UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

PEHUEN HERNANDEZ ALVAREZ

Sobre as Equações de Euler em Espaços de Besov

Campinas

2022

Pehuen Hernandez Alvarez

Sobre as Equações de Euler em Espaços de Besov

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Pehuen Hernandez Alvarez e orientado pelo Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

H43s Hernandez Alvarez, Pehuen, 1995-
Sobre as equações de Euler em espaços de Besov / Pehuen Hernandez Alvarez. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações de Euler. 2. Existência de solução (Equações diferenciais parciais). 3. Unicidade de solução (Equações diferenciais parciais). 4. Critério de blow-up. 5. Espaços de Besov. I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: On the Euler equations in Besov spaces
Palavras-chave em inglês:
Euler equations
Existence of solution (Partial differential equations)
Uniqueness of solution (Partial differential equations)
Blow-up criterion
Besov spaces
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]
Giuliano Angelo Zugliani
Bruno Luis de Andrade Santos
Data de defesa: 12-08-2022
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-6981-5951
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5665155582913630

Dissertação de Mestrado defendida em 12 de agosto de 2022 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). GIULIANO ANGELO ZUGLIANI

Prof(a). Dr(a). BRUNO LUIS DE ANDRADE SANTOS

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos momentos em que a maior motivação são o amor e os sonhos.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente à minha família por todo o apoio. Em especial à minha mãe Gabriela, por me dar todo o carinho que existe nesta vida; ao meu irmão Lisandro, por todos os lindos momentos juntos e por sempre estar ao meu lado para o que precisar; e à minha irmã Catalina, por ser meu exemplo de força e superação.

Gostaria também de agradecer à Suellem por ser sempre meu porto seguro nos momentos mais difíceis e pelo abraço em que sempre gostaria de estar.

Às amizades que me acompanharam durante a graduação e o mestrado. Sou agraciado por ter amigos tão especiais.

Agradeço a todos os professores com os que tive contato durante o mestrado, em especial à Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara por toda a disponibilidade.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira. Desde o início desta jornada se dispôs a me ajudar e apoiar nas mais diversas situações.

Por todo o conhecimento e as oportunidades que me proporcionou, sou muito grato à Unicamp.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Where do I heal when the river runs dry?
How do I sweeten the bitter?
A word decides our fate
And our silence condemns
Would you give us what is left of your time?
Give yourself up for the others?
The choices are our own
But the failure we'll share"
(Soen - Illusion, 2021)

Resumo

Nesta dissertação de Mestrado abordaremos as equações de Euler n-dimensionais com condição inicial v_0, para $n \geqslant 2$. Estas modelam fluxos de fluidos incompressíveis e invíscidos. Estudaremos uma abordagem feita sobre os espaços de Besov não-homogêneos $B^s_{p,q}$, obtendo resultados no espaço X^s_T das funções contínuas Besov valoradas. Mostraremos critérios na escolha dos valores p, q, s e de magnitude temporal $T > 0$ sob quais é possível demonstrar a existência e unicidade da solução das equações de Euler, além de condições para o blow-up destas soluções. Como consequência, será possível demonstrar a existência e unicidade globalmente no tempo das soluções das equações de Euler no caso $n = 2$, com condição inicial v_0 satisfazendo $\operatorname{div} v_0 = 0$. Tais resultados são obtidos via um método iterativo, estimativas do comutador, do produto, fluxos que preservam volume, entre outros ingredientes, no contexto dos espaços de Besov. Este trabalho é baseado no artigo [7].

Palavras-chave: Equações de Euler; Existência; Unicidade; Blow-up; Espaços de Besov.

Abstract

In this Master dissertation we consider the n-dimensional Euler equations with initial condition v_0, for $n \geqslant 2$. These equations model incompressible and inviscid fluid flows. We study an approach in non-homogeneous Besov spaces $B^s_{p,q}$, obtaining results in the space X^s_T of the time-continuous functions valued in suitable Besov spaces. Conditions on the indexes p, q, s and time $T > 0$ are given in order to obtain the existence and uniqueness of solutions, as well as conditions for the blow-up of solutions. As a consequence, it is possible to show the global-in-time existence and uniqueness of solutions for the Euler equations in the case $n = 2$, with initial condition v_0 satisfying $\operatorname{div} v_0 = 0$. Such results are obtained via an iterative method, commutator and product estimates, volume-preserving flow map, among other ingredients, in the context of Besov spaces. This work is based on the article [7].

Keywords: Euler Equations; Existence; Uniqueness; Blow-up; Besov Spaces.

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}_0$	Conjunto dos números naturais unido com o número 0
∂_i	Derivada parcial com relação à i-ésima coordenada
α	Multiíndice dado em função das suas coordenadas por $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$
$\lvert\alpha\rvert$	Norma do multiíndice α, dada pela soma $\sum_{i=1}^{n} \lvert\alpha_i\rvert$
$B(x, R)$	Bola aberta de centro x e raio $R > 0$ no espaço $\mathbb{R}^n$
$B[x, R]$	Bola fechada de centro x e raio $R > 0$ no espaço $\mathbb{R}^n$
∞	Infinito
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Espaço de Schwartz
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	Espaço das Distribuições Temperadas
$\dot{B}^s_{p,q}$	Espaços de Besov homogêneos
$B^s_{p,q}$	Espaços de Besov não homogêneos

Sumário

Introdução

Neste trabalho estamos interessados nas equações de Euler. Estas descrevem a evolução da velocidade e da pressão de fluidos invíscidos preenchendo o espaço $\mathbb{R}^n$, sendo que no nosso estudo consideramos o caso em que temos um fluxo incompressível. Estas são um sistema de equações e as representaremos como

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$\text{div } v(t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{2}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é a variável espacial, $t \in (0,\infty)$ é a variável temporal, $p(x,t)$ é a pressão exercida sobre o fluído e $v(x,t)$ é a velocidade do fluído no instante t e localização x. O termo $\partial_t v$ na equação (1) representa a aceleração do fluído. Já $(v \cdot \nabla)v$ é chamado de convecção e representa o termo não linear nas equações de Euler. O campo ∇p é chamado de fluxo da pressão e descreve a direção na qual a pressão aumenta mais rapidamente. A condição div $v(t) = 0$ presente na equação (2) denota a incompressibilidade do fluído, enquanto a função v_0 na equação (3) é a condição inicial da velocidade. Em [8] é apresentada uma construção que leva ao sistema (1)-(3) a partir do fluxo de uma partícula de um fluido.

Em relação à existência e unicidade de soluções das equações de Euler é possível fazer uma análise local no tempo, ou seja, limitar a variação de t para intervalos do tipo $(0,T]$, com $T > 0$ conveniente. Em 1970, Kato mostrou em [16] a existência e unicidade local no tempo de solução no espaço $C([0,T], H^m(\mathbb{R}^3))$, ou seja, funções contínuas no tempo com valores no espaço de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^3)$. Posteriormente, Temam levou, em [25], tal resultado para um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ao considerar o espaço $H^m(\Omega)$ e o estendeu para o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ em [26]. Destacamos também o realizado por Kato e Ponce em [17], onde foi mostrado que quando $s > \dfrac{n}{p} + 1$ é possível garantir a existência local no tempo no espaço de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = (1-\Delta)^{-\frac{s}{2}} L^p(\mathbb{R}^n)$.

Estudaremos uma abordagem das equações de Euler considerando os espaços de Besov não-homogêneos $B^s_{p,q}$. Segundo [27], estes espaços são atribuídos a J. Peetre (veja [22]) e formam um subespaço do espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'$. A caracterização de elementos $v \in B^s_{p,q}$ se dá por meio da finitude de uma certa quantidade $\|v\|_{B^s_{p,q}}$. A grosso modo, $\|v\|_{B^s_{p,q}}$ fornece uma medida ponderada das contribuições de localizações em frequência de v, via os parâmetros de regularidade s, de integrabilidade p e de aditividade q. Tal quantidade é de fato uma norma nos espaços de Besov e induz uma topologia na qual este é um espaço de Banach.

Uma análise importante no contexto das soluções para certas equações em espaços de Besov são os critérios de blow-up, pois via eles pode-se saber se soluções, satisfazendo certas condições, são globais ou não. De fato, a natureza de blow-up neste caso refere-se à existência de um instante t_0 onde, essencialmente, a norma no espaço de Besov da solução tende a infinito quando o tempo t se aproxima de t_0. Como a caracterização dos elementos do espaço de Besov se dá por meio da limitação de tal norma, então dada nossa equação, algum tipo de caracterização do blow-up via controle de normas adequadas da solução garante a sua existência em todo instante. Apresentamos, como exemplo, as condições dadas em [3] por Beale, Kato e Madja. Estas garantem que tendo um dado inicial $v_0 \in H^m(\mathbb{R}^n)$, sendo $\omega = \operatorname{curl} v$ a vorticidade do fluxo, temos que

$$\limsup_{t \nearrow T} \|v(t)\|_{H^m} = \infty \iff \int_0^T \|\omega(t)\|_{L^\infty} \, \mathrm{d}t = \infty.$$

Os resultados apresentados neste trabalho serão também sobre existência e unicidade de soluções para as equações de Euler, além de critérios para o blow-up destas soluções. Dedicamos o Capítulo 1 à apresentação de elementos de natureza preliminar que serão utilizados durante o texto. Definiremos o espaço $\mathcal{S}$ das funções de Schwartz assim como as ferramentas relacionadas a Análise de Fourier em tal espaço, tais como convolução e transformada de Fourier. Será portanto assumido o conhecimento de certos tópicos de Análise Funcional e de Teoria da Medida; para mais detalhes sobre estes temas, recomendam-se [2], [13]. Abordaremos posteriormente o espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'$, no qual poderemos generalizar alguns dos conceitos vistos no contexto do espaço $\mathcal{S}$. Passamos a enunciar o Teorema de Mihlin relacionado a *multipliers* e a noção de Operadores Integrais Singulares, dentre os quais destacamos a transformada de Riesz. Completamos o capítulo definindo os espaços de Besov homogêneos $\dot{B}^s_{p,q}$ com $s \in \mathbb{R}$ e os espaços de Besov não-homogêneos $B^s_{p,q}$ com $s > 0$, além de algumas propriedades importantes destes espaços.

O objetivo do Capítulo 2 consiste em exibirmos os resultados do artigo [7] de Chae, que foi a principal referência deste trabalho. Demonstraremos a existência e unicidade local no tempo de soluções para o problema (1)-(3) no contexto das funções contínuas no tempo Besov valoradas, mais particularmente no espaço $C([0,T]; B^s_{p,q})$, com certas condições sobre os parâmetros s, p, q. Mostraremos também hipóteses sob as quais é possível garantir caracterizações, dadas em função da vorticidade ω do fluxo, para o blow-up das soluções para algum tempo $T_1 > T$. Este critério de blow-up é para o fluxo na norma do espaço de Besov $B^s_{p,q}$ com $s > \dfrac{n}{p} + 1$, $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$, chamado de caso super crítico; e para o fluxo em $B^{\frac{n}{p}+1}_{p,1}$, com $p \in (1, \infty)$, chamado de caso crítico. Concluímos o capítulo apresentando um corolário da existência e unicidade de soluções e do caso super crítico para o blow-up, que garante a existência e unicidade de soluções das equações de Euler no espaço $C([0, \infty), B^s_{p,q})$ quando $n = 2$, $s > \dfrac{n}{2} + 1$, $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$; em outras palavras, obtêm-se uma solução global no tempo, o que pode ser lido como a persistência global da regularidade inicial.

O Capítulo 3 está reservado às considerações finais, onde comentamos sobre resultados e trabalhos com certo grau de proximidade com o apresentado nesta dissertação e que, assim como o artigo [7], servem como motivação e ponto de partida para estudos futuros.

1 Preliminares

Este capítulo tem como objetivo principal definir e enunciar propriedades do espaço $\mathcal{S}'$ das distribuições temperadas, dos Operadores Integrais Singulares e definir os Espaços de Besov denotados por $B^s_{p,q}$. Para isto ser feito apropriadamente, será necessário fazer certa construção de elementos que formam a base dos conceitos citados. Dividiremos assim o capítulo em cinco seções, encarregadas de apresentar tais elementos. Na primeira seção apresentaremos o espaço $\mathcal{S}$ das funções de Schwartz. Iremos também apresentar as definições de convolução entre funções de Schwartz e de transformada de Fourier assim como resultados importantes para nosso trabalho. Passamos a definir o espaço das distribuições temperadas denotado por $\mathcal{S}'$, definiremos a noção de convolução e transformada de Fourier também nesse contexto, assim como será apresentada a noção na qual consideramos a norma L^p de uma distribuição temperada. Dedicamos a terceira seção à definição do espaço dos multiplicadores de Fourier, do inglês *Fourier multipliers*, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ e a enunciar o Teorema de *Multipliers* de Mihlin. Na quarta seção poderemos então definir o conceito de Operadores Integrais Singulares e de transformada de Riesz. Concluímos o capítulo definindo os espaços de Besov $B^s_{p,q}$ e mostrando propriedades relacionadas que serão interessantes para o presente trabalho.

1.1 Espaço das Funções de Schwartz

Dedicamos esta seção à apresentação do espaço das funções de Schwartz e das propriedades de tal espaço que foram utilizadas no decorrer do trabalho. Usamos como referência [13] a menos de onde mencionado.

Inicialmente fixaremos certa notação para derivadas.

Definição 1.1.1. *Seja α um multiíndice. Dada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definimos*

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\dots\partial_n^{\alpha_n} f.$$

Considerando agora $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, pomos $x^\alpha := \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$.

O primeiro dos elementos a serem definidos serão as funções de Schwartz ou funções teste. Estas são funções definidas em $\mathbb{R}^n$, infinitamente diferenciáveis e estas, assim como suas derivadas parciais se anulam no infinito mais rapidamente que qualquer potência de $|x|$. Definimos isto formalmente da seguinte maneira.

Definição 1.1.2 (Espaço das Funções de Schwartz)**.** *Dados um multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $N \in \mathbb{Z}$ e uma função f, escrevemos*

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty \mid \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty, \quad \textit{para cada} \quad N,\, \alpha\},$$

onde

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|.$$

Munimos $\mathcal{S}$ com a topologia mais fraca que torna as funções $\| \cdot \|_{(N,\alpha)}$ contínuas para cada α, N.

Será usada a notação L^p como menção ao espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$, salvo quando destacado que o domínio não é mais $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.1.3. *Conforme [24, p. 44], temos que $\mathcal{S} \subset L^p$. Se adicionalmente $p \in [1, \infty)$, é possível mostrar que $\mathcal{S}$ é denso em L^p (ver [13, p. 237]).*

Com esta consideração alguns dos resultados deste capítulo serão dados em termos dos espaços L^p, mas podem ser entendidos ou mesmo mostrados no contexto do espaço $\mathcal{S}$.

Observação 1.1.4. *Consideraremos, em geral, funções $f = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ de tal forma que $f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ e $t \in (0, \infty)$. Escreveremos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mesmo f tendo imagem em $\mathbb{R}^n$, ficando subentendida a definição de f ao saber o seu contradomínio.*

No mesmo sentido da observação acima iremos determinar como consideraremos a norma L^p de funções com contradomínio em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.5. *Dada $f = (f_1, ..., f_n) \in \mathcal{S}$ definimos*

$$|f| = \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quando $1 \leqslant p < \infty$ pomos

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Contudo, de maneira análoga à demonstração da equivalência de normas em $\mathbb{R}^n$ temos que

$$\|f\|_{L^p} \sim \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p}.$$

Por outro lado, definimos

$$\|f\|_{L^\infty} = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^\infty}.$$

A seguir enunciaremos propriedades úteis referentes aos espaços L^p e l^p.

Lema 1.1.6 (Desigualdade de Minkowski em L^p). *Considerando $p \in [1, \infty)$, $f,\ g \in L^p$, temos que*

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Tal resultado pode ser adaptado para o contexto das sequências em l^p ao considerar, para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a função $f = x_n\chi_{[n,n+1]}$, com $n \in \mathbb{N}$. Obtêm-se dessa maneira o seguinte:

Corolário 1.1.7 (Desigualdade de Minkowski em l^p). *Considerando duas sequências $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, temos que*

$$\|x + y\|_{l^p} \leqslant \|x\|_{l^p} + \|y\|_{l^p}.$$

Duas propriedades fundamentais para a realização de estimativas nos espaços L^p são a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Hölder generalizada. Com estas podemos, sob certas circunstâncias, majorar o cálculo da norma do produto de duas funções, pelo produto das normas de cada uma destas funções.

Lema 1.1.8 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $p \in (1, \infty)$ e p, q conjugados, ou seja, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $fg \in L^1$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}\|f\|_{L^q},$$

Lema 1.1.9 (Desigualdade de Hölder Generalizada). *Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Então $fg \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e $\|fg\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.*

Demonstração. Como $\overline{p} = \dfrac{p}{r} > 1$, $\overline{q} = \dfrac{q}{r} > 1$ e $\dfrac{1}{\overline{p}} + \dfrac{1}{\overline{q}} = 1$, da desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\|fg\|^r_{L^r} = \|f^r g^r\|_{L^1} \leqslant \|f^r\|_{L^{\overline{p}}}\|g^r\|_{L^{\overline{q}}} = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} < \infty,$$

o que conclui a demonstração.

□

Mais adiante, definiremos um certo tipo de operador no espaço $\mathcal{S}$ que age realizando a operação convolução entre duas funções em $\mathcal{S}$. Definimos para tanto a convolução da seguinte maneira.

Definição 1.1.10 (Convolução). *Dadas $f,\ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a convolução $f * g$ entre f e g é dada pela função*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\, dy.$$

A proposição a seguir mostra que no nosso contexto, a saber o espaço das funções de Schwartz, a convolução está bem definida. Tal resultado pode ser encontrado em [13, p. 233] e [14, p. 107].

Proposição 1.1.11. *Considerando* f, $g \in \mathcal{S}$, *temos que* $f * g \in \mathcal{S}$.

Iremos agora enunciar certas propriedades relacionadas ao conceito de convolução no espaço das funções de Schwartz $\mathcal{S}$.

Proposição 1.1.12. *Sejam* f, g, $h \in L^1$ *e* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Então*

(1) $f * g = g * f$;

(2) $(f * g) * h = f * (g * h)$;

(3) $\mathrm{supp}\,(f * g) \subset \mathrm{supp}\, f + \mathrm{supp}\, g := \{x + y \,|\, x \in \mathrm{supp}\, f,\ y \in \mathrm{supp}\, f\}$;

(4) *Supondo agora que* $f, g \in \mathcal{S}$, *temos que* $\partial_i g$ *é limitado e* $\partial_i(f * g) = f * \partial_i g$.

Demonstrações de tais propriedades podem ser vistas em [13, p. 231-233] e [14, p. 107].

As próximas duas proposições são as chamadas desigualdade de Young e desigualdade de Young generalizada, as quais nos mostram o bom comportamento da convolução em L^p. Estas, de fato, cumprem um papel muito importante ao estabelecer estimativas pois permitem separar, sob certas condições, a norma de uma convolução entre duas funções em um produto das normas de cada umas destas funções. Seguimos o realizado em [13, p. 232].

Proposição 1.1.13 (Desigualdade de Young)**.** *Se* $f \in L^1$ *e* $g \in L^p$, *com* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *então* $(f * g)(x)$ *existe para quase todo* x, $f * g \in L^p$ *e* $\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.

Demonstração. Definindo

$$\varphi(x, t) = |f(t)g(x - t)|,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|f * g(x)\right|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x - t)\,\mathrm{d}t\right|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)g(x - t)|\,\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, t)\,\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Então pela desigualdade de Minkowski para integrais (Proposição A.0.1, p. 83)

$$\begin{aligned}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|f * g(x)\right|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(x,t)]^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)g(x-t)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-t)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \|g\|_{L^p} \,\mathrm{d}t \\ &= \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p} < \infty,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

□

Proposição 1.1.14 (Desigualdade de Young Generalizada)**.** *Se p, q, $r \in [1, \infty]$ satisfazem a igualdade*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1, \tag{1.1}$$

e $f \in L^p, g \in L^q$, então $f * g \in L^r$ e podemos utilizar a desigualdade

$$\|f * g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Lema 1.1.15. *Sejam $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = a.$$

Considerando para cada $t > 0$ a função φ_t de tal forma que

$$\varphi_t(x) = t^{-n} \varphi(t^{-1}x), \tag{1.2}$$

temos que

$$\lim_{t \to 0} f * \varphi_t = a\varphi, \tag{1.3}$$

na norma de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Em conformidade com [7, p. 341], definimos a transformada de Fourier a seguir.

Definição 1.1.16 (Transformada de Fourier)**.** *Dada $f \in \mathcal{S}$ definimos a transformada de Fourier $\hat{f}$ de tal maneira que*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi}\, dx.$$

Consideramos também a transformada inversa de Fourier de f, denotada por $\check{f}$, como sendo

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix\xi}\, dx.$$

Proposição 1.1.17. *A transformada de Fourier e a transformada inversa de Fourier são aplicações contínuas de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.*

Tal resultado é apresentado em [24, p 66].

Lema 1.1.18. *Sejam $f,\ g \in \mathcal{S}$. Definimos $\tilde{f} \in \mathcal{S}$ de tal forma que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f}(x) = f(-x)$. Então*

$$\widehat{(\tilde{\varphi})} = \check{\varphi}.$$

Isto segue da mudança de variáveis sob o sinal de integração.

Demonstraremos a seguir propriedades importantes relativas à transformada de Fourier nos espaços L^1. Dados $f \in L^1$, $y \in \mathbb{R}^n$ denotamos por $f^y \in L^1$ a função que cada $x \in \mathbb{R}^n$ associa

$$f^y(x) = f(x-y).$$

Proposição 1.1.19. *Considerando $f, g \in L^1$ e $j \in \{1, ..., n\}$, as seguintes propriedades são válidas:*

(1) *Temos que*

$$\widehat{(f^y)}(\xi) = e^{-iy\xi}\hat{f}(\xi).$$

Além disso, considerando $h(x) = e^{ix\eta}f(x)$, para cada $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{h}(\xi) = (\hat{f})^{\eta}(\xi);$$

(2) $\widehat{(f * g)}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\hat{f}\cdot\hat{g})(\xi)$;

(3) *Se adicionalmente tivermos $xf \in L^1$, então*

$$\partial_j(\hat{f})(\xi) = \widehat{\big(-ix_j f(x)\big)}(\xi);$$

(4) *Se $f \in C^1$ além de que $\partial_j f \in L^1$, garante-se que*

$$\widehat{(\partial_j f)}(\xi) = i\xi_j\hat{f}(\xi).$$

Demonstração. **(1)** Veja que

$$\begin{aligned}\widehat{(f^y)}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}f^y(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-iy\xi}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\xi}f(x-y)\,\mathrm{d}x\\ &= e^{-iy\xi}\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Similarmente, obtemos que $\hat{h}(\xi) = (\hat{f})^{\eta}(\xi)$.

(2) Por meio do Teorema de Fubini (ver [13, p. 232]) segue que

$$\begin{aligned}(f * g)\widehat{\ }(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)e^{-ix\xi}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-iy\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-iy\xi}\, \mathrm{d}y \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\hat{f} \cdot \hat{g})(\xi).\end{aligned}$$

(3) Neste caso temos

$$\begin{aligned}\partial_j \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_j(e^{-ix\xi})\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \big(-ixf(x)\big)\partial_j(e^{-ix\xi})\, \mathrm{d}x \\ &= \big(-ix_jf(x)\big)\widehat{\ }(\xi).\end{aligned}$$

(4) Como $f \in L^1$ temos que quando $|\xi| \to \infty$, $f(x) \to 0$, desta forma pela fórmula de integração por partes

$$\begin{aligned}(\partial_j f)\widehat{\ }(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)e^{-ix\xi}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi_j)f(x)e^{-ix\xi}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{i\xi_j}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}\, \mathrm{d}x = i\xi_j\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

□

Observação 1.1.20. *De maneira similar ao realizado no item (2), é possível demonstrar que*

$$(f * g)\check{\ }(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \check{f}(\xi)\check{g}(\xi).$$

Como consequência disto, temos que

$$(f \cdot g)\widehat{\ } = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f} * \hat{g}.$$

Proposição 1.1.21. *Supondo que $a > 0$, quando $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ temos que*

$$\hat{f}(\xi) = a^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2a(2\pi)^{2n}}\right).$$

Para a demonstração de tal proposição é necessário fazer uma pequena alteração nas contas feitas em [13, p. 242], devido à constante $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ na definição adotada para a transformada de Fourier.

Dada uma função $f \in L^1$ não é imediata a relação entre a definição e a denotação dados à transformada inversa de Fourier. A próxima proposição mostra que de fato essa nomenclatura é coerente. Para a demonstração disto usamos o Lema 1.1.15 e as Proposições 1.1.19, 1.1.21 no nosso contexto e fazemos as devidas alterações seguindo o realizado em [13, p. 224].

Proposição 1.1.22 (Teorema da Inversão de Fourier)**.** *Se $f \in L^1$ e $\hat{f} \in L^1$, então*

$$(\hat{f})\check{} = f = (\check{f})\hat{}, \quad q.t.p..$$

Observação 1.1.23. *Quando $f \in \mathcal{S}$, a igualdade acima vale para todo ponto. De fato, temos que $f \in L^1$ e $\hat{f} \in L^1$, logo as igualdades $(\hat{f})\check{} = f = (\check{f})\hat{}$ valem q.t.p. pela proposição acima. Adicionalmente f, $(\hat{f})\check{}$, e $(\check{f})\hat{}$ são contínuas, então $(\hat{f})\check{} = f = (\check{f})\hat{}$ em todo ponto. Assim, em virtude da Proposição 1.1.17, obtemos que a transformada de Fourier $\hat{\cdot} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ é um homeomorfismo.*

1.2 Espaço das Distribuições Temperadas

A noção de distribuições em geral busca de certa maneira generalizar o conceito de função. Veremos como isto é feito no nosso contexto, a saber, tendo como base o espaço das funções de Schwartz. As seguintes definições estão presentes em [13, p. 258-260].

Definição 1.2.1 (Espaço das Distribuições Temperadas)**.** *Denotamos por $\mathcal{S}'$ e chamamos de espaço das distribuições temperadas o espaço dual de $\mathcal{S}$. Em outras palavras,*

$$\mathcal{S}' := \{F : \mathcal{S} \to \mathbb{C} \mid F \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Munimos $\mathcal{S}'$ com a topologia fraca-$*$. Dados $F \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$ escrevemos indistintamente $F(\varphi)$ ou $\langle F, \varphi \rangle$.

Podemos definir a convolução entre um elemento em $\mathcal{S}'$ e um elemento em $\mathcal{S}$ assim como definir a transformada de Fourier para o contexto do espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'$. Faremos isso a seguir levando em conta [13, p. 259-260]. Como referência também consideramos [24, p. 62].

Definição 1.2.2. *Sejam $f \in \mathcal{S}'$ e $\varphi \in \mathcal{S}$.*

(1) *Definimos o produto $f\varphi \in \mathcal{S}'$ por*

$$\langle f\varphi, \psi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle, \ \forall \psi \in \mathcal{S}, \tag{1.4}$$

(2) *Definimos a convolução $f * \varphi$ entre f e φ como*

$$\langle f * \varphi, \psi \rangle = \langle f, \psi * \tilde{\varphi} \rangle, \ \forall \psi \in \mathcal{S}, \tag{1.5}$$

onde para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$;

(3) *Em decorrência da integração por partes, considerando um multiíndice α, definimos*

$$\langle \partial^\alpha f, \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \psi \rangle, \ \forall \psi \in \mathcal{S}, \tag{1.6}$$

(4) A transformada de Fourier $\hat{f}$ de f é considerada de tal forma que

$$\langle \hat{f}, \psi \rangle = \langle f, \hat{\psi} \rangle, \ \forall \psi \in \mathcal{S}. \tag{1.7}$$

Além disso, pomos $\check{f} = (\hat{f})\tilde{}$.

Veja que, com efeito, temos por meio do Lema 1.1.18, p. 20 que

$$\langle (\hat{f})\check{}, \varphi \rangle = \left\langle \left[(\hat{f})\widehat{} \right]\tilde{}, \varphi \right\rangle = \left\langle \hat{f} \,, (\tilde{\varphi})\widehat{} \right\rangle = \langle \hat{f} \,, \check{\varphi} \rangle = \langle f \,, \varphi \rangle, \tag{1.8}$$

consequentemente $(\hat{f})\check{} = f$.

Do fato de que em (1.4) temos que $\psi\varphi \in \mathcal{S}$, a continuidade do operador $f\varphi$ é induzida pelo segundo membro de (1.4). Portanto, $f\varphi$ está bem definido como sendo uma distribuição temperada. Um raciocínio análogo nos leva às mesmas conclusões sobre os itens (1.5), (1.6), (1.7) da definição acima.

Proposição 1.2.3. *Considerando $f \in \mathcal{S}'$ e $g \in \mathcal{S}$, temos que*

$$(f * g)\widehat{} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Demonstração. Sejam $\varphi \in \mathcal{S}$ arbitrária e $f \in \mathcal{S}'$, $g \in \mathcal{S}$. Tal como exposto na Definição 1.2.2 segue que

$$\langle (f * g)\widehat{}, \varphi \rangle = \langle f * g, \hat{\varphi} \rangle.$$

Logo pela Observação 1.1.20, p. 21 e novamente o Lema 1.1.18

$$\begin{aligned} \langle (f * g)\widehat{}, \varphi \rangle &= \langle f, \hat{\varphi} * \tilde{g} \rangle = \langle f, (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [\varphi \cdot (\tilde{g})\check{}\,]\widehat{} \rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \langle \hat{f}, \varphi \cdot \check{\tilde{g}} \rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \langle \hat{f}, \varphi \cdot \hat{g} \rangle = \langle (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade da escolha de φ, concluímos a igualdade $(f * g)\widehat{} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$.

□

Similarmente podemos mostrar que

$$(f \cdot g)\widehat{} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f} * \hat{g}. \tag{1.9}$$

Constatamos a partir das propriedades expostas sobre o espaço $\mathcal{S}'$ das distribuições temperadas que há análogos para os resultados expostos na Seção 1.1 no contexto de $\mathcal{S}'$.

Para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ é possível associar certa distribuição temperada F_f. Como veremos, ao fazer isto estamos tacitamente considerando um subespaço de $\mathcal{S}'$ que é caracterizável como o $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.2.4. *Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $p \in [1, \infty]$, definimos $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de tal forma que para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,*

$$F_f(\varphi) = \langle F_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Dizemos que F_f é a distribuição temperada associada a f.

Proposição 1.2.5. *A aplicação*

$$\begin{aligned} F : L^p(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ f \quad &\mapsto \quad F_f \end{aligned}$$

é contínua e injetiva.

Tais definição e proposição são enunciadas (e demonstrada no caso desta última) em [24, p. 51]. A Proposição 1.2.5 mostra a importância do estudo das distribuições temperadas com relação ao seu ferramentário disponível. Visto que há uma inclusão contínua de L^p em $\mathcal{S}'$ (consequentemente uma inclusão contínua de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}'$), as distribuições temperadas generalizam as funções L^p e de Schwartz no sentido da injetividade mencionada na proposição acima, ao mesmo passo que ganhamos propriedades já existentes em $\mathcal{S}'$.

Definição 1.2.6. *Considerando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, definimos a convolução entre f e a distribuição temperada F_g associada a g de tal forma que*

$$(F_g * f)(x) = (g * f)(x).$$

Observação 1.2.7. *Segue da definição acima que podemos reescrever a Proposição 1.1.14 usando uma linguagem de distribuições temperadas. A saber, dados $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r} = 1$, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\|F_f * g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Em função disto realizaremos certo abuso de notação e para $F_f \in \mathcal{S}'$ associada à função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, a norma em L^p de F_f será definida como

$$\|F_f\|_{L^p} := \|f\|_{L^p}.$$

Desta maneira, usualmente consideraremos sem distinção $f \in \mathcal{S}'$ e sua função de Schwartz correspondente $f \in L^p$.

O Lema de Bernstein que enunciamos a seguir, encontrado em [10, p. 8], é de suma importância pois dita condições sob as quais a norma em L^p da derivada de uma função de Schwartz é equivalente à norma em L^p de uma função de Schwartz. Como extensão do Lema de Bernstein, os resultados mais particulares mostrados no Lema E.0.2, p. 95, foram amplamente utilizados neste trabalho.

Lema 1.2.8 (Lema de Bernstein). *Seja $f \in L^p$, $p \in (0, \infty]$ tal que para $j \in \mathbb{Z}$ temos*

$$supp\, \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{j-2} < |\xi| < 2^j\}.$$

Dado um multiíndice α,

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^p} \sim 2^{j|\alpha|}\|f\|_{L^p}.$$

Em outras palavras, existe uma constante positiva C dependente de α, p tal que

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha f\|_{L^p} &\leqslant C2^{j|\alpha|}\|f\|_{L^p}, \quad e \\ \|f\|_{L^p} &\leqslant C2^{-j|\alpha|}\|\partial^\alpha f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

O último resultado desta seção mostra como é possível majorar a norma L^{p_2} de uma função $f \in \mathcal{S}'$, pela norma L^{p_1} de f, com $p_1 < p_2$. Para isto, é apenas requerido que o suporte de f em variáveis de Fourier seja limitado. Este lema é demonstrado em [24, p. 130].

Lema 1.2.9. *Se $0 < p_1 < p_2 \leqslant \infty$ e $f \in \mathcal{S}'$ é tal que $supp\, \hat{f} \subset B(0, R)$, $R > 0$, então*

$$\|f\|_{L^{p_2}} \leqslant CR^{n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})}\|f\|_{L^{p_1}},$$

onde a constante $C > 0$ é independente de f.

