UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

FABIANA CORREIA PEREIRA

NÚMEROS DE FIBONACCI: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Campinas

2022

FABIANA CORREIA PEREIRA

NÚMEROS DE FIBONACCI: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna FABIANA CORREIA PEREIRA e orientada pelo Prof.Dr. José Plínio de Oliveira Santos.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P414n

Pereira, Fabiana Correia, 1988-
Números de Fibonacci : propriedades e aplicações / Fabiana Correia Pereira. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Números de Fibonacci. 2. Números de Lucas. 3. Fórmula de Binet. 4. Triângulo de Pascal. 5. Matrizes (Matemática). I. Santos, José Plínio de Oliveira, 1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Fibonacci numbers : properties and applications
Palavras-chave em inglês:
Fibonacci numbers
Lucas numbers
Binet formula
Pascal triangle
Matrices
Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional
Titulação: Mestra em Matemática Aplicada e Computacional
Banca examinadora:
José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]
Sueli Irene Rodrigues Costa
Robson Oliveira da Silva
Data de defesa: 24-06-2022
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/xxxx-xxxx-xxxx-xxxx
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/1116276335577754

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 24 de junho de 2022 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Prof(a). Dr(a). ROBSON OLIVEIRA DA SILVA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Este trabalho é dedicado aos meus pais.

.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu forças para nunca desistir e concluir este trabalho.

Aos meus pais e família que sempre me apoiaram.

Ao meu orientador, Professor Dr. José Plínio de Oliveira Santos, agradeço pela sua atenção e disponibilidade em me orientar, pelas sugestões e indicações para melhoria do meu trabalho.

Aos amigos que fiz durante o curso, em especial Veralúcia, Juliana Souza, Saris e Paulo César (Paulinho), que são pessoas maravilhosas e espero que nosso contato continue mesmo após finalização do curso.

Ao Prof. Fabiano Tavares e o colega Luiz Alves que sempre me incentivaram a continuar o curso e concluí-lo.

E por fim, a todas as pessoas que contribuíram direto ou indiretamente para a finalização deste trabalho

"Há um tempo em que é preciso abandonar as roupas usadas,
que já tem a forma do nosso corpo, e esquecer os nossos caminhos,
que nos levam sempre aos mesmos lugares.
É o tempo da travessia: e, se não ousarmos fazê-la,
teremos ficado, para sempre,à margem de nós mesmos".
(Fernando Teixeira)

Resumo

Neste trabalho, estudamos os números de Fibonacci, que recebe este nome em homenagem ao matemático Leonardo Fibonacci (1170-1250). Para tanto, realizamos uma pesquisa bibliográfica buscando elementos essenciais a fim de explanar as principais propriedades e aplicações. Na primeira parte, abordamos o contexto histórico em que surgiu a famosa sequência, bem como suas propriedades e ralação com os números de Lucas. Na segunda parte, mostramos a relação dos números de Fibonacci com a teoria dos números e suas aplicações, destacando-se a fórmula de Binet e identidades. Na terceira parte, mostramos a conexão entre os números de Fibonacci e a álgebra linear, através das matrizes e determinantes. E por fim, na quarta parte, estudamos os polinômios de Fibonacci bem como suas propriedades e derivada.

Palavras-chave: Números de Fibonacci; números de Lucas; Formula de Binet; triângulo de Pascal; matrizes; determinantes; polinômios.

Abstract

In this work, we study the Fibonacci numbers, named after the mathematician Leonardo Fibonacci (1170-1250). For properties, we carried out a bibliographic research looking for essential elements for the purpose of plans such as principals and applications. In the first part, we approach the historical context in which a famous sequence appeared, as well as its relationship with the numbers of Lucas properties. In the second part, we show the relationship of Fibonacci numbers with number theory and its applications, highlighting the Binet formula and identities. In the third part, we show the connection between Fibonacci numbers and a linear algebra, through matrices and determinants. And finally, in the fourth part, we study the Fibonacci polynomials as well as their properties and derivatives.

.

Keywords: Fibonacci numbers; Lucas numbers; Binet's formula; Pascal's triangle; matrices; determinants; polynomials.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Leonardo Fibonacci (1170-1250) foi um grande matemático italiano da idade média. Estudando um problema fictício relacionado a um casal de coelhos, ele observou a seguinte sequência numérica, $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...)$, estes estudos deram origem à chamada sequência de Fibonacci, definida pela relação de recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, na qual cada termo subsequente é obtido a partir da soma dos dois anteriores.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, cujas principais referencias teóricas são,(KOSHY, 2019), (GRIMALDI, 2012), (POSAMENTIER; LEHMANN, 2010).

No primeiro capítulo, trazemos uma breve introdução histórica sobre Fibonacci, sua principal obra, o LiberAbaci (1202), além de algumas propriedades e como os números de Fibonacci são encontrados na natureza. Ainda neste capítulo, apresentamos os números de Lucas, demonstrando algumas propriedade e a relevante relação existente entre os números de Fibonacci e os números de Lucas. Lucas foi um matemático francês que estudou os números de Fibonacci, nomeando a famosa sequência.

No segundo capítulo abordamos os números de Fibonacci e sua relação com a teoria dos números. Vamos mostrar uma importante ferramenta para encontrar qualquer número da sequência de Fibonacci, a fórmula de Binet. Demonstramos como os números de Fibonacci estão presentes na diagonal do triângulo de Pascal, sua relação com funções geradoras, subconjuntos e composições.

No terceiro capítulo, exploramos a relação dos números de Fibonacci e a álgebra linear, partir da matriz Q, suas propriedades e determinantes que geram os números de Fibonacci.

No quarto e último capítulo, abordamos os polinômios de Fibonacci, suas propriedades, derivadas e matriz $Q(x)$.

O estudo dos números de Fibonacci tornou-se de grande relevância, tendo em vista sua versatilidade ao relacionar-se com diversas áreas da matemática, como veremos neste trabalho.

1 A Sequência de Fibonacci

Figura 1 – Fibonacci

Fonte:(ZAHN, 2011)

Leonardo de Pisa (c. 1175-1250), conhecido como Fibonacci (que quer dizer filho de Bonaccio), foi um grande matemático italiano da baixa idade média, nasceu na cidade de Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis. Por ser filho de um mercador, Fibonacci estava rodeado pelo mundo dos negócios e as viagens pelo Mediterrâneo eram frequentes.

Pisa, expandia-se como reflexo das consequências da revolução comercial do Século XII e do surgimento das rotas internacionais pelo Mediterrâneo, ela foi importante por desencandear um elo de transformação pela Europa.

Viajando pelo Mediterrâneo, Fibonacci entrou em contato com diversas culturas, principalmente do Oriente, o que o motivou a estudar o sistema de numeração indo-arábico e torná-los conhecidos por toda Europa Medieval. Fibonacci foi autor de quatro obras: Pratica Geometriae, Líber Quadratorum, Flos e o Liber Abaci, este último, sua obra famosa escrita em 1202 e republicada em 1228, contribui de forma significativa para a difusão do sistema de numeração hindu-arábico entre os mercadores italianos.

O Liber Abaci, tornou Fibonacci conhecido no Ocidente e nele encontramos o célebre problema sobre a reprodução de coelhos, cuja resolução deu início à chamada sequência de Fibonacci, que possui propriedades importantes e sua principal característica é a recursividade,como veremos na próxima seção.

A fim de perpetuar os estudos dos números de Fibonacci, em 1963 foi criada a Associação Fibonacci , cuja principal publicação é um periódico chamado *Fibonacci Quarterly* (LIVIO, 2008) que tem como objetivo incentivar proposta de pesquisa, novos resultados, problemas desafiadores e novas provas de relações.

1.1 O Liber Abaci

Considerado a principal obra de Fibonacci, o Liber Abaci (também Livro do Ábaco) - Não é um livro sobre o ábaco, mas um trabalho sobre problemas e métodos algébricos em que o emprego do sistema de numeração Hindu-arábico é amplamente utilizado (SANTOS, 2009).Foi escrito em 1202 e tinha como base a experiência que Fibonacci adquiriu em suas viagens pelo Mediterrâneo.

Esta importante obra, teve várias republicações, sempre revisadas. Atualmente, só existem três publicações deste livro e o seu original teve 500 páginas. Por ser um marco daquele período muitos o copiavam, pois como sugere seu nome, o mesmo era utilizado para as operações comerciais aritméticas daquela época.

Pela própria história de Fibonacci e toda influência percebemos que o livro tem influência árabe e o sistema de numeração utilizado na obra é o indo-arábico. O livro pode ser considerado bem completo para aquela época, uma vez que o mesmo tratava de operações mercantis do comércio, úteis àqueles que o utilizavam, como calcular juros e resolver equações quadráticas (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010).

Ainda assim, a obra mais famosa de Fibonacci sofria rejeições por parte de alguns mercadores uma vez que este livro foi o grande responsável por difundir o sistema de numeração indo-arábico pela Europa e naquele século o sistema aceito pelo comércio europeu era o sistema numérico romano.

Apesar de sofrer restrições no que concerne a adaptação à matemática moderna, foi um dos primeiros livros a utilizar a divisão de frações,além de conter o célebre problema sobre a reprodução de coelhos, que tornou a sequência de Fibonacci conhecida por todo Ocidente.

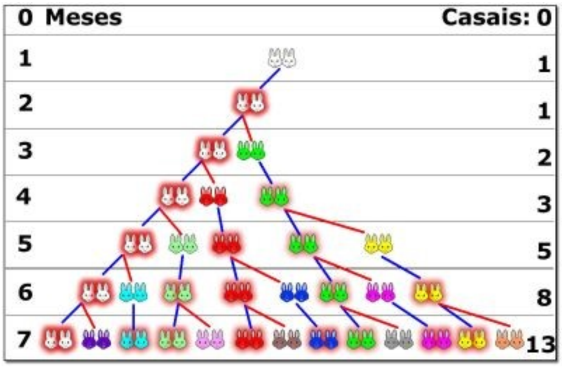
1.1.1 O Problema dos Coelhos

Este é um dos problemas mais célebres, o da reprodução de coelhos, cuja resolução dá origem a famosa sequência de Fibonacci.

Um certo homem tinha um casal de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos coelhos podem ser gerados a partir desse casal em um ano se, supostamente, todo mês cada casal de coelhos gera mais um casal, que é fértil a partir do segundo mês?

- No primeiro mês, o casal inicial é filhote, então ainda não poderão gerar filhotes.
- No segundo mês, continua o casal inicial de coelhos, já na fase adulta, portanto fértil.
- No terceiro mês, termos dois casais de coelhos, um casal acima e um novo casal gerado por eles. Assim, existem dois casais de coelhos.

Figura 2 – Árvore genealógica.



Fonte: (BELINI, 2015)

- No quarto mês, temos o casal do primeiro mês, mais o casal do mês anterior, gerado por eles, e mais um outro casal de coelhos, gerado pelo casal inicial. Tem-se portanto, três casais de coelhos.

- No quinto mês, tem-se o casal inicial de adultos, que produz um novo casal de filhotes, o segundo casal de adultos, que produz outro casal de filhotes e o casal de filhotes produzido no mês anterior, que se torna fértil. Tem-se portanto, cinco casais de coelhos (dois casais de adultos mais três de filhotes).

- No sexto mês, tem-se três casais de adultos que produzirão três casais de filhotes, mais dois casais de filhotes. Portanto, teremos oito casais de coelhos (três adultos mais cinco filhotes).

- No sétimo mês, teremos treze casais de coelhos (cinco adultos mais oito filhotes).

E assim, cada casal fértil de coelhos gera um novo casal, menos os filhotes do mês anterior e assim sucessivamente segue a sequência até o 12º mês, totalizando 144 casais de coelhos, respondendo ao questionamento do problema. Vamos observar a tabela 1.

