



Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Aluno: Carlos Eduardo Celeste Junior - RA: 195395  
Curso: Engenharia Elétrica Integral - 11

## **Controle de Rastreamento de Trajetórias em Tempo-Finito de um Modelo Cinemático com Velocidade Variável**

Orientador: Prof. Dr. José C. Geromel

Campinas  
Segundo Semestre de 2021

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

C33c Celeste Junior, Carlos Eduardo, 1998-  
Controle de rastreamento de trajetórias em tempo-finito de um modelo cinemático com velocidade variável / Carlos Eduardo Celeste Junior. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: José Cláudio Geromel.  
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Função de Lyapunov. 2. Controle por modos deslizantes. 3. Rastreamento automático. I. Geromel, José Cláudio, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações adicionais, complementares

**Título em outro idioma:** Trajectory tracking control in finite-time of a kinematic model with variable velocity

**Palavras-chave em inglês:**

Lyapunov Function  
Sliding mode control  
Automatic Tracking

**Área de concentração:** Engenharia Elétrica

**Titulação:** Bacharel

**Data de entrega do trabalho definitivo:** 24-11-2021



## Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Processo N<sup>o</sup> 302013/2019-9 e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp) - Processo N<sup>o</sup> 2020/07574-6.

Agradeço à minha família e amigos pelo apoio e encorajamento durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também a meus professores e mentores que me muniram com o conhecimento necessário para desenvolver este trabalho.



## Resumo

Este Trabalho de Fim de Curso (TFC) apresenta um novo procedimento para o projeto de controle via realimentação de estado do movimento de um veículo expresso através de um modelo cinemático simples. Para isso, ideias adotadas no estudo de função de Lyapunov de controle e de modos deslizantes são utilizadas e melhoradas com o intuito de impor, simultaneamente, tempo-finito, rastreamento assintótico de uma trajetória e orientação (ângulo de guinada) do veículo prescritas. Para atingir esses objetivos, condições de projeto adequadas sobre o ângulo de direção do veículo são resolvidas. Um estudo de caso é apresentado e discutido, a fim de ilustrar claramente os resultados teóricos introduzidos.

**Palavras-chave:** Função de Lyapunov de controle; modos deslizantes; rastreamento de trajetórias em tempo-finito.

Link para o vídeo de apresentação: <https://youtu.be/ybz8kc19Sso>



## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
1.1	Justificativa . . . . .	5
1.2	Objetivos . . . . .	5
1.2.1	Objetivo Geral . . . . .	5
1.2.2	Objetivos Específicos . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>6</b>
2.1	Função de Lyapunov de Controle . . . . .	6
2.1.1	Função de Lyapunov . . . . .	6
2.1.2	Síntese de Controle FLC . . . . .	7
2.2	Controle de Modos Deslizantes . . . . .	7
2.3	Modelo de Meio-Carro e Rastreamento de Trajetórias . . . . .	7
2.3.1	Modelo Cinemático . . . . .	8
2.3.2	Modelo Dinâmico . . . . .	9
2.4	Rastreamento em Tempo-Finito . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Síntese de Controle em Tempo-Finito</b>	<b>11</b>
3.1	Descrição do Problema e Resultados Preliminares . . . . .	11
3.2	Exemplo Ilustrativo - Duplo Integrador . . . . .	13
3.3	Síntese de Controle - Modelo Cinemático . . . . .	13
3.4	Rastreamento Genérico de Trajetórias . . . . .	15
3.5	Síntese de Controle - Modelo Cinemático com Velocidade Variável . . . . .	16
3.6	Análise de Robustez . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>18</b>
4.1	Duplo Integrador . . . . .	18
4.2	Modelo Cinemático do Meio-Carro . . . . .	20
4.3	Modelo Cinemático Generalizado do Meio-Carro . . . . .	21
4.4	Rastreador de Trajetórias . . . . .	23
4.5	Aplicação Prática . . . . .	24
4.6	Resultados Adicionais . . . . .	25
4.7	Desenvolvimentos Futuros . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>25</b>
	<b>Referências</b>	<b>26</b>
	<b>ANEXO</b>	<b>28</b>

# 1 Introdução

A teoria de controle é um campo bem estabelecido com uma vasta e rica literatura, cobrindo inúmeros problemas, que tratam da síntese de controle para sistemas dinâmicos, desde um pêndulo simples, até maquinários industriais complexos e drones. Esta área de estudo possui dois principais ramos, um que lida com sistemas lineares e outro com sistemas não lineares, sendo o último, o ramo que cobre a maior variedade de problemas, visto que em geral os sistemas de controle reais são não lineares. Lidar com este tipo de sistema não é algo trivial, pois muitos métodos desenvolvidos para a síntese de controladores têm aplicação limitada a uma pequena gama de problemas.

No contexto de sistemas não lineares, um problema interessante para ser estudado é o de rastreamento de trajetórias. Para este trabalho de fim de curso consideramos o rastreamento de trajetórias do modelo de meio-carro, que também é adotado em muitos trabalhos que estudam uma proposta semelhante, onde modelos puramente cinemáticos ou modelos dinâmicos são considerados.

Assim sendo, neste trabalho adotamos um procedimento alternativo combinando resultados teóricos já bem estabelecidos, que levaram ao desenvolvimento de dois dos mais efetivos métodos de projeto de controle não linear disponíveis na literatura, a saber: Função de Lyapunov de Controle (FLC) e Controle de Modos Deslizantes (CMD). A seguir, nosso foco principal é o de generalizar o procedimento FLC, mas com uma função de Lyapunov semi-definida positiva que estabelece a distância do estado atual até a trajetória a ser rastreada. Além disso, uma característica principal do nosso método de controle é a de permitir que o ângulo de guinada do veículo também seja especificado. Ademais, a lei de controle via realimentação de estado proposta, ao contrário do que normalmente ocorre no contexto CMD, é contínua e o rastreamento da trajetória especificada se dá em tempo-finito, com erro fixado *a priori*.

## 1.1 Justificativa

A literatura está repleta de trabalhos que lidam com a síntese de controle para o rastreamento de trajetórias. Este difícil procedimento é usualmente solucionado resolvendo-se um problema de programação não-linear, como será discutido mais à frente. Além disso, um ponto importante neste tipo de problema é obter a convergência em tempo-finito, para que o sistema em malha fechada seja capaz de atingir e desenvolver a trajetória especificada.

Como alternativa ao caminho usual, desenvolvemos um procedimento para a síntese de controle de forma analítica, combinando ideias de função de Lyapunov de controle e de modos deslizantes, afim de obter um controlador contínuo, que realiza o rastreamento da trajetória, assegura a estabilidade, a robustez e a convergência em tempo-finito.

Em nossa opinião, o procedimento que será proposto é adequado ao contexto do rastreamento de trajetórias, oferecendo uma nova maneira de lidar com este problema, que difere do procedimento usual. Ademais, as ideias aqui propostas podem ser aplicadas em outros tipos de problemas e são interessantes de serem exploradas em outros contextos.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

Considere um sistema não linear, invariante no tempo com representação de estado dada na forma:

$$\dot{\xi} = f(\xi, u) \tag{1}$$

$$z = g(\xi) \tag{2}$$

em que  $\xi(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a variável de estado,  $u(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a variável de controle e  $z(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^r$  é a variável de saída controlada. O sinal de controle é considerado suave o suficiente para que (1) admita uma solução para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Nosso principal objetivo é determinar uma lei de controle via realimentação de estado  $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de modo que  $z \rightarrow 0$ . A restrição  $z = g(\xi) = 0$  define uma ou um conjunto de trajetórias de interesse. Para isto, como já foi dito, adotamos e generalizamos as

ideias já muito bem estabelecidas no âmbito de FLC e CMD, para lidar com o controle de rastreamento de trajetórias. Neste sentido, reafirmamos, nosso propósito não é o de assegurar a estabilidade de um ponto de equilíbrio, mas de assegurar que uma trajetória qualquer de interesse possa ser rastreada.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Com o objetivo de testar a lei de controle obtida, vamos considerar um modelo simplificado do deslocamento de um carro no plano. Este modelo simplificado é denominado Modelo Cinemático, e é descrito pelas seguintes equações diferenciais não lineares, de primeira ordem acopladas, que serão obtidas e discutidas em mais detalhes nas próximas seções.

$$\dot{x}(t) = w \cos(\theta(t)) \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = w \sin(\theta(t)) \quad (4)$$

$$\dot{\theta}(t) = (w/L) \tan(\delta(t)) \quad (5)$$

em que, no sistema internacional de unidades (SI),  $(x(t), y(t))$ , em [m], são as coordenadas que definem a posição da roda traseira do carro em relação a um referencial inercial,  $L$ , em [m], é o seu comprimento,  $w = w_r$ , em [m/s], é o módulo de sua velocidade considerada constante,  $\theta(t)$ , em [rad], é o ângulo de guinada medido em relação à abscissa  $x$  e  $\delta(t)$ , em [rad], é o ângulo de direção medido em relação ao seu eixo. O objetivo é determinar  $u(t) = \tan(\delta(t))$ , que é a variável de controle sujeita à restrição  $|u(t)| \leq \tan(\delta_{max})$ , de tal forma que o carro se desloque entre dois pontos previamente definidos, em um intervalo de tempo-finito (o menor possível). Em seguida, propomos um algoritmo que possibilita impor ao carro, assintoticamente, uma trajetória específica, ou seja, construímos um seguidor de trajetórias em malha fechada. Por fim, desejamos expandir o escopo deste trabalho relaxando a hipótese da velocidade  $w = w_r$  ser constante em relação ao tempo.

## 2 Revisão Bibliográfica

### 2.1 Função de Lyapunov de Controle

Função de Lyapunov de controle é uma extensão da ideia de função de Lyapunov para sistemas com entradas de controle. A função de Lyapunov é utilizada para testar se um sistema dinâmico é estável, e em alguns casos, assintoticamente estável. Em outras palavras, verificar se para um sistema iniciando em um estado  $y \neq 0$  em um determinado domínio  $D$  continuará neste domínio ou ainda, se ele evoluirá assintoticamente para  $y = 0$ . Para maiores detalhes a respeito destes tópicos, o leitor deve consultar os trabalhos seminais Franklin et al. (2019) e Khalil (2002), bem como o livro texto Geromel & Korogui (2019).

#### 2.1.1 Função de Lyapunov

Considere um sistema dinâmico invariante no tempo, sem ação de controle, com representação de estado dada na forma

$$\dot{\xi} = f(\xi) \quad (6)$$

em que  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e  $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com um ponto de equilíbrio em  $\xi = 0$ . Seja a candidata à função de Lyapunov do sistema  $\vartheta(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , cuja derivada em relação ao tempo é dada por

$$\dot{\vartheta}(\xi) = \frac{d}{dt} \vartheta(\xi(t)) = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = \nabla \vartheta' f(\xi) \quad (7)$$

O sistema será assintoticamente estável localmente, se  $\vartheta$  for positiva definida em uma região  $D$ , em torno do ponto de equilíbrio  $\xi = 0$ , e a sua derivada em relação ao tempo for negativa definida nesta mesma região. Caso a região para a qual esta condição é verdadeira seja todo o espaço de estado, o sistema é denominado globalmente assintoticamente estável.

### 2.1.2 Síntese de Controle FLC

Desta forma, para realizar a síntese de controle por FLC, utilizamos o mesmo sistema (6), adicionando a ele uma variável de controle  $u \in \mathbb{R}^m$ , assim obtemos

$$\dot{\xi} = f(\xi, u) \quad (8)$$

Em seguida, desejamos encontrar  $u = u(\xi, t)$ , tal que, na região em torno do ponto de equilíbrio, em que  $\vartheta(\xi)$  é positiva definida, sua derivada em relação ao tempo seja negativa definida, isto é

$$\dot{\vartheta}(\xi) = \nabla \vartheta(\xi)' f(\xi, u) < 0 \quad (9)$$

Esta condição pode ser compreendida pensando na função de Lyapunov  $\vartheta(\xi)$  como sendo a energia do sistema e escolhemos  $u(\xi, t)$  que a reduz conforme o sistema evolui no tempo. Portanto, muitas vezes, o problema de encontrar a ação do controlador passa a ser um problema de otimização que pode ser solucionado numericamente.

Outro ponto que podemos destacar é a possibilidade de escolher a forma que a derivada em relação ao tempo de  $\vartheta(\xi)$  terá, permitindo ajustar a resposta do sistema ao controle, obtendo por exemplo, tempo de estabilização finito como demonstraremos mais à frente.

