investir em minha educação, acompanhar de perto todo o meu crescimento e sempre ser meu ponto de inspiração e apoio.

Agradecimentos

Principalmente, gostaria de agradecer a Professora Dr^a Kátia Lucchesi Cavalca pela oportunidade concedida, pelo empenho, pela paciência e facilidade em sua capacidade de passar o conhecimento de forma didática e seguindo uma cronologia bastante lógica nesses mais de 2 anos de parceria e estudo acerca do empenamento de eixo e máquinas rotativas.

Também gostaria de agradecer ao colaborador Dr. Felipe Wenzel Tuckmantel pelo auxílio, principalmente no início do estudo de máquinas rotativas e o colaborador Dr. Thales Freitas Peixoto pela disponibilidade de auxílio nos programas de simulação do rotor.

Além disto, gostaria de agradecer aos professores Dr. Tiago Henrique Machado e Dr. Gregory Bregon Daniel, pelas dúvidas sanadas no período presencial de estudo em laboratório.

Por fim, meu agradecimento final ao também aluno de graduação, Matheus Victor Inacio, por auxiliar no estudo de Mancais Hidrodinâmicos.

Índice

	Resumo	1
	Lista de Figuras	2
Capítulo 1	Introdução	3
Capítulo 2	Revisão Bibliográfica	4
Capítulo 3	Modelagem Matemática	8
3.1.	Rotor	9
3.2.	Mancais	9
3.3.	Equação do Movimento	10
3.4.	Elemento de Eixo	11
3.5.	Elemento de Disco	14
3.6.	Forças de Desbalanceamento	14
3.7.	Ajuste de Curva de Empenamento por Interpolação por Spline	15
3.8.	Modelagem Clássica de Empenamento de Eixo	18
3.9.	Modelagem de Empenamento de Eixo por Viga Curva	19
Capítulo 4	Resultados e Discussões	26
4.1.	Curva de Ajuste de Empenamento	26
4.2.	Resposta em Frequência	29
4.3.	Resposta no Domínio do Tempo	31
Capítulo 5	Conclusões e Trabalhos Futuros	33
	Referências Bibliográficas	34

Resumo

Este trabalho aborda a continuidade no estudo do modelo de empenamento de eixo via elementos finitos por viga curva, com o intuito de analisar a potencial substituição desta abordagem em relação ao método clássico atualmente empregado.

Atualmente, o efeito de arqueamento de eixo é tratado como uma força fictícia, incorporada na equação do movimento a partir de uma estimativa do empenamento inicial do eixo, o que pode gerar alguns resultados não compatíveis com a verificação experimental, pois sabe-se que a introdução de uma força externa nas equações de movimento tem influência na dinâmica do sistema, cujo efeito, portanto, pode ser percebido na resposta dos sistemas mecânicos.

Visando obter resultados mais consistentes com as aplicações práticas, este trabalho propõe dar continuidade ao estudo do modelo de empenamento de eixo por viga curva via elementos finitos, onde ao final deste, serão inseridos novos modelos de interpolação de curvas de empenamento, além da inserção de mancais hidrodinâmicos.

O modelo de viga curva consiste em uma nova matriz de rigidez, obtida através da dedução por energia de deformação e de relações trigonométricas da curvatura do arqueamento do eixo.

A curva de empenamento, por sua vez, é modelada através de três tipos de interpolações diferentes, a saber: Spline, Newton e Lagrange, pelas quais analisa-se qual melhor se adapta ao modelo proposto, que no projeto foi de Spline.

Terminado o refinamento do modelo pela inserção do mancal e da nova curva de ajuste, são então realizadas simulações de um rotor Laval, tanto com o método clássico como com o novo modelo e, então, resultados comparativos entre as metodologias de arqueamento de eixo nas análises estática e dinâmica, no domínio do tempo e no domínio da frequência são aqui apresentados e discutidos.

Os deslocamentos axiais se mostraram negligenciáveis, neste caso, devido a ordem de grandeza significativamente inferior se comparados aos deslocamentos radiais.

Palavras-chave: Modelagem de falhas, Máquinas Rotativas, Empenamento de Eixo, Viga Curva

Lista de Figuras

Figura 1. Elemento de viga e seus graus de liberdade	11
Figura 2. Eixo biapoiado com empenamento residual e submetido a força concentrada F	14
Figura 3. Representação esquemática do desbalanceamento de eixo	15
Figura 4. Representação esquemática do empenamento de eixo	19
Figura 5. Curva de empenamento modelado pela função $y = f(x)$	20
Figura 6. Esquema dos nós 1 e 2 para dedução da matriz de Rigidez de Viga Curva	23
Figura 7. Posição dos nós no eixo x para curva de empenamento	26
Figura 8. Resultados do ajuste de curva de empenamento através dos diferentes métodos de Interpolação, sendo "*" os pontos medidos por Sanches (2015)	26
Figura 9. Resultados do ajuste de curva de empenamento através dos diferentes métodos de Interpolação, sendo "*" os pontos medidos por Sanches (2015)	28
Figura 10. Esquema de eixo simulado, com mancal hidrodinâmico nas extremidades e disco centralizado	29
Figura 11. Resposta em frequência do eixo acima, coluna da esquerda resultados em escala linear e coluna direita escala em dB	30
Figura 12. Resposta no tempo do eixo simulado na Figura 10. Coluna da esquerda Modelo Clássico, coluna da direita Modelo Viga Curva	31
Figura 13. Resposta no tempo do eixo simulado na Figura 10. Coluna da esquerda Modelo Clássico, coluna da direita Modelo Viga Curva. (a) e (b) órbita no disco para eixo bi-poiado; (c) e (d) órbita no disco para eixo com mancal; (e) e (f) órbita no mancal.	32

Capítulo 1

Introdução

No estudo de dinâmica de rotores, existem diversas áreas de trabalho que visam a melhoria contínua de equipamentos que contém elementos rotativos, podendo-se citar: estudos de mancais, análise de esforços, identificação e quantificação de desbalanceamento, empenamento de eixos, entre outros inúmeros tópicos da área.

Tais estudos, na mais variada gama de interesse, sobretudo, possuem alto viés econômico, visto que sempre se busca em equipamentos rotativos o aumento de vida útil, identificação precoce de falhas, previsibilidade de manutenção e, também, evitar acidentes por falhas catastróficas (ou irreversíveis).

O fenômeno presente em máquinas rotativas, foco desta pesquisa, é o empenamento de eixo, definido como o arqueamento do rotor e pode ser causado pelos mais variados fatores, como: ação da gravidade em eixos horizontais, choque mecânico, desbalanceamento elevado permanente e dilatação térmica.

Diante do exposto, o presente trabalho tem por objetivo estudar este fenômeno, mais especificamente, refinando o modelo de empenamento por viga curva via elementos finitos, introduzindo mancal hidrodinâmico e novas modelagens de interpolação de curva de empenamento, para que seja possível uma maior abrangência de comparações com trabalhos presentes na literatura.

Quando se estudam as referências presentes na literatura, nota-se que, em relação a dinâmica de rotores, existe uma concentração maior de estudos voltados ao desbalanceamento, quando comparado ao empenamento de eixo.

Sabe-se que este tipo de efeito, diferentemente do desbalanceamento, é mais crucial para baixas rotações, sendo de extrema relevância para obtenção de deslocamentos e fase do objeto de estudos em velocidades de rotação abaixo da crítica.

Atualmente, em simulações numéricas de rotores, o empenamento é simulado através de uma força fictícia síncrona à rotação do eixo, causando uma deformação no mesmo. Este tipo de abordagem é denominada Modelagem Clássica. No entanto, sabe-se que, em se tratando da dinâmica de sistemas mecânicos, a introdução de uma força pode gerar resultados não compatíveis com aqueles observados em equipamentos reais ou até mesmo experimentos.

Sendo assim, visando obter resultados mais próximos aos encontrados em equipamentos de campo e bancadas de teste, é proposto, portanto, o aprimoramento do

modelo de empenamento por viga curva via elementos finitos pelo qual, através da dedução por energia de deformação e relações trigonométricas, consegue-se determinar as mudanças que a curvatura causa na rigidez do elemento de eixo o que, por sua vez, torna possível a determinação de uma nova matriz de rigidez a ser utilizada para resolução da equação do movimento do eixo rotativo e , assim, obter resultados mais próximos aos experimentais.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Dentre os diversos trabalhos e melhorias apresentados na vasta gama de aplicação de máquinas rotativas, muitas falhas e avarias são os principais tópicos de análise e estudo, dos quais pode-se citar: desbalanceamento de rotores, empenamento de eixos, trincas em eixos, desgaste em mancais, desalinhamento, entre várias outras limitações ao bom funcionamento destes equipamentos. Ao se consultar a literatura e os trabalhos de pesquisa na área de dinâmica de rotores, percebe-se que existe uma grande diversidade de trabalhos sobre desbalanceamento em rotores, quando comparado, por exemplo, ao problema de empenamento.

Eixos rotativos, em simulações numéricas, podem ser modelados através de teorias de viga para análise de deslocamentos e esforços internos no componente mecânico.

Dentre as abordagens teóricas mais empregadas nos trabalhos que envolvem esta modelagem, está o modelo de viga de Euler Bernoulli, no qual considera-se algumas hipóteses para análise de deslocamento de viga, a saber: material isotrópico, elástico e homogêneo, pequenas deformações transversais e, por fim, seções transversais planas com relação ao seu eixo axial. Esta abordagem está presente em diversas referências da literatura, como Beer et al. (2003) Nash (1982) e Hibbeler (2010).

Timoshenko, Young e Weaver (1974) incrementaram ao modelo clássico e mais usual, citado anteriormente, outros efeitos físicos que ocorrem nas vigas sujeitas a solicitações: inércia de rotação e incremento da deflexão causada pelos esforços cortantes. Devido ao fato de levar em conta estes aspectos, considera-se esta metodologia mais completa para a abordagem de sistemas com eixos rotativos de geometria mais complexa.

Nicholas, Gunter e Allaire (1976, parte 1) realizaram simulações de um rotor Laval flexível com dois graus de liberdade em mancais rígidos, em que variavam quantitativamente

o empenamento, bem como a localização do desbalanceamento. Este estudo foi um dos pioneiros na área de empenamento de rotores, sendo sua base fundamental até os dias atuais, na qual o empenamento é modelado como uma força elástica, método este utilizado em quase a totalidade dos trabalhos neste segmento. Com estas simulações, foram feitas importantes conclusões, das quais se destacam: percepção da mudança na amplitude e fase de resposta dos rotores na presença de empenamento, identificação do fenômeno do autobalanceamento do rotor quando a fase entre o desbalanceamento e o empenamento é próxima a 180° , ou seja, a amplitude de resposta tende à zero em algumas velocidades de rotação do eixo e, por fim, concluiu-se também que os efeitos de empenamento são mais perceptíveis em baixas velocidades de rotação (abaixo da primeira velocidade crítica do rotor), enquanto que para velocidades mais altas, o efeito de desbalanceamento (seguido pela auto centragem acima da primeira crítica do rotor) é predominante.