Observamos que, a partir do terceiro mês, o número de casais num certo mês é igual à soma dos dois meses anteriores (figura 2). Com a resolução deste problema obtemos uma sequência numérica:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 144, ...).$$

Definição 1.1.1. *Definimos a sequência de Fibonacci, pela relação de recorrência* $F_1 = 1$ *e* $F_2 = 1$*:*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{1.1}$$

n-mês	**Número de casal de coelhos** (F_n)
1º	1
2º	1
3º	2
4º	3
5º	5
6º	8
7º	13
8º	21
9º	34
10º	55
11º	89
12º	144

Tabela 1 – Nascimento de coelhos

Esta relação de recorrência 1.1.1, em que é possível encontrar os termos subsequentes da sequência, é o centro deste trabalho, onde exploramos diversas propriedades. Por questão de conveniência, definimos $F_0 = 0$.

1.2 Propriedades

Os números de Fibonacci possuem diversas propriedades e neste capítulo vamos explorar algumas delas. As principais referências utilizadas nesta seção foram (KOSHY, 2019), (GRIMALDI, 2012) e (ZAHN, 2011).

Proposição 1.2.1. *Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.*

Demonstração. Utilizando o princípio de indução sobre n, sejam F_n e F_{n+1} dois números de Fibonacci consecutivos, para $n = 1$, o $mdc(F_n, F_{n+1}) = mdc(1, 1) = 1$ e para $n = 2$, $mdc(F_2, F_3) = mdc(1, 2) = 1$, logo a proposição se verifica para as bases da indução. Suponhamos, por hipótese, que a proposição seja verdadeira para $n = k$, tal que o $mdc(F_k, F_{k+1}) = 1$, mostraremos que o $mdc(F_{k+1}, F_{k+2}) = 1$. Pela hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} mdc(F_{k+1}, F_{k+2}) &= mdc(F_{k+1}, F_k + F_{k+1}) \\ &= mdc(F_{k+1}, F_k + F_{k+1} - F_{k+1}) \\ &= mdc(F_{k+1}, F_k) \\ &= mdc(F_k, F_{k+1}) = 1 \end{aligned}$$

Logo, a proposição é verdadeira para $n = k + 1$. $\square$

Proposição 1.2.2. *A soma dos números de Fibonacci de índices pares é,*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1 \quad \forall \quad n \geqslant 1$$

Demonstração. Utilizando o princípio de indução sobre n, para $n = 1$ e $n = 2$,temos, $F_2 = F_3 - 1 = 1$ e $F_2 + F_4 = F_5 - 1 = 4$, logo vale as bases da indução. Admitamos, por hipótese, que a proposição seja verdadeira para um certo k, tal que $F_2 + F_4 + ... + F_{2k} = F_{2k+1} - 1$. Assim, devemos mostrar que também é verdade para $n = k + 1$,

$$\begin{aligned} (F_2 + F_4 + ... + F_{2k}) + F_{2k+2} &= F_{2k+1} - 1 + F_{2k+2} \\ &= (F_{2k+1} + F_{2k+2} - 1) \\ &= F_{2k+3} - 1 \\ &= F_{2(k+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.3. *A soma dos números de Fibonacci de índices ímpares é,*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} \quad \forall \quad n \geqslant 1$$

Demonstração. Verificamos a validade da propriedade para $n = 1$ e $n = 2$, como $F_1 = F_2 = 1$ e $F_1 + F_3 = F_4 = 3$, então é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$. Suponhamos, por hipótese, que seja verdade para $n = k$, tal que $F_1 + F3 + ... + F_{2k-1} = F_k$, então verificamos se é verdadeira para $n = k + 1$, assim:

$$\begin{aligned} (F_1 + F_3 + ... + F_{2k-1}) + F_{2k+1} &= F_{2k} + F_{2k+1} \\ &= F_{2k+2} \\ &= F_{2(k+1)} \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.4. *Para todo $n \geqslant 1$,*

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + ... + F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-1} + 1$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + ... + F_{2n-1} - F_{2n} &= (F_1 + F_3 + ... + F_{2n-1}) - (F_2 + F_4 + ... + F_{2n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} - \sum_{i=1}^{n} F_{2n} \\ &= F_{2n} - (F_{2n+1} - 1) \\ &= F_{2n} - F_{2n+1} + 1 \\ &= -(F_{2n+1} - F_{2n}) + 1 \\ &= -F_{2n-1} + 1 \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.5. *Soma dos quadrados dos números de Fibonacci,*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1} \quad \forall \quad n \geqslant 1$$

Demonstração. Verificamos que para $n = 1$ e $n = 2$, a propriedade é verdadeira, uma vez que $F_1^2 = F_1F_2 = 1$. e $F_1^2 + F_2^2 = F_2F_3 = 2$. Suponhamos, por hipótese, ser verdade para $n = k$, tal que, $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_k^2 = F_kF_{k+1}$. Devemos provar que é verdade para $n = k + 1$,

$$\begin{aligned}
\left(F_1^2 + F_2^2 + ... + F_k^2\right) + F_{k+1}^2 &= F_kF_{k+1} + F_{k+1}^2 \\
&= F_{k+1}\left(F_k + F_{k+1}\right) \\
&= F_{k+1}F_{k+2}
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.6. *Para todo $n \geqslant 1$,*

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}F_{i+1} = (-1)^{n-1}F_n$$

Demonstração. Utilizando o princípio de indução sobre n, verificamos se a propriedade é válida para $n = 1$ e $n = 2$, $\sum_{i=1}^{1}(-1)^2F_2 = (-1)^0F_1 = 1$ e $\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}F_{i+1} = (-1)^2F_2 + (-1)^3F_3 = (-1)^1F_2 = -1$. Logo a propriedade se verifica. Suponhamos, por hipótese, que a proposição seja verdadeira para n=k,

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k}F_{i+k} = (-1)^{k-1}F_k$$

Então para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}F_{i+1} &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}F_{i+1} + (-1)^{(k+1)+1}F_{(k+1)+1} \\
&= (-1)^{k-1}F_k + (-1)^{k+2}F_{k+2} \\
&= (-1)^{k-1}F_k + (-1)^{k}F_{k+2} \\
&= (-1)^{k}[F_{k+2} - F_k] \\
&= (-1)^{k}F_{k+1}
\end{aligned}$$

Logo, a propriedade é verdadeira para $n = k + 1$.

□

Proposição 1.2.7. *Para $n \geqslant 1$,*

$$\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i+1} = F_{2n+1}^2 - 1$$

Demonstração. Utilizando o princípio de indução sobre n, temos que para $n = 1$, $\sum_{i=1}^{2.1} F_i F_{i+1} = F_1F_2 + F_2F_3 = 3 = F_3^2 - 1 = 3$ e para $n = 2$,$\sum_{i=1}^{4} F_i F_{i+1} = F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + F_4F_5 = F_5^2 - 1 = 24$, logo o resultado se verifica para as bases da indução. Por hipótese, assumimos que a proposição seja verdadeira para $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{2k} F_i F_{i+1} = F_{2k+1}^2 - 1$$

Adicionando $(F_{2k+1}F_{2k+2} + F_{2k+2}F_{2k+3})$ a ambos os membros da igualdade, temos:

$$F_1F_2 + ... + F_{2k}F_{2k+1} + (F_{2k+1}F_{2k+2} + F_{2k+2}F_{2k+3}) = F_{2k+1}^2 - 1 + (F_{2k+1}F_{2k+2} + F_{2k+2}F_{2k+3})$$

$$\begin{aligned}
F_{2k+1}F_{2k+1} + F_{2k+1}F_{2k+2} + F_{2k+2}F_{2k+3} - 1 &= F_{2k+1}\left(F_{2k+1} + F_{2k+2}\right) + F_{2k+2}F_{2k+3} - 1 \\
&= F_{2k+1}F_{2k+3} + F_{2k+2}F_{2k+3} - 1 \\
&= F_{2k+3}\left(F_{2k+1} + F_{2k+2}\right) - 1 \\
&= F_{2k+3}^2 - 1
\end{aligned}$$

Logo a proposição é verdadeira para $n = k + 1$. □

Proposição 1.2.8. *Para todo $m, n \in N^*$,*

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n , com m fixo, para n= 1, a proposição se verifica, pois $F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_mF_2$. Para $n = 2$, o resultado também é verdadeiro,

$$\begin{aligned}
F_{m+2} &= f_{m-1}F_2 + F_mF_3 \\
&= F_{m-1} + 2F_m \\
&= F_{m-1} + F_m + F_m \\
&= F_{m+1} + F_m
\end{aligned}$$

Suponhamos que a proposição seja verdadeira para $n = k$, assumimos que seja válida para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} F_{m+k} &= f_{m-1}F_k + F_mF_{k+1} \\ F_{m+(k+1)} &= f_{m-1}F_k + 1 + F_mF_{k+2} \end{aligned}$$

somando as duas equações acima, temos:

$$\begin{aligned} F_{m+k} + F_{m+(k+1)} &= F_{m-1}F_k + F_{m-1}F_{k+1} + F_mF_{k+1} + F_mF_{k+2} \\ F_{m+k} + F_{m+(k+1)} &= F_{m-1}(F_k + F_{k+1}) + F_m(F_{k+1} + F_{k+2}) \\ F_{m+(k+2)} &= F_{m-1}F_{k+1} + F_mF_{k+3} \end{aligned}$$

Logo, a proposição é válida para $n = k + 2$.

□

Proposição 1.2.9. *Dados* $m, n \in N$,

$$F_m \mid F_{mn}.$$

Demonstração. Para cada m fixado, faremos indução sobre n. Para n=1, temos que $F_m \mid F_m$ e para $n = 2$, $F_m \mid F_{2m}$, assim, vale as bases da indução. Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para um certo k,isto é, $F_m \mid F_{mk}$. Devemos mostrar que vale para $k + 1$.

$$F_m \mid F_{m(k+1)}.$$

Assim, aplicando o resultado da propriedade anterior, temos:

$$F_{m(k+1)} = F_{km+m} = F_{km-1}F_m + F_{km}F_{m+1}$$

E como $F_m \mid F_{km-1}$ e $F_m \mid F_{km}$, por hipótese, segue que $F_m \mid F_{(k+1)m}$. O que conclui a prova.

□

Proposição 1.2.10.

$$F_n^2 + F_{n+3}^2 = 2\left(F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2\right)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (F_{n+2} - F_{n+1})^2 + (F_{n+2} + F_{n+1})^2 &= 2F_{n+2}^2 - 2F_{n+2}F_{n+1} + 2F_{n+2}F_{n+1} + 2F_{n+1}^2 \\ &= 2\left(F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2\right) \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.11. *A soma de quaisquer seis números consecutivos de Fibonacci é divisível por 4.*

$$\sum_{i=0}^{5} F_{n+i} = 4F_{n+4}$$

Demonstração. Considerando $n \geqslant 0$ (com n fixo) e aplicando a já conhecida relação de recorrência de Fibonacci, temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{5} F_{n+i} &= F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} \\
&= (F_n + F_{n+1}) + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + (F_{n+3} + F_{n+4}) \\
&= 2F_{n+2} + 2F_{n+3} + 2F_{n+4} \\
&= 2\left(F_{n+2} + F_{n+3}\right) + 2F_{n+4} \\
&= 4F_{n+4}
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.12. *Fórmula de Cassini, para $n \geqslant 1$*

$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$

Demonstração. Utilizando o princípio de indução sobre n, verificamos se a propriedade é válida para $n = 1$, $F_0F_2 = F_1^2 + (-1)^1 = 0$ e para $n = 2$, $F_1F_3 = F_2^2 + (-1)^2 = 2$, logo vale as bases da indução. Suponhamos, por hipótese, ser verdadeira para $n = k \geqslant 1$,

$$F_{k-1}F_{k+1} = F_k^2 + (-1)^k$$

Para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_kF_{k+2} - F_{k+1}\left(F_{k-1} + F_k\right) \\
&= F_k\left(F_{k+2} - F_{k+1}\right) - F_{k-1}F_{k+1} \\
&= F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1} \\
&= (-1)\left(F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2\right) \\
&= (-1)(-1)^k \\
&= (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

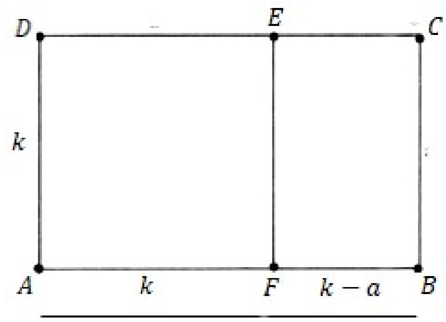
Logo, a propriedade é verdadeira para $n = k + 1$.