## 2.2 Controle de Modos Deslizantes

O Controle de Modos Deslizantes, é um método de controle que altera a estrutura do sistema dinâmico, através da aplicação de um sinal de controle que, em geral, depende do seu estado atual. Este método consiste, em primeiro escolher uma função  $z = g(\xi)$ , a condição  $z = g(\xi) = 0$  é denominada superfície deslizante e a função escolhida deve ser, tal que quando o sistema estiver na superfície deslizante o estado tende a um estado desejado (de referência), ou seja,  $\xi \rightarrow \xi_r$ . Após escolhido  $z$  projetamos o controle do sistema para levar o sistema até a superfície deslizante, tendo como grande vantagem o tempo-finito para alcançar este objetivo.

Uma grande vantagem deste tipo de controlador é sua robustez, tanto a incerteza dos parâmetros do sistema quanto a ruídos aditivos com incertezas limitadas devido à candidata a função de Lyapunov de controle comumente utilizada, a saber  $\dot{\vartheta} \leq -\mu\sqrt{\vartheta}$ . Uma desvantagem de utilizar uma função candidata como esta, é que o controlador obtido normalmente não é contínuo, contendo funções como  $\text{sign}(\cdot)$ , que podem gerar um comportamento de oscilação em alta frequência entre os modos de operação. Para evitar isso, é possível trocá-las por aproximações como  $\text{sat}(\cdot)$ , desse modo, o controlador projetado passa a ser contínuo, porém ao realizar esta troca paga-se o preço na precisão, visto que, agora existe uma região em torno da superfície deslizante onde o comportamento do sistema muda, sendo apenas garantido que o sistema vai alcançar esta região em tempo-finito, e não mais a superfície deslizante.

Deste modo, podemos compreender este método como uma divisão do problema em várias partes, primeiro desejamos que o sistema alcance a superfície deslizante, em tempo-finito, e após isso que o sistema tenda para o ponto desejado. Um ponto importante a ser ressaltado, é que a função  $z = g(\xi)$  pode ser qualquer, desde que quando o sistema está na condição  $z = 0$ , sua dinâmica o leve para o ponto desejado, ou seja, existe uma grande liberdade para escolher a dinâmica do sistema na superfície deslizante. Para mais detalhes sobre este método veja as referências Incremona et al. (2017), Oliveira et al. (2010), Slotine & Li (1990), Spurgeon (2014), Utkin (1993) e Young et al. (1999).

## 2.3 Modelo de Meio-Carro e Rastreamento de Trajetórias

A literatura contém inúmeros trabalhos que tratam do controle de veículos para que se desloquem em uma trajetória pré-especificada. Um modo interessante e muito utilizado para representar este veículo é o modelo de meio-carro, também conhecido como modelo de bicicleta. Modelos puramente cinemáticos ou modelos dinâmicos são adotados, por exemplo em Celeste Jr & Geromel (2021), Jeon et al. (2013), Kristijan et al. (2008), Pepy et al. (2006), Rucco et al. (2012), Ying (2010) e nas suas referências.

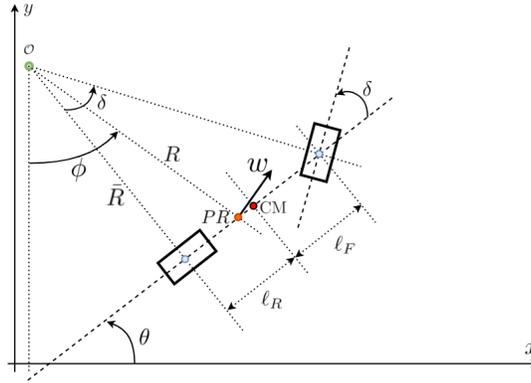


Figura 1: Modelo Cinemático do Meio-Carro

De forma mais específica, uma solução local do problema de controle ótimo que permite determinar o ângulo de direção de um veículo foi proposto em Jeon et al. (2013), a partir da adoção do modelo dinâmico do meio-carro que inclui as forças de atrito produzidas nos seus pneus dianteiros e traseiros. Assim sendo, podemos afirmar que uma possível estratégia de controle de rastreamento de trajetórias resulta da solução de um problema de otimização não linear. Veja também os procedimentos alternativos apresentados em Pepy et al. (2006) e Ying (2010). Neste mesmo contexto, mas adotando modelos puramente cinemáticos, um procedimento de projeto de controle para rastreamento de trajetórias com margens de desempenho foi proposto em Kristijan et al. (2008). Em Rucco et al. (2012) o problema de controle de tempo mínimo foi abordado, a partir de um modelo dinâmico bastante completo. Assim como ocorreu nos demais trabalhos citados, a estratégia de controle ótimo foi determinada numericamente através da solução, em geral difícil de ser calculada, de um problema de programação matemática não linear.

### 2.3.1 Modelo Cinemático

Considere o modelo de meio-carro para um veículo em que  $l_F$  [m] é a distância da roda dianteira até o centro de massa  $CM$  e  $l_R$  [m] a distância da roda traseira até  $CM$ . O comprimento total do carro é denotado por  $L = l_F + l_R$  [m]. Com relação aos respectivos eixos inerciais,  $\delta$  [rad] é o ângulo de direção e  $\theta$  [rad] é o ângulo de guinada. O módulo da velocidade  $w$  [m/s] é um escalar positivo para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

A Figura 1 mostra o modelo cinemático do meio-carro que acabamos de descrever, considerando um ponto de referência ( $PR$ ) genérico. Seja  $R$  a distância entre o centro de rotação  $O$  e o ponto de referência  $PR$ , em que  $\bar{R}$  é a distância do centro de rotação  $O$  até a roda traseira, que é dada por  $\bar{R} = L / \tan(\delta)$ . O ângulo formado pela reta vertical que passa por  $O$  e a reta que passa por  $O$  e o ponto de referência  $PR$  é denotado por  $\phi$ . Para obter as equações de movimento basta analisar o movimento circular do ponto de referência em relação ao centro de rotação  $O$ , ou seja,

$$\dot{\phi} = \frac{w}{R} \quad (10)$$

Assim, obtemos as seguintes equações do movimento

$$\dot{x} = w \cos(\phi) \quad (11)$$

$$\dot{y} = w \sin(\phi) \quad (12)$$

$$\dot{\phi} = w/R \quad (13)$$

Em que,  $w = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ . Devemos enfatizar que podemos adotar como ponto de referência qualquer ponto entre as rodas do carro. Dessa forma, podemos analisar três diferentes locais, a saber: a roda

traseira, o centro de massa  $CM$  e a roda dianteira. Com o ponto de referência sendo a roda traseira, temos que  $\phi = \theta$  e  $\bar{R} = R$ . Assim, obtemos as seguintes equações de movimento

$$\dot{x} = w \cos(\theta) \quad (14)$$

$$\dot{y} = w \sin(\theta) \quad (15)$$

$$\dot{\theta} = (w/L) \tan(\delta) \quad (16)$$

Com o ponto de referência sendo o centro de massa  $CM$ , temos  $R = \sqrt{\bar{R}^2 + \ell_R^2}$  e  $\phi = \theta + \tan^{-1}(\ell_R/\bar{R})$ , o que nos leva a

$$\dot{x} = w \cos(\phi) \quad (17)$$

$$\dot{y} = w \sin(\phi) \quad (18)$$

$$\dot{\phi} = (w/L) \left( \tan(\delta) / \sqrt{1 + (\ell_R/L)^2 \tan^2(\delta)} \right) \quad (19)$$

Com o ponto de referência sendo a roda dianteira, temos  $R = \sqrt{\bar{R}^2 + (\ell_R + \ell_F)^2}$  e  $\phi = \theta + \delta$ . Obtemos assim as seguintes equações do movimento

$$\dot{x} = w \cos(\phi) \quad (20)$$

$$\dot{y} = w \sin(\phi) \quad (21)$$

$$\dot{\phi} = (w/L) \left( \tan(\delta) / \sqrt{1 + \tan^2(\delta)} \right) \quad (22)$$

Portanto, vemos que posicionando o ponto de referência na roda traseira simplificamos o modelo, visto que ele é expresso apenas pela tripla de variáveis  $(x, y, \theta)$ , sendo assim, adotaremos este ponto de referência neste trabalho. Outra observação importante é que a partir da tripla de variáveis  $(x, y, \theta)$  podemos obter a posição de qualquer parte do carro utilizando uma simples transformação. Um ponto interessante do carro é o centro de massa  $CM$ , o qual tem coordenadas  $(x_{cm}, y_{cm}) = (x + \ell_R \cos(\theta), y + \ell_R \sin(\theta))$ .

### 2.3.2 Modelo Dinâmico

Como já dito, existem inúmeros trabalhos que lidam com o meio-carro, em especial seu modelo dinâmico, considerando forças de atrito nas rodas. Para calcular estas forças, é comum utilizar o modelo empírico conhecido como Fórmula Mágica de Pacejka, que é bem complexo, necessitando de vários coeficientes obtidos a partir de testes empíricos realizados nos pneus que serão utilizados, para mais detalhes veja Pacejka (1987). Como neste trabalho não estamos considerando um pneu específico e devido à complexidade desta fórmula, utilizaremos uma simplificação, que será nossa contribuição, para que seja possível sintetizar a lei de controle.

Sejam  $m$ ,  $I_z$  e  $g$  a massa, o momento de inércia com respeito ao eixo  $z$  e a aceleração da gravidade, respectivamente. Da Figura 2, as forças normais na roda traseira e dianteira são dadas por

$$N_R = \frac{\ell_F}{\ell_R + \ell_F} mg \quad (23)$$

$$N_F = \frac{\ell_R}{\ell_R + \ell_F} mg \quad (24)$$

A principal hipótese do nosso modelo dinâmico simplificado é que todas as forças que surgem devido ao contato pneu-estrada (atrito e viscosidade de Coulomb) são modeladas em conjuntamente como sendo

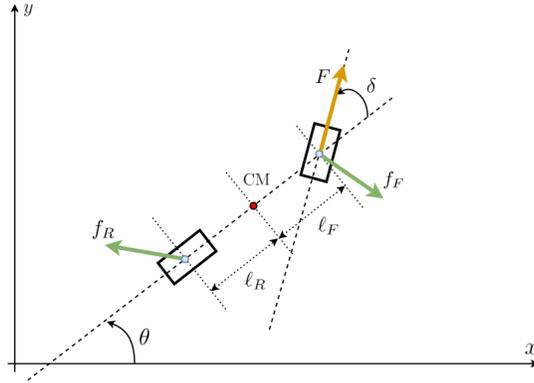


Figura 2: Modelo Dinâmico do Meio-Carro

$$\begin{aligned} f_P(v_P) &= - \left( \rho_P + \frac{\alpha_P N_P}{\beta_P + \|v_P\|} \right) v_P \\ &= -b_P(v_P)v_P \end{aligned} \quad (25)$$

onde o índice  $P$  denota o ponto de atuação e  $v_P$  o vetor de velocidade em  $P$  medido em relação ao referencial inercial  $(x, y)$ . Os coeficientes  $(\rho_P, \alpha_P, \beta_P)$ , que podem depender do ponto de atuação são conhecidos, e  $N_P$  é a força normal. A função escalar não negativa  $b_P(\cdot)$  tem um termo constante devido à viscosidade e outro que depende da força normal devido ao atrito. Para facilitar a notação, é simplesmente denotado como  $b_P$ . Portanto, a nossa principal hipótese é que a força  $f_P = -b_P v_P$  tem a mesma direção que o vetor velocidade no ponto  $P$ .

Conforme é ilustrado na Figura 2, denotando a intensidade da força externa aplicada no meio-carro por  $F$ , o modelo dinâmico que descreve o seu movimento em relação ao referencial inercial pode ser obtido pelo equilíbrio de forças e momentos no  $CM$ , ou seja,

$$m\ddot{x} + (b_R + b_F)\dot{x} = -(b_R l_R - b_F l_F) \text{sen}(\theta) \dot{\theta} + F \cos(\theta + \delta) \quad (26)$$

$$m\ddot{y} + (b_R + b_F)\dot{y} = -(b_F l_F - b_R l_R) \cos(\theta) \dot{\theta} + F \text{sen}(\theta + \delta) \quad (27)$$

$$I_z \ddot{\theta} + (b_R l_R^2 + b_F l_F^2) \dot{\theta} = -(b_R l_R - b_F l_F) \text{sen}(\theta) \dot{x} - (b_F l_F - b_R l_R) \cos(\theta) \dot{y} + F l_F \text{sen}(\delta) \quad (28)$$

onde, para simplificar a notação, a dependência de  $b_R$  e  $b_F$  com respeito às velocidades  $v_R$  e  $v_F$  foi eliminada.