1.3 Resultados Relacionados a *Multipliers*

A seguir definiremos o espaço dos multiplicadores de Fourier $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ (ou apenas *multipliers*), de acordo com o realizado em [14, p. 155].

Definição 1.3.1. *Considerando $p \in [1, \infty)$, chamamos de espaço dos multiplicadores de Fourier o espaço $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ formado pelas funções m limitadas em $\mathbb{R}^n$ onde, para cada $f \in \mathcal{S}$, o operador T_m definido de maneira que*

$$T_m(f) = (\hat{f}m)\check{},$$

é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Chamamos a função m de núcleo do operador T_m. Munimos $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}$ satisfazendo

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = \|T_m\|_{L^p \to L^p}.$$

Onde $\|\cdot\|_{L^p \to L^p}$ é a norma de um operador de $L^p(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, ou seja, dada $T : L^p \to L^p$

$$\|T\|_{L^p \to L^p} = \sup_{\|f\|_{L^p} = 1} \{\|T(f)\|_{L^p}\}.$$

Com tal definição podemos enunciar o chamado Teorema de *Multipliers* de Mihlin, que fornece uma condição suficiente para a limitação de um *multipliers*. Este teorema está presente em [14, p. 446].

Proposição 1.3.2 (Teorema de *Multipliers* de Mihlin)**.** *Considere $p \in (1, \infty)$ e m como sendo uma função complexa limitada em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Digamos adicionalmente que para cada multiíndice α satisfazendo*

$$|\alpha| \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

onde $[x]$ é a parte inteira de $x \in \mathbb{R}$, valha a seguinte desigualdade

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leqslant A|\xi|^{-|\alpha|}.$$

Então $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_n \max\{p, (p-1)^{-1}\}(A + \|m\|_{L^\infty})$$

1.4 Operadores Integrais Singulares

Dedicaremos esta seção à apresentação de certas propriedades de operadores chamados de Operadores Integrais Singulares, ou SIO's em função do seu nome em inglês. Tais operadores agem, a rigor, sobre o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$ e são limitados. Como toda função de Schwartz está em L^2, as definições e propriedades decorrentes que serão mencionadas nesta seção se aplicam a $\mathcal{S}$ e por identificação se aplicam às correspondentes distribuições temperadas.

Seguindo o realizado em [24, p. 156], formalmente definimos os SIO's da seguinte maneira.

Definição 1.4.1. *(Operadores Integrais Singulares) Dizemos que um operador T linear limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um SIO se existe uma função $K \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ tal que valem as seguintes propriedades:*

(1) *(Condição de tamanho) Existe uma constante $C_1 > 0$, tal que*

$$|K(x)| \leqslant C_1 |x|^{-n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

(2) *(Condição do Gradiente) Existe uma constante $C_2 > 0$, tal que*

$$|\nabla K(x)| \leqslant C_2 |x|^{-n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

(3) *Considerando $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, para quase todo ponto $x \notin supp\, f$,*

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y)\, dy \\ &= K * f(x). \end{aligned}$$

Dizemos que K é o kernel integral de T.

Dada a natureza convolutória, tais operadores também são chamados na literatura de operadores do tipo convolução.

Um caso particular de SIO's ao qual abordaremos são as chamadas Transformadas de Riesz n-dimensionais.

Definição 1.4.2 (Transformada de Riesz)**.** *Considere $j \in \{1, ..., n\}$. A j-ésima transformada de Riesz é tal que o seu kernel integral é dado por*

$$K(x) = \frac{x_j}{|x|^{n+1}}.$$

Ou seja, para cada $f \in L^2$

$$R_j(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x_j - y_j)}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy.$$

As contas que garantem que a transformada de Riesz satisfaz as propriedades (1), (2) de SIO são diretas, para a argumentação sobre (3) ver [14, p. 324] e [24, p. 157].

A seguir enunciamos uma caracterização para a transformada de Riesz. Tal resultado está presente em [14, p. 325].

Proposição 1.4.3. *Seja $j \in \{1, ..., n\}$. Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitrária, temos que*

$$R_j(f)(x) = \left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi) \right)^{\vee}(x).$$

Com tal resultado é possível demonstrar a seguinte propriedade que relaciona as derivadas parciais duplas de uma função $f \in \mathcal{S}$ às transformadas de Riesz e ao Laplaciano de f.

Proposição 1.4.4. *Sejam j, $k \in \{1, ..., n\}$ e $f \in \mathcal{S}$, então*

$$\partial_j \partial_k f(x) = -R_j R_k \Delta f(x).$$

Demonstração. Ao considerar a transformada de Fourier de $\partial_j \partial_k f$, dado $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned}
\widehat{(\partial_j \partial_k f)}(\xi) &= (i\xi_j)(i\xi_k)\hat{f}(\xi) \\
&= \left(\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right)\left(\frac{i\xi_k}{|\xi|}\right)|\xi|^2 \hat{f}(\xi) \\
&= \left(\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right)\left(\frac{i\xi_k}{|\xi|}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \xi_l^2 \hat{f}(\xi)\right) \\
&= -\left(\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right)\left(\frac{i\xi_k}{|\xi|}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} (i\xi_l)^2 \hat{f}(\xi)\right) \\
&= -\left(\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right)\left(\frac{i\xi_k}{|\xi|}\right)\widehat{\left(\sum_{l=1}^{n} \partial_l^2 f\right)}(\xi),
\end{aligned}$$

consequentemente

$$
\begin{aligned}
(\partial_j \partial_k f)\widehat{\ }(\xi) &= (i\xi_j)(i\xi_k)\hat{f}(\xi) \\
&= -\left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right)\left(-\frac{i\xi_k}{|\xi|}\right)\left(\Delta f\right)\widehat{\ }(\xi) \\
&= -\left(R_j R_k \Delta f\right)\widehat{\ }(\xi).
\end{aligned}
$$

Logo a proposição segue considerando a transformada de Fourier inversa em ambos os membros acima. □

Para finalizar a seção enunciaremos um teorema sobre limitação dos SIO's.

Proposição 1.4.5 (Limitação dos SIO's no espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$)**.** *Consideremos um Operador Integral Singular T e $p \in (1,\infty)$. Podemos garantir a existência de um $c_p > 0$, de maneira a satisfazer, para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)\bigcap L^p(\mathbb{R}^n)$*

$$\|Tf\|_{L^p} \leqslant c_p \|f\|_{L^p}.$$

Utilizaremos este resultado mais adiante, visto que os SIO's são operadores de uso recorrente no contexto deste trabalho. Para mais detalhes técnicos, ver [24, p. 160]. Pela Observação 1.1.3, p. 16, temos que T está bem definido em $\mathcal{S}$.

1.5 Espaços de Besov

A definição dos espaços de Besov requer certa construção de elementos. O primeiro destes são as funções diádicas ou blocos diádicos.

Definição 1.5.1. *Considere $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que*

$$supp\,\hat{\varphi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \,|\, 2^{-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$$

e

$$2^{-1} < |\xi| < 2 \Rightarrow .\hat{\varphi}(\xi) > 0$$

Definimos para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)$. Pelo Lema B.0.1, p. 85, podemos ajustar $\hat{\varphi}$, de maneira a garantir que quando $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_j(\xi) = 1.$$

Observação 1.5.2. *Veja que da definição de $\hat{\varphi}$*

$$
\begin{aligned}
supp\ \hat{\varphi} \subset \big\{\xi \in \mathbb{R}^n \ |\ 2^{-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2\big\} \\
&\Rightarrow \hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = 0,\ quando\ \ 2^{-1} > |2^{-j}\xi|,\ \ ou\ |2^{-j}\xi| > 2 \\
&\Rightarrow \hat{\varphi}_j(\xi) = 0 \qquad\qquad\quad ,\ quando\ \ 2^{j-1} > |\xi|,\ \ ou\ |\xi| > 2^{j+1} \\
&\Rightarrow supp\ \hat{\varphi}_j \subset \big\{\xi \in \mathbb{R}^n \ |\ 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\big\}. \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

Outra propriedade direta da Definição 1.5.1 é o fato a seguir.

Observação 1.5.3. *Seja $j \in \mathbb{Z}$. Como $\hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)$, temos*

$$\begin{aligned}\varphi_j(x) = (\hat{\varphi}_j)\check{}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{\varphi}_j(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\, d\xi,\end{aligned}$$

logo ao considerar $y = 2^{-j}\xi$,

$$\begin{aligned}\varphi_j(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix2^jy}2^{jn}\hat{\varphi}(y)\, dy \\ &= \frac{2^{jn}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(2^jx)y}\hat{\varphi}(y)\, dy \\ &= 2^{jn}(\hat{\varphi})\check{}(2^jx) = 2^{jn}\varphi(2^jx).\end{aligned}$$

Definição 1.5.4. *Dado $j \in \mathbb{Z}$ denotamos por S_j, $\Delta_j : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ os operadores multipliers satisfazendo*

$$(\Delta_j f)\widehat{} = \hat{\varphi}_j \cdot \hat{f}, \tag{1.11}$$

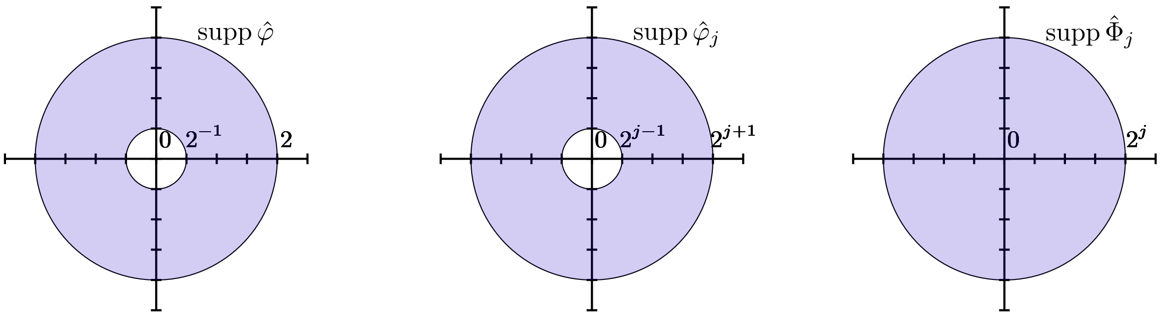
$$(S_j f)\widehat{} = \hat{\Phi}_j \cdot \hat{f}, \tag{1.12}$$

onde

$$\hat{\Phi}_j(\xi) = 1 - \sum_{k \geqslant j} \hat{\varphi}_k(\xi).$$

Em particular, poremos $\hat{\Phi} := \hat{\Phi}_0$.

Abaixo faremos uma representação gráfica em $\mathbb{R}^2$ do suporte das funções $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}_j$, $\hat{\Phi}_j$.



Observação 1.5.5. *Veja que a partir da igualdade (1.11) e utilizando a Definição 1.2.2, p. 22 e igualdades (1.8), p. 23 e (1.9), p. 23; obtemos, para cada $g \in \mathcal{S}$*

$$\begin{aligned}\langle \Delta_j f, g\rangle = \big\langle [(\Delta_j f)\widehat{}\,]\check{}, g\big\rangle &= \big\langle (\Delta_j f)\widehat{}, \check{g}\big\rangle = \langle \hat{\varphi}_j \cdot \hat{f}, \check{g}\rangle \\ &= \langle \hat{f}, \hat{\varphi}_j \cdot \check{g}\rangle = \big\langle \hat{f}, [(\tilde{\varphi}_j)\check{}\,]\widehat{} \cdot \check{g}\big\rangle = \big\langle \hat{f}, (\tilde{\varphi}_j)\check{} \cdot \check{g}\big\rangle \\ &= \big\langle f, [(\tilde{\varphi}_j)\check{} \cdot \check{g}]\widehat{}\big\rangle = \big\langle f, (2\pi)^{\frac{n}{2}}\tilde{\varphi}_j * g\big\rangle,\end{aligned}$$

logo

$$\langle \Delta_j f, g \rangle = \left\langle (2\pi)^{\frac{n}{2}} \varphi_j * f, g \right\rangle.$$

Pondo $C_n = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$, *a arbitrariedade na escolha de* g *garante que*

$$\Delta_j f = C_n \varphi_j * f.$$

Analogamente, concluímos que

$$S_j f = C_n \Phi_j * f.$$

Os resultados que concernem a norma de $\Delta_j f$, $S_j f$ *e serão apresentados neste trabalho são principalmente estimativas relacionadas a majorações a menos de constantes e a determinação do suporte de tais funções em variáveis de Fourier, desta forma como abuso de notação e sem perda de dados, é possível desconsiderar a constante* C_n *obtida nas desigualdades acima. Observamos ainda que tal constante surge da escolha feita para a definição de Transformada de Fourier. Em [14] e [24], por exemplo, define-se a transformada de Fourier de tal forma que*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\, dx,$$

o que evita o surgimento de C_n *no processo realizado até este momento.*

Lema 1.5.6. *Para cada* $p \in (1, \infty]$ *e* $k \in \mathbb{Z}$, *o operador* Φ_k *é limitado na norma* $L^p \to L^p$. *Ou seja, existe uma constante* $C > 0$ *independente de* k *de tal forma que para cada* $f \in L^p$

$$\|S_k f\|_{L^p} \leqslant C \|f\|_{L^p}.$$

Observação 1.5.7. *Para o caso* $p = \infty$, *usando a desigualdade de Young, temos que*

$$\|S_k f\|_{L^\infty} \leqslant \|\Phi_k\|_{L^1} \|f\|_{L^\infty}.$$

Além disso, $\hat{\Phi}_k$ *converge para a função identicamente igual a* 1, $\hat{\Phi}_k$ *converge na topologia fraca-*$*$ *no espaço das medidas de Radon para a Dirac* δ_0, *quando* $k \to \infty$ *e* $\|\Phi_k\|_{L^1}$ *é uniformemente limitada com relação a* k. *Disto conclui-se que existe* $C > 0$ *independente de* k, *tal que*

$$\|S_k f\|_{L^\infty} \leqslant C \|f\|_{L^\infty}.$$

Faremos agora uma demonstração da limitação uniforme dada pela desigualdade acima para o caso $p \in (1, \infty)$.

Demonstração do Lema 1.5.6 Usaremos o Teorema de Mihlin para demonstrar o caso em que $p \in (1, \infty)$. Devemos demonstrar a existência de $C > 0$ de tal forma que para qualquer $k \in \mathbb{Z}$

$$|\partial^\alpha \hat{\Phi}_k(\xi)| |\xi|^{|\alpha|} \leqslant C. \tag{1.13}$$

Como

$$\hat{\Phi}_k(\xi) = 1 - \sum_{j \geqslant k} \hat{\varphi}_j(\xi) = 1 - \sum_{j \geqslant k} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi),$$

dados $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ multiíndice, $i \in \{1, ..., n\}$ e $\alpha_i \neq 0$

$$\partial_i^{\alpha_i} \hat{\Phi}_k(\xi) = -\sum_{j \geqslant k} 2^{-j\alpha_i} \hat{\varphi}^{\alpha_i}(2^{-j}\xi).$$

Então por um processo indutivo vemos que

$$\begin{aligned}\partial^{\alpha} \hat{\Phi}_k(\xi) &= -\sum_{j \geqslant k} 2^{-j(\sum_{i=1}^n \alpha_i)} \hat{\varphi}^{\alpha}(2^{-j}\xi) \\ &= -\sum_{j \geqslant k} 2^{-j|\alpha|} \hat{\varphi}^{\alpha}(2^{-j}\xi).\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}|\partial^{\alpha} \hat{\Phi}_k(\xi)||\xi|^{|\alpha|} &= \left| \sum_{j \geqslant k} 2^{-j|\alpha|} \hat{\varphi}^{\alpha}(2^{-j}\xi) \right| |\xi|^{|\alpha|} \\ &= \left| \sum_{j \geqslant k} |2^{-j}\xi|^{|\alpha|} \hat{\varphi}^{\alpha}(2^{-j}\xi) \right|.\end{aligned}$$

Quando $\xi = 0$ não há o que mostrar.
Considerando $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, temos de maneira similar ao feito para obter a desigualdade (B.7), p. 85, vemos que

$$\sum_{j \geqslant k} \hat{\varphi}(\xi) \leqslant \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} \hat{\varphi}(\xi) \Rightarrow \sum_{j \geqslant k} \hat{\varphi}^{|\alpha|}(\xi) \leqslant \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} \hat{\varphi}^{|\alpha|}(\xi)$$

com $j_2(\xi) - j_1(\xi) \leqslant 3$ para cada $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Logo, como $2^{-|\alpha|} > 0$

$$\begin{aligned}|\partial^{\alpha} \hat{\Phi}_k(\xi)||\xi|^{|\alpha|} &= \left| \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} |2^{-j}\xi|^{|\alpha|} \hat{\varphi}^{\alpha}(2^{-j}\xi) \right| \\ &\leqslant \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} |2^{-j}\xi|^{|\alpha|} |\hat{\varphi}^{\alpha}(2^{-j}\xi)| \\ &\leqslant \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}} \left\{ \left(1 + |\xi|^{|\alpha|}\right) |\hat{\varphi}^{\alpha}(\xi)| \right\} \\ &\leqslant 3 \|\hat{\varphi}\|_{(|\alpha|, \alpha)} = C_{\alpha},\end{aligned}$$

onde usamos a função $\| \cdot \|_{N,\alpha}$ da Definição 1.1.2, p. 15. Considerando assim

$$C = \max_{|\alpha| \in \mathbb{N}_0 \cap [0, [\frac{n}{2}]+1]} C_{\alpha},$$

a desigualdade (1.13) é garantida, de onde pela Proposição 1.3.2 concluímos que Φ_k é um operador contínuo em L^p. $\square$

Com os elementos e ferramentas mostrados até o momento será possível definirmos os espaços de Besov homogêneos e não-homogêneos.

Definição 1.5.8 (Espaços de Besov Homogêneos). *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$. Definimos o valor $\| \cdot \|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ de tal forma que, considerando $f \in \mathcal{S}'$, quando $q < \infty$*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jqs} \|\Delta_j f\|^q_{L^p} \right)^{\frac{1}{q}};$$

já quando $q = \infty$

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \sup \left\{ 2^{js} \|\Delta_j f\|_{L^p} \right\}.$$

Em outros termos, podemos escrever para cada $q \in [1, \infty]$

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \left\| \left(2^{js} \|\Delta_j f\|_{L^p} \right)_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{l^q}.$$

Definimos os espaços de Besov homogêneos como sendo

$$\dot{B}^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}' \mid \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} < +\infty \right\}.$$

Observação 1.5.9. *Por um argumento de densidade podemos estender os resultados da seção anterior para o espaço L^p, com $p \in (1, \infty)$. Consequentemente sendo T um SIO, dada $f \in \dot{B}^s_{p,q}$ temos que*

$$\|Tf\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \|(2^{js} \|\Delta_j T f\|_{L^p})_{j \in \mathbb{Z}}\|_{l^q}.$$

Mas T e Δ_j comutam por serem operadores de convolução, então

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &= \|(2^{js} \|T \Delta_j f\|_{L^p})_{j \in \mathbb{Z}}\|_{l^q} \leqslant \|(c_p 2^{js} \|\Delta_j f\|_{L^p})_{j \in \mathbb{Z}}\|_{l^q} \\ &= c_p \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} < \infty. \end{aligned}$$

Concluímos disto que a Proposição 1.4.5 pode ser estendida para o espaço homogêneo de Besov $\dot{B}^s_{p,q}$, quando $p \in (1, \infty)$.

Como veremos, a função $\| \cdot \|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ não determina uma norma e o seu uso se dará para estimativas intermediárias. Definimos por outro lado os espaços de Besov não-homogêneos da seguinte maneira:

Definição 1.5.10 (Espaços de Besov Não-Homogêneos). *Considerando $s > 0$, p, $q \in [1, \infty]$, definimos a função $\| \cdot \|_{B^s_{p,q}}$ de tal forma que para cada $f \in \mathcal{S}'$*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \|f\|_{L^p} + \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}.$$

Definimos os espaços de Besov não-homogêneos como

$$B^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}' \mid \|f\|_{B^s_{p,q}} < +\infty \right\}.$$

Naturalmente surge a questão: os espaços de Besov irão depender da escolha da função φ? A resposta é não, ou seja, o espaço $B^s_{p,q}$ é o mesmo considerando funções distintas φ_1, φ_2 satisfazendo as propriedades de φ já mencionadas. Desta forma, podemos definir os espaços de Besov de maneira a que as funções φ sejam convenientes ao propósito do leitor. Para detalhes sobre a demonstração da equivalência de normas com diferentes escolhas de φ, ver [24, p. 208].

Proposição 1.5.11. *Sejam $p, q \in [1, \infty]$, $s \in \mathbb{R}$. Os espaços de Besov não-homogêneos são completos com relação à norma $\| \cdot \|_{B^s_{p,q}}$.*

Proposição 1.5.12. *Considerando $p, q \in [1, \infty]$, $s \in \mathbb{R}$, as seguinte inclusões representam inclusões contínuas*

$$\mathcal{S} \subset B^s_{p,q} \subset \mathcal{S}'.$$

Tais demonstrações estão presentes em [24, p. 218].

Observação 1.5.13. *A função $\| \cdot \|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ determina uma seminorma no espaço $\dot{B}^s_{p,q}$, de fato é possível demonstrar que se $f \in \dot{B}^s_{p,q}$*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = 0 \iff \mathit{supp}\, \hat{f} = \{0\} \iff f \text{ é polinômio},$$

como observado em [4, p. 146]. Desta maneira, os espaços de Besov não-homogêneos podem ser considerados apropriadamente tais como os definimos acima: o termo dependente da norma $\| \cdot \|_{L^p}$ exclui os polinômios na definição de $B^s_{p,q}$, sendo que desta forma $\| \cdot \|_{B^s_{p,q}}$ é uma norma; ou, como também é feito na bibliografia, podemos substituir nas considerações o espaço $\mathcal{S}'$ pelo espaço $\mathcal{S}'$ módulo polinômios (e.g. [18], p. 29).

Observação 1.5.14. *A norma não-homogênea pode ser definida com o termo $\|f\|_{L^p}$, seguindo o enunciado em [7], p. 342, ou alternativamente o termo $\|S_{-1}f\|_{L^p}$ conforme o realizado em [24], p. 239.*

Observação 1.5.15. *De maneira análoga ao feito na Definição 1.1.5, p. 16 observamos que dado $v = (v_1, ..., v_n) \in B^s_{p,q}$, temos que*

$$\|v\|_{B^s_{p,q}} \sim \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_{B^s_{p,q}},$$

assim como

$$\|v\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \sim \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_{\dot{B}^s_{p,q}}.$$

Para concluir a seção, iremos expôr o seguinte resultado relacionado ao espaço de Besov não homogêneo.

Lema 1.5.16. *Sejam* p_1, p_2, s_1, s_2, $q \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\begin{aligned} &1 < p_1 < p_2 \leqslant \infty; \\ &s_1 > s_2; \\ &s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}. \end{aligned}$$

Então,

$$\|f\|_{B^{s_2}_{p_2,q}} \leqslant C\|f\|_{B^{s_1}_{p_1,q}}, \quad \forall f \in B^s_{p,q}.$$

Demonstração. Considere $j \in \mathbb{Z}$ arbitrário. Como $\operatorname{supp}\widehat{(\Delta_j f)} \subset B(0, 2^{j+2})$, pelo Lema 1.2.9, p. 25

$$\|\Delta_j f\|_{L^{p_2}} \leqslant C(2^{j+2})^{\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2}} \|\Delta_j f\|_{L^{p_1}} = C2^{j(s_1 - s_2)}\|\Delta_j f\|_{L^{p_1}}.$$

Consequentemente

$$2^{js_2}\|\Delta_j f\|_{L^{p_2}} \leqslant C2^{js_1}\|\Delta_j f\|_{L^{p_1}}.$$

De onde segue que

$$\|f\|_{B^{s_2}_{p_2,q}} = \left\|\left(2^{js_2}\|\Delta_j f\|_{L^{p_2}}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q} \leqslant \left\|\left(C2^{js_1}\|\Delta_j f\|_{L^{p_1}}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q} = C\|f\|_{B^{s_1}_{p_1,q}},$$

como desejado. $\square$

2 Resultados Principais

Este capítulo é destinado a apresentar e demonstrar os resultados expostos em [7]. O primeiro destes tem como objetivo majorar a norma L^∞ de uma função f no espaço de Besov não-homogêneo $B^s_{p,q}$, por meio da sua seminorma em $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$ e norma em $B^s_{p,q}$, assumindo condições adequados nos indices p, q, s. Observaremos que como consequência direta da demonstração deste resultado é possível garantir que $B^s_{p,q}$ está mergulhado continuamente no espaço L^∞. Passamos a mostrar também como é possível realizar estimativas, na seminorma do espaço de Besov homogêneo e norma do espaço de Besov não-homogêneo do paraproduto de f e g. Posteriormente definiremos o espaço X^s_T das funções Besov valoradas contínuas em relação ao tempo, no intervalo temporal $[0, T]$. Mostraremos também que X^s_T é espaço de Banach com relação à sua norma natural. A primeira parte do capítulo será dedicada à apresentação de tais propriedades.

Poderemos assim demonstrar o Teorema 2.0.7, o qual é o principal resultado abordado neste trabalho. Tal teorema foi demonstrado por Chae em 2004 e diz respeito a condições relacionadas aos parâmetros p, q, s, sob as quais podemos garantir a existência e unicidade de soluções das equações de Euler no espaço X^s_T, bem como um critério de blow-up para tais soluções. Concluímos o capítulo apresentando um corolário do critério de blow-up do Teorema 2.0.7, no caso em que a dimensão é $n = 2$. Desta maneira, usando simultanemanete tais resultados, será possível garantir a existência e unicidade global no tempo de soluções das equações de Euler em dimensão $n = 2$ sob certas condições. A critério de mais objetividade dentro de cada demonstração citada, separamos o capítulo em cinco seções, cada uma destas destinadas a cada parte do Teorema 2.0.7.

Em função da recorrente manipulação de estimativas, será conveniente representar apenas por $C > 0$ as eventuais constantes presentes. Contudo em tempo serão feitas considerações nesse sentido, sobre as manipulações.

Como mencionado, começamos com uma log-desigualdade no contexto de espaços de Besov, que fornece controle da norma em L^∞. Esta desigualdade será usada mais adiante na demonstração dos critérios de blow-up.

Proposição 2.0.1. *Seja $s > \dfrac{n}{p}$ com $p \in (1, \infty)$ e $q \in [1, \infty]$. Existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda $f \in B^s_{p,q}$ vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\big(1 + \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) + 1)\big),$$

onde

$$\ln^+(\phi) = \max\{0, \ln(\phi)\}.$$

Demonstração. Utilizando a Proposição C.0.1, p. 87 escrevemos

$$f = S_{-N}f + \sum_{j \geqslant -N} \Delta_j f = \underbrace{S_{-N}f}_{\{I\}} + \underbrace{\sum_{|j|<N} \Delta_j f}_{\{II\}} + \underbrace{\sum_{j \geqslant N} \Delta_j f}_{\{III\}}. \tag{2.1}$$

Estimaremos cada um dos termos acima.

$\{I\}$**:** Temos que quando $\xi \neq 0$

$$\hat{\Phi}_k(\xi) = 1 - \sum_{j \geqslant k} \hat{\varphi}_j(\xi) = \sum_{j \leqslant k-1} \hat{\varphi}_j(\xi).$$

Logo

$$\begin{aligned}
|\Phi_{-N}(x)| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{\Phi}_{-N}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right| \\
&= \left| \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} e^{ix\xi} \hat{\Phi}_{-N}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right| \\
&= \left| \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} e^{ix\xi} \left(\sum_{j \leqslant -N-1} \hat{\varphi}_j(\xi) \right) \mathrm{d}\xi \right| \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left(\sum_{j \leqslant -N-1} |\hat{\varphi}_j(\xi)| \right) \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{B[0,2^{-N}]} \left(\sum_{j \leqslant -N-1} |\hat{\varphi}_j(\xi)| \right) \mathrm{d}\xi, \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

onde usamos que pela Observação 1.5.2

$$\operatorname{supp} \sum_{j \leqslant k} |\hat{\varphi}_j(\xi)| \subset B[0, 2^{k+1}],$$

sendo $B[0, 2^{-N}]$ a bola fechada de centro 0 e raio 2^{-N}. Mas, em virtude de que

$$|j - j'| \geqslant 2 \Rightarrow \operatorname{supp} \hat{\varphi}_j \bigcap \operatorname{supp} \hat{\varphi}_{j'} = \varnothing,$$

temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j \leqslant -N-1} |\hat{\varphi}_j(\xi)| = \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} |\hat{\varphi}_j(\xi)| &= \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| \\
&\leqslant 3\|\hat{\varphi}\|_{L^\infty} = C,
\end{aligned}$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$. Desta forma, usando a desigualdade (2.2)

$$\begin{aligned}
|\Phi_{-N}(x)| &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{B[0,2^{-N}]} C\, \mathrm{d}\xi = C|B[0, 2^{-N}]| \\
&= C(2^{-N})^n = C2^{-nN}, \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

onde $|B[0,2^{-N}]|$ é o volume de $B[0,2^{-N}]$. Logo

$$\begin{aligned}\|\Phi_{-N}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_{-N}(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} |\Phi_{-N}(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\int_{B[0,2^{-N}]} |\Phi_{-N}(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}},\end{aligned}$$

e, ao substituir a desigualdade (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}\|\Phi_{-N}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} &\leqslant \left(\int_{B[0,2^{-N}]} (C2^{-nN})^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(C^{\frac{p}{p-1}}2^{\frac{-nNp}{p-1}}|B[0,2^{-N}]|\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= C2^{-nN}(2^{-Nn})^{\frac{p-1}{p}} = C2^{-\frac{nN}{p}(2p-1)} \leqslant C2^{-\frac{Nn}{p}}. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Concluímos, por meio da desigualdade de Young generalizada (Proposição 1.1.14, p. 19), no caso em que $r=\infty$ que

$$|\{I\}| \leqslant \|\{I\}\|_{L^\infty} \leqslant \|\Phi_{-N}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}\|f\|_{L^p} \leqslant C2^{-\frac{Nn}{p}}\|f\|_{L^p}. \qquad (2.5)$$

Postergaremos por um momento a estimativa do termo $\{II\}$, pois usaremos desigualdades semelhantes a $\{I\}$, $\{III\}$ para garantir que $f \in \dot{B}^0_{\infty,\infty}$.

$\{III\}$**:** Pelo Lema 1.2.9, p. 25, com $p_2=\infty$ e $p_1=p$,

$$\|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leqslant C(2^{j+2})^{\frac{n}{p}}\|\Delta_j f\|_{L^p} = C2^{\frac{jn}{p}}\|\Delta_j f\|_{L^p},$$

logo

$$\begin{aligned}|\{III\}| &\leqslant \sum_{j\geqslant N}|\Delta_j f(x)| \leqslant \sum_{j\geqslant N}\|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leqslant \sum_{j\geqslant N} C2^{\frac{nj}{p}}\|\Delta_j f\|_{L^p} \\ &= C\sum_{j\geqslant N}2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p}2^{-j\left(s-\frac{n}{p}\right)}. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Iremos separar a análise nos seguintes casos:

- $q=1$: Vemos que

$$\begin{aligned}|\{III\}| &\leqslant C\sup_{j\geqslant\mathbb{Z}}\{2^{-j(s-\frac{n}{p})}\}\sum_{j\geqslant N}2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p} \\ &\leqslant C\sup_{j\geqslant\mathbb{Z}}\{2^{-N(s-\frac{n}{p})}\}\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}.\end{aligned}$$

- $q\in(1,\infty)$: Escrevendo

$$\begin{aligned}F &= (2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p})_{j\geqslant N} \\ G &= \left(2^{-j\left(s-\frac{n}{p}\right)}\right)_{j\geqslant N},\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Hölder no espaço l^1 (Lema 1.1.7, p. 17) e a estimativa (2.6), podemos proceder como segue:

$$
\begin{aligned}
|\{III\}| &\leqslant C\|F\cdot G\|_{l^1} \leqslant \|F\|_{l^q}\|G\|_{l^{\frac{q}{q-1}}} \\
&= C\Bigg(\sum_{j\geqslant N}(2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p})^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg(\sum_{j\geqslant N}\Big(2^{-j\left(s-\frac{n}{p}\right)}\Big)^{\frac{q}{q-1}}\Bigg)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= C\Bigg(\sum_{j\geqslant N}2^{sjq}\|\Delta_j f\|_{L^p}^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg(\sum_{j\geqslant N}2^{-j\left(s-\frac{n}{p}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)}\Bigg)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\Bigg(\sum_{j\geqslant N}2^{-j\left(s-\frac{n}{p}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)}\Bigg)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\left(\frac{2^{-N\left(s-\frac{n}{p}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)}}{1-2^{-\left(s-\frac{n}{p}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}2^{-N\left(s-\frac{n}{p}\right)}.
\end{aligned}
$$

- $q=\infty$: Aqui

$$
\begin{aligned}
|\{III\}| &\overset{(2.6)}{\leqslant} C\sum_{j\geqslant N}2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p}2^{-j\left(s-\frac{n}{p}\right)} \\
&\leqslant C\Bigg(\sum_{j\geqslant N}\sup_{k\in\mathbb{Z}}\{2^{sk}\|\Delta_k f\|_{L^p}\}2^{-j\left(s-\frac{n}{p}\right)}\Bigg) \\
&= C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\Bigg(\sum_{j\geqslant N}2^{-j\left(s-\frac{n}{p}\right)}\Bigg) \\
&= C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\left(\frac{2^{-N\left(s-\frac{n}{p}\right)}}{1-2^{-\left(s-\frac{n}{p}\right)}}\right) \\
&= C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}2^{-N\left(s-\frac{n}{p}\right)}.
\end{aligned}
$$

Das desigualdades acima, conclui-se que para cada $q\in[1,\infty]$

$$
|\{III\}| \leqslant C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}2^{-N\left(s-\frac{n}{p}\right)}, \tag{2.7}
$$

para cada $q\in[1,\infty]$.

