UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

LEANDRO PERUQUI GUIDIO

Identidades polinomiais e seus invariantes numéricos

Campinas

2022

Leandro Peruqui Guidio

Identidades polinomiais e seus invariantes numéricos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Leandro Peruqui Guidio e orientada pelo Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

G942i

Guidio, Leandro Peruqui, 1998-
Identidades polinomiais e seus invariantes numéricos / Leandro Peruqui Guidio. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. PI-álgebras. 2. Dimensão de Gelfand-Kirillov. 3. Identidade polinomial. I. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Polynomial identities and their numerical invariants
Palavras-chave em inglês:
PI-algebras
Gelfand-Kirillov dimension
Polynomial identity
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]
Fabrizio Martino
Felipe Yukihide Yasumura
Data de defesa: 30-08-2022
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-7554-6567
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/1250931010423414

Dissertação de Mestrado defendida em 30 de agosto de 2022 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). FABRIZIO MARTINO

Prof(a). Dr(a). FELIPE YUKIHIDE YASUMURA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida e por todas as oportunidades que Ele me concedeu.

À minha namorada Luiza por todo apoio, companheirismo e amor durante todo esse tempo do mestrado.

Ao meu irmão, meus pais, familiares e amigos por todo apoio e ajuda.

A todos os que foram meus professores e que contribuíram com minha formação acadêmica durante o mestrado.

A todos funcionários do IMECC.

Ao professor Plamen Kochloukov pela ótima orientação, dedicação e disponibilidade.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, processo n° 130652/2021-0, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos álgebras associativas com identidades polinomiais e alguns dos seus invariantes numéricos, isto é, codimensões, séries de Hilbert, e em especial a dimensão de Gelfand-Kirillov (GK-dimensão). Nosso objetivo é demonstrar que a GK-dimensão da álgebra relativamente livre de posto m na variedade definida pela álgebra de Lie das matrizes 2×2 com traço nulo, denotada por $\mathrm{GKdim}\, F_m(\mathfrak{sl}_2)$, é igual a $3(m-1)$. Iniciamos com definições e resultados básicos de álgebras, álgebras livres, identidades polinomiais, PI-álgebras, etc. Em seguida, apresentamos alguns resultados sobre identidades multilineares, homogêneas e próprias, vendo que é possível simplificarmos algumas identidades. Também estudamos as séries de Hilbert, sequências de codimensões e PI-expoente; e os determinamos na álgebra de Grassmann sobre um corpo de característica 0. Depois estudamos sobre a GK-dimensão e vimos algumas propriedades desse invariante quando estamos trabalhando com álgebras relativamente livres. Por fim, partindo da forma explícita da série de Hilbert de $F_m(\mathfrak{sl}_2)$ calculamos a $\mathrm{GKdim}\, F_m(\mathfrak{sl}_2)$.

Palavras-chave: PI-álgebras. Dimensão de Gelfand-Kirillov. Identidade polinomial.

Abstract

In this dissertation, we study associative algebras with polynomial identities and some of their numerical invariants, that is, codimensions, Hilbert series, and in particular, the Gelfand-Kirillov dimension (GK-dimension). Our goal is to demonstrate that the GK-dimension of the relatively free algebra of rank m in the variety defined by Lie algebra of traceless 2×2 matrices, denoted by $\operatorname{GKdim} F_m(\mathfrak{sl}_2)$, is equal to $3(m-1)$. We start with definitions and basic results of algebras, free algebras, polynomial identities, PI-algebras, etc. Afterwards, we present some results on multilinear, homogeneous, and proper identities, seeing that it is possible to simplify some identities. We also study the Hilbert series, codimension sequences, and PI-exponent, and we determine them for the Grassmann algebra over a field of characteristic 0. Later on we study the GK-dimension and some properties of this invariant when working with relatively free algebras. Finally, starting from the explicit form of Hilbert series of $F_m(\mathfrak{sl}_2)$ we calculate $\operatorname{GKdim} F_m(\mathfrak{sl}_2)$.

Keywords: PI-algebras. Gelfand-Kirillov dimension. Polynomial identity.

Sumário

Introdução **9**
1 Conceitos básicos **12**
1.1 Álgebras e Álgebras Associativas 12
1.1.1 Álgebras 12
1.1.2 Álgebras Livres e O Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt 17
1.2 PI-Álgebras e Variedades 19
1.2.1 Identidades Polinomiais e PI-Álgebras 19
1.2.2 T-ideais, Variedades e Álgebras Relativamente Livres 23
1.3 Invariantes Numéricos de T-ideais 26
1.3.1 Espaços Vetoriais graduados 26
1.3.2 Identidades Multilineares, Homogêneas e Próprias 28
1.3.3 Codimensões 32
1.3.4 Identidades Polinomiais da Álgebra de Grassmann 34
1.3.5 Teorema da codimensão de Regev 37
1.3.6 PI-expoente 40
2 GK-dimensão de álgebras **43**
2.1 O Teorema de Shirshov 43
2.2 GK-dimensão 49
2.3 GK-dimensão de álgebras relativamente livres 54
3 GK-dimensão da álgebra relativamente livre de $\mathfrak{sl}_2$ **57**
3.1 Primeira parcela 58
3.2 Demais parcelas 66

REFERÊNCIAS **69**

Introdução

Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ nas variáveis não comutativas x_1, $\ldots$, x_n tendo seus coeficientes em um corpo K, é dito ser uma identidade polinomial para uma álgebra A sobre o corpo K, se f se anula quando avaliado nos elementos de A. Se f não for o polinômio nulo, então A será chamado de PI-álgebra.

O desenvolvimento da PI-teoria começou com um artigo de Dehn sobre geometria projetiva na década de 20, e com resultados de Wagner que na década de 30 estudou identidades polinomiais para álgebras de matrizes 2×2. Ressaltamos ainda que na segunda metade do século 19, alguns conceitos da PI-teoria foram encontrados em trabalhos de Sylvester. Porém o interesse maior começou depois de 1940, com vários trabalhos de Jacobson, e em 1948, quando Kaplansky em [12] introduziu o conceito de PI-álgebra explicitamente e provou que toda PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples de dimensão finita. Dois anos depois, Amitsur e Levitzki, usando métodos combinatórios, provaram que as álgebras de matrizes $n \times n$ satisfazem o polinômio standard de grau $2n$.

Em 1966, Gelfand e Kirillov introduziram a dimensão de Gelfand-Kirillov para estudarem o crescimento de álgebras de Lie de dimensão finita, porém tal dimensão tornou-se um invariante importante para álgebras, pois não depende da escolha do conjunto gerador.

Procesi calculou a GK-dimensão da álgebra relativamente livre de posto m, $F_m(M_n(K))$, na variedade definida por $M_n(K)$, a álgebra das matrizes $n \times n$, com K sendo corpo infinito de característica arbitrária, chegando que $\mathrm{GKdim}(F_m(M_n(K))) = (m-1)n^2 + 1$.

Berele estendendo o resultado de Procesi construiu, em [3], modelos genéricos para as álgebras relativamente livres $F_m(M_n(E))$ e $F_m(M_{a,b}(E))$ nas variedades determinadas por $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$, respectivamente; e também mostrou que $\mathrm{GKdim}(F_m(M_n(E))) = (m-1)n^2 + 1$ e $\mathrm{GKdim}(F_m(M_{a,b}(E))) = (m-1)(a^2+b^2) + 2$, quando assumimos que m é maior que 2. Recordamos aqui que E é a álgebra de Grassmann (ou exterior), de dimensão infinita, e $M_{a,b}(E)$ é a subálgebra de $M_{a+b}(E)$ que consiste das matrizes com blocos $a \times a$ e $b \times b$ na diagonal com entradas de E_0, o centro de E. Os dois blocos fora da diagonal contêm entradas de E_1, a parte anti-comutativa de E.

Recordamos que Procesi utilizou essencialmente matrizes genéricas e suas propriedades intrínsecas, assim chegou que a GK-dimensão da álgebra gerada por m matrizes genéricas $n \times n$ é igual ao grau de transcendência do centro da álgebra sobre o corpo base, ou a dimensão de Krull do centro. Com isso, relacionou os estudos da GK-dimensão de uma álgebra "altamente" não comutativa, a das matrizes genéricas, com

tópicos da álgebra comutativa.

Neste trabalho estudamos álgebras com identidades polinomiais e alguns dos seus invariantes numéricos, como codmiensões, séries de Hilbert, PI expoente, e a dimensão de Gelfand-Kirillov, no qual nossa principal referência foi o livro de Drensky, [7]. Apresentamos alguns resultados sobre a GK-dimensão e em especial um obtido em 2014 por Machado e Kochlukov em [17] sobre $F_m(\mathfrak{sl}_2)$.

Esta dissertação está estruturada em três capítulos:

No primeiro capítulo, apresentamos conceitos e propriedades básicas do nosso objeto de estudo. Na seção 1.1, introduzimos o conceito de álgebra, álgebra livre e álgebra universal envolvente. Construímos uma álgebra livre na classe das K-álgebras associativas e unitárias denotada por $K\langle X\rangle$ e apresentamos o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, no qual esse mostra e apresenta a construção explícita da álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie. Na seção 1.2 apresentamos as identidades polinomiais e PI-álgebras, provando alguns resultados que nos auxiliarão a demonstrar que as álgebras de matrizes $M_n(K)$ são PI-álgebras. Também serão vistas definições e propriedades básicas de T-ideais, variedades e álgebras relativamente livres. Na seção 1.3 apresentamos as identidades multi-homogêneas, multilineares e próprias. Verificando que sob determinadas condições é possível simplificar as identidades em que estamos trabalhando por exemplo, provamos que todas identidades polinomiais de uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito seguem das suas identidades próprias. Também apresentamos algumas propriedades sobre séries de Hilbert, sobre o invariante numérico codimensão e a sequência das codimensões. Além disso, descrevemos as identidades polinomiais da álgebra de Grassmann sobre um corpo de característica 0; calculamos a codimensão, a série de codimensões e a série de codimensões exponencial de tal álgebra e calculamos a série de Hilbert da álgebra relativamente livre de posto m na variedade da álgebra de Grassmann. Demonstramos também o Teorema da codimensão de Regev que nos diz que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra (associativa) é limitada exponencialmente. Utilizando o teorema podemos responder positivamente uma pergunta que surge durante os estudos da PI-teoria: dadas duas PI-álgebras, então o produto tensorial delas também é uma PI-álgebra? No final dessa seção, a partir da sequência de codimensões de uma PI-álgebra, apresentamos brevemente um outro invariante, o PI-expoente.

No segundo capítulo, nos dedicamos a apresentar o invariante GK-dimensão. Na seção 2.1 vemos algumas propriedades acerca do semigrupo unitário livre de posto finito m, a definição de altura com respeito a um conjunto finito de monômios e então provamos o Teorema de Shirshov, o qual diz que toda PI-álgebra finitamente gerada possui altura finita. Na seção 2.2 definimos a GK-dimensão e vemos algumas propriedades, além disso usando o Teorema de Shirshov mostramos que toda PI-álgebra finitamente gerada tem GK-dimensão finita. Já na seção 2.3 apresentamos alguns resultados envolvendo a GK-dimensão das

álgebras relativamente livres. Aqui observamos que os invariantes numéricos de uma PI-álgebra, definidos no caso associativo, podem ser considerados em várias classes de álgebras não associativas, e as respectivas definições são praticamente as mesmas. Por outro lado, vale ressaltar que as propriedades não são as mesmas. Por exemplo, as codimensões de uma álgebra de Lie não precisam ser limitadas exponencialmente. Ainda, o PI-expoente nem sempre existe no caso de álgebras de Lie, e há exemplos onde ele existe, mas não é número inteiro. Portanto o estudo dos invariantes numéricos das identidades em dada álgebra é bastante importante, e em muitas situações, especialmente no caso de álgebras não associativas, não há resultados gerais. Recordamos que, em característica 0, Kemer resolveu em afirmativo, o famoso problema de Specht, proposto em 1950: Toda álgebra associativa tem uma base finita das suas identidades? Para a solução, Kemer desenvolveu uma teoria muito sofisticada, além do escopo desta dissertação. No caso de álgebras de Lie, há um resultado análogo neste sentido, obtido por Iltyakov; mas o resultado não é válido para todas álgebras de Lie. O mesmo vale para álgebras de Jordan, onde o teorema de Vais e Zelmanov estabeleceu resultado análogo para uma classe de álgebras de Jordan.

No terceiro capítulo apresentamos o resultado obtido por Machado e Kochloukov em [17], no qual a GK-dimensão da álgebra relativamente livre de posto m na variedade de álgebras de Lie gerada por $\mathfrak{sl}_2(K)$, com K sendo um corpo infinito de característica diferente de 2, é dado por $3(m-1)$. Tal teorema generaliza o resultado obtido por Bahturin, que no ano de 1979 em [1] tratou do caso $m = 2$. Aqui observamos que diferentemente do caso associativo, a GK-dimensão das álgebras relativamente livres de $\mathfrak{sl}_n(K)$, $n \geqslant 3$, não é conhecida, e tampouco para as demais álgebras de Lie simples e de dimensão finita.

1 Conceitos básicos

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos e alguns resultados que serão utilizados ao longo do texto.

Para evitar repetir frequentemente o uso da expressão "... sobre o corpo K", a menos que se diga algo em contrário, consideraremos os espaços vetoriais e as álgebras como sendo sobre um corpo dado K.

1.1 Álgebras e Álgebras Associativas

Nesta seção introduzimos os conceitos de Álgebra, Álgebras Livres e veremos o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt.

1.1.1 Álgebras

Os conceitos desta subseção podem ser encontrados em qualquer livro básico de álgebra, e portanto omitimos quaisquer referências, assumindo que o leitor tenha estudado tais conceitos nos cursos introdutórios de álgebra linear e de álgebra.

Definição 1.1.1. *Diremos que o K-espaço vetorial A, munido de uma operação binária $*\colon A \times A \to A$, é uma álgebra sobre K (ou apenas A é álgebra, quando a operação $*$ estiver clara) se para qualquer elemento α em K e quaisquer a, b e c pertencentes a A, valer:*

i) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

ii) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

iii) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Definimos algumas classes de álgebras especiais que satisfazem determinadas condições:

Definição 1.1.2. *Se A é uma álgebra, diremos que*

i) A é associativa se $(a * b) * c = a * (b * c)$ para quaisquer a, b e c pertencentes a A;

ii) A é comutativa se $a * b = b * a$ para quaisquer a e b pertencentes a A;

iii) A é unitária se existir um elemento 1_A de A com $1_A \neq 0_A$, tal que $1_A * a = a = a * 1_A$ para qualquer a de A;

iv) A é uma álgebra de Lie se para quaisquer a, b e c pertencentes a A, valer:

$$a * a = 0 \text{ } \textit{(anticomutatividade)},$$
$$(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0 \text{ } \textit{(identidade de Jacobi)};$$

iv) A é uma álgebra de Jordan se para quaisquer a e b pertencentes a A, valer:

$$a * b = b * a,$$
$$(a^2 * b) * a = a^2 * (b * a), \text{ } \textit{onde } a^2 = a * a.$$

Por simplicidade, em geral omitiremos o símbolo da multiplicação "$*$" e ao invés de $(a * b)$ escreveremos ab. Omitiremos também o subscrito na notação da unidade e do elemento nulo e os denotaremos simplesmente por 1 e 0, quando não há equívoco. No caso de álgebras de Lie, por tradição, usa-se o colchete $[a, b]$ para o produto de a e b.

A seguir, daremos alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 1.1.3. *As matrizes $n \times n$ com entradas em K, $M_n(K)$, com o produto usual de matrizes é uma álgebra associativa unitária. Quando $n > 1$ ela não é comutativa.*

Exemplo 1.1.4. *As matrizes $n \times n$ de traço zero com entradas em K, $\mathfrak{sl}_n(K)$, é uma álgebra de Lie em relação ao comutador usual $[a, b] = ab - ba$, mas não é uma álgebra associativa quando $n > 1$. Ela é chamada de álgebra especial linear, e é muito importante na teoria.*

Exemplo 1.1.5. *O anel $K[x_1, \ldots, x_n]$ dos polinômios em n variáveis, $n \geqslant 1$, com relação às operações usuais é uma álgebra associativa, comutativa e unitária. Observamos que o anel dos polinômios $K[x_1, x_2, \ldots]$ em infinitas variáveis também é uma álgebra que é associativa, comutativa e unitária. Estas álgebras são de extrema importância na álgebra comutativa.*

Exemplo 1.1.6. *Seja $K \subseteq L$ uma extensão de corpos, então L é um espaço vetorial sobre K. Com respeito ao produto usual em L, ele se torna uma álgebra associativa, comutativa e unitária sobre o corpo K.*

Exemplo 1.1.7. *O subespaço $UT_n(K) \subseteq M_n(K)$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em K, com a multiplicação herdada de $M_n(K)$, é uma álgebra associativa unitária. Se $n > 1$ esta não é comutativa.*

Exemplo 1.1.8. *Se a álgebra A é associativa com a multiplicação $*$, então o espaço vetorial A é uma álgebra de Lie com a multiplicação definida pelo comutador $[a_1, a_2] = a_1 * a_2 - a_2 * a_1$. Denotaremos a álgebra $(A, [-, -])$ por $A^{(-)}$.*

Exemplo 1.1.9. *Se $A = M_n(K)$, denotaremos por $\mathfrak{gl}_n(K)$ a álgebra $A^{(-)}$. Essa é a álgebra geral linear de Lie.*

Exemplo 1.1.10. *O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto vetorial usual $\times$ é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 1.1.11. *O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ com base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e a operação $*$ comutativa definida por $e_1 * e_2 = e_1$, $e_1 * e_3 = e_3$, $e_2 * e_3 = e_2$ e $e_i^2 = e_i$, é uma álgebra de Jordan.*

Exemplo 1.1.12. *Seja V um espaço vetorial com base ordenada $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Definimos a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) de V, denotada por $E = E(V)$, como sendo a álgebra associativa gerada por $\{1, e_1, e_2, \ldots\}$ e satisfazendo a relação $e_i e_j = -e_j e_i$ (e $e_i^2 = 0$ se $\operatorname{char} K = 2$), para quaisquer i e j naturais. Pode ser visto que*

$$\{1,\ e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k,\ k \geqslant 1\}$$

é uma base para E. Se V_n é o subespaço vetorial de V gerado por e_1, e_2, ..., e_n, denotamos sua álgebra de Grassmann como sendo $E(V_n)$.

Observamos aqui que a definição usual da álgebra de Grassmann dada nos cursos de Álgebra linear, difere desta. Por outro lado, a definição usual funciona apenas quando o corpo K é de característica 0, e a nossa definição serve para qualquer corpo. Em característica 0 as duas definições são equivalentes. Observamos ainda, que em característica 2, a álgebra de Grassmann é comutativa.

Definição 1.1.13. *Um subespaço B de uma álgebra A é chamado de subálgebra de A se este for fechado com respeito a multiplicação de A. O subespaço B será chamado de ideal à esquerda de A se $AB \subseteq B$, analogamente define-se ideal à direita. Já se B é tanto ideal à esquerda quanto a direita (bilateral), este será chamado apenas de ideal.*

Observação 1.1.14. *Se A é uma álgebra unitária, então para que $B \subseteq A$ seja subálgebra, B deve ser unitária e ter a mesma unidade de A. Logo, ideais não triviais de álgebras unitárias não são subálgebras. Isso pode ser deduzido facilmente observando-se que um ideal (unilateral ou bilateral) contendo a unidade, coincide com A.*

Exemplo 1.1.15. *O subespaço $UT_n(K)$ é uma subálgebra de $M_n(K)$. O subespaço I de $UT_n(K)$, das matrizes triangulares superiores em que todos os elementos da diagonal são nulos, é um ideal de $UT_n(K)$, porém não é de $M_n(K)$.*

Observamos aqui que os únicos ideais em $M_n(K)$ são 0 e $M_n(K)$, tais álgebras são chamadas de simples. Se K é algebricamente fechado, é bem conhecido que essas são todas as álgebras associativas simples de dimensão finita.

Exemplo 1.1.16. *O subespaço $\mathfrak{sl}_n(K)$ é uma subálgebra (de Lie) de $\mathfrak{gl}_n(K)$. Ela é simples. Mas no caso de álgebras de Lie, mesmo sobre um corpo algebricamente fechado e de característica 0, existem outras álgebras simples de dimensão finita.*

Exemplo 1.1.17. *Seja A uma álgebra. O conjunto $Z(A)$, formado por todos elementos a de A tal que todo elemento x em A satisfaz $ax = xa$, é uma subálgebra de A e é chamada de centro de A.*

Exemplo 1.1.18. *Do Exemplo 1.1.12, consideramos E_0 e E_1 como sendo os subespaços vetoriais de E gerados pelos conjuntos $\{1,\ e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \mid k \text{ par}\}$ e $\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_l} \mid l \text{ ímpar}\}$ respectivamente. Vemos que $(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})(e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l}) = (-1)^{kl}(e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l})(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})$ para quaisquer k e l naturais, e então concluímos que $a_0x = xa_0$ e $a_1a_2 = -a_2a_1$ para quaisquer a_0 em E_0, x em E, e a_1 e a_2 em E_1. Logo vemos que se $\operatorname{char} K \neq 2$ então $Z(E) = E_0$; caso contrário, já vimos que a álgebra E é comutativa e assim $Z(E) = E$.*

Como $E_0 \cap E_1 = \{0\}$ e todo elemento de E pode ser escrito como soma de elementos de E_0 e E_1, temos que $E = E_0 \oplus E_1$, soma direta de espaços vetoriais.

Exemplo 1.1.19. *Considere $M_n(E)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas na álgebra de Grassmann E munida da multiplicação usual de matrizes. Sejam a e b naturais tais que $a + b = n$, o subespaço de $M_{a+b}(E)$ das matrizes da forma $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ em que A, B, C e D são elementos, respectivamente, das álgebras $M_a(E_0)$, $M_{a\times b}(E_1)$, $M_{b\times a}(E_1)$ e $M_b(E_0)$, é uma subálgebra de $M_{a+b}(E)$. Denotaremos essa subálgebra por $M_{a,b}(E)$.*

A proposição a seguir é um fato imediato da Álgebra Linear básica, e portanto omitimos sua demonstração.

Proposição 1.1.20. *Dado um espaço vetorial V com β sendo uma base e $\varphi\colon \beta \times \beta \longrightarrow V$ uma função, então existe uma única função bilinear $\widetilde{\psi}\colon V \times V \longrightarrow V$ que estende φ.*

Assim, concluímos que para definir uma estrutura de álgebra em um espaço vetorial A, é suficiente definir o produto para os elementos de uma base.

Definição 1.1.21. *Sejam V e W espaços vetoriais cujas bases são $\{v_i \mid i \in I\}$ e $\{w_j \mid j \in J\}$ respectivamente. O produto tensorial de V e W, definido por $V \otimes W$, é o espaço vetorial cuja base é $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$, no qual*

$$\left(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j\in J} \beta_j w_j\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \alpha_i\beta_j (v_i \otimes w_j),$$

onde os α_i e β_j são escalares do corpo K e apenas um número finito de α_i's e β_i's são diferentes de 0.

