

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

RAINER DE OLIVEIRA NEVES PEREIRA

**Dimensionamento e sequenciamento de lotes
aplicado em uma indústria de alimentos para
animais**

Campinas

2022

Rainer de Oliveira Neves Pereira

Dimensionamento e sequenciamento de lotes aplicado em uma indústria de alimentos para animais

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Rainer de Oliveira Neves Pereira e orientada pela Profa. Dra. Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P414d Pereira, Rainer de Oliveira Neves, 1992-
Dimensionamento e sequenciamento de lotes aplicado em uma indústria de alimentos para animais / Rainer de Oliveira Neves Pereira. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Modelagem matemática. 2. Planejamento da produção. I. Ghidini, Carla Taviane Lucke da Silva, 1976-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Lot sizing and scheduling applied in an animal food industry

Palavras-chave em inglês:

Mathematical modeling

Manufacturing planning

Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional

Banca examinadora:

Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini [Orientador]

Kelly Cristina Poldi

Sônia Cristina Poltroniere Silva

Data de defesa: 01-09-2022

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-1916-4358>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/0603447442411437>

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 01 de setembro de 2022
e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). CARLA TAVIANE LUCKE DA SILVA GHIDINI

Prof(a). Dr(a). KELLY CRISTINA POLDI

Prof(a). Dr(a). SÔNIA CRISTINA POLTRONIERE SILVA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado à Deus,
aos meus pais Regina e Domingos,
ao meu irmão Renan
e a minha namorada Stéfany.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me guiar e iluminar nos momentos difíceis, a minha mãe Regina, que sempre me apoia e acompanha nas minhas empreitadas, ao meu pai Domingos que deve estar feliz por minha caminhada até aqui, ao meu irmão Renan, que me motiva e ajuda a vencer os desafios, a minha namorada Stéfany, que sempre me apoia, aconselha e inspira com suas vitórias, ao meu gestor e amigo Théo que me apoia sempre que preciso, a minha professora Carla, que me ajudou e orientou de forma brilhante, ao Argélio e a Eliana, que me acolheram da melhor maneira em Campinas e aos amigos pelos momentos que compartilhamos, tanto os difíceis quanto os alegres.

*“A lei de ouro do comportamento é a tolerância mútua,
já que nunca pensaremos todos da mesma maneira,
já que nunca veremos senão uma parte da verdade
e sob ângulos diversos.
(Mahatma Gandhi)*

Resumo

A quantidade de animais domésticos nos lares brasileiros é expressiva e naturalmente a demanda por alimentos saudáveis e balanceados está crescendo. Este trabalho tem o objetivo de otimizar parte do processo produtivo de uma indústria que produz alimentos para animais. Para isso foi proposto um modelo matemático de otimização linear inteira mista. Foram consideradas as etapas de extrusão e ensaque dos alimentos com o intuito de minimizar os custos de produção, preparação das máquinas e armazenamento das partículas que estão na composição dos produtos demandados. Para validar o modelo proposto, foram realizados diversos experimentos computacionais com exemplos gerados aleatoriamente a partir de dados reais com variação de alguns parâmetros do modelo. Também foram considerados dois dias com alto volume de produção para análise da qualidade da solução obtida pelo modelo em relação à solução real determinada pelo planejador da fábrica. O solver *CPLEX* foi escolhido para encontrar as soluções de todos os exemplos. Os resultados obtidos mostraram que o modelo representa adequadamente a parte tratada no processo produtivo da indústria e pode ser utilizado para auxiliar na tomada de decisão do dia a dia da empresa.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Alimento para animais. Planejamento da produção.

Abstract

The amount of domestic animals in Brazilian homes is expressive and naturally the demand for healthy and balanced petfoods is growing. This work aims to optimize part of the production process of an industry that produces petfood. For this, a mathematical model of mixed integer linear optimization was proposed. The extrusion and bagging steps of petfood were considered in order to minimize the costs of production, preparation of the machines and storage of the particles that are in the composition of the requested products. To validate the proposed model, various computational experiments were performed with examples generated randomly from real data with variation of some modeling parameters. Two days with high production volume were also considered for analysis of modeling solution quality regard to the real solution done by the factory planner. The solver CPLEX was chosen to find the solutions of all examples. The results obtained showed that the model properly represents the process in the industry's production and can be used to guide in the company's day-to-day decision making.

Keywords: Mathematical modeling. Petfood. Scheduling.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Faturamento mundial do setor <i>pet.</i>	24
Figura 2 – Sistema de extrusão.	25
Figura 3 – Fluxograma do processo	25
Figura 4 – Processo da indústria Alfa.	26
Figura 5 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe0.	37
Figura 6 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe5.	40
Figura 7 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe19.	44
Figura 8 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe29.	47
Figura 9 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe30.	49
Figura 10 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe37.	51
Figura 11 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe48.	54
Figura 12 – Restrições de partículas e produtos - Produção do dia A.	60
Figura 13 – Planejamento das extrusoras e ensacadeiras (modelo matemático) (horas) - Produção do dia A.	63
Figura 14 – Planejamento das extrusoras e ensacadeiras (indústria Alfa) (horas) - Produção do dia A.	63
Figura 15 – Produção das extrusoras (modelo matemático) - Produção do dia A.	64
Figura 16 – Produção das extrusoras (indústria Alfa) - Produção do dia A.	64
Figura 17 – Produção das ensacadeiras (modelo matemático) - Produção do dia A.	65
Figura 18 – Produção das ensacadeiras (indústria Alfa) - Produção do dia A.	65
Figura 19 – Restrições de partículas e produtos - Produção do dia B.	70
Figura 20 – Planejamento das extrusoras e ensacadeiras (modelo matemático) (horas) - Produção do dia B.	73
Figura 21 – Planejamento das extrusoras e ensacadeiras (indústria Alfa) (horas) - Produção do dia B.	73
Figura 22 – Produção das extrusoras (modelo e indústria Alfa) - Produção do dia B.	74
Figura 23 – Produção das ensacadeiras (modelo matemático) - Produção do dia B.	74
Figura 24 – Produção das ensacadeiras (indústria Alfa) - Produção do dia B.	75

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados dos produtos	34
Tabela 2 – Tempo de preparação da extrusora para troca de partícula (horas). . .	35
Tabela 3 – Custo para troca de partícula	35
Tabela 4 – Tempo de preparação da ensacadeira para troca de produto (minutos)	35
Tabela 5 – Custo para troca de produto	35
Tabela 6 – Taxa de produção das extrusoras (hora/kg)	36
Tabela 7 – Taxa de produção das ensacadeiras (min/sacos)	36
Tabela 8 – Solução do Exe0 - variáveis de produção	38
Tabela 9 – Solução do Exe0 - variáveis de <i>setup</i>	38
Tabela 10 – Variação nos lotes mínimos das ensacadeiras e extrusoras	40
Tabela 11 – Solução do Exe5 - variáveis de produção	41
Tabela 12 – Solução do Exe5 - variáveis de <i>setup</i>	41
Tabela 13 – Variação na taxa de produção das extrusoras e ensacadeiras	43
Tabela 14 – Solução do Exe19 - variáveis de produção	43
Tabela 15 – Solução do Exe19 - variáveis de <i>setup</i>	44
Tabela 16 – Variação na demanda de sacos e quantidade de macroperíodos	46
Tabela 17 – Variação na demanda de sacos e quantidade de macroperíodos	46
Tabela 18 – Solução do Exe29 - variáveis de produção	47
Tabela 19 – Solução do Exe29 - variáveis de <i>setup</i>	47
Tabela 20 – Variação na característica dos sacos	48
Tabela 21 – Solução do Exe30 - variáveis de produção	49
Tabela 22 – Solução do Exe30 - variáveis de <i>setup</i>	50
Tabela 23 – Variação nos custos da função objetivo	50
Tabela 24 – Solução do Exe37 - variáveis de produção	52
Tabela 25 – Solução do Exe37 - variáveis de <i>setup</i>	52
Tabela 26 – Variação na quantidade de partículas armazenadas nos tanques	53
Tabela 27 – Variação na quantidade de partículas armazenadas nos tanques	54
Tabela 28 – Solução do Exe48 - variáveis de produção	55
Tabela 29 – Solução do Exe48 - variáveis de <i>setup</i>	55
Tabela 30 – Produção do dia A	56
Tabela 31 – Custos para troca de partícula na extrusora - Produção do dia A	57
Tabela 32 – Custo para troca de produto na ensacadeira - Produção do dia A	57
Tabela 33 – Tempo de preparação da extrusora para troca de partícula (horas) - Produção do dia A	57
Tabela 34 – Tempo de preparação da ensacadeira para troca de produto (minutos) - Produção do dia A	58

Tabela 35 – Taxa de produção das extrusoras (hora/kg) - Produção do dia A . . .	58
Tabela 36 – Taxa de produção das ensacadeiras (min/saco) - Produção do dia A . .	58
Tabela 37 – Condição inicial dos tanques - Produção do dia A	59
Tabela 38 – Solução do exemplo - Produção do dia A	62
Tabela 39 – Produção do dia B	66
Tabela 40 – Custos para troca de partícula na ensacadeira - Produção do dia B . .	67
Tabela 41 – Custos para troca de produto na ensacadeira - Produção do dia B . . .	67
Tabela 42 – Tempo de preparação da extrusora para troca de partícula (horas) - Produção do dia B	68
Tabela 43 – Tempo de preparação da ensacadeira para troca de produto (minutos) - Produção do dia B	68
Tabela 44 – Taxa de produção das ensacadeiras (min/saco) - Produção do dia B . .	69
Tabela 45 – Taxa de produção das extrusoras (hora/kg) - Produção do dia B	69
Tabela 46 – Condição inicial dos tanques Produção do dia B	69
Tabela 47 – Solução do exemplo - Produção do dia B	72

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Trabalhos relacionados	15
1.2	Objetivos e metodologia	17
1.3	Organização do texto	18
2	REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1	Problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes	19
3	PRODUÇÃO DE ALIMENTO PARA ANIMAIS	24
3.1	Problema de produção de alimentos para animais na indústria Alfa	26
3.2	Modelagem matemática do problema de produção para animais na indústria Alfa	28
4	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	34
4.1	Testes para validação do modelo proposto	34
4.1.1	Variação no lote mínimo	38
4.1.2	Variação na taxa de produção	42
4.1.3	Variação na demanda de produto	45
4.1.4	Variação na característica dos sacos	48
4.1.5	Variação nos custos de produção, <i>setup</i> e armazenamento de partícula	50
4.1.6	Variação na quantidade de partículas nos tanques	52
4.2	Comparação da produção: Modelo matemático vs Indústria Alfa	56
4.2.1	Produção do dia A	56
4.2.1.1	Restrições	59
4.2.1.2	Resultados	60
4.2.2	Produção do dia B	66
4.2.2.1	Restrições	70
4.2.2.2	Resultados	70
5	CONCLUSÃO	76
	REFERÊNCIAS	78

1 Introdução

Muitas pessoas têm animais domésticos em seus lares. Estima-se que em 2020 a população desse grupo no Brasil era de aproximadamente 144 milhões (ABINPET, 2020). Desse montante, 56% está concentrado em gatos e cachorros. A produção de alimentos para esse segmento é expressiva e as empresas envolvidas estão em constante processo de melhoria.

Não é tarefa fácil organizar o planejamento de uma produção. Segundo Paoleschi (2009), a crescente demanda por baixo custo e atendimento no prazo fez com que a programação matemática fosse utilizada para o desenvolvimento de planejamentos mais eficientes. A Pesquisa Operacional auxilia na tomada de decisão por meio de modelos matemáticos que abrangem as restrições específicas de um sistema de produção (JUNIOR, 2012). O sistema de PCP (Planejamento e Controle da Produção) atua nos níveis hierárquicos de curto, médio e longo prazo (DREXL; KIMMS, 1997). A longo prazo é preciso definir a capacidade da planta e o tamanho da demanda que pode ser absorvida. No médio prazo é considerada a demanda externa através do *MPS* (*Master Production Schedule*), por exemplo. Por fim, no curto prazo, é preciso avaliar a quantidade de matéria-prima necessária para atender a demanda e sequenciar as ordens de produção (DREXL; KIMMS, 1997; PAOLESCI, 2009).

A quantidade de modelos propostos na literatura, que abordam produções em vários estágios tem aumentado nos últimos anos, porém muitos trabalhos abordam o gargalo do processo (COPIL et al., 2017). Segundo Pinedo (2008), o gargalo é a máquina ou tarefa que possui a menor velocidade dentre todas. Portanto, os processos anteriores e posteriores precisam se adequar a velocidade do gargalo para diminuir a ociosidade durante a produção. Considerando os diversos estágios por onde a matéria-prima passa até se tornar um produto acabado nas indústrias, a modelagem matemática geralmente é aplicada no gargalo e o problema é interpretado como um estágio simples. Como alguns problemas no gargalo acontecem devido a estágios anteriores e posteriores, eles acabam sendo considerados também.

Na Seção 1.1 são apresentados trabalhos com aplicações na indústria de maneira geral. Esses trabalhos foram escolhidos, pois retratam a complexidade de diferentes processos industriais e serviram como um guia para o modelo matemático desenvolvido neste trabalho.

1.1 Trabalhos relacionados

No trabalho de [Toledo et al. \(2006\)](#) foi retratado um problema de dois estágios onde é preciso decidir o que armazenar e o que engarrafar em uma indústria de refrigerantes. Diversos tanques armazenam produtos que serão engarrafados. Cada tanque possui uma capacidade máxima e precisa receber uma limpeza na troca de produtos. Dentro do tanque não pode haver produtos diferentes. A ordem dos produtos afeta o tempo gasto com o *setup*. As máquinas de engarrafamento são paralelas e podem receber o mesmo produto de tanques diferentes. Cada máquina é capaz de fabricar um conjunto específico de produtos. Como o armazenamento nos tanques influencia na produção das linhas de engarrafamento, os dois estágios precisaram ser tratados simultaneamente. Um modelo matemático baseado nas classes CSLP e GLSP foi proposto para sincronizar os dois estágios. Testes computacionais foram realizados em 360 exemplos gerados aleatoriamente. Cada exemplo foi resolvido usando GAMS e CPLEX com limite de tempo de uma hora. Os resultados mostraram que quanto mais restrições e variáveis os problemas possuíam, maior era a dificuldade de se encontrar uma solução dentro de uma hora. O problema menor tinha 363 variáveis e 281 restrições. O problema maior possuía 6667 variáveis e 3735 restrições. Dos 360 problemas, em 113 foram encontradas soluções ótimas no tempo disponível.

[Marinelli, Nenni e Sforza \(2007\)](#) formularam um modelo matemático para uma indústria de empacotamento de iogurte de diversos tamanhos, sabores e tipos com o objetivo de desenvolver um planejamento eficiente. O processo começa no armazenamento de misturas em sete tanques que alimentam cinco linhas de produção. O produto é empacotado nas linhas de produção e depois é mantido em temperaturas específicas para proliferar enzimas e estabilizar a acidez. O gargalo do processo são as linhas de empacotamento. O modelo matemático desenvolvido foi baseado nas classes CSLP e CLSP, buscando minimizar os custos de *setup*, armazenamento e processamento dos produtos. Para testar a eficácia do modelo matemático, foram propostos oito exemplares com dados reais da empresa em um período crítico do ano. Dois cenários foram considerados para cada exemplo: com linhas de produção restritas a determinados produtos e com linhas de produção irrestritas. Cada exemplo tinha 8456 restrições e 8466 variáveis. As soluções foram encontradas utilizando o *software* CPLEX após cinco horas de execução. Para contornar o elevado tempo de processamento, os autores aplicaram uma relaxação linear nas restrições relacionadas aos custos e tempo de *setup* nas linhas de produção. No exemplo relaxado, uma heurística de otimização de dois estágios foi utilizada e testada nos oito exemplos. Em seis exemplos, a solução foi obtida em menos de quinze minutos e foi melhor que a solução obtida dentro das cinco horas.

[Toso, Morabito e Clark \(2009\)](#) tratam problemas de sequenciamento e dimensionamento de lotes em uma indústria brasileira de alimento para animais. O tempo de *setup* varia de acordo com a sequência de produção, pois um produto pode limpar o sistema para

o produto seguinte e evitar limpezas mais longas, com conseqüente perda de capacidade produtiva. O objetivo do trabalho foi fornecer ferramentas para que o responsável pela programação da produção pudesse entregar um sequenciamento que propiciasse maior produtividade. Na empresa existem tanques que armazenam a matéria-prima. Um misturador recebe a dosagem correta e mistura as matérias-primas. Após esse estágio, o produto é ensacado. Foram propostos dois modelos matemáticos baseados em GLSP, um para períodos com alta demanda de produção e o outro para períodos de baixa demanda. A função objetivo foi construída para minimizar o estoque final de produtos e as horas extras. Os exemplos foram resolvidos com o auxílio do *software* CPLEX. No exemplo abordando a alta demanda, que era o mais utilizado pela indústria em estudo, os autores aplicaram uma heurística *relax and fix* com o intuito de reduzir o tempo de busca das soluções no CPLEX. Nove exemplos foram considerados, com modificação dos dados para proteger as informações da empresa. Os resultados mostraram que a aplicação da heurística foi válida, pois em dois exemplos a resposta da função objetivo (3.453 e 10.726 unidades monetárias) foi menor que os resultados obtidos sem a aplicação da heurística (3.519 e 11.597 unidades monetárias). Nos sete exemplos restantes, o resultado foi o mesmo, porém com menor tempo gasto para alcançar a solução. Na média dos nove exemplos, 216 segundos foram necessários para encontrar a solução utilizando a heurística, contra uma média de 1.035 segundos dos exemplos com solução sem a heurística.

A indústria da cerveja é tratada no trabalho de Baldo et al. (2014). Nesse processo, a bebida é fermentada e maturada em tanques, podendo durar até quarenta e um dias para depois ser engarrafada. O gargalo do processo oscila entre esses dois estágios, dependendo do tempo necessário para maturar a cerveja. Basicamente água, malte, lúpulo e fermento são utilizados na produção. O setor de engarrafamento possui dependência de sequência com relação ao tempo nos *setups*. O horizonte de planejamento é baseado em semanas e os períodos são representados pelos dias. O modelo matemático proposto para representar o problema, se assemelhando à classe GLSP, minimiza os custos de estoque, de *setup* e atrasos na entrega para os clientes. Sete exemplos fictícios com diferentes tempos de maturação e fermentação foram considerados na fase inicial. O tempo máximo de busca da solução foi fixado em uma hora e foi resolvido através do *software* CPLEX. Os autores notaram que quanto maior o tempo de maturação e fermentação, mais demorada era a busca da solução devido à inflexibilidade do processo. Com isso, as chances de ocorrer atrasos na entrega aumentavam. Para contornar esse obstáculo, foi proposto resolver o modelo matemático usando heurísticas *relax and fix* para encontrar soluções factíveis e *fix and optimize* para descobrir soluções com melhor desempenho dentro das factíveis. Vinte exemplos baseados em dados reais de uma indústria portuguesa de cerveja foram resolvidos utilizando o CPLEX e ambas as heurísticas. Foram definidos tempos de execução de 3.600 segundos e 7.200 segundos. A combinação de heurísticas proporcionou soluções com 100% dos produtos entregues dentro do planejamento. Por outro lado, a melhor solução obtida

pelo CPLEX deixou de entregar 3,59% dos produtos em 7.200 segundos de execução.

Para melhorar a eficiência em uma indústria de fiação, [Camargo, Toledo e Almada-Lobo \(2014\)](#) desenvolveram um modelo matemático que integra o sequenciamento e o dimensionamento dos lotes. No processo, a fibra é formada pela mistura de fios de algodão, sendo em seguida puxada e enrolada por máquinas até atingir as especificações finais de qualidade. O gargalo está na fase de enrolar os fios. Uma fibra pode ser matéria-prima para vários produtos finais. Mas cada produto final consome apenas um tipo de fibra. Os *setups* são dependentes da sequência. A função objetivo proposta pelos autores foi baseada na classe GLSP e minimiza os custos de estoque, *setups* e atrasos na entrega dos produtos. Para obter uma solução foi usada a meta-heurística *Hamming oriented partition* (HOP), onde determinadas variáveis do problema recebem um valor fixo para diminuir o espaço de busca e acelerar a resolução. A solução encontrada no problema reduzido é usada para solucionar o problema original. Foram gerados 840 exemplos com base em dados reais e resolvidos utilizando a HOP em conjunto com o *software* CPLEX e com o tempo limite de execução de uma hora. Em 428 exemplos uma solução foi encontrada dentro de uma hora. Com o CPLEX utilizado sem a meta-heurística, apenas 301 problemas foram resolvidos dentro do mesmo tempo de execução.

[Zampiroli \(2019\)](#) aborda o processo produtivo de uma indústria de laticínios caracterizado com uma produção em dois estágios. No primeiro estágio, três máquinas paralelas preparam a matéria-prima e abastecem uma máquina no segundo estágio. A ordem dos produtos nas máquinas do primeiro estágio não altera o tempo de *setup*. Já no segundo estágio, a sequência de produção altera o tempo de *setup*. A taxa de produção do primeiro estágio é menor em relação ao segundo estágio, independente do produto considerado. Existe demanda para três produtos distintos e um lote mínimo para cada um. A autora propôs um modelo matemático baseado no GLSP para o segundo estágio e o resolveu por meio do programa de otimização CPLEX. Com base na solução do segundo estágio, foi desenvolvida uma heurística construtiva para sequenciar os produtos nas máquinas do primeiro estágio. Foram utilizados dados reais de produção da empresa em dois meses com grande variação na disponibilidade de matéria-prima. De acordo com os resultados apresentados, o sequenciamento e o lote mínimo dos produtos foram otimizados e reduziram os custos em 51,56% em comparação com o sequenciamento praticado pela empresa.

1.2 Objetivos e metodologia

Neste trabalho tratamos parte do processo produtivo de uma indústria de alimentos para animais com o objetivo principal de otimizá-lo e também auxiliar na tomada de decisão do planejador.

Para atingir o objetivo foi proposto um modelo matemático de otimização linear inteira mista, cuja função objetivo consiste em minimizar custos relacionados a *setup* dos equipamentos, produção e estoque de partículas armazenadas nos tanques. Além disso, um gerador foi desenvolvido em linguagem de programação Python para criar diversos exemplares que foram usados nos experimentos computacionais. Dados reais foram usados para a geração dos exemplares e o modelo foi resolvido com o auxílio do *solver* CPLEX.