Como mencionado, será aberto um parêntese para justificar que $f\in\dot{B}^0_{\infty,\infty}$. Para tal demonstração fazemos a decomposição

$$
f(x) = \underbrace{S_0 f(x)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{j\geqslant 0}\Delta_j f(x)}_{(2)}.
$$

Pelas estimativas (2.5),(2.7), respectivamente para (1), (2), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty} &\leqslant C2^{-\frac{0\cdot n}{p}}\|f\|_{L^p} + C2^{-0\left(s-\frac{n}{p}\right)}\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \\
&= C\big(\|f\|_{L^p}+\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\big) = C\|f\|_{B^s_{p,q}}.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Isto garante não só que quando $s > \frac{n}{p}$, $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$ ou $s = \frac{n}{p}$, $p \in (1, \infty)$, $q = 1$ temos que $B^s_{p,q} \subset L^\infty$, mas também que esta inclusão é contínua.

Além disso, usando o Lema 1.5.6, p. 30, vemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} &= \sup_{j\in\mathbb{Z}}(2^{0\cdot j}\|\Delta_j f\|_{L^\infty}) = \sup_{j\in\mathbb{Z}}(\|\Delta_j f\|_{L^\infty}) \\ &\leqslant C\sup_{j\in\mathbb{Z}}(\|f\|_{L^\infty}) = C\|f\|_{L^\infty}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Portanto $f \in \dot{B}^0_{\infty,\infty}$ e podemos realizar a estimativa relativa ao termo $\{II\}$.

$\{II\}$**:** Por (2.9) temos

$$\begin{aligned} |\{II\}| &= \Big|\sum_{|j|<N} \Delta_j f(x)\Big| \leqslant \sum_{|j|<N} |\Delta_j f(x)| \leqslant \sum_{|j|<N} \|\Delta_j f\|_{L^\infty} \\ &\leqslant \sum_{|j|<N} \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \leqslant (2N-1)\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \leqslant CN\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}. \end{aligned}$$

Como $s > \frac{n}{p}$, sendo

$$a = \min\left\{s - \frac{n}{p}, \frac{n}{p}, \frac{1}{\ln(2)}\right\} > 0,$$

então

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant |\{I\}| + |\{II\}| + |\{III\}| \\ &\leqslant C2^{-\frac{Nn}{p}}\|f\|_{L^p} + CN\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} + C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}2^{-N\left(s-\frac{n}{p}\right)} \\ &\leqslant C\Big(2^{-\frac{Nn}{p}}\|f\|_{L^p} + N\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} + \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}2^{-N\left(s-\frac{n}{p}\right)}\Big) \\ &\leqslant C\Big(2^{-aN}\|f\|_{L^p} + N\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} + \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}2^{-aN}\Big) \\ &= C\Big(2^{-aN}(\|f\|_{L^p} + \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}) + N\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\Big) \\ &= C\Big(2^{-a(N+1)}\|f\|_{B^s_{p,q}} + N\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\Big). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Considerando N como o mínimo inteiro tal que

$$N \leqslant \frac{\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}})}{a\ln(2)} + 1$$

vemos que por escolha $N + 1 \geqslant \frac{\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}})}{a\ln(2)} + 1$, logo

$$-a(N+1) \leqslant -\frac{\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}})}{\ln(2)} - a \leqslant -\frac{\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}})}{\ln(2)}, \tag{2.11}$$

enquanto que

$$N \leqslant C(\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) + 1).$$

Logo, por (2.10), obtemos a desigualdade

$$|f(x)| \leqslant C\Big(2^{-\frac{\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}})}{\ln(2)}}\|f\|_{B^s_{p,q}} + (\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) + 1)\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\Big). \tag{2.12}$$

Se

$$\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) = 0$$

então

$$\ln(\|f\|_{B^s_{p,q}}) \leqslant 0 \Rightarrow \|f\|_{B^s_{p,q}} \leqslant 1,$$

além de que

$$-\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) = 0 \Rightarrow 2^{-\frac{\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}})}{\ln(2)}} = 1.$$

Assim, ao substituir em (2.12), obtemos

$$|f(x)| \leqslant C\Big(1 + (\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) + 1)\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\Big).$$

Por outro lado, quando

$$\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) > 0$$

temos

$$\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) = \ln(\|f\|_{B^s_{p,q}}),$$

e então

$$\begin{aligned}
2^{-\frac{\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}})}{\ln(2)}} &= 2^{-\frac{\ln(\|f\|_{B^s_{p,q}})}{\ln(2)}} = e^{\ln\left(2^{-\frac{\ln(\|f\|_{B^s_{p,q}})}{\ln(2)}}\right)} \\
&= e^{-\frac{\ln(\|f\|_{B^s_{p,q}})}{\ln(2)}\ln(2)} = e^{\ln(\|f\|^{-1}_{B^s_{p,q}})} \\
&= \|f\|^{-1}_{B^s_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Agora, por (2.12), segue que

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant C(\|f\|^{-1}_{B^s_{p,q}} \cdot \|f\|_{B^s_{p,q}} + (\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) + 1)\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}) \\
&= C\Big(1 + (\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) + 1)\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\Big),
\end{aligned}$$

o que nos leva à estimativa

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C(1 + \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\ln^+(\|f\|_{B^s_{p,q}}) + 1)).$$

□

A desigualdade clássica de Hölder fornece condições sob as quais a norma de um produto de funções pode ser estimado via o produto das normas de tais funções, sempre em certos espaços L^p. Indo para o contexto de paraproduto de Bony, mostramos a seguir um lema que trabalha de maneira similar nos espaços de Besov homogêneo e não homogêneo. De fato, esta desigualdade pode ser vista como uma espécie de regra de Leibniz no contexto dos espaços de Besov. A demonstração se baseia em [7, p. 344].

Lema 2.0.2. *Consideremos $f, g \in \mathcal{S}'$ e fg o paraproduto de Bony (ver Definição C.0.2, p. 87) de f, g. Sejam $s > 0$, $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$, então existe uma constante c tal que as seguintes desigualdades valem*

$$\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant c(\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{\dot{B}^s_{p_2,q}} + \|g\|_{L^{r_1}}\|f\|_{\dot{B}^s_{r_2,q}}) \tag{2.13}$$

para o espaço de Besov homogêneo, e

$$\|fg\|_{B^s_{p,q}} \leqslant c(\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{B^s_{p_2,q}} + \|g\|_{L^{r_1}}\|f\|_{B^s_{r_2,q}}) \tag{2.14}$$

para o espaço de Besov não-homogêneo, onde p_1, $r_1 \in [1, \infty]$ são tais que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$.

Demonstração. Escrevendo por extenso o paraproduto de Bony, temos que

$$fg = \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-2} f \Delta_j g + \sum_j S_{j-2} g \Delta_j f + \sum_{|i-j| \leqslant 1} \Delta_i g \Delta_j f. \tag{2.15}$$

Além disso, quando $\xi \neq 0$,

$$\hat{\Phi}_k(\xi) = \sum_{j \leqslant k-1} \hat{\varphi}_j(\xi),$$

e então

$$\operatorname{supp} \hat{\Phi}_k \subset \bigcup_{j \leqslant k-1} \operatorname{supp} \hat{\varphi}_j = \bigcup_{j \leqslant k-1} \{\xi \,|\, 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\} \subset \{\xi \mid |\xi| \leqslant 2^k\}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \widehat{(S_{j'-2} f \Delta_{j'} g)} &\subset \operatorname{supp} \hat{\Phi}_{j'-2} + \operatorname{supp} \hat{\varphi}_{j'} \\ &\subset \underbrace{\{\xi \mid |\xi| \leqslant 2^{j'-2}\}}_{A} + \underbrace{\{\xi \,|\, 2^{j'-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j'+1}\}}_{B}. \end{aligned}$$

Mas

- $\inf_{x \in A+B} |x| = |a + b|$, com $|a| = 2^{j'-2}$, $|b| = 2^{j'-1}$ e $b = -2a$. Assim

$$\inf_{x \in A+B} |x| = |a - 2a| = |a| = 2^{j'-2};$$

- $\sup_{x\in A+B} |x| = |a+b|$, com $|a| = 2^{j'-2}$, $|b| = 2^{j'+1}$ e $b = 2^3 a$. Assim

$$\sup_{x\in A+B} |x| = |a+2^3 a| \leqslant 2^4 |a| = 2^4 \cdot 2^{j'-2} = 2^{j'+2}.$$

Da simetria e radialidade de A, B, concluímos que

$$\operatorname{supp} \widehat{(S_{j-2} f \Delta_{j'} g)} \subset \{\xi \mid 2^{j-2} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+2}\}. \tag{2.16}$$

Desta forma, quando $|j-j'| \geqslant 4$, podemos ver que

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \widehat{[\Delta_j(S_{j'-2} f \Delta_{j'} g)]} &= \operatorname{supp} [\hat{\varphi}_j \cdot \widehat{(S_{j'-2} f \Delta_{j'} g)}] \\ &\subset \operatorname{supp} \hat{\varphi}_j \bigcap \operatorname{supp} \widehat{[(\Phi_{j'-2} * f)(\Delta_{j'} g)]} \\ &\subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\} \bigcap \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{j'-2} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j'+1}\} \\ &= \varnothing, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} |j-j'| \geqslant 4 \Rightarrow \widehat{[\Delta_j(S_{j'-2} f \Delta_{j'} g)]} = 0, \quad &\text{para cada } \xi \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow \Delta_j(S_{j'-2} f \Delta_{j'} g) = \left\{\widehat{[\Delta_j(S_{j'-2} f \Delta_{j'} g)]}\right\}^{\vee} = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Consequentemente, usando a igualdade (2.15), chegamos a

$$\begin{aligned} \Delta_j(fg) &= \sum_{j'} \Delta_j(S_{j'-2} f \Delta_{j'} g) + \sum_{j'} \Delta_j(S_{j'-2} g \Delta_{j'} f) + \sum_{|i'-j'|\leqslant 1} \Delta_j(\Delta_{i'} g \Delta_{j'} f) \\ &= \underbrace{\sum_{|j-j'|\leqslant 3} \Delta_j(S_{j'-2} f \Delta_{j'} g)}_{\{I\}} + \underbrace{\sum_{|j-j'|\leqslant 3} \Delta_j(S_{j'-2} g \Delta_{j'} f)}_{\{II\}} + \underbrace{\sum_{\substack{|i'-j'|\leqslant 1 \\ \max\{i',j'\}\geqslant j-3}} \Delta_j(\Delta_{i'} g \Delta_{j'} f)}_{\{III\}}. \end{aligned}$$

Passamos a estimar cada um dos termos acima.

$\{I\}$: Pela desigualdade de Young (Proposição 1.1.13, p. 18)

$$\begin{aligned} \|\{I\}\|_{L^p} &\leqslant \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \left\|\varphi_j * (S_{j'-2} f \Delta_{j'} g)\right\|_{L^p} \\ &\leqslant \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|\varphi_j\|_{L^1} \|S_{j'-2} f \Delta_{j'} g\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Agora, usando a mudança de variáveis $y = 2^j x$, vemos que

$$\begin{aligned} \|\varphi_j\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |2^{jn} \varphi(2^j x)| \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| \,\mathrm{d}y \\ &= \|\varphi\|_{L^1}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

e então

$$\|\{I\}\|_{L^p} \leqslant \|\varphi\|_{L^1} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|S_{j'-2} f \Delta_{j'} g\|_{L^p}.$$

Portanto, uma aplicação da desigualdade de Hölder generalizada (Lema 1.1.9, p. 17) leva-nos a

$$\|\{I\}\|_{L^p} \leqslant C \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|S_{j'-2}f\|_{L^{p_1}} \|\Delta_{j'}g\|_{L^{p_2}},$$

Logo, pelo Lema 1.5.6, p. 30, chegamos à estimativa

$$\|\{I\}\|_{L^p} \leqslant C\|f\|_{L^{p_1}} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|\Delta_{j'}g\|_{L^{p_2}}. \tag{2.19}$$

$\{II\}$: De maneira inteiramente análoga concluímos que

$$\|\{II\}\|_{L^p} \leqslant C\|g\|_{L^{r_1}} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|\Delta_{j'}f\|_{L^{r_2}}. \tag{2.20}$$

$\{III\}$: Aqui temos

$$\|\{III\}\|_{L^p} \leqslant \sum_{|i'-j'|\leqslant 1} \big\|\Delta_j(\Delta_{i'}f\Delta_{j'}g)\big\|_{L^p} = \sum_{\substack{|i'-j'|\leqslant 1\\ \max\{i',j'\}\geqslant j-3}} \big\|\Delta_j(\Delta_{i'}f\Delta_{j'}g)\big\|_{L^p},$$

por uma análise similar à que nos levou à desigualdade (2.17). Então, pela desigualdade Young (Proposição 1.1.13, página 18),

$$\|\{III\}\|_{L^p} \leqslant \sum_{\substack{|i'-j'|\leqslant 1\\ \max\{i',j'\}\geqslant j-3}} \|\varphi_j\|_{L^1}\|\Delta_{i'}f\Delta_{j'}g\|_{L^p} = C \sum_{\substack{|i'-j'|\leqslant 1\\ \max\{i',j'\}\geqslant j-3}} \|\Delta_{i'}f\Delta_{j'}g\|_{L^p}.$$

Usando a desigualdade de Hölder (Lema 1.1.8, p. 17)

$$\|\{III\}\|_{L^p} \leqslant C \sum_{\substack{|i'-j'|\leqslant 1\\ \max\{i',j'\}\geqslant j-3}} \|\Delta_{i'}f\|_{L^{p_1}}\|\Delta_{j'}g\|_{L^{p_2}}$$

então novamente pela desigualdade de Young

$$\|\{III\}\|_{L^p} \leqslant C \sum_{\substack{|i'-j'|\leqslant 1\\ \max\{i',j'\}\geqslant j-3}} \|\varphi_{i'}\|_{L^1}\|f\|_{L^{p_1}}\|\Delta_{j'}g\|_{L^{p_2}} = C\|f\|_{L^{p_1}} \sum_{\substack{|i'-j'|\leqslant 1\\ \max\{i',j'\}\geqslant j-3}} \|\Delta_{j'}g\|_{L^{p_2}}$$

mas como

$$\begin{aligned} j' < j-5 &\Rightarrow 1 > |i'-j'| > |i'-j+5| \Rightarrow i'-j+5 < 1 \\ &\Rightarrow i' < j-4 \Rightarrow \max\{i',j'\} < j-4 \end{aligned}$$

devemos ter $j' \geqslant j-5$, assim

$$\|\{III\}\|_{L^p} \leqslant C\|f\|_{L^{p_1}} \sum_{j'\geqslant j-5} \|\Delta_{j'}g\|_{L^{p_2}}. \tag{2.21}$$

Iremos agora calcular a seminorma homogênea e a norma não-homogênea de Besov de fg. Temos que

$$\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \left\| \left(2^{js} \|\Delta_j(fg)\|_{L^p} \right)_{j\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q}.$$

Logo pelas estimativas 2.19, 2.20, 2.21 feitas acima

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant \Bigg\| \Bigg(C2^{js} \Bigg(\|f\|_{L^{p_1}} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|\Delta_{j'} g\|_{L^{p_2}} + \|g\|_{L^{r_1}} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|\Delta_{j'} f\|_{L^{r_2}} \\
&\qquad + \|f\|_{L^{p_1}} \sum_{j'\geqslant j-5} \|\Delta_{j'} g\|_{L^{p_2}} \Bigg) \Bigg)_{j\in\mathbb{Z}} \Bigg\|_{l^q} \\
&\leqslant \Bigg\| \Bigg(C2^{js} \Bigg(2\|f\|_{L^{p_1}} \sum_{j'\geqslant j-5} \|\Delta_{j'} g\|_{L^{p_2}} + \|g\|_{L^{r_1}} \sum_{j'\geqslant j-3} \|\Delta_{j'} f\|_{L^{r_2}} \Bigg) \Bigg)_{j\in\mathbb{Z}} \Bigg\|_{l^q} \\
&\leqslant \Bigg\| \Bigg(C2^{js} \Bigg(\|f\|_{L^{p_1}} \sum_{j'\geqslant j-5} \|\Delta_{j'} g\|_{L^{p_2}} + \|g\|_{L^{r_1}} \sum_{j'\geqslant j-3} \|\Delta_{j'} f\|_{L^{r_2}} \Bigg) \Bigg)_{j\in\mathbb{Z}} \Bigg\|_{l^q}.
\end{aligned}$$

Então pela desigualdade de Minkowski nos espaços l^q (ver Lema 1.1.7, p. 17)

$$\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant C\|f\|_{L^{p_1}} \left\| \left(\sum_{j'\geqslant j-5} 2^{js} \|\Delta_{j'} g\|_{L^{p_2}} \right)_{j\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} + C\|g\|_{L^{r_1}} \left\| \left(\sum_{j'\geqslant j-3} 2^{js} \|\Delta_{j'} f\|_{L^{r_2}} \right)_{j\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q}.$$

Para continuar com a expansão dos termos acima será necessário separar a análise nos seguintes casos:

- Seja $q \in [1, \infty)$. Aqui

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant & \underbrace{C\|f\|_{L^{p_1}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{j'\geqslant j-5} 2^{jqs} \|\Delta_{j'} g\|^q_{L^{p_2}} \right)^{\frac{1}{q}}}_{\{1\}} \\
& + \underbrace{C\|g\|_{L^{r_1}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{j'\geqslant j-3} 2^{jqs} \|\Delta_{j'} f\|^q_{L^{r_2}} \right)^{\frac{1}{q}}}_{\{2\}}.
\end{aligned}$$

Mas, dados $h \in B^s_{p,q}$, $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty)$, $s > 0$, $r \in \mathbb{Z}$ arbitrários

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{j'\geqslant j-r} 2^{jqs} \|\Delta_{j'} h\|^q_{L^p} &\overset{j'=j+k}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\geqslant -r} 2^{qsj} \|\Delta_{j+k} h\|^q_{L^p} \\
&= \sum_{k\geqslant -r} 2^{-kqs} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{qs(j+k)} \|\Delta_{j+k} h\|^q_{L^p} \right) \\
&= \sum_{k\geqslant -r} 2^{-kqs} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{qsj} \|\Delta_j h\|^q_{L^p} \right) \\
&= \|h\|^q_{\dot{B}^s_{p,q}} \left(\sum_{k\geqslant -r} 2^{-kqs} \right) \\
&= \frac{2^{qrs+qs}}{2^{qs}-1} \|h\|^q_{\dot{B}^s_{p,q}} = C\|h\|^q_{\dot{B}^s_{p,q}}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Então

$$\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant \{1\} + \{2\} \leqslant C\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{\dot{B}^s_{p_2,q}} + C\|g\|_{L^{r_1}}\|f\|_{\dot{B}^s_{r_2,q}}.$$

- Seja $q = \infty$. Neste caso temos então

$$\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant \underbrace{C\|f\|_{L^{p_1}} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{js}\left(\sum_{j'\geqslant j-5} \|\Delta_{j'}g\|_{L^{p_2}}\right)\right]}_{\{\bar{1}\}} + \underbrace{C\|g\|_{L^{r_1}} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{js}\left(\sum_{j'\geqslant j-3} \|\Delta_{j'}f\|_{L^{r_2}}\right)\right]}_{\{\bar{2}\}}.$$

Mas, dados $h \in B^s_{p,q}$, $q = \infty$, $s > 0$, $r \in \mathbb{Z}$ arbitrários,

$$\begin{aligned}
\sup_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{js}\left(\sum_{j'\geqslant j-r} \|\Delta_{j'}h\|_{L^p}\right)\right] &\overset{j'=j+k}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left[\sum_{k\geqslant -r} 2^{js}\|\Delta_{j+k}h\|_{L^p}\right] \\
&= \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left[\sum_{k\geqslant -r} 2^{-ks}\left(2^{s(j+k)}\|\Delta_{j+k}h\|_{L^{p_2}}\right)\right] \\
&= \sum_{k\geqslant -r} 2^{-ks}\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{s(j+k)}\|\Delta_{j+k}h\|_{L^{p_2}}\right]\right) \\
&= \sum_{k\geqslant -r} 2^{-ks}\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} \left[2^{sj}\|\Delta_{j}h\|_{L^{p_2}}\right]\right) \\
&= \|h\|^q_{\dot{B}^s_{p,q}}\left(\sum_{k\geqslant -r} 2^{-ks}\right) \\
&= \frac{2^{rs+s}}{2^s-1}\|h\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = C\|h\|_{\dot{B}^s_{p,q}}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Então

$$\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant \{\bar{1}\} + \{\bar{2}\} \leqslant C\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{\dot{B}^s_{p_2,q}} + C\|g\|_{L^{r_1}}\|f\|_{\dot{B}^s_{r_2,q}}.$$

Segue dos resultados em ambos os casos, que para cada $q \in [1, \infty]$

$$\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant \{1\} + \{2\} \leqslant c(\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{\dot{B}^s_{p_2,q}} + \|g\|_{L^{r_1}}\|f\|_{\dot{B}^s_{r_2,q}})$$

o que conclui (2.13).

Por último, pela desigualdade de Hölder generalizada (Lema 1.1.9, p. 17) temos que

$$\begin{cases} \|fg\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{L^{p_2}} \\ \|fg\|_{L^p} \leqslant \|g\|_{L^{r_1}}\|f\|_{L^{r_2}} \end{cases} \Rightarrow \|fg\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{L^{p_2}} + \|g\|_{L^{r_1}}\|f\|_{L^{r_2}}),$$

então

$$\begin{aligned}\|fg\|_{B^s_{p,q}} &= \|fg\|_{L^p} + \|fg\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \\ &\leqslant c\big(\|f\|_{L^{p_1}}(\|g\|_{L^{p_2}} + \|g\|_{\dot{B}^s_{p_2,q}}) + \|g\|_{L^{r_1}}(\|f\|_{\dot{B}^s_{r_2,q}} + \|f\|_{L^{r_2}})\big) \\ &= c\big(\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{B^s_{p_2,q}} + \|g\|_{L^{r_1}}\|f\|_{B^s_{r_2,q}}\big).\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Observação 2.0.3. *Em função da identificação de L^p em $\mathcal{S}'$ será possível considerarmos indistintamente o paraproduto e o produto entre duas funções em L^p.*

O estudo que faremos será realizado sobre funções que a cada instante estão no espaço não homogêneo de Besov, além disso são contínuas com relação ao tempo. Nesse sentido definimos o espaços das funções Banach valoradas.

Definição 2.0.4. *Dados $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e E um espaço normado, definimos*

$$C([a,b];E) := \{f \mid f : [a,b] \to E, \ \ \textit{tal que } f \ \textit{é contínua}\}.$$

Em outras palavras, $f \in C([a,b];E)$ se para cada t, $t_n \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ com $t_n \to t$, temos que $f(t_n) \to f(t)$ na topologia induzida pela norma de E.

Uma condição suficiente para a completude de $C([a,b];E)$ é o espaço E ser espaço de Banach.

Lema 2.0.5. *Dados $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e E espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_E$, então*

$$C([a,b];E)$$

é também espaço de Banach.

Demonstração. Considere a função $|||\cdot|||$ de tal forma que a cada $v \in C([a,b];E)$ associa o valor real

$$|||v||| = \sup_{t\in[a,b]} \|v(t)\|_E.$$

A constatação de que $|||\cdot|||$ é norma é direta.

Afirmamos que $C([a,b];E)$ munido da norma $|||\cdot|||$ é completo. Para isso inicialmente consideramos $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C([a,b];E)$. Então, do fato de que para cada $t_0 \in [a,b]$

$$\|v_m(t_0) - v_n(t_0)\|_E \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \|v_m(t) - v_n(t)\|_E = |||v_m - v_n|||,$$

vemos que $(v_m(t_0))_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em E. Como este é completo, então $(v_m(t_0))_{m\in\mathbb{N}}$ converge em E, digamos para um vetor $v(t_0)$. Fazendo a mesma construção para cada $t_0 \in [a,b]$ podemos definir a função

$$\begin{aligned} v : [a,b] \to &\ \ E \\ t_0 \ \ \mapsto &\ v(t_0). \end{aligned}$$

Para concluir que $v \in C([a,b];E)$ resta demonstrar que v é contínua.
Consideremos agora $t_0 \in [0,T]$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $[a,b]$ tal que $t_n \to t_0$. Considerando a mesma sequência $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, vemos que

$$\begin{aligned} \|v(t_n) - v(t_0)\|_E &= \|v(t_n) - v_m(t_n) + v_m(t_n) - v_m(t_0) + v_m(t_0) - v(t_0)\|_E \qquad (2.24) \\ &\leqslant \|v(t_n) - v_m(t_n)\|_E + \|v_m(t_n) - v_m(t_0)\|_E + \|v_m(t_0) - v(t_0)\|_E, \qquad (2.25) \end{aligned}$$

onde $v_m(t_n) \to v(t_n)$, $v_m(t_0) \to v(t_0)$ por definição de v e $v_m(t_n) \to v_m(t_0)$ pois $v_m \in C([a,b];E)$. Consequentemente dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de tal forma que quando m, $n > N$, cada um dos termos do último membro de (2.25) são majorados por $\frac{\varepsilon}{3}$. Logo

$$\|v(t_n) - v(t_0)\|_E < \varepsilon.$$

Portanto $v \in C([a,b];E)$. □

O resultado principal estudado neste trabalho refere-se ao espaço das funções Besov valoradas X_T^s, definido de tal forma que dados $s > 0$, $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$, $T > 0$ denotamos

$$X_T^s := C([0,T]; B_{p,q}^s).$$

Em virtude do Lema 2.0.5 este espaço é de Banach com a norma que, a cada $v \in X_T^s$, associa

$$\|v\|_{X_T^s} = \sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{B_{p,q}^s}.$$

O último elemento que apresentaremos é o termo relativo à convecção nas equações de Euler dadas pelo sistema (1)-(3). Dados v e w campos vetorias, tal termo é denotado por $(w \cdot \nabla)v$ e pode ser interpretado como certo operador $(w \cdot \nabla)$ aplicado no vetor v. Este operador costuma ser descrito pela regra

$$(w \cdot \nabla) = \sum_{i=1}^{n} w_i \partial_i.$$

Uma outra maneira de enxergarmos tal termo é no sentido da seguinte observação.

Observação 2.0.6. *Dadas $w = (w_1, ..., w_n), v = (v_1, ..., v_n) : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, definimos $(w \cdot \nabla)v$ como sendo*

$$w \cdot [\nabla v]^t,$$

onde $[\nabla v]$ é a matriz diferencial de v. Assim, temos que

$$(w \cdot \nabla)v = (u_1, ..., u_k)$$

de tal forma que

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \partial_i v_k.$$

Alternativamente, quando $div\, w = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \partial_i(w_i v_k) &= \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \partial_i v_k + \sum_{i=1}^{n} \partial_i w_i \cdot v_k \\ &= u_k + v_k \cdot div\, w = u_k.\end{aligned}$$

O seguinte teorema é o resultado principal estudado neste trabalho. Mostraremos critérios para existência local no tempo de soluções no espaço X_T^s para as equações de Euler. O tempo $T > 0$ de existência depende da norma da condição inicial. Além disso, será possível mostrar dois critérios de blow-up para as soluções, correspondendo aos casos super crítico e crítico, conforme [7, p. 346].

Teorema 2.0.7. *Considere as equações de Euler*

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{2.26}$$

$$div\, v(t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{2.27}$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.28}$$

Sendo $\omega = curl\, v$ a vorticidade do fluido, temos os seguintes resultados:

(1) *Considere $s > \frac{n}{p} + 1$ com $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$, ou $s = \frac{n}{p} + 1$ com $p \in (1, \infty)$ e $q = 1$. Seja também $v_0 \in B^s_{p,q}$ tal que $div\, v_0 = 0$. Então existe $T = T(\|v_0\|_{B^s_{p,q}})$ tal que as equações acima possuem uma única solução $v \in C([0, T]; B^s_{p,q})$.*

(2) *As seguintes propriedades são chamadas de critérios de blow-up:*

a) Sejam $s > \frac{n}{p} + 1$, $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$. Então ocorre o blow-up da solução local no tempo $v \in C([0, T]; B^s_{p,q})$ em $T_* > T$, ou seja

$$\limsup_{t \nearrow T_*} \|v(t)\|_{B^s_{p,q}} = \infty,$$

se, e somente se

$$\int_0^{T_*} \|\omega(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\, dt = \infty.$$

Este caso é denominado de super crítico.

b) Considerando $p \in (1,\infty)$*, ocorre o blow-up da solução local no tempo* $v \in C([0,T]; B^{\frac{n}{p}+1}_{p,1})$ *quando* $T_* > T$*, ou seja*

$$\limsup_{t\nearrow T_*} \|v(t)\|_{B^{\frac{n}{p}+1}_{p,1}} = \infty,$$

se, e somente se

$$\int_0^{T_*} \|\omega(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}\, dt = \infty.$$

Este caso é denominado de crítico.

Para a demonstração do Teorema 2.0.7, preliminarmente, será necessário o resultado do seguinte Lema.

Lema 2.0.8. *Sejam* $s > \dfrac{n}{p} + 1$ *com* $p \in (1,\infty)$*,* $q \in [1,\infty]$*, ou* $s = \dfrac{n}{p} + 1$ *com* $p \in (1,\infty)$*,* $q = 1$*. Considerando* $w, v \in C^1([0,T]; B^s_{p,q})$*, satisfazendo classicamente as equações*

$$\partial_t v + (w\cdot\nabla)v = -\nabla p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{2.29}$$

$$div\ v(t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{2.30}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.31}$$

então

$$\|v(t)\|_{B^s_{p,q}} \leqslant \|v_0\|_{B^s_{p,q}} + C\int_0^t \|w(r)\|_{B^s_{p,q}} \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\, dr. \tag{2.32}$$

Demonstração. Seja $j \in \mathbb{Z}$, como

$$\begin{aligned}\Delta_j \partial_t v &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(y)\partial_t v(x-y,t)\,\mathrm{d}y = \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(y) v(x-y,t)\,\mathrm{d}y \\ &= \partial_t \Delta_j v,\end{aligned}$$

aplicando Δ_j e somando o termo $(S_{j-2}w\cdot\nabla)\Delta_j v$ em ambos os membros da equação 2.29, obtemos

$$\partial_t \Delta_j v + (S_{j-2}w\cdot\nabla)\Delta_j v = (S_{j-2}w\cdot\nabla)\Delta_j v - \Delta_j((w\cdot\nabla)v) - \Delta_j \nabla p \tag{2.33}$$

Além disso

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(S_{j-2}w(t)) = \mathrm{div}(\Phi_{j-2} * w(t)) &= \mathrm{div}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{j-2}(y) w(x-y,t)\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{j-2}(y)\mathrm{div}\, w(x-y,t)\,\mathrm{d}y = 0.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Assim, pondo

$$
\begin{aligned}
u &= \Delta_j v,\\
b &= S_{j-2} w,\\
g &= (S_{j-2} w \cdot \nabla)\Delta_j v - \Delta_j((w\cdot\nabla)v) - \Delta_j \nabla p,
\end{aligned}
$$

a equação (2.33) está nas condições do Lema E.0.4, p. 99, de onde segue que,

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_j v(t)\|_{L^p} &\leqslant \int_0^t \|(S_{j-2}w\cdot\nabla)\Delta_j v(t) - \Delta_j((w\cdot\nabla)v(r)) - \Delta_j\nabla p(r)\|_{L^p}\,\mathrm{d}r + \|\Delta_j v_0\|_{L^p}\\
&\leqslant \|\Delta_j v_0\|_{L^p} + \int_0^t \|[(S_{j-2}w\cdot\nabla)\Delta_j v - \Delta_j((w\cdot\nabla)v)](r)\|_{L^p}\,\mathrm{d}r\\
&\qquad + \int_0^t \|\Delta_j\nabla p(r)\|_{L^p}\,\mathrm{d}r. \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

Passamos a estimar a norma de $v(t)$ em $B^s_{p,q}$. Pela equação (2.35), vejamos que

$$
\begin{aligned}
\|v(t)\|_{\dot B^s_{p,q}} &= \left\|\left(2^{js}\|\Delta_j v(t)\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q}\\
&\leqslant \left\|\left(2^{js}\left\{\|\Delta_j v_0\|_{L^p} + \int_0^t \|[(S_{j-2}v\cdot\nabla)\Delta_j v - \Delta_j((v\cdot\nabla)v)](r)\|_{L^p}\,\mathrm{d}r\right.\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.\left. + \int_0^t \|\Delta_j\nabla p(r)\|_{L^p}\,\mathrm{d}r\right\}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q}.
\end{aligned}
$$

Então pela desigualdade de Minkowski no espaço l^p (Corolário 1.1.7, p. 17), temos que

$$
\begin{aligned}
\|v(t)\|_{\dot B^s_{p,q}} &\leqslant \|(2^{js}\|\Delta_j v_0\|_{L^p})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^q} + \left\|\left(\int_0^t 2^{js}\|\Delta_j\nabla p(r)\|_{L^p}\,\mathrm{d}r\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q}\\
&\qquad + \left\|\left(\int_0^t 2^{js}\|[(S_{j-2}v\cdot\nabla)\Delta_j v - \Delta_j((v\cdot\nabla)v)](r)\|_{L^p}\,\mathrm{d}r\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q}\\
&\leqslant \|(2^{js}\|\Delta_j v_0\|_{L^p})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^q} + \int_0^t \|(2^{js}\|\Delta_j\nabla p(r)\|_{L^p})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^q}\,\mathrm{d}r\\
&\qquad + \int_0^t \|(2^{js}\|[(S_{j-2}v\cdot\nabla)\Delta_j v - \Delta_j((v\cdot\nabla)v)](r)\|_{L^p})_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^q}\,\mathrm{d}r,
\end{aligned}
$$

onde usamos o Teorema da Convêrgencia Dominada para calcular a série sob o sinal de integração. Pelo Lema E.0.5, p. 100, segue que

$$
\begin{aligned}
&\|v(t)\|_{\dot B^s_{p,q}} \leqslant \|v_0\|_{\dot B^s_{p,q}} + \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{\dot B^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\
&\quad + \int_0^t \left\|\left(2^{js}C\|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}w(r)\|_{L^p} + 2^{js}C\|\nabla w(r)\|_{L^\infty}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}v(r)\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q}\mathrm{d}r\\
&\qquad \leqslant \|v_0\|_{\dot B^s_{p,q}} + \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{\dot B^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r + C\int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\left\|\left(2^{js}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}w(r)\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q}\mathrm{d}r\\
&\quad + C\int_0^t \|\nabla w(r)\|_{L^\infty}\left\|\left(2^{js}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}v(r)\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q}\mathrm{d}r. \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

Será necessário agora considerar a expressão acima nos seguintes casos separadamente.