Veremos agora que o produto tensorial de espaços vetoriais satisfaz a seguinte propriedade universal, fato demonstrado nos cursos de álgebra linear.

Teorema 1.1.22 (Propriedade Universal)**.** *Sejam V e W espaços vetoriais e uma aplicação bilinear $\varphi\colon V \times W \longrightarrow U$, então existe uma única aplicação linear $\psi\colon V \otimes W \longrightarrow U$ tal que $\psi(v \otimes w) = \varphi(v, w)$ para quaisquer v em V e w em W.*

Exemplo 1.1.23. *Sejam $(A, *_A)$ e $(B, *_B)$ álgebras cujas bases são $\{a_i \mid i \in I\}$ e $\{b_j \mid j \in J\}$ respectivamente. Considere a multiplicação bilinear $*\colon (A \otimes B) \times (A \otimes B) \longrightarrow A \otimes B$ definida por*

$$(a_{i_0} \otimes b_{j_0}) * (a_{i_1} \otimes b_{j_1}) = (a_{i_0} *_A a_{i_1}) \otimes (b_{j_0} *_B b_{j_1}), \quad i_0, i_1 \in I,\ j_0, j_1 \in J.$$

Segue da Propriedade Universal que este produto está bem definido. O espaço vetorial $A \otimes B$, munido da multiplicação $*$ é uma álgebra.

Exemplo 1.1.24. *Seja E a álgebra de Grassmann, então $E \otimes E$ é uma álgebra, com o produto conforme o exemplo anterior.*

Definição 1.1.25. *Sejam a_1 e a_2 elementos de A e I um ideal de A. Dizemos que a_1 é congruente ao elemento a_2 módulo I se $a - b$ está em I e denotaremos por $a \equiv b \pmod{I}$. Dizemos que a classe de equivalência de a_1 é o conjunto $\{a_2 \in A \mid a_1 \equiv a_2 \pmod{I}\} = \{a_1 + i \mid i \in I\} = a_1 + I$ e o denotaremos por $\overline{a_1}$. O conjunto de todas as classes de equivalência será denotado por A/I.*

Exemplo 1.1.26. *Seja A uma álgebra e I um ideal de A, então o espaço quociente A/I com a multiplicação $*$ definida por $\overline{a_1} * \overline{a_2} = \overline{a_1 a_2}$ é uma álgebra. Chamaremos A/I de álgebra quociente.*

A verificação que o produto acima torna A/I numa álgebra é imediata. A parte mais "difícil" é ver que o produto é bem definido, isto é, independe da escolha dos representantes das classes de equivalência.

Definição 1.1.27. *Seja φ uma transformação linear $\varphi\colon A_1 \longrightarrow A_2$ entre as álgebras $(A_1, *_{A_1})$ e $(A_2, *_{A_2})$. Diremos que φ é um homomorfismo de álgebras se $\varphi(a *_{A_1} b) = \varphi(a) *_{A_2} \varphi(b)$ para quaisquer a e b pertencentes a A_1. Se A_1 e A_2 são unitárias, é exigido também que $\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$.*

Definimos por $\ker(\varphi) = \{a \in A_1 \mid \varphi(a) = 0_{A_2}\}$ e $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(A_1)$ como sendo o núcleo e a imagem de φ, respectivamente.

Definição 1.1.28. *Um homomorfismo de álgebras $\varphi\colon A_1 \longrightarrow A_2$ é dito:*

i) epimorfismo se $\mathrm{Im}(\varphi) = A_2$;

ii) monomorfismo se $\ker(\varphi) = \{0\}$;

iii) isomorfismo se φ é um epimorfismo e um monomorfismo. Nesse caso denotaremos por $A_1 \cong A_2$;

iv) endomorfismo se $A_2 = A_1$;

v) automorfismo se φ é um isomorfismo e um endomorfismo.

Exemplo 1.1.29. *Usando a propriedade universal do produto tensorial podemos concluir que $M_n(E) \cong M_n(K) \otimes E$. Também temos que se $K \subseteq L$ é uma extensão de corpos, então $M_n(L) \cong M_n(K) \otimes L$, e de maneira mais geral, se A é uma K-álgebra associativa, $M_n(K) \otimes_K A \cong M_n(A)$.*

Teorema 1.1.30 (Teorema do Isomorfismo)**.** *Seja $\varphi\colon A_1 \longrightarrow A_2$ um homomorfismo de álgebras. Então $\ker(\varphi)$ é um ideal de A_1 e a álgebra quociente $A_1/\ker(\varphi)$ é isomorfa à $\mathrm{Im}(\varphi)$.*

A demonstração deste teorema é análoga ao Teorema dos Isomorfismos para anéis, grupos, espaços vetoriais, e portanto a omitiremos.

1.1.2 Álgebras Livres e O Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

Os conceitos e os principais resultados desta subseção podem ser encontrados em vários livros; nós usamos a notação das seções 1.2 e 1.3 de [7].

Definição 1.1.31. *Seja $\mathfrak{B}$ uma classe de álgebras e F uma álgebra, contida em $\mathfrak{B}$, gerada por um conjunto X. A álgebra F é chamada de álgebra livre na classe $\mathfrak{B}$, livremente gerada pelo conjunto X, se para qualquer álgebra A em $\mathfrak{B}$, toda aplicação $X \longrightarrow A$ pode ser estendida unicamente a um homomorfismo $F \longrightarrow A$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é dita posto de F.*

A seguir, construiremos uma álgebra livre na classe das K-álgebras associativas e unitárias.

Definição 1.1.32. *Seja X um conjunto, uma palavra sobre X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ com n um número natural e x_{i_j} um elemento de X. Denotaremos por 1 a palavra vazia e por $K\langle X\rangle$ o espaço vetorial cuja base é o conjunto de todas as palavras sobre X.*

Chamaremos os elementos x que estão em X de variáveis, os produtos de um escalar por uma palavra de monômios e os elementos de $K\langle X\rangle$ de polinômios.

Um monômio M é dito ter grau k em x se a variável x ocorre k vezes em M, denotaremos por $\deg_x(M) = k$. M é dito ter grau total k se $\sum_{x\in X} \deg_x(M) = k$. O grau (ou grau total) de um polinômio não nulo é definido como sendo o máximo dos graus de seus monômios.

Exemplo 1.1.33. *O espaço vetorial $K\langle X\rangle$ munido com a multiplicação definida por*

$$(x_{i_1}\ldots x_{i_m})(x_{j_1}\ldots x_{j_n}) = x_{i_1}\ldots x_{i_m}x_{j_1}\ldots x_{j_n}$$

com x_{i_k} e x_{j_r} elementos de X, é uma álgebra associativa unitária, sendo a palavra vazia, 1, sua unidade.

Proposição 1.1.34. *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias.*

Demonstração. Seja A uma álgebra associativa com unidade e $g\colon X \longrightarrow A$ uma aplicação. Para todo x_i em X denotaremos por a_i a imagem de x_i por g. Considere a aplicação linear $\varphi_g\colon K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\varphi_g(1) = 1_A$ e $\varphi(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}$. (Tal φ existe e é única, pois os monômios são uma base do espaço vetorial $K\langle X\rangle$.) Temos que φ_g está bem definida e vemos facilmente que é um homomorfismo de álgebras e é o único que satisfaz $\varphi_g = g$ sobre o conjunto X. Portanto, pela Definição 1.1.31, $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade. □

Observamos que com modificações óbvias podemos definir a álgebra associativa livre sem unidade.

Se $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$, denotaremos a imagem de f por φ_g como sendo $f(a_1, \dots, a_n)$. Na verdade, $f(a_1, \dots, a_n)$ é o elemento de A obtido pela substituição de x_i por a_i em f.

Definição 1.1.35. *Se A é uma álgebra associativa e L a álgebra de Lie que é isomorfa a uma subálgebra da álgebra de Lie $A^{(-)}$ (definida no Exemplo 1.1.8), dizemos que A é uma álgebra envolvente da álgebra de Lie L.*

Dizemos que a álgebra associativa e com unidade $U = U(L)$ é a álgebra (associativa) universal envolvente da álgebra de Lie L, se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e se U tem a seguinte propriedade universal:

Para qualquer álgebra associativa A e para qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi\colon L \longrightarrow A^{(-)}$, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\widetilde{\psi}\colon U \longrightarrow A$ que estende φ, isto é, para qualquer x em L, $\widetilde{\psi}(x) = \varphi(x)$.

Essa definição não garante a existência, nem a unicidade da álgebra universal envolvente. Por outro lado, como regra geral, objetos definidos por meio de propriedades universais, existem e são únicos a menos de isomorfismo.

Teorema 1.1.36 (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Toda álgebra de Lie L possui uma álgebra universal envolvente $U(L)$. Se L tem uma base $\{e_i \mid i \in I\}$, com I sendo um conjunto ordenado, então o conjunto de elementos*

$$\{e_{i_1}\dots e_{i_p},\ i_1 \leqslant \dots \leqslant i_p,\ i_k \in I,\ p = 0, 1, 2, \dots\}$$

forma uma base de $U(L)$.

A álgebra universal envolvente é única, a menos de isomorfismo, o qual age como a identidade sobre os elementos de L.

Demonstração. [7, Theorem 1.3.2, p. 11]. □

Observamos que o Teorema de PBW não apenas mostra a existência da álgebra universal envolvente mas também dá uma construção explícita desta, partindo de uma base da álgebra L.

A álgebra de Lie livre é obtida a partir de $K\langle X\rangle$, mas $K\langle X\rangle^{(-)}$ é "muito grande", como mostra o teorema a seguir.

Teorema 1.1.37 (Teorema de Witt)**.** *A subálgebra de Lie $L(X)$ de $K\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X (ou seja, $L(X)$ é a interseção de todas as álgebras de Lie que contém X) é livre na classe das álgebras de Lie e $U(L(X)) = K\langle X\rangle$.*

Demonstração. [7, Theorem 1.3.5, p. 14]. □

Definição 1.1.38. *Sejam M um espaço vetorial e A uma álgebra associativa. Suponha que $\rho\colon A \longrightarrow End_K(M)$ seja um homomorfismo de álgebras tal que $\rho(1) = Id$. Dizemos que ρ é uma representação de A em M e M é um A-módulo à esquerda. Analogamente define-se A-módulo à direita.*

Observe que todo ideal (à esquerda) de A é um A-módulo à esquerda, onde a ação à esquerda de um elemento a de A é dada por $\rho(a)(b) = ab$, com b sendo elemento do ideal.

Chamaremos um A-módulo à esquerda simplesmente de A-módulo.

Definição 1.1.39. *Seja A uma álgebra, M um A-módulo e N um subconjunto não vazio de M. Dizemos que N é um A-submódulo de M se N for um subespaço vetorial de M tal que $a \cdot n$ é um elemento de N para quaisquer a e n pertencentes, respectivamente, a A e N.*

Exemplo 1.1.40. *Seja A uma álgebra. Se considerarmos A como sendo um A-módulo, então todos os ideais à esquerda da álgebra A são submódulos.*

1.2 PI-Álgebras e Variedades

1.2.1 Identidades Polinomiais e PI-Álgebras

Os conceitos desta subseção utilizam a notação da seção 2.1 de [7] e os resultados que auxiliam na demonstração do Teorema de Amitsur-Levitzki foram retirados das seções 1.6 e 1.7 de [11].

Usaremos a seguir, a menos que se diga algo em contrário, X como sendo um conjunto enumerável: $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Definição 1.2.1. *Seja A uma álgebra associativa. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ de $K\langle X\rangle$ é chamado de identidade polinomial de A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer a_1, $\ldots$, a_n pertencentes a A. Neste caso dizemos que A satisfaz a identidade $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$*

Denotaremos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A.

A álgebra A é chamada de álgebra com identidade polinomial ou simplesmente PI-álgebra se $T(A) \neq \{0\}$.

Dadas duas álgebras associativas A_1 e A_2, diremos que elas são PI-equivalentes se $T(A_1) = T(A_2)$.

Observação 1.2.2. *Facilmente vemos que um polinômio f de $K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial para A se, e somente se, f pertence ao $\ker(\varphi)$ para todo homomorfismo $\varphi\colon K\langle X\rangle \longrightarrow A$.*

Exemplo 1.2.3. *A álgebra $K\langle X\rangle$ não é uma PI-álgebra quando $|X| > 1$. Veja que os mônomios (palavras) de $K\langle X\rangle$ formam uma base, como espaço vetorial, de $K\langle X\rangle$, logo a única combinação linear possível entre eles (isto é, uma identidade polinomial) seria a trivial. Se $|X| = 1$ a álgebra $K\langle X\rangle$ é comutativa, logo é PI-álgebra.*

Exemplo 1.2.4. *Uma álgebra A é dita ser nilpotente se existe um n natural fixo tal que o produto de quaisquer n elementos de A é igual a zero. O menor natural que satisfaz tal propriedade é chamado de índice de nilpotência da álgebra A. Se A é uma álgebra nilpotente, de índice n, então A é uma PI-álgebra, pois $x_1 \cdots x_n$ é uma identidade polinomial para A. Veja que como A é nilpotente, se $A \neq 0$, temos que 1 não pertence a A (observe que $0 \neq 1$).*

Definição 1.2.5. *O comutador (de Lie) de comprimento $n > 1$ é definido por*

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1,$$
$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Exemplo 1.2.6. *Se A é um álgebra comutativa, então A é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade $[x_1, x_2] = 0$.*

Exemplo 1.2.7. *Temos que $UT_n(K)$ é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade*

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0.$$

Observe que o comutador de quaisquer duas matrizes de $UT_n(K)$ é uma matriz triangular estritamente superior. Como visto no Exemplo 1.1.15 tal conjunto é um ideal e mais ainda, é um ideal nilpotente tal que $I^n = 0$.

Exemplo 1.2.8. *O polinômio* $[x_1, x_2, x_3]$ *é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann* E*. Se* $\operatorname{char} K = 2$*,* E *é comutativa e segue o resultado. Caso contrário observe que para quaisquer* a *e* b *pertencentes a* E *temos que* $[a, b]$ *está em* E_0*: basta verificar isso para os monômios. Os monômios de comprimento par são centrais, e se temos dois monômios de comprimentos ímpares, o produto deles terá comprimento par (ou será 0). Como no Exemplo 1.1.18 vimos que* $E_0 = Z(E)$*, logo* $[a, b]$ *está em* $Z(E)$ *e portanto* $[a, b, c] = 0$*.*

Definição 1.2.9. *O polinômio*

$$St_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\ \sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

é chamado de polinômio standard de grau n*, onde* S_n *é o grupo simétrico das permutações de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *e* $sgn\ \sigma$ *é o sinal da permutação* σ*.*

A seguir apresentaremos alguns resultados auxiliares para demonstrarmos o Teorema de Amitsur-Levitzki. A demonstração original utiliza essencialmente argumentos combinatórios. Nos basearemos na demonstração de Rosset, [20], a qual utiliza ferramentas de Álgebra Linear.

Proposição 1.2.10. *Se* $St_{2n} = 0$ *em* $M_n(\mathbb{Q})$*, então* $St_{2n} = 0$ *em* $M_n(K)$*, para qualquer corpo* K*.*

Demonstração. [11, Remark 1.7.3, p. 17]. Resumidamente a demonstração consiste em observar que o polinômio standard tem seus coeficientes 0, 1, -1 no subcorpo primo (minimal) de K. Logo se K é de característica 0 seu subcorpo primo é $\mathbb{Q}$. Se K for de característica $p > 0$, o subcorpo primo será $\mathbb{Z}_p$. Mas $\mathbb{Z}_p$ é uma imagem por homomorfismo do anel dos inteiros, e se o teorema vale para $\mathbb{Q}$ vai valer para o subanel $\mathbb{Z}$. □

Observamos que com um raciocínio semelhante (embora mais sofisticado), pode ser demonstrado que a validade do teorema quando o corpo base é $\mathbb{Q}$ implica a validade deste sobre qualquer anel comutativo com unidade.

Proposição 1.2.11. *Sejam* C *uma álgebra comutativa sobre* $\mathbb{Q}$ *e* a *uma matriz de* $M_n(C)$*. Se* $f_a(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{n-i}$ *é o polinômio característico de* a*, então, para todo* $k = 1, \ldots, n$*,*

$$\alpha_k = \sum_{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_j) \vdash k} q_\lambda \operatorname{tr}(a^{\lambda_1}) \cdots \operatorname{tr}(a^{\lambda_j}),$$

com q_λ *pertencente a* $\mathbb{Q}$*, não dependente de* a*.*

Demonstração. [11, Corollary 1.6.4, p. 16]. □

Corolário 1.2.12. *Seja C uma álgebra comutativa sobre $\mathbb{Q}$. Se a pertence a $M_n(C)$ tal que $\operatorname{tr}(a) = \operatorname{tr}(a^2) = \cdots = \operatorname{tr}(a^n) = 0$, então $a^n = 0$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, temos que o polinômio característico de a é x^n, logo $a^n = 0$. □

Seja E a álgebra de Grassmann sobre $\mathbb{Q}$. Pelo Exemplo 1.1.18 vimos que se w_1 e w_2 estão em E_1, então $w_1w_2 = -w_2w_1$.

Lema 1.2.13. *Se a e b estão em $M_n(E_1)$, então $\operatorname{tr}(ab) = -\operatorname{tr}(ba)$.*

Observamos aqui que $M_n(E_1)$ não é uma álgebra pois E_1 é apenas espaço vetorial e o produto de dois elementos de E_1 está em E_0; aqui consideramos a e b duas matrizes de $M_n(E)$ cujas entradas estão em E_1.

Demonstração. Considere $a = \sum_i a_i w_i$ e $b = \sum_j b_j w_j$, com a_i e b_j matrizes de $M_k(\mathbb{Q})$ e w_i e w_j pertencentes a E_1. Logo,

$$\operatorname{tr}(ab) = \sum_{i,j} \operatorname{tr}(a_ib_j)w_iw_j = -\sum_{i,j} \operatorname{tr}(b_ja_i)w_jw_i = -\operatorname{tr}(ba).$$ □

Corolário 1.2.14. *Sejam $a_1, \ldots, a_{2r}$ matrizes de $M_n(K)$ com r sendo maior que 1 e $\operatorname{char} K \neq 2$. Então,*

$$\operatorname{tr}(St_{2r}(a_1, \ldots, a_{2r})) = 0.$$

Demonstração. Seja $a = \sum_{i=1}^{2r} a_ie_i$ uma matriz de $M_n(E_1)$. Como para todo σ de S_{2r} temos que

$$e_{\sigma(1)} \cdots e_{\sigma(2r)} = sgn(\sigma)e_1 \cdots e_{2r},$$

assim

$$a^{2r} = \sum_{\sigma \in 2_{2r}} sgn(\sigma)a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(2r)}e_1 \cdots e_{2r} = St_{2r}(a_1, \ldots, a_{2r})e_1 \cdots e_{2r}.$$

Aplicando o lema anterior para as matrizes a e a^{2r-1} de $M_n(E_1)$, obtemos que $2\operatorname{tr}(a^{2r}) = 0$ e, como $\operatorname{char} K \neq 2$, logo $0 = \operatorname{tr}(a^{2r}) = \operatorname{tr}(St_{2r}(a_1, \ldots, a_{2r}))e_1 \cdots e_{2r}$. Portanto, $\operatorname{tr}(St_{2r}(a_1, \ldots, a_{2r}))e_1 \cdots e_{2r} = 0$. □

Teorema 1.2.15 (Teorema de Amitsur-Levitzki)**.** *A álgebra $M_n(K)$ satisfaz o polinômio standard de grau $2n$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.2.10, precisamos apenas mostrar que $St_{2n} = 0$ em $M_n(\mathbb{Q})$. Sejam $a_1, \ldots, a_{2n}$ matrizes de $M_n(\mathbb{Q})$ e $E = E_0 \oplus E_1$ a álgebra de Grassmann

sobre o corpo $\mathbb{Q}$. Considere a matriz $a = \sum_{i=1}^{2n} a_i e_i$ de $M_n(E_1)$. Como visto na demonstração no corolário anterior, temos que

$$a^{2n} = St_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n}) e_1 \cdots e_{2n}.$$

Agora, apenas precisamos mostrar que $a^{2n} = 0$. Para todo $i = 1, \ldots, n$, como a e a^{2i-1} estão em $M_n(E_1)$, pelo Lema 1.2.13 temos que $\operatorname{tr}(a^{2i}) = \operatorname{tr}(aa^{2i-1}) = -\operatorname{tr}(a^{2i-1}a)$, logo $\operatorname{tr}(a^{2i}) = 0$. Como E_0 é uma álgebra comutativa sobre $\mathbb{Q}$, a^2 está em $M_n(E_0)$ e $\operatorname{tr}(a^{2i}) = 0$, pelo Corolário 1.2.12, temos que $a^{2n} = 0$. □

Além disso, $M_n(K)$ não satisfaz nenhum polinômio standard de grau menor que $2n$. Na verdade pode ser visto facilmente (o conhecido Lema sobre a escada) que $M_n(K)$ não satisfaz nenhuma identidade de grau $< 2n$.

As únicas identidades de $M_n(K)$ de grau $2n$ são os múltiplos por escalar de St_n, exceto no caso $n = 2$ e $|K| = 2$. No último caso surgem duas novas identidades de grau 4.

Corolário 1.2.16. *As álgebras de matrizes $M_n(K)$ são PI-álgebras.*

Observação 1.2.17. *Pode ser visto facilmente que se A é uma álgebra tal que $\dim A < n$ então A satisfaz a identidade standard St_n. Escolhemos uma base $v_1, \ldots, v_k$ do espaço vetorial de A, e escrevemos os elementos $a_1, \ldots, a_n$ pertencentes a A como combinações lineares dos v_i. Então*

$$St_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum \alpha_i St_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}), \quad \alpha_i \in K.$$

Mas para os índices $i_1, \ldots, i_n$ temos $k < n$ possibilidades, logo teremos vetores da base repetidos. Então o polinômio standard, por ser anti-simétrico em qualquer par de variáveis, se anula.

1.2.2 T-ideais, Variedades e Álgebras Relativamente Livres

Iniciamos a subseção utilizando uma definição e um resultado retirados da seção 1.2 de [11], porém os outros conceitos e resultados seguem a notação das seções 2.2 e 2.3 de [7].

Definição 1.2.18. *Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é dito T-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para qualquer $\varphi \in End(K\langle X\rangle)$. Equivalentemente, I é um T-ideal se para quaisquer $g_1, \ldots, g_n$ em $K\langle X\rangle$ temos que $f(g_1, \ldots, g_n)$ está em I para todo $f(x_1, \ldots, x_n)$ em I.*

Assim um T-ideal, além de ser fechado por diferença dos seus elementos, e por produto de elementos de $K\langle X\rangle$ à direita e à esquerda, é fechado por substituições por

quaisquer polinômios no lugar das variáveis. Claramente nem todo ideal em $K\langle X\rangle$ é um T-ideal.