□

1.3 Retângulo áureo e número de ouro

Chamamos retângulo áureo, um retângulo que possui a seguinte propriedade: se dele extrairmos um quadrado, o retângulo restante será semelhante ao original, assim, consideremos o retângulo da figura 3:

Figura 3 – Retângulo áureo



Fonte: Elaborada pela autora

Do retângulo áureo $ABCD$, extraímos o quadrado $ADEF$, obtemos o retângulo $BCEF$, semelhante ao retângulo original. Conforme a definição, estabelecemos a seguinte relação de semelhança:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} = \frac{k}{x} = \frac{x}{k-x} \Leftrightarrow x^2 + kx - k^2 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau em função de k, encontramos as raízes:

$$k_1 = -a(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \quad e \quad k_2 = a(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$$

Como trata de um segmento somente a raiz positiva k_2 nos interessa, assim:

$$\frac{a}{k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Portanto, $\frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} = \phi$ e, notemos que o novo retângulo BCEF, interior ao primeiro, também é áureo. Se repetirmos o mesmo processo, construindo um quadrado no novo retângulo áureo interior ao primeiro, também nas proporções áureas, obteremos outro retângulo interior a este segundo, e este processo é infinito (ZAHN, 2011).

Este número irracional obtido é conhecido como ϕ, o número de ouro.Veremos adiante que este número possui uma relação intrínseca com a Sequência de Fibonacci.

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988749...$$

Vejamos, a princípio, como é estabelecida esta relação. Considerando os 13 primeiros números de Fibonacci:

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1\\
F_2 &= 1\\
F_3 &= 2\\
F_4 &= 3\\
F_5 &= 5\\
F_6 &= 8\\
F_7 &= 13\\
F_8 &= 21\\
F_9 &= 34\\
F_{10} &= 55\\
F_{11} &= 89\\
F_{12} &= 144\\
F_{13} &= 233
\end{aligned}$$

Dividindo cada número com seu antecessor:

$$\begin{aligned}
\frac{F_2}{F_1} &= 1 \\
\frac{F_3}{F_2} &= 2 \\
\frac{F_4}{F_3} &= 1,5, \\
\frac{F_5}{F_4} &= 1,66666, \\
\frac{F_6}{F_5} &= 1,6, \\
\frac{F_7}{F_6} &= 1,625, \\
\frac{F_8}{F_7} &= 1,61538, \\
\frac{F_9}{F_8} &= 1,61904, \\
\frac{F_{10}}{F_9} &= 1,61764, \\
\frac{F_{11}}{F_{10}} &= 1,61818, \\
\frac{F_{12}}{F_{11}} &= 1,61797, \\
\frac{F_{13}}{F_{12}} &= 1,61805.
\end{aligned}$$

Como podemos observar, a partir que os números vão aumentando, a razão entre eles vai convergindo para o número de ouro (POSAMENTIER; LEHMANN, 2010).

Teorema 1.3.1. *Limite da sequência de Fibonacci.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Demonstração. Pela definição da sequência de Fibonacci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, dividindo essa igualdade por F_n e fazendo algumas manipulações, temos que:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

Aplicando o limite na igualdade acima:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}\right)$$

Resultando na equação $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, tendo como uma das soluções a raiz positiva, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, logo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$\square$

Mantendo ainda a relação com o número de ϕ, vamos calcular as potências dos mesmos (ZAHN, 2011):

$$\phi^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \phi + 1$$

Prosseguindo até $n = 8$:

$$\begin{aligned}
&\phi^3 = \phi.\phi^2 = \phi(\phi+1) = \phi^2 + \phi = (\phi+1) + \phi = 1 + 2\phi \\
&\phi^4 = \phi^2.\phi^2 = (\phi+1)(\phi+1) = \phi^2 + 2\phi + 1 = (\phi+1) + 2\phi = 2 + 3\phi \\
&\phi^5 = \phi^3.\phi^2 = (2\phi+1)(\phi+1) = 2\phi^2 + 3\phi + 1 = 2(\phi+1) + 3\phi + 1 = 3 + 5\phi \\
&\phi^6 = \phi^3.\phi^3 = (2\phi+1)(2\phi+1) = 4\phi^2 + 4\phi + 1 = 4(\phi+1) + 4\phi + 1 = 5 + 8\phi \\
&\phi^7 = \phi^4.\phi^3 = (3\phi+2)(2\phi+1) = 6\phi^2 + 7\phi + 2 = 6(\phi+1) + 7\phi + 2 = 8 + 13\phi \\
&\phi^8 = \phi^4.\phi^4 = (3\phi+2)(3\phi+1) = 9\phi^2 + 12\phi + 4 = 9(\phi+1) + 12\phi + 4 = 13 + 21\phi
\end{aligned}$$

Notemos o padrão que vai emergindo ao cálculo de cada potência,que nos dá os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\phi^3 &= 1 &+& \quad 2\phi \\
\phi^4 &= 2 &+& \quad 3\phi \\
\phi^5 &= 3 &+& \quad 5\phi \\
\phi^6 &= 5 &+& \quad 8\phi \\
\phi^7 &= 8 &+& \quad 13\phi \\
\phi^8 &= 13 &+& \quad 21\phi
\end{aligned}$$

Tal que as constantes obtidas formam a sequência de Fibonacci. Assim, definimos a seguinte propriedade:

Proposição 1.3.1. *Para todo* $n \geqslant 1$,

$$\phi^n = F_{n-1} + F_n\phi$$

Demonstração. Vamos provar a propriedade acima utilizando o princípio de indução matemática.

Para $n = 1$, temos que: $\phi^1 = F_{n-1} + F_1\phi = 0 + 1\phi = \phi$ A proposição é verdadeira, supomos agora que seja válida para $n = k$, tal que:

$\phi^k = F_{k-1} + F_k\phi$, então, verificamos se é verdade para $n = k + 1$, multiplicando ambos os membros da igualdade por ϕ, temos:

$$\begin{aligned}
\phi^k.\phi &= F_{k-1}\phi + F_k\phi^2 \\
\phi^{k+1} &= F_{k-1}\phi + F_k(1+\phi) \\
\phi^{k+1} &= F_{k-1}\phi + F_k + F_k\phi \\
\phi^{k+1} &= \phi(F_{k-1} + F_k) + F_k \\
\phi^{k+1} &= F_k + F_{k+1}\phi.
\end{aligned}$$

Logo, a sentença é verdadeira para $n = k + 1$.

□

. Vimos assim, uma pequena parte da importante relação do número de ouro com os números de Fibonacci.

1.4 Fibonacci na Natureza

1.4.1 Plantas

A sequência de Fibonacci está presente na natureza, em algumas plantas é possível observar a sua formação. Um exemplo é como se manifesta o crescimento dos galhos da planta *Achilla Ptarmica* e que características esta possui.

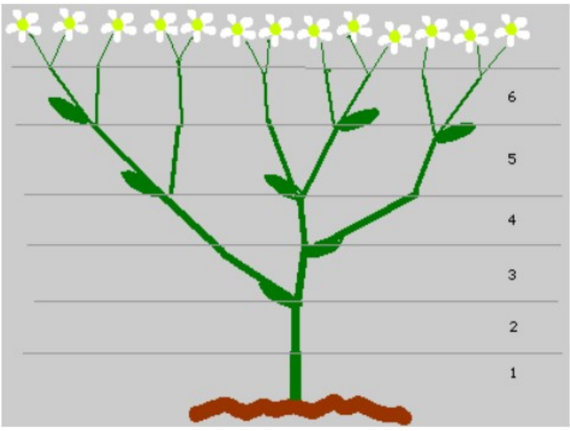
Nesta planta como podemos observar, conforme a tabela 2, seus galhos crescem sistematicamente conforme a sequência de Fibonacci.

Esta sequência também está presente em alguns arranjos das folhas de determinadas plantas.

Na figura 5, podemos contar as folhas, seguindo-as pela ordem que aparecem, até encontrar uma folha exatamente na vertical da primeira.

Na planta do topo contamos três rotações no sentido dos ponteiros do relógio,

Figura 4 – *Achillea Ptarmica*



Fonte: (PIROPO, 2009)

Mês	Galhos
1º	1
2º	1
3º	2
4º	3
5º	5
6º	8

Tabela 2 – Crescimento de galhos

antes de encontrarmos a folha na mesma direção da primeira. Passamos por cinco folhas, até que isso aconteça. Se contarmos no sentido contrário aos ponteiros do relógio, precisamos de duas rotações. Os algarismos 2, 3 e 5 são como vimos, números da sucessão de Fibonacci.

Na outra planta, para encontrarmos a folha na mesma direção da primeira tem que se fazer cinco rotações no sentido dos ponteiros do relógio. Passamos por oito folhas até que isso aconteça. Se contarmos no sentido contrário aos ponteiros do relógio, precisamos de três rotações. Os algarismos 3, 5 e 8 são como vimos, números da sucessão de Fibonacci.

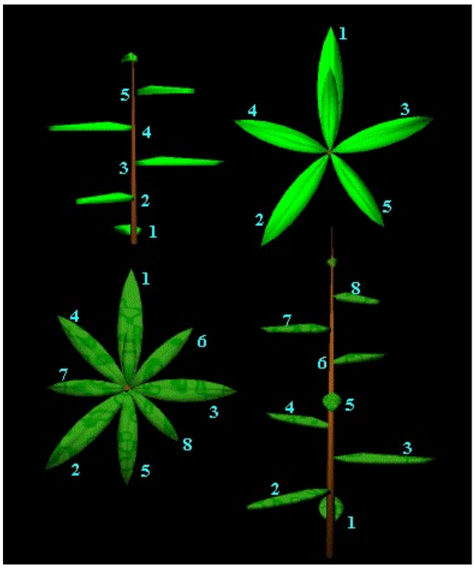
Na figura 6, podemos observar, novamente a presença da sequência e desta vez pela espiral de ouro.

Na folha de uma bromélia, podemos perceber a sequência de Fibonacci, através da composição de quadrados com arestas de medidas proporcionais aos elementos da sequência, por exemplo:$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...$, tendentes à razão áurea. Este mesmo tipo de espiral também pode ser percebida na concha do Nautilus marinho.

1.4.2 Flores

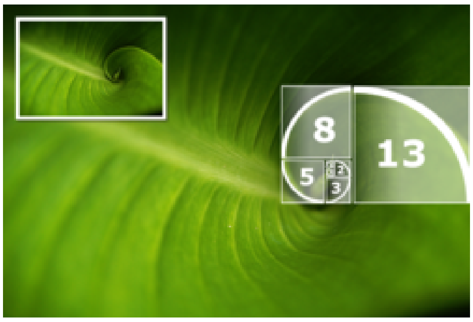
Na figura 6 apresentamos a espiral de ouro, relacionada à sequência de Fibonacci, observamos que esta espiral é a que formamos quando desenhamos um quarto de uma circunferência num quadrado que dispõe dos números de Fibonacci em suas dimensões.

