UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

ROBSON CARLOS DE MOURA JUNIOR

Unicidade Fraca-Forte para o Sistema de Navier-Stokes Compressível

Campinas

2022

Robson Carlos de Moura Junior

Unicidade Fraca-Forte para o Sistema de Navier-Stokes Compressível

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Gabriela Del Valle Planas

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Robson Carlos de Moura Junior e orientada pela Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M865u Moura Junior, Robson Carlos de, 1999-
Unicidade fraca-forte para o sistema de Navier-Stokes compressível / Robson Carlos de Moura Junior. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Gabriela Del Valle Planas.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações de Navier-Stokes. 2. Soluções fracas (Matemática). 3. Equações diferenciais parciais. I. Planas, Gabriela Del Valle, 1972-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Weak-strong uniqueness for the compressible Navier-Stokes system
Palavras-chave em inglês:
Navier-Stokes equations
Weak solutions (Mathematics)
Partial differential equations
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Gabriela Del Valle Planas [Orientador]
Juliana Honda Lopes
César Javier Niche Mazzeo
Data de defesa: 21-06-2022
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-6617-2778
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/3921653053979004

Dissertação de Mestrado defendida em 21 de junho de 2022 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof(a). Dr(a). JULIANA HONDA LOPES

Prof(a). Dr(a). CÉSAR JAVIER NICHE MAZZEO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Às minhas avós Maria Aparecida, Maria Iolanda
e aos meus avôs José Olegário, Antônio Fernando.

Agradecimentos

A Deus pela graça e perseverança a mim concedidas.

Á minha mãe Mary e ao meu pai Robson por sempre me apoiarem durante toda minha vida, sendo meus exemplos de força e dedicação.

Á minha orientadora Gabriela Planas pela orientação, confiança e pelo seu exemplo de profissionalismo e competência. Agradeço também pela oportunidade dada de estudar um tema que sempre gostei, que são as equações de Navier-Stokes.

Aos professores membros da banca examinadora por terem aceito ao convite para desempenhar este papel, dispondo de seu tempo e conhecimento para analisar este trabalho.

Aos professores do ICEX/UFF Volta Redonda, por acreditarem e inspirarem seus alunos a continuarem a estudar. Em especial aos meus orientadores de graduação, Francisca França e Andre Brondani, fundamentais no meu amadurecimento estudantil.

Aos professores do IMECC/UNICAMP pelas aulas de excelente qualidade mesmo no meio de uma pandemia.

Aos meus amigos da UFF por todos os momentos compartilhados, sejam estes momentos de luta ou momentos de glória. Em especial, aos amigos da Mansão Matemática, que estiveram comigo durante meu primeiro curso de verão na UNICAMP.

Aos meus amigos do IMECC pelas experiências trocadas. Mesmo conhecendo-os pessoalmente a pouco tempo, já sei que serão amigos para vida toda. Em especial, aos amigos do Clube de Leitura.

Aos funcionários administrativos do IMECC, pelo rápido e bom atendimento prestado sempre quando solicitados, sendo uma parte fundamental da engrenagem do IMECC.

Aos funcionários da UNICAMP, da divisão de alimentação, responsável pelos restaurantes universitários, das bibliotecas, do CECOM, da prefeitura universitária, da limpeza do campus e todos os demais não citados aqui.

Á UNICAMP pela oportunidade da realização deste mestrado.

Não é o conhecimento,
mas o ato de aprender,
não a posse,
mas o ato de chegar lá,
que concede o maior prazer.
(Carl Friedrich Gauss.)

Resumo

Este trabalho consiste no estudo das equações de Navier-Stokes compressíveis em três dimensões, em particular, na propriedade da unicidade fraca-forte para soluções fracas de energia finita das equações de Navier-Stokes compressíveis para fluidos em regime barotrópico.

São apresentados o modelo matemático das equações e as desigualdades de energia padrão e de entropia relativa, conceitos chaves no decorrer do trabalho. Também é mostrada a equivalência entre as soluções fracas de energia finita e as soluções fracas adequadas. Por fim, estudamos a propriedade de unicidade fraca-forte para domínios limitados e ilimitados com condições de fronteira de Dirichlet e de Navier.

Palavras-chave: equações de Navier-Stokes. soluções fracas (matemática). equações diferenciais parciais.

Abstract

This work consists on the study of the compressible Navier-Stokes equations in three dimensions, in particular, the property of weak-strong uniqueness for finite energy weak solutions of the compressible Navier-Stokes equations for barotropic fluids.

There are presented the mathematical model of the equations, the standard energy inequality and the relative entropy inequality, key concepts in the course of the work. Also it is shown the equivalence between the finite energy weak solutions and the suitable weak solutions. Finally, we study the property of weak-strong uniqueness for bounded and unbounded domains with Dirichlet and Navier boundary conditions.

Keywords: Navier-Stokes equations. weak solutions (mathematics). partial differential equations.

Sumário

Introdução

As equações de Navier-Stokes modelam o comportamento de um fluido newtoniano compressível ou incompressível. O seu nome é devido aos matemáticos e físicos Claude Louis Marie Henri Navier e George Gabriel Stokes. A tentativa de descrever completamente a dinâmica de um fluido newtoniano teve início com Euler [12], Navier [33], Poisson [35], Stokes [37] e depois continuou com diversos estudiosos da área.

Para um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente regular e $(0,T) \subset \mathbb{R}$ um intervalo de tempo, as equações de Navier-Stokes compressíveis são dadas por

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho u) = 0; \tag{1}$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}_x(\varrho u \otimes u) + \nabla_x p(\varrho) = \operatorname{div}_x \mathbb{S} + \varrho f; \tag{2}$$

$$\mathbb{S} = \mu \left(\nabla_x u + \nabla_x u^T - \frac{2}{3} \operatorname{div}_x u \mathbb{I} \right) + \eta \operatorname{div}_x u \mathbb{I}, \quad \mu > 0,\ \eta \geq 0. \tag{3}$$

Nas equações (1), (2) e (3) , $\varrho = \varrho(t,x) : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ representa a densidade, $u = u(t,x) : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ é o campo de velocidades do fluido, $p(\varrho) : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ é a pressão e $\mathbb{S} = \mathbb{S}(\nabla_x u) : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ representa o tensor de viscosidade.

Quando a densidade é constante, temos as equações de Navier-Stokes incompressíveis, que são dadas por

$$\operatorname{div}_x u = 0; \tag{4}$$

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x(u \otimes u) + \nabla_x p = \mu \Delta_x u + f, \quad \mu > 0; \tag{5}$$

onde consideramos $\varrho = 1$ por simplicidade. Para o caso incompressível, a pressão p é uma função que não depende da densidade.

Como são equações diferenciais parciais que descrevem a dinâmica dos fluidos, esperamos a existência e unicidade das soluções, dadas condições iniciais e de fronteira adequadas. Mais do que isso, esperamos que pequenas pertubações no tempo inicial causem somente pequenas pertubações em tempos posteriores. Chamamos estas três propriedades, existência, unicidade e estabilidade das soluções, de boa-colocação de uma equação diferencial parcial.

A boa-colocação das equações de Navier-Stokes (1)-(2) é conhecida apenas localmente no tempo, e em um espaço de alta regularidade. É desconhecido se as equações de Navier-Stokes (1)-(2) possuem soluções clássicas, isto é, diferenciáveis, suaves e globais no tempo. Entretanto, existe outro tipo de solução que exige menos regularidade, onde as derivadas, a grosso modo, são interpretadas no sentido das distribuições. Estas são as chamadas soluções fracas e para o caso incompressível, foram introduzidas por Leray em [27].

A existência de soluções fracas para as equações de Navier-Stokes compressíveis (1)-(2) globais no tempo é conhecida desde Lions [28] para $p(\varrho) = \varrho^\gamma$, com $\gamma \geq \frac{9}{5}$, e foi generalizada em [19] para $\gamma > \frac{3}{2}$ e em [14] para fluidos barotrópicos com leis de pressão mais gerais. O problema de unicidade na classe das soluções fracas ainda está em aberto. É neste momento que a propriedade de unicidade fraca-forte entra em jogo. Ela pode ser enunciada da seguinte forma:

"Se existe uma solução forte, então toda solução fraca com o mesmo dado inicial coincide com a solução forte."

Diferentemente de um resultado padrão de unicidade, que supõe que duas funções na mesma classe são diferentes, e no fim conclui que devem ser iguais, a unicidade fraca-forte estabelece que as soluções fortes são únicas numa classe possivelmente muito maior, que é a classe das soluções fracas. A priori, soluções fracas partindo de uma mesma condição inicial, não são únicas, mas se existe uma solução forte partindo da mesma condição inicial, todas as soluções fracas coincidem com esta solução forte.

A propriedade de unicidade fraca-forte foi estabelecida por Serrin [36] para as equações de Navier-Stokes incompressíveis e por Dafermos [10] para leis de conservação. Utilizando a mesma estratégia, a propriedade foi provada para soluções fracas de energia finita das equações de Navier-Stokes compressíveis com lei de pressão isentrópica $p(\varrho) = \varrho^\gamma$ por Germain em [22]. Feireisl, Novotny e Sun em [21] provaram a propriedade de unicidade fraca-forte para soluções fracas adequadas das equações de Navier-Stokes compressíveis, mas com lei de pressão barotrópica e certas condições sobre a pressão. Nomeadamente

$$p(0) = 0, \;\; p'(\varrho) > 0, \forall \varrho > 0; \quad \lim_{\varrho \to \infty} \frac{p'(\varrho)}{\varrho^{\gamma-1}} = a > 0;$$

para um certo $\gamma > \dfrac{3}{2}$.

Também em [21], foi provada a existência de tais soluções fracas adequadas. Soluções do tipo fraca adequada satisfazem uma desigualdade de entropia que é consideravelmente mais complicada que a desigualdade de energia padrão. Já em [15] por Feireisl, Novotny e Jin, foi provado que soluções fracas adequadas são equivalentes as soluções fracas que cumprem a desigualdade de energia padrão, e portanto satisfazem a propriedade de unicidade fraca-forte. Também foi estendida a propriedade para domínios ilimitados e para a condição de fronteira de Navier pura. Estudaremos os resultados propostos em [21] e [15].

O trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 apresentamos algumas ferramentas matemáticas que serão utilizadas frequentemente ao longo do trabalho, tais como os espaços de Lebesgue, os espaços de Sobolev e desigualdades do tipo Korn-Poincaré.

A seguir, no Capítulo 2 realizamos uma breve introdução sobre a modelagem matemática das equações de Navier-Stokes compressíveis. Nesta introdução estudamos a cinemática do movimento dos fluidos, obtemos a equação de conservação da massa e a equação do balanço do momento linear. Também apresentamos as condições de fronteira e condições iniciais que serão utilizadas nos capítulos posteriores.

No Capítulo 3 definimos as soluções fracas de energia finita e as soluções fracas adequadas. Também estabelecemos as desigualdades de energia padrão e de entropia relativa. Por fim, mostramos a equivalência destes dois tipos de soluções e a extensão da classe admissível de funções testes utilizadas na desigualdade de entropia relativa.

Já no Capítulo 4, apresentamos os lemas auxiliares que usaremos na demonstração da propriedade de unicidade fraca-forte.

Finalmente no Capítulo 5, demonstramos em detalhe a propriedade de unicidade fraca-forte para domínios limitados e ilimitados com condição de fronteira de Dirichlet e de Navier. A demonstração é feita passo a passo utilizando itens de todos os capítulos anteriores, desde as desigualdades do tipo Korn-Poincaré do Capítulo 1, passando pela formulação das equações no Capítulo 2, definição dos tipos de solução no Capítulo 3 até os lemas do Capítulo 4.

No Apêndice A, encontra-se um breve esquema da demonstração da existência de soluções fracas de energia finita para o sistema de Navier-Stokes compressível em 3 dimensões com lei de pressão barotrópica.

Apesar dos resultados de Germain [22], Feireisl, Novotny e Jin [15] serem recentes, já existem várias generalizações na literatura. Por exemplo, podemos acoplar as equações (1)-(2) com outras equações da dinâmica dos fluidos, por exemplo a lei de Fourier para temperatura [18], a magneto-hidrodinâmica [23], a equação de Smoluchowski [3], podemos considerar leis de pressão mais gerais [7] e mais ainda, utilizar uma estratégia semelhante para provar o limite invíscido das equações de Navier-Stokes [38]. Todas estas referências nos serviram para dar motivação e entender melhor como a propriedade de unicidade fraca-forte é utilizada na atualidade.

1 Preliminares

Neste capítulo, iremos introduzir as notações e ferramentas matemáticas que utilizaremos nesta dissertação. Estas ferramentas matemáticas são resultados clássicos da teoria da medida, análise funcional, teoria dos espaços de Sobolev e cálculo em várias variáveis.

1.1 Notação

Vetores pertencentes ao espaço euclidiano serão representados por letras minúsculas, como u, v. Matrizes, tensores e funções valoradas no espaço de matrizes serão representados por letras maiúsculas estilizadas em *blackboard bold*, por exemplo $\mathbb{S}$ e $\mathbb{I}$. A matriz identidade será denotada por $\mathbb{I} = \{\delta_{ij}\}_{i,j=1}^N$.

Denotaremos constantes genéricas por c e c_i. As constantes denotadas por c, encontradas em desigualdades e igualdades geralmente não possuem o mesmo valor.

Um *domínio* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^N$. O fecho de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ será denotado por $\overline{\Omega}$, e sua fronteira por $\partial\Omega$. O vetor normal exterior à $\partial\Omega$ será denotado por n.

A bola centrada em um ponto $x \in \mathbb{R}^N$ de raio r é escrita como

$$B(x;r) = \{y \in \mathbb{R}^N; |x-y| < r\}.$$

O traço de uma matriz $\mathbb{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$ é

$$\text{traço}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^N a_{ii}.$$

O produto escalar de dois vetores $u = [u_1, \ldots, u_N],\ v = [v_1, \ldots, v_N]$ será

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^N u_i v_i.$$

O produto escalar de dois tensores $\mathbb{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N,\ \mathbb{B} = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^N$ será denotado

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} b_{ij}.$$

O espaço das matrizes de dimensão N por N com coeficientes em $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R}^{N\times N}$.

O produto tensorial de dois vetores $u = [u_1, \dots, u_N]$, $v = [v_1, \dots, v_N]$ será uma matriz denotada por

$$u \otimes v = \{u_i v_j\}_{i,j=1}^N.$$

Se $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, a derivada parcial de f em uma variável espacial x_i será escrita como

$$\partial_{x_i} f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x), \quad i = 1, \dots, N.$$

A derivada parcial de f, com respeito a variável temporal $t \in I$, será

$$\partial_t f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x).$$

Um vetor na forma $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]$, onde cada componente α_i é um inteiro não-negativo, é chamado de *multi-índice* de ordem

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N.$$

Dado um multi-índice α, definimos

$$\partial^\alpha f(t,x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(t,x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N} f.$$

Também iremos utilizar a mesma notação quando estivermos nos referindo as *derivadas fracas*.

Se $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, isto é, f é uma função escalar, o gradiente de f com respeito a variável espacial x será denotado por

$$\nabla_x f(t,x) = [\partial_{x_1} f(t,x), \partial_{x_2} f(t,x), \dots, \partial_{x_N} f(t,x)].$$

Se $v : I \times \Omega \to \mathbb{R}^M$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $v = [v_1(t,x), v_2(t,x), \dots v_M(t,x)]$, o gradiente de v com respeito a variável espacial x é uma matriz e será denotado por

$$\nabla_x v(t,x) = \{\partial_{x_j} v_i(t,x)\}_{i,j}, \qquad \text{tal que } 1 \le i \le M,\ 1 \le j \le N.$$

Se $v : I \times \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $v = [v_1(t,x), v_2(t,x), \dots v_N(t,x)]$, o divergente de v com respeito a variável espacial x será denotado por

$$\operatorname{div}_x v(t,x) = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} v_i(t,x).$$

O divergente de um tensor ou uma função $\mathbb{B} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^{N \times N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\mathbb{B}(t,x) = \{b_{ij}(t,x)\}_{i,j=1}^N$ é um vetor e será denotado por

$$\operatorname{div}_x \mathbb{B} = [(\operatorname{div}_x \mathbb{B})_1, (\operatorname{div}_x \mathbb{B})_2, \dots, (\operatorname{div}_x \mathbb{B})_N]^T,$$

onde

$$(\operatorname{div}_x \mathbb{B})_i = \sum_{j=1} \partial_{x_j} b_{ij}(t,x), \quad i = 1, \dots, N.$$

1.2 Espaços de Funções

Todos os espaços vetoriais desta dissertação terão o corpo $\mathbb{R}$ como corpo dos escalares. A norma em um espaço de Banach X será denotada por $\|\cdot\|_X$, enquanto a norma em um espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ será denotada por $|\cdot|$. Se X é um espaço de Hilbert, denotaremos o produto interno de dois vetores $u, v \in X$ por (u, v). O dual de um espaço de Banach X será denotado por X^*. A aplicação de um funcional linear $f \in X^*$ em um vetor $u \in X$ será denotada por $\langle f, u\rangle_{X^*,X}$.

Proposição 1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja X um espaço de Hilbert. Então para todo $u, v \in X$, a seguinte desigualdade é válida;*

$$|(u, v)| \leq \|u\|_X \|v\|_X. \tag{1.1}$$

Mergulhos em Espaços de Banach

Seguindo [1], sejam X, Y espaços de Banach. Dizemos que X é *mergulhado* em Y se as seguintes condições são satisfeitas;

(i) X é um subespaço vetorial de Y;

(ii) O operador inclusão $i : X \to Y$, dado por $i(x) = x$, é contínuo.

Como i é um operador linear, a condição (ii) é equivalente a dizer que

$$\exists c > 0; \quad \|u\|_Y \leq c\|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

Dizemos que X é *mergulhado compactamente* em Y se o mergulho i é um operador compacto.

Convergência em Espaços de Banach

Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ converge fortemente para $x \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n > n_0,\ \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Denotamos esta convergência por $x_n \to x$.

Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ converge fracamente para $x \in X$ se, para todo funcional linear $T \in X^*$, $T(x_n) \to T(x)$. Denotamos esta convergência por $x_n \rightharpoonup x$.

Dizemos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^*$ converge fraca-* para $T \in X^*$ se $x(T_n) \to x(T)$ para todo $x \in X \subset X^{**}$. Denotamos esta convergência por $T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T$.

Espaço das Funções Contínuas

Daqui em diante $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ será um domínio.

O espaço $C(\overline{\Omega})$ denota o espaço das funções contínuas $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Se Ω é limitado, $C(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|.$$

De forma análoga, definimos o espaço $C(\overline{\Omega}, X)$, formado pelas funções $f : \overline{\Omega} \to X$ contínuas, onde X é um espaço de Banach. Se Ω é limitado, o espaço $C(\overline{\Omega}, X)$ é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega}, X)} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|f(x)\|_X.$$

O espaço $C_{\text{weak}}(\overline{\Omega}, X)$ é formado pelas funções $f : \overline{\Omega} \to X$ contínuas com respeito a topologia fraca de X. Mais especificamente, $f \in C_{\text{weak}}(\overline{\Omega}, X)$ se a função

$$\psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ \psi(x) = \|f(x)\|_X,$$

é limitada e

$$\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \langle h, f(x) \rangle_{X^*, X}$$

é contínua sobre $\overline{\Omega}$ para todo funcional linear $h \in X^*$.

Espaço de Funções Diferenciáveis

O espaço $C^k(\overline{\Omega})$ onde k é um inteiro não-negativo, denota o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que são k vezes diferenciáveis. Se Ω é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^N$, o espaço $C^k(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|v\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha v(x)| .$$

O espaço

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega})$$

é formado pelas funções infinitamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$.

Para k um inteiro não-negativo ou $k = \infty$, o espaço $C_c^k(\overline{\Omega})$ é o subespaço de $C^k(\overline{\Omega})$ das funções com suporte compacto.

O espaço $C^{k,\nu}(\overline{\Omega}),\ \nu \in (0, 1]$ é o subespaço de $C^k(\overline{\Omega})$ formado pelas funções que possuem k-ésimas derivadas ν-Hölder contínuas sobre $\overline{\Omega}$. Em particular, $C^{k,1}(\overline{\Omega})$ é o subespaço de $C^k(\overline{\Omega})$ cuja as k-ésimas derivadas são Lipschitz contínuas. Se Ω é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^N$, o espaço $C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|u\|_{C^{k,\nu}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\alpha|=k} \left\{ \sup_{x,y \in \Omega; x \neq y} \left\{ \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x - y|^\nu} \right\} \right\} .$$

1.2.1 Espaços de Lebesgue

Seja $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{1.2}$$

Os elementos de $L^p(\Omega)$ são classes de equivalência que satisfazem (1.2). Duas funções pertencem a mesma classe de equivalência se são iguais q.t.p em Ω. Por simplicidade, vamos ignorar esta distinção e escrever $u \in L^p(\Omega)$ se u satisfaz (1.2), e $u = 0$ em $L^p(\Omega)$ se $u(x) = 0$ q.t.p em Ω. O espaço $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uma função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita ser *essencialmente limitada* se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq c \quad q.t.p \;\; \text{em } \Omega.$$

O espaço denotado por $L^\infty(\Omega)$ é o espaço formado pelas funções essencialmente limitadas. Munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|,$$

o espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Teorema 1 (Desigualdade de Hölder, veja [4]).

Sejam $p, q \in [1, \infty]$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ então $uv \in L^1(\Omega)$ e além disso

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Corolário 1 (Desigualdade de Hölder Generalizada, veja [6]).

Sejam $p_1, \ldots, p_n, r \in [1, \infty]$ tais que

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}\ .$$

Se $u_1, \ldots, u_n$ são tais que $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, então o produto $u_1 \ldots u_n \in L^r(\Omega)$ e além disso

$$\|u_1 \ldots u_n\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \ldots \|u_n\|_{L^{p_n}(\Omega)}.$$

Se $1 \leq p, q < \infty$, definimos a soma de espaços $(L^p + L^q)(\Omega)$ como

$$(L^p + L^q)(\Omega) = \{h = f + g;\ f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)\}.$$

Munido com a norma

$$\|h\|_{L^p + L^q} = \inf \left(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^q} \right),$$

o espaço $(L^p + L^q)(\Omega)$ é um espaço de Banach.

A interseção de espaços $(L^p \cap L^q)(\Omega)$ é definida por

$$(L^p \cap L^q)(\Omega) = \{h; h \in L^p(\Omega) \text{ e } h \in L^q(\Omega)\}.$$

Munido com a norma

$$\|h\|_{L^p \cap L^q(\Omega)} = \max\left(\|h\|_{L^p(\Omega)}, \|h\|_{L^q(\Omega)}\right),$$

o espaço $(L^p \cap L^q)(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega; X)$ são espaços de funções (Bochner) mensuráveis $v : \Omega \to X$ tais que

$$\int_\Omega \|v(x)\|_X^p \, \mathrm{d}x < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

O espaço $L^p(\Omega; X)$ é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|v\|_{L^p(\Omega;X)} = \left(\int_\Omega \|v(x)\|_X^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Analogamente, $v \in L^\infty(\Omega; X)$ se v é (Bochner) mensurável e

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} \|v(x)\|_X < \infty.$$

Em particular, escolhendo $X = \mathbb{R}^M$, temos os espaços $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Denotamos por $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega; X)$ o espaço das funções L^p-localmente integráveis, isto é,

$$v \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega; X)\ , \text{ se } v \in L^p(K; X) \text{ para qualquer compacto } K \subset \Omega.$$

1.2.2 Espaços de Sobolev

Um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dito ser de classe $\mathcal{C}$ se para cada ponto $x \in \partial\Omega$, existe $r > 0$ e uma função $\psi : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ pertencente à classe de funções $\mathcal{C}$ tal que, a menos de rotações e diferentes rotulagens para os eixos temos que

$$\Omega \cap B(x; r) = \{y = (y_1, \ldots, y_N) \in \Omega \ ; \ \psi(y') < y_N\} \cap B(x; r),$$

$$\partial\Omega \cap B(x; r) = \{y = (y_1, \ldots, y_N) \in \partial\Omega \ ; \ \psi(y') = y_N\} \cap B(x; r),$$

onde $y' = (y_1, \ldots, y_{N-1})$.

O domínio Ω é dito ser um *domínio Lipschitz* se ψ é Lipschitz. Um domínio Lipschitz Ω admite vetor normal externo $n(x)$ para q.t.p $x \in \partial\Omega$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio. O *espaço de Sobolev*, denotado por

$$W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^M),$$

onde $1 \leq p \leq \infty$, e k é um inteiro positivo, é definido como o espaço formado pelas funções que possuem todas as derivadas fracas de ordem até k, pertencentes à $L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Em símbolos

$$W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M) = \{u \ ; \ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^M), \ |\alpha| \leq k\}.$$

O espaço $W_n^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ é formado pelas funções $u \in W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ tais que

$$u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0,$$

onde n é o vetor normal a fronteira $\partial\Omega$.

A norma de $W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ é definida por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^M)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$, definimos

$$W^{k,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^M) = \{u \ ; \ \partial^\alpha u \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M), \ |\alpha| \leq k\}.$$

A norma de $W^{k,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ é definida por

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^M)} = \max_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M)}.$$

Denotamos o completamento de $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)}$ por $W_0^{k,p}(\Omega;\mathbb{R}^M)$.

Os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega,\mathbb{R}^M)$ são espaços de Banach, e quando $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega,\mathbb{R}^M)$ é um espaço de Hilbert e os denotamos simplesmente por $H^k(\Omega,\mathbb{R}^M)$. Quando $M = 1$, denotamos $W^{k,p}(\Omega,\mathbb{R}^M)$ por $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 2 (Teorema do Mergulho em espaços de Sobolev, veja [1])**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio Lipschitz limitado.*

(i) Se $kp < N$ e $p \geq 1$, então o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é mergulhado em $L^q(\Omega)$ para todo

$$1 \leq q \leq p^* = \frac{Np}{N-kp}.$$

Além disso, o mergulho é compacto se $k > 0$ e $q < p^*$.

(ii) Se $kp = N$, então o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é mergulhado compactamente em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$.

(iii) Se $kp > N$, então $W^{k,p}(\Omega)$ é mergulhado em $C^{k-[\frac{N}{p}]-1,\ \nu}(\overline{\Omega})$, onde $[\ ]$ denota a parte inteira do número e

$$\nu = \begin{cases} \left[\dfrac{N}{p}\right] + 1 - \dfrac{N}{p}, & se \ \dfrac{N}{p} \notin \mathbb{Z}; \\ \textit{um número positivo arbitrário em } (0,1), & se \ \dfrac{N}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Além disso, é mergulhado compactamente se $0 < \nu < \left[\dfrac{N}{p}\right] + 1 - \dfrac{N}{p}$.

Teorema 3 (Dual de Espaços de Sobolev, veja [1])**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio, e seja* $1 \leq p < \infty$. *O espaço dual do espaço* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *será denotado por*

$$\left[W_0^{k,p}(\Omega)\right]^*.$$

Um funcional linear $f \in \left[W_0^{k,p}(\Omega)\right]^*$ *admite uma representação*

$$\langle f; v\rangle_{\left[W_0^{k,p}(\Omega)\right]^*, W_0^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega (-1)^\alpha w_\alpha \partial^\alpha v \, \mathrm{d}x, \tag{1.3}$$

onde $w_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Para $1 < p < \infty$, a norma de um funcional linear $f \in \left[W_0^{k,p}(\Omega)\right]^*$ é definida por

$$\|f\|_{\left[W_0^{k,p}(\Omega)\right]^*} = \inf\left\{\left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|w_\alpha\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p'}} \; ; \; w_\alpha \text{ satisfaz } (1.3)\right\}.$$

Para $p = 1$,

$$\|f\|_{\left[W_0^{k,1}(\Omega)\right]^*} = \inf\left\{\max_{|\alpha|\leq k}\left\{\|w_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \; ; \; w_\alpha \text{ satisfaz } (1.3)\right\}\right\}.$$

O ínfimo é atingido em ambos os casos. Denotaremos o espaço $\left[W_0^{k,p}(\Omega)\right]^*$ simplesmente por $W^{-k,p'}(\Omega)$.

Teorema 4 (Mergulho no Dual de Espaços de Sobolev, veja [1])**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado. Sejam* $k > 0$ *e* $q < \infty$ *tais que*

(i) $q > \dfrac{p^*}{p^* - 1}$, *onde* $p^* = \dfrac{Np}{N - kp}$ *se* $kp < N$;

(ii) $q > 1$ *para* $kp = N$, *ou* $q \geq 1$ *se* $kp > N$.