Ainda nesta mesma época, Nicholas, Gunter e Allaire (1976, parte 2) buscaram determinar procedimentos para balanceamento do rotor Laval, levando em conta o empenamento, utilizando o método dos coeficientes de influência, na tentativa de balanceamento em diferentes velocidades de rotação. Tais esforços de controle se mostraram mais eficazes em velocidades de rotação próximas a velocidade crítica do eixo.

Mais tarde, Flack e Rooke (1980) chegaram a importantes conclusões e diferentes resultados em relação a Nicholas, Gunter e Allaire (1976, parte 1), concluindo que cada tipo de mancal apresenta uma característica diferente frente ao empenamento. Neste estudo, foram analisadas as respostas ao empenamento em 4 diferentes tipos de mancais hidrodinâmicos numa bancada experimental e determinou-se, numericamente, a resposta de rotores operando em velocidade crítica. Outro importante aspecto observado foi que, mesmo em diferença de fase de 180° do empenamento em relação ao desbalanceamento, a amplitude de resposta não atinge valor nulo absoluto, mas apenas apresentou uma tendência ao mesmo.

Shiau e Lee (1989) analisaram o empenamento de eixo utilizando rotor Laval simples, mancal rígido e eixo sem massa. Neste estudo, adicionou-se o efeito de inclinação angular do disco, juntamente do empenamento e do desbalanceamento do rotor. Assim como em outros trabalhos, as respostas de fase e amplitude também divergiram quando comparadas às de Nicholas, Gunter e Allaire (1976, parte 1).

Rao (2001) realizou um estudo mais detalhado do diagrama de fase da resposta do eixo rotativo na presença de empenamento. Nele, concluiu-se que o conhecimento da fase da resposta se mostra mais eficaz na identificação do arqueamento do eixo quando

comparado a amplitude de resposta, visto que o segundo apresenta comportamento diferenciado apenas em fase de 180°.

Wu e Chiang (2004) estudaram vibrações livres em viga curva, sendo, então, deduzidas matrizes de rigidez e massa para eixo horizontal de viga curva. A matriz de rigidez foi deduzida através das equações de força e deslocamento e, a matriz de massa foi deduzida através das equações de energia cinética. Feitas as deduções, foi realizada uma análise modal, pela qual observou-se melhor acurácia dos resultados obtidos, quando comparados as simulações para os métodos até então convencionais.

Darpe, Gupta e Chawla (2006) realizaram a simulação de um rotor Laval em mancais rígidos, com o intuito de estabelecer conclusões acerca dos efeitos causados pelo empenamento de eixo na dinâmica de um eixo trincado, bem como na rigidez, no caso da presença de empenamento residual. Notaram que o empenamento não altera a rigidez causada pela trinca, no entanto, perceberam que a presença de empenamento no rotor dificulta a identificação das trincas no sistema mecânico. Por fim, também concluíram que, quando em conjunto com a ação da gravidade, o empenamento e o desbalanceamento em oposição de fase, não conduzem ao autobalanceamento.

Braut, Zigulic e Butkovic (2008) realizaram simulações variando a fase entre desbalanceamento e empenamento, identificando alterações nas forças de contato rotor e estator. Perceberam que, quando o empenamento e o desbalanceamento estão em fase, as forças de contato aumentam abruptamente.

Dasambiagio (2008) desenvolveu um novo modelo de deformações de barras, sobretudo em processos de fabricação de deformação a frio, em que, através do conceito de vetor e esforços internos energeticamente conjugados, tratou da distorção e do empenamento da seção transversal da mesma por elementos finitos.

Camargo (2010) trabalhou no estudo da influência do empenamento e do desbalanceamento nas amplitudes de vibração, especialmente em componentes harmônicos, avaliando padrões que resultaram em um algoritmo final de análise e identificação de falhas, inclusive de empenamento de eixo.

Kang et al. (2011) realizou simulações para analisar o efeito da variação de amplitude e fase do empenamento de eixo no comportamento dinâmico de um rotor engrenado com dois eixos montados sobre suportes viscoelásticos.

Bradley (2012) percebendo o fenômeno de empenamento de eixo em rotores com mancais hidrodinâmicos de alta rotação, passou a investigar o efeito sobre duas diferentes condições, sendo a primeira uma modelagem de eixo rígido, e a segunda, flexível, com o

intuito de se observar padrões, concluindo que o arqueamento de eixo interfere na geometria e amplitude de órbita do rotor no mancal hidrodinâmico.

Song et al. (2013) apresentou um estudo teórico e experimental da influência de diferentes níveis de empenamento em um rotor desalinhado, enfatizando a dificuldade do estudo de empenamento do eixo isolado de outros fenômenos, visto que sempre há presença de outros efeitos, como por exemplo, desbalanceamento e desalinhamento. Também foram feitas análises para distinguir efeitos de empenamento e desbalanceamento.

Vania, Pennacchi e Chatterton (2013) estudaram possíveis causas de vibrações danosas em um gerador de energia elétrica de 175 MW. Neste trabalho, constataram a presença, dentre outras falhas, de empenamento de eixo rotativo devido a dilatação térmica. Ao final, concluíram que a principal causa das vibrações anormais era advinda do empenamento.

Dayyani, Friswell e Flores (2014) apresentaram a dedução de uma matriz de rigidez de um elemento de viga curva através da energia de deformação, aplicado em um sistema bidimensional, analisando esforços verticais e horizontais no mesmo, verificando-se maior acurácia nos resultados, comparados a abordagem até então utilizada.

Araújo (2015) avaliou o empenamento de barras no processo de trefilação das mesmas, quando utilizadas no setor automobilístico. Para esta identificação foram realizadas simulações numéricas de arqueamento de eixo, concluindo-se que a principal causa deste é o desalinhamento angular da peça.

Nascimento (2016) trabalhou no estudo e percepção do comportamento da harmônica de quarta ordem e como sua configuração pode auxiliar na identificação de eixo empenado. Neste trabalho, mediu-se a vibração do eixo variando a frequência de excitação e, a partir da análise das harmônicas, determinou-se o empenamento do eixo.

Tong, Palazzolo e Suh (2016), através da observação do Efeito Morton (ME do inglês Morton Effect) em eixos rotativos, o qual se caracteriza por uma distribuição não uniforme de temperatura em eixos de rotores que, por sua vez, causam empenamento, perceberam que os resultados advindos da tentativa de cômputo deste efeito pela abordagem de massa desbalanceada não apresentava resultados próximos aos experimentais, sendo assim, desenvolveram um modelo híbrido, simulando o efeito por empenamento e expansão de eixo.

Dalmazzo e Pederiva (2018) trabalharam na identificação teórica e experimental simultânea de desbalanceamento e empenamento de eixo em rotor flexível com dois discos através da análise de correlações, utilizando o método de redução de ordem SEREP

(System Equivalent Reduction Expansion Process). Neste estudo, foram escolhidos dez tipos de desbalanceamento diferentes entre si, mantendo sempre o mesmo empenamento residual e, através destes resultados, foram realizadas a identificação de ambas as falhas, inicialmente por simulação numérica e, ao final, experimentalmente, para validar as considerações feitas no modelo.

Martinez (2018) realizou estudos acerca do comportamento termomecânico dos pavimentos de concreto em pátios de aeroportos expostos ao tráfego de aeronaves em 5 diferentes regiões brasileiras (São Paulo, Porto Alegre, Brasília, Teresina, Manaus) sob diferentes temperaturas ambientes e radiações. Para este trabalho foram realizadas simulações por elementos finitos, onde observou-se empenamento dos pavimentos devido a distribuição não uniforme de temperatura.

Nadeem e Hyder (2018) estudaram o empenamento de eixo em turbina a vapor, cujo efeito causava o contato das pás com o revestimento interno da estrutura da turbina que, por sua vez, gerava trincas em suas lâminas, causando elevada concentração de tensões e, portanto, reduzindo a vida útil do equipamento. Neste trabalho, foram confirmados o mecanismo de início da trinca nas pás e como o perfil de empenamento afetava neste fenômeno.

Frente ao exposto, se insere o objetivo de trazer, ao modelo por elementos finitos de eixo rotativo, os efeitos de empenamento, não raramente presentes neste tipo de sistema mecânico, de forma a prover uma modelagem mais completa dos fenômenos envolvidos no funcionamento de rotores.

Capítulo 3

Modelagem Matemática

Toda máquina rotativa possui três componentes essenciais para seu funcionamento, a saber: rotor, mancais e estrutura de suporte ou fundação.

Quando se descreve matematicamente um equipamento rotativo, existem inúmeras dificuldades para caracterização do mesmo, como em aspectos de dimensões, cargas e velocidades, pois trata-se de um sistema dinâmico complexo com diversos fenômenos envolvidos, o que torna sua análise consideravelmente distinta de uma análise puramente estrutural.

3.1. Rotor

Rotor é o principal componente de uma máquina rotativa, visto que é o elemento capaz de realizar o principal objetivo destes tipos de equipamentos, transmitindo ou gerando potência.

Neste projeto, o mesmo será modelado com elementos de viga e discos rígidos, pois tal abordagem tem se mostrado satisfatória, visto os trabalhos presentes em literatura que tem demonstrado compatibilidade entre simulações e experimentos.

Para esta modelagem de rotores, sabe-se que são necessárias definições do número de elementos, suas respectivas dimensões (diâmetro e comprimento), assim como suas propriedades mecânicas relacionadas a elasticidade, efeitos dissipativos e inércia.

3.2. Mancais

Mancais hidrodinâmicos, em simulações de rotores, são modelados através da determinação de coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes aos efeitos da força de sustentação do filme de lubrificante, e seus valores dependem de propriedades do fluido utilizado, além de características geométricas do mancal, tipo de mancal e condições de trabalho que permitam a linearização da força hidrodinâmica em cada posição de equilíbrio, respectiva a cada velocidade de rotação do eixo. Sua formulação matemática matricial, para inserção na da equação do movimento, ocorre através de:

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Os efeitos dinâmicos, portanto, do mancal hidrodinâmico, estão associados a estimativa dos coeficientes a serem agregados ao modelo, substituindo a condição de viga bi-apoiada

3.3. Equação do movimento

Quando tratamos do estudo de sistemas rotativos, é necessário inicialmente estudar sobre a dinâmica de rotores, para que seja possível compreender as considerações necessárias na modelagem de eixos girantes por elementos finitos.

Dentre todos os elementos que estão presentes em sistemas rotativos, e que devem ser modelados, pode-se citar: eixos, rotores (representados por discos), mancais (representados por coeficientes de rigidez e amortecimento) e estrutura de fundação (representada por sua matriz de impedância mecânica), utilizados na descrição dinâmica do mesmo. Estes componentes devem ser englobados numa equação geral de movimento do sistema.

Utilizando, portanto, o Método dos Elementos Finitos (MEF), para modelagem na área de dinâmica de rotores, é necessário solucionar a seguinte equação diferencial matricial de segunda ordem:

$$[M]\{\ddot{X}\} + (\Omega[G] + [C])\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (2)$$

Sendo:

$[M]$ = matriz de massa dos elementos de viga e do disco.

$[G]$ = matriz giroscópica dos elementos de viga e do disco.

$[C]$ = matriz de amortecimento do elemento de viga.

$[K]$ = matriz de rigidez do elemento de viga.