Proposição 1.2.19. *Seja A uma álgebra, então $T(A)$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Por outro lado, se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então existe uma álgebra B tal que $T(B) = I$.*

Demonstração. Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial de A e $\varphi \in \mathrm{End}(K\langle X\rangle)$, temos que $\varphi(x_i) = g_i$ está em $K\langle X\rangle$ para todo i. Seja $\rho(x_1, \ldots, x_k) = f(g_1, \ldots, g_n)$, assim $\rho = \varphi(f)$; substituindo $x_1, \ldots, x_k$ por $a_1, \ldots, a_k$, elementos de A, teremos que calcular $g_1, \ldots, g_n$ nos elementos a_i e como $g_i(a_i)$ está em A e f é uma identidade polinomial de A temos que $f(g_1, \ldots, g_n) = 0$. Portanto $\varphi(T(A)) \subseteq T(A)$ e então $T(A)$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$.

Se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, basta tomarmos a álgebra $B = K\langle X\rangle/I$ e assim temos que $T(B) = I$. □

Definição 1.2.20. *Seja $\{f_i(x_1, \ldots x_{n_i}) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. A classe $\mathfrak{V}$ de todas álgebras associativas que satisfazem as identidades polinomiais $f_i = 0$, é chamada de variedade (de álgebras associativas) determinada pelo sistema de identidades polinomiais $\{f_i(x_1, \ldots x_{n_i}) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$. A variedade $\mathfrak{W}$ é chamada de subvariedade de $\mathfrak{V}$ se $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$. O conjunto $T(\mathfrak{V})$, de todas identidades polinomiais satisfeitas por toda álgebra da variedade $\mathfrak{V}$, é chamado de T-ideal de $\mathfrak{V}$. Dizemos que o T-ideal $T(\mathfrak{V})$ é gerado, como T-ideal, pelo conjunto $\{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$; denotamos por $T(\mathfrak{V}) = \langle f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in I\rangle^T$ e dizemos que $\{f_i \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ é uma base para as identidade polinomiais de $\mathfrak{V}$. Os elementos de $T(\mathfrak{V})$ são chamados de consequências das identidades polinomiais da base (ou diremos que os elementos seguem das identidades polinomiais da base).*

Observamos que um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é uma consequência (como identidade polinomial) do conjunto de polinômios $\{f_i \mid i \in I\}$ se f pertence ao menor T-ideal que contém os f_i. Em outras palavras, f pode ser obtido como uma combinação linear de elementos f_i onde as variáveis podem ser substituídas por quaisquer polinômios, e os f_i podem ser multiplicados (dos dois lados) por quaisquer polinômios.

Analogamente definimos uma variedade de álgebras de Lie.

Vimos na proposição anterior que $T(A)$ é um T-ideal. É fácil ver que interseção de T-ideais também é um T-ideal. Logo o conjunto $T(\mathfrak{V})$ é um T-ideal.

Exemplo 1.2.21. *A classe das álgebras comutativas é uma variedade definida pela identidade $[x_1, x_2] = 0$*

Exemplo 1.2.22. *A classe das álgebras associativas é uma variedade definida pelo conjunto vazio de identidades polinomiais.*

A seguir daremos alguns exemplos de bases para algumas PI-álgebras.

Exemplo 1.2.23. *Seja K um corpo finito, então $T(K) = \langle [x_1, x_2], x^q - x \rangle^T$, no qual $|K| = q = p^n$ para algum primo p. Se K é infinito e A é uma álgebra associativa, comutativa e unitária, tem-se que $T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$.*

Exemplo 1.2.24. *Se K é um corpo infinito, então*

$$T(UT_n(K)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] \rangle^T.$$

Para mais detalhes veja [7, Theorem 5.2.1, p. 52].

Exemplo 1.2.25. *Seja K um corpo de característica 0, então os polinômios St_4 e $[[x_1, x_2]^2, x_3]$ formam uma base das identidades da álgebra $M_2(K)$. Esse resultado foi obtido por Drensky que se baseou nos resultados fundamentais de Razmyslov que encontrou uma base finita (de nove identidades de grau 4, 5 e 6). Para mais detalhes veja [7, p. 84] e [5].*

O mesmo conjunto de polinômios é uma base para as identidades de $M_2(K)$ quando K é um corpo infinito de característica maior que 3. Se a característica é 3, há mais uma identidade de grau 6, que não é consequência dessas duas (mas em característica diferente de 3 é consequência). Não se sabe nem se a base das identidades de $M_2(K)$ é finita ou não, quando a característica do corpo é 2. E se $n > 2$, não é conhecida nenhuma base finita para as identidades de $M_n(K)$, nem mesmo em característica 0. A existência de uma base finita das identidades para qualquer álgebra associativa em característica 0 (o Problema de Specht) segue dos resultados fundamentais de A. R. Kemer.

Definição 1.2.26. *Fixado um conjunto Y, a álgebra $F_Y(\mathfrak{V})$ na variedade $\mathfrak{V}$ é chamada de álgebra relativamente livre de $\mathfrak{V}$ (ou álgebra $\mathfrak{V}$-livre), se $F_Y(\mathfrak{V})$ é livre na classe $\mathfrak{V}$, livremente gerada por Y.*

Seja A uma PI-álgebra e $\mathfrak{V}$ a variedade determinada por $T(A)$. Claramente $T(\mathfrak{V}) = T(A)$. Logo, dado um conjunto Y, definimos $F_Y(A) = F_Y(\mathfrak{V})$, a álgebra relativamente livre de posto $|Y|$ determinada por A. Se $m = |Y| \in \mathbb{N}$, denotamos por $F_m(A)$ a álgebra relativamente livre de posto m. Se Y é um conjunto enumerável, denotaremos apenas por $F(A)$.

Veremos agora que toda variedade tem uma álgebra livre e que a álgebra relativamente livre é determinada, a menos de isomorfismo, pela cardinalidade de Y.

Teorema 1.2.27. *Seja $\mathfrak{V}$ uma variedade definida pelo conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$, Y um conjunto e J o ideal de $K\langle Y \rangle$ gerado por $\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i}) \mid g_i \in K\langle Y \rangle,\ i \in I\}$. Então a álgebra $F = K\langle Y \rangle / J$ é relativamente livre em $\mathfrak{V}$ com um conjunto de geradores livres $\overline{Y} = \{y + J \mid y \in Y\}$. E quaisquer duas álgebras relativamente livres do mesmo posto em $\mathfrak{V}$ são isomorfas.*

Demonstração. [7, Proposition 2.2.5, p. 23] □

Definição 1.2.28. *Seja $\mathfrak{V}$ uma classe de álgebras. Denotaremos por $C\mathfrak{V}$, $S\mathfrak{V}$ e $Q\mathfrak{V}$ as classes obtidas de $\mathfrak{V}$ tomando os produtos diretos (possivelmente infinitos), subálgebras e álgebras quocientes, respectivamente de álgebras de $\mathfrak{V}$.*

Teorema 1.2.29 (Teorema de Birkhoff)**.** *Uma classe de álgebras $\mathfrak{V}$ é uma variedade se, e somente se, $\mathfrak{V}$ é fechada sobre produtos diretos, subálgebras e álgebras quocientes, isto é, se $C\mathfrak{V}$, $S\mathfrak{V}$, $Q\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{V}$.*

Demonstração. [7, Theorem 2.3.2, p. 24]. □

Definição 1.2.30. *Para uma classe de álgebras $\mathfrak{V}$ (ou para uma álgebra A), denotaremos por $\operatorname{var}\mathfrak{V}$ (ou $\operatorname{var} A$) a variedade das álgebras definidas pelas identidades polinomiais de $T(\mathfrak{V})$ (ou $T(A)$) e chamaremos essa variedade de variedade gerada por $\mathfrak{V}$ (ou A).*

1.3 Invariantes Numéricos de T-ideais

1.3.1 Espaços Vetoriais graduados

Os conceitos desta subseção utilizam a notação da seção 4.1 de [7].

Definição 1.3.1. *Um espaço vetorial V é dito graduado se for soma direta de seus subespaços $V^{(n)}$, $n \geqslant 0$, isto é*

$$V = \bigoplus_{n\geqslant 0} V^{(n)} = \sum_{n\geqslant 0}{}^{\oplus} V^{(n)}.$$

Quando não houver mal entendido escreveremos apenas $\sum$ ao invés de $\sum^{\oplus}$.

Os subespaços $V^{(n)}$ são chamados de componentes homogêneas de grau n de V.

Analogamente, definimos uma multigraduação em V se $V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n_i\geqslant 0} V^{(n_1,\ldots,n_m)}$ e chamamos $V^{(n_1,\ldots,n_m)}$ de componente homogênea de grau $(n_1,\ldots,n_m)$.

O subespaço W do espaço graduado $V = \sum_{n\geqslant 0} V^{(n)}$ é um subespaço graduado (ou homogêneo) se $W = \sum_{n\geqslant 0}(W \cap V^{(n)})$. Neste caso, o espaço quociente V/W pode ser graduado naturalmente (e dizemos que V/W herda a graduação de V).

Muitas vezes, quando não há perigo de equívoco, escreveremos simplesmente V^n ao invés de $V^{(n)}$.

Observamos aqui que W é subespaço graduado de V se, e somente se, para todo $w \in W$, escrito como $w = \sum_{i\geqslant 0} w_i$, $w_i \in V^i$, segue que para todo i tem-se $w_i \in V^i \cap W$. Em

outras palavras W é homogêneo quando para todo $w \in W$, as componentes homogêneas de W estão em W.

Exemplo 1.3.2. *A álgebra polinomial $K[x_1, \ldots, x_m]$ é graduada assumindo que polinômios homogêneos de grau n são elementos homogêneos de grau n. Similarmente, $K[x_1, \ldots, x_m]$ apresenta multigraduação, contando cada entrada de cada variável nos monômios. Analogamente, definimos graduação e multigraduação nas álgebras associativas $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ e uma graduação em $K\langle X\rangle$.*

A álgebra de Grassmann tem uma graduação herdada da graduação de $K\langle X\rangle$, por meio do homomorfismo sobrejetor $x_i \mapsto e_i$ para todo i.

Definição 1.3.3. *Seja $V = \sum_{n\geqslant 0} V^{(n)}$ um espaço vetorial graduado com $\dim V^{(n)} < \infty$. A série de potências formais*

$$H(V,t) = \mathrm{Hilb}(V,t) = \sum_{n\geqslant 0} \dim V^{(n)} t^n$$

é chamada de série de Hilbert (ou Poincaré) de V. Por convenção, para uma função $f(t)$, $H(V,t) = f(t)$ se a série $H(V,t)$ converge em uma vizinhança de 0 e as funções $H(V,t)$ e $f(t)$ são iguais nessa vizinhança.

Analogamente, se o espaço vetorial

$$V = \sum_{n} V^{(n_1,\ldots,n_m)},\ n = (n_1, \ldots, n_m),$$

é multigraduado, temos que a série de Hilbert de V é dada por

$$H(V, t_1, \ldots, t_m) = \mathrm{Hilb}(V, t_1, \ldots, t_m) = \sum_{n} \dim V^{(n_1,\ldots,n_m)} t_1^{n_1} \cdots t_m^{n_m}.$$

Proposição 1.3.4. *i)* $\mathrm{Hilb}\, K([x], t) = \dfrac{1}{1-t}$;

ii) $\mathrm{Hilb}(K[x_1, \ldots, x_m], t_1, \ldots, t_m) = \prod_{i=0}^{m} \dfrac{1}{1-t_i}$;

iii) $\mathrm{Hilb}(K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle, t_1, \ldots, t_m) = \dfrac{1}{1-(t_1+\cdots+t_m)}$;

iv) $\mathrm{Hilb}(K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle, t) = \dfrac{1}{1-mt}$;

v) Seja a álgebra de Grassmann $E(V_m)$ do espaço vetorial m-dimensional V_m com base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ com a multigraduação natural contando as entradas de e_j nos monômios $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$. Então

$$\mathrm{Hilb}(E(V_m), t_1, \ldots, t_m) = \sum_{j=0}^{m} e_j(t_1, \ldots, t_m) \prod_{i=1}^{m} (1+t_i).$$

onde $e_j(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{1\leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_j \leqslant n} t_{k_1} t_{k_2} \cdots t_{k_m}$, isto é, o j-ésimo polinômio simétrico elementar.

1.3.2 Identidades Multilineares, Homogêneas e Próprias

Nesta subseção, verificamos que sob determinadas condições é possível simplificar as identidades que estamos trabalhando, no sentido de restringir o tipo dos polinômios que consideramos. Os conceitos e resultados apresentados foram extraídos das seções 4.2 e 4.3 de [7].

Definição 1.3.5. *Dois conjuntos de identidades polinomiais são equivalente se eles geram o mesmo T-ideal.*

Definição 1.3.6. *Se um polinômio f de $K\langle X\rangle$ apresenta apenas monômios de mesmo grau k em x, então diremos que f é um polinômio homogêneo de grau k em x, denotaremos por* $\deg_x f = k$. *Já se para qualquer variável x todos os monômios de f apresentam o mesmo grau em x, dizemos que f é multi-homogêneo. Um polinômio f de grau* 1 *em x é dito linear em x. Já se f é multi-homogêneo e linear em cada variável dizemos que f é multilinear.*

Da definição, um polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n)$ será da forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}, \quad \alpha_\sigma \in K.$$

Denotaremos por P_n o espaço vetorial de todos os polinômios em $K\langle X\rangle$ que são multilineares de grau n em $x_1, \ldots, x_n$; para o espaço vetorial n-dimensional, é comum usar V_n em vez de P_n. Observe que $\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é uma base de P_n e então $\dim P_n = n!$.

Definição 1.3.7. *Seja um polinômio f de $K\langle X\rangle$ de grau n e x uma de suas variáveis. O polinômio f pode ser escrito na forma $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, com cada f_i sendo um polinômio homogêneo de grau i na variável x. Diremos que cada polinômio f_i é a componente homogênea de f de grau i em x.*

Veremos uma ferramenta que nos auxilia muito, o processo de linearização de polinômios.

Proposição 1.3.8. *Seja $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_m)$ pertencente a $K\langle X\rangle$, onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_i.*

i) Se o corpo K contém mais que n elementos, então $f_i(x_1, \ldots, x_m) = 0$ segue de $f = 0$ como identidades polinomiais;

ii) Se a característica do corpo K é zero ou maior que o grau de f, então $f = 0$ é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares.

Demonstração. i) Seja $I = \langle f \rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X \rangle$ gerado por f. Escolhemos $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ de K. Como I é um T-ideal, obtemos que

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I; \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Podemos considerar essas equações como um sistema linear com $f_0, \ldots, f_n$ sendo as incógnitas. Como o determinante desse sistema é igual a

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

e este é o determinante de Vandermonde que é diferente de 0 desde que os α_i's são distintos, logo cada $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ está em I, isto é, as identidades polinomiais $f_i = 0$ são consequências de $f = 0$.

ii) Do item i), podemos assumir que $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é multi-homogêneo. Seja $k = \deg_{x_1} f$ e escrevendo $f_i(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) \in I = \langle f \rangle^T$ sob a forma

$$f_i(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{k} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Logo $\deg_{y_1} f_i = i$ e $\deg_{y_2} f_i = k = i$ e f_i pertence a I, para $i = 1, \ldots, k$. Como $\deg_{y_1} f_i < k$ e $\deg_{y_2} f_i < k$ para $i = 1, \ldots, k-1$, podemos aplicar argumentos indutivos sobre k e obtemos um conjunto de consequências multilineares de $f = 0$. Para vermos que essas identidades multilineares são equivalentes a $f = 0$, é suficiente vermos que

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_m) = \binom{k}{i} f(y_1, x_1 \ldots, x_m)$$

e que o coeficiente binomial é diferente de 0, pois por hipótese temos que $\operatorname{char} K = 0$ ou $\operatorname{char} K \geqslant \deg(f)$. □

Observe que o item i) acima significa que o polinômio f gera o mesmo T-ideal como o gerado pelos polinômios f_i, isto é, $f_i \in \langle f \rangle^T$, com $i = 0, \ldots, n$.

Corolário 1.3.9. *Seja A uma álgebra. Então,*

i) Se o corpo K é infinito, então todas as identidades polinomiais de A seguem de suas identidades multi-homogêneas;

ii) Se $\operatorname{char} K = 0$*, todas as identidades polinomiais de A seguem de suas identidades polinomiais multilineares.*

Se a álgebra for unitária podemos restringir ainda mais a procura de identidades polinomiais a determinados tipos de polinômios que serão chamados de polinômios próprios.

Definição 1.3.10. *Um polinômio f de $K\langle X\rangle$ é chamado polinômio próprio (ou comutador), se for uma combinação linear de produtos de comutadores, isto é,*

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum \alpha_{i,\dots,j}[x_{i_1},\dots,x_{i_p}]\cdots[x_{j_1},\dots,x_{j_p}],\ \textit{com}\ \alpha_{i,\dots,j}\in K.$$

(Assumimos que 1 é o produto de um conjunto vazio de comutadores.) Denotaremos por B^x o conjunto de todos os polinômios próprios de $K\langle X\rangle$.

Neste sentido, definiremos

$$B^x_m=B^x\cap K\langle x_1,\dots,x_m\rangle,\ m=1,2,\dots\ \text{e}\ \ \Gamma_n=B^x\cap P_n,\ n=0,1,2,\dots,$$

isto é, B^x_m é o conjunto de polinômios próprios em m variáveis e Γ_n é o conjunto de todos polinômios multilineares próprios de grau n.

Se A é uma PI-álgebra, pela Observação 1.3.15 denotamos por $B^x(A)$, $B^x_m(A)$ e $\Gamma_n(A)$ as imagens em $F(A)$ dos subespaços vetoriais correspondentes de $K\langle X\rangle$.

Proposição 1.3.11. *Suponha que os elementos*

$$x_1,x_2,\dots,[x_{i_1},x_{i_2}],[x_{j_1},x_{j_2}],\dots,[x_{k_1},x_{k_2},x_{k_3}],\dots,$$

formem uma base ordenada de uma álgebra de Lie livre $L(X)$, na qual os elementos x_1, x_2, ... precedem os comutadores. Então

i) O espaço vetorial $K\langle X\rangle$ tem base formada pelos elementos

$$x_1^{a_1}\cdots x_m^{a_m}[x_{i_1},x_{i_2}]^b\cdots[x_{l_1},\dots,x_{l_p}]^c,$$

quando a_1, ..., a_m, b, ..., $c\geqslant 0$ e $[x_{i_1},x_{i_2}]<\cdots<[x_{l_1},\dots,x_{l_p}]$ na ordenação da base de $L(X)$;

ii) Os elementos da base de $K\langle X\rangle$ tais que $a_1=\cdots=a_m=0$, formam uma base para o espaço vetorial B^x dos polinômios próprios.

Demonstração. i) A demonstração segue do Teorema de Witt (Teorema 1.1.37), que nos garante que a álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$ é a álgebra envolvente universal da álgebra de Lie livre $L(X)$, isto é, $U(L(X))=K\langle X\rangle$ e também segue do Teorema de PBW (Teorema 1.1.36) que nos fornece uma base de $U(L(X))$ a partir de uma base ordenada de $L(X)$.

ii) Segue também do Teorema de PBW. Se expressarmos o produto de comutadores $[x_{i_1},\dots,x_{i_p}]\cdots[x_{j_1},\dots,x_{j_q}]$ como combinação linear dos elementos da base de

$K\langle X\rangle$, precisaremos que para quaisquer dois comutadores consecutivos da base de $L(X)$ que estão em uma ordem "errada" por exemplo,

$$\cdots[x_{b_1},\ldots,x_{b_l}][x_{a_1},\ldots,x_{a_k}]\cdots, \quad [x_{b_1},\ldots,x_{b_l}] > [x_{a_1},\ldots,x_{a_k}],$$

troquemos o produto $[x_{b_1},\ldots,x_{b_l}][x_{a_1},\ldots,x_{a_k}]$ pela soma

$$[x_{a_1},\ldots,x_{a_k}][x_{b_1},\ldots,x_{b_l}] + [[x_{b_1},\ldots,x_{b_l}],[x_{a_1},\ldots,x_{a_k}]]$$

Veja que $[[x_{b_1},\ldots,x_{b_l}],[x_{a_1},\ldots,x_{a_k}]] \in L(X)$ e é combinação linear dos comutadores da base de $L(X)$, logo podemos aplicar argumentos indutivos e vemos que os elementos de B^x são combinações lineares de $[x_{i_1},x_{i_2}]^b\cdots[x_{l_1},\ldots,x_{l_p}]^c$. □

Proposição 1.3.12. *Seja A uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito K. Então,*

i) Todas as identidades polinomiais de A seguem das suas identidades próprias (ou seja, daquelas $T(A)\cap B^x$);

ii) Se $\operatorname{char} K = 0$*, então as identidades polinomiais de A seguem das identidades polinomiais multilineares próprias (ou seja, daquelas em $T(A)\cap\Gamma_n$, $n = 2, 3,\ldots$).*

Demonstração. i) Seja $f(x_1,\ldots,x_m) = 0$ uma identidade polinomial de A. Assumimos que f é multi-homogêneo. Pela proposição anterior, podemos escrever f da forma

$$f = \sum \alpha_a x_1^{a_1}\cdots x_m^{a_m} w_a(x_1,\ldots,x_m), \quad \alpha_a \in K,$$

com $w_a(x_1,\ldots,x_m)$ sendo combinação linear de $[x_{i_1},x_{i_2}]^b\cdots[x_{l_1},\ldots,x_{l_p}]^c$. Claramente, se substituirmos uma variável por 1 no comutador $[x_{i_1},\ldots,x_{i_p}]$ ele desaparece, assim $w_a(1+x_1,\ldots,x_m) = w_a(x_1,\ldots,x_m)$. Como $f(1+x_1,\ldots,x_m)$ é uma identidade polinomial de A, temos que

$$f(1+x_1,\ldots,x_m) = \sum \alpha_a \sum_{i=0}^{a_1}\binom{a_1}{i} x_1^i x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m} w_a(x_1,\ldots,x_m) \in T(A).$$

A componente homogênea de menor grau com respeito a x_1 é obtida a partir dos somatório, com a_1 sendo o máximo entre aqueles que α_a não é igual a 0. Como o T-ideal $T(A)$ é homogêneo, isto é, $T(A)$ é gerado pelos seus elementos multi-homogêneos, obtemos que

$$\sum_{a_1\,\text{máx}} \alpha_a x_2^{a_2}\cdots x_m^{a^m} w_a(x_1,\ldots,x_m) \in T(A).$$

Multiplicando à esquerda essa identidade polinomial por $x_1^{a_1}$ e subtraindo esta identidade pela identidade inicial $f(x_1,\ldots,x_m)$, obtemos uma nova identidade que é semelhante a $f(x_1,\ldots,x_m)$, mas envolvendo valores menores de a_1. E por indução, chegamos que

$$\sum_{a_1\,\text{fixo}} \alpha_a x_2^{a_2}\cdots x_m^{a^m} w_a(x_1,\ldots,x_m) \in T(A), \quad w_a(x_1,\ldots,x_m) \in T(A).$$

O item ii) é análogo ao item i). Se f é uma identidade polinomial multilinear em A, e fazendo o mesmo procedimento, obtemos que os polinômios w_a são multilineares, assim f segue de algumas identidades próprias que também são multilineares. □

1.3.3 Codimensões

Os conceitos e resultados abordados nesta subseção seguem a notação das seções 4.2 e 4.3 de [7].