Figura 5 – Arranjo das folhas



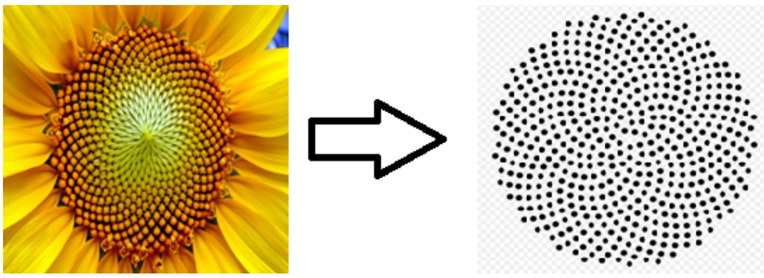
Fonte: (PIROPO, 2009)

Figura 6 – Espiral de ouro



Fonte: (ZAHN, 2011)

Figura 7 – Disposição de sementes



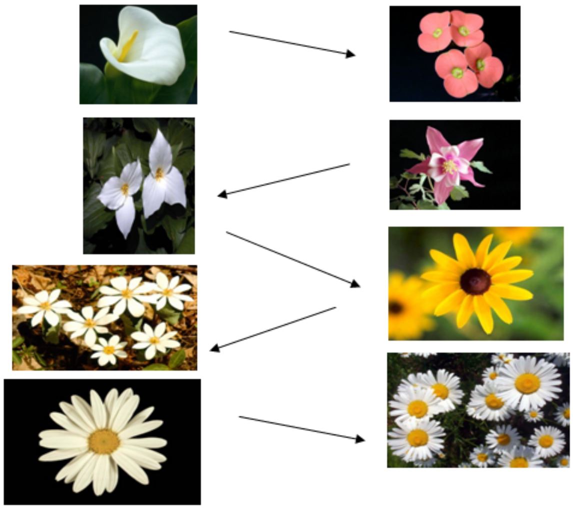
Fonte: (ZAHN, 2011)

Os números de Fibonacci podem também ser usados para caracterizar outras propriedades na Natureza. O modo como as sementes estão dispostas no centro de diversas flores é um desses exemplos.

A Natureza dispôs as sementes do girassol sem intervalos, na melhor forma possível, formando espirais que tanto curvam para a esquerda como para a direita. O curioso é que os números de espirais em cada direção são (quase sempre) números vizinhos na sequência de Fibonacci. O raio destas espirais varia de espécie para espécie de flor.

Também um fenômeno onde encontramos a sequência é na disposição das pétalas de determinadas flores existentes. Vejamos um esquema:

Figura 8 – Disposição das pétalas



Fonte:(PIROPO, 2009)

Estas flores estão dispostas de acordo com os números de Fibonacci, elas seguem um padrão natural em relação às suas pétalas que acompanham a sequência e que se dispõem de forma a reconhecermos a Sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...)$.

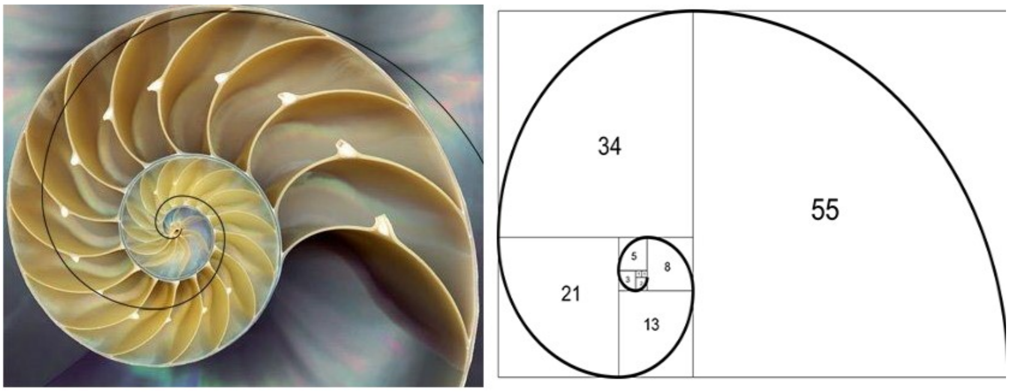
1.4.3 Nautilus marinho

O nautilus é um molusco que possui uma concha de estrutura espiralada. Esta espiral pode ser construída aplicando-se a seqüência de Fibonacci como visto anteriormente, na formação de uma série de quadrados que, unidos, formam um retângulo áureo. Feitos os quadrados, traçamos uma espiral a partir da origem dos quadrados, fazendo com que seus arcos concêntricos passem pelos pontos das sucessivas divisões entre os quadrados, olhando a figura observando a estrutura interna da concha do nautilus, podemos notar a igualdade entre ela e a espiral construída a partir da sequência de Fibonacci.

Essa espiral é conhecida como espiral de ouro, uma referência ao retângulo áureo e as subdivisões que fazem com que a razão de seus segmentos dê como resultado o número ϕ seus arcos existentes. Atentamos para tal. Conforme figura, a espiral perfeita.

Observamos na figura 9 que as dimensões do quadrados que compõem o retângulo áureo são 1x1,2x2,3x3,4x4... e assim sucessivamente, gerando a sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5$.....

Figura 9 – A espiral perfeita e o retângulo áureo



Fonte: (BELINI, 2015)

Este padrão não é por acaso, visto que é observado com frequência na natureza, pois o retângulo áureo preserva as proporções resultando no número de ouro, visto na seção anterior.

1.5 Fibonacci e os Números de Lucas

Figura 10 – Retrato de François Édouard Anatole

Fonte: (POSAMENTIER; LEHMANN, 2010)

O matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891) que nasceu em Amiens-França e estudou na Ecole Normale. Além de servir como um oficial de artilharia na Guerra Franco-Prussion, Lucas foi nomeado professor de matemática no Lycée Saint Louis, e mais tarde, no Lycée Charlemagne, ambos em Paris. Ele pode ser considerado o responsável pela divulgação da Sequência de Fibonacci pela Europa, inclusive, ele próprio, estudando o Líber Abaci e o problema dos coelhos ficou fascinado com os números de Fibonacci, que homenageou tal matemático batizando a famosa sequência, até então não tão conhecida pela Europa (LIVIO, 2008).

Após estudar os números de Fibonacci, Lucas meditou sobre o início da sequência, imaginando o que aconteceria se a mesma tivesse começado com 1 e 3, em vez de 1 e 1.

Dessa forma, listamos abaixo os 13 primeiros números de Lucas (VAJDA, 2008):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	133	199	322

Tabela 3 – Número de Lucas

Observando a tabela acima,sendo $L_0 = 2$, verificamos que a mesma obedece um padrão, semelhante à sequência de Fibonacci,o que permite a definição a seguir.

Definição 1.5.1. *Definimos a sequência de Lucas pela relação de recorrência, com* $L_1 = 1$ *e* $L_2 = 3$*:*

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \quad n \geqslant 1$$

Várias das propriedades verificadas pelos números de Fibonacci também se verificam para os números de Lucas. Provaremos algumas delas.

Proposição 1.5.1. *Para $n \geqslant 1$,*

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5\left(-1\right)^{n-1}$$

Demonstração. Aplicando o princípio de indução para $n = 1$ e $n = 2$, o resultado é verdadeiro, pois $L_2L_0 - L_1^2 = 5\left(-1\right)^0 \rightarrow 5 = 5$ e $L_3L_1 - L_2^2 = 5(-1)^1 = -5$.

Assumimos, por hipótese, que a proposição seja verdadeira para $n = k$, $L_{k+1}L_{k-1} - L_k^2 = 5\left(-1\right)^{k-1}$, então para $n = k + 1$, temos:

$$\begin{aligned}
L_{k+1}\left(L_{k+1} - L_k\right) - L_k^2 &= L_{k+1}^2 - L_{k+1}L_k - L_k^2 \\
&= L_{k+1}^2 - L_k\left(L_{k+1} + L_k\right) \\
&= L_{k+1}^2 - L_kL_{k+2} \\
&= \left(-1\right)5\left(-1\right)^{k-1} \\
&= 5\left(-1\right)^k
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.5.2. *Para $n \geqslant 1$,*

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$$

Demonstração. Usando indução sobre n, para $n = 1$, temos que, $L_1 = L_3 - 3 \rightarrow 1 = 1$ e para $n = 2$, $\sum_{i=1}^{2} L_i = L_1 + L_2 = L_4 - 3 = 4$, logo vale as bases da indução.
Assumimos, por hipótese, que seja verdadeira para $n = k$, tal que, $L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_k = L_{k+2} - 3$. Adicionando L_{k+1} a ambos os membros da igualdade, temos:

$$\begin{aligned}
\left(L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_k\right) + L_{k+1} &= L_{k+2} - 3 + L_{k+1} \\
&= L_{k+2} - 3 + L_k + 1 \\
&= Lk + 2 + L_k + 1 - 3 \\
&= L_{k+3} - 3
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.5.3. *Para $n \geqslant 1$,*

$$\sum_{i=1}^{n} iL_i = nL_{n+2} - L_{n+3} + 4$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos $1L_3 - L_4 + 4 = 1.4 - 7 + 4 = 1$ e para $n = 2$, $\sum_{i=1}^{2} iL_i = 1L_1 + 2L2 = 2L_4 - L_5 + 4 = 7$ logo o resultado se verifica para $n = 1$ e 2. Suponhamos, por hipótese, a proposição ser verdadeira para $n = k$,

$$\sum_{i=1}^{k} iL_i = kL_{k+2} - L_{k+3} + 4$$

Adicionando $(k+1)\,L_{k+1}$ a ambos os membros da igualdade:

$$\begin{aligned}
(L_1 + L_2 + ... + kL_k) + (k+1)\,L_{k+1} &= kL_{k+2} - L_{k+3} + 4 + (k+1)\,L_{k+1} \\
&= [(k+1)L_{k+2} - L_{k+2}] - L_{k+3} + 4 + (k+1)\,L_{k+1} \\
&= (k+1)\,L_{k+2} + (k+1)\,L_{k+1} - (L_{k+2} + L_{k+3}) + 4 \\
&= (k+1)\,(L_{k+2} + L_{k+1}) - (L_{k+2} + L_{k+3}) + 4 \\
&= (k+1)\,L_{k+3} - L_{k+4} + 4
\end{aligned}$$

Logo, a proposição é verdadeira para $n = k + 1$.

□

As duas sequências estão intimamente relacionadas, listamos algumas identidades abaixo:

i) $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$
ii) $L_n = F_n + 2F_{n-1}$
iii) $2L_{n+1} = 5F_n + L_n$

Das identidades acima, provaremos a relação i) pelo método de indução, as outras são provadas de modo análogo.

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \quad n \geqslant 1 \tag{1.2}$$

Demonstração. Observamos, inicialmente, que esta propriedade é válida para n=1 e 2, $L_1 = F_2 + F_0 = 1$ e $L_2 = F_3 + F_2 = 3$.Suponhamos ser verdadeira para $n \leqslant k$,

$$\begin{aligned}
L_k + L_{k-1} &= F_{k-1} + F_{k+1} + L_{k-1} \\
L_{k+1} &= (F_{k-1} + F_{k+1}) + (F_{k-2} + F_n) \\
L_{k+1} &= F_k + F_{k+2}
\end{aligned}$$

Logo, é verdadeira para $k + 1$. □

As relações de recorrência de L_n em função de F_n, servirão como base para demonstrar algumas propriedades envolvendo ambas.

Proposição 1.5.4. *Para* $n \geqslant 1$,

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
L_{n+1} + L_{n-1} &= L_n + L_{n-1} + L_{n-1} \\
&= (F_{n+1} + F_{n-1}) + 2(F_n + F_{n-2}) \\
&= F_n + F_{n-1} + F_{n-1} + 2(F_n + F_{n-2}) \\
&= F_n + 2F_{n-1} + 2F_n + 2F_{n-2} \\
&= F_n + 2F_n + 2(F_{n-1} + F_{n-2}) \\
&= F_n + 2F_n + 2F_n \\
&= 5F_n
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.5.5. *Para* $n \geqslant 1$,

$$L_n = F_n + 2F_{n-1}$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre n, para $n = 1$ e $n = 2$, $L_1 = F_1 + 2F_0 \rightarrow 1 = 1$ e $L_2 = F_2 + 2F_1 \rightarrow 3 = 3$ verificamos que a proposição é verdadeira. Por hipótese, assumimos que a proposição seja verdadeira para $n = k$, tal que: $L_k = F_k + 2F_{k-1}$. Então:

$$\begin{aligned}
F_k + 2F_{k-1} &= F_{k+1} - F_{k-1} + 2F_{k-1} \\
&= F_{k+1} - F_{k-1} + F_{k-1} + F_{k-1} \\
&= F_{k+1} + F_{k-1} \\
&= L_{k+1}
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.5.6. $n \geqslant 1$,

$$F_{2n} = F_n L_n$$

Demonstração. Considerando as sequências de igualdades, temos:

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_{n+n} \\ &= F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} \\ &= F_n\left(F_{n-1} + F_{n+1}\right) \\ &= F_nL_n \end{aligned}$$

□

Como podemos observar, há diversas relações existentes entre essas grandiosas sequências e a contribuição de Lucas foi um marco importante para a difusão dos números de Fibonacci.

