



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

LUCAS DE SOUZA ALMEIDA

Imersões Através de Spinors

Campinas

2022

Lucas de Souza Almeida

Imersões Através de Spinores

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rafael de Freitas Leão

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Lucas de Souza Almeida e orientada pelo Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Sylvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

AL64i Almeida, Lucas de Souza, 1997-
Imersões através de spinores / Lucas de Souza Almeida. – Campinas, SP :
[s.n.], 2022.

Orientador: Rafael de Freitas Leão.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Imersões (Matemática). 2. Isometria (Matemática). 3. Geometria spin. 4.
Fibrados (Matemática). 5. Conexões (Matemática). 6. Operadores de Dirac. I.
Leão, Rafael de Freitas, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Immersions through spinors

Palavras-chave em inglês:

Immersions (Mathematics)

Isometrics (Mathematics)

Spin geometry

Fiber bundles (Mathematics)

Connections (Mathematics)

Dirac operators

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Rafael de Freitas Leão [Orientador]

Jayme Vaz Júnior

Samuel Augusto Wainer

Data de defesa: 29-04-2022

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-3498-1903>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/1654880170803890>

**Dissertação de Mestrado defendida em 29 de abril de 2022 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO

Prof(a). Dr(a). JAYME VAZ JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). SAMUEL AUGUSTO WAINER

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

A Deus, por me dar saúde e sabedoria para seguir sempre em frente. Obrigado por ser a minha força e o meu guia em todos os momentos.

Aos meus pais, Rosélia Pereira e Ari Francisco, e meu irmão, Josué Almeida, que sempre estão ao meu lado me auxiliando em todos os momentos.

Ao meu orientador, Rafael Leão, pelo apoio, paciência e, sobretudo, por acreditar em mim.

A todos os meus amigos que, direta ou indiretamente, me ajudaram a caminhar durante todo o curso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar a formulação através de geometria spin de um teorema clássico de superfície, que garante a existência de imersões isométricas. Para isso, é apresentado a teoria de fibrados e conexões, estrutura spin e operador de Dirac.

Palavras-chave: Imersões isométricas, geometria spin, fibrados e conexões, estrutura spin, operador de Dirac.

Abstract

This work has as its goal to present the formulation through spin geometry of a classical manifold theorem, which guarantees the existence of isometric immersions. To do that, it is presented the theory of bundle and connections, spin structure and Dirac operator.

Keywords: Isometric immersions, spin geometry, bundle and connections, spin structure, Dirac operator

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Classificação das álgebras $Cl_{n,0}$, $Cl_{0,n}$ e Cl_n , para $1 \leq n \leq 8$	47
Tabela 2	–	Classificação das álgebras $Cl_{r,s}$, para $0 \leq r, s \leq 8$	48
Tabela 3	–	Classificação das álgebras $Cl_{r,s}$ de acordo com os valores de r e s	49
Tabela 4	–	Classificação de $Cl_n, v_n = v_{n,0}, v_n^{\mathbb{C}}, d_n, d_n^{\mathbb{C}}$ para $1 \leq n \leq 8$	54

Sumário

Introdução	11
1 Variedade Riemanniana	12
1.1 Variedades Suaves	12
1.2 Campos Vetoriais	18
1.3 Variedades Riemannianas	21
2 Álgebra de Clifford	25
2.1 Álgebra de Clifford	25
2.1.1 Grupos Pin e Spin	32
2.1.1.1 As álgebras Cl_n e $C_{r,s}$	36
2.1.2 Classificação	44
2.1.3 Representações	49
2.1.3.1 Estrutura quase complexa	49
2.1.3.2 Representação das Álgebras de Clifford Cl_n e Cl_n	51
3 Fibrados e Conexões	60
3.1 Noções Básicas de Grupo de Lie e Álgebra de Lie	60
3.2 Fibrados Principais	63
3.3 Fibrados Vetoriais	69
3.3.1 Operações com fibrados vetoriais	74
3.3.2 Produto interno	78
3.3.3 Orientação no fibrado vetorial	81
3.4 Fibrados Associados	82
3.5 Conexões	85
3.5.1 Conexões em fibrados principais	85
3.5.2 Conexões Riemannianas	91
3.5.3 1-forma de Conexão	92
4 Estrutura Spin	95
4.1 Fibrados de Clifford e Operador de Dirac	96
4.1.1 Conexão em Fibrados Spinores	98
5 Imersões Isométricas	105
6 Reformulação do teorema clássico de superfícies via geometria spin	111
REFERÊNCIAS	118

Introdução

Um dos resultados mais clássicos da geometria diferencial, quando nosso objeto de estudo são as superfícies, é a garantia local de imersões isométricas da superfície numa variedade de dimensão 3. Neste trabalho, estamos analisando esse mesmo resultado mas para variedade spin de dimensão 2, i.e, orientada cujos fibrados tangentes admitem uma estrutura spin.

Essa análise consiste em mostrar a seguinte equivalência:

1. Dada uma imersão isométrica $j : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde M é uma variedade spin de dimensão 2, então podemos encontrar uma solução para a equação diferencial

$$D\varphi = H\varphi, \tag{1}$$

Onde D é o operador de Dirac, H a curvatura média de M e φ um campo spinor.

2. Dada uma solução para equação diferencial 1 e M uma variedade spin de dimensão 2, então existe uma imersão de M à \mathbb{R}^3 .

Essa equivalência é apresentada no trabalho de ([FRIEDRICH, 1998](#)).

Para isso, dividimos este trabalho da seguinte maneira:

No capítulo 1, relembramos brevemente os conceitos básicos de variedades riemannianas. No capítulo 2, está concentrada a teoria de Álgebra de Clifford, pois precisamos de suas propriedades para definir grupo spin e sua representação, para posteriormente definir estrutura spin.

No capítulo 3, elucidamos a teoria de fibrados e conexões, uma vez que a estrutura spin produz, juntamente com os módulos sobre a Álgebra de Clifford, os fibrados spinores, que são construídos de forma semelhante a fibrados associados, e as conexões, dentre outras características, são importantes para definir o operador de Dirac e a segunda forma fundamental induzida por imersões. No capítulo 4 definimos a estrutura spin, como são construído os fibrados de Clifford e spinores, além disso, definimos o operador de Dirac, que é o operador diferencial D , da equação 1.

No capítulo 5, mostramos como é definida a segunda forma fundamental e as equações de Gauss-Codazzi, através de imersões para, posteriormente, apresentar o teorema clássico de subvariedades imersas. Finalmente, no capítulo 6, fizemos uma reformulação desse teorema via spinores, que consiste basicamente na equivalência apresentada acima.

1 Variedade Riemanniana

Neste capítulo são abordados alguns resultados básicos de variedades suaves, principalmente os que concernem a métrica riemanniana, uma vez que é um dos objetos mais explorados ao longo deste trabalho. Toda a teoria aqui apresentada e os passos omitidos podem ser encontrados em (CARMO, 2019), (LEE, 2013) e (LEE, 2006).

1.1 Variedades Suaves

Definição 1. *Uma variedade suave de dimensão n é um espaço topológico M e uma família de homeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ com U_α aberto, satisfazendo as seguintes condições:*

1. $M = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$, i.e., a família de abertos $\{U_\alpha\}$ forma uma cobertura de M .
2. Para cada par α, β , com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, as composições

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

são suaves. Essas composições são chamadas de funções de transição.

3. A família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é chamada de atlas suave.

Exemplo 1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n com uma base $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$. Então, dado $v \in V$, existem $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ tal que $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$. Defina a aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow V \\ (v_1, \dots, v_n) &\mapsto \sum_i v_i e_i, \end{aligned} \tag{1.1}$$

φ é claramente um homeomorfismo, cuja inversa é dada por $\varphi^{-1}(v) = (v_1, \dots, v_n)$. Considere $\tilde{\beta} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ uma outra base de V . Assim, essa base nos fornece mais um homeomorfismo $\tilde{\varphi}(v_1, \dots, v_n) = \sum_j v_j \tilde{e}_j$, então existe uma matriz invertível $A = (A_i^j)$ tal que $e_i = \sum_j A_i^j \tilde{e}_j$ para cada i . A função de transição entre duas cartas é dada por $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi(v_1, \dots, v_n) = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$, determinada por

$$\sum_{j=1}^n \tilde{v}_j \tilde{e}_j = \sum_{i=1}^n v_i e_i = \sum_{i,j=1}^n v_i A_i^j \tilde{e}_j. \tag{1.2}$$

Então, $\tilde{v}_j = \sum_i A_i^j v_i$, onde A_i^j é uma matriz invertível, logo a composição $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ é um difeomorfismo. Logo, independente da base que for considerada sempre conseguimos cartas compatíveis, portanto, a coleção de todas essas cartas definem uma estrutura suave de variedade em V .

Proposição 1. *Seja M uma variedade suave e $U \subset M$ aberto. Então U é uma variedade suave de mesma dimensão de M .*

Demonstração. Basta tomar o atlas de U como $\{(U \cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{U \cap U_\alpha})\}$, onde $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é uma carta em M para cada α . A topologia em U é herdada de M e todos os itens da definição 1 são facilmente satisfeitos. \square

Exemplo 2. *Seja $M = \mathbb{R}(n)$ o conjunto das matrizes de ordem n , note que M é um espaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^{n^2} , então possui naturalmente a estrutura de variedade suave. Agora, considere a aplicação determinante dada por*

$$\det : M \longrightarrow \mathbb{R},$$

como \det é uma aplicação contínua, $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ é um conjunto aberto em M e é definido por

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M : \det(A) \neq 0\}.$$

Logo, $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ é um subconjunto aberto de M , portanto, pela proposição 1, $GL_n(\mathbb{R})$ é uma variedade suave de dimensão n^2 .

Exemplo 3. *Sejam M_1 e M_2 duas variedades suaves de dimensão n e m , respectivamente. Então $M_1 \times M_2$ é uma variedade suave de dimensão $n + m$, com as cartas da forma $(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$, na qual a compatibilidade suave de duas cartas são dadas por*

$$(\psi_1 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \varphi_2^{-1}),$$

que claramente é suave, pois as composições são suaves.

Definição 2. *Sejam M e N variedades suaves m e n dimensionais, respectivamente. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é suave em $x \in M$ se dada uma carta $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, vizinhança coordenada de $f(x)$, existe uma carta $\psi : V \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ em x tal que $f(V) \subset U$ e a aplicação*

$$\tilde{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V), \quad (1.3)$$

é suave. Dizemos que \tilde{f} é a representação de f em coordenadas.

Observação 1. Na definição 2 a aplicação f não depende da escolha das cartas. Para observar esse fato basta considerar outras duas cartas e encontrar a representação em coordenadas de f nessas cartas e, depois, é só fazer composições convenientes com as cartas iniciais, restritas ao mesmo aberto no domínio, sabendo que o atlas é maximal, obtemos o resultado desejado. Os cálculos explícitos desse resultado podem ser visto em (LEE, 2013).

Como uma variedade M possui uma estrutura suave, podemos falar de espaço tangente à M em qualquer ponto. Para isso, considere o conjunto $C^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^\infty\}$ e defina aplicação $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que a aplicação X é uma derivação em $x \in M$ se satisfaz a regra do produto, i.e,

$$X(fg) = f(x)X(g) + g(x)X(f) \quad (1.4)$$

para cada $f, g \in C^\infty(M)$. O conjunto de todas as derivações de $C^\infty(M)$ em x , que é denotado por T_xM , é chamado de espaço tangente a M em x , que claramente é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Como todo espaço vetorial de dimensão finita tem uma base, e pelo fato de existir um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow M$ temos que $T_xM \cong \mathbb{R}^n$, assim uma base de T_xM pode ser dada por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_x \right\}$, associada a base canônica de \mathbb{R}^n . Onde $(x^1, \dots, x^n) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x))$ são as funções coordenadas da carta (U, φ) .

Sabendo disso, note que, dado $X \in T_xM$ e $f \in C^\infty(M)$, podemos escrever $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$, onde X^i são funções suaves de $U \subset M$ em \mathbb{R} e, com isso, obtemos

$$\begin{aligned} X(f) &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x (f) \\ &= X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right) (f) \\ &= X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_x. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Observação 2. Observe que, dado duas cartas em M , digamos (U, φ) e (V, ψ) com $U \cap V \neq \emptyset$, então temos duas representações para X em T_xM , uma vez que cada base depende da escolha das coordenadas locais, mas pela matriz mudança de base sempre é possível descrever uma base em função de outra. De fato, considere (x^i) e (\tilde{x}^j) as coordenadas locais de (U, φ) e (V, ψ) respectivamente, então

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \quad e \quad X = \tilde{X}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_x, \quad (1.6)$$

são as expressões de X em duas cartas diferentes, mas para que 1.6 faça sentido é necessário usar a mudança de base de uma coordenada a outra, que pode ser encontrado com mais detalhes em (LEE, 2013). De modo geral, essa mudança de base nos permite escrever $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_x = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$, portanto, $\tilde{X}^j = \sum_i X^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}$.

Entretanto, a função $X(f)$ definida em 1.5 não depende da escolha do sistema de coordenadas, uma vez que é uma função suave.

Além disso, podemos definir vetores tangentes ao longo de uma curva suave em M , assim como ocorre em \mathbb{R}^n . Então, dada uma variedade suave em M , definimos uma *curva suave* em M como uma aplicação diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, onde $\epsilon > 0$.

Suponha que $\gamma(0) = x \in M$. O *vetor tangente* à curva γ em $t = 0$ é a função $\dot{\gamma}(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\dot{\gamma}(0)f = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = (f \circ \gamma)'(0), \quad (1.7)$$

para cada $f \in C^\infty(M)$. Chamamos γ de curva integral de M .

Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ temos que $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ e dizemos que $T_{\gamma(t)}M$ é o espaço tangente ao longo da curva γ .

Agora, considere (U, φ) uma carta com as funções coordenadas dadas por (x^1, \dots, x^n) . Se $\gamma(0)$ está em U , existe um número $0 < \delta < \epsilon$ tal que $\gamma(-\delta, \delta) \subset U$, com isso temos uma representação em coordenadas para γ restrita ao intervalo $(-\delta, \delta)$, dada por $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$, logo

$$\dot{\gamma}(0) = \left. \frac{d\gamma^i}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\gamma(0)} \quad (1.8)$$

e a expressão dada em 1.7, pode ser justificada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(0) &= \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{\gamma(0)} \left. \frac{d\gamma^i}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left(\sum_i \dot{\gamma}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \\ &= \dot{\gamma}(0)f. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Lema 1. *Seja $x \in M$ e $X \in T_x M$. Então existe uma curva integral $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma(t_0) = x$ e $\dot{\gamma}(t_0) = X$, para algum $t_0 \in I$.*

A demonstração desse lema pode ser encontrada em (LEE, 2013).

Definição 3. *Seja $F : M \rightarrow N$ um função entre duas variedades suaves, M e N . A diferencial de F em $x \in M$ é dada pela aplicação linear*

$$dF_x : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N \quad (1.10)$$

A aplicação dF_x também é conhecida como o *pushforward* de F em x e pode ser denotada por F_{*x} .

Dado um vetor $X \in T_x M$ e uma curva integral $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = X$ temos que

$$dF_x(X) = dF_x(\dot{\gamma}(0)) = (F \circ \gamma)'(0) \quad (1.11)$$

onde $F \circ \gamma : I \rightarrow N$ é uma curva diferenciável em N .

Uma das definições centrais deste trabalho será definida agora.

Definição 4. *Seja $F : M \rightarrow N$ uma função diferenciável entre duas variedades e $\dim M \leq \dim N$. Dizemos que F é uma imersão em $x \in M$ se $dF_x : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$ é uma aplicação injetora.*

F é uma imersão em M quando $dF_x : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$ é injetiva para todo $x \in M$.

Além disso, temos uma outra definição importante para alguns resultados em variedades suaves, que é a seguinte:

Definição 5. *Seja $F : M \rightarrow N$ uma função diferenciável entre duas variedades e $\dim M \geq \dim N$. Dizemos que F é uma submersão em $x \in M$ se $dF_x : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$ é uma aplicação sobrejetora.*

F é uma submersão em M quando $dF_x : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$ é sobrejetora para todo $x \in M$.

Resultados clássicos ao trabalharmos com o espaço \mathbb{R}^n podem ser generalizados para variedades suaves. Como por exemplo, o teorema da função inversa e o do posto global.

Teorema 1 (Teorema da Função Inversa para Variedades). *Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave entre duas variedades suaves. Se $dF_x : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$ é um isomorfismo linear, então F é um difeomorfismo local*

Demonstração. A demonstração se resume em aplicarmos a definição 2 e depois usar o teorema da função inversa de \mathbb{R}^n , uma vez que composições de isomorfismo ainda continua sendo um isomorfismo. \square

Teorema 2. *Sejam $F : M \rightarrow N$ e $G : N \rightarrow P$ funções suaves entre variedades. Então $G \circ F$ é suave.*

Corolário 1. *Se $F : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, então $dF_x : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$ é um isomorfismo, para cada $x \in M$.*

Teorema 3 (Teorema do Posto Global). *Sejam M e N variedades suaves e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave de posto constante. Então as seguintes premissas são verificadas*

1. *Se F é sobrejetora então é uma submersão.*
2. *Se F é injetora então é uma imersão.*
3. *Se F é bijetiva então é um difeomorfismo.*

Esse fato é usado no capítulo 3, de fibrados e conexões, quando assumimos que a projeção de um fibrado vetorial é uma submersão.

Definição 6. *Seja M uma variedade suave e N uma subvariedade de M . Definimos a codimensão de N por $\text{codim}(N) = \dim(M) - \dim(N)$.*

Proposição 2. *Sejam M e N variedades suaves e $F : M \rightarrow N$ uma submersão suave, então para cada $p \in N$ temos $Q := F^{-1}(p) \neq \emptyset$ e possui uma estrutura de subvariedade mergulhada em M tal que $\dim(Q) = \text{codim}(N)$.*

Exemplo 4. *Seja $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ o espaço vetorial das matrizes simétricas de ordem n e $GL_n(\mathbb{R})$. Considere a aplicação*

$$F : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R}),$$

definida por $F(A) = AA^t - I_n$, onde I_n é a matriz identidade de orden n .

Note que, para cada $A \in GL_n(\mathbb{R})$, o diferencial de F em A é dado pela aplicação $dF_A : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ tal que, para cada $H \in M_n(\mathbb{R})$, temos que

$$\begin{aligned} dF_A(H) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} F(A + sH) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} ((A + sH)(A^t + sH^t) - I_n) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (AA^t + sAH^t + sHA^t + s^2HH^t - I_n) \\ &= AH^t + HA^t. \end{aligned} \tag{1.12}$$

dF_A para cada $A \in F^{-1}(0) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : AA^t = I_n\} = O(n)$ é sobrejetora. De fato, considere $Y \in GL_n(\mathbb{R})$ e escolha $A \in F^{-1}(0)$, então

$$\begin{aligned} dF_A \left(\frac{1}{2}YA \right) &= \frac{1}{2} (A(YA)^t + YAA^t) \\ &= \frac{1}{2} (AA^tY + YAA^t) \\ &= Y. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dessa forma, F é um submersão em $F^{-1}(0)$. Logo, $O(n)$ é uma variedade suave. Além disso,

$$\begin{aligned} \dim(O(n)) &= \text{codim}(S_n(\mathbb{R})) \\ &= \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(S_n(\mathbb{R})) \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Observação 3. No exemplo 4, usamos o fato de que $GL_n(\mathbb{R})$ é um aberto de $M_n(\mathbb{R})$, assim $T_x GL_n(\mathbb{R}) = T_x M_n(\mathbb{R})$, para cada $x \in GL_n(\mathbb{R})$ e $S_n(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial, então como variedade, temos que $T_x(S_n(\mathbb{R})) \cong S_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 5. Pelo exemplo 4, podemos mostrar que $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ é uma variedade suave tal que $\dim(O(n)) = \dim(SO(n))$. Note que, $SO(n)$ é uma componente conexa de $O(n)$ e toda componente conexa é um subconjunto aberto. Logo, pela proposição 1 temos o resultado esperado.

1.2 Campos Vetoriais

Para definirmos campos vetoriais numa variedade precisamos do conceito de fibrado tangente, mas como este é apresentado no capítulo 3 de maneira detalhada, colocaremos apenas a definição mais geral de fibrado tangente.

Definição 7. Seja M uma variedade suave. Definimos o fibrado tangente de M como a união disjunta de todos os espaços tangentes à M , i.e

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M. \tag{1.15}$$

Nesta seção vamos definir um campo vetorial em M e como podemos produzir um novo campo a partir de outros dois.

Neste primeiro momento, estamos preocupados apenas em mostrar como o campo vetorial se relaciona com a variedade, sem precisar introduzir a estrutura de variedade e de fibrado vetorial, uma vez que estes serão explorados no capítulo 3.

Definição 8. Seja M uma variedade suave. Um campo vetorial X em M é uma aplicação suave que a cada ponto $x \in M$ associa um vetor $X(x) \in T_x M$.

Observação 4. Denotamos o espaço de todos os campos vetoriais como $\Gamma(TM) = \{Y : M \rightarrow TM : Y(x) \in T_x M \text{ e } Y \in C^\infty\}$. Essa notação será conveniente quando apresentarmos seções de um fibrado vetorial.

Podemos escrever cada campo X em coordenadas locais. De fato, considere $\varphi : U \rightarrow M$ uma carta local ao redor do ponto $x \in M$, então:

$$X(x) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x. \quad (1.16)$$

Onde X^i são funções com valores reais em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ é uma base de $T_x M$ associada a carta φ . Neste caso, X é suave quando cada coordenda X^i é uma função suave.

Assim como vimos na equação 1.5, sabemos que os vetores tangentes agem em $C^\infty(M)$ como derivações, se $f \in C^\infty(M)$, obtemos o resultado igual para campos vetoriais

$$(Xf)(p) = \sum_i^n X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \quad (1.17)$$

Que também não depende da escolha da carta coordenada.

Um questionamento razoável de ser feito é: dado dois campos vetoriais X e Y sobre M , como podemos gerar um novo campo a partir deles? Primeiro, observar que, dado $f \in C^\infty(M)$ podemos definir as funções iteradas $X(Yf)$ e $Y(Xf)$ que, em geral, não são campos vetoriais, mas obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3. *Sejam X e Y campos vetoriais em M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in C^\infty(M)$, $Z(f) = (XY - YX)(f)$.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que se Z existe, então ele é único. Assumindo que Z existe, tome $x \in M$ e $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em x , onde $\varphi = (x^i)$ são as componentes coordenadas de φ . Então,

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ e } Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

são expressões locais de X e Y nessa parametrização. Dessa forma, para todo $f \in C^\infty(M)$, segue que

$$\begin{aligned} XY(f) &= X \left(\sum_j Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \\ YX(f) &= Y \left(\sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \sum_{i,j} Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Logo, a expressão de Z em coordenadas locais é dada por:

$$Z(f) = XY(f) - YX(f) = \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}. \quad (1.19)$$

O que mostra a unicidade de Z .

Para provar a existência, defina Z_α em cada vizinhança coordenada U_α de um atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de M pela expressão dada em 1.19. Por unicidade, para cada α, β com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos que $Z_\alpha = Z_\beta$. Sabendo que a família $\{U_\alpha\}$ forma uma cobertura de abertos para M , podemos definir Z em toda variedade M . \square

Definição 9. *O campo vetorial Z definido na proposição 3 é chamado de colchete de Lie.*

Temos que uma representação em coordenadas do colchete de Lie de dois campos vetoriais X e Y em M , é da seguinte forma: Considere $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ as expressões em coordenadas de X e Y em termos das coordenadas locais (x^i) de M . Então, obtemos a seguinte expressão em coordenadas:

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (1.20)$$

Observação 5. *Note que, pela representação de $[X, Y]$ em coordenadas dada pela expressão 1.20, obtemos, pela suavidade de X^i e Y^j , que*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \equiv 0, \quad \forall i, j \quad (1.21)$$

O colchete de Lie, para cada $X, Y, Z \in \Gamma(M)$, satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para $m, n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} [mX + nY, Z] &= m[X, Z] + n[Y, Z] \\ [Z, mX + nY] &= m[Z, X] + n[Z, Y]. \end{aligned}$$

2. $[X, Y] = -[Y, X]$.

3. (Identidade de Jacob)

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0. \quad (1.22)$$

4. Para $f, g \in C^\infty(M)$,

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

Segue abaixo um exemplo de como se comporta o colchete de Lie quando consideramos $M = \mathbb{R}^3$. Tome $X, Y \in \Gamma(\mathbb{R}^3)$, definidos por

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \cos y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{e} \quad Y = z \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}.$$

Usando o resultado em 1.21 e as propriedades de $[X, Y]$, obtemos

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \left[x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \cos y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, z \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right] \\
&= \left[x^2 \frac{\partial}{\partial x}, z \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[x^2 \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right] + \left[\cos y \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial y} \right] - \\
&\quad - \left[\cos y \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial z}, z \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right] \\
&= -2x \frac{\partial}{\partial x} + (1 - z \operatorname{sen} y) \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Toda variedade suave é Hausdorff e segundo contável, produzindo um dos resultados mais usados em variedades para mostrar a existência global de determinados objetos, que a priori são definidos apenas localmente, na variedade, como por exemplo, a de uma métrica riemanniana. Esses resultados podem ser consultados em (LEE, 2013).

Definição 10. *Seja M uma variedade suave e uma família de abertos V_α em M com $M = \bigcup_\alpha V_\alpha$. Dizemos que $\{V_\alpha\}$ é localmente finita se para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U tal que o conjunto $\{\alpha : U \cap V_\alpha \neq \emptyset\}$ é finito.*

Definição 11. *Seja $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ um função suave. Definimos o suporte de f pelo conjunto $\overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$ e denotamos por $\operatorname{supp} f$.*

Definição 12. *Dizemos que uma família $\{f_\alpha\}$ de funções suaves $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma partição da unidade suave subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$ se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para todo α , o suporte compacto de f_α está contido em uma vizinhança coordenada V_α de um atlas $\{V_\beta, \varphi_\beta\}$ de M .*
2. *A família $\{V_\alpha\}$ é localmente finita.*
3. $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$, para todo $x \in M$.

Observação 6. *No item 3 da definição 12, o somatório está bem definido, pois $f_\alpha(x) \geq 0$ para uma quantidade finita de índices.*

1.3 Variedades Riemannianas

Nesta seção vamos mostrar como munir uma variedade suave com uma métrica e alguns resultados importantes que veremos mais adiante neste trabalho.

Definição 13. *Seja M uma variedade suave de dimensão n . Uma métrica riemanniana é um 2-tensor covariante g com as seguintes propriedades:*

1. g é simétrico, $g_x(X, Y) = g_x(Y, X)$ para cada $x \in M$ e $X, Y \in T_x M$.
2. g é definido positivamente, i.e., $g_x(X, X) > 0$ para cada $x \in M$ e $X \in T_x M$.

Definição 14. Dizemos que o par (M, g) é uma variedade riemanniana.

Observação 7. Lembrando da teoria tensorial, que um 2-tensor é do tipo $(0, 2)$, ou seja, $g \in T_0^2(T_x M) = (T_x M \otimes T_x M)^*$ ou, equivalentemente, dos isomorfismos clássicos de tensores, podemos ver g como uma forma bilinear que satisfaz as condições 1) e 2) da definição 13, mais especificamente, um produto interno.

Assim como vimos em álgebra linear, podemos determinar as componentes de g em função dos vetores de uma base do espaço tangente a um ponto de M associado a uma carta coordenada. De fato, considere $x \in M$ e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta coordenada ao redor de x . Tome $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_x \right\}$ uma base de $T_x M$, onde $\varphi = (x^i)$. Então, sempre podemos definir localmente as funções $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \right). \quad (1.24)$$

Note que g_{ij} é suave, pois $T_x M$ varia suavemente com x .

Além disso, $g_{ij}(x)$ pode ser escrito em coordenadas locais em funções dos covetores tangentes, $\{dx_1|_x, \dots, dx_n|_x\}$, que é uma base do espaço dual $(T_x M)^*$ com $dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}$. Portanto,

$$g_x = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i|_x \otimes dx_j|_x. \quad (1.25)$$

A proposição a seguir é uma forma prática de aplicarmos o conceito e propriedades de uma partição da unidade suave, definida em 12.

Proposição 4. Toda variedade suave M admite uma métrica riemanniana.

Demonstração. Considere $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ um atlas de M e $\{f_\alpha\}$ a partição da unidade subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$. Então, para cada U_α podemos definir uma métrica via cartas locais φ_α , uma vez que $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$. De fato, dado $x \in U_\alpha$ tome $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_x \right\}$ uma base de $T_x M$ nas coordenadas locais de φ_α . Assim, dado $X, Y \in T_x M$ temos que $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$ e $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ e definimos o produto interno de X e Y como

$$g^\alpha(X, Y) = \sum_i^n X^i Y^i \quad (1.26)$$

Claramente g^α é uma métrica riemanniana em U_α tal que $g_{ij}^\alpha(x) = \delta_{ij}$. Para estender g^α à g em todo M basta usar a partição $\{f_\alpha\}$ pondo

$$g_x = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x)g^{\alpha}(x), \quad (1.27)$$

para cada $x \in M$. g é definido por uma soma finita de produtos internos, logo é um produto interno em T_xM . \square

Exemplo 6. *O exemplo mais simples de observar uma variedade riemanniana é quando $M = \mathbb{R}^n$, pois neste caso basta considerar a métrica euclidiana. Se escolhermos a base canônica de \mathbb{R}^n dada pelo conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ temos que $g_{ij}(x) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.*

Exemplo 7 (Métrica Produto). *Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) duas variedades riemannianas, então a métrica produto $g = g_1 \oplus g_2$ na variedade produto $M_1 \times M_2$ é dada por*

$$g_{(x,y)}((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)) = (g_1)_x(X_1, X_2) + (g_2)_y(Y_1, Y_2) \quad (1.28)$$

para todos $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in T_xM_1 \oplus T_yM_2 \cong T_{(x,y)}(M_1 \times M_2)$. A matriz associada a métrica g é dada por

$$[g] = \begin{bmatrix} [g_1] & 0 \\ 0 & [g_2] \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Onde $[g_1]$ e $[g_2]$ são as matrizes associadas às métricas g_1 e g_2 , cujas entradas são $(g_1)_{ij}$ e $(g_2)_{ij}$, respectivamente.

Definição 15. *Sejam M e N variedades riemannianas. Um difeomorfismo $F : M \rightarrow N$ é uma isometria se para cada $x \in M$, temos que*

$$g_x(X, Y) = g_{F(x)}(dF_x X, dF_x Y) \quad (1.30)$$

para todos $X, Y \in T_xM$. Neste caso, dizemos que M e N são variedades isométricas.

Dizemos que F é uma *isometria local* se para todo $x \in M$ existe uma vizinhança V de x em M tal que $F : V \rightarrow F(V)$ é uma isometria.

Definição 16. *Sejam M uma variedade suave, (\bar{M}, \bar{g}) uma variedade riemanniana e $F : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão. A métrica induzida por F em M é denotada por $g = F^*\bar{g}$, onde F^* é o pullback de F , e definida como*

$$g_x(X, Y) := g_{F(x)}(dF_x X, dF_x Y) \quad (1.31)$$

para todo $x \in M$ e para todos $X, Y \in T_xM$.

Agora a variedade M com a métrica g é riemanniana e a imersão F é uma *imersão isométrica*.

Esse conceito é primordial ao nosso trabalho, uma vez que vamos apresentar uma reformulação do teorema clássico de superfícies que garante a existência de imersão isométrica a partir de determinadas condições, que veremos mais adiante no capítulo 3.

2 Álgebra de Clifford

Neste capítulo é construído a Álgebra de Clifford e as ferramentas necessárias para definir grupo spin e suas representações, para tal trabalhamos um pouco com as álgebras do tipo $Cl_{r,s}$ e Cl_n e suas classificações. A referência base desse capítulo é (LAWSON; MICHELSON, 2016), para a existência e unicidade dessa álgebra foi usado um método que pode ser encontrado em (VAZ; ROCHA, 2016).

Toda a parte tensorial utilizada para desenvolver esse capítulo pode ser encontrada em (KOSTRIKIN; MANIN, 1989). As demais referências usadas serão apresentadas ao longo do texto.

O objetivo deste capítulo é conceder condições necessárias para definir estrutura spin e como se comporta a estrutura de módulo sob essa álgebra, pois quando for definido fibrados de Clifford e Spinors o leitor já estará familiarizado com as notações e resultados básicos.

2.1 Álgebra de Clifford

Definição 17. *Considere V um \mathbb{K} -espaço vetorial e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica. A álgebra de Clifford, denotada por $Cl(V, q)$, associada a V e q é uma álgebra associativa e com unidade, onde q é a forma quadrática associada a B . Além disso, deve satisfazer as seguintes condições: Para $j : V \rightarrow Cl(V, q)$ uma aplicação linear, temos*

1. $j(v)^2 = -q(v) \cdot 1, \forall v \in V$ e $1 \in Cl(V, q)$;
2. (Propriedade Universal) Se \mathcal{A} é uma \mathbb{K} -álgebra associativa com unidade e existe $i : V \rightarrow \mathcal{A}$ satisfazendo o item 1, então existe um único homomorfismo de álgebras $f : Cl(V, q) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & Cl(V, q) \\ & \searrow i & \downarrow f \\ & & \mathcal{A} \end{array}$$

i.e., $f \circ j = i$.