## 2.4 Rastreamento em Tempo-Finito

Um dos nossos grandes interesses neste trabalho é o de obter rastreamento em tempo-finito, por este motivo adotamos uma combinação dos métodos de FLC e CMD. Na literatura temos resultados como os apresentados em Bhat & Bernstein (1998) e Bhat & Bernstein (2000), que fornecem condições para a convergência para segmentos de trajetórias em tempo-finito.

Analisando em maior detalhe os trabalhos mencionados, vemos que é possível obter convergência em tempo-finito, como proposto. Porém, em geral, os controladores obtidos são descontínuos, o que é uma característica indesejável em aplicações práticas.

### 3 Síntese de Controle em Tempo-Finito

#### 3.1 Descrição do Problema e Resultados Preliminares

Considere um sistema não linear, invariante no tempo, com representação de estado dada na forma

$$\dot{\xi} = f(\xi, u) \quad (29)$$

$$z = g(\xi) \quad (30)$$

em que  $\xi(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a variável de estado,  $u(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a variável de controle e  $z(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^r$  é a variável de saída controlada. O sinal de controle é considerado suave o suficiente para que (29) admita uma solução para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . A restrição  $z = g(\xi) = 0$  define uma ou um conjunto de trajetórias de interesse e nosso principal objetivo é determinar uma lei de controle via realimentação de estado  $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de modo que  $z \rightarrow 0$ . Definimos, também, uma região de vizinhança da trajetória de interesse como sendo

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^r : \vartheta(z) \leq c\} \quad (31)$$

em que  $\vartheta(z)$  é definida positiva, diferenciável, radialmente ilimitada e  $c > 0$ . Os seguintes requerimentos devem ser atendidos pelo sistema controlado em malha fechada:

- Para qualquer condição inicial  $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$  com  $z_0 = g(\xi_0) \notin \mathcal{Z}$  a trajetória do sistema em malha fechada atinge o contorno  $\partial\mathcal{Z}$ , do conjunto  $\mathcal{Z}$ , em tempo-finito.
- Para qualquer condição inicial  $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$  com  $z_0 = g(\xi_0) \in \mathcal{Z}$  a trajetória do sistema em malha fechada permanece em  $\mathcal{Z}$  e converge assintoticamente para  $z = 0$ .

Note que a vizinhança  $\mathcal{Z}$  da trajetória de interesse é o primeiro objetivo a ser alcançado em tempo-finito. Após isso, o segundo objetivo é  $z = 0$ , atingido assintoticamente com uma determinada taxa de decaimento. Para isto, utilizamos ideias bem estabelecidas de FLC e CMD, com o objetivo de obter um controlador, que em nossa opinião, é mais adequado para lidar com o rastreamento de trajetórias. Mais adiante, será explorado o exemplo ilustrativo do duplo integrador, que demonstrará as diferenças e possíveis melhorias da abordagem proposta para o projeto da lei de controle em malha fechada, quando comparado com resultados similares disponíveis na literatura. Para maiores detalhes a respeito deste exemplo o leitor deve consultar a referência Bhat & Bernstein (1998).

Retornando nosso foco para a candidata à função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z) = \vartheta(g(\xi))$ . A sua derivada em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória do sistema (29)-(30), é dada por

$$\dot{\vartheta} = \nabla\vartheta(z)' J_g(\xi) f(\xi, u) \quad (32)$$

em que  $\nabla\vartheta(z) = \partial\vartheta/\partial z \in \mathbb{R}^r$  é o gradiente de  $\vartheta(z)$  e  $J_g(\xi) = \partial g(\xi)/\partial \xi \in \mathbb{R}^{r \times n}$  é o Jacobiano da transformação (30). As referências Bhat & Bernstein (1998) e Bhat & Bernstein (2000) estabelecem que para o caso  $z = g(\xi) = \xi$ , se existir uma lei de controle do tipo  $u(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $f(0, u(0)) = 0$  e  $\dot{\vartheta} + \mu\sqrt{\vartheta}$  seja definida negativa, com  $\mu > 0$ , em uma vizinhança do ponto de equilíbrio  $\xi = 0$  então a partir de qualquer condição inicial nesta vizinhança ele pode ser atingido em um tempo-finito  $T(\xi_0) \leq (2/\mu)\sqrt{\vartheta(\xi_0)}$ . A lei de controle resultante, em geral, não é contínua. Em Bhat & Bernstein (1998) discute-se a possibilidade de obter leis de controle contínuas para o caso específico de um sistema dinâmico de segunda ordem (duplo integrador), que será utilizado como comparação para os resultados aqui obtidos.

Como já foi mencionado, nosso objetivo é o de propor uma lei de controle contínua e suave para o rastreamento de uma trajetória pré-estabelecida pelo usuário. Neste sentido, para uma dada função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z)$ , devemos determinar (se possível) uma lei de controle via realimentação de estado  $u = u(\xi)$  tal que

$$\dot{\vartheta} \leq \begin{cases} -\gamma\vartheta & , \quad \vartheta(z) \in \mathcal{Z} \\ -\mu\sqrt{\vartheta} & , \quad \vartheta(z) \notin \mathcal{Z} \end{cases} \quad (33)$$

com parâmetros  $(\gamma, \mu, c)$  positivos. Como pode ser verificado, a continuidade do lado direito de (33) é assegurada desde que  $c = (\mu/\gamma)^2$ . A interpretação desta imposição é simples, suponha que em  $t = 0$ , a condição inicial seja  $\xi(0) = \xi_0$  com  $z_0 = g(\xi_0)$  tal que  $\vartheta(z_0) > c$ . Nesta região, (33) impõe que o seu contorno seja alcançado em um tempo-finito que satisfaz

$$T(z_0) \leq (2/\mu) \left( \sqrt{\vartheta(z_0)} - \sqrt{c} \right) \quad (34)$$

Em seguida, de acordo com (33), para  $t > T(z_0)$ , o sistema evolui assintoticamente para  $z = 0$  governado por  $\vartheta(z(t)) \leq e^{-\gamma(t-T(z_0))}c$ . Portanto, o sistema em malha fechada tem um bom desempenho, visto que, quando está longe do objetivo  $z = 0$ , demora um intervalo de tempo-finito para alcançar o contorno da vizinhança  $\mathcal{Z}$ , e então continua para atingir o objetivo  $z = 0$  assintoticamente, com uma determinada razão de decaimento. O intervalo de tempo-finito definido por  $T(z_0)$ , que depende de  $\mu > 0$ , da razão de decaimento  $\gamma > 0$  e, por consequência, da amplitude  $c = (\mu/\gamma)^2$ , pode ser modificado segundo a escolha apropriada dos parâmetros positivos de projeto  $(\gamma, \mu)$ . É interessante observar que a escolha  $0 < \mu \ll \gamma$  faz com que  $c > 0$  seja arbitrariamente pequeno e (33) se aproxime da condição de Bhat & Bernstein (1998) que discutimos anteriormente. Como veremos em seguida, a vantagem de (33) é que ela permite a síntese de leis de controle em malha fechada contínuas e suaves.

Destas manipulações algébricas fica claro que, para um dado sistema dinâmico (29)-(30) e uma dada função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z)$ , para satisfazer as inequações (33) a maior dificuldade reside na determinação da lei de controle. O próximo lema caracteriza uma possível lei de controle tal que (33) seja satisfeita. É interessante observar que apenas uma condição de síntese da lei de controle impõe os dois comportamentos previstos em (33).

**Lema 1** *Dados os parâmetros  $(\gamma, \mu)$  positivos, definimos os parâmetros  $(\kappa, \lambda)$ , também positivos, que satisfazem  $\kappa = (\mu + \lambda\gamma)/2$ . Se existir um controle de realimentação de estado  $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que*

$$J_g(\xi)f(\xi, u(\xi)) = -\kappa \frac{z}{\lambda + \|z\|}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (35)$$

*então ambas as condições expressas em (33) são satisfeitas para  $\vartheta(z) = \|z\|^2$  e  $c = (\mu/\gamma)^2$ .*

**Prova:** Primeiro, considere  $\dot{\vartheta} \leq -\gamma\vartheta$  ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema em malha fechada. Usando (35) temos

$$-2\kappa \frac{\|z\|^2}{\lambda + \|z\|} \leq -\gamma\|z\|^2 \quad (36)$$

a qual, a partir de manipulações algébricas simples, implica que  $\|z\| \leq (2\kappa - \lambda\gamma)/\gamma$ , ou seja,  $\vartheta(z) = \|z\|^2 \leq c$ . Segundo, considere que a inequação  $\dot{\vartheta} \leq -\mu\sqrt{\vartheta}$  se mantém ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema de malha fechada. Usando novamente (35) temos

$$-2\kappa \frac{\|z\|^2}{\lambda + \|z\|} \leq -\mu\|z\| \quad (37)$$

implicando que  $\|z\| \geq \mu\lambda/(2\kappa - \mu)$ , ou seja,  $\vartheta(z) = \|z\|^2 \geq c$ . Vale ressaltar que para todos os pontos do espaço de estado tais que  $\vartheta(z) = \|z\|^2 = c$ , o sistema em malha fechada respeita ambas as inequações (36) e (37), assim

$$-2\kappa \frac{\|z\|^2}{\lambda + \|z\|} \leq -\mu\|z\| = -\gamma\|z\|^2 \quad (38)$$

e a prova está completa.  $\square$

Embora simples, mas da forma apresentada no Lema 1, um resultado semelhante parece não estar disponível na literatura. Como esperado, pode ser verificado que, para um dado  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , não é sempre possível resolver a equação (35) resultando no correspondente controle de realimentação de estado  $u(\xi)$ . Felizmente, nas próximas seções, é mostrado que a condição de síntese de controle (35) pode ser resolvida para as situações específicas consideradas nesse trabalho.

### 3.2 Exemplo Ilustrativo - Duplo Integrador

Para ilustrar o resultado teórico do Lema 1 vamos aplicá-lo à síntese de controle de um sistema dinâmico de segunda ordem com duplo integrador proposto em Bhat & Bernstein (1998). Trata-se do modelo simples que fornece o deslocamento de uma massa unitária de 1 [kg] sob a ação de uma força com intensidade  $u$  [N], em um ambiente sem a presença de atrito. O deslocamento e a velocidade são denotados por  $x$  [m] e  $y$  [m/s], respectivamente. A representação de estado é da forma (29)-(30) em que

$$\dot{x} = y \quad (39)$$

$$\dot{y} = u \quad (40)$$

$$z = \alpha x + y \quad (41)$$

sendo  $\alpha > 0$  dado. A função de Lyapunov de controle escolhida é a mais simples possível, ou seja,  $\vartheta(z) = z^2$ . Definindo a variável de estado  $\xi = [x \ y]^T \in \mathbb{R}^2$  e as funções  $f(\xi, u)$  e  $g(\xi)$  podemos verificar que a lei de controle em malha fechada

$$u(\xi) = -\alpha y - \kappa \frac{z}{\lambda + |z|} \quad (42)$$

satisfaz a condição expressa no Lema 1. De fato, com a lei de controle (42), a derivada temporal de  $\vartheta(z)$  ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema em malha fechada satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}(z) &= 2z(\alpha \dot{x} + \dot{y}) \\ &= 2z(\alpha y + u) \\ &= -2\kappa \frac{|z|^2}{\lambda + |z|} \end{aligned} \quad (43)$$

na qual usamos o controle de realimentação de estado  $u = u(\xi)$  dado em (42). Com isto, o comportamento esperado é atingir a reta  $z = 0$  em tempo-finito e assim permanecer. Ademais, a partir deste instante de tempo também ocorre  $\dot{z} = 0$ , o que impõe  $0 = \alpha \dot{x} + \dot{y} = \alpha y + \dot{y}$ . Em princípio, como a função de Lyapunov de controle escolhida não é definida positiva, com ela, não podemos diretamente concluir que  $\xi(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Entretanto, como as condições  $z(t) \rightarrow 0$  e  $y(t) \rightarrow 0$  implicam que  $x(t) \rightarrow 0$  concluímos que  $\xi(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Ou seja, a lei de controle (42) assegura que a origem  $\xi = 0$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha fechada.