Definição 1.3.13. *Seja A uma PI-álgebra com T-ideal $T(A)$. A dimensão dos polinômios multilineares em $K\langle X\rangle$ módulo as identidades polinomiais de A são chamados de n-ésima codimensão do T-ideal $T(A)$ (ou das identidades polinomiais de A) e denotaremos por $c_n(A)$ (ou por $c_n(\mathfrak{V})$ se considerarmos o T-ideal das identidades polinomiais de uma variedade $\mathfrak{V}$), isto é,*

$$c_n(A) = \dim \frac{P_n}{(P_n \cap T(A))}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Essa sequência é chamada de sequência de codimensões do T-ideal $T(A)$.

Também consideramos a série de codimensões e a série de codimensão exponencial, dadas respectivamente por

$$c(A,t) = \sum_{n\geqslant 0} c_n(A)t^n \quad e \quad \widetilde{c}(R,t) = \sum_{n\geqslant 0} c_n(A)\frac{t^n}{n!}.$$

Observação 1.3.14. *Relembre que $\{x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é uma base de P_n. O espaço vetorial P_n é um módulo (à esquerda) sobre o grupo simétrico S_n, onde o último age permutando as variáveis. Como T-ideais são invariantes por permutações das variáveis, então temos que $P_n \cap T(A)$ é um S_n-submódulo. Consequentemente, $P_n/P_n \cap T(A)$ apresenta uma estrutura induzida de S_n-módulo. Observe ainda que $\dim P_n = n!$, e que P_n é isomorfo naturalmente ao módulo regular de S_n.*

Observação 1.3.15. *Seja A um álgebra (ou $\mathfrak{V}$ uma variedade de álgebras) e S um subconjunto de $K\langle X\rangle$. Denotaremos por $S(A)$ (ou $S(\mathfrak{V})$) a imagem de S sob o homomorfismo canônico*

$$K\langle X\rangle \longrightarrow F(A) = F(\operatorname{var} A) = K\langle X\rangle/T(A), \quad K\langle X\rangle \longrightarrow F(\mathfrak{V}).$$

Por exemplo, a fórmula da sequência das codimensões de $T(A)$ será dada por

$$c_n(A) = \dim P_n(A), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Exemplo 1.3.16. *Seja A uma álgebra nilpotente de índice m, logo $a_1 \cdots a_m = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_m$ em A. Escolhendo $n \geqslant m$, temos que o produto de quaisquer n elementos de A é 0, logo $x_1 \cdots x_n = 0$ é uma identidade para A. Isso implica que todo elemento de P_n será identidade para A, logo $P_n \cap T(A) = P_n$. Assim $c_n(A) = 0$ se $n \geqslant m$.*

Definição 1.3.17. *Seja $T(A)$ um T-ideal de uma álgebra A que é homogêneo na álgebra livre $K\langle X\rangle$. Então, para $m \geqslant 1$ escrevemos:*

$$H(F_m(A), t_1, \ldots, t_m) = \operatorname{Hilb}(F_m(A), t_1, \ldots, t_m) = \sum_{n_i\geqslant 0} \dim(F_m(A))^{(n_1,\ldots,n_m)} t_1^{n_1}\cdots t_m^{n_m}$$

a série de Hilbert da álgebra relativamente livre de posto m em $\operatorname{var} A$. *Caso a série de Hilbert tenha apenas uma variável, então*

$$H(F_m(A),t) = \operatorname{Hilb}_m(\operatorname{var} A,t) = H_m(\operatorname{var} A,t) = \sum_{n\geqslant 0} \dim(F_m(A))^{(n)} t^n,$$

onde $(F_m(A))^{(n)}$ (e $(F_m(A))^{(n_1,\ldots,n_m)}$) denota a componente (multi-)homogênea da álgebra livre.

Definição 1.3.18. *Seja A uma PI-álgebra unitária sobre um corpo de característica 0. Por analogia à Definição 1.3.13, definimos o subespaço vetorial $\Gamma(A) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap T(A))$, a sequência de codimensões próprias*

$$\gamma(A,t) = \dim \Gamma_n(A),\ n = 0,1,2,\ldots$$

e também a série de codimensões próprias e a série de codimensões próprias exponencial respectivamente por

$$\gamma(A,t) = \sum_{n\geqslant 0} \gamma_n(A) t^n, \quad \tilde{\gamma}(R,t) = \sum_{n\geqslant 0} \gamma_n(A) \frac{t^n}{n!}.$$

O próximo teorema traz algumas relações quantitativas entre a série de Hilbert das álgebras relativamente livres $F_m(A)$ e seus elementos próprios $B_m^x(A)$, e também entre as codimensões e séries de potências formais.

Teorema 1.3.19. *Seja A uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito K. Então,*

i) $\operatorname{Hilb}(F_m(A),t_1,\ldots,t_m) = \operatorname{Hilb}(B_m^x(A),t_1,\ldots,t_m) \prod_{i=1}^{m} \dfrac{1}{1-t_i}$;

ii) $\operatorname{Hilb}(F_m(A),t) = \operatorname{Hilb}(B_m^x(A),t) \dfrac{1}{(1-t)^m}$;

iii) $c_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_n(A)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$;

iv) $c(A,t) = \dfrac{1}{1-t} \gamma\left(A, \dfrac{t}{1-t}\right)$;

v) $\tilde{c}(A,t) = e^t \tilde{\gamma}(A,t)$.

Demonstração. A demonstração é baseada no fato que $F_m(A) \cong B_m^x(A) \otimes K[x_1,\ldots,x_m]$. Para a demonstração completa consulte [7, Theorem 4.3.12, p. 47]. □

1.3.4 Identidades Polinomiais da Álgebra de Grassmann

Nesta subseção descreveremos as identidades polinomiais da álgebra de Grassmann e alguns dos seus invariantes numéricos. Assumiremos que K é um corpo fixo de característica 0. Tais resultados foram extraídos da seção 5.1 de [7].

Proposição 1.3.20. *Seja $G = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X \rangle$ gerado pela identidade polinomial $[x_1, x_2, x_3]$. Então os polinômios $[x_1, x_2][x_2, x_3]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4]+[x_1, x_3][x_2, x_4]$ estão em G.*

Demonstração. A identidade $[uv, w] = [u, w]v + [y, z]$ vale em qualquer álgebra associativa (é só abrir os colchetes). Ainda $[x_1, x_2^2, x_3]$ pertence a G, logo

$$\begin{aligned}[x_1, x_2^2, x_3] =& [[x_1, x_2^2], x_3] = [[x_1, x_2]x_2 + x_2[x_1, x_2], x_3] = \\ =& [[x_1, x_2]x_2, x_3] + [x_2[x_1, x_2], x_3] = \\ =& [x_1, x_2, x_3]x_2 + [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] + x_2[x_1, x_2, x_3] \in G\end{aligned}$$

implicando que $[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2]$ está em G. Porém

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] = 2[x_1, x_2][x_2, x_3] + [[x_2, x_3], [x_1, x_2]] \in G.$$

Como $[[x_2, x_3], [x_1, x_2]] = [x_2, x_3, [x_1, x_2]]$ está em G, então $[x_1, x_2][x_2, x_3]$ também está. Linearizando tal polinômio chegamos em

$$[x_1, x_2 + x_2'][x_2 + x_2', x_3] - [x_1, x_2][x_2, x_3] - [x_1, x_2'][x_2', x_3] \in G.$$

Logo,

$$\begin{aligned}&[x_1, x_2 + x_2'][x_2 + x_2', x_3] - [x_1, x_2][x_2, x_3] - [x_1, x_2'][x_2', x_3] = \\ &= ([x_1, x_2] + [x_1, x_2'])([x_2, x_3] + [x_2', x_3]) - [x_1, x_2][x_2, x_3] - [x_1, x_2'][x_2', x_3] = \\ &= [x_1, x_3][x_2, x_3] + [x_1, x_2][x_2', x_3] + [x_1, x_2'][x_2, x_3] + [x_1, x_2'][x_2', x_3] - \\ &- [x_1, x_2][x_2, x_3] - [x_1, x_2'][x_2', x_3] = \\ &= [x_1, x_2][x_2', x_3] + [x_1, x_2'][x_2, x_3] \in G.\end{aligned}$$

Renomeando as variáveis, chegamos em $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$ está em G. □

Teorema 1.3.21. *Seja E a álgebra de Grassmann, então o T-ideal $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$.*

Demonstração. No Exemplo 1.2.8 vimos que o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann, logo $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T \subseteq T(E)$. Seja um produto de comutadores $w = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] \cdots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}] \in K\langle X \rangle$. Se w não pertence a $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, então $w = [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-i}}, x_{i_{2k}}]$. Usando a propriedade de anticomutatividade, $[x_i, x_j] =$

$-[x_j, x_i]$, e a Proposição 1.3.20, módulo o T-ideal $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, podemos trocar as posições das variáveis em w. De modo particular, se dois dos x_{i_p} e x_{j_q} são iguais, temos que w pertence a $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. Assim, $B^x/(B^x \cap \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T)$ é gerado por

$$w = [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2k-i}}, x_{i_{2k}}], \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k-1} < i_{2k}, \ k = 0, 1, \ldots$$

Agora, vamos provar que esses elementos são linearmente independentes módulo $T(E)$ isto é, qualquer combinação linear não trivial desses elementos é diferente de zero em E. Como w é determinado unicamente por seu multigrau e $T(E)$ é homogêneo, basta provar que w não é uma identidade polinomial para E. Observe que

$$[e_1, e_2] \cdots [e_{2k-1}, e_{2k}] = 2^k e_1 e_2 \cdots e_{2k-1} e_{2k} \neq 0$$

em E. Portanto, $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. □

Esta mesma demonstração transfere-se palavra por palavra para o caso quando K é qualquer corpo infinito de característica diferente de 2.

Teorema 1.3.22. *Seja E a álgebra de Grassmann, então*

i) $c_n(E) = 2^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$;

ii) $c(E, t) = \sum_{n \geqslant 0} c_n(E) t^n = \dfrac{1-t}{1-2t}$;

iii) $\tilde{c}(E, t) = \sum_{n \geqslant 0} c_n(E) \dfrac{t^n}{n!} = \dfrac{1}{2}(1 + e^{2t})$.

Demonstração. i) Do teorema anterior, temos que $\Gamma_n(E)$ é gerado por $[e_1, e_2] \cdots [e_{2k-1}, e_{2k}]$ com $n = 2k$, e $\Gamma_n(E) = 0$ se n é ímpar. Assim, se $\varepsilon_n = 1$ para n par e $\varepsilon_n = 0$ para n ímpar, temos que

$$\gamma_n(E) = \dim \Gamma_n(E) = \varepsilon_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n), \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mas como

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{e} \quad 0 = (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k,$$

então, somando as duas igualdades e aplicando o item iii) do Teorema 1.3.19, chegamos em

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) = 2c_n(E).$$

Portanto, $c_n(E) = 2^{n-1}$.

ii) Como no item anterior vimos que $\gamma(E) = \dfrac{1}{2}(1 + (-1)^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, logo

$$\gamma(E, t) = \sum_{n \geqslant 0} \gamma_n(E) t^n = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) t^n = \frac{1}{2} \sum_{n \geqslant 0} 2t^{2n} = \sum_{n \geqslant 0} (t^2)^n.$$

E como sabemos $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n$, logo $\gamma(E,t) = \dfrac{1}{1-t^2}$. Aplicando tal fato ao item iv) do Teorema 1.3.19, chegamos em

$$\begin{aligned} c(E,t) =& \frac{1}{1-t}\gamma\left(E, \frac{t}{1-t}\right) = \frac{1}{1-t}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}\right) = \frac{1}{1-t}\left(\frac{(1-t)^2}{1-2t}\right) = \frac{1-t}{1-2t} = \\ =& \frac{1-2t+t}{1-2t} = 1 + \frac{t}{1-2t} = 1 + t\sum_{n\geqslant 0}(2t)^n = 1 + t\sum_{n\geqslant 0} 2^n t^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1} 2^{n-1}t^n = \\ =& c_0(E)t^0 + \sum_{n\geqslant 1} c_n(E)t^n = \sum_{n\geqslant 0} c_n(E)t^n. \end{aligned}$$

Portanto, $c(E,t) = \sum_{n\geqslant 0} c_n(E)t^n = \dfrac{1-t}{1-2t}$.

iii) Como no item i) vimos que $\gamma(E) = \dfrac{1}{2}(1+(-1)^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, logo

$$\widetilde{\gamma}(E,t) = \sum_{n\geqslant 0} \gamma_n(E)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2}(1+(-1)^n)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!} + \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-t)^n}{n!}\right).$$

E como sabemos $e^x = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$, logo $\widetilde{\gamma}(E,t) = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. Aplicando tal fato ao item v) do Teorema 1.3.19, chegamos em

$$\widetilde{c}(E,t) = e^t\widetilde{\gamma}(E,t) = e^t\left(\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\right) = \frac{1}{2}(1+e^{2t}) = \sum_{n\geqslant 0} 2^{n-1}\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} c_n(E)\frac{t^n}{n!}.$$

Portanto, $\widetilde{c}(E,t) = \sum_{n\geqslant 0} c_n(E)\dfrac{t^n}{n!} = \dfrac{1}{2}(1+e^{2t})$. □

Teorema 1.3.23. *Seja E a álgebra de Grassmann, então*

i) $\operatorname{Hilb}(F_m(E), t_1, \ldots, t_m) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\prod_{i=1}^{m}\dfrac{1+t_i}{1-t_i}$;

ii) $\operatorname{Hilb}(F_m(E), t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)^m$.

Demonstração. Como no teorema anterior, $B_m^x(E)$ tem uma base

$$\big\{[x_{i_1}, x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2k-i}}, x_{i_{2k}}] \mid \ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k-1} < i_{2k} \leqslant m\big\}.$$

A série de Hilbert de $B_m^x(E)$ é igual a soma dos polinômios simétricos elementares

$$\sum_{k\geqslant 0} e_{2k}(t_1, \ldots, t_m) = \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{m}(1-t_i) + \prod_{i=1}^{m}(1+t_i)\right)$$

e pelo item i) do Teorema 1.3.19, temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Hilb}(F_m(E), t_1, \ldots, t_m) &= \mathrm{Hilb}(B_m^x(E), t_1, \ldots, t_m) \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-t_i} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{m}(1-t_i) + \prod_{i=1}^{m}(1+t_i)\right)\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1-t_i} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{m}\frac{1+t_i}{1-t_i}.\end{aligned}$$

Agora, se tomarmos todos os t_i's iguais a t e substituirmos na última igualdade, temos que $\mathrm{Hilb}(F_m(E), t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^m$. □

1.3.5 Teorema da codimensão de Regev

Nesta subseção mostraremos o Teorema de Regev o qual afirma que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra é limitada exponencialmente. A demonstração apresentada aqui foi retirada da seção 4.1 de [11] e baseia-se na demonstração feita por Latyshev em [15]. Com este teorema, chega-se que o produto tensorial de duas PI-álgebras é uma PI-álgebra; tal fato é amplamente utilizado para demonstração de outros resultados de grande importância na PI-teoria.

Antes, veremos algumas definições sobre conjuntos parcialmente ordenados e resultados combinatórios sobre o grupo de permutações S_n, os quais foram estudados na seção 8.1 de [7] e principalmente na seção 4.2 de [11].

Definição 1.3.24. *Um conjunto P com uma relação $\prec$ (denotaremos por $(P, \prec)$) é dito parcialmente ordenado se a relação for transitiva, isto é, se $a \prec b$ e $b \prec c$, então $a \prec c$ para quaisquer a, b e c pertencentes a P; se for reflexiva, ou seja $a \prec a$; e se as relações $a \prec b$ e $b \prec a$ não são satisfeitas simultaneamente, para quaisquer a e b pertencentes a P.*

Os elementos $a_1, \ldots, a_k$ de P formam uma cadeia em P se $a_1 \prec \cdots \prec a_k$; e eles formam uma anticadeia em P se a relação $a_i \prec a_j$ não for satisfeita para nenhum par (a_i, a_j) com i diferente de j.

Teorema 1.3.25 (Teorema de Dilworth)**.** *Seja $(P, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. O número de cadeias de P nas quais P pode ser particionado (isto é, apresentado como união disjunta) é igual ao número máximo de elementos em uma anticadeia de P.*

Demonstração. Veja [4]. □

Consideraremos um número natural $2 \leqslant d \leqslant n$.

Definição 1.3.26. *Seja σ uma permutação de S_n, denotaremos por $d(\sigma)$ o maior número d' para o qual existem inteiros $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{d'} \leqslant n$ tal que $\sigma(i_1) > \sigma(i_2) > \cdots > \sigma(i_{d'})$.*

Diremos que uma permutação σ de S_n é d-boa se $d(\sigma) < d$. Caso $d(\sigma) \geqslant d$, σ é chamada de d-ruim.

Observe que, dada a permutação σ, introduzimos uma ordem parcial no conjunto $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ onde, $i_k \prec i_l$ se, e somente se, $i_k < j_l$ e $\sigma(i_k) < \sigma(j_l)$. Assim, $d(\sigma)$ é o comprimento máximo das anticadeias em P e σ é d-boa se não houver anticadeias de comprimento d.

Exemplo 1.3.27. *Seja $n = 6$ e*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_n.$$

Então, $d(\sigma) = 4$, pois $1 < 2 < 3 < 5$ e $\sigma(1) > \sigma(2) > \sigma(3) > \sigma(5)$. Portanto, σ é 5-boa e também 6-boa.

Lema 1.3.28. *Sejam $\widetilde{I} = \{1, \ldots, n\}$ um conjunto e σ uma permutação d-boa de S_n. Então, existe $k \leqslant d-1$ tal que o conjunto $\widetilde{I}$ pode ser decomposto como união disjunta $\widetilde{I} = I_1 \cup \ldots \cup I_k$ o qual, para $j = 1, \ldots, k$, e para cada par a, b pertencentes a I_j, com $a < b$, temos que $\sigma(a) < \sigma(b)$.*

Demonstração. Seja $\lessdot$ uma relação de ordem parcial em $\widetilde{I}$ dada por $x \lessdot y$ se, e somente se, $x < y$ e $\sigma(x) < \sigma(y)$. Como σ é d-boa, então em qualquer subconjunto $\{x_1, \ldots, x_d\}$ de $\widetilde{I}$ com d elementos existe pelo menos um par x_i e x_j tal que $x_i \lessdot x_j$. Pelo Teorema 1.3.25, o conjunto parcialmente ordenado $\widetilde{I}$ pode ser particionado em uma união disjunta de até $d-1$ cadeias, isto é, $\widetilde{I} = I_1 \cup \ldots \cup I_k$, com k menor ou igual a $d-1$ e todo conjunto I_j, com j sendo um número de 1 a k, possui uma ordenação total $\lessdot$, isto é, para quaisquer a e b em I_j com $a < b$ temos que $\sigma(a) < \sigma(b)$. □

Sabemos da combinatória elementar que o número de decomposições de $\widetilde{I}$ em k subconjuntos, com k menor ou igual a $d-1$, é menor ou igual a $(d-1)^n$.

Lema 1.3.29. *O número máximo de permutações d-boas em S_n é limitado por $(d-1)^{2n}$.*

Demonstração. Fixando uma decomposição $\widetilde{I} = I_1 \cup \ldots \cup I_k$, com k menor ou igual a $d-1$ e todos conjuntos I_j são dois a dois disjuntos, estimaremos o número de permutações σ que preservam a ordem natural dos inteiros em cada I_j, com j sendo um número de 1 a k. Seja $L_1 = \sigma(I_1)$, …, $L_k = \sigma(I_k)$, isto é, L_j é o conjunto das imagens da permutação I_j. Como uma permutação é biunívoca, logo $\widetilde{I} = L_1 \cup \ldots \cup L_k$; usando a relação $\lessdot$ do item anterior temos que $\sigma(1)$ pertence a $\{x_1, \ldots, x_k\}$ onde x_j é o menor elemento de L_j. Usando o mesmo raciocínio, denotando $L'_j = L_j \backslash \{\sigma(1)\}$ temos que $\sigma(2)$ pertence a $\{y_1, \ldots, y_k\}$ onde y_j é o menor elemento de L'_j. Continuando com o mesmo procedimento, concluímos que o número de permutações que preservam a ordem em cada I_j é limitado por $k^n \leqslant (d-1)^n$. Aplicando o Lema 1.3.28 e o comentário anterior, concluímos a demonstração. □

Utilizando a notação de permutação d-boa é possível conseguir uma limitação para a sequência de codimensões de uma PI-álgebra. Uma permutação σ de S_n pode ser identificada com o monômio $x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$ de P_n (espaço vetorial de todos os polinômios multilineares de grau n em $K\langle X\rangle$). Diremos que um monônimo é d-bom (d-ruim) se a permutação correspondente σ de S_n é uma permutação d-boa (d-ruim).

Teorema 1.3.30 (Teorema de Regev)**.** *Se a PI-álgebra A satisfaz uma identidade polinomial de grau $d \geqslant 1$, então $c_n(A) \leqslant (d-1)^{2n}$.*

Demonstração. Do processo de linearização, podemos assumir que A satisfaz uma identidade multilinear de grau d, e da forma

$$x_1\cdots x_d - \sum_{\sigma\in S_d,\ \sigma\neq 1} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(d)} = 0.$$

Afirmação: O espaço vetorial $\dfrac{P_n}{P_n\cap T(A)}$ é gerado pelos monômios d-bons $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}$.

Demonstração da Afirmação: Suponha que tal afirmação seja falsa e considere $f = x_{i_1}\cdots x_{i_n}$ o menor monômio, na ordem lexicográfica esquerda, que não pode ser escrito como uma combinação linear de monômios d-bons, módulo $P_n\cap T(A)$ em P_n. Logo, em particular, a permutação

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

é d-ruim. Então, existem d números $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_d \leqslant n$ tais que $\rho(j_1) > \cdots > \rho(j_d)$. Considere

$$a_0 = x_{i_1}\cdots x_{\rho(j_1-1)},\ a_1 = x_{\rho(j_1)}\cdots x_{\rho(j_2-1)}, \ldots,\ a_1 = x_{\rho(j_d)}\cdots x_{i_n}.$$

Veja que pela ordem lexicográfica esquerda, temos que $a_1 > \cdots > a_d$, então

$$a_0 a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(d)} < a_0 a_1\cdots a_d = f$$

para qualquer permutação σ de S_d que não seja a identidade. Pela minimalidade de f, temos que qualquer elemento $a_0 a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(d)}$, com σ não sendo a identidade de S_d, é uma combinação linear, módulo $P_n\cap T(A)$, de monômios d-bons $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}$. Mas temos $a_1\cdots a_d - \sum_{\sigma\in S_d\ \sigma\neq 1} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(d)} = 0$. Logo,

$$f = \sum_{\sigma\in S_d\ \sigma\neq 1} \alpha_\sigma a_0 a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(d)} = 0 \pmod{P_n\cap T(A)},$$

obtendo assim que f é uma combinação linear, módulo $P_n\cap T(A)$, de monômios d-bons e isso é uma contradição.