$\{X\}$ = vetor deslocamentos dos pontos nodais

$\{\dot{X}\}$ = vetor velocidades dos pontos nodais

$\{\ddot{X}\}$ = vetor acelerações dos pontos nodais

$\{F\}$ = vetor das forças externas aplicadas nos respectivos nós do sistema

As deduções para as matrizes à esquerda da equação (1) são amplamente consolidadas e podem ser obtidas de forma detalhada em diversas fontes na literatura, como Nelson (1976) Genta (2005). Dessa forma, somente as matrizes finais dos elementos de disco e eixo serão apresentadas, exceto para o caso da matriz de rigidez na modelagem de elementos finitos por Viga Curva e as formas de entrada de forças de empenamento para o Método Clássico e entrada de desbalanceamento, para as quais será apresentada uma descrição mais detalhada.

3.4. Elemento de eixo

A partir das energias cinética e potencial associadas ao eixo rotativo em flexão, é possível obter as principais matrizes de massa, de rigidez e giroscópica (Nelson, 1976) e, conseqüentemente, inserir nas mesmas cada um dos componentes previamente citados, assim como a influência de efeitos adicionais, como por exemplo, o objeto de estudo deste projeto, o empenamento de eixos. Para todas as simulações realizadas neste projeto, utilizou-se o sistema de referências apresentado na Figura 1, notando-se os seguintes graus de liberdade, de acordo com a equação (2):

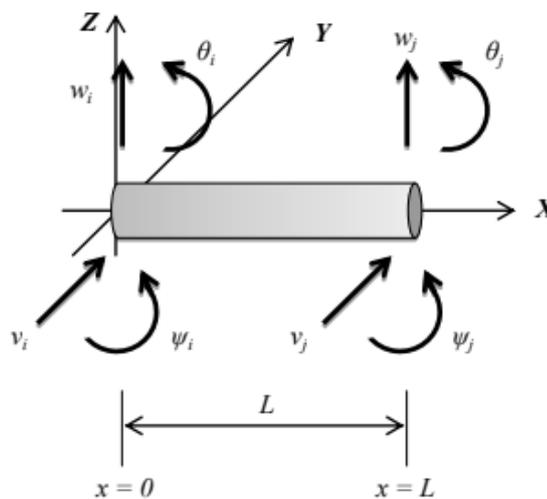


Figura 1. Elemento de viga e seus graus de liberdade.

Sendo assim, o vetor de deslocamentos $\{X\}$ assume a seguinte forma:

$$\{X\} = \{v_i \ w_i \ \theta_i \ \psi_i \ v_j \ w_j \ \theta_j \ \psi_j\}^T \quad (3)$$

Existem dois tipos de teoria de viga para utilização no Método de Elementos Finitos (MEF), a saber: Euler Bernoulli e Timoshenko. O elemento de viga de Timoshenko é mais completo, porém, o modelo de empenamento por viga curva aqui utilizado utiliza o conceito de Euler-Bernoulli. Desta forma, para melhor entendimento da modelagem e compatibilidade das comparações dos resultados, serão utilizadas as matrizes obtidas a partir da teoria de viga de Euler Bernoulli. Em desenvolvimentos futuros, este modelo será estendido para viga de Timoshenko.

Considerando ρ como massa específica, A área da seção transversal do elemento de eixo, L o comprimento do elemento de eixo, I o momento de inércia de área da seção transversal do eixo, Ω a rotação do eixo e R o raio do eixo, para os graus de liberdade

considerados, as matrizes para a modelagem de eixo são: matriz de inércia de translação [MT], matriz giroscópica [G], matriz de rigidez à flexão [KC] e matriz de inércia de rotação [MR], respectivamente:

$$[M_T] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22L & 54 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 156 & -22L & 0 & 0 & 54 & 13L & 0 \\ 0 & -22L & 4L^2 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 0 \\ 22L & 0 & 0 & 4L^2 & 13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & 13L & 156 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 156 & 22L & 0 \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 22L & 4L^2 & 0 \\ -13L & 0 & 0 & -3L^2 & -22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[G] = \frac{\rho AR^2}{60L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ -3L & 0 & 0 & -4L^2 & 3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[K_C] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & -12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & -6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6L & 12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 6L & 4L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[M_R] = \frac{\rho AR^2}{120L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Vale ressaltar que a matriz $[K_C]$ de rigidez apresentada pela equação (6), é a utilizada para a metodologia clássica de arqueamento de eixo, efeito que será ainda explorado neste mesmo capítulo. No entanto, para a modelagem através de Viga Curva será utilizada a matriz de rigidez $[K_v]$, na equação (8), cuja dedução encontra-se na seção 3.7.

$$[K_v] = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} 12C_{z_1^2}I + S_{z_1^2}AL^2 & 0 & 0 & 6C_{z_1}IL & -12C_{z_1^2}I - S_{z_1^2}AL^2 & 0 & 0 & 6C_{z_1}IL \\ 0 & 12C_{y_1^2}I + S_{y_1^2}AL^2 & -6C_{y_1}IL & 0 & 0 & -12C_{y_1^2}I - S_{y_1^2}AL^2 & -6C_{y_1}IL & 0 \\ 0 & -6C_{y_1}IL & 4IL^2 & 0 & 0 & 6C_{y_1}IL & 2IL^2 & 0 \\ 6C_{z_1}IL & 0 & 0 & 4IL^2 & -6C_{z_1}IL & 0 & 0 & 2IL^2 \\ -12C_{z_2^2}I - S_{z_2^2}AL^2 & 0 & 0 & -6C_{z_2}IL & 12C_{z_2^2}I + S_{z_2^2}AL^2 & 0 & 0 & -6C_{z_2}IL \\ 0 & -12C_{y_2^2}I - S_{y_2^2}AL^2 & 6C_{y_2}IL & 0 & 0 & 12C_{y_2^2}I + S_{y_2^2}AL^2 & 6C_{y_2}IL & 0 \\ 0 & -6C_{y_2}IL & 2IL^2 & 0 & 0 & 6C_{y_2}IL & 4IL^2 & 0 \\ 6C_{z_2}IL & 0 & 0 & 2IL^2 & -6C_{z_2}IL & 0 & 0 & 4IL^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Outra importante peculiaridade na matriz de rigidez de viga curva da equação (8), é que esta traz resultados de deslocamentos, assumindo-se referência local na curva de empenamento, ou seja, os esforços externos aplicados ao sistema resultarão nos deslocamentos em relação ao empenamento residual e não no sistema de coordenadas da Figura 1, como pode ser visto no Exemplo 1:

Exemplo 1: seja a viga da Figura 2, um eixo bi apoiado, com um empenamento residual no centro do vão entre os apoios de 3mm, isto é, $y(L/2) = 3\text{mm}$. Neste mesmo eixo, é aplicada uma força F , que gera uma deflexão da viga em $x=L/2$ de 7mm ($y(L/2)=7\text{mm}$) no referencial inercial.

Nota-se que, para o sistema de coordenadas da Figura 1, o deslocamento no centro do eixo devido a aplicação da força é de 7mm. No entanto, como a matriz de rigidez da equação (8) considera a referência na curva de empenamento, o mesmo deslocamento neste sistema de coordenadas seria de 4mm, ou seja, $y(L/2) = 7\text{mm} - 3\text{mm} = 4\text{mm}$.

Logo, para comparação de resultados entre as duas abordagens, é necessário somar vetorialmente o deslocamento de empenamento residual ao cálculo de deflexão pelo método de viga curva.

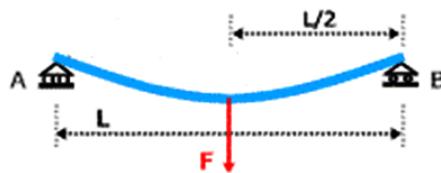


Figura 2. Eixo biapoiado com empenamento residual e submetido a força concentrada F

3.5. Elemento de disco

Assim como será exposto no capítulo 4, o disco estará no nó de número 6, este, assim como os outros nós da malha, possui quatro graus de liberdade (4 GDL), dois deslocamentos v e w e duas rotações θ e Ψ , nos eixos Y e Z , respectivamente.

O vetor de deslocamentos para o disco, fica sendo então:

$$\{Xd\} = \{v_d \ w_d \ \theta_d \ \Psi_d\}^T \quad (9)$$

As matrizes de massa e giroscópica do elemento de disco são representadas por:

$$[M_d] = \begin{bmatrix} md & 0 & 0 & 0 \\ 0 & md & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[G_d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Idx \\ 0 & 0 & Idx & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Onde md é a massa do disco, Id é o momento de inércia diametral (igual para os eixos Y e Z) e Idx é o momento de inércia em relação ao eixo axial X .

3.6. Forças de desbalanceamento

Para modelagem do desbalanceamento, foi considerada uma força girante, resultante de uma massa μ solidária ao disco a uma excentricidade d em relação ao seu centro geométrico C e, portanto, síncrona à rotação deste.

Além disto, esta força possui tanto magnitude como fase relativa à localização angular no sistema de referência inercial, neste caso, os eixos de coordenadas da Figura 1.

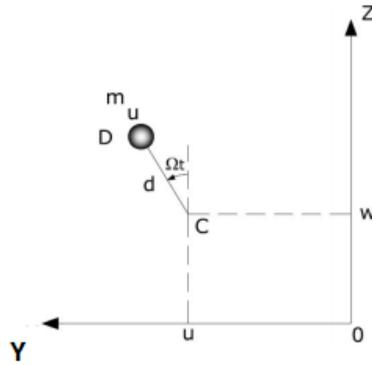


Figura 3. Representação esquemática do desbalanceamento de eixo

No desbalanceamento, supõe que seu efeito (força síncrona ao giro do rotor) atua apenas no disco, ou seja, no nó de número 6:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ F_v \\ F_w \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ m_u d \Omega^2 & 0 \\ 0 & m_u d \Omega^2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t + \phi) \\ \cos(\Omega t + \phi) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Assim, como dito anteriormente, nota-se que o desbalanceamento é síncrono ao giro do rotor e possui maior magnitude e influência dependendo da velocidade de rotação do eixo.

O termo ϕ indica a fase do desbalanceamento com relação ao eixo z do sistema de referência, que pode ser visto na Figura 3.

3.7. Ajuste de curva de empenamento por interpolação Spline

Atualmente, existem diversas abordagens quando se trata do ajuste polinomial de curvas através dos pontos dados ou coletados experimentalmente, podendo-se citar as metodologias de Newton e de Lagrange.

Devido a sua versatilidade, para garantir que os pontos medidos da curva sejam devidamente ajustados pelo polinômio e a continuidade deste até a quinta derivada, decidiu-se pelo método de interpolação por Spline para ajustar a curva de empenamento e, então, introduzi-las nos modelos de arqueamento de eixo (Norton, 2009).

