



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

LUCAS SOUSA SANTOS

**Transição de Fase Múltipla Para o Processo de
Contato em Grafos Altamente Não Amenáveis**

Campinas

2022

Lucas Sousa Santos

Transição de Fase Múltipla Para o Processo de Contato em Grafos Altamente Não Amenáveis

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Elcio Lebensztayn

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Lucas Sousa Santos e orientada pelo Prof. Dr. Elcio Lebensztayn.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Sylvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

Sa59t Santos, Lucas Sousa, 1997-
Transição de fase múltipla para o processo de contato em grafos altamente não amenáveis / Lucas Sousa Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Élcio Lebensztayn.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Transição de fases. 2. Processos estocásticos. 3. Processos de Markov.
I. Lebensztayn, Élcio, 1973-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Multiple phase transition for the contact process on highly non-amenable graphs

Palavras-chave em inglês:

Phase transition

Stochastic processes

Markov processes

Área de concentração: Estatística

Titulação: Mestre em Estatística

Banca examinadora:

Élcio Lebensztayn [Orientador]

Diego Fernando de Bernardini

Valdivino Vargas Júnior

Data de defesa: 30-08-2022

Programa de Pós-Graduação: Estatística

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-5315-7672>

- Currículo Lattes do autor: <https://lattes.cnpq.br/9794251785776887>

**Dissertação de Mestrado defendida em 30 de agosto de 2022 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). ELCIO LEBENSZTAYN

Prof(a). Dr(a). DIEGO FERNANDO DE BERNARDINI

Prof(a). Dr(a). VALDIVINO VARGAS JÚNIOR

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

A todas as pessoas que foram um ombro amigo, que ofereceram uma palavra de conforto, ou um conselho construtivo, nesses dois anos atípicos e conturbados. Minha gratidão e carinho eternos.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Élcio Lebensztayn, pela orientação atenciosa e suporte durante a produção deste trabalho.

Também gostaria de agradecer:

Aos amigos de turma(s), que sempre foram prestativos e acolhedores, em especial à Marília Gabriela Rocha, Wasley Pablo Silva, Alexandre Reggiolli, Pedro Nasevicius e Ana Regina Pimenta.

Ao meu amigo Carlos Alan Nascimento, que tem sido um grande companheiro desde a graduação.

À minha amiga Suzane dos Santos, que sempre me apoiou de diversas formas, do ingresso à finalização do mestrado.

À minha família: meus familiares, meus queridos amigos e meu namorado, sem os quais eu não teria condições de avançar.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas condições sob as quais o Processo de Contato possui duas transições de fases, especificamente em grafos altamente não amenáveis. Para isso, realizamos uma revisão bibliográfica, com resultados principais baseados no trabalho de [Schonmann \(2000\)](#), onde, para grafos infinitos, conectados e de grau limitado, é possível comparar a constante isoperimétrica de arestas com uma função dos graus máximo e mínimo do grafo, a fim de saber se teremos transição de fase múltipla. Esses resultados tornam simples essa verificação, quando atendidas as condições citadas. Um exemplo apresentado são as árvores homogêneas. Com isso, pretendemos chamar atenção para o assunto e apresentar referências para um aprofundamento futuro do leitor no tema.

Palavras-chave: Sistema de Partículas Interagentes. Processo de Contato. Transição de fases.

Abstract

The aim of this work is to present some conditions under which the Contact Process has two phase transitions, specifically on highly non-amenable graphs. For that, we have done a bibliography research with main results based on the paper of [Schonmann \(2000\)](#), in which for infinite, connected graphs of bounded degree it is possible to compare the edge-isoperimetric constant with a function of the maximum and the minimum degrees of the graph, so that we can know if the process has multiple phase transitions. These results simplify this verification when those conditions are fulfilled. A presented example are homogeneous trees. Therefore, we intend to draw attention to the subject and to present references for a further exploration on it.

Keywords: Interacting Particle Systems. Contact Process. Phase Transition.

Sumário

Introdução	10
1 Grafos Infinitos	12
1.1 Definições Básicas	12
1.2 Grafos Transitivos	14
1.3 Constantes Isoperimétricas	16
1.3.1 Constante isoperimétrica de \mathbb{Z}^d	17
1.3.2 Constante isoperimétrica de \mathbb{T}_d	18
1.4 Raio Espectral	20
2 Processo de Contato e Resultados	21
2.1 Definição	21
2.1.1 Parâmetros Críticos	21
2.1.2 Representação Gráfica	22
2.2 Revisão Bibliográfica	24
2.3 Resultados Principais	25
3 Demonstrações	29
3.1 Resultados Auxiliares	29
3.2 Provas dos Resultados Principais	33
4 Considerações Finais	36
 BIBLIOGRAFIA	 37

Introdução

Sistemas de Partículas Interagentes é um ramo da Probabilidade que começou a ser desenvolvido por volta do ano de 1970, com os trabalhos de [Spitzer \(1970\)](#) e [Dobrushin \(1971\)](#), e rapidamente passou a ser bastante estudado. Esses sistemas envolvem um grande número de indivíduos ou componentes conectados, que interagem entre si aleatoriamente, e são muitas vezes usados como modelos simplificados em fenômenos estocásticos que envolvem estruturas espaciais, possuindo, assim, aplicações em diversas áreas, como Mecânica Estatística, Epidemiologia, Ciências Sociais e Química. Os primeiros modelos introduzidos foram o Processo de Exclusão, o Modelo Estocástico de Ising, o Modelo do Votante e o Processo de Contato, os quais foram amplamente estudados desde então.

Um aspecto importante a ser estudado nesses processos é a transição de fase, isto é, a mudança de comportamento do processo a partir da mudança da taxa de crescimento ou parâmetro deles. O interesse é saber, nesse caso, se o processo irá se extinguir, ou se irá sobreviver, e a que taxas isso ocorre. Existem casos nos quais o processo pode sobreviver, mas não ser recorrente, o que significa que ele irá se extinguir localmente. Tratando-se de uma infecção, por exemplo, é interessante saber em que condições teremos o fim dela (todos os indivíduos curados), ou sua persistência. E, caso ela persista, se um indivíduo será infectado muitas (ou infinitas, teoricamente falando) conforme o tempo avança para o infinito. Chamamos de parâmetros críticos os parâmetros que definem essa mudança de comportamento.

O processo abordado neste trabalho é o Processo de Contato (PC), um modelo que é bastante estudado por matemáticos e físicos, e que foi introduzido por [Harris \(1974\)](#). Esse processo geralmente é pensado como um modelo para a disseminação de uma infecção, pela forma como é definido. Muitas de suas propriedades foram inicialmente apresentadas para o reticulado inteiro \mathbb{Z}^d , algumas delas já por Harris no primeiro trabalho sobre o assunto, mas logo o processo passou a ser estudado em outros grafos, como árvores. [Liggett \(1999\)](#) apresenta muitos resultados interessantes sobre esse e outros modelos.

A transição de fase é destaque nos estudos sobre o PC, nos quais os pesquisadores que se debruçam sobre o tema tentam encontrar limitantes para as taxas críticas que definem se há sobrevivência (local ou global), ou extinção do processo. Mas, além disso, é importante saber se o processo terá de fato duas transições de fase, isto é, se esses parâmetros críticos de sobrevivência local e global são iguais, ou não. É natural que o processo não se comporte da mesma forma em diferentes grafos, porém algumas circunstâncias para que os parâmetros críticos sejam distintos e finitos podem ser estabelecidas.

Os resultados desse trabalho são principalmente baseados no texto de [Schon-](#)

mann (2000), que discute a transição de fases em grafos altamente não amenáveis para três processos: Percolação, Modelo de Ising e Processo de Contato. Um grafo é altamente não amenável se sua constante de Cheeger for grande, quando comparada com uma função apropriada do grafo (a definição e um pouco mais sobre essa constante podem ser vistos no Capítulo 1). Essa função varia de acordo com o processo analisado. Assim, teremos transição de fase múltipla para cada um desses modelos, estabelecidas condições desse tipo, de modo que os processos se comportem de maneira distinta em cada uma das três fases. Ou seja, os parâmetros críticos separam regimes com comportamento qualitativamente distintos. Para o Processo de Contato, esses comportamentos são extinção, sobrevivência fraca e sobrevivência forte.

Com isso, o objetivo principal deste trabalho é apresentar algumas condições sob as quais o Processo de Contato possui duas transições de fases, especificamente em grafos altamente não amenáveis. No *Capítulo 1* da dissertação, fazemos uma breve apresentação sobre grafos, focando nos conceitos que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho. No *Capítulo 2*, apresentamos a definição do Processo de Contato, uma breve revisão bibliográfica sobre o tema em \mathbb{Z}^d e árvores, e os resultados principais do trabalho. Por fim, no *Capítulo 3* estão as provas dos Teoremas e Corolários estabelecidos anteriormente, além de alguns Lemas que auxiliam nas demonstrações.

1 Grafos Infinitos

1.1 Definições Básicas

Inicialmente, apresentamos algumas definições básicas a respeito de grafos. Naturalmente, muitos resultados não serão apresentados aqui, onde focamos nos conceitos essenciais para o trabalho. Para um aprofundamento, veja, por exemplo, [Bickle \(2020\)](#), [Rahman et al. \(2017\)](#) e [Godsil e Royle \(2001\)](#).

Definição 1.1 (Grafo). Um grafo é um par $\mathcal{G} = (V, E)$, no qual V é um conjunto arbitrário e E é um subconjunto de $\{\{x, y\} : x, y \in V\}$. Dizemos que V é o conjunto de vértices (ou sítios) de \mathcal{G} e E é chamado de conjunto de arestas de \mathcal{G} .

O grafo será infinito se os conjuntos V e E forem infinitos. Os vértices x e y de uma aresta $a = \{x, y\}$ são chamados de extremos e são ditos *incidentes* a a (onde a também é incidente a x e y). Chamamos de *adjacentes* ou *vizinhos* dois vértices que pertencem a uma mesma aresta, e, também, arestas que compartilham um vértice em comum. Há várias formas de representar um grafo. Podemos simplesmente listar os seus conjuntos de vértices e arestas, desenhar o grafo, ou utilizar a sua matriz de adjacências.

Definição 1.2 (Matriz de Adjacências). Seja um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ com conjunto de vértices $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Sua matriz de adjacências será denotada por $A_{\mathcal{G}} = (a_{ij})_{n \times n}$, onde

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } a = (x_i, x_j) \in E \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isto é, os elementos $A_{\mathcal{G}}(x, y)$ assumem os valores 1 ou 0, de acordo com os vértices $x, y \in V$ serem adjacentes ou não em \mathcal{G} .

É importante saber, também, o número de vizinhos de um vértice, valor que chamamos de *grau* do vértice.