2 Fibonacci e a Teoria dos Números

Nesse capítulo vamos abordar teoremas e propriedades relacionando os números de Fibonacci com a teoria dos números, destacando-se a Fórmula de Binet, Funções Geradoras, Triângulo de Pascal e Composições. Para tanto, as principais referências utilizadas para provar as demonstrações aqui apresentadas foram (GRIMALDI, 2012), (COSTA, 2015), (KOSHY, 2019), (SILVA, 2017)

2.1 Relações de recorrência e Fórmula de Binet

No capítulo anterior vimos que a definição 1.1.1, é a relação de recorrência que nos permite encontrar qualquer número de Fibonacci conhecendo seus termos anteriores. Agora, considere a relação de recorrência linear homogênea de segunda ordem, tais que a e b são termos constantes, com $b \neq 0$ (SANTOS, 1998).

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \qquad n, \in N^* \tag{2.1}$$

Observando essa relação de recorrência quando $x_0 = 0$ e $x_1 = 1 = a = b$, a mesma nos remete a sequência de Fibonacci, no entanto, para determinar quaisquer termos dessa sequência é necessário conhecer seus termos anteriores, algo que pode tornar-se trabalhoso dependendo do valor de n que desejamos encontrar.

Para tanto, Seja $x_n = cr^n$ solução da relação de recorrência 2.1 tal que $cr^{n+1} = acr^n + bcr^{n-1}$, com $cr \neq 0$. Dividindo a relação por cr^{n-1}, temos:

$$r^2 - ar - b = 0 \tag{2.2}$$

Esta igualdade é a equação característica da relação de recorrência. O próximo teorema mostra como as soluções dessas igualdades estão relacionadas.

Teorema 2.1.1. *(KOSHY, 2019) Sejam r_1 e r_2 soluções distintas da equação $r^2 - ar - b = 0$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ são da forma $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes. Sendo que para cada condição inicial $x_0 = Y_0$ e $x_1 = Y_1$ há uma única solução para a relação de recorrência.*

Demonstração. A princípio, vamos mostrar que $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, de fato, é solução da recorrência $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, sendo r_1 e r_2 raízes da equação $r^2 - ar - b = 0$, tal que $r_1^2 = ar_1 - b$ e $r_2^2 = ar_2 - b$.

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= ax_n + bx_{n-1} \\
x_{n+1} &= a\left(C_1r_1^n + C_2r_2^n\right) + b\left(C_1r_1^{n-1} + C_2r_2^{n-1}\right) \\
x_{n+1} &= aC_1r_1^n + aC_2r_2^n + bC_1r_1^{n-1} + bC_2r_2^{n-1} \\
x_{n+1} &= \left(aC_1r_1^n + bC_1r_1^{n-1}\right) + \left(aC_2r_2^n + bC_2r_2^{n-1}\right) \\
x_{n+1} &= C_1r_1^{n-1}\left(ar_1 + b\right) + C_2r^{n-1}\left(ar_2 + b\right) \\
x_{n+1} &= C_1r_1^{n+1} + C_2r_2^{n+1}
\end{aligned}
$$

□

Assim, a primeira parte foi provada. No entanto, precisamos verificar se as condições iniciais estabelecidas no teorema são satisfeitas.

Como $x_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ e considerando as condições iniciais $x_0 = Y_0$ e $x_1 = Y_1$ vamos encontrar os valores de C_1 e C_2. Assim:

$$\begin{cases} Y_0 = C_1 + C_2 \\ Y_1 = C_1r_1 + C_2r_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos as seguintes soluções, com $r_1 \neq r_2$:

$$C_1 = \frac{Y_1 - Y_0r_2}{r_1 - r_2} \quad e \quad C_2 = \frac{Y_0r_1 - Y_1}{r_1 - r_2}$$

O que completa a prova do teorema 2.1.1, como queríamos demonstrar.

Após esses resultados preliminares através das relações de recorrência, como aplicação, consideremos a sequência de Fibonacci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, tal que $F_1 = 1 = F_2$, uma relação de recorrência de segunda ordem de equação característica $r^2 - r - 1 = 0$, cuja solução são as raízes $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Assim, conforme o teorema, seja $F_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^2$ a solução geral da recorrência, com as condições iniciais $F_1 = 1 = F_2$:

$$\begin{cases} F_1 = C_1\alpha + C_2\beta = 1 \\ F_2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima em função de C_1 e C_2, encontramos as constantes $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$.

E finalmente, substituindo o resultado encontrado na solução geral:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2.3}$$

Esta é a fórmula de Binet, descoberta em 1843 pelo matemático francês Jacques Binet (1786-1856).

Exemplo 2.1.1. *Encontrar o vigésimo quinto número de Fibonacci, $n = 25$.*

$$F_{25} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{25} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{25}\right) = 75.025$$

Como consequência da fórmula de Binet existem algumas propriedades em função de F_n (GRIMALDI, 2012), nesse sentido, consideremos as seguintes identidades relacionadas às raízes $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 && (2.4)\\ \alpha - \beta &= \sqrt{5} && (2.5)\\ \alpha\beta &= -1 && (2.6)\\ \alpha^2 + \beta^2 &= 3 && (2.7)\\ \alpha^2 &= \alpha + 1 && (2.8)\\ \beta^2 &= \beta + 1 && (2.9) \end{aligned}$$

Diante das identidades acima e considerando que $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, vamos provar algumas propriedades.

Proposição 2.1.1. *Para $n \geqslant 1$,*

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$$

.

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 &= \left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha^{2n+2} - 2\,(\alpha\beta)^{n+1} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n-2} + 2\,(\alpha\beta)^{n-1} - \beta^{2n-2}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n}\alpha^2 + \beta^{2n}\beta^2 - (\alpha\beta)^2\alpha^{2n-2} - (\alpha\beta)^2\beta^{2n-2}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^2 - \beta^2(\alpha^{2n} - \beta^{2n})}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^{2n}-\beta^{2n})}{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)} \\
&= F_{2n}
\end{aligned}$$

Proposição 2.1.2. *Para todo* $n \geqslant 1, F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1$

$$\begin{aligned}
F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 &= \frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}.\frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\alpha-\beta} - \left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{5}[\alpha^{4n} - \alpha^{2n+1}\beta^{2n-1} - \beta^{2n+1}\alpha^{2n-1} + \beta^{4n} - \alpha^{4n} + 2(\alpha\beta)^{2n} - \beta^{4n}] \\
&= \frac{1}{5}[-(\alpha\beta)^{2n-1}.\beta^2 - (\alpha\beta)^{2n-1}.\alpha^2 + 2(\alpha\beta)^{2n}] \\
&= \frac{1}{5}[-(-1)^{2n-1}.\beta^2 - (-1)^{2n-1}.\alpha^2 + 2(-1)^{2n}] \\
&= \frac{1}{5}[(\alpha^2+\beta^2)+2] = \frac{1}{5}[3+2] \\
&= 1
\end{aligned}$$

Proposição 2.1.3. *Para todo* $n \geqslant 1, F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$.

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 + F_n^2 &= \left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha^{2n+2} - 2(\alpha\beta)^{n+1} + \beta^{2n+2} + \alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+2}(\alpha + \frac{1}{\alpha}) + \beta^{2n+1}(\beta + \frac{1}{\beta})}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+2}(\alpha-\beta) + \beta^{2n+2}\,(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+2} - \alpha^{2n+2}\beta + \beta^{2n+2} - \beta^{2n+2}\alpha}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= (\alpha-\beta)\frac{(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})}{(\alpha-\beta)} \\
&= F_{2n+1}
\end{aligned}$$

2.2 Funções Geradoras

As funções geradoras utilizam técnicas que se tornam ferramentas poderosas para a resolução de problemas nas diversas áreas da matemática. O estudo dessa importante ferramenta teve início com o matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754), sendo utilizado por matemáticos famosos em suas teorias, Euler (1707-1783), Laplace (1749-1827), Bernoulli (1687-1759) (RIBEIRO et al., 2019).

De Moivre utilizou funções geradoras para encontrar uma fórmula fechada para determinar diretamente os números de Fibonacci.

Neste trabalho trataremos de função geradora ordinária.

Definição 2.2.1. *Dada uma sequência numérica $f = (f_0, f_1, f_2, ...)$, a função geradora ordinária para esta sequência é dada pela série de potências que tem o coeficiente de x^i igual a f_i, para todo $i = 0, 1, 2, ...$:*

$$f\,(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + ... + f_nx^n$$

A definição acima também pode ser representada pelo somatório:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n$$

Do entendimento dessa definição e utilizando técnicas de manipulações algébricas vamos aplicar na relação de recorrência de Fibonacci afim de encontrarmos uma fórmula fechada para a mesma. Assim,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \text{sendo} \quad F_0 = 0 \quad e \quad F_1 = 1$$

Multiplicando a relação de recorrência por x_n, aplicando a definição para a soma dos termos,

$$\begin{aligned}
F_{n+1}x^n &= F_nx^n + F_{n-1}x^n \\
\sum_{n\geqslant 1}^{\infty} F_{n+1}x^n &= \sum_{n\geqslant 1}^{\infty} F_nx^n + \sum_{n\geqslant 1}^{\infty} F_{n-1}x^n \\
\frac{F(x) - x}{x} &= F(x) + xF(x) \\
F(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2}
\end{aligned}$$

Esta é função geradora da fórmula de Fibonacci, a partir dela, e aplicando frações parciais, encontraremos uma fórmula fechada para a mesma.

Da subseção 2.1 vimos que as raízes da equação $1 - x - x^2$ são $k_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $k_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, assim:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x}{(1-\frac{x}{k_1})(1-\frac{x}{k_2})} \\
&= \frac{x}{(1-k_1x)(1-k_2x)} \\
&= \frac{A}{1-k_1x} + \frac{B}{1-k_2x}
\end{aligned}
$$

Para calcular as constantes A e B,

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{1-k_1x} + \frac{B}{1-k_2x} &= \frac{A(1-xk_1)+B(1-xk_2)}{(1-xk_1)(1-xk_2)} \\
&= \frac{A - Axk_1 + B - Bxk_2}{(1-xk_1)(1-xk_2)} \\
&= \frac{A + B + x(-Ak_1 - Bk_2)}{(1-xk_1)(1-xk_2)}
\end{aligned}
$$

Obtemos o sistema de equação,

$$
\begin{cases}
A + B = 0 \\
-k_2A - k_1B = 1
\end{cases}
$$

Cuja solução é $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-k_1x} - \frac{1}{1-k_2x}\right]F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} k_2^n x^n \\
F_n &= \frac{k_1^n - k_2^n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Esta é a fórmula fechada para determinar o enésimo número de Fibonacci que encontramos a partir da função geradora aplicada a relação de recorrência, a fórmula de Binet 2.3.

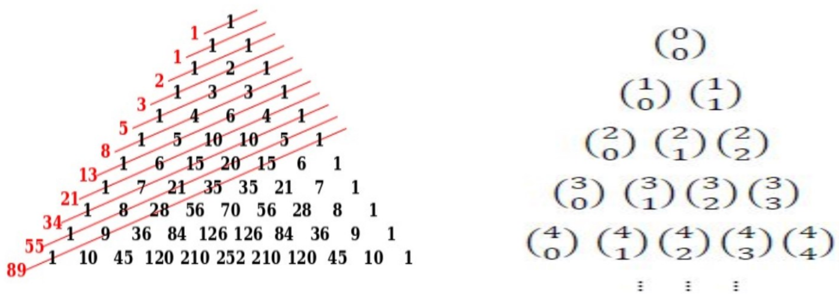
2.3 Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal, recebe este nome em homenagem a Blaise Pascal (1623-1662), matemático, físico, filósofo e escritor francês, que estudou e demonstrou diversas propriedades deste no trabalho intitulado “triângulo aritmético” (SILVA, 2009), publicado no ano de 1654.