Então o espaço $L^q(\Omega)$ *é mergulhado compactamente no espaço* $W^{-k,p'}(\Omega)$, *onde* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Teorema 5 (Desigualdade de Poincaré, veja [17])**.** *Seja* $1 \leq p < \infty$, *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio Lipschitz limitado. Então segue-se que*

(i) Para todo $A \subset \partial\Omega$ *com medida de superfície não nula, existe uma constante positiva* $c = c(p, N, A, \Omega)$ *tal que*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq c\left(\|\nabla_x v\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \int_A |v| \, \mathrm{d}S\right),$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) Existe uma constante positiva $c = c(p, \Omega)$ tal que

$$\left\| v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \, \mathrm{d}x \right\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla_x v\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)},$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 6 (Desigualdade de Korn em L^p, veja [17])**.** *Suponha que $1 < p < \infty$. Então segue-se que*

(i) Existe uma constante positiva $c = c(p, N)$ tal que

$$\|\nabla_x v\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})} \leq c \|\nabla_x v + \nabla_x^T v\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})},$$

para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

(ii) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio Lipschitz limitado. Então existe uma constante positiva $c = c(p, N, \Omega) > 0$ tal que

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \leq c\left(\|\nabla_x v + \nabla_x^T v\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{N\times N})} + \int_\Omega |v| \, \mathrm{d}x \right),$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Teorema 7 (Desigualdade de Korn Generalizada, veja [17])**.** *Seja $1 < p < \infty$ e $N > 2$. Então segue-se que*

(i) Existe uma constante positiva $c = c(p, N)$ tal que

$$\|\nabla_x v\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})} \leq c \left\| \nabla_x v + \nabla_x v^T - \frac{2}{N} \operatorname{div}_x v \mathbb{I} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})},$$

para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$.

(ii) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio Lipschitz limitado. Então existe uma constante positiva $c = c(p, N, \Omega) > 0$ tal que

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \leq c\left(\left\| \nabla_x v + \nabla_x^T v - \frac{2}{N} \operatorname{div}_x \mathbb{I} \right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})} + \int_\Omega |v| \, \mathrm{d}x \right),$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Teorema 8 (Desigualdade de Korn-Poincaré, veja [17])**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N > 2$ um domínio Lipschitz limitado, e seja $1 < p < \infty$, $M_0 > 0$, $K > 0$, $\gamma > 0$.Então existe uma constante positiva $c = c(p, M_0, K, \gamma)$ tal que a desigualdade*

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \leq c\left(\left\| \nabla_x v + \nabla_x^T v - \frac{2}{N} \operatorname{div}_x v\mathbb{I} \right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \int_\Omega r|v| \, \mathrm{d}x \right)$$

é válida para $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, e toda função não-negativa r tal que

$$0 < M_0 \leq \int_\Omega r \, \mathrm{d}x, \quad \int_\Omega r^\gamma \, \mathrm{d}x \leq K, \quad \textit{para um certo } \gamma > 1.$$

Corolário 2. *Nas mesmas condições do Teorema 8, existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|v\|^2_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \leq c\left(\left\|\nabla_x v + \nabla_x^T v - \frac{2}{N}\operatorname{div}_x v\mathbb{I}\right\|^2_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \int_\Omega r^2|v|^2\,\mathrm{d}x\right).$$

Demonstração. Do Teorema 8, temos que

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \leq c_1\left(\left\|\nabla_x v + \nabla_x^T v - \frac{2}{N}\operatorname{div}_x v\mathbb{I}\right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \int_\Omega r|v|\,\mathrm{d}x\right). \tag{1.4}$$

Elevando ambos os lados de (1.4) ao quadrado, e utilizando a Proposição 6, obtemos que

$$\|v\|^2_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \leq 3c_1^2\left(\left\|\nabla_x v + \nabla_x^T v - \frac{2}{N}\operatorname{div}_x v\mathbb{I}\right\|^2_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|r|v|\|^2_{L^1(\Omega)}\right). \tag{1.5}$$

Como Ω é um domínio limitado, da desigualdade de Hölder

$$\|r|v|\cdot 1\|_{L^1(\Omega)} \leq \|r|v|\|_{L^2(\Omega)}\|1\|_{L^2(\Omega)}.$$

Equivalentemente

$$\int_\Omega r|v|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega r^2|v|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto

$$\|r|v|\|^2_{L^1(\Omega)} \leq |\Omega|\int_\Omega r^2|v|^2\,\mathrm{d}x.$$

Assim, pela desigualdade (1.5)

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)} &\leq 3c_1^2\left(\left\|\nabla_x v + \nabla_x^T v - \frac{2}{N}\operatorname{div}_x v\mathbb{I}\right\|^2_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + |\Omega|\int_\Omega r^2|v|^2\,\mathrm{d}x\right)\\ &\leq 3c_1^2(1+|\Omega|)\left(\left\|\nabla_x v + \nabla_x^T v - \frac{2}{N}\operatorname{div}_x v\mathbb{I}\right\|^2_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \int_\Omega r^2|v|^2\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Tomando $c = 3c_1^2(1+|\Omega|)$, o corolário está provado. □

Proposição 2. *Seja $v \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ tal que $v|_{\partial\Omega} \equiv 0$, onde Ω é um domínio uniformemente Lipschitz ilimitado. Então, para alguma constante $c > 0$, a seguinte desigualdade é válida.*

$$\|v\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c\,\|\mathbb{S}(\nabla_x v)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}. \tag{1.7}$$

A Proposição 3 a seguir é válida apenas para alguns tipos de domínios ilimitados, tais como semi-espaços, domínios exteriores, cilindros etc.

Proposição 3 ([15], [24])**.** *Seja $N > 2$, $1 < p < \infty$ e $V \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|V| < \infty$. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio com certas restrições em sua geometria, (Ω pode ser um semi-espaço, um domínio exterior, um cilindro etc), então existe uma constante $c(|V|)$ tal que*

$$\|v\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c(|V|)\left(\|\mathbb{S}(\nabla_x v)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_{\Omega\setminus V}|v|^2\,\mathrm{d}x\right), \tag{1.8}$$

para todo $v \in W^{1,2}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$.

1.2.3 Espaços Dependentes do Tempo

Vamos agora introduzir os espaços dependentes do tempo. Esta subseção é baseada em [13]. Estes espaços são amplamente utilizados na teoria das equações diferenciais parciais parabólicas e hiperbólicas.

Daqui em diante nesta subseção, X será um espaço de Banach, $T > 0$ e $f : [0,T] \to X$ é uma função valorada em X. Estamos interessados em estudar a integrabilidade de f.

Uma função $s : [0,T] \to X$ é dita ser *simples* se possui a forma

$$s(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(t) u_i, \ (0 \le t \le T),$$

onde cada E_i é um subconjunto Lebesgue mensurável de $[0,T]$ e $u_i \in X, \ (i = 1, \ldots, m)$.

Uma função $f : [0,T] \to X$ é dita ser *fortemente mensurável* se existe uma sequência de funções simples $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}, \ s_k : [0,T] \to X$ tais que

$$s_k(t) \to f(t) \quad \text{para q.t.p } 0 \le t \le T.$$

O espaço $L^p(0,T;X)$ é formado por todas as funções fortemente mensuráveis $v : [0,T] \to X$ tais que

$$\|v\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

para $1 \le p < \infty$.

Para $p = \infty$, $L^\infty(0,T;X)$ é formado por todas as funções fortemente mensuráveis $v : [0,T] \to X$ tais que

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le T} \|v(t)\|_X < \infty.$$

Definição 1. *Seja $v \in L^1(0,T;X)$. Dizemos que $w \in L^1(0,T;X)$ é a derivada fraca de v, e escrevemos*

$$v' = w,$$

se

$$\int_0^T \varphi'(t) v(t) \,\mathrm{d}t = - \int_0^T \varphi(t) w(t) \,\mathrm{d}t,$$

para toda função teste $\varphi \in C_c^\infty(0,T)$.

O espaço de Sobolev

$$W^{1,p}(0,T;X)$$

é formado por todas as funções $v \in L^p(0,T;X)$ tais que v' existe no sentido fraco e pertence à $L^p(0,T;X)$.

Se $1 \leq p < \infty$, a norma de $W^{1,p}(0,T;X)$ é definida por

$$\|v\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p + \|v'(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$, a norma de $W^{1,\infty}(0,T;X)$ é dada por

$$\|v\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq T} \left(\|v(t)\|_X + \|v'(t)\|_X\right).$$

1.3 Teoremas de Integração

Teorema 9 (Gauss-Green, [13])**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Se $v \in C^1(\overline{\Omega})$ então*

$$\int_\Omega v_{x_i} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v n_i \,\mathrm{d}S, \quad \text{para } i = 1, \ldots, N.$$

Mais ainda,

$$\int_\Omega \operatorname{div}_x v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v \cdot n \,\mathrm{d}S,$$

para cada $v \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$, onde $n = (n_1, \ldots, n_N)$ é o vetor normal unitário externo à $\partial\Omega$.

Teorema 10 (Integração por Partes, [13])**.** *Sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então*

$$\int_\Omega u_{x_i} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u v_{x_i} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u v n_i \,\mathrm{d}S, \tag{1.9}$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Proposição 4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio ilimitado com fronteira uniformemente Lipschitz. Sejam $u, v \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R})$ tais que $u \to 0$ e $v \to 0$ quando $|x| \to \infty$, e $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Então*

$$\int_\Omega u_{x_i} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u v_{x_i} \,\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

Demonstração. Dado que $u, v \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R})$, temos que $u_{x_i} v \in L^1(\Omega;\mathbb{R})$, logo as integrais em (1.10) estão bem definidas.

Considere o conjunto $B_R \subset \mathbb{R}^N$ dado por

$$B_R = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R\}.$$

Por um resultado de [32], especificamente o Teorema 15.6 na página 130, e pelo Teorema 10,

$$\int_\Omega u_{x_i} v \,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{\Omega\cap B_R} u_{x_i} v \,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \left(-\int_{\Omega\cap B_R} u v_{x_i} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial(\Omega\cap B_R)} u v n_i \,\mathrm{d}S\right).$$

Se $\overline{\Omega \cap B_R} = \overline{\Omega} \cap \overline{B_R}$ então $\partial(\Omega \cap B_R) = \left(\partial\Omega \cap \overline{B_R}\right) \cup \left(\partial B_R \cap \overline{\Omega}\right)$.

Dividindo a integral em termos obtemos

$$\int_\Omega u_{x_i} v \,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\left(-\int_{\Omega\cap B_R} u v_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega\cap\overline{B_R}} u v n_i \,\mathrm{d}S + \int_{\partial B_R\cap\overline{\Omega}} u v n_i\,\mathrm{d}S\right).$$

Como $u|_{\partial\Omega} = 0$, segue-se que

$$\int_{\partial\Omega\cap\overline{B_R}} u v n_i\,\mathrm{d}S = 0.$$

Dado que $u \to 0$ e $v \to 0$ quando $|x| \to \infty$, é direto mostrar que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial\Omega\cap\overline{B_R}} u v n_i\,\mathrm{d}S = 0.$$

Portanto

$$\int_\Omega u_{x_i} v\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} -\int_{\Omega\cap B_R} u v_{x_i}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u v_{x_i}\,\mathrm{d}x.$$

□

1.4 Desigualdades Úteis

Proposição 5 (Desigualdade de Young, [6])**.** *Sejam $m \geq 2$ e $x_1, \dots, x_m$ reais não-negativos. Considere também $p_1, \dots, p_m$ reais positivos tais que*

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1.$$

Então segue-se que

$$x_1 \dots x_m \leq \frac{x_1^{p_1}}{p_1} + \cdots + \frac{x_m^{p_m}}{p_m}.$$

Corolário 3. *Sejam x_1, x_2 reais não-negativos e p, q reais positivos tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então para todo $\delta > 0$, temos que

$$x_1 x_2 \leq \frac{\delta x_1^p}{p} + \frac{x_2^q}{\delta^{p/q} q}.$$

Proposição 6 (Veja por exemplo em [1])**.**

Se $1 \leq p < \infty$ e $x_1, x_2 \geq 0$, então

$$(x_1 + x_2)^p \leq 2^{p-1}(x_1^p + x_2^p).$$

Proposição 7 (Lema de Gronwall, veja [17])**.** *Seja $a \in L^1(0,T)$, $a \geq 0$, $\beta \in L^1(0,T)$, e $b_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$b(\tau) = b_0 + \int_0^\tau \beta(t)\,\mathrm{d}t.$$

Se $r \in L^\infty(0,T)$ é tal que

$$r(\tau) \leq b(\tau) + \int_0^\tau a(t) r(t)\,\mathrm{d}t,$$

para q.t.p $\tau \in [0,T]$, então

$$r(\tau) \leq b_0 \exp\left(\int_0^\tau a(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_0^\tau \beta(t)\exp\left(\int_t^\tau a(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t,$$

para q.t.p $\tau \in [0,T]$.

2 Equações de Navier-Stokes Compressíveis

2.1 Modelo Matemático

O texto a seguir é baseado em [14] e [31].

O movimento de um fluido pode ser descrito de duas formas, a forma macroscópica, ou a forma microscópica. Se nós utilizarmos a descrição microscópica, a posição de cada partícula do fluido, e também a velocidade desta partícula em um dado tempo devem ser especificadas. A fim de capturar completamente o comportamento deste sistema, é necessário lidar com um número enorme de equações, que descrevem o movimento de cada partícula individualmente.

A forma macroscópica reduz o número de variáveis relacionadas a cada partícula a algumas poucas variáveis relacionadas aos efeitos médios da ação em um conjunto formado por muitas partículas. Esses efeitos podem ser observados e medidos por meio de instrumentos. Do ponto de vista macroscópico, um fluido é sempre considerado um *contínuo* ocupando em um dado tempo $t \in \mathbb{R}$ um certo domínio espacial Ω no espaço euclidiano N-dimensional $\mathbb{R}^N$.

O *estado* de um fluido é identificado através de certas propriedades macroscópicas observáveis tais como a densidade ϱ, o campo vetorial de velocidades u, e a temperatura ϑ. Cada uma destas quantidades tem um valor bem definido para um dado estado, independente de como o sistema chegou nesse estado. Consequentemente a evolução no tempo de um fluido é descrita através de um sistema de equações diferenciais parciais, com o tempo $t \in \mathbb{R}$ e a posição espacial $x \in \Omega$ como variáveis independentes, e as funções $\varrho = \varrho(t,x)$ e $u = u(t,x)$ como variáveis. No nosso modelo, vamos considerar que o fluido é isotérmico, isto é, a temperatura ϑ é constante.

2.1.1 Cinemática do Movimento de um Fluido

O *movimento* de um corpo na *mecânica do contínuo* é descrito por uma família de funções injetivas

$$X(t,\cdot) : \Omega \to \Omega,\ t \in I,$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo de tempo, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é o domínio espacial ocupado pelo corpo. A *Hipótese de Contínuo* exige que $X(t,\cdot)$ seja um difeomorfismo para todo tempo $t \in I$.

Podemos então escolher uma *configuração de referência* $X(t_0, x) = x$ para todo $x \in \Omega$ e um certo tempo inicial $t_0 \in I$. Por simplicidade vamos considerar $t_0 = 0$ e $I = (0,T)$. Consequentemente, a curva $X(t,x)$, $t \in (0,T)$, representa a trajetória de uma partícula ocupando no tempo t_0 a posição espacial $x \in \Omega$. Portanto o *movimento* é visto como uma função que leva partes do espaço, em partes do espaço. A configuração de referência é introduzida para nos permitir usar a geometria euclidiana como espaço ambiente.

Vamos utilizar então a chamada *descrição Euleriana*, onde o tempo $t \in (0,T)$ e o local $x \in \Omega$ no espaço ambiente são as variáveis independentes.

Um movimento suave pode ser completamente determinado pelo seu campo de velocidades $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ através do sistema de equações

$$\frac{\partial X(t,x)}{\partial t} = u(t, X(t,x)), \;\; X(t_0, x) = x, \quad \text{para } x \in \Omega, \;\; t \in (0,T). \tag{2.1}$$

Aplicando o operador gradiente espacial em ambos os lados de (2.1) obtemos

$$\frac{\partial \nabla_x X(t,x)}{\partial t} = \nabla_x u(t, X(t,x)) \nabla_x X(t,x), \qquad \nabla_x X(t_0, \cdot) = \mathbb{I},$$

de onde deduzimos pela Fórmula de Jacobi para a derivada de determinantes que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\det \nabla_x X(t,x)\right) = \operatorname{div}_x u(t, X(t,x)) \left(\det \nabla_x X(t,x)\right),$$

onde $\operatorname{div}_x u \equiv \text{traço}\,(\nabla_x u)$.

A mesma relação pode ser escrita em uma forma equivalente

$$\partial_t J = J \operatorname{div}_x u, \quad \text{em } (0,T) \times \Omega,$$

onde $J(t, X(t,x)) \equiv |\det \nabla_x X(t,x)|$ é chamado de volume específico.

Definimos a derivada material de uma função $f(t,x)$ suficientemente diferenciável por

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \nabla_x f.$$

Note que

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(f(t, X(t,x))\right).$$

De fato, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(f(t, X(t,x))\right) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t,x)) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial X_i(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \nabla_x f.$$

Teorema 11 (Teorema da Convecção, veja [31], página 10)**.** *Se* $f(t,x) \in C^1\left(\overline{X(t,B)}\right)$, *onde* $B \subset \Omega$, *então*

$$\frac{D}{Dt} \int_{X(t,B)} f \,\mathrm{d}x = \int_{X(t,B)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div}_x u\right) \mathrm{d}x.$$

Como $\int_{X(t,B)} f \,\mathrm{d}x$ *não depende de* x, *podemos reescrever o teorema da seguinte forma*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{X(t,B)} f \,\mathrm{d}x = \int_{X(t,B)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div}_x u\right) \mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Demonstração. Pelo Teorema da Mudança de Variáveis

$$\int_{X(t,B)} f \,\mathrm{d}x = \int_B f\,(t, X(t,x))\, J \,\mathrm{d}x$$

onde $J = |\det \nabla_x X(t,x)|$. Supondo que $f\,(t, X(t,x))\, J$ é suficientemente diferenciável, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{X(t,B)} f \,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\int_B f(t, X(t,x))J \,\mathrm{d}x = \int_B \frac{\partial}{\partial t}\left(f(t,X(t,x))J\right)\,\mathrm{d}x.$$

Agora, sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(f(t,X(t,x))J\right) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t,x))J + f(t,X(t,x))\frac{\partial J}{\partial t}\\ &= \frac{Df}{Dt}J + f\operatorname{div}_x uJ.\end{aligned}$$

Então

$$\int_B \frac{\partial}{\partial t}\left(f(t,X(t,x))J\right)\,\mathrm{d}x = \int_B \left(\frac{Df}{Dt} + f\operatorname{div}_x u\right) J\,\mathrm{d}x.$$

Novamente, pelo Teorema da Mudança de Variáveis

$$\int_B \left(\frac{Df}{Dt} + f\operatorname{div}_x u\right) J\,\mathrm{d}x = \int_{X(t,B)} \left(\frac{Df}{Dt} + f\operatorname{div}_x u\right)\,\mathrm{d}x.$$

□

Corolário 4 (veja [31], página 12)**.** *Seja $f(t,x) \in C^1\left(\overline{X(t,B)}\right)$ onde $B \subset \Omega$ e $\partial X(t,B)$ é uma superfície regular. Então*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{X(t,B)} f\,\mathrm{d}x = \int_{X(t,B)} \frac{\partial}{\partial t} f\,\mathrm{d}x + \int_{\partial X(t,B)} f u\cdot n\,\mathrm{d}S,$$

onde n é o vetor unitário normal e dS é o elemento de superfície em $\partial X(t,B)$.

Demonstração. Pelo Teorema 11,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{X(t,B)} f\,\mathrm{d}x = \int_{X(t,B)}\left(\frac{Df}{Dt} + f\operatorname{div}_x u\right)\,\mathrm{d}x.$$

A definição da derivada material nos diz que

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\cdot\nabla_x f.$$

Calculando diretamente, obtemos

$$\operatorname{div}_x(fu) = u\cdot\nabla_x f + f\operatorname{div}_x u.$$

Então

$$\int_{X(t,B)}\left(\frac{Df}{Dt} + f\operatorname{div}_x u\right)\,\mathrm{d}x = \int_{X(t,B)}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_x(fu)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Finalmente, pelo Teorema da Divergência de Gauss 9

$$\int_{X(t,B)} \mathrm{div}_x(fu)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial X(t,B)} (fu)\cdot n\,\mathrm{d}S.$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{X(t,B)} f\,\mathrm{d}x = \int_{X(t,B)} \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial X(t,B)} (fu)\cdot n\,\mathrm{d}S.$$

□

2.1.2 Conservação da Massa

A *massa* pode ser entendida como uma família de medidas não-negativas $\{M_t\}$, $t \in (0,T)$ sobre Ω obedecendo o *princípio da conservação da massa*:

$$M_{t_1}\left[X(t_1,B)\right] = M_{t_2}\left[X(t_2,B)\right], \tag{2.3}$$

para qualquer conjunto de Borel $B \subset \Omega$ e $t_1, t_2 \in (0,T)$. Consequentemente, a distribuição da massa em cada tempo $t \in (0,T)$ é unicamente determinada pelo movimento X, e a distribuição de referência M_{t_0}. Também vamos assumir que M_t para cada $t \in (0,T)$ é absolutamente contínua com respeito a medida padrão de Lebesgue, então pelo Teorema de Radon-Nikodym, existe uma função $\varrho = \varrho(t,x)$, que chamaremos de *densidade*, que caracteriza a distribuição de massa M, temos também que ϱ é não-negativa e localmente integrável sobre Ω. Consequentemente, a relação (2.3) pode ser reescrita como

$$\int_{X(t_1,B)} \varrho(t_1,x)\,\mathrm{d}x = \int_{X(t_2,B)} \varrho(t_2,x)\,\mathrm{d}x,$$

para todo $t_1, t_2 \in (0,T)$. Ou equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{X(t,B)} \varrho(t,x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.4}$$

Podemos expressar a Equação (2.4) utilizando o Corolário 4. Assim

$$0 = \int_B \frac{\partial \varrho}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\int_B \varrho(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial B} \varrho(t,x)u(t,x)\cdot n\,\mathrm{d}S,$$

para todo domínio $B \subset \Omega$ com fronteira suficientemente suave ∂B, tal que o vetor normal unitário $n = n(x)$ pode ser definido para todo $x \in \partial B$. Pelo Teorema da Divergência de Gauss 9

$$\int_{\partial B} \varrho(t,x)u(t,x)\cdot n\,\mathrm{d}S = \int_B \mathrm{div}_x\left(\varrho(t,x)u(t,x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Então

$$\int_B \frac{\partial \varrho}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_B \mathrm{div}_x\left(\varrho(t,x)u(t,x)\right)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Pela generalidade de B, deduzimos a *equação da continuidade*,

$$\partial_t\varrho + \mathrm{div}_x(\varrho u) = 0, \quad \text{em } (0,T)\times\Omega. \tag{2.5}$$

Esta é a formulação matemática do princípio da conservação da massa.

2.1.3 Leis de Balanço e Balanço do Momento

Quando aplicamos a *Segunda Lei de Newton* a um fluido obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{X(t,B)}(\varrho u)(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{X(t,B)}\varrho(t,x)f(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial X(t,B)}\mathbf{t}(t,x,n)\,\mathrm{d}S,$$

ou, utilizando o Teorema 11,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{B}(\varrho u)(t,x)\mathrm{d}x+\int_{\partial B}(\varrho u)(t,x)u(t,x)\cdot n\,\mathrm{d}x = \int_{B}\varrho(t,x)f(t,x)\mathrm{d}x+\int_{\partial B}\mathbf{t}(t,x,n)\mathrm{d}S, \quad (2.6)$$

onde o lado direito da Equação (2.6) consiste das forças resultantes agindo sobre o elemento de volume $B \subset \Omega$.

De acordo com o *princípio de tensão de Euler-Cauchy*, a força resultante pode ser escrita como a soma das *forças externas* com densidade f e uma *tração simples* representada pelo vetor $\mathbf{t}$. O *princípio de tensão* na mecânica do contínuo é colocado em uso através das *leis fundamentais de Cauchy*, dadas abaixo

- Existe um *tensor de tensões* $\mathbb{T} = \mathbb{T}(t,x)$ tal que

$$\mathbf{t}(t,x,n) = \mathbb{T}(t,x)n.$$

- O tensor de tensões $\mathbb{T}$ é simétrico.

Desta forma, a Equação (2.6) se reduz a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B}(\varrho u)(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial B}(\varrho u)(t,x)u(t,x)\cdot n\,\mathrm{d}x = \int_{B}\varrho(t,x)f(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial B}\mathbb{T}(t,x)n\,\mathrm{d}S.$$

Se todas as quantidades são suaves, podemos aplicar o Teorema da Divergência de Gauss 9 e obter a equação do momento

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}_x(\varrho u \otimes u) = \mathrm{div}_x\,\mathbb{T} + \varrho f, \quad \text{em } (0,T)\times\Omega. \quad (2.7)$$

Um fluido obedece a *lei de Stokes* se o tensor de tensões é dado por

$$\mathbb{T} = \mathbb{S} - p(\varrho)\mathbb{I}, \quad (2.8)$$

onde p é uma função escalar denominada *pressão* e $\mathbb{S}$ é o *tensor de tensões*, que caracteriza a medida de resistência para que o fluido flua. Como

$$\mathrm{div}_x\,\mathbb{T} = \mathrm{div}_x\,\mathbb{S} - \nabla_x p(\varrho),$$

a Equação (2.7) assume a forma

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}_x(\varrho u \otimes u) + \nabla_x p(\varrho) = \mathrm{div}_x\,\mathbb{S} + \varrho f, \quad \text{em } (0,T)\times\Omega. \quad (2.9)$$

2.1.4 Dissipação Viscosa

Existem duas fontes de *dissipação viscosa* em um fluido, a *viscosidade de cisalhamento*, resultante da decomposição do tensor $\mathbb{S}$, e a *viscosidade de volume*, relacionada aos atrasos em atingir o equilíbrio termodinâmico.

O *tensor de tensões* pode ser escrito como

$$\mathbb{S} = \left(\mathbb{S} - \frac{1}{N}\,\text{traço}(\mathbb{S})\mathbb{I}\right) + \frac{1}{N}\,\text{traço}(\mathbb{S})\mathbb{I},$$

onde $\left(\mathbb{S} - \frac{1}{N}\,\text{traço}(\mathbb{S})\mathbb{I}\right)$ representa a *viscosidade de cisalhamento* e $\frac{1}{N}\,\text{traço}(\mathbb{S})\mathbb{I}$ representa a *viscosidade de volume.*

Uma classe importante de fluidos, que ocupa lugar central na teoria matemática, são os fluidos *linearmente viscosos* (newtonianos). Para esta classe de fluidos o *tensor de viscosidade* $\mathbb{S}$ depende linearmente da parte simétrica do gradiente da velocidade u. O tensor $\mathbb{S}$ é então dado por

$$\mathbb{S} = \mu\left(\nabla_x u + \nabla_x u^T\right) + \lambda\,\text{div}_x\, u\mathbb{I},$$

onde μ e λ são chamados *coeficientes de viscosidade.* Do ponto de vista físico, é mais natural usar a representação equivalente

$$\mathbb{S} = \mu\left(\nabla_x u + \nabla_x u^T - \frac{2}{N}\,\text{div}_x\, u\mathbb{I}\right) + \eta\,\text{div}_x\, u\mathbb{I}, \tag{2.10}$$

onde $\mu > 0$ é o *coeficiente da viscosidade de cisalhamento* e $\eta \geq 0$ é o *coeficiente da viscosidade de volume.*

Unindo a equação da continuidade (2.5), a equação do momento (2.9) e a equação do tensor de viscosidade (2.10) obtemos o *sistema de Navier-Stokes Compressível.*

$$\partial_t \varrho + \text{div}_x(\varrho u) = 0, \tag{2.11}$$

$$\partial_t(\varrho u) + \text{div}_x(\varrho u \otimes u) + \nabla_x p = \text{div}_x\,\mathbb{S} + \varrho f, \tag{2.12}$$

$$\mathbb{S} = \mu\left(\nabla_x u + \nabla_x u^T - \frac{2}{N}\,\text{div}_x\, u\mathbb{I}\right) + \eta\,\text{div}_x\, u\mathbb{I}. \tag{2.13}$$

2.1.5 Observações sobre a pressão

Um fluido é dito estar em *regime barotrópico* quando sua pressão depende somente de sua densidade

$$p = p(\varrho).$$

Esta distinção é necessária pois a pressão poderia depender da temperatura.

Os exemplos mais simples de fluidos barotrópicos são os *fluidos isotérmicos,* onde a temperatura ϑ é tomada constante. Se o meio é um gás perfeito, a pressão p é dada de acordo com a *lei de Boyle*, escrita na Equação (2.14)

$$p(\varrho) = R\vartheta_0\varrho, \quad \text{onde } R, \vartheta_0 \text{ são constantes.} \tag{2.14}$$

Outro exemplo de *fluido isotérmico* é um gás de eletrons completamente degenerado com temperatura quase absolutamente igual a zero. A pressão é dada então por uma *equação barotrópica constitutiva* que é a mesma de um gás monoatômico, explicitamente

$$p(\varrho) = a\varrho^{5/3}, \; a > 0.$$

2.1.6 Fluidos Isentrópicos

Se o fluido é um gás ideal obedecendo a *lei de Boyle*, temos

$$p = p(\varrho) = a\varrho^{\gamma}, \; a > 0, \tag{2.15}$$

onde $\gamma > 1$ é denominada a *constante adiabática*. Chamamos este tipo de fluido de isentrópico.

Os fluidos isentrópicos são uma subclasse dos fluidos barotrópicos.