Como $\dfrac{P_n}{P_n\cap T(A)}$ é gerado por monômios d-bons; $c_n(A)$ é limitado pelo número máximo de monômios d-bons em S_n, isto é o mesmo que dizer que é limitado pelo número

máximo de permutações d-boas em S_n. Portanto, pelo Lema 1.3.29, c_n é limitada por $(d-1)^{2n}$. □

Teorema 1.3.31. *Sejam A e B duas PI-álgebras, então $c_n(A \otimes B) \leqslant c_n(A)c_n(B)$, para qualquer n maior ou igual a 1.*

Demonstração. [11, Theorem 4.2.5, p. 96]. □

Teorema 1.3.32. *Se A e B são duas PI-álgebras, então o produto tensorial $A \otimes B$ também é uma PI-álgebra.*

Demonstração. Suponha que A e B satisfaçam uma identidade polinomial de grau r e s respectivamente. Pelo Teorema 1.3.30 temos que $c_n(A) \leqslant (r-1)^{2n}$ e $c_n(B) \leqslant (s-1)^{2n}$ com n maior ou igual a 1. Denotando $d = (r-1)^2$ e $l = (s-1)^2$, temos que $c_n(A) \leqslant d^n$ e $c_n(B) \leqslant l^n$ para todo n maior ou igual a 1. Logo, utilizando o teorema anterior, temos que $c_n(A \otimes B) \leqslant (dl)^n$ para todo n. Como $(dl)^n < n!$, para n suficientemente grande, logo existe m natural tal que $c_m(A \otimes B) \leqslant (dl)^m < m!$, isto é, $A \otimes B$ satisfaz uma identidade polinomial, não trivial, multilinear de grau m. Portanto $A \otimes B$ é uma PI-álgebra. □

Este teorema, devido a A. Regev, é de suma importância na PI teoria. Ele mostra uma maneira de construir PI-álgebras a partir de álgebras que já sabemos que são PI. Assim, por exemplo, ele garante que a álgebra $E \otimes E$ é PI. Observamos aqui uma informação que vem do teorema de Regev. Se A é uma PI álgebra sabemos que para todo n vale $c_n(A) \leqslant d^n$ para alguma constante d. A função $n!$ tem crescimento muito mais rápido que d^n. Podemos assim interpretar o teorema de Regev da seguinte maneira: Se A é PI, então quando $n \to \infty$, o espaço vetorial $T(A) \cap P_n$ ocupa "quase" todo P_n. Como já comentamos anteriormente, o teorema de Regev não vale para álgebras de Lie, existem álgebras de Lie que satisfazem identidades polinomiais e cujas codimensões têm crescimento super-exponencial.

1.3.6 PI-expoente

Nesta subseção apresentaremos brevemente o conceito de PI-expoente e alguns resultados que utilizam a notação de [11]. Para um aprofundamento maior leia inteiramente o capítulo 6 de [11].

Vamos considerar K como sendo um corpo de característica zero.

No Exemplo 1.3.16 vimos que se A é uma álgebra nilpotente de índice m maior ou igual a 1, então $c_n(A) = 0$ para qualquer n maior ou igual a m. Mas se A não é uma PI-álgebra nilpotente, então $c_n(A) \neq 0$ para qualquer n maior ou igual a 1, e pelo Teorema 1.3.30 temos que $1 \leqslant c_n \leqslant a^n$ para algum a constante. Com isso, teremos que

a sequência da n-ésima raiz $\sqrt[n]{c_n(A)}$ com n um natural não nulo, é limitada e então é possível considerar seus limites inferiores e superiores.

Definição 1.3.33. *Seja A uma PI-álgebra, então $\underline{\exp}(A) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$ é chamado de expoente inferior de A e $\overline{\exp}A = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$ de expoente superior de A.*

No caso em que os limites coincidem, podemos definir o expoente de A.

Definição 1.3.34. *Seja A uma PI-álgebra, $\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$ é dito ser o PI-expoente de A. Se o expoente existe, então temos que o expoente inferior e o superior coincidem.*

Exemplo 1.3.35. *Se A é uma PI-álgebra nilpotente, então $\exp(A) = 0$.*

Exemplo 1.3.36. *Seja A uma álgebra comutativa que não seja nilpotente, então $\exp(A) = 1$. Esta afirmação segue do fato que $\dim P_n(A) = 1$ para todo n, e o monômio $x_1 \cdots x_n$ é uma base do espaço vetorial $P_n(A)$.*

Exemplo 1.3.37. *Seja E a álgebra de Grassmann sobre um corpo K de característica 0. Pelo Teorema 1.3.22 temos que $c_n(E) = 2^{n-1}$, logo $\exp(E) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-1}} = 2$.*

Na década de 1980 duas conjecturas sobre o comportamento assintótico de $c_n(A)$ surgiram.

Conjectura 1.3.38 (Amitsur)**.** *Para qualquer PI-álgebra A, $\exp(A)$ existe e é um inteiro não negativo.*

Conjectura 1.3.39 (Regev)**.** *Para qualquer PI-álgebra A, $c_n(A)$ é aproximadamente $Cn^q d^n$, no qual C é uma constante, q um semi inteiro (isto é, inteiro ou metade de inteiro), e d é um inteiro não negativo.*

Teorema 1.3.40. *Seja A uma álgebra de dimensão finita d, então $c_n(A) \leqslant d^n$.*

Demonstração. [11, Theorem 6.1.5, p. 145]. □

Corolário 1.3.41. *Seja A uma álgebra associativa de dimensão finita d, então $\overline{\exp}(A) \leqslant d$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior temos que $\sqrt[n]{c_n(A)} \leqslant d$ para qualquer n maior ou igual a 1. Logo, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \leqslant \limsup_{n\to\infty} d$ e consequentemente $\overline{\exp}(A) \leqslant d$. □

A conjectura de Amitsur foi resolvida em afirmativo por Giambruno e Zaicev. A demonstração é extensa e utiliza vários métodos e teorias. Como não precisaremos este teorema para frente, preferimos omitir a sua demonstração.

Teorema 1.3.42. *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo K de característica 0, então existe um inteiro não negativo q e constantes C_1, C_2, r_1 e r_2, com C_1 não nulo tal que*

$$C_1 n^{r_1} q^n \leqslant c_n(A) \leqslant C_2 n^{r_2} q^n.$$

Demonstração. [9, Theorem 3, p. 151] ou [11, Theorem 6.5.2, p. 161]. □

Teorema 1.3.43. *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo K de característica* 0*, então* $\exp(A)$ *existe e é um inteiro.*

Demonstração. [10, Theorem 3, p. 242]. □

2 GK-dimensão de álgebras

2.1 O Teorema de Shirshov

Nesta seção, os conceitos e resultados seguem o conteúdo da seção 9.2 de [7]. Lembramos que o termo palavra é sinônimo de monômio.

Consideraremos $X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$ um conjunto com m ($m > 1$) variáveis distintas.

Definição 2.1.1. *Seja $W = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$ o conjunto de todos os monômios em $K\langle X_m \rangle$, W é chamado de semigrupo unitário livre de posto m e é um objeto livre na classe de todos os semigrupos com unidade. Para um elemento $w = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ de W, denotaremos por $|w|$ o comprimento (ou grau) de w.*

Definição 2.1.2. *Definiremos uma ordem parcial $>$ em W:*

- *Em monônimos de comprimento um, $x_m > x_{m-1} > \cdots > x_1$;*
- *$x_{i_1} \cdots x_{i_p} > x_{j_1} \cdots x_{j_q}$ se, e somente se, existe um k maior ou igual a zero, tal que $i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k$ e $i_{k+1} > j_{k+1}$.*

Duas palavras u e v são incomparáveis, se uma delas é o início da outra, isto é, $u = vw$ com w diferente de 1.

Um subconjunto finito de W é dito incomparável se contiver duas palavras incomparáveis.

Observamos que essa ordem, embora muito parecida com a lexicográfica, difere dela: ela é uma ordem parcial.

Definição 2.1.3. *Uma palavra w de W é dita d-decomponível se ela pode ser escrita na forma $w = w_0 w_1 \cdots w_d w_{d+1}$, e $w_0 w_1 \cdots w_d w_{d+1} > w_0 w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(d)} w_{\sigma(d+1)}$ para toda permutação não trivial σ de S_d (w_0 e w_{d+1} podem ser palavras vazias).*

Exemplo 2.1.4. *Veja que*

$$w = x_2x_1x_3x_2x_1x_3x_1x_2x_4x_1 = (x_2x_1)(x_3x_2x_1x_2)(x_3x_1x_2)(x_4x_1) = w_0w_1w_2w_3$$

é 2-decomponível, pois $w_1w_2 > w_2w_1$. Também vemos facilmente que tal palavra apresenta uma 4-decomposição $w = (x_2x_1)(x_3x_2x_1x_2)(x_3x_1)(x_2x_4)(x_1)$.

Lema 2.1.5. *Se uma palavra w de W é tal que $w = pq = rp$ para algumas palavras não vazias p, q e r de W, então $w = a^n$ ou $w = (ab)^{n-1}a = abab\cdots aba$ para alguns a e b diferentes de 1 e n maior que 1.*

Demonstração. i) Se $|p| < |r|$, então $r = pb$ e obtemos que $w = rp = pbp$, isto é, $w = aba$ para $p = a$.

ii) Se $|r| \leqslant |p|$, então $p = rp_1$, pois $|r| \geqslant 1$. Como $w = rp_1q = rrp_1$, temos que $p_1q = rp_1$. Se $|r| \leqslant |p_1|$, então $p_1 = rp_2$ e $p_2q = rp_2$, com $|p_2| < |p_1|$. Continuando o mesmo processo até obtermos $p_k = rp_{k+1}$ e $p_{k+1}q = rp_{k+1}$ com $|p_{k+1}| < |r|$. Dessa forma, temos duas possibilidades:

- Se $p_{k+1} = 1$, então $p = r^{k+1}$ e $w = r^{k+2} = a^{k+2}$ para $a = r$;
- Se $p_{k+1} \neq 1$, então $p_{k+1}q = rp_{k+1}$ e $|p_{k+1}| < |r|$. Do caso i), para $a = p_{k+1}$ e $r = ab$, obtemos que $p = r^{k+1}r_{k+1}$ e portanto $w = r^{k+2}p_{k+1} = (ab)^{k+2}a$. □

Lema 2.1.6. *Seja $v = w_0ww_1ww_2\cdots w_{d-1}ww_d$ uma palavra tal que a subpalavra w tenha d diferentes subpalavras comparáveis. Então, v é d-decomponível.*

Demonstração. Seja $w = a_iv_ib_i$, com $i = 1, \ldots, d$, e $v_1 > v_2 > \cdots v_d$. Então, v tem uma d-decomposição da forma

$$v = (w_0a_1)(v_1b_1w_1a_2)(v_2b_2w_2a_3)\cdots(v_{d-1}b_{d-1}w_{d-1}a_d)(v_db_d)w_{d+1},$$

pois $t_1 > t_2 > \cdots > t_d$, com $t_i = v_ib_iw_ia_{i+1}$ e $i = 1, \ldots, d-1$ e $t_d = v_db_d$. □

Exemplo 2.1.7. *Sejam p e q duas palavras comparáveis, então a palavra $w = p^{d-1}q$ contém d subpalavras comparáveis.*

Se $p > q$, então $p^{d-1}q > p^{d-2}q > \cdots > pq > q$.

Se $q > p$, então $q > pq > \cdots > p^{d-2}q > p^{d-1}q$.

Definição 2.1.8. *Seja w uma palavra de W e $|w| \geqslant d$. Escrevemos*

$$w = w_1 = e_2w_2 = \cdots = e_dw_d$$

no qual e_i é um começo de w, $|e_i| = i - 1$ e $|w_i| = |w| + i - 1$. Denominamos w_1, w_2, $\ldots$, w_d de d-finais de w.

Lema 2.1.9. *Seja w uma palavra de W tal que $|w| \geqslant d$ e os seus d-finais são incomparáveis, então $w = ab^tc$, com $|a| + |b| < d$, $t \geqslant 1$ e c sendo um começo de b ou $c = 1$. Se $|w| \geqslant dk$, então $t \geqslant k$, e, em particular w contém uma subpalavra b^k com $|b| < d$.*

Demonstração. Sejam w_i e w_j dois d-finais incomparáveis, com $i < j$. Logo, $w = aw_i$ e $w = abw_j$, então $w_i = bw_j$. Como w_i e w_j são incomparáveis, por definição $w_i = w_j u$ e pelo Lema 2.1.5 (pois $bw_j = w_i = w_j u$) obtemos que $w_i = b^t c$, com c sendo 1 ou o começo de b, logo $w = aw_i = ab^t c$; e claramente $|a| + |b| = j - 1 < d$. Se $|w| \geqslant dk$, então $dk \leqslant |a| + |b| + (t-1)|b| + |c| < d + (t-1)|b| + |c| < d + t|b| < (t+1)d$, com isso $k < t + 1$ e portanto $k \leqslant t$. □

Lema 2.1.10. *Seja w uma palavra de W tal que $|w| = kd$ e w não contém uma subpalavra b^k com $|b| < d$, então $w = vu$, os d-finais de v são comparáveis e v pertence a um subconjunto S de W tal que o número máximo de elementos desse subconjunto é limitado por $\binom{d}{2}(k-1)m^d$.*

Demonstração. Se os d-finais de w são incomparáveis, então pelo lema anterior, w contém uma subpalavra b^k, com $|b| < d$, contradição, assim os d-finais de w são comparáveis. Seja v o começo de w com o menor comprimento tal que seus d-finais são comparáveis (por definição de d-finais $|v| \geqslant d$). Seja $v = qx$, com $|x| = 1$, então ou $|q| < d$, ou os d-finais de q são incomparáveis (pelo fato da minimalidade de v). O primeiro caso não é possível, pois as condições $|q| < d$ e os d-finais serem comparáveis são incompatíveis, então os d-finais de q são incomparáveis. Pelo lema anterior e pelo Lema 2.1.5 temos que $q = a(cb')^t$, com b' e c diferente de 1, $|a| + |b'| + |c| < d$ e $t \geqslant 1$ ou $q = ab^t$, com b diferente de 1 e $|a| + |b| < d$. Assim w contém b^t com $|b| < |d|$ ou w contém $(cb')^t$ com $|cb'| < d$; e por hipótese $t < k$. Seja S o conjunto das palavras escritas em uma das formas a seguir:

i) $v = a(cb')^t cx$, com b' e c diferentes de 1, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, $|a| + |b'| + |c| < d-1$, $|x| = 1$ e x não sendo o começo de b;

ii) $v = ab^t x$, com b' diferente de 1, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, $|a| + |b| < d-1$, $|x| = 1$ e x não sendo o começo de b.

Agora vamos estimar a quantidade de elementos de S:

No caso i), fixamos $l = |a| + |b'| + |c|$, assim $2 \leqslant l \leqslant d-1$. Os inteiros $|a|$ e $|a| + |c|$ determinam $|a|$, $|b'|$ e $|c|$, assim tais inteiros devem ser elementos distintos entre 0, 1, ..., $l-1$, e assim teremos $\binom{l}{2}$ possibilidades para $|a|$, $|b'|$ e $|c|$. Como $ab'c$ é uma palavra em W e determina a, b' e c, logo temos m^l possibilidades para a, b' e c' (m letras para cada uma das l posições de a, b' e c); $(k-1)$ possibilidades para $t = 1, \ldots, k-1$; e $(m-1)$ possibilidades de letras para que a letra x seja diferente da primeira letra do começo de b. Com isso, para l fixado, temos $\binom{l}{2}m^l(k-1)(m-1)$ possibilidades para v. A soma para $l = 2$ até $d-1$ nos fornecerá que o número palavras do tipo i) é limitado por $\sum_{l=2}^{d-1}\binom{l}{2}m^l(k-1)(m-1)$.

Analogamente, obtemos que o número de palavras do tipo ii) é limitado por $\sum_{l=2}^{d-1} lm^l(k-1)(m-1)$.

Logo,

$$\begin{aligned}|S| \leqslant & \sum_{l=2}^{d-1}\binom{l}{2}m^l(k-1)(m-1)+\sum_{l=2}^{d-1} lm^l(k-1)(m-1)= \\ =&(k-1)(m-1)\sum_{l=2}^{d-1}\binom{l+1}{2}m^l \leqslant (k-1)(m-1)\binom{d}{2}\sum_{l=2}^{d-1}m^l \leqslant \\ \leqslant&(k-1)\binom{d}{2}m^d.\end{aligned}$$

□

Observação 2.1.11. *Motivados pelo lema anterior, denotaremos o número* $\binom{d}{2}(k-1)m^d$ *como sendo* $s(d,k)$*. Com isso, temos que nesse lema* $|S| \leqslant s(d,k)$*.*

O próximo teorema, demonstrado nesta forma por Belov, é a versão combinatória do Teorema de Shirshov, o qual é de suma importância na abordagem de PI-álgebras finitamente geradas.

Teorema 2.1.12. *Seja* w *uma palavra do semigrupo livre* $W = \langle x_1, \ldots, x_m\rangle$*,* m *maior que* 1*, e sejam* k *e* d *inteiros tais que* $k \geqslant d > 1$*. Se* w *não é* d*-componível, então* w *é da forma*

$$w = c_0 v_1^{k_1} c_1 v_2^{k_2} \cdots v_r^{k_r} c_r,$$

com $|v_i| < d$*,* $|k_i| \geqslant k$*,* $r < dm^d$*,* $\sum_{i=0}^{r}|c_i| \leqslant d^2ks(d,k) + dk(r+1) \leqslant \dfrac{d^4k^2m^d}{2}$*, as palavras* v_i *e* c_i *não possuem início comum e quando* $c_i = 1$*, então* v_i *e* v_{i+1} *não possuem início comum.*

Demonstração. Se $|w| \leqslant d^2ks(d,k)$, assumimos que $c_0 = w$ e chegamos no resultado. Se $|w| > d^2ks(d,k)$, podemos escrever w como sendo $w = a_1b_1a_2b_2\cdots a_tb_ta_{t+1}$, com $t = ds(d,k)$, $|b_i| = kd$ e os a_i's arbitrários. Pelo lema anterior, se b_i contém uma subpalavra b^k, com $|b| < d$, então $b_i = v_iu_i$, onde v_i é uma palavra do conjunto S (definido no lema anterior) e v_i apresenta d subpalavras comparáveis. Mas como $t = ds(d,k) \geqslant d|S|$, então existe v_i que se repete d vezes em w e pelo Lema 2.1.6, w é d-decomponível, mas isso contradiz o fato de supormos que w não é d-componível. Logo, existe b_i que contém uma subpalavra b^k com $|b| < d$, e consequentemente w contém b^k. Seja c_0 o menor início de w tal que $w = c_0v_1^{k_1}b_1$, com $|v_1| < d$, $|k_1| \geqslant k$ e as palavras v_1 e b_1 não possuem início comum. A suposição de não possuírem início comum vem do fato que, caso possuíssem, escreveríamos $v_1 = pr$ e $b_1 = pq$ com q e r sem início comum, e agora temos $w = c_0p(qp)^{k_1}r$, com qp e r não possuindo início comum. Se b_1 contém uma subpalavra b^k com $|b| < d$, escolhemos o menor c_1 tal que $b_1 = c_1v_2^{k_2}b_2$, com $|v_2| < d$, $|k_2| \geqslant k$ e as palavras v_2 e b_2 não

possuem início comum. Usando o mesmo raciocínio, obtemos $w = c_0 v_1^{k_1} c_1 v_2^{k_2} \cdots c_{r-1} v_r^{k_r} c_r$, com $|v_i| < d$, $|k_i| \geqslant k$ e as palavras v_i e c_i não possuem início comum e se $c_i = 1$, v_i e v_{i+1} não possuem início comum.

Assim, w possui $r-1$ subpalavras disjuntas, $v_i^{d-1}u_i$ com $i = 1, \ldots, r-1$, onde u_i é uma letra diferente da primeira letra de v_i. (Usamos que $k \geqslant d$ e possivelmente $c_r = 1$.) O número de palavras da forma $v^{d-1}u$, com $|u| < d$ e x sendo diferente da primeira letra de v, é igual a

$$\sum_{l=1}^{d-1} m^l(m-1) = m^d - m < m^d.$$

Se $r \geqslant dm^d$, então existe palavra da forma $v^{d-1}u$, com $|u| < d$ e u sendo diferente da primeira letra de v, a qual se repete pelo menos d vezes em w:

$$w = q_0(v^{d-1}u)q_1(v^{d-1}u)q_2 \cdots q_{d-1}(v^{d-1}u)q_d,$$

pelo Exemplo 2.1.7, $v^{d-1}u$ possui d palavras comparáveis, e pelo Lema 2.1.6 w é d-decomponível, chegando em uma contradição. Portanto $r < dm^d$.