O triângulo de Pascal possui características específicas.É simétrico e suas linhas crescem infinitamente, além de diversas propriedades e relações, as quais não fazem parte do objetivo desse trabalho. No entanto, nos perguntamos qual a relação deste famoso triângulo com a Sequência de Fibonacci?

De acordo com o triângulo de Pascal, observando a figura abaixo, percebemos que a soma das diagonais nos remete a sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21....)$ e é infinita assim como as linhas dos triângulos e seus números. É interessante destacar que Fibonacci, havia estudado esse Triângulo, pelo seu similar o triângulo chinês, o que é incrível uma vez que Pascal nasceu 400 anos depois de Fibonacci.

Figura 11 – Triângulo de Pascal



Fonte: (SILVA, 2017)

Os números de Fibonacci também podem ser escritos em função do triângulo de pascal, conforme segue:

$$
\begin{aligned}
F_n &= 1Fn \\
F_{n+1} &= 1F_n + 1F_{n-1} \\
F_{n+2} &= 1F_n + 2F_{n-1} + 1F_{n-2} \\
F_{n+3} &= 1F_n + 3F_{n-1} + 3F_{n-2} + 1F_{n-3} \\
F_{n+4} &= 1F_n + 4F_{n-1} + 6F_{n-2} + 4F_{n-3} + 1F_{n-4} \\
F_{n+5} &= 1F_n + 5F_{n-1} + 10F_{n-2} + 10F_{n-3} + 5F_{n-4} + 1F_{n-5}
\end{aligned}
$$

Para construção do triângulo, Pascal utilizou conhecimentos da teoria combinatória, por isso, antes de apresentar o teorema desta seção, vamos listar algumas propriedades básicas dos coeficientes binomiais que servirão como base para o entendimento do mesmo.

$$
\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \ n \geqslant k; \\ 1, \ k = 0; \\ 0, \ n < k. \end{cases}
$$

$$\begin{cases} \binom{0}{0} = 1 \\ \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} \\ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \text{Relação de Stifel} \end{cases}$$

O teorema a seguir se deve aos estudos de Lucas que utilizou os coeficientes binominais para determinar o termo geral da sequência de Fibonacci.

Teorema 2.3.1. *Fórmula de Lucas, para $n \geqslant 0$,*

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \cdots$$

Demonstração. Utilizando o princípio de indução sobre n: Para $n = 0$ e $n = 1$, a identidade se verifica, suponhamos que seja verdadeira para $k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} F_k &= \binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + ... \\ F_{k+1} &= \binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-2}{2} + .\binom{k-3}{3} + ... \end{aligned}$$

Adicionando as duas equações acima:

$$F_k+F_{k+1} = \binom{k}{0}+\left[\binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1}\right]+\left[\binom{k-2}{1} + \binom{k-2}{2}\right]+\left[\binom{k-3}{2} + \binom{k-3}{3}\right]$$

E utilizando a relação de Stifel:

$$F_{k+2} = \binom{k+1}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k-1}{2} + \binom{k-2}{3} + \binom{k-3}{4} + ...$$

Logo, o teorema é válido para $k+1$, como queríamos demonstrar. □

Para exemplificar o teorema acima, calculemos F_n para $n = 5$:

$$F_5 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 3 + 1 = 5$$

O que pode ser observado nas diagonais inversas/ascendentes da figura 11

2.4 Subconjuntos

Nesta seção iremos relacionar os números de Fibonacci com os subconjuntos, nesse sentido, Para $n \geqslant 1$, seja $S_n = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ $e\, S_0 = \varnothing$, então o número de subconjuntos de S_n é 2^n.

No entanto, estamos interessados em encontrar o número de subconjuntos de S_n, com inteiros não consecutivos, assim, para $n \geqslant 0$ vamos denominar a_n como o número de subconjuntos de S_n que possuem inteiros não consecutivos. Considere os conjuntos S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5 e seus respectivos subconjuntos, conforme a tabela abaixo.

n	**Subconjuntos de inteiros não consecutivos**	a_n
0	$\varnothing$	1
1	$\varnothing$,$\{1\}$	2
2	$\varnothing$,$\{1\}, \{2\}$	3
3	$\varnothing$,$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}$	5
4	$\varnothing$,$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}$	8
5	$\varnothing$,$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{5\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}$	13

Tabela 4 – Subconjuntos

Observando a tabela acima vemos que $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$, e que o número de subconjuntos subsequentes $a + 1$, inclui os dois últimos subconjuntos anteriores, a_n e a_{n-1}.

Dessa forma, temos a seguinte relação:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n+1} \quad n \geqslant 2$$

Neste caso, a relação de recorrência é a mesma dos números de Fibonacci, mas as condições iniciais são diferentes. Aqui temos;$a_0 = 1 = F_2$ e $1 = 2 = F_3$. Portanto,

$$a_n = F_{n+2}, \quad n \geqslant 0 \tag{2.10}$$

Podemos relacionar essa recorrência a alguns exemplos, como os $n - bits$ que formam palavras binárias que possuem os dígitos 0 e 1, mas considerando números 1s não consecutivos.

n	palavras com $n - bits$	b_n
0	0	1
1	0,1	2
2	00,01,10	3
3	000,010,100,001,101	5
4	0000,0100,1000,0010,1010,0001,0101,1001	8

Tabela 5 – Bits

Um outro exemplo no qual essa fórmula de recorrência se aplica. Seja $S_n = \{1, 2, 3, 4, ..., n-1, n, n+1\}$, para $n \geqslant 1$, estamos interessados nos subconjuntos de S_n da forma $\{a_1, a_2, a_3, ...a_k\}$, que satisfaçam as seguintes condições:

1) $a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_k$, k;

2)a_i é ímpar para "i" ímpar, $i \leqslant n$;

3) a_i é par para "i" par, $i \leqslant n$.

Os subconjuntos satisfazendo as condições acima, são chamados subconjuntos alternados.

2.5 Composições

Antes de chegarmos ao objetivo desta seção, vamos analisar alguns conceitos relacionados à partição de um inteiro positivo n.Esta é definida como decomposição de um inteiro positivo n como soma de suas "partes menores", onde a ordem não é relevante.

Nesta seção, consideraremos a partição ordenada de um inteiro positivo, ou seja, a ordem de sua composição será relevante, para isso vamos considerar a permutação de suas partes.

Como exemplo, vejamos a figura 12 abaixo com as partições ordenadas para $n = 3, 4, 5, 6$, cujos números destas partições são respectivamente $4, 8, 16, 32$.

Figura 12 – Partição

n	Partição ordenada (n)	Nº de partições ordenadas
3	3 2+1, 1+2 1+1+1	4
4	4 3+1,1+3 2+2 2+1+1, 1+2+1,1+1+2 2+2 1+1+1+1	8
5	5 4+1,1+4 3+2,2+3 3+1+1,1+3+1,1+1+3 2+2+1,2+1+2,1+2+2 2+1+1+1,1+2+1+1,1+1+2+1,1+1+1+2 1+1+1+1+1	16
6	6 5+1,1+5 4+2,2+4 4+1+1,1+4+1,1+1+4 3+2+2, 3+1+2, 2+3+1, 2+1+3 1+3+2, 1+2+3 3+1+1+1,1+3+1+1,1+1+1+ 3 3+3 2+2+2 2+2+1+1,2+1+2+1,2+1+1+2,1+2+2+1,1+2+1+2 1+2+2+1,2+1+1+1+1,1+2+1+1+1,1+1+2+1+1,1+1+1+2+1,1+1+1+1+2 , 1+1+1+1+1+1	32

Fonte: Elaborada pela autora.

Observamos o padrão que vai surgindo para o número de partições ordenadas de n, é 2^{n-1}. Vamos provar que isto é verdade.

Demonstração. Para $n = 2$, temos que $2^{n-1} = 2$, logo é verdadeiro, uma vez que as partições ordenadas de 2 são [2,1+1]. Por hipótese, supomos que seja verdadeiro para $n = k$, tal que k maior ou igual a 2, 2^{k-1}.Devemos mostrar que vale para $n = k + 1$. Adicionando '+1' à última soma dos 2^{k-1} partições de k, existem $2(2^{k-1})$, tal que $2.\dfrac{2^k}{2} = 2^k$, logo é verdadeira para $n = k + 1$.

E mais, podemos observar que o número de partições ordenadas de n é igual o número de subconjuntos de S_{n-1} é 2^{n-1}.Isto não é por acaso, uma vez que existe uma relação biunívoca entre eles. Como exemplo, para visualizarmos como essa bijeção acontece, tomemos a partição ordenada para $n = 4$ e os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$.

Para tanto, consideremos uma das partições de $n = 4$ e a quantidade e posição dos sinais (sn) de +:

$$\begin{array}{r}
1 + 1 + 1 + 1 \\
\downarrow \quad\; \downarrow \quad\; \downarrow \\
1^\circ sn \quad 2^\circ sn \quad 3^\circ sn \\
\underbrace{(1 + 1 + 1)}_{\{1,2\}} +1 \\
\underbrace{(1 + 1 + 1)} +1 \\
3 + \qquad 1
\end{array}$$

Na partição acima cujos termos são iguais a 1, temos três sinais de +, representando o conjunto $\{1, 2, 3\}$, colocando parênteses convenientemente, obtemos o subconjunto $\{1, 2\}$ que corresponde à composição $(3 + 1)$ de 4. Assim, permutando os parênteses nas composições cujos termos são iguais a 1, temos:

$$\begin{array}{rcl}
4 & \mapsto & \{1, 2, 3\} \\
3 + 1 & \mapsto & \{1, 2\} \\
1 + 3 & \mapsto & \{2, 3\} \\
2 + 2 & \mapsto & \{1, 3\} \\
2 + 1 + 1 & \mapsto & \{1\} \\
1 + 2 + 1 & \mapsto & \{2\} \\
1 + 1 + 2 & \mapsto & \{3\} \\
1 + 1 + 1 + 1 & \mapsto & \{\varnothing\}
\end{array}$$

O que ilustra como as 2^{n-1} partições ordenadas de n estão relacionadas com os subconjuntos de S_{n-1}. Os resultados apresentados até agora são importantes e veremos como estes se relacionam com os números de Fibonacci.

Em 1974, K. Alladi e V.E.Hoggat Jr, estudaram a partição ordenada de um inteiro n cujos termos são '1' e '2' . Dessa forma, consideremos a figura 13.

Figura 13 – Composições

n	Composições de (n)	C_n
1	1	1
2	2 1+1	2
3	2+1, 1+2 1+1+1	3
4	2+2 2+1+1, 1+2+1,1+1+2 1+1+1+1	5
5	2+2+1,2+1+2,1+2+2 2+1+1+1,1+2+1+1,1+1+2+1,1+1+1+2 1+1+1+1+1	8
6	2+2+2 2+2+1+1,2+1+2+1,2+1+1+2,1+2+2+1,1+2+1+2 1+2+2+1,2+1+1+1+1,1+2+1+1+1,1+1+2+1+1,1+1+1+2+1,1+1+1+1+2 1+1+1+1+1+1	13

Fonte: Elaborada pela autora.

Observamos que: $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3, C_4 = 5, C_5 = 8, C_6 = 13$, dessa forma ilustramos o seguinte teorema.