Um Spline clássico de grau m e k nós, é um polinômio de grau $m-1$ e sua derivada é contínua até a ordem de $m-2$. Considerando que seu valor esteja contido em um intervalo $[a,b]$ e que exista necessariamente um nó em cada extremidade, os k nós serão:

$$a = x_1 \leq x_2 \leq \dots x_k = b \quad (13)$$

E seus deslocamentos correspondentes:

$$s(a) = s_1, s_2 \dots s_{k-1}, s_k = s(b) \quad (14)$$

Para garantir maior suavidade e acurácia dos polinômios de interpolação, Norton (2009) sugere o uso de Splines de sexta ordem, resultando em um polinômio de grau 5. Sendo assim, para $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ e $j = 1, 2, \dots, k-1$, os $k-1$ polinômios de sexta ordem são:

$$P_j = A_j(x - x_j)^5 + B_j(x - x_j)^4 + C_j(x - x_j)^3 + D_j(x - x_j)^2 + E_j(x - x_j) + F_j \quad (15)$$

Ressaltando que os deslocamentos, na equação (14), são dados na seguinte notação:

$$F_j = s_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (16)$$

Como neste projeto são utilizados 11 nós para modelagem do eixo, a ser explicitada nos próximos capítulos, tem-se, portanto, 10 polinômios de ajuste no total, sendo cada intervalo dado por:

$$h_j = h_{j+1} - h_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (17)$$

Para garantir que a curva gerada pelo Spline seja contínua até a quinta derivada, faz-se necessário resolver o sistema de equações (17) – (21), de forma que polinômio ajustado represente a curva de empenamento:

$$A_j h_j^5 + B_j h_j^4 + C_j h_j^3 + D_j h_j^2 + E_j h_j + F_j = F_{j+1} \quad (18)$$

$$5A_j h_j^4 + 4B_j h_j^3 + 3C_j h_j^2 + 2D_j h_j + E_j = E_{j+1} \quad (19)$$

$$10A_j h_j^3 + 6B_j h_j^2 + 3C_j h_j + D_j = D_{j+1} \quad (20)$$

$$10A_j h_j^2 + 4B_j h_j + C_j = C_{j+1} \quad (21)$$

$$5A_j h_j + B_j = B_{j+1} \quad (22)$$

A implementação computacional consiste em rearranjar as equações (17), (18) e (19), onde encontram-se os coeficientes A_j , B_j e C_j em função de D_j , E_j e F_j para $j = 1, 2, \dots, k$:

$$A_j = \frac{1}{h_j^4} \left(-h_j D_j + h_j D_{j+1} - 3E_j - 3E_{j+1} + 6 \frac{F_{j+1} - F_j}{h_j} \right) \quad (23)$$

$$B_j = \frac{1}{h_j^3} \left(3h_j D_j - 2h_j D_{j+1} + 8E_j + 7E_{j+1} - 15 \frac{F_{j+1} - F_j}{h_j} \right) \quad (24)$$

$$C_j = \frac{1}{h_j^2} \left(-3h_j D_j + h_j D_{j+1} - 6E_j - 4E_{j+1} + 10 \frac{F_{j+1} - F_j}{h_j} \right) \quad (25)$$

Substituindo as equações (22), (23) e (24) em (20) e (21), sendo $j = j-1$ e $j+1 = j$, com $j = 2, 3, \dots, k-1$. Chega-se a:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2h_{j-1}} D_{j-1} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{h_{j-1}} + \frac{1}{h_j} \right) D_j - \frac{1}{2h_j} D_{j+1} - \frac{2}{h_{j-1}^2} E_{j-1} - 3 \left(\frac{1}{h_{j-1}^2} - \frac{1}{h_j^2} \right) E_j + \frac{2}{h_j^2} E_{j+1} \\ & = \\ & = 5 \left[\left(\frac{F_{j-1}}{h_{j-1}^3} + \frac{F_{j+1}}{h_j^3} \right) - \left(\frac{F_j}{h_{j-1}^3} + \frac{F_j}{h_j^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2D_{j-1}}{h_{j-1}^2} - 3 \left(\frac{1}{h_{j-1}^2} - \frac{1}{h_j^2} \right) D_j - \frac{2D_{j+1}}{h_j^2} + \frac{7E_{j-1}}{h_{j-1}^3} + 8 \left(\frac{1}{h_{j-1}^3} + \frac{1}{h_j^3} \right) E_j + \frac{7E_{j+1}}{h_j^3} = \\ & = 15 \left[\left(\frac{F_{j+1}}{h_j^4} - \frac{F_{j-1}}{h_{j-1}^4} \right) + \left(\frac{F_j}{h_{j-1}^4} - \frac{F_j}{h_j^4} \right) \right] \end{aligned} \quad (27a)$$

As equações (25a) e (26a) quando os nós estão igualmente espaçados entre si ($h_{j-1} = h_j = h_{j+1} = h$), assumem a seguinte forma:

$$-\frac{1}{2h} D_{j-1} + \frac{3}{h} D_j - \frac{1}{2h} D_{j+1} - \frac{2}{h^2} E_{j-1} + \frac{2}{h^2} E_{j+1} = \frac{5}{h^3} [(F_{j-1} + F_{j+1} - 2F_j)] \quad (26b)$$

$$\frac{2}{h^2} D_{j-1} - \frac{2}{h^2} D_{j+1} + \frac{7}{h^3} E_{j-1} + \frac{16}{h^3} E_j + \frac{7}{h^3} E_{j+1} = \frac{15}{h^4} (F_{j+1} - F_{j-1}) \quad (27b)$$

Nota-se que, ao final da resolução do sistema, obtém-se um total de $5(k-2)$ equações, enquanto há $6(k-1)$ incógnitas a serem estimadas. Sendo assim, são necessárias 6 condições de contorno, além do empenamento medido em cada nó.

O caso estudado contém 11 nós do modelo de elementos finitos. Sendo assim, para possível solução do sistema, que contém 60 incógnitas e 45 equações, serão fornecidos os valores de 9 pontos do empenamento entre os nós extremos e 6 condições de contorno, sendo estas dadas a partir da hipótese de deslocamento, velocidade e aceleração nulos nos apoios. Logo, no intervalo axial do eixo de 0 à L, tem-se:

$$F_1 = s(0) = 0; \quad E_1 = \dot{s}(0) = 0; \quad D_1 = \ddot{s}(0) = 0; \quad (28)$$

$$F_k = s(L) = 0; \quad E_k = \dot{s}(L) = 0; \quad D_k = \ddot{s}(L) = 0; \quad (29)$$

3.8. Modelagem clássica de empenamento de eixo (Força de empenamento)

Conforme citado anteriormente, o empenamento de eixo é uma deflexão permanente do eixo em relação ao seu centro geométrico sem curvatura, ou seja, é o arqueamento que o eixo possui inicialmente em relação à linha reta que passa pelo centro dos apoios. Sendo assim, a esta grandeza atribui-se a notação δ (empenamento).

Além disto, o empenamento, assim como para o caso da modelagem de desbalanceamento, é síncrono ao giro do rotor, o que faz com que seu efeito varie ao longo do tempo, podendo também possuir uma fase α em relação ao sistema de referência inercial que, no caso aqui abordado, refere-se ao eixo Z da Figura 1.

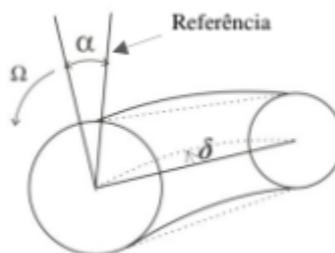


Figura 4. Representação esquemática do empenamento de eixo.

A Modelagem Clássica do empenamento de eixo é realizada através de uma força fictícia que deve produzir no eixo uma deflexão igual àquela do empenamento. Logo, sabendo-se tanto os módulos de deslocamento residual presente no eixo, bem como os ângulos de rotação em cada eixo, obtidos através dos polinômios de interpolação por Spline na seção (3.5), é possível calcular a força de empenamento F_b por:

$$\{F_b\} = [K_c]\{\delta\} \quad (30)$$

Sendo $[Kc]$ a matriz de rigidez de Euler Bernoulli, equação (6), e o vetor de empenamento δ , que possui componentes lineares e angulares devido ao arqueamento apresentado pelo eixo, presente em cada grau de liberdade nos respectivos nós. De acordo com o sistema de coordenadas adotado na Figura 1 e na Figura 4, determina-se o vetor $\{\delta\}$ como:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} -\delta_i \sin(\Omega t + \alpha_i) \\ \delta_i \cos(\Omega t + \alpha_i) \\ \delta_{ai} \cos(\Omega t + \alpha_i) \\ -\delta_{ai} \sin(\Omega t + \alpha_i) \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Onde δ_i corresponde ao módulo da amplitude do empenamento residual resultante dos eixos Y e Z, e δ_{ai} corresponde ao módulo do ângulo do empenamento, resultante das direções da rotação θ e ψ , respectivamente.

3.9. Dedução e modelagem de empenamento de eixo por Viga Curva

O efeito de empenamento será modelado através da dedução de uma nova matriz de rigidez, que leva em consideração as alterações estruturais de rigidez resultantes da curvatura da viga, ou seja, assim como é de se esperar, um eixo torna-se mais rígido quando há um empenamento residual e este modelo irá contemplar estes efeitos.

Para os cálculos seguintes, serão utilizados o método de rigidez direta e o segundo teorema de Castigliano. Seja a curva de empenamento, modelada por um polinômio $f(x)$ qualquer, assim como na Figura 5:

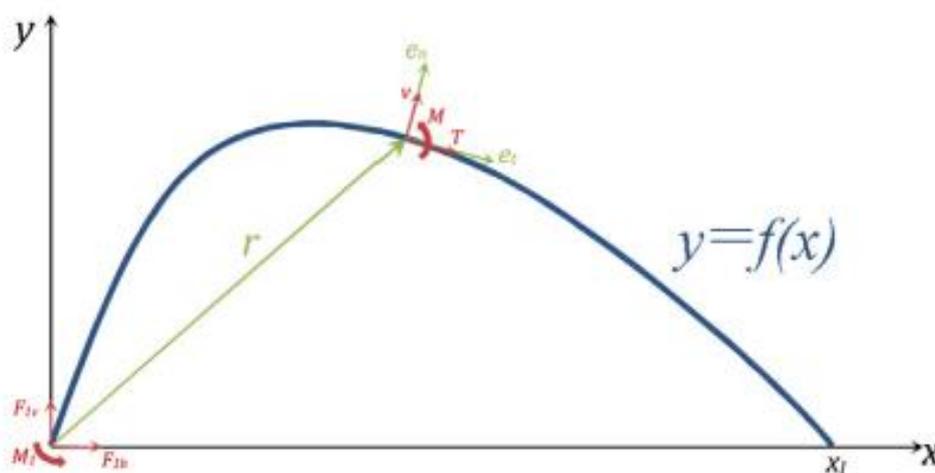


Figura 5. Curva de empenamento modelado pela função $y = f(x)$

Sabe-se, portanto, que qualquer ponto da curva pode ser escrito da seguinte forma vetorial:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad (32)$$