1.3 Organização do texto

O restante do texto está organizado em mais quatro capítulos. O Capítulo 2 contém uma revisão bibliográfica sobre planejamento e sequenciamento de produção, mostrando a maneira como a modelagem matemática é usada para tratar esse tipo de problema. O Capítulo 3 aborda o processo industrial da produção de alimento para animais e apresenta a modelagem matemática proposta para tratar os dados de uma indústria brasileira, que está sendo referida como Alfa neste trabalho. No Capítulo 4 são apresentados os experimentos computacionais realizados para validação e análise do modelo matemático proposto para otimizar o processo produtivo, considerando os setores de extrusão e ensaque da indústria Alfa. No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho com um vislumbre dos próximos passos.

2 Referencial teórico

Neste capítulo são apresentados conceitos básicos relacionados à modelagem matemática de processos que envolvem dimensionamento e sequenciamento de lotes. Também é apresentado um modelo matemático que serviu como base para o desenvolvimento do modelo proposto para tratar o processo produtivo de uma indústria de alimentos para animais.

2.1 Problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes

Um dos iminentes desafios da indústria em geral, atualmente, é melhorar o desempenho durante o processo produtivo. Para se alcançar excelentes níveis de eficiência é preciso trabalhar na programação e no tamanho do lote dos produtos. [Drexel e Kimms \(1997\)](#) destacam que é desafiador programar a sequência de produção devido à necessidade de tomar decisões de curto, médio e longo prazo.

No médio prazo, a ferramenta MPS (*Master Production Schedule*) é relevante, pois define a demanda externa e as datas de entrega de cada produto ([DREXL; KIMMS, 1997](#)). Caso os produtos possuam características específicas, é necessário configurar a máquina, para atender os atributos de cada um. Portanto, o tamanho do lote de um produto deve ser bem planejado para evitar muitos *setups*, que é a maneira como a preparação da máquina para atender às características do produto é chamada ([PINEDO, 2008](#)). Outro aspecto destacado por [Drexel e Kimms \(1997\)](#) é que o estoque de produção deve ser baixo para mitigar o custo de armazenamento dos produtos. Como diversos produtos compartilham a mesma máquina para a produção, o sequenciamento correto também deve ser levado em consideração para que duas tarefas não sejam executadas ao mesmo tempo. Logo, o planejamento de produção se torna um problema de sequenciamento e dimensionamento de lotes ([DREXL; KIMMS, 1997](#)).

Muitos problemas de otimização estão presentes no processo de produção de diversos tipos de indústria, entre eles o de dimensionamento e sequenciamento de lotes. [Copil et al. \(2017\)](#) classificam esses problemas em cinco classes:

- DLSP (*Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem*);
- CSLP (*Continuous Setup Lot Sizing Problem*);
- PLSP (*Proportional Lot Sizing and Scheduling Problem*);
- GLSP (*General Lot Sizing and Scheduling Problem*);

- CLSD (*Capacitated Lot Sizing Problem with Sequence Dependent Setup*).

Para entender essa classificação, é preciso definir antes o que são microperíodos e macroperíodos. Segundo Drexl e Kimms (1997) microperíodos são períodos curtos, podendo durar horas ou turnos, enquanto macroperíodos têm maiores durações, como semanas ou meses.

As classificações DLSP, CSLP e PLSP permitem apenas um *setup* por microperíodo. Na classe PLSP, no máximo dois tipos de produto podem ser produzidos por microperíodo (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003). Já nas classes CSLP e DLSP, apenas um tipo de produto pode ser produzido. A principal característica da classe DLSP é a restrição de, em cada microperíodo, produzir completamente ou não um tipo de produto. Na classe CSLP essa suposição não existe. Como poucos produtos podem ser produzidos dentro dos microperíodos, essas três classes são caracterizadas como *small bucket problems* (COPIL et al., 2017).

Na classe CLSD, o número de lotes dentro de um macroperíodo é igual à quantidade de produtos (COPIL et al., 2017). A classe GLSP permite que um tipo de produto seja produzido várias vezes dentro de um macroperíodo (MEYR, 2002). Devido à produção de múltiplos tipos de produtos dentro de macroperíodos nas classes CLSD e GLSP, os problemas dessa natureza são considerados *big bucket problems* (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003).

O deslocamento do produto entre os processos é uma característica importante. É preciso levar em consideração se a transferência de lotes é aberta, onde o processo seguinte pode começar a consumir o produto sem que o processo anterior esteja finalizado, ou se a transferência de lotes é fechada, permitindo que o processo seguinte comece apenas quando a produção do lote no processo anterior seja finalizada (COPIL et al., 2017). Em certas situações, o produto “c” no processo dois precisa aguardar o término dos produtos “a” e “b” no processo um. Portanto, a relação de precedência precisa ser levada em consideração nesses casos (DREXL; KIMMS, 1997). Processos com relação de precedência são chamados multiníveis. Se inexistir a relação entre produtos, o processo é classificado como nível simples.

De acordo com Copil et al. (2017), existem indústrias onde o custo e o tempo de *setup* é o mesmo, não importando a ordem dos produtos dentro do processo. Nesses casos, o problema é caracterizado como independente da sequência. Se os custos e o tempo de *setup* estiverem relacionados com a posição dos produtos dentro da programação, o problema é dependente da sequência. É preciso considerar a inequação $sc_{ij} + sc_{jk} \geq sc_{ik}$, onde sc_{ij} é o custo do *setup* entre o produto i e j , em problemas com dependência de sequência (MEYR, 2002).

Com relação à matéria-prima, se ela passar por apenas um estágio até se tornar

o produto final, o processo é considerado de estágio simples. Caso exista mais de um estágio, a classificação é multiestágios (COFIL et al., 2017). Dentro de cada estágio as máquinas podem ser homogêneas ou heterogêneas. Se os custos e a velocidade para os produtos são os mesmos, independente da máquina, elas são homogêneas. Caso contrário, heterogêneas.

A função objetivo deve ser formulada de tal forma que minimize os produtos em estoque, a quantidade de *setups* e os custos da produção. Na sequência é apresentado um modelo matemático proposto em Copil et al. (2017), para representar a classe GLSP. Os índices, parâmetros e variáveis utilizados no modelo são:

Índices:

i, k : tipo do produto; $i, k = 0, 1 \dots K$, onde 0 é o estado neutro, ou seja, a máquina não está configurada para nenhum produto;

s : microperíodo; $s = 1, 2 \dots S_t$;

t : macroperíodo; $t = 1, 2, \dots T$.

Parâmetros:

sc_{ik} : custo da troca de produção do produto tipo i para o produto tipo k . sc_{i0} indica uma troca de produção para o estado neutro de produção. Ou seja, indica que haverá um desligamento do equipamento;

hc_k : custo de estoque do produto tipo k ;

pc_k : custo para manter a configuração da máquina ajustada para o produto tipo k em um intervalo de tempo onde a máquina não está produzindo. Não existem custos para manter a máquina no estado neutro, ou seja, $pc_0 = 0$;

a_k : tempo de produção por unidade do produto tipo k ;

st_{ik} : tempo de *setup* na troca de produção do produto tipo i para o produto tipo k . st_{i0} indica troca de produção do produto tipo i para o estado neutro, onde máquina não está configurada para nenhum produto;

d_{kt} : demanda do produto tipo k no macroperíodo t ;

C_t : capacidade de produção da máquina no macroperíodo t ;

q_k^{min} : quantidade mínima do produto tipo k ;

S_t : conjunto de microperíodos s dentro do macroperíodo t , em que $|S_t| = K$.

Variáveis de decisão:

I_{kt} : estoque do produto tipo k no macroperíodo t ;

z_{iks} : variável binária para sequenciamento de produção, que assume valor 1 se acontece um *setup* do produto tipo i para o produto tipo k no microperíodo s e assume valor 0, caso contrário;

\bar{q}_{ks} : tempo em que a máquina é mantida configurada para produzir o produto tipo k no microperíodo s ;

q_{ks} : quantidade produzida do produto tipo k no microperíodo s ;

w_{ks} : variável binária de preparação, que assume valor 1 se a máquina está preparada para produzir o produto tipo k no microperíodo s e assume valor 0, caso contrário. No microperíodo 0, não existe preparação, ou seja, $w_{k0} = 0$ e $w_{i0} = 0$;

Modelo Matemático:

Minimizar

$$\sum_{s=1}^S \sum_{i=0}^K \sum_{k=0}^K sc_{ik} \cdot z_{iks} + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T hc_k \cdot I_{kt} + \sum_{k=0}^K \sum_{s=1}^S pc_k \cdot \bar{q}_{ks} \quad (2.1)$$

Sujeito a

$$\sum_{k=0}^K \sum_{s \in S} (a_k \cdot q_{ks} + \bar{q}_{ks}) + \sum_{i=0}^K \sum_{k=0}^K \sum_{s \in S} st_{ik} \cdot z_{iks} = C_t, \quad \forall t \quad (2.2)$$

$$I_{kt} = I_{k,t-1} + \sum_{s \in S} q_{ks} - d_{kt}, \quad \forall t, k > 0 \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=0}^K w_{ks} = 1, \quad \forall s \quad (2.4)$$

$$a_k \cdot q_{ks} + \bar{q}_{ks} \leq C_t \cdot w_{ks}, \quad \forall k, t, s \in S_t \quad (2.5)$$

$$z_{iks} \geq w_{i,s-1} + w_{ks} - 1, \quad \forall i, k, s \quad (2.6)$$

$$q_{ks} \geq q_k^{\min} (w_{ks} - w_{k,s-1}), \quad \forall k, s \quad (2.7)$$

$$q_{ks}, I_{kt} \in Z^+, \quad \forall k, s, t \quad (2.8)$$

$$\bar{q}_{ks} \geq 0, \quad \forall k, s, t \quad (2.9)$$

$$w_{ks}, z_{iks} \in \{0, 1\} \geq 0, \quad \forall k, s, t \quad (2.10)$$

A função objetivo (2.1) minimiza os custos de *setup*, manutenção do produto em estoque e preservação de *setup* quando a máquina não está produzindo. As restrições (2.2) são de capacidade de máquina por macroperíodo e garantem que essa capacidade seja igual a soma dos tempos de produção, *setup* e do tempo de preservação de estado de *setup*. As restrições (2.3) são de balanço de estoque e garantem que a demanda seja

atendida, ou seja, o estoque do produto tipo k no macroperíodo t tem que ser igual à quantidade do produto estocado no período anterior acrescida da quantidade produzida no período atual menos a demanda do produto no período. As restrições (2.4) não permitem a produção de mais de um tipo de produto dentro do microperíodo s e garantem no mínimo um tipo de produto por microperíodo. As restrições (2.5) asseguram que se o tempo gasto na produção ou na preservação de *setup* do produto tipo k no microperíodo s for maior que zero, $w_{ks} = 1$, caso contrário, $w_{ks} = 0$. As restrições (2.6) contabilizam as trocas de produção e garantem que se acontecer um *setup* do produto i no microperíodo anterior para o produto j no microperíodo atual, a variável z_{iks} assumirá o valor 2. As restrições (2.7) asseguram que, caso haja uma nova preparação de máquina, um lote mínimo do produto tipo k seja produzido no microperíodo s . As restrições (2.8) a (2.10) definem os domínios das variáveis de decisão.

De acordo com Copil et al. (2017), a classe CLSD não considera tempo de *setup*, custos para manter a configuração da máquina e lote mínimo. A quantidade de lotes dentro de um macroperíodo é igual à quantidade de produtos tipo k . Portanto $|S_t| = K$. A conservação da preparação da máquina é mantida de um microperíodo para outro. Se houver ociosidade na máquina, a preparação para o produto tipo k não será perdida. Para isso, $sc_{k0} = \infty$. Cada produto pode ser produzido no máximo uma vez dentro do microperíodo. Essa restrição é atendida pelas inequações (2.11).

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^K \sum_{s \in S_t} z_{iks} \leq 1 \quad \forall t, k > 0 \quad (2.11)$$

Na classe PLSP, no máximo um *setup* pode acontecer dentro de um macroperíodo. Logo, no máximo dois tipos de produtos podem ser produzidos por macroperíodo e, portanto, $|S_t| = 2$ (COPIL et al., 2017). A modelagem matemática é a mesma do problema GLSP, exceto pelo acréscimo das restrições (2.12).

$$\sum_{k=0}^K \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^K \sum_{s \in S_t} z_{iks} \leq 1 \quad \forall t \quad (2.12)$$

A classe CSLP se distingue do modelo do PLSP pela condição $|S_t| = 1$. A modelagem matemática permanece a mesma da classe PLSP (COPIL et al., 2017).

Já a classe DLSP possui a característica de produzir totalmente ou não dentro de um microperíodo. A quantidade de microperíodos por macroperíodo é $|S_t| = 1$. O comprimento do microperíodo é o mesmo do macroperíodo. A preparação da máquina será perdida caso haja ociosidade. O custo para manter a configuração da máquina é $pc_k = \infty$ (COPIL et al., 2017).

3 Produção de alimento para animais

O faturamento mundial do setor de animais de estimação foi de 145,8 bilhões de dólares em 2020. Os Estados Unidos abarca a maior parte do mercado, com 40,6% das movimentações. O Brasil aparece em sétimo lugar, com 3,9% do total, como pode ser observado na [Figura 1](#). No faturamento brasileiro, o segmento de alimentos foi responsável pela maior parte dos ganhos (75%), seguido por medicamentos veterinários (17%) e cuidados com saúde e higiene dos animais (8%).



Figura 1 – Faturamento mundial do setor *pet*.

Fonte: [ABINPET \(2020\)](#).

A demanda por alimentos naturalmente é elevada. De acordo com a [ABINPET \(2020\)](#), o alimento precisa ter um balanço nutricional adequado para que o animal não desenvolva doenças. Por isso não é recomendado fornecer alimentos provenientes de sobras de refeições. O mais indicado é tratar com alimentos industrializados, pois possuem uma receita balanceada para proporcionar os nutrientes necessários.

O processo mais comum para produzir os alimentos é a extrusão termoplástica. Seus benefícios incluem a redução de agentes microbiológicos, baixo custo e melhoria de características como sabor, odor e textura ([RIBEIRO, 2018](#)). A massa misturada em uma etapa anterior fica armazenada no silo. Uma rosca alimenta a massa no pré-condicionador, onde é adicionado vapor e água, responsáveis pelo início do cozimento. Na etapa seguinte, a mistura é direcionada para o canhão da extrusora. Dentro do canhão, a mistura é deslocada com o movimento de uma rosca sem fim, finalizando o cozimento iniciado no pré-condicionador. Na saída do canhão, a massa é pressionada contra uma matriz. Devido à alta pressão, acontece uma expansão na saída da matriz. Um conjunto de facas posicionadas na saída da matriz realiza o corte para que a massa adquira o formato final.

(PACHECO, 2016). A massa, depois da transformação na extrusora, recebe o nome de partícula. O transporte pneumático transfere a partícula para o secador. O sistema de extrusão está representado na [Figura 2](#)

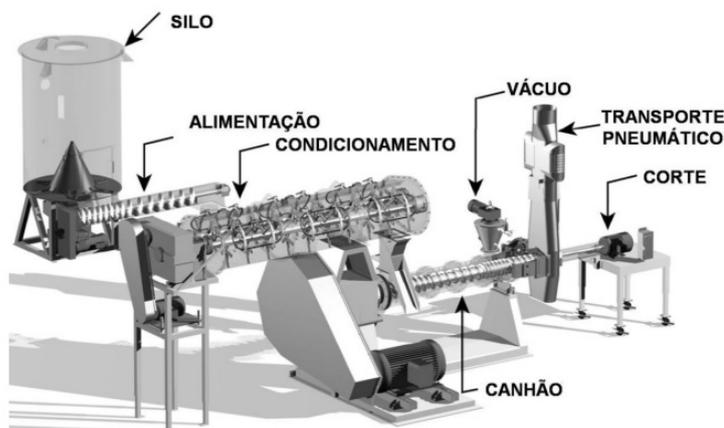


Figura 2 – Sistema de extrusão.

Fonte: Sá (2015).

Na secagem são controlados os parâmetros Atividade Água e Umidade. Esses indicadores estão relacionados com a presença da água dentro da partícula e, em níveis inadequados, podem provocar mofo no produto acabado (FREIRE, 2021). A partícula ainda passa pelos processos de recobrimento, responsável pelo sabor e aroma, e resfriamento, onde ocorre perda de calor até o atingimento da temperatura ideal do processo (GERALDES, 2017). Um conjunto de tanques armazena as partículas extrusadas até o início do empacotamento. No setor de ensaque, as ensacadeiras abastecem as sacarias com as partículas de acordo com o peso indicado na embalagem. As partículas ensacadas recebem o nome de produto. Essa etapa é importante porque o produto é adequadamente conservado dentro da embalagem e protegido contra a umidade, temperatura e contaminações externas (GERALDES, 2019). A [Figura 3](#) ilustra uma parte das etapas de produção de uma indústria de alimentos para animais.

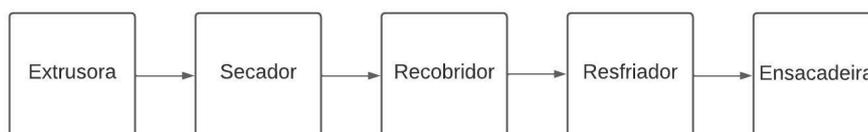


Figura 3 – Fluxograma do processo

Fonte: Produzido pelo autor

3.1 Problema de produção de alimentos para animais na indústria Alfa

O processo produtivo da indústria Alfa, nome usado para proteger a identidade real da empresa que é objeto de estudo desse trabalho, é composto por quatro extrusoras (EXT1, EXT2, EXT3 e EXT4) que abastecem oito ensacadeiras (ENS1, ENS2, ENS3, ENS4, ENS5, ENS6, ENS7 e ENS8). O gargalo do processo está no setor de extrusão. Para reduzir o impacto de atrasos nas áreas de extrusão e ensaque, quarenta e sete tanques (TQ1 a TQ47) recebem as partículas das extrusoras e abastecem as ensacadeiras. A Figura 4 ilustra parte do fluxo do processo produtivo da indústria Alfa.

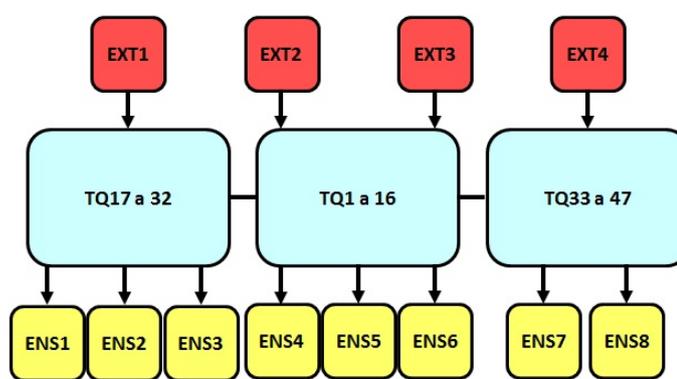


Figura 4 – Processo da indústria Alfa.

Fonte: Produzido pelo autor.

A produção das extrusoras é mensurada em partículas. As extrusoras EXT1 e EXT2 podem enviar sua produção para qualquer tanque. A extrusora EXT3 abastece os tanques TQ1 a TQ16 e TQ29 a TQ47. A extrusora EXT4 envia para os tanques TQ13 a TQ16 e TQ29 a TQ47. Cada tanque possui capacidade de armazenar aproximadamente 14 toneladas de partículas. O tanque não pode receber partículas de duas extrusoras ao mesmo tempo. É preciso realizar uma limpeza nos tanques e no sistema que envia partículas das extrusoras a cada troca de produto.

A taxa de produção nas extrusoras varia de acordo com as características da partícula e a capacidade da máquina. As extrusoras EXT1, EXT2 e EXT3 possuem o mesmo alcance de taxas de produção, que pode ser de 3.000 kg/h a 9.000 kg/h. Já a extrusora EXT4 produz com taxas de 12.000 kg/h a 19.000 kg/h. A quantidade total produzida em qualquer extrusora deve ser múltipla de quatro mil, pois o abastecimento no processo anterior possui essa restrição. O lote mínimo é de 8.000 kg, independente da extrusora.

Existem produtos monopartículas e multipartículas. Na produção de monopar-

tículas, as ensacadeiras recebem apenas um tipo de partícula, podendo ser proveniente de um ou mais tanques. Já os produtos multipartículas obrigatoriamente recebem partículas de no mínimo dois tanques, pois a composição do produto final apresenta mais de um tipo de partícula. A mistura das partículas é feita no transporte dos tanques para as ensacadeiras porque um tanque não pode receber partículas de extrusoras diferentes ao mesmo tempo.

Uma família é um conjunto formado por partículas e produtos com certa semelhança. Por exemplo, se os produtos PR1 e PR2 têm em sua composição a partícula PA1, então eles são da mesma família. Assim, no setor de ensaque existirá um *setup* muito pequeno entre os produtos PR1 e PR2, pois eles estão no mesmo conjunto e a composição básica não mudará, apenas o peso do saco. Outro exemplo está nos produtos multipartículas. Caso as partículas PA2 e PA3 formem os produtos PR3 e PR4, haverá um *setup* com menor duração entre PA2 e PA3 na extrusão, pois as partículas estão no mesmo conjunto. O mesmo acontecerá no ensaque entre PR3 e PR4, porque apenas o peso da sacaria diferenciará os dois produtos.

O tempo de *setup* médio nas quatro extrusoras é de 80 minutos para partículas de famílias diferentes. Caso as partículas sejam de uma mesma família ou possuam o mesmo formato, o tempo de *setup* passa a ser 10 minutos. As extrusoras produzem uma partícula de cada vez.

No setor de ensaque, a produção é medida em sacos. São produzidos sacos com peso variando de 6 kg a 25 kg. A taxa de produção média é de 7 sacos por minuto em cada ensacadeira. O tempo de *setup* médio é de 15 minutos para produtos de famílias diferentes e 5 minutos para produtos da mesma família. Cada produto do ensaque possui pelo menos um tipo de partícula proveniente da extrusão.

O horizonte de planejamento da produção é feito para 48 horas. A empresa Alfa trabalha 6 dias por semana. Cada dia possui 3 turnos. Todos os dias o planejador recebe uma lista de produtos e precisa decidir a sequência e o tamanho do lote das partículas com base nas demandas e em sua experiência. O planejamento considera o tempo de *setups* e a taxa de produção das máquinas. Interrupções na produção como manutenção nos equipamentos, escassez de matéria-prima e de mão de obra, qualidade do produto fora do padrão, falha na utilização do equipamento e atraso no escoamento da produção são imprevisíveis. Portanto, esses atrasos não são levados em consideração pelo planejador.