Definição 1.3 (Grau). O grau de um vértice $x \in V$ é o número d_x de arestas incidentes a ele. Se o vértice possui grau igual a 0, ele será dito *isolado*. Se cada vértice possui grau finito, o grafo é chamado de *localmente finito*. Os graus *máximo* e *mínimo* de um grafo \mathcal{G} são definidos como

$$D(\mathcal{G}) = \sup\{d_x : x \in V\} \text{ e } d(\mathcal{G}) = \inf\{d_x : x \in V\}.$$

Se $D(\mathcal{G}) < \infty$, dizemos que o grafo \mathcal{G} possui *grau limitado*. Além disso, se todos os vértices de um grafo tiverem o mesmo grau, ele será chamado de *regular*. Para analisar um conjunto de vértices ou arestas, definimos *cadeia* e *caminho*.

Definição 1.4 (Cadeia). Uma cadeia finita é uma sequência x_0, x_1, \dots, x_n de vértices distintos na qual, para cada i , x_i é vizinho de x_{i+1} . O tamanho da sequência é n e x_0 e x_n são seus extremos.

Dois vértices são ditos pertencerem ao mesmo *componente conectado* do grafo se há uma cadeia finita que os tem como extremos. Isso possibilita dividir um grafo em classes de equivalência de componentes conectados. Um grafo é dito *conectado* se possui apenas um componente conectado.

Definição 1.5 (Caminho). Um *caminho* de um grafo é uma sequência de arestas a_1, a_2, \dots, a_n onde, para cada i , a_i e a_{i+1} são vizinhas. O primeiro vértice de um caminho é chamado de origem e o último de término do caminho.

Um *ciclo* é obtido quando a origem e o término de um caminho são conectados. O tamanho de um ciclo é o seu número de arestas (ou vértices).

A *distância* $\text{dist}(y, z)$ entre vértices y e z é o comprimento mínimo das cadeias que possuem y e z como extremos. Além disso, a distância entre os conjuntos de vértices R e S é a menor distância entre os vértices em R e os vértices em S . Para $x, y \in V$, definimos $\text{odd}_{\mathcal{G}}(x, y) = 1$ se $\text{dist}(x, y)$ for ímpar, e $\text{odd}_{\mathcal{G}}(x, y) = 0$ se $\text{dist}(x, y)$ for par.

Definição 1.6 (Fronteira). A *fronteira de arestas* de um conjunto $S \subset V$ é definida como

$$\partial_E S = \{\{x, y\} \in E : x \in S, y \in S^c\},$$

enquanto sua *fronteira de vértices* é definida como

$$\partial_V S = \{y \in S^c : \{x, y\} \in \partial_E S \text{ para algum } x \in S\}.$$

Temos que, para $S \subset V$ finito,

$$\frac{|\partial_E S|}{D(\mathcal{G})} \leq |\partial_V S| \leq |\partial_E S|, \quad (1.1)$$

onde o menor termo da desigualdade é zero se $D(\mathcal{G}) = \infty$. Para verificar esse fato, vamos supor que $D(\mathcal{G}) < \infty$. Para quaisquer $x \in S$ e $y \in S^c$, definimos:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \{x, y\} \in E, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E, para $y \in S^c$, seja

$$\gamma(y) = \begin{cases} 1 & \text{se existe } x \in S \text{ vizinho de } y, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

$$|\partial_E S| = \sum_{y \in S^c} \sum_{x \in S} \delta(x, y) \leq \sum_{y \in S^c} d_y \gamma(y) \leq D(\mathcal{G}) \sum_{y \in S^c} \gamma(y) = D(\mathcal{G}) |\partial_V S|.$$

Isso mostra a desigualdade da esquerda. Em relação à segunda desigualdade, observamos que se, $y \in \partial_V S$, então existe $x \in S$ tal que $\{x, y\} \in \partial_E S$, logo $|\partial_V S| \leq |\partial_E S|$. Vamos utilizar $S \subseteq V$ para indicar que S é um subconjunto finito de V .

Outra noção importante é a de grafo bipartido. Um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ é *bipartido* se o conjunto V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 de modo que dois vértices do mesmo conjunto não sejam adjacentes. De forma intuitiva, um grafo bipartido pode ser colorido com duas cores de modo que cada aresta possui extremos de cores distintas. A Figura 1.1 mostra um exemplo.

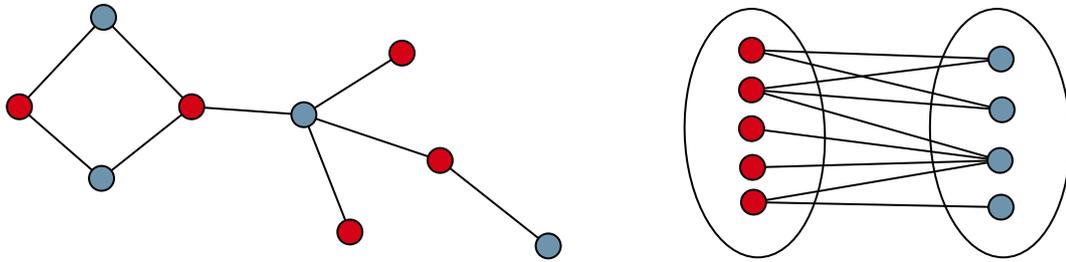


Figura 1.1 – Exemplo Grafo Bipartido

Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclos de tamanho ímpar. Ver [Asratian, Denley e Häggkvist \(1998\)](#) para a demonstração desse resultado e outros resultados sobre grafos bipartidos. Dizemos, então, que $\text{bip}(\mathcal{G}) = 2$ se o grafo é bipartido, e $\text{bip}(\mathcal{G}) = 1$ caso contrário.

1.2 Grafos Transitivos

Para esta definição, precisamos do conceito de *isomorfismo* e *automorfismo* de um grafo.

Definição 1.7 (Isomorfismo). Um isomorfismo de um grafo $\mathcal{G} = (V_1, E_1)$ para um grafo $\mathcal{H} = (V_2, E_2)$ é uma bijeção $\phi : V(\mathcal{G}) \rightarrow V(\mathcal{H})$ de modo que a aresta $a = (x, y)$ pertence a E_1 se, e somente se, $e = (\phi(x), \phi(y)) \in E_2$. Nesse caso, dizemos que \mathcal{G} é isomórfico a \mathcal{H} .

Intuitivamente, dois grafos serão isomórficos se possuírem a mesma estrutura, embora seus vértices sejam nomeados de forma diferente, ou tenham gráficos distintos. Isso significa, por exemplo, que vértices equivalentes possuem a mesma quantidade de vértices adjacentes. Um automorfismo de um grafo \mathcal{G} é um isomorfismo de \mathcal{G} a \mathcal{G} . Chamamos de $\text{Aut}(\mathcal{G})$ o conjunto de todos os automorfismos de \mathcal{G} .

Definição 1.8 (Grafo Transitivo). Um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ é vértice-transitivo, ou simplesmente transitivo, se, para quaisquer vértices $x, y \in V$, existe um automorfismo $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{G})$ de modo que $\phi(x) = y$.

Vértice-transitividade implica que cada vértice do grafo terá o mesmo grau (BIGGS, 1993). Intuitivamente, um grafo é transitivo se todos os seus vértices seguem a mesma regra. Se as condições anteriores ocorrem para x, y em conjunto finito V_0 de um grafo, dizemos que esse grafo é quase-transitivo. Normalmente resultados de grafos transitivos podem ser estendidos para grafos quase-transitivos.

Uma classe importante de grafos transitivos é a dos grafos de Cayley. Suponha que V é um grupo finitamente gerado e \mathcal{S} é um conjunto simétrico finito de geradores dele. Então, o grafo de Cayley de V para esse conjunto de geradores é o grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ que tem $E = \{\{x, y\} : x, y \in V, y = xz \text{ para algum } z \in \mathcal{S}\}$. Em outras palavras, $x^{-1}y \in \mathcal{S}$ (KREBS; SHAHEEN, 2011).

A classe de grafos de Cayley de grupos finitamente gerados inclui um grande número de exemplos de grafos transitivos e a maioria é de grande interesse (MEIER, 2008, p. 22). Há também uma classe de grafos conhecidos como grafos transitivos unimodulares, que é uma subclasse dos grafos transitivos e que contém a classe de grafos de Cayley de grupos finitamente gerados (veja-se Lyons e Peres (2016)).

Os exemplos básicos de grafos de interesse na Probabilidade, Mecânica Estatística e áreas relacionadas são o reticulado hipercúbico \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$, e outros grafos que podem ser embutidos de um modo periódico em \mathbb{R}^d , para algum $d \geq 1$ (SCHONMANN, 2000). O reticulado hipercúbico \mathbb{Z}^d é um grafo de Cayley do grupo abeliano livre de posto d .

Outra classe importante de exemplos é a das árvores homogêneas, que são árvores transitivas. Uma *árvore* é um grafo tal que para cada par de vértices $x, y \in V$, há uma única cadeia que os conecta. Para $d \geq 1$, vamos denotar por \mathbb{T}_d a árvore homogênea de grau $(d + 1)$. Assim, $\mathbb{T}_1 = \mathbb{Z}$. Esse grafo é um grafo de Cayley do produto livre de $d + 1$ cópias de \mathbb{Z}_2 (LYONS; PERES, 2016).

Diversas operações podem ser realizadas para se obterem novos grafos a partir de grafos antigos, como a adição ou subtração de arestas (ou conjuntos de arestas), subdivisão, que é uma operação que transforma uma aresta em um caminho a partir da inclusão de um vértice, ou operações binárias, onde são usados dois grafos para gerar um novo (BICKLE, 2020).

Um exemplo importante de operação binária é o produto cartesiano. Dado um par de grafos $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$ e $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$, denotamos por $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ o grafo que tem como vértices os elementos do produto cartesiano $V_1 \times V_2$, e uma aresta conecta (x, u) a (y, v) se, e somente se, ou $x = y$ e $\{u, v\} \in E_2$, ou então se $\{x, y\} \in E_1$ e $u = v$. No caso especial no qual \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são grafos de Cayley, o resultado será novamente um grafo de Cayley

(HEYDEMANN, 1997).