A partir dessa definição é possível mostrar de maneira construtiva a existência de uma Álgebra de Clifford associada a forma quadrática (V, q) e sua unicidade a menos de isomorfismo de álgebras. Segue abaixo a proposição que elucida esta afirmação:

Proposição 5. *Seja (V, q) uma forma quadrática. Então existe uma Álgebra de Clifford $Cl(V, q)$. Além disso, $Cl(V, q)$ é única, a menos de um isomorfismo de álgebras.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar a unicidade a menos de isomorfismo de álgebras. Para isso, suponha que existam duas Álgebras de Clifford, $Cl(V, q)$ e $\tilde{Cl}(V, q)$, associadas a forma quadrática (V, q) . Pela definição 17, existem aplicações lineares $j : V \rightarrow Cl(V, q)$, $\tilde{j} : V \rightarrow \tilde{Cl}(V, q)$ e os homomorfismos de álgebras $f : Cl(V, q) \rightarrow \tilde{Cl}(V, q)$ e $h : \tilde{Cl}(V, q) \rightarrow Cl(V, q)$ tais que os dois diagramas abaixo comutam

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & Cl(V, q) \\ & \searrow \tilde{j} & \downarrow f \\ & & \tilde{Cl}(V, q) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{Cl}(V, q) \\ & \searrow j & \downarrow h \\ & & Cl(V, q) \end{array}$$

i.e, $f \circ j = \tilde{j}$ e $h \circ \tilde{j} = j$. Dessa forma obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} f \circ (h \circ \tilde{j}) &= \tilde{j} & e & \quad h \circ (f \circ j) = j \\ (f \circ h) \circ \tilde{j} &= \tilde{j} & \quad (h \circ f) \circ j &= j \end{aligned} \tag{2.1}$$

Então, $f \circ h = id_{\tilde{Cl}(V, q)}$ e $h \circ f = id_{Cl(V, q)}$, pela unicidade da inversa, segue que $h = f^{-1}$ e f é um isomorfismo de álgebras.

Agora, vamos mostrar a existência da Álgebra de Clifford, denotada por $Cl(V, q)$. Considere $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V)$ a álgebra tensorial, onde $T^n(V) = V \otimes \cdots \otimes V = V^{\otimes n}$, e o ideal

$$I(V, q) =: \{ \{v \otimes v + q(v) \cdot 1 : v \in V \text{ e } 1 \in T(V)\} \}. \tag{2.2}$$

Sabemos da teoria de álgebra que $T(V)/I(V, q)$ é uma álgebra quociente com a projeção canônica $\pi : T(V) \rightarrow T(V)/I(V, q)$ definida por $\pi(A) = A + I(V, q)$, para todo $A \in T(V)$.

Como $V \subset T(V)$, podemos considerar a inclusão $i : V \rightarrow T(V)$. Defina $j = \pi \circ i$ e observe que, para cada $v \in V$, temos

$$\begin{aligned} j(v)^2 &= \pi(i(v))^2 = \pi(v)^2 \\ &= (v + I(V, q)) \cdot (v + I(V, q)) \\ &= v \otimes v + I(V, q) \\ &= -q(v) \cdot 1 + v \otimes v + q(v) \cdot 1 + I(V, q) \\ &= -q(v) \cdot 1 - q(v)I(V, q) \\ &= -q(v)(1 + I(V, q)) = -q(v) \cdot 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Agora, vamos denotar $T(V)/I(V, q)$ por $Cl(V, q)$. Considere \mathcal{A} uma \mathbb{K} -álgebra associativa, com unidade e que satisfaz a condição 1 da definição 17, i.e, existe uma aplicação linear $s : V \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $s(v)^2 = -q(v) \cdot 1$, para todo $v \in V$.

Defina o homomorfismo de álgebras $\varphi : T(V) \longrightarrow \mathcal{A}$, pondo

$$\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = s(v_1) \cdots s(v_k).$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \varphi(v \otimes v + q(v) \cdot 1) &= \varphi(v \otimes v) + q(v) \cdot \varphi(1) \\ &= s(v)^2 + q(v) \cdot 1 \\ &= -q(v) \cdot 1 + q(v) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Assim, $v \otimes v + q(v) \cdot 1 \in \text{Ker}\varphi$, pela minimalidade do ideal $I(V, q)$, como gerado por esses elementos, segue que $I(V, q) \subset \text{Ker}\varphi$. Agora, podemos definir um aplicação $\psi : Cl(V, q) \longrightarrow \mathcal{A}$ com $\psi(v + I(V, q)) = \varphi(v)$. Claramente, ψ é um homomorfismo, uma vez que φ é um homomorfismo e a unicidade de ψ vem do fato de $Cl(V, q)$ ser gerado multiplicativamente por V . \square

Observação 8. *Os detalhes sobre álgebra tensorial que não foram explicitadas acima podem ser encontrados em (KOSTRIKIN; MANIN, 1989).*

Observação 9. *O produto entre dois elementos de $Cl(V, q)$ será dada por justaposição, ou seja, $\varphi \cdot \psi = \varphi\psi$, para todo $\varphi, \psi \in Cl(V, q)$, então a partir de agora o " \cdot " será omitido.*

Segue abaixo um teorema muito importante sobre como $Cl(V, q)$ pode ser gerada por meio do produto dos elementos da base de V .

Teorema 4. *Como álgebra $Cl(V, q)$ é gerada por $\{1, e_1, \dots, e_n\}$ onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V , com $B(e_i, e_j) = 0$ para todo $i \neq j$, onde B é a forma bilinear associada a q . Isto é,*

$$Cl(V, q) = \langle \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n, 1 \leq k \leq n\} \rangle. \quad (2.4)$$

Satisfazendo as seguintes condições

$$\begin{aligned} e_i^2 &= -q(e_i) \cdot 1 \\ e_j e_i + e_i e_j &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrado em (GILBERT; MURRAY, 1991), mais especificamente na página 10. \square

Essa caracterização de $Cl(V, q)$ facilita a representação explícita da Álgebra de Clifford, como veremos em alguns exemplos desse capítulo.

A definição a seguir fornece uma forma de estudar propriedades e estruturas da álgebra de Clifford.

Definição 18. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial associado a uma forma quadrática q . Definimos um automorfismo $\alpha : Cl(V, q) \longrightarrow Cl(V, q)$ tal que $\alpha \circ \alpha = Id$ e $\alpha(v) = -v$, também conhecido como involução.*

Usando o automorfismo α podemos fazer a seguinte decomposição da álgebra de Clifford

$$Cl(V, q) = Cl^0(V, q) \oplus Cl^1(V, q) \quad (2.6)$$

onde $Cl^i(V, q) = \{\varphi \in Cl(V, q) : \alpha(\varphi) = (-1)^i \varphi\}$ para cada $i \in \{0, 1\}$. Essa decomposição faz de $Cl(V, q)$ uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada.

Como α é um automorfismo, para cada $\varphi, \psi \in Cl^0(V, q)$ temos que

$$\alpha(\varphi\psi) = \alpha(\varphi)\alpha(\psi) = \varphi\psi \implies \varphi\psi \in Cl^0(V, q) \quad (2.7)$$

$$\alpha(\varphi + \psi) = \alpha(\varphi) + \alpha(\psi) = \varphi + \psi \implies \varphi + \psi \in Cl^0(V, q)$$

Se $\varphi, \psi \in Cl^1(V, q)$, temos que

$$\alpha(\varphi\psi) = \alpha(\varphi)\alpha(\psi) = (-\varphi)(-\psi) = \varphi\psi \implies \varphi\psi \in Cl^0(V, q) \quad (2.8)$$

$$\alpha(\varphi + \psi) = \alpha(\varphi) + \alpha(\psi) = -\varphi - \psi = -(\varphi + \psi) \implies \varphi + \psi \in Cl^1(V, q)$$

Logo, por 2.7 segue que $Cl^0(V, q)$ é uma subálgebra de $Cl(V, q)$, mas, por 2.8, vemos que $Cl^1(V, q)$ não é subálgebra.

$Cl^0(V, q)$ também é conhecida como *parte par* e $Cl^1(V, q)$ *parte ímpar*. Essa nomenclatura é resultado da descrição de α em função dos geradores de $Cl(V, q)$, mostrado no teorema 4, uma vez que

$$\alpha(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = (-1)^k e_{i_1} \cdots e_{i_k}.$$

Se k é par então $e_{i_1} \cdots e_{i_k} \in Cl^0(V, q)$ e se k é ímpar temos $e_{i_1} \cdots e_{i_k} \in Cl^1(V, q)$.

Definição 19. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial associado a uma forma quadrática q . Definimos um antiautomorfismo $t : Cl(V, q) \longrightarrow Cl(V, q)$, i.e, $t(\varphi\psi) = t(\psi)t(\varphi)$ com $t(v) = v$, para todo $v \in V$. Também conhecido como reversão.*

Note que,

$$t(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = t(e_{i_k}) \cdots t(e_{i_1}) = e_{i_k} \cdots e_{i_1}.$$

Para obter isomorfismos importantes para algumas caracterizações das Álgebras de Clifford, é necessário dar uma atenção especial para o *produto tensorial* de duas \mathbb{K} -álgebras associativa e com unidade. Considere A e B duas \mathbb{K} -álgebras com unidade,

então o produto tensorial $A \otimes B$ também é um álgebra sobre \mathbb{K} cujo produto é dado por $(a \otimes b) \cdot (\tilde{a} \otimes \tilde{b}) = (a\tilde{a}) \otimes b\tilde{b}$, para cada $a, \tilde{a} \in A$ e $b, \tilde{b} \in B$. Por outro lado, se $A = A^0 \oplus A^1$ e $B = B^0 \oplus B^1$ são \mathbb{K} -álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas. Então podemos construir uma outra \mathbb{K} -álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada, $A \hat{\otimes} B$, tal que

$$(A \hat{\otimes} B)^0 = (A^0 \otimes B^0) \oplus (A^1 \otimes B^1),$$

e

$$(A \hat{\otimes} B)^1 = (A^1 \otimes B^0) \oplus (A^0 \otimes B^1),$$

com o produto definido por

$$(a \otimes \tilde{b}) \cdot (\tilde{a} \otimes b) = (-1)^{\deg(\tilde{a})\deg(\tilde{b})} (a\tilde{a}) \otimes (b\tilde{b}). \quad (2.9)$$

Sempre que \tilde{a} e \tilde{b} são de grau puro, no qual $\tilde{a} \in A^0$ se $\deg(\tilde{a})$ for par e $\tilde{a} \in A^1$ se $\deg(\tilde{a})$ for ímpar. Analogamente para \tilde{b} .

Definição 20. *Sejam B_1 e B_2 duas \mathbb{K} -formas bilineares definidas em V_1 e V_2 , respectivamente, dois subespaços vetoriais de V com $V = V_1 \oplus V_2$, então podemos definir uma \mathbb{K} -forma bilinear B em V tal que*

1. $B(v_1, v_2) = 0$, $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$;
2. $B|_{V_1 \times V_1} = B_1$ e $B|_{V_2 \times V_2} = B_2$.

Consequentemente, obtemos $q = q_1 \oplus q_2$ a forma quadrática associada a B , onde q_1 e q_2 estão associadas a B_1 e B_2 , respectivamente.

Proposição 6. *Sejam $Cl(V_1, q_1)$ e $Cl(V_2, q_2)$ duas Álgebras de Clifford, então existe o isomorfismo $Cl(V_1 \oplus V_2, q_1 \oplus q_2) \cong Cl(V_1, q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, q_2)$.*

Demonstração. Considere $V = V_1 \oplus V_2$ e defina uma aplicação $f : V \longrightarrow Cl(V_1, q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, q_2)$ pondo $f(v) = v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2$, onde $v = v_1 + v_2$ para $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Da definição 20, obtemos

$$\begin{aligned} f(v)^2 &= f(v) \cdot f(v) \\ &= (v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2)(v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2) \\ &= (v_1 \otimes 1)(v_1 \otimes 1) + (v_1 \otimes 1)(1 \otimes v_2) + (1 \otimes v_2)(v_1 \otimes 1) + (1 \otimes v_2)(1 \otimes v_2) \\ &= (v_1)^2 \otimes 1 + v_1 \otimes v_2 - v_1 \otimes v_2 + 1 \otimes (v_2)^2 \\ &= -q_1(v_1)(1 \otimes 1) - q_2(v_2)(1 \otimes 1) \\ &= -(q_1(v_1) + q_2(v_2))(1 \otimes 1) \\ &= -q(v)(1 \otimes 1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Então, $Cl(V_1, q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, q_2)$ satisfaz a condição 1 da definição 17. Com isso, f estende a um homomorfismo de álgebras $F : Cl(V, q) \longrightarrow Cl(V_1, q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, q_2)$. Observe que,

$$F(Cl(V, q)) \subset Cl(V_1, q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, q_2) \text{ e } Cl(V_1, q_1) \otimes 1, 1 \otimes Cl(V_2, q_2) \subset F(Cl(V, q)).$$

Logo, F é sobrejetiva. A injetividade basta considerar uma base de $Cl(V, q)$ gerado pelos elementos de V , de acordo com o teorema 4. Portanto, F é um isomorfismo. \square

Proposição 7. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$. Então, dada uma forma quadrática q em V temos que a dimensão de $Cl(V, q)$, como \mathbb{K} -espaço vetorial, é 2^n .*

Além disso, com esses resultados é possível calcular explicitamente algumas Álgebras de Clifford e, mais adiante, mostraremos que essa investigação pode se estender para casos mais gerais, nos ajudando a obter uma melhor compreensão sobre qual objeto estamos trabalhando.

Exemplo 8. *Sejam $q \equiv 0$, a forma quadrática nula, e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V . Então,*

$$e_i^2 = 0 \text{ e } e_i e_j = -e_j e_i.$$

Logo, $Cl(V, q)$ possui a mesma estrutura da Álgebra de Grassmann $\Lambda^* V$, i.e, $Cl(V, q) \cong \Lambda^* V$.

Entretanto, se $q \neq 0$, enquanto álgebras, $\Lambda^*(V)$ e $Cl(V, q)$, não são isomorfas, porém existe um isomorfismo como espaço vetorial.

Antes de apresentar a próxima definição, lembremos da seguinte propriedade de $\Lambda^k(V)$, com $k \geq 1$.

Considere $s : V \times \dots \times V \longrightarrow \Lambda^k(V)$ a aplicação conônica multilinear alternada, definida por $s(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sing } \sigma) v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(k)}$. Se $t : V \times \dots \times V \longrightarrow W$ é uma aplicação multilinear alternada, onde W é um espaço vetorial, então existe uma única aplicação linear $f : \Lambda^k(V) \longrightarrow W$ que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{s} & \Lambda^k(V) \\ t \downarrow & \swarrow f & \\ W & & \end{array}$$

Partindo dessa propriedade e sabendo que existe uma aplicação

$$\begin{aligned} t : V \times \dots \times V &\longrightarrow Cl(V, q) \\ (v_1, \dots, v_k) &\longmapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sing } \sigma) v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Podemos definir uma única aplicação linear, dada por

$$\begin{aligned} f : \Lambda^k V &\longrightarrow Cl(V, q) \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_k &\longmapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sing } \sigma) v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

A aplicação f é claramente injetiva, mais especificamente, um mergulho.

A próxima proposição garante que se estender f para $\Lambda^*(V)$, temos um isomorfismo linear.

Proposição 8. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial, onde \mathbb{K} é um corpo de característica diferente de 2. Então existe um isomorfismo de espaços vetoriais entre $Cl(V, q)$ e Λ^*V .*

Demonstração. A demonstração desse fato usa ferramentas que não foram apresentadas aqui mas podem ser encontrada em (LAWSON; MICHELSON, 2016) na página 10. \square

Desse resultado, se tomamos $k = 2$ obtemos

$$\begin{aligned} f(v_1 \wedge v_2) &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_2} \text{sing}(\sigma) v_{\sigma(1)} v_{\sigma(2)} \\ &= \frac{1}{2} (v_1 v_2 - v_2 v_1). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Além disso, temos a seguinte identificação, pela extensão da propriedade 2.5 para todo $v \in V$,

$$\frac{1}{2} (v_1 v_2 + v_2 v_1) = -B(v_1, v_2). \quad (2.14)$$

Onde B é a forma bilinear associada a forma quadrática q . Com isso, podemos definir explicitamente o produto entre dois vetores $v_1, v_2 \in V$ na Álgebra de Clifford, somando as igualdades 2.13 e 2.14 e identificando $f(v_1 \wedge v_2)$ com $v_1 \wedge v_2$.

$$v_1 v_2 = v_1 \wedge v_2 - B(v_1, v_2). \quad (2.15)$$

A proposição abaixo mostra que podemos identificar o produto $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ com $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, quando e_1, \dots, e_n for uma base ortonormal.

Proposição 9. *Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V . Então $f(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, para todo $1 \leq k \leq n$.*

Demonstração. Vamos mostrar esse resultado usando indução finita sobre k . Se $k = 1$, claramente é válido, então tome $k = 2$

$$\begin{aligned} f(e_{i_1} \wedge e_{i_2}) &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_2} (\text{sing } \sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \cdot e_{i_{\sigma(2)}} \\ &= \frac{1}{2} (e_{i_1} e_{i_2} - e_{i_2} e_{i_1}) \\ &= \frac{1}{2} (e_{i_1} e_{i_2} + e_{i_1} e_{i_2}) \\ &= e_{i_1} e_{i_2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Além disso, se consideramos $k = 3$, obtemos

$$\begin{aligned}
f(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3}) &= \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \text{sing}(\sigma) e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} e_{\sigma(3)} \\
&= \frac{1}{6} [e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} - e_{i_2} e_{i_1} e_{i_3} + e_{i_2} e_{i_3} e_{i_1} - e_{i_1} e_{i_3} e_{i_2} + e_{i_3} e_{i_1} e_{i_2} - e_{i_3} e_{i_2} e_{i_1}] \\
&= \frac{1}{6} [e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} - e_{i_2} e_{i_1} e_{i_3} + e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} - e_{i_2} e_{i_1} e_{i_3} + e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} - e_{i_2} e_{i_1} e_{i_3}] \\
&= \frac{1}{6} [(e_{i_1} e_{i_2} - e_{i_2} e_{i_1}) e_{i_3} + (e_{i_1} e_{i_2} - e_{i_2} e_{i_1}) e_{i_3} + (e_{i_1} e_{i_2} - e_{i_2} e_{i_1}) e_{i_3}] \\
&= \frac{1}{6} [2f(e_{i_1} \wedge e_{i_2}) e_{i_3} + 2f(e_{i_1} \wedge e_{i_2}) e_{i_3} + 2f(e_{i_1} \wedge e_{i_2}) e_{i_3}] \\
&= f(e_{i_1} \wedge e_{i_2}) e_{i_3} \\
&= e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Suponha que, para $k = n - 1$ é válido, i.e, $f(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-1}}) = e_{i_1} \cdots e_{i_{n-1}}$. Vamos provar que, para $k = n$ também é válido. De fato,

$$\begin{aligned}
f(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-1}} \wedge e_{i_n}) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sing}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \cdots e_{i_{\sigma(n-1)}} e_{i_{\sigma(n)}} \\
&= \frac{1}{n} [nf(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-1}})] \cdot e_{i_n} \\
&= e_{i_1} \cdots e_{i_{n-1}} e_{i_n}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Portanto, para uma base ortonormal segue o resultado. \square

2.1.1 Grupos Pin e Spin

Nesta seção iremos estudar importantes grupos contruídos a partir da Álgebra de Clifford, *Pin* e *Spin*. Para isso vamos definir o seguinte grupo multiplicativo

$$Cl^*(V, q) = \{x \in Cl(V, q) : \exists x^{-1} \in Cl(V, q), \quad xx^{-1} = x^{-1}x = 1\}.$$

Note que, esse grupo contém todos $v \in V$ tal que $q(v) \neq 0$, pois neste caso temos que $v.v = -q(v)$ implicando em $v^{-1} = -\frac{v}{q(v)}$.

É natural considerar uma ação de $Cl^*(V, q)$ sobre a Álgebra de Clifford, gerando um homomorfismo de grupos

$$\rho : Cl^*(V, q) \rightarrow \text{Aut}(Cl(V, q)) \tag{2.19}$$

denominado de representação adjunta torcida, dada por $\rho_x(\varphi) = \alpha(x)\varphi x^{-1}$.

Para verificar que ρ é um homomorfismo, tome $x, y \in Cl^*(V, q)$. Com isso, dado $\varphi \in Cl(V, q)$, temos

$$\begin{aligned}\rho_{xy}(\varphi) &= \alpha(xy)\varphi(xy)^{-1} \\ &= \alpha(x)\alpha(y)\varphi y^{-1}x^{-1} \\ &= \alpha(x)\rho_y(\varphi)x^{-1} \\ &= \rho_x(\rho_y(\varphi)) \\ &= \rho_x \circ \rho_y(\varphi).\end{aligned}$$

e $\rho_1(\varphi) = \alpha(1)\varphi 1^{-1} = \varphi$, assim $\rho_1 = id$. Logo ρ é um homomorfismo de grupos. Agora precisamos mostrar que ρ_x é um automorfismo, para todo $x \in Cl^*(V, q)$. De fato, dado $\varphi \in Cl(V, q)$, temos

$$\begin{aligned}\rho_x \circ \rho_{x^{-1}}(\varphi) &= \rho_{xx^{-1}}(\varphi) \\ &= \rho_1(\varphi) = \varphi\end{aligned}\tag{2.20}$$

e

$$\begin{aligned}\rho_{x^{-1}} \circ \rho_x(\varphi) &= \rho_{x^{-1}x}(\varphi) \\ &= \rho_1(\varphi) = \varphi.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Então $\rho_{x^{-1}}$ é a inversa de ρ_x . Pela arbitrariedade de x , segue que $\rho_x \in Aut(Cl(V, q))$.

Observação 10. *Uma outra forma de representar os elementos de $Cl^*(V, q)$ como automorfismo de $Cl(V, q)$ é utilizando a representação adjunta, dada pela aplicação*

$$Ad : Cl^*(V, q) \longrightarrow Aut(Cl(V, q))\tag{2.22}$$

definida por $Ad_x(\varphi) = x\varphi x^{-1}$.

Escolhemos a adjunta torcida pois geometricamente é mais útil do que a representação adjunta.

A partir de agora, quando não mencionarmos quem é o corpo, estaremos sobre um corpo de característica $\neq 2$.

Proposição 10. *Seja $v \in V \subset Cl(V, q)$ um elemento com $q(v) \neq 0$. Então $\rho_v(V) = V$. De fato, para todo $w \in V$, a seguinte equação é satisfeita*

$$\rho_v(w) = w - 2\frac{B(v, w)}{q(v)}v.\tag{2.23}$$

Isto é, $\rho_v(w)$ é a reflexão de w sobre o hiperplano perpendicular a v . Onde B é a forma bilinear associada a q .

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \rho_v(w) &= w + \alpha(v)wv^{-1} - w \\
 &= w + (\alpha(v)w - wv)v^{-1} \\
 &= w - (vw + wv)v^{-1} \\
 &= w - 2B(v, w)\frac{v}{q(v)} \\
 &= w - 2\frac{B(v, w)}{q(v)}v.
 \end{aligned}$$

□

Proposição 11. Para todo $v \in V$, $\det(\rho_v) = -1$.

Demonstração. Sabemos que toda reflexão possui determinante igual a -1 , uma vez que o vetor fixado que gera o hiperplano, digamos v , é levado em $-v$ pela reflexão e os contidos no hiperplano na identidade, logo a matriz associada a essa transformação possui determinante -1 e pela proposição 10 temos que ρ_v é um reflexão, para todo $v \in V$, portanto $\det(\rho_v) = -1$. □

Além disso, temos a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned}
 q(\rho_v(w)) &= q(\alpha(v)wv^{-1}) = q(-v w v^{-1}) = q(v w v^{-1}) = \frac{1}{q(v)^2}q(v w v) \\
 &= -\frac{1}{q(v)^2}(v w v)^2 = -\frac{1}{q(v)^2}(v w v)(v w v) \\
 &= -\frac{1}{q(v)^2}v w v^2 w v = \frac{1}{q(v)^2}v w q(v) w v \\
 &= \frac{1}{q(v)}v w^2 v = -\frac{q(w)}{q(v)}v^2 \\
 &= q(w).
 \end{aligned}$$

Como ρ_v preserva a forma quadrática, temos que $\rho_v \in O(V, q)$. Dessa forma, se restringirmos ρ ao grupo gerado por $v \in V$ onde $q(v) \neq 0$, denotado por $P(V, q)$, obtemos o seguinte homomorfismo de grupos.

$$\rho : P(V, q) \rightarrow O(V, q) \quad (2.24)$$

Note que, pelo teorema 4, também podemos escrever

$$P(V, q) = \{v_1 \cdots v_k \in Cl(V, q) : q(v_i) \neq 0, \forall 1 \leq k \leq n\}.$$

Como ρ é um homomorfismo, dado $\varphi = v_1 \cdots v_k \in P(V, q)$, temos

$$\rho_{v_1 \cdots v_k} = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_k}. \quad (2.25)$$

Então ρ_φ , pela proposição 10, é o produto de reflexões.

Definição 21. O grupo Pin é um subgrupo de $P(V, q)$ tal que $q(v) = \pm 1$, denotado por $Pin(V, q)$. O grupo $Spin$ é um subgrupo de $Pin(V, q)$ tal que $q(v) = 1$, denotado por $Spin(V, q)$, ou equivalentemente

$$Spin(V, q) = Pin(V, q) \cap Cl^0(V, q)$$

Observe na definição acima que $Pin(V, q)$ é gerado pelo produto de vetores $v \in V$ tais que $q(v) \neq 0$. Dessa forma, podemos representá-lo de outra forma,

$$Pin(V, q) = \{v_1 \cdots v_k \in Cl(V, q) : q(v_i) = \pm 1, \forall k\} \quad (2.26)$$

Analogamente, a mesma configuração ocorre para $Spin(V, q)$, com o adicional de $Spin(V, q) \subset Cl^0(V, q)$. Logo,

$$Spin(V, q) = \{v_1 \cdots v_k \in Pin(V, q) : k \text{ é par}\} \quad (2.27)$$

Note que k tem que ser par, pois dado $\varphi = v_1 \cdots v_k \in Cl(V, q)$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \alpha(v_1 \cdots v_k) \\ &= \alpha(v_1) \cdots \alpha(v_k) \\ &= (-1)^k (v_1 \cdots v_k) \\ &= v_1 \cdots v_k = \varphi \in Cl^0(V, q) \iff k \text{ é par.} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Com o objetivo de facilitar a construção de alguns exemplos de grupos pin e $spin$, vamos definir a aplicação norma e dar uma definição equivalente à 21.

Definição 22. Definimos a aplicação norma em $Cl(V, q)$ como a aplicação $N : Cl(V, q) \rightarrow Cl(V, q)$, onde $N(\varphi) = \varphi \alpha(\varphi)^t$, para cada $\varphi \in Cl(V, q)$.

Note que, para todo $v \in V \setminus \{0\}$ segue que $N(v) = v \cdot \alpha(v)^t = -v^2 = q(v)$, . Além disso, se $\varphi \in Cl^*(V, q)$ temos que $N(\varphi) \in \mathbb{K}^*$, onde \mathbb{K}^* é o corpo sem o zero (grupo multiplicativo).

Se $\varphi = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ temos que

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= N(v_{i_1} \cdots v_{i_k}) \\ &= v_{i_1} \cdots v_{i_k} \cdot \alpha((v_{i_1} \cdots v_{i_k})^t) \\ &= v_{i_1} \cdots v_{i_k} \cdot \alpha(v_{i_k} \cdots v_{i_1}) \\ &= (-1)^k q(v_1) \cdots q(v_k) \end{aligned} \quad (2.29)$$

A partir de 2.29 e 2.25 podemos escrever $Pin(V, q)$ e $Spin(V, q)$ como

$$\begin{aligned} Pin(V, q) &= \{\varphi \in Cl(V, q) : \alpha(\varphi)v\varphi^{-1} \in V \text{ e } N(\varphi) = \pm 1\} \\ &\text{e} \\ Spin(V, q) &= \{\varphi \in Cl^0(V, q) : \varphi v\varphi^{-1} \in V \text{ e } N(\varphi) = 1\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Segue abaixo um importante teorema sobre transformações ortogonais que será fundamental para mostrarmos que ρ restrita a $Pin(V, q)$ e $Spin(V, q)$ é sobrejetora e contínua.

Teorema 5 (Teorema de Cartan-Dieudonné). *Toda transformação ortogonal é composição (produto) finita de reflexões.*

Proposição 12. *Seja $\rho : P(V, q) \longrightarrow O(V, q)$ o homomorfismo definido em 2.24. Então $\rho : Pin(V, q) \longrightarrow O(V, q)$ é sobrejetor e contínuo.*

Demonstração. Considere $T \in O(V, q)$, assim pelo teorema 5 segue que, existe uma quantidade finita de reflexões, digamos R_i para $1 \leq i \leq k$, tais que $T = R_1 \circ \cdots \circ R_k$. Escolhendo v_1, \dots, v_k vetores com $q(v) = \pm 1$ tais que $R_i = \rho_{v_i}$, uma vez que a proposição 10 garante que cada ρ_{v_i} é uma reflexão em torno do hiperplano ortogonal a v_i . Então, tomando $\varphi = v_1 \cdots v_k \in Pin(V, q)$ temos que

$$\rho(\varphi) = \rho_\varphi = \rho_{v_1 \cdots v_k} = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_k} = R_1 \circ \cdots \circ R_k = T. \quad (2.31)$$

A penúltima igualdade em 2.31 vem do fato de ρ ser um homomorfismo, logo temos a sobrejetividade de ρ restrita a $Pin(V, q)$. A continuidade vem direto do fato de que cada reflexão ρ_{v_i} é contínua. \square

Proposição 13. *Seja $\rho : P(V, q) \longrightarrow O(V, q)$ o homomorfismo definido em 2.24. Então $\rho : Spin(V, q) \longrightarrow SO(V, q)$ é sobrejetor.*

Demonstração. O mesmo raciocínio da proposição 12, entretanto, agora vamos pegar $T \in SO(n)$, com isso temos um número par de reflexões e, conseqüentemente, escolhemos $\varphi = v_1 \cdots v_k$ com k par e $q(v) = 1$. Então $\varphi \in Spin(V, q)$. Portanto, $\rho_\varphi = \rho_{v_1 \cdots v_k} = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_k} = T$. \square

Esses dois homomorfismos são de extrema importância para a seção de representações, uma vez que além de serem sobrejetores eles são aplicações de recobrimento nas quais $Pin(V, q)$ e $Spin(V, q)$ são recobrimentos duplos de $O(V, q)$ e $SO(V, q)$, respectivamente. Como o nosso objetivo é usar o fato de que $Spin$ é grupo "mais fácil" de trabalhar por ser simplesmente conexo, vamos apenas usar esses resultados e não apresentaremos detalhes, contudo os mesmos podem ser encontrados em (HATCHER, 2005).

2.1.1.1 As álgebras Cl_n e $C_{r,s}$

Nesta seção vamos estudar as Álgebras de Clifford $Cl_{r,s} = Cl(V, q)$, onde

$$V = \{v \in \mathbb{R}^{r+s} : r \text{ e } s \text{ são as assinaturas positiva e negativa, respectivamente}\}.$$

Onde denotamos V por $\mathbb{R}^{r,s}$ e q é uma forma quadrática definida por

$$q(v) = v_1^2 + \dots + v_r^2 - v_{r+1}^2 - \dots - v_{r+s}^2. \quad (2.32)$$

Todas as propriedades que já foram demonstradas na seção 2.1 são válidas para essas álgebras de Clifford, com o adicional de estarmos sobre espaços euclidianos, com uma base ortonormal, e a condição do teorema 4 pode ser vista como

$$e_i e_j + e_j e_i = \begin{cases} -2\delta_{ij}, & \text{para } i \leq r \\ +2\delta_{ij}, & \text{para } i > r. \end{cases} \quad (2.33)$$

Esse caso será muito útil quando trabalharmos com a classificação dessas álgebras, uma vez que sabemos como encontrar bases ortonormais em espaços euclidianos. Segue duas notações que utilizaremos ao longo desse capítulo: $Cl_n = Cl_{n,0}$ e $Cl_n^* = Cl_{0,n}$.

Proposição 14. *Seja $Cl_{r,s}$ a Álgebra de Clifford definida acima. Então existe o isomorfismo*

$$Cl_{r,s} \cong Cl_1 \otimes \dots \otimes Cl_1 \otimes Cl_1^* \otimes \dots \otimes Cl_1^*. \quad (2.34)$$

Onde Cl_1 e Cl_1^* estão se repetindo r e s vezes, respectivamente.

Abaixo seguem alguns exemplos das Álgebras de Clifford que são construídas com base nos resultados que já vimos na seção anterior e com os enunciados nesta seção.

Exemplo 9. $Cl_1 \cong \mathbb{C}$

Neste caso $V = \mathbb{R}^{1,0}$. Considere $\{e\}$ uma base de $\mathbb{R}^{1,0}$, então, para todo $v \in \mathbb{R}^{1,0}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $v = xe$. Além disso, pela definição de q , temos $q(e) = 1$.

Dessa forma, $Cl_{1,0} \cong_{\mathbb{R}} \langle \{1, e\} \rangle$, i.e, para todo $\varphi \in Cl_{1,0}$, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi = a + be$. Pelo condição 2.33, obtemos

$$\begin{aligned} ee + ee &= -2 \\ 2e^2 &= -2 \\ e^2 &= -1. \end{aligned}$$

Agora, tome a álgebra dos números complexos \mathbb{C} com o produto dado por $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$, onde $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$.

Defina um homomorfismo de álgebras $\rho : Cl_1 \rightarrow \mathbb{C}$ com $\rho(1) = (1, 0)$ e $\rho(e) = (0, 1) = i$. Claramente ρ é um isomorfismo.