3.2 Modelagem matemática do problema de produção para animais na indústria Alfa

Com o objetivo de aumentar a eficiência do processo de produção da indústria Alfa e auxiliar na tomada de decisão do planejador, foi desenvolvido um modelo matemático de otimização linear inteira mista da classe GLSP. Para isso, foram usados como referência os trabalhos de Toledo et al. (2006), Toso, Morabito e Clark (2009) e Camargo, Toledo e Almada-Lobo (2014), que já foram brevemente descritos na Seção 1.1. O trabalho de Toso, Morabito e Clark (2009) é o que mais se aproxima da modelagem deste trabalho, já que também é aplicado em uma indústria de alimento para animais. Porém ele não trata os processos de extrusão e ensaque, e não integra essas duas etapas na mesma modelagem. Na sequência são apresentados e descritos os conjuntos, índices, parâmetros e variáveis de decisão utilizados no modelo.

Conjuntos e Índices:

M : conjunto dos tipos de partículas.

P : conjunto dos tipos de produtos demandados.

K : conjunto de extrusoras.

E : conjunto de ensacadeiras.

Q : conjunto de tanques.

T : conjunto de macroperíodos.

t : macroperíodo; $t \in T$.

S_t : conjunto de microperíodos do macroperíodo t .

s : microperíodo; $s \in S_t$.

i, j : tipo de partícula; $i, j \in M$.

p, r : tipo de produto; $p, r \in P$.

T_p : conjunto dos tipos de partículas que estão contidas no saco do produto tipo p .

V_i : conjunto de tipos de produtos que contêm a partícula i .

i_0 : partícula principal em produtos multipartículas.

i_1 : partícula secundária em produtos multipartículas.

k : extrusora; $k \in K$.

q : tanque; $q \in Q$.

e : ensacadeira; $e \in E$.

g : microperíodo; $g = 2, \dots, |S_t| - 1$.

N : conjunto dos números naturais.

$\alpha = n(g)$: microperíodo; $n(g) \in N$; $n(g) = 1, \dots, g - 1$.

$\beta = o(g)$: microperíodo; $o(g) \in N$; $o(g) = 1, \dots, |S_t| - g$.

Parâmetros:

E_p : peso do saco do produto tipo p (kg).

B_i : peso médio da mistura que alimenta as extrusoras para fabricar a partícula tipo i (kg).

A_{i_0p} : porcentagem da partícula principal i_0 no saco do produto multipartículas tipo p .

A_{i_1p} : porcentagem da partícula secundária i_1 no saco do produto multipartículas tipo p .

CP_{pe} : taxa de produção do produto tipo p na ensacadeira e (min/sacos).

TP_{ik} : taxa de produção da partícula tipo i na extrusora k (h/kg).

D_{ipt} : demanda da partícula tipo i no produto tipo p no macroperíodo t (sacos).

CT_{rpe} : tempo de preparação da ensacadeira e na troca do produto tipo r para o produto tipo p (min).

TS_{jik} : tempo de preparação da extrusora k na troca da partícula tipo j para a partícula tipo i (h).

L : número suficientemente grande.

O_k : lote mínimo de produção de partícula na extrusora k (kg).

U_e : lote mínimo de produção de produto na ensacadeira e (sacos).

F_{es} : capacidade disponível da ensacadeira e no microperíodo s (min).

H_{ks} : capacidade disponível da extrusora k no microperíodo s (h).

N_{qs} : capacidade do tanque q no microperíodo s (kg).

S_{ikqs} : custo de produção da partícula tipo i na extrusora k enviada para o tanque q no microperíodo s (R\$/unidade).

SS_{ijks} : custo de preparação da extrusora k na troca da partícula tipo j para a partícula tipo i no microperíodo s (R\$).

CS_{pes} : custo de produção do produto tipo p na ensacadeira e no microperíodo s (R\$/sacos).

CSS_{rpes} : custo de preparação da ensacadeira e na troca do produto tipo p para o produto tipo r no microperíodo s (R\$).

C_{iqs} : custo de manter a partícula tipo i armazenada no tanque q no microperíodo s (R\$).

X_{iq0} : quantidade da partícula tipo i que já estava no tanque q no início do horizonte de planejamento.

Variáveis de decisão:

x_{ikqs} : quantidade da partícula tipo i produzida na extrusora k enviada para o tanque q no microperíodo s (unidade).

w_{pieqs} : quantidade do produto tipo p proveniente da partícula tipo i armazenada no tanque q produzido na ensacadeira e no microperíodo s (sacos).

w_{pi_0eqs} : quantidade do produto tipo p proveniente da partícula principal tipo i_0 armazenada no tanque q produzido na ensacadeira e no microperíodo s (sacos).

w_{pi_1eqs} : quantidade do produto tipo p proveniente da partícula secundária tipo i_1 armazenada no tanque q produzido na ensacadeira e no microperíodo s (sacos).

y_{ikqs} : variável binária que assume valor 1 se a extrusora k é preparada para a produção da partícula tipo i enviada para o tanque q no microperíodo s . No microperíodo 0 não existe preparação de máquina, ou seja, $y_{ikqs} = 0$.

\bar{y}_{pes} : variável binária que assume valor 1 se a ensacadeira e é preparada para a produção do produto tipo p no microperíodo s . No microperíodo 0 não existe preparação de máquina, ou seja, $\bar{y}_{pes} = 0$.

y_{iq0} : variável binária que assume valor 1 se o parâmetro X_{iq0} é maior que 0.

v_{iqs} : variável binária que assume valor 1 se ainda existe a partícula tipo i no tanque q no microperíodo s .

\bar{z}_{rpes} : variável binária que assume valor 1 se houve troca na produção do produto tipo r para o produto tipo p na ensacadeira e no microperíodo s .

z_{ijkqs} : variável binária que assume valor 1 se houve troca na produção da partícula tipo i para a partícula tipo j na extrusora k no microperíodo s .

Modelo matemático:

Minimizar

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^{S_t} \left(\sum_{i=1}^M \left(\sum_{q=1}^Q \left(\sum_{k=1}^K S_{ikqs} (x_{ikqs} + y_{ikqs}) + C_{iqs} v_{iqs} \right) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^M S S_{ijkqs} z_{ijkqs} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^P \sum_{e=1}^E \left(\sum_{r=1}^P C S S_{rpes} \bar{z}_{rpes} + C S_{pes} \left(\sum_{i=1}^M \sum_{q=1}^Q w_{pieqs} + \bar{y}_{pes} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$X_{iq0} + \sum_{u=1}^s \sum_{k=1}^K B_i x_{ikqu} \geq \sum_{u=1}^s \sum_{e=1}^E \sum_{p \in V_i} E_p w_{piequ}, \forall i, q, s \in S_t, t \quad (3.2)$$

$$\sum_{s \in S_t} \sum_{q=1}^Q \sum_{u=1}^t \sum_{e=1}^E w_{pieqs} \geq \sum_{u=1}^t D_{ipt}, \forall i \in T_p, p, t \quad (3.3)$$

$$\sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^M B_i T P_{ik} x_{ikqs} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M T S_{ijk} z_{ijks} \leq H_{ks}, \forall k, s \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^{T_p} \sum_{q=1}^Q \sum_{p=1}^P C P_{pe} w_{pieqs} + \sum_{r=1}^P \sum_{p=1}^P C T_{rpe} \bar{z}_{rpes} \leq F_{es}, \forall e, s \quad (3.5)$$

$$\sum_{u=1}^s \sum_{k=1}^K B_i x_{ikqu} - \sum_{u=1}^s \sum_{e=1}^E \sum_{p \in V_i} E_p w_{piequ} \leq N_{qs} - X_{iq0}, \forall i, q, s \quad (3.6)$$

$$B_i x_{ikqs} \leq L y_{ikqs}, \forall i, k, q, s \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^{T_p} \sum_{q=1}^Q w_{pieqs} \leq L \bar{y}_{pes}, \forall e, p, s \quad (3.8)$$

$$\sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K y_{ikqs} \leq 1, \forall i, s \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{q=1}^Q y_{ikqs} \leq 1, \forall k, s \quad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^K y_{ikqs} \leq 1, \forall q, s \quad (3.11)$$

$$\sum_{p=1}^P \bar{y}_{pes} \leq 1, \forall e, s \quad (3.12)$$

$$\sum_{q=1}^Q B_i x_{ikqs} \geq O_k \left(\sum_{q=1}^Q y_{ikqs} - \sum_{q=1}^Q y_{ikq(s-1)} \right), \forall i, k, s \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^{T_p} \sum_{q=1}^Q w_{pieqs} \geq U_e (\bar{y}_{pes} - \bar{y}_{pe(s-1)}), \forall p, e, s \quad (3.14)$$

$$X_{iq0} + \sum_{k=1}^K \sum_{u=1}^s B_i x_{ikqu} - \sum_{u=1}^s \sum_{e=1}^E \sum_{p \in V_i} E_p w_{piequ} \leq L v_{iqs}, \forall i, q, s \quad (3.15)$$

$$1 - \sum_{k=1}^K v_{iq(s-1)} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \sum_{k=1}^K y_{jkqs}, \forall i, q, s \geq 2 \quad (3.16)$$

$$\sum_{q=1}^Q w_{pi_1eqs} = \sum_{q=1}^Q \frac{A_{i_1p}}{A_{i_0p}} w_{pi_0eqs}, \forall s, e, i_1 \in T_p, p \quad (3.17)$$

$$X_{iq0} \leq L y_{iq0}, \forall i, q \quad (3.18)$$

$$y_{iq0} \leq X_{iq0}, \forall i, q \quad (3.19)$$

$$\sum_{k=1}^K y_{jkq1} + y_{iq0} \leq 1, \forall q, i, j \neq i \quad (3.20)$$

$$z_{ijks} \geq \sum_{q=1}^Q (y_{jkq(s-1)} + y_{ikqs} - 1), \forall i, j, k, s \quad (3.21)$$

$$\bar{z}_{rpes} \geq \bar{y}_{re(s-1)} + \bar{y}_{pes} - 1, \forall r, p, e, s \quad (3.22)$$

$$\sum_{q=1}^Q (y_{ikq\beta} + y_{ikq(\beta+g)}) \leq \sum_{q=1}^Q y_{ikq(\beta+g-\alpha)} + 1, \forall i, k, g, \alpha, \beta \quad (3.23)$$

$$\sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^M (y_{ikq\beta} + y_{ikq(\beta+g)}) \leq \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^M y_{ikq(\beta+g-\alpha)} + 1, \forall k, g, \alpha, \beta \quad (3.24)$$

$$w_{pieqs} \in R^+, \forall p, i, q, e, s \quad (3.25)$$

$$x_{ikqs} \in Z^+, \forall i, k, q, s \quad (3.26)$$

$$y_{ikqs} \in \{0, 1\}, \forall i, k, q, s \quad (3.27)$$

$$\bar{y}_{pes} \in \{0, 1\}, \forall p, e, s \quad (3.28)$$

$$y_{iq0} \in \{0, 1\}, \forall i, q \quad (3.29)$$

$$v_{iqs} \in \{0, 1\}, \forall i, q, s \quad (3.30)$$

$$z_{ijks} \in \{0, 1\}, \forall i, j, k, s \quad (3.31)$$

$$\bar{z}_{rpes} \in \{0, 1\}, \forall r, p, e, s \quad (3.32)$$

A função objetivo (3.1) consiste em minimizar o custo de produção das partículas nas extrusoras, o número de *setups* nas extrusoras, o custo de armazenagem das partículas nos tanques, o custo de preparação das extrusoras na troca de produção de partículas, o custo de *setups* na troca de produção dos produtos nas ensacadeiras, o custo de produção dos produtos nas ensacadeiras e o número de *setups* nas ensacadeiras. As restrições (3.2) garantem que a quantidade de partículas disponíveis nos tanques usada nas ensacadeiras para a produção dos produtos não seja maior que a quantidade de partículas produzidas nas extrusoras e enviadas para os tanques nos microperíodos. O atendimento à demanda de produtos nos macroperíodos é assegurado pelas restrições (3.3). As restrições (3.4) são de capacidade das extrusoras nos microperíodos. Elas não permitem que o tempo de produção e de *setup* ultrapasse a capacidade do microperíodo. O mesmo é garantido para as ensacadeiras nas restrições (3.5). As restrições (3.6) são de capacidade dos tanques. Elas impedem que o armazenamento máximo seja violado nos microperíodos. As restrições (3.7) e (3.8) relacionam as variáveis de produção e preparação das extrusoras e ensacadeiras, respectivamente. As restrições (3.9) asseguram que cada partícula seja produzida por uma única extrusora e enviada para apenas um tanque em cada microperíodo. Nas restrições (3.10), é assegurado que cada extrusora pode produzir apenas uma partícula e enviar para apenas um tanque por microperíodo. As restrições (3.11) garantem que cada tanque receba apenas uma partícula produzida em uma única extrusora em cada microperíodo. Da mesma forma, nas restrições (3.12) é garantido que cada ensacadeira pode produzir

apenas um produto por microperíodo. As restrições (3.13) e (3.14) não permitem uma produção menor que o lote mínimo estabelecido nas extrusoras e ensacadeiras. Como cada tanque pode receber apenas um tipo de partícula por microperíodo, é preciso avaliar se ele está vazio antes do envio de partículas. Essa é a função das restrições (3.15) e (3.16). As restrições (3.17) garantem que a proporção das partículas em produtos multipartículas seja respeitada. No início do horizonte de planejamento alguns tanques podem estar ocupados com partículas. As restrições (3.18), (3.19) e (3.20) identificam essas partículas para garantir que o tanque não receba partículas diferentes, no mesmo microperíodo. As restrições (3.21) e (3.22) são de sequenciamento da produção. Elas indicam se houve troca de partícula nas extrusoras e troca de produto nas ensacadeiras, respectivamente, ao longo dos microperíodos. As restrições (3.23) impedem que a produção de uma partícula aconteça em microperíodos que não estejam em sequência. Isso garante que a produção do lote aconteça uma única vez, evitando *setups* desnecessários. O mesmo acontece nas restrições (3.24), porém com extrusoras ao invés de partículas. Portanto, uma extrusora permanece configurada para uma partícula até que sua demanda seja atendida. Com isso, a contabilização de *setups* acontece de maneira correta. Por fim, o domínio das variáveis está definido nas restrições (3.25) a (3.32).

Vale ressaltar que a presença de variáveis binárias e o tratamento simultâneo de duas etapas do processo de produção de alimentos torna a solução do modelo matemático mais difícil. Algumas restrições precisaram ser adaptadas para que o modelo se tornasse factível. No Capítulo 4 são apresentados vários experimentos computacionais que foram realizados com o intuito de validar o modelo matemático proposto e também analisar as suas soluções diante da variação de parâmetros. Todas as instâncias foram resolvidas com o auxílio do *solver* CPLEX.

4 Experimentos computacionais

Para os experimentos computacionais, inicialmente foi criado com base nos dados reais da indústria Alfa um primeiro exemplar, chamado de Exe0, o qual foi escrito no formato lp usando um gerador de exemplares desenvolvido em linguagem Python. Ele foi resolvido durante 7.200 segundos em um *notebook* com processador intel celeron N2830 2.16GHZ, memória RAM de 4GB, utilizando a versão V12.10.0.0 do CPLEX.

4.1 Testes para validação do modelo proposto

No Exe0, são considerados 4 tipos de produtos finais. O abastecimento de 14 tanques é feito por meio de 2 extrusoras. Os produtos são ensacados em 2 ensacadeiras. A [Tabela 1](#) contém o nome, o peso, a demanda e a proporção de partículas para cada produto. A [Tabela 2](#) e a [Tabela 4](#) mostram o tempo necessário para troca de partícula e produto nas extrusoras e ensacadeiras, respectivamente. Conforme mencionado na Seção 3.1, uma família é um conjunto formado por partículas e produtos com certa semelhança. Os tempos para troca de partícula da mesma família são de 0,17 hora. Para partículas de famílias diferentes, os tempos são de 1,33 hora. Pelo mesmo motivo, os tempos de produtos da mesma família são de 5 min e de famílias diferentes, 15 min. A [Tabela 3](#) e a [Tabela 5](#) mostram os custos envolvidos na troca de partícula e produto. Os custos estão relacionados às famílias de produtos e partículas, como nas trocas de produtos e partículas. Portanto uma troca de produto que durar 15 minutos terá um custo de R\$100,00. Já uma troca de 5 minutos vai custar R\$10,00. Da mesma forma, custa R\$100,00 a troca entre partículas de famílias diferentes, e R\$10,00 para partículas da mesma família. A [Tabela 6](#) e a [Tabela 7](#) mostram a taxa de produção de cada partícula em cada extrusora e cada produto em cada ensacadeira. Se a taxa de produção for nula, então a partícula ou produto não poderá ser produzida na extrusora ou ensacadeira.

Tabela 1 – Dados dos produtos.

Nome	Peso do saco (kg)	Demanda (sacos)	Composição
PR1	15	6000	100% PA1
PR2	20	3000	100% PA1
PR3	15	3500	82% PA2 6% PA3 6% PA4 6% PA5
PR4	20	2500	82% PA2 6% PA3 6% PA4 6% PA5

Tabela 2 – Tempo de preparação da extrusora para troca de partícula (horas).

	PA1	PA2	PA3	PA4	PA5
PA1	0	1,33	1,33	1,33	1,33
PA2	1,33	0	0,17	0,17	0,17
PA3	1,33	0,17	0	0,17	0,17
PA4	1,33	0,17	0,17	0	0,17
PA5	1,33	0,17	0,17	0,17	0

Tabela 3 – Custo para troca de partícula na extrusora.

	PA1	PA2	PA3	PA4	PA5
PA1	1	100	100	100	100
PA2	100	1	10	10	10
PA3	100	10	1	10	10
PA4	100	10	10	1	10
PA5	100	10	10	10	1

Tabela 4 – Tempo de preparação da ensacadeira para troca de produto (minutos).

	PR1	PR2	PR3	PR4
PR1	0	5	15	15
PR2	5	0	15	15
PR3	15	15	0	5
PR4	15	15	5	0

Tabela 5 – Custo para troca de produto na ensacadeira.

	PR1	PR2	PR3	PR4
PR1	1	10	100	100
PR2	10	1	100	100
PR3	100	100	1	10
PR4	100	100	10	1

O horizonte de planejamento considerado é de 48 horas, dividido em 2 macroperíodos de 24 horas e 12 microperíodos de 4 horas. Portanto cada macroperíodo possui 6 microperíodos.

O custo para enviar 1 kg de partícula da extrusão para o ensaque é de R\$1,00 no microperíodo 1. Em cada microperíodo subsequente foi feito um acréscimo de R\$1,00 no custo. Por exemplo, no microperíodo 7 o custo é de R\$7,00 e no microperíodo 10 o custo é de R\$10,00. Os custos foram propostos dessa maneira para que a produção ocorra nos microperíodos iniciais sempre que possível, concentrando a ocupação das máquinas e fazendo com que a demanda seja entregue no menor tempo e custo possíveis.

O resultado apresentou *gap* foi de 5,89%. O valor da função objetivo ficou em R\$69.688,00, com 139 variáveis não nulas do total de 12.210. Foram produzidos 264.000 kg nas extrusoras em 37 horas e 15.000 sacos (252.500 kg) nas ensacadeiras em 2.061 minutos (34 horas), utilizando 7 microperíodos nas ensacadeiras e extrusoras, dos 12 disponíveis.

Tabela 6 – Taxa de produção das extrusoras (hora/kg).

Nome partícula	EXT1	EXT2
PA1	0	1/7000
PA2	1/8000	1/8000
PA3	0	1/7000
PA4	1/6000	1/7000
PA5	1/5000	1/5000

Tabela 7 – Taxa de produção das ensacadeiras (min/sacos).

Nome produto	ENS1	ENS2
PR1	1/8	1/7
PR2	1/8	1/7
PR3	1/8	1/7
PR4	1/7	1/6

O produto PR1 foi o primeiro a ser produzido no ensaque e aconteceu apenas no segundo microperíodo, pois a partícula PA1 foi produzida no microperíodo 2. A produção dos produtos PR3 e PR4 aconteceu no terceiro microperíodo em diante, porque as partículas PA2, PA3, PA4 e PA5 não estavam disponíveis nos microperíodos 1 e 2. Para a demanda inicial exibida na [Tabela 1](#), foram necessários 10 tanques para atender extrusoras e ensacadeiras. O único tanque que recebeu duas partículas foi o TQ13, nos microperíodos 3 e 4. A partícula que estava no microperíodo 3 foi completamente consumida pela ensacadeira 1, permitindo que a partícula 2 fosse enviada para o tanque no microperíodo 4. A extrusora EXT2 foi responsável por 61% da produção da extrusão e a ensacadeira ENS2, por 53% da quantidade total ensacada.

A [Figura 5](#) mostra a sequência de produção e *setup* das ensacadeiras e extrusoras em horas. A letra *s* significa que o tempo foi utilizado para *setup* e a letra *p*, que o tempo foi utilizado na produção. O número que antecede as letras indica o microperíodo. É possível interpretar na figura que apenas 1 *setup* com custo elevado foi necessário nas duas extrusoras para atendimento da demanda. Ele aconteceu na extrusora EXT2, no intervalo de tempo entre 0 e 5 horas. Os outros 7 *setups* possíveis com custo elevado, que estão na [Tabela 3](#), foram evitados na solução da modelagem matemática, atendendo o objetivo de reduzir os custos finais.

A [Tabela 8](#) mostra os valores das variáveis de produção w_{pieqs} e x_{ikqs} em unidades na coluna Valor em unid. e em quilos na coluna Valor em peso (kg). O tempo utilizado para produção está descrito na coluna Dur. da prod. (h). Por exemplo, a variável $w1127s2$ indica que o produto 1, proveniente da partícula 1, foi feito na ensacadeira ENS2, utilizando a partícula do tanque 7 no microperíodo 2. Para essa variável o modelo encontrou a resposta de aproximadamente 1.067 sacos. Como são sacos de 15 quilos, o valor em quilos foi de aproximadamente 16.000. Foram necessárias 2,5 horas para finalizar essa produção. Do mesmo modo, a variável $x329s1$ indica que a partícula 3 foi feita na extrusora EXT2 e enviada para o tanque 9 no microperíodo 1. Foram 2 unidades produzidas por essa variável.