Na nossa dissertação vamos assumir que o fluido está em regime barotrópico e que a pressão $p = p(\varrho)$ é uma função continuamente diferenciável da densidade. Explicitamente

$$\begin{aligned} & p \in C[0,\infty) \cap C^2(0,\infty); \\ & p(0) = 0, \; p'(\varrho) > 0 \;\; \text{para todo } \varrho > 0; \\ & \lim_{\varrho\to\infty} \frac{p'(\varrho)}{\varrho^{\gamma-1}} = a > 0; \end{aligned} \tag{2.16}$$

para um certo $\gamma > 3/2$. Esta hipótese é motivada pela equação para fluidos em regimes isentrópicos (2.15).

2.2 Condições de Fronteira

A fronteira $\partial\Omega$ é considerada uma fronteira cinemática, ela separa o fluido do "resto do mundo". No nosso trabalho, iremos considerar dois tipos de condição de fronteira. Também vamos analisar o caso em que o domínio será ilimitado, descrevendo um certo tipo de comportamento quando $|x| \to \infty$.

Definição 2 (Condição de não-deslizamento na fronteira)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio Lipschitz limitado. A condição de não-deslizamento na fronteira é definida por*

$$u|_{\partial\Omega} \equiv 0, \;\; \textit{isto é}, \; u(t,x) = 0, \;\; \forall (t,x) \in (0,T)\times\partial\Omega. \tag{2.17}$$

Para um domínio ilimitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, vamos assumir o comportamento no infinito

$$\varrho \to \overline{\varrho}, \;\; u \to 0, \quad \textit{quando } |x| \to \infty, \tag{2.18}$$

onde $\overline{\varrho} \geq 0$ é uma constante.

Definição 3 (Condição de deslizamento com fricção na fronteira)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio Lipschitz limitado. A condição de deslizamento com fricção na fronteira é definida por*

$$u \cdot n = 0, \ (\mathbb{S}(\nabla_x u)\, n)_{tan} + \beta u_{tan} = 0, \quad \textit{sobre } (0,T) \times \partial\Omega, \quad \beta \geq 0. \tag{2.19}$$

Onde $v_{tan}|_{\partial\Omega} = (v - (v \cdot n)n)|_{\partial\Omega}$ denota a componente tangencial de um campo vetorial v na fronteira. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é ilimitado, então também é assumido o comportamento no infinito (2.18)*. Esta também será chamada de condição de fronteira de Navier ao longo do trabalho.*

2.3 Condição Inicial

Dado um estado inicial no tempo de referência t_0, digamos $t_0 = 0$, a evolução no tempo de um fluido é determinado pelo sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12), munido com uma das condições de fronteira dadas na Seção 2.2, e por uma condição inicial no tempo de referência. Descrevemos então a densidade inicial

$$\varrho(0,x) = \varrho_0(x), \quad \text{para } x \in \Omega, \tag{2.20}$$

junto com a distribuição inicial do momento linear

$$(\varrho u)(0,x) = (\varrho u)_0(x), \quad \text{para } x \in \Omega. \tag{2.21}$$

Se $\varrho(0,x) > 0$, podemos dividir (2.21) por ϱ em ambos os lados e escrever

$$u(0,x) = u_0(x) \ \text{ para } x \in \Omega.$$

Idealmente, o sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12) munido com uma das condições de fronteira dadas na Seção 2.2 e da condição inicial (2.20)-(2.21) deve dar origem a um problema matematicamente bem-posto, admitindo solução única em um dado intervalo de tempo $(0,T)$ para uma escolha fisicamente adequada da condição inicial.

2.4 Balanço da Energia

Esta seção é baseada em [16] .

O *balanço da energia cinética* é obtido efetuando o produto escalar da equação do momento (2.9) pela velocidade u. Utilizando a equação da continuidade (2.5), deduzimos que

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\frac{1}{2}\varrho|u|^2\right) + \operatorname{div}_x \left(\frac{1}{2}\varrho|u|^2 u\right) + \operatorname{div}_x(p(\varrho)u) \\ - p(\varrho)\operatorname{div}_x u - \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x u) + \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x u = \varrho f \cdot u.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Aqui omitimos a dependência das variáveis (t, x) por simplicidade e clareza da equação.

Se u satisfaz a condição de não-deslizamento na fronteira (2.17), integrando (2.22) em Ω e por partes obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|u|^2\right)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega p(\varrho)\operatorname{div}_x u\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho f \cdot u\,\mathrm{d}x. \tag{2.23}$$

Agora iremos focar na integral

$$\int_\Omega p(\varrho)\operatorname{div}_x u\,\mathrm{d}x.$$

Podemos utilizar a estratégia da *equação renormalizada da continuidade*. Esta ideia foi primeiramente desenvolvida nos trabalhos de Kruzhkov [25] e DiPerna & Lions [11].

Seja $b(\varrho)$ a priori uma função suficientemente diferenciável. Multiplicamos a equação da continuidade (2.5) por $b'(\varrho)$ e obtemos a *equação renormalizada da continuidade*

$$\partial_t b(\varrho) + \operatorname{div}_x(b(\varrho)u) + (b'(\varrho)\varrho - b(\varrho))\operatorname{div}_x u = 0. \tag{2.24}$$

Em particular, podemos escolher

$$b(\varrho) = H(\varrho) \equiv \varrho\int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z, \tag{2.25}$$

de onde

$$b'(\varrho)\varrho - b(\varrho) = p(\varrho).$$

Assim de (2.24), obtemos

$$\partial_t H(\varrho) + \operatorname{div}_x(H(\varrho)u) = -p(\varrho)\operatorname{div}_x u. \tag{2.26}$$

Pela condição de não deslizamento na fronteira (2.17), utilizando o Teorema da Divergência de Gauss 9, segue-se que

$$\int_\Omega \operatorname{div}_x(H(\varrho)u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} H(\varrho)u\cdot n\ \ \mathrm{d}S = 0.$$

Finalmente, integrando a Equação (2.26) em Ω e supondo certa regularidade de $H(\varrho)$ concluímos que

$$-\int_\Omega p(\varrho)\operatorname{div}_x u\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega H(\varrho)\,\mathrm{d}x$$

Voltando a (2.23), obtemos a *equação do balanço total de energia*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left[\frac{1}{2}\varrho|u|^2 + H(\varrho)\right]\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho f\cdot u\,\mathrm{d}x. \tag{2.27}$$

2.4.1 Pressão Potencial

A função $H : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(\varrho) = \varrho\int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z \tag{2.28}$$

é chamada de *pressão potencial*. É conveniente, porém não estritamente necessário que a função H seja uma função convexa da densidade ϱ. Para obtermos esta convexidade, vamos considerar uma hipótese física de *estabilidade termodinâmica*, que nos diz que a pressão é uma função crescente da densidade, mais precisamente

$$p \in C[0,\infty) \cap C^2(0,\infty), \;\; p(0) = 0, \;\; p'(\varrho) > 0 \;\; \text{para todo } \varrho > 0. \tag{2.29}$$

Assumindo a condição (2.29), provemos que $H(\varrho)$ é convexa.

A derivada de $H(\varrho)$ com respeito à ϱ é dada por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho} H(\varrho) = \int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} \frac{p(z)}{z^2} \,\mathrm{d}z + \frac{p(\varrho)}{\varrho}.$$

A derivada segunda de $H(\varrho)$ com respeito à ϱ é dada por

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varrho^2} H(\varrho) = \frac{p(\varrho)}{\varrho^2} + \frac{p'(\varrho)\varrho - p(\varrho)}{\varrho^2} = \frac{p'(\varrho)}{\varrho} > 0.$$

Logo $H(\varrho)$ é convexa.

3 Soluções Fracas Adequadas

Na dinâmica dos fluidos, para uma grande classe de problemas não-lineares de evolução no tempo, incluindo o sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12), a existência de soluções clássicas é conhecida apenas para alguns casos particulares [16]. A existência de soluções clássicas foi provada assumindo algumas condições restritivas, a saber as seguintes:

- O problema é estudado em uma geometria simplificada, tipicamente em um espaço de dimensão $N = 1$. Veja [2]
- A condição inicial representa uma pequena pertubação de um estado estável. Veja [29] e [30].
- O intervalo do tempo de existência $(0, T)$ é pequeno. Veja [40], [41], [42] e [43].

O que é muito mais restritivo que os problemas práticos da vida real. A fim de realizar uma análise mais rigorosa, e garantir a existência de um certo tipo de solução, vamos introduzir o conceito de *solução fraca*, onde as derivadas são interpretadas como *derivadas fracas*, isto é, derivadas no sentido das distribuições.

Neste capítulo, vamos considerar o sistema de Navier-Stokes compressível (2.11)-(2.12) sobre $(0,T) \times \Omega$, onde Ω será um domínio limitado. As condições de fronteira utilizadas serão a condição de fronteira de Dirichlet homogênea (2.17) e condição de fronteira de Navier (2.19).

3.1 Formulação Fraca da Equação da Continuidade

Seja $\varphi \in C_c^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$. Multiplicando a Equação (2.11) por φ, e usando o Teorema da Integração por Partes 10, obtemos a identidade

$$\int_\Omega \varrho(T,\cdot)\varphi(T,\cdot)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_0\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x = \int_0^T\int_\Omega \left(\varrho\partial_t\varphi + \varrho u\cdot\nabla_x\varphi\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Com efeito, multiplicando (2.11) por $\varphi \in C_c^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$, obtemos que

$$\partial_t\varrho\varphi + \mathrm{div}_x(\varrho u)\varphi = 0. \tag{3.2}$$

Integrando (3.2) em $(0,T)\times\Omega$,

$$\int_0^T\int_\Omega \left(\partial_t\varrho\varphi + \mathrm{div}_x(\varrho u)\varphi\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0.$$

Agora note que, pelo Teorema da Integração por Partes 10

$$\int_0^T \partial_t\varrho\varphi\,\mathrm{d}t = \varrho(T,\cdot)\varphi(T,\cdot) - \varrho(0,\cdot)\varphi(0,\cdot) - \int_0^T \varrho\partial_t\varphi\,\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

Com respeito ao termo divergente de (3.2), temos que

$$\int_\Omega \operatorname{div}_x(\varrho u)\varphi \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (\varrho u_i)_{x_i}\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Novamente pelo Teorema da Integração por Partes 10, segue-se que

$$\int_\Omega (\varrho u_i)_{x_i}\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega (\varrho u_i)\varphi_{x_i} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\varrho u_i)\varphi n_i \, \mathrm{d}S.$$

Assim

$$\int_\Omega \operatorname{div}_x(\varrho u)\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega (\varrho u) \cdot \nabla_x \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \varphi \varrho u \cdot n \, \mathrm{d}S.$$

Como $u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ para ambas as condições de fronteira (2.17) e (2.19), segue-se que

$$\int_\Omega \operatorname{div}_x(\varrho u)\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega (\varrho u) \cdot \nabla_x \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

Juntando as equações (3.3) e (3.4), alcançamos que

$$\int_\Omega \varrho(T,\cdot)\varphi(T,\cdot) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_0 \varphi(0,\cdot) \, \mathrm{d}x = \int_0^T \int_\Omega \left(\varrho \partial_t \varphi + \varrho u \cdot \nabla_x \varphi\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

Dizemos que um par de funções $[\varrho, u]$ é uma solução fraca da Equação (2.11) em $(0,T) \times \overline{\Omega}$, se a identidade (3.1) é verdadeira para toda função teste $\varphi \in C_c^\infty([0,T] \times \overline{\Omega})$.

3.2 Formulação Fraca do Balanço do Momento

Seja $\varphi \in C_c^\infty\left([0,T] \times \Omega \, ; \, \mathbb{R}^3\right)$. Multiplicando a Equação (2.12) com condição de fronteira de Dirichlet homogênea (2.17), por φ, e utilizando o Teorema da Integração por Partes 10, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \left(\varrho u \cdot \partial_t \varphi + \varrho (u \otimes u) : \nabla_x \varphi + p(\varrho) \operatorname{div}_x \varphi\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ = -\int_0^T \int_\Omega \varrho f \cdot \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_\Omega (\varrho u)(T,\cdot) \cdot \varphi(T,\cdot) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_0 u_0 \cdot \varphi(0,\cdot) \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Se utilizarmos a condição de fronteira de Navier (2.19), temos $\varphi \in C_c^\infty\left([0,T] \times \overline{\Omega} \, ; \, \mathbb{R}^3\right)$ que deve ser tal que $\varphi \cdot n = 0$ em $[0,T] \times \partial\Omega$. Assim obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \left(\varrho u \cdot \partial_t \varphi + \varrho (u \otimes u) : \nabla_x \varphi + p(\varrho) \operatorname{div}_x \varphi\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ &\qquad - \int_0^T \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \beta \int_0^T \int_{\partial\Omega} u \cdot \varphi \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}t \\ &\qquad = -\int_0^T \int_\Omega \varrho f \cdot \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_\Omega (\varrho u)(T,\cdot) \cdot \varphi(T,\cdot) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_0 u_0 \cdot \varphi(0,\cdot) \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Com efeito, multiplicando a Equação (2.12) por uma função teste $\varphi \in C_c^\infty\left([0,T] \times \Omega; \mathbb{R}^3\right)$ obtemos

$$\partial_t(\varrho u) \cdot \varphi + \operatorname{div}_x(\varrho u \otimes u) \cdot \varphi + \nabla_x p \cdot \varphi = \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x u) \cdot \varphi + \varrho f \cdot \varphi.$$

Integrando em $(0,T)\times\Omega$,

$$\int_0^T\int_\Omega \left(\partial_t(\varrho u)\cdot\varphi + \operatorname{div}_x(\varrho u\otimes u)\cdot\varphi + \nabla_x p\cdot\varphi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega \left(\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x u)\cdot\varphi + \varrho f\cdot\varphi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Utilizando o Teorema da Integração por Partes 10, obtemos as identidades

$$\int_0^T \partial_t(\varrho u)\cdot\varphi\,\mathrm{d}t = (\varrho u)(T,\cdot)\varphi(T,\cdot) - (\varrho u)(0,\cdot)\varphi(0,\cdot) + \int_0^T (\varrho u)\cdot\partial_t\varphi\,\mathrm{d}t; \tag{3.7}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}_x(\varrho u\otimes u)\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\varrho u\otimes u):\nabla_x\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}(\varrho u\otimes u)n\cdot\varphi\,\mathrm{d}S; \tag{3.8}$$

$$\int_\Omega \nabla_x p\cdot\varphi = -\int_\Omega p\operatorname{div}_x\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} p\varphi\cdot n\,\mathrm{d}S; \tag{3.9}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x u)\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u):\nabla_x\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\mathbb{S}(\nabla_x u)n\cdot\varphi\,\mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

Juntando as equações (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10), como φ tem suporte compacto em Ω, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega &\left(\varrho u\cdot\partial_t\varphi + \varrho(u\otimes u):\nabla_x\varphi + p(\varrho)\operatorname{div}_x\varphi\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u):\nabla_x\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^T\int_\Omega \varrho f\cdot\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega(\varrho u)(T,\cdot)\cdot\varphi(T,\cdot)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_0 u_0\cdot\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando a condição de fronteira de Navier (2.19), observamos que

$$\int_{\partial\Omega}\mathbb{S}(\nabla_x u)n\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = -\beta\int_{\partial\Omega} u\cdot\varphi\,\mathrm{d}x.$$

E então, obtemos a identidade

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega &\left(\varrho u\cdot\partial_t\varphi + \varrho(u\otimes u):\nabla_x\varphi + p(\varrho)\operatorname{div}_x\varphi\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &- \int_0^T\int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u):\nabla_x\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \beta\int_0^T\int_{\partial\Omega} u\cdot\varphi\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^T\int_\Omega \varrho f\cdot\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega(\varrho u)(T,\cdot)\cdot\varphi(T,\cdot)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_0 u_0\cdot\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dizemos que $[\varrho,u]$ é uma *solução fraca* da Equação (2.12) se, no caso da condição de fronteira (2.17), a identidade (3.5) é satisfeita para toda função teste $\varphi\in C_c^\infty\left([0,T]\times\Omega\,;\,\mathbb{R}^3\right)$.

3.3 Desigualdade de Energia Padrão

Para o sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12), com condição de fronteira de Dirichlet homogênea (2.17), a *desigualdade de energia padrão* é motivada pela *equação do balanço total de energia* (2.27). A *desigualdade de energia padrão* é definida por

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|u|^2 + H(\varrho)\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau\int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u):\nabla_x u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ \leq \int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho_0|u_0|^2 + H(\varrho_0)\right)\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau\int_\Omega \varrho f\cdot u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.11}$$

para q.t.p $\tau \in (0,T)$, e onde $\varrho_0 = \varrho(0,\cdot)$.

Como $\overline{\varrho}$ é constante, $H(\overline{\varrho})$ e $H'(\overline{\varrho})$ são também constantes. Note também que, pela conservação da massa,

$$\int_\Omega \varrho \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho_0 \,\mathrm{d}x.$$

Consequentemente

$$\int_\Omega -H'(\overline{\varrho})\varrho \,\mathrm{d}x = \int_\Omega -H'(\overline{\varrho})\varrho_0 \,\mathrm{d}x,$$

e finalmente

$$\int_\Omega \left(-H'(\overline{\varrho})(\varrho - \overline{\varrho}) - H(\overline{\varrho})\right)(\tau,\cdot) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega -H'(\overline{\varrho})(\varrho_0 - \overline{\varrho}) - H(\overline{\varrho}) \,\mathrm{d}x.$$

Com isto, a desigualdade (3.11) é equivalente a desigualdade a seguir

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|u|^2 + H(\varrho) - H'(\overline{\varrho})(\varrho - \overline{\varrho}) - H(\overline{\varrho})\right)(\tau,\cdot) \,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\quad \le \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|u_0|^2 + H(\varrho_0) - H'(\overline{\varrho})(\varrho_0 - \overline{\varrho}) - H(\overline{\varrho})\right) \,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho f \cdot u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.12}$$

para q.t.p $\tau \in (0,T)$.

Em (3.12), vamos assumir implicitamente que a condição inicial é escolhida de modo que a integral do lado direito seja finita.

Esta equivalência é importante, pois em [21], a desigualdade de energia padrão utilizada é dada por (3.11) com $f = 0$, e em [15], a desigualdade de energia padrão utilizada é (3.12).

Para o sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12), com condição de fronteira de Navier (2.19), a desigualdade de energia padrão é redefinida por

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|u|^2 + H(\varrho) - H'(\overline{\varrho})(\varrho - \overline{\varrho}) - H(\overline{\varrho})\right)(\tau,\cdot) \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \beta \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} |u|^2 \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}t \\ &\quad \le \int_0^\tau \int_\Omega \varrho f \cdot u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|u_0|^2 + H(\varrho_0) - H'(\overline{\varrho})(\varrho_0 - \overline{\varrho}) - H(\overline{\varrho})\right) \,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.13}$$

para q.t.p $\tau \in (0,T)$.

Motivada por estimativas a priori, que podem ser encontradas em [16] ou em [34], temos a seguinte definição de solução fraca para o sistema de Navier-Stokes.

Definição 4 (Solução Fraca de Energia Finita, condição de fronteira Dirichlet)**.** *Dizemos que o par de funções $[\varrho, u]$ é uma solução fraca de energia finita do sistema de Navier-Stokes* (2.11)-(2.12)*, com condição de fronteira* (2.17)*, e com condição inicial $[\varrho_0, u_0]$ se*

(i)

$$\varrho - \overline{\varrho} \in L^{\infty}\left(0, T; \left(L^2 + L^{\gamma}\right)(\Omega)\right), \ \varrho \geq 0 \quad q.t.p \ em \ (0,T) \times \Omega \ ; \tag{3.14}$$

$$u \in L^2\left(0, T; W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)\right); \tag{3.15}$$

$$\varrho u \in L^{\infty}\left(0, T; (L^2 + L^{2\gamma/(\gamma+1)})(\Omega; \mathbb{R}^3)\right); \tag{3.16}$$

$$p(\varrho) \in L^1_{loc}\left((0,T) \times \Omega\right); \tag{3.17}$$

(ii) $(\varrho - \overline{\varrho}) \in C_{weak}\left((0,T); (L^2 + L^{\gamma})(\Omega)\right)$, *e* $[\varrho, u]$ *é solução fraca da Equação* (2.11), *isto é, a identidade* (3.1) *é satisfeita para toda função teste* $\varphi \in C_c^{\infty}\left((0,T) \times \overline{\Omega}\right)$;

(iii) $\varrho u \in C_{weak}\left((0,T); (L^2 + L^{2\gamma/(\gamma+1)})(\Omega; \mathbb{R}^3)\right)$ *e* $[\varrho, u]$ *é solução fraca da Equação* (2.12), *isto é, a identidade* (3.5) *é satisfeita para toda função teste* $\varphi \in C_c^{\infty}\left((0,T) \times \Omega; \mathbb{R}^3\right)$;

(iv) A desigualdade de energia (3.12) *é válida para q.t.p* $\tau \in (0,T)$.

Lembramos que por (2.16), $\gamma > 3/2$. Para condição de fronteira de Navier, temos a seguinte definição análoga.

Definição 5 (Solução Fraca de Energia Finita, condição de fronteira Navier)**.** *Dizemos que o par de funções* $[\varrho, u]$ *é uma solução de energia finita fraca do sistema de Navier-Stokes* (2.11)-(2.12)*, com condição de fronteira* (2.19)*, e com condição inicial* $[\varrho_0, u_0]$ *se*

(i)

$$\varrho - \overline{\varrho} \in L^{\infty}\left(0, T; \left(L^2 + L^{\gamma}\right)(\Omega)\right), \ \varrho \geq 0 \quad q.t.p \ em \ (0,T) \times \Omega \ ; \tag{3.18}$$

$$u \in L^2\left(0, T; W_n^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)\right); \tag{3.19}$$

$$\varrho u \in L^{\infty}\left(0, T; (L^2 + L^{2\gamma/(\gamma+1)})(\Omega; \mathbb{R}^3)\right); \tag{3.20}$$

$$p(\varrho) \in L^1_{loc}\left((0,T) \times \overline{\Omega}\right); \tag{3.21}$$

(ii) $(\varrho - \overline{\varrho}) \in C_{weak}\left((0,T); (L^2 + L^{\gamma})(\Omega)\right)$, *e* $[\varrho, u]$ *é solução fraca da Equação* (2.11), *isto é, a identidade* (3.1) *é satisfeita para toda função teste* $\varphi \in C_c^{\infty}\left((0,T) \times \overline{\Omega}\right)$;

(iii) $\varrho u \in C_{weak}\left((0,T); (L^2 + L^{2\gamma/(\gamma+1)})(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)\right)$ *e* $[\varrho, u]$ *é solução fraca da Equação* (2.12), *isto é, a identidade* (3.6) *é satisfeita para toda função teste* $\varphi \in C_c^{\infty}\left((0,T) \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}^3\right)$, *com* $\varphi \cdot n = 0$ *sobre* $(0,T) \times \partial\Omega$.

(iv) A desigualdade de energia (3.13) *é válida para q.t.p* $\tau \in (0,T)$.

3.4 Desigualdade de Entropia Relativa

A *entropia relativa* $\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [r, U]\right)$ com respeito à $[r, U]$ é definida por

$$\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [r, U]\right) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\varrho |u - U|^2 + H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r)\right) \mathrm{d}x, \tag{3.22}$$

onde $H(\varrho)$ é a pressão potencial definida em (2.28).

Para a condição de fronteira de Dirichlet (2.17), a *desigualdade de entropia relativa* é definida por

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [r, U]\right)(\tau, \cdot) + \int_0^\tau \int_\Omega \left(\mathbb{S}(\nabla_x u) - \mathbb{S}(\nabla_x U)\right) : \left(\nabla_x u - \nabla_x U\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ &\leq\ \mathcal{E}\left([\varrho_0, u_0] | [r(0, \cdot), U(0, \cdot)]\right) + \int_0^\tau \mathcal{R}(\varrho, u, r, U)\, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.23}$$

para q.t.p $\tau > 0$, onde o resto $\mathcal{R}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\varrho, u, r, U) = &\int_\Omega \varrho \left(\partial_t U + u \nabla_x U\right) \cdot (U - u)\, \mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x U) : \left(\nabla_x U - \nabla_x u\right) \mathrm{d}x \\ &+\ \int_\Omega \varrho f \cdot (u - U)\, \mathrm{d}x + \int_\Omega \left((r - \varrho)\partial_t H'(r) + \nabla_x H'(r) \cdot (rU - \varrho u)\right)\, \mathrm{d}x \\ &-\ \int_\Omega \mathrm{div}_x\, U(p(\varrho) - p(r))\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Para a condição de fronteira de Navier (2.19), a desigualdade de entropia relativa é definida por

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [r, U]\right)(\tau, \cdot) + \int_0^\tau \int_\Omega \left(\mathbb{S}(\nabla_x u) - \mathbb{S}(\nabla_x U)\right) : \left(\nabla_x u - \nabla_x U\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ &+\ \beta \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} |u - U|^2\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}t \leq \mathcal{E}\left([\varrho_0, u_0] | [r(0, \cdot), U(0, \cdot)]\right) + \int_0^\tau \mathcal{R}(\varrho, u, r, U)\, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.25}$$

para q.t.p $\tau \in (0, T)$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\varrho, u, r, U) = &-\beta \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U \cdot (u - U)\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}t + \int_\Omega \varrho f \cdot (u - U)\, \mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega \varrho \left(\partial_t U + u \cdot \nabla_x U\right) \cdot (U - u) - \mathbb{S}(\nabla_x U) : \left(\nabla_x u - \nabla_x U\right) \mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega (r - \varrho)\partial_t H'(r) + \nabla_x H'(r) \cdot (rU - \varrho u) - \mathrm{div}_x\, U(p(\varrho) - p(r))\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Definição 6 (Solução Fraca Adequada)**.** *Dizemos que $[\varrho, u]$ é uma solução fraca adequada do sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12), com condição de fronteira (2.17) ou (2.19), se $[\varrho, u]$ é uma solução fraca de energia finita das equações (2.11)-(2.12) e a desigualdade de entropia relativa é satisfeita. Especificamente*

- *Para condição de fronteira (2.17), $[\varrho, u]$ satisfaz as equações (3.1) e (3.5). Temos também que a desigualdade (3.23) é satisfeita para todo par de funções $[r, U]$ suaves em $(0, T) \times \overline{\Omega}$.*

- *Para condição de fronteira (2.19), $[\varrho, u]$ satisfaz as equações (3.1) e (3.6). Temos também que a desigualdade (3.25) é satisfeita para todo par de funções $[r, U]$ suaves em $(0, T) \times \overline{\Omega}$.*

3.4.1 Equivalência entre as Soluções Fracas

Suponhamos que $[\varrho, u]$ é uma solução fraca adequada do sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12) com condição de fronteira (2.17), como na Definição 6. Escolhendo em particular $r = \overline{\varrho}$, $U = 0$, obtemos a desigualdade de energia padrão

$$\mathcal{E}[\varrho, u](\tau) + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \mathcal{E}[\varrho_0, u_0] + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho f \cdot u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

para q.t.p $\tau \in (0, T)$, onde

$$\mathcal{E}[\varrho, u](\tau) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|u|^2 + H(\varrho) - H'(\overline{\varrho})(\varrho - \overline{\varrho}) - H(\overline{\varrho}) \right) \mathrm{d}x. \tag{3.27}$$

Então *soluções fracas adequadas*, como na Definição 6, são em particular *soluções fracas de energia finita*, como na Definição 4.

A existência de *soluções fracas de energia finita* é conhecida desde 1996, veja [28]. No próximo teorema, vamos mostrar que uma *solução fraca de energia finita* é também uma *solução fraca adequada*, isto prova a equivalência destes dois tipos de solução fraca.

Teorema 12 (Relação entre as Soluções Fracas de Energia Finita e as Soluções Fracas Adequadas)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio Lipschitz limitado. Suponha que a pressão p satisfaz a hipótese* (2.16)*, que*

$$f \in L^\infty\left(0, T; L^1 \cap L^\infty\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)\right),$$

e que $\overline{\varrho} \geq 0$. Seja $[\varrho, u]$ uma solução fraca de energia finita para o sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12)*, com condição de fronteira de Dirichlet* (2.17)*, como na Definição 4. Então $[\varrho, u]$ satisfaz a desigualdade de entropia relativa* (3.23) *para toda função teste $U \in C_c^\infty\left((0, T) \times \Omega; \mathbb{R}^3\right)$, $r > 0$, e $r - \overline{\varrho} \in C_c^\infty\left((0, T) \times \overline{\Omega}\right)$.*

Demonstração.

Tomando U como função teste na Equação (3.5) inferimos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varrho u(\tau, \cdot) \cdot U(\tau, \cdot) \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \varrho_0 u_0 \cdot U(0, \cdot) \,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \left(\varrho u \cdot \partial_t U + (\varrho u \otimes u) : \nabla_x U + p(\varrho) \operatorname{div}_x U - \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x U + \varrho f \cdot U \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Dado que $U \in C_c^\infty\left((0, T) \times \Omega; \mathbb{R}^3\right)$, tem-se consequentemente $\frac{1}{2}|U|^2 \in C_c^\infty\left((0, T) \times \Omega\right)$, e então tomamos $\frac{1}{2}|U|^2$ como função teste na Equação (3.1). Assim

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\varrho(\tau, \cdot)|U(\tau, \cdot)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{2}\varrho_0|U(0, \cdot)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_\Omega \left(\varrho U \cdot \partial_t U + \varrho u \cdot \nabla_x U \cdot U \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{3.29}$$

dado que $|U|^2 = U \cdot U$, $\partial_t |U|^2 = 2U \cdot \partial_t U$ e $\nabla_x |U|^2 = 2U \cdot \nabla_x U$.