### 3.3 Síntese de Controle - Modelo Cinemático

Partimos então para a síntese do controle via realimentação de estado para o modelo cinemático do meio-carro descrito em (14)-(16). Inicialmente o módulo da velocidade  $w = w_r$  será considerado constante, porém, mais adiante relaxaremos esta hipótese. Definimos a saída controlada

$$z = (y - y_r) \cos(\theta_r) - (x - x_r) \sin(\theta_r) + \beta(\theta - \theta_r) \quad (44)$$

sendo o escalar  $\beta > 0$  e as coordenadas do ponto de referência  $(x_r, y_r, \theta_r)$  pré-especificadas. A partir de uma condição inicial qualquer  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  e  $\theta(0) = \theta_0$ , o nosso propósito é sintetizar o ângulo de direção dependente do estado  $\delta \in \Delta = \{\delta : |\delta| \leq \delta_{max}\}$ , de tal forma que a trajetória do sistema (14)-(16) atinja uma vizinhança  $\mathcal{Z}$  em tempo-finito  $T(\cdot)$  e, em seguida, convirja assintoticamente para  $z = 0$ .

É importante interpretar este objetivo no contexto do projeto de controle proposto. A restrição  $z = 0$  implica que sempre que  $\theta = \theta_r$ , a trajetória do sistema no plano  $(x, y)$  é uma reta que passa por  $(x_r, y_r)$  com velocidade  $\dot{y} = \tan(\theta_r) \dot{x}$ . Porém, quando  $\theta \neq \theta_r$  a trajetória é uma reta paralela à anterior que exibe a mesma propriedade para a velocidade, mas não passa pelo ponto de referência  $(x_r, y_r)$ . Vale ressaltar que mesmo que o sistema em malha fechada atinja a reta que passa pelo ponto de referência

$(x_r, y_r)$ , com ângulo  $\theta_r$ , pode ocorrer que ele não passe por este ponto, pois as restrições impostas sobre o projeto podem impedir que isto de fato ocorra. Este aspecto será discutido com detalhes mais adiante. Além disto, na sequência, com base no Lema 1, será proposto um controle de realimentação de estado para o ângulo de direção tal que  $\theta(t) \rightarrow \theta_r$ , assintoticamente. Como consequência, projetamos uma estratégia para que o veículo seja capaz de rastrear uma trajetória pré-especificada, decompondo-a em seguimentos de retas e controlando o sistema para que ele se mova sequencialmente de um determinado segmento para o próximo.

Definindo a variável de estado  $\xi = [x \ y \ \theta]' \in \mathbb{R}^3$ , a variável de controle  $u = \tan(\delta) \in \mathbb{R}$  e a variável de saída controlada  $z \in \mathbb{R}$ , o modelo cinemático (14)-(16) pode ser reescrito na forma (29)-(30). O próximo teorema fornece a lei de controle que é obtida pela aplicação direta do Lema 1.

**Teorema 1** *Sejam dados os parâmetros positivos  $(\gamma, \mu)$  e  $(\kappa, \lambda)$  tais que  $\kappa = (\mu + \lambda\gamma)/2$ . O controle de realimentação de estado  $u(\xi) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definido por*

$$u(\xi) = -\left(\frac{L}{\beta}\right) \text{sen}(\theta - \theta_r) - \left(\frac{\kappa L}{w_r \beta}\right) \frac{z}{\lambda + |z|} \quad (45)$$

faz com que (33) seja satisfeita para a função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z) = |z|^2$  e  $c = (\mu/\gamma)^2$ .

**Prova:** A derivada em relação ao tempo da função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z) = |z|^2$  ao longo de uma solução qualquer das equações cinemáticas (14)-(16) é tal que

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= 2z(\dot{y} \cos(\theta_r) - \dot{x} \text{sen}(\theta_r) + \beta\dot{\theta}) \\ &= 2z(w_r \text{sen}(\theta - \theta_r) + w_r (\beta/L) \tan(\delta)) \\ &= -2\kappa \frac{|z|^2}{\lambda + |z|} \end{aligned} \quad (46)$$

onde usamos o controle de realimentação de estado  $u = u(\xi)$  dado por (45). Como (46) coincide com a derivada em relação ao tempo da função de Lyapunov de controle considerada no Lema 1, a prova está concluída.  $\square$

É interessante observar que os parâmetros de projeto  $(\lambda, \beta)$ , positivos, são livres e podem ser escolhidos de forma a atender algum requisito adicional. Por exemplo, (45) deixa claro que se

$$\frac{L}{\beta} \left(1 + \frac{\kappa}{w_r}\right) \leq \tan(\delta_{max}) \quad (47)$$

então  $|u(\xi)| \leq \tan(\delta_{max})$  o que implica que  $\delta(\xi) = \tan^{-1}(u(\xi)) \in \Delta$ . Este requisito, importante em aplicações práticas, pode ser satisfeito através da escolha adequada dos parâmetros de projeto mencionados. Isto pode ser feito sem alterar as margens de estabilidade  $(\gamma, \mu)$  e o tamanho da vizinhança de  $z = 0$  definida pela função de Lyapunov de controle e por  $c = (\mu/\gamma)^2$ . Além disso, o próximo corolário coloca em evidência uma propriedade de convergência muito importante da lei de controle (45).

**Corolário 1** *Sob das condições do Teorema 1, considere que o sistema em malha fechada evolui de um estado inicial arbitrário  $(x_0, y_0, \theta_0)$  em  $t = 0$ . Se  $z(T_c) = 0$  então  $z(t) = 0$  para todo  $t \geq T_c \geq 0$ . Além disso, se  $|\theta(t) - \theta_r| \leq \pi$  então  $\theta(t) \rightarrow \theta_r$  conforme  $t \rightarrow +\infty$ , assintoticamente.*

**Prova:** Com o controle de realimentação em malha fechada (45), obtemos imediatamente que

$$\dot{z} = -\kappa \frac{z}{\lambda + |z|} \quad (48)$$

o que significa que  $z(t) = 0$  é uma solução para todo  $t \geq T_c \geq 0$  desde que  $z(T_c) = 0$ . Além disso, como o lado direito de (48) é Lipschitz contínuo, a solução nula é única. Por outro lado, considerando simultaneamente o controle (45) e  $\dot{z}(t) = 0$ , resulta que

$$\dot{\theta} = -(w_r/\beta) \text{sen}(\theta - \theta_r) \quad (49)$$

cuja solução satisfaz

$$\left| \tan\left(\frac{\theta(t) - \theta_r}{2}\right) \right| = e^{-(w_r/\beta)(t-T_c)} \left| \tan\left(\frac{\theta(T_c) - \theta_r}{2}\right) \right|$$

para todo  $t \geq T_c$ . Isto implica que  $\theta(t)$  converge para  $\theta_r + 2\pi k$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , assintoticamente. A suposição  $|\theta(t) - \theta_r| \leq \pi$  para todo  $t \geq T_c \geq 0$  assegura que a única possibilidade é  $k = 0$ , completando a prova.  $\square$

É claro que o método de projeto de controle proposto faz com que a variável de saída controlada  $z$  dada por (44) seja tal que  $z \rightarrow 0$  com  $\theta = \theta_r + 2\pi k$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . As combinações de  $(x, y, \theta)$  para as quais  $z = 0$  são a reta que desejamos (com  $k = 0$ ) e retas paralelas a ela com deslocamentos múltiplos de  $2\pi$  [rad] (quando  $k \neq 0$ ). Isto pode ser corrigido impondo-se, sem perda de generalidade, que  $|\theta - \theta_r| \leq \pi$ , assim eliminando os múltiplos de  $2\pi$  [rad]. Este método introduz uma descontinuidade na função de Lyapunov  $\vartheta(z) = |z|^2$  que pode ser interpretada como sendo uma correção necessária do ponto de referência  $(x_r, y_r, \theta_r) = (x_r, y_r, \theta_r + 2\pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  para impor convergência apenas à reta de interesse.

Vemos também que existe um compromisso claro para a escolha do parâmetro  $\beta > 0$ . Se  $\beta > 0$  é aumentado para satisfazer o limite (47), o preço a ser pago é a diminuição na razão de convergência de  $\theta(t)$  em direção a  $\theta_r$ . Assim sendo, o resultado do Corolário 1 afirma que a reta desejada  $(y(t) - y_r) = \tan(\theta_r)(x(t) - x_r)$  junto com  $\theta(t) = \theta_r$  é alcançada assintoticamente. No entanto, não é certo que a trajetória do sistema em malha fechada passe pelo ponto de referência  $(x_r, y_r)$ , pois esse objetivo pode ser impossível de ser alcançado devido a existência da restrição na variável de controle  $\delta(t) \in \Delta$  e o fato de que a magnitude do vetor velocidade é mantida constante. Observe que as equações (14)-(16) do modelo cinemático implicam que

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = w_r > 0 \quad (50)$$

Esses aspectos são ilustrados nos resultados obtidos das simulações que serão apresentados e discutidos em detalhes mais adiante.

### 3.4 Rastreamento Genérico de Trajetórias

Com o intuito de expandir e demonstrar a aplicabilidade do projeto desenvolvido e da lei de controle proposta, elaboramos também uma estratégia para que o modelo cinemático fosse capaz de rastrear uma trajetória pré-especificada. Esta trajetória é representada por um conjunto de pontos alvo, ou seja, a trajetória é dividida em segmentos de reta, cada um com um ponto de referência, o qual desejamos que o veículo atinja e, quando ele começar a se distanciar de um deles, o objetivo muda para que o próximo seja atingido e assim sucessivamente.

Seja denotada por  $\Gamma$  a trajetória ideal, considerada suave, no plano  $(x, y)$ . Um conjunto constituído por  $N$  pontos de referência  $(x_{r(i)}, y_{r(i)}) \in \Gamma$  para todo  $i \in \mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$  escolhidos de modo que  $\Gamma$  é adequadamente aproximada pelos segmentos de reta definidos por estes pontos. Ou seja,  $\Gamma \approx \cup_{i=1}^N \Gamma_i$ , onde  $\Gamma_i$  é o segmento de reta passando pelos pontos de referência  $(x_{r(i)}, y_{r(i)})$  e  $(x_{r(i+1)}, y_{r(i+1)})$ , é válida. Em cada ponto de referência  $i \in \mathbb{K}$ , um ângulo de guinada de referência  $\theta_{r(i)}$  também é fornecido.

Definindo a vizinhança  $\mathcal{Z}$  com  $\vartheta(z) = z^2$  e  $\sqrt{c} > 0$  sendo um erro de rastreamento aceitável, propomos o seguinte algoritmo genérico de rastreamento de trajetórias:

- (i) Sejam  $(x_0, y_0, \theta_0)$  as condições iniciais em  $t_0$ . Faça  $i = i_0 \in \mathbb{K}$ .
- (ii) Defina a função linear  $z = z_i$  correspondente a  $i \in \mathbb{K}$  como sendo

$$z_i = (y - y_{r(i)})\cos(\theta_{r(i+1)}) - (x - x_{r(i)})\sin(\theta_{r(i+1)}) + \beta(\theta - \theta_{r(i+1)}) \quad (51)$$

e implemente o controle via realimentação de estados (45).

(iii) No instante  $t \in \mathbb{R}_+$  determine a distância euclidiana  $d_i(t)$  e sua derivada temporal  $\dot{d}_i(t)$  dadas por

$$d_i(t) = \sqrt{(x(t) - x_{r(i)})^2 + (y(t) - y_{r(i)})^2} \quad (52)$$

$$\dot{d}_i(t) = \left( \frac{(x(t) - x_{r(i)})\dot{x}(t) + (y(t) - y_{r(i)})\dot{y}(t)}{d(t)} \right) \quad (53)$$

entre o a posição atual  $(x(t), y(t))$  e o ponto de referência  $(x_{r(i)}, y_{r(i)})$ .

(iv) Se  $\dot{d}_i(t)$  cruzar o zero, ou seja,  $\dot{d}_i(t) \geq 0$  e  $\dot{d}_i(t - \Delta t) < 0$ , com  $\Delta t > 0$  sendo o passo de simulação, redefina  $i + 1 \rightarrow i$  e retorne ao passo (ii).

Sobre o algoritmo descrito, podemos fazer alguns comentários. Primeiro, mesmo que o veículo esteja próximo do segmento de reta  $\Gamma_i$ , o ponto de referência é mantido até a distância  $d_i(t)$  comece a aumentar, neste instante, o ponto de referência se torna o próximo, que está no segmento de reta  $\Gamma_{i+1}$  e isto ocorre para todos os índices do conjunto  $\mathbb{K}$ . Segundo, o movimento do veículo tende à reta definida por  $z_i = 0$ , ou seja, o segmento de reta  $\Gamma_i$ , assim ao implementar este algoritmo o veículo se torna capaz de mudar o ponto de referência em tempo real, permitindo que ele siga uma trajetória composta por segmentos de reta. Uma ultima observação que deve ser feita é que este não é o único modo de tomar a decisão da mudança do ponto de referência. Outros critérios podem levar a resultados diferentes e desempenhos diferentes.