Logo, os vetores unitários nas direções tangente e normal à curva, nas coordenadas do ponto arbitrário na Figura 5, assumem a seguinte forma:

$$\vec{e}_t = \frac{1}{\text{Módulo do vetor}} x \frac{d\vec{r}}{dx} \quad (33)$$

$$\vec{e}_t = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \quad (34)$$

Para que dois vetores sejam perpendiculares entre si, seu produto interno (ou escalar) deve ser nulo e, excluindo-se a solução trivial, tem-se:

$$\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \begin{pmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Os esforços nesta viga curva podem ser divididos em duas componentes, horizontal e vertical, respectivamente, no nó 1:

$$\vec{F}_{1h} = F_{1h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\vec{F}_{1v} = F_{1v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Os módulos das projeções destes esforços na coordenada local, por consequência, é:

$$Proj_{\vec{e}_t} \vec{F}_{1h} = \vec{F}_{1h} \cdot \vec{e}_t = \frac{F_{1h}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \quad (38)$$

$$Proj_{\vec{e}_n} \vec{F}_{1h} = \vec{F}_{1h} \cdot \vec{e}_n = \frac{-F_{1h} \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \quad (39)$$

$$Proj_{\vec{e}_t} \vec{F}_{1v} = \vec{F}_{1v} \cdot \vec{e}_t = \frac{F_{1v} \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \quad (40)$$

$$Proj_{\vec{e}_n} \vec{F}_{1v} = \vec{F}_{1v} \cdot \vec{e}_n = \frac{F_{1v}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \quad (41)$$

Sendo assim, o somatório de forças em e_t , resulta:

$$T = \frac{-(F_{1h} + F_{1v} \cdot f'(x))}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \quad (42)$$

Analogamente, o somatório em e_n :

$$V = \frac{F_{1h}f'(x) - F_{1v}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \quad (43)$$

E, por fim, realizando-se o somatório de momentos, chega-se a:

$$M = F_{1v} x - F_{1h} f(x) - M_1 \quad (44)$$

Logo, as energias de deformação da viga curva devido aos esforços tangenciais (axiais) e aos esforços devido ao momento fletor, para um elemento de viga curva infinitesimal, dado por $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, são:

$$U_t = \int_0^{xf} \frac{T^2}{2EA} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (45)$$

$$U_M = \int_0^{xf} \frac{M^2}{2EI} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (46)$$

Sendo os índices T e M indicando os esforços tangenciais e por momento fletor. A energia total de deformação, desconsiderando-se o efeito de cisalhamento, devido ao modelo de Euler-Brenoulli, será a soma $U = U_M + U_t$.

A partir do segundo Teorema de Castigliano, que afirma que a derivada parcial do trabalho das forças internas em relação a uma força atuante, resulta no deslocamento na direção de ação da mesma, e correspondente à esta força, é possível determinar as derivadas parciais para, enfim, obter-se a matriz de rigidez, após algumas manipulações algébricas:

$$\frac{\partial U_{t1}}{\partial F_{1h}} = F_{1h} \int_0^{xf} \frac{dx}{EA\sqrt{1 + f'(x)^2}} + F_{1v} \int_0^{xf} \frac{f'(x)}{EA\sqrt{1 + f'(x)^2}} dx \quad (47)$$

O que, para fins de notação, escreve-se como:

$$\frac{\partial U_{t1}}{\partial F_{1h}} = F_{1h} I_{t,F_{1h}F_{1h}} + F_{1v} I_{t,F_{1h}F_{1v}} \quad (48)$$

Onde a integral é denotada por I, o primeiro índice indica que é a derivada da energia de deformação tangencial, o segundo indica que a derivada parcial é com relação a F_{1h} e o terceiro índice denota o termo que está multiplicando a integral.

Realizando todas as derivadas parciais de U_t e U_m com relação a F_{1h}, F_{1v} e M_1 e reescrevendo na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} I_{F_{1h}F_{1h}} & I_{F_{1h}F_{1v}} & I_{F_{1h}M_1} \\ I_{F_{1v}F_{1h}} & I_{F_{1v}F_{1v}} & I_{F_{1v}M_1} \\ I_{M_1F_{1h}} & I_{M_1F_{1v}} & I_{M_1M_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1h} \\ F_{1v} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{1h} \\ \delta_{1v} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Sendo todos os termos da matriz I_1 , a soma dos fatores tangencial e do momento fletor, por exemplo, $I_{F_{1h}F_{1h}} = I_{t,F_{1h}F_{1h}} + I_{M,F_{1h}F_{1h}}$. Consequentemente, isolando a matriz de forças, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} F_{1h} \\ F_{1v} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{F_{1h}F_{1h}} & I_{F_{1h}F_{1v}} & I_{F_{1h}M_1} \\ I_{F_{1v}F_{1h}} & I_{F_{1v}F_{1v}} & I_{F_{1v}M_1} \\ I_{M_1F_{1h}} & I_{M_1F_{1v}} & I_{M_1M_1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_{1h} \\ \delta_{1v} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

O que resulta na obtenção da matriz de rigidez para viga curva no sistema de coordenadas local do nó. Aplicando inicialmente $\begin{Bmatrix} \delta_{1h} \\ \delta_{1v} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$:

$$K_{11} = F_{1h} = \frac{(I_{F_{1v}F_{1v}} I_{M_1M_1}) - I_{F_{1v}M_1}^2}{\det(I_1)} \quad (51)$$

$$K_{12} = F_{1v} = \frac{(I_{F_{1v}M_1} I_{M_1F_{1h}}) - (I_{F_{1v}F_{1h}} I_{M_1M_1})}{\det(I_1)} \quad (52)$$

$$K_{13} = M_1 = \frac{(I_{F_{1v}F_{1h}} I_{M_1F_{1v}}) - (I_{F_{1v}F_{1v}} I_{M_1F_{1h}})}{\det(I_1)} \quad (53)$$

Fazendo o mesmo para $\begin{Bmatrix} \delta_{1h} \\ \delta_{1v} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} \delta_{1h} \\ \delta_{1v} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$, determinam-se também os termos

$K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{31}, K_{32}$ e K_{33} .

Em seguida, repete-se a mesma análise para o nó número 2, com relação aos esforços do nó 1, conforme Figura 6.

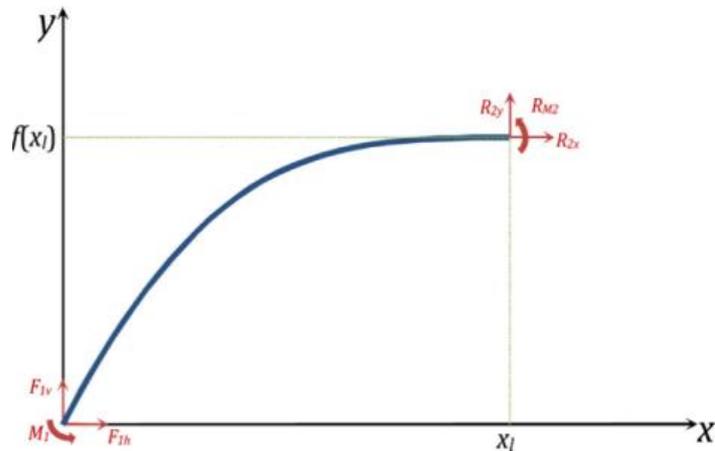


Figura 6. Esquema dos nós 1 e 2 para dedução da matriz de Rigidez de Viga Curva

Realizando-se, portanto, o mesmo procedimento visto, porém para o nó 2, com os esforços em 1, é possível obter outros termos da matriz de rigidez, a saber: $K_{44}, K_{45}, K_{46}, K_{54}, K_{55}, K_{56}, K_{64}, K_{65}$ e K_{66} .

Os termos restantes também advêm do mesmo procedimento realizado, porém considerando-se primeiramente as equações de equilíbrio para o nó 1, com relação aos esforços do nó 2 e, por fim, utilizando-se as equações de equilíbrio do nó 2, com relação aos esforços do próprio nó 2.

Sendo assim, determina-se a matriz de rigidez de Viga Curva. No entanto, assim como visto na dedução, esta referencia-se em coordenadas locais (tangencial e normal ao ponto da curva) e, para fins de análise e comparação com o modelo Clássico, é necessário que esta matriz esteja no sistema inercial de referência da Figura 1. Para isto, é necessário que a matriz obtida $[K_{local}]$ seja na realidade transformada para $[K_{inercial}]$, através de uma matriz de transformação de rotação $[T]$, logo:

$$[K_{inercial}] = [T]^t [K_{local}] [T] \quad (54)$$

O que conduz ao resultado final para viga curva bidimensional:

$$[K_{global}] = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} (C^2AL^2 + 12S^2I) & (CSAL^2 - 12CSI) & -6SIL & (-C^2AL^2 - 12S^2I) & (-CSAL^2 + 12CSI) & -6SIL \\ (CSAL^2 - 12CSI) & (12C^2I + S^2AL^2) & 6CIL & (12CSI - CSAL^2) & (-12C^2I - S^2AL^2) & 6CIL \\ -6SIL & 6CIL & 4IL^2 & 6SIL & -6CIL & 2IL^2 \\ (-C^2AL^2 - 12S^2I) & (12CSI - CSAL^2) & 6SIL & (C^2AL^2 + 12S^2I) & -12CSI + CSAL^2 & 6SIL \\ (-CSAL^2 + 12CSI) & (-12C^2I - S^2AL^2) & -6CIL & (-12CSI + CSAL^2) & (12C^2I + S^2AL^2) & -6CIL \\ -6SIL & 6CIL & 2IL^2 & 6SIL & -6CIL & 4IL^2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Onde C representa $\cos(\theta)$ do respectivo nó, S é $\sin(\theta)$ do respectivo nó, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia, A é a área da seção transversal e L representa o comprimento do elemento de eixo.

Alguns aspectos da matriz de rigidez de Viga Curva são de importante análise, por exemplo, a presença do grau de liberdade axial do eixo. Além disto, nos elementos das três primeiras linhas, deverão ser introduzidos os senos e cossenos do primeiro nó, enquanto nas últimas três linhas, deverão ser introduzidos os senos e cossenos do segundo nó.

Os graus de liberdade da matriz da equação (55), então passa a ser:

$$\{X\} = \{ \delta_{ih} \ \delta_{iv} \ \theta_i \ \delta_{jh} \ \delta_{jv} \ \theta_j \} t \quad (56)$$

Onde δ_{ih} e δ_{jh} indicam os deslocamentos axiais dos nós i e j, δ_{iv} e δ_{jv} indicam os deslocamentos verticais dos nós i e j e θ_i e θ_j indicam os deslocamentos angulares dos nós i e j. Outro importante aspecto é que todos os deslocamentos advindos do equacionamento utilizando a matriz da equação (55), fornecem os deslocamentos em relação a curva de empenamento, assim como especificado no Exemplo 1 do Capítulo 3, Seção 3.