- $q \in [1, \infty)$:

  Abrindo o segundo membro da desigualdade (2.36), chegamos a

$$\|v(t)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + C\int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{j'\geqslant j-4} 2^{jqs}\|\Delta_{j'}w(r)\|^q_{L^p}\Big)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}r$$
$$+ C\int_0^t \|\nabla w(r)\|_{L^\infty}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{j'\geqslant j-4} 2^{jqs}\|\Delta_{j'}v(r)\|^q_{L^p}\Big)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}r + \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r.$$

  Da expressão (2.22), p. 44, segue que

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r + C\int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\big(\|w(r)\|^q_{\dot{B}^s_{p,q}}\big)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}r\\ &+ C\int_0^t \|\nabla w(r)\|_{L^\infty}\big(\|v(r)\|^q_{\dot{B}^s_{p,q}}\big)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}r\\ &= \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r + C\int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\|w(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\ &+ C\int_0^t \|\nabla w(r)\|_{L^\infty}\|v(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r. \end{aligned}\tag{2.37}$$

- $q = \infty$:

  De maneira similar, quando $q = \infty$

$$\|v(t)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + C\int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\sup_j\Big[2^{js}\Big(\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}w(r)\|_{L^p}\Big)\Big]\,\mathrm{d}r$$
$$+ C\int_0^t \|\nabla w(r)\|_{L^\infty}\sup_j\Big[2^{js}\Big(\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}v(r)\|_{L^p}\Big)\Big]\,\mathrm{d}r + \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r.$$

  Pela conclusão (2.23), p. 45, podemos ver que

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r + C\int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\|w(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\ &+ C\int_0^t \|\nabla w(r)\|_{L^\infty}\|v(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r. \end{aligned}\tag{2.38}$$

Segue de (2.37) e (2.38) que, para cada $q \in [1, \infty]$,

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r + C\int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\|w(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\ &+ C\int_0^t \|\nabla w(r)\|_{L^\infty}\|v(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r. \end{aligned}\tag{2.39}$$

Passaremos a estimar o termo relativo à pressão na desigualdade (2.39). Por meio da Observação E.0.6, p. 109, podemos garantir que

$$\Delta p = \sum_{k,l=1}^n \partial_k w_l \partial_l v_k.$$

Consequentemente, ao aplicar o operador lift (ver Apêndice D, p. 93) em ambos os membros acima e por meio da Proposição D.0.2, p. 93, temos

$$p = \sum_{k,l=1}^{n} (-\Delta)^{-1} \partial_k w_l \partial_l v_k.$$

Desta forma

$$\begin{aligned}
\partial_i \partial_j p &= \sum_{k,l=1}^{n} \partial_i \partial_j (-\Delta)^{-1} \partial_k w_l \partial_l v_k \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} R^i R^j \big(\partial_k w_l \partial_l v_k\big).
\end{aligned}$$

Pelo item (3) do Lema E.0.2, p. 95

$$\begin{aligned}
\|\nabla p\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant C \sum_{i,j=1}^{n} \|\partial_j \partial_i p\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \\
&\leqslant C \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \big\|R^i R^j \big(\partial_k w_l \partial_l v_k\big)\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \\
&\leqslant C \sum_{k,l=1}^{n} \big\|\partial_k w_l \partial_l v_k\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}},
\end{aligned}$$

onde usamos a continuidade das transformadas de Riesz no espaço homogêneo $\dot{B}^{s-1}_{p,q}$ (ver Observação 1.5.9, p. 32). Por meio da desigualdade (2.13), p. 41, com $p_1, r_1 = \infty$, vemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla p\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant C \sum_{k,l=1}^{n} \big\|\partial_k w_l \partial_l v_k\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \\
&\leqslant C \sum_{k,l=1}^{n} C\Big(\big\|\partial_k w_l\big\|_{L^\infty} \big\|\partial_l v_k\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} + \big\|\partial_l v_k\big\|_{L^\infty} \big\|\partial_k w_l\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\Big).
\end{aligned}$$

Adicionalmente, pela Observação 1.5.15

$$\begin{aligned}
\|\nabla p\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant C\|\nabla w\|_{L^\infty} \|\nabla v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} + C\|\nabla v\|_{L^\infty} \|\nabla w\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \\
&\leqslant C\|\nabla w\|_{B^{s-1}_{p,q}} \|\nabla v\|_{B^{s-1}_{p,q}} + C\|\nabla v\|_{B^{s-1}_{p,q}} \|\nabla w\|_{B^{s-1}_{p,q}},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

pois como $s - 1 > \dfrac{n}{p}$ com $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$ ou $s - 1 = \dfrac{n}{p}$ com $p \in (1, \infty)$, $q = 1$, pela desigualdade (2.8), p. 38, vemos que $\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leqslant \|\nabla v(t)\|_{B^{s-1}_{p,q}}$. Aplicando novamente o Lema E.0.2, porém agora o item (4)

$$\begin{aligned}
\|\nabla p(t)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant C\|w(t)\|_{B^s_{p,q}} \|v(t)\|_{B^s_{p,q}} + C\|v(t)\|_{B^s_{p,q}} \|w(t)\|_{B^s_{p,q}} \\
&= C\|w(t)\|_{B^s_{p,q}} \|v(t)\|_{B^s_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Agora, substituindo a estimativa acima na equação (2.39), obtemos

$$\|v(t)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + C \int_0^t \|w(r)\|_{B^s_{p,q}} \|v(r)\|_{B^s_{p,q}} \, \mathrm{d}r. \tag{2.41}$$

Como mencionado na Observação E.0.6, p. 109

$$\begin{aligned}
-\Delta p &= \operatorname{div}(w\cdot\nabla)v = \sum_{i=1}^{n}\partial_i(w\cdot\nabla)v_i\\
\Rightarrow \qquad p &= -\sum_{i=1}^{n}(-\Delta)^{-1}\partial_i(w\cdot\nabla)v_i\\
\Rightarrow \qquad \nabla p &= -\sum_{i=1}^{n}\nabla(-\Delta)^{-1}\partial_i(w\cdot\nabla)v_i.
\end{aligned}$$

Desta forma, usando a demonstração da Proposição D.0.3, p. 93

$$\begin{aligned}
\|\nabla p\|_{L^p} &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left\|\nabla(-\Delta)^{-1}\partial_i(w\cdot\nabla)v_i\right\|_{L^p}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|\partial_j(-\Delta)^{-1}\partial_i(w\cdot\nabla)v_i\right\|_{L^p}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|\partial_i\partial_j(-\Delta)^{-1}(w\cdot\nabla)v_i\right\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Então, pelo item (1) da Proposição D.0.3, p. 93

$$\begin{aligned}
\|\nabla p\|_{L^p} &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|R_iR_j(w\cdot\nabla)v_i\right\|_{L^p}\\
&\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|(w\cdot\nabla)v_i\right\|_{L^p},
\end{aligned}$$

onde usamos a continuidade de R_i, R_j em L^p com $p\in(1,\infty)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\nabla p\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\left\|(w\cdot\nabla)v\right\|_{L^p}\\
&\leqslant C\|(w\cdot\nabla)v\|_{L^p}\\
&\leqslant C\|(w\cdot\nabla)v\|_{B^{s-1}_{p,q}}.
\end{aligned}\tag{2.42}$$

Pela desigualdade (2.14), p. 41

$$\begin{aligned}
\|\nabla p\|_{L^p} &\leqslant C\|w\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_{B^{s-1}_{p,q}} + C\|v\|_{B^{s-1}_{p,q}}\|\nabla w\|_{L^\infty}\\
&\leqslant C\|w\|_{L^\infty}\|v\|_{B^{s}_{p,q}} + C\|v\|_{B^{s}_{p,q}}\|\nabla w\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

em função do item (4) do Lema E.0.2. Novamente pela desigualdade (2.8), p. 38, segue que

$$\begin{aligned}
\|\nabla p\|_{L^p} &\leqslant C\|w\|_{B^{s}_{p,q}}\|v\|_{B^{s}_{p,q}} + C\|v\|_{B^{s}_{p,q}}\|\nabla w\|_{B^{s-1}_{p,q}}\\
&\leqslant C\|w\|_{B^{s}_{p,q}}\|v\|_{B^{s}_{p,q}} + C\|v\|_{B^{s}_{p,q}}\|w\|_{B^{s}_{p,q}}\\
&= C\|w\|_{B^{s}_{p,q}}\|v\|_{B^{s}_{p,q}},
\end{aligned}\tag{2.43}$$

onde para simplificação de notação consideramos a mesma constante, embora tenha duplicado na passagem da igualdade. Consequentemente pelo Lema E.0.3, p. 98, obtemos

$$\|v(t)\|_{L^p} \leqslant \|v_0\|_{L^p} + C\int_0^t \|w(r)\|_{B^s_{p,q}} \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\, \mathrm{d}r. \tag{2.44}$$

Combinando as estimativas (2.41), p. 52, e (2.44) conclui-se a desigualdade desejada, referente ao espaço de Besov não-homogêneo, dada por:

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{B^s_{p,q}} &= \|v(t)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + \|v(t)\|_{L^p} \\
&\leqslant \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + C\int_0^t \|w(r)\|_{B^s_{p,q}} \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\, \mathrm{d}r + \|v_0\|_{L^p} + C\int_0^t \|w(r)\|_{B^s_{p,q}} \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\, \mathrm{d}r \\
&= \|v_0\|_{B^s_{p,q}} + C\int_0^t \|w(r)\|_{B^s_{p,q}} \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\, \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.0.9. *Sob as condições do Lema* (2.0.8), *p. 49 e considerando* $T > 0$, *temos que*

$$\int_0^T \|w(r)\|_{B^s_{p,q}} \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\, dr \leqslant \int_0^T \|w\|_{X^s_T} \|v\|_{X^s_T}\, dr = T\|w\|_{X^s_T} \|v\|_{X^s_T}.$$

Então pela desigualdade (2.32),

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{B^s_{p,q}} &\leqslant \|v_0\|_{B^s_{p,q}} + \int_0^t \|w(r)\|_{B^s_{p,q}} \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\, dr \\
&\leqslant \|v_0\|_{B^s_{p,q}} + \int_0^T \|w(r)\|_{B^s_{p,q}} \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\, dr \\
&\leqslant \|v_0\|_{B^s_{p,q}} + CT\|w\|_{X^s_T} \|v\|_{X^s_T},
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$. *Consequentemente,*

$$\|v\|_{X^s_T} \leqslant \|v_0\|_{B^s_{p,q}} + CT\|w\|_{X^s_T} \|v\|_{X^s_T}.$$

2.1 Existência de Soluções das Equações de Euler

Nesta seção iremos demonstrar a existência de soluções do sistema (2.26)-(2.28) considerando as hipóteses do item (1) do Teorema 2.0.7, p. 48.

Demonstração da Existência de Soluções. Inicialmente definiremos uma sequência de funções $(v^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$, com $v^{(m)} = (v_1^{(m)}, \ldots, v_n^{(m)}) \in B^s_{p,q}$ satisfazendo, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\partial_t v^{(m)} + (v^{(m-1)} \cdot \nabla) v^{(m)} = -\nabla p^{(m-1)}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{2.45}$$

$$\operatorname{div} v^{(m)}(t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{2.46}$$

$$v^{(m)}(x,0) = S_m v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.47}$$

onde

$$p^{(m)} = \sum_{i,j=1}^{n} (-\Delta)^{-1}\big(\partial_i v_j^{(m-1)} \partial_j v_i^{(m)}\big) \tag{2.48}$$

com $v^{(0)} = v^{(-1)} = 0$, $p^{(0)} = p^{(-1)} = 0$.

Observamos que a existência de tal sequência é garantida de maneira indutiva. Com efeito, das condições $v^{(0)} = 0$, $p^{(0)} = 0$ vemos por meio de (2.45) que o termo $v^{(1)}$ é solução da equação diferencial ordinária $\partial_t v^{(1)} = 0$. Para o passo indutivo, dado $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, vemos que o termo $\nabla p^{(k)}$ é determinado, visto que depende dos termos $v^{(k)}$, $v^{(k-1)}$. Desta forma a equação (2.45) é a equação linear do transporte dada por

$$L(v^{(k+1)}) = -\nabla p^{(k)},$$

onde $L = \partial_t + \sum_{j=1}^{n} v^{(k)} \partial_j$. Sendo que é possível demonstrar a existência de soluções deste tipo de equação quando $v^{(k)}$ é dado (e.g. [23, p. 28]). Além disso, note que as soluções aproximadas $v^{(k)}$ são soluções clássicas de (2.45)-(2.47).

Se garantirmos a existência de certo $T > 0$ tal que $v^{(m)}$ converge para $v \in X_T^s$ na norma de X_T^s, pela Observação 2.0.6, p. 48 e procedendo formalmente, vemos que

$$\begin{aligned}
\partial_t v + (v \cdot \nabla)v &= \lim_{m\to+\infty} \partial_t v^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} \Big(\lim_{m\to+\infty} \big(v_i^{(m-1)} \partial_i v_1^{(m)}\big), \ldots, \\
&\qquad\qquad \lim_{m\to+\infty} \big(v_i^{(m-1)} \partial_i v_n^{(m)}\big) \Big) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \Big(\partial_t v^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} \big(v_i^{(m-1)} \partial_i v_1^{(m)}, \ldots, v_i^{(m-1)} \partial_i v_n^{(m)} \big) \Big) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \Big(\partial_t v^{(m)} + (v^{(m-1)} \cdot \nabla) v^{(m)} \Big) = \lim_{m\to+\infty} \big(-\nabla p^{(m-1)} \big).
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} \big(-\nabla p^{(m-1)} \big) &= \lim_{m\to+\infty} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i v_j^{(m-2)} \partial_j v_i^{(m-1)} \Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \lim_{m\to+\infty} v_j^{(m-2)} \partial_j \lim_{m\to+\infty} v_i^{(m-1)} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i v_j \partial_j v_i = -\nabla p,
\end{aligned}$$

e então

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p.$$

Adicionalmente

$$\operatorname{div} v = \lim_{m\to+\infty} \operatorname{div} v^{(m)} = \lim_{m\to+\infty} 0 = 0.$$

Além de que

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \lim_{m\to+\infty} v^{(m)}(x,0) = \lim_{m\to+\infty} S_m v_0(x) \\ &= \lim_{\substack{m\to+\infty \\ m\geqslant 0}} \Big(S_0 v_0 + \sum_{j=0}^{m} \Delta_j v_0 \Big), \end{aligned}$$

e o Lema C.0.1, p. 87, que apresenta a Decomposição de Littlewood-Paley, leva-nos a

$$v(x,0) = v_0.$$

Logo v satisfaz o sistema (2.26), (2.27), (2.28), p. 48. Em outras palavras, garante-se a existência enunciada no item (1) do Teorema 2.0.7.

Para demonstrar a convergência da sequência $(v^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ iremos demonstrar dois passos preliminares. O primeiro é a limitação uniforme da sequência $(v^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ no espaço $X^s_{T_1}$, para certo $T_1 > 0$, o segundo passo consiste em mostrar que a sequência mencionada é Cauchy no espaço $X^{s-1}_{T_2}$, para certo $0 < T_2 < T_1$. Iremos demonstrar tais passos.

Passo 1:

Consideremos $T_0 > 0$ de tal forma que

$$T_0 \leqslant \frac{1}{4C^2\|v_0\|_{B^s_{p,q}}}, \tag{2.49}$$

e seja $0 < T_1 \leqslant T_0$. A partir da Equação (2.45), p. 54, e considerando a Observação 2.0.9, p. 54, com $v = v^{(m)}$, $w = v^{(m-1)}$, obtemos

$$\|v^{(m)}\|_{X^s_{T_1}} \leqslant \|S_m v_0\|_{B^s_{p,q}} + CT\|v^{(m)}\|_{X^s_{T_1}}\|v^{(m-1)}\|_{X^s_{T_1}}. \tag{2.50}$$

Por meio do Lema 1.5.6, p. 30, concluímos que quando $q \in [1,+\infty)$

$$\begin{aligned} \|S_m v_0\|_{B^s_{p,q}} &= \|S_m v_0\|_{L^p} + \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jqs}\|\Delta_j S_m v_0\|^q_{L^p} \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|S_m v_0\|_{L^p} + \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jqs}\|S_m \Delta_j v_0\|^q_{L^p} \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant C\|v_0\|_{L^p} + \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jqs}C^q\|\Delta_j v_0\|^q_{L^p} \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= C\Big[\|v_0\|_{L^p} + \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jqs}\|\Delta_j v_0\|^q_{L^p} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big] = C\|v_0\|_{B^s_{p,q}}. \end{aligned}$$

O caso $q = \infty$ segue de maneira inteiramente análoga. Desta forma,

$$\|v^{(m)}\|_{X^s_{T_1}} \leqslant C\big(\|v_0\|_{B^s_{p,q}} + T_1\|v^{(m)}\|_{X^s_{T_1}}\|v^{(m-1)}\|_{X^s_{T_1}} \big).$$

É possível agora demonstrar por indução que para cada $m \in \mathbb{N}_0$

$$\|v^{(m)}\|_{X^s_{T_1}} \leqslant 2C\|v_0\|_{B^s_{p,q}}. \tag{2.51}$$

Com efeito, quando $m = 0$, $v^{(m)} = 0$ e não há o que mostrar. Além disso, se supormos que para $k \in \mathbb{N}$ arbitrário

$$\|v^{(k)}\|_{X^s_{T_1}} \leqslant 2C\|v_0\|_{B^s_{p,q}},$$

obtemos pela desigualdade (2.49)

$$\begin{aligned}
\|v^{(k+1)}\|_{X^s_{T_1}} &\leqslant C\|v_0\|_{B^s_{p,q}} + CT_1\|v^{(k+1)}\|_{X^s_{T_1}}\|v^{(k)}\|_{X^s_{T_1}} \\
&\leqslant C\|v_0\|_{B^s_{p,q}} + CT_0\|v^{(k+1)}\|_{X^s_{T_1}} 2C\|v_0\|_{B^s_{p,q}} \\
&\leqslant C\|v_0\|_{B^s_{p,q}} + 2C^2\frac{\|v_0\|_{B^s_{p,q}}}{4C^2\|v_0\|_{B^s_{p,q}}}\|v^{(k+1)}\|_{X^s_{T_1}} \\
&= C\|v_0\|_{B^s_{p,q}} + \frac{1}{2}\|v^{(k+1)}\|_{X^s_{T_1}},
\end{aligned}$$

desigualdade que implica que

$$\|v^{(k+1)}\|_{X^s_{T_1}} \leqslant 2C\|v_0\|_{B^s_{p,q}}. \tag{2.52}$$

O que conclui a desigualdade (2.51). Garantimos assim a limitação da sequência $(v^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ na norma $\|\cdot\|_{X^s_{T_1}}$.

Passo 2:

O próximo passo será mostrar que a sequência $(v^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ é de Cauchy não com relação à norma $\|\cdot\|_{X^s_{T_1}}$, mas com relação à norma $\|\cdot\|_{X^{s-1}_{T_1}}$. Como $X^{s-1}_{T_1}$ é espaço de Banach (ver observação feita abaixo da Proposição 2.0.5, p. 46), isto será suficiente para a demonstração da existência de $v \in X^{s-1}_T$, de tal forma que $\lim_{m\to\infty} v^{(m)} = v$ em X^{s-1}_T, para algum $T > 0$. Visto que os termos da sequência $(v^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ são soluções clássicas do sistema (2.45)-(2.47), p. 54, podemos calcular as diferenças membro a membro entre as equações (2.45) nos passos $m+1$ e m, nesta ordem. Obtêm-se que

$$\begin{aligned}
&\partial_t v^{(m+1)} + (v^{(m)}\cdot\nabla)v^{(m+1)} - \partial_t v^{(m)} - (v^{(m-1)}\cdot\nabla)v^{(m)} = -\nabla p^{(m)} + \nabla p^{(m-1)} \\
\Rightarrow\quad &\partial_t\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big) + (v^{(m)}\cdot\nabla)v^{(m+1)} - (v^{(m)}\cdot\nabla)v^{(m)} + (v^{(m)}\cdot\nabla)v^{(m)} \\
&\qquad\qquad - (v^{(m-1)}\cdot\nabla)v^{(m)} = \nabla\big(-p^{(m)} + p^{(m-1)}\big) \\
\Rightarrow\quad &\partial_t\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big) + (v^{(m)}\cdot\nabla)(v^{(m+1)} - v^{(m)}) + \big((v^{(m)} - v^{(m-1)})\cdot\nabla\big)v^{(m)} \\
&\qquad\qquad = -\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big).
\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo com a equação (2.47), obtemos o sistema

$$\begin{aligned}
&\partial_t\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big) + (v^{(m)}\cdot\nabla)(v^{(m+1)} - v^{(m)}) + \big((v^{(m)} - v^{(m-1)})\cdot\nabla\big)v^{(m)} \\
&\qquad = -\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} v^{(m)}(t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{2.54}$$

$$\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big)(x,0) = \Delta_{m+1}v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.55}$$

Seja $m \in \mathbb{N}$. Aplicando Δ_j e somando $(S_{j-2}v^{(m)} \cdot \nabla)\Delta_j(v^{(m+1)} - v^{(m)})$ em ambos os membros de (2.53), temos que

$$\partial_t \Delta_j\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big) + (S_{j-2}v^{(m)} \cdot \nabla)\Delta_j(v^{(m+1)} - v^{(m)}) = (S_{j-2}v^{(m)} \cdot \nabla)\Delta_j(v^{(m+1)} - v^{(m)}) - \Delta_j\big[(v^{(m)} \cdot \nabla)(v^{(m+1)} - v^{(m)})\big] + \Delta_j\big[\big((v^{(m-1)} - v^{(m)}) \cdot \nabla\big)v^{(m)}\big] - \Delta_j\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big).$$

Usando o fato de que $\operatorname{div} S_{j-2}v^{(m)} = 0$, podemos aplicar o Lema E.0.4, p. 99, para garantir que para cada $t \in [0, T_1]$

$$\begin{aligned}\big\|\Delta_j\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big)(t)\big\|_{L^p} &\leqslant \big\|\Delta_j\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big)(x,0)\big\|_{L^p} \\ &+ \int_0^t \big\|(S_{j-2}v^{(m)} \cdot \nabla)\Delta_j(v^{(m+1)} - v^{(m)})(r) - \Delta_j\big[(v^{(m)} \cdot \nabla)(v^{(m+1)} - v^{(m)})\big](r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r \\ &+ \int_0^t \big\|\Delta_j\big[\big((v^{(m-1)} - v^{(m)}) \cdot \nabla\big)v^{(m)}\big](r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r + \int_0^t \big\|\Delta_j\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big)(r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Segue da desigualdade de Minkowski nos espaços l^p (Lema 1.1.7, p. 17) que

$$\begin{aligned}\|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(t)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} &= \|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(t)\|_{L^p} + \big\|\big(2^{j(s-1)}\|\Delta_j(v^{(m+1)} - v^{(m)})\|_{L^p}\big)_{j\in\mathbb{Z}}\big\|_{l^q} \\ &\leqslant \|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(t)\|_{L^p} + \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|\Delta_j\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big)(x,0)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q} \\ &+ \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\int_0^t \big\|(S_{j-2}v^{(m)} \cdot \nabla)\Delta_j(v^{(m+1)} - v^{(m)})(r) \\ &\qquad - \Delta_j\big[(v^{(m)} \cdot \nabla)(v^{(m+1)} - v^{(m)})\big](r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q} \\ &+ \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\int_0^t \big\|\Delta_j\big[\big((v^{(m-1)} - v^{(m)}) \cdot \nabla\big)v^{(m)}\big](r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q} \\ &+ \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\int_0^t \big\|\Delta_j\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big)(r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\begin{aligned}\|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(t)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} &\leqslant \|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(t)\|_{L^p} \\ &+ \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|\Delta_j\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big)(x,0)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q} \\ &+ \int_0^t \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|(S_{j-2}v^{(m)} \cdot \nabla)\Delta_j(v^{(m+1)} - v^{(m)})(r) \\ &\qquad - \Delta_j\big[(v^{(m)} \cdot \nabla)(v^{(m+1)} - v^{(m)})\big](r)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r \\ &+ \int_0^t \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|\Delta_j\big[\big((v^{(m-1)} - v^{(m)}) \cdot \nabla\big)v^{(m)}\big](r)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r \\ &+ \int_0^t \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|\Delta_j\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big)(r)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Desta forma, por meio do Lema E.0.4, p. 99, vemos que

$$\begin{aligned}
\|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(t)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \leqslant{}& \|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(x,0)\|_{L^p} + \int_0^t \big\|\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big)(r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r \\
&+ \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|\Delta_j\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big)(x,0)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q} \\
&+ \int_0^t \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|(S_{j-2}v^{(m)}\cdot\nabla)\Delta_j(v^{(m+1)} - v^{(m)})(r) \\
&\qquad - \Delta_j\big[(v^{(m)}\cdot\nabla)(v^{(m+1)} - v^{(m)})\big](r)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|\Delta_j\big[\big((v^{(m-1)} - v^{(m)})\cdot\nabla\big)v^{(m)}\big](r)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|\Delta_j\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big)(r)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(t)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \leqslant{}& \|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(x,0)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} + \int_0^t \big\|\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big)(r)\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|(S_{j-2}v^{(m)}\cdot\nabla)\Delta_j(v^{(m+1)} - v^{(m)})(r) \\
&\qquad - \Delta_j\big[(v^{(m)}\cdot\nabla)(v^{(m+1)} - v^{(m)})\big](r)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|\Delta_j\big[\big((v^{(m-1)} - v^{(m)})\cdot\nabla\big)v^{(m)}\big](r)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

de onde conclui-se que

$$\begin{aligned}
\|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(t)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \leqslant{}& \|\Delta_{m+1}v_0\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} + \int_0^t \big\|\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big)(r)\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|(S_{j-2}v^{(m)}\cdot\nabla)\Delta_j(v^{(m+1)} - v^{(m)})(r) \\
&\qquad - \Delta_j\big[(v^{(m)}\cdot\nabla)(v^{(m+1)} - v^{(m)})\big](r)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \big\|\big((v^{(m-1)} - v^{(m)})\cdot\nabla\big)v^{(m)}(r)\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (2.56)
\end{aligned}$$

Estimaremos cada um dos termos definidos acima.

- I_1: Pelo Lema E.0.2, p. 95, item (2)

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant C2^{-m-1}\|\Delta_{m+1}v_0\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}} \\
&= C2^{-m}\big\|\big(2^{js}\|\Delta_j\Delta_{m+1}v_0\|_{L^p}\big)_{j\in\mathbb{Z}}\big\|_{l^q},
\end{aligned}$$

logo, pela desigualdade de Young (Lema 1.1.13, página 18)

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant C2^{-m}\big\|\big(2^{js}\|\varphi_{m+1}\|_{L^1}\big\|\Delta_j v_0\big\|_{L^p}\big)_{j\in\mathbb{Z}}\big\|_{l^q} \\
&= C2^{-m}\big\|\big(2^{js}\big\|\Delta_j v_0\big\|_{L^p}\big)_{j\in\mathbb{Z}}\big\|_{l^q} \\
&= C2^{-m}\|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \\
&\leqslant C2^{-m}\|v_0\|_{B^s_{p,q}}.
\end{aligned}$$

- I_2: Veja que por meio das propriedades demonstradas na Proposição D.0.3, p. 93

$$\begin{aligned}
\Delta_k(\nabla p^{(m)} - \nabla p^{(m-1)}) &= \Delta_k \nabla(p^{(m)} - p^{(m-1)}) \\
&= \Delta_k \sum_{i,j=1}^{n} \nabla(-\Delta)^{-1}\big(\partial_i v_j^{(m-1)}\partial_j v_i^{(m)} - \partial_i v_j^{(m-2)}\partial_j v_i^{(m-1)}\big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_k \nabla(-\Delta)^{-1}\big(\partial_i v_j^{(m-1)}\partial_j v_i^{(m)} - \partial_i v_j^{(m-1)}\partial_j v_i^{(m-1)} \\
&\qquad\qquad + \partial_i v_j^{(m-1)}\partial_j v_i^{(m-1)} - \partial_i v_j^{(m-2)}\partial_j v_i^{(m-1)}\big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \nabla(-\Delta)^{-1}\Delta_k\big[\partial_i v_j^{(m-1)}\partial_j\big(v_i^{(m)} - v_i^{(m-1)}\big) \\
&\qquad\qquad + \big(\partial_i v_j^{(m-1)} - \partial_i v_j^{(m-2)}\big)\partial_j v_i^{(m-1)}\big].
\end{aligned}$$

Da condição de que $\operatorname{div} v^{(m)} = 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j^{(m-1)} = 0,$$

então segue pela regra do produto que

$$\begin{aligned}
\Delta_k(\nabla p^{(m+1)} - \nabla p^{(m)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \nabla(-\Delta)^{-1}\Delta_k\Big\{\partial_j\big[\big(v_i^{(m)} - v_i^{(m-1)}\big)\partial_i v_j^{(m-1)}\big] \\
+ \partial_i\big[\big(v_j^{(m-1)} - v_j^{(m-2)}\big)\partial_j v_i^{(m-1)}\big]\Big\}.
\end{aligned}$$

Desta maneira

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^t \|(\nabla p^{(m+1)} - \nabla p^{(m)})(r)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^t \big\|(2^{k(s-1)}\|\Delta_k(\nabla p^{(m+1)} - \nabla p^{(m)})(r)\|_{L^p})_{k\in\mathbb{Z}}\big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^t \Bigg\|\Bigg(2^{k(s-1)}\Bigg\|\sum_{i,j=1}^{n}\nabla(-\Delta)^{-1}\Delta_k\Big\{\partial_j\big[\big(v_i^{(m)} - v_i^{(m-1)}\big)\partial_i v_j^{(m-1)}\big](r) \\
&\qquad\qquad + \partial_i\big[\big(v_j^{(m-1)} - v_j^{(m-2)}\big)\partial_j v_i^{(m-1)}\big](r)\Big\}\Bigg\|_{L^p}\Bigg)_{k\in\mathbb{Z}}\Bigg\|_{l^q}\,\mathrm{d}r \\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t \Bigg\|\Bigg(\Bigg\|\nabla(-\Delta)^{-1}\Big\{\partial_j\big[2^{k(s-1)}\Delta_k\big(\big(v_i^{(m)} - v_i^{(m-1)}\big)\partial_i v_j^{(m-1)}\big)\big](r) \\
&\qquad\qquad + \partial_i\big[2^{k(s-1)}\Delta_k\big(\big(v_j^{(m-1)} - v_j^{(m-2)}\big)\partial_j v_i^{(m-1)}\big)\big](r)\Big\}\Bigg\|_{L^p}\Bigg)_{k\in\mathbb{Z}}\Bigg\|_{l^q}\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

logo

$$
\begin{aligned}
I_2 \leqslant & \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \Big\| \Big(\Big\| \nabla(-\Delta)^{-1}\partial_j \big[2^{k(s-1)} \Delta_k \big(\big(v_i^{(m)} - v_i^{(m-1)} \big) \partial_i v_j^{(m-1)} \big) \big](r) \Big\|_{L^p} \Big)_{k\in\mathbb{Z}} \Big\|_{l^q} \mathrm{d}r \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \Big\| \Big(\Big\| \nabla(-\Delta)^{-1}\partial_i \big[2^{k(s-1)} \Delta_k \big(\big(v_j^{(m-1)} - v_j^{(m-2)} \big) \partial_j v_i^{(m-1)} \big) \big](r) \Big\|_{L^p} \Big)_{k\in\mathbb{Z}} \Big\|_{l^q} \mathrm{d}r \\
\leqslant & \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \Big\| \Big(\sum_{k-1}^{n} \Big\| \partial_k(-\Delta)^{-1}\partial_j \big[2^{k(s-1)} \Delta_k \big(\big(v_i^{(m)} - v_i^{(m-1)} \big) \partial_i v_j^{(m-1)} \big) \big](r) \Big\|_{L^p} \Big)_{k\in\mathbb{Z}} \Big\|_{l^q} \mathrm{d}r + \\
& \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \Big\| \Big(\sum_{k-1}^{n} \Big\| \partial_k(-\Delta)^{-1}\partial_i \big[2^{k(s-1)} \Delta_k \big(\big(v_j^{(m-1)} - v_j^{(m-2)} \big) \partial_j v_i^{(m-1)} \big) \big](r) \Big\|_{L^p} \Big)_{k\in\mathbb{Z}} \Big\|_{l^q} \mathrm{d}r.
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Como vimos, $\partial_k(-\Delta)^{-1}\partial_i$, $\partial_k(-\Delta)^{-1}\partial_j$ são SIO's, então da sua limitação de L^p em L^p, quando $p \in (1, \infty)$ (ver Observação 1.5.9, p. 32)

$$
\begin{aligned}
I_2 \leqslant C \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t & \Big\| \Big(\big\| \big[2^{k(s-1)} \Delta_k \big(\big(v_i^{(m)} - v_i^{(m-1)} \big) \partial_i v_j^{(m-1)} \big) \big](r) \big\|_{L^p} \Big)_{k\in\mathbb{Z}} \Big\|_{l^q} \\
& + \Big\| \Big(\big\| \big[2^{k(s-1)} \Delta_k \big(\big(v_j^{(m-1)} - v_j^{(m-2)} \big) \partial_j v_i^{(m-1)} \big) \big](r) \big\|_{L^p} \Big)_{k\in\mathbb{Z}} \Big\|_{l^q} \mathrm{d}r \\
\leqslant C \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t & \big\| \big[\big(v_i^{(m)} - v_i^{(m-1)} \big) \partial_i v_j^{(m-1)} \big](r) \big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \\
& + \big\| \big[\big(v_j^{(m-1)} - v_j^{(m-2)} \big) \partial_j v_i^{(m-1)} \big](r) \big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \mathrm{d}r \\
= C \int_0^t \sum_{i,j=1}^{n} & \big\| \big[\big(v_i^{(m)} - v_i^{(m-1)} \big) \partial_i v_j^{(m-1)} \big](r) \big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \\
& + \sum_{i,j=1}^{n} \big\| \big[\big(v_j^{(m-1)} - v_j^{(m-2)} \big) \partial_j v_i^{(m-1)} \big](r) \big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema E.0.7, p. 110, com $v = v^{(m)} - v^{(m-1)}$, $w = v^{(m-1)}$ no primeiro termo e $v = v^{(m-1)} - v^{(m-2)}$, $w = v^{(m-1)}$ no segundo termo do integrando acima

$$
\begin{aligned}
I_2 \leqslant C \int_0^t & \| v^{(m-1)}(r) \|_{B^s_{p,q}} \big\| \big(v^{(m)} - v^{(m-1)} \big)(r) \big\|_{B^{s-1}_{p,q}} \\
& + \| v^{(m-1)}(r) \|_{B^s_{p,q}} \big\| \big(v^{(m-1)} - v^{(m-2)} \big)(r) \big\|_{B^{s-1}_{p,q}} \mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
I_2 \leqslant C \int_0^t & \| v^{(m-1)}(r) \|_{B^s_{p,q}} \\
& \Big(\big\| \big(v^{(m)} - v^{(m-1)} \big)(r) \big\|_{B^{s-1}_{p,q}} + \big\| \big(v^{(m-1)} - v^{(m-2)} \big)(r) \big\|_{B^{s-1}_{p,q}} \Big) \mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