Como cada unidade corresponde a 4.000 quilos, a produção em quilos foi de 8.000 em 1,1 hora.

É possível perceber da [Tabela 8](#) que nenhuma produção nas ensacadeiras ocupou 4 horas em um microperíodo. O mais próximo foram as variáveis $w_{11113s3}$ e $w_{11110s5}$, com 3,8 horas de produção. Isso aconteceu porque as extrusoras não foram capazes de produzir uma quantidade suficiente para manter as ensacadeiras ocupadas. As 28 toneladas produzidas pela ensacadeira ENS1 do produto 1 composto pela partícula 1 que estava no tanque 13 no microperíodo 3, conforme variável $w_{11113s3}$, foi a produção máxima que a extrusora EXT2 entregou da partícula 1 enviada para o tanque 13, dentro do microperíodo 3, de acordo com a variável x_{1213s3} .

A [Tabela 9](#) traz os valores das variáveis de *setup* \bar{z}_{rpes} e z_{ijks} para as ensacadeiras e extrusoras. Todas as variáveis dessa tabela possuem valor 1, pois são variáveis binárias. Para exemplificar, a variável \bar{z}_{1214} mostra que houve troca entre os produtos 1 e 2, na ensacadeira 1, no microperíodo 4 e a variável z_{1322} indica que houve troca entre as partículas 1 e 3, na extrusora 2, no microperíodo 2. Analisando a [Tabela 9](#) nota-se que 7 *setups* ocorreram entre as mesmas partículas, como por exemplo as variáveis z_{1124} e z_{2215} . Isso significa que o tamanho do lote durou mais de 1 microperíodo, o que é benéfico para os custos finais pois a quantidade de *setups* foi reduzida.

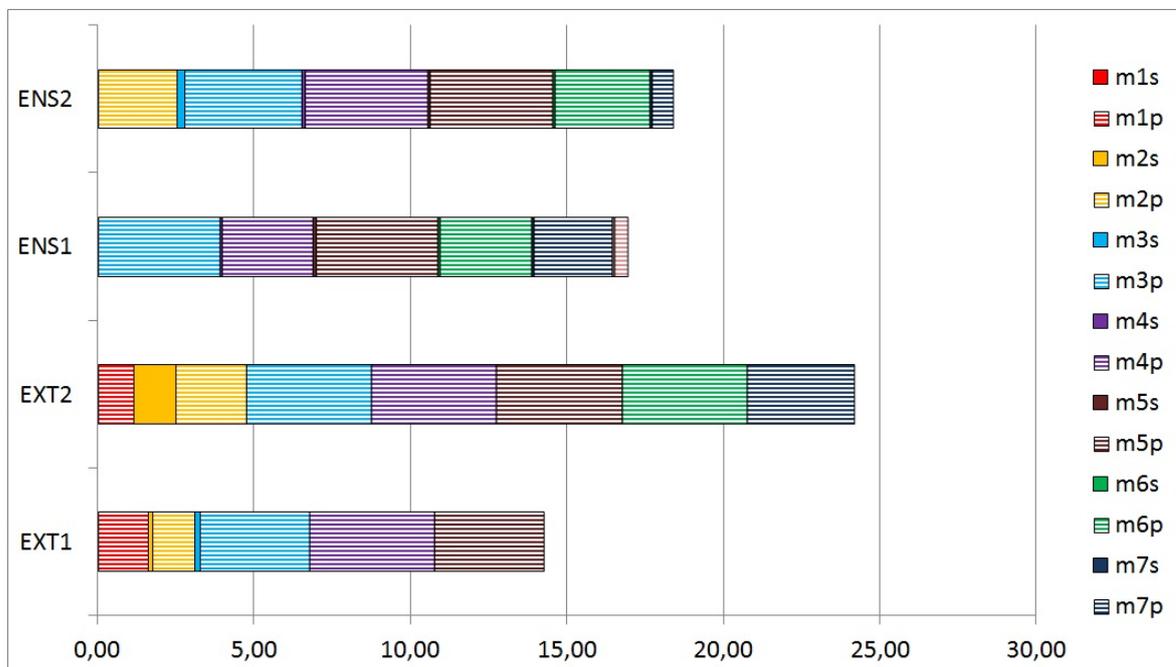


Figura 5 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe0.

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 8 – Solução do Exe0 - variáveis de produção.

Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da prod. (h)	Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da pro. (h)
w1127s2	1066,6	15999,9	2,5	w4329s6	65,4	1308	0,1
w11113s3	1866,6	28000	3,8	w4428s6	65,4	1308	0,1
w32214s3	1291,5	19372,5	3	w4525s6	65,4	1308	0,1
w3329s3	94,5	1417,5	0,2	w1112s7	1199,9	17999,9	2,4
w3428s3	94,5	1417,5	0,2	w3221s7	229,5	3443,9	0,5
w3525s3	94,5	1417,5	0,2	w3329s7	16,7	251,9	0
w21110s4	1400	28000	2,9	w3428s7	16,7	251,9	0
w42213s4	1036,5	20730	2,8	w3525s7	16,7	251,9	0
w42214s4	119,6	2393,9	0,3	w2112s8	200	4000	0,4
w4329s4	84,5	1692	0,2	x329s1	2	8000	1,1
w4428s4	84,5	1692	0,2	x515s1	2	8000	1,6
w4525s4	84,5	1692	0,2	x127s2	4	16000	2,2
w11110s5	1866,6	27999,9	3,8	x418s2	2	8000	1,3
w32214s5	415,5	6233,4	0,9	x1213s3	7	28000	4
w3221s5	933,3	14000	2,2	x2114s3	7	28000	3,5
w3329s5	98,7	1480,5	0,2	x1210s4	7	28000	4
w3428s5	98,7	1480,5	0,2	x2113s4	8	32000	4
w3525s5	98,7	1480,5	0,2	x1210s5	7	28000	4
w2114s6	1400	28000	2,9	x211s5	7	28000	3,5
w42213s6	563,4	11270	1,5	x124s6	7	28000	4
w4221s6	330,3	6606	0,9	x122s7	6	24000	3,4

Tabela 9 – Solução do Exe0 - variáveis de *setup*.

Variável	Valor	Variável	Valor
\bar{z}_{1214}	1	z_{1123}	1
\bar{z}_{1216}	1	z_{1124}	1
\bar{z}_{1218}	1	z_{1125}	1
\bar{z}_{1323}	1	z_{1126}	1
\bar{z}_{2115}	1	z_{1127}	1
\bar{z}_{2117}	1	z_{1322}	1
\bar{z}_{3424}	1	z_{2214}	1
\bar{z}_{3426}	1	z_{2215}	1
\bar{z}_{4325}	1	z_{2413}	1
\bar{z}_{4327}	1	z_{4512}	1

Para continuar a validação e análise do modelo proposto, foram criados mais 48 exemplares a partir do Exe0, com variações em diversos parâmetros. Todos eles foram resolvidos até atingir 7.200 segundos utilizando o mesmo *notebook* com as configurações citadas anteriormente.

4.1.1 Variação no lote mínimo

Os primeiros 7 exemplares ficaram com lotes mínimos menores em relação ao problema inicial Exe0, tanto nas extrusoras quanto nas ensacadeiras, como pode ser visto na coluna Novo valor da [Tabela 10](#). O melhor resultado da função objetivo foi do Exe5, no

valor de R\$68.556,00 indicado na coluna Nova FO e *gap* de 0,06% indicado na coluna Novo *gap*.

A Tabela 11 mostra os valores das variáveis de produção do Exe5 em unidades na coluna Valor em unid. e em quilos na coluna Valor em peso (kg). A duração de cada produção está na coluna Dur. da prod. (h). As variáveis w e x estão recebendo a letra s no final do nome para facilitar a leitura e identificar microperíodo e tanque. É possível ver uma pequena melhora na ocupação das ensacadeiras ENS1 e ENS2 devido ao aumento no lote mínimo, em relação ao Exe0. A ensacadeira ENS1 ocupou 3,9 horas do microperíodo 5, de acordo com o resultado da variável w_{1125s5} . O mesmo aconteceu com a ensacadeira ENS2, na variável w_{1122s3} .

A Tabela 12 mostra os valores das variáveis de *setup* para as ensacadeiras e extrusoras no Exe5. Todos os valores resultam em 1 pois são variáveis binárias. Apareceram 7 variáveis com continuação da produção em microperíodos diferentes. Além disso, outra contribuição para a redução dos custos foi a quantidade final de *setups* nas ensacadeiras. Eram 10 no Exe0 e agora são 8 no Exe5.

A sequência e quantidades produzidas nas extrusoras foi idêntica, comparando os Exe0 e Exe5. Já nas ensacadeiras, a mudança no tamanho do lote mínimo provocou uma redução na quantidade de microperíodos necessários para o atendimento da demanda. O produto 2 precisou dos microperíodos 4 e 6 para ser produzido no Exe5, conforme Figura 6. No Exe0 foram utilizados os microperíodos 4, 6 e 8. O mesmo aconteceu com o produto 3. Ele foi produzido nos microperíodos 3 e 5 no Exe5. No Exe0 foram necessários os microperíodos 3, 5 e 7. Por isso o valor da função objetivo foi 1,6 % menor no Exe5.

Os outros 6 problemas apresentaram valor de função objetivo igual ou superior ao Exe5. A resposta com pior desempenho foi do Exe6, sendo 2,4% maior que o Exe0 e com *gap* de 24,39%, conforme Tabela 10. De maneira geral, a mudança em lotes mínimos de produção pode reduzir os custos no resultado da função objetivo devido a entrega da demanda numa quantidade menor de microperíodos.

Tabela 10 – Variação nos lotes mínimos das ensacadeiras e extrusoras.

Prob.	Parâm.	Valor Exe0	Novo Valor	gap Exe0	Novo gap	FO Exe0	Nova FO
Exe1	U_e	200	175	5,89%	15,17%	69688	68555
	O_k	8000	7000				
Exe2	U_e	200	150	5,89%	21,6%	69688	69580
	O_k	8000	6000				
Exe3	U_e	200	125	5,89%	17,66%	69688	69683
	O_k	8000	5000				
Exe4	U_e	200	100	5,89%	16,6%	69688	69480
	O_k	8000	4000				
Exe5	U_e	200	75	5,89%	0,06%	69688	68555
	O_k	8000	3000				
Exe6	U_e	200	50	5,89%	24,39%	69688	70211
	O_k	8000	2000				
Exe7	U_e	200	25	5,89%	19,4%	69688	70146
	O_k	8000	1000				

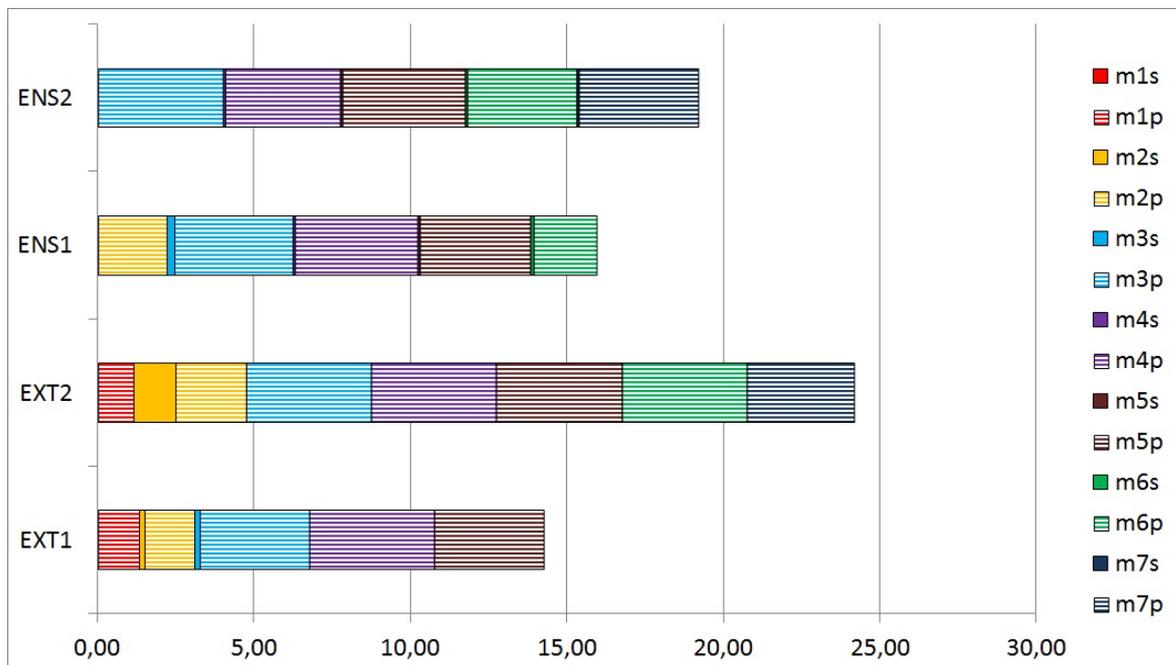


Figura 6 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe5.

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 11 – Solução do Exe5 - variáveis de produção.

Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da prod. (h)	Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da pro. (h)
w1111s2	1066,6	15999,9	2,2	w4213s6	354,5	7090	0,8
w1122s3	1679,9	25199,9	3,9	w43113s6	51,2	1026	0,1
w3211s3	1475,9	22139,9	3	w44111s6	51,2	1026	0,1
w33113s3	107,9	1619,9	0,2	w45114s6	51,2	1026	0,1
w34111s3	107,9	1619,9	0,2	w1123s7	1466,6	21999,9	3,4
w35114s3	107,9	1619,9	0,2	w1125s7	141,6	2125	0,3
w2122s4	1540	30800	3,6	x3213s1	2	8000	1,1
w4211s4	1348,9	26978	3,2	x4111s1	2	8000	1,3
w43113s4	98,7	1974	0,2	x121s2	4	16000	2,2
w44111s4	98,7	1974	0,2	x5114s2	2	8000	1,6
w45114s4	98,7	1974	0,2	x122s3	7	28000	4
w1125s5	1645	24675	3,9	x211s3	7	28000	3,5
w3213s5	1394	20910	2,9	x122s4	7	28000	4
w33113s5	102	1530	0,2	x211s4	8	32000	4
w34111s5	102	1530	0,2	x125s5	7	28000	4
w35114s5	101,9	1529,9	0,2	x213s5	7	28000	3,5
w2125s6	59,9	1199,9	0,1	x126s6	7	28000	4
w2126s6	1400	28000	3,3	x123s7	6	24000	3,4
w4211s6	346,5	6931,9	0,8				

Tabela 12 – Solução do Exe5 - variáveis de *setup*.

Variável	Valor	Variável	Valor
\bar{z}_{1224}	1	z_{1124}	1
\bar{z}_{1226}	1	z_{1125}	1
\bar{z}_{1313}	1	z_{1126}	1
\bar{z}_{2125}	1	z_{1127}	1
\bar{z}_{2127}	1	z_{1322}	1
\bar{z}_{3414}	1	z_{2214}	1
\bar{z}_{3416}	1	z_{2215}	1
\bar{z}_{4315}	1	z_{2513}	1
z_{1123}	1	z_{5412}	1

4.1.2 Variação na taxa de produção

Os exemplares Exe8 a Exe19 ficaram com a taxa de produção maior em relação ao Exe0, conforme [Tabela 13](#). O Exe19 apresentou o melhor resultado, com função objetivo no valor de R\$32.361,00 e *gap* de 2,84%.

A sequência de produção e resultado das variáveis de produção do Prob 19 estão representadas na [Figura 7](#) e [Tabela 14](#). A variável w_{1119s1} teve produção de 4800 sacos e ocupou todo o tempo disponível do microperíodo 1. No Exe0 nenhuma variável havia alcançado 4 horas de ocupação dentro de um microperíodo. Tanto extrusoras quanto ensacadeiras entregaram mais produção em menos tempo. A extrusora EXT2 precisou de pouco mais de 9 horas para entregar a demanda. No Exe0, a mesma extrusora utilizou quase 25 horas para produzir o mesmo volume. Menos tempo de produção resulta em menores custos, pois a produtividade aumenta quando o mesmo volume é entregue num curto espaço de tempo.

As variáveis de *setup* que tiveram valor igual a 1 estão na [Tabela 15](#). É possível identificar 4 *setups* entre mesmos produtos ou partículas (\bar{z}_{1112} , \bar{z}_{4414} , z_{1122} e z_{2214}). Isso contribui para aumentar o tamanho do lote e reduzir a necessidade de troca de produto.

Foram necessários 4 microperíodos para atender a mesma demanda do Exe0. A taxa de produção maior em relação ao Exe0 proporcionou elevados volumes de produção das partículas 1 e 2 dentro dos microperíodos. A partícula 1 precisou de 6 microperíodos para ser produzida no Exe0, contra 2 microperíodos do Exe19. Já a partícula 2 foi fabricada em 3 microperíodos no Exe0 e em 2 microperíodos no Exe19. Por causa disso o valor da função objetivo foi 53,6% menor que o problema inicial.

O resultado da função objetivo dos demais problemas foi maior que o Exe19, porém menor que o Exe0, de acordo com a [Tabela 13](#). O pior valor de função objetivo foi encontrada no Exe8 e mesmo assim ficou 16,4 % menor que o Exe0. Portanto, quanto maior a taxa de produção das extrusoras e ensacadeiras, mais rápida é a entrega da demanda dos produtos e menores são os custos da função objetivo.

Tabela 13 – Variação na taxa de produção das extrusoras e ensacadeiras.

Prob.	Parâm.	Valor Exe0	Novo Valor	gap Exe0	Novo gap	FO Exe0	Nova FO
Exe8	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	9000 9	5,89%	0,01%	69688	58260
Exe9	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	10000 10	5,89%	11,27%	69688	53463
Exe10	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	11000 11	5,89%	12,07%	69688	51910
Exe11	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	12000 12	5,89%	2,31%	69688	50122
Exe12	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	13000 13	5,89%	10,57%	69688	43332
Exe13	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	14000 14	5,89%	4,65%	69688	42358
Exe14	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	15000 15	5,89%	8,5%	69688	41398
Exe15	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	16000 16	5,89%	3,36%	69688	40484
Exe16	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	17000 17	5,89%	0,06%	69688	44955
Exe17	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	18000 18	5,89%	12,84%	69688	44286
Exe18	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	19000 19	5,89%	2,7%	69688	32874
Exe19	TP _{ik} CP _{pe}	5000, 6000, 7000, 8000 6, 7, 8	20000 20	5,89%	2,84%	69688	32361

Tabela 14 – Solução do Exe19 - variáveis de produção.

Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da prod. (h)	Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da pro. (h)
w1119s1	4800	72000	4	w4213s4	402,5	8050	0,3
w1129s1	533,3	8000	0,4	w43110s4	29,4	589	0
w1115s2	666,6	9999,9	0,5	w4418s4	29,4	589	0
w2125s2	3000	60000	2,5	w4514s4	29,4	589	0
w3229s3	2870	43050	2,3	x129s1	20	80000	4
w33210s3	210	3150	0,1	x418s1	2	8000	0,4
w3428s3	210	3150	0,1	x125s2	18	72000	3,6
w3524s3	210	3150	0,1	x514s2	2	8000	0,4
w4219s3	1647,5	32950	1,3	x219s3	19	76000	3,8
w43110s3	120,5	2410,9	0,1	x3210s3	2	8000	0,4
w4418s3	120,5	2410,9	0,1	x213s4	3	12000	0,6
w4514s3	120,5	2410,9	0,1				

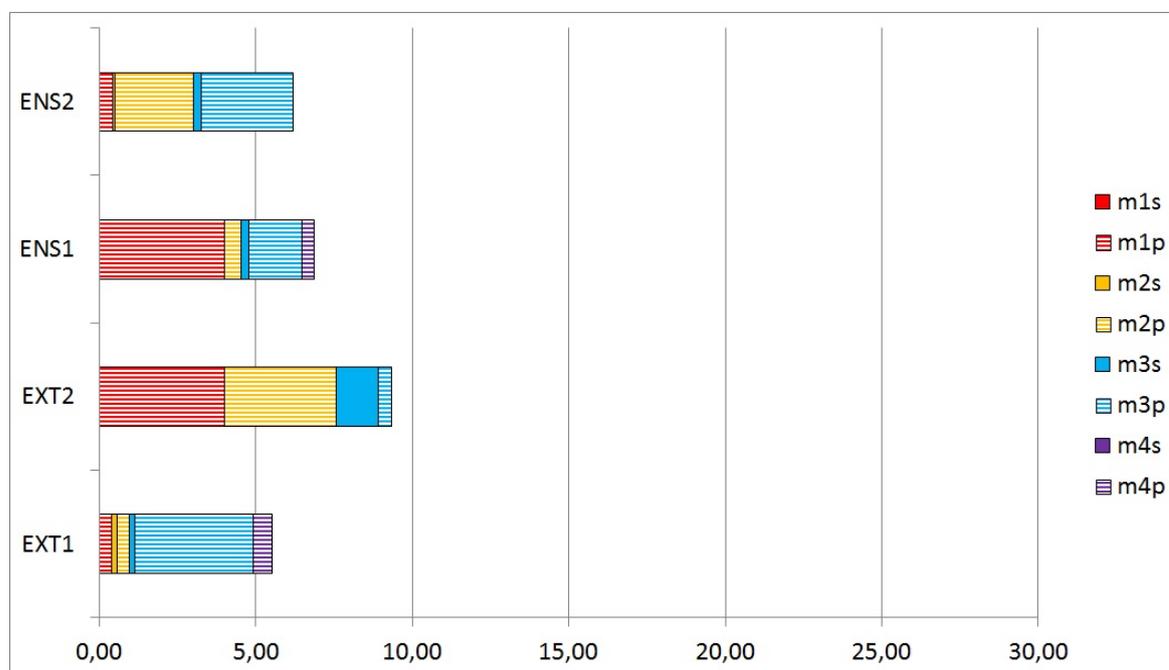


Figura 7 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe19.

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 15 – Solução do Exe19 - variáveis de *setup*.