1.3 Constantes Isoperimétricas

A constante isoperimétrica de arestas, que também é conhecida como constante de Cheeger, por ter sido introduzida por Cheeger (1970), assume um papel importante neste trabalho, onde é apresentada de forma análoga para o caso discreto. Dado um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ infinito, localmente finito e conectado, definimos:

- **Constante isoperimétrica de arestas (ou constante de Cheeger):**

$$\iota_E(\mathcal{G}) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : \emptyset \neq S \subseteq V \right\}.$$

- **Constante isoperimétrica de vértices:**

$$\iota_V(\mathcal{G}) = \inf \left\{ \frac{|\partial_V S|}{|S|} : \emptyset \neq S \subseteq V \right\}.$$

Temos que $\iota_E(\mathcal{G}) \in [0, D(\mathcal{G})]$. Se $\iota_E(\mathcal{G}) = 0$, dizemos que o grafo \mathcal{G} é *amenável*, enquanto se $\iota_E(\mathcal{G}) > 0$, dizemos que é *não amenável*. Note que, se o grafo for amenável, então a fronteira de qualquer $S \subseteq V$ cresce mais devagar que o conjunto de vértices S . Por (1.1),

$$\frac{\iota_E(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})} \leq \iota_V(\mathcal{G}) \leq \iota_E(\mathcal{G}).$$

Logo, para um grafo \mathcal{G} de grau limitado ($D(\mathcal{G}) < \infty$),

$$\iota_E(\mathcal{G}) > 0 \text{ se, e somente se, } \iota_V(\mathcal{G}) > 0.$$

Dizemos que um grafo \mathcal{G} é altamente não amenável se sua constante de Cheeger $\iota_E(\mathcal{G})$ for grande, quando comparada com uma função apropriada do grafo. Podemos considerar, por exemplo, um grafo \mathcal{G} infinito, conectado de grau limitado ($D(\mathcal{G}) < \infty$) e verificar se

$$\iota_E(\mathcal{G}) > \frac{d(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})}.$$

Outra versão dessas constantes foi introduzida por Benjamini, Lyons e Schramm (1999), onde são definidas como:

- **Constante ancorada isoperimétrica de arestas:**

$$\iota_E^*(\mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : r \in S \subseteq V, S \text{ conectado, } |S| \geq n \right\}.$$

- **Constante ancorada isoperimétrica de vértices:**

$$\iota_V^*(\mathcal{G}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{|\partial_V S|}{|S|} : r \in S \subseteq V, S \text{ conectado}, |S| \geq n \right\}.$$

Observamos que o valor dessas constantes não depende da escolha da raiz r (LEBENSZTAYN, 2002, p. 35). Se $\iota_E^*(\mathcal{G}) = 0$, dizemos que \mathcal{G} é *fortemente amenável*, enquanto se $\iota_E^*(\mathcal{G}) > 0$, \mathcal{G} é dito ser *fracamente não amenável*. Temos que:

$$\iota_E(\mathcal{G}) \leq \iota_E^*(\mathcal{G}), \quad \iota_V(\mathcal{G}) \leq \iota_V^*(\mathcal{G}).$$

Logo, um grafo fortemente amenável é amenável, enquanto um grafo não amenável é fracamente não amenável.

Proposição 1.1. *Seja $\mathcal{G} = (V, E)$ um grafo infinito, conectado e localmente finito. Então, \mathcal{G} é amenável se, e somente se, existe uma sequência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos finitos e não vazios de V , tal que $S_n \uparrow V$ e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S_n|}{|S_n|} = 0.$$

A demonstração dessa Proposição pode ser encontrada em Lebensztayn (2002, p. 41).

1.3.1 Constante isoperimétrica de \mathbb{Z}^d

Para o reticulado hipercúbico $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^d$, temos que

$$\iota_E(\mathcal{G}) = 0,$$

onde $d \geq 1$. Logo, esse grafo é amenável. Para verificar esse fato, vamos considerar a seguinte sequência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos de \mathbb{Z}^d :

$$S_n = \{0, 1, \dots, n-1\}^d = \{x \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq x^{(i)} \leq n-1 \text{ para todo } i\},$$

onde $n \geq 1$. Como, para $n \geq 1$,

$$|\partial_E S_n| = 2dn^{d-1} \quad \text{e} \quad |S_n| = n^d,$$

temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S_n|}{|S_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2dn^{d-1}}{n^d} = 0,$$

Logo, pela Proposição 1.1, o grafo é amenável.

1.3.2 Constante isoperimétrica de \mathbb{T}_d

Para a árvore homogênea $\mathcal{G} = \mathbb{T}_d$, temos que, para $d \geq 1$,

$$\iota_E(\mathcal{G}) = d - 1.$$

Com isso, esse grafo é não amenável para $d \geq 2$. Para mostrar isso, vamos realizar uma prova em duas partes. Primeiro, mostramos que, para qualquer $S \subseteq V$ não vazio,

$$\frac{|\partial_E S|}{|S|} \geq d - 1. \quad (1.2)$$

Em seguida, devemos mostrar que existe uma sequência $\{S_n\}_{n \geq 0}$ tal que, para todo $n \geq 0$, S_n é um subconjunto finito e não vazio de V e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S_n|}{|S_n|} = d - 1.$$

Realizaremos a primeira parte por indução. Para $|S_n| = 1$,

$$\frac{|\partial_E S_n|}{|S_n|} = \frac{d + 1}{1} = d + 1.$$

Como hipótese de indução, vamos supor que vale (1.2) para qualquer $S \subset V$, com $|S| = n \geq 1$. Consideremos $S \subset V$ tal que $|S| = n + 1$. Note que existe $x \in S$ com no máximo um vizinho em S , pois S é finito (do contrário, S não seria finito). Definimos $S' = S - \{x\}$, onde x é um vértice de S com no máximo um vizinho em S . Como S pode não ser conectado, x pode não ter vizinhos em S . Se x não tem nenhum vizinho em S , temos que $|\partial_E S| = |\partial_E S'| + d + 1$, pois, na árvore homogênea, cada vértice possui $d + 1$ vizinhos e, nesse caso, todas as arestas incidentes a x estão na fronteira; por outro lado, se x possui exatamente um vizinho em S , $|\partial_E S| = |\partial_E S'| - 1 + d$, pois a fronteira teria duas arestas a menos. A Figura 1.2 mostra dois casos em que $S = \{v_1, v_2, v_3, x\}$, com $d = 2$.

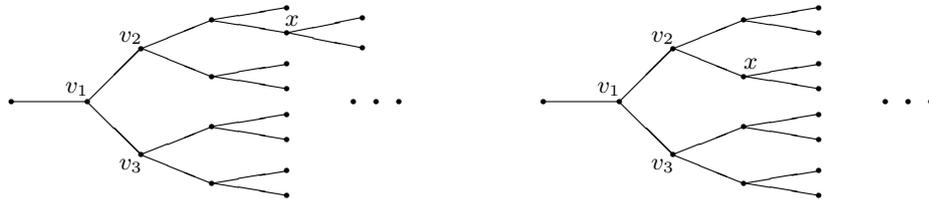


Figura 1.2 – Fronteiras de aresta para $S = \{v_1, v_2, v_3, x\}$ com $d = 2$.

Assim, note que para $|\partial_E S'|$ a relação é válida, pela hipótese de indução. Logo,

$$|\partial_E S| \geq |\partial_E S'| - 1 + d \geq (d - 1)|S'| + d - 1 = (d - 1)(|S'| + 1) = (d - 1)|S|.$$

Isso conclui a primeira parte da prova. Para a segunda parte, vamos fixar um vértice de \mathbb{T}_d como 0 e chamá-lo de raiz. Então, seja x_0 um vértice fixado que é vizinho da raiz. Definimos \mathbb{T}_d^+ o conjunto de vértices x de \mathbb{T}_d , tais que o caminho entre a raiz e x não contém x_0 . Agora, seja

$$S_n = \{x \in \mathbb{T}_d^+ : \text{dist}(x, 0) \leq n\}.$$

Precisamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S_n|}{|S_n|} = d - 1.$$

Para entender qual o tamanho de S_n e de sua fronteira, note que, para S_0 , temos um vértice no conjunto e sua fronteira terá $1 + d$ arestas; para S_1 , o conjunto terá $1 + d$ vértices, e sua fronteira $1 + d^2$ arestas; para S_2 , o conjunto terá $1 + d + d^2$ elementos, enquanto sua fronteira terá $1 + d^3$. Assim, para S_n , o conjunto terá $1 + d + d^2 + \dots + d^n$ vértices, enquanto a fronteira possuirá $1 + d^{n+1}$ arestas. Veja-se a Figura 1.3 para o caso em que $d = 2$.

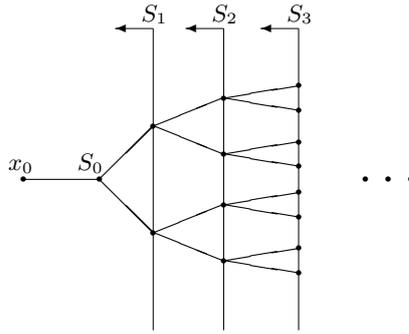


Figura 1.3 – $\{S_n\}_{n \geq 0}$ no caso $d = 2$.

Desse modo,

$$|\partial_E S_n| = 1 + d^{n+1}$$

e

$$|S_n| = 1 + d + d^2 + \dots + d^n = \frac{d^{n+1} - 1}{d - 1}, d \geq 2.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E S_n|}{|S_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + d^{n+1}}{\frac{d^{n+1} - 1}{d - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d - 1 + d^{n+2} - d^{n+1}}{d^{n+1} - 1} = d - 1.$$

Portanto,

$$\iota_E(\mathcal{G}) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E S|}{|S|} : \emptyset \neq S \subseteq \mathbb{T}_d \right\} = d - 1.$$

1.4 Raio Espectral

Dado um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ infinito, conectado e localmente finito, denotamos por $A_{\mathcal{G}}$ a sua matriz de adjacências. Elevando a matriz de adjacências à n -ésima potência, obtemos uma matriz cujo elemento (x, y) é o número de caminhos de tamanho n que conectam x a y , valor que será denotado por $A_{\mathcal{G}}^n(x, y)$ (BICKLE, 2020, p. 15). Com isso, definimos:

Definição 1.9 (Raio Espectral). Seja $A_{\mathcal{G}}$ a matriz de adjacências associada ao grafo infinito, conectado e localmente finito $\mathcal{G} = (V, E)$. O raio espectral associado à matriz $A_{\mathcal{G}}$ é a quantidade

$$R(\mathcal{G}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_{\mathcal{G}}^n(x, y))^{(1/n)},$$

onde $R(\mathcal{G})$ não depende de x e y (SENETA, 2006).

De Mohar e Woess (1989), temos que

$$A_{\mathcal{G}}^n(x, y) \leq (R(\mathcal{G}))^n \text{ para quaisquer } x, y \in V, n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Para $n(k) = \text{bip}(\mathcal{G})k + \text{odd}_{\mathcal{G}}(x, y)$, Mohar e Woess (1989) provam que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A_{\mathcal{G}}^{n(k)}(x, y))^{(1/n(k))} = R(\mathcal{G}) \text{ para quaisquer } x, y \in V. \quad (1.4)$$

Temos que $R(\mathcal{G}) \leq D(\mathcal{G})$. Para qualquer grafo \mathcal{G} infinito, conectado e de grau limitado, Mohar (1988) mostra que

$$(\iota_E(\mathcal{G}))^2 + (R(\mathcal{G}))^2 \leq (D(\mathcal{G}))^2. \quad (1.5)$$

Esse resultado será importante na apresentação dos resultados da dissertação.

2 Processo de Contato e Resultados

2.1 Definição

Em um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ infinito, conectado e de grau limitado, definimos o Processo de Contato com parâmetro $\lambda > 0$ como a cadeia de Markov a tempo contínuo em V , que assume dois estados, 0 ou 1, descrita a seguir. Como esse processo é frequentemente utilizado como um modelo para a propagação de infecções, dizemos que λ é seu parâmetro de infecção, enquanto os estados da cadeia de Markov representam partículas ou indivíduos saudáveis (no estado 0) ou infectados (no estado 1). Indivíduos infectados se recuperam à taxa 1, e indivíduos saudáveis são infectados por cada um dos seus vizinhos infectados, independentemente, à taxa λ .