- I_3: Pelo Lema E.0.5 (página 100)

$$
\begin{aligned}
I_3 \leqslant \int_0^t \Big\| \Big(2^{j(s-1)} \Big[& C \| \nabla (v^{(m+1)} - v^{(m)})(r) \|_{L^\infty} \sum_{j' \geqslant j-4} \| \Delta_{j'} v^{(m)}(r) \|_{L^p} \\
& + C \| \nabla v^{(m)}(r) \|_{L^\infty} \sum_{j' \geqslant j-4} \| \Delta_{j'} (v^{(m+1)} - v^{(m)})(r) \|_{L^p} \Big] \Big)_{j\in\mathbb{Z}} \Big\|_{l^q} \mathrm{d}r,
\end{aligned}
$$

consequentemente

$$I_3 \leqslant C\int_0^t \|\nabla(v^{(m+1)}-v^{(m)})(r)\|_{L^\infty}\Big\|\Big(2^{j(s-1)}\Big[\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}v^{(m)}(r)\|_{L^p}\Big]\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r$$
$$+\,C\int_0^t \|\nabla v^{(m)}(r)\|_{L^\infty}\Big\|\Big(2^{j(s-1)}\Big[\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}(v^{(m+1)}-v^{(m)})(r)\|_{L^p}\Big]\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r.$$

De maneira análoga ao realizado para garantir as desigualdades (2.37), (2.38) (p. 51), obtemos

$$\begin{aligned}I_3 &\leqslant C\int_0^t \|\nabla v^{(m)}(r)\|_{L^\infty}\|\big(v^{(m+1)}-v^{(m)}\big)(r)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\&\qquad\qquad + C\int_0^t \|\nabla\big(v^{(m+1)}-v^{(m)}\big)(r)\|_{L^\infty}\|v^{(m)}(r)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\&\leqslant C\int_0^t \|v^{(m)}(r)\|_{L^\infty}\|\big(v^{(m+1)}-v^{(m)}\big)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\&\qquad\qquad + C\int_0^t \|\big(v^{(m+1)}-v^{(m)}\big)(r)\|_{L^\infty}\|v^{(m)}(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o Lema de Bernstein (ver 1.2.8, p. 25). Usando a desigualdade 2.8, p. 38

$$\begin{aligned}I_3 &\leqslant C\int_0^t \|v^{(m)}(r)\|_{B^s_{p,q}}\|\big(v^{(m+1)}-v^{(m)}\big)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\&\qquad\qquad + C\int_0^t \|\big(v^{(m+1)}-v^{(m)}\big)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\|v^{(m)}(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Por uma comparação termo a termo da expansão, vemos que dados $k>0$ e $f\in B^s_{p,q}$ arbitrária, $\|f\|_{B^s_{p,q}}\leqslant\|f\|_{B^{s+k}_{p,q}}$, então

$$\begin{aligned}I_3 &\leqslant C\int_0^t \|v^{(m)}(r)\|_{B^s_{p,q}}\|\big(v^{(m+1)}-v^{(m)}\big)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\&\qquad\qquad + C\int_0^t \|\big(v^{(m+1)}-v^{(m)}\big)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\|v^{(m)}(r)\|_{B^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\&= C\int_0^t \|v^{(m)}(r)\|_{B^s_{p,q}}\|\big(v^{(m+1)}-v^{(m)}\big)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

- I_4: Neste caso

$$I_4=\int_0^t \big\|\big(v^{(m-1)}-v^{(m)}\big)\cdot\big(\nabla v^{(m)}\big)(r)\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r,$$

então pela desigualdade 2.13, p. 41

$$\begin{aligned}I_4 &= \int_0^t \Big[\big\|\big(v^{(m-1)}-v^{(m)}\big)(r)\big\|_{L^\infty}\big\|\nabla v^{(m)}(r)\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\\&\qquad\qquad + \big\|\big(v^{(m-1)}-v^{(m)}\big)(r)\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\big\|\nabla v^{(m)}(r)\big\|_{L^\infty}\Big]\,\mathrm{d}r\\&\leqslant \int_0^t \Big[C\big\|\big(v^{(m-1)}-v^{(m)}\big)(r)\big\|_{B^{s-1}_{p,q}}\big\|\nabla v^{(m)}(r)\big\|_{B^{s-1}_{p,q}}\\&\qquad\qquad + C\big\|\big(v^{(m-1)}-v^{(m)}\big)(r)\big\|_{B^{s-1}_{p,q}}\big\|\nabla v^{(m)}(r)\big\|_{B^{s-1}_{p,q}}\Big]\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Concluímos assim que

$$I_4 \leqslant C\int_0^t \|v^{(m)}(r)\|_{B^s_{p,q}} \big\|\big(v^{(m-1)} - v^{(m)}\big)(r)\big\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r.$$

Combinando as estimativas para I_1, I_2, I_3, I_4, obtemos para cada $t \in [0, T_1]$

$$\begin{aligned}
&\big\|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(t)\big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \leqslant C2^{-m}\|v_0\|_{B^s_{p,q}} \\
&+ C\int_0^t \|v^{(m)}(r)\|_{B^s_{p,q}}\Big(\big\|\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big)(r)\big\|_{B^{s-1}_{p,q}} + \big\|\big(v^{(m)} - v^{(m-1)}\big)(r)\big\|_{B^{s-1}_{p,q}}\Big)\,\mathrm{d}r \\
&+ C\int_0^t \|v^{(m-1)}(r)\|_{B^s_{p,q}}\Big(\big\|\big(v^{(m)} - v^{(m-1)}\big)(r)\big\|_{B^{s-1}_{p,q}} + \big\|\big(v^{(m-1)} - v^{(m-2)}\big)(r)\big\|_{B^{s-1}_{p,q}}\Big)\,\mathrm{d}r.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Estamos interessados em calcular a norma de $v^{(m+1)} - v^{(m)}$ no espaço não-homogêneo $B^{s-1}_{p,q}$, então iremos agora estimar a norma L^p de $v^{(m+1)} - v^{(m)}$.
Como $v^{(m+1)} - v^{(m)}$ satisfaz a igualdade (2.53), integrando-a de 0 a $t \in [0, T_1]$ em função do tempo e aplicando a norma L^p em ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned}
\big\|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(t)\big\|_{L^p} &\leqslant \big\|(v^{(m+1)} - v^{(m)})(0)\big\|_{L^p} + \left\|\int_0^t \big(v^{(m)}\cdot\nabla\big)\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big)(r)\,\mathrm{d}r\right\|_{L^p} \\
&+ \left\|\int_0^t \big((v^{(m)} - v^{(m-1)})\cdot\nabla\big)v^{(m)}(r)\,\mathrm{d}r\right\|_{L^p} + \left\|\int_0^t \nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big)(r)\,\mathrm{d}r\right\|_{L^p} \\
&\leqslant \big\|\Delta_{m+1}v_0\big\|_{L^p} + \int_0^t \big\|\big(v^{(m)}\cdot\nabla\big)\big(v^{(m+1)} - v^{(m)}\big)(r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \big\|\big((v^{(m)} - v^{(m-1)})\cdot\nabla\big)v^{(m)}(r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r + \int_0^t \big\|\nabla\big(p^{(m)} - p^{(m-1)}\big)(r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Estimaremos os termos acima.

Pelo Lema de Bernstein (Lema 1.2.8, p. 25)

$$\begin{aligned}
\big\|\Delta_{m+1}v_0\big\|_{L^p} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \big\|\Delta_{m+1}v_0\big\|_{L^p} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n C_i 2^{-(m+3)}\big\|\partial_i\Delta_{m+1}v_0\big\|_{L^p} \\
&= C2^{-m}\sum_{i=1}^n \big\|\Delta_{m+1}\partial_i v_0\big\|_{L^p} \\
&\leqslant C2^{-m}\sum_{i=1}^n \big\|\partial_i v_0\big\|_{L^p},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a desigualdade de Young (Proposição 1.1.13, p. 18).

Desta forma

$$\begin{aligned}\|\Delta_{m+1}v_0\|_{L^p} &\leqslant C2^{-m}\sum_{i=1}^{n}\|\partial_i v_0\|_{L^p}\\ &\leqslant C2^{-m}\|\nabla v_0\|_{L^p}\\ &\leqslant C2^{-m}\|\nabla v_0\|_{B^{s-1}_{p,q}}\\ &\leqslant C2^{-m}\|v_0\|_{B^s_{p,q}},\end{aligned} \tag{2.60}$$

pois podemos usar a estimativa obtida no item ((4)) do Lema E.0.2, p. 95.

Além disso, por meio da desigualdade de Hölder (Lema 1.1.8, p. 17) é possível escrever

$$\begin{aligned}\|(v^{(m)}\cdot\nabla)(v^{(m+1)}-v^{(m)})\|_{L^p} &\leqslant C\|v^{(m)}\|_{L^p}\|\nabla(v^{(m+1)}-v^{(m)})\|_{L^\infty}\\ &\leqslant C\|v^{(m)}\|_{B^s_{p,q}}\|v^{(m+1)}-v^{(m)}\|_{L^\infty}\\ &\leqslant C\|v^{(m)}\|_{B^s_{p,q}}\|v^{(m+1)}-v^{(m)}\|_{B^{s-1}_{p,q}}\end{aligned} \tag{2.61}$$

onde usamos a desigualdade 2.8, p. 38 na última passagem.

De maneira análoga obtemos

$$\|((v^{(m)}-v^{(m-1)})\cdot\nabla)v^{(m)}\|_{L^p} \leqslant C\|v^{(m)}\|_{B^s_{p,q}}\|v^{(m-1)}-v^{(m)}\|_{B^{s-1}_{p,q}} \tag{2.62}$$

Por último, semelhantemente ao realizado na parcela I_2 acima, mais especíﬁcamente, de maneira similar ao argumento usado para obter a desigualdade (2.57), p. 61

$$\begin{aligned}\|\nabla(p^{(m)}-p^{(m-1)})\|_{L^p} &\leqslant \left\|\sum_{i,j=1}^{n}(-\Delta)^{-1}\partial_j\big((v_i^{(m)}-v_i^{(m-1)})\partial_i v_j^{(m-1)}\big)\right\|_{L^p}\\ &\quad+\left\|\sum_{i,j=1}^{n}(-\Delta)^{-1}\partial_i\big((v_j^{(m-1)}-v_j^{(m-2)})\partial_j v_i^{(m-1)}\big)\right\|_{L^p}\\ &\leqslant C\left\|\big((v_i^{(m)}-v_i^{(m-1)})\partial_i v_j^{(m-1)}\big)\right\|_{L^p}\\ &\quad+C\left\|\big((v_i^{(m-1)}-v_i^{(m-2)})\partial_i v_j^{(m-1)}\big)\right\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Então tal como fizemos para obter (2.61), segue que

$$\begin{aligned}&\|\nabla(p^{(m)}-p^{(m-1)})\|_{L^p}\\ &\qquad\leqslant C\|v^{(m-1)}\|_{B^s_{p,q}}\Big(\|v^{(m)}-v^{(m-1)}\|_{B^{s-1}_{p,q}}+\|v^{(m-1)}-v^{(m-2)}\|_{B^{s-1}_{p,q}}\Big).\end{aligned} \tag{2.63}$$

Substituindo as estimativas (2.60), (2.61), (2.62), (2.63) em (2.59), obtém-se

$$\begin{aligned}
\left\|(v^{(m-1)}-v^{(m)})(t)\right\|_{L^p} &\leqslant C2^{-m}\|v_0\|_{B^s_{p,q}}\\
&+C\int_0^t \left\|v^{(m)}(r)\right\|_{B^s_{p,q}}\left(\left\|(v^{(m+1)}-v^{(m)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}+\left\|(v^{(m)}-v^{(m-1)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\right)\mathrm{d}r\\
&+C\int_0^t \left\|v^{(m-1)}(r)\right\|_{B^s_{p,q}}\left(\left\|(v^{(m)}-v^{(m-1)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}+\left\|(v^{(m-1)}-v^{(m-2)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\right)\mathrm{d}r.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Logo, pelas inequações (2.58) e (2.64)

$$\begin{aligned}
\left\|(v^{(m+1)}-v^{(m)})(t)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}} &= \left\|(v^{(m+1)}-v^{(m)})(t)\right\|_{L^p}+\left\|(v^{(m+1)}-v^{(m)})(t)\right\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\\
&\leqslant 2C2^{-m}\|v_0\|_{B^s_{p,q}}\\
&+2C\int_0^t \left\|v^{(m)}(r)\right\|_{B^s_{p,q}}\left(\left\|(v^{(m+1)}-v^{(m)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}+\left\|(v^{(m)}-v^{(m-1)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\right)\mathrm{d}r\\
&+2C\int_0^t \left\|v^{(m-1)}(r)\right\|_{B^s_{p,q}}\left(\left\|(v^{(m)}-v^{(m-1)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}+\left\|(v^{(m-1)}-v^{(m-2)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\right)\mathrm{d}r
\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
&= C2^{-m}\|v_0\|_{B^s_{p,q}}\\
&+C\int_0^t \left\|v^{(m)}(r)\right\|_{B^s_{p,q}}\left(\left\|(v^{(m+1)}-v^{(m)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}+\left\|(v^{(m)}-v^{(m-1)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\right)\mathrm{d}r\\
&+C\int_0^t \left\|v^{(m-1)}(r)\right\|_{B^s_{p,q}}\left(\left\|(v^{(m)}-v^{(m-1)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}+\left\|(v^{(m-1)}-v^{(m-2)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\right)\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Como $t\in[0,T_1]$, da estimativa (2.51), p. 56

$$\begin{aligned}
\left\|(v^{(m+1)}-v^{(m)})(t)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}} &\leqslant C2^{-m}\|v_0\|_{B^s_{p,q}}\\
&+C\int_0^t 2C\|v_0\|_{B^s_{p,q}}\left(\left\|(v^{(m+1)}-v^{(m)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}+\left\|(v^{(m)}-v^{(m-1)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\right)\mathrm{d}r\\
&+C\int_0^t 2C\|v_0\|_{B^s_{p,q}}\left(\left\|(v^{(m)}-v^{(m-1)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}+\left\|(v^{(m-1)}-v^{(m-2)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\right)\mathrm{d}r\\
&\leqslant C2^{-m}+C\int_0^{T_1}\left\|(v^{(m+1)}-v^{(m)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\mathrm{d}r\\
&+C\int_0^{T_1}\left\|(v^{(m)}-v^{(m-1)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\mathrm{d}r+C\int_0^{T_1}\left\|(v^{(m-1)}-v^{(m-2)})(r)\right\|_{B^{s-1}_{p,q}}\mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

onde C é agora uma constante dependente de $\|v_0\|_{B^s_{p,q}}$. Vemos disto que

$$\begin{aligned}
\left\|(v^{(m+1)}-v^{(m)})(t)\right\|_{X^{s-1}_{T_1}} &\leqslant C2^{-m}+C\int_0^{T_1}\left\|v^{(m+1)}-v^{(m)}\right\|_{X^{s-1}_{T_1}}\mathrm{d}r\\
&+C\int_0^{T_1}\left\|v^{(m)}-v^{(m-1)}\right\|_{X^{s-1}_{T_1}}\mathrm{d}r+C\int_0^{T_1}\left\|v^{(m-1)}-v^{(m-2)}\right\|_{X^{s-1}_{T_1}}\mathrm{d}r\\
&= C2^{-m}+CT_1\left\|v^{(m+1)}-v^{(m)}\right\|_{X^{s-1}_{T_1}}+CT_1\left\|v^{(m)}-v^{(m-1)}\right\|_{X^{s-1}_{T_1}}\\
&+CT_1\left\|v^{(m-1)}-v^{(m-2)}\right\|_{X^{s-1}_{T_1}}.
\end{aligned}$$

Como obtemos a desigualdade acima apenas com a suposição de que $T_1 \in (0, T_0)$, podemos considerar $0 < T_1 \leqslant \min\{T_0, C^{-1}\}$. Consequentemente

$$\begin{aligned}
&\left\| v^{(m+1)} - v^{(m)} \right\|_{X^{s-1}_{T_1}} \\
&\qquad \leqslant (1 - CT_1)^{-1}\Big(C2^{-m} + CT_1 \left\| v^{(m)} - v^{(m-1)} \right\|_{X^{s-1}_{T_1}} + CT_1 \left\| v^{(m-1)} - v^{(m-2)} \right\|_{X^{s-1}_{T_1}} \Big) \\
&\qquad = C2^{-m} + CT_1 \left\| v^{(m)} - v^{(m-1)} \right\|_{X^{s-1}_{T_1}} + CT_1 \left\| v^{(m-1)} - v^{(m-2)} \right\|_{X^{s-1}_{T_1}}. \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

Observamos que como C depende de $\|v_0\|_{B^s_{p,q}}$, T_1 também depende de $\|v_0\|_{B^s_{p,q}}$. Considere agora $T_2 = T_2(\|v_0\|_{B^s_{p,q}}) = \min\{T_1, (2^5 C)^{-1}\}$, mostraremos que existe $C > 0$ satisfazendo

$$\left\| v^{(m+1)} - v^{(m)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} \leqslant C2^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0. \qquad (2.67)$$

Como $T_2 \leqslant T_0$, por construção a desigualdade (2.66) pode ser considerada também em termos de T_2. Veja que quando $m = 0$

$$\left\| v^{(m+1)} - v^{(m)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} = \left\| v^{(1)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} = K = K2^{-m}.$$

Além disso, podemos mostrar por indução que para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\left\| v^{(m+1)} - v^{(m)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} \leqslant \left(\sum_{i=0}^{m-1} 2^{-i} C_1 + 2^{-m} K \right) 2^{-m}. \qquad (2.68)$$

Quando $m = 1$, pela desigualdade (2.66),

$$\begin{aligned}
\left\| v^{(2)} - v^{(1)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} &\leqslant C_1 2^{-1} + C_1 T_2 \left\| v^{(1)} - v^{(0)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} + C_1 T_2 \left\| v^{(0)} - v^{(-1)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} \\
&\leqslant C_1 2^{-1} + 2^{-5} K \leqslant C_1 2^{-1} + 2^{-2} K \\
&= \left(\sum_{i=0}^{0} 2^{-i} C_1 + 2^{-1} K \right) 2^{-1}.
\end{aligned}$$

Supondo agora que para $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, desde que $m \leqslant k$, tenhamos

$$\left\| v^{(m+1)} - v^{(m)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} \leqslant \left(\sum_{i=0}^{m-1} 2^{-i} C_1 + 2^{-m} K \right) 2^{-m}.$$

Então, considerando a desigualdade (2.66),

$$\begin{aligned}
&\left\| v^{(k+2)} - v^{(k+1)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} \leqslant C_1 2^{-(k+1)} + 2^{-5} \left\| v^{(k+1)} - v^{(k)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} + 2^{-5} \left\| v^{(k)} - v^{(k-1)} \right\|_{X^{s-1}_{T_2}} \\
&\leqslant C_1 2^{-(k+1)} + 2^{-5} \left(\sum_{i=0}^{k-1} 2^{-i} C_1 + 2^{-k} K \right) 2^{-k} + 2^{-5} \left(\sum_{i=0}^{k-2} 2^{-i} C_1 + 2^{-(k-1)} K \right) 2^{-(k-1)} \\
&\leqslant C_1 2^{-(k+1)} + \left[\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \left(2^{-2} C_1 \right) + 2^{-(k+1)} \left(2^{-2} K \right) \right] 2^{-(k+2)} \\
&\qquad\qquad + \left[\sum_{i=1}^{k-1} 2^{-i} \left(2^{-2} C_1 \right) + 2^{-k} \left(2^{-2} K \right) \right] 2^{-(k+1)},
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}\left\|v^{(k+2)}-v^{(k+1)}\right\|_{X^{s-1}_{T_2}} &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k}2^{-i}\left(2^{-2}C_1\right)+2^{-(k+1)}\left(2^{-2}K\right)\right)2^{-(k+2)}\\ &\qquad + \left(\sum_{i=0}^{k-1}2^{-i}\left(2^{-2}C_1\right)+2^{-k}\left(2^{-2}K\right)\right)2^{-(k+1)}\\ &\leqslant 2^{-(k+1)}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}2^{-i}\left(2^{-2}C_1\right)+2^{-(k+1)}\left(2^{-2}K\right)\right)+\left(\sum_{i=0}^{k-1}2^{-i}\left(2^{-2}C_1\right)+2^{-k}\left(2^{-2}K\right)\right)\right]\\ &\leqslant 2^{-(k+1)}\left[\sum_{i=0}^{k}2^{-i}(2^{-1}C_1)+2^{-(k+1)}(2^{-2}K+2^{-1}K)\right]\\ &\leqslant \left(\sum_{i=0}^{k}2^{-i}C_1+2^{-(k+1)}K\right)2^{-(k+1)}.\end{aligned}$$

O que conclui o passo indutivo da demonstração de (2.68).

Para cada $m \in \mathbb{N}$, observe que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1}2^{-i}C_1+2^{-m}K &\leqslant \sum_{i=0}^{m-1}2^{-i}C_1+K\\ &\leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}_0}2^{-i}C_1+K\\ &= 2C_1+K,\end{aligned}$$

além de que $K \leqslant 2C_1+K$. Considerando agora $C = 2C_1+K$, obtemos a desigualdade (2.67).

Consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrário e a constante C obtida na desigualdade (2.67). Dado $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^N < \dfrac{\varepsilon}{2C}$, se m, $n \in \mathbb{N}$ satisfazem $m \geqslant n \geqslant N$, então

$$\begin{aligned}\|v^{(m)}-v^{(n)}\|_{X^{s-1}_{T_2}} \leqslant \sum_{i=n}^{m-1}\|v^{(i+1)}-v^{(i)}\|_{X^{s-1}_{T_2}} &\leqslant C\sum_{i=n}^{m-1}2^{-i}\\ &< C\sum_{i\geqslant N}2^{-i} = C2^{1-N} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo $(v^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ é uma sequência de Cauchy em $X^{s-1}_{T_2}$. Como $X^{s-1}_{T_2}$ é completo, então $v^{(m)} \to v \in X^{s-1}_{T_2}$.

Isto conclui a demonstração dos fatos mencionados.

Para mostrarmos que $v \in X^s_T$, observamos que, por meio da desigualdade (2.52), p. 57, a sequência $(v^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ é limitada em $L^\infty([0,T_2];B^s_{p,q})$. Desta maneira, passando se necessário a uma subsequência, temos que $(v^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge na topologia fraca-$*$ para w em $L^\infty([0,T_2];B^s_{p,q})$. Em particular, $(v^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ também converge na topologia fraca-$*$ para v, pois já sabemos que $v^{(m)} \to v \in X^{s-1}_{T_2}$. Então, da unicidade do limite na topologia fraca-$*$ em $L^\infty([0,T_2];B^{s-1}_{p,q})$, temos que

$$v = w \in L^\infty([0,T_2];B^s_{p,q}),$$

e então $v \in L^\infty([0,T_2];B^s_{p,q})$. Tendo em vista as estimativas da limitação e da contração (veja e.g. (2.50), p. 56 e (2.65), p. 65) e que $v^{(m)} \to v \in X^{s-1}_{T_2}$, segue que v é solução integral das equações (2.26)-(2.28), p. 48, isto é,

$$v(t) = v_0 - \int_0^t (v \cdot \nabla)v(r)\,\mathrm{d}r - \int_0^t \nabla p(r)\,\mathrm{d}r. \tag{2.69}$$

Resta demonstrarmos que v é contínua. Usando que v satisfaz (2.69) e do fato de que $v \in L^\infty([0,T_2];B^s_{p,q})$, obtemos que $\partial_t v \in L^1([0,T_2];B^s_{p,q})$. Assim, pelo "Teorema Fundamental do Cálculo" para funções de Bochner com valores em espaços de Banach X, sendo $X = B^s_{p,q}$ neste caso, segue que $v \in C([0,T_2];B^s_{p,q})$. Mais detalhes sobre esta demonstração podem ser vistos em [21].

Desta maneira, ao considerar $T = T(\|v_0\|_{B^s_{p,q}}) = T_2$, concluímos a existência de soluções para as equações de Euler no espaço X^s_T. □

2.2 Unicidade de Solução das Equações de Euler

Passamos a demonstrar a unicidade de soluções das equações de Euler sob as hipóteses do item (1) do Teorema 2.0.7, p. 48

Demonstração de Unicidade de Soluções. Para a demonstração da unicidade consideraremos duas soluções do sistema (2.26)-(2.28), sob as condições adicionais do item (1), p. 48, e mostraremos que de fato estas são iguais. Sejam estas (u,p_1), (v,p_2), onde p_1, p_2 são as funções pressão associadas, u, $v \in X^s_{T_2}$ e suas condições iniciais são iguais a $v_0 \in B^s_{p,q}$. Fazendo a diferença membro a membro das equações do sistema (2.26)-(2.28), obtemos

$$\partial_t(u-v) + \big(v\cdot\nabla\big)(u-v) + \big((u-v)\cdot\nabla\big)u = -\nabla(p_1-p_2), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty), \tag{2.70}$$

$$\operatorname{div}\,\big(u-v\big)(t) = 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty), \tag{2.71}$$

$$\big(u-v\big)(x,0) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{2.72}$$

Tal sistema é semelhante ao sistema (2.53)-(2.55), p. 57, então implica no equivalente à desigualdade (2.56), p. 59, nas atuais variáveis, a saber

$$\begin{aligned}\|(u-v)(t)\|_{\dot B^{s-1}_{p,q}} &\leqslant \int_0^t \big\|\nabla\big(p_1-p_2\big)(r)\big\|_{\dot B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r + \int_0^t \big\|\big((u-v)\cdot\nabla\big)u(r)\big\|_{\dot B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r \\ &\quad + \int_0^t \Big\|\Big(2^{j(s-1)}\big\|(S_{j-2}v\cdot\nabla)\Delta_j(u-v)(r) - \Delta_j\big[(v\cdot\nabla)(u-v)\big](r)\big\|_{L^p}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r \\ &= A_1 + A_2 + A_3.\end{aligned} \tag{2.73}$$

Para obter estimativas dos termos acima, utilizaremos como base o estudo que fizemos sobre os termos da desigualdade (2.56).

A estimativa da integral A_1 segue que, tal como o realizado para estimar I_2 da desigualdade (2.56), podemos considerar

$$\begin{aligned}\Delta_k \nabla(p_1 - p_2) &= \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_k \nabla(-\Delta)^{-1}\big(\partial_i u_j \partial_j u_i - \partial_i v_j \partial_j v_i\big)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \nabla(-\Delta)^{-1}\Delta_k \Big\{\partial_i\big[(u_j - v_j)\partial_j v_i\big] + \partial_j\big[(u_i - v_i)\partial_i u_j\big]\Big\},\end{aligned}$$

pois $\operatorname{div} u = \operatorname{div} v = 0$. Vemos assim que

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_0^t \|\big[\nabla(p_1 - p_2)\big](r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r\\ &\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \Big\|\Big(\sum_{k-1}^{n}\Big\|\partial_k(-\Delta)^{-1}\partial_i\big[2^{k(s-1)}\Delta_k\big((u_j - v_j)\partial_j v_i\big)\big](r)\Big\|_{L^p}\Big)_{k\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r\\ &\qquad + \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \Big\|\Big(\sum_{k-1}^{n}\Big\|\partial_k(-\Delta)^{-1}\partial_j\big[2^{k(s-1)}\Delta_k\big(\partial_j\big[(u_i - v_i)\partial_i u_j\big)\big](r)\Big\|_{L^p}\Big)_{k\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r\\ &\leqslant C\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \Big\|\Big(\|\big[2^{k(s-1)}\Delta_k\big((u_j - v_j)\partial_j v_i\big)\big](r)\|_{L^p}\Big)_{k\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\\ &\qquad + \Big\|\Big(\|\big[2^{k(s-1)}\Delta_j\big((u_i - v_i)\partial_i u_j\big)\big](r)\|_{L^p}\Big)_{k\in\mathbb{Z}}\Big\|_{l^q}\,\mathrm{d}r\\ &\leqslant C\int_0^t \sum_{i,j=1}^{n} \|\big[(u_j - v_j)\partial_j v_i\big](r)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} + \sum_{i,j=1}^{n} \|\big[(u_i - v_i)\partial_i u_j\big](r)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Pelo Lema E.0.7, p. 110, podemos então escrever

$$A_1 \leqslant C\int_0^t \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\|(u - v)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}} + \|u(r)\|_{B^s_{p,q}}\|(u - v)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r.$$

Logo

$$A_1 \leqslant C\int_0^t \big(\|u(r)\|_{B^s_{p,q}} + \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\big)\|(u - v)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r.$$

Por outro lado, os termos A_2, A_3 seguem de maneira inteiramente análoga ao realizado nos termos I_4, I_3 de (2.56), respectivamente. Desta forma podemos garantir as desigualdades

$$\begin{aligned}A_2 &\leqslant C\int_0^t \big\|u(r)\big\|_{B^s_{p,q}}\big\|\big(u - v\big)(r)\big\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r;\\ A_3 &\leqslant C\int_0^t \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\|\big(u - v\big)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Ao somar os termos A_1, A_2, A_3 na desigualdade (2.73) obtemos

$$\|(u - v)(t)\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \leqslant C\int_0^t \big(\|u(r)\|_{B^s_{p,q}} + \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\big)\|(u - v)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r. \tag{2.74}$$

Para passarmos para a norma não-homogênea, integramos a equação (2.70) de 0 a $t \in [0, T_2]$ em função do tempo e aplicamos a norma L^p em ambos os seus membros. Segue que

$$\begin{aligned}
\big\|(u-v)(t)\big\|_{L^p} &\leqslant \big\|(u-v)(0)\big\|_{L^p} + \left\| \int_0^t \big(v\cdot\nabla\big)\big(u-v\big)(r)\,\mathrm{d}r \right\|_{L^p} \\
&\quad + \left\| \int_0^t \big((u-v)\cdot\nabla\big)u(r)\,\mathrm{d}r \right\|_{L^p} + \left\| \int_0^T \nabla\big(p_1-p_2\big)(r)\,\mathrm{d}r \right\|_{L^p} \\
&\leqslant \int_0^t \big\|(v\cdot\nabla)(u-v)(r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r + \int_0^t \big\|((u-v)\cdot\nabla)u(r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r \\
&\quad + \int_0^t \big\|\nabla(p_1-p_2)(r)\big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

De maneira análoga ao realizado para estimar os termos (2.61), (2.62), (2.63) de (2.59), p. 63, sendo necessária uma modificação nas contas do termo (2.63) de maneira similar ao realizado no termo A_1 acima, obtemos as desigualdades

$$\begin{aligned}
\big\|(u-v)(t)\big\|_{L^p} &\leqslant C\int_0^t \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\|(u-v)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r + C\int_0^t \|u(r)\|_{B^s_{p,q}}\|(u-v)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r \\
&\quad + C\int_0^t \big(\|u(r)\|_{B^s_{p,q}} + \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\big)\|(u-v)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r \\
&= C\int_0^t \big(\|u(r)\|_{B^s_{p,q}} + \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\big)\|(u-v)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r. \qquad (2.75)
\end{aligned}$$

Combinando (2.74) e (2.75), conclui-se a estimativa

$$\|(u-v)(t)\|_{B^{s-1}_{p,q}} \leqslant C\int_0^t \big(\|u(r)\|_{B^s_{p,q}} + \|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\big)\|(u-v)(r)\|_{B^{s-1}_{p,q}}\,\mathrm{d}r, \quad \forall t \in [0, T_2].$$

Usando a desigualdade de Gronwall (Lema E.0.1, p. 95) vemos que

$$\|(u-v)(t)\|_{B^{s-1}_{p,q}} \leqslant 0 \quad \forall t \in [0, T_2].$$

Portanto, $u = v$ em $[0, T_2]$. □

2.3 Caso Super Crítico do Critério de Blow-up

Esta seção, assim como a próxima, é destinada à demonstração dos critérios de blow-up a que se refere o Teorema 2.0.7. Consideraremos nesta seção as hipóteses do caso super crítico, dadas pelo item (2), p. 48.