Para provarmos a desigualdade de $\sum_{i=0}^{r} |c_i|$, dividimos as palavras c_i em várias subpalavras consecutivas de comprimento dk, mais uma palavra de comprimento menor que dk. Com isso, obtemos p intervalos de comprimento dk, com

$$p = \sum_{i=0}^{r} \left[\frac{|c_i|}{dk} \right]$$

onde neste caso $[\alpha]$ denota a parte inteira de um número real α. Como c_i não possui subpalavras da forma b^k, com $|b| < d$, pelo lema anterior, cada um dos p intervalos começa com um elemento do conjunto S com d subpalavras comparáveis. Se $p \geqslant ds(d,k)$, então existe elemento de S que se repete d vezes em w, e pelo Lema 2.1.6 w é d-decomponível, gerando uma contradição, logo $p < ds(d,k)$. Usando as propriedades elementares da função parte inteira, temos que

$$p = \frac{1}{dk} \sum_{i=0}^{r} |c_i| - (r+1),$$

e assim obtemos que

$$\sum_{i=0}^{r} |c_i| < dk(p + (r+1)) \leqslant d^2 ks(d,k) + dk(r+1) \leqslant d^2 km^d \left(\frac{(k-1)(d-1)d}{2} + 1 \right) \leqslant$$

$$\leqslant d^2 km^d \left(\frac{kd^2}{2} \right) = \frac{d^4 k^2 m^d}{2}. \qquad \square$$

Definição 2.1.13. *Seja A uma álgebra gerada por $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Seja H um conjunto finito de palavras de $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Diremos que A tem altura h com respeito a H se h é o menor inteiro positivo tal que A pode ser gerado, como espaço vetorial, por todos produtos $u_{i_1}^{k_1} u_{i_2}^{k_2} \cdots u_{i_t}^{k_t}$, onde $u_{i_t}^{k_t}$ está em H e t é menor ou igual a h.*

Exemplo 2.1.14. *Seja $A = K[x_1, \ldots, x_m]$, a álgebra unitária dos polinômios em m variáveis comutativas. Então A tem altura m com respeito a $H = \{x_1, \ldots, x_m\}$, pois A é gerado, como espaço vetorial por todos produtos $x_{i_1}^{k_1} \cdots x_{i_t}^{k_t}$ e os monômios que possuem todas as m variáveis não podem ser escritos como combinação linear de monômios com menos de m potências distintas dos x_i.*

Teorema 2.1.15 (Teorema de Shirshov)**.** *Seja A uma PI-álgebra gerada por m elementos $a_1, \ldots, a_m$ satisfazendo uma identidade polinomial de grau d maior que 1. Então, A tem altura finita com respeito ao conjunto de monômios $H = \{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_s} \mid s < d, i_j = 1, \ldots, m\}$.*

Demonstração. Podemos supor que A satisfaz uma identidade polinomial multilinear da forma

$$x_1 \cdots x_d = \sum_{\sigma \in S_d,\ \sigma \neq 1} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(d)} = 0,$$

com α_σ elementos do corpo K. Considere um produto $w = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p}$ de A, se a palavra w é d-decomponível, então podemos escrever w como um produto de $d+2$ subpalavras, logo

$$w = w_0 w_1 \cdots w_d w_{d+1} > w_0 w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(d)} w_{\sigma(d+1)}$$

para qualquer permutação σ não trivial de S_d. Utilizando a identidade polinomial

$$w_0 (w_1 \cdots w_d) w_{d+1} = \sum_{\sigma \in S_d,\ \sigma \neq 1} \alpha_\sigma w_0 w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(d)} w_{\sigma(d+1)},$$

obtemos que w é combinação linear de palavras de tamanho p, e inferiores em relação a ordenação (quase lexicográfica) definida na Definição 2.1.2 e continuamos o processo até obtermos que w é uma combinação linear de palavras não d-decomponíveis. Seja w' uma das parcelas não d-decomponíveis e fixando $k = d$, pelo teorema anterior temos que $w' = c_0 v_1^{k_1} c_1 v_2^{k_2} c_2 \cdots c_{r-1} v_r^{k_r} c_r$ com $|v_i| < d$, $|k_i| \geqslant k$, $r < dm^d$,

$$\sum_{i=0}^{r} |c_i| \leqslant d^2 k s(d,k) + dk(r+1) \leqslant \frac{d^4 k^2 m^d}{2} = \frac{d^6 k m^d}{2},$$

as palavras v_i e c_i não possuem início comum e quando $c_i = 1$, então v_i e v_{i+1} não possuem início comum. Considerando a palavra c_i como $c_i = u_{j_1} \cdots u_{j_q}$ de comprimento $q = |c_i|$ com respeito as palavras $a_1, \ldots, a_m$ (de comprimento d maior que 1), obtemos que A é gerado por todos $w = u_1 \cdots u_{p_0} v_1^{k_1} u_{p_0+1} \cdots u_{p_1} v_2^{k_2} \cdots v_t^{k_t} u_{p_{t-1}+1} \cdots u_{p_t}$ Portanto, a altura h de A é limitada por

$$h \leqslant t + \sum_{i=0}^{r} |c_i| \leqslant dm^d + \frac{d^6 k m^d}{2}. \qquad \square$$

O próximo teorema foi demonstrado por Levitzki, em forma mais fraca, usando outros métodos. O teorema de Shirshov dá uma nova demonstração, e ainda de um resultado mais geral.

Teorema 2.1.16. *Seja A uma PI-álgebra gerada por m elementos $a_1, \ldots, a_m$ satisfazendo uma identidade polinomial de grau d maior que 1. Seja P o conjunto de todos os produtos $a_{i_1} \cdots a_{i_k}$, com k menor que d. Se todo elemento de P é nil (isto é, para cada elemento p de P existe um natural n tal que $p^n = 0$), então A é uma álgebra nilpotente.*

Demonstração. Pelo Teorema de Shirshov, A é gerado pelos produtos $w = u_{i_1}^{k_1} \cdots u_{i_t}^{k_t}$, com t limitado pela altura h e os u_{i_j} são palavras de comprimento menores que d com letras em $a_1, \ldots, a_m$. Como todas possíveis palavras u_{i_j} são um número finito, logo existe um limite superior n para a classe de nilpotência delas. Portanto, se os u_{i_j} são todos nil e a soma $k_1 + \cdots + k_t$ é suficientemente grande (por exemplo, maior que $h(n-1)$), então existe u_{i_j} com grau maior que $n-1$ e a palavra é igual a 0. □

Observamos aqui que o bem conhecido teorema de Nagata (1952) e Higman (1954) (demonstrado primeiramente por Dubnov e Ivanov por volta de 1941), afirma que uma álgebra associativa, sobre um corpo de característica 0, e satisfazendo a identidade $x^n = 0$, é nilpotente, de índice de nilpotência limitado por 2^n. O teorema de Shirshov vai em outra direção, pois exige que apenas um conjunto (finito) de geradores seja nil. Recordamos ainda que, combinando resultados importantes obtidos por Razmyslov e por Kuzmin, pode se deduzir que no teorema de Nagata e Higman, o índice de nilpotência é limitado entre $\dfrac{n(n+1)}{2}$ e n^2. Há uma conjectura que este índice de nilpotência é igual à cota inferior $\dfrac{n(n+1)}{2}$, a qual é verdadeira para $n \leqslant 4$ e para $n = 5$, no último caso para álgebras com 2 geradores. O caso geral da conjectura ainda está em aberto.

2.2 GK-dimensão

Nesta seção apresentaremos conceitos básicos e propriedades da teoria de GK-dimensão que foram estudados na seção 9.3 de [7]. Além disso, enunciamos alguns resultados vistos nos capítulos 2 e 3 de [14].

Definição 2.2.1. *Seja Φ o conjunto de todas as sequências $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eventualmente monótonas não-decrescentes e de valores positivos, ou seja, existe um natural n_0 tal que $f(n_0) > 0$ e $f(n_2) \geqslant f(n_1)$ para qualquer $n_2 \geqslant n_1 \geqslant 0$.*

Definimos uma ordem parcial $\preccurlyeq$ em Φ: para f e g elementos de Φ, $f \preccurlyeq g$ se, e somente se, existem inteiros positivos a e p, tais que para qualquer n suficientemente grande vale a desigualdade $f(n) \leqslant ag(pn)$. A equivalência associada a essa ordem será denotada por $\sim$ e escreveremos $f \sim g$ se $f \preccurlyeq g$ e $g \preccurlyeq g$. A classe de equivalência de f será denotada por $G(f)$ e chamada de crescimento de f.

Proposição 2.2.2. *Seja $f(n) = ag(pn + q) + c$ para n suficientemente grande, onde $a, p > 0$ e c adequado (garantindo $f \in \Phi$), então $G(f) = G(g)$.*

Demonstração. Basta tomarmos separadamente um caso para cada coeficiente. Sem perda de generalidade suponha que g é monótona não-decrescente, logo $g(pn) \in G(g)$, pois $g(n) \leqslant g(pn)$ e existe um inteiro positivo p_0 tal que $p_0 > p$, no qual $g(pn) \leqslant g(p_0 n)$. Para os demais coeficientes a demonstração é análoga. □

Definição 2.2.3. *Seja A uma K-álgebra finitamente gerada e seja $V = \{r_1, \ldots, r_m\}$ um conjunto de geradores. Para todo n, inteiro positivo, considere*

$$V^n = span\{r_{i_1} \cdots r_{i_n} \mid \ i_j = 1, \ldots, m\}$$

e assuma que $V^0 = K$ se A for unitária, caso contrário, $V^0 = 0$.

A função dada por

$$g_V(n) = \dim(V^0 + V^1 + \cdots + V^n), \quad n \in \mathbb{N}$$

é chamada de função de crescimento da álgebra A, com respeito a V. Como $g_V \in \Phi$, definimos por $G(g_V)$ o crescimento da álgebra A, denotando por $G(A)$.

A dimensão de Gelfand-Kirillov (ou GK-dimensão) de A, denotada por $\mathrm{GKdim}(A)$*, é definida por*

$$\mathrm{GKdim}(A) = \limsup_{n\to\infty}(\log_n g_v(n)) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log g_V(n)}{\log n}$$

Observação 2.2.4. *A GK-dimensão de uma álgebra A pode não ser um número real neste caso escreveremos* $\mathrm{GKdim}(A) = \infty$ *e caso seja necessário, consideraremos a aritmética real estendida (sem menções explícitas, já que o comportamento é natural).*

O conceito de GK-dimensão é muito mais geral e esta é apenas uma versão particular para álgebras finitamente geradas. Para maiores detalhes veja [14].

O resultado a seguir mostra a independência da GK-dimensão de uma álgebra em relação ao seu conjunto de geradores.

Proposição 2.2.5. *Seja A uma álgebra finitamente gerada, temos que a* $\mathrm{GKdim}(A)$ *não depende da escolha do conjunto de geradores.*

Demonstração. Sejam $V = span\{r_1, \ldots, r_m\}$ e $W = span\{s_1, \ldots, s_{m'}\}$ espaços gerados por dois conjuntos, diferentes, de geradores da álgebra A. Vamos denotar por $\mathrm{GKdim}_V(A)$ e $\mathrm{GKdim}_W(A)$ as GK-dimensões de A definidas por meio de V e W, respectivamente. Como $r_1, \ldots, r_m$ geram a álgebra A, então existe algum inteiro positivo p, tal que para todo $j = 1, \ldots, m'$, temos que s_j pertence a $V^0 + \cdots + V^p$, logo $W^1 = W$ está contido em $V^0 + \cdots + V^p$, implicando que para todo n natural, W^n está em $V^0 + \cdots + V^{pn}$ e consequentemente $W^0 + \cdots + W^n$ está contido em $V^0 + \cdots + V^{pn}$. Com isso, chegamos que

$$g_W(n) = \mathrm{GKdim}(W^0 + \cdots + W^n) \leqslant \mathrm{GKdim}(V^0 + \cdots + V^{pn}) = g_V(pn)$$

Então,

$$\log_n(g_W(n)) \leqslant \log_n(g_V(pn)) = \frac{\log_{pn}(g_V(pn))}{\log_{pn}(n)} = \frac{\log_{pn}(g_V(pn))}{1-\log_{pn}(p)}$$

Aplicando o limite superior na desigualdade, temos

$$\limsup_{n\to\infty}(\log_n(g_W(n))) \leqslant \limsup_{pn\to\infty}\left(\frac{\log_{pn}(g_V(pn))}{1-\log_{pn}(p)}\right) = \limsup_{pn\to\infty}(g_V(pn)) \leqslant \limsup_{n\to\infty}(g_V(pn))$$

Portanto $\mathrm{GKdim}_W(A) \leqslant \mathrm{GKdim}_V(A)$. De maneira totalmente análoga mostra-se que $\mathrm{GKdim}_V(A) \leqslant \mathrm{GKdim}_W(A)$ e consequentemente chega-se na igualdade. □

Exemplo 2.2.6. *Seja $A = K[x_1, \ldots, x_m]$, a álgebra unitária dos polinômios em m variáveis comutativas. Então,* $\mathrm{GKdim}(A) = m$. *De fato, considerando $V = \{x_1, \ldots, x_m\}$, temos que $g_V(n)$ é igual ao número de monômios de grau menor ou igual a n em m variáveis, mas veja que isso é igual ao número de monômios de grau n em $m+1$ variáveis, pois se $a_1 + \cdots + a_n$ é menor ou igual a n, então existe uma correspondência biunívoca $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m} \to x_0^{a_0}x_1^{a_1}\cdots x_m$ com $a_0 = n - (a_1 + \cdots + a_m)$, entre os conjuntos. Logo,*

$$g_V(n) = \binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!} = \frac{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)}{m!},$$

o qual é um polinômio de grau m. Portanto, $\mathrm{GKdim}(A) = \limsup_{n\to\infty} g_V(n) = m$

Exemplo 2.2.7. *Seja A uma álgebra, então* $\mathrm{GKdim}(A[x_1, \ldots, x_m]) = \mathrm{GKdim}(A) + m$. *Para mais detalhes veja [14, Example 3.6, p. 26].*

A seguir, apresentaremos um exemplo de álgebra que não possui GK-dimensão finita.

Exemplo 2.2.8. *Seja $A = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$, com m maior que 1, então* $\mathrm{GKdim}(A) = \infty$. *De fato, suponha que* $\mathrm{GKdim}(A)$ *seja finita e considerando $V = \{x_1, \ldots, x_m\}$, o conjunto usual de geradores de A, temos que $g_V(n) = 1 + m + m^2 + \cdots + m^n$. Veja que g_V cresce mais rápido que qualquer função polinomial, isto é, dado k inteiro positivo, $k \leqslant \log_n g_v(kn)$, pois se n é natural, então $2^n - n \geqslant 0$ e neste caso temos que $m \geqslant 2$, logo $m^n \geqslant 2^n \geqslant n$, implicando que $n^k \leqslant (m^n)^k = m^{nk} \leqslant 1 + m + m^2 + \cdots + m^{kn} = g_v(kn)$; aplicando o logaritmo obtemos que $k \leqslant \log_n g_v(kn)$ e portanto $k \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$, mas isso é uma contradição já que por suposição k é um natural qualquer e* $\mathrm{GKdim}(A)$ *era finita. Portanto,* $\mathrm{GKdim}(A) = \infty$.

Proposição 2.2.9. *Seja A uma álgebra associativa finitamente gerada.* $\mathrm{GKdim}(A) = 0$ *se, e somente se, A é um espaço vetorial de dimensão finita. Caso A tenha dimensão infinita, então* $\mathrm{GKdim}(A) \geqslant 1$.

Demonstração. Seja A gerada pelo espaço vetorial $V = span\{r_1, \ldots, r_m\}$. Como A é uma álgebra associativa, logo $V^{n+1} = V^n \cdot V$. Agora, teremos dois casos:

- Se existe um natural n_0 tal que V^{n_0+1} está contido em $V^0 + V^1 + \cdots + V^{n_0}$. Assim, para qualquer n maior ou igual a n_0, V^n está contido em $V^0 + V^1 + \cdots + V^{n_0}$, logo $g_V(n) = g_V(n_0)$ é um número finito e então $\mathrm{GKdim}(A) = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{\log g_V(n)}{\log n} = 0$.

  Observe que se a dimensão do espaço vetorial A é finita, basta tomarmos $A = V^1$ e assim chegamos no resultado.

- Se para todo número natural n, V^{n+1} não está contido em $V^0 + V^1 + \cdots + V^n$, logo $V^0 + V^1 + \cdots + V^n$ é diferente de $V^0 + V^1 + \cdots + V^{n+1}$, implicando $g_V(n) < g_V(n+1)$. Veja, por indução, que $g_V(n) \geqslant n$. De fato, para $g_V(0) \geqslant 0$; supondo que $g_V(n) \geqslant n$, chegamos em $g_V(n+1) \geqslant n+1$, pois $g_V(n+1) > g_V(n) \geqslant n$, logo de $g_V(n+1) > n$ temos que $g_V(n+1) \geqslant n+1$. Do fato $g_V(n) \geqslant n$, chegamos que $\log_n g_v(n) \geqslant 1$ e então $\mathrm{GKdim}(A) = \limsup_{n\to\infty} \log_n g_v(n) \geqslant 1$. Assim, isso ocorre quando a dimensão do espaço vetorial A é infinita.

□

A proposição a seguir é conhecida como "Bergman's gap"e é um resultado obtido por G. Bergman.

Proposição 2.2.10. *Não existe álgebra A tal que* $1 < \mathrm{GKdim}(A) < 2$.

Demonstração. [14, Theorem 2.5, p. 18]. □

Juntando as duas proposições anteriores chegando no seguinte resultado.

Corolário 2.2.11. *Se a álgebra A não é finitamente gerada como espaço vetorial, então* $\mathrm{GKdim}(A) = 1$ *ou* $\mathrm{GKdim}(A) \geqslant 2$.

Proposição 2.2.12. *Para todo número real α maior ou igual a 2, existe uma álgebra A com dois geradores tal que* $\mathrm{GKdim}(A) = \alpha$.

Demonstração. [14, Theorem 2.9, p. 21] ou [7, Theorem 9.4.11, p. 148] □

Proposição 2.2.13. *Seja A uma álgebra finitamente gerada e B uma imagem homomórfica de A, então* $\mathrm{GKdim}(B) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$.

Demonstração. Considere $\varphi : A \to B = \varphi(A)$ homomorfismo de K-álgebras e $V = \{r_1, \ldots, r_m\}$ um conjunto de geradores da álgebra A. Veja que $W = \{\varphi(r_1), \ldots, \varphi(r_m)\}$ é um conjunto de geradores de B. Dado um natural n, temos que $W^0 + W^1 + \cdots + W^n$ está contido em $\varphi(V^0) + \varphi(V^1) + \cdots + \varphi(V^n) = \varphi(V^0 + V^1 + \cdots + V^n)$, logo

$$\begin{aligned} g_w(n) &= \dim(W^0 + W^1 + \cdots + W^n) \leqslant \dim(\varphi(V^0 + V^1 + \cdots + V^n)) \\ &\leqslant \dim(V^0 + V^1 + \cdots + V^n) = g_V(n). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{GKdim}(B) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$. □

Corolário 2.2.14. *Se I é um ideal de uma álgebra A, então* $\mathrm{GKdim}(A/I) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$.

Proposição 2.2.15. *Sejam A uma álgebra finitamente gerada e B uma subálgebra finitamente gerada, então* $\mathrm{GKdim}(B) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$.

Demonstração. Considere $W = \{s_1, \ldots, s_{m'}\}$ e $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ um conjunto de geradores de B e de A, respectivamente. Como $U = W \cup V$ também é um conjunto de geradores de A, então para todo n natural, W^n está contido em U^n, logo $g_W(n) \leqslant g_U(n)$ e consequentemente $\mathrm{GKdim}(B) \leqslant \mathrm{GKdim}(A)$. □

Observamos aqui que existem exemplos de álgebras finitamente geradas e subálgebras que não o são. Um tal exemplo é a álgebra associativa livre A, livremente gerada por dois elementos x e y. Agora tomando B a subálgebra de A gerada por todos elementos da forma xy^kx, $k \geqslant 1$, pode ser visto facilmente que esta é uma álgebra livre também, porém, com conjunto infinito de geradores livres.

Proposição 2.2.16. *Sejam A_1 e A_2 duas álgebras, então*

i) $\mathrm{GKdim}(A_1 \oplus A_2) = \max\{\mathrm{GKdim}(A_1), \mathrm{GKdim}(A_2)\}$;

ii) $\max\{\mathrm{GKdim}(A_1), \mathrm{GKdim}(A_2)\} \leqslant \mathrm{GKdim}(A_1 \otimes A_2) \leqslant \mathrm{GKdim}(A_1) + \mathrm{GKdim}(A_2)$

iii) Se $\mathrm{GKdim}(A_1) \leqslant 2$, *então* $\mathrm{GKdim}(A_1 \otimes A_2) = \mathrm{GKdim}(A_1) + \mathrm{GKdim}(A_2)$

Demonstração. [14, Proposition 3.2, p.23; Lemma 3.10, p. 28; Proposition 3.12, p. 29]. □

Analisaremos agora o comportamento da GK-dimensão com respeito a altura de uma álgebra. Tal relação foi obtida no Teorema de Berele, [2], que será demonstrado seguindo a prova dada em [7, Theorem 9.4.1, p. 142].

Teorema 2.2.17 (Teorema de Berele)**.** *Toda PI-álgebra que é finitamente gerada, tem GK-dimensão finita.*

Demonstração. Seja uma PI-álgebra A gerada pelo conjunto $V = \{r_1, \ldots, r_m\}$ tal que satisfaz uma identidade polinomial de grau d. Pelo Teorema de Shirshov (Teorema 2.1.15), A tem altura finita, h, com respeito ao conjunto de monômios $H = \{r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_s} \mid s < d, i_j = 1, \ldots, m\}$, isto é, A é gerado pelas palavras $u_{i_1}^{k_1} u_{i_2}^{k_2} \cdots u_{i_t}^{k_t}$, com t menor ou igual a h, e cada monômio u_{i_1}, …, u_{i_t} tem comprimento menor que d. Logo, V^n é gerado pelas palavras com $k_1|u_{i_1}| + \cdots + k_t|u_{i_t}| = n$, logo $V^0 + V^1 + \cdots + V^n$ é subespaço do espaço vetorial que é gerado por todas as palavras u_{i_1}, …, u_{i_t}, com $k_1 + \cdots + k_n \leqslant n$. Seja p o número de palavras de H, logo, $p = 1 + m \cdots + m^{d-1}$. Veja que o número de sequências

de índices $(i_1, \ldots, i_n)$ é limitado por p^h, e como visto no Exemplo 2.2.6 a quantidade de monômios de grau menor ou igual a n em h variáveis é $\binom{n+h}{h}$, então

$$g_V(n) = \dim(V^0 + V^1 + \cdots + V^n) \leqslant p^h \binom{n+h}{h}$$

que é um polinômio de grau h. Portanto $\mathrm{GKdim}(A) \leqslant h$. □

Corolário 2.2.18. *A GK-dimensão de uma PI-álgebra finitamente gerada A é limitada pela altura de A em relação a qualquer conjunto finito de monômios de qualquer conjunto de geradores de A.*

2.3 GK-dimensão de álgebras relativamente livres

Nesta seção apresentaremos alguns resultados envolvendo a GK-dimensão da álgebra relativamente livre de posto m na variedade gerada por alguma PI álgebra A.