Teorema 2.5.1. *O número de composições C_n de um inteiro positivo n, usando somente $1's$ e $2's$ é dado por $C_n = F_{n+1}$.*

Demonstração. Utilizando funções geradoras, seja:

$$
\begin{aligned}
C(x) &= C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n + \cdots \\
xC(x) &= C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^4 + \cdots + C_{n-1}x^n + \cdots \\
x^2C(x) &= C_1x^3 + \cdots + C_{n-2}x^n + \cdots \\
(1 - x - x^2)C(x) &= x + x^2 \\
\therefore C(x) &= \frac{x + x^2}{1 - x - x^2} \\
&= \sum_0^\infty F_nx^n + \sum_0^\infty F_nx^{n+1} \\
&= \sum_1^\infty (F_n + F_{n-1})x^n = \sum_1^\infty F_{n+1}x^n
\end{aligned}
$$

Logo, $C_n = F_{n+1}$. □

3 Fibonacci e Álgebra Linear

Neste capítulo veremos como os números de Fibonacci estão associados às matrizes e determinantes, utilizando das propriedades destas para demonstração de resultados importantes. As principais referências consultadas foram (GRIMALDI, 2012), (KOSHY, 2019) e (BOLDRINI; COSTA; FIGUEREDO, 1980).

3.1 Matriz Q

Inicialmente definimos a matriz Q e como esta se relaciona com as propriedades dos números de Fibonacci. A matriz Q tem seus primeiros registros na tese de mestrado de Charles H. King (1960) e pode ser definida como segue:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir desta matriz e utilizando as propriedades da multiplicação de matrizes, obtemos a potência de Q^n, para $n = 2, 3, 4, 5$, assim:

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que a cada potência de Q^n vai surgindo um padrão,conforme abaixo:

$$Q=\begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}, \quad Q^2 = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}, \quad Q^3=\begin{bmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{bmatrix}, \quad Q^4=\begin{bmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{bmatrix}, \ldots$$

Sendo que a matriz resultante de cada operação é formada pelos números de Fibonacci, dessa forma, podemos induzir que para Q^n:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Para demonstrar que o resultado acima é verdadeiro, vamos utilizar o princípio da indução,para $n = 1$, temos:

$$Q^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $n = 2$ o padrão também se verifica, pois:

$$Q^2 = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Suponhamos que a sentença seja verdadeira para $n = k$:

$$Q^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$$

E multiplicando Q^k por Q^1, temos que:

$$Q^k \; Q^1 = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

Logo, é a sentença é verdadeira para n= k+1. Como queríamos demonstrar.

Proposição 3.1.1. *Para $n \geqslant 1$,*

$$Q^n = F_n Q + F_{n-1} I$$

Para mostrar que a propriedade acima é verdadeira, vamos desenvolver a relação de recorrência fazendo as substituições necessárias.

Seja $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, a matriz identidade e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$Q^n = F_n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + F_{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
Q^n &= \begin{bmatrix} F_n & F_n \\ F_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{n-1} & 0 \\ 0 & F_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_n + F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Considerando que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, temos que:

$$
Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}
$$

Como queríamos demonstrar.

No capítulo 1, vimos que o limite da razão dos números consecutivos de Fibonacci é igual a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$. Agora veremos como este se relaciona com as matrizes. Assim, segue:

Teorema 3.1.1. *Para $n \geqslant 1$:*

$$
\lim_{n\to\infty} = \frac{Q^n}{F_{n-1}} = \begin{bmatrix} \phi + 1 & \phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix}
$$

Demonstração. Utilizando as relações de limites e as relações de recorrências, temos:

$$
\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{F_{n-1}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_{n-1}} & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}} & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n-1}}{F_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^2 & \phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix}
$$

Como $\phi^2 = \phi + 1$, Temos que:

$$
\begin{bmatrix} \phi + 1 & \phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix}
$$

□

3.2 Matriz M

Estudada em 1983 por Sam Moore, a matriz M traz características associadas à sequência de Fibonacci.

$$
M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

Vamos analisar as potências de M^n, até n=5. Seja $n \geqslant 1$.

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$
$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$$
$$M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{bmatrix}$$
$$M^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 55 \\ 55 & 89 \end{bmatrix}$$

Observamos que vai surgindo um padrão, similar ao que ocorre com a matriz Q estudada na seção anterior, embora os padrões de ambas sejam diferentes, mas os dois resultam nos números de Fibonacci, assim:

$$M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}$$

Vamos mostrar que o resultado para a matriz M^n, é verdadeiro. Assim utilizando o princípio da indução, para $n = 1$, temos que:

$$M^1 = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para $n = 2$, o resultado também se verifica:

$$M^1 = \begin{bmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4 & F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Suponhamos que a relação seja verdadeira para $n = k$, tal que:

$$M^k = \begin{bmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{k+1} \end{bmatrix}$$

Então, devemos mostrar que a relação é verdadeira para $n = k + 1$.

$$
\begin{aligned}
M^k.M &= \begin{bmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
M^{k+1} &= \begin{bmatrix} F_{2k-1} + F_{2k} & F_{2k-1} + 2F_{2k} \\ F_{2k+1} + F_{2k+1} & F_{2k} + 2F_{2k+1} \end{bmatrix} \\
M^{k+1} &= \begin{bmatrix} F_{2k-1} + F_{2k} & F_{2k-1} + F_{2k} + F_{2k} \\ F_{2k+1} + F_{2k+1} & F_{2k} + F_{2k+1} + F_{2k+1} \end{bmatrix} \\
M^{k+1} &= \begin{bmatrix} F_{2k+1} & F_{2k+2} \\ F_{2k+1} + F_{2k} & F_{2k+2} + F_{2k+1} \end{bmatrix} \\
M^{k+1} &= \begin{bmatrix} F_{2k+1} & F_{2k+2} \\ F_{2k+2} & F_{2k+3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Considerando a definição $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ quando $n = 2k$. Logo é verdadeira para $n = k + 1$, como queríamos demonstrar.

De forma análoga à seção anterior, vamos mostrar que o limite da matriz M é convergente, conforme segue.

Teorema 3.2.1. *Para $n \geqslant 1$.*

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{F_{2n-1}} = \frac{1}{F_{2n-1}} \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}
$$

Demonstração.

$$
\begin{bmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n-1}} & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}} & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \phi \\ \phi & \phi^2 \end{bmatrix}
$$

Considerando $\phi^2 = \phi + 1$, temos que:

$$
\begin{bmatrix} 1 & \phi \\ \phi & \phi + 1 \end{bmatrix}
$$

Dessa forma, concluímos a prova. □

3.3 Determinante

No capítulo 1, estudamos as principais propriedades dos números de Fibonacci, veremos como que estas se relacionam com a Matriz Q, seu determinante, sua matriz inversa, seus autovalores e autovetores no processo de diagonalização.

Calculamos determinante da Matriz Q:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Iniciar o processo de diagonalização da Matriz Q, encontrando primeiramente seu polinômio característico.

Seja $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, a matriz identidade $2x2$, consideremos a equação (1), tal que:

$$Det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Resolvendo o polinômio característico, encontramos as raízes:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$(Q - \lambda I)v = 0$, tal que v é o vetor coluna (x,y).

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} \frac{(1+\sqrt{5})}{2}x + y = 0 \\ x + \frac{(1+\sqrt{5})}{2}y = 0 \end{cases}$$

Uma solução possível é $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad y_1 = 1$ Aplicando o mesmo procedimento para λ_2, encontramos o autovetor $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \quad e \quad y_2 = 1$. Os autovetores formam a matriz P, tal que:

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuja inversa é P^{-1},

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal D formada pelos autovalores:

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

Considerando $Q^n = P.D^n.P^{-1}$, Chegamos ao seguinte resultado:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

A fórmula de Binet , do capítulo 2.

Utilizando as propriedades dos determinantes , calculamos Q^n:

$$\begin{aligned} Det(Q^n) &= Det(Q.Q^{n-1}) \\ &= DetQDetQ^{n-1} \\ &= Det(Q^n) \end{aligned}$$

Assim, concluímos que aplicando o determinante na Matriz Q, obtemos:

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n$$

Desenvolvendo o determinante acima, chegamos à propriedade 1.2.9, do capítulo 2, conhecida como Fórmula de Cassini, $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$.

Utilizando novamente as propriedades dos determinantes e considerando as seguintes matrizes:

$$Q^m = \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix}$$

e

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Calculamos os respectivos determinantes e multiplicamos os mesmos para assim obtermos uma das propriedades dos números de Fibonacci, lembrando que Det $(Q^m.Q^n)$ = Det (Q^n). Det (Q^m):

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{m+n+1}F_{m+n-1} - F_{m+n}^2$$

E para $m \geqslant 1$ e $n \geqslant 1$, temos:

$$F_{m+n+1}F_{m+n-1} - F_{m+n}^2 = (F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2)(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) \tag{3.1}$$

Teorema 3.3.1. *Seja A_n a matriz nXn, dada abaixo, então $\forall\ n \neq 1$, $DetA_n = F_{2n+2}$.*

$$A_n = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Demonstração. A prova será feita por indução, verificamos se a proposição é verdadeira para n=1 e 2, assim, $DetA_1 = 3 = F_4$ e $DetA_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 = F_6$, o que se verifica. Suponhamos, por hipótese, que a proposição seja verdadeira para $k < n$

$$\begin{aligned} \left|A_k\right| &= 3\left|A_{k-1}\right| + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3\left|A_{k-1}\right| - \left|A_{k-2}\right| \\ &= 3F_{2(k-1)+2} - F_{2(k-2)+2} \\ &= 3F_{2k} - F_{2k-2} \\ &= F_{2k} + F_{2k} + (F_2k - F_{2k-2}) \\ &= F_{2k} + (F_{2k} + F_{2k-1}) \\ &= F_{2k} + F_{2k+1} \\ &= F_{2k+2} \end{aligned}$$

Logo, a proposição para todo $n \geqslant 1$. ☐

4 Polinômios de Fibonacci

Nesse capítulo exploramos os polinômios de Fibonacci, algumas de suas propriedades, derivada e matriz $Q(x)$. As referências utilizadas foram (KOSHY, 2019), (FALCON; PLAZA, 2009) e (ÖZKAN; TASTAN,)

4.1 Definição

Os polinômios de Fibonacci, como são conhecidos, foram estudados e assim denominados pelos matemáticos Charles Catalan e E. Jacobsthal em 1883. Neste trabalho vamos utilizar a definição segundo Catalan.

Definição 4.1.1. *Seja $F_n(x)$, com $n \geqslant 0$, o polinômio de Fibonacci é definido pela relação de recorrência, $F_1(x) = 1$ e $F_2(x) = x$:*

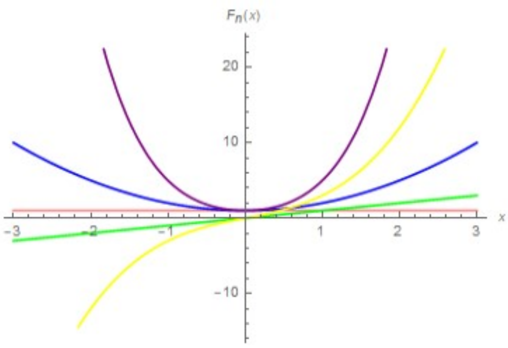
$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$$

Com base na relação de recorrência acima vamos listar os cinco primeiros polinômios de Fibonacci e logo abaixo o gráfico destes (14), embora não estamos interessados nas raízes, mas em seus coeficientes, como veremos mais adiante.

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= 1 \\
F_2(x) &= x \\
F_3(x) &= x^2 + 1 \\
F_4(x) &= x^3 + 2x \\
F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1
\end{aligned}$$

Um resultado importante que está relacionado com algumas propriedades e identidades, como veremos na próxima seção, é a expansão dos polinômios e sua relação com o binômio de Newton, 15.

Figura 14 – Gráfico dos polinômios de Fibonacci até 5º ordem



Fonte: Wolfram.

Figura 15 – Expansão binomial de ordem 7

n	$(1+x)^n$
0	0
1	$1+x$
2	$1+2x+x^2$
3	$1+3x+3x^2+x^3$
4	$1+4x+6x^2+4x^3+x^4$
5	$1+5x+10x^3+5x^4+x^5$
6	$1+6x+35x^2+15x^4+6x^5+x^6$
7	$1+7x+21x^2+35x^3+35x^4+21x^5+7x^6+x^7$

Fonte: Elaborada pela autora.