Os grupos $Pin(1)$ e $Spin(1)$ são dados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 Pin(1) &= \{\varphi \in Cl_1 : \alpha(\varphi)v\varphi^{-1} \in \mathbb{R} \text{ e } N(\varphi) = 1\} \\
 &\cong \{\varphi \in \mathbb{C} : \alpha(\varphi)v\varphi^{-1} \in \mathbb{R} \text{ e } N(\varphi) = 1\} \\
 &= \{1, -1, i, -i\} \\
 &e \\
 Spin(1) &= Pin(1) \cap Cl_1^0 \\
 &= \{1, -1, i, -i\} \cap \mathbb{R} \\
 &= \{1, -1\}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Exemplo 10. $Cl_1^* \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Neste caso $V = \mathbb{R}^{0,1}$ e $q(e) = -1$. Pela condição 2.33, obtemos

$$\begin{aligned}
 ee + ee &= 2 \\
 2e^2 &= 2 \\
 e^2 &= 1.
 \end{aligned}$$

Tome a álgebra da soma direta $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ com o produto dada por $(a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc)$. Analogamente ao exemplo anterior, existe um isomorfismo de álgebras $\rho : Cl_1^* \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, definido por $\rho(1) = (1, 0)$ e $\rho(e) = (0, 1)$

Exemplo 11. $Cl_{2,0} \cong \mathbb{H}$.

Considere $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^{2,0}$. Então $q(e_i) = 1$ para cada $1 \leq i \leq 2$. Pela teorema 4, sabemos que

$$Cl_{2,0} = \langle \{1, e_1, e_2, e_1 \cdot e_2\} \rangle.$$

Pela condição 2.33

1. $e_i^2 = -1$ para cada $1 \leq i \leq 2$
2. $(e_1 \cdot e_2)^2 = e_1 \cdot e_2 \cdot e_1 \cdot e_2 = -e_1^2 \cdot e_2^2 = -1$

Assim, para cada $\varphi \in Cl_{0,2}$, existem a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi = a + be_1 + ce_2 + d(e_1 \cdot e_2)$. Agora, considere a álgebra dos quaternions $\mathbb{H} = \langle \{1, i, j, k : i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ e } i \cdot j = k\} \rangle$. Definindo o homomorfismo de álgebras $\rho : Cl_{2,0} \rightarrow \mathbb{H}$ pondo $\rho(1) = 1$, $\rho(e_1) = i$ e $\rho(e_2) = j$, conseguimos o isomorfismo desejado.

Os grupos $Pin(1)$ e $Spin(1)$ são dados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Pin(2) &= \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 : \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1\} \cup \{\lambda_3 + \lambda_4 e_1 e_2 : \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 1\} \\ &= U(1) \oplus U(1) \\ e \\ Spin(2) &= \{\lambda_3 + \lambda_4 e_1 e_2 : \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 1\} \\ &= U(1). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Onde $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Exemplo 12. $Cl_{0,2} \cong \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$.

Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{0,2}$. Então,

$$Cl_{0,2} = \langle \{1, e_1, e_2, e_1 e_2\} \rangle$$

onde,

1. $e_i^2 = 1$ para cada $1 \leq i \leq 2$,
2. $(e_1 \cdot e_2)^2 = e_1 \cdot e_2 \cdot e_1 \cdot e_2 = -e_1^2 \cdot e_2^2 = -1$

Agora, considere a álgebra das matrizes 2×2 sobre os reais

$$\mathcal{M}(2, \mathbb{R}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle. \tag{2.37}$$

Note que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

Com isso, podemos definir um homomorfismo de álgebras $\rho : Cl_{0,2} \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, pondo

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \rho(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \rho(e_1 \cdot e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

Claramente, ρ é um isomorfismo de álgebras.

Agora vamos definir um elemento da Álgebra de Clifford que será fundamental para o estudo de representções, seção que veremos mais adiante.

Definição 23. Definimos o elemento de volume como

$$\omega = e_1 \cdots e_{r+s} \quad (2.41)$$

onde $\{e_1, \dots, e_{r+s}\}$ é uma base q -ortonormal e orientável. Note que, essa definição independe da escolha da base. De fato, se e'_1, \dots, e'_{r+s} é uma outra base para $\mathbb{R}^{r,s}$, temos que $e'_j = \sum g_{ij} e_j$ para $g = (g_{ij}) \in SO_{r,s}$, com isso

$$e'_1 \cdots e'_{r+s} = \det(g) e_1 \cdots e_{r+s} = e_1 \cdots e_{r+s}$$

Proposição 15. O elemento de volume $\omega \in Cl_{r,s}$ tem as seguintes propriedades básicas. Seja $n = r + s$. Então

a) $\omega^2 = (-1)^{n \frac{(n+1)}{2} - s}$.

b) $v\omega = (-1)^{n-1} \omega v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Em particular,

$$\begin{cases} \varphi\omega = \omega\varphi, & n \text{ é ímpar} \\ \varphi\omega = \omega\alpha(\varphi), & n \text{ é par} \end{cases} \quad (2.42)$$

$\forall \varphi \in Cl_{r,s}$.

Demonstração. Parte a)

$$\begin{aligned} \omega^2 &= e_1 \cdots e_{r+s} \cdot e_1 \cdots e_{r+s} \\ &= (-1)^{r+s-1} e_1^2 \cdot e_2 \cdots e_{r+s} \cdot e_2 \cdots e_{r+s} \\ &= (-1)^{(r+s-1)+(r+s-2)} e_1^2 e_2^2 \cdot e_3 \cdots e_{r+s} \cdot e_3 \cdots e_{r+s} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{r+s-1} (r+s-i)} e_1^2 \cdots e_{r+s}^2 \\ &= (-1)^{\frac{(r+s-1)(r+s)}{2}} (-1)^r \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2} + n - s} \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2} - s} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Parte b) Considere $v \in \mathbb{R}^n$, com isso $v = \sum_{i=1}^{r+s} v_i e_i$. Assim,

$$\begin{aligned} v\omega &= (v_1 e_1 + \cdots + v_{r+s} e_{r+s}) e_1 \cdots e_{r+s} \\ &= v_1 e_1 \cdot e_1 \cdots e_{r+s} + \cdots + v_{r+s} e_{r+s} \cdot e_1 \cdots e_{r+s} \\ &= (-1)^{r+s-1} e_1 \cdots e_{r+s} v_1 e_1 + \cdots + (-1)^{r+s-1} e_1 \cdots e_{r+s} v_{r+s} e_{r+s-1} \\ &= (-1)^{n-1} \omega v \end{aligned} \quad (2.44)$$

Agora, suponha que n seja ímpar, i.e, $n = 2k + 1$. Então, para todo $\varphi \in Cl_{r,s}$

$$\begin{aligned}
 \varphi\omega &= \left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{\substack{j=2 \\ i < j}}^n a_{ij} e_i e_j + \cdots + \sum_{\substack{i_s=2k \\ i_1 < \cdots < i_s}}^n a_{i_1 \cdots i_s} e_{i_1} \cdots e_{i_s} + a_{1 \cdots n} e_1 \cdots e_n \right) \omega \\
 &= \omega a_0 + (-1)^{n-1} \omega \sum_{i=1}^n a_i e_i + (-1)^{2n-2} \omega \sum_{\substack{j=2 \\ i < j}}^n a_{ij} e_i e_j + \cdots + \\
 &\quad + (-1)^{2kn-2k} \omega \sum_{\substack{i_s=2k \\ i_1 < \cdots < i_s}}^n a_{i_1 \cdots i_s} e_{i_1} \cdots e_{i_s} + \omega a_{1 \cdots n} e_1 \cdots e_n \\
 &= \omega \varphi.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Para n par, os únicos termos que o sinal vai mudar são os que estão em $Cl_{r,s}^1$. Então para incluir o sinal basta considerar $\alpha(\varphi)$ no lugar de φ , i.e, $\varphi\omega = \omega\alpha(\varphi)$. \square

Dessa proposição obtemos

$$\omega^2 = \begin{cases} (-1)^s, & \text{se } n \equiv 3, 4 \pmod{4} \\ (-1)^{s+1}, & \text{se } n \equiv 1, 2 \pmod{4}. \end{cases} \tag{2.46}$$

Esse resultado segue de contas análogas a da proposição anterior.

Lema 2. *Suponha que o elemento de volume $\omega \in Cl_{r,s}$ satisfaz $\omega^2 = 1$ e*

$$\pi^+ = \frac{(1 + \omega)}{2} \quad e \quad \pi^- = \frac{(1 - \omega)}{2}.$$

Então π^+ e π^- satisfaz as relações

$$\pi^+ + \pi^- = 1, \quad (\pi^+)^2 = \pi^+, \quad (\pi^-)^2 = \pi^- \quad e \quad \pi^+ \pi^- = \pi^- \pi^+ = 0$$

Demonstração. Pela hipótese, temos direto que $\pi^+ + \pi^- = 1$. Os demais resultados seguem abaixo

$$\begin{aligned}
 (\pi^+)^2 &= \frac{1}{4}(1 + \omega)(1 + \omega) \\
 &= \frac{1}{4}(1 + 2\omega + \omega^2) \\
 &= \pi^+.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Analogamente, obtemos $(\pi^-)^2 = \pi^-$.

$$\pi^+ \pi^- = \frac{1}{4}(1 + \omega)(1 - \omega) = \frac{1}{4}(1 - \omega^2) = 0. \tag{2.48}$$

Claramente, $\pi^- \pi^+ = 0$. \square

Proposição 16. *Seja o elemento de volume $\omega \in Cl_{r,s}$ satisfazendo $\omega^2 = 1$ com $r + s$ ímpar. Então $Cl_{r,s}$ pode ser decomposta como uma soma direta*

$$Cl_{r,s} = Cl_{r,s}^+ \oplus Cl_{r,s}^- \quad (2.49)$$

onde $Cl_{r,s}^\pm = \pi^\pm Cl_{r,s} = Cl_{r,s} \pi^\pm$ e $\alpha(Cl_{r,s}^\pm) = Cl_{r,s}^\mp$.

Proposição 17. *Seja o elemento de volume $\omega \in Cl_{r,s}$ com $\omega^2 = 1$ e $r + s$ um número par. Considere V qualquer $Cl_{r,s}$ -módulo. Então existe uma decomposição*

$$V = V^+ \oplus V^-.$$

Com $+1$ e -1 autoespaços pela multiplicação por ω . De fato, $V^+ = \pi^+ V$ e $V^- = \pi^- V$ e para qualquer $e \in \mathbb{R}^{r+s}$ com $q(e) \neq 0$, a multiplicação do módulo por e gera os isomorfismos $e : V^+ \rightarrow V^-$ e $e : V^- \rightarrow V^+$.

Proposição 18. *Existe um isomorfismo algébrico*

$$Cl_{r,s} \cong Cl_{r+1,s}^0 \quad (2.50)$$

para todo r, s . Em particular, $Cl_n \cong Cl_{n+1}^0$ para todo n .

Demonstração. Escolha uma base q -ortonormal $\beta = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{r+s+1}\}$ de $\mathbb{R}^{r+1,s}$. Sabemos que existe uma aplicação injetiva $j : \mathbb{R}^{r,s} \rightarrow Cl_{r,s}$ tal que $j(v)^2 = -q(v) \cdot 1$. Estamos considerando $\mathbb{R}^{r,s}$ como espaço gerado por $\{e_i \in \beta : i \neq r+1\}$. Defina uma aplicação $s : \mathbb{R}^{r,s} \rightarrow Cl_{r+1,s}^0$ pondo $s(e_i) = e_{r+1} e_i$. Claramente s é injetiva e linear, além disso note que, dado

$$v = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r+1}}^{r+s+1} v_i e_i$$

temos que

$$\begin{aligned} s(v)^2 &= \sum_{ij} v_i v_j e_{r+1} e_i e_{r+1} e_j \\ &= - \sum_{ij} v_i v_j e_{r+1}^2 e_i e_j \\ &= \sum_{ij} v_i v_j e_i e_j \\ &= j(v)^2 = -q(v) \cdot 1. \end{aligned}$$

Pelo item dois da definição 17, existe um homomorfismo de álgebras $f : Cl_{r,s} \rightarrow Cl_{r+1,s}^0$ tal que $f \circ j = s$. f é um isomorfismo. De fato, dado $\varphi = e_1 \cdots e_r e_{r+2} \cdots e_{r+s+1}$ um

elemento básico de $Cl_{r,s}$, pelo fato de $f \circ j = s$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 f(\varphi) &= f(e_1 \cdots e_r e_{r+2} \cdots e_{r+s+1}) \\
 &= f(e_1) \cdots f(e_r) f(e_{r+2}) \cdots f(e_{r+s+1}) \\
 &= s(e_1) \cdots s(e_r) s(e_{r+2}) \cdots s(e_{r+s+1}) \\
 &= e_{r+1} e_1 \cdots e_{r+1} e_r e_{r+1} e_{r+2} \cdots e_{r+1} e_{r+s+1} \\
 &= \psi.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Note que ψ é um elemento básico de $Cl_{r+1,s}^0$ e, uma vez que, f é um homomorfismo de álgebras podemos estender o resultado em 2.51 para qualquer elemento de $Cl_{r,s}$. Portanto, segue o isomorfismo desejado. \square

Observação 11. *A ideia de encontrarmos isomorfismos de Álgebras de Clifford com a subálgebra par, é pelo fato de o grupo spin estar contido nessa subálgebra e, com isso, obtemos alguns resultados importantes quando formos estudar representações.*

Os resultados que seguem abaixo nos fornecem uma maneira de generalizar o produto de Clifford definido em (2.15) para o produto $v \cdot \varphi$, onde $v \in \mathbb{R}^n$ e $\varphi \in Cl_n$.

Proposição 19. *Seja $L : Cl_n \rightarrow Cl_n$ uma aplicação linear definida por*

$$L(\varphi) = - \sum_j e_j \varphi e_j \tag{2.52}$$

onde e_1, \dots, e_n uma base ortonormal de \mathbb{R}^n . Defina $\tilde{L} = \alpha \circ L$, com isso os autoespaços de \tilde{L} são imagens canônicas de $\Lambda^p \equiv \Lambda^p \mathbb{R}^n$ em Cl_n . De fato, $\tilde{L}|_{\Lambda^p} = (n - 2p)id$

Demonstração. Basta considerar $\varphi = e_1 \dots e_p$. \square

Exemplo 13. *Tome $\varphi = e_1 e_2$, onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Assim*

$$\begin{aligned}
 L(\varphi) &= L(e_1 e_2) \\
 &= -e_1 e_1 e_2 e_1 - e_2 e_1 e_2 e_2 - e_3 e_1 e_2 e_3 \\
 \text{com} \quad &= e_2 e_1 + e_2 e_1 + e_1 e_2 \\
 &= e_2 e_1 = -e_1 \wedge e_2 \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3
 \end{aligned}$$

Agora vamos definir uma contração em $\Lambda \mathbb{R}^n$ que usaremos no produto de Clifford mais geral. Considere a aplicação,

$$\begin{aligned}
 (v|) : \Lambda^p \mathbb{R}^n &\longrightarrow \Lambda^{p-1} \mathbb{R}^n \\
 (v_1 \wedge \dots \wedge v_p) &\longmapsto \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \langle v_i, v \rangle v_1 \wedge \dots \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_p.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Dizemos que $v|$ é a contração do subespaço $\Lambda^p \mathbb{R}^n$ no $\Lambda^{p-1} \mathbb{R}^n$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $v[(\varphi \wedge \psi)] = (v[\varphi] \wedge \psi) + (-1)^p \varphi \wedge (v[\psi]), \quad \forall \varphi, \psi \in \Lambda^p \mathbb{R}^n;$
2. $v[v[\]] = 0.$

Desta mesma forma, o produto interior estende-se para todos elementos de $\Lambda \mathbb{R}^n$, i.e, podemos definir uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \Lambda \mathbb{R}^n \times \Lambda \mathbb{R}^n &\longrightarrow \Lambda \mathbb{R}^n \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto v[(\varphi \wedge \psi)] \end{aligned} \tag{2.54}$$

Proposição 20. *Com respeito ao isomorfismo canônico $Cl_n \cong \Lambda \mathbb{R}^n$, a multiplicação de Clifford entre $v \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $\varphi \in Cl_n$ pode ser dada por*

$$v\varphi = v \wedge \varphi - v[\varphi].$$

2.1.2 Classificação

Nesta seção daremos uma descrição explícita das álgebras $Cl_{r,s}$ e sua relação com as álgebras de matrizes sobre \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H} . Os casos mais simples já foram apresentados na seção anterior, nos exemplos 9, 10, 11 e 12. Agora vamos apresentar algumas formas de generalizar esses exemplos.

Teorema 6. *Existem os isomorfismos*

1. $Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \cong Cl_{0,n+2}$
2. $Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n+2,0}$
3. $Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1} \cong Cl_{r+1,s+1}$

Demonstração. A ideia principal é usar a propriedade universal da Álgebra de Clifford. Vamos fazer o primeiro isomorfismo e os demais podem ser encontrados em (LAWSON; MICHELSON, 2016) na página 25.

Seja $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ uma base q -ortonormal para $\mathbb{R}^{0,n+2}$, então $q(e_i) = -1$ para $1 \leq i \leq n+2$. Considere também $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ e $\{e'_1, e'_2\}$ bases q -ortonormais que geram $Cl_{n,0}$ e $Cl_{0,2}$, respectivamente.

Tome uma aplicação $s : \mathbb{R}^{0,n+2} \longrightarrow Cl_{n,0} \hat{\otimes} Cl_{0,2}$, definida por

$$f(e_i) = \begin{cases} \tilde{e}_i \otimes e'_1 e'_2 & \text{para } 1 \leq i \leq n \\ 1 \otimes e'_{i-n} & \text{para } n+1 \leq i \leq n+2. \end{cases} \tag{2.55}$$

Como o produto tensorial se comporta linearmente com o produto de vetores, segue que j estende linearmente a $\mathbb{R}^{0,n+2}$.

Observe que, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ temos que

$$\begin{aligned}
s(e_i)s(e_j) + s(e_j)s(e_i) &= (\tilde{e}_i \otimes e'_1 e'_2)(\tilde{e}_j \otimes e'_1 e'_2) + (\tilde{e}_j \otimes e'_1 e'_2)(\tilde{e}_i \otimes e'_1 e'_2) \\
&= (-1)^{\deg(e'_1 e'_2)\deg(\tilde{e}_j)} \tilde{e}_i \tilde{e}_j \otimes e'_1 e'_2 e'_1 e'_2 + \\
&+ (-1)^{\deg(e'_1 e'_2)\deg(\tilde{e}_i)} \tilde{e}_j \tilde{e}_i \otimes e'_1 e'_2 e'_1 e'_2 \\
&= (\tilde{e}_i \tilde{e}_j + \tilde{e}_j \tilde{e}_i) \otimes (-1)(e'_1)^2 (e'_2)^2 \\
&= -2\delta_{ij} \cdot 1 \otimes (-1) \\
&= 2\delta_{ij}(1 \otimes 1)
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Se $i \leq n$ e $j \geq n+1$, temos

$$\begin{aligned}
s(e_i)s(e_j) + s(e_j)s(e_i) &= (\tilde{e}_i \otimes e'_1 e'_2)(1 \otimes e'_{j-n}) + (1 \otimes e'_{j-n})(\tilde{e}_i \otimes e'_1 e'_2) \\
&= -(\tilde{e}_i \otimes e'_1 e'_2 e'_{j-n}) + (\tilde{e}_i \otimes e'_{j-n} e'_1 e'_2) \\
&= -\tilde{e}_i \otimes e'_{j-n} e'_1 e'_2 + \tilde{e}_i \otimes e'_{j-n} e'_1 e'_2 \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Se $n+1 \leq i, j \leq n+2$, temos

$$\begin{aligned}
s(e_i)s(e_j) + s(e_j)s(e_i) &= (1 \otimes e'_{i-n})(1 \otimes e'_{j-n}) + (1 \otimes e'_{j-n})(1 \otimes e'_{i-n}) \\
&= -(1 \otimes e'_{i-n} e'_{j-n}) - (1 \otimes e'_{j-n} e'_{i-n}) \\
&= -1 \otimes (e'_{i-n} e'_{j-n} + e'_{j-n} e'_{i-n}) \\
&= 2\delta_{ij}(1 \otimes 1).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Logo, para todo $1 \leq i \leq n+2$, temos

$$\begin{aligned}
j(e_i)^2 &= \frac{1}{2}(j(e_i)j(e_i) + j(e_i)j(e_i)) \\
&= \frac{1}{2}(2\delta_{ij} \cdot (1 \otimes 1)) \\
&= \delta_{ij}(1 \otimes 1)
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Um vez que j é linear, vale que $j(v)^2 = -q(v)(1 \otimes 1)$, para todo $v \in \mathbb{R}^{0,n+2}$. O resultado segue da proposição 5.

□

Proposição 21. *Valem os seguintes isomorfismos de álgebras:*

1. $\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{R}(m) \cong \mathbb{R}(nm)$ para todo n, m .
2. $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(n)$ para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} e para todo n .
3. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.
4. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2)$.

5. $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$.

Demonstração. Os isomorfismos 1 e 2 são facilmente verificados. Para provar 3, defina uma aplicação $\varphi : \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned} (1, 0) &\longmapsto \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + i \otimes i) \\ (0, 1) &\longmapsto \frac{1}{2}(1 \otimes 1 - i \otimes i) \end{aligned} \quad (2.60)$$

φ é sobrejetora, pois $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\left\{\frac{1}{2}(1 \otimes 1 + i \otimes i), \frac{1}{2}(1 \otimes 1 - i \otimes i)\right\}$ geram $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ e $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, respectivamente, além disso, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$. Portanto, φ é um isomorfismo.

Para 4, considere \mathbb{H} como um \mathbb{C} -módulo pela multiplicação por escalar a esquerda. Agora, defina uma aplicação \mathbb{R} -bilinear $\xi : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ por $\xi(\lambda, a)(x) = \lambda x \bar{a}$. Como sempre temos uma aplicação \mathbb{R} -bilinear entre $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ e $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$, podemos estender ξ , pela propriedade universal em \otimes , a uma aplicação \mathbb{R} -linear $f : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$.

Verificaremos que f é um homomorfismo de álgebras e, posteriormente um isomorfismo. De fato, para cada $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$ e $a, b, x \in \mathbb{H}$ temos

$$\begin{aligned} \xi(\lambda, a) \circ \xi(\beta, b)(x) &= \xi(\lambda, a)(\beta x \bar{b}) \\ &= \lambda \beta x \bar{a} \bar{b} \\ &= \xi(\lambda \beta, ab)(x). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Disso segue que f é um homomorfismo de álgebras. A injetividade é verificada apenas usando os elementos da base canônica de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$, $\{1 \otimes 1, 1 \otimes i, 1 \otimes j, 1 \otimes k, i \otimes 1, i \otimes i, i \otimes j, i \otimes k, j \otimes 1, j \otimes i, j \otimes j, j \otimes k, k \otimes 1, k \otimes i, k \otimes j, k \otimes k\}$. Para a sobrejetividade basta observar que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) = 4^2 = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}))$. O isomorfismo desejado vem do fato de que $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \cong \mathbb{C}(2)$.

O isomorfismo 5, segue semelhante ao 4, alterando $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ e $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ para $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ e $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, respectivamente. \square

Além das Álgebras de Clifford sobre \mathbb{R} , também temos sobre \mathbb{C} , que são geradas a partir da complexificação das álgebras sobre \mathbb{R} , i.e, dado qualquer par (r, s) , a Álgebra de Clifford sobre \mathbb{C} , denotada por $Cl_{r,s}$, é definida como segue

$$Cl_{r,s} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl(\mathbb{C}^{r,s}, q \otimes \mathbb{C}).$$

Onde $q \otimes \mathbb{C}$ é a forma quadrática em $\mathbb{C}^{r,s}$, que é definida por $q_{\mathbb{C}}(z) = \sum_{i=1}^{r+s} (z_i)^2$. Note que, o mesmo ocorre para as álgebras Cl_n e \mathbb{C}_n^* , produzindo a seguinte sequência de isomorfismos de álgebras:

$$Cl_n \cong Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl_{n-1,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl_{n-2,2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \cdots Cl_{1,n-1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl_{0,n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

A partir da proposição 21, podemos deduzir a seguinte tabela.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$Cl_{n,0}$	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$Cl_{0,n}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
Cl_n	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$

Tabela 1 – Classificação das álgebras $Cl_{n,0}$, $Cl_{0,n}$ e Cl_n , para $1 \leq n \leq 8$.

Até agora vimos alguns resultados sobre Álgebra de Clifford que facilitam a sua classificação, abaixo segue mais um resultado que concerne esse fato, mais especificamente sobre a periodicidade dessas álgebras.

Teorema 7. *Para todo $n \geq 0$, existem periodicidade de isomorfismos.*

1. $Cl_{n+8,0} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}$.
2. $Cl_{0,n+8} \cong Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8}$.
3. $Cl_{n+2} \cong Cl_n \otimes_{\mathbb{C}} Cl_2$.

onde $Cl_{8,0} = Cl_{0,8} = \mathbb{R}(16)$ e $Cl_2 = \mathbb{C}(2)$.

Demonstração. (LAWSON; MICHELSON, 2016) página 28. □

Unindo a classificação determinada na tabela I com o teorema 6 item 3 podemos encontrar explicitamente as álgebras $Cl_{r,s}$ para r e s natural. Abaixo segue uma tabela com essas álgebras para $0 \leq r, s \leq 8$.

$r \times s$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4) \oplus \mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$
5	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{H}(32) \oplus \mathbb{H}(32)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(32) \oplus \mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{H}(64)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(64) \oplus \mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{C}(128)$
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(128) \oplus \mathbb{R}(128)$	$\mathbb{C}(128)$

Tabela 2 – Classificação das álgebras $Cl_{r,s}$, para $0 \leq r, s \leq 8$.

A tabela 2 pode ser generalizada de acordo com os valores de r e s . Segue abaixo um proposição que especifica esse fato

Proposição 22. *As Álgebras de Clifford $Cl_{r,s}$ são isomorfas a alguma das álgebras de matrizes $\mathbb{R}(2^n)$, $\mathbb{R}(2^n) \oplus \mathbb{R}(2^n)$, $\mathbb{C}(2^n)$, $\mathbb{H}(2^n)$ ou $\mathbb{H}(2^n) \oplus \mathbb{H}(2^n)$, dependendo dos valores de r e s .*

$r + s$	$s - r$	$Cl_{r,s}$
$2n$	$0, 2 \pmod{8}$	$\mathbb{R}(2^n)$
$2n + 1$	$1 \pmod{8}$	$\mathbb{R}(2^n) \oplus \mathbb{R}(2^n)$
$2n + 1$	$3, 7 \pmod{8}$	$\mathbb{C}(2^n)$
$2n + 2$	$4, 6 \pmod{8}$	$\mathbb{H}(2^n)$
$2n + 3$	$5 \pmod{8}$	$\mathbb{H}(2^n) \oplus \mathbb{H}(2^n)$

Tabela 3 – Classificação das álgebras $Cl_{r,s}$ de acordo com os valores de r e s .

Corolário 2. *As Álgebras de Clifford são do tipo real, complexa ou quatérnica quando $s - r = 0, 1, 2$, $s - r = 3, 7$ ou $s - r = 4, 5, 6 \pmod{8}$, respectivamente.*

2.1.3 Representações

O estudo de representação é muito útil, uma vez que tem como objetivo principal interpretar problemas do ambiente algébrico usando operadores lineares, facilitando as suas análises. Dessa forma, o escopo desta seção é apresentar uma representação da Álgebra de Clifford, mais especificamente, a representação Spin, tendo em vista que é a base para o estudo de estrutura spin em fibrados. Apresentamos uma breve introdução sobre estrutura linear quase complexa, que pode ser encontrada junto com uma generalização para variedades suaves em (KOBAYASHI; NOMIZU, 1969), pois definimos representação complexa de uma Álgebra de Clifford e, posteriormente, enunciamos a definição de módulo para auxiliar no conceito de representação, que pode ser encontrado em (ATIYAH, 2018).

2.1.3.1 Estrutura quase complexa

Definição 24. *Dado uma espaço vetorial W uma estrutura quase-complexa em W é uma aplicação linear real $J : W \longrightarrow W$ tal que $J^2 = -id$.*

Observação 12. *Seja $V = (W, J)$ o espaço vetorial W com a estrutura quase-complexa J . Se $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, temos que $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$. Isso ocorre, pois se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V , como espaço vetorial complexo, temos que $\{e_1, J(e_1), \dots, e_n, J(e_n)\}$ é uma base de V como espaço vetorial real.*

Algebricamente, dado W um espaço vetorial real e J um operador satisfazendo a definição 24, para cada $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$, obtemos um \mathbb{C} -espaço vetorial, $V = (W, J)$, com a multiplicação por escalar dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times W &\longrightarrow W \\ (\lambda, w) &\longmapsto \lambda \cdot w := xw + yJ(w) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Exemplo 14. *Seja $W = \mathbb{R}^2$ um espaço vetorial real. Da álgebra linear, sabemos que $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ como espaço vetorial, no qual esse isomorfismo pode ser dado por $(x+iy) \mapsto (x, y)$. Observe que $i(x+iy) = xi - y$ e pelo isomorfismo, agora mencionado, $i(x, y) = (-y, x)$.*

Dessa forma, podemos definir um operador linear $J = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $J(x, y) = (-y, x)$ cuja representação matricial é dada pela seguinte matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Onde $J^2 = -Id$. Logo, $V = (\mathbb{R}, J)$ é um espaço vetorial com estrutura quase-complexa.

Assim, podemos pensar no operador J como a multiplicação de todos vetores do espaço vetorial real por i , tendo em vista que $i(a+ib) = ia - b$.

A multiplicação arbitrária de todo vetor em \mathbb{R}^2 por um escalar em \mathbb{C} é dada por

$$\begin{aligned} \lambda(a, b) &= (x + iy)(a, b) \\ &= x(a, b) + yJ(a, b) \\ &= (xa, xb) + (-yb, ya) \\ &= (xa - yb, xb + ya). \end{aligned} \quad (2.64)$$

para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, como definido em (2.62).

Proposição 23. *Somente espaços vetoriais de dimensão par admitem uma estrutura quase complexa.*

Demonstração. Suponha que existe um espaço vetorial de dimensão ímpar com uma estrutura quase complexa, mais especificamente, considere V esse espaço vetorial e J a estrutura quase complexa. Como $J^2 = -id$, temos que

$$\begin{aligned} \det(J^2) &= (-1)^{\dim V} \\ \det(J)^2 &= -1. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Absurdo, uma vez que $\det(J) \in \mathbb{R}$. □

2.1.3.2 Representação das Álgebras de Clifford Cl_n e $\mathbb{C}l_n$

Antes de enunciar a definição de representação será dado o conceito de um módulo.

Definição 25. *Seja R um anel com unidade. Um R -módulo a esquerda é um grupo abeliano aditivo M , munido de uma aplicação $\cdot : R \times M \longrightarrow M$ tal que*

1. $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$;
2. $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$;
3. $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$;
4. $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$.

Para todo $r, s \in R$ e $m, n \in M$.

Intuitivamente, estamos munindo um grupo abeliano com uma estrutura de espaço vetorial. Note que, pela definição 25, a estrutura de um R -módulo sobre um grupo abeliano M é equivalente a definir um aplicação $\rho : R \longrightarrow \text{Hom}(M)$ tal que $\rho(s)(m) = s \cdot m$.

Pelo exemplo 14, \mathbb{R}^2 munido com o operador J , satisfazendo o produto definido em (2.62), é um \mathbb{C} -módulo.

Definição 26. *Seja \mathbb{K} um corpo. Dizemos que A é uma álgebra associativa (unitária) sobre \mathbb{K} , com operações compatíveis de soma, multiplicação e multiplicação por escalares, se A é um anel sobre as operações de soma e multiplicação, e um \mathbb{K} -espaço vetorial sobre a multiplicação por escalar.*

Uma definição mais geral é utilizando um anel R em vez de um corpo, nesse caso uma álgebra associativa A é um R -módulo com uma aplicação R -bilinear $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ definida por $(a, b) \longmapsto ab$ tal que $(ab)c = a(bc)$, para $a, b, c \in A$.

Definição 27. *Uma \mathbb{K} -representação de uma álgebra associativa e com unidade A sobre \mathbb{K} , é um espaço vetorial V equipado com um homomorfismo de álgebras $\rho : A \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$, denotado por $\rho(a)(v) = a \cdot v$.*

Exemplo 15. *Seja $A = \mathbb{C}$. Então uma representação de \mathbb{C} é dada por $\rho : \mathbb{C} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que, para cada $z \in \mathbb{C}$ com $z = a + ib$, definimos*

$$\rho(z) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Facilmente verifica-se que ρ satisfaz a definição 27, mais especificamente, $\rho(z \cdot w) = \rho(z)\rho(w)$ e $\rho(1) = I$.

Definição 28. Uma subrepresentação de uma representação V é um subespaço W tal que ρ é W -invariante, i.e., $\rho(a)W \subseteq W$, para todo $a \in A$.

Agora que já foram enunciados alguns conceitos chave de representações de álgebras, iniciamos o estudo de representação das Álgebras de Clifford. Usamos a mesma notação que foi apresentada nas definições acima, salvo quando mencionarmos representação ρ em vez de V . Muitos detalhes sobre Álgebra de Clifford são compreendidos através de suas representações, como por exemplo suas classificações estudadas na seção anterior.

Definição 29. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo k e q uma forma quadrática em V . Considere $\mathbb{K} \supseteq k$ um corpo. Então uma \mathbb{K} -representação da álgebra de Clifford $Cl(V, q)$ é um homomorfismo de \mathbb{K} -álgebras

$$\rho : Cl(V, q) \longrightarrow Hom_{\mathbb{K}}(W, W) \quad (2.67)$$

Definida por $\rho(\varphi)(w) = \varphi w$, para todo $\varphi \in Cl(V, q)$ e $w \in W$, onde a operação entre φ e w é o produto de Clifford. O espaço W é chamada de um $Cl(V, q)$ -módulo sobre \mathbb{K} .

Definição 30. Dizemos que uma representação ρ é redutível se o espaço vetorial W pode ser escrito como uma soma direta não trivial

$$W = W_1 \oplus W_2$$

tal que $\rho(\varphi)(W_i) \subseteq W_i$ para $i = 1, 2$ e para todo $\varphi \in Cl(V, q)$. Além disso, $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, onde $\rho_i(\varphi) = \rho(\varphi)|_{W_i}$.