Pelo teorema do valor médio, existe $c \in \mathbb{R}$ entre r e $\overline{\varrho}$ tal que

$$H''(c) = \frac{H'(r) - H'(\overline{\varrho})}{r - \overline{\varrho}} \Longleftrightarrow H''(c)(r - \overline{\varrho}) = H'(r) - H'(\overline{\varrho}).$$

Como $(r - \overline{\varrho}) \in C_c^\infty\left([0,T] \times \overline{\Omega}\right)$ e $H'' > 0$, tem-se $H''(c)(r - \overline{\varrho}) \in C_c^\infty\left([0,T] \times \overline{\Omega}\right)$ e assim $(H'(r) - H'(\overline{\varrho})) \in C_c^\infty\left([0,T] \times \overline{\Omega}\right)$.

Então escolhemos $(H'(r) - H'(\overline{\varrho}))$ como função teste na Equação (3.1), adquirindo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \varrho(\tau,\cdot)\left(H'(r)(\tau,\cdot) - H'(\overline{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho_0\left(H'(r)(0,\cdot) - H'(\overline{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(\varrho \partial_t(H'(r)) + \varrho u \cdot \nabla_x H'(r)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

onde utilizamos que $\partial_t H(\overline{\varrho}) = 0$ e $\nabla_x H'(\overline{\varrho}) = 0$.

Juntamos as equações (3.28), (3.29), (3.30) e a desigualdade de energia padrão (3.12) fazendo

$$\text{“} - (3.28) + (3.29) - (3.30) + (3.12)\text{”}$$

em ambos os lados, obtendo assim

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|u - U|^2 + H(\varrho) - (H'(r)\varrho - H'(\overline{\varrho})\overline{\varrho}) - H(\overline{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_\Omega \frac{1}{2}\varrho_0\left|u_0 - U(0,\cdot)\right|^2\,\mathrm{d}x \\
&- \int_0^\tau \int_\Omega \left(\varrho u \cdot \partial_t U + (\varrho u \otimes u) : \nabla_x U + p(\varrho)\operatorname{div}_x U - \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x U + \varrho f \cdot U\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \left(\varrho U \cdot \partial_t U + \varrho u \cdot \nabla_x U \cdot U\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&- \int_\Omega \varrho_0\left(H'(r)(0,\cdot) - H'(\overline{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x - \int_0^\tau \int_\Omega \left(\varrho \partial_t H'(r) + \varrho u \cdot \nabla_x H'(r)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_\Omega \left(H(\varrho_0) - H'(\overline{\varrho})(\varrho_0 - \overline{\varrho}) - H(\overline{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho f \cdot u\;\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Note que

$$\begin{aligned}
&- \int_\Omega \varrho_0\left(H'(r)(0,\cdot) - H'(\overline{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega H(\varrho_0) - H'(\overline{\varrho})(\varrho_0 - \overline{\varrho}) - H(\overline{\varrho})\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_\Omega H(\varrho_0) - \left(H'(r)(0,\cdot)\varrho_0 - H'(\overline{\varrho})\overline{\varrho}\right)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

pois $H(\overline{\varrho}) = 0$. E também, por cálculos diretos obtem-se

$$\int_0^\tau \int_\Omega (\varrho u \otimes u) : \nabla_x U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \int_\Omega \varrho u \cdot \nabla_x U \cdot u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Somando

$$- \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x U + \mathbb{S}(\nabla_x U) : (\nabla_x U - \nabla_x u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

em ambos os lados da desigualdade (3.31), chegamos em

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|u-U|^2 + H(\varrho) - (H'(r)\varrho - H'(\overline{\varrho})\overline{\varrho})\right) \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^\tau \int_\Omega (\mathbb{S}(\nabla_x U) - \mathbb{S}(\nabla_x u)) : (\nabla_x U - \nabla_x u)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0|u_0 - U(0,\cdot)|^2 + H(\varrho_0) - (H'(r)(0,\cdot)\varrho_0 - H'(\overline{\varrho})\overline{\varrho})\right) \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho\,(\partial_t U + u\cdot\nabla_x U)\cdot(U-u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x U) : \nabla_x (U-u)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho f\cdot(u-U)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_\Omega (\varrho\partial_t H'(r) + \varrho u\cdot\nabla_x H'(r))\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^\tau \int_\Omega p(\varrho)\,\mathrm{div}_x U\ \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Pela definição da pressão potencial (2.28),

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}H(\varrho) = \int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z + \frac{p(\varrho)}{\varrho}.
$$

Assim

$$
H'(r)r - H(r) = \left(\int_{\overline{\varrho}}^{r} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z + \frac{p(r)}{r}\right) r - r\int_{\overline{\varrho}}^{r} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = p(r).
$$

Tem-se também

$$
H'(\overline{\varrho})\overline{\varrho} = \frac{p(\overline{\varrho})}{\overline{\varrho}}\cdot\overline{\varrho} = p(\overline{\varrho}),
$$

e obtemos finalmente a identidade

$$
H'(r)r - H(r) - H'(\overline{\varrho})\overline{\varrho} = p(r) - p(\overline{\varrho}). \tag{3.33}
$$

Da identidade (3.33), derivando em t, inferimos que

$$
\partial_t\left(H'(r)r - H(r) - H'(\overline{\varrho})\overline{\varrho}\right) = \partial_t\left(p(r) - p(\overline{\varrho})\right),
$$

e então

$$
\partial_t(H'(r))r + H'(r)r_t - H'(r)r_t = \partial_t p(r)
$$

$$
\partial_t(H'(r))r = \partial_t p(r). \tag{3.34}
$$

Analogamente, derivando em x adquirimos

$$
\nabla_x\left(H'(r)r - H(r) - H'(\overline{\varrho})\right) = \nabla_x\left(p(r) - p(\overline{\varrho})\right),
$$

e então

$$
\nabla_x(H'(r))r + H'(r)\nabla_x r - H'(r)\nabla_x r = \nabla_x p(r)
$$

$$
\nabla_x(H'(r))r = \nabla_x p(r). \tag{3.35}
$$

Multiplicando a Equação (3.35) por U, e utilizando que $U|_{\partial\Omega} = 0$, pelo Teorema da Integração por Partes 10, segue-se que

$$\int_\Omega \nabla_x(H'(r))r \cdot U \ \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla_x p(r) \cdot U \ \ \mathrm{d}x = -\int_\Omega p(r) \operatorname{div}_x U \ \ \mathrm{d}x, \tag{3.36}$$

Portanto, das equações (3.34) e (3.36), obtem-se

$$\int_0^\tau \int_\Omega r\partial_t(H'(r)) + \nabla_x H'(r) r \cdot U + p(r) \operatorname{div}_x U \ \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^\tau \int_\Omega \partial_t p(r) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t. \tag{3.37}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (p(r) - p(\overline{\varrho}))(\tau, \cdot) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega (p(r) - p(\overline{\varrho}))(0, \cdot) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (p(r)(\tau, \cdot) - p(\overline{\varrho}) - p(r)(0, \cdot) + p(\overline{\varrho})) \ \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (p(r)(\tau, \cdot) - p(r)(0, \cdot)) \ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\tau \int_\Omega \partial_t p(r) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Somando

$$\int_\Omega (H'(r)r - H(r) - H'(\overline{\varrho})\overline{\varrho}) \ \mathrm{d}x$$

em ambos os lados da desigualdade (3.32), e utilizando as identidades (3.38) e (3.33), segue-se que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}\left([\varrho, u] \middle| [r, U]\right)(\tau) + \int_0^\tau (\mathbb{S}(\nabla_x U) - \mathbb{S}(\nabla_x u)) : (\nabla_x U - \nabla_x u) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\leq \mathcal{E}\left([\varrho_0, u_0] \middle| [r(0, \cdot), U(0, \cdot)]\right) + \int_0^\tau \int_\Omega \partial_t p(r) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho (\partial_t U + u \cdot \nabla_x U) \cdot (U - u) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x U) : \nabla_x (U - u) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho f \cdot (u - U) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_\Omega (\varrho \partial_t H'(r) + \varrho u \cdot \nabla_x H'(r)) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_0^\tau \int_\Omega p(\varrho) \operatorname{div}_x U \ \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Finalmente, pela Equação (3.37), tem-se

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}\left([\varrho, u] \middle| [r, U]\right)(\tau) + \int_0^\tau (\mathbb{S}(\nabla_x U) - \mathbb{S}(\nabla_x u)) : (\nabla_x U - \nabla_x u) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\leq \mathcal{E}\left([\varrho_0, u_0] \middle| [r(0, \cdot), U(0, \cdot)]\right) + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho (\partial_t U + u \cdot \nabla_x U) \cdot (U - u) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x U) : \nabla_x (U - u) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega \varrho f \cdot (u - U) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega ((r - \varrho)\partial_t H'(r) + \nabla_x H'(r)(rU - \varrho u) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_\Omega (p(\varrho) - p(r)) \operatorname{div}_x U \ \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&= \mathcal{E}\left([\varrho_0, u_0] \middle| [r(0, \cdot), U(0, \cdot)]\right) + \int_0^\tau \mathcal{R}(\varrho, u, r, U) \ \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3.40}$$

para q.t.p. $\tau \in [0, T]$.

$\square$

Abaixo, temos a extensão do Teorema 12 para a condição de fronteira de Navier.

Teorema 13. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio Lipschitz limitado. Suponha que a pressão p satisfaz a hipótese (2.16),*

$$f \in L^\infty\left(0, T; L^1 \cap L^\infty\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)\right),$$

e que $\overline{\varrho} \geq 0$. Seja $[\varrho, u]$ uma solução de energia finita fraca para o sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12), com condição de fronteira (2.19), como na Definição 5. Então $[\varrho, u]$ satisfaz a desigualdade de entropia relativa (3.25) para toda função $U \in C_c^\infty\left((0,T) \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}^3\right)$, onde $U \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$, $r > 0$, e $r - \overline{\varrho} \in C_c^\infty\left((0,T) \times \overline{\Omega}\right)$.

Demonstração.

É análoga a demonstração do Teorema 12, utilizando que $U \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$. As únicas alterações serão nas desigualdades de energia finita (3.13) e na desigualdade de entropia relativa (3.25) que agora possuem integrais na fronteira $\partial\Omega$. □

3.5 Extensão da Classe Admissível de Funções Teste

Podemos estender consideravelmente a classe das funções teste r, U que aparecem nas desigualdades (3.23) e (3.25). Basta que todas as integrais da desigualdade estejam bem-definidas.

Analisando o lado esquerdo de (3.23), respectivamente (3.25), as funções r, U devem pertencer pelo menos aos espaços

$$\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [r, U]\right) \in L^\infty(0, T); \tag{3.41}$$

$$U \in L^2\left(0, T; W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)\right). \tag{3.42}$$

Analisando o resto $\mathcal{R}$, definido em (3.24), respectivamente (3.26), para que todas as integrais estejam bem-definidas precisamos ao menos que

$$\partial_t U \in L^2\left(0, T; L^3 \cap L^{6\gamma/(5\gamma-6)}(\Omega; \mathbb{R}^3)\right) + L^1\left(0, T; L^2 \cap L^{2\gamma/(\gamma-1)}(\Omega; \mathbb{R}^3)\right); \tag{3.43}$$

$$\nabla_x U \in L^\infty\left(0, T; L^6 \cap L^{3\gamma/(2\gamma-3)}(\Omega; \mathbb{R}^{3\times3})\right) + L^2\left(0, T; L^3 \cap L^{6\gamma/(2\gamma-3)}(\Omega; \mathbb{R}^{3\times3})\right); \tag{3.44}$$

$$\operatorname{div}_x U \in L^1\left(0, T; L^\infty(\Omega)\right). \tag{3.45}$$

A função r deve ser limitada por baixo e tal que $r > 0$. E também

$$\partial_t H'(r) \in L^1\left(0, T; L^2 \cap L^{\gamma/(\gamma-1)}(\Omega)\right); \tag{3.46}$$

$$\nabla_x H'(r) \in L^2\left(0,T;L^3 \cap L^{6\gamma/(5\gamma-6)}(\Omega;\mathbb{R}^3)\right) + L^1\left(0,T;L^2 \cap L^{2\gamma/(\gamma-1)}(\Omega,\mathbb{R}^3)\right). \quad (3.47)$$

Além disso, no caso da condição de fronteira de Dirichlet homogênea (2.17) a função U deve satisfazer

$$U|_{\partial\Omega} = 0.$$

Já no caso da condição de fronteira de Navier (2.19), a função U deve satisfazer

$$U \cdot n|_{\partial\Omega} = 0.$$

Com estas hipóteses, os teoremas 12 e 13 continuam válidos se substituirmos as hipóteses de suavidade e integrabilidade das funções r, U por hipóteses mais fracas. Estas hipóteses são dadas pelas condições (3.41) até (3.47). Para encontrar estas estimativas, basta utilizar a desigualdade de Hölder generalizada enunciada no Teorema 1.

4 Lemas Auxiliares

Neste capítulo, iremos enunciar e demonstrar alguns lemas que usaremos na demonstração da propriedade de unicidade fraca-forte. Apesar de serem simples, estes resultados não foram encontrados na literatura atual, então dedicamos um tempo de nossa pesquisa para tratarmos destas questões.

Lema 1 (Propriedades da pressão potencial $H(\varrho)$)**.**

Seja $p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as hipóteses (2.16), ou seja,

$$\begin{aligned} &p \in C[0,\infty) \cap C^2(0,\infty);\\ &p(0) = 0,\ p'(\varrho) > 0 \quad \textit{para todo } \varrho > 0;\\ &\lim_{\varrho\to\infty} \frac{p'(\varrho)}{\varrho^{\gamma-1}} = a > 0; \end{aligned} \tag{4.1}$$

para um certo $\gamma > 3/2$. Então

(i) Existem constantes $c_1 > 0,\ c_2 > 0$ tais que

$$H(\varrho) \geq c_1\varrho^\gamma - c_2, \tag{4.2}$$

para $\varrho \geq 0$.

(ii) Se $\varrho \geq 0$ e existem constantes $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a_0 \leq r \leq b_0 < \infty$, isto é, se r pertence a um compacto $[a_0, b_0]$ contido em $(0,\infty)$, então existem constantes positivas $a_1, \tilde{L} \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 \in (0, a_0),\ \tilde{L} > b_0$ e

$$H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r) \geq \begin{cases} \dfrac{p(r)}{2}, & \textit{se } 0 \leq \varrho < a_1;\\ c(\varrho - r)^2, & \textit{se } a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L};\\ c\varrho^\gamma, & \textit{se } \varrho > \tilde{L}. \end{cases} \tag{4.3}$$

(iii) Sobre as mesmas hipóteses do item (ii), existe $c > 0$ tal que

$$|p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)| < c\left(H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r)\right). \tag{4.4}$$

Demonstração.

Primeiro vamos obter algumas identidades que relacionam a pressão potencial H e a pressão p.

A pressão potencial e suas derivadas com relação a ϱ são dados por

$$H(\varrho) = \varrho \int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}(H(\varrho)) = H'(\varrho) = \int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z + \frac{p(\varrho)}{\varrho}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varrho^2}(H(\varrho)) = \frac{p(\varrho)}{\varrho^2} + \frac{p'(\varrho)\varrho - p(\varrho)}{\varrho^2} = \frac{p'(\varrho)}{\varrho}.$$

Assim

$$\varrho H'(\varrho) = H(\varrho) + p(\varrho).$$

Para $r > 0$ fixado

$$H'(r)\varrho = \varrho\left(\int_{\overline{\varrho}}^{r} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z + \frac{p(r)}{r}\right).$$

Demonstração do item (i).

Pela definição de limite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists L > 0; \forall \varrho_0 > L \ \text{ temos } \ \left|\frac{p'(\varrho_0)}{\varrho_0^{\gamma-1}} - a\right| < \varepsilon.$$

Em particular, escolhendo $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$,

$$-\frac{p'(\varrho_0)}{\varrho_0^{\gamma-1}} < -\frac{a}{2} \implies p'(\varrho_0) \geq \varrho_0^{\gamma-1}\frac{a}{2}, \ \text{ para todo } \varrho_0 > L.$$

Para $\varrho > L$, integrando de L a ϱ, segue-se que

$$\begin{aligned}\int_L^{\varrho} p'(z)\,\mathrm{d}z &\geq \int_L^{\varrho} z^{\gamma-1}\frac{a}{2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{a}{2}\int_L^{\varrho} z^{\gamma-1} \\ &= \frac{a}{2\gamma}\varrho^{\gamma} - \frac{a}{2\gamma}L^{\gamma}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_L^{\varrho} p'(z)\,\mathrm{d}z = p(\varrho) - p(L).$$

Fazendo $c_1 = \dfrac{a}{2\gamma}$, $c_2 = \dfrac{a}{2\gamma}L^{\gamma}$, temos

$$p(\varrho) - p(L) \geq c_1\varrho^{\gamma} - c_2 \implies p(\varrho) \geq c_1\varrho^{\gamma} - c_2 + p(L) \geq c_1\varrho^{\gamma} - c_2, \ \forall \varrho > L,$$

pois $p(\varrho) \geq 0$, para todo $\varrho \in (0, \infty)$, em particular $p(L) \geq 0$.

Para $0 \leq \varrho \leq L$, como $\gamma > \dfrac{3}{2} > 0$,

$$\varrho^{\gamma} \leq L^{\gamma} \implies \varrho^{\gamma} - L^{\gamma} \leq 0 \implies c_1(\varrho^{\gamma} - L^{\gamma}) \leq 0.$$

Assim $p(\varrho) \geq 0 \geq c_1\varrho^{\gamma} - c_2$.

Desta forma

$$p(\varrho) \geq c_1\varrho^{\gamma} - c_2, \ \text{para todo } \varrho \geq 0,$$

onde $c_2 = c_1 L^\gamma > 0$.

Agora note que

$$
\begin{aligned}
H(\varrho) &= \varrho \int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z && (4.5)\\
&\geq \varrho \int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} \left(c_1 z^{\gamma-2} - c_2 z^{-2}\right)\,\mathrm{d}z && (4.6)\\
&= \frac{c_1}{(\gamma-1)}\varrho^\gamma - \frac{c_1\varrho\overline{\varrho}^{\gamma-1}}{(\gamma-1)} + c_2 - \frac{c_2}{\overline{\varrho}}\varrho && (4.7)\\
&= \frac{c_1}{(\gamma-1)}\varrho^\gamma - \varrho\left(\frac{c_1\overline{\varrho}^{\gamma-1}}{(\gamma-1)} + \frac{c_2}{\overline{\varrho}}\right) + c_2 && (4.8)\\
&\geq \frac{c_1}{(\gamma-1)}\varrho^\gamma - \varrho\left(\frac{c_1\overline{\varrho}^{\gamma-1}}{(\gamma-1)} + \frac{c_2}{\overline{\varrho}}\right) && (4.9)
\end{aligned}
$$

Fazendo $c_3 = \dfrac{c_1}{(\gamma-1)}$, $c_4 = \left(\dfrac{c_1\overline{\varrho}^{\gamma-1}}{(\gamma-1)} + \dfrac{c_2}{\overline{\varrho}}\right)$ chegamos em

$$H(\varrho) \geq c_3\varrho^\gamma - c_4\varrho, \quad \text{onde } c_3 > 0, c_4 > 0.$$

Afirmamos que

$$c_3\varrho^\gamma - c_4\varrho \geq c_5\varrho^\gamma - c_6,$$

para algum $c_5 > 0$ e algum $c_6 > 0$. Isto é equivalente a

$$(c_3 - c_5)\varrho^\gamma - c_4\varrho \geq -c_6.$$

Tomando $0 < c_3 \leq c_5$, $0 < c_5 - c_3 = c_7$, e então

$$c_7\varrho^\gamma - c_4\varrho \geq -c_6,$$

o que é equivalente por sua vez a

$$\varrho^\gamma - c_8\varrho \geq -c_9.$$

Seja $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função auxiliar dada por

$$\beta(x) = x^\gamma - c_8 x.$$

Então

$$\beta'(x) = \gamma x^{\gamma-1} - c_8.$$

Se $x > \left(\dfrac{c_8}{\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)}$, então $\beta'(x) > 0$, e assim β é crescente para $x > \left(\dfrac{c_8}{\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)}$.

Se $0 \leq x \leq \left(\dfrac{c_8}{\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)}$, então β é decrescente para $x \leq \left(\dfrac{c_8}{\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)}$.

Logo $\left(\dfrac{c_8}{\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)}$ é um ponto mínimo de β.

Desta forma, fazendo $k = \left(\dfrac{c_8}{\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)}$,

$$\beta(x) \geq \beta(k), \qquad \text{para todo } x \in [0,\infty).$$

Se $\beta(k) < 0$, tomamos $c_{10} = -\beta(k)$. Se $\beta(k) \geq 0$, tomamos $c_{10} = \beta(k)$. Consequentemente

$$\beta(x) \geq -c_{10}, \ \forall x \in [0,\infty).$$

Finalmente

$$\beta(\varrho) = \varrho^\gamma - c_8\varrho \geq -c_{10}.$$

□

Demonstração do item (ii).

Fixado $r \in [a_0, b_0]$, temos que

$$\lim_{\varrho \to 0^+} H'(r)\varrho = 0,$$

então por definição

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0; \ \varrho \in (0,\delta) \text{ implica } |H'(r)\varrho| < \varepsilon.$$

Assim

$$H'(r)\varrho < \varepsilon \implies -H'(r)\varrho > -\varepsilon.$$

Então para $\varrho \in (0,\delta)$,

$$\begin{aligned} H(\varrho) - H'(r)\varrho + p(r) &\geq H(\varrho) - \varepsilon + p(r) \\ &\geq p(r) - \varepsilon, \end{aligned}$$

pois $H(\varrho) \geq 0$. Tome $\varepsilon = \dfrac{p(a_0)}{2}$. Como $p'(\varrho) > 0$, a função p é crescente para $\varrho > 0$, assim como $a_0 \leq r$,

$$p(a_0) \leq p(r) \implies \frac{p(a_0)}{2} \leq \frac{p(r)}{2} \implies -\frac{p(a_0)}{2} \geq -\frac{p(r)}{2}.$$

Então

$$p(r) - \varepsilon = p(r) - \frac{p(a_0)}{2} \geq p(r) - \frac{p(r)}{2} = \frac{p(r)}{2}.$$

Tomando $a_1 = \min\{\delta, a_0\}$, temos para $0 \leq \varrho < a_1$ que

$$H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r) \geq \frac{p(r)}{2}.$$

Com isto, concluímos o primeiro caso.

Pelo item (i) do Lema 1, para $\varrho > 0$, existem constantes $c_1 > 0,\ c_2 > 0$ tais que

$$H(\varrho) \geq c_1\varrho^\gamma - c_2.$$

Então, utilizando também que $H'(r)r - H(r) = p(r)$,

$$\begin{aligned} H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r) &= H(\varrho) - H'(r)\varrho + p(r) \\ &\geq c_1\varrho^\gamma - c_2 - H'(r)\varrho + p(r), \end{aligned} \tag{4.10}$$

para todo $\varrho > 0$.

Agora note que, como $r \in [a_0, b_0]$, temos

$$\lim_{\varrho\to\infty} \frac{c_1\varrho^\gamma - c_2 - H'(r) + p(r)}{\varrho^\gamma} = \lim_{\varrho\to\infty} c_1 - \frac{c_2}{\varrho^\gamma} - \frac{H'(r)}{\varrho^\gamma} + \frac{p(r)}{\varrho^\gamma} = c_1.$$

Então por definição,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists L > 0;\ \forall\varrho > L \text{ implica } \left|\frac{c_1\varrho^\gamma - c_2 - H'(r) + p(r)}{\varrho^\gamma} - c_1\right| < \varepsilon.$$

Desta forma,

$$\frac{c_1\varrho^\gamma - c_2 - H'(r) + p(r)}{\varrho^\gamma} > c_1 - \varepsilon.$$

Como c_1 é constante, podemos tomar $\varepsilon = \dfrac{c_1}{2}$, de modo que $c_1 - \varepsilon = \dfrac{c_1}{2} = c_3 > 0$. Assim, para $\varrho > L$,

$$\left(\frac{c_1\varrho^\gamma - c_2 - H'(r) + p(r)}{\varrho^\gamma}\right) > c_3 \implies (c_1\varrho^\gamma - c_2 - H'(r) + p(r)) > c_3\varrho^\gamma. \tag{4.11}$$

Concluímos então de (4.10) que, para $\varrho > L$,

$$H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r) \geq c_3\varrho^\gamma.$$

Tomando $\tilde{L} = \max\{L, b_0\}$, temos para $\varrho > \tilde{L}$ que

$$H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r) \geq c_3\varrho^\gamma.$$

Resta analisarmos o caso em que $\varrho \in [a_1, \tilde{L}]$. Para isto, iremos utilizar o conceito de função fortemente convexa. Como referência sobre funções convexas o/a leitor/a pode consultar [5]. Iremos realizar uma pequena pausa para definirmos as funções fortemente convexas e propriedades destas que serão utilizadas nesta demonstração.

Definição 7. *Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em I é dita ser fortemente convexa se*

$$f''(x) \geq k > 0,\ \forall x \in I.$$

É possível definir funções *fortemente convexas* sem que sejam duas vezes diferenciáveis, mas a definição é equivalente a esta.

Pela fórmula de Taylor, com resto de Lagrange, para todo $x, y \in I$, considerando sem perda de generalidade $x < y$, existe $z \in [x, y]$ tal que

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + f''(z)\frac{(y-x)^2}{2}.$$

Pela convexidade forte, $f''(z) \geq k$. Assim

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) + k\frac{(y-x)^2}{2}.$$

Voltando para a demonstração principal, defina a função auxiliar $\psi : [a_1, \tilde{L}] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(\varrho) = H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r).$$

Afirmamos que ψ é fortemente convexa.

Com efeito,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\psi(\varrho) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}H(\varrho) - H'(r),$$

em particular

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\psi(r) = \psi'(r) = 0.$$

Derivando ψ novamente,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varrho^2}\psi(\varrho) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varrho^2}H(\varrho).$$

Por definição

$$H(\varrho) = \varrho \int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z,$$

assim

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}H(\varrho) = \int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} \frac{p(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z + \frac{p(\varrho)}{\varrho}.$$

Derivando H mais uma vez

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varrho^2}H(\varrho) = \frac{p(\varrho)}{\varrho^2} + \frac{p'(\varrho)\varrho}{\varrho^2} - \frac{p(\varrho)}{\varrho^2} = \frac{p'(\varrho)}{\varrho} > 0,$$

pois $p'(\varrho) > 0$, para todo $\varrho > 0$. Assim, como $\dfrac{p'(\varrho)}{\varrho}$ é contínua em $(0, \infty)$, em particular em $[a_1, \tilde{L}]$, possui mínimo no compacto $[a_1, \tilde{L}]$. Desta forma

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varrho^2}\psi(\varrho) = \frac{p'(\varrho)}{\varrho} \geq \min_{a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}} \frac{p'(\varrho)}{\varrho} > 0.$$

Portanto ψ é fortemente convexa com constante de convexidade

$$k = \min_{a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}} \frac{p'(\varrho)}{\varrho}.$$

Podemos ver também que

$$\psi(r) = H(r) - H'(r)(r - r) - H(r) = 0.$$

Então pela convexidade de ψ, r é um ponto de mínimo global de ψ, e assim

$$\psi(\varrho) = H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r) \geq 0, \tag{4.12}$$

para todo $\varrho \in (0, \infty)$.

Observe agora que, $r \in [a_0, b_0] \subset [a_1, \tilde{L}]$ e $\varrho \in [a_1, \tilde{L}]$. Então podemos utilizar a propriedade das funções fortemente convexas que nos diz que

$$\psi(\varrho) \geq \psi(r) + \psi'(r)(\varrho - r) + \frac{k}{2}(\varrho - r)^2,$$

e então

$$\psi(\varrho) \geq \frac{k}{2}(\varrho - r)^2.$$

Logo, para $\varrho \in [a_1, \tilde{L}]$,

$$H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r) \geq \frac{k}{2}(\varrho - r)^2.$$

Depois desta análise, temos

$$H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r) \geq \begin{cases} \dfrac{p(r)}{2}, & \text{se } 0 \leq \varrho < a_1; \\ \dfrac{k}{2}(\varrho - r)^2, & \text{se } a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}; \\ c_3 \varrho^\gamma, & \text{se } \varrho > \tilde{L}. \end{cases} \tag{4.13}$$

Tomando $c = \min\left\{\dfrac{k}{2}, c_3\right\}$, concluímos que

$$H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r) \geq \begin{cases} \dfrac{p(r)}{2}, & \text{se } 0 \leq \varrho < a_1; \\ c(\varrho - r)^2, & \text{se } a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}; \\ c\varrho^\gamma, & \text{se } \varrho > \tilde{L}. \end{cases} \tag{4.14}$$

$\square$

Demonstração do item (iii).