Demonstração do Critério de Blow-up no Caso Super Crítico. Seja $T^* > T_2$ e considere uma solução $v \in C([0, T^*); B^s_{p,q})$. Em particular, observe que $v \in X^s_T$, para todo $T \in (0, T^*)$. Além disso, assuma que

$$\limsup_{t\nearrow T_*} \|v(t)\|_{B^s_{p,q}} = \infty. \qquad (2.76)$$

Como $s > \dfrac{n}{p} + 1$, usando a Proposição 2.0.1, p. 35, sobre a função ∇v é possível garantir a desigualdade

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{L^\infty} &\leqslant C(1 + \|\nabla v\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\ln^+(\|\nabla v\|_{B^{s-1}_{p,q}}) + 1)) \\
&\leqslant C(1 + \|\nabla v\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\ln^+(C\|v\|_{B^{s}_{p,q}}) + 1)) \\
&\leqslant C(1 + \|\nabla v\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\ln^+(\|v\|_{B^{s}_{p,q}}) + C)) \\
&\leqslant C(1 + \|\nabla v\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\ln^+(\|v\|_{B^{s}_{p,q}}) + 1)).
\end{aligned}$$

Além disso, as condições $\operatorname{div} v = 0$ e $\omega = \operatorname{curl}\, v$ implicam na existência de um SIO $\mathcal{P}$ e uma matriz constante A de tal forma que

$$\nabla v = \mathcal{P}(\omega) + A\omega,$$

veja, por exemplo, [19, p. 76] para o caso $n = 3$. Então, ao substituir na desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{L^\infty} &\leqslant C[1 + \|\mathcal{P}(\omega) + A\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\ln^+(\|v\|_{B^{s}_{p,q}}) + 1)] \\
&\leqslant C[1 + (\|\mathcal{P}(\omega)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} + \|A\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})(\ln^+(\|v\|_{B^{s}_{p,q}}) + 1)] \\
&\leqslant C\{1 + (K_1\|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} + K_2\|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})[\ln^+(\|v\|_{B^{s}_{p,q}}) + 1]\}.
\end{aligned}$$

Pois, para cada $q \in [1,\infty]$, a continuidade de $\mathcal{P}$, A, como operadores de L^p em L^p, implica na existência de constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}(\omega)\|_{\dot{B}^0_{\infty,q}} &= \left\|\left(\|\Delta_j\mathcal{P}(\omega)\|_{L^\infty}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q} \leqslant \left\|\left(\|\mathcal{P}(\Delta_j\omega)\|_{L^\infty}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q} \\
&\leqslant \left\|\left(K\|\Delta_j\omega\|_{L^\infty}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q} \leqslant K\left\|\left(\|\Delta_j\omega\|_{L^\infty}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q} = K\|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,q}},
\end{aligned}$$

sendo que o resultado segue de maneira análoga com o operador A. Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{L^\infty} &\leqslant C(1 + \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\ln^+(\|v\|_{B^{s}_{p,q}}) + 1)) \\
&\leqslant C((\ln^+(\|v\|_{B^{s}_{p,q}}) + 1) + \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\ln^+(\|v\|_{B^{s}_{p,q}}) + 1)) \\
&\leqslant C(1 + \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})(\ln^+(\|v\|_{B^{s}_{p,q}}) + 1). \qquad (2.77)
\end{aligned}$$

Agora usaremos alterações nos argumentos utilizados para a demonstração do Lema 2.0.8, p. 49. Considerando $w = v$ na desigualdade (2.39), p. 51

$$\|v(t)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\, \mathrm{d}r + C\int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\|v(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\, \mathrm{d}r.$$

Imediatamente da desigualdade (2.40), p. 52, por meio do item (4) do Lema E.0.2, p. 95, e ainda considerando $w = v$, temos que

$$\|\nabla p\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant C\|\nabla v\|_{L^\infty}\|v\|_{\dot{B}^s_{p,q}}.$$

Então

$$\|v(t)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant \|v_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + C\int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\|v(r)\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r. \tag{2.78}$$

Para ir para o caso não-homogêneo, vemos que considerando $w = v$ na desigualdade (2.42), p. 53, temos

$$\|\nabla p\|_{L^p} \leqslant C\|\nabla v\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_{L^p}.$$

Substituindo na desigualdade demonstrada no Lema E.0.3, p. 98, chegamos à desigualdade

$$\|v(t)\|_{L^p} \leqslant \|v_0\|_{L^p} + \int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\|\nabla v(r)\|_{L^p}\,\mathrm{d}r. \tag{2.79}$$

Combinando as equações (2.78), (2.79), obtemos a estimativa desejada

$$\|v(t)\|_{B^s_{p,q}} \leqslant \|v_0\|_{B^s_{p,q}} + C\int_0^t \|\nabla v(r)\|_{L^\infty}\|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r. \tag{2.80}$$

Voltando à estimativa (2.77) e substituindo-a na desigualdade acima

$$\|v(t)\|_{B^s_{p,q}} \leqslant \|v_0\|_{B^s_{p,q}} + C\int_0^t (1+\|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})(\ln^+(\|v(r)\|_{B^s_{p,q}})+1)\|v(r)\|_{B^s_{p,q}}\,\mathrm{d}r.$$

Por meio da desigualdade de Gronwall (Lema E.0.1, p. 95) garantimos que

$$\|v(t)\|_{B^s_{p,q}} \leqslant \|v_0\|_{B^s_{p,q}} \exp\left(C\int_0^t (1+\|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})(\ln^+(\|v(r)\|_{B^s_{p,q}})+1)\,\mathrm{d}r\right). \tag{2.81}$$

Quando $\|v(r)\|_{B^s_{p,q}} \leqslant 1$, $(\ln^+(\|v(r)\|_{B^s_{p,q}})+1) = 1$ e a desigualdade (2.81) implica

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{B^s_{p,q}} &\leqslant \|v_0\|_{B^s_{p,q}} \exp\left(C\int_0^t (1+\|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})\,\mathrm{d}r\right)\\ &= C\exp\left(C\int_0^t \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\,\mathrm{d}r\right),\end{aligned} \tag{2.82}$$

de onde, pela monotocidade da função logaritmica

$$\ln\left(\frac{\|v(t)\|_{B^s_{p,q}}}{C}\right) \leqslant C\int_0^t \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\,\mathrm{d}r. \tag{2.83}$$

Já quando $\|v(r)\|_{B^s_{p,q}} > 1$, $\ln^+(\|v(r)\|_{B^s_{p,q}}) = \ln(\|v(r)\|_{B^s_{p,q}})$ e aplicando o logaritmo em ambos os termos da desigualdade (2.81)

$$\begin{aligned}\ln\|v(t)\|_{B^s_{p,q}} &\leqslant \ln\|v_0\|_{B^s_{p,q}} + \left(C\int_0^t (1+\|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})(\ln(\|v(r)\|_{B^s_{p,q}})+1)\,\mathrm{d}r\right)\\ &= C + C\int_0^t (1+\|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})\,\mathrm{d}r + C\int_0^t (1+\|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})\ln(\|v(r)\|_{B^s_{p,q}})\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Novamente pelo Lema de Gronwall,

$$\begin{aligned}
\ln \|v(t)\|_{B^s_{p,q}} &\leqslant \left(C + C\int_0^t (1 + \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})\,\mathrm{d}r\right) \exp\left(C\int_0^t (1 + \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})\,\mathrm{d}r\right)\\
&\leqslant \exp\left(C + C\int_0^t (1 + \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})\,\mathrm{d}r\right) \exp\left(C\int_0^t (1 + \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})\,\mathrm{d}r\right)\\
&= \exp\left(C + 2C\int_0^t (1 + \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})\,\mathrm{d}r\right)\\
&= \exp\left(C + C\int_0^t \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\,\mathrm{d}r\right) = C\exp\left(C\int_0^t \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\,\mathrm{d}r\right). \qquad (2.84)
\end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo em ambos os membros da desigualdade acima,

$$\ln\left(\frac{\ln \|v(t)\|_{B^s_{p,q}}}{C}\right) \leqslant C\int_0^t \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\,\mathrm{d}r. \qquad (2.85)$$

Pelas desigualdades (2.83), (2.85), vemos que a hipótese (2.76) implica que

$$\int_0^{T^*} \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\,\mathrm{d}r = +\infty.$$

Suponhamos reciprocamente a hipótese

$$\int_0^{T^*} \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\,\mathrm{d}r = +\infty. \qquad (2.86)$$

Como

$$\int_0^{T^*} \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\,\mathrm{d}r \leqslant T^* \sup_{0\leqslant r\leqslant T^*} \{\|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\} = T^*\|\omega(r_0)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}},$$

onde r_0 é o valor que maximiza $\|\omega(r_0)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}$, existente pelo fato de ω e $\|\cdot\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}$ serem contínuas e $[0,T^*]$ ser compacto. Considerando $C>0$ tal que

$$C^{-1} = \frac{\|\mathcal{P}(\omega)(r_0) + A\omega(r_0)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}}{\|\omega(r_0)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}},$$

segue a desigualdade

$$\begin{aligned}
\int_0^{T^*} \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\,\mathrm{d}r &\leqslant CT^*\|\mathcal{P}(\omega)(r_0) + A\omega(r_0)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\\
&\leqslant CT^* \sup_{r\in[0,T^*]} \{\|\mathcal{P}(\omega)(r) + A\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\}\\
&\leqslant CT^* \sup_{r\in[0,T^*]} \{\|\nabla v(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\}.
\end{aligned}$$

Mas pela desigualdade de Young generalizada (1.1.14, p. 19)

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} &= \sup_{j\in\mathbb{Z}}\{\|\Delta_j \nabla v\|_{L^\infty}\} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{Z}}\{\|\varphi_j\|_{L^1}\|\nabla v\|_{L^\infty}\} = C\sup_{j\in\mathbb{Z}}\{\|\nabla v\|_{L^\infty}\}\\
&= C\|\nabla v\|_{L^\infty}. \qquad (2.87)
\end{aligned}$$

Então pela desigualdade (2.8), p. 38, temos

$$\|\nabla v\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \leqslant C\|\nabla v\|_{B^{s-1}_{p,q}} \leqslant C\|v\|_{B^s_{p,q}},$$

onde usamos o item (4) do Lema E.0.2, p. 95. Desta forma

$$\int_0^{T^*} \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\, \mathrm{d}r \leqslant CT^* \sup_{t\in[0,T^*]} \{\|v(t)\|_{B^s_{p,q}}\}.$$

O que conclui, considerando a hipótese (2.86), que

$$\limsup_{t\nearrow T_*} \|v(t)\|_{B^s_{p,q}} = \infty.$$

Temos assim demonstrado o caso super crítico. □

2.4 Caso Crítico do Critério de Blow-up

Mostraremos nesta seção o item (2)b do Teorema 2.0.7, referente ao caso crítico do critério de blow-up.

Demonstração do Critério de Blow-up no Caso Crítico. Considere $T^* > T_2$ e seja $v \in C([0,T^*); B^s_{p,q})$. Como no caso super crítico temos que $v \in X^s_T$, desde que $T \in (0,T^*)$. Suponhamos a hipótese

$$\limsup_{t\nearrow T_*} \|v(t)\|_{B^{\frac{n}{p}+1}_{p,1}} = \infty. \tag{2.88}$$

Temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_{L^\infty} &= \left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j \nabla v\right\|_{L^\infty} \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\Delta_j \nabla v\|_{L^\infty} = \|\nabla v\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \\ &= \|\mathcal{P}(\omega) + A\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant C\|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}.\end{aligned}$$

Logo, substituindo na desigualdade (2.80), p. 72, no caso em que $s = \dfrac{n}{p} + 1$, $q = 1$

$$\|v(t)\|_{B^{\frac{n}{p}+1}_{p,1}} \leqslant \|v_0\|_{B^{\frac{n}{p}+1}_{p,1}} + C\int_0^t \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \|v(r)\|_{B^{\frac{n}{p}+1}_{p,1}}\, \mathrm{d}r.$$

O que garante, usando a desigualdade de Gronwall, que

$$\|v(t)\|_{B^{\frac{n}{p}+1}_{p,1}} \leqslant C\exp\left(\int_0^t \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}\, \mathrm{d}r\right).$$

Como vimos no item anterior, isto garante que a hipótese 2.88 implica

$$\int_0^{T_*} \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}\, \mathrm{d}r = \infty.$$

Reciprocamente, suponhamos a hipótese

$$\int_0^{T_*} \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}\,\mathrm{d}r = \infty. \tag{2.89}$$

Então similarmente à condição necessária do item anterior,

$$\int_0^{T_*} \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}\,\mathrm{d}r \leqslant T^* \sup_{r\in[0,T^*]} \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant CT^*\|\nabla v(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}.$$

Mas usando o Lema 1.5.16, p. 34, podemos escrever

$$\|\nabla v(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant C\|\nabla v(r)\|_{\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1}},$$

então

$$\begin{aligned}\int_0^{T_*} \|\omega(r)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}\,\mathrm{d}r &\leqslant CT^*\|\nabla v(r)\|_{\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1}} \leqslant CT^*\|\nabla v(r)\|_{B^{\frac{n}{p}}_{p,1}} \\ &\leqslant CT^*\|v(r)\|_{B^{\frac{n}{p}+1}_{p,1}}.\end{aligned}$$

O que, tendo em vista a hipótese (2.89), produz

$$\limsup_{t\nearrow T_*} \|v(t)\|_{B^{\frac{n}{p}+1}_{p,1}} = \infty.$$

Isto conclui a demonstração do Teorema 2.0.7. $\square$

2.5 Persistência Global da Regularidade no Caso $n = 2$

Finalizamos o trabalho apresentando uma consequência da existência e unicidade de soluções para as equações de Euler e do caso super crítico do critério de blow-up. Tal consequência ocorre quando $n = 2$ e utiliza o fato que nesse caso temos que para cada $t > 0$, $\|\omega(t)\|_{L^\infty} = \|\omega_0\|_{L^\infty}$, propriedade chamada de conservação da vorticidade em $\mathbb{R}^2$, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [19, p. 44].

Corolário 2.5.1 (Persistência Global da Regularidade)**.** *Considere $n = 2$, $s > \dfrac{2}{p} + 1$, $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$ e $v_0 \in B^s_{p,q}$ satisfazendo $\operatorname{div} v_0 = 0$. Então, existe uma única solução global $v \in C([0,\infty); B^s_{p,q})$ para o sistema* (2.26)-(2.28)*.*

Demonstração. Pelas hipóteses dadas, estamos em condições de usar o item (1), p. 48 do Teorema 2.0.7 para garantirmos a unicidade da solução $v \in X^s_T$ do sistema (2.26)-(2.28), para certo $T > 0$.

Suponhamos por absurdo que $\tilde{T} > 0$ seja o supremo dos valores para os quais é possível garantir a existência e unicidade de soluções das equações de Euler neste contexto. Pela desigualdade (2.87), p. 73 e pela conservação da vorticidade, temos que

$$\|\omega(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \leqslant \|\omega(t)\|_{L^\infty} = \|\omega_0\|_{L^\infty}.$$

Mas pela definição de ω e a desigualdade (2.8) temos que

$$\|\omega_0\|_{L^\infty} = \|\operatorname{curl} v_0\|_{L^\infty} \leqslant \|\operatorname{curl} v_0\|_{B^{s-1}_{p,q}}.$$

Sendo $v_0 = (v_1^0, v_2^0)$, por [18, p. 264], no caso $n = 2$ podemos escrever

$$\operatorname{curl} v_0 = \partial_1 v_2^0 - \partial_2 v_1^0.$$

Então, de maneira análoga ao realizado para concluir o item (4) do Lema (E.0.2), p. 95, vemos que

$$\|\omega(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \leqslant \|\partial_1 v_2^0 - \partial_2 v_1^0\|_{B^{s-1}_{p,q}} \leqslant C\|v_0\|_{B^s_{p,q}} < \infty.$$

Consequentemente, considerando $T_* > \tilde{T}$, segue que

$$\int_0^{T_*} \|\omega(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \,\mathrm{d}t = CT_*\|v_0\|_{B^s_{p,q}} < +\infty, \tag{2.90}$$

o que implica, pelo item (2)a do teorema anterior, que

$$\limsup_{t \nearrow T_*} \|v(t)\|_{B^s_{p,q}} < \infty.$$

Desta forma $v \in X^s_{T_*}$ é a única solução do (2.26)-(2.28), onde $T_* > \tilde{T}$. Isto constitui um absurdo gerado pela suposição da existência de $\tilde{T}$ maximal, onde se pode garantir existência e unicidade de soluções para as equações de Euler em $X^s_{\tilde{T}}$. Concluímos assim que $v \in C([0,\infty); B^s_{p,q})$. □

3 Considerações Finais

Este trabalho permitiu um estudo contemplando Análise de Fourier, o espaço das distribuições temperadas, operadores integrais singulares e um importante sistema em dinâmica dos fluidos, a saber as equações de Euler. Foi feita uma abordagem dos espaços de Besov $B^s_{p,q}$ com condições razoavelmente abrangentes sobre os índices p, q, s; a saber, vimos os casos em que $p \in (1, \infty)$ e $s > \frac{n}{p} + 1$, $q \in [1, \infty]$ ou $s = \frac{n}{p} + 1$, $q = 1$, onde n é a dimensão do espaço Euclideano. Expomos propriedades intrínsecas para as equações de Euler, sob o olhar dos espaços L^p. Adicionalmente fizemos um estudo das equações de Euler especificamente nos espaços $B^s_{p,q}$ com os já referidos índices. Isto nos levou, seguindo o realizado no artigo de Chae [7], a garantir condições de existência e unicidade local no tempo para solução de tal sistema, além de mostrar caracterizações para o blow-up das soluções em dois casos, chamados de críticos e super críticos. Consequentemente, foi possível determinar a existência e unicidade de soluções globais no tempo para as equações de Euler quando $n = 2$.

Citamos a seguir caminhos que podem ser seguidos no futuro e que tem como traço inicial o conteúdo abordado no presente trabalho.

Estudos sobre outras equações são feitos sob a perspectiva dos espaços de Besov. Em [6] Bourgan-Li analisaram condições limites para a boa-colocação das equações de Navier-Stokes em espaços de Besov e, mais geralmente em espaços críticos, demonstrando que as equações são má-colocadas no espaço de Besov homogêneo $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ via o fenônemo de inflação.

O desenvolvimento de resultados relacionados às equações de Euler também pode ser realizado com o foco sendo outros espaços. Por exemplo, em [26] Temam mostra a existência e unicidade no espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, sendo Ω limitado em $\mathbb{R}^n$. Em [12], os autores analisaram existência, unicidade e critério de blow-up no contexto dos espaços de Besov-Herz.

Critérios de blow-up são particularmentes importantes e se tornam alvos de estudo quando se abordam as equações de Euler em espaços de Besov. Em conformidade com [9], o problema consistindo em determinar a não ocorrência de blow-up quando se assume energia cinética suave e finita, foi demonstrado ainda em 1972 no artigo [1], no caso em que $n = 2$. Contudo, o caso em que $n = 3$ ainda representa um problema em aberto.

Já no contexto das equações de Euler para fluidos incompressíveis em espaços de Besov $B^s_{p,q}$ destacamos que em 2004, no artigo [20], Pak-Park fazem a demonstração da existência e unicidade de soluções tendo condição inicial $v_0 \in B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$. Este caso representa um avanço adicional, em certo sentido, com relação ao estudado no presente trabalho, visto que o caso em que $s = 1$ não é abordado.

Estes tópicos servem de motivação para futuros estudos nesta área tão rica em elementos e técnicas matemáticas, bem como de resultados para equações e modelos importantes em Dinâmica dos Fluídos.

Referências

[1] BARDOS, C. Existence et unicité de la solution de l'équation d'Euler en dimension deux. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 40*, 3 (1972), 769–790. Citado na página 77.

[2] BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*, 1 ed. Wiley-Interscience, 1995. Citado na página 13.

[3] BEALE, J. T., KATO, T., AND MAJDA, A. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Communications in Mathematical Physics 94*, 1 (1984), 61–66. Citado na página 13.

[4] BERGH, J., AND LÖFSTRÖM, J. *Interpolation Spaces*, 1 ed., vol. 223. Springer Berlin Heidelberg, 2011. Citado nas páginas 33 e 85.

[5] BONY, J.-M. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure 14*, 2 (1981), 209–246. Citado na página 87.

[6] BOURGAIN, J., AND PAVLOVIĆ, N. Ill-posedness of the Navier–Stokes equations in a critical space in 3D. *Journal of Functional Analysis 255*, 9 (2008), 2233–2247. Citado na página 77.

[7] CHAE, D. Local existence and blow-up criterion for the Euler equations in the Besov spaces. *Asymptotic Analysis 38*, 3-4 (2004), 339–358. Citado nas páginas 8, 9, 13, 14, 19, 33, 35, 41, 48 e 77.

[8] CHORIN, A. J., AND MARSDEN, J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, 4 ed., vol. 1. Springer New York, 2000. Citado nas páginas 12 e 83.

[9] CONSTANTIN, P. On the Euler equations of incompressible fluids. *Bulletin of the American Mathematical Society 44*, 4 (2007), 603–621. Citado na página 77.

[10] DANCHIN, R. Fourier Analysis Methods for PDEs. *Lecture notes 14*, 1 (2005). Citado na página 24.

[11] DRAGOMIR, S. S., AND CITY, M. Some Gronwall type inequalities and applications. *URL: http://rgmia. vu. edu. au/SSDragomirWeb. html* (2002), 193. Citado na página 95.

[12] FERREIRA, L. C., AND PÉREZ-LÓPEZ, J. On the theory of Besov–Herz spaces and Euler equations. *Israel Journal of Mathematics 220*, 1 (2017), 283–332. Citado na página 77.

[13] Folland, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 1rd ed., vol. 9. John Wiley & Sons, 1984. Citado nas páginas 13, 15, 16, 18, 21, 22 e 83.

[14] Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis*, 3rd ed. Springer New York, 2014. Citado nas páginas 18, 25, 26, 27 e 30.

[15] Gubinelli, M., Imkeller, P., and Perkowski, N. Paracontrolled distributions and singular PDEs. *Forum of Mathematics, Pi 3* (2015), 75. Citado na página 87.

[16] Kato, T. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$. *Journal of functional Analysis 9*, 3 (1972), 296–305. Citado na página 12.

[17] Kato, T., and Ponce, G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics 41*, 7 (1988), 891–907. Citado na página 12.

[18] Lemarié-Rieusset, P. G. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, 1 ed., vol. 431. CRC press, 2002. Citado nas páginas 33, 76 e 87.

[19] Majda, A. J., and Bertozzi, A. L. *Vorticity and Incompressible Flow*, 1 ed. Cambridge University Press, 2010. Citado nas páginas 71 e 75.

[20] Pak, H. C., and Park, Y. J. Vorticity existence of an ideal incompressible fluid in $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$. *Journal of Mathematics of Kyoto University 45*, 1 (2005), 1–20. Citado na página 77.

[21] Pak, H. C., and Park, Y. J. Persistence of the incompressible Euler equations in a Besov space $B^{d+1}_{1,1}(\mathbb{R}^d)$. *Advances in Difference Equations 2013*, 1 (2013), 1–18. Citado nas páginas 68 e 111.

[22] Peetre, J. *New Thoughts on Besov Spaces*, 1 ed., vol. 1. Mathematics Department, Duke University, 1976. Citado na página 12.

[23] Salsa, S., Vegni, F., Zaretti, A., and Zunino, P. *A Primer on PDEs*, vol. 56. Springer Milan, 2013. Citado nas páginas 55 e 98.

[24] Sawano, Y. *Theory of Besov Spaces*, 1 ed., vol. 56. Springer Singapore, 2018. Citado nas páginas 16, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 33 e 93.

[25] Temam, R. On the Euler equations of incompressible perfect fluids. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi"Séminaire Goulaouic-Schwartz"* (1974), 1–14. Citado na página 12.

[26] Temam, R. Local existence of C^∞ solutions of the Euler equations of incompressible perfect fluids. In *Turbulence and Navier Stokes Equations*. Springer, 1976, pp. 184–194. Citado nas páginas 12 e 77.

[27] Triebel, H. *Theory of Function Spaces*, 2 ed. Springer Basel, 2010. Citado na página 12.

[28] Vishik, M. Hydrodynamics in Besov spaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 145*, 3 (1998), 197–214. Citado nas páginas 87 e 88.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados Relacionados à Teoria de Integração de Lebesgue

Esta seção tem como objetivo apresentar propriedades pontuais mas utilizadas ao longo do texto e que estão no escopo da teoria de integração de Lebesgue.

A primeira destas propriedades é a chamada desigualdade de Minkowski para integrais e será enunciada em um contexto menor que o feito em [13, p. 186], de maneira a se adequar ao nosso contexto.

Proposição A.0.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de tal forma que cada x_0, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ fixos temos que $f(x_0, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f(\cdot, y_0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então supondo que $p \in [1, \infty)$ e $f \geqslant 0$ em todo ponto,*

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Mostraremos no Lema A.0.3 uma condição suficiente para a conservação, a menos de uma constante, da norma no espaço L^p de uma função aplicada a um campo vetorial. Para tal, será necessário o lema a seguir que mostra como é possível derivar, com relação à variável temporal, o jacobiano de uma campo vetorial. Tal lema foi provado no caso $n = 3$ em [8, p. 8].

Lema A.0.2. *Sendo $J(X(x,t),t)$ o jacobiano de um campo $X : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ diferenciável na variável temporal, então*

$$\partial_t J(X(x,t),t) = J(X(x,t),t)\, div\, \partial_t X(x,t).$$

Temos assim as ferramentas para demonstrar o seguinte lema.

Lema A.0.3. *Considere $p \in (0, \infty)$. Seja $f : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, tal que para cada $t \in (0, \infty)$ temos $f(t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Seja $X : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ diferenciável na variável temporal, satisfazendo $X(x, 0) = x$ e tal que para cada $t \in (0, \infty)$, X é difeomorfismo com relação à variavel x. Se o campo $\partial_t X(x,t)$ tem divergência nula, então*

$$\|f(X(\cdot,t),t)\|_{L^p} = C\|f\|_{L^p}$$

para alguma constante positiva C.

Demonstração. Seja $t \in (0, \infty)$. Usando mudança de variáveis temos que

$$\|f(t)\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x,t)|^p\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(X(x,t),t)|^p J(X(x,t),t)\, \mathrm{d}x.$$

Pelo Lema A.0.2 para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial_t J(X(x,t),t) = J(X(x,t),t)\,\mathrm{div}\,\partial_t X(x,t) = 0,$$

de onde concluímos que $J(X(x,t),t)$ é constante com relação à variável temporal, então

$$J(X(x,t),t) = J(X(x,0),0) = J(x,0) = 1.$$

Logo

$$\begin{aligned}\|f(t)\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(X(x,t),t)|^p \,\mathrm{d}x \\ &= \|f(X(\cdot,t),t)\|_{L^p}^p\end{aligned}$$

assim

$$\|f(t)\|_{L^p} = C\|f(X(\cdot,t),t)\|_{L^p}.$$

$\square$

APÊNDICE B – Existência dos Blocos Diádicos

Dedicamos esta seção à demonstração da existência de funções tais quais na Definição 1.5.1, p. 28. Tal demonstração está presente em [4, p. 135].

Lema B.0.1. *Existe uma função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo as propriedades*

$$supp\,\hat{\varphi} = \{\xi \; |2^{-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}; \tag{B.1}$$

$$2^{-1} < |\xi| < 2 \Rightarrow \hat{\varphi}(\xi) > 0; \tag{B.2}$$

$$\textit{para cada } \; \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \; \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = 1. \tag{B.3}$$

Demonstração. Considere $f \in \mathcal{S}$ de tal maneira que

$$\operatorname{supp} \hat{f} = \{\xi \,|\, 2^{-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2\},$$
$$2^{-1} < |\xi| < 2 \Rightarrow \hat{f}(\xi) > 0.$$

De maneira análoga ao raciocínio usado para mostrar (1.5.2), p. 28, vemos que

$$\operatorname{supp} \hat{f}(2^{-j}\cdot) = \{\xi \,|\, 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\}. \tag{B.4}$$

Definamos a função $\hat{F}$ de tal forma que

$$\hat{F}(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2^{-j}\xi). \tag{B.5}$$

Veja que para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{F}(2^{-k}\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2^{-j-k}\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2^{-j}\xi) = \hat{F}(\xi). \tag{B.6}$$

Por (B.4), para cada $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ a soma definida no segundo membro de (B.5) não se anula em no máximo 3 termos. Digamos que para tal ξ o menor destes termos seja $j_1(\xi)$ e o maior seja $j_2(\xi)$, assim

$$\hat{F}(\xi) = \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} \hat{f}(2^{-j}\xi), \tag{B.7}$$

então $\hat{F} \in \mathcal{S}$ e para cada $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\hat{F}(\xi) > 0$ pois é igual em cada ponto a uma soma finita de funções positivas em $\mathcal{S}$. Segue que a função $\hat{\varphi}$ definida de maneira que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{\hat{F}(\xi)} \in \mathcal{S},$$

de fato $\varphi \in C^\infty$ e $\operatorname{supp}\hat{\varphi} = \operatorname{supp}\hat{f} = \{\xi \,|\, 2^{-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$. Então φ satisfaz (B.1). Como $\hat{f}(\xi)$, $\hat{F}(\xi)$ são positivos para cada $2^{-1} < |\xi| < 2$, então $\hat{\varphi}$ satisfaz (B.2). Por último, fixado $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e usando (B.6)

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\hat{f}(2^{-j}\xi)}{\hat{F}(2^{-j}\xi)} = \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} \frac{\hat{f}(2^{-j}\xi)}{\hat{F}(2^{-j}\xi)} = \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} \frac{\hat{f}(2^{-j}\xi)}{\hat{F}(\xi)}.$$

Logo, por (B.7),

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = \sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} \frac{\hat{f}(2^{-j}\xi)}{\sum_{j=j_1(\xi)}^{j_2(\xi)} \hat{f}(2^{-j}\xi))} = 1.$$

De onde segue que $\hat{\varphi}$ satisfaz (B.3). Portanto a função $\varphi \in \mathcal{S}$ satisfaz as condições requeridas. $\square$

APÊNDICE C – Resultados Relacionados ao Paraproduto de Bony

O produto de distribuições temperadas não está bem definido a priori. Contudo, é atribuido a Bony certa noção que permite a interpretação de produto neste caso. Nesse sentido não nos referimos a produto, mas sim a paraproduto entre distribuições temperadas ou, mais comumente, paraproduto de Bony. Nesta seção iremos formalizar tal paraproduto, além disso mostraremos a decomposição de Littlewood Paley. Ambos os conceitos são particularmente interessantes pois decompõem as distribuições temperadas em somas contendo os operadores S_j, Δ_j já definidos. A seguir veremos com isto é considerado, onde usamos como referência [18, p. 23].

Lema C.0.1 (Decomposição de Littlewood-Paley)**.** *Considerando os operadores S_j, Δ_j, definidos na Definição 1.5.4, p. 29, para cada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $N \in \mathbb{Z}$,*

$$\lim_{\substack{k \to +\infty \\ k \geqslant N}} \left(S_N f + \sum_{j=N}^{k} \Delta_j f \right) = S_N f + \sum_{j \geqslant N} \Delta_j f = f,$$

na topologia de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Em conformidade com [28, p. 3] e [15, p. 10], definimos o paraproduto entre duas funções. Para mais detalhes sobre tal conceito, ver o realizado em [5].

Definição C.0.2 (Paraproduto de Bony)**.** *Definimos o paraproduto de Bony fg como*

$$fg = T_f g + T_g f + R(f, g),$$

onde

$$\begin{aligned} T_f g &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-2} f \Delta_j g; \\ T_g f &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-2} g \Delta_j f; \\ R(f, g) &= \sum_{|i-j| \leqslant 1} \Delta_i f \Delta_j g. \end{aligned}$$

Além de tais decomposições, durante o trabalho usamos certa fórmula de paraproduto de Bony que utiliza o chamado comutador operador comutador.

Definição C.0.3. *Sejam T_1, T_2 operadores definidos em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definiremos, para cada $v \in \mathcal{S}$ o operador comutador $[T_1, T_2] : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ de tal forma que*

$$[T_1, T_2]v = T_1(T_2 v) - T_2(T_1 v).$$

Em [28, p. 203] é demonstrada a seguinte igualdade.

Proposição C.0.4. *Dadas $v = (v_1, ..., v_n), w = (w_1, ..., w_n) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $k \in \{1, ..., n\}$ e $j \in \mathbb{Z}$,*

$$\big(S_{j-2}w \cdot \nabla\big)\Delta_j v_k - \Delta_j\big((w \cdot \nabla)v_k\big) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_j T_{\partial_i v_k} w_i - \sum_{i=1}^{n} [T_{w_i}\partial_i, \Delta_j]v_k$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} T_{w_i - S_{j-2}v_k}\partial_i \Delta_j v_k + \sum_{i=1}^{n} \big(\Delta_j R(w_i, \partial_i v_k) - R(S_{j-2}v_i, \Delta_j \partial_i v_k)\big).$$

Para finalizar a seção iremos demonstrar uma estimativa relacionada ao comutador.