Variável	Valor	Variável	Valor
\bar{z}_{1112}	1	z_{1122}	1
\bar{z}_{1222}	1	z_{2214}	1
\bar{z}_{1413}	1	z_{2513}	1
\bar{z}_{2323}	1	z_{3123}	1
\bar{z}_{4414}	1	z_{5412}	1

4.1.3 Variação na demanda de produto

Para os problemas Exe20 a Exe29, representados na [Tabela 16](#), a demanda de produtos foi diminuída e a quantidade de macroperíodos foi reduzida para 1. No exemplar inicial, a demanda dos produtos foi dividida em 2 macroperíodos, com 50% para cada um. A demanda do produto 1 no início era de 6.000 sacos, sendo 3.000 para o macroperíodo 1 e 3.000 para o macroperíodo 2, por exemplo. A função objetivo com melhor resultado foi encontrada no Exe29, no valor de R\$9.398,00, *gap* de 0,32% e 97 variáveis não nulas das 12.210 disponíveis.

A sequência de produção e os resultados das variáveis do Exe29 estão representados na [Figura 8](#) e [Tabela 18](#). As ensacadeiras ficaram com muito tempo ocioso devido à falta de partículas proveniente das extrusoras. No primeiro microperíodo por exemplo, a variável w_{1112s1} ficou 2 horas ociosa, das 4 disponíveis para produzir ou realizar *setup*. Portanto a baixa demanda prejudica os custos pois a capacidade da máquina é pouco utilizada ao longo dos microperíodos.

A [Tabela 19](#) mostra as variáveis de *setup* que tiveram valor igual a 1. Pode-se observar na tabela que apenas 3 trocas de produto nas extrusoras foram suficientes para atender a demanda, contribuindo para reduzir os custos no valor da função objetivo. As variáveis z_{1122} e z_{2214} estão com valor 1, mas como é a mesma partícula, o custo é baixo.

Foram necessários 4 microperíodos a menos nas ensacadeiras e 3 microperíodos a menos nas extrusoras, comparando o Exe29 e o Exe0. A menor demanda permitiu que o modelo produzisse uma quantidade menor das partículas 1 e 2 e entregasse os sacos em menos tempo, contribuindo para reduzir o resultado da função objetivo em 86,6%. A mudança na quantidade de macroperíodos do Exe29 não afetou a resolução do modelo matemático, mostrando que uma alternativa é trabalhar com apenas um macroperíodo dividido em quantos microperíodos forem necessários.

O Exe24 obteve o maior valor de função objetivo, sendo ainda assim, 2,7% menor que o resultado da função objetivo do Exe0, conforme [Tabela 16](#) e [Tabela 17](#), já que a demanda estava menor e pôde ser produzida em menos tempo. Pode-se afirmar que quanto menor a demanda, menores são os custos da função objetivo.

Tabela 16 – Variação na demanda de sacos e quantidade de macroperíodos.

Prob.	Parâm.	Valor Exe0	Novo Valor	gap Exe0	Novo gap
Exe20	D_{ipt} t	3000, 1500, 1750, 1250 2	5500, 2500, 3000, 2000, 1	5,89%	15,8%
Exe21	D_{ipt} t	3000, 1500, 1750, 1250 2	5000, 2000, 2500, 1500, 1	5,89%	25,42%
Exe22	D_{ipt} t	3000, 1500, 1750, 1250 2	4500, 1500, 2000, 1000, 1	5,89%	0,3%
Exe23	D_{ipt} t	3000, 1500, 1750, 1250 2	4000, 1000, 1500, 500, 1	5,89%	5,57%
Exe24	D_{ipt} t	3000, 1500, 1750, 1250 2	3500, 2500, 6000, 3000, 1	5,89%	30,49%
Exe25	D_{ipt} t	3000, 1500, 1750, 1250 2	3000, 2000, 5500, 2500, 1	5,89%	21,75%
Exe26	D_{ipt} t	3000, 1500, 1750, 1250 2	2500, 1500, 5000, 2000, 1	5,89%	24,66%
Exe27	D_{ipt} t	3000, 1500, 1750, 1250 2	2000, 1000, 4500, 1500, 1	5,89%	16,57%
Exe28	D_{ipt} t	3000, 1500, 1750, 1250 2	1500, 500, 4000, 1000, 1	5,89%	2,3%
Exe29	D_{ipt} t	3000, 1500, 1750, 1250 2	1000, 1000, 1000, 1000, 1	5,89%	0,32%

Tabela 17 – Variação na demanda de sacos e quantidade de macroperíodos.

Prob.	Parâm.	FO Exe0	Nova FO
Exe20	D_{ipt} t	69688	57963,1
Exe21	D_{ipt} t	69688	43800,6
Exe22	D_{ipt} t	69688	29821,6
Exe23	D_{ipt} t	69688	18798,3
Exe24	D_{ipt} t	69688	68342,7
Exe25	D_{ipt} t	69688	53580,9
Exe26	D_{ipt} t	69688	41186
Exe27	D_{ipt} t	69688	28717,1
Exe28	D_{ipt} t	69688	21411,2
Exe29	D_{ipt} t	69688	9398

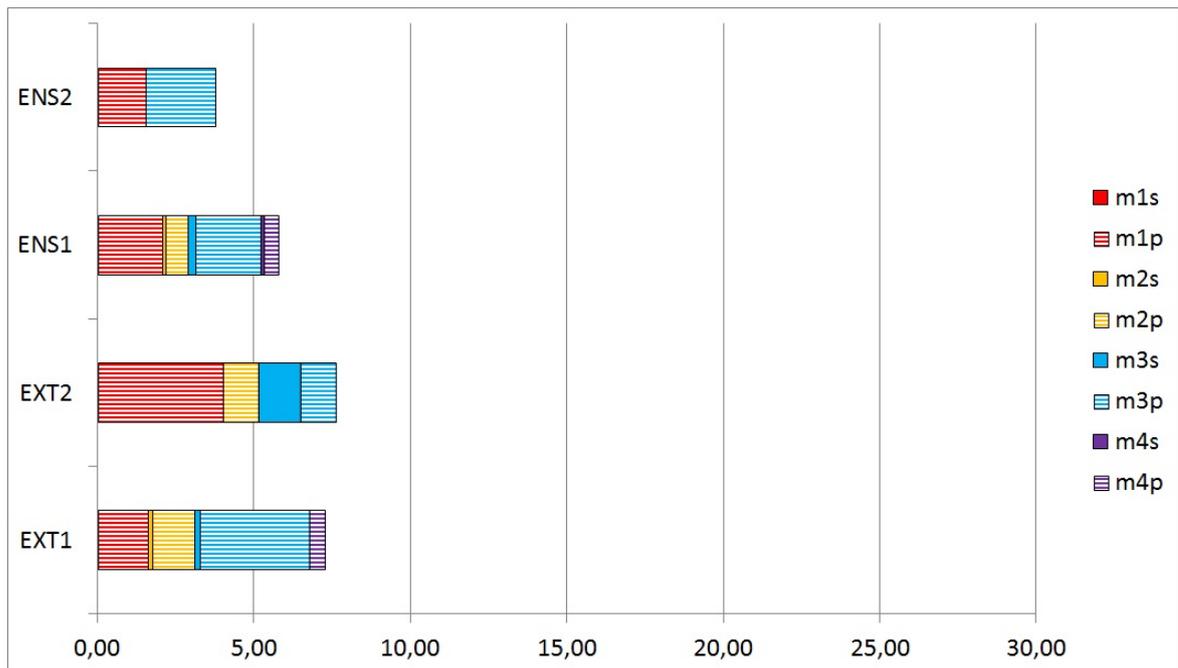


Figura 8 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe29.

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 18 – Solução do Exe29 - variáveis de produção.

Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da prod. (h)	Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da pro. (h)
w1112s1	1000	15000	2	w4213s4	163,9	3279,9	0,3
w2122s1	650	13000	1,5	w4311s4	11,9	239,9	0
w2119s2	350	7000	0,7	w4416s4	11,9	239,9	0
w3213s3	820	12300	1,7	w4515s4	11,9	239,9	0
w3311s3	59,9	899,9	0,1	x122s1	7	28000	4
w3416s3	59,9	899,9	0,1	x515s1	2	8000	1,6
w3515s3	59,9	899,9	0,1	x129s2	2	8000	1,1
w4223s3	656	13120	1,8	x416s2	2	8000	1,3
w4321s3	48	960	0,1	x213s3	7	28000	3,5
w4426s3	48	960	0,1	x321s3	2	8000	1,1
w4525s3	48	960	0,1	x213s4	1	4000	0,5

Tabela 19 – Solução do Exe29 - variáveis de *setup*.

Variável	Valor	Variável	Valor
\bar{z}_{1212}	1	z_{2214}	1
\bar{z}_{2313}	1	z_{2413}	1
\bar{z}_{3414}	1	z_{3123}	1
z_{1122}	1	z_{4512}	1

4.1.4 Variação na característica dos sacos

O peso dos sacos dos produtos no ensaio foram alterados nos exemplares Exe30 a Exe33, de acordo com a Tabela 20. No exemplar inicial foram considerados produtos de 15 e 20 kg. Para os exemplares Exe30 a Exe33, foram considerados apenas produtos de 10,1kg, 15kg, 20kg e 25kg, respectivamente. O melhor resultado aconteceu no Exe30, com resultado de função objetivo em R\$53.450,00 e *gap* de 0,2%.

A sequência de produção e resultado das variáveis do Exe30 estão apresentados na Figura 9 e Tabela 21. O tempo para atender a demanda de produção nas ensacadeiras foi maior que nas extrusoras. O menor tempo utilizado com produção veio da variável $w_{11211s4}$, no valor de 1,6 hora na ensacadeira ENS2. Mesmo assim foi possível produzir 683 sacos nesse intervalo de tempo. Com menor ociosidade das ensacadeiras, o custo da função objetivo foi reduzido.

A Tabela 22 mostra o resultado das variáveis de *setup* com valor igual a 1. Outro benefício na redução dos custos veio da quantidade de *setups* entre produtos ou partículas iguais. No total isso aconteceu 11 vezes.

Como a demanda da quantidade de sacos se manteve e o peso diminuiu de 15 e 20 para 10,1kg, a quantidade produzida nas extrusoras para atender a demanda do ensaio foi menor. Por isso o Exe30 precisou de 6 microperíodos nas ensacadeiras e 5 nas extrusoras para entregar a produção, 2 microperíodos a menos em cada setor quando comparado ao Exe0. O resultado da função objetivo do Exe30 foi 23,9% menor que o Exe0.

O pior desempenho nos testes com variação no peso dos sacos foi do Exe33, onde o peso dos sacos foi de 25 kg. O valor da função objetivo desse exemplar ficou em R\$82.369, sendo 17,3% maior que o Exe0. De maneira geral, o peso dos sacos influencia na demanda total em quilos, quando a comparação é feita sem mudança no número de sacos demandados. Quanto maior o peso dos sacos, maior é o volume extrusado e maiores são os custos de produção.

Tabela 20 – Variação na característica dos sacos.

Prob.	Parâm.	Valor Exe0	Novo Valor	<i>gap</i> Exe0	Novo <i>gap</i>	FO Exe0	Nova FO
Exe30	E_p	15 20	10,1 10,1	5,89%	0,2%	69688	53450
Exe31	E_p	15 20	15 15	5,89%	0,36%	69688	66732
Exe32	E_p	15 20	20 20	5,89%	11,36%	69688	72759
Exe33	E_p	15 20	25 25	5,89%	9,85%	69688	82369

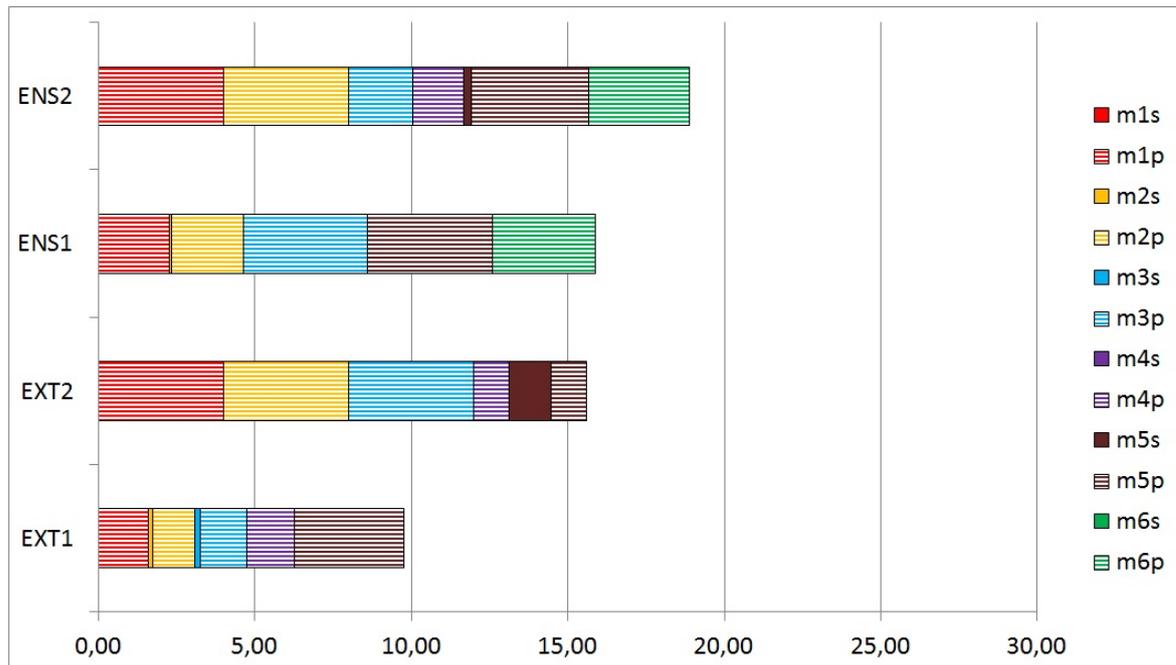


Figura 9 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe30.

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 21 – Solução do Exe30 - variáveis de produção.

Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da prod. (h)	Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da pro. (h)
w1111s1	1092,2	16384,1	2,2	w33113s6	94,8	1422	0,1
w1121s1	1680	25200	4	w3414s6	94,8	1422	0,1
w1121s2	1680	25200	4	w35114s6	94,8	1422	0,1
w2111s2	1092,2	21845,5	2,2	w42212s6	852,4	17049,2	2,3
w1123s3	864,5	12968,3	2	w4226s6	90,5	1810,7	0,2
w2113s3	1907,7	38154,4	3,9	w43213s6	69	1380	0,1
w1121s4	683,1	10247,5	1,6	w4424s6	69	1380	0,1
w32112s5	107,1	1607,1	0,2	w45214s6	69	1380	0,1
w3216s5	279,1	4187	0,5	x1211s1	7	28000	4
w3217s5	1188,1	17821,7	2,4	x5114s1	2	8000	1,6
w33113s5	115,1	1727,9	0,2	x121s2	7	28000	4
w3414s5	115,1	1727,9	0,2	x414s2	2	8000	1,3
w35114s5	115,1	1727,9	0,2	x123s3	7	28000	4
w4226s5	1106,9	22139,9	3	x2112s3	3	12000	1,5
w43213s5	80,9	1620	0,2	x1211s4	2	8000	1,1
w4424s5	80,9	1620	0,2	x217s4	3	12000	1,5
w45214s5	80,9	1620	0,2	x216s5	7	28000	3,5
w3216s6	1295,6	19434	2,6	x3213s5	2	8000	1,1

Tabela 22 – Solução do Exe30 - variáveis de *setup*.

Variável	Valor	Variável	Valor
\bar{z}_{1122}	1	z_{1122}	1
\bar{z}_{1123}	1	z_{1123}	1
\bar{z}_{1124}	1	z_{1124}	1
\bar{z}_{1212}	1	z_{2214}	1
\bar{z}_{1425}	1	z_{2215}	1
\bar{z}_{2213}	1	z_{2413}	1
\bar{z}_{3316}	1	z_{3125}	1
\bar{z}_{4426}	1	z_{4512}	1

4.1.5 Variação nos custos de produção, *setup* e armazenamento de partícula

Os exemplares Exe34 a Exe38 sofreram alteração nos custos em relação ao exemplar inicial, como está exposto na [Tabela 23](#). Em cada exemplar, o custo de uma parcela, que estava relacionado ao valor do microperíodo da variável, foi substituído pelo valor 1. O resultado mais eficiente foi do Exe37, no valor de R\$15.897,00 e *gap* de 2,38%.

A sequência de produção e o resultado das variáveis do Exe37 estão ilustrados nas [Figura 10](#) e [Tabela 24](#). Como não faz diferença produzir sacos no primeiro microperíodo ou no décimo segundo microperíodo, já que os custos são os mesmos, as variáveis w estão mais ociosas dentro dos microperíodos. A maior ocupação foi de 3,3 horas na variável w_{1118s6} .

As variáveis de *setup* com valor igual a 1 estão na [Tabela 25](#). Apenas 3 trocas de produto aconteceram nas extrusoras envolvendo partículas diferentes. O restante foi entre a mesma partícula, contribuindo para a redução dos custos finais.

O Exe37 utilizou 8 microperíodos nas ensacadeiras, a mesma quantidade do Exe0. Já nas extrusoras, 9 microperíodos foram usado pelo Exe37, 2 a mais que o problema inicial. Apesar da maior quantidade de microperíodos na extrusão, o custo unitário das 15.000 sacos produzidas proporcionou uma redução de 77,4% na resposta da função objetivo do Exe37 em relação ao Exe0. Portanto, os custos associados à variável w são os mais representativos no valor final da função objetivo.

Tabela 23 – Variação nos custos da função objetivo.

Prob.	Parâm.	Valor Exe0	Novo Valor	<i>gap</i> Exe0	Novo <i>gap</i>	FO Exe0	Nova FO
Exe34	S_{ikqs}	s	1	5,89%	0,03%	69688	68318
Exe35	SS_{ijqs}	s	1	5,89%	28,07%	69688	70432
Exe36	C_{iqs}	1	s	5,89%	25,02%	69688	71792
Exe37	CS_{pes}	s	1	5,89%	2,38%	69688	15897
Exe38	CSS_{rpes}	s	1	5,89%	5,85%	69688	68055

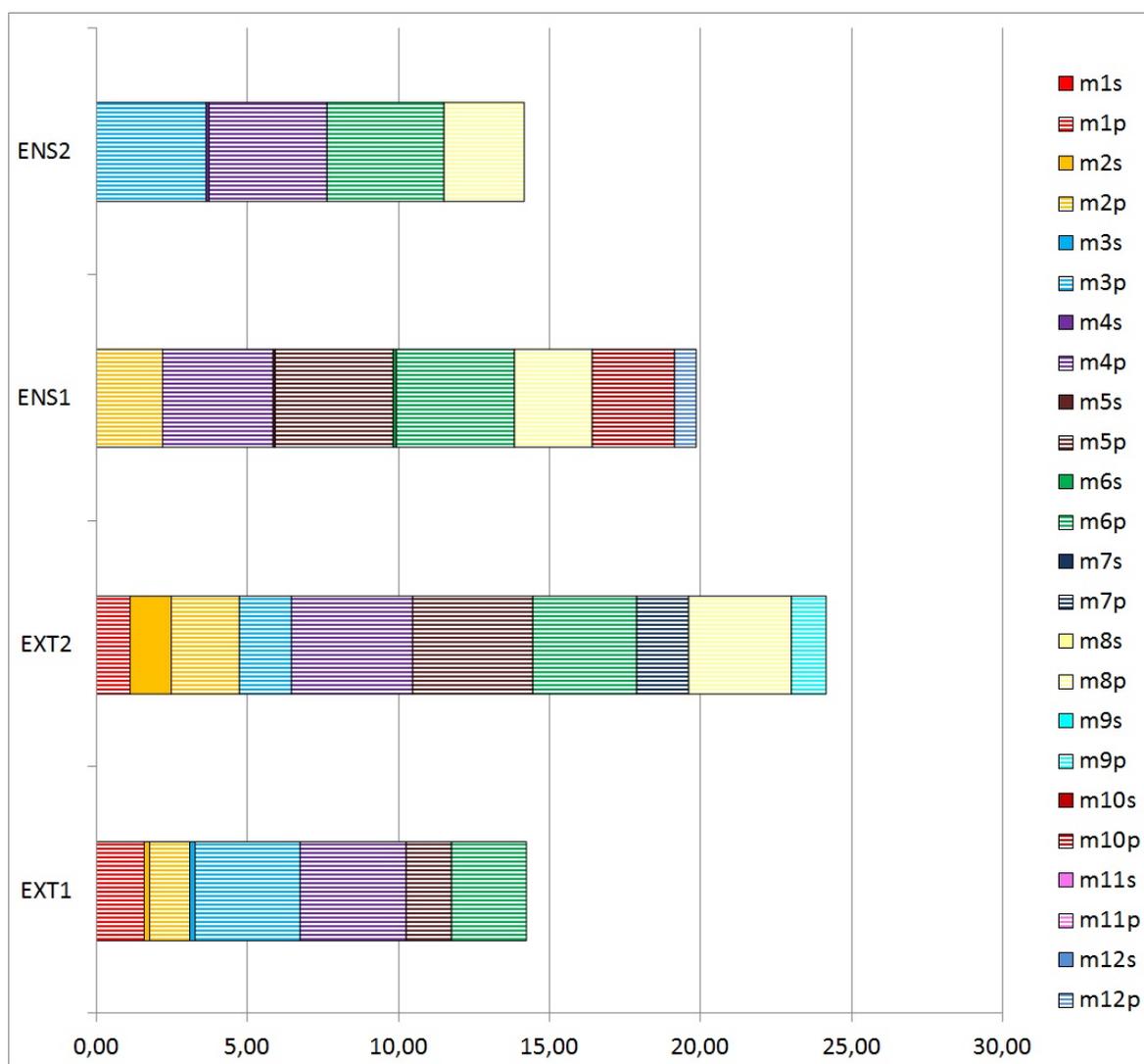


Figura 10 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe37.

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 24 – Solução do Exe37 - variáveis de produção.

Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da prod. (h)	Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da pro. (h)
w1119s2	1066,6	16000	2,2	w4412s8	65,4	1308	0,1
w32213s3	1258,4	18876	2,9	w45114s8	65,4	1308	0,1
w3323s3	92	1381,1	0,2	w1111s10	773,3	11600	1,6
w3422s3	92	1381,1	0,2	w1117s10	533,3	8000	1,1
w35214s3	92	1381,1	0,2	w3216s12	278,2	4173,9	0,5
w1115s4	946,6	14199,9	1,9	w3313s12	20,3	305,4	0
w1116s4	800	12000	1,6	w3412s12	20,3	305,4	0
w42213s4	1156,1	23123,9	3,2	w35114s12	20,3	305,4	0
w4323s4	84,5	1692	0,2	x323s1	2	8000	1,1
w4422s4	84,5	1692	0,2	x5114s1	2	8000	1,6
w45214s4	84,5	1692	0,2	x129s2	4	16000	2,2
w21112s5	1400	28000	2,9	x412s2	2	8000	1,3
w2115s5	479,9	9599,9	0,9	x126s3	3	12000	1,7
w1115s6	280	4200	0,5	x2113s3	7	28000	3,5
w1118s6	1600	24000	3,3	x125s4	7	28000	4
w3221s6	1333,3	20000	3,1	x2113s4	7	28000	3,5
w3323s6	97,5	1463,4	0,2	x1212s5	7	28000	4
w3422s6	97,5	1463,4	0,2	x216s5	3	12000	1,5
w35214s6	97,5	1463,4	0,2	x128s6	6	24000	3,4
w2121s8	519,9	10400	1,2	x211s6	5	20000	2,5
w2129s8	600	12000	1,4	x129s7	3	12000	1,7
w42113s8	700	14000	1,6	x121s8	6	24000	3,4
w4216s8	193,8	3876	0,4	x127s9	2	8000	1,1
w4313s8	65,4	1308	0,1				

Tabela 25 – Solução do Exe37 - variáveis de *setup*.

Variável	Valor	Variável	Valor
\bar{z}_{1215}	1	z_{1128}	1
\bar{z}_{2116}	1	z_{1129}	1
\bar{z}_{3424}	1	z_{1322}	1
z_{1123}	1	z_{2214}	1
z_{1124}	1	z_{2215}	1
z_{1125}	1	z_{2216}	1
z_{1126}	1	z_{2413}	1
z_{1127}	1	z_{4512}	1

4.1.6 Variação na quantidade de partículas nos tanques

A série de exemplares para teste, análise e validação do modelo matemático proposto termina com os exemplares Exe39 a Exe48, mostrados na [Tabela 26](#) e [Tabela 27](#), onde a quantidade de partículas no início do horizonte de planejamento é diferente de 0. No Exe39 apenas uma partícula está disponível e, ao longo dos exemplares, mais partículas se tornam disponíveis até chegar ao Exe48, com as 5 partículas disponíveis. O Exe48 obteve o melhor resultado, com R\$42.723,00 e *gap* de 0,06%.

A sequência de produção e as principais variáveis do Exe48 estão representadas na [Figura 11](#) e [Tabela 28](#). O produto PR3, que é multipartículas, foi produzido já no primeiro microperíodo, sem a necessidade de aguardar a produção das extrusoras, como nos exemplares anteriores. Isso também contribuiu para a produção das extrusoras ser otimizada. Quase todas as produções ocuparam 4 horas dentro do microperíodo. Apenas as variáveis x_{2114s3} e x_{1210s6} ocuparam 2 e 0,5 hora, respectivamente.

As variáveis de *setup* com valores não nulos estão na [Tabela 29](#). Nenhum *setup* nas extrusoras aconteceu entre partículas diferentes, contribuindo positivamente para a redução dos custos.

Partículas disponíveis no início do horizonte de planejamento permitem que as ensacadeiras iniciem o atendimento da demanda já no primeiro microperíodo, sem a necessidade de aguardar a produção das partículas provenientes das extrusoras. No Exe48 as extrusoras produziram 40.000 kg a menos que o Exe0 para atender a demanda inicial de sacos. Por isso o resultado da função objetivo foi 39,2% menor. Pode-se afirmar que quanto maior a disponibilidade de partículas necessárias para atender a programação no início do horizonte de planejamento, menores são os custos da função objetivo.

Tabela 26 – Variação na quantidade de partículas armazenadas nos tanques.

Prob.	Parâm.	Valor Exe0	Novo Valor	gap Exe0	Novo gap	FO Exe0	Nova FO
Exe39	X ₁₁₀	0	4000				
	X ₂₂₀	0	0				
	X ₃₃₀	0	0	5,89%	19,98%	69688	68608
	X ₄₄₀	0	0				
	X ₅₅₀	0	0				
Exe40	X ₁₁₀	0	8000				
	X ₂₂₀	0	0				
	X ₃₃₀	0	0	5,89%	7,78%	69688	66306
	X ₄₄₀	0	0				
	X ₅₅₀	0	0				
Exe41	X ₁₁₀	0	8000				
	X ₂₂₀	0	4000				
	X ₃₃₀	0	0	5,89%	23,06%	69688	66818
	X ₄₄₀	0	0				
	X ₅₅₀	0	0				
Exe42	X ₁₁₀	0	8000				
	X ₂₂₀	0	8000				
	X ₃₃₀	0	0	5,89%	25,35%	69688	65530
	X ₄₄₀	0	0				
	X ₅₅₀	0	0				
Exe43	X ₁₁₀	0	8000				
	X ₂₂₀	0	8000				
	X ₃₃₀	0	4000	5,89%	22,61%	69688	56250
	X ₄₄₀	0	0				
	X ₅₅₀	0	0				

Tabela 27 – Variação na quantidade de partículas armazenadas nos tanques.

Prob.	Parâm.	Valor Exe0	Novo Valor	gap Exe0	Novo gap	FO Exe0	Nova FO
Exe44	X ₁₁₀	0	8000	5,89%	10,26%	69688	51794
	X ₂₂₀	0	8000				
	X ₃₃₀	0	8000				
	X ₄₄₀	0	0				
	X ₅₅₀	0	0				
Exe45	X ₁₁₀	0	8000	5,89%	13,61%	69688	50654
	X ₂₂₀	0	8000				
	X ₃₃₀	0	8000				
	X ₄₄₀	0	4000				
	X ₅₅₀	0	0				
Exe46	X ₁₁₀	0	8000	5,89%	5,77%	69688	47222
	X ₂₂₀	0	8000				
	X ₃₃₀	0	8000				
	X ₄₄₀	0	8000				
	X ₅₅₀	0	0				
Exe47	X ₁₁₀	0	8000	5,89%	2,81%	69688	44428
	X ₂₂₀	0	8000				
	X ₃₃₀	0	8000				
	X ₄₄₀	0	8000				
	X ₅₅₀	0	4000				
Exe48	X ₁₁₀	0	8000	5,89%	0,06%	69688	42723
	X ₂₂₀	0	8000				
	X ₃₃₀	0	8000				
	X ₄₄₀	0	8000				
	X ₅₅₀	0	8000				

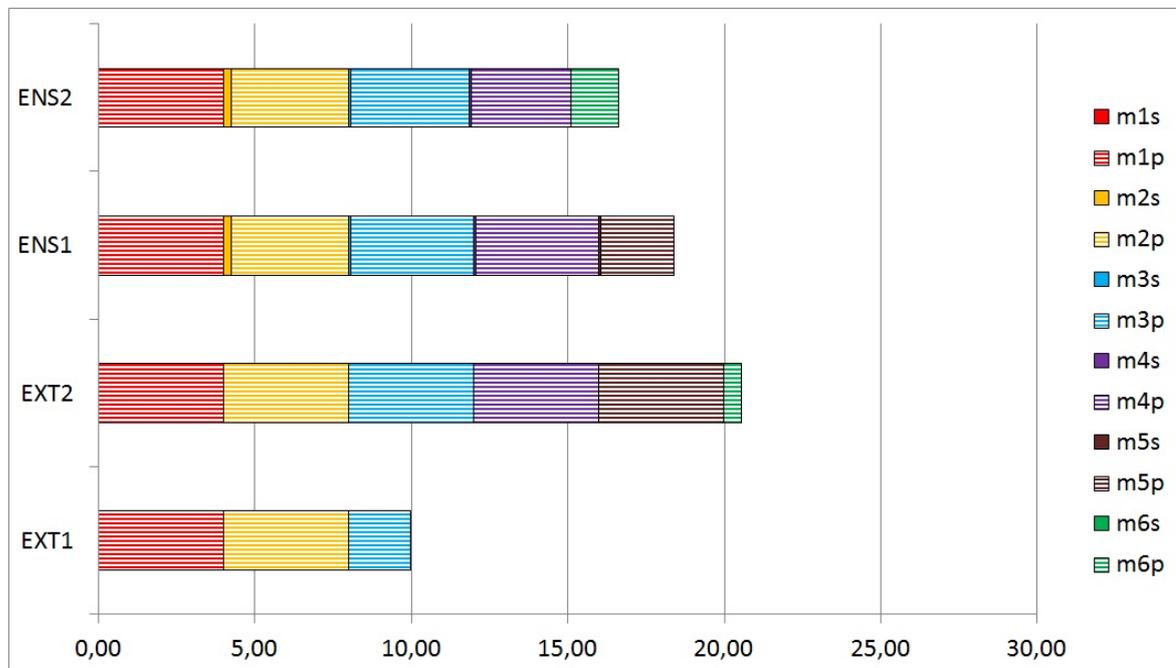


Figura 11 – Programação das extrusoras e ensacadeiras (horas) - Exe48.

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 28 – Solução do Exe48 - variáveis de produção.

Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da prod. (h)	Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da pro. (h)
w1121s1	533,3	8000	1,2	w3525s3	94,8	1422	0,2
w1124s1	1146,6	17199,9	2,7	w1111s4	1880	28200	3,9
w3212s1	257,3	3859,9	0,5	w42212s4	502,4	10049,9	1,3
w3215s1	1317	19755,9	2,7	w42214s4	440,5	8810	1,2
w3313s1	115,2	1728	0,2	w4323s4	69	1380	0,1
w3414s1	115,1	1727,9	0,2	w4424s4	69	1380	0,1
w3515s1	115,1	1727,9	0,2	w4525s4	68,9	1379,9	0,1
w11113s2	1080	16200	2,2	w2111s5	100	2000	0,2
w1114s2	720	10800	1,5	w2112s5	1020	20400	2,1
w42212s2	900	18000	2,5	w11210s6	266,6	3999,9	0,6
w4222s2	206,9	4139,9	0,5	w1122s6	373,3	5599,9	0,8
w4323s2	80,9	1620	0,2	x124s1	7	28000	4
w4424s2	80,9	1620	0,2	x215s1	8	32000	4
w4525s2	80,9	1620	0,2	x1213s2	7	28000	4
w21113s3	590	11800	1,2	x2112s2	8	32000	4
w2111s3	1290	25800	2,6	x121s3	7	28000	4
w32214s3	479,3	7189,9	1,1	x2114s3	4	16000	2
w3225s3	816,2	12244	1,9	x121s4	7	28000	4
w3323s3	94,8	1422	0,2	x122s5	7	28000	4
w3424s3	94,8	1422	0,2	x1210s6	1	4000	0,5

Tabela 29 – Solução do Exe48 - variáveis de *setup*.

Variável	Valor	Variável	Valor
\bar{z}_{1213}	1	z_{1122}	1
\bar{z}_{1215}	1	z_{1123}	1
\bar{z}_{1422}	1	z_{1124}	1
\bar{z}_{2114}	1	z_{1125}	1
\bar{z}_{3112}	1	z_{1126}	1
\bar{z}_{3424}	1	z_{2212}	1
\bar{z}_{4323}	1	z_{2213}	1

4.2 Comparação da produção: Modelo matemático vs Indústria Alfa

Com o objetivo de avaliar o comportamento do modelo matemático proposto em situações reais de produção, foram escolhidos dois dias com elevado volume de produção nas ensacadeiras da indústria Alfa, no período de um ano. Nesses dias, as interrupções não planejadas, como falta de matéria-prima, manutenção corretiva, entre outros, impactaram pouco no desempenho da fábrica. Isso permitiu o cumprimento da programação de produção e *setups* com maior acuracidade. A produção de sacos de produtos desses dois dias foi inserida no modelo matemático como demanda de produção.

4.2.1 Produção do dia A

Na produção do dia A, foram produzidos 546.195 quilos no ensaque e 524.923 quilos na extrusão. A [Tabela 30](#) contém o nome, o peso, a demanda e a proporção de partículas para cada tipo de produto. O custo para troca de partículas e produtos estão indicados na [Tabela 31](#) e [Tabela 32](#). O tempo de preparação nas extrusoras e ensacadeiras estão na [Tabela 33](#) e [Tabela 34](#). Os custos adotados estão atrelados aos microperíodos e à duração de *setup* entre os produtos e partículas. Para produtos ou partículas de famílias diferentes, o custo é de R\$100,00. Para uma mesma família o custo é de R\$10,00. Se a troca ocorrer no terceiro microperíodo entre partículas de uma mesma família por exemplo, o custo será de R\$30,00. Isso acontece com produtos e partículas em qualquer microperíodo. A taxa de produção das extrusoras e ensacadeiras está representada na [Tabela 35](#) e [Tabela 36](#). A condição inicial de cada tanque está na [Tabela 37](#). Toda partícula que está no tanque mas não compõe um produto final da produção do dia A está caracterizada como PA0. Foi considerado um macroperíodo dividido em 12 microperíodos com 4 horas de duração cada. A função objetivo foi moldada para minimizar os custos com *setups* e antecipar a produção, como foi feito no Prob0.

Tabela 30 – Produção do dia A.

Nome	Peso do saco (kg)	Produção (sacos)	Comp.	Nome	Peso do saco (kg)	Produção (sacos)	Comp.
PR1	25	621	100% PA1	PR7	20	5186	100% PA6
PR2	25	1218	100% PA2	PR8	15	471	100% PA7
PR3	25	2633	100% PA3	PR9	15	4177	100% PA8
PR4	25	2646	100% PA2	PR10	20	3399	100% PA8
PR5	25	3783	100% PA4	PR11	15	820	100% PA9
PR6	15	1330	100% PA5				

Tabela 31 – Custos para troca de partícula
na extrusora - Produção do dia A.

	PA1	PA2	PA3	PA4	PA5	PA6	PA7	PA8	PA9
PA1	1	100	100	100	100	100	100	100	100
PA2	100	1	10	100	100	100	100	100	100
PA3	100	10	1	100	100	100	100	100	100
PA4	100	100	100	1	100	100	100	100	100
PA5	100	100	100	100	1	100	100	100	100
PA6	100	100	100	100	100	1	100	100	100
PA7	100	100	100	100	100	100	1	100	100
PA8	100	100	100	100	100	100	100	1	10
PA9	100	100	100	100	100	100	100	10	1

Tabela 32 – Custo para troca de produto
na ensacadeira - Produção do dia A.

	PR1	PR2	PR3	PR4	PR5	PR6	PR7	PR8	PR9	PR10	PR11
PR1	1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
PR2	100	1	10	10	100	100	100	100	100	100	100
PR3	100	10	1	10	100	100	100	100	100	100	100
PR4	100	10	10	1	100	100	100	100	100	100	100
PR5	100	100	100	100	1	100	100	100	100	100	100
PR6	100	100	100	100	100	1	100	100	100	100	100
PR7	100	100	100	100	100	100	1	100	100	100	100
PR8	100	100	100	100	100	100	100	1	100	100	100
PR9	100	100	100	100	100	100	100	100	1	10	100
PR10	100	100	100	100	100	100	100	100	10	1	100
PR11	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	1

Tabela 33 – Tempo de preparação da extrusora
para troca de partícula (horas) - Produção do dia A.

	PA1	PA2	PA3	PA4	PA5	PA6	PA7	PA8	PA9
PA1	0	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33
PA2	1,33	0	0,17	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33
PA3	1,33	0,17	0	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33
PA4	1,33	1,33	1,33	0	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33
PA5	1,33	1,33	1,33	1,33	0	1,33	1,33	1,33	1,33
PA6	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	0	1,33	1,33	1,33
PA7	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	0	1,33	1,33
PA8	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	0	0,17
PA9	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	0,17	0

Tabela 37 – Condição inicial dos tanques - Produção do dia A.

Tanque	Partícula	kg	Tanque	Partícula	kg	Tanque	Partícula	kg
TQ1	PA0	1250	TQ17	PA0	13750	TQ33	PA8	1250
TQ2	vazio	0	TQ18	PA0	7500	TQ34	vazio	0
TQ3	PA0	12500	TQ19	PA0	13750	TQ35	vazio	0
TQ4	PA0	3750	TQ20	PA0	11250	TQ36	vazio	0
TQ5	PA0	8750	TQ21	PA0	12500	TQ37	vazio	0
TQ6	PA0	11250	TQ22	PA0	2500	TQ38	PA4	6250
TQ7	PA0	12500	TQ23	PA0	10000	TQ39	PA4	11250
TQ8	PA0	6250	TQ24	PA0	8750	TQ40	PA4	12500
TQ9	PA0	3750	TQ25	PA0	5000	TQ41	vazio	0
TQ10	PA0	11250	TQ26	PA5	8750	TQ42	vazio	0
TQ11	PA7	3750	TQ27	PA0	5000	TQ43	PA2	7500
TQ12	PA0	2500	TQ28	PA5	11250	TQ44	vazio	0
TQ13	vazio	0	TQ29	PA8	3750	TQ45	vazio	0
TQ14	PA0	7500	TQ30	PA8	1250	TQ46	vazio	0
TQ15	PA8	1250	TQ31	PA0	1250	TQ47	vazio	0
TQ16	vazio	0	TQ32	vazio	0			

4.2.1.1 Restrições

Algumas restrições extras foram necessárias para modelar o dia A. A extrusora 4 estava limitada a produzir apenas as partículas 6, 8 e 9. As características da partícula 7 eram atendidas apenas na extrusora 2. A partícula 5 poderia ser fabricada nas extrusoras 1, 2 e 3. As partículas 1, 2, 3 e 4 só poderiam ser fabricadas nas extrusoras 1 e 3. A extrusora 3 só poderia abastecer os tanques 1 a 16 e 29 a 47 e a extrusora 4, os tanques 13 a 16 e 29 a 47. As extrusoras 1 e 2 eram livres para abastecer qualquer tanque. As ensacadeiras 1, 2 e 3 só poderiam receber dos tanques 1 a 16 e fabricar os produtos 7 a 11. As ensacadeiras 4, 5 e 6 também estavam limitadas aos produtos 7 a 11, porém eram abastecidas apenas pelos tanques 17 a 32. Os produtos 1 a 6 só poderiam ser fabricados nas ensacadeiras 7 e 8, que recebiam dos tanques 33 a 47. As restrições de partículas nas extrusoras e produtos nas ensacadeiras estão representadas na [Figura 12](#).

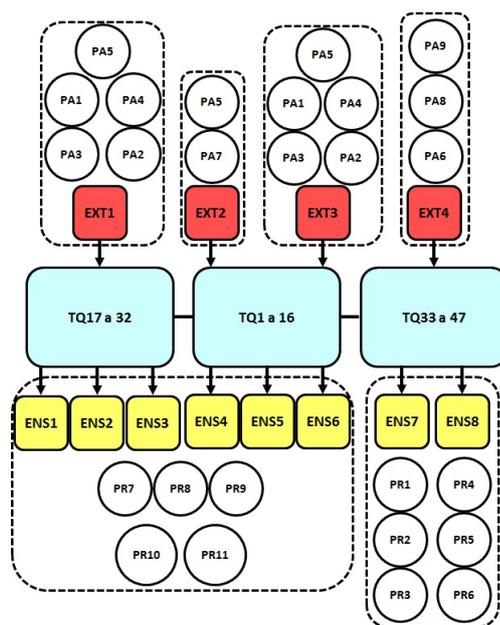


Figura 12 – Restrições de partículas e produtos - Produção do dia A.

Fonte: Produzido pelo autor.

4.2.1.2 Resultados

O modelo matemático foi escrito no formato lp com o auxílio do gerador, já com as restrições da Seção 4.2.1.1 inseridas. Foi utilizado o *solver* CPLEX e a melhor solução obtida em 7.200 segundos tem um valor de função objetivo de R\$ 72.881,83, apresentando gap de 24,66%, 165 variáveis não nulas das 506.380 disponíveis e 72.666 restrições. Foram produzidos 496.000 kg nas extrusoras e 27.175 sacos (664.425 kg) nas ensacadeiras, utilizando 7 microperíodos nas extrusoras e 8 nas ensacadeiras. A [Figura 13](#) mostra a sequência de produção e *setups* dos produtos e partículas. Apesar de haver partículas disponíveis, a extrusora EXT1 necessitou de quase 25 horas para atender a demanda de produtos no ensaque.

As extrusoras EXT1 e EXT4 foram responsáveis por 71% da produção da extrusão, de acordo com a [Figura 15](#). Nas ensacadeiras a proporção de volume produzido foi mais uniforme com destaque para as máquinas ENS7 e ENS8, conforme [Figura 17](#). Foram utilizados 15 tanques para armazenar os produtos provenientes das extrusoras. A [Tabela 38](#) mostra a quantidade produzida de cada partícula e extrusora.

Os valores das variáveis de produção em unidades estão na coluna "Valor em unid." e em quilos na coluna "Valor em peso (kg)". O tempo gasto com cada produção está na coluna "Dur. da prod. (h)". As variáveis w e x recebem a letra s no final do nome para facilitar a identificação do microperíodo e tanque. A ensacadeira ENS4 foi a única utilizada

apenas no primeiro microperíodo. Ela conseguiu entregar 1.133 sacos, provenientes dos tanques 26 e 28, conforme variáveis $w_{65426s1}$ e $w_{65428s1}$. Isso trouxe redução de custos para a função objetivo pois produções em microperíodos iniciais são mais baratas. Outra contribuição para a minimização dos custos foi a utilização das 4 horas disponíveis no microperíodo para produção, tanto em ensacadeiras como extrusoras. As variáveis $w_{98244s1}$ e x_{1340s5} são exemplos.

Para avaliar o planejamento sem a modelagem matemática, as variáveis de produção x e w foram inseridas no modelo como parâmetros, trazendo os resultados baseados na sequência e quantidade definidas pelo planejador nas extrusoras e ensacadeiras. O restante das variáveis foram calculadas dentro da modelagem de acordo com os valores de x e w . A função objetivo ficou em R\$ 106.437,33 e 358 variáveis não nulas. Foram necessários 9 microperíodos para a demanda das ensacadeiras, com 78% da produção nas extrusoras 1 e 4 e 76% nas ensacadeiras 4, 5, 6, 7 e 8, de acordo com a [Figura 16](#) e [Figura 18](#). A EXT2 foi pouco utilizada, trabalhando em 2 microperíodos, como pode ser observado na [Figura 14](#). Por outro lado, a EXT1 necessitou de pouco mais de 25 horas para atender a demanda. Por isso ela trabalhou até o microperíodo 9. Os custos foram afetados negativamente, pois quanto maior é o microperíodo, mais cara fica a produção.