Vamos utilizar a notação $(\xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^A)_{t \geq 0}$ para representar o Processo de Contato em \mathcal{G} , com parâmetro de infecção $\lambda > 0$, começando de $A \subseteq V$, enquanto $\xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^A(x)$ será a variável indicadora do evento de que $x \in V$ está infectado no tempo t .

Dessa forma, considerando o conjunto $S \subseteq V$ de partículas infectadas, as taxas de transição de $(\xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^A)_{t \geq 0}$ serão

$$|S| \rightarrow |S| - 1 \text{ a uma taxa } |S|$$

e

$$|S| \rightarrow |S| + 1 \text{ a uma taxa } \lambda |\partial_V S|.$$

Isso segue dos fatos de que uma partícula infectada não pode ser novamente infectada até que se recupere, e de que uma partícula só pode infectar outra que esteja em um vértice vizinho, i.e., se $\text{dist}(x, y) = 1$, para $x \in S, y \notin S$. Observamos que a descendência de diferentes partículas não se desenvolve de forma independente, pela forma como o processo é definido. Conforme explicado em [Liggett \(1985\)](#), [Liggett \(1999\)](#), a hipótese de que o grafo \mathcal{G} possui grau limitado garante que o processo seja bem definido.

2.1.1 Parâmetros Críticos

Um aspecto importante a ser estudado no Processo de Contato é a que taxa ocorre a sobrevivência ou extinção do processo. Fixado $x \in V$, dizemos que o processo *sobrevive globalmente* se

$$\sum_{y \in V} \xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^{\{x\}}(y) \geq 1, \forall t \geq 0,$$

e que *sobrevive localmente* se

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^{\{x\}}(x) = 1.$$

Quando há sobrevivência global, existe pelo menos um vértice infectado em qualquer tempo t , porém não sabemos se o vértice x será infectado (ou visitado) uma quantidade finita ou infinita de vezes. Com isso, definimos os parâmetros críticos da seguinte forma:

$$\lambda_s(\mathcal{G}) = \inf \left\{ \lambda : P \left(\sum_{y \in V} \xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^{\{x\}}(y) \geq 1, \forall t > 0 \right) > 0 \right\},$$

$$\lambda_r(\mathcal{G}) = \inf \left\{ \lambda : P(\limsup_{t \rightarrow \infty} \xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^{\{x\}}(x) = 1) > 0 \right\}.$$

Para $\lambda < \lambda_s(\mathcal{G})$, o processo de contato se extingue quase certamente. Para $\lambda_s(\mathcal{G}) < \lambda < \lambda_r(\mathcal{G})$, o processo morre localmente quase certamente, mas a infecção persiste com probabilidade positiva. Enquanto isso, para $\lambda > \lambda_r(\mathcal{G})$, há sobrevivência local: os vértices serão visitados infinitas vezes com probabilidade positiva, i.e., nesse caso há recorrência. Denominamos $\lambda_s(\mathcal{G})$ o parâmetro crítico de sobrevivência global e $\lambda_r(\mathcal{G})$ o parâmetro crítico de sobrevivência local (recorrência).

É evidente que $\lambda_s(\mathcal{G}) \leq \lambda_r(\mathcal{G})$. Se $0 < \lambda_s(\mathcal{G}) < \lambda_r(\mathcal{G}) < \infty$, então dizemos que o Processo de Contato possui duas transições de fase; se os parâmetros críticos satisfazem $0 < \lambda_s(\mathcal{G}) = \lambda_r(\mathcal{G}) < \infty$, tem-se apenas uma transição de fase.

É interessante saber em que condições teremos a sobrevivência do processo de contato, ou se esse possuirá uma ou duas transições de fase. Os parâmetros críticos precisam ser estudados em diferentes tipos de grafos, pois não irão se comportar da mesma forma em todos os conjuntos. Entretanto, alguns resultados podem ajudar a encontrar limitantes para eles, como visto a seguir.

2.1.2 Representação Gráfica

Liggett (2010) apresenta a representação gráfica do Processo de Contato em $\mathcal{G} = (V, E)$, que é construído como função de processos de Poisson independentes, para todas as configurações iniciais. Temos duas coleções desse processo: para cada vértice $x \in V$, há um Processo de Poisson N_x de taxa 1, e, para cada par ordenado (x, y) de vértices vizinhos $x, y \in V$, há um Processo de Poisson $N_{x,y}$ de taxa λ . Um *caminho* em $V \times [0, \infty)$ de $(x, 0)$ para (y, t) é uma sequência $(x, 0) = (x_0, t_0), (x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n) = (y, t)$, tal que

- (a) $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, e
- (b) x_k e x_{k+1} são vizinhos para cada k .

O caminho é dito *ativo* se

- (a) $t_k \in N_{x_k, x_{k+1}}$ para cada k , e

(b) $(x_k, s) \notin N_{x_k}$ se $t_{k-1} < s < t_k$.

Podemos posicionar setas de (x, s) a (y, s) sempre que o tempo $s \in N_{x,y}$ e marcas \mathbf{X} em (x, s) sempre que $s \in N_x$; um caminho é ativo se avança na direção positiva do tempo e de vizinho a vizinho na direção das setas, sem passar por nenhum \mathbf{X} . A Figura 2.1 descreve essa configuração. Na figura, temos um caminho ativo de $(-1, 0)$ a $(2, t)$ e de $(-3, 0)$ a $(-2, t)$, por exemplo.

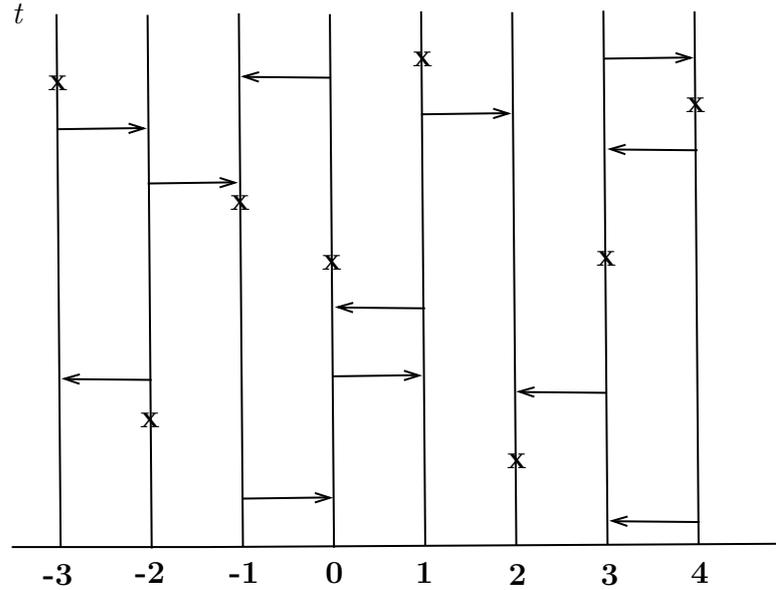


Figura 2.1 – Representação gráfica do Processo de Contato para $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$.

Uma vantagem da construção gráfica do Processo de Contato é que ela provê um acoplamento monótono. Vamos definir o conjunto $I_{t,A}$ como

$$I_{t,A} = \{y \in V : \xi_{\mathcal{G},\lambda,t}^A(y) = 1\} = \{y \in V : \exists x \in A \text{ com um caminho ativo de } (x, 0) \text{ a } (y, t)\},$$

onde $A \subseteq V$ é o estado inicial do processo. Temos, então, que

$$A = I_{0,A} \subset B = I_{0,B} \Rightarrow I_{t,A} \subset I_{t,B} \text{ para qualquer } t \geq 0.$$

Com isso, é possível mostrar que o processo é *atrativo*. Pela construção gráfica, vemos também que o Processo de Contato é *aditivo*:

$$I_{t,A \cup B} = I_{t,A} \cup I_{t,B}.$$

Isso significa que podemos acoplar duas realizações do processo, começando nos conjuntos A e B , respectivamente, de forma que sua união em qualquer instante representa o estado do processo nesse instante, iniciando a partir de $A \cup B$.

2.2 Revisão Bibliográfica

Como dito anteriormente, o Processo de Contato foi inicialmente apresentado por Harris em 1974 no reticulado inteiro \mathbb{Z}^d . Um pouco mais sobre a contribuição desse autor para o PC pode ser visto em Liggett (2011, p. 408). Em árvores, esse estudo começou em 1992, introduzido por Pemantle (1992) que também discutiu o processo para árvores periódicas e de Galton–Watson posteriormente. Sobre o PC nestes grafos, alguns resultados podem ser encontrados em Huang e Durrett (2020a), Huang e Durrett (2020b), Nam, Nguyen e Sly (2022).

Em grafos finitos, independente do valor da taxa λ , o Processo de Contato se extingue, isto é, $\lambda_s(\mathcal{G}) = \lambda_r(\mathcal{G}) = \infty$ (BETHUELSEN; SILVA; VALESIN, 2022, p. 865). Para grafos infinitos, alguns resultados a respeito dos parâmetros críticos do Processo de Contato em grafos mais usuais já são conhecidos há décadas. Os dois Teoremas a seguir dizem respeito aos parâmetros críticos de \mathbb{Z}^d e \mathbb{T}_d e são resultados conhecidos.

Teorema 2.1. *Seja o Processo de Contato $(\xi_{\mathcal{G},\lambda;t}^A)_{t \geq 0}$ no reticulado hipercúbico $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^d$. Nesse caso, $\lambda_s(\mathcal{G}) = \lambda_r(\mathcal{G})$, isto é, haverá apenas uma transição de fase, e teremos as seguintes limitantes:*

$$\frac{1}{2d-1} \leq \lambda_s(\mathcal{G}) = \lambda_r(\mathcal{G}) \leq \frac{2}{d}.$$

Além disso, se $\lambda = \lambda_s(\mathcal{G})$ o processo é extinto.

A prova desse Teorema será omitida, mas pode ser encontrada em Bezuidenhout e Grimmett (1990, pp. 1466 e 1469) e Liggett (1985, pp. 274, 289 e 308). No caso da árvore homogênea \mathbb{T}_d , teremos sobrevivência fraca, ao contrário do caso anterior.

Teorema 2.2. *Para o Processo de Contato na árvore homogênea \mathbb{T}_d , teremos que*

$$0 < \lambda_s(\mathcal{G}) < \lambda_r(\mathcal{G}) < \infty$$

para $d \geq 2$. Além disso, o processo será extinto se $\lambda = \lambda_s(\mathcal{G})$, e sobreviverá globalmente porém não localmente se $\lambda = \lambda_r(\mathcal{G})$.

Esse resultado foi apresentado por Pemantle (1992) para uma classe mais ampla de árvores e provado para árvores homogêneas por Liggett (1996), mas uma prova simplificada pode ser encontrada em Stacey (1996). Sobre o comportamento do processo quando a taxa é igual aos parâmetros críticos, veja Schinazi (2014, p. 243). Este autor também apresenta limitantes superiores e inferiores para os parâmetros críticos desse tipo de árvore.