Vamos mostrar que $|p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)|$ satisfaz a desigualdade oposta a (4.3).

Considere $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a_1 < a_0$. Então para $0 \leq \varrho \leq a_1,\ \ a_0 \leq r \leq b_0$, $p \in C^2\left([a_0, b_0]\right)$, $p(0) = 0$ e $p'(\varrho) > 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}
p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r) &= p(\varrho) - p'(r)\varrho + p'(r)r - p(r) \\
&\leq\ p(\varrho) + p'(r)r \\
&\leq p(a_1) + \max_{a_0 \leq r \leq b_0} p'(r)r \\
&\leq\ c_1 \\
&\leq\ \left(\frac{c_1}{\left(\min_{a_0 \leq r \leq b_0} p(r)\right)/2}\right)\left(\min_{a_0 \leq r \leq b_0} p(r)\right)/2 \\
&\leq\ c_2 \frac{p(r)}{2}.
\end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned}
-(p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)) &= -p(\varrho) + p'(r)\varrho - p'(r)r + p(r) \\
&\leq\ p(r) + p'(r)\varrho \\
&\leq\ \max_{a_0 \leq r \leq b_0} p(r) + \max_{a_0 \leq r \leq b_0} p'(r)a_1 \\
&=\ c_3 \\
&\leq\ c_4 \frac{p(r)}{2}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $c_5 = \min\{c_2, c_4\}$ para $0 \leq \varrho \leq a_1$ segue-se que

$$|p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)| \leq c_5 \frac{p(r)}{2}.$$

Considere agora ϱ e r pertencentes a um intervalo fixo $[a_1, b_1]$, com $0 < a_1 < a_0 < b_0 < b_1$, note que o intervalo $[a_1, b_1]$ a priori pode ser qualquer intervalo contendo $[a_0, b_0]$.

A fórmula de Taylor nos diz que

$$p(\varrho) = p(r) + p'(r)(\varrho - r) + \frac{p''(r)(\varrho - r)^2}{2} + r_e((\varrho - r)), \tag{4.15}$$

onde

$$\lim_{(\varrho - r) \to 0} \frac{r_e((\varrho - r))}{(\varrho - r)^2} = 0 \implies \left|\frac{r_e((\varrho - r))}{(\varrho - r)^2}\right| \leq c_6.$$

Então por (4.15),

$$
\begin{aligned}
|p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)| &= \left| \frac{p''(r)(\varrho - r)^2}{2} + r_e((\varrho - r)) \right| \\
&= \left| \frac{p''(r)}{2} + \frac{r_e((\varrho - r))}{(\varrho - r)^2} \right| (\varrho - r)^2 \\
&\leq \left(\frac{\max_{a_0 \leq r \leq b_0} |p''(r)|}{2} + c_6 \right) (\varrho - r)^2 \\
&\leq c_7 (\varrho - r)^2.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar agora o último caso. Pela definição do limite

$$\lim_{\varrho \to \infty} \frac{p'(\varrho)}{\varrho^{\gamma - 1}} = a > 0,$$

temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists L > 0; \ \forall \varrho_0 > L \ \text{ temos } \left| \frac{p'(\varrho_0)}{\varrho_0^{\gamma-1}} - a \right| < \varepsilon.$$

Escolhendo $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, segue-se que

$$\frac{p'(\varrho_0)}{\varrho_0^{\gamma - 1}} < \frac{3a}{2} \implies p'(\varrho_0) < \left(\frac{3a}{2} \right) \varrho_0^{\gamma - 1}.$$

Para $\varrho > L$, integrando de ϱ até L, segue-se que

$$\int_L^\varrho p'(z) \, \mathrm{d}z < \int_L^\varrho \frac{3a}{2} z^{\gamma - 1} \, \mathrm{d}z = \frac{3a}{2} \left(\frac{\varrho^\gamma}{\gamma} - \frac{L^\gamma}{\gamma} \right).$$

Por outro lado

$$\int_L^\varrho p'(z) \, \mathrm{d}z = p(\varrho) - p(L).$$

Logo

$$p(\varrho) < \left(\frac{3a}{2\gamma} \right) \varrho^\gamma - \left(\frac{3aL^\gamma}{2\gamma} \right) + p(L) < \left(\frac{3a}{2\gamma} \right) \varrho^\gamma + p(L) \leq \left(\frac{3a}{2\gamma} + \frac{p(L)}{L^\gamma} \right) \varrho^\gamma = c_7 \varrho^\gamma.$$

Agora, para $\varrho > L$,

$$
\begin{aligned}
p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r) &= p(\varrho) - p'(r)\varrho + p'(r)r - p(r) \\
&\leq p(\varrho) + p'(r)r \\
&\leq p(\varrho) + \max_{a_0 \leq r \leq b_0} p'(r)r \\
&\leq p(\varrho) + c_8 \\
&\leq c_7 \varrho^\gamma + c_8 \\
&\leq c_9 \varrho^\gamma.
\end{aligned}
$$

Temos também

$$
\begin{aligned}
-(p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)) &= -p(\varrho) + p'(r)\varrho - p'(r)r + p(r)\\
&\leq \ p(r) + p'(r)\varrho\\
&\leq \ p(r) + p'(r)\varrho^{\gamma}\\
&\leq \ \max_{a_0 \leq r \leq b_0} p(r) + \max_{a_0 \leq r \leq b_0} p'(r)\varrho^{\gamma}\\
&\leq \ c_{12}\varrho^{\gamma}.
\end{aligned}
$$

Desta forma, para $\varrho > L$,

$$|p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)| \leq c_{12}\varrho^{\gamma}.$$

Concluindo e relembrando, para $0 \leq \varrho < a_1$,

$$|p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)| \leq c_5 \frac{p(r)}{2}.$$

Para $\varrho, r \in [a_1, b_1]$,

$$|p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)| \leq c_7(\varrho - r)^2.$$

Para $\varrho > L$,

$$|p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)| \leq c_{12}\varrho^{\gamma}.$$

Escolhendo os mesmos coeficientes $a_0, b_0, a_1, b_1 = \tilde{L}$ do item (ii) do Lema 1, e mudando as constantes c_5, c_7 e c_{12} se necessário, concluímos que

$$|p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)| \leq c\left(H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r)\right), \tag{4.16}$$

onde $c = \max\{c_5, c_7, c_{12}\}$.

□

Lema 2. *Se $w(t,x) : (0,\tau) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ é tal que $w|_{\partial\Omega} = 0$, então*

$$\int_0^{\tau} \int_{\Omega} \mathbb{S}(\nabla_x w) : \nabla_x w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left(\mu |\nabla_x w|^2 + \left(\frac{1}{3}\mu + \eta\right) |\operatorname{div}_x w|^2 \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

Demonstração.

Escrevemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}(\nabla_x w) &= \mu\left(\nabla_x w + \nabla_x w^T - \frac{2}{3}\operatorname{div}_x w\mathbb{I}\right) + \eta \operatorname{div}_x w\mathbb{I}\\
&= \mu\nabla_x w + \mu\nabla_x w^T + \left(-\frac{2}{3}\mu + \eta\right)\operatorname{div}_x w\mathbb{I}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$\mathbb{S}(\nabla_x w) : \nabla_x w = \mu\nabla_x w : \nabla_x w + \mu\nabla_x w^T : \nabla_x w + \left(-\frac{2}{3}\mu + \eta\right)\operatorname{div}_x w\mathbb{I} : \nabla_x w$$

Calculamos então os produtos termo a termo.

$$
\begin{aligned}
\nabla_x w^T : \nabla_x w &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} w_{i,x_j} w_{j,x_i} \\
&= (w_{1,x_1}^2 + w_{1,x_2}w_{2,x_1} + w_{1,x_3}w_{3,x_1}) \\
&+ (w_{2,x_1}w_{1,x_2} + w_{2,x_2}^2 + w_{2,x_3}w_{3,x_2}) \\
&+ (w_{3,x_1}w_{1,x_3} + w_{3,x_2}w_{2,x_3} + w_{3,x_3}^2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_x w\mathbb{I} : \nabla_x w &= (w_{1,x_1}^2 + w_{2,x_2}w_{1,x_1} + w_{3,x_3}w_{1,x_1}) \\
&+ (w_{1,x_1}w_{2,x_2} + w_{2,x_2}^2 + w_{3,x_3}w_{2,x_2}) \\
&+ (w_{1,x_1}w_{3,x_3} + w_{2,x_2}w_{3,x_3} + w_{3,x_3}^2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu\nabla_x w^T : \nabla_x w + \left(-\frac{2}{3}\mu + \eta\right)\operatorname{div}_x w\mathbb{I} : \nabla_x w \\
&= \left(\frac{1}{3}\mu + \eta\right)(w_{1,x_1}^2 + w_{2,x_2}^2 + w_{3,x_3}^3) \\
&+ \mu(2w_{1,x_2}w_{2,x_1} + 2w_{1,x_3}w_{3,x_1} + w_{2,x_3}w_{3,x_2}) \\
&+ \left(-\frac{2}{3}\mu + \eta\right)(2w_{1,x_1}w_{2,x_2} + 2w_{1,x_1}w_{3,x_3} + 2w_{2,x_2}w_{3,x_3})
\end{aligned}
$$

Utilizando o fato de que $w|_{\partial\Omega} = 0$, e integrando por partes,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega w_{1,x_2}w_{2,x_1}\,\mathrm{d}x &= -\int_\Omega w_1 w_{2,x_1x_2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega w_1 w_{2,x_2x_1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega w_{1,x_1}w_{2,x_2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Analogamente

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega w_{1,x_3}w_{3,x_1}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega w_{1,x_1}w_{3,x_3}\,\mathrm{d}x, \\
\int_\Omega w_{2,x_3}w_{3,x_2}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega w_{2,x_2}w_{3,x_3}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \mu\nabla_x w^T : \nabla_x w + \left(-\frac{2}{3}\mu + \eta\right)\operatorname{div}_x w\mathbb{I} : \nabla_x w\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left(\frac{1}{3}\mu + \eta\right)(w_{1,x_1}^2 + w_{2,x_2}^2 + w_{3,x_3}^3)\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \left(\frac{1}{3}\mu + \eta\right)(2w_{1,x_1}w_{2,x_2} + 2w_{1,x_1}w_{3,x_3} + 2w_{2,x_2}w_{3,x_3})\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{3}\mu + \eta\right)\int_\Omega |\operatorname{div}_x w|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Segue-se também que

$$
\mu\nabla_x w : \nabla_x w = \mu\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} w_{i,x_j}^2 = \mu\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} |w_{i,x_j}|^2 = \mu|\nabla_x w|^2,
$$

considerando a norma matricial

$$|A| = \left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Então concluímos que

$$\int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x w) : \nabla_x w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^\tau \left(\mu |\nabla_x u|^2 + \left(\frac{1}{3}\mu + \eta \right) |\operatorname{div}_x w|^2 \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

□

5 Unicidade Fraca Forte

A estratégia da unicidade fraca-forte foi estabelecida por Serrin [36] para as equações de Navier-Stokes incompressíveis e por Dafermos [10] para leis de conservação. Utilizando a mesma estratégia, a propriedade foi provada para as equações de Navier-Stokes compressíveis com lei de pressão isentrópica $p(\varrho) = \varrho^\gamma$ por Germain em [22] para soluções fracas de energia finita. Feireisl, Novotny e Sun em [21] provaram a propriedade de unicidade fraca-forte das equações de Navier-Stokes compressíveis para soluções fracas adequadas, com lei de pressão barotrópica e certas condições sobre a pressão.

Neste capítulo, iremos demonstrar a propriedade da unicidade fraca-forte para os casos propostos. Primeiro estudaremos o caso onde o domínio é limitado, e a condição de fronteira é a de Dirichlet homogênea. Depois generalizaremos estudando o caso da fronteira de Navier e domínio limitado. Por fim, estudaremos o problema com as mesmas duas condições de fronteira, mas com domínios ilimitados.

Definição 8. *Dizemos que o par $[\varrho, u]$ é uma solução forte do sistema* (2.11)-(2.12) *se o par $[\varrho, u]$ satisfaz as equações* (2.11)-(2.12) *q.t.p em $(0, T) \times \Omega$ e tanto ϱ quanto u são funções localmente integráveis que possuem derivadas fracas localmente integráveis com a regularidade necessária para satisfazer as equações* (2.11)-(2.12).

5.1 Unicidade Fraca-Forte em Domínios Limitados

5.1.1 Condição de Fronteira de Dirichlet

Teorema 14 (Unicidade Fraca Forte com Condição Dirichlet em Domínio Limitado)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio Lipschitz limitado. Seja p a função pressão satisfazendo a hipótese* (2.16)*. Seja f uma função de força externa tal que*

$$f \in L^1\left(0, T; L^{2\gamma/(\gamma-1)}(\Omega; \mathbb{R}^3)\right).$$

Suponha que $[\varrho, u]$ é uma solução fraca de energia finita do sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12)*, com condição de fronteira Dirichlet* (2.17) *definida em $(0, T) \times \Omega$, como na Definição 4. Seja $[\tilde{\varrho}, \tilde{u}]$ uma solução forte para o mesmo problema pertencendo a classe*

$$0 < \inf_{(0,T)\times\Omega} \tilde{\varrho} \le \tilde{\varrho}(t, x) \le \sup_{(0,T)\times\Omega} \tilde{\varrho} < \infty; \tag{5.1}$$

$$\nabla_x \tilde{\varrho} \in L^2\left(0, T; L^q(\Omega; \mathbb{R}^3)\right); \tag{5.2}$$

$$\nabla_x^2 \tilde{u} \in L^2\left(0, T; L^q(\Omega; \mathbb{R}^{3\times3\times3})\right), \ \ com \ \ q > \max\left\{3, \frac{3}{\gamma - 1}\right\}; \tag{5.3}$$

$$\nabla_x \tilde{u} \in L^1\left(0, T; L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3})\right) \bigcap L^2\left(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3})\right); \tag{5.4}$$

$$\mathrm{div}_x\, \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \in L^2\left(0, T; L^3 \cap L^p(\Omega; \mathbb{R}^3)\right), \tag{5.5}$$

onde $p = \dfrac{6\gamma}{(5\gamma - 6)}$.

Se a solução fraca $[\varrho, u]$ *e a solução forte* $[\tilde{\varrho}, \tilde{u}]$ *possuem a mesma condição inicial* $[\varrho_0, u_0]$, *então*

$$\varrho \equiv \tilde{\varrho}, \quad u \equiv \tilde{u} \text{ em } (0, T) \times \Omega. \tag{5.6}$$

Lembramos novamente que por (2.16), $\gamma > 3/2$.

Demonstração.

Começamos observando que, como $[\varrho, u]$ é uma solução fraca de energia finita como na Definição 4, as funções ϱ, u pertencem as classes

$$\varrho \in C_{\text{weak}}\left((0, T); L^\gamma(\Omega)\right); \tag{5.7}$$

$$\varrho u \in C_{\text{weak}}\left((0, T); L^{2\gamma/(\gamma+1)}(\Omega; \mathbb{R}^3)\right); \tag{5.8}$$

$$u \in L^2\left(0, T; W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)\right). \tag{5.9}$$

Da desigualdade (3.12) e pela definição da pressão potencial (2.28) , segue-se que

$$p(\varrho) \in L^\infty\left(0, T; L^1(\Omega)\right).$$

Como a massa total do sistema é conservada sobre um domínio Ω limitado, podemos tomar

$$\overline{\varrho} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varrho \, \mathrm{d}x,$$

e consequentemente

$$\int_\Omega (\varrho - \overline{\varrho}) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho \, \mathrm{d}x - \overline{\varrho}|\Omega| = \int_\Omega \varrho \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho \, \mathrm{d}x = 0.$$

Como $[\varrho, u]$ é uma solução fraca de energia finita, pelo Teorema 12, $[\varrho, u]$ é também uma solução fraca adequada, e com isso satisfaz a desigualdade (3.23). Escolhendo $r = \tilde{\varrho}$, $U = \tilde{u}$ como funções testes em (3.23), inferimos que

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}\left([\varrho, u]\middle|[\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) + \int_0^\tau \int_\Omega (\mathbb{S}(\nabla_x u) - \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})) : (\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}) \;\; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ &\leq \mathcal{E}\left([\varrho_0, u_0]\middle|[\tilde{\varrho}(0, \cdot), \tilde{u}(0, \cdot)]\right) + \int_0^\tau \mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u}) \, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{5.10}$$

para q.t.p $\tau > 0$, onde

$$\varrho_0 = \varrho(0, \cdot), \;\; u_0 = u(0, \cdot),$$

e o resto $\mathcal{R}$ é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u}) \equiv & \int_\Omega \varrho\,(\partial_t \tilde{u} + u \cdot \nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}x \\ & + \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) : \nabla_x(\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varrho f \cdot (u - \tilde{u})\,\mathrm{d}x \\ & + \int_\Omega ((\tilde{\varrho} - \varrho)\partial_t H'(\tilde{\varrho}) + \nabla_x H'(\tilde{\varrho}) \cdot (\tilde{\varrho}\tilde{u} - \varrho u))\,\mathrm{d}x \\ & - \int_\Omega \mathrm{div}_x\,\tilde{u}\,(p(\varrho) - p(\tilde{\varrho}))\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.11}$$

Vamos analisar $\mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u})$ termo a termo. A ideia é mostrar que todos os termos de $\mathcal{R}$ podem ser "absorvidos" pelo lado esquerdo de (5.10), e no final utilizar a desigualdade de Gronwall 7. Dividimos a análise de $\mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u})$ em 3 passos.

Passo (i), Reescrita de $\mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u})$.

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varrho\,(\partial_t \tilde{u} + u \cdot \nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \varrho\,(\partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla_x \tilde{u} + (u - \tilde{u}) \cdot \nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \varrho\,(\partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega \varrho(u - \tilde{u}) \cdot \nabla_x \tilde{u} \cdot (\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Para o primeiro termo de (5.12), vamos usar que

$$\partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla_x \tilde{u} = \frac{1}{\tilde{\varrho}}\,\mathrm{div}_x\,\mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) + f - \nabla_x H'(\varrho). \tag{5.13}$$

Com efeito, como $[\tilde{\varrho}, \tilde{u}]$ é solução forte do sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12), para q.t.p pontos $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ temos

$$\partial_t \tilde{\varrho} + \mathrm{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u}) = 0, \tag{5.14}$$

$$\partial_t(\tilde{\varrho}\tilde{u}) + \mathrm{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u} \otimes \tilde{u}) + \nabla_x p(\tilde{\varrho}) = \mathrm{div}_x\,\mathbb{S}(\nabla_x u) + \tilde{\varrho} f, \tag{5.15}$$

onde

$$\mathbb{S} = \mu\left(\nabla_x \tilde{u} + \nabla_x \tilde{u} - \frac{2}{3}\,\mathrm{div}_x\,\tilde{u}\mathbb{I}\right) + \eta\,\mathrm{div}_x\,\tilde{u}\mathbb{I}, \mu > 0, \eta \geq 0. \tag{5.16}$$

Pela Equação (5.14)

$$\partial_t \tilde{\varrho} = -\,\mathrm{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u}),$$

de onde

$$\partial_t(\tilde{\varrho}\tilde{u}) = (\partial_t \tilde{\varrho})\tilde{u} + \tilde{\varrho}\,\partial_t \tilde{u} = -\,\mathrm{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u})\tilde{u} + \tilde{\varrho}\,\partial_t \tilde{u}.$$

Com cálculos diretos, mostramos que

$$\mathrm{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u} \otimes \tilde{u}) - \mathrm{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u})\tilde{u} = \tilde{\varrho}\tilde{u} \cdot \nabla_x \tilde{u}.$$

Com isto, a identidade

$$\partial_t(\tilde{\varrho}\tilde{u}) + \mathrm{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u} \otimes \tilde{u}) = \tilde{\varrho}\partial_t \tilde{u} + \tilde{\varrho}\tilde{u} \cdot \nabla_x \tilde{u}$$

é verdadeira.

Dado que

$$p(\tilde{\varrho}) = H'(\tilde{\varrho})\tilde{\varrho} - H(\tilde{\varrho}),$$

aplicando o operador ∇_x em ambos os lados da equação obtemos

$$\nabla_x p(\tilde{\varrho}) = \nabla_x H'(\tilde{\varrho})\tilde{\varrho} + H'(\tilde{\varrho})\nabla_x\tilde{\varrho} - H'(\tilde{\varrho})\nabla_x\tilde{\varrho} = \nabla_x H'(\tilde{\varrho})\tilde{\varrho}.$$

Substituindo na Equação (5.15), segue-se que

$$\tilde{\varrho}\partial_t\tilde{u} + \tilde{\varrho}\tilde{u}\cdot\nabla_x\tilde{u} + \nabla_x H'(\tilde{\varrho})\tilde{\varrho} = \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u}) + \tilde{\varrho}f,$$

e portanto, como $\tilde{\varrho} > 0$, podemos dividir em ambos os lados por $\tilde{\varrho}$ e obter

$$\partial_t\tilde{u} + \tilde{u}\cdot\nabla_x\tilde{u} = \frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u}) + f - \nabla_x H'(\tilde{\varrho}).$$

Logo, multiplicando a Equação (5.13) por $\varrho(\tilde{u}-u)$, e integrando em Ω, adquirimos

$$\int_\Omega \varrho\,(\partial_t\tilde{u} + \tilde{u}\cdot\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u}) + \varrho f - \varrho\nabla_x H'(\tilde{\varrho})\right)\cdot(\tilde{u}-u)\mathrm{d}x. \tag{5.17}$$

Dado que

$$\int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u}) : \nabla_x(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x, \tag{5.18}$$

substituindo os valores das equações (5.13), (5.17) e (5.18) em $\mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u})$ obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u}) = &\int_\Omega \varrho(u-\tilde{u})\cdot\nabla_x\tilde{u}\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho})\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\\ &+ \int_\Omega (\tilde{\varrho}-\varrho)(\partial_t H'(\tilde{\varrho}) + \nabla_x H'(\tilde{\varrho})\cdot\tilde{u})\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \operatorname{div}_x(p(\varrho) - p(\tilde{\varrho}))\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Vamos agora reescrever os termos de (5.19).

Afirmamos que

$$(\tilde{\varrho}-\varrho)\,(\partial_t H'(\tilde{\varrho}) + \nabla_x H'(\tilde{\varrho})\cdot\tilde{u}\ ) = \operatorname{div}_x \tilde{u}(\varrho-\tilde{\varrho})p'(\tilde{\varrho}). \tag{5.20}$$

De fato, como

$$H'(\tilde{\varrho})\tilde{\varrho} - H(\tilde{\varrho}) = p(\tilde{\varrho}). \tag{5.21}$$

Aplicando o operador diferencial ∇_x na Equação (5.21),

$$\nabla_x H'(\tilde{\varrho})\tilde{\varrho} + H'(\tilde{\varrho})\nabla_x\tilde{\varrho} - H'(\tilde{\varrho})\nabla_x\tilde{\varrho} = \nabla_x p(\tilde{\varrho}),$$

Logo

$$\nabla_x H'(\tilde{\varrho})\tilde{\varrho} = \nabla_x p(\tilde{\varrho}) = p'(\tilde{\varrho})\nabla_x\tilde{\varrho}.$$

Efetuando o produto escalar por $\tilde{u}$ em ambos os lados segue-se que

$$\tilde{\varrho}\nabla_x H'(\tilde{\varrho})\cdot\tilde{u} = p'(\tilde{\varrho})\nabla_x\tilde{\varrho}\cdot\tilde{u}.$$

Por outro lado, derivando a Equação (5.21) em t,

$$\partial_t\left(H'(\tilde{\varrho})\right)\tilde{\varrho} + H'(\tilde{\varrho})\partial_t\tilde{\varrho} - H'(\tilde{\varrho})\partial_t\tilde{\varrho} = \partial_t p(\tilde{\varrho}),$$

e daí

$$\partial_t H'(\tilde{\varrho})\tilde{\varrho} = \partial_t p(\tilde{\varrho}).$$

Mas

$$\partial_t p(\tilde{\varrho}) = p'(\tilde{\varrho})\partial_t\tilde{\varrho} = -p'(\tilde{\varrho})\operatorname{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u}),$$

pois pela Equação (5.14)

$$\partial_t\tilde{\varrho} = -\operatorname{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u}).$$

Então,

$$\tilde{\varrho}\left(\nabla_x H'(\tilde{\varrho})\cdot\tilde{u} + \partial_t H'(\tilde{\varrho})\right) = p'(\tilde{\varrho})\left(\nabla_x\tilde{\varrho}\cdot\tilde{u} - \operatorname{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u})\right). \tag{5.22}$$

Observe também que

$$\nabla_x\tilde{\varrho}\cdot\tilde{u} - \operatorname{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u}) = -\tilde{\varrho}\operatorname{div}_x\tilde{u}.$$

De fato

$$\begin{aligned}
\nabla_x\tilde{\varrho}\cdot\tilde{u} - \operatorname{div}_x(\tilde{\varrho}\tilde{u}) &= \left(\tilde{\varrho}_{x_1}\tilde{u}_1 + \tilde{\varrho}_{x_2}\tilde{u}_2 + \tilde{\varrho}_{x_3}\tilde{u}_3\right)\\
&\quad - \left(\tilde{\varrho}_{x_1}\tilde{u}_1 + \tilde{\varrho}\tilde{u}_{1,x_1} + \tilde{\varrho}_{x_2}\tilde{u}_2 + \tilde{\varrho}\tilde{u}_{2,x_2} + \tilde{\varrho}_{x_3}\tilde{u}_3 + \tilde{\varrho}\tilde{u}_{3,x_3}\right)\\
&= -\tilde{\varrho}\left(\tilde{u}_{1,x_1} + \tilde{u}_{2,x_2} + \tilde{u}_{3,x_3}\right)\\
&= -\tilde{\varrho}\operatorname{div}_x\tilde{u}.
\end{aligned}$$

Assim, a Equação (5.22) se torna

$$\tilde{\varrho}\left(\nabla_x H'(\tilde{\varrho})\cdot\tilde{u} + \partial_t H'(\tilde{\varrho})\right) = -\tilde{\varrho}\operatorname{div}_x\tilde{u}\; p'(\tilde{\varrho}). \tag{5.23}$$

Em particular, como $\tilde{\varrho} > 0$, dividindo a Equação (5.23) por $\tilde{\varrho}$ tem-se

$$\nabla_x H'(\tilde{\varrho})\cdot\tilde{u} + \partial_t H'(\tilde{\varrho}) = -\operatorname{div}_x\tilde{u}\; p'(\tilde{\varrho}).$$

Multiplicando por $(\tilde{\varrho} - \varrho)$ em ambos os lados, e dado que $-(\tilde{\varrho} - \varrho) = (\varrho - \tilde{\varrho})$, temos

$$(\tilde{\varrho} - \varrho)\left(\nabla_x H'(\tilde{\varrho})\cdot\tilde{u} + \partial_t H'(\tilde{\varrho})\right) = \operatorname{div}_x\tilde{u}(\varrho - \tilde{\varrho})p'(\tilde{\varrho}),$$

como queríamos demonstrar.

Integrando a Equação (5.20) em Ω, em ambos os lados, segue-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega(\tilde{\varrho} - \varrho)\left(\partial_t H'(\tilde{\varrho}) + \nabla_x H'(\tilde{\varrho})\cdot\tilde{u}\ \right)\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega\operatorname{div}_x\tilde{u}\; p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho})\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_\Omega\operatorname{div}_x\tilde{u}(\ -p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}))\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Somando $-\int_\Omega \operatorname{div}_x \tilde{u}(p(\varrho) - p(\tilde{\varrho}))\,\mathrm{d}x$ em ambos os lados,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\tilde{\varrho} - \varrho)\left(\partial_t H'(\tilde{\varrho}) + \nabla_x H'(\tilde{\varrho}) \cdot \tilde{u}\ \right)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \operatorname{div}_x \tilde{u}(p(\varrho) - p(\tilde{\varrho}))\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \operatorname{div}_x \tilde{u}\left(p(\varrho) - p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - p(\tilde{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Com isto, o resto $\mathcal{R}(\varrho, u, r, U)$ pode ser reescrito por

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u}) = &\int_\Omega \varrho(u - \tilde{u}) \cdot \nabla_x \tilde{u} \cdot (\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega \operatorname{div}_x \tilde{u}\left(p(\varrho) - p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - p(\tilde{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho - \tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Passo (ii), Estimativa de $\mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u})$.