Quando ρ não for redutível, dizemos que é irredutível.

Proposição 24. Toda \mathbb{K} -representação ρ de $Cl(V, q)$ pode ser decomposta numa soma direta $\rho = \bigoplus_{i=1}^m \rho_i$ de representações irredutíveis.

Definição 31. Duas representações $\rho_i : Cl(V, q) \longrightarrow Hom_{\mathbb{K}}(W_i, W_i)$, $i = 1, 2$, são ditas equivalentes se existe um isomorfismo \mathbb{K} -linear $F : W_1 \longrightarrow W_2$ tal que

$$F \circ \rho_1(\varphi) \circ F^{-1} = \rho_2(\varphi)$$

para todo $\varphi \in Cl(V, q)$.

Na seção anterior vimos que cada álgebra $Cl_{r,s}$ é da forma $\mathbb{K}(2^n)$ ou $\mathbb{K}(2^n) \oplus \mathbb{K}(2^n)$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} . Temos da teoria de representação que essas álgebras são simples.

Teorema 8. Seja $\mathbb{K}(n)$ a álgebra de \mathbb{K} -matrizes $n \times n$ como uma álgebra sobre \mathbb{R} e $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} . Então a representação natural ρ de $\mathbb{K}(n)$ no espaço vetorial \mathbb{K}^n é, por equivalência, apenas a representação real usual de $\mathbb{K}(n)$.

Demonstração. (LAWSON; MICHELSON, 2016) página 32. □

Observação 13. O teorema 8, basicamente, está dizendo que a representação da álgebra de matrizes é dada naturalmente pela ação à esquerda de $\mathbb{K}(n)$ em \mathbb{K}^n .

Do teorema acima, temos que a álgebra $\mathbb{K}(n) \oplus \mathbb{K}(n)$ tem exatamente duas classes de equivalência de representações reais irredutíveis. Elas são dadas por $\rho_1(\varphi_1, \varphi_2) = \rho(\varphi_1)$ e $\rho_2(\varphi_1, \varphi_2) = \rho(\varphi_2)$ agindo em \mathbb{K}^n .

Como foi mencionado no primeiro parágrafo dessa seção, o estudo de representação para Álgebra de Clifford é importante para compreensão de alguns resultados que ainda veremos nesse trabalho. É natural pensar que quanto mais representações irredutíveis não equivalentes uma álgebra tem, mais simples é de se trabalhar com ela. Segue abaixo um resultado que calcula o número de representações não equivalentes de $Cl_{r,s}$ e $\mathbb{C}l_n$.

Teorema 9. Seja $v_{r,s}$ o número de representações reais irredutíveis não equivalentes de $Cl_{r,s}$ e $v_n^{\mathbb{C}}$ é o complexo. Então,

$$v_{r,s} = \begin{cases} 2, & \text{se } (r + 1 - s) \equiv 0 \pmod{4} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.68)$$

e

$$v_n^{\mathbb{C}} = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad (2.69)$$

Demonstração. (LAWSON; MICHELSON, 2016) página 32. □

Antes de enunciar a próxima proposição precisamos de um resultado sobre a classificação de $\mathbb{C}l_n$.

Proposição 25. Para todo $n \geq 0$, existem os isomorfismos:

1. $\mathbb{C}l_{n+2} \cong \mathbb{C}l_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_n$.
2. $\mathbb{C}l_{2n} \cong \mathbb{C}(2^n)$
3. $\mathbb{C}l_{2n+1} \cong \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n)$.

Demonstração. 1. Considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ os geradores de $\mathbb{C}l_n$ e $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ os geradores de $\mathbb{C}l_2$. Então podemos definir o isomorfismo em 1 apenas usando os geradores, da seguinte forma: $e'_j = i\tilde{e}_1\tilde{e}_2 \otimes e_j$, $j = 1, \dots, n$ e $e'_{n+k} = \tilde{e}_k \otimes 1$, $k = 1, 2$, onde $\{e'_1, \dots, e'_n, e'_{n+1}, e'_{n+2}\}$ geram $\mathbb{C}l_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_n$.

2 e 3. Esses dois itens seguem do mesmo argumento, uma vez que $\mathbb{C}l_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}l_2 = \mathbb{C}(2)$. Agora basta usar o item 1 para concluir. □

Seguem abaixo algumas notações que serão usadas na próxima tabela.

1. $d_n = \dim_{\mathbb{R}}(W)$, W é um \mathbb{R} -módulo irredutível para Cl_n .
2. $d_n^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{C}}(W')$, W' é um módulo complexo irredutível para Cl_n .

Proposição 26. Para $1 \leq n \leq 8$ os elementos $v_n = v_{n,0}$, $v_n^{\mathbb{C}}$, d_n , $d_n^{\mathbb{C}}$, \mathbb{K}_n , são dados pela tabela abaixo:

n	Cl_n	v_n	d_n	\mathbb{K}_n	Cl_n	$v_n^{\mathbb{C}}$	$d_n^{\mathbb{C}}$
1	\mathbb{C}	1	2	\mathbb{C}	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	2	1
2	\mathbb{H}	1	4	\mathbb{H}	$\mathbb{C}(2)$	1	2
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	2	4	\mathbb{H}	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	2	2
4	$\mathbb{H}(2)$	1	8	\mathbb{H}	$\mathbb{C}(4)$	1	4
5	$\mathbb{C}(4)$	1	8	\mathbb{C}	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	2	4
6	$\mathbb{R}(8)$	1	8	\mathbb{R}	$\mathbb{C}(8)$	1	8
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	2	8	\mathbb{R}	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	2	8
8	$\mathbb{R}(16)$	1	16	\mathbb{R}	$\mathbb{C}(16)$	1	16

Tabela 4 – Classificação de Cl_n , $v_n = v_{n,0}$, $v_n^{\mathbb{C}}$, d_n , $d_n^{\mathbb{C}}$ para $1 \leq n \leq 8$.

Na seção anterior mencionamos a importância do elemento de volume para as representações, mais especificamente, as irredutíveis. Antes de começar com os resultados, vamos definir uma \mathbb{C} -representação e o elemento de volume complexo.

Definição 32. Uma \mathbb{C} -representação de Cl_n pode ser vista como uma representação real $\rho : Cl_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$ tal que $\rho(\varphi) \circ J = J \circ \rho(\varphi)$, para todo $\varphi \in Cl_n$. No qual J é a estrutura quase complexa em W .

Observação 14. Toda \mathbb{C} -representação de Cl_n induz uma representação em Cl_n , uma vez que $Cl_n = Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Essa indução é dada por $\rho^{\mathbb{C}}(\varphi \otimes z) = z\rho(\varphi)$.

Definição 33. O elemento de volume complexo em Cl_n é definido por $\omega_{\mathbb{C}} = i^{\frac{n+1}{2}}\omega$.

Temos consequências análogas ao elemento de volume real, com pequenas variações. O primeiro fato de semelhança é que se n é ímpar então $\omega_{\mathbb{C}}$ é central, assim como ω . A diferença se encontra no seguinte detalhe:

$$\begin{cases} \omega^2 = 1, & \text{se } n \equiv 3 \text{ ou } 4 \pmod{4} \\ \omega_{\mathbb{C}}^2 = 1, & \text{para todo } n. \end{cases} \quad (2.70)$$

Além desses resultados, também temos decomposições algébricas de Cl_n e $\mathbb{C}l_n$ que dependem de n , ω e $\omega_{\mathbb{C}}$.

$$\begin{cases} Cl_n = Cl_n^+ \oplus Cl_n^-, & \text{para } n \equiv 3 \pmod{4} \\ \mathbb{C}l_n = \mathbb{C}l_n^+ \oplus \mathbb{C}l_n^-, & \text{para } n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (2.71)$$

Onde $Cl_n^{\pm} = (1 \pm \omega)Cl_n$ e $\mathbb{C}l_n^{\pm} = (1 \pm \omega_{\mathbb{C}})\mathbb{C}l_n$. Essa decomposição será usada em algumas demonstrações que daremos ao longo dessa seção.

A próxima proposição é um resultado importante, pois ela fornece as únicas possibilidades de representações irredutíveis sobre o elemento de volume.

Proposição 27. *Considere $\rho : Cl_n \longrightarrow Hom_{\mathbb{R}}(W, W)$ uma representação real irredutível com $n = 4m + 3$. Então uma das seguintes possibilidades acontece*

$$\rho(\omega) = id \quad \text{ou} \quad \rho(\omega) = -id. \quad (2.72)$$

Além disso, essas representações não são equivalentes.

Demonstração. Seja ρ uma representação irredutível com $n = 4m + 3$. Então por (2.70) segue que $\omega^2 = 1$. Com isso, $\rho(\omega)^2 = \rho(\omega^2) = \rho(1) = id$.

Da teoria de autovalores e autovetores, sabemos que o polinômio minimal que anula o operador $\rho(\omega)$ é dado por $\lambda^2 - 1$. Dessa forma, os autovalores associados a esse operador são ± 1 . Considere W^+ e W^- os respectivos autoespaços.

Para terminar a primeira parte dessa proposição, ainda falta mostrar que esses autoespaços são Cl_n -invariantes. Como $n = 4m + 3$ segue que ω é central, i.e, $\varphi\omega = \omega\varphi$, para todo $\varphi \in Cl_n$.

Assim, dado $v \in W^-$ e $\varphi \in Cl_n$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho(\omega)(\rho(\varphi)(v)) &= \rho(\omega\varphi)(v) \\ &= \rho(\varphi\omega)(v) \\ &= \rho(\varphi)(\rho(\omega)(v)) \\ &= -\rho(\varphi)(v). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Logo, $\rho(\varphi)(v) \in W^-$, para todo $\varphi \in Cl_n$. Analogamente é mostrado que W^+ é Cl_n -invariante.

Por fim, resta mostrar que essas representações não são equivalentes, mas isso é claro quando aplicamos a definição 31 em $\rho_1(\omega) = id$ e $\rho_2(\omega) = -id$. \square

Essas mesmas afirmações são verdadeiras para o caso $\mathbb{C}l_n$ com n ímpar.

Proposição 28. *Seja $\rho : Cl_n \longrightarrow Hom_{\mathbb{R}}(W, W)$ um representação irredutível, onde $n = 4m$ e considere a decomposição $W = W^+ \oplus W^-$, onde $W^{\pm} = (1 \pm \rho(\omega))W$. Então cada um*

dos subespaços W^+ e W^- são invariantes sobre a subálgebra par Cl_n^0 . Sobre o isomorfismo $Cl_n^0 \cong Cl_{n-1}$, esses espaços correspondem a duas representações reais irredutíveis de Cl_{n-1} .

Demonstração. Vamos mostrar que W^+ é invariante sobre Cl_n^0 e para W^- segue de igual modo. Como n é par temos que $\varphi\omega = \omega\alpha(\varphi) = \omega\varphi$.

Considere $v \in W^+$, então existe $u \in W$ tal que $v = (1 + \rho(\omega))u$. Logo, para todo $\varphi \in Cl_n^0$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho(\varphi)(v) &= \rho(\varphi)(1 + \rho(\omega))(u) \\ &= \rho(\varphi)(u) + \rho(\varphi\omega)(u) \\ &= \rho(\varphi)(u) + \rho(\omega\varphi)(u) \\ &= \rho(\varphi)(u) + \rho(\omega)\rho(\varphi)(u) \\ &= (1 + \rho(\omega))\rho(\varphi)(u) \in W^+. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Para verificar que W^+ e W^- correspondem a duas representações irredutíveis em Cl_{n-1} não equivalentes, observe que $\omega' = e_1 \cdots e_{n-1} \in Cl_{n-1}$ pode ser identificado, através do isomorfismo $Cl_{n-1} \cong Cl_n^0$, com $\omega \in Cl_n^0$. De fato,

$$\begin{aligned} (e_1 e_n) \cdots (e_{n-1} e_n) &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} e_1 \cdots e_{n-1} e_n^{n-1} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} e_1 \cdots e_{n-1} e_n^{-1} e_n^n \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1} e_1 \cdots e_{n-1} e_n \\ &= (-1)(-1)e_1 \cdots e_{n-1} e_n \\ &= e_1 \cdots e_{n-1} e_n. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Disso, segue que $\rho(\omega') \cong id$ em W^+ e $\rho(\omega') \cong -id$ em W^- e pela proposição 27 temos que essas são as duas representações não equivalentes de Cl_{n-1} . \square

Note que, a invariância dos subespaços W^\pm é sobre a subálgebra par, Cl_n^0 , sendo de grande importância para o estudo de representação spin, uma vez que $Spin_n \subset Cl_n^0$. Agora vamos definir e ver alguns resultados da representação spin real e complexa. Logicamente, veremos algumas consequências direta das proposições acima.

Definição 34. A representação spin real de $Spin_n$ é o homomorfismo

$$\Delta_n : Spin_n \longrightarrow GL(S) \tag{2.76}$$

dada pela restrição de uma representação real irredutível $Cl_n \longrightarrow Hom_{\mathbb{R}}(S, S)$, para $Spin_n \subset Cl_n^0 \subset Cl_n$.

A próxima proposição fornece decomposições da representação spin em irredutíveis de acordo com o valor de n .

Proposição 29. *Seja Δ_n a representação spin de $Spin_n$. Então temos as seguintes premissas:*

1. *Se para $n \equiv 3 \pmod{4}$ então Δ_n não depende da escolha da representação real irredutível de Cl_n .*
2. *Se $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ então Δ_n ou é irredutível ou é soma direta de duas representações irredutíveis equivalentes.*
3. *Se $n \equiv 0 \pmod{4}$ então existe a decomposição*

$$\Delta_{4m} = \Delta_{4m}^+ \oplus \Delta_{4m}^- \quad (2.77)$$

onde Δ_{4m}^+ e Δ_{4m}^- são representações irredutíveis não equivalentes de $Spin_{4m}$.

Demonstração. Serão provados apenas os itens 1. e 3., mas o 2. pode ser encontrado em (LAWSON; MICHELSON, 2016) página 36.

1. Como $n = 4m + 3$ segue que $\alpha(Cl_n^\pm) = Cl_n^\mp$, uma vez que $\alpha(\omega) = -\omega$. Para analisar Δ_n em Cl_n vamos usar a decomposição dada em (2.71) de Cl_n e observar como que Cl_n^0 pode ser representada nessa decomposição.

Considere $x \in Cl_n^+ \oplus Cl_n^-$, então existem $\varphi, \psi \in Cl_n$ tais que $x = (1 + \omega)\varphi + (1 - \omega)\psi$. Como queremos que $x \in Cl_n^0$ temos que

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= x \\ \alpha((1 + \omega)\varphi + (1 - \omega)\psi) &= (1 + \omega)\varphi + (1 - \omega)\psi \\ (1 - \omega)\alpha(\varphi) + (1 + \omega)\alpha(\psi) &= (1 + \omega)\varphi + (1 - \omega)\psi. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Isso só acontece quando $\alpha(\varphi) = \psi$ e $\alpha(\psi) = \varphi$. Logo, temos a seguinte identificação

$$Cl_n^0 = \{(\varphi, \alpha(\varphi)) \in Cl^+ \oplus Cl^- : \varphi \in Cl^+\}.$$

Como α é um automorfismo de Cl_n , obtemos duas representações irredutíveis que diferem por α , i.e, existem $\rho(\varphi)(v) = \varphi \cdot v$ e $\tilde{\rho}(\varphi)(v) = \alpha(\varphi) \cdot v$, para todo $\varphi \in Cl_n$ e $v \in S$. Portanto, como $Spin_n \subset Cl_n^0$ e $\alpha(\varphi) = \varphi$ para cada $\varphi \in Cl_n^0$, segue que ρ e $\tilde{\rho}$ são as mesmas representações.

3. Sabemos que essa decomposição existe, pela proposição 28. Precisamos mostrar que Δ_{4m}^\pm são irredutíveis. Suponha que Δ_{4m}^+ seja redutível, então existe $V \subset S^+$ subespaço próprio invariante por Δ_{4m}^+ , i.e, $\Delta_{4m}^+(x)v \in V$ para cada $v \in V$.

Considere $\varphi \in Cl_n^0$. Como $\{1, e_{i_1} \cdots e_{i_r} : r \text{ é par}\}$ forma uma base aditiva para Cl_n^0 , segue que

$$\varphi = a_0 + \sum_{\substack{i_r=2 \\ i_1 < \cdots < i_r}}^n a_{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \cdots e_{i_r} \quad (2.79)$$

Assim, considerando $\rho^+ : Cl_n^0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{R}}(S^+, S^+)$ a representação irredutível de Cl_n^0 tal que $\rho^+|_{Spin_n} = \Delta_{4m}^+$, temos que

$$\begin{aligned} \rho^+(\varphi)(v) &= \rho^+ \left(a_0 + \sum_{\substack{i_r=2 \\ i_1 < \dots < i_r}}^n a_{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \cdots e_{i_r} \right)(v) \\ &= a_0 \rho^+(1)(v) + \sum_{\substack{i_r=2 \\ i_1 < \dots < i_r}}^n a_{i_1 \dots i_r} \rho^+(e_{i_1} \cdots e_{i_r})(v) \\ &= a_0 v + \sum_{\substack{i_r=2 \\ i_1 < \dots < i_r}}^n a_{i_1 \dots i_r} \Delta_{4m}^+(e_{i_1} \cdots e_{i_r})(v). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Por hipótese, temos que $\Delta_{4m}^+(e_{i_1} \cdots e_{i_r})(v) \in V$. Então $\rho^+(\varphi)(v) \in V$ para todo $\varphi \in Cl^0$ e $v \in V$, contradizendo a proposição 28. Portanto, Δ_{4m}^{\pm} são representações irredutíveis não equivalentes. \square

Definição 35. A representação spin complexa de $Spin_n$ é o homomorfismo

$$\Delta_n^{\mathbb{C}} : Spin_n \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(S) \quad (2.81)$$

dada pela restrição de uma representação complexa irredutível $\rho : Cl_n \longrightarrow Hom_{\mathbb{C}}(S, S)$ a $Spin_n$.

Assim como a proposição 29, temos um resultado parecido para o caso complexo, i.e, para representação $\Delta_n^{\mathbb{C}}$.

Proposição 30. As seguintes sentenças são verdadeiras:

1. Se n é ímpar, $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ não depende da escolha da representação irredutível de Cl_n .
2. Se n é par, existe uma decomposição

$$\Delta_{2m}^{\mathbb{C}} = \Delta_{2m}^{\mathbb{C}^+} \oplus \Delta_{2m}^{\mathbb{C}^-} \quad (2.82)$$

numa soma direta de duas representações complexas irredutíveis não equivalentes de $Spin(n)$

Demonstração. As demonstrações desses itens seguem análogas a da proposição 29. \square

Além dessas consequências que já foram mencionadas nesta seção, também temos resultados envolvendo o produto interno em W , que já vimos que é um Cl_n -módulo, logo tem uma estrutura de espaço vetorial. A próxima proposição nos diz que o produto interno em W é compatível com a estrutura de módulo dada por uma representação irredutível de Cl_n .

Proposição 31. *Seja $Cl_n \longrightarrow Hom_{\mathbb{R}}(W, W)$ uma representação real de Cl_n . Então existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em W tal que a multiplicação de Clifford pelos vetores unitários $u \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal, i.e.,*

$$\langle u \cdot w, u \cdot w' \rangle = \langle w, w' \rangle \quad (2.83)$$

para todo $w, w' \in W$ e $u \in \mathbb{R}^n$ com $\|u\| = 1$.

Corolário 3. *Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica discutida na proposição anterior. Então para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$\langle v \cdot w, w' \rangle = -\langle w, v \cdot w' \rangle \quad (2.84)$$

para todo $w, w' \in W$. Isto é, a multiplicação de clifford por qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é uma transformação antissimétrica de W .

Demonstração. Dado $v \in \mathbb{R}^n$ e usando a igualdade $v^2 = -q(v) \cdot 1 = -\|v\|^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle v \cdot w, w' \rangle &= \left\langle \frac{v}{\|v\|} \cdot (v \cdot w), \frac{v}{\|v\|} \cdot w' \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|v\|^2} \langle v^2 \cdot w, v \cdot w' \rangle \\ &= -\frac{q(v)}{\|v\|^2} \langle w, v \cdot w' \rangle \\ &= -\langle w, v \cdot w' \rangle. \end{aligned} \quad (2.85)$$

□

3 Fibrados e Conexões

3.1 Noções Básicas de Grupo de Lie e Álgebra de Lie

Existe uma teoria extensa sobre grupos e álgebras de Lie que, ao leitor interessado, podem ser encontrada em (MARTIN, 2019). Mas o nosso foco é apenas apresentar os conceitos básicos de grupo e álgebra de Lie para serem usados mais diante, então é suficiente os resultados aqui apresentados.

Definição 36. *Um grupo de Lie é um grupo G munido com uma estrutura suave tal que as operações*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G & e \quad ()^{-1} : G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h & g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

são suaves.

Observação 15. *Pela definição 36, um grupo de Lie é uma variedade suave, então sempre estaremos assumindo que G é paracompacto.*

Seguem abaixo alguns exemplos clássicos de grupo de Lie.

Exemplo 16. *Seja \mathbb{K} um corpo e $M_n(\mathbb{K})$ o grupo de matrizes de ordem n . O grupo linear geral, $Gl(n) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\}$, é um subgrupo aberto de $M_n(\mathbb{K})$ que é uma variedade suave, logo $Gl_n(\mathbb{K})$ é uma variedade suave. A aplicação que associa duas matrizes ao produto delas é suave e a aplicação inversa também, portanto $Gl(n)$ é um grupo de Lie.*

Exemplo 17. *O grupo ortogonal, $O(n) = \{A \in Gl(n) : A \cdot A^t = 1\}$, onde A^t é matriz transposta de A , é um subvariedade mergulhada em $Gl(n)$ e as operações são as mesmas mencionadas no exemplo 16, logo $O(n)$ é um grupo de Lie. O mesmo ocorre com o grupo ortogonal especial, $SO(n) = \{A \in Gl(n) : \det(A) = 1\}$.*

Agora vamos definir ação à direita e à esquerda de um grupo de Lie G numa variedade suave X , pois essas definições são fundamentais para o entendimento dos G -fibrados principais, que veremos na próxima seção.

Definição 37. *Seja uma aplicação $\mu : G \times X \longrightarrow X$ denotada por $\mu(g, x) = g \cdot x$. Dizemos que μ é uma ação à esquerda de X se satisfaz duas condições,*

1. $\mu(e, x) = x$, para todo $x \in X$ e $e \in G$ o elemento neutro;
2. $\mu(gh, x) = \mu(g, \mu(h, x))$ para $g, h \in G$, $x \in X$.

Definição 38. *Seja uma aplicação $\phi : G \times X \longrightarrow X$ denotada por $\phi(g, x) = x \cdot g$. Dizemos que ϕ é uma ação à direita de X se satisfaz duas condições,*

1. $\phi(e, x) = x$, para todo $x \in X$;
2. $\phi(gh, x) = \phi(h, \phi(g, x))$ para $g, h \in G$, $x \in X$.

Observação 16. *A diferença de μ e ϕ está na segunda condição das definições 37 e 38 e não na definição da aplicação.*

A observação 16 fica clara quando pensamos no seguinte exemplo:

Exemplo 18. *Seja G um grupo de Lie e X uma variedade suave. Considere a aplicação $\mu : G \times X \longrightarrow X$ denotada por $\mu(g, x) = g^{-1} \cdot x$, para cada $g \in G$ e $x \in X$. μ é uma ação à direita ou à esquerda? Para responder essa pergunta basta verificarmos se μ satisfaz a segunda condição de uma das definições 38 e 37.*

$$\begin{aligned} \mu(gh, x) &= (gh)^{-1} \cdot x \\ &= h^{-1}g^{-1} \cdot x \\ &= h^{-1} \cdot \mu(g, x) \\ &= \mu(h, \mu(g, x)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Logo, μ é uma ação à direita em X .

Definição 39. *Seja X uma variedade suave e G um grupo de Lie. Dado $x \in X$, definimos a órbita de x por G como o conjunto*

$$G \cdot x = \{g \cdot x \in X : g \in G\} \tag{3.3}$$

Lembremos que cada órbita de X é uma classe de equivalência da seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y \iff \text{existe um } g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x \tag{3.4}$$

Definição 40. *O conjunto dos elementos de G que fixam x é chamado de subgrupo de isotropia ou estabilizador de x e denotamos por*

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

É fácil verificar que G_x é um subgrupo de G para cada $x \in X$ fixado.

Definição 41. *Seja μ uma ação de G em X . Então temos as seguintes definições:*

1. Dizemos μ é efetiva se $\text{Ker}(\mu) = \{g \in G : \mu(g, x) = x\} = \{e\}$, i.e., se $g \cdot x = x$ para todo $x \in X$, assim $g = e$, onde e é o elemento neutro de G .
2. Dizemos que μ é livre se os subgrupos de isotropia se reduzem ao elemento neutro de G , i.e., $G_x = \{e\}$, para cada $x \in X$.
3. Dizemos que μ é transitiva se X é uma órbita de G , equivalentemente, se para cada par $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$.

Agora iremos mencionar alguns resultados importantes de Álgebra de Lie que serão usados neste trabalho, mais especificamente na parte de 1-forma de conexão. Lembremos que G , além de ser um grupo, é uma variedade suave, então todos os resultados de variedades suaves são válidos para G , em particular, podemos calcular o espaço tangente a G em qualquer ponto de G . Dizemos que $T_g G$ é o espaço tangente a G no ponto $g \in G$.

Definição 42. Definimos uma translação à esquerda do grupo de Lie G por $g \in G$, como a aplicação $L_g : G \rightarrow G$, $L_g(h) = gh$, para todo $h \in G$. Semelhantemente para translação à direita, denotada por R_g .

Observação 17. Como as operações produto e inversa em G são suaves, temos que, para cada $g \in G$, L_g e R_g são suaves. Além disso, L_g e R_g são difeomorfismos. De fato, considere $L_{g^{-1}}$ então, claramente, $L_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ L_g = \text{id}_G$. Logo, $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}$. O mesmo vale para R_g .

Como G é uma variedade suave podemos olhar para o diferencial ou pushforward de L_g e R_g .

Definição 43. Para cada $g \in G$, definimos o pushforward da translação à esquerda (resp. à direita) em um ponto $h \in G$, pela aplicação linear $(L_g)_{*h} : T_h G \rightarrow T_{gh} G$ (resp. $(R_g)_*$).

Pela observação 17 segue naturalmente que $(L_g)_{*h}$ e $(R_g)_{*h}$ são isomorfismos para cada $g \in G$ e $h \in G$.

Outro resultado importante de variedade é o de curvas integrais. Da mesma forma, esse resultado também vale para um grupo de Lie G , i.e., dado $h \in G$ e $X \in T_h G$, existe uma única curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$ tal que $\alpha(0) = h$ e $\dot{\alpha}(0) = X$. Dessa forma, quando aplicamos $(L_g)_{*h}$ em X , obtemos

$$(L_g)_{*h} X = (L_g)_{*h} \dot{\alpha}(0) = (L_g \circ \alpha)'(0).$$

Definição 44. Seja G um grupo de Lie. Definimos a Álgebra de Lie do grupo G pelo espaço tangente a G na identidade de G , $T_e G$, e comumente é denotada por \mathfrak{g} .

Observação 18. O colchete de Lie está definido no espaço tangente $T_e G$, i.e., se $X, Y \in T_e G$, então $[X, Y] \in T_e G$, onde $[,] : T_e G \times T_e G \rightarrow T_e G$ é uma aplicação bilinear.

Exemplo 19. Considere o grupo de Lie $O_n(\mathbb{K})$. Então a Álgebra de Lie de $O_n(\mathbb{K})$ é $\mathfrak{o}(n)$, espaço de matrizes anti-simétrica. Para mostrarmos este resultado, tome $X \in \mathfrak{o}(n)$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow O(n)$ tal que $\alpha(0) = 1$ e $\dot{\alpha}(0) = X$. Como $\alpha(s) \in O(n)$ segue que $\alpha(s)^T \alpha(s) = 1$ para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dessa forma, observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\alpha(s)^T \cdot \alpha(s))\Big|_{s=0} &= 0 \\ \dot{\alpha}(0)^T \cdot \alpha(0) + \alpha(0)^T \cdot \dot{\alpha}(0) &= 0 \\ \dot{\alpha}(0)^T \cdot 1 + 1 \cdot \dot{\alpha}(0) &= 0 \\ \dot{\alpha}(0)^T + \dot{\alpha}(0) &= 0 \\ X^T + X &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Logo, para cada $X \in \mathfrak{o}(n)$ temos que $X^T = -X$. Com isso, $\mathfrak{o}(n)$ está contido no espaço de matrizes anti-simétricas de ordem n , que vamos denotar por $L_n(\mathbb{R})$. Por outro lado, sabemos que a dimensão de $O(n)$, como variedade, é $\frac{n(n-1)}{2}$ então $\dim \mathfrak{o}(n) = \frac{n(n-1)}{2} = \dim L_n(\mathbb{R})$. Portanto, $\mathfrak{o}(n) = L_n(\mathbb{R})$.

Do exemplo anterior, 19, podemos extrair outro resultado importante para este trabalho. Note que, $SO(n)$ pode ser considerada um subvariedade mergulhada em $O(n)$, que possuem a mesma dimensão como variedades suaves, então da teoria de variedades temos que $\dim SO(n) = \dim T_1 SO(n)$, $\dim O(n) = \dim T_1 O(n)$ e $T_1 SO(n)$ é um subespaço de $T_1 O(n)$, como $\dim SO(n) = \dim O(n)$ segue que $\dim T_1 SO(n) = \dim T_1 O(n)$. Portanto, pela definição 44 e pelo exemplo 19, temos que a Álgebra de Lie de $SO(n)$, que vamos denotar por $\mathfrak{so}(n)$, é igual a $\mathfrak{o}(n)$, i.e, $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n) = L_n(\mathbb{R})$.

3.2 Fibrados Principais

Nesta seção vamos estudar fibrados principais, como são definidos e construídos. A maioria dos conceitos e resultados apresentados nesta seção têm como referência base (KOBAYASHI; NOMIZU, 1963).

Definição 45. Sejam M uma variedade e G um grupo de Lie. Um fibrado suave P é chamado de um G -fibrado principal quando:

1. P está equipado com uma G -ação livre à direita.
2. M é o espaço quociente de P pela relação de equivalência induzida por G , $M = P/G$, e a projeção é diferenciável $\pi : P \rightarrow M$.
3. P é localmente trivial, i.e, cada ponto $x \in M$ possui uma vizinhança U em M tal que $\pi^{-1}(U)$ é difeomorfo a $U \times G$, que respeita ação. Esse difeomorfismo é dado por

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$$

tal que $\varphi(p) = (\pi(p), \eta(p))$, onde $\eta : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ satisfaz $\eta(pg) = \eta(p)g$ para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ e $g \in G$.

Pela definição acima, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times G \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & & U \end{array}$$

Na literatura existem algumas maneiras de denotar um fibrado principal, aqui nos atentaremos em apenas três maneiras, dependendo do contexto que estaremos tratando, $P(M, G, \pi)$, $P(M, G)$ ou P . Cada termo tem um nome específico, P é *espaço total*, M é o *espaço base*, G é o *grupo estrutural* e π a *projeção*. Além disso, temos que a pré-imagem de cada ponto em M , $\pi^{-1}(x) \subset P$, pela projeção π é chamada de *fibra* de P no ponto x .

Intuitivamente, um fibrado associa a cada ponto de uma variedade um objeto, no caso de um G -fibrado esse objeto possui uma estrutura de grupo, porém mais para frente veremos que esse objeto pode ter uma estrutura de espaço vetorial.

De acordo com a definição 45, ao fixarmos um $p \in \pi^{-1}(x)$, então $\pi^{-1}(x)$ é o conjunto dos pontos tais que $pg \in \pi^{-1}(x)$, para cada $g \in G$, i.e, $\pi^{-1}(x) = \{q : q = pg, \forall g \in G\}$, como definido em 39, o conjunto $\pi^{-1}(x)$ é a órbita do ponto p . Assim, para cada $x \in M$, obtemos o seguinte isomorfismo.

$$\begin{aligned} p : G &\longrightarrow \pi^{-1}(x) \\ g &\longmapsto p \cdot g \end{aligned} \tag{3.6}$$

Neste isomorfismo p se torna a identidade. Então a fibra é G a menos da escolha da identidade, ou seja, fibra não possui estrutura natural de grupo.

Definição 46. *Seja P um G -fibrado principal com M o espaço base. Dizemos que P é um fibrado trivial quando $P \cong M \times G$.*

Agora vamos mostrar como é realizado a mudança de coordenadas num fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$. Considere Λ um conjunto de índices e $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ uma cobertura de abertos de M , tais que cada $\pi^{-1}(U_\alpha)$ fornece um difeomorfismo $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$, definido por $\varphi_\alpha(p) = (\pi(p), \eta_\alpha(p))$ tal que $\eta_\alpha(pg) = (\eta_\alpha(p))g$. Suponha que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, considere $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ então

$$\begin{aligned} \eta_\beta(pg)(\eta_\alpha(pg))^{-1} &= (\eta_\beta(p))g g^{-1} \eta_\alpha(p)^{-1} \\ &= \eta_\beta(p) \eta_\alpha(p)^{-1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Note que, a igualdade acima mostra que $\eta_\beta(p)\eta_\alpha(p)^{-1}$ depende apenas de $\pi(p)$. Logo, podemos definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta &\longrightarrow G \\ \pi(p) &\longmapsto \eta_\beta(p)\eta_\alpha(p)^{-1}\end{aligned}\tag{3.8}$$

Observe que, dado $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi_\beta(p) &= (\pi(p), \eta_\beta(p)) \\ &= (\pi(p), \eta_\beta(p)\eta_\alpha(p)^{-1}\eta_\alpha(p)) \\ &= (\pi(p), \psi_{\beta\alpha}(\pi(p))\eta_\alpha(p)) \\ &= (\pi(p), \eta_\alpha(p)) \cdot \psi_{\beta\alpha}(\pi(p)) \\ &= \varphi_\alpha(p) \cdot \psi_{\beta\alpha}(\pi(p))\end{aligned}\tag{3.9}$$

Dessa forma, a família de funções $\{\psi_{\beta\alpha} : \alpha, \beta \in \Lambda\}$, são as mudanças de coordenadas.