Da convenção feita na Observação 1.3.15, temos que a álgebra relativamente livre de posto m na variedade gerada pela álgebra A é dada por $F_m(A) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / T_m(A)$, onde $T_m(A) = T(A) \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$. Assim, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.1. *Se A_1 e A_2 são duas álgebras PI-equivalentes, então*

$$F_m(A_1) = F_m(A_2) \quad e \quad \mathrm{GKdim}\, F_m(A_1) = \mathrm{GKdim}\, F_m(A_2).$$

Demonstração. Como A_1 e A_2 são PI-equivalentes então, por definição, $T(A_1) = T(A_2)$ e consequentemente $T_m(A_1) = T(A_1) \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = T(A_2) \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = T_m(A_2)$, portanto $F_m(A_1) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / T_m(A_1) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / T_m(A_2) = F_m(A_2)$ e assim, $\mathrm{GKdim}\, F_m(A_1) = \mathrm{GKdim}\, F_m(A_2)$. □

Observação 2.3.2. *Veja que a contra-positiva da proposição anterior nos fornece uma relação entre GK-dimensão e não PI-equivalência para duas álgebras dadas. Se A_1 e A_2 são duas PI-álgebras que possuem álgebras relativamente livres de posto m, com GK-dimensões diferentes, então A_1 e A_2 não são PI-equivalentes. Esta observação tem sido utilizada para estudar e estabelecer que certas álgebras, embora PI-equivalentes em característica 0, deixam de ser PI-equivalentes em característica positiva. Assim foi demonstrado que por exemplo as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ não são PI-equivalentes se o corpo base é infinito e de característica $p > 2$. (Segue da teoria desenvolvida por Kemer que em característica 0 elas são PI-equivalentes.)*

Proposição 2.3.3. *Se $T(A)$ está contido em $T(B)$, então* $\mathrm{GKdim}\, F_m(B) \leqslant \mathrm{GKdim}\, F_m(A)$.

Demonstração. Como $T(A)$ está contido em $T(B)$, logo $T_m(A)$ está contido em $T_m(B)$ e com isso, temos um homomorfismo sobrejetor

$$\begin{aligned} \varphi\colon F_m(A) &\to F_m(B) \\ f + T_m(A) &\mapsto f + T_m(B) \end{aligned}$$

Logo, $F_m(B)$ é uma imagem homomórfica de $F_m(A)$ e pela Proposição 2.2.13, temos que $\operatorname{GKdim} F_m(B) \leqslant \operatorname{GKdim} F_m(A)$ □

Proposição 2.3.4. *Se A e B são duas álgebras tais que B está contido em A, então* $\operatorname{GKdim} F_m(B) \leqslant \operatorname{GKdim} F_m(A)$.

Demonstração. Observe que como B está contido em A, logo $T(A)$ está contido em $T(B)$ e pela proposição anterior, temos o resultado. □

O teorema a seguir é um resultado fundamental. Ele foi obtido por Procesi. Ele é muito mais geral, nós aqui citamos apenas a parte que será relevante para a nossa exposição.

Teorema 2.3.5. *Seja K um corpo infinito com característica arbitrária, então*

$$\operatorname{GKdim}(F_m(M_n(K))) = (m-1)n^2 + 1.$$

Demonstração. Consulte [19]. □

Berele, usando os métodos da demonstração do teorema de Procesi acima, estabeleceu o seguinte teorema. Recordamos, para conveniência do leitor, que E é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita, e $M_n(E)$ é a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em E. Já a álgebra $M_{a,b}(E)$ consiste das matrizes de $M_{a+b}(E)$ cujas entradas nos dois blocos quadrados, de tamanhos $a \times a$, e $b \times b$ na diagonal principal, têm entradas de E_0, e os dois blocos $a \times b$ e $b \times a$ fora da diagonal, têm entradas em E_1. Essas álgebras, juntamente com a álgebra $M_n(K)$ formam as álgebras T-primas em característica 0, no sentido de que se I é um T-ideal T-primo, então ele é 0, $K\langle X\rangle$, ou o ideal das identidades de uma dessas álgebras. Este teorema foi demonstrado por Kemer e vale quando K é de característica 0, ele é uma parte essencial da teoria desenvolvida por Kemer, que culminou na classificação dos T-ideais (em característica 0), e na solução em afirmativo do famoso problema de Specht: se, em característica 0, o T-ideal de toda PI-álgebra é finitamente gerado como T-ideal. Recordamos que em característica positiva aparecem outros T-ideais T-primos; a classificação dos T-ideais T-primos nesse caso está muito longe do nosso alcance.

Teorema 2.3.6. *Seja K um corpo infinito com característica arbitrária, então*

i) $\operatorname{GKdim}(F_m(M_n(E))) = (m-1)n^2 + 1$

ii) $\mathrm{GKdim}(F_m(M_{a,b}(E))) = (m-1)(a^2+b^2)+2$

Demonstração. [3, Theorem 7 e 18, p. 1494 e 1500]. □

Recomendamos a leitura do artigo [3], pois Berele também construiu modelos genéricos para as álgebras $F_m(M_n(E))$ e $F_m(M_{a,b}(E))$ nas variedades determinadas por $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$ (onde consideramos que o posto das álgebras livres é maior ou igual a 2).

Exemplo 2.3.7. *Seja K um corpo de característica 0. Pelo teorema anterior, temos que* $\mathrm{GKdim}(F_m(M_{1,1}(E))) = (m-1)(1^2+1^2)+2 = 2m$

Os resultados a seguir não serão necessários no decorrer do texto. Decidimos pela inclusão deles, pois representam teoremas importantes e relevantes sobre a estrutura das álgebras relativamente livres, e estão relacionados diretamente com a GK-dimensão dessas álgebras.

Definição 2.3.8. *Uma álgebra A é dita representável se existe n um inteiro positivo e uma álgebra comutativa S tal que A é isomorfa a uma subálgebra de $M_n(S)$.*

A seguir apresentaremos um resultado dado por Markov em [18].

Teorema 2.3.9 (Markov)**.** *Seja A uma álgebra representável e finitamente gerada, então* $\mathrm{GKdim}(A)$ *é um inteiro.*

Demonstração. [14, Theorem 12.10.4, p. 195]. □

Teorema 2.3.10. *Seja A uma álgebra, então a álgebra $F_m(A)$ é representável.*

Demonstração. [13, Corollary 2.3, p. 65]. □

Corolário 2.3.11. *Seja A uma PI-álgebra, então* $\mathrm{GKdim}\, F_m(A)$ *é um inteiro.*

3 GK-dimensão da álgebra relativamente livre de $\mathfrak{sl}_2$

O conceito de dimensão de Gelfand e Kirillov para álgebras de Lie define-se de maneira totalmente análoga ao caso associativo, portanto não iremos repetir as definições aqui.

Bahturin em [1], calculou a GK-dimensão da álgebra $F_2(\mathfrak{sl}_2(K))$ (álgebra relativamente livre de posto 2 na variedade definida por $\mathfrak{sl}_2$, a álgebra de Lie das matrizes 2×2 com traço nulo sobre o corpo K). Neste capítulo apresentaremos o resultado obtido por Machado e Kochloukov em [17], no qual é calculado a GK-dimensão de $F_m(\mathfrak{sl}_2(K))$, a álgebra relativamente livre de posto m na variedade de álgebras de Lie gerada por $\mathfrak{sl}_2(K)$, com K sendo um corpo de característica diferente de 2.

Sejam A uma álgebra e $V = \{x_1, \ldots, x_m\}$ um conjunto de geradores livres de $F_m(A)$. Pela Definição 1.3.17 vimos que $H(F_m(A), t) = \sum_{n \geqslant 0} \dim V^{(n)} t^n$. Além disso, temos que a função de crescimento de $F_m(A)$ com respeito a V é dada por $g_V(w) = \sum_{n=0}^{w} \dim V^{(n)}$. Em particular, se g_V tiver crescimento de um polinômio de grau p, assim $\mathrm{GKdim}(F_m(A)) = p$.

No resultado principal deste capitulo provaremos que, para K sendo um corpo de característica diferente de 2, temos que

$$\mathrm{GKdim}(F_m(\mathfrak{sl}_2(K))) = 3(m-1).$$

Para isso, consideraremos que a característica do corpo K é 0. Antes de começarmos a demonstração, faremos um esboço dessa: partindo da série de Hilbert (resultado obtido por Drensky em [6]) obtemos uma expressão como série de potências usando a Igualdade 3.1. Estudaremos a função de crescimento, lidando com as parcelas separadamente e avaliadas em naturais da forma $12w + 11$. Manipulares e descartaremos parcelas que não contribuem para o crescimento dessa função. Por fim, obteremos um polinômio cujo coeficiente líder mostraremos que é positivo.

Teorema 3.0.1 ([6]). *A Série de Hilbert na álgebra relativamente livre de posto $m \geqslant 3$ na variedade de álgebras de Lie gerada por $\mathfrak{sl}_2$ é dada por*

$$\begin{aligned} H(F_m(\mathfrak{sl}_2(K)), t) =& \frac{1}{4}(3\theta(t,t,t) - \theta(t,-t,-t) - \theta(-t,t,-t) - \theta(-t,-t,t)) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+t)^m} - \frac{1}{(1-t)^m}\right) + mt, \end{aligned}$$

no qual $\theta(x,y,z)$ é igual a

$$\frac{2}{(m-1)!(m-2)!(m-3)!x^2y}\cdot\frac{\partial^{3(m-3)}}{\partial x^{m-3}\partial y^{m-3}\partial z^{m-3}}\left(\frac{xyz^{m-3}}{(1-xyz)}\frac{x^2y(1-x^2y)}{(1-xy)^3(1-x)^3}\right).$$

Demonstração. [6, Theorem 4.1, p. 11]. □

Agora, analisaremos o comportamento assintótico de cada uma das parcelas da soma do teorema anterior separadamente, para isso usaremos a notação $a^{\underline{n}}$ para o fatorial descendente (ou decrescente), assim $a^{\underline{0}}=1$ e $a^{\underline{n}}=\prod_{k=1}^{n}(a-k+1)$, com a e n sendo inteiros. Usaremos a notação $\lceil a\rceil$ e $\lfloor a\rfloor$ para as funções teto e piso respectivamente, isto é, $\lceil a\rceil$ é igual ao menor inteiro sucessivo de a e $\lfloor a\rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a a. Também, sem referência explícita usaremos a seguinte identidade de séries de potências formais

$$\sum_{n\geqslant 0}\binom{n+a}{a}t^n=\frac{1}{(1-t)^{1+a}}. \tag{3.1}$$

3.1 Primeira parcela

Começamos escrevendo $\theta(x,y,z)$ como uma série de potências (usando a igualdade 3.1) e aplicando as derivadas parciais. Denotando $M=m-3$, teremos que $2(M+2)(M+1)^2(M!)^3\theta(x,y,z)$ é igual a

$$\sum_{0\leqslant q\leqslant m\leqslant p}(m-q+2)^{\underline{2}}(p-m+2)^{\underline{2}}(q+M)^{\underline{M}}\times$$
$$\times\big((m+M+1)^{\underline{M}}(p+M+2)^{\underline{M}}-(m+M+2)^{\underline{M}}(p+M+4)^{\underline{M}}x^2y\big)x^py^mz^q.$$

Agora, estudaremos apenas a primeira parte da soma, que resulta no valor de $H_m(F_m(\mathfrak{sl}_2(K)),t)$, que está em função de θ, isto é,

$$S_1=\frac{1}{4}(3\theta(t,t,t)-\theta(t,-t,-t)-\theta(-t,t,-t)-\theta(-t,-t,t)).$$

Veja que para $\theta(x,y,z)=\theta(t,t,t)$ teremos que

$$2(M+2)(M+1)^2(M!)^3(3\theta(x,y,z))=3\sum_{0\leqslant q\leqslant m\leqslant p}(m-q+2)^{\underline{2}}(p-m+2)^{\underline{2}}(q+M)^{\underline{M}}\times$$
$$\times\big((m+M+1)^{\underline{M}}(p+M+2)^{\underline{M}}-(m+M+2)^{\underline{M}}(p+M+4)^{\underline{M}}t^3\big)t^{p+m+q}.$$

Já para $\theta(x,y,z)=\theta(t,-t,-t)$,

$$2(M+2)(M+1)^2(M!)(-\theta(t,-t,-t))=-\sum_{0\leqslant q\leqslant m\leqslant p}(m-q+2)^{\underline{2}}(p-m+2)^{\underline{2}}(q+M)^{\underline{M}}\times$$
$$\times\big((m+M+1)^{\underline{M}}(p+M+2)^{\underline{M}}-(m+M+2)^{\underline{M}}(p+M+4)^{\underline{M}}(-t^3)\big)t^p(-t)^{m+q}.$$

Com $\theta(x,y,z)=\theta(-t,t,-t)$ chegamos em

$$2(M+2)(M+1)^2(M!)(-\theta(-t,t,-t)) = -\sum_{0\leqslant q\leqslant m\leqslant p}(m-q+2)^{\underline{2}}(p-m+2)^{\underline{2}}(q+M)^{\underline{M}}\times$$
$$\times\big((m+M+1)^{\underline{M}}(p+M+2)^{\underline{M}}-(m+M+2)^{\underline{M}}(p+M+4)^{\underline{M}}t^3\big)t^m(-t)^{p+q},$$

E considerando $\theta(x,y,z)=\theta(-t,-t,t)$ temos

$$2(M+2)(M+1)^2(M!)(-\theta(-t,-t,t)) = -\sum_{0\leqslant q\leqslant m\leqslant p}(m-q+2)^{\underline{2}}(p-m+2)^{\underline{2}}(q+M)^{\underline{M}}\times$$
$$\times\big((m+M+1)^{\underline{M}}(p+M+2)^{\underline{M}}-(m+M+2)^{\underline{M}}(p+M+4)^{\underline{M}}(-t^3)\big)t^m(-t)^{p+m}.$$

Logo, $8(M+2)(M+1)^2(M!)^3S_1$ é igual a

$$\sum_{0\leqslant q\leqslant m\leqslant p}(m-q+2)^{\underline{2}}(p-m+2)^{\underline{2}}(q+M)^{\underline{M}}t^{p+m+q}\times$$
$$\times\big((m+M+1)^{\underline{M}}(p+M+2)^{\underline{M}}(3-(-1)^{m+q}-(-1)^{p+q}-(-1)^{p+m})-$$
$$-(m+M+2)^{\underline{M}}(p+M+4)^{\underline{M}}(3+(-1)^{m+q}-(-1)^{p+q}+(-1)^{p+m})t^3\big)$$

Seja k um número natural. Veja que o conjunto de todas ternas (q,m,p) em $\mathbb{Z}^3$, com $0\leqslant q\leqslant m\leqslant p$ e $k=q+m+p$, coincide com o conjunto de todas ternas $(q,k-q-p,p)$ em $\mathbb{Z}^3$ tal que q varia de 0 a $\lfloor\frac{k}{3}\rfloor$ e p de $\lceil\frac{k-q}{2}\rceil$ a $k-2q$. Utilizando tal fato na expressão acima temos que $8(M+2)(M+1)^2(M!)^3S_1$ é igual a

$$\sum_{k\geqslant 0}\sum_{q=0}^{\lfloor\frac{k}{3}\rfloor}\sum_{p=\lceil\frac{k-q}{2}\rceil}^{k-2q}(k-2q-p+2)^{\underline{2}}(2p-k+q+2)^{\underline{2}}(q+M)^{\underline{M}}t^k\times$$
$$\times\big((k-q-p+M+1)^{\underline{M}}(p+M+2)^{\underline{M}}(3-(-1)^{k-p}-(-1)^{p+q}-(-1)^{k-q})-$$
$$-(k-q-p+M+2)^{\underline{M}}(p+M+4)^{\underline{M}}(3+(-1)^{k-q}-(-1)^{p+q}+(-1)^{k-q})t^3\big)=$$
$$=4M!(M+1)!(M+3)!(2t+(M+2)t^2)+\sum_{k\geqslant 0}(F_2-G_2)(k,q,p)t^{k+3},$$

no qual

$$\begin{aligned}
f(k,q,p) =&(k-2q-p+2)^{\underline{2}}(2p-k+q+2)^{\underline{2}}(q+M)^{\underline{M}}(k-q-p+M+1)^{\underline{M}}\\
&(p+M+2)^{\underline{M}},\\
g(k,q,p) =&(k-2q-p+2)^{\underline{2}}(2p-k+q+2)^{\underline{2}}(q+M)^{\underline{M}}(k-q-p+M+2)^{\underline{M}}\\
&(p+M+4)^{\underline{M}},\\
h(k,q,p) =&3+(-1)^{k-q}-(-1)^{p+q}+(-1)^{k-q},\\
F_1(k,q,p) =& \sum_{p=\lceil\frac{k+3-q}{2}\rceil}^{k+3-2q} f(k+3,q,p)h(k,q,p),\\
F_2(k,q,p) =& \sum_{q=0}^{\lfloor\frac{k}{3}\rfloor+1} F_1(k,q,p),\\
G_1(k,q,p) =& \sum_{p=\lceil\frac{k-q}{2}\rceil}^{k-2q} g(k,q,p)h(k,q,p),\\
G_2(k,q,p) =& \sum_{q=0}^{\lfloor\frac{k}{3}\rfloor} G_1(k,q,p).
\end{aligned}$$

Como estamos interessados em estudar o comportamento assintótico da função de crescimento de $F_m(\mathfrak{sl}_2)$, perceba que basta analisarmos $\sum_{k\geqslant 0}(F_2-G_2)(k,q,p)t^{k+3}$. Aqui, descreveremos apenas $\sum_{k=0}^{n}(F_2-G_2)(k,q,p)$, no qual n é congruente a 11 módulo 12, pois usando a Proposição 2.2.2, estará na mesma classe de equivalência da função de crescimento; logo $w=\dfrac{n-11}{12}$ é um número natural. Usaremos o símbolo $\simeq_r$ quando estivermos considerando equivalências módulo polinômios de grau total estritamente menor que $3M+6-r$. O objetivo por trás de tal notação é o fato de que mostraremos que o comportamento assintótico é de ordem polinomial $3M+6=3(m-1)$ e assim r pode ser visto como o número de somatórios nas variáveis que contribuem nessa ordem (ao usarmos o 3.1.2) que foram omitidos. Considerando $\widetilde{k}=12k$, temos que $\sum_{k=0}^{n}(F_2-G_2)(k,q,p)$ é igual a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{w}\sum_{x=0}^{11}(F_2-G_2)(\widetilde{k}+x,q,p) &= \sum_{k=0}^{w}\sum_{x=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(F_2-G_2)(\widetilde{k}+x+3j,q,p) =\\
&=\sum_{k=0}^{w}\sum_{x=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}\left(\sum_{q}^{\frac{\widetilde{k}+j+1}{3}}F_1(\widetilde{k}+x+3j,q,p)-\sum_{q}^{\frac{\widetilde{k}+j}{3}}G_1(\widetilde{k}+x+3j,q,p)\right)\simeq_0\\
&\simeq_0\sum_{k=0}^{w}\sum_{x=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}\sum_{q}^{\frac{\widetilde{k}}{3}-1}(F_2-G_2)(\widetilde{k}+x+3j,q,p). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Veja que aqui excluímos os casos em que q é igual a $\dfrac{\widetilde{k}}{3},\ldots,\dfrac{\widetilde{k}}{3}+j+1$, pois não dependem

de k, q e p e também nesses casos os graus totais de F_1 e G_1 são menores ou iguais a $3M+2$ (que por sua vez é menor que $3M+6$), como mostra o lema a seguir.

Lema 3.1.1. *Seja* $0 \leqslant a \leqslant j+1$, *então* $\deg F_1\Big(\widetilde{k}+x+3j, \dfrac{\widetilde{k}}{3}+a, p\Big) \leqslant 3M+2$. *O mesmo vale para* G_1.

Demonstração. Considere $b = j+1-a$ e $c = \dfrac{\widetilde{k}}{3}+j+1$, logo

$$\begin{aligned}
&F_1\Big(\widetilde{k}+x+3j, \frac{\widetilde{k}}{3}+a, p\Big) = \\
&= \sum_{p=c+\lceil\frac{x+b}{2}\rceil}^{c+x+2b} f(3c+x, c-b, p)h(c+x, c-b, p) = \\
&= \sum_{p=\lceil\frac{x+b}{2}\rceil}^{x+2b} f(3c+x, c-b, c+p)h(c+x, c-b, c+p) = \\
&= \sum_{p=\lceil\frac{x+b}{2}\rceil}^{x+2b} (x-2b-p+2)^{\underline{2}}(2p-x-b+2)^{\underline{2}}(c-b+M)^{\underline{M}}(c+x+b-p+M+1)^{\underline{M}}\times \\
&\quad \times (c+p+M+2)^{\underline{M}}h(c+x, c-b, c+p).
\end{aligned}$$

Como $(x-2b-p+2)^{\underline{2}}$ e $(2p-x-b+2)^{\underline{2}}$ não dependem de k (ou $\widetilde{k}$) e q; $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant b \leqslant j+1$ e $0 \leqslant j \leqslant 3$, então ao somar em p temos no máximo $x+2b-\lceil\dfrac{x+b}{2}\rceil+1 \leqslant 8$ termos, todos com grau total menor ou igual a $3M$. Analogamente demonstra-se para G_1. □

Como $\widetilde{k} = 12k$, logo $\dfrac{\widetilde{k}}{3}-1$ é congruente a 3 módulo 4. Considerando $Q = 4q$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{\frac{\widetilde{k}}{3}-1}(F_1-G_1)(\widetilde{k}+x+3j, q, p) &= \sum_{q=1}^{k}\sum_{y=-4}^{-1}(F_1-G_1)(\widetilde{k}+x+3j, Q+y, p) = \\
&= \sum_{q=1}^{k}\sum_{y=-4-j}^{-1-j}(F_1-G_1)(\widetilde{k}+x+3j, Q+y+j, p). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Simplificando $(F_1 - G_1)(\widetilde{k} + x + 3j, Q + y + j, p)$ temos que

$$\begin{aligned}
&(F_1 - G_1)(\widetilde{k} + x + 3j, Q + y + j, p) = \\
&\quad = \sum_{p=\frac{\widetilde{k}-Q}{2}+j+\lceil\frac{3+x-y}{2}\rceil}^{\widetilde{k}-2Q+j+3+x-2y} f(\widetilde{k} + x + 3j + 3, Q + y + j, p)h(x + j, y + j, p) - \\
&\quad\quad - \sum_{p=\frac{\widetilde{k}-Q}{2}+j+\lceil\frac{x-y}{2}\rceil}^{\widetilde{k}-2Q+j+x-2y} g(\widetilde{k} + x + 3j, Q + y + j, p)h(x + j, y + j, p) = \\
&\quad = \sum_{p=\frac{\widetilde{k}-Q}{2}+\lceil\frac{3+x-y}{2}\rceil}^{\widetilde{k}-2Q+3+x-2y} f(\widetilde{k} + x + 3j + 3, Q + y + j, p + j)h(x + j, y + j, p + j) - \\
&\quad\quad - \sum_{p=\frac{\widetilde{k}-Q}{2}+\lceil\frac{x-y}{2}\rceil}^{\widetilde{k}-2Q+x-2y} g(\widetilde{k} + x + 3j, Q + y + j, p + j)h(x + j, y + j, p + j) \simeq_2 \\
&\simeq_2 \sum_{p=\frac{\widetilde{k}-Q}{2}+\lceil\frac{x-y}{2}\rceil}^{\widetilde{k}-2Q+x-2y} \big(f(\widetilde{k} + x + 3j + 3, Q + y + j, p + j) - \\
&\quad\quad - g(\widetilde{k} + x + 3j, Q + y + j, p + j)\big)h(x + j, y + j, p + j).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

A última expressão foi obtida adicionando termos nos quais p é igual a $\frac{\widetilde{k}-Q}{2} + \lceil\frac{x-y}{2}\rceil$, $\ldots$, $\frac{\widetilde{k}-Q}{2} + \lceil\frac{3x-y}{2}\rceil - 1$ e removendo aqueles que p era igual a $\widetilde{k} - 2Q + 1 + x - 2y$, $\ldots$, $\widetilde{k} - 2Q + 3 + x - 2y$. Como f e g possuem grau total em $\widetilde{k}$ e Q, que são menores ou iguais a $3M + 2$ sobre esses números, logo tais mudanças não alteram a expressão. Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
f(\widetilde{k} + x + 3j + 3, Q + y + j, p + j) =& (\widetilde{k} - 2Q - p + x - 2y + 5)^{\underline{2}} \times \\
& \times (2p - \widetilde{k} + Q - x + y - 1)^{\underline{2}} (Q + y + j + M)^{\underline{M}} \times \\
& \times (\widetilde{k} - Q - p + +j + 3 + x - y + M + 1)^{\underline{M}} \times \\
& \times (p + j + k + 2)^{\underline{M}}
\end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned}
g(\widetilde{k} + x + 3j, Q + y + j, p + j) =& (\widetilde{k} - 2Q - p + x - 2y + 2)^{\underline{2}} \times \\
& \times (2p - \widetilde{k} + Q - x + y + 2)^{\underline{2}} (Q + y + j + M)^{\underline{M}} \times \\
& \times (\widetilde{k} - Q - p + j + x - y + M + 2)^{\underline{M}} \times \\
& \times (p + j + k + 4)^{\underline{M}}.
\end{aligned}$$

Assim, em f e g os monômios de maior grau total, $3M + 4$, se cancelaram, pois apresentam os termos principais iguais a $(\widetilde{k} - 2Q - p)^2 (2p - \widetilde{k} + Q)^2 Q^M (\widetilde{k} - Q - p) p^M$.