Dado que $\tilde{\varrho}(t, x)$ satisfaz

$$0 < \inf_{(0,T)\times\overline{\Omega}} \tilde{\varrho} \leq \tilde{\varrho}(t, x) \leq \sup_{(0,T)\times\overline{\Omega}} \tilde{\varrho},$$

os dois primeiros termos do lado direito de (5.24) podem ser estimados por

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \varrho(u - \tilde{u}) \cdot \nabla_x \tilde{u} \cdot (\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \operatorname{div}_x \tilde{u}\left(p(\varrho) - p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - p(\tilde{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq c_1 \|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3})}\, \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right),
\end{aligned} \tag{5.25}$$

lembrando que

$$\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho |u - \tilde{u}|^2 + H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x.$$

Com efeito, dado que $\nabla_x \tilde{u} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3})$, inferimos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \varrho(u - \tilde{u}) \cdot \nabla_x \tilde{u} \cdot (\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_\Omega \left| \varrho(u - \tilde{u}) \cdot \nabla_x \tilde{u} \cdot (\tilde{u} - u) \right|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \ \|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3})} \int_\Omega \varrho |u - \tilde{u}|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq \ 2\|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho |u - \tilde{u}|^2 + H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \ 2\|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)}\, \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right).
\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar

$$\left| \int_\Omega \operatorname{div}_x \tilde{u}\left(p(\varrho) - p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - p(\tilde{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x \right|.$$

Dado que

$$0 < \inf_{(0,T)\times\overline{\Omega}} \tilde{\varrho} \leq \tilde{\varrho}(t, x) \leq \sup_{(0,T)\times\overline{\Omega}} \tilde{\varrho},$$

aplicamos o item (iii) do Lema 1 com

$$r = \tilde{\varrho}, \quad a_0 = \frac{\inf_{(0,T)\times\overline{\Omega}} \tilde{\varrho}}{2}, \quad b_0 = 2 \sup_{(0,T)\times\overline{\Omega}} \tilde{\varrho}.$$

Então existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$|p(\varrho) - p'(r)(\varrho - r) - p(r)| \leq c_2 \left(H(\varrho) - H'(r)(\varrho - r) - H(r) \right).$$

Outro fato que iremos utilizar é a limitação da norma do divergente pela norma do gradiente em L^∞.

$$\| \operatorname{div}_x \tilde{u} \|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3)} \leq c_3 \|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})},$$

para uma constante $c_3 > 0$.

Segue-se então que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \operatorname{div}_x \tilde{u} \left(p(\varrho) - p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - p(\tilde{\varrho}) \right) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_\Omega \left| \operatorname{div}_x \tilde{u} \left(p(\varrho) - p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - p(\tilde{\varrho}) \right) \right| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \| \operatorname{div}_x \tilde{u} \|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3)} \int_\Omega |p(\varrho) - p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - p(\tilde{\varrho})| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \ (c_2 c_3) \|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})} \int_\Omega \left(H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho}) \right) \, \mathrm{d}x \\
&\leq \ (c_2 c_3) \|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})} \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho |u - \tilde{u}|^2 + H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho}) \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \ (c_2 c_3) \|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})} \, \mathcal{E} \left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}] \right).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \varrho (u - \tilde{u}) \cdot \nabla_x \tilde{u} \cdot (\tilde{u} - u) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \operatorname{div}_x \tilde{u} \left(p(\varrho) - p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - p(\tilde{\varrho}) \right) \, \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega \varrho (u - \tilde{u}) \cdot \nabla_x \tilde{u} \cdot (\tilde{u} - u) \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_\Omega \operatorname{div}_x \tilde{u} \left(p(\varrho) - p'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - p(\tilde{\varrho}) \right) \, \mathrm{d}x \right| \\
&\leq (2 + c_2 c_3) \|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})} \, \mathcal{E} \left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}] \right).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Iremos agora estimar o terceiro e último termo de (5.24), que é a parte mais trabalhosa da estimação.

Aplicamos o item (ii) do Lema 1 com

$$r = \tilde{\varrho}, \quad a_0 = \frac{\inf_{(0,T)\times\overline{\Omega}} \tilde{\varrho}}{2}, \quad b_0 = 2 \sup_{(0,T)\times\overline{\Omega}} \tilde{\varrho}.$$

Então existe $a_1 < \dfrac{\inf \tilde{\varrho}}{2}$, $\tilde{L} > \max\{2 \sup \tilde{\varrho}, 1\}$ e uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho}) \geq \begin{cases} \dfrac{p(\tilde{\varrho})}{2}, & \text{se } 0 < \varrho < a_1; \\ c_4 (\varrho - \tilde{\varrho})^2, & \text{se } a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}; \\ c_4 \varrho^\gamma, & \text{se } \varrho > \tilde{L}. \end{cases} \tag{5.27}$$

Dividiremos a integral seguinte em três partes, escrevendo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho - \tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \, \mathrm{d}x &= \int_{\{a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}\}} \frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho - \tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \, \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\{0 < \varrho < a_1\}} \frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho - \tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \, \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\{\varrho > \tilde{L}\}} \frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho - \tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \, \mathrm{d}x \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Lembramos que estamos integrando em x, mas todas as funções estão sendo aplicadas em um tempo $\tau \in (0, T)$. Então por abuso de notação, estamos considerando

$$\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}(\tau, \cdot), \;\; \tilde{u} = \tilde{u}(\tau, \cdot), \;\; \varrho = \varrho(\tau, \cdot) \text{ e } u = u(\tau, \cdot).$$

Assim, como $u, \tilde{u} \in L^2\left(0, T; W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)\right)$, por abuso de notação vamos escrever

$$u, \tilde{u} \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3),$$

omitindo por hora a regularidade no tempo.

Pelo Teorema 2, o espaço $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ é mergulhado em $L^6(\Omega; \mathbb{R}^3)$, e assim

$$u, \tilde{u} \in L^6(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad u - \tilde{u} \in L^6(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Estimativa de I_1.

Por (5.27), para $a_1 \leq \tilde{\varrho} \leq \tilde{L}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\{a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}\}} (\varrho - \tilde{\varrho})^2 &\leq \frac{1}{c_4} \int_{\{a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}\}} H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho}) \, \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{c_4} \int_{\{a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}\}} \frac{1}{2} \varrho |u - \tilde{u}|^2 + H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho}) \, \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{c_4} \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) < \infty,
\end{aligned}$$

pois $\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) \in L^\infty(0, T)$. Logo $(\varrho - \tilde{\varrho}) \in L^2\left(\{a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}\}\right)$.

Então, para que a integral

$$\int_{\{a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}\}} (\varrho - \tilde{\varrho}) \frac{1}{\tilde{\varrho}} \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \, \mathrm{d}x$$

esteja bem definida precisamos no mínimo que

$$\frac{1}{\tilde{\varrho}} \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \in L^3(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Pela desigualdade de Hölder, isto é, pelo Teorema 1,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\{a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}\}} (\varrho - \tilde{\varrho}) \frac{1}{\tilde{\varrho}} \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \, \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \|\varrho - \tilde{\varrho}\|_{L^2\left(\{a_1 \leq \varrho \leq \tilde{L}\}\right)} \left\| \frac{1}{\tilde{\varrho}} \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \right\|_{L^3(\Omega; \mathbb{R}^3)} \|u - \tilde{u}\|_{L^6(\Omega; \mathbb{R}^3)} .
\end{aligned}$$

Pel corolário da desigualdade de Young 5,

$$
\begin{aligned}
& \|\varrho-\tilde{\varrho}\|_{L^2\left(\{a_1\leq\varrho\leq\tilde{L}\}\right)}\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|u-\tilde{u}\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
\leq\ & \left(\frac{1}{2\delta}\right)\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\varrho-\tilde{\varrho}\|^2_{L^2\left(\{a_1\leq\varrho\leq\tilde{L}\}\right)}+\delta\|u-\tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
=\ & c_5(\delta)\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\int_{\{a_1\leq\varrho\leq\tilde{L}\}}(\varrho-\tilde{\varrho})^2\,\mathrm{d}x+\delta\|u-\tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
\leq\ & c_6(\delta)\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)+\frac{\delta}{2}\|u-\tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
\leq\ & \left(\frac{c_6(\delta)}{\inf\tilde{\varrho}}\right)\|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)+\frac{\delta}{2}\|u-\tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}
$$

para qualquer $\delta > 0$.

Pela desigualdade de Poincaré 5, segue-se que

$$
\|u-\tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)}\leq c_7\|\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}. \tag{5.28}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_{\{a_1\leq\varrho\leq\tilde{L}\}}(\varrho-\tilde{\varrho})\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right| \\
\leq\ & \left(\frac{c_6(\delta)}{\inf\tilde{\varrho}}\right)\|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)+\frac{c_7\delta}{2}\|\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}.
\end{aligned}
$$

Estimativa de I_2.

Dado que $0<\varrho<a_1$,

$$
|\varrho-\tilde{\varrho}|\leq|\varrho|+|\tilde{\varrho}|\leq a_1+\sup\tilde{\varrho}\leq 2\sup\tilde{\varrho}.
$$

Então como Ω é um conjunto limitado

$$
\begin{aligned}
\int_{\{0<\varrho<a_1\}}|\varrho-\tilde{\varrho}|^2\,\mathrm{d}x &\leq 4\sup\tilde{\varrho}^2\int_{\{0<\varrho<a_1\}}1\,\mathrm{d}x \\
&\leq 4\sup\tilde{\varrho}^2\|1\|_{L^2(\{0<\varrho<a_1\})}<\infty.
\end{aligned}
$$

Logo $(\varrho-\tilde{\varrho})\in L^2\left(\{0<\varrho<a_1\}\right)$, e além disso

$$
\|\varrho-\tilde{\varrho}\|_{L^2(\{0<\varrho<a_1\})}\leq 2\sup\tilde{\varrho}\,\|1\|_{L^2(\{0<\varrho<a_1\})}.
$$

Assim, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_{\{0<\varrho<a_1\}}(\varrho-\tilde{\varrho})\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right| \\
& \leq\|\varrho-\tilde{\varrho}\|_{L^2(\{0<\varrho<a_1\})}\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|u-\tilde{u}\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
& \leq 2\sup\tilde{\varrho}\,\|1\|_{L^2(\{0<\varrho<a_1\})}\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|u-\tilde{u}\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}
$$

A fim de obter uma estimação em termos da entropia relativa $\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)$, vamos utilizar $\|1\|_{L^2(\{0<\varrho<a_1\})}$.

Pelo resultado (5.27), para $0<\varrho<a_1$,

$$H(\varrho)-H'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho})-H(\tilde{\varrho})\geq\frac{p(\tilde{\varrho})}{2}\geq\min_{a_0\leq\tilde{\varrho}\leq b_0}\frac{p(\tilde{\varrho})}{2}.$$

Por sua vez,

$$1\leq\left(\min_{a_0\leq\tilde{\varrho}\leq b_0}\frac{p(\tilde{\varrho})}{2}\right)^{-1}\left(H(\varrho)-H'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho})-H(\tilde{\varrho})\right). \tag{5.29}$$

Integrando a Equação (5.29), para $0<\varrho<a_1$ em ambos os lados, e fazendo

$$c_8=\left(\min_{a_0\leq\tilde{\varrho}\leq b_0}\frac{p(\tilde{\varrho})}{2}\right)^{-1},$$

temos

$$\begin{aligned}\int_{0<\varrho<a_1}1\,\mathrm{d}x&\leq c_8\int_{0<\varrho<a_1}H(\varrho)-H'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho})-H(\tilde{\varrho})\,\mathrm{d}x\\&\leq c_8\int_\Omega H(\varrho)-H'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho})-H(\tilde{\varrho})\,\mathrm{d}x\\&\leq c_8\int_\Omega\frac{1}{2}\varrho|u-\tilde{u}|^2+H(\varrho)-H'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho})-H(\tilde{\varrho})\,\mathrm{d}x\\&=c_8\,\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right).\end{aligned}$$

Então

$$\|1\|_{L^2(\{0<\varrho<a_1\})}\leq c_8^{1/2}\,\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)^{1/2}.$$

Assim

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\{0<\varrho<a_1\}}(\varrho-\tilde{\varrho})\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leq c_9\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)^{1/2}\|u-\tilde{u}\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)}\end{aligned}$$

onde $c_9=2\sup\tilde{\varrho}c_8^{1/2}>0$.

Pela Desigualdade de Young 5, e pela Desigualdade (5.28)

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\{0<\varrho<a_1\}}(\varrho-\tilde{\varrho})\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leq\left(\frac{c_9^2}{2\delta}\right)\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)+\frac{c_7\delta}{2}\|\nabla_xu-\nabla_x\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\\&\leq\left(\frac{c_{10}(\delta)}{\inf\tilde{\varrho}}\right)\|\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)+\frac{c_7\delta}{2}\|\nabla_xu-\nabla_x\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})},\end{aligned}$$

onde $c_{10}(\delta)=\dfrac{c_9^2+1}{2\delta}$.

Estimativa de I_3.

Lembre-se que $\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right) \in L^\infty(0,T)$ da extensão da classe admissível de funções teste (3.41).

Por (5.27), para $\varrho > \tilde{L}$,

$$\begin{aligned} c_4\varrho^\gamma &\leq H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho}) \\ &\leq \frac{1}{2}\varrho|u-\tilde{u}|^2 + H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho}). \end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados,

$$\begin{aligned} c_4\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}} \varrho^\gamma \,\mathrm{d}x &\leq \int_{\{\varrho>\tilde{L}\}} \frac{1}{2}\varrho|u-\tilde{u}|^2 + H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho})\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega \frac{1}{2}\varrho|u-\tilde{u}|^2 + H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho})\,\mathrm{d}x \\ &= \mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right). \end{aligned}$$

Assim

$$\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}} \varrho^\gamma \,\mathrm{d}x \leq c_{11}\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right),$$

e consequentemente

$$\|\varrho\|_{L^\gamma(\{\varrho>\tilde{L}\})} \leq c_{11}^{1/\gamma}\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)^{1/\gamma}.$$

Da desigualdade anterior, obtemos também que

$$\begin{aligned} \|\varrho^{\gamma/2}\|_{L^2(\{\varrho>\tilde{L}\})} &= \left(\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}} (\varrho^{\gamma/2})^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}} \varrho^\gamma \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &= \left(\left(\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}} \varrho^\gamma \,\mathrm{d}x\right)^{1/\gamma}\right)^{\gamma/2} \\ &= \|\varrho\|^{\gamma/2}_{L^\gamma(\{\varrho>\tilde{L}\})} \\ &\leq c_{11}^{1/2}\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dado que $\varrho > \tilde{L} > 2\sup\tilde{\varrho} > 2\tilde{\varrho}$, adquirimos

$$|\varrho-\tilde{\varrho}| < |\varrho|. \tag{5.30}$$

Vamos dividir este passo da demonstração em duas partes. Primeiramente, suponha que $\gamma < 2$. Então utilizando (5.30), a desigualdade de Hölder 1 e o corolário da desigualdade de Young 5, obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}}(\varrho-\tilde{\varrho})\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\{\varrho>\tilde{L}\}}\left|\varrho\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})(\tilde{u}-u)\right|\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_{\{\varrho>\tilde{L}\}}|\varrho|\left|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right||\tilde{u}-u|\,\mathrm{d}x\\
&\leq \ \|\varrho\|_{L^\gamma(\{\varrho>\tilde{L}\})}\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}\left(\nabla_x\tilde{u}\right)\right\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\|u-\tilde{u}\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)}\\
&\leq \ \frac{1}{2\delta}\|\varrho\|^2_{L^\gamma(\{\varrho>\tilde{L}\})}\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}\left(\nabla_x\tilde{u}\right)\right\|^2_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}+\frac{\delta}{2}\|u-\tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)}\\
&\leq \ c_{12}(\delta)\|\varrho\|^2_{L^\gamma(\{\varrho>\tilde{L}\})}\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}\left(\nabla_x\tilde{u}\right)\right\|^2_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}+\frac{\delta}{2}\|u-\tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)}\\
&\leq \ \left(\frac{c_{12}(\delta)}{\inf\tilde{\varrho}}\right)\|\varrho\|^2_{L^\gamma(\{\varrho>\tilde{L}\})}\|\operatorname{div}_x \mathbb{S}\left(\nabla_x\tilde{u}\right)\|^2_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}+\frac{c_7\delta}{2}\|\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}.
\end{aligned}
$$

onde

$$q=\frac{6\gamma}{\gamma+6}.$$

Como $\gamma<2$ e $\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)\in L^\infty(0,T)$,

$$\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)^{\frac{2}{\gamma}-1}<c.$$

Então

$$
\begin{aligned}
\|\varrho\|^2_{L^\gamma(\{\varrho>\tilde{L}\})} &\leq \mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)^{\frac{2}{\gamma}}\\
&= \ \mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)^{\frac{2}{\gamma}-1}\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)\\
&\leq \ c\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right).
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}}(\varrho-\tilde{\varrho})\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leq \ c_{13}(\delta)\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)\|\operatorname{div}_x \mathbb{S}\left(\nabla_x\tilde{u}\right)\|^2_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}+\frac{c_7\delta}{2}\|\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}.
\end{aligned}
$$

Para $\gamma\geq 2$, dado que $\varrho>\tilde{L}\geq 1$, temos $\varrho\leq\varrho^{\gamma/2}$ e analogamente ao caso $\gamma<2$, segue-se que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}}(\varrho-\tilde{\varrho})\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_{\{\varrho>\tilde{L}\}}\left|\varrho\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\right|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\{\varrho>\tilde{L}\}}\left|\varrho^{\gamma/2}\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\right|\,\mathrm{d}x \\
&\leq\ \|\varrho^{\gamma/2}\|_{L^2(\{\varrho>\tilde{L}\})}\left\|\frac{1}{\tilde{\varrho}}\operatorname{div}_x\mathbb{S}\left(\nabla_x\tilde{u}\right)\right\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\|u-\tilde{u}\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&\leq\ \left(\frac{c_{14}(\delta)}{\inf\tilde{\varrho}}\right)\|\varrho^{\gamma/2}\|^2_{L^2(\{\varrho>\tilde{L}\})}\|\operatorname{div}_x\mathbb{S}\left(\nabla_x\tilde{u}\right)\|^2_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}+\frac{c_7\delta}{2}\|\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})} \\
&\leq\ c_{14}(\delta)\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)\|\operatorname{div}_x\mathbb{S}\left(\nabla_x\tilde{u}\right)\|^2_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}+\frac{c_7\delta}{2}\|\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})},
\end{aligned}
$$

onde

$$q=\frac{3}{2}.$$

Vamos utilizar agora todas as estimativas anteriores para estimar $\mathcal{R}(\varrho,u,\tilde{\varrho},\tilde{u})$ completamente. Temos

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R}(\varrho,u,\tilde{\varrho},\tilde{u})\leq|\mathcal{R}(\varrho,u,\tilde{\varrho},\tilde{u})| \\
&\leq\left|\int_\Omega\varrho(u-\tilde{u})\cdot\nabla_x\tilde{u}\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\operatorname{div}_x\tilde{u}\left(p(\varrho)-p'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho})-p(\tilde{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x\right| \\
&+\left|\int_\Omega\frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho})\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}
$$

Pela estimativa (5.26), verifica-se

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega\varrho(u-\tilde{u})\cdot\nabla_x\tilde{u}\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\operatorname{div}_x\tilde{u}\left(p(\varrho)-p'(\tilde{\varrho})(\varrho-\tilde{\varrho})-p(\tilde{\varrho})\right)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq\ c_1\|\nabla_x\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{3\times3})}\ \mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right).
\end{aligned}
$$

E também, dividimos a integral abaixo em três partes

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega\frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho})\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\{a_1\leq\varrho\leq\tilde{L}\}}\frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho})\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right| \\
&+\left|\int_{\{0<\varrho<a_1\}}\frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho})\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right| \\
&+\left|\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}}\frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho})\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}
$$

De onde, pela estimativa de I_1

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\{a_1\leq\varrho\leq\tilde{L}\}}\frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho})\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq\left(\frac{c_6(\delta)}{\inf\tilde{\varrho}}\right)\|\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)+\frac{c_7\delta}{2}\|\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})};
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Pela estimativa de I_2

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\{0<\varrho<a_1\}} \frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u}-u) \,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \left(\frac{c_{10}(\delta)}{\inf \tilde{\varrho}}\right) \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} \mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right) + \frac{c_7\delta}{2} \|\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}\,;\end{aligned} \tag{5.32}$$

Pela estimativa de I_3

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}} \frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u}-u) \,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq c_{14}(\delta) \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^q\cap L^3(\Omega,\mathbb{R}^3)} \mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right) + \frac{c_7\delta}{2} \|\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}\,.\end{aligned} \tag{5.33}$$

Então, utilizando que

$$\begin{aligned}\|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|_{L^q\cap L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} &= \max\Big(\|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^3)}\,, \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\Big) \\ &\geq \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\,,\end{aligned}$$

inferimos de (5.31), (5.32) e (5.33) escolhendo $\delta = \dfrac{2\mu}{3c_7}$,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u}-u) \,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq\ c_{15} \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^q\cap L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} \mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]) + \mu \|\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})}\,.\end{aligned}$$

Finalmente, concluímos a estimativa de $\mathcal{R}$, de modo que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\varrho,u,\tilde{\varrho},\tilde{u}) \leq &\Big(c_1\|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + c_{15} \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^q\cap L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\Big) \mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]) \\ &+ \mu \|\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})}\,.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Passo (iii). Uso do Lema de Gronwall.

Uma vez estimado $\mathcal{R}$, o lado esquerdo da desigualdade de entropia relativa (5.10) é estimado utilizando o Lema 2 para $w = u - \tilde{u}$. Assim

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}) : \nabla_x(u-\tilde{u}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\quad = \int_0^\tau \int_\Omega \left(\mu|\nabla_x(u-\tilde{u})|^2 + \left(\frac{1}{3}\mu + \eta\right) |\operatorname{div}_x(u-\tilde{u})|^2\right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\quad \geq \mu \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla_x(u-\tilde{u})|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\quad = \mu \int_0^\tau \|\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})} \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

E então da desigualdade da entropia relativa (5.10), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])(\tau) + \mu \int_0^\tau \|\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})} \,\mathrm{d}t \\
&\leq \mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])(\tau) + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}) : \nabla_x (u-\tilde{u}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\
&\leq \mathcal{E}([\varrho_0,u_0]|[\tilde{\varrho}_0,\tilde{u}_0]) + \int_0^\tau \mathcal{R}(\varrho,u,\tilde{\varrho},\tilde{u}) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\tau \mathcal{R}(\varrho,u,\tilde{\varrho},\tilde{u}) \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Pois, dado que $\varrho_0 = \tilde{\varrho}_0$ e $u_0 = \tilde{u}_0$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}([\varrho_0,u_0]|[\tilde{\varrho}_0,\tilde{u}_0]) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho_0 |u_0 - \tilde{u}_0|^2 + H(\varrho_0) - H'(\tilde{\varrho}_0)(\varrho_0 - \tilde{\varrho}_0) - H(\tilde{\varrho}_0)\right) \mathrm{d}x \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Prosseguindo

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])(\tau) + \mu \int_0^\tau \|\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})} \,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\tau \mathcal{R}(\varrho,u,\tilde{\varrho},\tilde{u}) \,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\tau h(t)\mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])(t) \,\mathrm{d}t + \mu \int_0^\tau \|\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{3\times 3})} \,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

onde

$$
h(t) = c_1 \|\nabla_x \tilde{u}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + c_{15} \left\|\mathrm{div}_x\, \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}(t,\cdot))\right\|^2_{L^q \cap L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}
$$

é tal que $h \in L^1(0,T)$ pela regularidade de $\tilde{u}$.

Portanto

$$
\mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])(\tau) \leq \int_0^\tau h(t)\mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])(t) \,\mathrm{d}t.
$$

Pelo Lema de Gronwall 7

$$
\mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])(\tau) \leq 0
$$

para q.t.p $\tau \in (0,T)$, e como $\mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])(\tau) \geq 0$, para todo $\tau \in (0,T)$,

$$
\mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])(\tau) = 0, \quad \text{para q.t.p } \tau \in (0,T).
$$

Pela definição de $\mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])$, concluímos que

$$
\varrho = \tilde{\varrho},\ u = \tilde{u}, \qquad \text{para q.t.p } \ (t,x) \in (0,T)\times\Omega.
$$

□

Observações sobre o Teorema 14.

Precisamos que Ω seja pelo menos Lipschitz para garantir a extensão de $W^{1,p}$ com as relações de mergulhos de Sobolev associadas.

A existência de soluções fracas de energia finita foi mostrada em [20] para condições iniciais gerais (com energia finita) e sem qualquer restrição ou imposição sobre a suavidade de $\partial\Omega$.

A existência de soluções fortes locais no tempo e pertencendo a classe de regularidade especificada no Teorema 14 foi provada em [39] sobre restrições naturais impostas aos dados iniciais.

5.1.2 Condição de Fronteira de Navier

Iremos agora estudar a propriedade de unicidade fraca-forte para domínios limitados e no sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12) com condição de fronteira de Navier pura, isto é, (2.19) com $\beta = 0$. O enunciado do teorema é análogo, iremos enunciar com o propósito de padronização e organização do texto.

Teorema 15 (Unicidade Fraca Forte com Condição Navier em Domínio Limitado)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio Lipschitz limitado. Seja p a função pressão satisfazendo a hipótese* (2.16)*. Seja f uma função de força externa tal que*

$$f \in L^1\left(0, T; L^{2\gamma/(\gamma-1)}(\Omega; \mathbb{R}^3)\right).$$

Suponha que $[\varrho, u]$ é uma solução fraca de energia finita do sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12)*, com condição de fronteira Navier pura,* (2.19) *com $\beta = 0$, definida em $(0, T) \times \Omega$, como na Definição 5. Seja $[\tilde{\varrho}, \tilde{u}]$ uma solução forte para o mesmo problema pertencendo a classe*

$$0 < \inf_{(0,T)\times\Omega} \tilde{\varrho} \leq \tilde{\varrho}(t, x) \leq \sup_{(0,T)\times\Omega} \tilde{\varrho} < \infty; \tag{5.35}$$

$$\nabla_x \tilde{\varrho} \in L^2\left(0, T; L^q(\Omega; \mathbb{R}^3)\right); \tag{5.36}$$

$$\nabla_x^2 \tilde{u} \in L^2\left(0, T; L^q(\Omega; \mathbb{R}^{3\times3\times3})\right), \tag{5.37}$$

com $q > \max\left\{3, \dfrac{3}{\gamma - 1}\right\}$;

$$\nabla_x \tilde{u} \in L^1\left(0, T; L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3\times3})\right) \bigcap L^2\left(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)\right); \tag{5.38}$$

$$\mathrm{div}_x\, \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \in L^2\left(0, T; L^3 \cap L^p(\Omega; \mathbb{R}^3)\right), \tag{5.39}$$

onde $p = \dfrac{6\gamma}{(5\gamma - 6)}$.

Se a solução fraca $[\varrho, u]$ e a solução forte $[\tilde{\varrho}, \tilde{u}]$ possuem a mesma condição inicial $[\varrho_0, u_0]$, então

$$\varrho \equiv \tilde{\varrho}, \quad u \equiv \tilde{u} \text{ em } (0, T) \times \Omega. \tag{5.40}$$

Demonstração.

Os passos (i), reescrita de $\mathcal{R}$ e (ii), estimativa de $\mathcal{R}$ da demonstração do Teorema 14 continuam sendo válidos, a menos das partes onde utilizamos a desigualdade de Poincaré. Para tratarmos este problema vamos introduzir a parte simétrica e sem traço de uma matriz.

Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. A *parte simétrica* $\mathbb{D}(A)$ de A é definida por

$$\mathbb{D}(A) = \frac{A + A^T}{2}.$$

A *parte sem traço* (traceless) $\mathbb{D}_0(A)$ de A é definida por

$$\mathbb{D}_0(A) = \frac{A + A^T}{2} - \frac{1}{3}\,\text{traço}(A)\mathbb{I}.$$

Note que utilizando esta notação, $\mathbb{S}(\nabla_x u)$ pode ser escrito por

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}(\nabla_x u) &= \mu\left(\nabla_x u + \nabla_x^T u - \frac{2}{3}\operatorname{div}_x u\mathbb{I}\right) + \eta \operatorname{div}_x u\mathbb{I} \\
&= 2\mu\left(\frac{\nabla_x u + \nabla_x^T u}{2} - \frac{1}{3}\,\text{traço}(\nabla_x u)\mathbb{I}\right) + \eta \operatorname{div}_x u\mathbb{I} \\
&= 2\mu\mathbb{D}_0(\nabla_x u) + \eta \operatorname{div}_x u\mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Corolário 2, com $v = u - \tilde{u}$, e $r = \varrho^{\frac{1}{2}}$, temos que existe uma constante $c_{16} > 0$ tal que

$$\|u - \tilde{u}\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c_{16}\left(\|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \int_\Omega \varrho|u - \tilde{u}|^2\,\mathrm{d}x\right). \tag{5.41}$$

Pelo Teorema 2, existe uma constante $c_{17} > 0$ tal que

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c_{17}\|u - \tilde{u}\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$

Sabemos também que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varrho|u - \tilde{u}|^2 &\leq 2\int_\Omega \frac{1}{2}\varrho|u - \tilde{u}|^2 + H(\varrho) - H'(\tilde{\varrho})(\varrho - \tilde{\varrho}) - H(\tilde{\varrho})\,\mathrm{d}x \\
&= c_{18}\mathcal{E}\left([\varrho, u]|[\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right).
\end{aligned}$$

Então pela Equação (5.41), tem-se que

$$\|u - \tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c_{19}\left(\|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \mathcal{E}\left([\varrho, u]|[\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right)\right). \tag{5.42}$$

Agora, ao invés de utilizarmos a desigualdade de Poincaré, iremos utilizar a desigualdade (5.42).