### 3.5 Síntese de Controle - Modelo Cinemático com Velocidade Variável

Levando em consideração os resultados obtidos até agora, desejamos ampliar as capacidades do controlador, para lidar com o controle de velocidade. O novo modelo será denominado Modelo Cinemático Generalizado. Dessa forma, consideramos que o módulo da aceleração do veículo é variável, ou seja,  $\dot{w} = \psi$  passa a fazer parte da variável de controle a ser projetada. Neste sentido redefinimos

$$z = \begin{bmatrix} (y - y_r)\cos(\theta_r) - (x - x_r)\sin(\theta_r) + \beta(\theta - \theta_r) \\ \eta(w - w_r) \end{bmatrix} \quad (54)$$

com  $\eta > 0$ . Assim, sempre que  $z = 0$ , a primeira componente tem a mesma interpretação de antes e a segunda impõe  $w = w_r$  com  $w_r > 0$  especificado. Seguindo as mesmas etapas do projeto anterior consideramos a variável de estado  $\xi = [x \ y \ \theta \ w]' \in \mathbb{R}^4$  e a variável de controle  $u = [\tan(\delta) \ \psi]' \in \mathbb{R}^2$ . Às equações do modelo cinemático (14)-(16) adicionamos a equação suplementar  $\dot{w} = \psi$  e elas podem ser reescritas na forma (29)-(30) onde  $z = g(\xi)$  é agora uma função linear com imagem no  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 2** *Seja a tripla de parâmetros positivos  $(\gamma, \mu, \eta)$  especificada. E defina os parâmetros positivos  $(\kappa, \lambda)$  satisfazendo  $\kappa = (\mu + \lambda\gamma)/2$ . O controle de realimentação de estado  $u(\xi) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por*

$$u(\xi) = - \begin{bmatrix} (L/\beta)\sin(\theta - \theta_r) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\kappa L/w\beta) & 0 \\ 0 & \kappa/\eta \end{bmatrix} \frac{z}{\lambda + \|z\|} \quad (55)$$

é tal que (33) vale para  $\vartheta(z) = \|z\|^2$  e  $c = (\mu/\gamma)^2$ .

**Prova:** A derivada da função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z) = \|z\|^2$  ao longo de uma solução arbitrária das equações cinemáticas (14)-(16) juntamente com  $\dot{w} = \psi$  satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= 2z' \begin{bmatrix} \dot{y} \cos(\theta_r) - \dot{x} \sin(\theta_r) + \beta\dot{\theta} \\ \eta\dot{w} \end{bmatrix} \\ &= 2z' \begin{bmatrix} w \sin(\theta - \theta_r) + w(\beta/L)\tan(\delta) \\ \eta\psi \end{bmatrix} \\ &= -2\kappa \frac{\|z\|^2}{\lambda + \|z\|} \end{aligned} \quad (56)$$

onde usamos o controle de realimentação de estado  $u = u(\xi)$  dado por (55). Como (56) coincide com a derivada em relação ao tempo da função de Lyapunov de controle considerada no Lema 1, a prova está concluída.  $\square$

Pode ser facilmente verificado que a lei de controle (56), para qualquer condição inicial, faz com que as trajetórias do sistema em malha fechada converjam para a linha reta  $(y(t) - y_r) = \tan(\theta_r)(x(t) - x_r)$ ,  $\theta(t) = \theta_r$  e  $w(t) = w_r$  assintoticamente. Na verdade, a lei de controle (56), juntamente com a velocidade real extraída de (14)-(15), torna-se

$$\dot{w} = -\frac{\kappa}{\lambda + \|z\|} \left( \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - w_r \right) \quad (57)$$

Ela define a evolução no tempo da velocidade do meio-carro em malha fechada  $w(t)$  e deixa claro que para qualquer condição inicial  $w(0) = w_0 > 0$  tem-se  $w(t) \rightarrow w_r$  e  $w(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Como consequência, a lei de controle (56) é bem definida para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Formalmente, da equação (16) do modelo cinemático, segue-se que se  $w(t) = 0$  o ângulo de direção  $\delta(t)$  pode ser escolhido arbitrariamente naquele instante de tempo específico. A lei de controle proposta é de fato eficaz no âmbito do modelo cinemático generalizado que inclui a malha de controle de velocidade do meio-carro.

### 3.6 Análise de Robustez

É bem conhecido que o controle de modos deslizantes é robusto face uma ampla classe de incertezas não modeladas, Utkin (1993). Investigamos agora se esta importante propriedade permanece verdadeira no presente contexto. Consideramos que a lei de controle via realimentação de estado (45) é corrompida por uma incerteza escalar limitada, que pertence à classe de funções suaves, tais que

$$|\varphi(\xi, t)| \leq \rho < (\mu L)/(2w\beta), \quad \forall(\xi, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \quad (58)$$

O próximo corolário fornece a propriedade de robustez da lei de controle via realimentação de estados (45) fornecida pelo Teorema 1.

**Corolário 2** *O controle via realimentação de estados (45) é robusto no sentido de que se for substituído pela ação de controle modificada  $u_\varphi(\xi, t) = u(\xi) + \varphi(\xi, t)$  onde  $\varphi$  é qualquer função suave que satisfaz (58), então a vizinhança  $\mathcal{Z}$  é um conjunto invariante. Ou seja, para qualquer condição inicial  $\xi(0) = \xi_0$ , se  $z_0 = g(\xi_0) \notin \mathcal{Z}$  então a trajetória alcança o contorno da vizinhança  $\mathcal{Z}$  em tempo-finito ou se  $z_0 \in \mathcal{Z}$  então a trajetória permanece em  $\mathcal{Z}$ .*

**Prova:** Adotando novamente a função de Lyapunov de controle  $\vartheta(z) = z^2$ , sua derivada em relação ao tempo ao longo de uma solução qualquer das equações cinemáticas (14)-(16) satisfaz

$$\dot{\vartheta} = -2\kappa \frac{|z|^2}{\lambda + |z|} + 2w(\beta/L)z\varphi(\xi, t) \quad (59)$$

Assumindo  $\xi \in \mathbb{R}^3$  tal que  $z = g(\xi) \notin \mathcal{Z}$  usando (58) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &\leq -\mu|z| + 2w(\beta/L)|z||\varphi(\xi, t)| \\ &\leq -\mu_\varphi\sqrt{\vartheta} \end{aligned} \quad (60)$$

onde  $\mu_\varphi = \mu - 2w(\beta/L)\rho > 0$ . Logo a primeira parte da afirmação é válida. A prova da segunda parte segue da continuidade do lado direito da derivada temporal (33) para o sinal de controle nominal  $u(\xi)$ . Este fato implica que (59) também é válida em todos os pontos do contorno da vizinhança de  $\mathcal{Z}$ . A consequência é a impossibilidade da trajetória sair de  $\mathcal{Z}$ . Com isto, a prova está concluída.  $\square$

É importante ter em mente que, sob perturbações de incerteza limitada, não é mais possível provar que as trajetórias do sistema em malha fechada convergem para a reta  $z = 0$ . De fato, o resultado do Corolário 2 indica que a consequência de incertezas aditivas limitadas é o fato de que o conjunto  $\mathcal{Z}$  torna-se um conjunto invariante cujo contorno é atingido em tempo-finito. Portanto, o efeito dessa classe de incertezas é que as trajetórias convergem para o conjunto  $\mathcal{Z}$  em vez de convergir para a reta  $z = 0$ , o que torna clara a necessidade de escolher  $c > 0$  suficientemente pequeno.

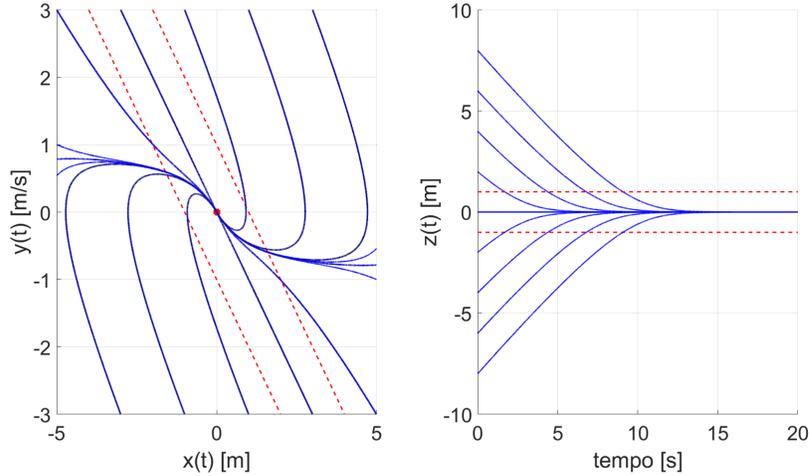


Figura 3: Trajetórias no plano de fase e evolução temporal da saída

## 4 Resultados e Discussões

Com o intuito de validar os resultados teóricos obtidos neste trabalho, os modelos descritos foram implementados e simulados utilizando o *Simulink*.

### 4.1 Duplo Integrador

Primeiro testamos o duplo integrador, descrito pelas equações (39) - (40). Para o qual obtivemos a seguinte lei de controle

$$u(\xi) = -\alpha y - \kappa \frac{z}{\lambda + |z|}$$

O duplo integrador em malha fechada foi simulado, utilizando os seguintes valores para os parâmetros do controlador:  $\alpha = 1.00$  [Hz],  $\mu = 1.00$  [m/s<sup>2</sup>],  $\gamma = 1.00$  [Hz],  $\kappa = 0.75$  [m/s<sup>2</sup>],  $\lambda = 0.50$  [m/s] e  $\sqrt{c} = 1.00$  [m/s]. A partir dos resultados obtidos, as seguintes observações podem ser feitas:

- A Figura 3 mostra no lado esquerdo o plano de fase e no lado direito a evolução temporal da saída  $z(t)$ . Em linhas tracejadas são indicados os contornos definidos pela derivada da função de Lyapunov (33). Como esperado, todas as trajetórias convergem para a origem. É notável a concordância deste plano de fase com aquele dado em Bhat & Bernstein (1998) embora a lei de controle (42) seja contínua e muito mais simples.
- A Figura 4 ilustra uma situação peculiar. O seu lado esquerdo mostra o plano de fase do sistema em malha fechada para diversas condições iniciais tais que  $\vartheta(z_0) = z_0^2 = 9$ . Novamente observa-se que todas as trajetórias convergem para a origem. Além disso, a estimativa  $T(z_0) \leq 4.0$  [s] dada em (34) para o tempo necessário até que as trajetórias atinjam o contorno de  $\vartheta(z) \geq c = 1$  é satisfeita. Com o lado direito da Figura 4 podemos determinar que  $T(z_0) \approx 3.2$  [s] e verificar que todas as funções  $z(t)$  coincidem com apenas duas que diferem entre si, de tal forma a satisfazerem a mesma estimativa (34).
- A Figura 5 ilustra a comparação do sinal de controle obtido usualmente no contexto de CMD e o sinal obtido com a lei de controle proposta, realizando a escolha adequada de parâmetros. Por simplicidade, consideramos  $\lambda = \mu/\gamma$  o que impõe  $\kappa = \mu$  e  $\sqrt{c} = \mu/\gamma$ . O lado esquerdo da figura foi obtido utilizando  $(\mu, \gamma) = (2, 5e03)$  enquanto para lado direito foi utilizado  $(\mu, \gamma) = (2, 5)$ , com a mesma condição inicial  $(x_0, y_0) = (5, 3)$ . Em ambos os casos, as linhas tracejadas representam