Trabalhando então com módulo polinômios de grau estritamente menor que $3M+3$ temos

$$\begin{aligned} &f(\tilde{k}+x+3j+3, Q+y+j, p+j) - g(\tilde{k}+x+3j, Q+y+j, p+j) \simeq_3 \\ &\simeq_3 2a^2b^2c^Md^Me^M\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{M}{d}-\frac{M}{e}\right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

com $a=\tilde{k}-2Q-p$, $b=2p-\tilde{k}+Q$, $c=Q$, $d=\tilde{k}-Q-p$ e $e=p$.

Como $h(k,q,p)=3+(-1)^{k-q}-(-1)^{p+q}+(-1)^{k-q}$, logo

$$h(x+j,y+j,p+j)=h(x,y,p)=\begin{cases} 4, \text{ se } x \text{ e } y \text{ são simultaneamente pares ou ímpares;} \\ 2+2(-1)^p, \text{ se } x \text{ é par e } y \text{ é ímpar;} \\ 2-2(-1)^p, \text{ se } x \text{ é ímpar e } y \text{ é par.} \end{cases}$$

Com isso, $h(x,y,p)$ não é nulo quando x e y são simultaneamente pares ou ímpares; se p é par e x é par e y é ímpar; e se p é ímpar e x é ímpar e y é par. E em todos casos teremos

$$h(x+j,y+j,p+j)=h(x,y,p)=4. \tag{3.6}$$

Antes de prosseguirmos, relembremos que estamos interessados em descrever $\sum_{k=0}^{n}(F_2-G_2)(k,q,p)$, onde n é congruente a 11 módulo 12. Das Equações 3.2, 3.3, 3.4, 3.6 e mantendo a notação da Equação 3.5 chegamos que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n}(F_2-G_2)(k,q,p) \simeq_3 \\ &\simeq_3 \sum_{k=0}^{w}\sum_{x=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}\sum_{q=1}^{k}\sum_{y=-4-j}^{-1-j}\sum_{p=\frac{\tilde{k}-Q}{2}+\lceil\frac{x-y}{2}\rceil}^{\tilde{k}-2Q+x-2y} 2a^2b^2c^Md^Me^M\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{M}{d}-\frac{M}{e}\right)\times 4 = \\ &= \sum_{k=0}^{w}\sum_{j=0}^{3}\sum_{q=1}^{k}\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=-4-j}^{-1-j}\sum_{p=\frac{\tilde{k}-Q}{2}+\lceil\frac{x-y}{2}\rceil}^{\tilde{k}-2Q+x-2y} 8a^2b^2c^Md^Me^M\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{M}{d}-\frac{M}{e}\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora vamos analisar primeiro a parte $\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=-4-j}^{-1-j}\sum_{p=\frac{\tilde{k}-Q}{2}+\lceil\frac{x-y}{2}\rceil}^{\tilde{k}-2Q+x-2y}$ da soma acima. Para isso, apresentaremos um lema cuja demonstração será omitida, por envolver cálculos fáceis.

Lema 3.1.2. *Considerando os seguintes somatórios como polinômios em n, então o termo líder de*

i) $\sum_{i=1}^{n} i^M$ *é* $\dfrac{n^{M+1}}{M+1}=\int_0^n i^M di$;

ii) $\displaystyle\sum_{i=1,\ i\ par}^{2n} i^M \ é\ \frac{(2n)^{M+1}}{2(M+1)} = \frac{1}{2}\int_0^{2n} i^M di;$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1,\ i\ ímpar}^{2n+1} i^M \ é\ \frac{(2n+1)^{M+1}}{2(M+1)} = \frac{1}{2}\int_0^{2n+1} i^M di.$

Utilizando o lema, transformaremos os somatórios em integrais. Para isso, sejam $b'_{x,y} = x - 2y$ e $a'_{x,y} = \lceil\frac{x-y}{2}\rceil$ e considere $b_{x,y} = \widetilde{k} - 2Q + b'_{x,y}$ e $a_{x,y} = \dfrac{\widetilde{k}-Q}{2} + a'_{x,y}$, no qual estes serão os limites superiores e inferiores das integrais, e também dependem de j, respectivamente. Motivados pelo lema anterior, definimos $\delta(x,y)$ tal que $\displaystyle\sum_{a_{x,y}}^{b_{x,y}} \simeq_2 \delta(x,y)\int_{a_{x,y}}^{b_{x,y}} dp$. Note que no nosso caso, x varia de 2 a 0 e y de $-4-j$ a $-1-j$, logo para as duplas $(0,-4-j)$, $(0,-2-j)$, $(1,-3-j)$, $(1,-1-j)$, $(2,-4-j)$ e $(2,-2-j)$ temos que $\delta(x,y) = \delta_1$ e para as outras seis duplas restantes, teremos que $\delta(x,y) = \delta_2$, com

$$\delta_1(j) = \delta_1 = \begin{cases} 1, \text{ se } j \text{ é par;} \\ \dfrac{1}{2}, \text{ se } j \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad \text{e} \quad \delta_2(j) = \delta_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \text{ se } j \text{ é par;} \\ 1, \text{ se } j \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

e note que $(\delta_1 + \delta_2)(j) = \dfrac{3}{2}$. Assim, definindo $z = a^2b^2c^Md^Me^M$ (como na notação da Equação 3.5), temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=-4-j}^{-1-j}\sum_{p=\frac{\widetilde{k}-Q}{2}+\lceil\frac{x-y}{2}\rceil}^{\widetilde{k}-2Q+x-2y} 8a^2b^2c^Md^Me^M\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{M}{d}-\frac{M}{e}\right) \simeq_2 \\
&\simeq_2 8\Bigg(\delta_1\int_{a_{0,-4-j}}^{b_{0,-4-j}} +\delta_2\int_{a_{1,-4-j}}^{b_{1,-4-j}} +\delta_1\int_{a_{2,-4-j}}^{b_{2,-4-j}} +\delta_2\int_{a_{0,-3-j}}^{b_{0,-3-j}} +\delta_1\int_{a_{1,-3-j}}^{b_{1,-3-j}} + \\
&\quad +\delta_2\int_{a_{2,-3-j}}^{b_{2,-3-j}} +\delta_1\int_{a_{0,-2-j}}^{b_{0,-2-j}} + +\delta_2\int_{a_{1,-2-j}}^{b_{1,-2-j}} +\delta_1\int_{a_{2,-2-j}}^{b_{2,-2-j}} + \\
&\quad +\delta_2\int_{a_{0,-1-j}}^{b_{0,-1-j}} +\delta_1\int_{a_{1,-1-j}}^{b_{1,-1-j}} +\delta_2\int_{a_{2,-1-j}}^{b_{2,-1-j}}\Bigg) z\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{M}{d}-\frac{M}{e}\right)dp \simeq_2 \\
&\simeq_2 8\cdot 6(\delta_1+\delta_2)\int_{\frac{\widetilde{k}-Q}{2}}^{\widetilde{k}-2Q} z\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{M}{d}-\frac{M}{e}\right)dp = \\
&= 9\cdot 8\int_{\frac{\widetilde{k}-Q}{2}}^{\widetilde{k}-2Q} z\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{M}{d}-\frac{M}{e}\right)dp.
\end{aligned}$$

Veja que não colocamos os termos $a'_{x,y}$ e $b'_{x,y}$ nos limites das integrais, pois apenas o coeficiente líder, ou seja, o maior grau total de $\widetilde{k}$ e Q, nos interessa.

Fazemos uma análise parecida com a parte $\displaystyle\sum_{j=0}^{3}\sum_{q=1}^{k}$ da Equação 3.7. Realizando a mudança de variáveis $4q = Q = ku$ e $p = kv$ e lembrando que $\widetilde{k} = 12k$ e $z\left(\dfrac{3}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{M}{d}-\dfrac{M}{e}\right)$

é homogêneo de grau total $3M+3$, chegamos em

$$\sum_{j=0}^{3}\sum_{q=1}^{k} 9\cdot 8\int_{\frac{\tilde{k}-Q}{2}}^{\tilde{k}-2Q} z\left(\frac{3}{a}-\frac{3}{b}+\frac{M}{d}-\frac{M}{e}\right)dp \simeq_1$$
$$\simeq_1 9\cdot 8k^{3M+5}\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} z'\left(\frac{3}{a'}-\frac{3}{b'}+\frac{M}{d'}-\frac{M}{e'}\right)dvdu,$$

com $a'=12-2u-v$, $b'=2v-12+u$, $d'=12-u-v$, $e'=v$ e $z'=(a')^2(b')^2u^M(d')^M(e')^M$. Veremos que tal integral é não negativa.

Primeiramente observe que $\displaystyle\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} z'\left(\frac{M}{d'}-\frac{M}{e'}\right)dvdu$ é não negativo, pois

$$\frac{M}{d'}-\frac{M}{e'}=\frac{M(e'-d')}{d'e'}=\frac{M(v-(12-u-v))}{d'e'}=\frac{M(2v-12+u)}{d'e'}=\frac{Mb'}{d'e'}$$

e também a', b', d' e e', consequentemente z', não são negativos quando u varia de 0 a 4 e v de $\dfrac{12-u}{2}$ a $12-2u$.

Para o restante da integral, veja que

$$\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} z'\left(\frac{3}{a'}-\frac{3}{b'}\right)dvdu=\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} z'\left(\frac{3(b'-a')}{a'b'}\right)dvdu=$$
$$=\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} z'\left(\frac{3(2v-12+u-(12-2u-v))}{a'b'}\right)dvdu=$$
$$=9\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} z'\left(\frac{v+u-8}{a'b'}\right)dvdu=$$
$$=9\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} (a')^2(b')^2u^M(d')^M(e')^M\left(\frac{v+u-8}{a'b'}\right)dvdu=$$
$$=9\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} a'b'u^M(d')^M(e')^M(v+u-8)dvdu\geqslant$$
$$\geqslant 9\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{10-\frac{3u}{2}} a'b'u^M(d')^M(e')^M(v+u-8)dvdu.$$

Esta última integral é igual a

$$\begin{aligned}
&9\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{10-\frac{3u}{2}} a'b'u^M(12-u-v)^Mv^M(v+u-8)dvdu \geqslant\\
\geqslant&9\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{10-\frac{3u}{2}} a'b'u^M2^M4^M(v+u-8)dvdu =\\
=&9\cdot 8^M\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{10-\frac{3u}{2}} a'b'u^M(v+u-8)dvdu =\\
=&9\cdot 8^M\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{10-\frac{3u}{2}} (12-2u-v)(2v-12+u)u^M(v+u-8)dvdu =\\
=&9\cdot 8^M\int_0^4\int_{-2+\frac{u}{2}}^{2-\frac{u}{2}} (4-u-v')(2v'+4-u)u^Mv'dv'du =\\
=&9\cdot 8^M\int_0^4\int_{-2+\frac{u}{2}}^{2-\frac{u}{2}} \left((4-u)^2+(4-u)v'-2(v')^2\right)v'u^Mdv'du =\\
=&9\cdot 8^M\int_0^4\int_{-2+\frac{u}{2}}^{2-\frac{u}{2}} \left((4-u)^2v'+(4-u)(v')^2-2(v')^3\right)u^Mdv'du =\\
=&9\cdot 8^M\int_0^4(4-u)\frac{(4-u)^3}{12}u^Mdu = \frac{3}{4}\cdot 8^M\int_0^4(4-u)^4u^Mdu \geqslant\\
\geqslant&\frac{3}{4}\cdot 8^M\int_1^3(4-u)^4u^Mdu \geqslant \frac{3}{4}\cdot 8^M\int_1^3 1du = \frac{3}{2}\cdot 8^M > 0,
\end{aligned}$$

no qual a mudança de variável é $v' = v-8+u$ e as desigualdades são válidas nos limites superiores e inferiores das respectivas integrais. Portanto,

$$9\cdot 8k^{3M+5}\int_0^4\int_{\frac{12-u}{2}}^{12-2u} z'\left(\frac{3}{a'}-\frac{3}{b'}+\frac{M}{d'}-\frac{M}{e'}\right)dvdu$$

é não negativa e pelo Lema 3.1.2, temos que a contribuição da primeira parcela, a soma S_1, para a função de crescimento é $3M+5+1$. Portanto, a soma S_1 na função de crescimento apresenta um comportamento assintótico como um polinômio w^{3M+6}.

3.2 Demais parcelas

Provaremos que a contribuição das demais parcelas, as somas

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+t)^m}-\frac{1}{(1-t)^m}\right) \quad \text{e} \quad S_3 = mt$$

do Teorema 3.0.1, é (estritamente) menor que $3M+6$.

Escrevendo S_2 como série de potências, usando a Igualdade 3.1, obtemos que

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}\left(\sum_{s\geqslant 0}\binom{s+m-1}{m-1}(-t)^s - \sum_{s\geqslant 0}\binom{s+m-1}{m-1}t^s\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{s\geqslant 0} -(1-(-1)^s)\binom{s+m-1}{m-1}t^s = -\frac{1}{2}\sum_{s\geqslant 0}(1-(-1)^s)\binom{s+m-1}{m-1}t^s = \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{s\geqslant 0} 2\binom{2s+1+m-1}{m-1}t^{2s+1} = -\sum_{s\geqslant 0}\binom{2s+1+m-1}{m-1}t^{2s+1}. \end{aligned}$$

Portanto considerando o somatório em s até $6w+6$ para compararmos com o comportamento da primeira parcela S_1, lembremos que $M = m-3$ e $w = \dfrac{n-11}{12}$ (que é equivalente a $2(6w+6)+1 = n+2$), assim para $-\displaystyle\sum_{s=0}^{6w+6}\binom{2s+1+m-1}{m-1}$ comporta-se assintoticamente como $w^{M+3} = w^m$.

Como anteriormente vimos que em S_1 a função de crescimento se comporta assintoticamente como um polinômio w^{3M+6} e $3M+6$ é maior que $M+3$ para todo M maior que -2, logo S_2 não interfere assintoticamente na função de crescimento.

Claramente $S_3 = mt$ não influencia a ordem da função de crescimento.

Sendo assim, se $g_V(n')$ é a função de crescimento de $F_m(\mathfrak{sl}_2(K))$, logo $g_V(n+3) = g_V(12w+11+3) = g_V(12w+14)$ será um polinômio de grau $3M+6$ em w, com coeficiente líder positivo. Além disso g_V é não-decrescente e positiva, portanto pela Proposição 2.2.2 $g_V(w)$ e $f_V(w) = g_V(12w+14)$ apresentam o mesmo comportamento assintótico. Então $\limsup_{w\to\infty}(\log_w g_v(w)) = \limsup_{w\to\infty}(\log_w f_v(w)) = 3M+6 = 3m-9+6 = 3(m-1)$.

Com tal discussão, Machado e Kochloukov em [17], chegam no seguinte teorema.

Teorema 3.2.1. *Seja K um corpo de característica 0. A GK-dimensão da álgebra relativamente livre de posto m na variedade de álgebras de Lie gerada por $\mathfrak{sl}_2$ é igual a*

$$\mathrm{GKdim}(F_m(\mathfrak{sl}_2(K))) = 3(m-1).$$

Veja que ao longo do capítulo utilizamos a expressão θ do Teorema 3.0.1 e esta é válida apenas quando m é maior ou igual a 3. Porém Bahturin em [1] chegou a $\mathrm{GKdim}(F_2(\mathfrak{sl}_2(K))) = 3 = 3(2-1)$. No caso $m = 1$, temos que $F_1(\mathfrak{sl}_2(K))$ é de dimensão 1 e pela Proposição 2.2.9 temos que $\mathrm{GKdim}(F_1(\mathfrak{sl}_2(K))) = 0 = 3(1-1)$.

O teorema acima foi deduzido assumindo-se o corpo base de característica 0. Ressaltamos que as identidades polinomiais da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(K)$ e da álgebra associativa $M_2(K)$ foram descritas por Razmyslov em 1973; ele obteve conjuntos de geradores finitos para essas duas álgebras (três identidades no caso da primeira, e 9 no caso da segunda). Mais tarde Drensky, em 1981, analisando as componentes multilineares das respectivas álgebras relativamente livres, mostrou que no caso de $\mathfrak{sl}_2(K)$ as identidades são

consequências de dois polinômios de grau 5. Já no caso de $M_2(K)$, as identidades seguem do polinômio standard s_4 e da identidade de Hall, $[[x_1, x_2]^2, x_3]$. Todos esses teoremas foram obtidos assumindo-se o corpo base de característica 0.

Vasilovsky em [21], descreveu as identidades de $\mathfrak{sl}_2(K)$ em característica positiva; ele mostrou que elas são consequências de um polinômio de grau 5. Ele também obteve uma base para a álgebra relativamente livre $F(\mathfrak{sl}_2(K))$ com K sendo infinito e tendo característica diferente de 2. (Observe que se a característica do corpo é 2, a álgebra $\mathfrak{sl}_2(K)$ é nilpotente como álgebra de Lie, e portanto não é muito "interessante"do ponto de vista das suas identidades polinomiais.) Além disso tal base não depende da característica e é homogênea. Portanto a série de Hilbert para esse caso será igual ao caso em que a característica é zero. Portanto, vale o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2. *Seja K um corpo infinito de característica diferente de 2. A GK-dimensão da álgebra relativamente livre de posto m na variedade de álgebras de Lie gerada por $\mathfrak{sl}_2$ é igual a*

$$\mathrm{GKdim}(F_m(\mathfrak{sl}_2(K))) = 3(m-1).$$

Para concluir, recordamos que em [8], Drensky, Kochloukov e Machado abordaram o problema de encontrar a dimensão de Gelfand e Kirillov da álgebra relativamente livre de $\mathfrak{sl}_2(K)$, usando métodos da teoria dos invariantes e os resultados já comentados de Procesi sobre a GK dimensão das álgebras das matrizes genéricas. Tudo isso foi combinado com os resultados de Razmyslov sobre as chamadas identidades fracas. O argumento foi baseado em propriedades da álgebra derivada da álgebra relativamente livre de $\mathfrak{sl}_2(K)$. Como as demonstrações em [8] envolvem métodos e teorias que não foram desenvolvidos nesta dissertação, não iremos nos aprofundar nesta direção.

Referências

[1] Y. A. Bahturin. Two-variable identities in the Lie Algebra sl(2,k). *Trudy Semara Imeni Petrovskogo*, 5:205–208, 1979. English Translation: Comtemp. Soviet MAth., Petrovskii Seminar, Topics in Modern Math., Plenum, New York-London, 5:259-263, 1985.

[2] A. Berele. Homogeneous polynomial identities. *Israel Journal of Mathematics*, 42:258–272, 1982.

[3] A. Berele. Generic verbally prime pi-algebras and their gk-dimensions. *Communications in Algebra*, 21(5):1487–1504, 1993.

[4] R. P. Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Annals of Mathematics*, 51(1):161–166, 1950.

[5] V. Drensky. A minimal basis of identities for a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0. *Algebra and Logic*, 20(3):188–194, 1981.

[6] V. Drensky. Codimensions of T-Ideals and Hilbert Series. *Journal of Algebra*, 91:1–17, 1984.

[7] V. Drensky. *Free algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra.* Springer, Singapore, 1999.

[8] V. Drensky; P. Kochloukov; G. G. Machado. GK-dimension of 2×2 generic Lie matrices. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 89(1-2):125–135, 2016.

[9] A. Giambruno; M. Zaicev. On codimension growth of finitely generated associative algebras. *Advances in Mathematics*, 140:145–155, 1998.

[10] A. Giambruno; M. Zaicev. Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate. *Advances in Mathematics*, 142(2):221–243, 1999.

[11] A. Giambruno; M. Zaicev. *Polynomial identities and asymptotic methdos*, volume 122. Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, R. I., 2005.

[12] I. Kaplansky. Rings with a polynomial identity. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54(6):575–580, 1948.

[13] A. R. Kemer. *Ideals of identities of associative algebras, Translations of Mathematical Monographs*, volume 87. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1991.

[14] G. Krause; T. H. Lenagan. *Growth of Algebras and Gefand-Kirillov Dimension, Graduate Studies in Mathematics*, volume 22. American Mathematical Society, Providence, R. I., 2000.

[15] V. N. Latyshev. On Regev's theorem on identities in a tensor product of PI-algebras. *Uspekhi Matematicheskih Nauk*, 27(1):213–214, 1972.

[16] G. G. Machado. Dimensão de Gelfand-kirillov em Álgebras Relativamente Livres. *Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas*, 2014.

[17] G. G. Machado; P. Kochloukov. Gk dimension of relatively free algebra for sl_2. *Monatshefte für Mathematik*, 175:543–553, 2014.

[18] V. T. Markov. The Gelfand-Kirillov dimension: nilpotency, representability, non-matrix varieties. *Siberian school on varieties of algebraic systems*, pages 43–45, 1988. Abstracts.

[19] C. Procesi. *Rings with polynomial identities*. Marcel Dekker, New York, 1973.

[20] L. Rosset. A new proof of Amitsur-Levitzki identity. *Israel Journal of Mathematics*, 23:187–188, 1976.

[21] S. Y. Vasilovsky. The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field. *Algebra i Logika*, 28(5):205–208, 1989. English Translation: Algebra Logic 28(5):355-369, 1989.