Na estimativa de I_1, pela desigualdade do tipo Korn (5.42)

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\{a_1 \le \varrho \le \tilde{L}\}} \frac{1}{\tilde{\varrho}} (\varrho - \tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \,\mathrm{d}x \right| \\
&\le \left(\frac{c_6(\delta)}{\inf \tilde{\varrho}} \right) \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) + \delta \|u - \tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&\le \left(\frac{c_6(\delta)}{\inf \tilde{\varrho}} \right) \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) \\
&+ \quad \delta c_{19} \left(\|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) \right).
\end{aligned}$$

Escolhemos $\delta = \dfrac{2\mu}{3c_{19}} > 0$, e então

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\{a_1 \le \varrho \le \tilde{L}\}} \frac{1}{\tilde{\varrho}} (\varrho - \tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \,\mathrm{d}x \right| \\
&\le c_{20} \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) \\
&+ \quad \frac{2\mu}{3} \|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + c_{21} \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) \\
&\le \left(c_{21} + c_{20} \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} \right) \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) + \frac{2\mu}{3} \|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Na estimativa de I_2, pela desigualdade (5.42)

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\{0 < \varrho < a_1\}} \frac{1}{\tilde{\varrho}} (\varrho - \tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \,\mathrm{d}x \right| \\
&\le \left(\frac{c_{10}(\delta)}{\inf \tilde{\varrho}} \right) \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) + \frac{\delta}{2} \|u - \tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&\le \left(\frac{c_{10}(\delta)}{\inf \tilde{\varrho}} \right) \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) \\
&+ \quad \frac{\delta c_{19}}{2} \left(\|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) \right).
\end{aligned}$$

Pode-se concluir que existem constantes positivas c_{22}, c_{23} tais que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\{0 < \varrho < a_1\}} \frac{1}{\tilde{\varrho}} (\varrho - \tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \,\mathrm{d}x \right| \\
&\le \left(c_{23} + c_{22} \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)} \right) \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) + \frac{2\mu}{3} \|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Na estimativa de I_3, pela desigualdade (5.42)

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\{\varrho > \tilde{L}\}} \frac{1}{\tilde{\varrho}} (\varrho - \tilde{\varrho}) \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u) \,\mathrm{d}x \right| \\
&\le c_{15}(\delta) \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^q \cap L^3(\Omega,\mathbb{R}^3)} \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) + \frac{\delta}{2} \|u - \tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \\
&\le c_{15}(\delta) \|\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^q \cap L^3(\Omega,\mathbb{R}^3)} \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) \\
&+ \quad \frac{\delta c_{19}}{2} \left(\|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right) \right).
\end{aligned}$$

E então existem constantes positivas c_{24}, c_{25} tais que

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\{\varrho>\tilde{L}\}}\frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho})\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leq\left(c_{25}+c_{24}\left\|\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right)\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)+\frac{2\mu}{3}\left\|\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u})\right\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}.\end{aligned} \tag{5.45}$$

Inferimos a partir de (5.43), (5.44) e (5.45), que existem constantes positivas c_{26}, c_{27} tais que

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Omega}\frac{1}{\tilde{\varrho}}(\varrho-\tilde{\varrho})\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\cdot(\tilde{u}-u)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leq\left(c_{27}+c_{26}\left\|\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|^2_{L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right)\mathcal{E}\left([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}]\right)+2\mu\left\|\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u})\right\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}.\end{aligned} \tag{5.46}$$

Então $\mathcal{R}$ é estimado por

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(\varrho,u,\tilde{\varrho},\tilde{u})\\&\leq\left(c_1\|\nabla_x\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}+\left(c_{27}+c_{26}\left\|\operatorname{div}_x\mathbb{S}(\nabla_x\tilde{u})\right\|^2_{L^q\cap L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right)\right)\mathcal{E}([\varrho,u]|[\tilde{\varrho},\tilde{u}])\\&+\ 2\mu\left\|\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u})\right\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}.\end{aligned}$$

Agora iremos estimar o lado esquerdo da desigualdade de entropia relativa (5.10). Por meio de cálculos diretos, pode-se mostrar que

$$\mathbb{S}(\nabla_x w):\nabla_x w=2\mu\left(\mathbb{D}_0(\nabla_x w):\mathbb{D}_0(\nabla_x w)\right)+\eta|\operatorname{div}_x w|^2,$$

para toda função $w:(0,T)\times\Omega\to\mathbb{R}^3$ com $w\cdot n=0$. Esta ideia é baseada em [8].

Em particular, para $w=u-\tilde{u}$

$$\mathbb{S}(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}):\nabla_x(u-\tilde{u})=2\mu\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}):\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u})+\eta|\operatorname{div}_x(u-\tilde{u})|^2.$$

Assim

$$\mathbb{S}(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}):(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u})\geq 2\mu\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}):\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}),$$

e portanto

$$\int_\Omega\mathbb{S}(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}):(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u})\,\mathrm{d}x\geq 2\mu\int_\Omega\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}):\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u})\,\mathrm{d}x.$$

Note que

$$\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u}):\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u})=\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\left(\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u})\right)^2_{i,j}=\left|\mathbb{D}_0(\nabla_x u-\nabla_x\tilde{u})\right|^2$$

onde a norma matricial utilizada é

$$|A|=\left(\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}) : (\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \geq\ & 2\mu \int_0^\tau \int_\Omega |\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})|^2\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ =\ & 2\mu \int_0^\tau \|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Pela desigualdade da entropia relativa (5.10)

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right)(\tau, \cdot) + 2\mu \int_0^\tau \|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}\ \mathrm{d}t \\ &\leq\ \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right)(\tau, \cdot) + \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}) : (\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ &\leq\ \mathcal{E}\left([\varrho_0, u_0] | [\tilde{\varrho}(0, \cdot), \tilde{u}(0, \cdot)]\right) + \int_0^\tau \mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u})\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\tau \mathcal{R}(\varrho, u, \tilde{\varrho}, \tilde{u})\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Como $\varrho_0 = \tilde{\varrho}(0, \cdot)$ e $u_0 = \tilde{u}(0, \cdot)$, tem-se que

$$\mathcal{E}\left([\varrho_0, u_0] | [\tilde{\varrho}(0, \cdot), \tilde{u}(0, \cdot)]\right) = 0.$$

Desta forma

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right)(\tau, \cdot) + 2\mu \int_0^\tau \|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}\ \mathrm{d}t \\ &\leq\ \int_0^\tau \left(c_1 \|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \left(c_{27} + c_{26} \left\|\mathrm{div}_x\, \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\right\|^2_{L^q \cap L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right)\right) \mathcal{E}([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}])\ \mathrm{d}t \\ &+\ 2\mu \int_0^\tau \|\mathbb{D}_0(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right)(\tau, \cdot) \\ &\leq\ \int_0^\tau \left(c_1 \|\nabla_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + \left(c_{27} + c_{26} \left\|\mathrm{div}_x\, \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u})\right\|^2_{L^q \cap L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}\right)\right) \mathcal{E}([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}])(t, \cdot)\, \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.47}$$

Seja $h : (0, T) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = c_1 \left\|\nabla_x \tilde{u}(t, \cdot)\right\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} + c_{27} + c_{26} \left\|\mathrm{div}_x\, \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}(t, \cdot))\right\|^2_{L^q \cap L^3(\Omega;\mathbb{R}^3)}.$$

Como Ω é limitado,

$$\int_\Omega c_{27} < +\infty.$$

Pela regularidade de $\tilde{u}$, temos $h \in L^1(0, T)$. Finalmente

$$\mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right)(\tau, \cdot) \leq \int_0^\tau h(t) \mathcal{E}\left([\varrho, u] | [\tilde{\varrho}, \tilde{u}]\right)(t, \cdot)\, \mathrm{d}t,$$

onde $h \in L^1(0, T)$.

Pelo Lema de Gronwall 7, concluímos que

$$\varrho \equiv \tilde{\varrho}, \quad u \equiv \tilde{u} \text{ em } (0, T) \times \Omega.$$

□

5.2 Unicidade Fraca-Forte em Domínios Ilimitados

Iremos analisar o sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12) em um domínio ilimitado com comportamento no infinito dado por (2.18). Nestas condições, as soluções de energia finita devem pertencer necessariamente à classe

$$\varrho - \overline{\varrho} \in L^{\infty}\left(0,T;(L^2+L^{\gamma})(\Omega)\right); \tag{5.48}$$

$$p(\varrho) - p(\overline{\varrho}) \in L^{\infty}\left(0,T;(L^2+L^1)(\Omega)\right); \tag{5.49}$$

$$u \in L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)\right); \tag{5.50}$$

$$\varrho u \in L^{\infty}\left(0,T;(L^2+L^{2\gamma/(\gamma+1)})(\Omega;\mathbb{R}^3)\right). \tag{5.51}$$

5.2.1 Condição de Fronteira de Dirichlet

Teorema 16. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio ilimitado com fronteira **uniformemente Lipschitz**. Seja p a função pressão satisfazendo a hipótese (2.16). Seja f uma função de força externa tal que*

$$f \in L^1\left(0,T;L^1 \cap L^{\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3)\right). \tag{5.52}$$

Suponha que $[\varrho,u]$ é uma solução fraca de energia finita do sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12) com condição de fronteira de Dirichlet (2.17) definida em $(0,T)\times\Omega$, e comportamento no infinito (2.18) com $\overline{\varrho}>0$. Seja $[\tilde{\varrho},\tilde{u}]$ uma solução forte para o mesmo problema pertencendo a classe

$$0 < \inf_{(0,T)\times\Omega} \tilde{\varrho} \le \tilde{\varrho}(t,x) \le \sup_{(0,T)\times\Omega} \tilde{\varrho} < \infty; \tag{5.53}$$

$$\nabla_x \tilde{\varrho} \in L^2\left(0,T;L^q(\Omega;\mathbb{R}^3)\right); \tag{5.54}$$

$$\nabla_x^2 \tilde{u} \in L^2\left(0,T;L^q(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3\times3})\right), \tag{5.55}$$

com $q > \max\left\{3, \dfrac{3}{\gamma-1}\right\}$;

$$\nabla_x \tilde{u} \in L^1\left(0,T;L^{\infty}(\Omega,\mathbb{R}^{3\times3})\right) \bigcap L^2\left(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)\right); \tag{5.56}$$

$$\mathrm{div}_x\, \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \in L^2\left(0,T;L^3 \cap L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)\right), \tag{5.57}$$

onde $p = \dfrac{6\gamma}{(5\gamma-6)}$.

Se a solução fraca $[\varrho,u]$ e a solução forte $[\tilde{\varrho},\tilde{u}]$ possuem a mesma condição inicial $[\varrho_0,u_0]$, então

$$\varrho \equiv \tilde{\varrho}, \quad u \equiv \tilde{u} \text{ em } (0,T)\times\Omega. \tag{5.58}$$

Demonstração.

A demonstração do Teorema 16 é semelhante a demonstração dos teoremas 14 e 15. Nas hipóteses, uma diferença importante é o fato da fronteira de Ω ser uniformemente Lipschitz, isto serve para garantir que os mergulhos de Sobolev e a desigualdade de Korn (1.7) sejam válidos. Também devemos utilizar a hipótese do comportamento no infinito

$$u \to 0, \;\; \tilde{u} \to 0, \;\; \varrho \to \overline{\varrho}\ , \;\; \tilde{\varrho} \to \overline{\varrho} \quad \text{ quando } |x| \to \infty.$$

Ao invés de utilizarmos a desigualdade de Poincaré como na demonstração do Teorema 14, utilizaremos a Proposição 2 para $w = u - \tilde{u}$. Assim

$$\|u - \tilde{u}\|^2_{L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c_{28} \left\|\mathbb{S}(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\right\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})}.$$

Para a estimativa de I_2, ao invés de utilizarmos que $|\Omega| < \infty$, substituiremos pelo fato de que o conjunto

$$\{0 < \varrho < a_1\} = \{x \in \Omega;\ 0 < \varrho(t,x) < a_1\},$$

é limitado em Ω, o que será mostrado pelo lema a seguir. Com este resultado,

$$\int_{\{0<\varrho<a_1\}} 1 \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Lema 3. *Para q.t.p* $\tau \in (0,T)$ *e* $0 < a_1 < a_0 = \dfrac{\inf \tilde{\varrho}}{2}$, *o conjunto*

$$\{0 < \varrho < a_1\} = \{x \in \Omega; 0 \leq \varrho(\tau,x) < a_1\}$$

é um conjunto limitado em Ω.

Demonstração. Como $a_0 = \dfrac{\inf \tilde{\varrho}}{2}$, inferimos que

$$\varrho < a_1 < a_0 = \frac{\inf \tilde{\varrho}}{2} \leq \frac{\tilde{\varrho}}{2}.$$

Devido ao comportamento no infinito (2.18), para $|x| \to \infty$, $\tilde{\varrho} \to \overline{\varrho}$ e $\varrho \to \overline{\varrho}$. Ou seja

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists M_1 > 0;\ |x| > M_1 \implies |\tilde{\varrho} - \overline{\varrho}| < \varepsilon_1; \tag{5.59}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists M_2 > 0;\ |x| > M_2 \implies |\varrho - \overline{\varrho}| < \varepsilon_2. \tag{5.60}$$

Lembre-se que $\overline{\varrho}$ é uma *constante*, ou seja, não depende de ϱ nem de $\tilde{\varrho}$.

Escolhemos então $\varepsilon_1 = \dfrac{\overline{\varrho}}{2}$ e $\varepsilon_2 = \dfrac{\overline{\varrho}}{4}$. Então existem constantes $M_1, M_2 > 0$ tais que

$$|x| > M_1 \implies |\tilde{\varrho} - \overline{\varrho}| < \frac{\overline{\varrho}}{2} \implies \frac{\tilde{\varrho}}{2} < \frac{3\overline{\varrho}}{4}; \tag{5.61}$$

$$|x| > M_2 \implies |\varrho - \overline{\varrho}| < \frac{\overline{\varrho}}{4} \implies \varrho > \frac{3\overline{\varrho}}{4}. \tag{5.62}$$

Escolhendo $M = \max\{M_1, M_2\}$, existe $x_0 \in \{0 < \varrho < a_1\}$ com $|x_0| > M$.

Da definição de $\{0 < \varrho < a_1\}$ e de (5.61)

$$\varrho(\tau, x_0) < a_1 \leq \frac{\tilde{\varrho}}{2} < \frac{3\overline{\varrho}}{4}.$$

Por outro lado, de (5.62), segue-se que

$$\varrho(\tau, x_0) > \frac{3\overline{\varrho}}{4}.$$

Absurdo ! Logo $\{0 < \varrho < a_1\}$ é um conjunto limitado em Ω. □

O lado esquerdo da desigualdade de entropia relativa (5.10) é estimado utilizando que

$$\|\mathbb{S}(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})} = \int_\Omega (\mathbb{S}(\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}) : (\nabla_x u - \nabla_x \tilde{u}))\ \mathrm{d}x.$$

Então basta prosseguir como na demonstração do Teorema 15.

□

Observações sobre o Teorema 16.

A fronteira $\partial\Omega$ uniformemente Lipschitz garante a propriedade de extensão de $W^{1,p}$ e também as desigualdades do tipo Korn-Poincaré.

A existência de soluções fracas de energia finita para certas classes de domínios ilimitados foi mostrada em [34], veja também [28].

O/A leitor/a pode consultar os trabalhos clássicos [29] e [30] para a existência de soluções fortes. Resultados mais recentes podem ser encontrados em [9].

5.2.2 Condição de Fronteira de Navier

Teorema 17. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio ilimitado onde vale a desigualdade de Korn dada pela Proposição 3. Seja p a função pressão satisfazendo a hipótese (2.16). Seja f uma função de força externa tal que*

$$f \in L^1\left(0, T; L^1 \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)\right). \tag{5.63}$$

Suponha que $[\varrho, u]$ é uma solução fraca de energia finita do sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12) com condição de fronteira de Navier pura, (2.19) com $\beta = 0$, definida em $(0, T) \times \Omega$, e comportamento no infinito (2.18) com $\overline{\varrho} > 0$. Seja $[\tilde{\varrho}, \tilde{u}]$ uma solução forte para o mesmo problema pertencendo à classe

$$0 < \inf_{(0,T)\times\Omega} \tilde{\varrho} \leq \tilde{\varrho}(t, x) \leq \sup_{(0,T)\times\Omega} \tilde{\varrho} < \infty; \tag{5.64}$$

$$\nabla_x \tilde{\varrho} \in L^2\left(0, T; L^q(\Omega; \mathbb{R}^3)\right); \tag{5.65}$$

$$\nabla_x^2 \tilde{u} \in L^2\left(0, T; L^q(\Omega; \mathbb{R}^{3\times3\times3})\right), \tag{5.66}$$

com $q > \max\left\{3, \dfrac{3}{\gamma - 1}\right\}$;

$$\nabla_x \tilde{u} \in L^1\left(0, T; L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3\times3})\right) \bigcap L^2\left(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)\right); \tag{5.67}$$

$$\mathrm{div}_x\, \mathbb{S}(\nabla_x \tilde{u}) \in L^2\left(0, T; L^3 \cap L^p(\Omega; \mathbb{R}^{3\times3})\right), \tag{5.68}$$

onde $p = \dfrac{6\gamma}{(5\gamma - 6)}$.

Se a solução fraca $[\varrho, u]$ *e a solução forte* $[\tilde{\varrho}, \tilde{u}]$ *possuem a mesma condição inicial* $[\varrho_0, u_0]$, *então*

$$\varrho \equiv \tilde{\varrho}, \quad u \equiv \tilde{u} \text{ em } (0, T) \times \Omega. \tag{5.69}$$

Demonstração.

Para a demonstração do Teorema 17, a única alteração em relação a demonstração dos teoremas 14, 15 e 16 é a desigualdade do tipo Korn-Poincaré utilizada nas estimativas de I_1, I_2 e I_3. Usaremos a Proposição 3, mas antes, precisamos provar que certo conjunto é limitado.

Afirmamos que o conjunto

$$\{|\varrho - \overline{\varrho}| \geq \varrho/2\} = \{x \in \Omega; |\varrho(x, \tau) - \overline{\varrho}| \geq \overline{\varrho}/2\}$$

é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^N$.

Com efeito, suponhamos por absurdo que $\{|\varrho - \overline{\varrho}| \geq \overline{\varrho}/2\}$ é um conjunto ilimitado em $\mathbb{R}^N$. Dado que $\varrho \to \overline{\varrho}$ quando $|x| \to \infty$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0;\ |x| > M \ \text{ implica em } \ |\varrho(\tau, x) - \overline{\varrho}| < \varepsilon.$$

Tome $\varepsilon = \dfrac{\overline{\varrho}}{4}$. Então

$$\frac{\overline{\varrho}}{2} < \frac{3\overline{\varrho}}{4} < \varrho(\tau, x) < \frac{5\overline{\varrho}}{4} < \frac{3\overline{\varrho}}{2}.$$

Como $\{|\varrho - \overline{\varrho}| \geq \varrho/2\}$ é um conjunto ilimitado, existe

$$x_0 \in \{|\varrho - \overline{\varrho}| \geq \varrho/2\} \cap \{x \in \mathbb{R}^N; |x| > M\}.$$

Então

$$\varrho(t, x_0) \leq \frac{\overline{\varrho}}{2} \ \text{ ou } \ \varrho(t, x_0) \geq \frac{3\overline{\varrho}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{\varrho}}{2} < \varrho(t, x_0) < \frac{3\overline{\varrho}}{2}.$$

Absurdo. Logo $\{|\varrho - \overline{\varrho}| \geq \overline{\varrho}/2\}$ deve ser um conjunto limitado.

Tomamos $V = \{|\varrho - \overline{\varrho}| \geq \overline{\varrho}/2\}$, e escolhemos $v = \left(\sqrt{\frac{\overline{\varrho}}{2}}\right)(u - \tilde{u})$ na Proposição 3. Obtemos assim

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\varrho}}{2}\|u - \tilde{u}\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} &\leq c_{30}\left(|V|\right)\left(\frac{\overline{\varrho}}{2}\|\mathbb{S}(\nabla_x(u - \tilde{u}))\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_{\Omega\setminus V}\frac{\overline{\varrho}}{2}|u - \tilde{u}|^2 \,\mathrm{d}x\right) \\
&\leq \; c_{31}\left(|V|\right)\left(\|\mathbb{S}(\nabla_x(u - \tilde{u}))\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_{\Omega\setminus V}\varrho|u - \tilde{u}|^2 \,\mathrm{d}x\right) \\
&\leq \; c_{31}\left(|V|\right)\left(\|\mathbb{S}(\nabla_x(u - \tilde{u}))\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_{\Omega}\varrho|u - \tilde{u}|^2 \,\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, existe uma constante $c_{32} > 0$ tal que

$$\|u - \tilde{u}\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leq c_{32}\left(\|\mathbb{S}(\nabla_x(u - \tilde{u}))\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \int_{\Omega}\varrho|u - \tilde{u}|^2 \,\mathrm{d}x\right). \tag{5.70}$$

O resto da demonstração segue os mesmos passos das demonstrações dos teoremas 14, 15 e 16.

□

Referências

[1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 17, 21, 22 e 27.

[2] ANTONTSEV, S. N., KAZHIKTOV, A., AND MONAKHOV, V. N. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*. Elsevier, 1989. Citado na página 38.

[3] BALLEW, J., AND TRIVISA, K. Weakly dissipative solutions and weak–strong uniqueness for the navier–stokes–smoluchowski system. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 91* (2013), 1–19. Citado na página 14.

[4] BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014. Citado na página 19.

[5] BOYD, S., BOYD, S. P., AND VANDENBERGHE, L. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004. Citado na página 54.

[6] BOYER, F., AND FABRIE, P. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, vol. 183. Springer Science & Business Media, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 27.

[7] CHAUDHURI, N. On weak–strong uniqueness for compressible navier–stokes system with general pressure laws. *Nonlinear Analysis: Real World Applications 49* (2019), 250–267. Citado na página 14.

[8] CHAUDHURI, N. *Qualitative properties of solutions to partial differential equations arising in fluid dynamics*. PhD thesis, 2021. Citado na página 80.

[9] CHO, Y., CHOE, H. J., AND KIM, H. Unique solvability of the initial boundary value problems for compressible viscous fluids. *Journal de mathématiques pures et appliquées 83*, 2 (2004), 243–275. Citado na página 84.

[10] DAFERMOS, C. M. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 3. Springer, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 62.

[11] DIPERNA, R. J., AND LIONS, P.-L. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Inventiones mathematicae 98*, 3 (1989), 511–547. Citado na página 36.

[12] EULER, L. Novi commentarii academiae scientiarum petropolitanae. *Nr 20* (1776), 189–207. Citado na página 12.

[13] Evans, L. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

[14] Feireisl, E. *Dynamics of viscous compressible fluids*, vol. 26. Oxford University Press, 2004. Citado 10 vezes nas páginas 13, 28, 91, 93, 95, 96, 97, 98, 99 e 100.

[15] Feireisl, E., Jin, B. J., and Novotnỳ, A. Relative entropies, suitable weak solutions, and weak-strong uniqueness for the compressible navier–stokes system. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics 14*, 4 (2012), 717–730. Citado 4 vezes nas páginas 13, 14, 24 e 41.

[16] Feireisl, E., Karper, T. G., and Pokornỳ, M. *Mathematical theory of compressible viscous fluids*. Springer, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 35, 38 e 41.

[17] Feireisl, E., and Novotnỳ, A. *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*, vol. 2. Springer, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 27.

[18] Feireisl, E., and Novotnỳ, A. Weak–strong uniqueness property for the full navier–stokes–fourier system. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 204*, 2 (2012), 683–706. Citado na página 14.

[19] Feireisl, E., Novotnỳ, A., and Petzeltová, H. On the existence of globally defined weak solutions to the navier—stokes equations. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics 3*, 4 (2001), 358–392. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 91.

[20] Feireisl, E., Novotnỳ, A., and Petzeltová, H. On the domain dependence of solutions to the compressible navier–stokes equations of a barotropic fluid. *Mathematical methods in the applied sciences 25*, 12 (2002), 1045–1073. Citado na página 77.

[21] Feireisl, E., Novotnỳ, A., and Sun, Y. Suitable weak solutions to the navier-stokes equations of compressible viscous fluids. *Indiana University Mathematics Journal* (2011), 611–631. Citado 3 vezes nas páginas 13, 41 e 62.

[22] Germain, P. Weak–strong uniqueness for the isentropic compressible navier–stokes system. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics 13*, 1 (2011), 137–146. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 62.

[23] He, L., and Zhou, Y. Weak-strong uniqueness for compressible magnetohydrodynamic equations with coulomb force. *Advances in Mathematical Physics 2021* (2021), 1–10. Citado na página 14.

[24] Jesslé, D., Jin, B. J., and Novotny, A. Navier–stokes–fourier system on unbounded domains: Weak solutions, relative entropies, weak-strong uniqueness.

SIAM Journal on Mathematical Analysis 45, 3 (2013), 1907–1951. Citado na página 24.

[25] Kruzhkov, S. N. First order quasilinear equations in several independent variables. *Matematicheskii Sbornik 123*, 2 (1970), 228–255. Citado na página 36.

[26] Ladyženskaja, O. A., Solonnikov, V. A., and Ural'ceva, N. N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, vol. 23. American Mathematical Soc., 1988. Citado na página 93.

[27] Leray, J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta mathematica 63*, 1 (1934), 193–248. Citado na página 12.

[28] Lions, P.-L. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Volume 2: Compressible Models*, vol. 2. Oxford University Press on Demand, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 13, 44, 84 e 91.

[29] Matsumura, A., and Nishida, T. The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences 55*, 9 (1979), 337–342. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 84.

[30] Matsumura, A., and Nishida, T. The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases. *Journal of Mathematics of Kyoto University 20*, 1 (1980), 67–104. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 84.

[31] Meyer, R. E. *Introduction to mathematical fluid dynamics*. Courier Corporation, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 30.

[32] Munkres, J. R. *Analysis on manifolds*. CRC Press, 2018. Citado na página 26.

[33] Navier, C. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France 6*, 1823 (1823), 389–440. Citado na página 12.

[34] Novotny, A., and Straskraba, I. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, vol. 27. OUP Oxford, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 41, 84 e 91.

[35] Poisson, S.-D. *Mémoire sur le mouvement d'un corps solide*. L'Académie des sciences, 1834. Citado na página 12.

[36] SERRIN, J. The initial value problem for the navier-stokes equations. *Nonlinear Problems.* (1963), 69–98. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 62.

[37] STOKES, G. On the effect of the internal friction of fluid on pendulums. *Trans. Comb. Phil. Soc. 9* (1851), 8–106. Citado na página 12.

[38] Sueur, F. On the inviscid limit for the compressible navier–stokes system in an impermeable bounded domain. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics 16*, 1 (2014), 163–178. Citado na página 14.

[39] Sun, Y., Wang, C., and Zhang, Z. A beale–kato–majda blow-up criterion for the 3-d compressible navier–stokes equations. *Journal de mathématiques pures et appliquées 95*, 1 (2011), 36–47. Citado na página 77.

[40] Tani, A. On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences 13*, 1 (1977), 193–253. Citado na página 38.

[41] Valli, A. A correction to the paper «an existence theorem for compressible viscous fluids». *Annali di Matematica Pura ed Applicata 132*, 1 (1982), 399–400. Citado na página 38.

[42] Valli, A. An existence theorem for compressible viscous fluids. *Annali di Matematica Pura ed Applicata 130*, 1 (1982), 197–213. Citado na página 38.

[43] Valli, A., and Zajaczkowski, W. M. Navier-stokes equations for compressible fluids: global existence and qualitative properties of the solutions in the general case. *Communications in mathematical physics 103*, 2 (1986), 259–296. Citado na página 38.

APÊNDICE A – Existência de Soluções Fracas

Neste apêndice, iremos apresentar o esquema da demonstração da existência de soluções fracas de energia finita globalmente definidas para as equações de Navier-Stokes compressíveis para fluidos barotrópicos com $\gamma > \dfrac{3}{2}$. Estes resultados podem ser encontrados nas referências [14], [34], [28] e [19].

O teorema que apresentaremos o esquema da demonstração é enunciado da seguinte forma.

Teorema 18. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ um domínio limitado com fronteira de classe $C^{2+\nu}$, $\nu > 0$. Suponha que a pressão $p = p(\varrho)$ satisfaz a hipótese (2.16) com $\gamma > \dfrac{N}{2}$. Suponha que os dados iniciais ϱ_0, u_0 satisfazem*

$$\varrho_0 \geq 0,\ \ \varrho_0 \not\equiv 0,\ \ \varrho_0 \in L^\gamma(\Omega),\ \ \varrho_0|u_0|^2 \in L^1(\Omega). \tag{A.1}$$

Então o sistema de Navier-Stokes (2.11)-(2.12) com condição de fronteira de Dirichlet (2.17) e condição inicial (A.1) possui uma solução fraca de energia finita, no sentido da Definição 4.

Para apresentarmos o esquema da demonstração, iremos introduzir um *esquema aproximado de três níveis*, que é baseado nas seguintes alterações da equação da continuidade e do momento.