Adaptando, portanto, para o movimento do eixo no plano YZ e desconsiderando, a princípio, o grau de liberdade axial X, para fins de comparação entre o método Clássico e de Viga Curva, a matriz de rigidez é:

$$[K_v] = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} 12C_{z1}^2I + S_{z1}^2AL^2 & 0 & 0 & 6C_{z1}IL & -12C_{z1}^2I - S_{z1}^2AL^2 & 0 & 0 & 6C_{z1}IL \\ 0 & 12C_{y1}^2I + S_{y1}^2AL^2 & -6C_{y1}IL & 0 & 0 & -12C_{y1}^2I - S_{y1}^2AL^2 & -6C_{y1}IL & 0 \\ 0 & -6C_{y1}IL & 4IL^2 & 0 & 0 & 6C_{y1}IL & 2IL^2 & 0 \\ 6C_{z1}IL & 0 & 0 & 4IL^2 & -6C_{z1}IL & 0 & 0 & 2IL^2 \\ -12C_{z2}^2I - S_{z2}^2AL^2 & 0 & 0 & -6C_{z2}IL & 12C_{z2}^2I + S_{z2}^2AL^2 & 0 & 0 & -6C_{z2}IL \\ 0 & -12C_{y2}^2I - S_{y2}^2AL^2 & 6C_{y2}IL & 0 & 0 & 12C_{y2}^2I + S_{y2}^2AL^2 & 6C_{y2}IL & 0 \\ 0 & -6C_{y2}IL & 2IL^2 & 0 & 0 & 6C_{y2}IL & 4IL^2 & 0 \\ 6C_{z2}IL & 0 & 0 & 2IL^2 & -6C_{z2}IL & 0 & 0 & 4IL^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Em que estão os mesmos graus de liberdade da equação (2):

$$\{X\} = \{ v_i \ w_i \ \theta_i \ \Psi_i \ v_j \ w_j \ \theta_j \ \Psi_j \}^T \quad (2)$$

Para melhor compreensão da dedução da matriz de rigidez de viga curva, deve-se consultar Iman, Friswell e Flores (2014), onde é explicitado de maneira mais detalhada todos os cálculos e equacionamentos para obtenção da matriz de rigidez e mudanças de coordenadas.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

A seguir encontram-se os principais resultados obtidos nas simulações, a saber: curva de ajuste de empenamento, resposta em frequência de rotor laval empenado com mancal e resposta temporal de rotor laval empenado com mancal.

4.1. Curva de ajuste de empenamento

Dentre os tópicos presentes para aprimoramento do empenamento de eixo através de viga curva, está a comparação entre os 3 tipos de interpolação polinomial: Spline, Newton e Lagrange, que corresponde ao final do período do sexto mês, previsto no cronograma inicial.

Sendo assim, implementaram-se os modelos de ajuste curva pelos três diferentes métodos, através do Software Matlab®, sendo inseridos dois diferentes resultados de medições de empenamentos de eixo, obtidos por Sanches (2015), sendo as curvas apresentadas na Figura 8.

A disposição dos nós, ou seja, os pontos ao longo da coordenada das abcissas, segue-se conforme a Figura 7.

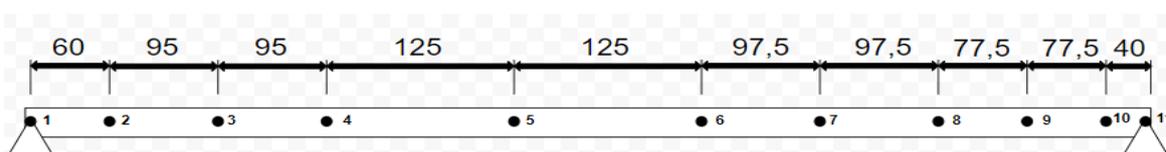
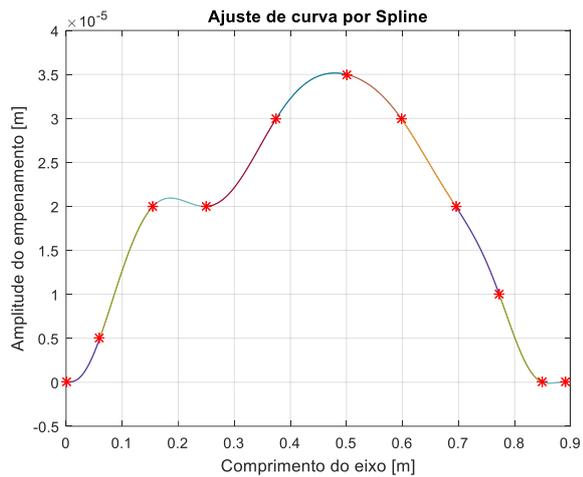


Figura 7. Posição dos nós no eixo x para curva de empenamento.

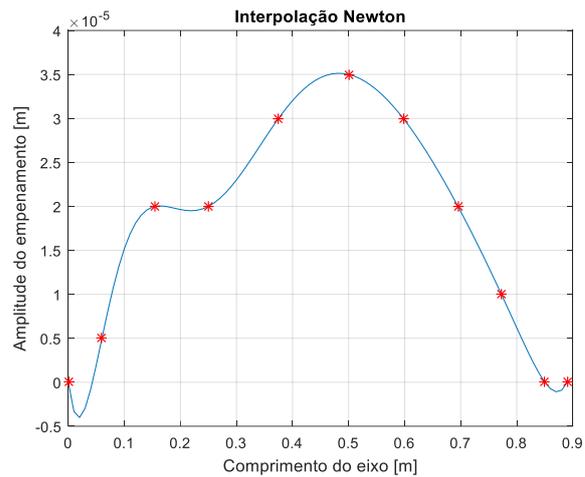
Sanches (2015), em suas primeiras medições por relógio comparador, obteve os seguintes valores práticos:

Nós:	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11
Valor (μm)	0	5	20	20	30	35	30	20	10	0	0

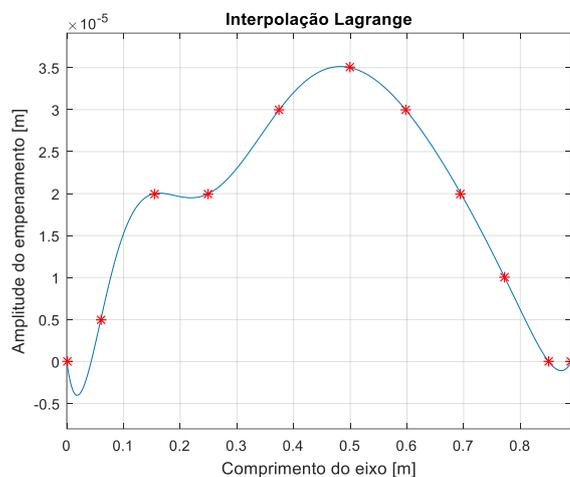
Os resultados numéricos do ajuste, para os três métodos implementados, foram:



(a)



(b)

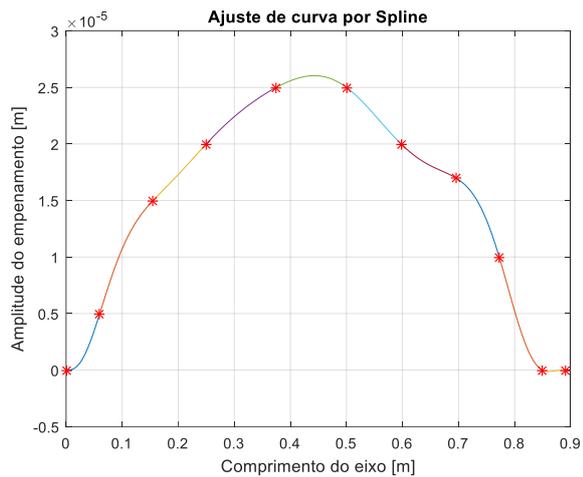


(c)

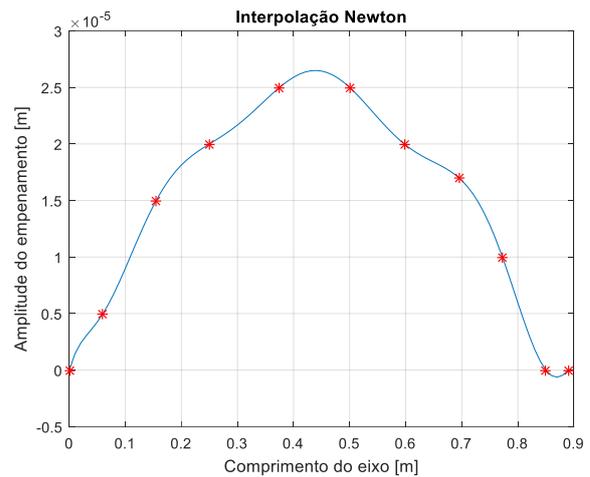
Figura 8. Resultados do ajuste de curva de empenamento através dos diferentes métodos de Interpolação, sendo "*" os pontos medidos por Sanches (2015): (a) Interpolação por Spline; (b) Interpolação por Newton; (c) Interpolação por Lagrange.

Para a segunda medição por relógio comparador, Sanches (2015) obteve aos seguintes valores:

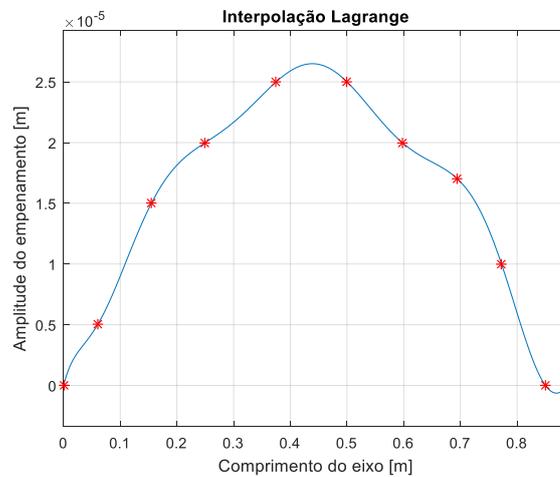
Nós:	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11
Valor (μm)	0	5	15	20	25	25	20	17	10	0	0



(a)



(b)



(c)

Figura 9. Resultados do ajuste de curva de empenamento através dos diferentes métodos de Interpolação, sendo “*” os pontos medidos por Sanches (2015): (a) Interpolação por Spline; (b) Interpolação por Newton; (c) Interpolação por Lagrange.

A partir dos resultados dos ajustes de curva por interpolação, nota-se que, de maneira geral, todos os métodos responderam bem a uma primeira análise qualitativa do resultado obtido.

Na primeira simulação é possível notar que nas interpolações de Newton e de Lagrange ocorrem inconsistências relacionadas aos efeitos de borda, região onde estes dois ajustes apresentam valores negativos.

Este efeito, apesar de matematicamente correto, pode trazer desvios do comportamento físico para as simulações numéricas, uma vez que, nas medições de Sanches (2015) não foram constatados empenamentos negativos. Ademais, é um tanto quanto incomum observar empenamentos negativos em intervalos tão curtos do comprimento de eixo.

Na segunda simulação, percebe-se que os resultados foram ainda mais próximos entre si, porém permanecendo as incongruências com efeito de bordas ao final dos ajustes de Newton e Lagrange.

Sendo assim, levando-se em conta o perfil medido do empenamento e os efeitos de borda, além de possuir menor esforço computacional e garantir continuidade até a terceira derivada, decidiu-se que o melhor ajuste é de Interpolação por Spline para as futuras simulações numéricas com viga curva.