Lema C.0.5. *Sejam $p \in (1, \infty)$, $s > \dfrac{n}{p} + 1$ quando $q \in [1, \infty]$ ou $s = \dfrac{n}{p} + 1$ quando $q \in 1$, f, $g \in X_T^s$, onde $f = (f_1, ..., f_n)$ tem divergência nula e j, k, $i \in \mathbb{Z}$ arbitrários. Então*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j]\partial_i g \right\|_{L^p} = \left\| \sum_{i=1}^{n} [\Delta_j, S_k f_i]\partial_i g \right\|_{L^p} \leqslant C\|\nabla f\|_{L^\infty} \|\Delta_j g\|_{L^p}.$$

Demonstração. Temos que

$$\sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j]\partial_i g = \sum_{i=1}^{n} [S_k f_i \cdot \Delta_j \partial_i g - \Delta_j (S_k f_i \cdot \partial_i g)].$$

Desta forma

$$\sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j]\partial_i g(t) = \sum_{i=1}^{n} \Big[S_k f_i(x,t) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x-y)\Delta_j \partial_i g(y,t)\,\mathrm{d}y$$
$$- \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x-y) S_k f_i(y,t) \Delta_j \partial_i g(y,t)\,\mathrm{d}y\Big]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x-y)[S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)]\partial_i \Delta_j g(y,t)\,\mathrm{d}y$$
$$= \sum_{i=1}^{n} 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(2^j(x-y))[S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)]\partial_i \Delta_j g(y,t)\,\mathrm{d}y.$$

Integrando por partes,

$$\sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j]\partial_i g(t) = -\sum_{i=1}^{n} 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i\big\{\varphi(2^j(x-y))[S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)]\big\}\Delta_j g(y,t)\,\mathrm{d}y$$

mas

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i\big\{\varphi(2^j(x-y))[S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)]\big\} = \sum_{i=1}^{n} 2^j \partial_i \varphi(2^j(x-y))[S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)]$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \varphi(2^j(x-y))\partial_i\big(S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)\big)$$

assim

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \partial_i \big\{ \varphi(2^j(x-y))[S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)] \big\} \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} 2^j \partial_i \varphi(2^j(x-y))[S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)] \\
&\qquad\qquad + \varphi(2^j(x-y)) \left[S_k\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i(x,t) \right) - S_k\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i(y,t) \right) \right] \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} 2^j \partial_i \varphi(2^j(x-y))[S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)] \\
&\qquad\qquad + \varphi(2^j(x-y)) \big[S_{j'-2}\big(\operatorname{div} f(x,t)\big) - S_{j'-2}\big(\operatorname{div} f(y,t)\big) \big] \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} 2^j \partial_i \varphi(2^j(x-y))[S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)]
\end{aligned}
$$

e desta forma

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j] \partial_i g(t) &= -\sum_{i=1}^{n} 2^{j(n+1)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \varphi(2^j(x-y))[S_k f_i(x,t) - S_k f_i(y,t)] \Delta_j g(y,t)\, \mathrm{d}y \\
&= -\sum_{i=1}^{n} 2^{j(n+1)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \varphi(2^j(x-y)) \big[S_k f_i(h(\tau),t) \big|_0^1 \big] \Delta_j g(y,t)\, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

com $h(\tau) = x + \tau(y-x)$ e para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, $h_i(\tau) = x_i + \tau(y_i - x_i)$. Desta forma

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j] \partial_i g(t) &= -\sum_{i=1}^{n} 2^{j(n+1)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \varphi(2^j(x-y)) \left[\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} S_k f_i(h(\tau),t)\, \mathrm{d}\tau \right] \Delta_j g(y,t)\, \mathrm{d}y \\
&= -\sum_{i=1}^{n} 2^{j(n+1)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \varphi(2^j(x-y)) \\
&\qquad \cdot \left[\int_0^1 \sum_{l=1}^{n} \partial_l S_k f_i(h(\tau),t) \cdot h_l'(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right] \Delta_j g(y,t)\, \mathrm{d}y \\
&= -\sum_{i=1}^{n} 2^{j(n+1)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \varphi(2^j(x-y)) \\
&\qquad \cdot \left[\int_0^1 \sum_{l=1}^{n} (y_l - x_l) \cdot \partial_l S_k f_i(x + \tau(y-x),t)\, \mathrm{d}\tau \right] \Delta_j g(y,t)\, \mathrm{d}y \\
&= -\sum_{i=1}^{n} 2^{j(n+1)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \varphi(2^j(x-y)) \\
&\qquad \cdot \left[\int_0^1 ((y-x) \cdot \nabla)(S_k f_i)(x + \tau(y-x),t)\, \mathrm{d}\tau \right] \Delta_j g(y,t)\, \mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

assim

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j] \partial_i g(t) &= -\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \varphi(2^j(x-y)) \\
&\quad \cdot \left[\int_0^1 (2^j(x-y) \cdot \nabla)(S_k f_i)(x + \tau(y-x),t)\, \mathrm{d}\tau \right] \Delta_j g(y,t) \cdot (-2^{jn})\, \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Fazendo a substituição $z = 2^j(x-y)$ obtemos que

$$\sum_{i=1}^{n}[S_k f_i, \Delta_j]\partial_i g(t) = -\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i\varphi(z) \left[\int_0^1 (z\cdot\nabla)(S_k f_i)(x-2^{-j}\tau z, t)\,\mathrm{d}\tau\right]\Delta_j g(x-2^{-j}z, t)\,\mathrm{d}z.$$

Desta forma, ao aplicar a norma L^p em ambos os membros acima vemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n}[S_k f_i, \Delta_j]\partial_i g(t)\right\|_{L^p} &= \left\|\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i\varphi(z) \cdot\left[\int_0^1 (z\cdot\nabla)(S_k f_i)(x-2^{-j}\tau z, t)\,\mathrm{d}\tau\right]\Delta_j g(x-2^{-j}z, t)\,\mathrm{d}z\right\|_{L^p}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left\|\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i\varphi(z) \cdot\left[\int_0^1 (z\cdot\nabla)(S_k f_i)(x-2^{-j}\tau z, t)\,\mathrm{d}\tau\right]\Delta_j g(x-2^{-j}z, t)\,\mathrm{d}z\right\|_{L^p},
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Minkowski para Integrais (Proposição A.0.1, p. 83)

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n}[S_k f_i, \Delta_j]\partial_i g(t)\right\|_{L^p} &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left\|\partial_i\varphi(z) \cdot\left[\int_0^1 (z\cdot\nabla)(S_k f_i)(x-2^{-j}\tau z, t)\,\mathrm{d}\tau\right]\Delta_j g(x-2^{-j}z, t)\right\|_{L^p}\mathrm{d}z\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 3}\int_{\mathbb{R}^n}\left\|\int_0^1 \partial_i\varphi(z)(z\cdot\nabla)(S_k f_i)(x-2^{-j}\tau z, t) \cdot\Delta_j g(x-2^{-j}z, t)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L^p}\mathrm{d}z\\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_0^1 \partial_i\varphi(z)(z\cdot\nabla)(S_k f_i)(x-2^{-j}\tau z, t) \cdot\Delta_j g(x-2^{-j}z, t)\,\mathrm{d}\tau\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}z\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^1 |\partial_i\varphi(z)|^p|\Delta_j g(x-2^{-j}z, t)|^p \cdot|(z\cdot\nabla)(S_k f_i)(x-2^{-j}\tau z, t)|^p\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}z\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_i\varphi(z)|^p\sup_{\tau\in[0,1]}\left\{|(z\cdot\nabla)(S_k f_i)(x-2^{-j}\tau z, t)|^p\right\} \cdot|\Delta_j g(x-2^{-j}z, t)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j] \partial_i g(t) \Big\|_{L^p} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi(z)|^p |(z \cdot \nabla)(S_k f_i)(x - 2^{-j}\tau_0 z, t)|^p \\
&\qquad \cdot |\Delta_j g(x - 2^{-j} z, t)|^p \, \mathrm{d}x \bigg)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi(z)|^p \Big| \sum_{m=1}^{n} z_m \partial_m S_k v_i(x - 2^{-j}\tau_0 z, t) \Big|^p \\
&\qquad \cdot |\Delta_j g(x - 2^{-j} z, t)|^p \, \mathrm{d}x \bigg)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi(z)|^p |z_m \partial_m S_k f_i(x - 2^{-j}\tau_0 z, t)|^p \\
&\qquad \cdot |\Delta_j g(x - 2^{-j} z, t)|^p \, \mathrm{d}x \bigg)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \bigg[\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi(z)|^p \Big(\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \big\{ \big|1 + |z|\big| |\partial_m S_k f_i(x - 2^{-j}\tau_0 z, t)| \big\} \Big)^p \\
&\qquad \cdot |\Delta_j g(x - 2^{-j} z, t)|^p \, \mathrm{d}x \bigg]^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

como $\partial_k S_k f_i(x - 2^{-j}\tau_0 \cdot, t) \in \mathcal{S}$, então da Definição 1.1.2, p. 15 podemos garantir a existência de certo $z_0 \in \mathbb{R}^n$ de tal forma que

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j] \partial_i g(t) \Big\|_{L^p} &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \bigg[\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi(z)|^p \big(\big|1 + |z_0|\big|^p |\partial_m S_k f_i(x - 2^{-j}\tau_0 z_0, t)|^p \big) \\
&\qquad \cdot |\Delta_j g(x - 2^{-j} z, t)|^p \, \mathrm{d}x \bigg]^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z \\
&= C \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi(z)|^p |\partial_m S_k f_i(x - 2^{-j}\tau_0 z_0, t))|^p \\
&\qquad \cdot |\Delta_j g(x - 2^{-j} z, t)|^p \, \mathrm{d}x \bigg)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z \\
&\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi(z)|^p \|\partial_m S_k f_i\|_{L^\infty}^p |\Delta_j g(x - 2^{-j} z, t)|^p \, \mathrm{d}x \bigg)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z \\
&= C \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi(z)| \|\partial_m S_k f_i\|_{L^\infty} \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_j g(x - 2^{-j} z, t)|^p \, \mathrm{d}x \bigg)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z \\
&= C \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi(z)| \|\partial_m S_k f_i\|_{L^\infty} \|\Delta_j g\|_{L^p} \, \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

onde foi usado que a linearidade do argumento $x - 2^{-j} z$ implica que $\|\Delta_{j'} g\|_{L^p} = \|\Delta_{j'} g(x - 2^{-j} \cdot)\|_{L^p}$. Desta maneira

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j] \partial_i g \right\|_{L^p} &= C \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \|\partial_m S_k f_i\|_{L^\infty} \|\Delta_j g\|_{L^p} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \varphi(z)| \, \mathrm{d}z \\
&= C \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \|S_k \partial_m f_i\|_{L^\infty} \|\Delta_j g\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.5.6, p. 30, segue que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} [S_k f_i, \Delta_j] \partial_i g \right\|_{L^p} &= C \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \|\partial_m f_i\|_{L^\infty} \|\Delta_j g\|_{L^p} \\
&= C \|\nabla f\|_{L^\infty} \|\Delta_j g\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

□

APÊNDICE D – Propriedades do Operador Lift

Iremos definir o operador lift $(-\Delta)^s$ e mostrar certas propriedades deste. Usamos a nomenclatura lift, mas tal operador é nada mais que uma potência do Laplaciano, podendo ser fracionária dependendo do valor de s. Estaremos interessados no nosso trabalho particularmente no caso em que $s = -1$, pois tal operador cumpre essencialmente o papel de ser o operador inverso ao Laplaciano. Como referência para esta seção utilizamos [24, p. 280].

Definição D.0.1. *Dado $s \in \mathbb{R}$, denotaremos por $(-\Delta)^s$ o operador definido de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ de tal forma que para cada $f \in \mathcal{S}$*

$$(-\Delta)^s(f)(x) = (|x|^{2s}\hat{f})\check{}(x).$$

Desta maneira podemos demonstrar o seguinte resultado.

Proposição D.0.2. *Dada $f \in \mathcal{S}$, temos que*

$$(-\Delta)^{-1}(\Delta f) = f.$$

Demonstração. Para cada $\xi \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned}[(-\Delta)^{-1}(\Delta f)]\widehat{}\,(\xi) &= |\xi|^{-2}(\Delta f)\widehat{}\,(\xi) = |\xi|^{-2}|\xi|^2\hat{f}(\xi)\\ &= \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue calculando a transformada inversa de Fourier em cada termo acima. □

A seguir demonstraremos propriedades do operador lift que serão úteis ao texto.

Proposição D.0.3. *Consideremos $f \in \mathcal{S}$ e $i,\ j \in \{1, ..., n\}$, então*

(1) $\partial_i\partial_j(-\Delta)^{-1}f = R_iR_jf$;

(2) *Dado $k \in \mathbb{Z}$*

$$\Delta_k\nabla(-\Delta)^{-1}f = (-\Delta)^{-1}\nabla\Delta_k f.$$

Demonstração. **(1)** Pela Proposição 1.4.4, p. 27, temos que, como $(-\Delta)^{-1}f \in \mathcal{S}$

$$\partial_i\partial_j(-\Delta)^{-1}f = -R_iR_j\Delta(-\Delta)^{-1}f = -R_iR_jf.$$

Logo é suficiente mostrar que

$$\partial_i(-\Delta)^{-1}f = (-\Delta)^{-1}\partial_i f.$$

Veja que dado $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned}(\partial_i(-\Delta)^{-1}f)\widehat{\ }(\xi) &= (i\xi)\big((-\Delta)^{-1}f\big)\widehat{\ }(\xi) = (-i\xi_i)|\xi|^{-2}\hat{f}(\xi) \\ &= |\xi|^{-2}(-i\xi_i)\hat{f}(\xi) = ((-\Delta)^{-1}\partial_i f)\widehat{\ }(\xi).\end{aligned}$$

Como desejado.

(2) Temos que

$$\begin{aligned}(\Delta_k\nabla(-\Delta)^{-1}f)\widehat{\ }(\xi) &= \hat{\varphi}_k(\nabla(-\Delta)^{-1}f)\widehat{\ }(\xi) \\ &= \hat{\varphi}_k(\partial_1(-\Delta)^{-1}f, ..., \partial_n(-\Delta)^{-1}f)\widehat{\ }(\xi) \\ &= \hat{\varphi}_k((-\Delta)^{-1}\partial_1 f, ..., (-\Delta)^{-1}\partial_n f)\widehat{\ }(\xi) \\ &= \hat{\varphi}_k((-\Delta)^{-1}\nabla f)\widehat{\ }(\xi) \\ &= \hat{\varphi}_k|\xi|^2(\nabla f)\widehat{\ }(\xi) \\ &= |\xi|^2(\Delta_k\nabla f)\widehat{\ }(\xi) \\ &= ((-\Delta)^{-1}\nabla\Delta_k f)\widehat{\ }(\xi).\end{aligned}$$

O que conclui a afirmação.

□

Observação D.0.4. *Veja que como consequência do item (1), o operador $\partial_i\partial_j(-\Delta)^{-1}$ é um SIO. Logo, quando $p \in (1,\infty)$, pela Observação 1.5.9, p. 32, $\partial_i\partial_j(-\Delta)^{-1}$ está bem definido e é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e em $\dot{B}^s_{p,q}$.*

APÊNDICE E – Algumas Estimativas Úteis para a Dissertação

Dedicamos este capítulo para a apresentação da desigualdade de Gronwall. e o cálculo de propriedades usadas no decorrer do texto.

A desigualdade a seguir é demonstrada em [11, p. 3].

Lema E.0.1 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Consideremos funções contínuas f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, com g assumindo valores não negativos em todo o intervalo $[a, b]$, e $C \in \mathbb{R}$ uma constante. Se a desigualdade*

$$f(t) \leqslant C + \int_a^t g(r)f(r)\,dr$$

for válida para cada $t \in [a, b]$, então

$$f(t) \leqslant C \exp\left(\int_a^t g(r)\,dt\right).$$

A seguir exporemos cálculos que omitimos do desenvolvimento do texto em virtude de fluidez da leitura.

O primeiro destes é relacionado com modificações particulares realizadas sobre o Lema de Bernstein, no contexto deste trabalho.

Lema E.0.2. *Sejam $p \in (1, \infty)$, $s > \dfrac{n}{p} + 1$ se $q \in [1, \infty]$ ou $s = \dfrac{n}{p} + 1$ se $q = 1$. Se $v \in B^s_{p,q}$ então*

(1) *Dado α um multiíndice fixado,*

$$\|\partial^\alpha v\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \sim \|v\|_{\dot{B}^{s+|\alpha|}_{p,q}};$$

(2) *Dado $j \in \mathbb{Z}$,*

$$\|\Delta_j v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \leqslant C2^{-j}\|\Delta_j v\|_{\dot{B}^s_{p,q}};$$

(3)

$$\|\nabla v\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leqslant C\sum_{i,j=1}^n \|\partial_i\partial_j v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}};$$

(4)

$$\|\nabla v\|_{B^{s-1}_{p,q}} \leqslant C\|v\|_{B^s_{p,q}}.$$

Demonstração. **(1)** Temos que

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha v\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &= \left\|\left(2^{js}\|\Delta_j \partial^\alpha v\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^p}\\ &= \left\|\left(2^{js}\|\partial^\alpha \Delta_j v\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^p},\end{aligned}$$

mas como

$$\operatorname{supp}\widehat{(\Delta_j v)} \subset \{\xi \mid 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\} \subset B(0, 2^{j+2}),$$

pelo Lema de Bernstein (Lema 1.2.8, p. 25) segue que

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha v\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant \left\|\left(2^{js} C 2^{(j+2)|\alpha|}\|\Delta_j v\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^p}\\ &= C2^{2|\alpha|}\left\|\left(2^{j(s+|\alpha|)}\|\Delta_j v\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^p}\\ &= C\|v\|_{\dot{B}^{s+|\alpha|}_{p,q}}.\end{aligned}$$

Reciprocamente

$$\begin{aligned}C\|v\|_{\dot{B}^{s+|\alpha|}_{p,q}} &= \left\|\left(2^{j(s+|\alpha|)}\|\Delta_j v\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^p}\\ &\leqslant \left\|\left(2^{j(s+|\alpha|)} C 2^{-(j+2)|\alpha|}\|\partial^{|\alpha|}\Delta_j v\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^p}\\ &= C\|\partial^\alpha v\|_{\dot{B}^s_{p,q}}.\end{aligned}$$

Em ambos os casos a constante C depende de α. Veja que diferentemente das condições no Lema de Bernstein, aplicar o operador Δ_j faz com que neste caso não seja necessário exigir condições sobre o suporte de $\hat{v}$.

(2) Temos que

$$\|\Delta_j v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} = \left\|\left(2^{k(s-1)}\|\Delta_k \Delta_j v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q},$$

mas

$$\operatorname{supp}\widehat{(\Delta_k \Delta_j v)} \subset \operatorname{supp}\hat{\varphi}_k \bigcap \operatorname{supp}\hat{\varphi}_j \subset B(0, 2^{j+2}),$$

então dado $i \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned}\|\Delta_j v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} &\leqslant \left\|\left(2^{k(s-1)} C 2^{-(j+2)}\|\partial_i \Delta_k \Delta_j v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q}\\ &\leqslant C2^{-j}\left\|\left(2^{k(s-1)}\|\partial_i \Delta_k \Delta_j v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q}\\ &= C2^{-j}\|\partial_i \Delta_j v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}.\end{aligned}$$

Logo, pelo Item (1) acima,

$$\|\Delta_j v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \leqslant C2^{-j}\|\Delta_j v\|_{\dot{B}^s_{p,q}}.$$

(3) Aqui

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &= \left\| \left(2^{ks} \|\Delta_k \nabla v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \\
&= \left\| \left(2^{ks} \|\nabla \Delta_k v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \\
&\leqslant \left\| \left(2^{ks} C \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i \Delta_k v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \\
&\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \left\| \left(2^{ks} \|\partial_i \Delta_k v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \\
&= C \sum_{i=1}^{n} \left\| \left(2^{ks} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \|\partial_i \Delta_k v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q}.
\end{aligned}$$

Então usando o Lema de Bernstein segue que

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \left\| \left(2^{ks} \|\partial_i \Delta_k v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \\
&= C \sum_{i=1}^{n} \left\| \left(2^{ks} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} C 2^{-(k+2)} \|\partial_j \partial_i \Delta_k v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \\
&\leqslant C \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \left(2^{k(s-1)} \|\Delta_k \partial_j \partial_i v\|_{L^p}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \\
&= C \sum_{i,j=1}^{n} \|\Delta_k \partial_j \partial_i v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

(4) Pela Observação 1.5.14, p. 33

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{B^{s-1}_{p,q}} &= \|S_{-1} \nabla v\|_{L^p} + \|\nabla v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \\
&\leqslant \|\nabla S_{-1} v\|_{L^p} + \|\nabla v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}} \\
&\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i S_{-1} v\|_{L^p} + \left\| \left(2^{j(s-1)} \|\Delta_j \nabla v\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \\
&\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \left(\left\|\partial_i S_{-1} v\right\|_{L^p} + \left\| \left(2^{j(s-1)} \|\partial_i \Delta_j v\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \right).
\end{aligned}$$

Como

$$\operatorname{supp} \widehat{(S_{-1} v)} \subset \operatorname{supp} \hat{\Phi} \subset \{\xi \mid |\xi| \leqslant 2^0\} \subset B(0,2)$$

então pelo Lema de Bernstein

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{B^{s-1}_{p,q}} &\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \left(C2 \left\|S_{-1} v\right\|_{L^p} + \left\| \left(2^{j(s-1)} 2^{j+1} \|\Delta_j v\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \right) \\
&\leqslant CN \left(\left\|S_{-1} v\right\|_{L^p} + \left\| \left(2^{js} \|\Delta_j v\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \right) = C \|v\|_{B^s_{p,q}}.
\end{aligned}$$

□

O seguinte lema é uma estimativa clássica relacionada às equações de Euler.

Lema E.0.3. *Sejam $T > 0$, $p \in (1,\infty)$, e $s > \frac{n}{p} + 1$ com $q \in [1,\infty]$, ou $s = \frac{n}{p} + 1$ se $q = \infty$. Supondo que $v \in C^1([0,T], B^s_{p,q})$ seja solução das equações de Euler*

$$\partial_t v + (v\cdot\nabla)v = -\nabla p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{E.1}$$

$$div\ v(t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{E.2}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{E.3}$$

podemos afirmar que

$$\|v(t)\|_{L^p} \leqslant \|v_0\|_{L^p} + \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{L^p}\, dr.$$

Demonstração. Se $|v(t)| = 0$ não há o que mostrar.
Considerando a equação (E.1) e multiplicando ambos os seus membros pelo vetor $v|v|^{p-2}$ obtemos

$$\underbrace{(\partial_t v)\cdot v|v|^{p-2} + [(v\cdot\nabla)v]\cdot v|v|^{p-2}}_{I} = \underbrace{-(\nabla p)\cdot v|v|^{p-2}}_{II}. \tag{E.4}$$

Desenvolvendo vemos que

$$\begin{aligned}
I &= \left(\sum_{i=1}^n (\partial_t v_i)\cdot v_i\right)|v|^{p-2} + \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n v_i\partial_i v_j\right)v_j\right)|v|^{p-2} \\
&= \frac{1}{p}\partial_t(|v|^p) + \sum_{i=1}^n v_i\left(\sum_{j=1}^n v_j\partial_i v_j|v|^{p-2}\right) \\
&= \frac{1}{p}\partial_t(|v|^p) + \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n v_i\big[\partial_i(|v|^p)\big] \\
&= \frac{1}{p}\partial_t(|v|^p) + \frac{1}{p}v\cdot\nabla(|v|^p).
\end{aligned}$$

Como pela desigualdade de Schwarz

$$II \leqslant |\nabla p||v||v|^{p-2} = |\nabla p||v|^{p-1}$$

então pela equação (E.4) segue que

$$\partial_t(|v|^p) + v\cdot\nabla(|v|^p) \leqslant p|\nabla p||v|^{p-1}.$$

Integrando com relação à variável espacial vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t(|v|^p)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} v\cdot\nabla(|v|^p)\,\mathrm{d}x \leqslant p\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla p||v|^{p-1}\,\mathrm{d}x$$

usando o Teorema da Divergência (ver [23, p. 10]).

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |v|^p\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}\, v\cdot|v|^p\,\mathrm{d}x \leqslant p\,\||\nabla p||v|^{p-1}\|_{L^1}.$$

Como $\operatorname{div} v = 0$, então

$$\partial_t(\|v\|_{L^p}^p) \leqslant p\, \||\nabla p||v|^{p-1}\|_{L^1}.$$

Pela desigualdade de Hölder (Lema 1.1.8, p.17], no caso em que $q = \dfrac{p}{p-1}$,

$$\begin{aligned}\partial_t(\|v\|_{L^p}^p) &\leqslant p\, \|\nabla p\|_{L^p} \||v|^{p-1}\|_{L^q} \\ &= p\, \|\nabla p\|_{L^p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{(p-1)\cdot(\frac{p}{p-1})}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= p\, \|\nabla p\|_{L^p} \|v\|_{L^p}^{p-1},\end{aligned}$$

expandindo o primeiro termo, vemos que

$$p\, \|v\|_{L^p}^{p-1} \partial_t(\|v\|_{L^p}) \leqslant p\, \|\nabla p\|_{L^p} \|v\|_{L^p}^{p-1},$$

logo

$$\begin{aligned} &\partial_t(\|v\|_{L^p}) \leqslant \|\nabla p\|_{L^p} \\ \Rightarrow \quad &\|v\|_{L^p} \leqslant \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{L^p}\, \mathrm{d}r + \|v(0)\|_{L^p} = \int_0^t \|\nabla p(r)\|_{L^p}\, \mathrm{d}r + \|v_0\|_{L^p}.\end{aligned}$$

□

Além disso, é possível generalizar o lema anterior no seguinte sentido.

Lema E.0.4. *Sejam $T > 0$, $p \in (1, \infty)$, e $s > \dfrac{n}{p} + 1$ com $q \in [1, \infty]$, ou $s = \dfrac{n}{p} + 1$ se $q = \infty$. Considerando $u, b, g \in C^1([0, T], B_{p,q}^s)$, com $\operatorname{div} b = 0$ e tais que a igualdade*

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = g,$$

é satisfeita, podemos garantir a estimativa dada por,

$$\|u(t)\|_{L^p} \leqslant \int_0^t \|g(r)\|_{L^p}\, dr + \|u(\cdot, 0)\|_{L^p}. \tag{E.5}$$

Demonstração. Considerando a substituição $X(x, t)$ na variável espacial, tal que

$$\begin{aligned}\partial_t X &= b \\ X(x, 0) &= x,\end{aligned}$$

vemos que

$$[u(X(x, t), t)]_t = \partial_t u + b \cdot \nabla u(t) = g(X(x, t), t).$$

Consequentemente ao integrar com relação a t, obtemos

$$\begin{aligned} u(X(x,t),t) &= \int_0^t g(X(x,r),r)\,\mathrm{d}r + u(X(x,0),0) \\ &= \int_0^t g(X(x,r),r)\,\mathrm{d}r + u(x,0). \end{aligned}$$

Por hipótese o campo $\partial_t X$ tem divergência nula, então pelo Lema A.0.3,p. 83

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^p} = \|u(X(\cdot,t),t)\|_{L^p} &= \left\| \int_0^t g(X(\cdot,r),r)\,\mathrm{d}r + u(\cdot,0) \right\|_{L^p} \\ &\leqslant \int_0^t \|g(X(\cdot,r),r)\|_{L^p}\,\mathrm{d}r + \|u(\cdot,0)\|_{L^p} \\ &\leqslant \int_0^t \|g(r)\|_{L^p}\,\mathrm{d}r + \|u(\cdot,0)\|_{L^p}. \end{aligned}$$

□

Passamos a demonstrar certa estimativa necessária para o desenvolvimento da demonstração do Lema 2.0.8, p. 49.

Lema E.0.5. *Considerando válidas as hipóteses do Lema 2.0.8 e dado* $j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\left\|(S_{j-2}w\cdot\nabla)\Delta_j v - \Delta_j((w\cdot\nabla)v)\right\|_{L^p} \leqslant \\ &\qquad C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}w\|_{L^p} + C\|\nabla w\|_{L^\infty}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}v\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Demonstração. Usando a Proposição C.0.4, p. 88, cada coordenada de v satisfaz

$$\begin{aligned} (S_{j-2}w\cdot\nabla)\Delta_j v_k - \Delta_j((w\cdot\nabla)v_k) &= \underbrace{-\sum_{i=1}^n \Delta_j T_{\partial_i v_k} w_i}_{I} + \underbrace{\sum_{i=1}^n [T_{w_i}\partial_i, \Delta_j] v_k}_{II} \\ &\quad \underbrace{-\sum_{i=1}^n T_{w_i - S_{j-2}w_i}\partial_i\Delta_j v_k}_{III} \underbrace{-\sum_{i=1}^n [\Delta_j R(w_i,\partial_i v_k) - R(S_{j-2}w_i, \Delta_j\partial_i v_k)]}_{IV}. \end{aligned} \tag{E.6}$$

Estimaremos cada um dos termos definidos na igualdade (E.6).