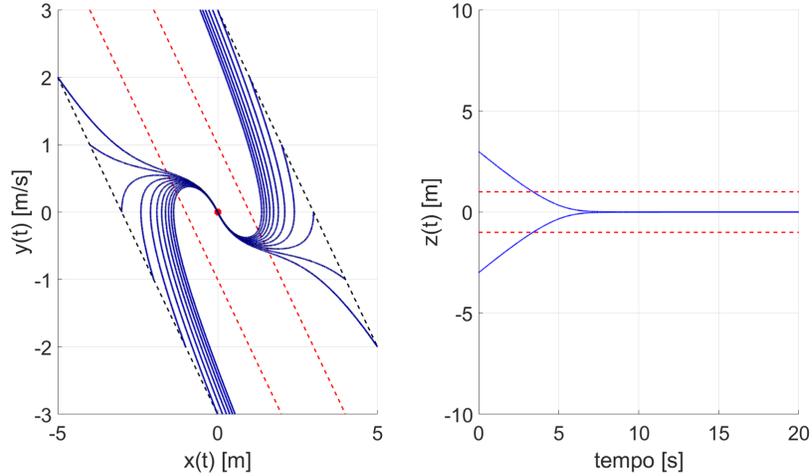


Figura 4: Trajetórias no plano de fase e evolução temporal da saída

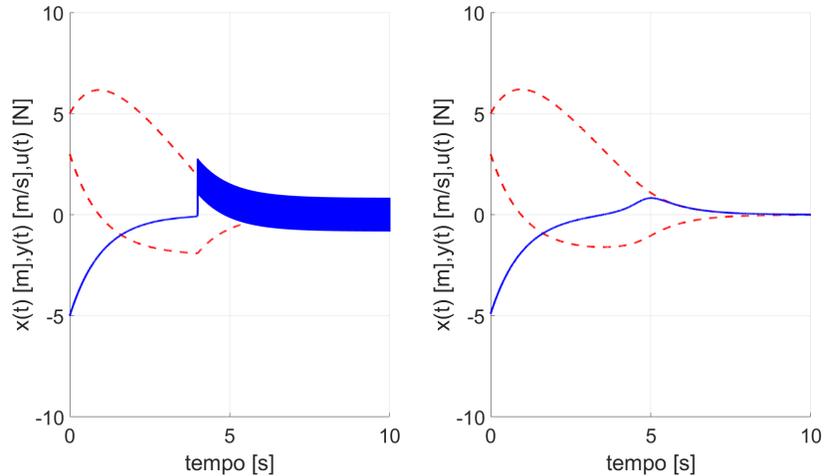


Figura 5: Evolução temporal do estado e controle

as trajetórias de estado e as linhas contínuas as trajetórias de controle. No lado esquerdo vemos claramente a troca de modos de operação em alta frequência, como é usualmente obtido em controladores utilizando CMD. Este mesmo fenômeno não é observado no lado direito devido a uma escolha diferente de parâmetros de controle. Em conclusão, a oscilação em alta frequência dos estados pode ser evitada com a inclusão da vizinhança  $\mathcal{Z}$ . Este comportamento ocorre devido ao fato de que a lei de controle é contínua para  $\lambda > 0$ , mas  $z/(\lambda + |z|) = \text{sign}(z)$  quando  $\lambda \rightarrow 0^+$ .

Como bem ilustra o exemplo que acabamos de resolver, o resultado do Lema 1 introduz uma condição de síntese de controle em malha fechada bastante simples, contínua e suave em relação à variável de estado  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Observe que a magnitude relativa das regiões que definem (33) pode ser ajustada com a escolha adequada dos parâmetros que definem  $c > 0$ . É importante ressaltar mais dois aspectos. Por um lado, trajetórias especificadas podem ser rastreadas realizando os devidos ajustes na definição da variável  $z$  em (41), assim como fizemos no modelo cinemático, e, por outro lado, os parâmetros livres do controlador podem ser ajustados para que o sinal de controle satisfaça alguma restrição adicional, requerida por uma determinada aplicação prática.

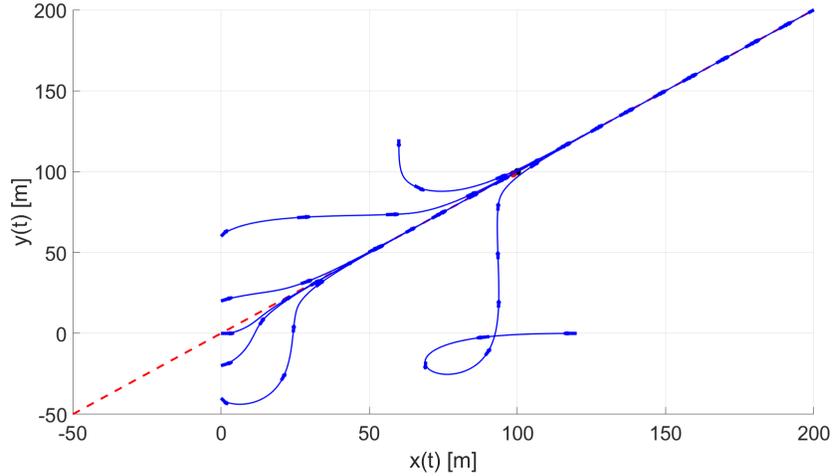


Figura 6: Posição no plano  $(x, y)$  do modelo cinemático no teste de ponto de referência

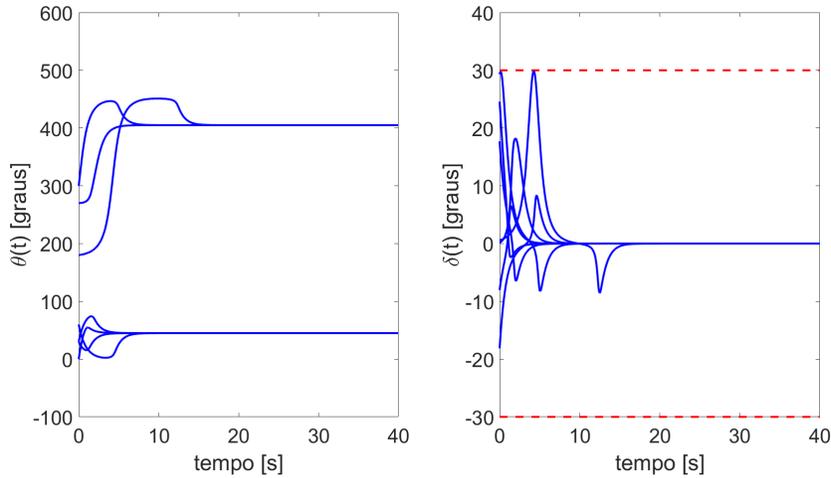


Figura 7: Ângulos  $\theta$  e  $\delta$  do modelo cinemático no teste de ponto de referência

Além disso, vemos claramente a diferença entre o procedimento proposto para a obtenção da lei de controle e o resultado esperado dos métodos disponíveis na literatura. Com isso, acreditamos que em aplicações sensíveis à mudança de modos de operação em alta frequência, como ocorre no lado esquerdo da Figura 5, seria especialmente interessante poder adotar nossa abordagem.

## 4.2 Modelo Cinemático do Meio-Carro

Em sequência realizamos a síntese de controle para o modelo cinemático do meio-carro, descrito pelas equações (14)-(16). Obtivemos a seguinte lei de controle

$$u(\xi) = -\left(\frac{L}{\beta}\right) \text{sen}(\theta - \theta_r) - \left(\frac{\kappa L}{w_r \beta}\right) \frac{z}{\lambda + |z|}$$

Simulamos o modelo cinemático (14)-(16) em malha fechada com a a lei de controle (45). Adotamos  $\ell_R = \ell_F = 2.0$  [m], velocidade constante  $w_r = 15.0$  [m/s] e ângulo máximo de direção de  $\delta_{max} = \pi/6$

[rad]. A saída controlada  $z$  foi definida para que o ponto de referência, na a roda traseira, fosse  $(x_r, y_r) = (98.58, 98.58)$  [m] com o ângulo de guinada  $\theta_r = \pi/4$  [rad]. Desta forma, o centro de massa se localiza em  $(x_{cm}, y_{cm}) = (100.0, 100.0)$  [m]. Os valores escolhidos para os parâmetros do controlador foram os seguintes:  $\mu = 11.25$  [m/s],  $\gamma = 11.25$  [Hz],  $\kappa = 11.25$  [m/s],  $\beta = 12.12$  [m/rad] e  $\lambda = 1.00$  [m].

Foram realizadas sete simulações com condições iniciais diferentes  $(x_0, y_0, \theta_0)$  em  $t = 0$ , com duração de  $T_{sim} = 40$  [s]. Tendo como base as Figuras 6 e 7 as seguintes observações podem ser feitas:

- Figura 6 mostra que todas as trajetórias traçadas relativamente ao referencial inercial  $(x, y)$  convergem para a reta definida por  $z = 0$  como esperado. Verificamos, também, que algumas condições iniciais são tão severas que não é possível atingir o ponto de referência com a roda traseira (marca vermelha) ou com o centro de massa (marca preta). Vale lembrar que a velocidade do carro é mantida constante e o ângulo de direção é limitado durante toda a simulação, sendo essas as grandezas que impedem que o veículo possa realizar qualquer tipo de curva.
- O lado esquerdo da Figura 7 mostra a evolução do ângulo de guinada  $\theta(t)$ . Após um certo intervalo de tempo, ele alcança o valor desejado de  $\theta_r = \pi/4$  [rad]. Isto ocorre em todos os casos. A diferença entre eles é o intervalo de tempo necessário para completar esta tarefa. O lado direito da Figura 7 mostra o ângulo de direção  $\delta(t)$ . É muito eficaz para atingir os objetivos do projeto e nunca viola  $|\delta(t)| \leq \delta_{max} = \pi/6$  [rad]. Em certos casos, o limite superior é alcançado em algum instante de tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Isto indica, claramente, que os resultados anteriores, embora sejam apenas suficientes para a síntese da lei de controle, não são conservadores.

Este estudo de caso coloca em evidência que a lei de controle proposta é eficaz no contexto do controle de direção do modelo cinemático definido pelas equações (14)-(16). Isto também é verdade sob condições adversas, representadas pelas escolhas das condições iniciais.

### 4.3 Modelo Cinemático Generalizado do Meio-Carro

Considerando o modelo cinemático generalizado, que conta com o controle de velocidade, descrito pelas equações (14)-(16), juntamente com a equação adicional  $\dot{w} = \psi$ . Obtivemos a seguinte lei de controle

$$u(\xi) = - \begin{bmatrix} (L/\beta)\text{sen}(\theta - \theta_r) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\kappa L/w\beta) & 0 \\ 0 & \kappa/\eta \end{bmatrix} \frac{z}{\lambda + \|z\|}$$

Simulamos agora, o modelo cinemático generalizado em malha fechada com a lei de controle (55). Adotamos  $\ell_R = \ell_F = 2.0$  [m], velocidade inicial  $w_0 = 0.0$  [m/s], velocidade desejada  $w_r = 15.0$  [m/s] e ângulo máximo de direção de  $\delta_{max} = \pi/6$  [rad]. A saída controlada  $z$  foi definida para que o ponto de referência, na a roda traseira, fosse  $(x_r, y_r) = (98.58, 98.58)$  [m] com o ângulo de guinada  $\theta_r = \pi/4$  [rad]. Desta forma, o centro de massa se localiza em  $(x_{cm}, y_{cm}) = (100.0, 100.0)$  [m]. Os valores escolhidos para os parâmetros do controlador foram os seguintes:  $\mu = 11.25$  [m/s],  $\gamma = 11.25$  [Hz],  $\kappa = 11.25$  [m/s],  $\beta = 12.12$  [m/rad],  $\lambda = 1.00$  [m] e  $\eta = 5.7$  [s].