O valor da função objetivo obtido pelo modelo proposto foi 32% menor quando comparado com a solução feita pelo planejador da indústria. A sequência encontrada no modelo permitiu que a demanda fosse atendida utilizando 2 microperíodos a menos nas extrusoras e 1 a menos nas ensacadeiras. Por isso o custo total teve uma queda.

Tabela 38 – Solução do exemplo - Produção do dia A.

Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da prod. (h)	Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da pro. (h)
w108615s1	62,5	1562,5	0,1	w42811s4	320	8000	0,3
w108630s1	62,5	1562,5	0,1	w76136s4	1920	48000	4
w108644s1	75	1875	0,1	w76536s4	680	17000	1,4
w119545s1	1066,6	26666,6	1,4	w87238s4	533,3	13333,3	2,2
w4282s1	1120	28000	1,3	w11840s5	639,9	15999,9	1,5
w42843s1	202	5050	0,2	w33713s5	960	24000	1
w54738s1	10	250	0	w33742s6	1120	16800	1,2
w54739s1	450	11250	0,9	w33830s7	352,9	7059,9	0,3
w54740s1	1460	36500	3	w33730s8	200	3000	0,2
w65426s1	383,3	9583,3	1,2	x212s1	7	28000	4
w65428s1	750	18750	2,5	x4340s1	6	24000	3,6
w87311s1	250	6250	1	x8444s1	13	52000	3,9
w98129s1	250	6250	0,5	x9245s1	4	16000	2
w98133s1	83,3	2083,3	0,1	x2132s2	7	28000	4
w98144s1	1446,6	36166,6	3	x4344s2	6	24000	3,6
w98244s1	1920	48000	4	x6242s2	4	16000	2,2
w108129s2	1645	41125	3,9	x8429s2	13	52000	3,9
w108629s2	597,2	14931,2	1,4	x2143s3	7	28000	4
w22832s2	1120	28000	1,3	x4346s3	5	20000	3
w22843s2	98	2450	0,1	x6444s3	9	36000	2,5
w54738s2	240	6000	0,5	x8239s3	5	20000	2,5
w54744s2	960	24000	2	x2111s4	2	8000	1,1
w65326s2	200	5000	0,6	x6436s4	13	52000	3,7
w76542s2	800	20000	1,6	x7238s4	2	8000	2
w98229s2	476,9	11925	0,9	x1340s5	4	16000	2,6
w108639s3	1000	25000	2,3	x3113s5	6	24000	3,4
w42743s3	1120	28000	1,3	x3142s6	7	28000	4
w54846s3	800	20000	1,6	x3130s7	4	16000	2,2
w76444s3	1800	45000	3,7				

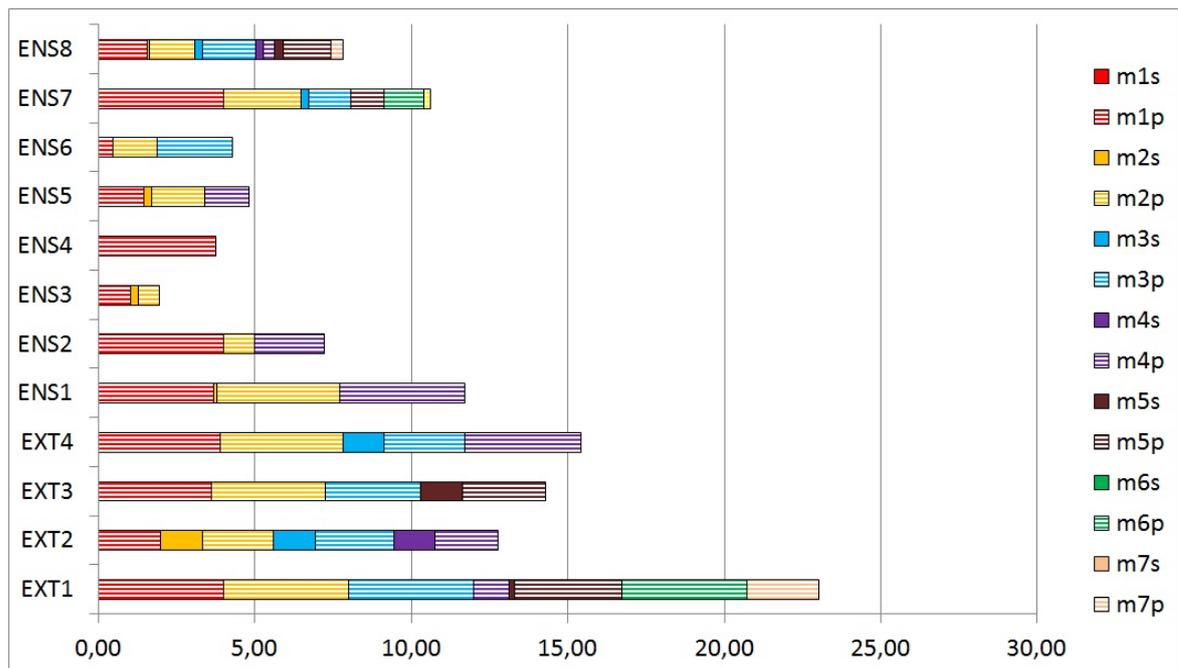


Figura 13 – Planejamento das extrusoras e ensacadeiras (modelo matemático) (horas) - Produção do dia A.

Fonte: Produzido pelo autor.

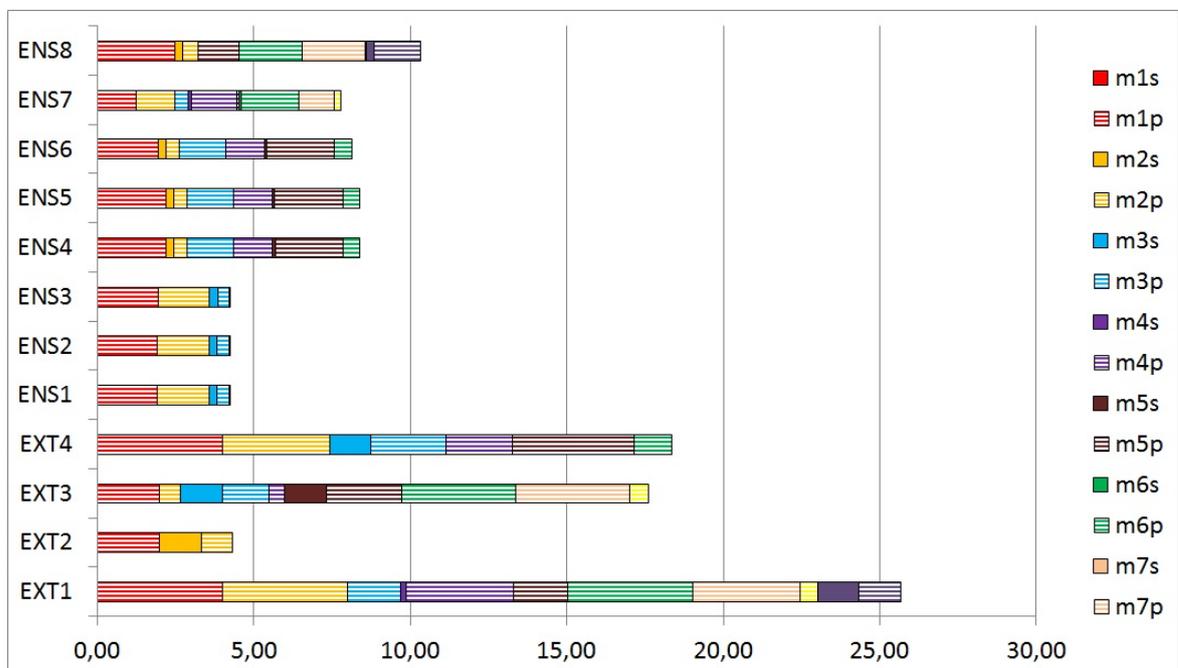


Figura 14 – Planejamento das extrusoras e ensacadeiras (indústria Alfa) (horas) - Produção do dia A.

Fonte: Produzido pelo autor.

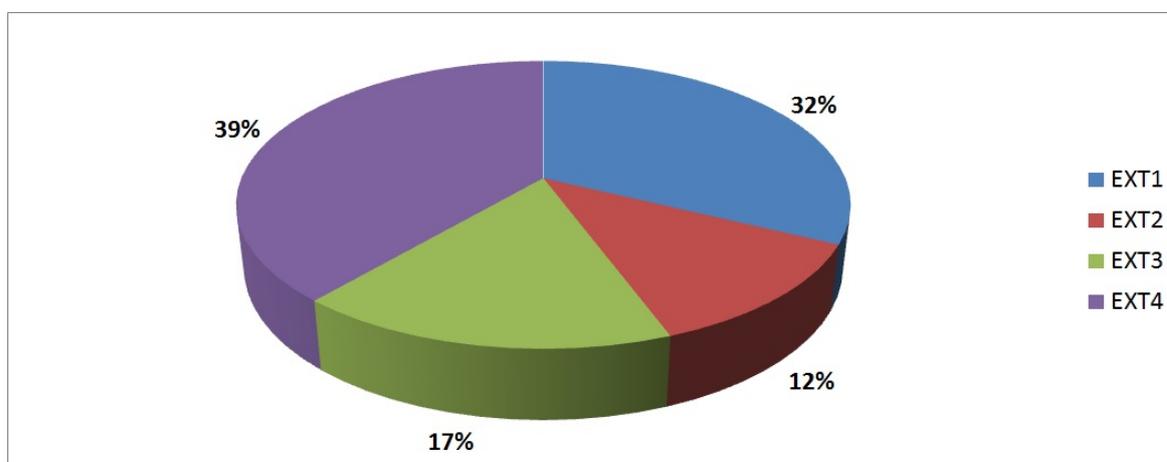


Figura 15 – Produção das extrusoras (modelo matemático) - Produção do dia A.

Fonte: Produzido pelo autor.

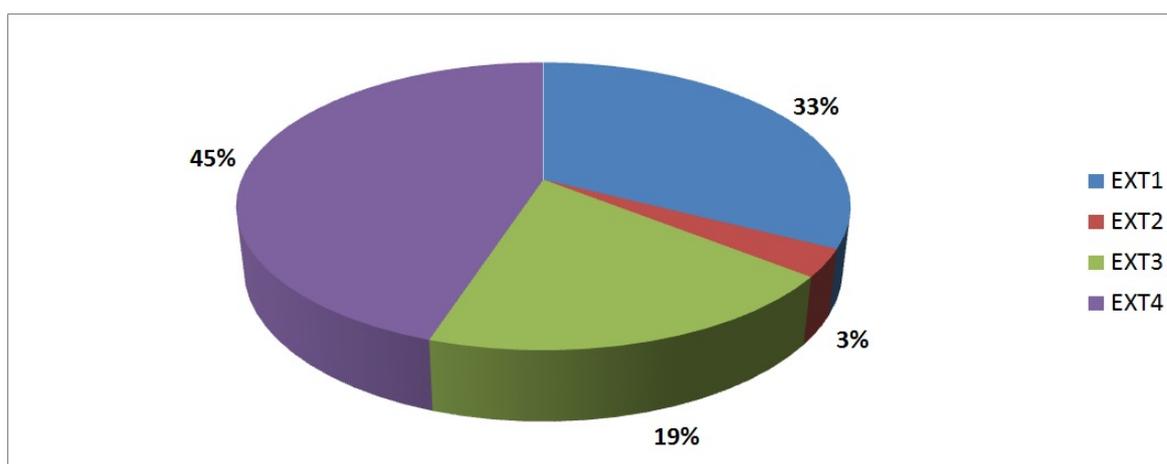


Figura 16 – Produção das extrusoras (indústria Alfa) - Produção do dia A.

Fonte: Produzido pelo autor.

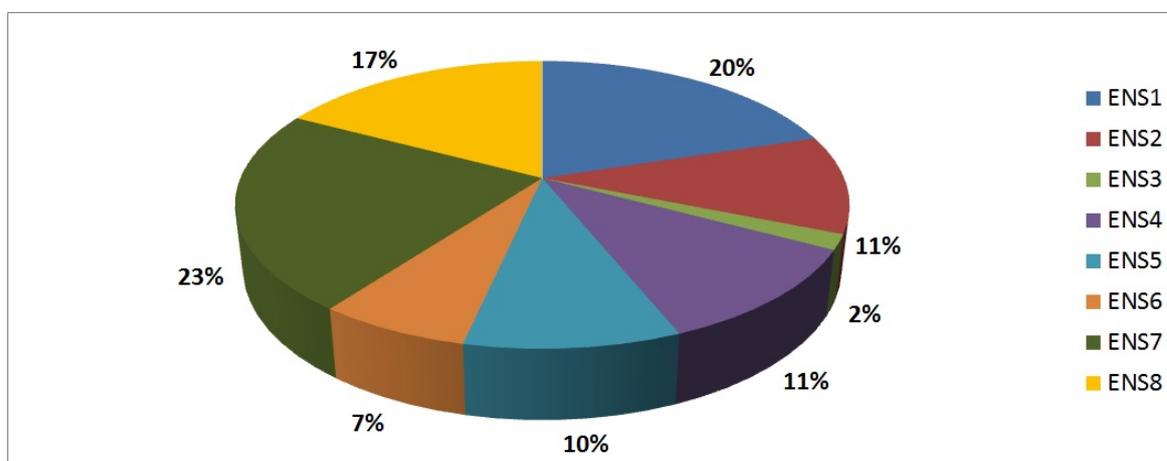


Figura 17 – Produção das ensacadeiras (modelo matemático) - Produção do dia A.

Fonte: Produzido pelo autor.

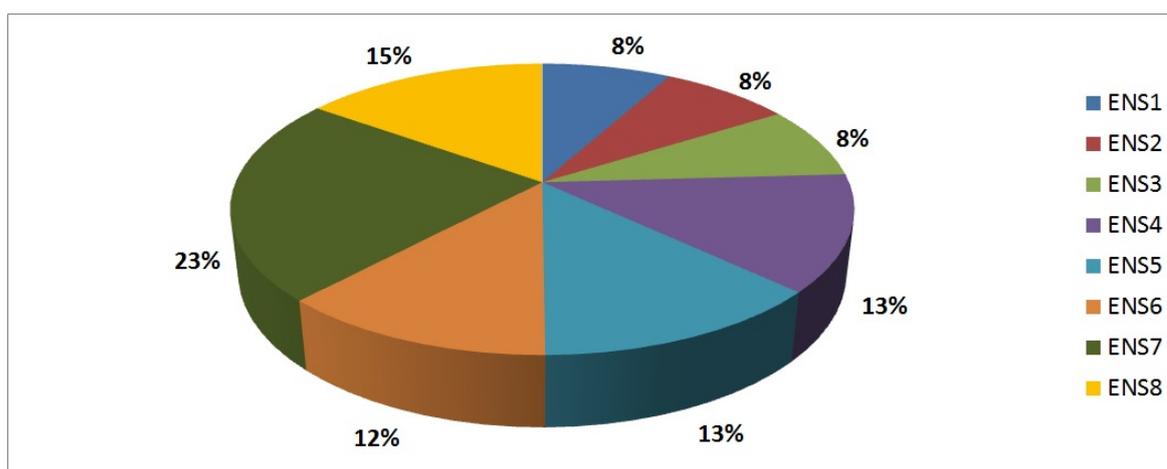


Figura 18 – Produção das ensacadeiras (indústria Alfa) - Produção do dia A.

Fonte: Produzido pelo autor.

4.2.2 Produção do dia B

Na produção do dia B, foram produzidos 481.685 quilos nas ensacadeiras e 421.013 quilos nas extrusoras. A [Tabela 39](#) contém o nome, o peso, a demanda e a proporção de partículas para cada produto. É possível observar a presença de produtos multipartículas, o que torna o problema mais complexo para ser resolvido em relação ao problema anterior. Os custos de troca de partículas e produtos estão na [Tabela 40](#) e [Tabela 41](#). Os tempos de preparação das extrusoras e ensacadeiras estão na [Tabela 42](#) e [Tabela 43](#). A taxa de produção das ensacadeiras e extrusoras estão na [Tabela 44](#) e [Tabela 45](#). A condição inicial dos 47 tanques está descrita na [Tabela 46](#). A partícula PA0 não compõe os produtos que foram fabricados no dia B. A função objetivo e a quantidade de microperíodos foram considerados de forma análoga ao dia A.

Tabela 39 – Produção do dia B.

Nome	Peso do saco (kg)	Produção (sacos)	Comp.	Nome	Peso do saco (kg)	Produção (sacos)	Comp.
PR1	25	3303	100% PA1	PR8	20	800	100% PA7
PR2	25	3090	100% PA2	PR9	15	650	100% PA8
PR3	25	2088	100% PA3	PR10	20	2000	100% PA9
PR4	25	1500	100% PA4	PR11	15	4000	100% PA9
PR5	25	1216	100% PA5	PR12	20	1125	90% PA10 10% PA11
PR6	25	255	100% PA4	PR13	20	1273	82% PA12 6% PA13 6% PA14 6% PA15
PR7	25	81	100% PA6	PR14	15	1310	82% PA12 6% PA13 6% PA14 6% PA15

Tabela 44 – Taxa de produção das ensacadeiras (min/saco) - Produção do dia B.

Nome produto	ENS1	ENS2	ENS3	ENS4	ENS5	ENS6	ENS7	ENS8
PR1	0	0	0	0	0	0	1/12	1/12
PR2	0	0	0	0	0	0	1/12	1/12
PR3	0	0	0	0	0	0	1/8	1/8
PR4	0	0	0	0	0	0	1/9	1/9
PR5	0	0	0	0	0	0	1/12	1/12
PR6	0	0	0	0	0	0	1/9	1/9
PR7	0	0	0	0	0	0	1/8	1/8
PR8	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0
PR9	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	0	0
PR10	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	0	0
PR11	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0
PR12	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	0	0
PR13	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	0	0
PR14	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	0	0

Tabela 45 – Taxa de produção das extrusoras (hora/kg) - Produção do dia B.

Nome partícula	EXT1	EXT2	EXT3	EXT4
PA1	0	0	0	1/14000
PA2	0	0	0	1/13900
PA3	1/6700	1/6700	1/6700	0
PA4	1/6700	1/6700	1/6700	0
PA5	0	0	0	1/12000
PA6	1/7000	1/7000	1/7000	0
PA7	1/6000	1/6000	1/6000	0
PA8	1/6200	1/6200	1/6200	0
PA9	0	0	0	1/16000
PA10	1/6000	1/6000	1/6000	0
PA11	1/6000	1/6000	1/6000	0
PA12	1/5500	1/5500	1/5500	0
PA13	1/6400	1/6400	1/6400	0
PA14	1/7300	1/7300	1/7300	0
PA15	1/6000	1/6000	1/6000	0

Tabela 46 – Condição inicial dos tanques Produção do dia B.

Tanque	Partícula	kg	Tanque	Partícula	kg	Tanque	Partícula	kg
TQ1	PA12	13750	TQ17	PA10	12500	TQ33	vazio	0
TQ2	PA12	5000	TQ18	PA0	3750	TQ34	PA9	13750
TQ3	PA0	10000	TQ19	PA11	6250	TQ35	PA9	13750
TQ4	PA15	2500	TQ20	PA0	11250	TQ36	PA9	13750
TQ5	PA14	11250	TQ21	PA14	2500	TQ37	PA9	10000
TQ6	PA13	11250	TQ22	PA13	1250	TQ38	vazio	0
TQ7	PA0	8750	TQ23	PA0	3750	TQ39	PA3	5000
TQ8	PA15	12500	TQ24	PA0	8750	TQ40	vazio	0
TQ9	PA13	6250	TQ25	PA10	10000	TQ41	PA9	13750
TQ10	PA12	12500	TQ26	PA0	8750	TQ42	PA9	10000
TQ11	vazio	0	TQ27	PA7	6250	TQ43	vazio	0
TQ12	vazio	0	TQ28	PA7	13750	TQ44	PA1	6250
TQ13	PA9	7500	TQ29	PA0	13750	TQ45	vazio	0
TQ14	PA9	5000	TQ30	vazio	0	TQ46	vazio	0
TQ15	PA9	13750	TQ31	vazio	0	TQ47	vazio	0
TQ16	PA0	11250	TQ32	vazio	0			

1 e 4 foram responsáveis por 94% dos 312.000 quilos produzidos na extrusão, conforme [Figura 22](#). As ensacadeiras 7 e 8 produziram 59% dos 486.960 quilos do ensaque, de acordo com o [Figura 23](#). Como já existiam partículas no início do horizonte de planejamento, as extrusoras produziram menos em relação às ensacadeiras. Para armazenar a produção das extrusoras, 12 tanques foram utilizados. A quantidade de cada partícula e produto está descrita na [Tabela 47](#). Os valores das variáveis de produção em unidades estão na coluna "Valor em unid." e em quilos na coluna "Valor em peso (kg)". A duração de cada produção está na coluna "Dur. da prod. (h)". As variáveis w e x recebem a letra s e q no nome para facilitar a separação entre microperíodo, tanque e máquina. Os produtos PR13 e PR14, que são multipartículas, foram produzidos já nos primeiros 2 microperíodos devido à disponibilidade das partículas no tanque. Com isso, o tanque 1 foi esvaziado no segundo microperíodo, considerando os resultados das variáveis $w_{14i123q1s1}$ e $w_{13i123q1s2}$. No microperíodo 3, o tanque estava vazio e recebeu a produção da extrusora EXT1, de acordo com a variável x_{41q1s3} . Portanto o modelo respeitou uma restrição importante de qualidade, não permitindo o encontro de partículas diferentes dentro do mesmo tanque. O tempo disponível para as ensacadeiras ENS1, 2 e 5 no primeiro microperíodo foi completamente convertido em produção, analisando a [Figura 20](#). Foi uma importante contribuição para diminuir a demanda a ser entregue nos microperíodos posteriores e diminuir os custos finais por causa do grande volume feito já nas primeiras 4 horas.

Novamente para avaliar o planejamento sem a modelagem matemática, as variáveis de produção x e w foram inseridas no modelo como parâmetros, trazendo os resultados baseados na sequência e quantidade definidas pelo planejador nas extrusoras e ensacadeiras. As variáveis y , \bar{y} , v , z e \bar{z} foram calculadas pela modelagem com base nos valores de x e w . O resultado da função objetivo foi de R\$60.270,52 e 529 variáveis não nulas. Foram necessários 6 microperíodos para atender a demanda, dos 12 disponíveis, com 94% da produção nas extrusoras 1 e 4, a mesma quantidade apresentada pela modelagem, e 59% nas ensacadeiras 7 e 8, conforme [Figura 22](#) e [Figura 24](#). A produção das extrusoras no planejamento da indústria Alfa é a mesma da modelagem, tanto em volume como na sequência de produção, porque a sequência e dimensionamento dos lotes está otimizado. Já no setor de ensaque, apenas nas ensacadeiras ENS7 e 8 houve produção acima de 2 horas no primeiro microperíodo, de acordo com a [Figura 21](#). Não foi possível utilizar completamente as 4 horas disponíveis nos microperíodos para produzir sacos nas ensacadeiras.