- I: Da Definição C.0.2, p. 87], segue

$$\begin{aligned} I &= -\sum_{i=1}^n \Delta_j \sum_{j'\in\mathbb{Z}} S_{j'-2}(\partial_i v_k)\Delta_{j'}w_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j'\in\mathbb{Z}} \Delta_j(S_{j'-2}(\partial_i v_k)\Delta_{j'}w_i). \end{aligned}$$

De forma análoga ao realizado para concluir a implicação 2.17, p. 42, temos que

$$|j-j'| \geqslant 4 \Rightarrow \Delta_j(S_{j'-2}(\partial_i v_k)\Delta_{j'}w_i) = 0,$$

então podemos podemos escrever

$$I = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \Delta_j(S_{j'-2}(\partial_i v_k)\Delta_{j'} w_i).$$

Segue da desigualdade de Young (Proposição 1.1.13, p. 18) que

$$\begin{aligned}\|I\|_{L^p} &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|\varphi_j\|_{L^1} \|S_{j'-2}(\partial_i v_k)\Delta_{j'} w_i\|_{L^p} \\ &\leqslant C\sum_{i=1}^{n} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|S_{j'-2}(\partial_i v_k)\Delta_{j'} w_i\|_{L^p},\end{aligned}$$

consequentemente, usando a desigualdade de Hölder generalizada (Lema 1.1.9, p. 17)

$$\|I\|_{L^p} \leqslant C\sum_{i=1}^{n} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|S_{j'-2}(\partial_i v_k)\|_{L^\infty} \|\Delta_{j'} w_i\|_{L^p}.$$

Pelo Lema 1.5.6, p. 30

$$\begin{aligned}\|I\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{i=1}^{n} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|\partial_i v_k\|_{L^\infty} \|\Delta_{j'} w_i\|_{L^p} \\ &\leqslant C\sum_{i=1}^{n} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|\nabla v\|_{L^\infty} \|\Delta_{j'} w_i\|_{L^p} \\ &\leqslant C\|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{|j-j'|\leqslant 3} \|\Delta_{j'} w\|_{L^p} \\ &\leqslant C\|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{j'\geqslant j-4} \|\Delta_{j'} w\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{E.7}$$

- II: Temos que

$$\begin{aligned} II &= \sum_{i=1}^{n} [T_{w_i}\partial_i, \Delta_j] v_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ T_{w_i}[\partial_i(\Delta_j v_k)] - \Delta_j[T_{w_i}\partial_i v_k] \Big\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \sum_{j'\in\mathbb{Z}} S_{j'-2} w_i \cdot \Delta_{j'}\partial_i(\Delta_j v_k) - \Delta_j \sum_{j'\in\mathbb{Z}} S_{j'-2} w_i \cdot \Delta_{j'}\partial_i v_k \Big\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j'\in\mathbb{Z}} [S_{j'-2} w_i \cdot \Delta_{j'}\partial_i(\Delta_j v_k) - \Delta_j(S_{j'-2} w_i \cdot \Delta_{j'}\partial_i v_k)], \end{aligned}$$

então pelas propriedades de convolução enunciadas na Proposição 1.1.12, p. 18

$$\begin{aligned} II &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j'\in\mathbb{Z}} [S_{j'-2} w_i \cdot \Delta_{j'}\Delta_j\partial_i v_k - \Delta_j(S_{j'-2} w_i \cdot \Delta_{j'}\partial_i v_k)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j'\in\mathbb{Z}} [S_{j'-2} w_i \cdot \Delta_j\Delta_{j'}\partial_i v_k - \Delta_j(S_{j'-2} w_i \cdot \Delta_{j'}\partial_i v_k)]. \end{aligned} \tag{E.8}$$

Afirmamos que

$$|j-j'|\geqslant 4 \Rightarrow S_{j'-2}w_i\cdot\Delta_j\Delta_{j'}\partial_i v_k-\Delta_j(S_{j'-2}w_i\cdot\Delta_{j'}\partial_i v_k)=0. \tag{E.9}$$

De fato, de maneira análoga ao argumento usado para a implicação (2.17), p. 42, temos que

$$|j-j'|\geqslant 4 \Rightarrow \Delta_j(S_{j'-2}w_i\cdot\Delta_{j'}\partial_i v_k)=0. \tag{E.10}$$

Considerando agora a hipótese mais forte $|j-j'|\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\widehat{\Delta_j\Delta_{j'}\partial_i v_k}) &= \operatorname{supp}(\hat{\varphi}_j\cdot\hat{\varphi}_{j'}\cdot\widehat{(\partial_i v_k)})\\ &\subset \operatorname{supp}(\hat{\varphi}_j)\bigcap\operatorname{supp}(\hat{\varphi}_{j'})\\ &=\{\xi\mid 2^{j-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j+1}\}\bigcap\{\xi\mid 2^{j'-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j'+1}\}=\varnothing.\end{aligned}$$

Desta forma, analogamente à conclusão da implicação (2.17), p. 42, segue que

$$\Delta_j\Delta_{j'}\partial_i v_k=0. \tag{E.11}$$

Assim

$$|j-j'|\geqslant 2\Rightarrow|j-j'|\geqslant 4\Rightarrow S_{j'-2}w_i\cdot\Delta_j\Delta_{j'}\partial_i v_k=0. \tag{E.12}$$

A implicação (E.9) segue, pois, de (E.10) e (E.12). Logo podemos escrever a equação (E.8) como

$$\begin{aligned}II&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 3}[S_{j'-2}w_i\cdot\Delta_j\Delta_{j'}\partial_i v_k-\Delta_j(S_{j'-2}w_i\cdot\Delta_{j'}\partial_i v_k)]\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 3}[S_{j'-2}w_i\cdot\Delta_j\partial_i\Delta_{j'}v_k-\Delta_j(S_{j'-2}w_i\cdot\partial_i\Delta_{j'}v_k)]\\ &=\sum_{|j-j'|\leqslant 3}\sum_{i=1}^{n}[S_{j'-2}w_i,\Delta_j]\partial_i\Delta_{j'}v_k.\end{aligned}$$

Desta forma

$$\|II\|_{L^p}\leqslant\sum_{|j-j'|\leqslant 3}\left\|\sum_{i=1}^{n}[S_{j'-2}w_i,\Delta_j]\partial_i\Delta_{j'}v_k\right\|_{L^p}.$$

Pelo Lema C.0.5, p. 88, com $k=j'-2$, $f=w$ e $g=\Delta_{j'}v_k$ segue que

$$\|II\|_{L^p}\leqslant\sum_{|j-j'|\leqslant 3}C\|\nabla w\|_{L^\infty}\|\Delta_j\Delta_{j'}v_k\|_{L^p}.$$

Pela desigualdade de Young (Proposição 1.1.13, p. 18) concluímos que

$$\begin{aligned}\|II\|_{L^p}&=C\sum_{|j-j'|\leqslant 3}\|\nabla w\|_{L^\infty}\|\Delta_{j'}v_k\|_{L^p}\\ &=C\sum_{|j-j'|\leqslant 3}\|\nabla w\|_{L^\infty}\|\Delta_{j'}v\|_{L^p}\\ &\leqslant C\|\nabla w\|_{L^\infty}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}v\|_{L^p}.\end{aligned} \tag{E.13}$$

- III: Veja que

$$\begin{aligned}III &= -\sum_{i=1}^{n} T_{w_i - S_{j-2}w_i}\partial_i\Delta_j v_k\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j'\in\mathbb{Z}} S_{j'-2}(w_i - S_{j-2}w_i)\Delta_{j'}\partial_i\Delta_j v_k.\end{aligned}$$

De forma análoga à implicação (E.12) temos que

$$|j-j'|\geqslant 2 \Rightarrow S_{j'-2}(w_i - S_{j-2}w_i)\Delta_j\partial_i\Delta_{j'}v_k = 0,$$

então

$$III = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1} S_{j'-2}(w_i - S_{j-2}w_i)\partial_i\Delta_{j'}\Delta_j v_k.$$

Mas dados $j,k\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\widehat{(S_k\Delta_j w_i)} &= \operatorname{supp}(\hat{\Phi}_k\cdot\hat{\varphi}_j\cdot\hat{w}_i)\\ &\subset \operatorname{supp}\hat{\Phi}_k\bigcap\operatorname{supp}\hat{\varphi}_j\\ &\subset \{\xi\,|\,|\xi|\leqslant 2^k\}\bigcap\{\xi\,|\,2^{j-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j+1}\},\end{aligned}$$

desta forma

$$k\leqslant j-2 \Rightarrow \operatorname{supp}\widehat{(S_k\Delta_j w_i)} = \varnothing \Rightarrow S_k\Delta_j w_i = 0. \tag{E.14}$$

Ao considerar $k = j'-2$, temos que a hipótese na implicação acima é a condição $j'\leqslant j$, então

$$\begin{aligned}S_{j'-2}(w_i - S_{j-2}w_i) &= \left\{\left[S_{j'-2}(w_i - S_{j-2}w_i)\right]^{\wedge}\right\}^{\vee}\\ &= \left[\hat{\Phi}_{j'-2}\big(\hat{w}_i - \hat{\Phi}_{j-2}\hat{w}_i\big)\right]^{\vee}\\ &= \left[\hat{\Phi}_{j'-2}\left(\sum_{k\geqslant j-2}\hat{\varphi}_k\hat{w}_i\right)\right]^{\vee}\\ &= \sum_{k\geqslant j-2} S_{j'-2}\Delta_k w_i\\ &= \sum_{k=j-2}^{j'-1} S_{j'-2}\Delta_k w_i,\end{aligned} \tag{E.15}$$

onde usamos a equação (E.14) na última desigualdade. Disto segue que

$$III = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1} S_{j'-2}\left(\sum_{k=j-2}^{j'-1}\Delta_k w_i\right)\partial_i\Delta_{j'}\Delta_j v_k.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} III = -\sum_{i=1}^{n}\Bigg[S_{j-3}\Big(\sum_{k=j-2}^{j-2}\Delta_k w_i\Big)\partial_i\Delta_{j-1}\Delta_j v_k + S_{j-2}\Big(\sum_{k=j-2}^{j-1}\Delta_k w_i\Big)\partial_i\Delta_j\Delta_j v_k \\ + S_{j-1}\Big(\sum_{k=j-2}^{j}\Delta_k w_i\Big)\partial_i\Delta_{j+1}\Delta_j v_k\Bigg] \\ = -\sum_{i=1}^{n}\Bigg(S_{j-3}\Delta_{j-2}w_i\partial_i\Delta_{j-1}\Delta_j v_k + S_{j-2}(\Delta_{j-2}w_i + \Delta_{j-1}w_i)\partial_i\Delta_j\Delta_j v_k \\ + S_{j-1}(\Delta_{j-2}w_i + \Delta_{j-1}w_i + \Delta_j w_i)\partial_i\Delta_{j+1}\Delta_j v_k\Bigg). \end{aligned}$$

então pela equação (E.14)

$$\begin{aligned} III = -\sum_{i=1}^{n}\Bigg(S_{j-3}(\Delta_{j-2}w_i + \Delta_{j-1}w_i + \Delta_j w_i)\partial_i\Delta_{j-1}\Delta_j v_k \\ + S_{j-2}(\Delta_{j-2}w_i + \Delta_{j-1}w_i + \Delta_j w_i)\partial_i\Delta_j\Delta_j v_k \\ + S_{j-1}(\Delta_{j-2}w_i + \Delta_{j-1}w_i + \Delta_j w_i)\partial_i\Delta_{j+1}\Delta_j v_k \\ = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\big[S_{j'-2}(\Delta_{j-2}w_i + \Delta_{j-1}w_i + \Delta_j w_i)\partial_i\Delta_j\Delta_{j'}v_k\big]. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder generalizada (Lema 1.1.9, p. 17) temos

$$\begin{aligned} \|III\|_{L^p} &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\big\|S_{j'-2}(\Delta_{j-2}w_i + \Delta_{j-1}w_i + \Delta_j w_i)\partial_i\Delta_j\Delta_{j'}v_k\big\|_{L^p} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\big\|S_{j'-2}(\Delta_{j-2}w_i + \Delta_{j-1}w_i + \Delta_j w_i)\big\|_{L^\infty}\big\|\partial_i\Delta_j\Delta_{j'}v_k\big\|_{L^p}, \end{aligned}$$

pelo Lema (1.5.6), p. 30, vemos que

$$\begin{aligned} \|III\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\big\|\Delta_{j-2}w_i + \Delta_{j-1}w_i + \Delta_j w_i\|_{L^\infty}\|\partial_i\Delta_j\Delta_{j'}v_k\big\|_{L^p} \\ &\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\Big(\big\|\Delta_{j-2}w_i\big\|_{L^\infty} + \big\|\Delta_{j-1}w_i\big\|_{L^\infty} + \big\|\Delta_j w_i\big\|_{L^\infty}\Big)\big\|\partial_i\Delta_j\Delta_{j'}v_k\big\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}\widehat{(\Delta_{j-1}f)} \subset \{\xi \mid 2^{j-2} \leqslant |\xi| \leqslant 2^j\}, \\ &\operatorname{supp}\widehat{(\Delta_j f)} \subset \{\xi \mid 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\}, \quad \text{e} \\ &\operatorname{supp}\widehat{(\Delta_{j+1}f)} \subset \{\xi \mid 2^j \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+2}\}, \end{aligned}$$

segue do Lema de Bernstein (Lema 1.2.8, p. 25) que

$$
\begin{aligned}
\|III\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\Big(C_1 2^{-j+1}\big\|\partial_i\Delta_{j-1}w_i\big\|_{L^\infty}+C_2 2^{-j}\big\|\partial_i\Delta_{j-1}w_i\big\|_{L^\infty}\\
&\qquad\qquad + C_3 2^{-j-1}\big\|\partial_i\Delta_j w_i\big\|_{L^\infty}\Big)C_4 2^{j+1}\big\|\Delta_j\Delta_{j'}v_k\big\|_{L^p}\\
&\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\Big(\big\|\nabla\Delta_{j-2}w_i\big\|_{L^\infty}+\big\|\nabla\Delta_{j-1}w_i\big\|_{L^\infty}+\big\|\nabla\Delta_j w_i\big\|_{L^\infty}\Big)\big\|\Delta_j\Delta_{j'}v_k\big\|_{L^p}\\
&\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\Big(\big\|\Delta_{j-2}\nabla w_i\big\|_{L^\infty}+\big\|\Delta_{j-1}\nabla w_i\big\|_{L^\infty}+\big\|\Delta_j\nabla w_i\big\|_{L^\infty}\Big)\big\|\Delta_j\Delta_{j'}v_k\big\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Young (Proposição 1.1.14, p. 19) concluímos que

$$
\begin{aligned}
\|III\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\Big(\|\varphi_{j-2}\|_{L^1}\|\nabla w_i\|_{L^\infty}+\|\varphi_{j-1}\|_{L^1}\|\nabla w_i\|_{L^\infty}+\|\varphi_j\|_{L^1}\|\nabla w_i\|_{L^\infty}\Big)\\
&\qquad\qquad\cdot\|\varphi_j\|_{L^1}\|\Delta_{j'}v_k\|_{L^p}\\
&\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\Big(\|\varphi\|_{L^1}\|\nabla w_i\|_{L^\infty}+\|\varphi\|_{L^1}\|\nabla w_i\|_{L^\infty}+\|\varphi\|_{L^1}\|\nabla w_i\|_{L^\infty}\Big)\\
&\qquad\qquad\cdot\|\varphi\|_{L^1}\|\Delta_{j'}v_k\|_{L^p}\\
&= C\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\Big(3\sum_{i=1}^{n}\|\nabla w_i\|_{L^\infty}\Big)\|\Delta_{j'}v_k\|_{L^p} = C\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\|\nabla w\|_{L^\infty}\|\Delta_{j'}v_k\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\|III\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\|\nabla w\|_{L^\infty}\|\Delta_{j'}v\|_{L^p}\\
&\leqslant C\|\nabla w\|_{L^\infty}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}v\|_{L^p}.
\end{aligned}
\tag{E.16}
$$

- IV: Temos que

$$
\begin{aligned}
IV &= -\sum_{i=1}^{n}[\Delta_j R(w_i,\partial_i v_k)-R(S_{j-2}w_i,\Delta_j\partial_i v_k)]\\
&= -\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\Delta_j\Bigg(\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\Delta_{j'}w_i\Delta_{j''}\partial_i v_k\Bigg)-\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\Delta_{j'}S_{j-2}w_i\Delta_{j''}\Delta_j\partial_i v_k\Bigg]\\
&= \underbrace{-\sum_{i=1}^{n}\Delta_j\Bigg[\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\Delta_{j'}(w_i-S_{j-2}w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\Bigg]}_{(1)}\\
&\qquad\underbrace{-\sum_{i=1}^{n}\Delta_j\Bigg(\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\Delta_{j'}S_{j-2}w_i\Delta_{j''}\partial_i v_k\Bigg)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\Delta_{j'}S_{j-2}w_i\Delta_{j''}\Delta_j\partial_i v_k}_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Estimaremos, pois, cada um dos termos destacados acima.

(1): Veja que

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}\left[\Delta_{j'}(w_i - S_{j-2}w_i)\right]\widehat{} &= \operatorname{supp}\left[\hat{\varphi}_{j'}\left(\sum_{k\geqslant j-2}\hat{\varphi}_k w_i\right)\right] \\
&\subset \operatorname{supp}\hat{\varphi}_{j'} \bigcap \operatorname{supp}\left(\sum_{k\geqslant j-2}\hat{\varphi}_k\right) \\
&\subset \{\xi \mid 2^{j'-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j'+1}\} \bigcap \{\xi \mid 2^{j-3} \leqslant |\xi|\},
\end{aligned}$$

analogamente ao argumento usado para obter E.15, p. 103, concluímos que

$$j' \leqslant j-5 \iff j'+1 \leqslant j-4 \Rightarrow \Delta_{j'}(w_i - S_{j-2}w_i) = 0,$$

logo

$$(1) = -\sum_{i=1}^{n}\Delta_j\left[\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\sum_{j'\geqslant j-4}\Delta_{j'}(w_i - S_{j-2}w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\right].$$

Assim

$$\begin{aligned}
\|(1)\|_{L^p} &= \left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\sum_{j'\geqslant j-4}\Delta_j\left[(\Delta_{j'}w_i - \Delta_{j'}S_{j-2}w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\right]\right\|_{L^p} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\sum_{j'\geqslant j-4}\left\|\Delta_j\left[(\Delta_{j'}w_i - \Delta_{j'}S_{j-2}w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\right]\right\|_{L^p},
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Young generalizada (Proposição 1.1.14, p. 19)

$$\|(1)\|_{L^p} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\sum_{j'\geqslant j-4}\left\|\varphi_j\right\|_{L^1}\left\|(\Delta_{j'}w_i - \Delta_{j'}S_{j-2}w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\right\|_{L^p},$$

consequentemente, pela desigualdade de Hölder generalizada (Lema 1.1.9, p. 17), segue que

$$\begin{aligned}
\|(1)\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\sum_{j'\geqslant j-4}\left\|\Delta_{j'}w_i - S_{j-2}\Delta_{j'}w_i\right\|_{L^p}\left\|\Delta_{j''}\partial_i v_k\right\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\sum_{j'\geqslant j-4}\left(\left\|\Delta_{j'}w_i\right\|_{L^p} + \left\|S_{j-2}\Delta_{j'}w_i\right\|_{L^p}\right)\left\|\Delta_{j''}\partial_i v_k\right\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

pelo Lema 1.5.6, p. 30, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\|(1)\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\sum_{j'\geqslant j-4}\left(\left\|\Delta_{j'}w_i\right\|_{L^p} + C\left\|\Delta_{j'}w_i\right\|_{L^p}\right)\left\|\Delta_{j''}\partial_i v_k\right\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}w_i\|_{L^p}\|\Delta_{j''}\partial_i v_k\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Novamente da desigualdade de Young

$$
\begin{aligned}
\|(1)\|_{L^p} &\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}w_i\|_{L^p}\|\varphi_{j''}\|_{L^1}\|\partial_i v_k\|_{L^\infty}\\
&= C\sum_{i=1}^{n}\sum_{j'\geqslant j-4}(\|\varphi_{j''-1}\|_{L^1}+\|\varphi_{j''}\|_{L^1}+\|\varphi_{j''+1}\|_{L^1})\|\Delta_{j'}w_i\|_{L^p}\|\partial_i v_k\|_{L^\infty}\\
&= C\sum_{i=1}^{n}\sum_{j'\geqslant j-4}3\|\varphi\|_{L^1}\|\Delta_{j'}w_i\|_{L^p}\|\partial_i v_k\|_{L^\infty}\\
&= C\|\nabla v_k\|_{L^\infty}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}w_i\|_{L^p}\\
&\leqslant C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{j'\geqslant j-4}\|\Delta_{j'}w\|_{L^p}. \qquad \text{(E.17)}
\end{aligned}
$$

(2): Escrevendo a expressão por extenso temos que

$$
(2) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j'-j''|\leqslant 1}\Delta_j\big((\Delta_{j'}S_{j-2}w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\big)-(\Delta_{j'}S_{j-2}w_i)(\Delta_{j''}\Delta_j\partial_i v_k).
$$

Quando $j'\geqslant j$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{supp}\widehat{(\Delta_{j'}S_{j-2}w_i)} &= \operatorname{supp}\hat{\varphi}_{j'}\hat{\Phi}_{j-2}\hat{w}_i\\
&\subset \operatorname{supp}\hat{\varphi}_{j'}\bigcap \operatorname{supp}\hat{S}_{j-2}\\
&\subset \{\xi\,|\,2^{j'-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j'+1}\}\bigcap\{\xi\,|\,|\xi|\leqslant 2^{j-2}\}=\varnothing,
\end{aligned}
$$

então de forma análoga ao argumento usado na implicação 2.17, p. 42, temos que

$$
\Delta_{j'}S_{j-2}w_i = 0.
$$

Logo

$$
j'\geqslant j \Rightarrow \Delta_j\big((\Delta_{j'}S_{j-2}w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\big)-(\Delta_{j'}S_{j-2}w_i)(\Delta_{j''}\Delta_j\partial_i v_k)=0 \qquad \text{(E.18)}
$$

Por outro lado, quando $j-4\geqslant j'$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{supp}\widehat{\big[\Delta_j\big((\Delta_{j'}S_{j-2}w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\big)\big]}\\
&\quad= \operatorname{supp}\hat{\varphi}_j\bigcap\operatorname{supp}\widehat{\big[(\Delta_{j'}S_{j-2}w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\big]}\\
&\quad\subset \operatorname{supp}\hat{\varphi}_j\bigcap\operatorname{supp}\widehat{(\Delta_{j'}S_{j-2}w_i)}*\widehat{(\Delta_{j''}\partial_i v_k)}\\
&\quad\subset \operatorname{supp}\hat{\varphi}_j\bigcap\big[\operatorname{supp}\widehat{(\Delta_{j'}S_{j-2}w_i)}+\operatorname{supp}\widehat{(\Delta_{j''}\partial_i v_k)}\big]\\
&\quad\subset \operatorname{supp}\hat{\varphi}_j\bigcap\big[\operatorname{supp}\hat{\varphi}_{j'}\bigcap\operatorname{supp}\hat{\Phi}_{j-2}+\operatorname{supp}\hat{\varphi}_{j''}\big]\\
&\quad\subset \{\xi\,|\,2^{j-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j+1}\}\\
&\qquad\bigcap[\{\xi\,|\,2^{j'-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j'+1}\}\bigcap\{\xi\,||\xi|\leqslant 2^{j-2}\}+\{\xi\,|\,2^{j''-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j''+1}\}]\\
&\quad\subset \{\xi\,|\,2^{j-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j+1}\}\bigcap[\{\xi\,|2^{j'-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j'+1}\}+\{\xi\,|\,2^{j'-2}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j'+2}\}]
\end{aligned}
$$

pois $|j' - j''| \leqslant 1$. Com um cálculo similar ao usado para determinar a soma de suportes no caso com conclusão na equação 2.16, p. 42, vemos que

$$\begin{aligned}[\{\xi \,|2^{j'-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j'+1}\} + \{\xi \mid 2^{j'-2} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j'+2}\}] &\subset \{\xi \mid 2^{j'+1} \leqslant |\xi| \leqslant 3 \cdot 2^{j'+1}\}] \\ &\subset \{\xi \mid 2^{j'+1} \leqslant |\xi| < 2^{j'+3}\},\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}&\operatorname{supp}\left[\Delta_j\big((\Delta_{j'} S_{j-2} w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\big)\widehat{\ }\right] \\ &\qquad \subset \{\xi \,|\, 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\} \bigcap \{\xi \mid 2^{j'+1} \leqslant |\xi| < 2^{j'+3}\} = \varnothing.\end{aligned}$$

O que implica que

$$j - 4 \geqslant j' \Rightarrow \Delta_j\big((\Delta_{j'} S_{j-2} w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k = 0. \tag{E.19}$$

Além disso quando $j' \leqslant j - 4$ e $|j' - j''| \leqslant 1$ podemos afirmar que $j'' \leqslant j - 3$, logo

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\,[\Delta_{j''}\Delta_j\partial_i v_k]\widehat{\ } &\subset \operatorname{supp}\hat{\varphi}_{j''} \bigcap \operatorname{supp}\hat{\varphi}_j \\ &\subset \{\xi \,|\, 2^{j''-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j''+1}\} \bigcap \{\xi \mid 2^{j-1} \leqslant |\xi| < \cdot 2^{j+1}\} = \varnothing.\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\Delta_{j''}\Delta_j\partial_i v_k = 0 \Rightarrow (\Delta_{j'} S_{j-2} w_i)(\Delta_{j''}\Delta_j\partial_i v_k) = 0. \tag{E.20}$$

Concluímos das igualdades (E.19) e (E.20) que

$$j' \leqslant j - 4 \Rightarrow \Delta_j\big((\Delta_{j'} S_{j-2} w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\big) - (\Delta_{j'} S_{j-2} w_i)(\Delta_{j''}\Delta_j\partial_i v_k) = 0. \tag{E.21}$$

Das implicações (E.18) e (E.21), podemos escrever

$$(2) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{|j'-j''|\leqslant 1} \sum_{j'=j-3}^{j-1} \Delta_j\big((\Delta_{j'} S_{j-2} w_i)\Delta_{j''}\partial_i v_k\big) - (\Delta_{j'} S_{j-2} w_i)(\Delta_{j''}\Delta_j\partial_i v_k).$$

Que por sua vez pode ser simplificado, em conformidade com a Definição C.0.3, p. 87, à forma

$$(2) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{|j'-j''|\leqslant 1} \sum_{j'=j-3}^{j-1} [\Delta_j, \Delta_{j'} S_{j-2} w_i]\Delta_{j''}\partial_i v_k.$$

Usando o Lema C.0.5, p. 88, com $k = j - 2$, $f_i = \Delta_{j'} w_i$ e $g = \Delta_{j''} v_k$ segue que

$$\begin{aligned}\|(2)\|_{L^p} &\leqslant \sum_{|j'-j''|\leqslant 1} \sum_{j'=j-3}^{j-1} \left\| \sum_{i=1}^{n} [\Delta_j, S_{j-2}\Delta_{j'} w_i]\Delta_{j''}\partial_i v_k \right\|_{L^p} \\ &\leqslant \sum_{|j'-j''|\leqslant 1} \sum_{j'=j-3}^{j-1} C\|\nabla\Delta_{j'} w\|_{L^\infty}\|\Delta_j\Delta_{j''} v_k\|_{L^p} \\ &\leqslant C \sum_{|j'-j''|\leqslant 1} \sum_{j'=j-3}^{j-1} \|\Delta_{j'}\nabla w\|_{L^\infty}\|\Delta_j\Delta_{j''} v_k\|_{L^p},\end{aligned}$$

pela desigualdade de Young generalizada (Proposição 1.1.14, p. 19) concluímos que

$$
\begin{aligned}
\|(2)\|_{L^p} &\leqslant C \sum_{|j'-j''|\leqslant 1} \sum_{j'=j-3}^{j-1} \|\nabla w\|_{L^\infty} \|\Delta_{j''} v_k\|_{L^p} \\
&\leqslant C\|\nabla w\|_{L^\infty} \sum_{|j'-j''|\leqslant 1} \sum_{|j'-j|\leqslant 3} \|\Delta_{j''} v_k\|_{L^p} \\
&= C\|\nabla w\|_{L^\infty} \sum_{|j-j''|\leqslant 4} \|\Delta_{j''} v_k\|_{L^p} \\
&= C\|\nabla w\|_{L^\infty} \sum_{|j-j'|\leqslant 4} \|\Delta_{j'} v_k\|_{L^p} \\
&\leqslant C\|\nabla w\|_{L^\infty} \sum_{|j-j'|\leqslant 4} \|\Delta_{j'} v\|_{L^p} \\
&\leqslant C\|\nabla w\|_{L^\infty} \sum_{j'\geqslant j-4} \|\Delta_{j'} v\|_{L^p}. \qquad \text{(E.22)}
\end{aligned}
$$

Por meio das desigualdades (E.17) e (E.22) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|IV\|_{L^p} &\leqslant \|(1)\|_{L^p} + \|(2)\|_{L^p} \\
&\leqslant C\|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{j'\geqslant j-4} \|\Delta_{j'} w\|_{L^p} + C\|\nabla w\|_{L^\infty} \sum_{j'\geqslant j-4} \|\Delta_{j'} v\|_{L^p}. \qquad \text{(E.23)}
\end{aligned}
$$

Concluímos assim as estimativas (E.7), (E.13), (E.16), (E.23), respectivamente relativas aos termos I, II, III, IV da igualdade (E.6), p. 100. Combinando-as obtemos

$$
\begin{aligned}
&\big\|(S_{j-2}w\cdot\nabla)\Delta_j v - \Delta_j((w\cdot\nabla)v)\big\|_{L^p} \leqslant \\
&\qquad C\|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{j'\geqslant j-4} \|\Delta_{j'} w\|_{L^p} + C\|\nabla w\|_{L^\infty} \sum_{j'\geqslant j-4} \|\Delta_{j'} v\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

□

A seguir mostraremos como é possível quantificar a pressão nas equações de Euler a partir da velocidade.

Observação E.0.6. *Sejam* $s > \dfrac{n}{p} + 1$ *com* $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$, *ou* $s = \dfrac{n}{p} + 1$ *com* $p \in (1,\infty)$, $q = 1$. *Suponhamos também que* $w, v \in C^1([0,T]; B^s_{p,q})$ *e* v *seja solução do sistema*

$$
\begin{aligned}
&\partial_t v + (w\cdot\nabla)v = -\nabla p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\
&div\ v(t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty).
\end{aligned}
$$

Observando que

$$
-\Delta p = div\big(-\nabla p\big),
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
-\Delta p &= div\big(\partial_t v + (w\cdot\nabla)v\big)\\
&= \partial_t div\, v + div\,(w\cdot\nabla)v\\
&= div\,(w\cdot\nabla)v\\
&= div\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\partial_i v_1,\ \dots,\sum_{i=1}^{n} w_i\partial_i v_n\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} div\big(w_i\partial_i v_1,\ \dots, w_i\partial_i v_n\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_j\big(w_i\partial_i v_j\big)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\partial_j w_i\partial_i v_j + \sum_{i=1}^{n} w_i\partial_i\left(\sum_{j=1}^{n}\partial_j v_j\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\partial_j w_i\partial_i v_j + \sum_{i=1}^{n} w_i\partial_i\, div\, v\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\partial_j w_i\partial_i v_j.
\end{aligned}
$$

Mostraremos a seguinte desigualdade entre a seminorma homogênea e norma não-homogênea. Tal estimativa foi usada na demonstração do teorema principal deste trabalho.

Lema E.0.7. *Considerando $p\in(1,\infty)$, $s>\frac{n}{p}$ se $q\in[1,\infty]$ ou $s=\frac{n}{p}$ se $q=1$ e $v=(v_1,\dots,v_n)$, $w=(w_1,\dots,w_n)\in B^{s+1}_{p,q}$ então*

$$\sum_{i,j=1}^{n}\|v_j\partial_j w_i\|_{\dot B^s_{p,q}} \leqslant C\|v\|_{B^s_{p,q}}\|w\|_{B^{s+1}_{p,q}}.$$

Demonstração. Pela desigualdade (2.13) (Lema 2.0.2, p. 41), quando $p_1=\infty=r_1$, $p_2=p=r_2$, segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\big\|v_j\partial_j w_i\big\|_{\dot B^s_{p,q}} &\leqslant C\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\big\|v_j\big\|_{L^\infty}\big\|\partial_j w_i\big\|_{\dot B^s_{p,q}} + \big\|v_j\big\|_{\dot B^s_{p,q}}\big\|\partial_j w_i\big\|_{L^\infty}\Big)\\
&\leqslant C\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\big\|v_j\big\|_{L^\infty}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\big\|\partial_j w_i\big\|_{\dot B^s_{p,q}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}\big\|v_j\big\|_{\dot B^s_{p,q}}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\big\|\partial_j w_i\big\|_{L^\infty}\right)\right]\\
&\leqslant C\left[\|v\|_{L^\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\big\|\partial_j w_i\big\|_{\dot B^s_{p,q}}\right)+\big\|v\big\|_{\dot B^s_{p,q}}\big\|\nabla w\big\|_{L^\infty}\right].
\end{aligned}
$$

Logo, pela desigualdade 2.8, p. 38

$$\sum_{i,j=1}^{n}\big\|v_j\partial_j w_i\big\|_{\dot B^s_{p,q}} \leqslant C\left[\|v\|_{L^\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\big\|\partial_j w_i\big\|_{\dot B^s_{p,q}}\right)+\big\|v\big\|_{\dot B^s_{p,q}}C\big\|\nabla w\big\|_{B^s_{p,q}}\right].$$

Do Lema E.0.2, p. 95, itens (1) e (4)

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \|v_j \partial_j w_i\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &\leqslant C\left[\|v\|_{L^\infty}\left(C\sum_{i=1}^{n}\|w_i\|_{\dot{B}^{s+1}_{p,q}}\right) + C\|v\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\|w\|_{B^{s+1}_{p,q}}\right] \\
&\leqslant C\left(\|v\|_{L^\infty}\|w\|_{\dot{B}^{s+1}_{p,q}} + \|v\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\|w\|_{B^{s+1}_{p,q}}\right) \\
&\leqslant C\left(\|v\|_{B^s_{p,q}}\|w\|_{B^{s+1}_{p,q}} + \|v\|_{B^s_{p,q}}\|w\|_{B^{s+1}_{p,q}}\right) \\
&= C\|v\|_{B^s_{p,q}}\|w\|_{B^{s+1}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

□

Baseamos o seguinte lema no realizado em [21, p. 16]. (Colocar isto depende da inserção da demonstração da existência, a qual menciona este resultado.)

Lema E.0.8. *Sejam $p \in (1,\infty)$, $s > \frac{n}{p}$ se $q \in [1,\infty]$ ou $s = \frac{n}{p}$ se $q = 1$. Além disso ponhamos $v = (v_1, ..., v_n), w = (w_1, ..., w_n) \in B^{s+1}_{p,q}$, de tal forma que $\operatorname{div} v = \operatorname{div} w = 0$. Então considerando $\pi(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} (-\Delta)^{-1}\left(\partial_i v_j \partial_j w_i\right)$, existe $C > 0$ tal que*

$$\|\nabla\pi(v,w)\|_{B^s_{p,q}} \leqslant C\left(\|v\|_{L^\infty}\|w\|_{B^{s+1}_{p,q}} + \|v\|_{B^s_{p,q}}\|\nabla w\|_{L^\infty}\right)$$

Demonstração. Usando que $\operatorname{div} v = \operatorname{div} w = 0$, dado $k \in \mathbb{Z}$ temos que

$$\begin{aligned}
\|\Delta_k \nabla\pi(v,w)\|_{L^p} &= \left\|\sum_{i,j=1}^{n} \Delta_k \nabla(-\Delta)^{-1}\left(\partial_i v_j \partial_j w_i\right)\right\|_{L^p} \\
&= \left\|\sum_{i,j=1}^{n} \nabla(-\Delta)^{-1}\partial_i \Delta_k\left(v_j \partial_j w_i\right)\right\|_{L^p} \\
&\leqslant C\left\|\sum_{i,j=1}^{n} \Delta_k\left(v_j \partial_j w_i\right)\right\|_{L^p},
\end{aligned}$$

onde usamos a limitação de L^p em L^p do SIO $\nabla(-\Delta)^{-1}\partial_i$. Observamos que a constante C não depende das escolhas de k, v, w. Desta forma

$$\begin{aligned}
\|\nabla\pi(v,w)\|_{B^s_{p,q}} &= \left\|\left(2^{ks}\|\Delta_k \nabla\pi(v,w)\|\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q} \\
&\leqslant C\left\|\left(2^{ks}\left\|\Delta_k \sum_{i,j=1}^{n} v_j \partial_j w_i\right\|\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q} \\
&= C\left\|\sum_{i,j=1}^{n} v_j \partial_j w_i\right\|_{B^s_{p,q}},
\end{aligned}$$

logo ao aplicar a desigualdade (2.14) (ver Lema 2.0.2, p. 41)

$$\begin{aligned}
\|\nabla\pi(v,w)\|_{B^s_{p,q}} &\leqslant C\sum_{i,j=1}^{n} \|v_j \partial_j w_i\|_{B^s_{p,q}} \\
&\leqslant C\sum_{i,j=1}^{n} \left(\|v_j\|_{L^\infty}\|\partial_j w_i\|_{B^s_{p,q}} + \|v_j\|_{B^s_{p,q}}\|\partial_j w_i\|_{L^\infty}\right).
\end{aligned}$$

Consequentemente, usando o Lema E.0.2, p. 95, conclui-se que

$$\|\nabla\pi(v,w)\|_{B^s_{p,q}} \leqslant C\big(\|v\|_{L^\infty}\|w\|_{B^{s+1}_{p,q}} + \|v\|_{B^s_{p,q}}\|\nabla w\|_{L^\infty}\big).$$

Como queríamos demonstrar. $\square$