4.2. Resposta em frequência

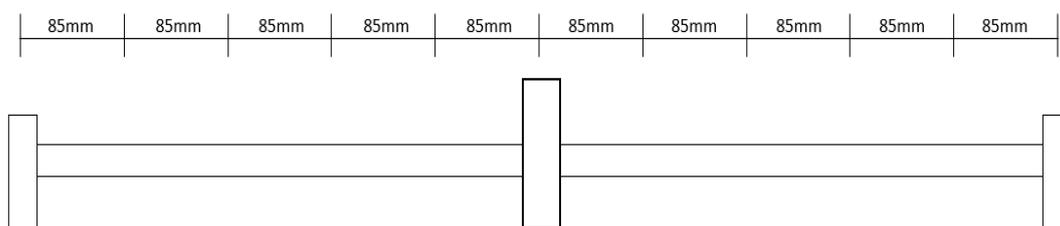
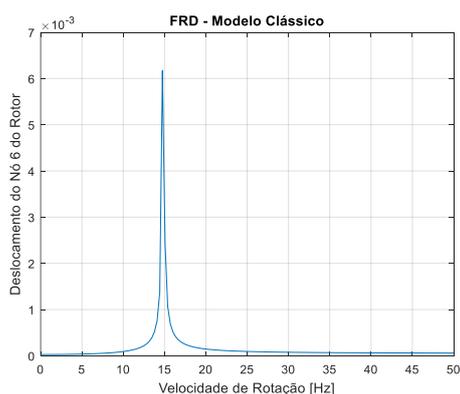


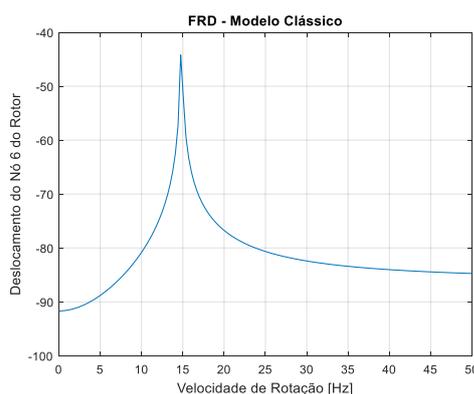
Figura 10. Esquema de eixo simulado, com mancal hidrodinâmico nas extremidades e disco centralizado

O empenamento residual simulado é dado pelos seguintes valores nos nós:

Nós:	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11
Valor (μm)	0	5	15	20	25	25	20	17	10	0	0



(a)



(b)

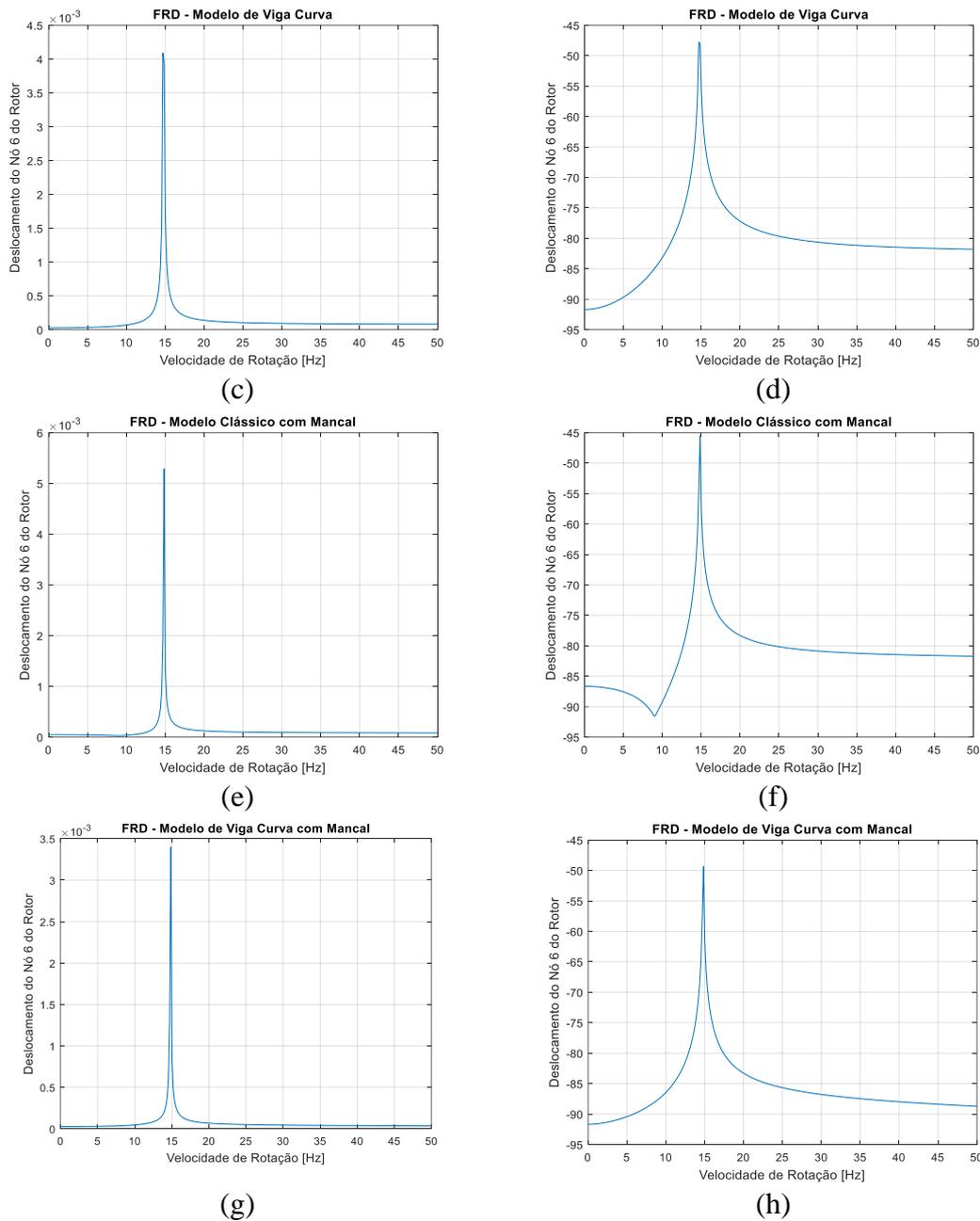


Figura 11. Resposta em frequência do eixo acima, coluna da esquerda resultados em escala linear e coluna direita escala em dB: (a) e (b) modelo clássico de eixo biapoiado; (c) e (d) modelo de viga curva de eixo biapoiado; (e) e (f) modelo clássico com mancal hidrodinâmico; (g) e (h) modelo de viga curva com mancal hidrodinâmico

A partir da análise dos gráficos de resposta em frequência, é possível constatar que o modelo de viga curva enrijece o eixo, uma vez que a amplitude máxima na velocidade crítica é maior para o caso de modelagem clássica. Este resultado está de acordo com o esperado pelo modelo, uma vez que a presença de arqueamento residual no eixo gera um aumento na rigidez.

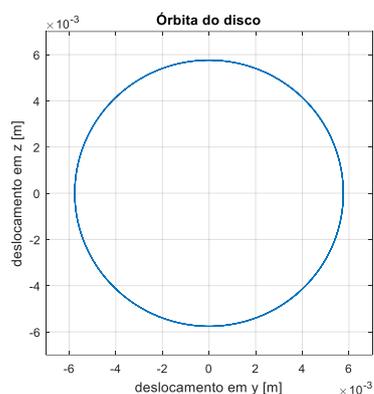
Outra importante análise está na frequência natural do sistema, a qual, apesar do enrijecimento, não sofreu significativas variações.

Além disto, é possível notar que a presença do mancal hidrodinâmico fez com que a amplitude máxima de deslocamento diminuísse no disco, o que também está de acordo com a modelagem esperada, pois a flexibilidade de movimento nas pontas do eixo causa um menor deslocamento do nó do disco.

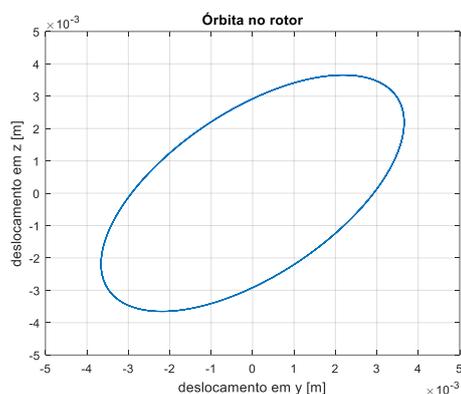
4.3. Resposta no domínio do tempo

Para análise da resposta no tempo, utilizou-se o empenamento na tabela abaixo, com rotação na velocidade crítica de 14,7 Hz, fase 45° graus. O rotor é o mesmo simulado na figura 10.

Nós:	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11
Valor (μm)	0	10	30	40	50	50	40	34	20	0	0



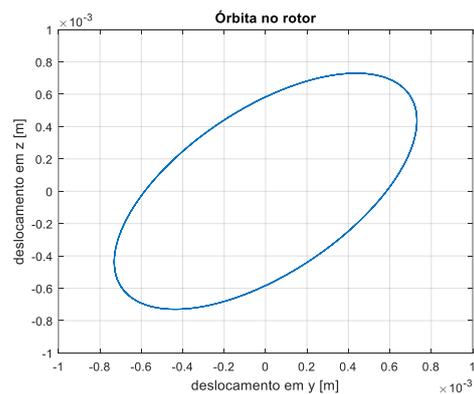
(a)



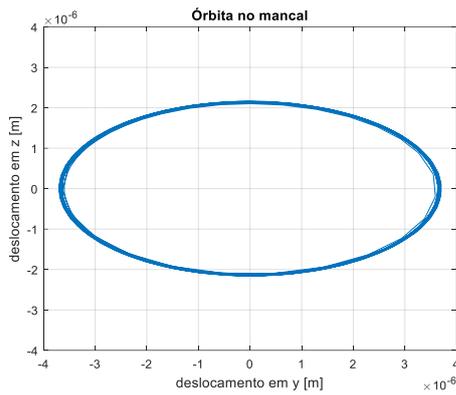
(b)



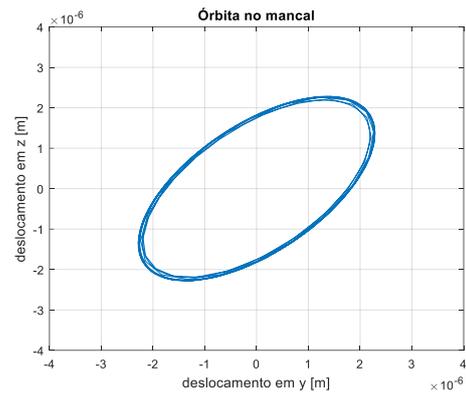
(c)



(d)



(e)



(f)

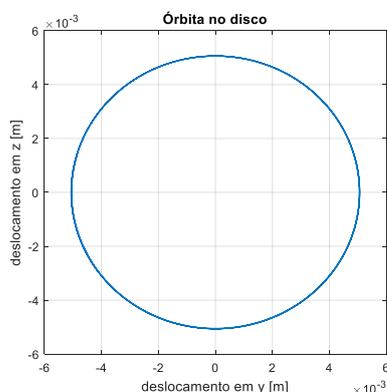
Figura 12. Resposta no tempo do eixo simulado na Figura 10. Coluna da esquerda Modelo Clássico, coluna da direita Modelo Viga Curva. (a) e (b) órbita no disco para eixo bipoiado; (c) e (d) órbita no disco para eixo com mancal; (e) e (f) órbita no mancal.