Resultados interessantes para árvores são apresentados por Bethuelsen, Silva e Valesin (2022), que mostram que, para qualquer taxa $\lambda \in (0, \lambda_r(\mathbb{Z}))$, há uma árvore \mathbb{T} de grau limitado para qual $\lambda_r(\mathbb{T}) = \lambda_s(\mathbb{T}) = \lambda$ e o Processo de Contato em \mathbb{T} com taxa λ

sobrevive localmente. Os autores também apresentam que, nas mesmas circunstâncias, existe uma árvore na qual o processo morre a uma taxa λ igual aos parâmetros críticos de sobrevivência local e global.

Além dos resultados obtidos a partir da representação gráfica do modelo, [Liggett \(1999\)](#) apresenta outros aspectos do objeto, como a continuidade da probabilidade de sobrevivência, dualidade e taxa de crescimento. Essa é uma referência importante sobre o assunto e deve ser estudada para quem deseja se aprofundar no tema.

As condições suficientes e necessárias para a ocorrência de transição de fase vêm sendo estudadas para o Processo de Contato em diversos tipos de grafos ([Schinazi \(1993\)](#), [Schonmann \(2000\)](#), [Durrett e Jung \(2007\)](#), [Mourrat e Valesin \(2016\)](#), entre outros). Pesquisas sobre o Processo de Contato com modificações também são amplamente encontradas na literatura, por exemplo, considerando dois estágios de vida (diferenciando jovens e adultos) ([KRONE, 1999](#)), ou considerando mutações ([LIGGETT; SCHINAZI; SCHWEINSBERG, 2008](#)). [Xue \(2018\)](#) apresenta alguns aprimoramentos para os limitantes do parâmetro crítico de \mathbb{Z}^d e mostra que para $d = 3$ esse parâmetro será no máximo 0,34.

A bibliografia a respeito do tema é bastante extensa, com modificações do Processo de Contato, ou estudos em grafos específicos. Entretanto, nesse trabalho vamos apenas nos dedicar a resultados sobre o processo básico em grafos não amenáveis.

2.3 Resultados Principais

Nesta seção vamos apresentar os principais resultados desse trabalho. As provas da maioria serão desenvolvidas no Capítulo 3, mas, para que possamos realizar algumas delas, é necessário comparar o Processo de Contato com outro processo estocástico, o Passeio Aleatório com Ramificação (PAR). Esse processo é descrito por [Schinazi \(2014\)](#) da seguinte forma: sejam $p(x, y)$ as probabilidades de transição de uma cadeia de Markov em um conjunto enumerável S . Dado um parâmetro $\alpha > 0$, se $p(x, y) > 0$ e se há uma partícula em x , então essa partícula:

- espera por um tempo exponencial com taxa $\alpha p(x, y)$ e então dá à luz uma nova partícula em y ;
- espera por um tempo exponencial com taxa 1 e então morre.

Diferentes partículas agem de forma independente.

Em um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ infinito, conectado e de grau limitado, a cada tempo $t \geq 0$, o processo é descrito associando um número de partículas em cada vértice, com apenas um número finito de vértices possuindo mais que 0 partículas. Desse modo, quando ocorre um nascimento, o local da nova partícula é uniformemente escolhido entre os sítios

que são vizinhos do vértice predecessor. Isso significa que as probabilidades de transição são dadas por

$$p(x, y) := p_{\mathcal{G}}(x, y) = \frac{A_{\mathcal{G}}(x, y)}{d_x},$$

onde $A_{\mathcal{G}}$ é a matriz de adjacências de \mathcal{G} anteriormente definida e d_x é o grau do vértice x .

Vamos denotar o Passeio Aleatório com Ramificação em \mathcal{G} começando com uma partícula em cada vértice de $A \subseteq V$ (e nenhuma partícula fora de A) por $(\zeta_{\mathcal{G}, \alpha; t}^A)_{t \geq 0}$; e o número de partículas no processo no vértice $x \in V$ no tempo t por $\zeta_{\mathcal{G}, \alpha; t}^A(x)$.

Como permite mais de uma partícula por vértice, fica claro que $\zeta_{\mathcal{G}, \lambda; t}^A$ é estocasticamente maior que $\xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^A$, ou seja, os dois processos podem ser acoplados de modo que o Passeio Aleatório com Ramificação sempre terá um número maior ou igual de partículas que o Processo de Contato, em cada vértice x . Esse fato possibilita a comparação dos dois processos, de modo a entender melhor o Processo de Contato. Os parâmetros críticos do PAR serão denotados por $\rho_r(\mathcal{G})$ e $\rho_s(\mathcal{G})$, representando a sobrevivência local e global, respectivamente. Como $\zeta_{\mathcal{G}, \lambda; t}^A$ possui mais partículas que $\xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^A$, é fácil perceber que

$$\lambda_r(\mathcal{G}) \geq \rho_r(\mathcal{G}) \text{ e } \lambda_s(\mathcal{G}) \geq \rho_s(\mathcal{G}),$$

pois $P(\zeta_{\mathcal{G}, \lambda; t}^{\{x\}}(y) \geq 1) \geq P(\xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^{\{x\}}(y) \geq 1)$. Logo, para encontrar os limites inferiores dos parâmetros críticos para o Processo de Contato só precisamos conhecer os parâmetros críticos do Passeio Aleatório com Ramificação.

O primeiro resultado obtido a partir da comparação desses dois processos diz respeito a grafos de grau limitado.

Teorema 2.3. *Seja \mathcal{G} um grafo infinito, conectado e de grau limitado, sendo $D(\mathcal{G}) < \infty$ seu grau máximo. Então, para o primeiro parâmetro crítico do Processo de Contato em \mathcal{G} , temos que*

$$\lambda_s(\mathcal{G}) \geq \frac{1}{D(\mathcal{G})} > 0.$$

Para o próximo resultado, vamos utilizar o fato de que, para o Processo de Contato, $\lambda_r(\mathbb{Z}) = \lambda_r(\mathbb{N})$, o que pode ser verificado em [Andjel, Miller e Pardoux \(2010, p. 392\)](#).

Teorema 2.4. *Seja \mathcal{G} um grafo infinito, conectado e de grau limitado. Então, para o segundo parâmetro crítico do Processo de Contato em \mathcal{G} , temos que*

$$\lambda_r(\mathcal{G}) \leq \lambda_r(\mathbb{Z}) < \infty.$$

Agora apresentamos um limitante superior para o parâmetro crítico de sobrevivência global.

Teorema 2.5 ((SCHONMANN, 2000)). *Suponha que \mathcal{G} é um grafo infinito, conectado e de grau limitado. Se $\iota_E(\mathcal{G}) > 0$, então para $\lambda > 1/\iota_E(\mathcal{G})$, existem $C, \gamma \in (0, \infty)$ de modo que para qualquer $A \subseteq V$,*

$$\mathbb{P}(\xi_{\mathcal{G},\lambda;t}^A = \emptyset \text{ para algum } t > 0) \leq C e^{-\gamma|A|},$$

isto é, para algum tempo $t > 0$, o processo morre (qualquer que seja $x \in V, \xi_{\mathcal{G},\lambda;t}^A(x) = 0$). Além disso, γ pode ser tomado tão grande quanto desejado, desde que λ seja grande o suficiente.

Em particular,

$$\lambda_s(\mathcal{G}) \leq \frac{1}{\iota_E(\mathcal{G})}.$$

Para o próximo resultado, vamos considerar $(\zeta_{\mathcal{G},\lambda;t}^A)_{t \geq 0}$, o Passeio Aleatório com Ramificação e o número de partículas no processo no vértice $x \in V$ no tempo t , $\zeta_{\mathcal{G},\lambda;t}^A(x)$. Para comparar o PAR com o Processo de Contato, vamos utilizar primeiramente um Passeio Aleatório simples em \mathcal{G} . Para $x, y \in V$, definimos

$$p_{\mathcal{G}}(x, y) = \frac{A_{\mathcal{G}}(x, y)}{d_x},$$

onde $A_{\mathcal{G}}$ é a matriz de adjacências de \mathcal{G} anteriormente definida e d_x é o grau do vértice x ; $p_{\mathcal{G}}(\cdot, \cdot)$ é o núcleo de transição do Passeio Aleatório simples em \mathcal{G} (SCHONMANN, 2000). A probabilidade de que esse Passeio Aleatório começando em x esteja em y no tempo n será expressa por $p_{\mathcal{G}}^n(x, y)$. Com isso, o *raio espectral do passeio aleatório* é definido como

$$R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (p_{\mathcal{G}}^n(x, y))^{1/n},$$

que não depende de $x, y \in V$. Como em (1.3) e (1.4), temos

$$p_{\mathcal{G}}^n(x, y) \leq (R_{\text{rw}}(\mathcal{G}))^n \text{ para quaisquer } x, y \in V, n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

e, para $n(k) = \text{bip}(\mathcal{G})k + \text{odd}_{\mathcal{G}}(x, y)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (p_{\mathcal{G}}^{n(k)}(x, y))^{1/n(k)} = R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) \text{ para quaisquer } x, y \in V. \quad (2.2)$$

Além disso, como $d(\mathcal{G}) \leq d_x \leq D(\mathcal{G})$, onde $d(\mathcal{G})$ e $D(\mathcal{G})$ são os graus mínimo e máximo de \mathcal{G} , respectivamente, e como $p_{\mathcal{G}}(x, y) = \frac{A_{\mathcal{G}}(x, y)}{d_x}$, então

$$\frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_{\mathcal{G}}^n(x, y))^{1/n}}{D(\mathcal{G})} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_{\mathcal{G}}^n(x, y)}{(d_x)^n} \right)^{1/n} \leq \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_{\mathcal{G}}^n(x, y))^{1/n}}{d(\mathcal{G})}.$$

Logo,

$$\frac{R(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})} \leq R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) \leq \frac{R(\mathcal{G})}{d(\mathcal{G})}. \quad (2.3)$$

Vamos também definir um terceiro parâmetro para o Processo de Contato, que vai auxiliar na comparação dos parâmetros críticos de sobrevivência global e local. Defina

$$\lambda_{\text{exp}}(\mathcal{G}) = \sup \left\{ \lambda : \mathbb{P}(\xi_{\mathcal{G},\lambda;t}^{\{r\}}(r) = 1) \text{ decai exponencialmente com } t \right\}.$$

Agora, utilizaremos esse parâmetro no Teorema a seguir.

Teorema 2.6 ((SCHONMANN, 2000)). *Suponha que $\mathcal{G} = (V, E)$ é um grafo infinito, conectado e de grau limitado. Para cada $\lambda > 0, x, y \in V$,*

$$\mathbb{P}(\xi_{\mathcal{G},\lambda;t}^{\{x\}}(y) = 1) \leq e^{(\lambda D(\mathcal{G})R_{\text{rw}}(\mathcal{G})-1)t}, \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

Em particular,

$$\lambda_r(\mathcal{G}) \geq \lambda_{\text{exp}}(\mathcal{G}) \geq \frac{1}{D(\mathcal{G})R_{\text{rw}}(\mathcal{G})} \geq \frac{d(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})R(\mathcal{G})}. \quad (2.5)$$

O próximo Teorema apresenta uma condição para que o Processo de Contato tenha duas transições de fase em grafos altamente não amenáveis.