Equação da continuidade com dissipação viscosa (vanishing viscosity):

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho u) = \varepsilon \Delta_x \varrho, \quad \text{sobre } (0,T) \times \Omega,\ \varepsilon > 0; \tag{A.2}$$

com condição de fronteira do tipo Neumann homogênea

$$\nabla_x \varrho \cdot n = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega; \tag{A.3}$$

e condição inicial

$$\varrho(0) = \varrho_{0,\delta}, \quad \text{sobre } \Omega. \tag{A.4}$$

Aqui, $\varrho_{0,\delta}$ é uma função suave, estritamente positiva satisfazendo as condições de compatibilidade apropriadas.

Equação do momento com pressão artificial:

$$\begin{gathered}\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}_x(\varrho u \otimes u) + \nabla_x \left(p(\varrho) + \delta\varrho^\beta\right) + \varepsilon\nabla_x u \nabla_x \varrho = \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x u) + \varrho f \\ \text{sobre } (0,T)\times\Omega,\ \delta > 0,\ \beta > 1;\end{gathered} \tag{A.5}$$

com

$$u \equiv 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega; \tag{A.6}$$

e condição inicial

$$(\varrho u)_0 = \varrho_{0,\delta} u_0, \quad \text{em } \Omega. \tag{A.7}$$

O termo $\varepsilon\Delta_x\varrho$ com $\varepsilon > 0$, é adicionado no lado direito da equação da continuidade (2.11) com o objetivo de transformar a equação originalmente hiperbólica em uma equação parabólica.

Como o termo $\varepsilon\Delta_x\varrho$ foi adicionado na equação da continuidade (2.11), devemos modificar a equação do momento (2.12) adicionando ao lado esquerdo o termo $\varepsilon\nabla_x u\nabla_x\varrho$, com o objetivo de eliminar certos termos que surgem na desigualdade de energia (3.11).

Desta forma, obtemos o sistema

$$\partial_t\varrho + \operatorname{div}_x(\varrho u) = \varepsilon\Delta_x\varrho, \quad \text{sobre } (0,T)\times\Omega,\ \varepsilon > 0; \tag{A.8}$$

$$\partial_t(\varrho u)+\operatorname{div}_x(\varrho u\otimes u)+\nabla_x p(\varrho)+\varepsilon(\nabla_x\varrho\cdot\nabla_x)u = \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x u)+\varrho f \quad \text{sobre } (0,T)\times\Omega; \tag{A.9}$$

com condições iniciais e de fronteira

$$u = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega; \tag{A.10}$$

$$\nabla_x\varrho\cdot n = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega; \tag{A.11}$$

$$\varrho(0) = \varrho_{0,\delta},\ (\varrho u)_0 = \varrho_{0,\delta}u_0 \quad \text{em } \Omega. \tag{A.12}$$

Queremos resolver o sistema (A.8)-(A.9) pelo método de Galerkin, mas para valores "pequenos" de γ algumas dificuldades técnicas são encontradas na passagem do limite sobre o termo $\varepsilon(\nabla_x\varrho\cdot\nabla_x)u$. Então modificamos a Equação (A.9) adicionando o termo de pressão artificial $\delta\nabla_x\varrho^\beta$, com a escolha necessária de $\beta > 4$. Obtendo assim a Equação (A.5).

A.1 Aproximações de Faedo-Galerkin

Considere um espaço de Hilbert com dimensão finita

$$X_n = \operatorname{span}\{w_j\}_{j=1}^n, \tag{A.13}$$

onde as funções $w_j \in (C_c^\infty(\Omega))^N$ são linearmente independentes.

Procuramos soluções aproximadas $u_n \in C([0,T]; X_n)$ que satisfaçam a identidade integral

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \varrho u_n(t) \cdot w \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho_{0,\delta} u_0 \cdot w \,\mathrm{d}x \\
= &\int_0^\tau \int_\Omega ((\varrho u_n \otimes u_n) - \mathbb{S}(\nabla_x u_n)) : \nabla_x w + \left(p(\varrho) - \delta \varrho^\beta\right) \mathrm{div}_x\, w \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau \int_\Omega (\varrho f - \varepsilon \nabla_x u_n \nabla_x \varrho) \cdot w \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{A.14}$$

para toda função teste $w \in X_n$, e todo $\tau \in [0,T]$.

O sistema (A.14) pode ser interpretado como a projeção do sistema de equações diferenciais de dimensão infinita (A.5) em um sistema de equações diferenciais com dimensão finita em X_n. A densidade

$$\varrho = \varrho[u_n] \tag{A.15}$$

é determinada como sendo a única solução do problema (A.2), (A.3) e (A.4) considerando u_n ao invés de u.

A.1.1 Sobre a equação da continuidade regularizada

Considere o problema parabólico:

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho u) = \varepsilon \Delta_x \varrho, \quad \text{sobre } (0,T) \times \Omega; \\ \nabla_x \varrho \cdot n|_{\partial\Omega} = 0; \\ \varrho(0) = \varrho_{0,\delta}. \end{cases} \tag{A.16}$$

Onde $u \in C\left([0,T]; C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)\right)$ é uma função dada.

Existe um resultado que nos garante a existência de soluções suaves para o problema (A.16).

Lema 4 (Lema 7.1, Capítulo 7, Seção 3 de [14] e Teorema 5.1, Capítulo 3, Seção 5 de [26])**.**

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe $C^{2+\nu}, \nu > 0$. Suponha que $\varrho_{0,\delta} \in C^{2+\nu}(\overline{\Omega})$, $u \in C\left([0,T]; C_c^2(\overline{\Omega})\right)$. Além disso, suponha que $\varrho > 0$, $\varrho_{0,\delta} > 0$ e $\nabla_x \varrho_{0,\delta} \cdot n = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então o problema (A.16) possui uma única solução clássica ϱ tal que

$$\partial_t \varrho \in C\left([0,T]; C^\nu(\overline{\Omega})\right), \; \varrho \in C\left([0,T]; C^{2+\nu}(\overline{\Omega})\right).$$

O resultado do Lema 4 pode ser reformulado em termos do operador solução $u \to \varrho[u]$. Este resultado será descrito na proposição abaixo.

Proposição 8 (Proposição 7.1, Capítulo 7, Seção 3 de [14])**.**

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe $C^{2+\nu}, \nu > 0$. Suponha que $\varrho_{0,\delta}$ é uma função positiva, pertencente a classe $C^{2+\nu}(\overline{\Omega})$, e que satisfaz a condição de compatibilidade $\nabla_x \varrho_{0,\delta} \cdot n = 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, seja

$$u \mapsto \varrho[u]$$

o operador solução, que leva $u \in C\left([0,T]; C_c^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)\right)$ para a solução única ϱ de (A.16), cuja existência é garantida pelo Lema 4. Então este operador leva conjuntos limitados do $C\left([0,T]; C_c^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)\right)$ em conjuntos limitados do espaço

$$V = \left\{\varrho;\ \partial_t \varrho \in C\left([0,T]; C^\nu(\overline{\Omega})\right)\ \text{e}\ \varrho \in C\left([0,T]; C^{2+\nu}(\overline{\Omega})\right)\right\},$$

e a função

$$u \in C_c^2\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N\right) \mapsto \varrho[u] \in C^1\left([0,T] \times \overline{\Omega}\right)$$

é contínua.

A Proposição 8 será utilizada sem abrir muito os detalhes nas seções posteriores.

A.1.2 Soluções aproximadas, existência local no tempo

Vamos resolver (A.14) sobre um intervalo de tempo pequeno através de um argumento de ponto fixo, estabelecer estimativas da solução que são independentes do tamanho desse intervalo, e reproduzir indutivamente este método, para que depois de um número finito de passos, possamos obter uma solução definida no intervalo completo $[0,T]$.

Para desenvolver este método, precisaremos introduzir algumas ferramentas auxiliares.

Considere a família de operadores lineares

$$\mathcal{M}[\varrho] : X_n \to {X_n}', \quad \langle \mathcal{M}[\varrho]v, w\rangle = \int_\Omega \varrho v \cdot w \, \mathrm{d}x. \tag{A.17}$$

Aqui X_n é um espaço de Hilbert com produto interno induzido pela norma L^2.

Dado uma função ϱ estritamente positiva, o operador $\mathcal{M}$ é invertível sobre Ω e além disso

$$\|\mathcal{M}^{-1}[\varrho]\|_{\mathcal{L}({X_n}', X_n)} \leq \frac{1}{\inf_{x\in\Omega} \varrho}. \tag{A.18}$$

A partir da identidade

$$\mathcal{M}^{-1}[\varrho_1] - \mathcal{M}^{-1}[\varrho_2] = \mathcal{M}^{-1}[\varrho_2]\left(\mathcal{M}[\varrho_2] - \mathcal{M}[\varrho_1]\right)\mathcal{M}^{-1}[\varrho_1], \tag{A.19}$$

e da continuidade do operador $\mathcal{M}$, podemos deduzir que

$$\|\mathcal{M}^{-1}[\varrho_1] - \mathcal{M}^{-1}[\varrho_2]\|_{\mathcal{L}({X_n}', X_n)} \leq c(n, \underline{\varrho})\|\varrho_1 - \varrho_2\|_{L^1(\Omega)}, \tag{A.20}$$

para todo par de funções ϱ_1, ϱ_2 tais que

$$\inf_{x\in\Omega} \varrho_1,\ \inf_{x\in\Omega} \varrho_2 \geq \inf_{x\in\Omega} \varrho.$$

Podemos reformular a equação integral A.14 na seguinte forma:

$$u_n(\tau) = \mathcal{M}^{-1}[\varrho(\tau)]\left((\varrho u)^*_{0,\delta} + \int_0^\tau \mathcal{N}[u_n(t), \varrho(t)]\,\mathrm{d}t\right) \tag{A.21}$$

onde

$$(\varrho u)^*_{0,\delta} \in {X_n}',\ \langle(\varrho u)^*_{0,\delta}, w\rangle = \int_\Omega (\varrho u)_{0,\delta}\cdot w\,\mathrm{d}x$$

para toda função teste $w \in X_n$, e $\mathcal{N} : X_n \to {X_n}'$ é tal que

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{N}[u_n,\varrho], w\rangle = &\int_\Omega (\varrho u_n\otimes u_n - \mathbb{S}(\nabla_x u_n)) : \nabla_x w + \left(p(\varrho) + \delta\varrho^\beta\right)\operatorname{div}_x w\,\mathrm{d}x\\ &+ \int_\Omega (\varrho f - \varepsilon\nabla_x u_n\nabla_x\varrho)\cdot w\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{A.22}$$

onde $\varrho = \varrho[u_n]$ é unicamente determinada por u_n.

Considere o conjunto limitado $\mathcal{B}$ do espaço $C\left([0,T];X_n\right)$,

$$\mathcal{B} = \left\{v \in C\left([0,T];X_n\right);\ \sup_{t\in[0,T]}\|v(t) - u_{0,\delta,n}\|_{X_n} \leq 1\right\},$$

onde as funções $u_{0,\delta,n} \in X_n$ são unicamente determinadas por

$$\int_\Omega \varrho_{0,\delta}u_{0,\delta,n}\cdot w\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho_{0,\delta}u_{0,\delta}\cdot w\,\mathrm{d}x$$

para todo $w \in X_n$.

Finalmente, definimos o operador $\mathcal{T} : \mathcal{B} \to C\left([0,T];X_n\right)$, dado por

$$\mathcal{T}[u] = \mathcal{M}^{-1}[\varrho(\tau)]\left((\varrho u)^*_{0,\delta} + \int_0^\tau \mathcal{N}[u_n(t), \varrho(t)]\,\mathrm{d}t\right). \tag{A.23}$$

Por (A.20) e estimativas estabelecidas através da Proposição 8, concluímos que $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ dado $T = T(n)$ suficientemente pequeno. Então, pelo teorema do ponto fixo de Schauder, existe $u_n \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{T}(u_n) = u_n$, ou seja, u_n é solução da equação integral (A.14) em $[0, T(n)]$.

Este procedimento pode ser aplicado até chegarmos em $T(n) = T$, contanto que exista uma limitação de u_n independente de $T(n)$. Esta limitação existe, e o termo $\varepsilon(\nabla_x\varrho\cdot\nabla_x)u$ é utilizado exatamente nesta parte da demonstração. As contas deste resultado serão omitidas mas podem ser encontradas em [14], pág.160 até 164. Juntando este resultado com a Proposição 8, inferimos o seguinte:

Proposição 9 (Existência de soluções aproximadas - Proposição 7.3, Capítulo 7, Seção 3 de [14]).

Para todo n e T fixos, existem funções

$$\varrho_n \in C\left([0,T]; C^{2+\nu}(\overline{\Omega})\right), \ \partial_t \varrho_n \in C\left([0,T]; C^{\nu}(\overline{\Omega})\right);$$
$$u_n \in C^1\left([0,T]; X_n\right);$$

que resolvem a equação integral (A.14) *no intervalo de tempo* $[0,T]$.

A.1.3 Estimativas independentes de n

Nosso objetivo é efetuar o limite $n \to \infty$ das soluções aproximadas $[\varrho_n, u_n]$ e obter uma solução do problema (A.2) a (A.7). Para isto, precisaremos de estimativas independentes de n.

Proposição 10 (Proposição 7.4, Capítulo 7, Seção 3 de [14])**.** *Suponha que*

$$\beta > \max\left\{4, \frac{N}{2}\right\}.$$

Então as soluções aproximadas construídas na Proposição 9 satisfazem as estimativas:

$$\|\varrho_n\|_{L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega))} \leq c(\delta);$$
$$\|\varrho_n\|_{L^\infty(0,T;L^\beta(\Omega))} \leq c(\delta);$$
$$\sqrt{\varepsilon}\|\nabla_x \varrho_n\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \leq c(\delta);$$
$$\|\varrho_n\|_{L^{\beta+1}((0,T)\times\Omega)} \leq c(\varepsilon,\delta);$$
$$\|u_n\|_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right)} \leq c(\delta);$$
$$\|\sqrt{\varrho_n}u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^N))} \leq c(\delta).$$

A.1.4 Primeiro nível de soluções aproximadas

Agora iremos passar o limite $n \to \infty$ na sequência de soluções aproximadas $\{\varrho_n, u_n\}_{n=1}^\infty$ afim de obter uma solução aproximada para o problema (A.2) a (A.7). Vamos assumir que a família de funções teste $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ forma um conjunto denso no espaço $C_c^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N\right)$.

Segue-se do Problema (A.16) e das estimativas da Proposição 10, que $\partial_t \varrho_n$ é limitada no espaço $L^2\left(0,T; W^{-1,2}(\Omega)\right)$ dado $\beta \geq N$. Consequentemente, podemos utilizar o lema de Aubin-Lions para concluir que a sequência $\{\varrho_n\}_{n=1}^\infty$ possui uma subsequência (com mesma rotulação por abuso de notação) tal que

$$\varrho_n \to \varrho, \quad \text{fortemente em } L^\beta\left((0,T)\times\Omega\right), \tag{A.24}$$

onde ϱ é uma função não-negativa.

Além disso, temos que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{fracamente em } L^2\left(0,T; W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right),$$

onde u satisfaz a condição de não-deslizamento (A.6) na fronteira no sentido do traço.

Como a convergência (A.24) é forte, segue-se que

$$\varrho_n u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varrho u, \qquad \text{fraca-}^* \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^{m_\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right),$$

com $m_\infty = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1}$.

Em particular, as funções limite $[\varrho, u]$ resolvem o problema (A.16) em $\mathcal{D}'\left((0,T)\times\Omega\right)$, mais precisamente, $[\varrho, u]$ satisfaz a identidade integral abaixo:

$$\int_0^T \int_\Omega \varepsilon \nabla_x \varrho \cdot \nabla_x \varphi - \varrho \partial_t \varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \varrho u \cdot \nabla_x \varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \varrho_{0,\delta} \varphi \,\mathrm{d}x$$

para toda função teste $\varphi \in C^{1,2}\left([0,T]\times\overline{\Omega}\right)$ tal que $\varphi(T) \equiv 0$.

Podemos obter um resultado ainda melhor:

Lema 5 (Lema 7.5, Capítulo 7, Seção 3 de [14])**.**

Existe $r > 1$ e $p > 2$ tais que

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_n, \Delta_x \varrho_n \quad & \textit{são limitados em } L^r\left((0,T)\times\Omega\right); \\ \nabla_x \varrho_n \quad & \textit{é limitado em } L^p\left(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)\right); \end{aligned}$$

independentemente de n. De acordo, a função ϱ pertence a mesma classe que ϱ_n e satisfaz a Equação (A.14) para q.t.p $(t,x) \in (0,T)\times\Omega$ com condição de fronteira de Neumann homogênea no sentido do traço.

As estimativas obtidas no Lema 5, juntamente com as estimativas da Proposição 10 podem ser utilizadas para deduzir de (A.16) que as funções integrais (integral mean functions)

$$t \mapsto \int_\Omega \varrho_n u_n \cdot w_j \,\mathrm{d}x$$

formam um sistema pŕe-compacto em $C([0,T])$, para todo j fixo. Isto implica do teorema de Arzelá-Ascoli que

$$\varrho_n u_n \to \varrho u, \qquad \text{em } C\left([0,T];L^{2\gamma/(\gamma+1)}_{\text{weak}}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right).$$

De acordo com o teorema do Mergulho de Sobolev para os espaços duais, o espaço $L^{2\gamma/(\gamma+1)}(\Omega)$ é compactamente mergulhado em $W^{-1,2}(\Omega)$, e consequentemente

$$\varrho_n u_n \otimes u_n \to \varrho u \otimes u, \qquad \text{fracamente em } L^2\left(0,T;L^{c_2}(\Omega;\mathbb{R}^{N^2})\right)$$

para

$$q < c_2 \leq \frac{2N\gamma}{N+2\gamma(N-2)}.$$

As funções ϱ_n e ϱ são soluções fortes do problema (A.16), portanto elas satisfazem a igualdade de energia

$$\|\varrho_n(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon \int_0^\tau \|\nabla_x \varrho_n\|^2_{L^2(\Omega)} \, \mathrm{d}t = -\int_0^\tau \int_\Omega \mathrm{div}_x \, u_n \varrho_n^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \|\varrho_{0,\delta}\|^2_{L^2(\Omega)},$$

e

$$\|\varrho(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon \int_0^\tau \|\nabla_x \varrho\|^2_{L^2(\Omega)} \, \mathrm{d}t = -\int_0^\tau \int_\Omega \mathrm{div}_x \, u \varrho^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \|\varrho_{0,\delta}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Consequentemente, deduzimos que

$$\|\nabla_x \varrho_n\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \to \|\nabla_x \varrho\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \tag{A.25}$$

e

$$\|\varrho_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \to \|\varrho(t)\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \text{para todo } t \in [0, T],$$

o que garante a convergência forte

$$\nabla_x \varrho_n \to \nabla_x \varrho \quad \text{em } L^2((0,T) \times \Omega),$$

em particular

$$\nabla_x u_n \nabla_x \varrho_n \to \nabla_x u \nabla_x \varrho \quad \text{em } [\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)]^N.$$

Podemos agora anunciar um resultado de existência para o problema (A.2)-(A.7).

Proposição 11 (Proposição 7.5, Capítulo 7, Seção 3 de [14])**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe $C^{2+\nu}$, $\nu > 0$. Seja $\varepsilon > 0, \delta > 0$ e $\beta > \max\{N, 4, \gamma\}$ fixo. Então o problema (A.2)-(A.7) admite pelo menos uma solução $[\varrho, u]$ no seguinte sentido:*

(i) A densidade ϱ é uma função não-negativa tal que

$$\varrho \in L^r\left(0, T; W^{2,r}(\Omega)\right), \ \partial_t \varrho \in L^r\left((0,T)\times\Omega\right),$$

para um certo $r > 1$, a velocidade u pertence a classe $L^2\left(0, T; W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)\right)$, a Equação (A.2) é satisfeita q.t.p sobre $(0,T)\times\Omega$ e a condição inicial (A.3), e de fronteira (A.4) são satisfeitas no sentido dos traços. Além disso, a massa total é conservada, especificadamente

$$\int_\Omega \varrho(t) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho_{0,\delta} \, \mathrm{d}x, \qquad \textit{para todo } t \in [0, T];$$

(ii) Todos os termos da Equação (A.5) são localmente integráveis, e a equação é satisfeita em $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$, (no sentido das distribuições). Além disso, temos que

$$\varrho u \in C\left([0,T]; L^{2\gamma/(\gamma+1)}_{weak}(\Omega; \mathbb{R}^N)\right),$$

e ϱu satisfaz a condição inicial (A.7).

(iii) A desigualdade de energia (A.26) é satisfeita.

$$\int_\Omega \varrho(\tau)\left(\frac{1}{2}|u|^2 + H(\varrho) + \frac{\delta}{\beta-1}\varrho^{\beta-1}\right)(\tau)\,\mathrm{d}x + \delta\int_0^\tau\int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \int_\Omega \varrho_{0,\delta}|u_{0,\delta}|^2 + \varrho_{0,\delta}H(\varrho_{0,\delta}) + \frac{\delta}{\beta-1}\varrho_{0,\delta}^\beta\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau\int_\Omega p_b(\varrho)\,\mathrm{div}_x\,u + \varrho f\cdot u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{A.26}$$

para q.t.p $\tau \in [0,T]$.

Aqui utilizamos que $p(\varrho) = p_m(\varrho) + p_b(\varrho)$, $p_b(\varrho)$ *é tal que* $|p_b(\varrho)| \leq M$ *e* p_m *é uma função não-decrescente de* ϱ.

A.2 Dissipação da Viscosidade Artificial

O próximo objetivo é tomar $\varepsilon \to 0$ na equação modificada da continuidade (A.2). Com este objetivo , denotemos por $\varrho_\varepsilon, u_\varepsilon$ a solução do problema aproximado cuja existência foi estabelecida pela Proposição 11. Nesse ponto da demonstração, não temos a limitação de $\nabla_x\varrho_\varepsilon$, e desta forma, a compacidade forte da sequência $\{\varrho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ em $L^1((0,T)\times\Omega)$ se torna um problema a ser tratado.

De acordo com estimativas discutidas no Capítulo 5 de [14],

$$\varrho_\varepsilon \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T;L^\beta(\Omega)\right), \quad \beta > N;$$
$$u_\varepsilon \text{ é limitada em } L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)\right).$$

Pelo teorema do mergulho de Sobolev (2) e pela desigualdade de Hölder (1), segue-se que

$$\varrho_\varepsilon u_\varepsilon \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^q(\Omega;\mathbb{R}^N)), \text{ com } q > 2, \tag{A.27}$$

dado $\beta > N$.

A.2.1 Limite de dissipação da viscosidade

De acordo com as estimativas estabelecidas na Proposição 11, especificamente na desigualdade de energia (A.26), temos que

$$\varrho_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \varrho \text{ fraca-* em } L^\infty\left(0,T;L^\beta(\Omega)\right); \tag{A.28}$$
$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N);\right) \tag{A.29}$$
$$\varepsilon\,\mathrm{div}_x\left(1_\Omega\nabla_x\varrho_\varepsilon\right) \to 0 \text{ fortemente em } L^2\left(0,T;W^{-1,2}(\mathbb{R}^N)\right); \tag{A.30}$$
$$\varrho_\varepsilon \to \varrho \text{ fortemente em } C\left([0,T];L^\beta_{\mathrm{weak}}(\Omega)\right); \tag{A.31}$$
$$\varepsilon\nabla_x u_\varepsilon\nabla_x\varrho_\varepsilon \to 0 \text{ fortemente em } L^1\left(0,T;L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)\right); \tag{A.32}$$
$$(\varrho u)_\varepsilon \to \varrho u \text{ fortemente em } C\left([0,T];L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}_{\mathrm{weak}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)\right) \tag{A.33}$$
$$\varrho_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup \varrho u\otimes u \text{ fracamente em } L^2\left(0,T;L^{c_2}(\Omega;\mathbb{R}^{N^2})\right) \tag{A.34}$$

dados $\varrho_\varepsilon, u_\varepsilon$ estendidos em $\mathbb{R}^N$ e iguais a zero fora de Ω, e $c_2 > 1$.

O próximo passo é obter a convergência forte da sequência de densidades $\{\varrho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ em $L^1((0,T)\times\Omega)$. Estes cálculos podem ser encontrados em [14] páginas 181 à 185. Os resultados são então resumidos na seguinte proposição.

Proposição 12 (Proposição 7.6, Capítulo 7, Seção 3 de [14])**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe $C^{2+\nu}$, $\nu > 0$. Além disso, seja*

$$\beta > \max\{N, 4, \gamma\}, \text{ e } \delta > 0$$

dados. Então existem soluções aproximadas ϱ, u satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) A densidade é uma função não-negativa e pertence a classe

$$\varrho \in C\left([0,T]; L^\beta_{weak}(\Omega)\right), \quad \varrho(0) = \varrho_{0,\delta};$$

A velocidade u pertence a classe $L^2\left(0,T; W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right)$. O par $[\varrho, u]$ é uma solução renormalizada da equação da continuidade (2.11) sobre $(0,T)\times\mathbb{R}^N$, dado que são estendidas iguais a zero fora de Ω.

(ii) As funções ϱ, u satisfazem a equação do momento (2.12) no sentido das distribuições, isto é, em $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$, com

$$p = p(\varrho) + \delta\varrho^\beta.$$

Além disso, $\varrho u \in C\left([0,T]; L^{\frac{2\gamma}{(\gamma+1)}}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right)$, e satisfaz a condição inicial

$$(\varrho u)(0) = \varrho_{0,\delta} u_{0,\delta}.$$

(iii) A desigualdade de energia

$$\int_\Omega \varrho(\tau)\left(\frac{1}{2}|u|^2 + H(\varrho) + \frac{\delta}{\beta-1}\varrho^{\beta-1}\right)(\tau)\,\mathrm{d}x + \delta\int_0^\tau\int_\Omega \mathbb{S}(\nabla_x u) : \nabla_x u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$
$$\leq \int_\Omega \varrho_{0,\delta}|u_{0,\delta}|^2 + \varrho_{0,\delta}H(\varrho_{0,\delta}) + \frac{\delta}{\beta-1}\varrho_{0,\delta}^\beta\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau\int_\Omega \varrho f\cdot u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

é válida para q.t.p $\tau \in [0,T]$.

A.2.2 Dissipação da pressão artificial

O último objetivo é fazer o parâmetro δ tender à zero na Equação (A.5). Denote por $[\varrho_\delta, u_\delta]$ a solução aproximada construída pela Proposição 12. Utilizamos as ferramentas dos capítulos 3 e 5 de [14] para obter estimativas uniformes independentes de δ. Pela desigualdade de energia enunciada na Proposição 12, temos que

$$\varrho_\delta \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T; L^\gamma(\Omega)\right); \tag{A.35}$$

$$\sqrt{\varrho_\delta}u_\delta \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)\right); \tag{A.36}$$

$$u_\delta \text{ é limitada em } L^2\left(0,T; W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right). \tag{A.37}$$

Tendo estabelecido as estimativas anteriores, podemos mostrar que

$$\varrho_\delta \to \varrho \text{ fortemente em } C\left([0,T]; L^{\gamma}_{\text{weak}}(\Omega)\right); \tag{A.38}$$

$$u_\delta \rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^2\left(0,T; W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right); \tag{A.39}$$

$$\varrho_\delta u_\delta \overset{*}{\rightharpoonup} \varrho u \text{ fraca-}^* \text{ em } L^\infty\left(0,T; L^{m_\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N)\right), \text{ com } m_\infty = \frac{2\gamma}{\gamma+1}. \tag{A.40}$$

$$\varrho_\delta u_\delta \to \varrho u \text{ fortemente em } C\left([0,T]; L^{m_\infty}_{\text{weak}}(\Omega,\mathbb{R}^N)\right); \tag{A.41}$$

$$\varrho_\delta u_\delta \otimes u_\delta \rightharpoonup \varrho u \otimes u \text{ fracamente em } L^2\left(0,T; L^{c_2}(\Omega;\mathbb{R}^{N^2})\right), \text{ onde } c_2 > 1; \tag{A.42}$$

$$\varrho u(0,x) = \varrho_0 \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{A.43}$$

Utilizando um argumento de limitação das medidas de defeito (oscillations defect measures), obtemos as convergências fortes

$$\varrho_\delta \to \varrho \text{ fortemente em } L^1((0,T)\times\Omega); \tag{A.44}$$

$$\varrho_\delta \to \varrho \text{ fortemente em } C([0,T]; L^1(\Omega)). \tag{A.45}$$

Finalmente, as funções limite ϱ, u satisfazem a equação da continuidade

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho u) = 0, \quad \text{em } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^N); \tag{A.46}$$

a equação do momento

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}_x(\varrho u \otimes u) + \nabla_x p = \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x u) + \varrho f, \quad \text{em } \mathcal{D}'((0,T\times\Omega)); \tag{A.47}$$

e a desigualdade de energia

$$\int_\Omega \varrho(\tau)\left(\frac{1}{2}|u|^2 + H(\varrho)\right)(\tau)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \varrho_0|u_0|^2 + \varrho_0 H(\varrho_0)\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau\int_\Omega \varrho f\cdot u\,\mathrm{d}x. \tag{A.48}$$