Foram realizadas sete simulações com condições iniciais diferentes  $(x_0, y_0, \theta_0)$  em  $t = 0$ , com duração de  $T_{sim} = 40$  [s]. Tendo como base as Figuras 8 e 9 as seguintes observações podem ser feitas:

- Figura 8 mostra, novamente, que todas as trajetórias traçadas relativamente ao referencial inercial  $(x, y)$  convergem para a reta definida por  $z = 0$  como esperado. Verificamos, também, que algumas condições iniciais são tão severas que não é possível atingir o ponto de referência com a roda traseira (marca vermelha) ou com o centro de massa (marca preta), mesmo com o controle de velocidade, porém, vale lembrar que o ângulo de direção ainda é limitado durante toda a simulação, sendo, provavelmente, essa a grandeza que impede que o veículo possa realizar qualquer tipo de curva.
- O lado esquerdo da Figura 9 mostra a evolução do ângulo de guinada  $\theta(t)$ . Após um certo intervalo de tempo, ele alcança o valor desejado de  $\theta_r = \pi/4$  [rad]. Isto ocorre em todos os casos. A diferença entre eles é o intervalo de tempo necessário para completar esta tarefa. O gráfico na parte central

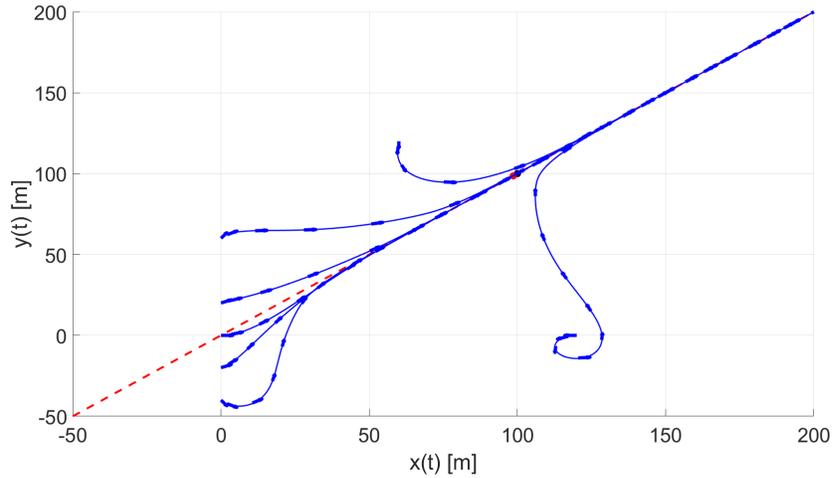


Figura 8: Posição no plano  $(x, y)$  do modelo cinemático generalizado no teste de ponto de referência

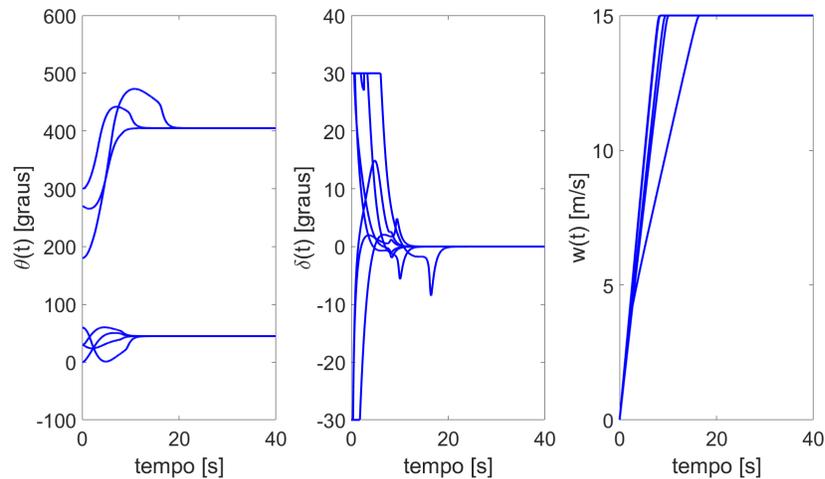


Figura 9: Ângulos  $\theta$  e  $\delta$ , e velocidade  $w$  do modelo cinemático generalizado no teste de ponto de referência

da Figura 9 mostra o ângulo de direção  $\delta(t)$ . É muito eficaz para atingir os objetivos do projeto e nunca viola  $|\delta(t)| \leq \delta_{max} = \pi/6$  [rad]. Notamos que em vários instantes de tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Já o lado esquerdo da Figura 9 mostra a velocidade  $w(t)$  do veículo, assim podemos ver claramente que o controle é capaz de alcançar e manter a velocidade desejada.

Comparando os resultados obtidos na simulação do modelo cinemático e do modelo cinemático generalizado, vemos que eles são semelhantes, com todas as condições iniciais alcançando a reta que passa pelo ponto desejado com o ângulo de guinada especificado, como esperado. As diferenças que podemos notar são nas trajetórias adotadas pelo meio-carro e na agressividade com o ângulo da direção, que em vários casos do modelo generalizado alcança e se mantém no limite  $\delta_{max}$  durante um apreciável intervalo de tempo.

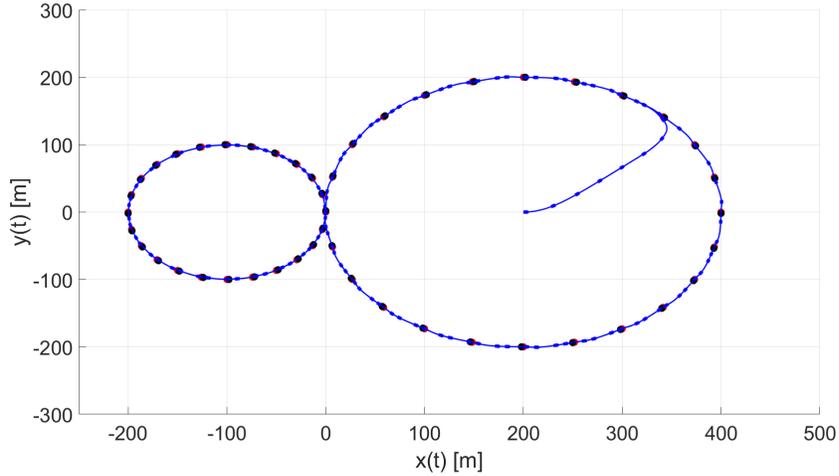


Figura 10: Posição no plano  $(x, y)$  do modelo cinemático no teste de rastreamento de trajetória

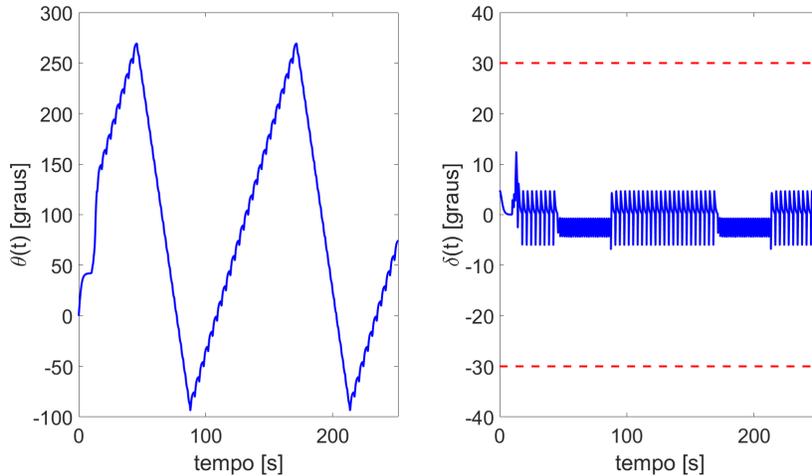


Figura 11: Ângulos  $\theta$  e  $\delta$  do modelo cinemático no teste de rastreamento de trajetória

#### 4.4 Rastreador de Trajetórias

Dando prosseguimento à validação dos resultados teóricos obtidos, implementamos o algoritmo proposto para o rastreador de trajetórias. Iniciamos nossos testes com um trajeto semelhante a um fliperama, isto é, uma pista com formato de  $\infty$ , formada por dois círculos tangentes, um com centro em  $(-100, 0)$  e raio 100 [m] e outro com centro em  $(200, 0)$  e raio 200 [m]. Os parâmetros do modelo cinemático e os do controlador são os mesmos utilizados no exemplo discutido na Sessão 4.2. Em  $t = 0$  o veículo inicia na posição  $(x_0, y_0) = (200, 0)$  com ângulo de guinada  $\theta_0 = 0$ .

- A Figura 10 mostra  $N = 48$  pares de marcas em vermelho (as posições das rodas traseiras) e em preto (as posições do centro de massa). Os pontos de referência  $(x_{r(i)}, y_{r(i)})$ ,  $i \in \mathbb{K}$  são os das rodas traseiras. Em cada ponto de referência, o ângulo de guinada de referência  $\theta_{r(i)}$ ,  $i \in \mathbb{K}$  foi definido como sendo o coeficiente angular da reta tangente à trajetória de interesse. A mesma figura mostra em linha contínua a trajetória do veículo em malha fechada correspondente a duas voltas completas no circuito.

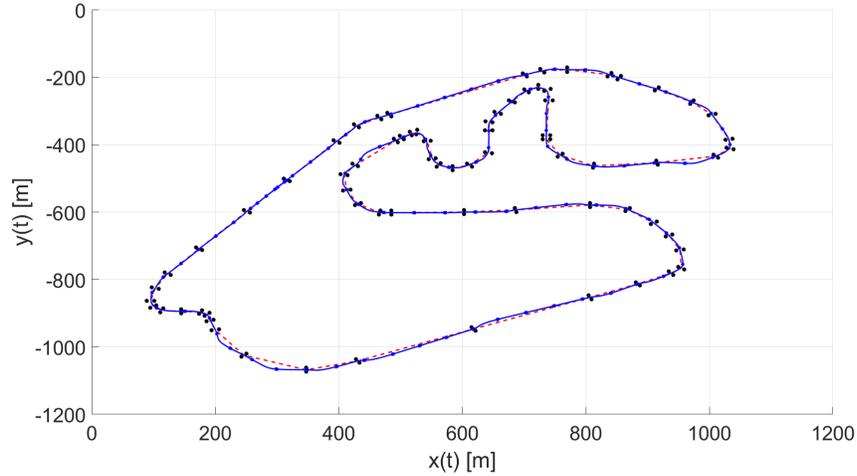


Figura 12: Posição no plano  $(x, y)$  do modelo cinemático generalizado no Autódromo de Interlagos

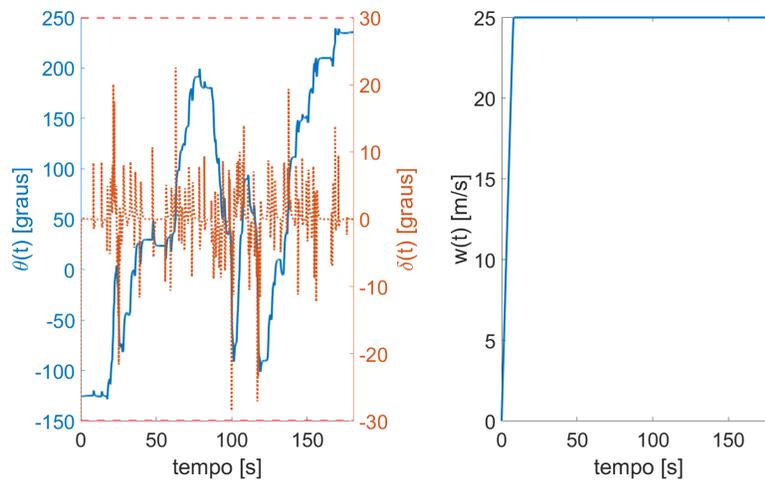


Figura 13: Ângulos  $\theta$  e  $\delta$ , e velocidade  $w$  do modelo cinemático generalizado no Autódromo de Interlagos

- O lado esquerdo da Figura 11 mostra a evolução temporal do ângulo de guinada  $\theta(t)$  e o lado direito o ângulo de direção  $\delta(t)$ .

Dessa forma, vemos que o algoritmo proposto de fato permite que o veículo siga uma trajetória genérica. Para ilustrar as possibilidades da combinação do controlador e do algoritmo propostos, uma aplicação prática é apresentada na próxima sessão.

## 4.5 Aplicação Prática

Por fim, simulamos o modelo cinemático generalizado percorrendo a pista do Autódromo de Interlagos, composta por  $N = 72$  pares de marcas pretas que delimitam a pista, sendo os pontos de referência o ponto médio de cada par. Os parâmetros do modelo cinemático e os do controlador são os mesmos utilizados no exemplo discutido na Sessão 4.3, porém, com a velocidade desejada  $w_r = 25$  [m/s].

- A Figura 12 mostra a trajetória a ser seguida em linha vermelha tracejada. Os pontos de referência  $(x_{r(i)}, y_{r(i)})$ ,  $i \in \mathbb{K}$  são os pontos médios de cada um dos pares de marcas. Em cada ponto de

referência, o ângulo de guinada  $\theta_{r(i)}$ ,  $i \in \mathbb{K}$  foi definido como sendo o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos de referência sucessivos  $(x_{r(i)}, y_{r(i)})$  e  $(x_{r(i+1)}, y_{r(i+1)})$ . A mesma figura mostra em linha contínua a trajetória do veículo em malha fechada correspondente a uma volta completa no circuito.

- O lado esquerdo da Figura 13 mostra, em azul, a evolução temporal do ângulo de guinada  $\theta(t)$  e, em vermelho, o ângulo de direção  $\delta(t)$ . Já o lado direito desta figura mostra a velocidade do carro durante o percurso, vemos que ela atinge a velocidade desejada  $w_r = 25$  [m/s] e a mantém constante durante o restante do percurso.

Esta simulação mostra o veículo percorrendo uma pista real e, como esperado, ele é capaz de desenvolver a trajetória especificada. Um último ponto que vale ser mencionado é que assim como o ângulo de guinada  $\theta_{r(i)}$  é especificado para todo  $i \in \mathbb{K}$ , é possível especificar uma velocidade de referência  $w_{r(i)}$  para cada ponto da trajetória, com o objetivo de manter a velocidade do carro mais alta nas retas e mais baixa nas curvas. Neste caso, a velocidade de referência é mantida constante durante toda a pista para que possam ser traçadas comparações entre o modelo cinemático e o modelo cinemático generalizado.