Teorema 2.7 ((SCHONMANN, 2000)). *Suponha que \mathcal{G} é um grafo infinito, conectado e de grau limitado. Se*

$$\iota_E(\mathcal{G}) > \frac{D(\mathcal{G})^2}{\sqrt{D(\mathcal{G})^2 + d(\mathcal{G})^2}}, \quad (2.6)$$

então, para o Processo de Contato em \mathcal{G} ,

$$\lambda_s(\mathcal{G}) < \lambda_r(\mathcal{G}).$$

Se consideramos o caso no qual um grafo que atende às condições do Teorema 2.7 também é transitivo, temos uma simplificação desse resultado, o que implica no Corolário a seguir.

Corolário 2.1. *Seja \mathcal{G} um grafo infinito, conectado, de grau limitado e transitivo. Se $\iota_E(\mathcal{G})/D(\mathcal{G}) > 1/\sqrt{2}$, então $\lambda_s(\mathcal{G}) < \lambda_r(\mathcal{G})$.*

Esse Corolário pode ser utilizado nas árvores homogêneas, para o caso em que $d \geq 6$, possibilitando uma argumentação simples para mostrar que esse grafo possui duas transições de fase.

Corolário 2.2. *Seja \mathbb{T}_d a árvore homogênea de grau $d + 1$. Temos que, para $d \geq 6$, esse grafo atende às condições do Corolário 2.1, isto é,*

$$\lambda_s(\mathbb{T}_d) < \lambda_r(\mathbb{T}_d).$$

Sabemos, é claro, que o resultado é válido para $d \geq 2$, mas a demonstração para $d < 6$ é um pouco mais complicada, e não poderíamos simplesmente utilizar esse resultado. No capítulo a seguir expomos as demonstrações desses resultados.

3 Demonstrações

3.1 Resultados Auxiliares

Vamos apresentar alguns resultados auxiliares que vão contribuir para as demonstrações dos Teoremas do capítulo anterior. Primeiramente, um Lema que irá auxiliar na demonstração do Teorema 2.3.

Lema 3.1. *Sejam $\{N_t\}_{t \geq 0}$ um Processo de Poisson com taxa $\alpha > 0$ e τ uma variável aleatória exponencialmente distribuída, com taxa 1. Suponha que $\{N_t\}_{t \geq 0}$ e τ são independentes. Então, para $j = 0, 1, \dots$,*

$$P(N_\tau = j) = \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right) \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^j \quad (3.1)$$

e $E(N_\tau) = \alpha$.

Prova do Lema 3.1. Para $t > 0$, N_t é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro αt . Assim, por condicionamento em τ , para $j = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} P(N_\tau = j) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(N_\tau = j | \tau = t) f_\tau(t) dt = \int_0^{\infty} P(N_\tau = j | \tau = t) e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} P(N_t = j | \tau = t) e^{-t} dt = \int_0^{\infty} P(N_t = j) e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} (\alpha t)^j}{j!} e^{-t} dt = \frac{\alpha^j}{j!} \int_0^{\infty} t^j e^{-(\alpha+1)t} dt \\ &= \frac{\alpha^j}{j!} \frac{\Gamma(j+1)}{(\alpha+1)^{j+1}} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha+1)^{j+1}}{\Gamma(j+1)} t^j e^{-(\alpha+1)t} dt \\ &= \frac{\alpha^j}{j!} \frac{\Gamma(j+1)}{(\alpha+1)^{j+1}} = \left(\frac{1}{\alpha+1} \right) \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^j. \end{aligned}$$

Logo, N_τ possui distribuição geométrica e, portanto, $E(N_\tau) = \alpha$. □

Os dois próximos Lemas auxiliarão na demonstração do Teorema 2.6 e são utilizados devido à comparação entre o Processo de Contato e o Passeio Aleatório com Ramificação.

Lema 3.2. *Considere um Passeio Aleatório simples a tempo contínuo em \mathcal{G} com taxa de salto α , e seja $P_{\mathcal{G}, \alpha; t}(x, y)$ a probabilidade de que, começando em x , a partícula esteja em y no tempo t . Então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log P_{\mathcal{G}, \alpha; t}(x, y) = \alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - 1), \quad (3.2)$$

e, para todo $t \geq 0$,

$$P_{\mathcal{G},\alpha;t}(x, y) \leq e^{\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G})-1)t}. \quad (3.3)$$

Prova. Por definição (DOBROW, 2016, p. 307),

$$P_{\mathcal{G},\alpha;t}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} p_{\mathcal{G}}^n(x, y). \quad (3.4)$$

Primeiro, (3.3) segue facilmente de (2.1), pois

$$P_{\mathcal{G},\alpha;t}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} p_{\mathcal{G}}^n(x, y) \leq e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} (R_{\text{rw}}(\mathcal{G}))^n = e^{\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G})-1)t}.$$

Para mostrar (3.2), vamos utilizar (2.2). Para $\text{odd}_{\mathcal{G}}(x, y) = 0$ e $\text{bip}(\mathcal{G}) = 2$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (p_{\mathcal{G}}^{2k}(x, y))^{1/(2k)} = R_{\text{rw}}(\mathcal{G}). \quad (3.5)$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ pequeno, existe $K < \infty$ de modo que para $k \geq K$,

$$(p_{\mathcal{G}}^{2k}(x, y))^{1/(2k)} \geq R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon \implies p_{\mathcal{G}}^{2k}(x, y) \geq (R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)^{2k}.$$

Portanto, por (3.4),

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{G},\alpha;t}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} p_{\mathcal{G}}^k(x, y) \geq \sum_{k=K}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^{2k}}{(2k)!} p_{\mathcal{G}}^{2k}(x, y) \\ &\geq \sum_{k=K}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t)^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned} \sum_{k=K}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t)^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{K-1} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t)^{2k}}{(2k)!} \\ &= e^{-\alpha t} \left(\cosh(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t) - \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t)^{2k}}{(2k)!} \right), \end{aligned}$$

e $\cosh(t)$ é o cosseno hiperbólico de t . Assim,

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{G},\alpha;t}(x, y) &\geq e^{-\alpha t} \left(\cosh(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t) - \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t)^{2k}}{(2k)!} \right) \\ &\geq e^{-\alpha t} \left(\frac{e^{\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t} + e^{-\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t}}{2} - \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t)^{2k}}{(2k)!} \right) \\ &\geq e^{-\alpha t} \left(\frac{e^{\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t}}{2} - \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t)^{2k}}{(2k)!} \right) \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo natural na desigualdade e multiplicando por t^{-1} , temos

$$\frac{1}{t} \log P_{\mathcal{G},\alpha;t}(x, y) \geq \alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon - 1) - \frac{\log(2)}{t} - \frac{1}{t} \log \left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{(\alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon)t)^{2k}}{(2k)!} t \right).$$

Finalmente, fazendo $t \rightarrow \infty$, obtemos

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log P_{\mathcal{G},\alpha;t}(x, y) \geq \alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - \varepsilon - 1).$$

Mas, por (3.3),

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log P_{\mathcal{G},\alpha;t}(x, y) \leq \alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - 1),$$

logo, para $\text{odd}_{\mathcal{G}}(x, y) = 0$ e $\text{bip}(\mathcal{G}) = 2$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log P_{\mathcal{G},\alpha;t}(x, y) = \alpha(R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) - 1).$$

Para mostrar (3.2) no caso em que $\text{odd}_{\mathcal{G}}(x, y) = 0$ e $\text{bip}(\mathcal{G}) = 1$, o procedimento é o mesmo, mas utilizamos o limite $\lim_{k \rightarrow \infty} (p_{\mathcal{G}}^k(x, y))^{1/k} = R_{\text{rw}}(\mathcal{G})$. Como em (3.5) trata-se de uma subsequência, teremos o mesmo resultado do limite desejado. Para $\text{odd}_{\mathcal{G}}(x, y) = 1$, a demonstração é similar e será omitida. \square

Lema 3.3 (Schinazi (1993), Schinazi (2014)). *Seja $\{\zeta_{\mathcal{G},\alpha;t}^{\{x\}}\}$ o Passeio Aleatório com Ramificação em um grafo \mathcal{G} , com taxa α , iniciando com somente uma partícula em x . Para quaisquer $x, y \in V$ e $t \geq 0$, o número esperado de partículas no vértice y no tempo t é dado por*

$$E(\zeta_{\mathcal{G},\alpha;t}^{\{x\}}(y)) = e^{(\alpha-1)t} P_{\mathcal{G},\alpha;t}(x, y). \quad (3.6)$$

Prova. Vamos utilizar a equação diferencial de Kolmogorov para trás para o Passeio Aleatório simples a tempo contínuo, em que a partícula se move segundo tempos exponenciais de taxa 1 (DOBROW, 2016, p. 275). Condicionando no que ocorre no intervalo de tempo $[0, h]$ e desprezando termos de ordem maior que h (pois resultam em um limite igual a zero), temos que, para $x, y, z \in V$,

$$P_{\mathcal{G},1;t+h}(x, y) = \sum_{z \in V} h p(x, z) P_{\mathcal{G},1;t}(z, y) + (1 - h) P_{\mathcal{G},1;t}(x, y), \quad (3.7)$$

onde $p(x, z) = p_{\mathcal{G}}(x, z)$ é a probabilidade de transição do vértice x para o vértice z . Subtraindo $P_{\mathcal{G},1;t}(x, y)$ de (3.7) e dividindo a equação por h , podemos fazer $h \rightarrow 0$ para obter

$$P'_{\mathcal{G},1;t}(x, y) = \sum_{z \in V} p(x, z) P_{\mathcal{G},1;t}(z, y) - P_{\mathcal{G},1;t}(x, y). \quad (3.8)$$

Como, para $x \neq y$, $P_{\mathcal{G},1;0}(x, y) = 0$ e $P_{\mathcal{G},1;0}(y, y) = 1$, a equação (3.8) possui uma única solução, com essas condições iniciais.

Seja agora $m(t, x) = E(\zeta_{\mathcal{G}, \alpha; t}^{\{x\}}(y))$, e vamos encontrar a equação diferencial para trás. Condicionando no que ocorre no intervalo de tempo $[0, h]$ e usando que o processo $\{\zeta_{\mathcal{G}, \alpha; t}^{\{x\}}\}$ é markoviano, queremos calcular o valor de $m(t+h, x)$. Para isso, lembramos que o processo começa com uma única partícula em x . Considerando o intervalo $[0, h]$, definimos:

- $N_m(h) \in \{0, 1\}$: número de mortes da partícula em x ;
- $N_g(h)$: número de nascimentos que a partícula em x gera;
- Y : variável aleatória com $P(Y = z) = p(x, z)$, $z \in V$.