Observemos as diagonais da figura 15, uma das fórmulas explícitas para encontrar os polinômios de Fibonacci, através da expansão binomial é:

$$F_{n+1} = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-j}{j} x^{n-2j}, \quad n \geqslant 0 \tag{4.1}$$

Exemplo 4.1.1. *para $n = 6$ temos:*

$$F_7(x) = \sum_{0}^{3} \binom{6-j}{j} x^{6-2j} = \binom{6}{0} x^6 + \binom{5}{1} x^4 + \binom{4}{2} x^2 + \binom{3}{3} x^0 = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$$

4.2 Relações de Recorrências e Propriedades

Nesta seção apresentamos alguns resultados relacionados às relações de recorrência dos polinômios de Fibonacci e algumas propriedades.

Teorema 4.2.1. *Para $n \geqslant 1, x \sum_{i=1}^{n} F_i(x) = F_{n+1} + F_n(x) - 1$*

Demonstração. Utilizando a definição 4.1.1,tal que $F_0(x) = 0$ e $F_1(x) = 1$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{i+1}(x) &= x\sum_{i=1}^{n} F_i(x) + \sum_{i=1}^{n} F_{i-1}(x) \\
F_n(x) + F_{n+1}(x) &= x\sum_{i=1}^{n} F_i(x) + F_0(x) + F_1(x)
\end{aligned}
$$

Fazendo $F_0(x) = 0$ e $F_1(x) = 1$:

$$x\sum_{i=1}^{n} F_i(x) = F_{n+1} + F_n(x) - 1$$

□

A propriedade a seguir é uma extensão da Fórmula de Binet, como esta já foi demonstrada no capítulo 2, vamos utilizar seus resultados na demonstração.

Proposição 4.2.1. *Para* $n \geqslant 1$,

$$F_n(x) = \frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

Demonstração. Sejam $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ soluções da equação quadrática $t^2 - xt - 1 = 0$, tais que:

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} \text{ e } \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}.$$

Considerando, $\alpha(x) = \alpha$ e $\beta(x) = \beta$ observamos que $\alpha\beta = -1$, $\alpha + \beta = x$, $\alpha^{-1} = -\beta$ e $\beta^{-1} = -\alpha$.

Assim, reescrevendo a definição 4.1.1 para $x.F_n(x) = F_{n+1}(x) - F_{n-1}(x)$, temos que:

$$
\begin{aligned}
xF_n(x) &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \frac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} \\
xF_n(x) &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - \alpha^n\alpha^{-1} + \beta^n\beta^{-1}}{\alpha - \beta} \\
xF_n(x) &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha^n\beta - \beta^n\alpha}{\alpha - \beta} \\
(\alpha + \beta)F_n(x) &= (\alpha + \beta)\frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \\
F_n(x) &= \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}
\end{aligned}
$$

□

Proposição 4.2.2. *Para $n \geqslant 1$,*

$$F_{2n+1}(x) = F_n^2(x) + F_{n+1}^2(x)$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
F_{2n+1}(x) &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha^{2n} + 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n} + \alpha^{2n+2} + 2(\alpha\beta)^{n+1} + \beta^{2n+2}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1}(\alpha + \alpha^{-1}) + \beta^{2n+1}(\beta + \beta^{-1})}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1}(\alpha - \beta) - \beta^{2n+1}(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= (\alpha - \beta)\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= F_{2n+1}(x)
\end{aligned}
$$

□

Agora apresentamos um resultado importante que é a função geradora para os polinômios de Fibonacci.

$$G_(\lambda) = \frac{\lambda}{1 - x\lambda - \lambda^2} \tag{4.2}$$

Chegamos nessa função facilmente utilizando a relação de recorrência e a propriedade relativa ao somatório dos polinômios de Fibonacci, assim, seja $n \geqslant 0$:

$$G_(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)\lambda^n x\lambda G_(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} xF_n(x)\lambda^{n+1}\lambda^2 G_(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)\lambda^{n+1}$$

Considerando que $F_0(x) = 0$ e $F_1(x) = 1$, temos:

$$G_(\lambda)(1 - x\lambda - \lambda^2) = F_0(x) + F_1(x) - x\lambda F_0(x) = \lambda$$

Logo, obtemos a função geradora dos polinômios de Fibonacci:

$$G_(\lambda) = \frac{\lambda}{1 - x\lambda - \lambda^2}$$

4.3 Derivada

A derivada dos polinômios de Fibonacci segue o mesmo padrão que observamos na expansão binomial, conforme listamos abaixo:

$$\begin{aligned}
F_1'(x) &= 0 \\
F_2'(x) &= 1 \\
F_3'(x) &= 2x \\
F_4'(x) &= 3x^2 + 2 \\
F_5'(x) &= 4x^3 + 6x \\
F_6'(x) &= 5x^4 + 12x^2 + 3 \\
F_7'(x) &= 6x^5 + 20x^3 + 12x \\
F_8'(x) &= 7x^6 + 30x^4 + 30x^2 + 4
\end{aligned}$$

Teorema 4.3.1. *Para* $n > 1$,

$$F_n'(x) = \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x)F_{n-i}(x)$$

Demonstração. A prova será feita pelo princípio de indução, para $n = 2$, $F_2'(x) = F_1(x)F_1(x) = 1$, é verdadeira. Suponhamos, por hipótese, que a fórmula é verdadeira para $n = k$, tal que $F_k'(x) \leqslant n$. E derivando a definição 4.1.1 pra $n = k$:

$$\begin{aligned}
F'_{k+1}(x) &= xF'_k(x) + F'_{k-1}(x) \\
&= F_k(x) + xF'_k(x) + F'_{k-1}(x) \\
&= F_k(x) + \sum_{i=1}^{k-1} F_i(x)F_{k-i}(x) + \sum_{i=1}^{k-2} F_i(x)F_{k-1-i}(x) \\
&= F_k(x) + xF_{k-1}(x)F_1(x) + \sum_{i=1}^{k-2} xF_i(x)F_{k-i}(x) + \sum_{i=1}^{k-2} F_i(x)F_{k-1-i}(x) \\
&= F_k(x) + xF_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{k-2} F_i(x)\left[xF_{k-1}(x) + F_{k-1-x}\right] \\
&= F_k(x)F_1(x) + F_{k-1}(x)F_2(x) + \sum_{i=1}^{k-2} F_i(x)F_{k+1-i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{k} F_i(x)F_{k+1-i}(x)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.3.1. *Para $n = 5$, sua derivada é dada por:*

$$\begin{aligned}
F'_5(x) &= \sum_{i=1}^{5-1} F_i(x)F_{5-1}(x) \\
&= F_1(x)F_4(x) + F_2(x)F_3(x) + F_3\,(x)\,F_2\,(x) + F_4(x)F_1(x) \\
&= 2F_1(x)F_4(x) + 2F_2(x)F_3(x) \\
&= 2(x^3 + 2x) + 2x(x^2 + 1) \\
&= 2x^3 + 4x + 2x^3 + 2x \\
&= 4x^3 + 6x
\end{aligned}$$

4.4 Matriz $Q(x)$

Os polinômios de Fibonacci também estão relacionados com matrizes, no capítulo anterior vimos a Matriz Q, agora vamos considerar a Matriz Q(x).

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir dessa matriz podemos estabelecer algumas relações, para tanto, vamos mostrar que é verdadeira a seguinte (KOSHY, 2019):

$$Q^n(x) = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}.$$

n $\geqslant 1$

Demonstração. Utilizando o princípio de indução, para $n = 1$, temos que:

$$Q^1(x) = \begin{bmatrix} F_2(x) & F_1(x) \\ F_1(x) & F_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo é verdadeira para $n = 1$, Suponhamos que seja verdadeira para $n = k$, assim:

$$Q^k(x) = \begin{bmatrix} F_{k+1}(x) & F_k(x) \\ F_k(x) & F_{k-1}(x) \end{bmatrix}.$$

Então devemos mostrar que é verdade para $n = k + 1$: Multiplicando $Q^n(x)$ por $Q(x)$, temos:

$$\begin{aligned} Q^k(x)Q(x) &= \begin{bmatrix} F_{k+1}(x) & F_k(x) \\ F_k(x) & F_{k-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ Q^{k+1}(x) &= \begin{bmatrix} xF_{k+1}(x) + F_k(x) & F_{k+1}(x) \\ xF_k(x) + F_{k-1}(x) & F_k(x) \end{bmatrix} \\ Q^{k+1}(x) &= \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k(x) \end{bmatrix}. = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Assim , a sentença é válida para $n = k + 1$ Como queríamos demonstrar.

5 Considerações Finais

Os números de Fibonacci representam um marco histórico, uma verdadeira revolução matemática, pois de fato, Fibonacci foi um gênio que expressou seu pensamento matemático em suas obras e comprovou que a matemática está presente na natureza e se manifesta através das mentes brilhantes.

Talvez Fibonacci nunca imaginasse que a sequência, que recebeu seu nome, e que utilizou para resolver um fictício problema de coelhos fosse representar um marco na matemática. Se ele sabia da proeza da sequência? Ele sabia que descobriu algo que já havia na natureza, pois não foi ele quem descobriu estes padrões, nem mesmo soubesse que seus números mantivessem intrínseca relação com o número de ouro.

Neste trabalho, apresentamos apenas uma pequena parte dos inúmeros resultados e estudos dos números de Fibonacci, inclusive sua relação com a natureza, uma vez que existem muitas aplicações em outras áreas, como física e biologia. Mas para o bem da ciência, existe a Associação Fibonacci que incentiva e estimula a pesquisas sobre os números de Fibonacci e periodicamente publica a revista Fibonacci Quarterly.

Enfim, não há muito sobre a história de Fibonacci, nem ao certo quando ele nasceu. Mas certamente sua sequência foi perpetuada por vários séculos e notada por grandes nomes matemáticos.Ele pode ser considerado um gênio que contribuiu de forma significativa à teoria dos números e diversas áreas da matemática.

Referências

BELINI, M. M. *A razão áurea e a sequência de Fibonacci*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 31.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. [S.l.]: Editora Blucher, 2010. Citado na página 15.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I.; FIGUEREDO. *Álgebra linear*. [S.l.]: Harper &Row, 1980. Citado na página 49.

COSTA, G. C. *Ordem de aparição na sequência de Fibonacci um problema sobre divisibilidade*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 37.

FALCON, S.; PLAZA, Á. *k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives*. [S.l.]: Elsevier, 2009. v. 39. 1005–1019 p. Citado na página 57.

GRIMALDI, R. *Fibonacci and Catalan Numbers: an introduction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 13, 17, 37, 39 e 49.

KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2019. Citado 6 vezes nas páginas 13, 17, 37, 49, 57 e 62.

LIVIO, M. *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. [S.l.]: Crown, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 32.

ÖZKAN, E.; TASTAN, M. R. . R. D. M. S. *k-Fibonacci polynomials in the family of Fibonacci Numbers*. [S.l.: s.n.]. v. 12. Citado na página 57.

PIROPO, B. *Um número muito especial XI: Mais plantas e um animal*. 2009. Disponível em: <em:https://www.bpiropo.com.br/fpc20070402.htm.Acessoem10demarçode2022>. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 30.

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. *The fabulous Fibonacci numbers*. [S.l.]: Prometheus Books, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 13, 25 e 32.

RIBEIRO, W. F. et al. *Valores inteiros de funções geradoras de sequências recorrentes: os resultados de Fibonacci e Lucas*. [S.l.]: Universidade Federal de Goiás, 2019. Citado na página 41.

SANTOS, A. T. A. dos. *Das"trevas"à luz de Fibonacci: uma visão histórica*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009. Citado na página 15.

SANTOS, J. P. de O. *Introdução à teoria dos números*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998. Citado na página 37.

SILVA, B. A. *Números de Fibonacci e números de Lucas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 43.

VAJDA, S. *Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section: theory and applications*. [S.l.]: Courier Corporation, 2008. Citado na página 32.

ZAHN, M. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*. [S.l.]: Londrina, PR, Brasil: Editora Ciência Moderna, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 14, 17, 23, 26 e 29.