Definição 47. Chamamos as aplicações $\psi_{\beta\alpha}$ de funções de transição do fibrado P correspondente a um cobertura de M .

Essas funções satisfazem a seguinte propriedade

$$\psi_{\gamma\alpha}(x) = \psi_{\gamma\beta}(x)\psi_{\beta\alpha}(x), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma\tag{3.10}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\psi_{\gamma\beta}(\pi(p))\psi_{\beta\alpha}(\pi(p)) &= \eta_\gamma(p)(\eta_\beta(p))^{-1}\eta_\beta(p)(\eta_\alpha(p))^{-1} \\ &= \eta_\gamma(p)(\eta_\alpha(p))^{-1} \\ &= \psi_{\gamma\alpha}(\pi(p)).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Essa propriedade é denominada de *condição de cociclo*. Essas funções são de extrema importância para o estudo de fibrados principais, pois a partir delas é possível construir um fibrado principal.

Proposição 32. Sejam M uma variedade, $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M e G um grupo de Lie. Dada uma função $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$, para cada $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, com a condição de cociclo sendo satisfeita, então podemos construir um fibrado principal $P(M, G)$ com funções de transição $\psi_{\beta\alpha}$.

Agora vamos introduzir um exemplo de fibrados principais que é muito importante para o nosso estudo e, principalmente, para a compreensão do conceito de um G -fibrado.

Exemplo 20. Sejam M uma variedade suave n -dimensional e TM o fibrado tangente. Um referencial linear em $x \in M$ é um isomorfismo linear $\sigma_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$. Com isso,

temos que se e_1, \dots, e_n é uma base de \mathbb{R}^n então $\sigma_x(e_1), \dots, \sigma_x(e_n)$ é uma base para T_xM . Reciprocamente, dada uma base de T_xM construímos o isomorfismo.

Defina o conjunto de todos os referenciais como

$$B(M) = \{\sigma_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM : \sigma_x \text{ é um isomorfismo linear, } \forall x \in M\} \quad (3.12)$$

Tome $GL(n)$ o grupo linear, sabemos da teoria de Lie que $GL(n)$ é um grupo de Lie. Note que ele age livremente em $B(M)$.

De fato, considere a aplicação $k : B(M) \times GL(n) \longrightarrow B(M)$, definida por $k(\sigma_x, g) = \sigma_x \circ g$. Vamos mostrar que k é uma ação à direita e depois que é livre. Para mostrar que é uma ação precisamos verificar que k satisfaz duas condições

$$1. \quad k(\sigma_x, id) = \sigma_x$$

Pela definição de k , temos que $k(\sigma_x, id) = \sigma_x \circ id = \sigma_x$

$$2. \quad k(k(\sigma_x, g), h) = k(\sigma_x, g \cdot h)$$

$$\begin{aligned} k(k(\sigma_x, g), h) &= k(\sigma_x, g) \circ h \\ &= (\sigma_x \circ g) \circ h \\ &= \sigma_x \circ (g \circ h) \\ &= k(\sigma_x, g \cdot h) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Logo k é uma ação à direita. Observe que, para algum $\sigma_x \in B(M)$, temos que se $k(\sigma_x, g) = \sigma_x$ então $\sigma_x \circ g = \sigma_x$. Logo, $g = id$ e, portanto, k é uma ação livre.

Dessa forma, a primeira condição para $B(M)$ ser um G -fibrado está satisfeita. Para a segunda, tome a projeção canônica $\pi : B(M) \longrightarrow B(M)/GL(n)$ definida por $\pi(\sigma_x) = \sigma_x G$. Note que, M pode ser identificada com $B(M)/GL(n)$. De fato, considere a aplicação $B(M)/GL(n) \longrightarrow M$, definida por $\sigma_x G \longmapsto x$. Agora vamos mostrar que essa aplicação é uma bijeção.

a) Injetividade

Dados $x, y \in M$, se

$$x = y \implies \tilde{\sigma}_y^{-1} \circ \sigma_x \in GL(n) \implies \sigma_x GL(n) = \tilde{\sigma}_y GL(n) \quad (3.14)$$

b) Sobrejetividade

Dado $x \in M$, existe $\sigma_x \in B(M)$, em particular, temos $\sigma_x GL(n) \in B(M)/GL(n)$ tal que $\sigma_x GL(n) \longmapsto x$.

Logo, essa aplicação é uma bijeção e, portanto, a segunda condição está verificada.

Por fim, falta mostrar que $B(M)$ é localmente trivial, i.e., para cada carta (U, ϕ) em M vizinhança coordenada de $x \in M$ existe um difeomorfismo entre $\pi^{-1}(U)$ e

$U \times GL(n)$. Considere (x^1, \dots, x^n) o sistemas de coordenadas da carta (U, ϕ) . Cada referencial $p \in \pi^{-1}(U)$ em $x \in U$, pode ser representado unicamente na forma

$$p = (X_1, \dots, X_n), \text{ onde } X_i = \sum_{j=1}^n X_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \right). \quad (3.15)$$

Onde (X_i^j) é a matriz que muda a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \right\}$ de $T_x M$ para $\{X_i\}$. Logo, $(X_i^j) \in GL(n)$. Uma vez que, para cada referencial p existe uma única matriz da forma (X_i^j) temos a injetividade da aplicação $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times GL(n)$. Dado qualquer $x \in U$, onde (U, ϕ) é uma carta de M , escolhendo $\{X_i^j\}$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \right\}$, duas bases de $T_x M$, sabemos que existe uma matriz mudança de base (X_i^j) tal que vale 3.15. Então, $\varphi((X_i, \dots, X_n)) = (x, g)$, onde $g = (X_i^j)$. Segue que φ é sobrejetora e, portanto, um difeomorfismo.

Observação 19. Observe que, tomando $\sigma_x(e_i) = X_i$ com $e_i \in \mathbb{R}^n$ o i -ésimo vetor da base canônica, obtemos todo o isomorfismo σ_x .

Agora vamos definir aplicações entre fibrados principais. Essa definição é de grande importância para o estudo de estrutura spin, que veremos no próximo capítulo.

Definição 48. Sejam $\pi : Q \rightarrow N$ e $\pi' : P \rightarrow M$ dois fibrados principais, com grupos estruturais H e G , respectivamente. Dizemos que uma aplicação $F : Q \rightarrow P$ é um homomorfismo de fibrados principais se existe um homomorfismo de grupos $\theta : H \rightarrow G$ tal que $F(qh) = F(q)\theta(h)$, para todo $q \in Q$ e $h \in H$.

Como N e M são os respectivos espaços bases de Q e P , ao considerar $a \in N$ temos que $\pi^{-1}(a)$ é uma fibra de Q e escolhendo $q \in \pi^{-1}(a)$ como o elemento identidade dessa fibra, no sentido em que $q = q \cdot e_H$, onde e_H é o elemento neutro do grupo H , obtemos $\pi^{-1}(a) = \{qh : h \in H\}$. Agora, tomando $F(q) = p \in P$, temos que

$$\begin{aligned} F(\pi^{-1}(a)) &= F(\{qh : h \in H\}) \\ &= \{F(qh) : h \in H\} \\ &= \{F(q)\theta(h) : h \in H\} \\ &= \{p\theta(h) : h \in H\} \subset \pi'^{-1}(x). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Onde $\pi'^{-1}(x)$ é uma fibra de P em $x \in M$, cujo ponto base é $F(q) = p$. Então, F leva a fibra $\pi^{-1}(a) \subset Q$ na fibra $F(\pi^{-1}(a)) \subset P$, para cada $a \in N$ e, além disso, $\pi'(F(\pi^{-1}(a))) = \pi'(\pi'^{-1}(x)) = x \in M$. Logo, existe uma aplicação $f : N \rightarrow M$ tal que $f \circ \pi = \pi' \circ F$. Segue abaixo o diagrama que representa todo esse comentário:

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\theta} & G \\
 q \downarrow & & \downarrow p \\
 Q & \xrightarrow{F} & P \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 N & \xrightarrow{f} & M
 \end{array}$$

Este diagrama é comutativo, ou seja, $F \circ q = p \circ \theta$, onde $q : H \rightarrow Q$ e $p : G \rightarrow P$, definidas por $q(h) = q \cdot h$ e $p(g) = p \cdot g$.

Definição 49. *Sejam (Q, N, H) e (P, M, G) dois fibrados principais e $F : Q \rightarrow P$ um homomorfismo de fibrados. Dizemos que F é um mergulho se F é injetor e $\theta : H \rightarrow G$ é um monomorfismo.*

Pela definição 49 podemos identificar Q com $F(Q)$ e H com $\theta(H)$. E, com isso, introduzimos o conceito de subfibrado, neste caso, chamamos Q de subfibrado de P .

Para o caso no qual estamos sobre o mesmo espaço base, digamos M , introduzimos uma nova definição

Definição 50. *Seja $f : M \rightarrow M$ a aplicação identidade e $F : Q \rightarrow P$ um mergulho. Dizemos que F é uma redução do grupo estrutural H de Q à G . O subfibrado Q é chamado de subfibrado reduzido.*

Proposição 33. *O grupo estrutural G de um fibrado principal (P, M, G) é redutível a um subgrupo de Lie H se, e somente se, existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M com as funções de transição dada por $\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow H$.*

Observação 20. *Ao considerarmos a restrição da ação de G em P à ação de H em Q e a restrição da projeção π à Q , transformamos Q em um H -fibrado principal. Então todo subfibrado é um fibrado principal.*

Exemplo 21. *Seja (M, g) um variedade riemanniana. Considere o $GL(n)$ -fibrado principal do exemplo 20. Porém tomemos os frames lineares ortogonais, i.e, σ_x leva base ortonormal de \mathbb{R}^n em base ortonormal de $T_x M$, para cada $x \in M$, denotemos por $\tilde{B}(M)$ esse conjunto. Como M possui uma métrica, podemos aplicar o processo de Gram-Schmidt para ortonormalizar um base de $T_x M$. Logo, se $p \in B_x(M)$ é ortogonal temos que $pg \in B_x(M)$ é ortogonal, para $g \in O(n)$. Sabemos de álgebra linear que a matriz associada a uma transformação que envia base ortogonal em base ortogonal possui determinante igual a ± 1 . Assim, $\det(g) = \pm 1 \Rightarrow g \in O(n)$.*

Como $O(n)$ é um subgrupo de Lie de $GL(n)$, uma vez que podemos mergulhar $O(n)$ em $GL(n)$, então pela definição 50, segue que $\tilde{B}(M)$ é subfibrado principal de $B(M)$ com o grupo estrutural $O(n)$, mais especificamente, $\tilde{B}(M)$ é um $O(n)$ -fibrado principal.

3.3 Fibrados Vetoriais

Nesta seção vamos estudar fibrados vetoriais, que, intuitivamente, é um fibrado cujas fibras possuem estrutura de um espaço vetorial. Vamos considerar o espaço vetorial \mathbb{F}^k , onde \mathbb{F} é igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Definição 51. *Seja M uma variedade suave. Dizemos que E é um fibrado vetorial suave de posto k sobre M com a projeção $\pi : E \rightarrow M$, se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para cada $x \in M$, seja $E_x = \pi^{-1}(x) \subset E$. Denominamos E_x de fibra de E no ponto x .*
2. *Para cada $x \in M$, existe um vizinhança U de x em M e um difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{F}^k$, ψ é chamada de trivialização local de E sobre U , tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times \mathbb{F}^k \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi_1 \\ & & U \end{array}$$

e para cada $y \in U$, $\psi|_{E_y} \cong \{y\} \times \mathbb{F}^k \cong \mathbb{F}^k$, é isomorfismo linear. Nesse sentido que as fibras de E têm uma estrutura de espaço vetorial, neste caso de um espaço euclidiano.

Definição 52. *Seja E um fibrado vetorial suave que admite uma trivialização global, i.e., $E \cong M \times \mathbb{R}^k$. Então dizemos que E é um fibrado trivial.*

Observação 21. *Os fibrados que não são triviais exigem mais do que uma trivialização local. O próximo resultado mostra como é o comportamento das trivializações quando fazemos composições.*

Proposição 34. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial suave. Considere $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ e $\varphi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$ duas trivializações locais suaves de E tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Então existe uma aplicação suave $\eta : U \cap V \rightarrow GL(k)$ tal que a composição $\psi \circ \varphi^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$ tem a forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x, v) = (x, \eta(x)v)$, onde $\eta(x)v$ denota a ação usual da matriz $\eta(x)$ no vetor $v \in \mathbb{R}^k$.*

Demonstração. Primeiro vamos construir o diagrama dessas trivializações.

$$\begin{array}{ccccc} (U \cap V) \times \mathbb{R}^k & \xleftarrow{\varphi} & \pi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow \pi & \swarrow \pi_1 & \\ & & U \cap V & & \end{array}$$

Claramente esse diagrama comuta, fazendo com que $\pi_1 \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) = \pi_1$. Conseqüentemente, a única coordenada de $\psi \circ \varphi^{-1}$ que tem variação é a segunda, assim podemos escrever $\psi \circ \varphi^{-1}(x, v) = (x, \theta(x, v))$ para alguma aplicação suave $\theta : U \cap V \times \mathbb{R}^k \rightarrow$

\mathbb{R}^k tal que $\theta|_{\{x\} \times \mathbb{R}^k}$ é um isomorfismo linear de \mathbb{R}^k em si mesmo, para cada $x \in M$. Logo, existe uma matriz $k \times k$ associada a $\theta(x, v)$ com x fixo, denotada por $\eta(x)$, tal que $\theta(x, v) = \eta(x)v$. A suavidade de $\eta(x)$ é garantida pelas suas componentes que são representadas por $\eta_j^i(x) = \pi^i(\theta(x, e_j))$, onde e_j é o j -ésimo vetor da base canônica e as projeções $\pi^i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$.

□

A aplicação η descrita na proposição 34 é chamada de *função de transição*.

As funções de transição satisfazem a condição de cociclo, i.e, dadas três trivializações ψ_α, ψ_β e ψ_λ sobre os abertos U_α, U_β e U_λ , respectivamente, com $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\lambda \neq \emptyset$, para $\alpha, \beta, \lambda \in \Lambda$, onde Λ é um conjunto de índices, temos que, para todo $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\lambda$ segue que $\eta_{\alpha\beta}\eta_{\beta\lambda}\eta_{\lambda\alpha} = 1$.

O exemplo a seguir é um clássico de fibrado vetorial que é muito utilizado em geometria e também será muito explorado neste trabalho.

Exemplo 22. *Seja M uma variedade suave n -dimensional. Então o fibrado tangente TM que está associado ao fibrado de bases BM também é um fibrado vetorial de posto n . A demonstração desse fato é importante e vamos dar com mais detalhes.*

Primeiro considere $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ um atlas contável de M , onde $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ com $x_\alpha^i : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ sendo a projeção da i -ésima coordenada de φ_α em \mathbb{R} . Sabemos que $\pi : TM \rightarrow M$ é uma aplicação contínua, com isso $\{\pi^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ forma uma cobertura por abertos de TM . Agora, defina, para cada $\alpha \in \Lambda$, a aplicação

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$$

pondo $\psi_\alpha(v) = (\varphi_\alpha(\pi(v)), v(x_\alpha^1), \dots, v(x_\alpha^n))$, onde $v(x_\alpha^i) = v^j \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\alpha^j} = v^j \delta_{ij} = v^i$. Sem muito trabalho é possível mostrar que ψ_α é uma bijeção.

Defina também uma base para uma topologia em TM , dada por

$$\{\psi_\alpha^{-1}(V) : \alpha \in \Lambda \text{ e } V \subset \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n\}.$$

Nessa topologia todos os ψ_α são homeomorfismos, uma vez que a topologia gerada por essa base é a mais grossa possível.

Como M e \mathbb{R}^n são segundo contáveis e hausdorff, e \mathcal{A} é enumerável, segue que TM nessa topologia é Hausdorff e segundo contável.

Agora vamos verificar se as funções de transição são suaves, para isso observe que, para cada α e β em Λ , temos

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

pondo $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(u, z) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(u), d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_u(z))$. Dessa forma, as funções de transição das aplicações ψ_α para cada $\alpha \in \Lambda$ são suaves e, com isso, define uma estrutura de variedade suave em TM com dimensão igual a $2n$.

Finalmente, podemos definir as trivializações locais de TM como a seguinte composição:

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\psi_\alpha} \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

mais especificamente, $\Phi_\alpha := (\varphi_\alpha^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\alpha$. Portanto, TM é um fibrado vetorial suave.

Pela proposição 34 existe $\eta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl(n)$ suave associado ao fibrado tangente TM , pela construção do exemplo 22 podemos determinar explicitamente a aplicação η . Dado $\alpha, \beta \in \Lambda$ e $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, v) &= (\varphi_\alpha^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\alpha \circ ((\varphi_\beta^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\beta)^{-1}(x, v) \\ &= (\varphi_\alpha^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\varphi_\beta \times id_{\mathbb{R}^n})(x, v) \\ &= (\varphi_\alpha^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(x), v) \\ &= (\varphi_\alpha^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n})(\varphi_\alpha(x), d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_{\varphi_\beta(x)}v) \\ &= (x, d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_{\varphi_\beta(x)}v) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Logo, a função de transição $\eta_{\alpha\beta}(x) = d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_{\varphi_\beta(x)}$ é a jacobiana das funções de transição da variedade suave M .

Exemplo 23. Assim como os espaços vetoriais possuem o seu espaço dual, o fibrado tangente também possui o seu fibrado dual que é chamado de fibrado cotangente e denotado por T^*M , cujas fibras são dadas por $T_x^*M = \{f : T_xM \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é linear}\} = Hom_{\mathbb{R}}(T_xM, \mathbb{R})$. A verificação que T^*M é um fibrado vetorial segue de maneira análoga ao do exemplo 22. Uma observação é que as funções de transição de T^*M são da forma $\eta^*(x) = (\eta(x)^{-1})^t$, onde t é a transposta e η é uma função de transição de TM .

Observação 22. O exemplo acima, 23, pode ser generalizado para todo fibrado vetorial suave E .

A próxima proposição fornece um isomorfismo canônico entre T_xM e T_x^*M , para todo $x \in M$, assumindo que M está munido de uma métrica, que pode ser suavemente estendido para TM a T^*M . Se um espaço vetorial de dimensão finita V não estiver munido de um produto interno não degenerado essa afirmação é falsa, uma vez que é mostrado em (KOSTRIKIN; MANIN, 1989) que o isomorfismo linear $V^* \cong V$ não é canônica, i.e, depende da base escolhida.

Proposição 35. Sejam (M, g) uma variedade riemanniana, onde g é a métrica. Então existe um isomorfismo canônico entre T_xM e T_x^*M .

Demonstração. Como g é a métrica em M , sabemos que g é definida positivamente, pela definição 13 item 2.

Defina a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}\varphi : T_x M &\longrightarrow T_x^* M \\ v &\longmapsto \varphi(v)(w) = g_x(v, w)\end{aligned}$$

Vamos mostrar que φ é injetora e depois usar o teorema do núcleo e imagem para concluir que é sobrejetora. De fato, considere $\varphi(v) = 0$ para algum $v \in T_x M$. Então:

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= 0 \\ \varphi(v)(w) &= 0, \quad \forall w \in T_x M \\ g_x(v, w) &= 0, \quad \forall w \in T_x M\end{aligned}\tag{3.18}$$

Como 3.18 ocorre para todo $w \in T_x M$, em particular para $w = v$, assim $g_x(v, v) = 0$ e, pela definição de g , temos que $v = 0$. Logo, φ é injetiva.

Uma vez que $\dim T_x M = \dim T_x^* M$, temos pelo teorema do núcleo e da imagem que φ é sobrejetora. Portanto, φ é um isomorfismo linear que não depende da base, i.e, canônico. \square

Proposição 36. *Seja M uma variedade suave com as seguintes premissas:*

1. *Para cada $x \in M$, um espaço vetorial real E_x de dimensão fixada k tal que $E = \bigcup_{x \in M} E_x$ e $\pi : E \longrightarrow M$ a aplicação que faz com que cada fibra E_x seja associada com x , $\pi^{-1}(x) = E_x$.*
2. *Uma cobertura aberta $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de M .*
3. *Para cada λ , existe uma aplicação bijetora $\psi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times \mathbb{R}^k$, ψ_λ é um isomorfismo linear nas fibras em \mathbb{R}^k .*
4. *Para cada λ, β com $U_\lambda \cap U_\beta \neq \emptyset$, existe uma aplicação suave $\eta_{\lambda\beta} : U_\lambda \cap U_\beta \longrightarrow Gl(k)$ tal que a composição $\psi_\lambda \circ \psi_\beta^{-1}$ é dada por $\psi_\lambda \circ \psi_\beta^{-1}(x, v) = (x, \eta_{\lambda\beta}(x)v)$.*

Então E possui uma única estrutura suave que o torna um fibrado vetorial suave de posto k sobre M , com π a projeção e ψ_λ e ψ_β as trivializações locais.

Demonstração. Em linhas gerais as contas dessa demonstração são análogas a do exemplo 22. \square

Definição 53. *Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M . Dizemos que uma aplicação $\sigma : M \longrightarrow E$ é uma seção suave de E quando $\sigma \circ \pi = id_M$, i.e, $\sigma(x) \in E_x$ para cada $x \in M$.*

Observe que σ é injetiva, uma vez que, dados $x, y \in M$ com $\sigma(x) = \sigma(y)$ temos que $x = \pi(\sigma(x)) = \pi(\sigma(y)) = y$. Então podemos pensar em $\sigma(M)$ como uma cópia de M em E .

Definição 54. Dizemos que uma aplicação $\sigma : M \rightarrow E$ é a seção zero de E quando $\sigma(x) = 0$ para todo $x \in M$.

O zero em E depende do ponto base $x \in M$, tendo em vista que E é formado pela união disjunta de espaços vetoriais, logo podemos denotar a seção zero por $\sigma(x) = (x, 0_x)$, onde $0_x \in E_x$ para cada $x \in M$.

Definição 55. Para cada $x \in M$ e σ uma seção de E , definimos o suporte de σ como $\overline{\{x \in M : \sigma(x) \neq 0\}}$, denotamos por $\text{supp}\sigma$.

Vamos denotar o espaço de todas seções de E por $\Gamma(E)$ que, obviamente é um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} , em particular, é um $C^\infty(M)$ -módulo, onde $C^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^\infty\}$.

Algo interessante de observar é quando $E = TM$, o fibrado tangente de uma variedade M , as seções de TM são os campos vetoriais sobre M , haja vista que $\sigma(x) \in T_x M$ para cada $x \in M$, com isso $\sigma(x)$ é um vetor tangente a M no ponto x . E as seções do fibrado cotangente T^*M são as 1-formas diferenciais em M , mais informações sobre esses fatos podem ser encontradas em (LEE, 2013). Na próxima seção vamos entender como é feito a derivação de seções.

Exemplo 24. Seja $E = M \times \mathbb{R}^k$, então uma seção de E é uma aplicação $\sigma : M \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$ definida por $\sigma(x) = (x, \tilde{\sigma}(x))$, onde $\tilde{\sigma} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação suave.

Seja E um fibrado vetorial de posto k . Sabemos que $E = \bigsqcup_{x \in M} E_x$, onde cada E_x tem a estrutura de espaço vetorial, assim podemos falar de uma base para cada um deles e as seções locais são fundamentais para trabalhar essa questão, uma vez que, dadas $\sigma_1, \dots, \sigma_k : U \rightarrow E$ seções locais, com $U \subset M$ aberto, elas podem formar uma base para E_x se forem linearmente independentes em $x \in M$, i.e, $\sigma_i(x) \in E_x$ serem vetores linearmente independentes, e gerarem E_x . Ao pensarmos nessa base como uma k -upla $(\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x))$ estamos definindo um frame linear de E_x , que já foi apresentado na seção anterior.

Note que podemos aplicar essa ideia claramente no fibrado produto $E = M \times \mathbb{R}^k$. Basta definir $\sigma_i(x) = (x, e_i)$, onde e_i são os vetores da base canônica de \mathbb{R}^k . O próximo exemplo, é uma generalização do que acabamos de ver. Com intuito de facilitar essa observação vamos considerar $\sigma_i(x) = c_i(x)$ e chamar de seção canônica do fibrado produto.

Exemplo 25. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial suave. Se $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ é uma trivialização local de E , podemos construir frames locais a partir dessa trivialização. Para isso, defina $\sigma_1, \dots, \sigma_k : U \rightarrow E$ pondo $\sigma_i(x) = \psi^{-1}(x, e_i) = \psi^{-1} \circ c_i(x)$.

Agora, precisamos verificar se σ_i são seções suaves linearmente independentes. $\pi \circ \sigma_i(x) = \pi \circ \psi^{-1}(x, e_i) = \pi_1(x, e_i) = x$. Como ψ é um difeomorfismo, segue que σ_i são seções suaves e l.i. O diagrama abaixo ajuda na observação desse resultado

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\psi^{-1}} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

Do exemplo 24 temos que cada frame linear está associado com uma trivialização local.

Proposição 37. Um fibrado vetorial é trivial se, e somente se, admite uma frame global.

Demonstração. Suponha que $\pi : E \rightarrow M$ seja um fibrado trivial de posto k , então $E \cong M \times \mathbb{R}^k$. Assim, podemos definir o frame global como (c_i) , onde $c_i(x) = (x, e_i)$. Por outro lado, suponha que E admite um frame linear global, i.e, $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ com $\sigma_i : M \rightarrow E$. Defina uma aplicação $\psi : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$ pondo $\psi(x, v^1, \dots, v^k) = v^1 \sigma_1(x) + \dots + v^k \sigma_k(x)$. Note que, podemos expressar a inversa de ψ explicitamente por $\psi^{-1}(v^i \sigma_i(x)) = (\pi(\sigma_i(x)), v)$ para cada $x \in M$ e $v \in \mathbb{R}^k$. Portanto, ψ é um difeomorfismo e segue que E é um fibrado vetorial trivial. \square

3.3.1 Operações com fibrados vetoriais

Os fibrados vetoriais são mais fáceis de trabalhar do que os G -fibrados principais, por causa da estrutura linear de suas fibras. Com isso, é natural que operações feitas em espaços vetoriais, como soma direta, produto tensorial e produto interno, sejam válidas para fibrados vetoriais. Essa teoria pode ser encontrada com mais detalhes em (HATCHER, 2003).

Antes de definir a soma direta entre fibrados vetoriais é necessário relembrar o seguinte:

Lembremos, inicialmente, que dados V e U espaços vetoriais sobre \mathbb{R} , então a soma direta desses dois espaços é denotada por $V \oplus U$. Além disso, se $T_i : V_i \rightarrow U_i$, com $1 \leq i \leq 2$, são transformações lineares cujas matrizes associadas são A_1 e A_2 , respectivamente, temos que a soma direta dessas transformações é dada por

$$T := (T_1 \oplus T_2) : V_1 \oplus V_2 \rightarrow U_1 \oplus U_2$$

definda por $T(v) = T_1(v) + T_2(v) = T_1(v_1) + T_2(v_2)$, onde $v = v_1 + v_2$ para $v_i \in V_i$ e $i = 1, 2$. A matriz associada a T é dada por

$$A = A_1 \oplus A_2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Seguem abaixo alguns exemplos que envolvem operações com fibrados vetoriais e, posteriormente, iremos definir a soma direta entre fibrados vetoriais.

Exemplo 26 (Fibrado Pullback). *Sejam $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto k e N uma variedade suave. Dada uma aplicação contínua $f : N \rightarrow M$, podemos construir o fibrado pullback f^*E sobre N , definido por*

$$f^*E = \{(n, v) \in N \times E : f(n) = \pi(v)\}.$$

Também conhecido como fibrado induzido por f . Vamos mostrar que esse fibrado é de fato um fibrado vetorial.

*A aplicação $\tilde{\pi} : f^*E \rightarrow N$, definida por $\tilde{\pi}(n, v) = n$, é a restrição da projeção $\pi_1 : N \times E \rightarrow N$ em f^*E e aplica sobrejetivamente f^*E em N . As fibras do fibrado pullback são dadas por*

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}^{-1}(n) &= \{(n, v) \in n \times E_n : f(n) = \pi(v)\} \\ &= (f^*E)_n \end{aligned}$$

*Note que, $(f^*E)_n$ pode ser identificada com $E_{f(n)}$, uma vez que $E_{f(n)}$ é o conjunto de vetores $v \in E$ tais que $f(n) = \pi(v)$. Claramente, $E_{f(n)}$ tem a estrutura de espaço vetorial pois dados $(n, v_1), (n, v_2) \in E_{f(n)}$ temos que*

$$\begin{aligned} \lambda_1(n, v_1) + \lambda_2(n, v_2) &= (n, \lambda_1 v_1) + (n, \lambda_2 v_2) \\ &= (n, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2). \end{aligned}$$

*Logo, $(f^*E)_n$ tem a estrutura de um espaço vetorial de dimensão k .*

Agora, considere $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, definida por $\psi(v) = (\pi(v), \xi(v))$, onde $\xi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação linear sobre as fibras, uma trivialização local de E . Seja $V \subset N$ aberto tal que $V = f^{-1}(U)$ e defina

$$\tilde{\psi} : \tilde{\pi}^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$$

*pondo $\tilde{\psi}(n, v) = (n, \text{proj}_2(\psi(v)))$, onde $\text{proj}_2(\psi(v)) = \xi(v)$. inversa de $\tilde{\psi}$ é dada por $(n, w) \mapsto (n, \psi^{-1}(f(n), w))$. Então, $\tilde{\psi}$ é uma bijeção e, portanto, uma trivialização de f^*E . Podemos representar f^*E como a união disjuntas de espaços vetoriais, como segue*

$$f^*E = \bigsqcup_{n \in N} (f^*E)_n = \bigsqcup_{n \in N} E_{f(n)}.$$

As funções de transição do fibrado pullback é induzida naturalmente pelas funções de transição de E . Observe que, se $\{\eta_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \Lambda\}$ é a família de funções de transição de E , temos que $\{\eta_{\alpha\beta} \circ f : \alpha, \beta \in \Lambda\}$, onde f está restrita ao conjunto $f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, é a família de funções de transição de f^*E .

Exemplo 27. Sejam $E = M \times \mathbb{R}^k$ o fibrado trivial, N uma variedade suave e $f : N \rightarrow M$ uma aplicação contínua. Então

$$\begin{aligned} f^*E &= \{(n, p) \in N \times E : f(n) = \pi(p)\} \\ &= \{(n, x, v) \in N \times (M \times \mathbb{R}^k) : f(n) = x\} \\ &= \{(n, f(n), v) : n \in N \text{ e } v \in \mathbb{R}^k\} \\ &= \text{Graf}(f) \times \mathbb{R}^k \\ &\cong N \times \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

Corolário 4. Se E é um fibrado vetorial trivial, então f^*E é trivial.

Demonstração. Basta observar que E possui uma única trivialização $\psi : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$. Então ela induz a trivialização $\tilde{\psi} : f^*E \rightarrow f^{-1}(M) \times \mathbb{R}^k$ em f^*E , como $f^{-1}(M) = N$ segue, da proposição 37, que f^*E é um fibrado trivial. \square

Exemplo 28 (Produto Cartesiano). Sejam $\pi_1 : E \rightarrow M$ e $\pi_2 : L \rightarrow N$ fibrados vetoriais. Dessa forma o cartesiano $E \times L$ também é um fibrado vetorial com $\pi := (\pi_1 \times \pi_2) : E \times L \rightarrow M \times N$, onde cada fibra é dada por:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x, n) &= (\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(x, n) \\ &= \pi_1^{-1}(x) \times \pi_2^{-1}(n) \\ &= E_x \times L_n. \end{aligned}$$

Com a estrutura induzida naturalmente por E e L .

Finalmente, podemos definir a soma direta de dois fibrados vetoriais, também conhecida como soma de Whitney.

Exemplo 29 (Soma de Whitney). Sejam $E \rightarrow M$ e $L \rightarrow M$ dois fibrados vetoriais. A soma direta entre E e L , também conhecida como soma de Whitney, é denotada por $E \oplus L$ e suas fibras são dadas por $(E \oplus L)_x = E_x \oplus L_x$ para cada $x \in M$.