Utilizando a Lei da Esperança Total, vamos considerar o caso em que no máximo uma partícula é gerada (desprezando os termos de ordem maior que h). Assim,

$$\begin{aligned} m(t+h, x) &= E(\zeta_{\mathcal{G}, \alpha; t+h}^{\{x\}}(y) | N_m(h) = N_g(h) = 0)P(N_m(h) = N_g(h) = 0) + \\ &+ \sum_{z \in V} E(\zeta_{\mathcal{G}, \alpha; t+h}^{\{x\}}(y) | N_m(h) = 0, N_g(h) = 1, Y = z)P(N_m(h) = 0, N_g(h) = 1, Y = z) + \\ &+ E(\zeta_{\mathcal{G}, \alpha; t+h}^{\{x\}}(y) | N_m(h) = 1, N_g(h) = 0)P(N_m(h) = 1, N_g(h) = 0) + o(h). \end{aligned}$$

Em que

- $E(\zeta_{\mathcal{G}, \alpha; t+h}^{\{x\}}(y) | N_m(h) = N_g(h) = 0) = m(t, x)$, pois a esperança se renova, pela propriedade markoviana, dado que nada ocorreu em $[0, h]$;
- $E(\zeta_{\mathcal{G}, \alpha; t+h}^{\{x\}}(y) | N_m(h) = 0, N_g(h) = 1, Y = z) = m(t, x) + m(t, z)$, pela propriedade markoviana, pois em x não houve morte e temos uma nova partícula em z no tempo h ;
- $E(\zeta_{\mathcal{G}, \alpha; t+h}^{\{x\}}(y) | N_m(h) = 1, N_g(h) = 0) = 0$, pois a única partícula inicial morreu até o tempo h ;
- $P(N_m(h) = N_g(h) = 0) \stackrel{\text{ind.}}{=} P(N_m(h) = 0)P(N_g(h) = 0) = e^{-h}e^{-\alpha h} = e^{-(\alpha+1)h} = 1 - (\alpha+1)h + o(h)$;
- $P(N_m(h) = 0, N_g(h) = 1, Y = z) \stackrel{\text{ind.}}{=} P(N_m(h) = 0)P(N_g(h) = 1)P(Y = z) = e^{-h}(1 - e^{-\alpha h})p(x, z) + o(h) = \alpha h p(x, z) + o(h)$.

A última probabilidade foi simplificada, de modo que tudo com ordem maior que h após se realizar o produto é igual a $o(h)$ e foi ignorado. Logo,

$$m(t+h, x) = \sum_{z \in V} \alpha h p(x, z)[m(t, x) + m(t, z)] + (1 - (\alpha+1)h)m(t, x). \quad (3.9)$$

Subtraindo $m(t, x)$ de (3.9), dividindo a equação por h e fazendo $h \rightarrow 0$, obtemos

$$m'(t, x) = \alpha \sum_{z \in V} p(x, z)m(t, z) - m(t, x), \quad (3.10)$$

onde a derivada é tomada em relação a t . Como (3.8) possui apenas uma solução, concluímos que

$$m(t, x) = e^{(\alpha-1)t} P_{\mathcal{G}, \alpha t; 1}(x, y) = e^{(\alpha-1)t} P_{\mathcal{G}, \alpha; t}(x, y)$$

é a única solução de (3.10), com valor inicial $m(0, x) = 0$, para $x \neq y$, e $m(0, y) = 1$. \square

3.2 Provas dos Resultados Principais

As demonstrações dos teoremas enunciados na seção de resultados principais são apresentadas aqui. As provas estão organizadas na ordem de apresentação dos Teoremas e Corolários.

Prova do Teorema 2.3. Para provar o limitante inferior para $\lambda_s(\mathcal{G})$, vamos comparar o Processo de Contato com um Passeio Aleatório com Ramificação. Vamos considerar os dois processos começando com apenas uma partícula no vértice x , mas cada partícula do PAR dá à luz a outra partícula a uma taxa $\alpha = \lambda D(\mathcal{G})$. Logo, temos que $\{\zeta_{\mathcal{G}, \lambda D(\mathcal{G}); t}^{\{x\}}\}$ é estocasticamente maior do que $\{\xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^{\{x\}}\}$.

Observamos que, no PAR, cada partícula posicionada em certo vértice gera descendentes nos vértices vizinhos conforme um Processo de Poisson com taxa $\alpha = \lambda D(\mathcal{G})$, até o instante em que morre. Além disso, todas as partículas se comportam independentemente. Consideremos $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ um processo de ramificação de Bienaymé–Galton–Watson com $Z_0 = 1$ e cuja distribuição da progênie é dada por (3.1) com $\alpha = \lambda D(\mathcal{G})$. Então, $\{\zeta_{\mathcal{G}, \lambda D(\mathcal{G}); t}^{\{x\}}\}$ é dominado por $\{Z_n\}_{n \geq 0}$. Usando o Lema 3.1, o processo de ramificação se extingue quase certamente se $\lambda D(\mathcal{G}) < 1$ (ver Dobrow (2016, p. 161)). Isso significa que o PAR se extingue quase certamente se $\lambda < 1/D(\mathcal{G})$, implicando que o mesmo ocorre com o Processo de Contato. Logo, $\lambda_s(\mathcal{G}) \geq 1/D(\mathcal{G})$. \square

Prova do Teorema 2.4. Como \mathcal{G} é um grafo infinito, conectado e de grau limitado, então ele contém uma cópia de \mathbb{N} em si. Assim, se o processo sobrevive localmente em \mathbb{N} , então ele também sobreviverá localmente em \mathcal{G} , o que implica que $\lambda_r(\mathcal{G}) \leq \lambda_r(\mathbb{N})$. Logo, pelo fato de que $\lambda_r(\mathbb{Z}) = \lambda_r(\mathbb{N})$ (o que pode ser verificado em Andjel, Miller e Pardoux (2010, p. 392)), e como o parâmetro de sobrevivência local é finito para \mathbb{Z} , como visto no Teorema 2.1, concluímos:

$$\lambda_r(\mathcal{G}) \leq \lambda_r(\mathbb{Z}) < \infty. \quad \square$$

Prova do Teorema 2.5. Quando o estado do processo de contato é $S \subseteq V$, pela definição do processo, ele passa para estados com mais um vértice infectado a uma taxa $\lambda |\partial_E S|$ e com menos um vértice infectado a uma taxa $|S|$. Pela definição da constante de Cheeger, $\lambda |\partial_E S| \geq \lambda_E(\mathcal{G}) |S|$. Assim, o processo $(\xi_{\mathcal{G}, \lambda; t}^A)_{t \geq 0}$ é estocasticamente maior do que um

processo de nascimento e morte $\{X_{\lambda;t}\}_{t \geq 0}$, com $X_{\lambda;0} = |A|$, no qual uma morte ocorre a uma taxa $X_{\lambda;t}$ e um nascimento ocorre a uma taxa $\lambda \iota_E(\mathcal{G})X_{\lambda;t}$.

A probabilidade de que esse processo de nascimento e morte alcance o estado 0 é igual à probabilidade correspondente para um processo de nascimento e morte começando no mesmo estado, e no qual morte e nascimento ocorrem a taxas 1 e $\lambda \iota_E(\mathcal{G})$, respectivamente. O que é fácil de verificar, analisando a cadeia imersa dos dois processos. Mas, se $\lambda > 1/\iota_E(\mathcal{G})$, a taxa de nascimento é maior do que a taxa de morte, logo a probabilidade de que esse processo atinja em algum momento o estado 0 decai exponencialmente com $|A|$ (DURRETT, 2016). Além disso, se tomarmos λ grande o suficiente, a taxa de decaimento exponencial pode ser tão grande quanto desejado. \square

Prova do Teorema 2.6. Primeiramente, note que vale a desigualdade $\lambda_{\text{exp}}(\mathcal{G}) \leq \lambda_r(\mathcal{G})$, pois, para $\lambda < \lambda_{\text{exp}}(\mathcal{G})$, temos que

$$\mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow \infty} \xi_{\mathcal{G},\lambda;t}^{\{r\}}(r) = 1) = 0, \quad (3.11)$$

o que pode ser visto por meio do Lema de Borel–Cantelli. De fato, tomando $\lambda < \lambda_{\text{exp}}(\mathcal{G})$, $\sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_{\mathcal{G},\lambda;t}^{\{r\}}(r) = 1) < \infty$, logo, $\xi_{\mathcal{G},\lambda;t}^{\{r\}}(r) = 1$ irá ocorrer para apenas um número finito de tempos inteiros, quase certamente. Porém, pela propriedade markoviana do Processo de Contato, se o vértice r estivesse infectado em tempos arbitrariamente grandes, então estaria quase certamente infectado em tempos *inteiros* arbitrariamente grandes. Consequentemente, (3.11) é válida, o que implica $\lambda < \lambda_r(\mathcal{G})$, logo $\lambda_{\text{exp}}(\mathcal{G}) \leq \lambda_r(\mathcal{G})$.

Agora, vamos considerar o passeio aleatório com ramificação $(\zeta_{\mathcal{G},\lambda D(\mathcal{G});t}^A)_{t \geq 0}$. Usando (3.6) e também (3.3), obtemos, pela Desigualdade de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{\mathcal{G},\lambda;t}^{\{x\}}(y) = 1) &\leq \mathbb{P}(\zeta_{\mathcal{G},\lambda D(\mathcal{G});t}^{\{x\}}(y) \geq 1) \\ &\leq E(\zeta_{\mathcal{G},\lambda D(\mathcal{G});t}^{\{x\}}(y)) = e^{(\lambda D(\mathcal{G})-1)t} P_{\mathcal{G},\lambda D(\mathcal{G});t}(x, y) \\ &\leq e^{(\lambda D(\mathcal{G})-1)t + \lambda D(\mathcal{G})(R_{\text{rw}}(\mathcal{G})-1)t} = e^{(\lambda D(\mathcal{G})R_{\text{rw}}(\mathcal{G})-1)t}, \end{aligned}$$

o que mostra (2.4). Para provar (2.5), observamos que

- $\lambda_r(\mathcal{G}) \geq \lambda_{\text{exp}}(\mathcal{G})$ foi apresentada anteriormente;
- $\lambda_{\text{exp}}(\mathcal{G}) \geq \frac{1}{D(\mathcal{G})R_{\text{rw}}(\mathcal{G})}$ é uma consequência de (2.4), e da definição de $\lambda_{\text{exp}}(\mathcal{G})$, pois para $\lambda < \frac{1}{D(\mathcal{G})R_{\text{rw}}(\mathcal{G})}$, a probabilidade $\mathbb{P}(\xi_{\mathcal{G},\lambda;t}^{\{r\}}(r) = 1)$ irá decair exponencialmente conforme t cresce;
- $\frac{1}{D(\mathcal{G})R_{\text{rw}}(\mathcal{G})} \geq \frac{d(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})R(\mathcal{G})}$ segue de (2.3), pois $R_{\text{rw}}(\mathcal{G}) \leq \frac{R(\mathcal{G})}{d(\mathcal{G})}$. \square