## 4.6 Resultados Adicionais

As Figuras (14) - (17) apresentam resultados de simulações adicionais, que podem ser comparados com aqueles já discutidos. As Figuras (14) e (15) apresentam o modelo cinemático generalizado percorrendo a pista em formato de fliperama ( $\infty$ ), com os mesmos parâmetros da simulação na Seção 4.3, porém, com velocidade desejada  $w_r = 50$  [m/s]. As Figuras (16) e (17) apresentam o modelo cinemático percorrendo a pista do Autódromo de Interlagos, com os mesmos parâmetros da simulação na Seção 4.2, mas com velocidade constante  $w_r = 25$  [m/s].

## 4.7 Desenvolvimentos Futuros

Observando os resultados obtidos, vemos que o procedimento proposto para a síntese da lei de controle é efetivo no contexto do rastreamento de trajetórias e, em nossa opinião, é uma interessante alternativa a ser explorada. Dessa forma, como desenvolvimentos futuros deste trabalho, acreditamos que seja interessante realizar a síntese da lei de controle para o modelo dinâmico do meio-carro, descrito por (26)-(28). Esta nova proposta exploraria um modelo mais próximo da realidade, oferecendo um maior grau de precisão à dinâmica do veículo, com a introdução de forças de atrito viscoso e de forças de atrito do tipo Coulomb, existentes entre os pneus e a pista. Assim sendo, seria possível comparar os resultados obtidos com outros trabalhos que adotam modelos ainda mais complexos, utilizando, por exemplo, a Fórmula Mágica de Pacejka.

Como passo intermediário, propomos também que a lei de controle obtida para o modelo cinemático generalizado seja implementada no modelo dinâmico que descrevemos. Isto ofereceria uma visão mais precisa sobre a robustez do controlador projetado, visto que o modelo a ser controlado é muito mais complexo. Logo, seria possível observar as vantagens e as desvantagens de sintetizar o controle para o modelo mais complexo em relação ao mais simples.

## 5 Conclusão

Neste Trabalho de Fim de Curso foi apresentado um novo procedimento para a síntese de controle para o problema de rastreamento de trajetórias, que combina ideias de função de Lyapunov de controle e de modos deslizantes. Foram apresentados também, um exemplo ilustrativo da síntese de controle para o duplo integrador, que compara resultados disponíveis na literatura com o procedimento proposto. Em seguida, abordamos a síntese de controle para o modelo de meio-carro, com módulo da velocidade constante e variável, através de um algoritmo para que este possa rastrear uma trajetória genérica. Por fim, apresentamos diversas simulações dos resultados teóricos e da implementação do algoritmo

rastreador de trajetórias. Ressalte-se o controle do deslocamento do modelo de meio-carro sobre a pista de Interlagos.

Analisando os resultados obtidos, concluímos que o procedimento proposto é efetivo no contexto estudado, sendo uma alternativa aos métodos disponíveis na literatura. Ademais, como foi demonstrado, o método proposto apresenta benefícios quando comparado aos resultados de outros trabalhos, oferecendo um procedimento mais simples para a síntese de controle. O controlador contínuo projetado é capaz de realizar o rastreamento de trajetórias, além de assegurar estabilidade, robustez e convergência em tempo-finito.

## Referências

- Bhat, S. P. & Bernstein, D. S. (1998). *Continuous Finite-Time Stabilization of the Translational and Rotational Double Integrators*, IEEE Transactions on Automatic Control, 43, 678–682.
- Bhat, S. P. & Bernstein, D. S. (2000). *Finite-Time Stability of Continuous Autonomous Systems*, SIAM J. Control Optim., 38, 751–766.
- Boyd, S., Ghaoui, L. El, Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.
- Campbell, S. F. (2007). *Steering Control of an Autonomous Ground Vehicle with Application to the DARPA Urban Challenge*, Master of Science in Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Celeste Jr, C. E. & Geromel, J. C. (2021). *Controle de Rastreamento de Trajetórias em Tempo Finito*, aceito para apresentação no SBAI-2021.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. & Emami-Naeini, A. (2019). *Feedback Control of Dynamic Systems*, 8th Edition, Pearson.
- Geromel, J. C. & Korogui, R. H. (2019). *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*, 2a Edição, Blucher.
- Incremona, G. P., Rubagotti, M., & Ferrara, A. (2017). Sliding Mode Control of Constrained Nonlinear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 2965–2972.
- Jeon, J. H., Cowlagi, R. V., Peters, S. C., Karaman, S., Frazzoli, E., Tsiotras, P. & Iagnemma, K. (2013). *Optimal Motion Planning with the Half-Car Dynamical Model for Autonomous High-Speed Driving*, American Control Conference.
- Luenberger, D. G. (1979). *Introduction to Dynamic Systems : Theory, Models & Applications*, John Wiley & Sons Inc..
- Oliveira, T. R., Peixoto, J. P. & Hsu, L. (2010). *Sliding Mode Control of Uncertain Multivariable Nonlinear Systems With Unknown Control Direction via Switching and Monitoring Function*, IEEE Transactions on Automatic Control, 55, 1028–1034.
- Omidshafiei, S. (2014). *Optimal Racing Line Control*, Web search.
- Pepy, R., Lambert, A. & Mounier, H. (2006). *Path Planning using a Dynamic Vehicle Model*, IEEE International Conference on Information & Communication Technologies.
- Rucco, A., Notarstefano, G. & Hauser, J. (2012). *Computing minimum lap-time trajectories for a single-track car with load transfer*, Conference on Decision and Control.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*, 3rd Edition, Prentice Hall.



- Kristijan, M., Philippsen, R. & Siegwart, R. (2008). *Path Following for Autonomous Vehicle Navigation with Inherent Safety and Dynamics Margin*, IEEE Intelligent Vehicles Symposium, 108–113.
- Pacejka, H. (1987). *Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies*, SAE Paper N° 870421.
- Slotine, J. J. E. & Li, Weiping (1990). *Applied Nonlinear Control*, 1st Edition, Prentice Hall.
- Spurgeon, S. (2014). *Sliding mode control : a tutorial*, ECC European Control Conference, 2272–2277.
- Utkin, V. I. (1993). *Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, 40, 23–36.
- Ying, X. (2010). *Racing Line Optimization*, Master of Science in Computation for Design and Optimization, Massachusetts Institute of Technology.
- Young, K. D., Utkin, V. I. & Ozguner, U. (1999). *A Control Engineer's Guide to Sliding Mode Control*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 7, 328–342.

## ANEXO

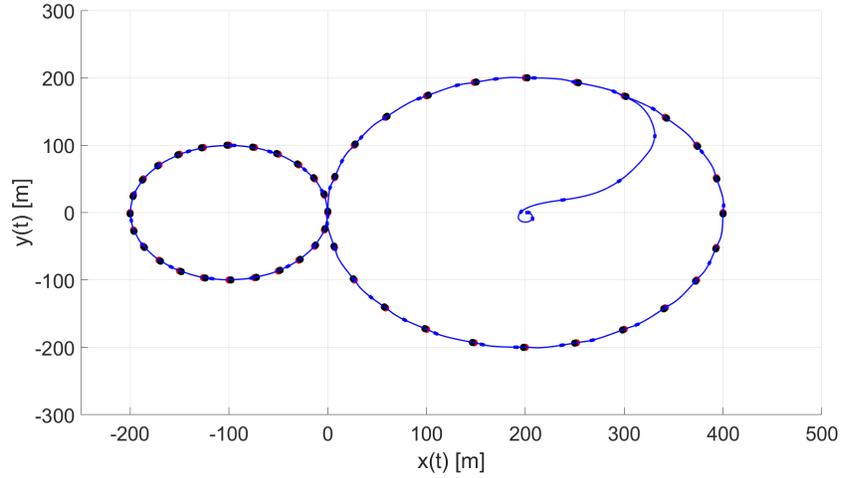


Figura 14: Posição no plano  $(x, y)$  do modelo cinemático generalizado no teste de rastreamento de trajetória

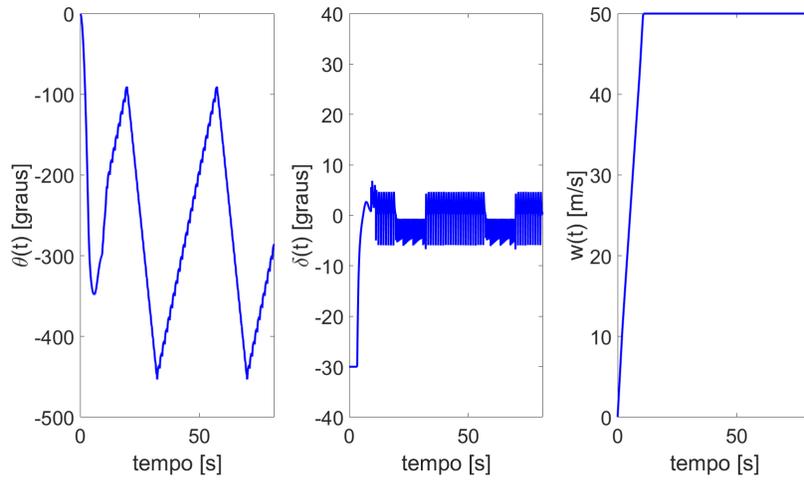


Figura 15: Ângulos  $\theta$  e  $\delta$ , e velocidade  $w$  do modelo cinemático generalizado no teste de rastreamento de trajetória

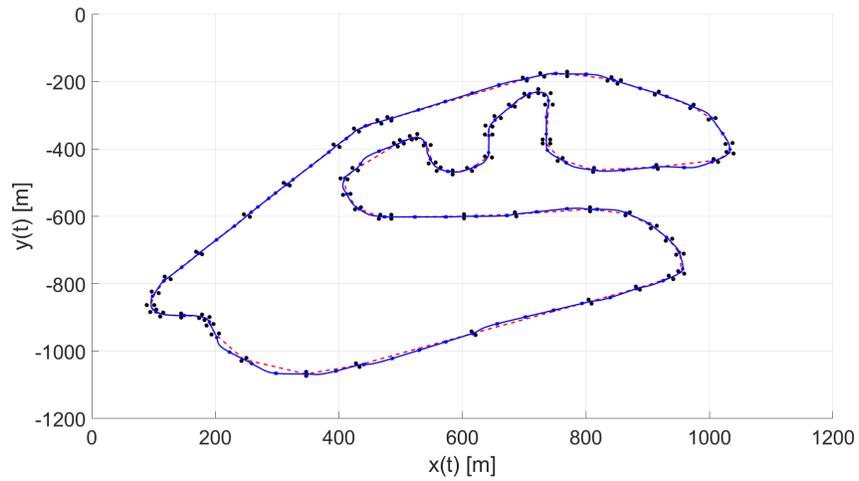


Figura 16: Posição no plano  $(x, y)$  do modelo cinemático no Autódromo de Interlagos

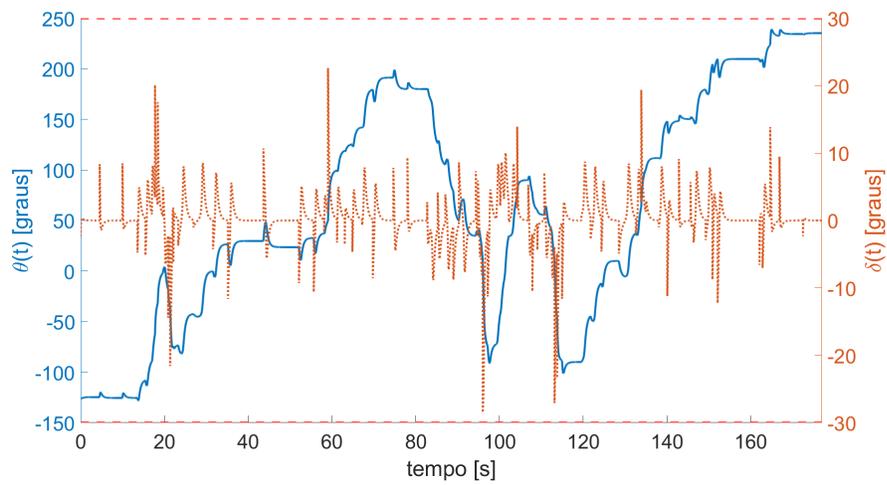


Figura 17: Ângulos  $\theta$  e  $\delta$  do modelo cinemático no Autódromo de Interlagos