Assim como no produto cartesiano de dois fibrados, a topologia e a estrutura suave da soma de Whitney é induzida naturalmente pelas respectivas em E e L , tendo em vista que se $\{\eta_{\alpha\beta}^E : \alpha, \beta \in \Lambda\}$, onde Λ é um conjunto de índices, e $\{\eta_{\alpha\beta}^L : \alpha, \beta \in \Lambda\}$ são as funções de transição de E e L , respectivamente, temos que $\{\eta_{\alpha\beta}^E \oplus \eta_{\alpha\beta}^L : \alpha, \beta \in \Lambda\}$ é a

família de funções de transição de $E \oplus L$, onde

$$\begin{aligned} (\eta_{\alpha\beta}^E \oplus \eta_{\alpha\beta}^L)(x) &= \eta_{\alpha\beta}^E(x) \oplus \eta_{\alpha\beta}^L(x) \\ &= \begin{bmatrix} \eta_{\alpha\beta}^E(x) & 0 \\ 0 & \eta_{\alpha\beta}^L(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para todo $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Exemplo 30 (Produto Tensorial). *Sejam $\pi_1 : E \rightarrow M$ e $\pi_2 : L \rightarrow M$ dois fibrados vetoriais sobre M com posto k e l , respectivamente. O produto tensorial entre eles é dado por $\pi : E \otimes L \rightarrow M$ com $\pi^{-1}(x) = (E \otimes L)_x = E_x \otimes L_x$, para não ter ambiguidade os produtos tensoriais das fibras de E e L precisam estar sobre o mesmo ponto base. Assim, podemos expressar o fibrado tensorial da seguinte forma:*

$$E \otimes L = \bigsqcup_{x \in M} (E_x \otimes L_x)$$

Considere $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ e $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ as famílias de trivializações locais e $\{\eta_\alpha^E\}_{\alpha \in \Lambda}$ e $\{\eta_\alpha^L\}_{\alpha \in \Lambda}$ as famílias de funções de transição de E e L , respectivamente. Então as trivializações em $E \otimes L$ podem ser dadas pela família $\{(\psi_\alpha \otimes \varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, onde

$$\psi_\alpha \otimes \varphi_\alpha : \pi_1^{-1}(U_\alpha) \otimes \pi_2^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l.$$

E , conseqüentemente, dados $\alpha, \beta \in \Lambda$, obtemos para cada $\eta_{\alpha\beta}^E : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl(k)$ e $\eta_{\alpha\beta}^L : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl(l)$ a seguinte função de transição em $E \otimes L$:

$$\eta_{\alpha\beta}^{E \otimes L} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl(kl).$$

Onde $\eta_{\alpha\beta}^{E \otimes L}(x) = \eta_{\alpha\beta}^E(x) \otimes \eta_{\alpha\beta}^L(x)$.

Essa construção pode ser generalizada ao produto de n fibrados vetoriais sobre a mesma base. Dadas E_1, \dots, E_n fibrados vetoriais de posto finito sobre M , temos que

$$\otimes_{i=1}^n E_i = \bigsqcup_{x \in M} (\otimes_{i=1}^n (E_i)_x)$$

e as funções de transição são dadas por $\otimes_{i=1}^n \eta_{\alpha\beta}^{E_i}$, para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$.

De álgebra linear sabemos que o produto tensorial produz a álgebra exterior através de uma aplicação linear que antissimetriza os tensores, então o mesmo ocorre com os fibrados vetoriais. Dessa forma, podemos falar de uma potência exterior de um fibrado vetorial E que é dado por $\Lambda^n(E) = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^n(E_x)$. Note que, a família de funções de transição é dada por $\{\eta_{\alpha\beta} \wedge \dots \wedge \eta_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \Lambda\}$, onde

$$\eta_{\alpha\beta} \wedge \dots \wedge \eta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\eta_{\alpha\beta}(x) \wedge \dots \wedge \eta_{\alpha\beta}(x) = \det(\eta_{\alpha\beta}(x))$. Com isso, esse fibrado tem posto 1, que também é conhecido como fibrado determinante, uma vez que suas funções de transição são dadas por determinantes.

3.3.2 Produto interno

Lembremos de álgebra linear que um produto interno num espaço vetorial V sobre \mathbb{R} é uma forma bilinear simétrica e definida positivamente, mais especificamente, dizemos que uma forma bilinear simétrica $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno se satisfaz a seguinte condição:

$$\langle v, v \rangle > 0, \text{ para todo } v \in V \setminus \{0\} \text{ e } \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

Definição 56. *Um produto interno num fibrado vetorial real suave $E \rightarrow M$ de posto k é uma aplicação $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, cuja restrição nas fibras é uma forma bilinear simétrica e definida positivamente.*

Mais especificamente, seja \langle, \rangle um produto interno em E , como para cada $x \in M$ temos $E_x \cong \mathbb{R}^k$, segue que $\langle, \rangle|_{(E_x \times E_x)} : E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R}$ é o produto interno induzido pelo produto definido em \mathbb{R}^k e que varia suavemente para cada $x \in M$. Observe que, essa variação suave depende de uma das seguintes condições equivalentes:

1. $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é suave;
2. A seção \langle, \rangle do fibrado vetorial $(E \otimes E)^* \rightarrow M$ é suave;
3. Se σ_1, σ_2 são seções suaves de E , então a aplicação $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) = \langle \sigma_1(x), \sigma_2(x) \rangle$, é suave;
4. Se $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ uma trivialização local de E , então a função de valores matriciais $B_\alpha : U_\alpha \rightarrow Gl(k)$ tal que

$$\langle \psi_\alpha^{-1}(x, v), \psi_\alpha^{-1}(x, w) \rangle = v^t B_\alpha(x) w,$$

para todo $x \in U_\alpha$ e $v, w \in \mathbb{R}^k$, é suave.

Note que, no ítem 2, o fibrado vetorial $(E \otimes E)^*$ pode ser identificado com $Hom_{\mathbb{R}}(E \times E, \mathbb{R})$, espaço de funções bilineares de valores reais definido em $E \times E$. Para ver isso, precisamos lembrar da propriedade universal da álgebra tensorial. Sejam V_i espaços vetoriais reais, com $1 \leq i \leq k$, e $t : V_1 \times \cdots \times V_k \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ a aplicação k -linear canônica. Se existe um espaço vetorial L e uma aplicação k -linear $s : V_1 \times \cdots \times V_k \rightarrow L$, então existe uma única aplicação linear de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ em L , que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \cdots \times V_k & \xrightarrow{t} & V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \\ & \searrow s & \downarrow f \\ & & L \end{array}$$

i.e, $f \circ t = s$. Esse diagrama é muito usado pra mostrar isomorfismos lineares. O mesmo diagrama vale para os espaços duais e para produtos do tipo $V_1 \cdots V_k \times V_1^* \times \cdots \times V_k^*$. Esse resultado segue de maneira análoga para fibrados vetoriais, trocando V_i por E_i , com isso obtemos o seguinte resultado:

Proposição 38. *Sejam E um fibrado vetorial real de posto k e $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E \times E, \mathbb{R})$ o espaço das aplicações bilineares de $E \times E$ em \mathbb{R} . Então vale o isomorfismo (dimensão finita) $(E \otimes E)^* \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E \times E, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Seja $t : E^* \times E^* \longrightarrow E^* \otimes E^*$ uma aplicação bilinear, dada por $t(\alpha, \beta) = \alpha \otimes \beta$ com $\alpha, \beta \in E^*$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} s : E^* \times E^* &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E \times E, \mathbb{R}) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto s_{(\alpha, \beta)} : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_x, w_x) &\longmapsto s_{(\alpha, \beta)}(v_x, w_x) = \alpha(v_x)\beta(w_x). \end{aligned}$$

Onde $v_x, w_x \in E_x$ para cada $x \in M$.

Note que, s é bilinear. De fato, considere $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in E^*$ e $v_x, w_x \in E_x$, então

$$\begin{aligned} s_{(k_1\alpha_1 + \alpha_3, k_2\alpha_2 + \alpha_4)}(v_x, w_x) &= [k_1\alpha_1 + \alpha_3](v_x)[\alpha_2 + k_2\alpha_4](w_x) \\ &= [k_1\alpha_1(v_x) + \alpha_3(v_x)][\alpha_2(w_x) + k_2\alpha_4(w_x)] \\ &= k_1\alpha_1(v_x)\alpha_2(w_x) + k_1k_2\alpha_1(v_x)\alpha_4(w_x) + \\ &\quad + \alpha_3(v_x)\alpha_2(w_x) + k_2\alpha_3(v_x)\alpha_4(w_x) \\ &= k_1s_{\alpha_1, \alpha_2}(v_x, w_x) + k_1k_2s_{(\alpha_1, \alpha_4)}(v_x, w_x) + \\ &\quad + s_{(\alpha_3, \alpha_2)}(v_x, w_x) + k_2s_{(\alpha_3, \alpha_4)}(v_x, w_x). \end{aligned}$$

Segue a bilinearidade de s . Então existe uma aplicação linear $f : E^* \otimes E^* \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E \times E, \mathbb{R})$ tal que $f \circ t = s$. Agora, basta mostrar que f é um isomorfismo linear. Considere $\alpha, \beta \in E^*$ e $f(\alpha \otimes \beta) = 0$, com isso

$$\begin{aligned} f(\alpha \otimes \beta)(v_x, w_x) &= 0 \\ \alpha(v_x)\beta(w_x) &= 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

para todo $v_x, w_x \in E_x$ e $x \in M$. Da igualdade 3.19 segue que $\alpha(v_x) = 0$ ou $\beta(w_x) = 0$ para cada $x \in M$. Suponha que $\alpha(v_x) = 0$, pela arbitrariedade de $v_x \in E_x$ segue que $\alpha \equiv 0$. Logo $\alpha \otimes \beta = 0$ e, com isso, f é injetora. Como $\dim_{\mathbb{R}}(E^* \otimes E^*) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E \times E, \mathbb{R}))$ temos pelo teorema do núcleo e da imagem que f é um isomorfismo linear. \square

A partir dessa proposição podemos tratar seções do fibrado $(E \otimes E)^* \longrightarrow M$ como uma forma bilinear, em particular, um produto interno.

Proposição 39. *Todo fibrado vetorial real admite um produto interno.*

Demonstração. Assim como a demonstração de existência de uma métrica riemanniana em uma variedade suave, vamos usar partição da unidade para construir um produto interno em um fibrado vetorial. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto k sobre M , considere $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ uma trivialização local de E , onde $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ é uma cobertura por abertos de M . Tome $\{f_\alpha : M \rightarrow [0, 1] : \alpha \in \Lambda\}$ um partição da unidade subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$, então essas funções satisfazem as seguintes condições:

1. $f_\alpha \geq 0$ em \bar{U}_α e $f_\alpha = 0$ em $M - \bar{U}_\alpha$;
2. $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in M$.

Claramente podemos definir um produto interno em cada $\pi^{-1}(U_\alpha)$, induzido pelas trivializações locais, como dada no item 4 apresentado logo acima. Então definimos globalmente o produto interno em E como

$$\langle v_x, w_x \rangle_x = \sum_{\alpha} f_\alpha(x) \langle \psi_\alpha^{-1}(x, v), \psi_\alpha^{-1}(x, w) \rangle_x^\alpha$$

para todo $x \in M$, $v_x, w_x \in \pi^{-1}(x)$ e $v, w \in \mathbb{R}^k$. □

Com o produto interno bem definido nas fibras de um fibrado vetorial, podemos falar de redução do grupo estrutural $Gl(k)$ para o subgrupo $O(k)$, onde as funções de transição tem valores em $O(k)$. Isso é possível, pois com o produto interno podemos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt nos frames lineares de cada fibra.

Lema 3. *Seja E um fibrado vetorial e \langle, \rangle_E um produto interno definido em E e $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ um atlas para E . Então, para qualquer carta U_α existe referencial ortogonal $\{\sigma_1^\alpha, \dots, \sigma_k^\alpha\}$ em cada fibra E_x , para todo $x \in U_\alpha$.*

Com esse resultado podemos mostrar que as funções de transição tem seus valores em $O(k)$. Pelo lema 3 dada uma trivialização $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ podemos obter um frame linear ortogonal $\{\sigma_1^\alpha, \dots, \sigma_k^\alpha\}$ para cada fibra E_x com $x \in U_\alpha$, com respeito ao produto interno \langle, \rangle_E . Tome $\{e_1, \dots, e_k\}$ a base canônica de \mathbb{R}^k e $\psi_\alpha(\sigma^\alpha(x)) = (x, v_i^\alpha)$, assim existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que $T(v_i^\alpha) = e_i$.

Defina a seguinte trivialização, $\varphi_\alpha := (id_{U_\alpha} \times T) \circ \psi_\alpha$, como segue ilustrado:

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\psi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{id_{U_\alpha} \times T} U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

tal que $\varphi_\alpha(\sigma_i^\alpha(x)) = (x, e_i)$. Assim, dados $\alpha, \beta \in \Lambda$ temos

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) = (x, \tilde{\eta}_{\alpha\beta}(x)v).$$

Onde $\tilde{\eta}_{\alpha\beta}(x) = \left(\left\langle \sigma_i^\alpha(x), \sigma_j^\beta(x) \right\rangle_E \right)_{ij}$ é a matriz mudança que leva a base $\{\sigma_1^\alpha, \dots, \sigma_k^\alpha\}$ em $\{\sigma_1^\beta, \dots, \sigma_k^\beta\}$. Como as duas bases são ortogonais segue que $\tilde{\eta}_{\alpha\beta} \in O(k)$.

3.3.3 Orientação no fibrado vetorial

Lembremos da definição de orientabilidade em espaços vetoriais, inicialmente, para depois expandirmos ao caso de fibrados vetoriais.

Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} de dimensão $k > 0$. Dadas $\beta = \{e_i\}_{i \leq k}$ e $\tilde{\beta} = \{\tilde{e}_j\}_{j \leq k}$ duas bases ordenadas de V , dizemos que β é equivalente a $\tilde{\beta}$ se, e somente se, a matriz mudança de base tem determinante positivo, i.e, $\tilde{e}_j = \sum_{i=1}^k A_{ij} e_i$ com $A \in GL^+(k) = \{M \in GL(k) : \det M > 0\}$. Dizemos que a base β tem a mesma orientação de $\tilde{\beta}$ quando uma é equivalente a outra.

Equivalentemente, podemos definir uma orientação em V através de um elemento não nulo da potência exterior, $\Lambda^k V$. Primeiro, observe que $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^k V = 1$, então $\Lambda^k V - \{0\}$ possui duas componentes conexas, i.e, $\Lambda^k V - \{0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ e essas duas componentes vão separar o conjunto de todas as bases de V em dois conjuntos disjuntos. Considere $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$ uma base de V e assuma que β é orientada positivamente. Se $\tilde{\beta} = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k\}$ é uma outra base de V , segue que

$$\tilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{v}_k = \det(g) v_1 \wedge \dots \wedge v_k. \quad (3.20)$$

Onde $g \in GL(k)$ é a matriz mudança de base de β para $\tilde{\beta}$. Sabemos que se $\tilde{\beta}$ tem a mesma orientação de β , temos que $\det(g) > 0$, caso contrário $\det(g) < 0$. Dessa forma, podemos definir uma relação de equivalência sobre o conjunto $\Lambda^k(V) - \{0\}$, dada pela seguinte relação: Chamando $\omega = \tilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{v}_k$ e $\eta = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$, temos que

$$\omega \sim \eta \Leftrightarrow \exists g \in GL_+(k) : \omega = \det(g)\eta \quad (3.21)$$

É fácil ver que \sim é uma relação de equivalência. Definindo

$$\mathcal{C}_1 = [\omega] = \{\eta \in \Lambda^k(V) - \{0\} : \omega = \det(g)\eta, g \in GL^+(n)\},$$

obtemos que,

$$\mathcal{C}_2 = -[\omega] = \{\eta \in \Lambda^k(V) - \{0\} : \omega = \det(g)\eta, g \in GL^-(n)\}.$$

Por isso, podemos definir uma orientação em V a partir de um elemento não nulo de $\Lambda^k(V)$.

Definição 57. *Uma orientação em V é a escolha de uma das componentes conexas de $\Lambda^k V - \{0\}$.*

Definição 58. *Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial suave de posto k . Uma orientação para E é uma orientação em cada fibra $E_x \cong \mathbb{R}^k$, a qual varia suavemente para cada $x \in M$.*

Essa definição diz que se $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ é uma trivialização local de E , ψ preserva ou reverte a orientação, de acordo com a escolha da orientação em \mathbb{R}^k , em cada fibra.

Definição 59. *Se E admite uma orientação, dizemos que E é orientável.*

Lema 4. *Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial real suave. Então, E é orientável se, e somente se, existe uma coleção $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ de trivializações locais de E tal que $\eta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Gl^+(k)$, onde $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ é a família de funções de transição.*

Lema 5. *Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial real suave. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. E é orientável.
2. Existe uma seção suave não nula ω do fibrado de linha $\Lambda^k E^* = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k E_x^*$

Vimos que ao definir um produto interno num fibrado vetorial podemos reduzir o grupo estrutural $Gl(k)$ ao subgrupo $O(k)$. Quando o fibrado é orientável, podemos fazer uma outra redução, de $O(k)$ para $SO(k)$. Assim, temos outro resultado equivalente ao já visto, se um fibrado é orientável, então as funções de transição possuem seus valores em $SO(k)$.

3.4 Fibrados Associados

Neste tópico vamos mostrar como podemos associar um fibrado principal com um fibrado vetorial.

Definição 60. *Seja P um G -fibrado principal e F uma variedade suave que sofre uma ação à esquerda de G , dada por $r(f, g) = gf$ para cada $g \in G$ e $f \in F$. Então $P' = P \times F$ sofre uma ação à direita de G , dada por $R_g(p, f) = (pg, g^{-1}f)$ para cada $p \in P$, $f \in F$ e $g \in G$ e o espaço quociente $E = P \times_G F$ é o fibrado associado à P com a fibra típica F .*

Note que, a projeção $\tilde{\pi} : E \longrightarrow M$, com $\tilde{\pi}([p, f]) = \pi(p)$, está bem definida. De fato, se $(q, f_1) \in [(p, f)]$, classe de equivalência gerada pela ação de G em $P \times F$, temos que, existe $g \in G$ tal que $q = pg$ e $f_1 = g^{-1}f$. Então, $\tilde{\pi}([q, f_1]) = \pi(q) = \pi(p) = \tilde{\pi}([p, f])$.

Segue abaixo um dos exemplos mais clássicos sobre fibrado associado, o fibrado tangente.

Exemplo 31. *Sejam $B(M)$ o fibrado de bases (ou de referenciais), que já vimos que é um $GL(n)$ -fibrado principal. Mas aqui vamos considerar $B(M) = \{(x, e_1, \dots, e_n) : e_1, \dots, e_n \text{ é uma base de } T_x M\}$ que é equivalente à definição apresentada no exemplo 20. Tome \mathbb{R}^n uma variedade diferenciável que, sofre uma ação à esquerda por $GL(n)$*

$$\begin{aligned} GL(n) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (g, v) &\longmapsto g \cdot v \end{aligned} \quad (3.22)$$

Considere, agora, uma ação à direita de $GL(n)$ no produto $B(M) \times \mathbb{R}^n$, definida por

$$\begin{aligned} GL(n) \times (B(M) \times \mathbb{R}^n) &\longrightarrow B(M) \times \mathbb{R}^n \\ (g, (p, v)) &\longmapsto (p, v) \cdot g = (p \cdot g, g^{-1} \cdot v) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Observe que essas ações ocorrem da seguinte forma:

1. *Mudança ativa nos vetores da base de $T_x M$*

$$\begin{aligned} p \cdot g &= (x, e_1, \dots, e_n) \cdot (g_{ij}) \\ &= \left(x, \sum_{i=1}^n g_{i1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n g_{in} e_i \right) \\ &= (x, e'_1, \dots, e'_n) \end{aligned} \quad (3.24)$$

2. *Mudança passiva, pois estamos mudando as coordenadas de um mesmo vetor*

$$\begin{aligned} g^{-1} \cdot v &= (g^{ij})v \\ &= \left(\sum_{j=1}^n g^{1j} v_j, \dots, \sum_{j=1}^n g^{nj} v_j \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Onde $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$. Então, o fibrado associado a $B(M)$ com a fibra típica \mathbb{R}^n é $E = (B(M) \times \mathbb{R}^n)/GL(n)$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} F : E &\longrightarrow TM \\ [(p, v)] &\longmapsto p \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in T_{\pi(p)} M \end{aligned} \quad (3.26)$$

F está claramente bem definida. Agora dados $[(p, v)], [(q, w)] \in E$, se $p \cdot v = q \cdot w$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i e_i &= \sum_{j=1}^n w_j \tilde{e}_j \\ \sum_{i=1}^n v_i e_i - \sum_{j=1}^n w_j \tilde{e}_j &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para que a equação 3.27 tenha sentido, precisa existir $g \in GL(n)$ tal que $\tilde{e}_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} e_i$. Então, substituindo \tilde{e}_j em 3.27, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i e_i - \sum_{j=1}^n w_j \sum_{i=1}^n g_{ij} e_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \left(v_i - w_j \sum_{i=1}^n g_{ij} \right) e_i &= 0 \implies v_i = w_j \sum_{i=1}^n g_{ij} \implies w_j = \sum_{i=1}^n g^{ij} v_i \end{aligned} \quad (3.28)$$

Assim, $q = p \cdot g$ e $w = g^{-1} \cdot v \implies [(p, v)] = [(q, w)]$. Logo, F é injetiva. A sobrejetividade sai direto do fato de que, para todo $p \cdot v \in TM$, temos que existe uma classe de equivalência $[(p, v)] \in E$ tal que $F([(p, v)]) = p \cdot v$. Portanto, F é uma bijeção e TM é o fibrado associado a $B(M)$ com a fibra típica \mathbb{R}^n .

Observe que, estávamos sobre um $GL(n)$ -fibrado principal e passamos para um fibrado vetorial, TM . E o processo inverso também ocorre, isto é, do fibrado tangente conseguimos construir o fibrado de bases $B(M)$.

Os exemplos 21 e 31 são modelos para exemplos mais gerais, que veremos agora.

Exemplo 32 (Fibrado Vetorial). *Sejam (P, M, G) um G -fibrado vetorial e $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação de G , onde V é um espaço vetorial. Note que, ρ induz uma ação de G à esquerda em V , dada por*

$$\begin{aligned} \varphi : G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto \rho(g)v. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Então também temos uma ação de G à esquerda em $P \times V$, logo $E = P \times_G V$ é o fibrado associado a P com a fibra típica V . Pelo exemplo 21, podemos observar que E é um fibrado vetorial.

As trivializações locais de P induzem as trivializações locais em E , sobre os mesmos abertos de M , de tal forma que as funções de transição são preservadas. Com efeito, como P é um G -fibrado principal temos que para cada $x \in M$, existe uma vizinhança U de x em M tal que $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ é um difeomorfismo (as trivializações de P). Além disso, quando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times G &\longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \\ (x, g) &\longmapsto (x, \psi_{\beta\alpha}(x)g). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Onde $\psi_{\beta\alpha}$ são as funções de transição. Ao associarmos com o fibrado E , temos a projeção natural $\tilde{\pi} : E \longrightarrow M$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \tilde{\pi}^{-1}(U) &\longrightarrow U \times V \\ [(p, v)] &\longmapsto (\tilde{\pi}(p), \rho(\eta(p))v). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Onde η é uma aplicação de $\pi^{-1}(U)$ em G (já foi enunciada na definição 45-item 3). E as funções de transição são construídas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times V &\longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times V \\ (x, v) &\longmapsto (x, \rho(\psi_{\beta\alpha}(x))v) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Logo a função de transição em E , depende da função de transição em P . Observe a aplicação $\tilde{\varphi}$ que, para cada $x \in M$, existe um isomorfismo linear $\tilde{\pi}^{-1}(x) \longrightarrow x \times V \cong V$. Portanto, E é um fibrado vetorial.

Exemplo 33 (Fibrados de Referenciais de Fibrados Vetoriais). Nesta seção vamos generalizar a ideia de fibrado de base, que vimos no exemplo 20. Para isso, considere $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial suave com a fibra \mathbb{F}^k , onde \mathbb{F} é igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

O fibrado de referenciais lineares de E é o $GL(k, \mathbb{F})$ -fibrado associado a E , definido pelo seguinte conjunto

$$BE = \{(x, E_1, \dots, E_k) : \{E_1, \dots, E_k\} \text{ é uma base de } E_x\} \quad (3.33)$$

Para verificar que BE é, de fato, um $GL(k, \mathbb{F})$ -fibrado, basta realizar o mesmo processo feito no exemplo 20.

3.5 Conexões

Esta seção aborda um dos assuntos mais tradicionais da matemática, que é o cálculo diferencial. Vimos que a variedade é localmente parecida com um espaço euclidiano e com uma boa representação conseguimos falar de derivadas parciais de funções definidas numa variedade. Agora, será que é possível estender a ideia de diferenciabilidade para seções de um fibrado vetorial arbitrário? A resposta é sim, porém precisamos munir a variedade com uma estrutura específica para que isso aconteça, que chamamos de *conexões*, ao longo da seção esse nome fará mais sentido.

3.5.1 Conexões em fibrados principais

A teoria dessa seção pode ser encontrada em (LAWSON; MICHELSON, 2016), (KOBAYASHI; NOMIZU, 1963) e (BISHOP; CRITTENDEN, 1964). Quando necessário será especificado a referência utilizada.

Definição 61. Seja $\pi : P \longrightarrow M$ um G -fibrado principal e $\pi_* : TP \longrightarrow TM$ a diferencial de π . Definimos o subespaço vertical num ponto $p \in P$ como

$$V_p = \{X \in T_p P : \pi_* X = 0\} = \text{Ker}(\pi_*|_{T_p P})$$

Observação 23. Os vetores verticais, $X \in V_p$, podem ser pensados como aqueles que estão somente na direção da fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$ e a escolha do subespaço vertical é canônica, no sentido que, para cada espaço tangente T_pP , existe um único subespaço vertical.

Definição 62. Definimos um subespaço horizontal como um subespaço de T_pP , denotado por H_p , tal que $T_pP = V_p \oplus H_p$.

Observação 24. Diferentemente do subespaço vertical, a escolha do horizontal é não canônica, uma vez que não tem uma escolha específica, e para todo $Y \in H_p$ temos que $\pi_*Y \neq 0$.

Definição 63. Uma conexão é uma escolha suave, para cada $p \in P$, de um subespaço H_p de T_pP tal que $T_pP = V_p \oplus H_p$ e $H_{pg} = g * H_p$.

Observação 25. A operação $*$, na definição 63, vem do seguinte fato: Uma vez que G age à direita em P , podemos definir um difeomorfismo $R_g : P \rightarrow P$, denotado $R_g(p) = pg$. Assim, $(R_g)_{*p} : T_pP \rightarrow T_{pg}P$ é um isomorfismo linear e usando curvas integrais obtemos que $(R_g)_{*p}H_p = H_{pg}$. Então, $g * H_p = (R_g)_{*p}H_p$.

Podemos dar essa escolha através de uma mapa, como segue na definição abaixo.

Definição 64. Um conexão é uma escolha suave, para cada $p \in P$, de uma aplicação linear $\sigma_p : T_xM \rightarrow T_pP$ com $\pi(p) = x$, satisfazendo duas condições

1. $\pi_* \circ \sigma_p = id_{T_xM}$.
2. $\sigma_{pg} = g * \sigma_p$.

A segunda condição da definição acima é para que a ação do grupo G sobre a fibra também ocorra em σ_p .

A equivalência dessas duas definições vem do fato de σ_p aplicar T_xM isomorficamente em H_p , i.e, para cada vetor tangente $X \in T_xM$ temos um único vetor tangente em $X_p \in T_pP$ tal que $\sigma_p(X) = X_p \in H_p$ e ambas possuem a propriedade do elevador ($H_{pg} = g * H_p$ e $\sigma_{pg} = g * \sigma_p$).

Definição 65. Seja $\gamma_p : I \rightarrow P$ uma curva suave, para cada $p \in P$. Dizemos que γ_p é um curva horizontal se $\dot{\gamma}_p(t) \in H_p$ para todo $t \in I$.

O próximo resultado nos fornece uma ferramenta que conecta as fibras ao longo de uma curva. E essa "conexão" será dada para auxiliar na derivação de seções quando estivermos falando sobre conexões em fibrados vetoriais, porque nesse caso a noção de espaço vetorial aparece e, por conseguinte, podemos falar de derivada direcional.

Proposição 40. *Sejam $\gamma : I \longrightarrow M$ um curva suave em M e $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Então existe um único levantamento $\tilde{\gamma}_p$ de γ tal que $\tilde{\gamma}(0) = p$.*

Demonstração. A prova desse resultado pode ser encontrado em (BISHOP; CRITTENDEN, 1964). □

Corolário 5. *Se H_p é um conexão em P , com $p \in P$, e $\gamma : I \longrightarrow M$ é uma curva suave em M . Então existe um difeomorfismo $T_\gamma : \pi^{-1}(\gamma(0)) \longrightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$ definido por $T_\gamma(pg) = \tilde{\gamma}_{pg}(1) = g * \tilde{\gamma}_p(1)$. Chamamos T_γ de transporte paralelo de $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$ ao longo de γ .*

O corolário acima nos diz que um levantamento horizontal define um transporte paralelo que é responsável por conectar as fibras, enviando biunivocamente um ponto de uma fibra no ponto de outra fibra. A partir disso, veremos como é definido a derividade direcional pela noção de limite em fibrados vetorias.

Exemplo 34. *Considere $P = BM$ e $\gamma : I \longrightarrow M$ um curva suave com $\gamma(0) = x$. Lembremos que $BM = \{(x, E_1, \dots, E_n) : E_1, \dots, E_n \text{ é uma base para } T_x M\}$. Vamos definir o transporte paralelo em BM . Pela proposição 40 existe um único $\tilde{\gamma}_p : I \longrightarrow BM$, levantamento horizontal de γ , definido como*

$$\tilde{\gamma}_p(t) = (x, E_1(t), \dots, E_n(t)).$$

Pelo corolário 5 existe um difeomorfismo $T_\gamma : \pi^{-1}(0) \longrightarrow \pi^{-1}(1)$ tal que

$$T_\gamma((x, E_1(0), \dots, E_n(0))g) = (x, g_{i1}E_i(1), \dots, g_{in}E_i(1)).$$

Onde $g \in Gl(n)$. T_γ transporta paralelamente os frames lineares de $\pi^{-1}(0)$ para $\pi^{-1}(1)$.

$\tilde{\gamma}_p$ também é conhecido como referencial paralelo, que será importante para entendermos como o transporte paralelo ocorre em TM .

Assim como temos um fibrado principal associado com um fibrado vetorial, temos o transporte paralelo num fibrado vetorial induzido pelo transporte paralelo num fibrado principal.

Exemplo 35. *Vimos que o fibrado de bases $\pi : BM \longrightarrow M$ está associado com o fibrado tangente TM . Então, para cada $v \in T_{\gamma(0)}M$ com $v = v^i E_i(0)$, o transporte paralelo de v ao longo de γ pode ser dado por*

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\gamma : T_{\gamma(0)}M &\longrightarrow T_{\gamma(t)}M \\ v = [\tilde{\gamma}_p(0), r] &\longmapsto v^i(t)E_i(t) = [\tilde{\gamma}_p(t), r]. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Onde $r = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Observe que, \tilde{T}_γ transporta os frame lineares e mantém as coordenadas constantes.

O exemplo 35 pode ser generalizado para qualquer fibrado associado. De fato, dado P um fibrado principal e E o fibrado vetorial associado a P de posto n , podemos definir o transporte paralelo de um vetor $v \in E_{\gamma(0)}$ ao longo de γ , como

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\gamma : E_{\gamma(0)} &\longrightarrow E_{\gamma(t)} \\ v = [\tilde{\gamma}_p(0), r] &\longmapsto v^i(t)E_i(t) = [\tilde{\gamma}_p(t), r]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Onde $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ é um frame linear de $E_{\gamma(t)}$ para cada $t \in I$ e $r = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Nesse caso, \tilde{T}_γ é um isomorfismo linear.

Note que agora podemos analisar como uma seção local de um fibrado vetorial (campo vetorial) varia na direção de um vetor tangente, ou seja, desejamos calcular a derivada de um seção $s : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ num ponto $x_0 \in U$ na direção de $v \in T_{x_0}M$, onde U é um aberto de M e $\pi : E \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial. Sabemos que existe uma única curva $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ tal que $\gamma(t_0) = x_0$ e $\gamma'(t_0) = v$ para algum $t_0 \in [0, 1]$, então calcular a derivada de s na direção de v é o mesmo que calcular ao longo de γ . Pela definição de derivada de cálculo, deveríamos ter

$$(s \circ \gamma)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))}{t}. \quad (3.36)$$

Porém temos um problema nessa definição, uma vez que $s(\gamma(t)) \in E_{\gamma(t)}$ e $s(\gamma(0)) \in E_{\gamma(0)}$ com $E_{\gamma(t)} \neq E_{\gamma(0)}$. Como podemos resolver esse problema? Usando o transporte paralelo definido em 3.35. Então, podemos reescrever o limite definido em 3.36, como

$$(s \circ \gamma)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{T}_\gamma^{-1}(s(\gamma(t)) - s(\gamma(0)))}{t}. \quad (3.37)$$

Como $\tilde{T}_\gamma^{-1}(s(\gamma(t)), s(\gamma(0))) \in E_{\gamma(0)}$ e $E_{\gamma(0)}$ é um espaço vetorial segue que $\tilde{T}_\gamma^{-1}(s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))) \in E_{\gamma(0)}$. Observe que, $\tilde{T}_\gamma(s(\gamma(0))) = [\sigma_i(t), r]$, onde $(\sigma_i(t))$ é um frame linear de $E_{\gamma(t)}$ ao longo da curva γ .

A expressão definida em 3.37 será denotada por $(\nabla_v s)_{x_0}$, onde $v = \gamma'(0)$, também conhecida como derivada covariante. Como já vimos, podemos substituir as seções por campos vetoriais, que denotaremos pelas letras X, Y ou Z , onde cada um são aplicações de M em TM .

A definição de conexão como operador pode ser encontrado em (CARMO, 2019) ou (BIEZUNER, 2015).

Definição 66. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Uma conexão em M é uma aplicação \mathbb{R} -linear $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$, onde escrevemos $\nabla(X, Z)$ como $\nabla_X Z$, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$ e satisfaz as seguintes condições :*

1. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z;$

2. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$;
3. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_XY$ (regra de Leibnez).

Para todo $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ e $f \in C^\infty(M)$.