Prova do Teorema 2.7. De (2.6), temos

$$\frac{D(\mathcal{G})^2}{\iota_E(\mathcal{G})^2} < 1 + \frac{d(\mathcal{G})^2}{D(\mathcal{G})^2}.$$

Porém, conforme (1.5),

$$D(\mathcal{G})^2 \geq \iota_E(\mathcal{G})^2 + R(\mathcal{G})^2,$$

portanto

$$\frac{1}{\iota_E(\mathcal{G})} < \frac{d(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})R(\mathcal{G})}.$$

O resultado segue imediatamente, pois, pelo Teorema 2.5, sabemos que $\lambda_s(\mathcal{G}) \leq \frac{1}{\iota_E(\mathcal{G})}$ e, pelo Teorema 2.6, $\lambda_r(\mathcal{G}) \geq \frac{d(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})R(\mathcal{G})}$. \square

Prova do Corolário 2.1. Pelo Teorema 2.7, dadas as condições citadas anteriormente, teremos duas transições de fase se

$$\iota_E(\mathcal{G}) > \frac{D(\mathcal{G})^2}{\sqrt{D(\mathcal{G})^2 + d(\mathcal{G})^2}}.$$

Mas, se \mathcal{G} é transitivo, então todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Assim, $D(\mathcal{G}) = d(\mathcal{G})$. Logo, a condição fica

$$\iota_E(\mathcal{G}) > \frac{D(\mathcal{G})^2}{\sqrt{2D(\mathcal{G})^2}} = \frac{D(\mathcal{G})^2}{D(\mathcal{G})\sqrt{2}} = \frac{D(\mathcal{G})}{\sqrt{2}}.$$

Portanto, $\lambda_s(\mathcal{G}) < \lambda_r(\mathcal{G})$ se $\iota_E(\mathcal{G})/D(\mathcal{G}) > 1/\sqrt{2}$. \square

Prova do Corolário 2.2. Como \mathbb{T}_d é um grafo que atende às condições do Corolário 2.1, basta aplicar esse resultado. Assim, para $d \geq 1$,

$$\frac{\iota_E(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})} > \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{d-1}{d+1} = 1 - \frac{2}{d+1} > \frac{1}{\sqrt{2}} \iff d > \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \approx 5,8.$$

Logo, a árvore homogênea \mathbb{T}_d tem duas transições de fase se $d \geq 6$. \square

4 Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi apresentar algumas condições sob as quais o Processo de Contato possui duas transições de fases, especificamente em grafos não amenáveis. Com resultados baseados em [Schonmann \(2000\)](#), vimos que, para grafos não amenáveis infinitos, conectados e de grau limitado, uma condição suficiente para que o processo tenha duas transições de fase é que a constante de Cheeger do grafo satisfaça à condição em (2.6). Esse fato pode ser utilizado para verificar a múltipla transição de fase em grafos conhecidos e que atendam às condições descritas (como foi o caso no Corolário 2.2).

Assim, mostramos que, mesmo sem a hipótese de transitividade, um valor grande da constante de Cheeger comparado com uma função apropriada dos graus mínimo e máximo do grafo \mathcal{G} implica em uma desigualdade estrita entre os parâmetros críticos $\lambda_s(G)$ e $\lambda_r(G)$. Além do Processo de Contato, [Schonmann \(2000\)](#) também estuda o modelo de Percolação Independente e os modelos de Ising e Potts, e prova que, sob condições similares no grafo, cada um desses modelos exibe mais de um ponto crítico, separando regimes qualitativamente distintos.

Como um assunto amplamente estudado em Probabilidade, é interessante que sejam desenvolvidas novas ferramentas e outros aspectos do Processo de Contato sejam analisados. Com isso, este trabalho se propôs a realizar uma breve revisão bibliográfica sobre o tema, de modo a estimular uma pesquisa mais profunda e detalhada sobre o assunto em muitas das referências aqui apresentadas.

Bibliografia

- ANDJEL, E.; MILLER, J.; PARDOUX, E. Survival of a single mutant in one dimension. *Electronic Journal of Probability*, Institute of Mathematical Statistics and Bernoulli Society, v. 15, p. 386–408, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 33.
- ASRATIAN, A. S.; DENLEY, T. M. J.; HÄGGKVIST, R. *Bipartite Graphs and their Applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Tracts in Mathematics). Citado na página 14.
- BENJAMINI, I.; LYONS, R.; SCHRAMM, O. Percolation perturbations in potential theory and random walks. *Random Walks and Discrete Potential Theory, Sympos. Math.*, Cambridge University Press Cambridge, v. 39, p. 56–84, 1999. Citado na página 16.
- BETHUELSEN, S. A.; SILVA, G. B. da; VALESIN, D. Graph constructions for the contact process with a prescribed critical rate. *Journal of Theoretical Probability*, Springer, v. 35, n. 2, p. 863–893, 2022. Citado na página 24.
- BEZUIDENHOUT, C.; GRIMMETT, G. The critical contact process dies out. *The Annals of Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 18, n. 4, p. 1462–1482, 1990. Citado na página 24.
- BICKLE, A. *Fundamentals of Graph Theory*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2020. v. 43. Citado 3 vezes nas páginas 12, 15 e 20.
- BIGGS, N. *Algebraic graph theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1993. Citado na página 15.
- CHEEGER, J. A lower bound for the smallest eigenvalue of the laplacian. In: _____. *Problems in Analysis*. Princeton University Press, 1970. p. 195–200. Disponível em: <https://doi.org/10.1515/9781400869312-013>. Citado na página 16.
- DOBROW, R. P. *Introduction to stochastic processes with R*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 33.
- DOBRUSHIN, R. L. Markov processes with a large number of locally interacting components: existence of a limit process and its ergodicity. *Problemy peredachi informatsii*, Russian Academy of Sciences, Branch of Informatics, Computer Equipment and . . . , v. 7, n. 2, p. 70–87, 1971. Citado na página 10.
- DURRETT, R. Essentials of stochastic processes. In: . [S.l.]: Springer, 2016. Citado na página 34.
- DURRETT, R.; JUNG, P. Two phase transitions for the contact process on small worlds. *Stochastic processes and their applications*, Elsevier, v. 117, n. 12, p. 1910–1927, 2007. Citado na página 25.
- GODSIL, C.; ROYLE, G. F. *Algebraic graph theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. v. 207. Citado na página 12.

HARRIS, T. E. Contact interactions on a lattice. *Ann. Probab.*, v. 2, n. 6, p. 969–988, 1974. Citado na página 10.

HEYDEMANN, M.-C. Cayley graphs and interconnection networks. In: _____. *Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. p. 167–224. ISBN 978-94-015-8937-6. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-94-015-8937-6_5. Citado na página 16.

HUANG, X.; DURRETT, R. The contact process on random graphs and Galton–Watson trees. *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, v. 17, p. 159, 01 2020. Citado na página 24.

_____. The contact process on periodic trees. *Electronic Communications in Probability*, Institute of Mathematical Statistics and Bernoulli Society, v. 25, n. none, p. 1 – 12, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/20-ECP305>. Citado na página 24.

KREBS, M.; SHAHEEN, A. *Expander families and Cayley graphs: a beginner's guide*. [S.l.]: Oxford University Press, 2011. Citado na página 15.

KRONE, S. M. The two-stage contact process. *The Annals of Applied Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 9, n. 2, p. 331–351, 1999. Citado na página 25.

LEBENSZTAYN, E. *O modelo de percolação em grafos: Um estudo de condições para a transição de fase*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2002. Citado na página 17.

LIGGETT, T. M. *Interacting particle systems*. [S.l.]: Springer, 1985. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 24.

_____. Multiple transition points for the contact process on the binary tree. *The Annals of Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 24, n. 4, p. 1675–1710, 1996. Citado na página 24.

_____. *Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999. v. 324. Citado 3 vezes nas páginas 10, 21 e 25.

_____. *Continuous time Markov processes: an introduction*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010. v. 113. Citado na página 22.

_____. T. E. Harris' contributions to interacting particle systems and percolation. *The Annals of Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 39, n. 2, p. 407–416, 2011. Citado na página 24.

LIGGETT, T. M.; SCHINAZI, R. B.; SCHWEINSBERG, J. A contact process with mutations on a tree. *Stochastic processes and their applications*, Elsevier, v. 118, n. 3, p. 319–332, 2008. Citado na página 25.

LYONS, R.; PERES, Y. *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press, New York, 2016. v. 42. xv+699 p. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, v. 42). Available at <https://rdlyons.pages.iu.edu/>. ISBN 978-1-107-16015-6. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1017/9781316672815>. Citado na página 15.

MEIER, J. *Groups, graphs, and trees: an introduction to the geometry of infinite groups*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008. Citado na página 15.

- MOHAR, B. Isoperimetric inequalities, growth, and the spectrum of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, v. 103, p. 119–131, 1988. ISSN 0024-3795. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379588902248>. Citado na página 20.
- MOHAR, B.; WOESS, W. A Survey on Spectra of infinite Graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 21, n. 3, p. 209–234, 05 1989. ISSN 0024-6093. Disponível em: <https://doi.org/10.1112/blms/21.3.209>. Citado na página 20.
- MOURRAT, J.-C.; VALESIN, D. Phase transition of the contact process on random regular graphs. *Electronic journal of Probability*, Institute of Mathematical Statistics and Bernoulli Society, v. 21, p. 1–17, 2016. Citado na página 25.
- NAM, D.; NGUYEN, O.; SLY, A. Critical value asymptotics for the contact process on random graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 375, n. 06, p. 3899–3967, 2022. Citado na página 24.
- PEMANTLE, R. The contact process on trees. *The Annals of Probability*, JSTOR, p. 2089–2116, 1992. Citado na página 24.
- RAHMAN, M. S. et al. *Basic graph theory*. [S.l.]: Springer, 2017. v. 9. Citado na página 12.
- SCHINAZI, R. On multiple phase transitions for branching markov chains. *Journal of statistical physics*, Springer, v. 71, n. 3, p. 507–511, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 31.
- SCHINAZI, R. B. *Classical and spatial stochastic processes: with applications to biology*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 31.
- SCHONMANN, R. H. Multiplicity of phase transitions and mean-field criticality on highly non-amenable graphs. *Commun. Math. Phys.*, v. 219, p. 271–322, 2000. Citado 8 vezes nas páginas 7, 8, 11, 15, 25, 27, 28 e 36.
- SENETA, E. *Non-negative matrices and Markov chains*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado na página 20.
- SPITZER, F. Interaction of markov processes. *Advances in Mathematics*, v. 5, n. 2, p. 246–290, 1970. ISSN 0001-8708. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870870900344>. Citado na página 10.
- STACEY, A. M. The existence of an intermediate phase for the contact process on trees. *The Annals of Probability*, Institute of Mathematical Statistics, v. 24, n. 4, p. 1711–1726, 1996. Citado na página 24.
- XUE, X. An improved upper bound for the critical value of the contact process on \mathbb{Z}^d with $d \geq 3$. *Electronic Communications in Probability*, Institute of Mathematical Statistics and Bernoulli Society, v. 23, p. 1–11, 2018. Citado na página 25.