A partir da análise da resposta no tempo, órbitas dos discos, é possível notar diferenças iniciais qualitativas, uma vez que a no modelo de viga curva a presença de uma fase do empenamento em relação ao desbalanceamento causa uma inclinação da órbita do nó do disco e do mancal, tal fato ocorre devido a nova inserção de anisotropia causada pela mudança de rigidez direcional do eixo empenado.

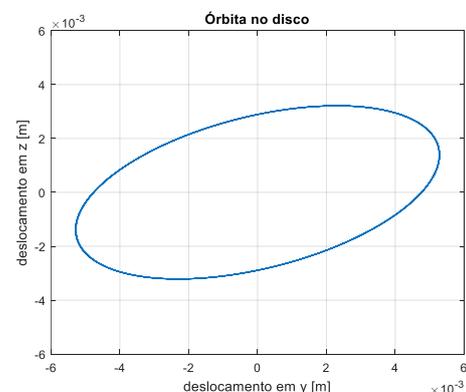
Além disto, seguindo o padrão apresentado na FRD, as órbitas de viga curva apresentaram uma menor amplitude de deslocamento, quando comparada com o modelo clássico.

O mesmo ocorreu também para o caso com mancal, onde devido a maior flexibilidade dos nós das extremidades, existe um menor deslocamento no nó do disco.

Multiplicando o empenamento da simulação anterior por 2 mantendo o valor do desbalanceamento original, com rotação de 14,7 Hz e agora fase de 200°, chegamos aos seguintes resultados:



(a)



(b)

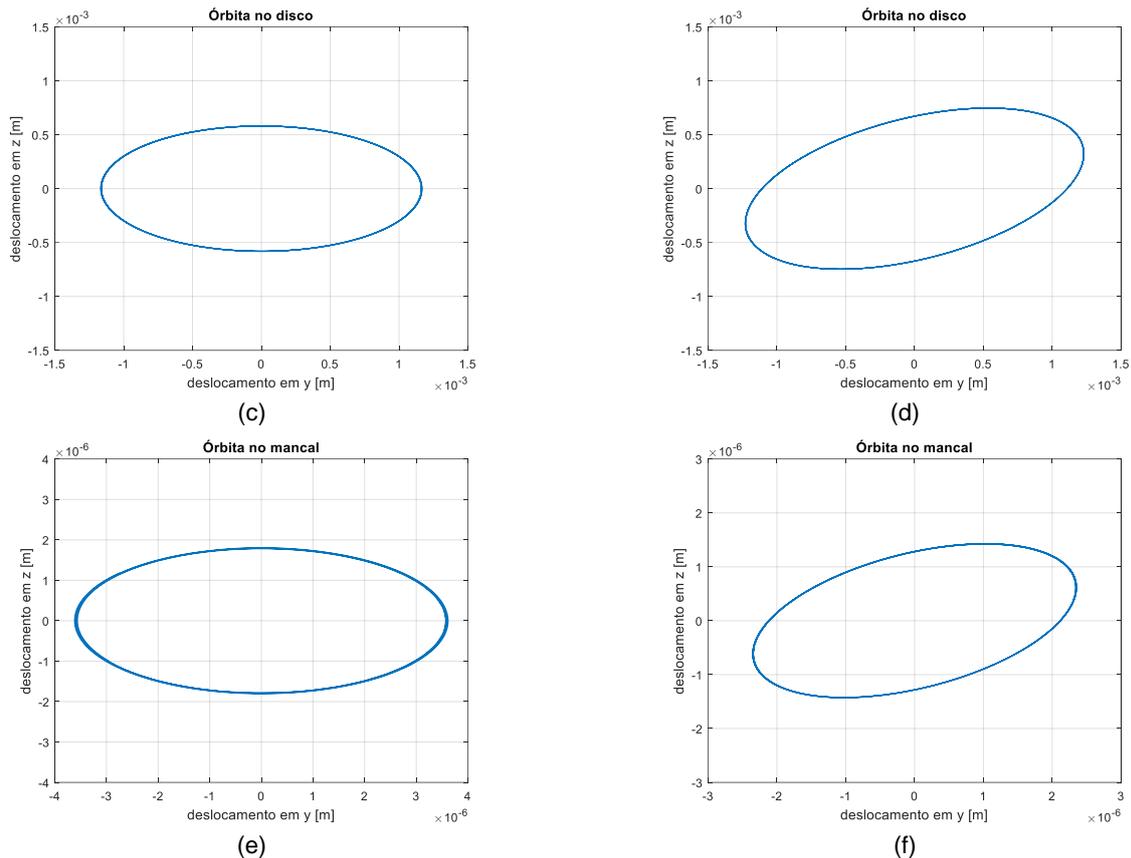


Figura 13. Resposta no tempo do eixo simulado na Figura 10. Coluna da esquerda Modelo Clássico, coluna da direita Modelo Viga Curva. (a) e (b) órbita no disco para eixo bi-poiado; (c) e (d) órbita no disco para eixo com mancal; (e) e (f) órbita no mancal.

Pode-se perceber que os resultados seguiram o mesmo padrão para o eixo simulado nas condições anteriores, ou seja, o modelo de viga curva causa enrijecimento anisotrópico do eixo.

Este efeito pode ser visto tanto no mancal quanto na órbita do disco. Ademais, no modelo clássico a anisotropia independe da fase do empenamento, o que está de acordo com os resultados esperados, uma vez que os parâmetros do mancal independem desta variável de entrada (fase do empenamento).

Além do enrijecimento, é possível notar que o eixo, na condição bi-apoiado, no modelo clássico, apresenta órbita totalmente circular, o que é um bom parâmetro de análise para futuros testes experimentais, pois difere consideravelmente do modelo para viga curva.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

Os resultados obtidos são promissores, principalmente por sua facilitação na identificação da falha do empenamento com a respectiva variação da fase entre empenamento e desbalanceamento.

Com a introdução do mancal hidrodinâmico e ajuste da curva de empenamento por Spline, é possível ampliar a possível gama de comparação com eixos de Rotor Laval disponíveis em literatura.

Este tema está previsto para continuação do estudo em trabalhos de pós graduação no Laboratório de Máquinas Rotativas da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, sendo os tópicos mais relevantes o de comparação com os resultados experimentais e a sua identificação através de rede neural de forma preditiva.

Além disto, é possível trazer deduções similares a este trabalho para a mudança que o empenamento causa não só na rigidez, mas também nas matrizes de massa, giroscópica e de amortecimento, logo, um outro importante tópico é a introdução destas matrizes, a fim de se obter resultados mais próximos aos de equipamentos e eixos rotativos na prática.

Referências Bibliográficas

BEER, F. P.; JR, E. R. J.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. Mecânica dos Materiais. 5. ed. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2003.

BRAUT, S.; ZIGULIC, R.; BUTKOVIC, M. Numerical and Experimental Analysis of a Shaft Bow Influence on a Rotor to Stator Contact Dynamics. *Journal of Mechanical Engineering*, v. 54, p. 693-706, 2008.

CAMARGO, L. W. F.; Ajuste de parâmetros para desalinhamento e empenamento aplicado à modelagem de rotores. 2010. 215 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP. 2010.

DARPE, A. K.; GUPTA, K.; CHAWLA, A. Dynamics of a Bowed Rotor with a Transverse Surface Crack. *Journal of Sound and Vibration*, v. 296, p. 888-907, 2006.

DAYYANI I.; FRISWELL M. I.; FLORES E. I. S. A general super element for a curved beam. *International Journal of Solids and Structures*, p. 3-5, 2014.

FLACK, R. D.; ROOKE, J. H. A Theoretical-Experimental Comparison of the Synchronous Response of a Bowed Rotor in Five Different Sets of Fluid Film Bearings. *Journal of Sound and Vibration*, v. 73, n. 4, p. 505-517, 1980.

GENTA, G. *Dynamics of Rotating Systems*. New York: Springer, 2005

HIBBELER, H. B. *Resistência dos Materiais*. 7. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

KANG, C. H. et al. Dynamic Analysis of Gear-Rotor System with Viscoelastic Supports under Residual Shaft Bow Effect. *Mechanism and Machine Theory*, v. 46, p. 264-275, 2011.

NADEEM, M. H.; HYDER, M. J.; Stress analysis of a steam turbine blade due to bowing effect. Paper apresentado em 15th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology (IBCAST), 9-13 Jan. 2018, Islamabad Paquistão.

NASCIMENTO, B.A.; Eixo empenado em máquinas rotativas, mais uma maneira de detecção. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Centro Universitário Maurício de Nassau, Recife, PE. 2016.

NASH, W. A.; Resistência dos Materiais. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.

NELSON, H.D.; MCVAUGH, J.M. The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements. *Journal of Engineering for Industry* 1976, pp. 593–600.

NICHOLAS, J. C.; GUNTER, E. J.; ALLAIRE, P. E. Effect of Residual Shaft Bow on Unbalance Response and Balancing of a Single Mass Flexible Rotor. Part 1: Unbalance Response. *Journal of Engineering for Power*, p. 171-189, 1976.

NICHOLAS, J. C.; GUNTER, E. J.; ALLAIRE, P. E. Effect of Residual Shaft Bow on Unbalance Response and Balancing of a Single Mass Flexible Rotor. Part II: Balancing. *Journal of Engineering for Power*, p. 182-189, 1976.

NORTON, R. L. *Cam Design and Manufacturing Handbook*. New York: Industrial Press, 2nd edition, 2009, 591p.

RAO, J. S. A Note on Jeffcott Warped Rotor. *Mechanism and Machine Theory*, v. 36, p. 563-575, 2001.

SANCHES, F. D.. Simultaneous identification of unbalance and shaft bow in rotors by means of correlation analysis. PhD thesis, University of Campinas, São Paulo, Brazil, 2015.

SANCHES, F. D.; PEDERIVA R.; Simultaneous identification of unbalance and shaft bow in a two-disk rotor based on correlation analysis and the SEREP model order reduction method. *Journal of sound and vibration*, 2018.

SHIAU, T. N.; LEE, E. K. The Residual Shaft Bow Effect on Dynamic Response of a Simply Supported Rotor with Disk Skew and Mass Unbalances. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, v. 111, p. 170-178, 1989.

SONG, G. F. et al. Theoretical-Experimental Study on a Rotor with a Residual Shaft Bow. *Mechanism and Machine Theory*, v. 63, p. 50-58, 201.

TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D. H.; WEAVER, J. W. *Vibration Problems in Engineering*. 1. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1974.

VANIA, A.; PENNACCHI, P.; CHATTERTON, S. Identification of a Shaft Thermal Bow by Means of Model-Based Diagnostic Techniques. *Proceedings of International Conference Surveillance 7*. Chartres: [s.n.]. 2013. p. 1-11.

WU J. S.; CHIANG L. K. Free vibration of a circularly curved Timoshenko beam normal to its initial plane using finite curved beam elements. Artigo disponível em: www.sciencedirect.com em *Computer & Structures*, 2004. Acesso em: 14 de Agosto de 2019.