O valor da função objetivo do modelo proposto foi 21% menor que a solução que usa o sequenciamento do planejador da indústria. Apesar da quantidade de microperíodos ser a mesma nos dois casos, o volume produzido no primeiro microperíodo fez a diferença no custo final. Enquanto no sequenciamento feito pelo planejador foram produzidos 129.770 kg nas ensacadeiras, a sequência resultante do modelo proposto entregou 227.000 kg. Como fica mais caro produzir ao longo dos microperíodos, a sequência resultante do modelo ficou mais barata.

Tabela 47 – Solução do exemplo - Produção do dia B.

Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da prod. (h)	Variável	Valor em unid.	Valor em peso (kg)	Dur. da pro. (h)
w10i95q13s1	375	7500	0,8	w13i153q4s2	66	1321	0,1
w10i95q14s1	250	5000	0,5	w13i153q8s2	10,3	206,5	0
w10i95q15s1	295	5900	0,7	w1i18q43s2	960	24000	1,3
w10i95q36s1	687,5	13750	1,6	w3i37q11s2	928	23200	1,9
w10i95q37s1	72,5	1450	0,1	w8i72q27s2	112,5	2250	0,4
w11i91q34s1	916,6	13750	2,5	w8i72q28s2	687,5	13750	2,8
w11i91q37s1	523,3	7850	1,4	w9i81q32s2	650	9750	1,5
w11i92q15s1	523,3	7850	1,4	w2i28q30s3	2080	52000	2,8
w11i92q35s1	916,6	13750	2,5	w4i47q1s3	640	16000	1,1
w11i96q37s1	46,6	699,9	0,1	w2i28q14s4	1010	25250	1,4
w11i96q41s1	916,6	13750	2,5	w4i47q33s4	860	21500	1,5
w11i96q42s1	156,6	2349,9	0,4	w5i58q44s5	1280	32000	1,7
w12i104q17s1	512,5	10250	1	w6i47q33s5	95	2375	0,1
w12i104q25s1	500	10000	1	w6i47q41s5	159,9	3999,9	0,2
w12i114q19s1	112,5	2250	0,2	w7i67q46s6	80,9	2025	0,1
w14i123q1s1	358,1	5372,8	0,5	x123q2s1	2	8000	1,4
w14i123q2s1	716	10740,2	1	x14q44s1	14	56000	4
w14i133q22s1	78,5	1179	0,1	x31q39s1	6	24000	3,5
w14i143q21s1	78,5	1179	0,1	x82q32s1	3	12000	1,9
w14i153q4s1	78,5	1179	0,1	x14q43s2	6	24000	1,7
w1i18q44s1	2490	62250	3,4	x31q11s2	6	24000	3,5
w3i37q39s1	1159,9	28999,9	2,4	x24q30s3	13	52000	3,7
w10i95q42s2	320	6400	0,7	x41q1s3	4	16000	2,3
w13i123q10s2	625	12500	1,4	x24q14s4	7	28000	2
w13i123q1s2	418,8	8377,1	0,9	x41q33s4	6	24000	3,5
w13i133q22s2	3,5	71	0	x41q41s5	1	4000	0,5
w13i133q9s2	72,8	1456,6	0,1	x54q44s5	8	32000	2,6
w13i143q21s2	66	1321	0,1	x61q46s6	2	8000	1,1
w13i143q5s2	10,3	206,5	0				

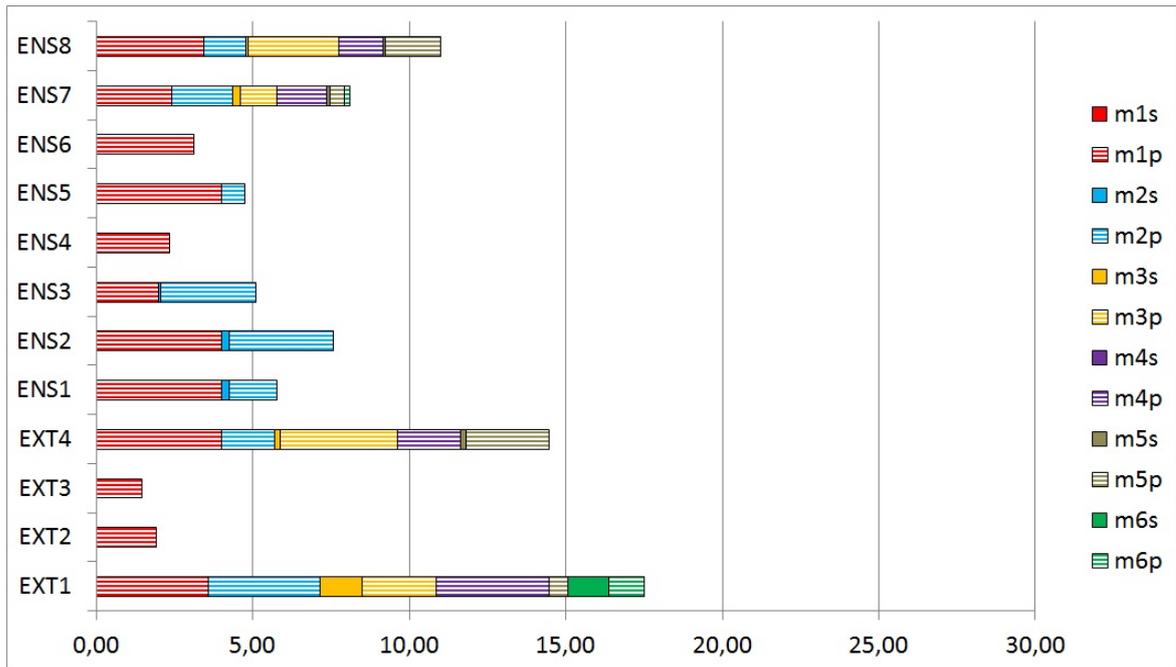


Figura 20 – Planejamento das extrusoras e ensacadeiras (modelo matemático) (horas) - Produção do dia B.

Fonte: Produzido pelo autor.

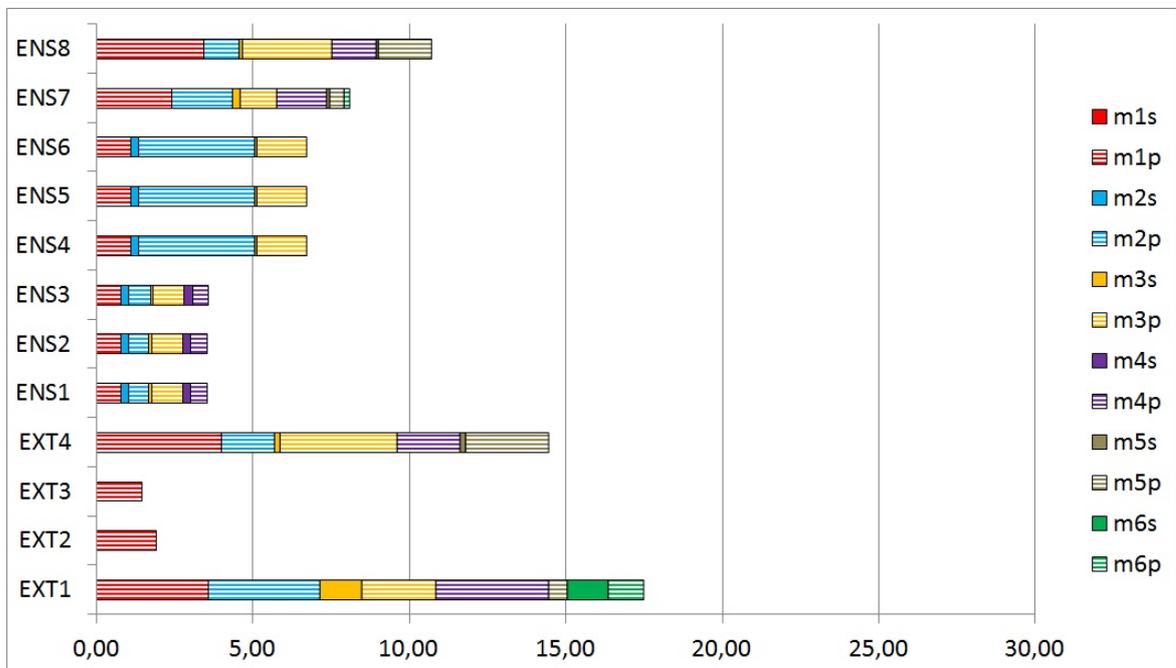


Figura 21 – Planejamento das extrusoras e ensacadeiras (indústria Alfa) (horas) - Produção do dia B.

Fonte: Produzido pelo autor.

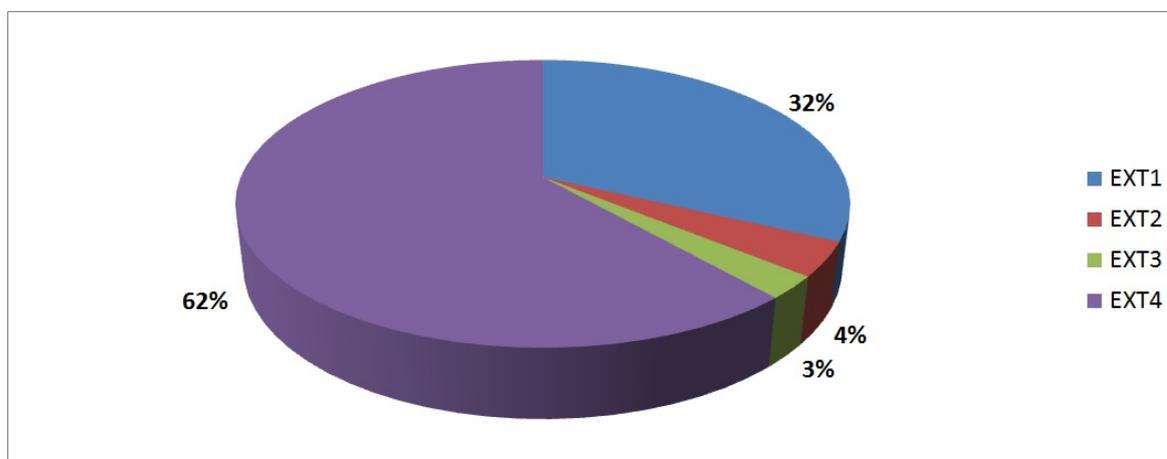


Figura 22 – Produção das extrusoras (modelo e indústria Alfa) - Produção do dia B.

Fonte: Produzido pelo autor.

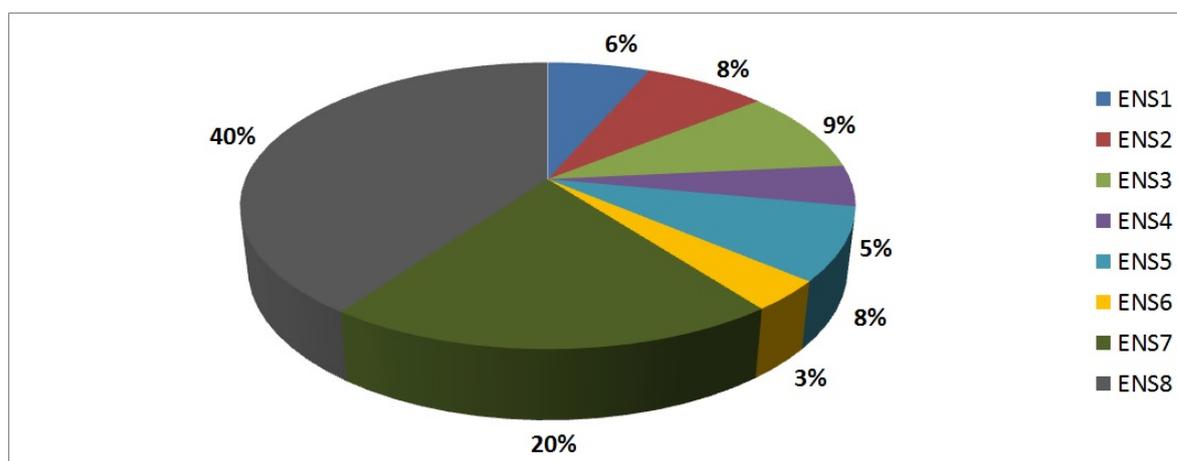


Figura 23 – Produção das ensacadeiras (modelo matemático) - Produção do dia B.

Fonte: Produzido pelo autor.

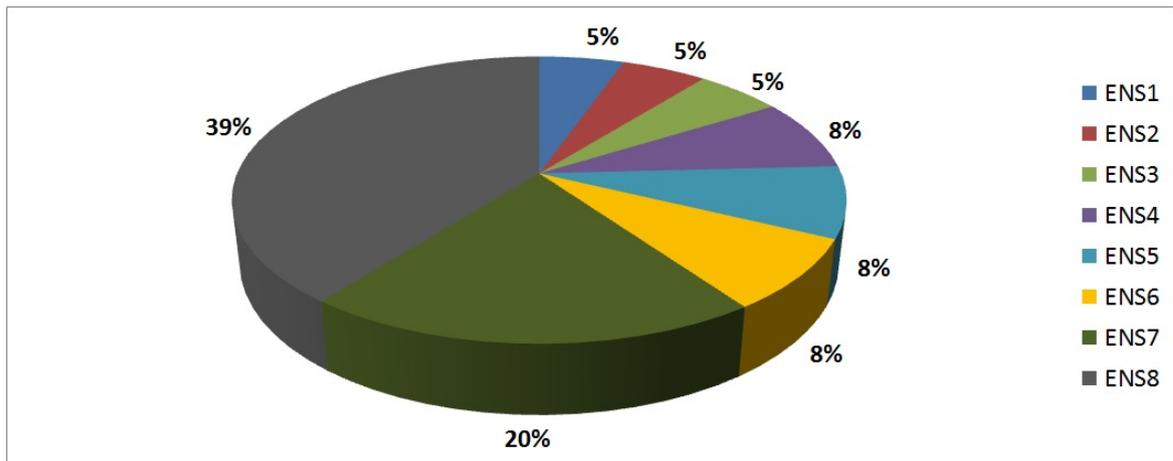


Figura 24 – Produção das ensacadeiras (indústria Alfa) - Produção do dia B.

Fonte: Produzido pelo autor.

Analisando os resultados obtidos pelo modelo matemático para os dias A e B pode-se dizer que eles foram consistentes e adequados. A quantidade de variáveis envolvidas é elevada, acima de 1.000.000 na produção do dia B por exemplo, e o planejador não consegue levar todas em consideração para a correta tomada de decisão. A restrição de apenas uma partícula ocupar o tanque em cada microperíodo é difícil de ser implementada sem o auxílio da modelagem matemática. A quantidade elevada de partículas e produtos também torna difícil a tarefa de definir o melhor planejamento. O sequenciamento e tamanho dos lotes são importantes fatores para otimizar os custos de produção da indústria Alfa e de qualquer outra fábrica que trabalha com lotes de produção.

5 Conclusão

Tomar a decisão sobre qual máquina produzirá um determinado produto, em que quantidade e em que momento, requer muita atenção, pois pode resultar em grandes prejuízos para uma empresa, considerando que os recursos como matéria-prima, energia e mão de obra estão cada vez mais escassos e mais caros.

A modelagem matemática proposta nesse trabalho foi feita com base em trabalhos que otimizaram processos industriais de diversos ramos. A função objetivo foi desenvolvida para reduzir *setups* e antecipar a produção sempre que possível, reduzindo o tempo de máquina parada nos processos de extrusão e ensaque de maneira integrada. As restrições do problema foram elaboradas para que o resultado se encaixasse na realidade vivida pela indústria Alfa.

Para validar a modelagem, foi criado um exemplo teste, com características baseadas nos processos de extrusão e ensaque de alimentos para animais. O resultado mostrou que a demanda foi atendida à contento, com sequenciamento da produção otimizado e custos com *setup* reduzidos, respeitando parâmetros de qualidade e atendendo a demanda de produtos com uma ou várias partículas em sua composição.

Com intuito de continuar a validação do modelo, foram criados mais exemplos, com variação em diversos parâmetros, para ajustar restrições ou a função objetivo caso fosse necessário. Através dos resultados foi possível concluir que a mudança no tamanho do lote mínimo, na taxa de produção das máquinas, na demanda inicial, no peso dos sacos, nos custos da função objetivo e na condição inicial dos tanques afeta os custos finais, de maneira positiva, caso promova mais produção em menos tempo, ou negativa, caso prejudique a antecipação da produção.

Além dos exemplos com mudança em parâmetros, foram propostos dois exemplos maiores, com elevadas demandas de produção e certa complexidade por se tratar de dados baseados em situações reais da indústria Alfa. Os dois exemplos foram resolvidos no tempo limitado de 7.200 segundos. As soluções apresentaram uma redução da função objetivo superior a 20%, quando comparadas às soluções obtidas ao considerar a sequência proposta pelo planejador da fábrica, atendendo a necessidade de otimizar a sequência de produtos e partículas através de uma metodologia inovadora e flexível, que é o objetivo principal do trabalho.

Com os resultados obtidos é possível afirmar que o modelo pode ser aplicado em situações reais, mesmo que seja necessário trabalhar com muitas variáveis e restrições ao mesmo tempo. A função objetivo pode ser alterada para direcionar a solução considerando outros ganhos, como redução de custos industriais e despesas ou aumento da receita através

da produção de itens mais rentáveis. Também pode ser útil para estimar os retornos de projetos como aumentar a taxa de produção das extrusoras e ensacadeiras, reduzir os tempos de preparação na troca de produto ou criar mais opções de armazenamento entre os processos.

No modelo proposto foram considerados os processos de extrusão e ensaque, mas existem ainda processos predecessores de armazenamento e preparação de matéria-prima e posteriores de armazenamento e expedição de produto acabado. Além disso, o transporte entre os tanques, extrusoras e ensacadeiras possui muitas rotas que foram simplificadas para tornar o modelo factível.

Algumas propostas de trabalhos futuros são abranger mais etapas do processo de produção e desenvolver métodos heurísticos para resolver modelos mais complexos, com mais variáveis e restrições, em menos tempo.

Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA INDÚSTRIA DE PRODUTOS PARA ANIMAIS DE ESTIMAÇÃO. *Informações gerais do setor pet*. [S.l.], 2020. Disponível em: <http://abinpet.org.br/infos_gerais/>. Acesso em: 24 Março 2022. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 24.
- BALDO, T. A.; SANTOS, M. O.; ALMADA-LOBO, B.; MORABITO, R. An optimization approach for the lot sizing and scheduling problem in the brewery industry. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 72, p. 58–71, 2014. Citado na página 16.
- CAMARGO, V. C.; TOLEDO, F. M.; ALMADA-LOBO, B. Hops–hamming-oriented partition search for production planning in the spinning industry. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 234, n. 1, p. 266–277, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 28.
- COFIL, K.; WÖRBELAUER, M.; MEYR, H.; TEMPELMEIER, H. Simultaneous lotsizing and scheduling problems: a classification and review of models. *OR Spectrum*, Springer, v. 39, n. 1, p. 1–64, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 14, 19, 20, 21 e 23.
- DREXL, A.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling—survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 99, n. 2, p. 221–235, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 14, 19 e 20.
- FREIRE, L. *Secadores e resfriadores - As atuais versões para atender o exigente mercado pet food*. [S.l.], 2021. Disponível em: <<https://www.editorastilo.com.br/pet-food/secadores-e-resfriados-as-atuais-versoes-para-atender-o-exigente-mercado-pet-food/>>. Acesso em: 24 Março 2022. Citado na página 25.
- GERALDES, D. *Soluções para o recobrimento de partículas extrudadas com líquidos*. [S.l.], 2017. Disponível em: <<https://www.editorastilo.com.br/columnistas/antonio-rubega/>>. Acesso em: 21 Abril 2020. Citado na página 25.
- _____. *Embalagens – Pet Food*. [S.l.], 2019. Disponível em: <<https://www.editorastilo.com.br/embalagens-pet-food/>>. Acesso em: 22 Abril 2020. Citado na página 25.
- JUNIOR, J. M. *Administração de produção*. [S.l.]: IESDE BRASIL SA, 2012. Citado na página 14.
- KARIMI, B.; GHOMI, S. F.; WILSON, J. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, Elsevier, v. 31, n. 5, p. 365–378, 2003. Citado na página 20.
- MARINELLI, F.; NENNI, M. E.; SFORZA, A. Capacitated lot sizing and scheduling with parallel machines and shared buffers: A case study in a packaging company. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 150, n. 1, p. 177–192, 2007. Citado na página 15.
- MEYR, H. Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel machines. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 139, n. 2, p. 277–292, 2002. Citado na página 20.

- PACHECO, P. D. G. *Aplicação de energia térmica no condicionador na extrusão de alimentos para cães*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2016. Citado na página 25.
- PAOLESCHI, B. *Logística industrial integrada: do planejamento, produção, custo e qualidade à satisfação do cliente*. [S.l.]: Saraiva Educação SA, 2009. Citado na página 14.
- PINEDO, M. L. *Scheduling: Theory, Algorithms, and systems*. [S.l.]: New York, NY: Springer, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 19.
- RIBEIRO, P. M. *Oxidação lipídica no processo de extrusão em pet food*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, 2018. Citado na página 24.
- SÁ, F. C. *Energia mecânica, energia térmica e moagem na extrusão de alimentos para cães e gatos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2015. Citado na página 25.
- TOLEDO, C. F. M.; KIMMS, A.; FRANÇA, P. M.; MORABITO, R. A mathematical model for the synchronized and integrated two-level lot sizing and scheduling problem. *Journal of Operational Research Society: under review*, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 28.
- TOSO, E. A.; MORABITO, R.; CLARK, A. R. Lot sizing and sequencing optimisation at an animal-feed plant. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 57, n. 3, p. 813–821, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 28.
- ZAMPIROLI, K. A. *Uma proposta para a otimização do planejamento da produção na indústria de laticínio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2019. Citado na página 17.