A conexão pode ser representada em coordenadas, haja vista que dados $X, Y \in \Gamma(TM)$ temos que

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i \text{ e } Y = \sum_{j=1}^n Y^j \partial_j.$$

Onde $(\partial_i|_x)$ e $(\partial_j|_x)$ são frames lineares de T_xM , para cada $x \in M$. Então,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left(\sum_{j=1}^n Y^j \partial_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \nabla_X (Y^j \partial_j) \\ &= \sum_{j=1}^n Y^j \nabla_X \partial_j + \sum_{j=1}^n X(Y^j) \partial_j \\ &= \sum_{j=1}^n Y^j \nabla_{(\sum_{i=1}^n X^i \partial_i)} \partial_j + \sum_{j=1}^n X(Y^j) \partial_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \sum_{j=1}^n X(Y^j) \partial_j \end{aligned} \tag{3.38}$$

Note que, avaliando a equação 3.38 em $x \in M$, obtemos

$$(\nabla_X Y)_x = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n X^i(x) Y^j(x) (\nabla_{\partial_i} \partial_j)_x + \sum_{j=1}^n [X_x(Y^j)](x) \partial_j|_x \tag{3.39}$$

e com isso, observamos que $(\nabla_X Y)_x$ depende apenas de X em x e Y ao longo da curva que passa por x e possui vetor tangente X_x . Além disso, podemos escrever $\nabla_{\partial_i} \partial_j$, da última igualdade em 3.38, em função dos frames lineares $(\partial_k|_x)$ de T_xM para cada $x \in M$, da seguinte forma

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k. \tag{3.40}$$

Onde Γ_{ij}^k são funções suaves, chamadas de *símbolos de Christoffel*.

Dessa forma, podemos descrever $\nabla_X Y$ como

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k + X(Y^k) \right) \partial_k \tag{3.41}$$

Proposição 41. *Toda variedade suave possui uma conexão.*

Demonstração. Pelo o que foi mostrado acima, dada uma variedade M e um atlas maximal $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, podemos definir uma conexão ∇^α em cada U_α , usando a representação em coordenadas. Uma vez que, M é paracompacto, podemos considerar uma partição da unidade $\{g_\alpha : M \rightarrow [0, 1]\}$ subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ tal que

1. $g_\alpha(x) = 0$, para todo $x \in M - \bar{U}_\alpha$;
2. $\sum_\alpha g_\alpha(x) = 1$, para todo $x \in M$.

Agora, defina $\nabla = \sum_\alpha g_\alpha \nabla^\alpha$. Vamos mostrar que ∇ é uma conexão em M . Para isso, vamos verificar apenas a regra de Leibniz dada no item 3 da definição 66. Dessa forma, dados $X, Y \in \Gamma(TM)$, $f \in C^\infty(M)$ e $x \in M$, temos

$$\begin{aligned}
 \nabla_X(fY) &= \sum_\alpha g_\alpha \nabla_X^\alpha(fY) \\
 &= \sum_\alpha g_\alpha [f \nabla_X^\alpha Y + X(f)Y] \\
 &= f \sum_\alpha g_\alpha \nabla_X^\alpha Y + \sum_\alpha g_\alpha X(f)Y \\
 &= f \sum_\alpha g_\alpha \nabla_X^\alpha Y + X(f)Y \sum_\alpha g_\alpha \\
 &= f \nabla_X Y + X(f)Y.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

As outras condições da definição 66 seguem naturalmente do fato de ∇^α ser um conexão. \square

Exemplo 36. Considere $M = \mathbb{R}^n$. Então, a conexão $\nabla : \Gamma(T\mathbb{R}^n \times \Gamma(T\mathbb{R}^n)) \rightarrow \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ é dada por $(\nabla_X Y)_x = dY_x(X_x)$, para cada $x \in M$, i.e, a derivada direcional do campo Y na direção de X_x . Usando a representação em coordenadas da derivada direcional em \mathbb{R}^n temos

$$dY_x(X_x) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X_x^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \Big|_x \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x. \tag{3.43}$$

Logo,

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X(Y^j) \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{3.44}$$

Analisando esse resultado com a equação 3.41, obtemos que todos os símbolos de Christoffel são nulos, $\Gamma_{ij}^k = 0$ para todo k, i, j .

A conexão definida em 66 pode ser generalizada para qualquer fibrado vetorial E , que em algumas referências é tratada como *derivada covariante*.

Definição 67. Uma derivada covariante em E é uma aplicação linear

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E) \tag{3.45}$$

tal que $\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s$, para todo $f \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(E)$.

Essa definição é equivalente a 66, porém aqui estamos considerando os campos vetoriais com seções do fibrado vetorial suave $\pi : E \rightarrow M$.

3.5.2 Conexões Riemannianas

Vimos na seção anterior como é definido uma conexão num fibrado principal e, posteriormente, associamos essa definição com a de transporte paralelo, que possibilitou a apresentação do conceito de derivação de campos vetoriais. Nesta seção, vamos apresentar a conexão de Levi-Civita ou Riemanniana e mostrar a sua existência e unicidade.

Definição 68. *Seja M uma variedade suave com uma conexão ∇ . O tensor torção da conexão ∇ é uma aplicação*

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \quad (3.46)$$

definida por $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$.

Definição 69. *Dizemos que ∇ é simétrica quando $T(X, Y) = 0$.*

Agora veremos uma importante relação entre conexões e métricas riemannianas.

Definição 70. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana, onde g é a métrica. Dizemos que uma conexão ∇ é compatível com métrica g quando*

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (3.47)$$

Lembremos que a ideia da conexão é se comportar como a derivada direcional em \mathbb{R}^n , então a definição 70, basicamente, está garantindo que a conexão é compatível com a métrica quando satisfaz a regra do produto interno. Com isso, podemos definir a conexão de Levi-Civita.

Definição 71. *Dizemos que ∇ é a conexão de Levi-Civita quando ∇ é simétrica e compatível com métrica g .*

Proposição 42. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana com a métrica g . Então existe uma única conexão ∇ em M que é simétrica e compatível com g .*

Demonstração. Suponha que ela existe, então vamos mostrar que é única. Como ∇ é simétrica e compatível com a métrica, valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X &= [X, Y] \\ \nabla_Y Z - \nabla_Z Y &= [Y, Z] \\ \nabla_Z X - \nabla_X Z &= [Z, X] \end{aligned} \quad (3.48)$$

e

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) &= Xg(Y, Z) \\
g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) &= Yg(Z, X) \\
g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) &= Zg(X, Y).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Somando as duas primeiras igualdades de (3.49) e depois usando a primeira e terceira igualdade em (3.5.2), obtemos

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X X) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) \\
g(\nabla_X Y, Z) + g(Z, \nabla_X Y - [X, Y]) + g(Y, \nabla_Z X - [Z, X]) + g(\nabla_Z Y - [Y, Z], X) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) \\
2g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Z Y, X) + g(Y, \nabla_Z X) - g(Z, [X, Y]) - g(Y, \nabla_Z X) - g([Y, Z], X) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) \\
2g(\nabla_X Y, Z) + Zg(Y, X) - g(Z, [X, Y]) - g(Y, [Z, X]) - g([Y, Z], X) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X).
\end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(Y, X) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) + g([Y, Z], X).$$

Logo, podemos escrever o produto do campo $\nabla_X Y$ pelo campo Z sem depender da conexão ∇ , então segue a unicidade. Mais especificamente, se $\tilde{\nabla}$ é outra conexão de Livi-Civita, temos que

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) - 2g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= 0 \\
g(\nabla_X Y, Z) &= g(\tilde{\nabla}_X Y, Z).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Portanto, $\nabla = \tilde{\nabla}$.

Por fim, para mostrar a existência, basta definir uma aplicação

$$C : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

dada por $C(X, Y, Z) = 2g(\nabla_X Y, Z)$ e verificar que satisfaz todas as propriedades de uma conexão. \square

3.5.3 1-forma de Conexão

Nessa seção vamos definir conexão como uma 1-forma com valores na Álgebra de Lie do grupo de Lie associado, para as informações omitidas basta acessar (LAWSON; MICHELSON, 2016).

Definição 72. *Seja G um grupo de Lie. O espaço tangente à G na identidade, $T_e G$, é chamado de Álgebra de Lie associado ao grupo G . Comumente é denotado por \mathfrak{g} .*

Da teoria de grupo de Lie, sabemos que G é uma variedade suave, então os resultados de variedades são válidos para o grupo G . Dessa forma, dado $A \in \mathfrak{g}$, existe $\epsilon > 0$ e uma curva suave $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G$ tais que $\gamma(0) = e$ e $\dot{\gamma}(0) = A$.

Considerando P um G -fibrado principal, P sofre uma ação à direita livre e transitiva por G , com isso, podemos considerar a aplicação

$$p : G \longrightarrow P$$

definida por $p(g) = pg$, para cada $p \in P$.

Observação 26. Na definição de p houve um abuso de notação, mas estamos apenas representando a aplicação que fixa o ponto $p \in P$ e varia os elementos do grupo.

Note que, p é aplica G difeomorficamente em $\pi^{-1}(\pi(p))$. De fato, dados $g_1, g_2 \in G$, se $p(g_1) = p(g_2)$ temos que

$$\begin{aligned} pg_1 &= pg_2 \\ p &= pg_2g_1^{-1} \\ p(e) &= p(g_2g_1^{-1}) \end{aligned} \tag{3.51}$$

Uma vez que a ação que G opera em P é livre, obtemos que $g_2g_1^{-1} = e$, então $g_1 = g_2$ e, com isso, p é injetiva. A sobrejetividade é consequência direta da transitividade da ação de G em P . Portanto, p é bijetiva, como estamos sobre variedades suaves, segue que p é um difeomorfismo.

O push-forward de p na identidade $e \in G$, $(p_*)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow T_pP$, aplica cada $A \in \mathfrak{g}$ em $X_p^A \in V_p$, para cada $p \in P$, onde V_p é o subespaço vertical de T_pP . Observe que, $(p_*)_e A = (p \circ \gamma)'(0)$, onde $\tilde{\gamma} := (p \circ \gamma) : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow P$ é uma curva que está inteiramente contida na fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$. Logo, $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = Ver(X_p^A) \in V_p$. Como a aplicação p é um difeomorfismo segue que $(p_*)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow V_p$ é um isomorfismo linear.

Definição 73. Definimos a aplicação

$$\omega_p : T_pP \longrightarrow \mathfrak{g}$$

pondo $\omega_p(X_p^A) = A$. Chamamos ω_p de 1-forma de conexão com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Note que, dado $X_p^A \in T_pP$ e escolhendo a conexão H_p em P , podemos fazer uma única decomposição de X_p^A como soma da componente horizontal e vertical, mais especificamente,

$$X_p^A = Hor(X_p^A) + Ver(X_p^A).$$

Onde $Hor(X_p^A) \in H_p$ e $Ver(X_p^A) \in V_p$.

Observação 27. Podemos pensar em ω_p como a projeção do vetor X_p^A na sua componente vertical $Ver(X_p^A)$, gerada através do isomorfismo linear $(p_*)_e$. Uma vez que, ω_p se preocupa

apenas com a componente vertical de X_p^A segue que $\text{Ker}(\omega_p) = H_p$, onde H_p é o subespaço horizontal de T_pP ou, equivalentemente, a conexão em P .

4 Estrutura Spin

Vimos na seção 3.3 que um fibrado vetorial é orientável se podemos reduzir as funções de transição ao grupo $Gl_+(n)$ ou, equivalentemente, se suas imagens pertencem estritamente ao grupo ortogonal especial $SO(n)$, uma vez que sempre podemos ortonormalizar os referenciais.

A teoria completa sobre estrutura spin pode ser acessada usando o livro (LAWSON; MICHELSON, 2016). O fibrado principal denotado por $P_{SO}(E)$ é o fibrado de referenciais ortogonais cujo grupo estrutural é o $SO(n)$ associado ao fibrado vetorial E .

Definição 74. *Suponha que $n \geq 3$. Então uma estrutura Spin em E é um $Spin(n)$ -fibrado principal, denotado por $P_{Spin}(E)$, junto com um recobrimento duplo*

$$\Lambda : P_{Spin}(E) \longrightarrow P_{SO}(E) \quad (4.1)$$

Tal que $\Lambda(pg) = \Lambda(p)\lambda(g)$ para cada $p \in P_{Spin}(E)$ e $g \in Spin(n)$, onde $\lambda(n) : Spin(n) \longrightarrow SO(n)$ é um recobrimento duplo.

Observação 28. *Da definição acima, temos que uma condição necessária para que um E fibrado vetorial tenha uma estrutura spin é a existência de um $SO(n)$ -fibrado principal tal que $P_{Spin}(E)$ é um recobrimento duplo de $P_{SO}(E)$*

Podemos analisar a definição 74 pelo seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} Spin(n) & \xrightarrow{\lambda} & SO(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{Spin}(E) & \xrightarrow{\Lambda} & P_{SO}(E) \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & & M \end{array}$$

Feito isso, o fato de Λ ser um recobrimento duplo vem diretamente de λ ser um recobrimento duplo, uma vez que toda fibra de $P_{SO}(E)$ é isomorfa a $SO(n)$ e o mesmo ocorre com o fibrado $P_{Spin}(E)$, então as propriedades que λ possui são enviadas a Λ de maneira natural, fazendo com que Λ seja um recobrimento duplo.

Podemos induzir as funções de transição de $P_{SO}(E)$ através das funções de transição de $P_{Spin}(E)$, usando o diagrama acima. Dessa forma, dadas $\eta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin(n)$ e $\tilde{\eta}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SO(n)$ as funções de transição de $P_{Spin}(E)$ e $P_{so}(E)$ respectivamente, com $U_\alpha, U_\beta \subset M$ abertos, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \cap U_\beta \times Spin(n) & \longrightarrow & U_\alpha \cap U_\beta \times Spin(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\alpha \cap U_\beta \times SO(n) & \longrightarrow & U_\alpha \cap U_\beta \times SO(n) \end{array}$$

onde,

$$\begin{array}{ccc} (x, g) & \longmapsto & (x, \eta_{\alpha\beta}(x)g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, \lambda(g)) & \longmapsto & (x, \tilde{\eta}_{\alpha\beta}(x)\lambda(g)) = (x, \lambda(\eta_{\alpha\beta}(x)g)) \end{array}$$

Logo, $\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \lambda \circ \eta_{\alpha\beta}$.

4.1 Fibrados de Clifford e Operador de Dirac

Para falarmos sobre os fibrados de Clifford precisamos voltar ao assunto de fibrados associados da seção 3.4, com intuito de trazer a intuição da construção desse novo fibrado que apresentaremos.

Considere M uma variedade suave de dimensão n , sabemos pelo exemplo 31 que TM é o fibrado associado ao fibrado de bases BM , que é um $Gl(n)$ -fibrado principal. A relação de equivalência que associa TM com BM , pode ser escrita como $TM = P_{Gl}(M) \times_\rho \mathbb{R}^n$, onde $\rho : Gl(n) \longrightarrow Gl(n)$, definida por $\rho(g)(v) = gv$, e $P_{Gl}(M) = BM$. As funções de transição de TM são dadas pela composição das funções de $P_{Gl}(M)$ com a representação ρ e isso ocorre em todos os fibrados associados.

Exemplo 37. Da mesma forma que vimos para fibrado tangente, TM , temos para o fibrado cotangente, T^*M , com pequenas alterações, uma vez que $T^*M = P_{Gl}(M) \times_{\rho^*} (\mathbb{R}^n)^*$, onde $\rho^*(g)(v) = (g^{-1})^t v$, para $g \in Gl(n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 38. No capítulo de fibrados vimos algumas operações, dentre elas o produto tensorial e a potência exterior de fibrados vetoriais, conseqüentemente temos um fibrado associado para cada um deles, com as mudanças equivalentes na representação e na fibra associada. Dessa forma, obtemos

$$\bigotimes_s^r TM = P_{Gl} \times_{\otimes_s^r \rho} \bigotimes_s^r \mathbb{R}^k. \quad (4.2)$$

Onde $\otimes_s^r \rho : Gl(n) \longrightarrow Gl(n) \times \mathbb{R}^k$ é definida por

$$\otimes_s^r \rho(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^r) = g(v_1) \otimes \cdots \otimes g(v_s) \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^r.$$

Com $v_i \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha^j \in (\mathbb{R}^n)^*$ para $1 \leq i \leq s$ e $1 \leq j \leq r$.

Agora, analisando a k -ésima potência exterior do fibrado tangente e cotangente, temos que

$$\Lambda^k TM = P_{Gl}(M) \times_{\Lambda^k \rho} \Lambda^k \mathbb{R}^n. \quad (4.3)$$

Onde $\Lambda^k \rho : Gl(n) \longrightarrow Gl(\Lambda^k \mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\Lambda^k \rho(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = g(v_1) \wedge \cdots \wedge g(v_k) = \det(g)v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$$

Assim, como no exemplo 37 temos que $\Lambda^k T^*M = P_{Gl}(M) \times_{\Lambda^k \rho^*} \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$

Partindo dessa ideia e considerando que toda transformação ortogonal em \mathbb{R}^n induz uma transformação ortogonal em $Aut(Cl_n)$, obtemos a seguinte representação

$$\theta(\rho) : SO(n) \longrightarrow Aut(Cl_n) \quad (4.4)$$

e, com isso, podemos induzir o fibrado de Clifford de maneira análoga aos exemplos anteriores.

Definição 75. *Seja E um fibrado vetorial orientável. Definimos o fibrado de Clifford de E como*

$$Cl(E) = P_{SO}(E) \times_{\theta(\rho)} Cl_n. \quad (4.5)$$

Associado a representação $\theta(\rho)$.

Em fibrados principais, as fibras possuem, a partir da escolha da identidade, uma estrutura de um grupo de Lie que age à direita no espaço base, no caso do fibrado de Clifford as fibras vão possuir estrutura da Álgebra de Clifford associado a cada fibra de E , que sabemos por 3.3, são espaços vetoriais com métrica, em particular, com uma forma quadrática. Claramente os resultados apresentados na seção 2.1 são verificados para o $Cl(E)$. Mais detalhes dessa validação podem ser encontrados no Lawson.

Naturalmente, pela construção que acabamos de fazer de $Cl(E)$, podemos falar sobre fibrado spinor, que basicamente, é um fibrado de Clifford com uma estrutura de Cl_n -módulo, restrito ao grupo $Spin(n)$.

Definição 76. *Sejam E um fibrado vetorial orientável e $F : P_{Spin}(E) \longrightarrow P_{SO}(E)$ a sua estrutura spin. Definimos um fibrado spinor real de E pela seguinte igualdade:*

$$S(E) = P_{Spin}(E) \times_f W. \quad (4.6)$$

Onde $f : Spin(n) \longrightarrow GL(W)$ é uma representação de $Spin(n)$ e W é um Cl_n -módulo.

Agora, analisando os fibrados de Clifford da definição 75, faz sentido pensarmos em Cl_n como um módulo sobre si mesmo, ou seja, considerar uma aplicação $l : Cl_n \longrightarrow Aut(Cl_n)$, onde para cada $\varphi \in Cl_n$, obtemos $l(\varphi)(\psi) = \varphi\psi$, para todo $\psi \in Cl_n$. Ao restringir l a $Spin(n)$, conseguimos contruir um exemplo de fibrado spinor, dada por

$$Cl_{spin}(E) = P_{spin}(E) \times_l Cl_n \quad (4.7)$$

Análogo à construção do fibrado spinor 4.7, podemos dar uma nova caracterização do fibrado de Clifford em 75. Isso resume-se em analisar a relação da representação $Ad : Spin(n) \rightarrow Aut(Cl_n)$, definida por $Ad_g(\varphi) = g\varphi g^{-1}$, para todo $g \in Spin(n)$ e $\varphi \in Cl_n$, com a aplicação de recobrimento $\lambda : Spin(n) \rightarrow SO(n)$, que pela seção 2.1, sabemos que $\lambda(g)(v) = gvg^{-1}$ para todo $g \in Spin(n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Então, $Ad_g(v) = \lambda(g)(v)$, com isso ao estender $\lambda(g)$ pela representação $\theta(\rho_n)$ e como Ad é um homomorfismo segue que $\theta(\rho)(\lambda(g)) = Ad_g$ para cada $g \in Spin(n)$. Equivalentemente, estamos dizendo que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} Spin(n) & \xrightarrow{Ad} & Aut(Cl_n) \\ \lambda \downarrow & \nearrow \theta(\rho) & \\ SO(n) & & \end{array}$$

i.e, $\theta(\rho) \circ \lambda = Ad$. A partir disso é possível associar os seguintes fibrados

$$Cl(E) = P_{SO}(E) \times_{\theta(\rho)} Cl_n \quad \text{e} \quad P_{Spin}(E) \times_{Ad} Cl_n \quad (4.8)$$

Proposição 43. *Seja E um fibrado vetorial orientável sobre um variedade suave M . Então $Cl(E) \cong P_{Spin}(E) \times_{Ad} Cl_n$.*

Demonstração. Sabemos pelo diagrama acima que as funções de transição de $P_{spin}(E)$ são dadas por $\eta_{\alpha\beta}$ e as de $P_{SO}(E)$ por $\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \lambda \circ \eta_{\alpha\beta}$. Além disso, temos que $Ad \circ \eta_{\alpha\beta}$ são as funções de transição de $P_{spin}(E) \times_{Ad} Cl_n$ e $\theta(\rho) \circ \tilde{\eta}_{\alpha\beta}$ são as de $P_{SO}(E) \times_{\theta(\rho)} Cl_n$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \theta(\rho) \circ \tilde{\eta}_{\alpha\beta} &= \theta(\rho) \circ (\lambda \circ \eta_{\alpha\beta}) \\ &= (\theta(\rho) \circ \lambda) \circ \eta_{\alpha\beta} \\ &= Ad \circ \eta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Logo, as funções de transição de $P_{Spin}(E) \times_{Ad} Cl_n$ e de $Cl(E)$ são iguais e, pela proposição 32, obtemos, portanto, que $Cl(E) \cong P_{Spin}(E) \times_{Ad} Cl_n$. \square

Observação 29. *Os fibrados de Clifford geram uma outra categoria de fibrados, uma vez que, podemos pensar neles como Cl_n -fibrados principais. As ações de Cl_n à direita em P_{Spin} e $P_{SO}(E)$ e à esquerda em Cl_n ocorrem de maneira natural e, com isso, satisfazem todas as condições para serem um fibrado principal porém, em vez de ser sobre um grupo, como vimos na seção 3.2, será sobre um Cl_n (como um módulo sobre si mesmo).*

4.1.1 Conexão em Fibrados Spinores

Na seção 3.5 vimos que podemos induzir a conexão de um G -fibrado principal a um fibrado associado, da mesma forma para definirmos uma conexão em fibrados

spinors vamos definir um conexão em $P_{SO}(E)$, depois induzir uma conexão em $Cl(E)$ e, conseqüentemente, em $S(E)$. Considerando que E é um fibrado vetorial orientável.

Alguns resultados apresentados a seguir estão com as provas omitidas, haja vista que a maioria deles utiliza-se de argumentos não expostos neste trabalho, mas todos se encontram em (LAWSON; MICHELSON, 2016).

Considere $P = P_{SO}(E)$. Sabemos que a Álgebra de Lie de $SO(n)$ é a álgebra das matrizes de ordem n anti-simétricas, denotada por $\mathfrak{so}(n)$. Então pela definição 73, a 1-forma de conexão em P é dada pela aplicação $\omega_p(X_p^A) = A \in \mathfrak{so}(n)$, para cada $p \in P$ e $X_p^A \in T_pP$.

Proposição 44. *Seja $\omega : TP \rightarrow \mathfrak{so}(n)$ uma 1-forma de conexão em $P_{SO}(E)$. Então ω determina uma única derivada covariante em E pela regra*

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}_{ji} \otimes s_j \quad (4.10)$$

onde $\sigma = (s_i)_{i=1}^n$ é uma família de seções locais ortogonais (frame lineares) de E , i.e, uma seção local de $P_{SO}(E)$ e $\tilde{\omega} = \sigma^*\omega$.

Observação 30. *Note que, se $\sigma \in \Gamma(P_{SO}(E))$ temos que $\sigma^* : \Omega(TP, \mathfrak{so}(n)) \rightarrow \Omega(TM, \mathfrak{so}(n))$ e $(\sigma^*\omega)_{ji} = \tilde{\omega}_{ji} \in T^*M$.*

A derivada covariante determinada em 44 satisfaz a seguinte propriedade:

$$X \langle s, s' \rangle = \langle \nabla_X s, s' \rangle + \langle s, \nabla_X s' \rangle \quad (4.11)$$

onde $s, s' \in \Gamma(E)$, $X \in \Gamma(TM)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em E .

Por outro lado, qualquer derivada covariante em E que satisfaz a condição 4.11, determina uma única 1-forma de conexão. Observe que a condição em 4.11 é equivalente a definição 70, ou seja, estamos falando que essa derivada covariante é compatível com o produto interno em E .

Lembrando de fibrados associados a fibrados vetoriais através de uma representação do grupo estrutural, como está feito no exemplo 32, podemos munir um fibrado associado com uma 1-forma de conexão fazendo o pushforward da representação. De fato, considere $\pi : P \rightarrow M$ um G -fibrado principal, $\rho : G \rightarrow SO(n)$ uma representação de G e ω_p um conexão 1-forma em P . Sabemos que

$$E_\rho = P \times_\rho \mathbb{R}^n$$

é um fibrado vetorial associado a P pela representação ρ . Também temos o fibrado de referenciais ortogonais de E_ρ , que é dado por

$$P(E_\rho) = P \times_\rho SO(n)$$

A pergunta é: Como induzir uma conexão em $P(E_\rho)$ a partir de uma conexão τ em P , onde $\tau_p = \text{Ker}\omega_p$? Primeiro, notemos que τ se estende naturalmente para um conexão em $P \times SO(n)$, uma vez que, dado $p \in P$ e $e \in SO(n)$, com e sendo a identidade, temos que $T_{(p,e)}(P \times SO(n)) = T_p \times \mathfrak{so}(n)$. Assim, definimos uma conexão $\tilde{\tau}$ em $P \times SO(n)$, associada a $\tilde{\omega}$ 1-forma de conexão em $P \times SO(n)$, para cada $p \in P$ e $g \in SO(n)$, como

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{(p,g)} &= \text{Ker}(\tilde{\omega}_{(p,g)}) \\ &= \{(X_p, \omega_p(X_p)) : \omega_p(X_p) = 0\} \\ &= \{(X_p, 0) : X_p \in \tau_p\} \\ &= (\tau_p, 0) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Agora, tomando $p : P \times SO(n) \longrightarrow P(E_\rho)$ a projeção canônica do quociente, definimos a conexão em $P(E_\rho)$ por $\tau_\rho = p_*\tilde{\tau}$ e chamamos τ_ρ de induzida por τ .

Além disso, existe um mergulho que aplica P em $P(E_\rho)$, dado pela seguinte aplicação

$$i : P \longrightarrow P(E_\rho)$$

pondo $i(p) = [(p, e)]$, para cada $p \in P$. A partir disso, podemos olhar para P como um subconjunto de $P(E_\rho)$.

A próxima proposição diz que sempre podemos induzir uma conexão no fibrado associado pelo pushforward da representação.

Proposição 45. *Sejam ω uma conexão forma em (P, G, M) e $\rho : G \longrightarrow SO(n)$ uma representação. Considere ω_ρ a correspondente 1-forma de conexão induzida em $P \times_\rho G$. Então considerando que $P \subset P \times_\rho G$ temos que*

$$\omega_\rho \Big|_P = \rho_*\omega. \tag{4.13}$$

Onde $\rho_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{so}(n)$ é o homomorfismo de Álgebras de Lie associado ρ .

A partir da proposição 45 e sabendo que o fibrado de Clifford, definido em 75, é em linhas gerais um fibrado com uma estrutura de Cl_n -módulo associado a um fibrado vetorial, logo, temos uma representação envolvida e, como já foi definida em 4.4, ela é dada por $\theta(\rho) : SO(n) \longrightarrow \text{Aut}(Cl_n)$. Então, podemos usar a proposição anterior para definir uma 1-forma de conexão em $Cl(E)$, considerando que E é um fibrado vetorial suave munido com uma conexão riemanniana, equivalentemente, uma 1-forma de conexão τ em $P_{SO}(E)$.

Para isso, precisamos calcular o pushforward de $\theta(\rho)$.

$$\theta(\rho)_* : \mathfrak{so}(n) \longrightarrow \text{Der}(Cl_n).$$

Onde $\text{Der}(Cl_n)$ é a Álgebra de Lie das derivações, i.e, para cada $A \in \mathfrak{so}(n)$ e $\varphi, \psi \in Cl_n$, obtemos

$$(\theta(\rho)_*A)(\varphi \cdot \psi) = (\theta(\rho)_*A)(\varphi) \cdot \psi + \varphi \cdot (\theta(\rho)_*A)(\psi) \quad (4.14)$$

Com isso, usando as proposições 44 e 45, podemos definir a derivada covariante em $Cl(E)$.

Proposição 46. *A derivada covariante ∇ em $Cl(E)$ age como uma derivação na álgebra de seções*

$$\nabla(\varphi \cdot \psi) = (\nabla\varphi) \cdot \psi + \varphi \cdot (\nabla\psi) \quad (4.15)$$

para todo $\varphi, \psi \in \Gamma(Cl(E))$.

Corolário 6. *Os subfibrados $Cl^0(E)$ e $Cl^1(E)$ são preservados por ∇ . Além disso, a forma de volume $\omega = e_1 \cdots e_n$ é globalmente paralelo, i.e,*

$$\nabla\omega = 0 \quad (4.16)$$

Portanto, quando $n \cong 3$ ou $(\text{mod}4)$, os autofibrados $Cl^\pm(E) = \{\varphi \in Cl(E) : \omega\varphi = \pm\varphi\}$ são preservados por ∇ .

Assim como definimos a derivada covariante em $Cl(E)$, podemos definir no fibrado spin, $S(E)$, da mesma forma. Supondo que E é um fibrado vetorial orientável, então possui uma estrutura spin, definida por $\Lambda : P_{Spin}(E) \longrightarrow P_{SO}(E)$, e $S(E) = P_{spin}(E) \times_\lambda M$, onde $\lambda : Spin(M) \longrightarrow SO(M)$ com M sendo um Cl_n -módulo. Dessa forma, a conexão $\tau \in P_{SO}(E)$ induz uma conexão $\tilde{\tau}$ através de Λ .

Observação 31. *O grupo de Lie $Spin(n)$ tem a mesma dimensão de $SO(n)$, consequentemente os espaços tangentes em qualquer ponto tem a mesma dimensão. Então $\lambda_{*1} : \mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n)$ é um isomorfismo linear, i.e, $\mathfrak{spin}(n) \cong \mathfrak{so}(n)$.*

O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{spin}(n) & \xrightarrow{\lambda_{*1}} & \mathfrak{so}(n) \\ \tilde{\omega} \uparrow & & \uparrow \omega \\ TP_{Spin}(E) & \xrightarrow{\Lambda_*} & TP_{SO}(E) \\ \pi_* \searrow & & \swarrow \pi'_* \\ & TM & \end{array}$$

tal que $\tilde{\omega} = \Lambda_* \circ \omega$, onde ω é uma conexão em $P_{SO}(E)$ e $\tilde{\omega}$ é a induzida em $P_{spin}(E)$.

Proposição 47. *A derivada covariante ∇ em $S(E)$ age como uma derivada com respeito a estrutura de módulo sobre $Cl(E)$, i.e.,*

$$\nabla(\varphi \cdot \sigma) = (\nabla\varphi) \cdot \sigma + \varphi \cdot (\nabla\sigma) \quad (4.17)$$

para qualquer $\varphi \in \Gamma(Cl(E))$ e $\sigma \in \Gamma(S(E))$.

Para o próximo exemplo, considere a seguinte definição:

Definição 77. *Seja M uma variedade riemanniana n -dimensional. Dizemos que M é uma variedade spin se o fibrado tangente de M admite estrutura spin.*

Exemplo 39. *Seja M uma variedade suave de dimensão n . Ao considerar $E = TM$ o fibrado tangente de posto n orientável podemos reduzir a ação de $Gl(n)$ sobre os seus referenciais lineares ao grupo $SO(n)$, gerando o fibrado de referenciais ortogonais $P_{SO}(TM)$, que vamos denotar apenas por $P_{SO}(M)$. Conseqüentemente, temos que $Cl(M)$ é o fibrado de Clifford sobre M .*

Assumindo que $P_{SO}(M)$ está munido com uma conexão e ∇ a sua derivada covariante associada. Então podemos definir o tensor torção em M , exatamente como foi definido em 68, onde para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$ temos que

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Teorema 10. *Seja $P_{SO}(M)$ o fibrado de referencias tangentes de um variedade riemanniana M . Então existe uma única conexão em $P_{SO}(M)$ com a propriedade que $T(X, Y) = 0$, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$.*

Essa é a conexão de Levi-Civita, definida em 71. Além disso, ela pode ser induzida de maneira canônica a $Cl(M)$, uma vez que temos o seguinte isomorfismo linear $Cl(M) \cong \Lambda^*(\mathbb{R}^n)$. Se M admite uma estrutura spin, então conseguimos induzir essa conexão em $P_{spin}(M)$ e, conseqüentemente, a qualquer fibrado spinor real associado a $P_{spin}(M)$.

Agora podemos definir o que é um operador de Dirac e como este se relaciona com os fibrados de Clifford. Para isso, considere M uma variedade riemanniana com o fibrado de Clifford $Cl(M)$ e S um fibrado de módulos a esquerda sobre $Cl(M)$, já vimos na seção anterior como que S age em $Cl(M)$. Supondo que ∇ é a conexão riemanniana definida em S , temos a seguinte definição.

Definição 78. *Seja ∇ a conexão mencionada no parágrafo acima. Definimos o Operador de Dirac de S pelo operador diferencial*

$$D : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S) \quad (4.18)$$

definido por $D\sigma = \sum_{j=1}^n e_j \nabla_{e_j} \sigma$, onde $\varsigma = (e_1, \dots, e_n)$ é um referencial linear ortogonal de TM e a operação entre e_j e σ é o produto de Clifford sobre a estrutura do módulo S . O operador D^2 é chamado de Laplaciano de Dirac.

É necessário que o fibrado S tenha duas propriedades adicionais para definirmos um fibrado de Dirac. A primeira, que já foi mencionada no capítulo 2, na proposição 31, exige que a multiplicação de Clifford por um vetor unitário em TM seja ortogonal, i.e, em cada $x \in M$, temos que

$$\langle u\sigma_1, u\sigma_2 \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle. \quad (4.19)$$

Para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in S_x$ e para todo $u \in T_x M$ com $\|u\| = 1$.

A igualdade em 4.19 nos fornece uma outra condição equivalente, sabendo que $u \in T_x M \subset Cl(TM)$, então $u^2 = -\|u\| \cdot 1 = -1$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle u\sigma_1, \sigma_2 \rangle &= \langle uu\sigma_1, u\sigma_2 \rangle \\ &= \langle u^2\sigma_1, \sigma_2 \rangle \\ &= -\langle \sigma_1, u\sigma_2 \rangle \\ \langle u\sigma_1, \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_1, u\sigma_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

A outra propriedade, exige que a derivada covariante em S seja uma derivação sobre o módulo, i.e,

$$\nabla(\varphi\sigma) = (\nabla\varphi)\sigma + \varphi(\nabla\sigma) \quad (4.21)$$

para todo $\varphi \in \Gamma(Cl(M))$ e $\sigma \in \Gamma(S)$.

O fibrado de spinores $S(E)$ possui todas essas propriedades, além de ser um fibrado de módulos a esquerda sobre $Cl(E)$. Então vamos considerar S como um fibrado de spinores.

Definição 79. *O fibrado de Dirac sobre uma variedade riemanniana M é o fibrado de spinores S sobre $Cl(M)$ junto com uma métrica riemanniana e uma conexão em S que satisfaz 4.20 e 4.21.*

Observação 32. *Pela definição 79 temos que todo fibrado de spinores é um fibrado de Dirac.*

O produto interno em $\Gamma(S)$, induzido por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que é compatível com a estrutura de módulo em $Cl(M)$, é definido por

$$(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \int_M \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \quad (4.22)$$

Proposição 48. *O operador de Dirac de qualquer fibrado de Dirac sobre uma variedade riemanniana é auto-adjunto, i.e., $(D\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1, D\sigma_2)$.*

Demonstração. (LAWSON; MICHELSON, 2016), página 115. □

Exemplo 40. *Seja $M = \mathbb{R}^n$ e $S = \mathbb{R}^n \times V$, onde V é um Cl_n -módulo à esquerda, i.e., para $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $S_x = \{x\} \times V \cong V$ sofre uma ação de Cl_n à esquerda. Neste caso, o fibrado de Clifford $Cl(M)$ é a união disjunta de $\{x\} \times Cl_n \cong Cl_n$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Então, o operador de Dirac de S , $D : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$, é definido em coordenadas locais, como*

$$D = \sum_{k=1}^n \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (4.23)$$

onde $\gamma_k : V \rightarrow V$ satisfaz $\gamma_j \gamma_k + \gamma_k \gamma_j = -2\delta_{jk}$ para todo $j, k \leq n$.

O laplaciano de Dirac é dado por

$$D^2 = \Delta \cdot id_V \quad (4.24)$$

onde $\Delta = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

5 Imersões Isométricas

Neste capítulo vamos apresentar as ferramentas necessárias para garantir a existência de uma imersão isométrica.

Sejam $(\overline{M}, \overline{g})$ uma variedade riemanniana de dimensão m , M uma variedade riemanniana de dimensão n e $i : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão, então podemos definir a métrica g em M pela pullback de \overline{g} pela imersão i , i.e, $g := i^*\overline{g}$. Neste caso, dizemos que i é uma imersão isométrica, pois g será invariante pela aplicação $i_{*x} = di_x$ para todo $x \in M$.

Uma vez que, M pode ser observada como uma subvariedade riemanniana imersa em \overline{M} , para cada $x \in M$ temos que $T_x M$ é um subespaço vetorial de $T_x \overline{M}$ e como temos um produto interno bem definido em M , representado pela g , podemos trabalhar com complemento ortonormal de $T_x M$ em $T_x \overline{M}$. Assim, temos que

$$T_x \overline{M} = T_x M \oplus T_x M^\perp \quad (5.1)$$

onde $T_x M^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_x M$, que denotaremos por $N_x M$.

Dessa forma, podemos definir o fibrado normal de M , dado por

$$NM := \bigsqcup_{x \in M} N_x M.$$

NM é um fibrado vetorial suave de posto $m - n$, esse fato vem do resultado básico de algebra linear que garante a extensão de uma base de um subespaço vetorial de dimensão finita a uma base de todo o espaço vetorial, i.e, ao pegarmos uma vizinhança coordenada de um ponto x e uma base ortonormal $\{E_1|_x, \dots, E_n|_x\}$ de $T_x M$, encontramos $m - n$ vetores linearmente independentes $\{E_{n+1}|_x, \dots, E_m|_x\}$ base de $N_x M$ tal que a união dessas duas bases define uma base em $T_x \overline{M}$.

Então, para cada $x \in M$, temos uma decomposição em soma direta (soma de Whitney) do fibrado tangente ambiente sobre M , dado por

$$T\overline{M}|_M := TM \oplus NM \quad (5.2)$$

Com a decomposição em 5.2 definimos duas aplicações

$$\begin{aligned} \pi^T : T\overline{M}|_M &\longrightarrow TM \\ \pi^\perp : T\overline{M}|_M &\longrightarrow NM. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Chamamos π^\top e π^\perp de projeções tangencial e normal, respectivamente.

Observação 33. *Estas aplicações são suaves e, portanto, envia um campo vetorial em $\Gamma(T\overline{M}|_M)$ em campos em $\Gamma(TM)$ e $\Gamma(NM)$, respectivamente.*

Considere $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana em \bar{M} , pela definição 66, sabemos que para cada par $(\bar{X}, \bar{Y}) \in \Gamma(T\bar{M}|_M) \times \Gamma(T\bar{M}|_M)$ temos que $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} \in \Gamma(T\bar{M}|_M)$. Então, podemos fazer a seguinte decomposição

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = (\bar{\nabla}_X Y)^\top + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp. \quad (5.4)$$

Onde $X, Y \in \Gamma(TM)$ são restrições de \bar{X} e \bar{Y} à M .

Uma vez que, a decomposição em 5.4 é única e $\bar{\nabla}$ é a conexão riemanniana em \bar{M} segue que $\bar{\nabla}^\top$ é a conexão riemanniana em M . Então, para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$ definimos a conexão em M por $\nabla_X Y := (\bar{\nabla}_X Y)^\top$.

Definição 80. *Definimos a segunda forma fundamental de M pela aplicação*

$$\Pi : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(NM) \quad (5.5)$$

dada por $\Pi(X, Y) := (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$. Essa definição independe das extensões dos campos vetoriais.

Observação 34. 1. Π definido acima é uma seção suave de NM , uma vez que π^\perp projeta seções suave de $T\bar{M}$ em seções suaves de NM .

2. A primeira forma fundamental é a própria métrica induzida g em M .

Lema 6. Π da definição 80 satisfaz as seguintes premissas:

1. independe da extensão de X e Y ;
2. bilinear sobre o anel $C^\infty(M)$;
3. simétrica em X e Y .

Demonstração.

Sejam \bar{X}, \bar{Y} e \tilde{X}, \tilde{Y} em $\Gamma(T\bar{M}|_M)$ duas extensões arbitrárias de X e Y . Mas como $\bar{\nabla}_X Y$ em $x \in M$ só depende de X_x e Y_x em $T_x M$ e $\bar{X}_x = X_x = \tilde{X}_x$ e $\bar{Y}_x = Y_x = \tilde{Y}_x$, para todo $x \in M$, logo Π não depende da escolha da extensão.

Sejam $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e $f, g \in C^\infty(M)$. Então

$$\begin{aligned}
\Pi(X + fZ, Y + gW) &= (\bar{\nabla}_{X+fZ}(Y + gW))^\perp \\
&= (\bar{\nabla}_X(Y + gW) + f\bar{\nabla}_Z(Y + gW))^\perp \\
&= (\bar{\nabla}_X Y)^\perp + (\bar{\nabla}_X(gW))^\perp + f(\bar{\nabla}_Z Y)^\perp + f(\bar{\nabla}_Z(gW))^\perp \\
&= \Pi(X, Y) + (X(g)W)^\perp + g(\bar{\nabla}_X W)^\perp + f\Pi(Z, Y) + \\
&\quad + f\left[(Z(g)W)^\perp + g(\bar{\nabla}_Z W)^\perp\right] \\
&= \Pi(X, Y) + f\Pi(Z, Y) + g\Pi(X, W) + fg\Pi(Z, W).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Note que, $(X(g)W)^\perp = 0$ e $(Z(g)W)^\perp = 0$, pois ambos campos vetoriais estão em TM .

$$\begin{aligned}
\Pi(X, Y) - \Pi(Y, X) &= (\bar{\nabla}_X Y)^\perp - (\bar{\nabla}_Y X)^\perp \\
&= (\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X)^\perp \\
&= [X, Y]^\perp \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

A penúltima igualdade em 5.7 é consequência direta de $\bar{\nabla}$ ser simétrica, como $[X, Y] \in \Gamma(TM)$ temos que $[X, Y]^\perp = 0$. \square

Teorema 11. *Se $X, Y \in \Gamma(TM)$ são estendidos arbitrariamente para campos vetoriais em \bar{M} , então vale a seguinte igualdade em M :*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y). \tag{5.8}$$

Essa igualdade é chamada de fórmula de Gauss.

Demonstração. Em linhas gerais, usamos apenas o fato de que $\bar{\nabla}$ é a conexão riemanniana. Para mais detalhes basta conferir em (LEE, 2006). \square

Definição 81. *Para cada $x \in M$ e $\eta \in N_x M$, definimos o operador de Weingarten da imersão i em η , pelo endomorfismo linear auto-adjunto*

$$A_\eta : T_x M \longrightarrow T_x M \tag{5.9}$$

dado por $\langle A_\eta(X_x), Y_x \rangle = \langle \Pi(X_x, Y_x), \eta \rangle$, onde $X_x, Y_x \in T_x M$. A_η também é conhecido como operador forma.

Observação 35. *Os autovalores de A_η são as curvaturas principais em x , i.e, se (E_1, \dots, E_n) é uma base de autovetores de $T_x M$, então $A_\eta(E_i) = \kappa_i E_i$, onde para cada i , κ_i é uma curvatura principal.*

Exemplo 41. Seja $M = S_r^2$ imersa em \mathbb{R}^3 . Considere, para cada $x \in M$ e $X \in T_x M$ uma curva integral $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\dot{\alpha}(0) = X$. O espaço ortogonal a $T_x M$ é unidimensional, que vamos denotar por $T_x M^\perp$. Ao longo da curva α os vetores em $T_x M^\perp$ são dados por $N(t) = \frac{\alpha(t)}{|\alpha(t)|} = \frac{1}{r}\alpha(t)$, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} A_\eta(X) &= -(\bar{\nabla}_X N)_x^\top \\ &= -dN_0 \dot{\alpha}(0) \\ &= -(N \circ \alpha)'(0) \\ &= -\frac{1}{r} \dot{\alpha}(0) \\ &= -\frac{1}{r} X \end{aligned} \tag{5.10}$$

Portanto, $A_\eta = -\frac{1}{r} \text{id}_{T_x M}$, para cada $x \in M$.

Lema 7. Sejam $X, Y \in \Gamma(M)$ e $N \in \Gamma(NM)$. Quando X, Y, η são estendidos arbitrariamente para \bar{M} , vale a seguinte equação em M :

$$\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle N, \Pi(X, Y) \rangle \tag{5.11}$$

Demonstração. Basta observar que $\langle N, Y \rangle \equiv 0$ em todo M e $X \in \Gamma(TM)$. Então é fácil ver o resultado. \square

O lema 7, em coordenadas locais, define o operador de Weingarten em função da derivada covariante de um campo normal a M . De fato, considere $N \in \Gamma(NM)$ tal que $N_x = \eta \in N_x M$ e $X_x = v, Y_x = w \in T_x M$, onde $x \in M$ está numa vizinhança coordenada dada pela carta (U, φ) . Com isso, N é uma extensão local de η e

$$\begin{aligned} \langle A_\eta(v), w \rangle &= \langle \Pi(v, w), \eta \rangle \\ &= \langle \Pi(X, Y), N \rangle_x \\ &= -\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle_x \\ &= -\langle (\bar{\nabla}_X N)^\top, Y \rangle_x \\ &= -\langle (\bar{\nabla}_X N)_x^\top, w \rangle \end{aligned} \tag{5.12}$$

Portanto, $A_\eta(v) = -(\bar{\nabla}_X N)_x^\top$.

Observação 36. A primeira igualdade em 5.12 é da definição de A_η , a terceira é o lema 7, a quarta é só fazer a decomposição de $\bar{\nabla}_X N$ na componente tangencial e normal e depois fazer o produto interno com Y .

Definição 82. O traço normalizado da segunda forma fundamental nos fornece a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{n} \text{Tr}(\Pi) = H \quad (5.13)$$

onde $n = \dim M$ e H é a curvatura média de M .

A conexão ∇^\perp em NM é chamada de conexão normal e é dada por $\nabla_X^\perp N = (\bar{\nabla}_X N)^\perp$.

Usando o fato que acabamos de mostrar em 5.12 e a definição de conexão normal, observamos que

$$\nabla_X^\perp N = (\bar{\nabla}_X N)^\perp = \bar{\nabla}_X N - (\bar{\nabla}_X N)^\top = \bar{\nabla}_X N + A_N(X)$$

Logo,

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N(X) + \nabla_X^\perp N \quad (5.14)$$

Observação 37. Note que a aplicação A_N é uma seção do fibrado $TM^* \otimes TM$, uma vez que

$$A_N : M \longrightarrow TM^* \otimes TM \quad (5.15)$$

é tal que $A_N(x) : T_x M \longrightarrow T_x M$.

A derivada covariante da segunda forma fundamental e a curvatura normal são dadas pelas seguintes expressões

1. $(\nabla_X^\perp \Pi)(Y, Z) = \nabla_X^\perp (\Pi(Y, Z)) - \Pi(\nabla_X Y, Z) - \Pi(Y, \nabla_X Z)$.
2. $R^\perp(X, Y)N = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp N - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp N - \nabla_{[X, Y]}^\perp N$.

Segue abaixo a proposição que fornece equações fundamentais de uma imersão isométrica.

Proposição 49. A primeira e segunda forma fundamental e a conexão normal de uma imersão isométrica $i : M \longrightarrow \bar{M}$, satisfazem as seguintes equações:

1. $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle \Pi(X, Z), \Pi(Y, W) \rangle - \langle \Pi(X, W), \Pi(X, Z) \rangle$
2. $(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \Pi)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \Pi)(X, Z)$
3. $\langle \bar{R}(X, Y)N, \Theta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)N, \Theta \rangle - \langle [A_N, A_\Theta]X, Y \rangle$

onde $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ e $N, \Theta \in \Gamma(NM)$.

Cada equação acima possui um nome específico, 1. *equação de Gauss*, 2. *equação de Codazzi-Mainardi* e 3. *equação de Ricci*.

A prova desse resultado pode ser encontrada em (BIEZUNER, 2015).

Corolário 7. *Se (\bar{M}, \bar{g}) é um espaço forma de curvatura κ , então as equações fundamentais para uma imersão isométrica $i : (M, g) \longrightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ são dadas por:*

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle = & -\kappa(\langle X, Y \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle) && \text{equação de Gauss} \\ & - \langle \Pi(X, Z), \Pi(Y, W) \rangle + \langle \Pi(X, W), \Pi(Y, Z) \rangle \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$(\nabla_X^\perp \Pi)(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \Pi)(X, Z) \quad \text{equação de Codazzi-Mainard} \quad (5.17)$$

$$\langle R^\perp(X, Y)N, \Theta \rangle = \langle [A_N, A_\Theta]X, Y \rangle, \quad \text{equação de Ricci} \quad (5.18)$$

onde $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e $N, \Theta \in \Gamma(NM)$.

Teorema 12. *Seja M uma variedade riemanniana de dimensão n e E um fibrado vetorial de dimensão m com métricas riemannianas e com conexões compatíveis. Seja $\Pi : TM \times TM \longrightarrow E$ uma aplicação bilinear, simétrica e A_N , para cada $N \in E$, é um operador que satisfaz 5.15. Então se as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, apresentadas na proposição 49, são satisfeitas, existe uma imersão isométrica local $f : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ de forma que podemos identificar o fibrado normal dessa imersão com o fibrado E e a métrica induzida no fibrado normal coincide com a métrica original em E . A segunda forma fundamental e conexão induzidas pela imersão coincidem com as conexões originais em TM e E . Além disso, essa imersão é única a menos de movimento rígido. No caso de M ser simplesmente conexa essa imersão é global.*

Demonstração. Uma demonstração para esse teorema pode ser encontrada em (TENENBLAT, 1971), pag. 26. □

6 Reformulação do teorema clássico de superfícies via geometria spin

Chegamos no objetivo deste trabalho, que é fazer uma reformulação do teorema clássico de superfícies, que garante localmente a existência de imersões isométricas de uma superfície em \mathbb{R}^3 , via geometria spin, mais especificamente, através de spinores, originalmente feito por (FRIEDRICH, 1998).

A ideia de Friedrich é descrever uma superfície M imersa em \mathbb{R}^3 por um campo spinorial φ de M satisfazendo a seguinte equação de Dirac não-homogênea

$$D(\varphi) = H\varphi. \quad (6.1)$$

Onde H é a curvatura média de M .

Antes de analisar como uma imersão isométrica está relacionada com a solução da equação 6.1, vamos usar a teoria do capítulo 5 para induzir uma conexão em uma subvariedade spin M de dimensão 2 a partir do \mathbb{R}^3 .

Considere uma imersão $j : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, onde \mathbb{R}^3 está munido de uma métrica \bar{g} , seguindo o mesmo processo já realizado, sabemos que a métrica \bar{g} induz uma métrica em M , pela imersão j , dada por $g = j^*\bar{g}$.

A estrutura spin de \mathbb{R}^3 induz uma estrutura spin em M , que da mesma maneira ocorre com um fibrado de spinores em \mathbb{R}^3 , denotado por S , produzindo assim um fibrado de spinores em M . Como vimos no capítulo 4, mais especificamente na seção 4.1.1, podemos fazer a decomposição de S sobre M , dada por

$$S = S^+ \oplus S^- \quad (6.2)$$

onde $S^\pm = \{\varphi \in S : ie_1e_2 \cdot \varphi = \pm\varphi\}$ e $\{e_1, e_2\}$ é um referencial ortonormal em TM e $X \cdot \varphi$ é o produto de Clifford.

A decomposição 6.2 é ortogonal. De fato, para qualquer $u \in T_xM$ unitário, temos que

$$\begin{aligned} g(S^+, S^-) &= g(uS^+, S^-) \\ &= -g(S^+, uS^-) \\ 2g(S^+, S^-) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Logo, $g(S^+, S^-) = 0$.

Além disso, para cada $\varphi \in S$, temos a seguinte decomposição $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, onde

$$\varphi^\pm = \frac{1}{2}(\varphi \pm iN \cdot \varphi) \quad (6.4)$$

A conexão que está definida em S é a Riemanniana, então sabemos pela proposição 44 que ela fornece uma única derivada covariante sobre as seções de S com base em \mathbb{R}^3 , que vamos denotar por $\bar{\nabla}$. Então, a fórmula de Gauss apresentado em 5.8 nos fornece a seguinte decomposição spinorial:

$$\bar{\nabla}_X(\Phi) = \nabla_X^M \varphi - \frac{1}{2}(\nabla_X N)N \cdot \varphi, \quad (6.5)$$

onde $N = e_1 \cdot e_2$ se comporta como o vetor normal à M . Para verificar esse fato, basta mostrar $\langle N, e_i \rangle = 0$ para $i = 1, 2$. De fato, da igualdade 4.20, obtemos

$$\begin{aligned} \langle N, e_2 \rangle &= \langle e_1 e_2, e_2 \rangle \\ \langle N, e_2 \rangle &= \langle e_1 e_1 e_2, e_1 e_2 \rangle \\ \langle N, e_2 \rangle &= -\langle e_2, e_1 e_2 \rangle \\ \langle N, e_2 \rangle + \langle e_2, N \rangle &= 0 \\ 2 \langle N, e_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \langle N, e_1 \rangle &= \langle e_1 e_2, e_1 \rangle \\ \langle N, e_2 \rangle &= -\langle e_2 e_1, e_1 \rangle \\ \langle N, e_1 \rangle &= -\langle e_2 e_2 e_1, e_2 e_1 \rangle \\ \langle N, e_1 \rangle &= \langle e_1, e_2 e_1 \rangle \\ \langle N, e_1 \rangle &= -\langle e_1, e_1 e_2 \rangle \\ \langle N, e_1 \rangle &= -\langle e_1, N \rangle \\ 2 \langle N, e_1 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Portanto, $\langle N, e_i \rangle = 0$ para $i = 1, 2$.

Note que a equação 6.5 relaciona a derivada covariante de um spinor em \mathbb{R}^3 com a equivalente em M , denotada por ∇_X^M , onde $X \in TM$, N é o vetor normal à M e $\nabla_X N$ é o mapa de Weingarten da imersão, como definido em 81.

Além disso, observe que $(\nabla_X N)N$ deveria ser correspondente a segunda forma fundamental de M . De fato, uma vez que temos a propriedade 7 em M , i.e,

$$\langle \nabla_X N, Y \rangle = -\langle \Pi(X, Y), N \rangle,$$

mas como a codimensão de M é igual a 1, temos que $\Pi(X, Y)$ está na direção do normal, N , então expressão $\nabla_X N N$ é equivalente a segunda forma fundamental em M . Assim, podemos definir $\Pi : TM \rightarrow TM$ dada por $\Pi(X) = \nabla_X N$, para $N \in T^\perp M$ fixo.

Uma vez que Π é um endomorfismo simétrico, obtemos, pelo produto de Clifford, a seguinte igualdade:

$$e_1 \cdot \Pi(e_1) + e_2 \cdot \Pi(e_2) = -2H, \quad (6.8)$$

onde H é a curvatura média de M .

Agora, pela definição 78, temos que o operador de Dirac de $S(\mathbb{R}^3)$ aplicado no spinor Φ é dado por

$$D\Phi = e_1 \cdot \bar{\nabla}_{e_1} \Phi + e_2 \cdot \bar{\nabla}_{e_2} \Phi. \quad (6.9)$$

Substituindo 6.5 em 6.9, obtemos

$$\begin{aligned} D\Phi &= e_1 \left(\nabla_{e_1}^M \varphi - \frac{1}{2} \nabla_{e_1} N(N\varphi) \right) + e_2 \cdot \left(\nabla_{e_2}^M \varphi - \frac{1}{2} \nabla_{e_2} N(N\varphi) \right) \\ &= e_1 \cdot \nabla_{e_1}^M \varphi + e_2 \cdot \nabla_{e_2}^M \varphi - \frac{1}{2} (e_1 \cdot \nabla_{e_1} N + e_2 \cdot \nabla_{e_2} N) N \cdot \varphi \\ &= D\varphi - \frac{1}{2} (e_1 \cdot \Pi(e_1) + e_2 \cdot \Pi(e_2)) N \cdot \varphi \\ &= D\varphi - \frac{1}{2} (-2H) N \cdot \varphi \\ &= D\varphi + HN \cdot \varphi. \end{aligned} \quad (6.10)$$

A penúltima igualdade em 6.10, vem da equação 6.8. A partir disso, estamos em busca de spinores em \mathbb{R}^3 tais que $D\Phi = 0$, i.e, Φ seja um spinor paralelo, pois com isso, temos a seguinte equação:

$$D\varphi = -HN \cdot \varphi. \quad (6.11)$$

Dessa forma, considere Φ um campo spinor paralelo em \mathbb{R}^3 , i.e, $\bar{\nabla}\Phi = 0$, como $\bar{\nabla}$ é a conexão compatível com a métrica em \mathbb{R}^3 , pela definição 70, para todo $X \in TM$, temos

$$\begin{aligned} Xg(\Phi, \Phi) &= g(\bar{\nabla}_X \Phi, \Phi) + g(\Phi, \bar{\nabla}_X \Phi) \\ &= 2g(\bar{\nabla}_X \Phi, \Phi) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

De 6.12, temos que $|\Phi|^2 = g(\Phi, \Phi)$ é constante, então Φ tem comprimento constante, em particular a restrição $\varphi := \Phi|_M$ continua com comprimento constante. Como S^+ e S^- são ortogonais, $|\varphi|^2 = |\varphi^+|^2 + |\varphi^-|^2$.

Note que, para $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, onde φ^\pm é da forma 6.4, obtemos

$$\begin{aligned}
D\varphi^+ &= \frac{1}{2}D(\varphi + iN \cdot \varphi) \\
&= \frac{1}{2}[D\varphi + iD(N \cdot \varphi)] \\
&= \frac{1}{2}[-HN \cdot \varphi + i(DN \cdot \varphi + N \cdot D\varphi)] \\
&= \frac{1}{2}[-HN \cdot \varphi + i(-2H\varphi - N \cdot HN \cdot \varphi)] \\
&= \frac{1}{2}[-HN \cdot \varphi + i(-2H\varphi + H \cdot \varphi)] \\
&= \frac{1}{2}[-HN \cdot \varphi - iH\varphi] \\
&= -iH \cdot \frac{1}{2}[\varphi - iN \cdot \varphi] \\
&= -iH\varphi^-.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Da mesma maneira, podemos obter $D\varphi^- = iH\varphi^+$.

Então, convenientemente, escolhemos o seguinte campo spinor:

$$\bar{\varphi} := \varphi^+ - i\varphi^- \tag{6.14}$$

Esse campo tem norma constante, uma vez que φ tem norma constante e $|\bar{\varphi}|^2 = |\varphi^+|^2 + |\varphi^-|^2 = |\varphi|^2$. E, finalmente, produzimos um spinor tal que

$$\begin{aligned}
D\bar{\varphi} &= D(\varphi^+ - i\varphi^-) \\
&= D\varphi^+ - iD\varphi^- \\
&= -iH\varphi^- + H\varphi^+ \\
&= H(\varphi^+ - i\varphi^-) \\
&= H\bar{\varphi}.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Portanto, a partir de uma imersão $j : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ produzimos um spinor $\bar{\varphi}$ tal que $D\bar{\varphi} = H\bar{\varphi}$.

Pergunta: Será que a recíproca é verdadeira? Ou seja, dada uma solução que satisfaz a equação 6.15, obtemos uma imersão de uma variedade 2-dimensional em \mathbb{R}^3 ?

Sejam (M, g) uma variedade riemanniana 2-dimensional orientada com estrutura spin e $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave definida em M .

Ao contrário do que fizemos acima, considere φ um campo spinor em M que é solução da equação diferencial 6.1. Como $\varphi \in S = S^+ \oplus S^-$, podemos escrever $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$

tais que

$$D\varphi^\pm = H\varphi^\mp. \quad (6.16)$$

Para qualquer solução φ da equação 6.1, associamos duas formas

$$F_\pm : TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R} \quad (6.17)$$

definidas por $F_\pm(X, Y) = \text{Re}(\nabla_X \varphi^\pm, Y\varphi^\mp)$, para cada $X, Y \in TM$.

A proposição abaixo garante que F_\pm são simétricas e bilineares com $\text{Tr}(F_\pm) = -H|\varphi^\mp|^2$, onde Tr é o traço da matriz associada a F_\pm .

Proposição 50. F_\pm são formas bilineares simétricas em TM e $\text{Tr}(F_\pm) = -H|\varphi^\mp|^2$.

Demonstração. (FRIEDRICH, 1998) pág. 147. \square

Agora, vamos considerar soluções com comprimento constante, i.e, $|\varphi| = k_0$, onde $k_0 \neq 0$ é constante, para observar qual a relação que obtemos para as formas 6.17.

Proposição 51. Suponha que o campo spinor φ definido em M é solução da equação

$$D\varphi = H\varphi, \quad |\varphi| = k_0. \quad (6.18)$$

Então as formas F_\pm estão relacionadas pela equação

$$|\varphi^+|^2 F_+ = |\varphi^-|^2 F_- \quad (6.19)$$

Demonstração. (FRIEDRICH, 1998), pág. 148-149. \square

Assim, definimos a forma bilinear $F = F_+ + F_-$ que herda todas as propriedades de suas componentes e seja o endomorfismo $E : TM \longrightarrow TM$ dado por

$$g(E(X), Y) = \frac{F(X, Y)}{|\varphi|^2}, \quad (6.20)$$

para todo $X, Y \in TM$.

Proposição 52. Sejam φ uma solução da equação diferencial $D\varphi = H\varphi$ em (M, g) e $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Suponha que φ tem comprimento constante não nulo. Então,

$$g(E(X), Y) = \frac{1}{|\varphi|^2} \text{Re}(\nabla_X \varphi, Y\varphi), \quad (6.21)$$

define um endomorfismo simétrico $E : TM \longrightarrow TM$ tal que

$$1. \nabla_X \varphi^+ = E(X)\varphi^- \text{ e } \nabla_X \varphi^- = E(X)\varphi^+.$$

$$2. \operatorname{Tr}(E) = -H.$$

Para qualquer tripla (M, g, E) de uma variedade riemanniana 2-dimensional e um endomorfismo simétrico E , a existência de uma solução não trivial φ da equação diferencial

$$D\varphi = E(X) \cdot \varphi \quad (6.22)$$

garantem que E satisfaz as equações de Gaus-Codazzi, apresentadas no capítulo 5. A próxima proposição explicita esse fato e sua demonstração pode ser encontrada em (FRIEDRICH, 1998).

Proposição 53. *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana 2-dimensional orientada com estrutura spin fixada e suponha que $E : TM \rightarrow TM$ é um endomorfismo simétrico. Se existe uma solução não trivial da equação*

$$\nabla_X \varphi = E(X) \cdot \varphi, \quad (6.23)$$

para $X \in TM$. Então,

$$\begin{aligned} (\text{Equação de Codazzi}) : \nabla_X(E(Y)) - \nabla_Y(E(X)) - E([X, Y]) &= 0 \\ (\text{Equação de Gauss}) : \det(E) &= \frac{1}{4}G \end{aligned} \quad (6.24)$$

onde G é a curvatura Gaussiana de (M, g) .

Agora, estamos sob as hipóteses do teorema 12, então a solução φ da equação de Dirac

$$D(\varphi) = H\varphi, \quad |\varphi| \equiv cte > 0$$

produz uma imersão isométrica local de M em \mathbb{R}^3 .

Portanto, a resposta para a pergunta feita no início do capítulo é sim. Gerando o seguinte teorema via geometria spin.

Teorema 13. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana 2-dimensional orientada e $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então existe uma equivalência entre as seguintes premissas:*

1. Uma imersão isométrica local de (M, g) em \mathbb{R}^3 com curvatura média dada por H .
2. Uma solução φ com comprimento constante $|\varphi| \equiv 1$ da equação de Dirac $D(\varphi) = H \cdot \varphi$.
3. Um par (φ, E) , E é um endomorfismo simétrico tal que $\operatorname{Tr}(E) = -H$ e um campo spinor φ satisfazendo a equação $\nabla_X \varphi = E(X) \cdot \varphi$.

Basicamente, quando assumimos uma solução com comprimento constante da equação diferencial 6.1, podemos produzir um endomorfismo simétrico E que se comporta como a segunda forma fundamental e tem H como curvatura média. Então, voltamos para o caso clássico de superfícies.

Referências

- ATIYAH, M. *Introduction to commutative algebra*. [S.l.]: CRC Press, 2018. 17–31 p. Citado na página 49.
- BIEZUNER, R. J. *Notas de aula geometria diferencial*. [S.l.]: UFMG, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 110.
- BISHOP, R.; CRITTENDEN, R. The geometry of manifolds academic press inc. *New York*, p. 74–87;185–207, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 87.
- CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. 1–38 p. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 88.
- FRIEDRICH, T. On the spinor representation of surfaces in euclidean 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, Elsevier, v. 28, n. 1-2, p. 143–157, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 11, 111, 115 e 116.
- GILBERT, J.; MURRAY, M. *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1991. 1–77 p. Citado na página 27.
- HATCHER, A. Vector bundles and k-theory. *Im Internet unter <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>*, p. 4–38, 2003. Citado na página 74.
- _____. *Algebraic topology*. [S.l.]: Tsinghua University Press Co., Ltd., 2005. 56–73 p. Citado na página 36.
- KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry*. [S.l.]: New York, London, 1963. v. 1. 1–68 p. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 85.
- _____. *Foundations of differential geometry*. [S.l.]: New York, London, 1969. v. 2. 1–47 p. Citado na página 49.
- KOSTRIKIN, A. I.; MANIN, Y. I. *Linear algebra and geometry*. [S.l.]: CRC Press, 1989. 258–293 p. Citado 3 vezes nas páginas 25, 27 e 71.
- LAWSON, H. B.; MICHELSON, M.-L. *Spin Geometry (PMS-38), Volume 38*. [S.l.]: Princeton university press, 2016. 7–40; 77 – 115 p. Citado 11 vezes nas páginas 25, 31, 44, 47, 53, 57, 85, 92, 95, 99 e 104.
- LEE, J. M. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 176. 131–137 p. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 107.
- _____. *Smooth manifolds*. [S.l.]: Springer, 2013. 1–95; 174–209 p. Citado 5 vezes nas páginas 12, 14, 15, 21 e 73.
- MARTIN, L. A. B. S. *Grupos de Lie*. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2019. 103–126 p. Citado na página 60.
- TENENBLAT, K. On isometric immersions of riemannian manifolds. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, Springer, v. 2, n. 2, p. 23–36, 1971. Citado na página 110.

VAZ, J.; ROCHA, R. da. *An introduction to Clifford algebras and spinors*. [S.l.]: Oxford University Press, 2016. 57–83 p. Citado na página 25.