UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

NARAYAN VILASH MACHACA LEÓN

# Uma análise em espaços de Besov homogêneos das equações de Navier-Stokes

Campinas

2022

Narayan Vilash Machaca León

# Uma análise em espaços de Besov homogêneos das equações de Navier-Stokes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Narayan Vilash Machaca León e orientada pelo Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M18a

Machaca León, Narayan Vilash, 1997-
Uma análise em espaços de Besov homogêneos das equações de Navier-Stokes / Narayan Vilash Machaca León. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações de Navier-Stokes. 2. Espaços de Besov. 3. Soluções brandas (Equações diferenciais parciais). 4. Boa-colocação global. 5. Má-colocação (Equações diferenciais parciais). 6. Espaços de Lebesgue. I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** An analysis in homogeneous Besov spaces for the Navier-Stokes equations
**Palavras-chave em inglês:**
Navier-Stokes equations
Besov spaces
Mild solutions (Partial differential equations)
Global well-posedness
Ill-posedness (Partial differential equations)
Lebesgue spaces
**Área de concentração:** Matemática
**Titulação:** Mestre em Matemática
**Banca examinadora:**
Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]
Luís Henrique de Miranda
Nestor Felipe Castañeda Centurión
**Data de defesa:** 25-03-2022
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-9905-8039
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/7193349537276679

**Dissertação de Mestrado defendida em 25 de março de 2022 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA**

**Prof(a). Dr(a). LUÍS HENRIQUE DE MIRANDA**

**Prof(a). Dr(a). NESTOR FELIPE CASTAÑEDA CENTURIÓN**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Aos meus pais Juan e Irma.*

# Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por me conceder a beleza da vida, por toda força, saúde e inspiração no cumprimento desta importante etapa em minha vida, além de ser fonte de esperança e fé para os meus sonhos. Agradeço a todo o Programa de Pós-graduação em Matemática, a coordenação, os professores e os funcionários, bem como a todo o IMECC e a UNICAMP, pela grande honra e oportunidade de realizar estes estudos de Mestrado nesta instituição de tanto destaque e prestígio, fornecendo-me condições excelentes e ajudando-me ao longo desta fase de minha jornada estudantil, especialmente nos primeiros meses quando eu era novo no Brasil e por sempre receber uma resposta muito amável. Agradeço ao Professor Lucas C. F. Ferreira, meu orientador, pelos conselhos e respostas, bem como por ter me apresentado a área de pesquisa dentro da qual versa a presente dissertação, e pela presença semana a semana nesta época de quarentena, quando as aulas eram apenas virtuais, fornecendo-me todo o apoio para a realização do trabalho e para aprender mais sobre Matemática. Agradeço aos meus colegas, tanto aos que conheci anteriormente quanto aos que conheci ao longo desses anos, pela companhia e ajuda. Agradeço, em especial, a minha querida família, tão importante em meu desenvolvimento pessoal e profissional, por todo cuidado, atenção e escuta, com um destaque principal aos meus pais; meu pai Juan que conseguiu me apoiar diretamente e minha mãe Irma que me impulsionou para esta fase da minha carreira e para onde estou hoje. Agradeço ao Sae, o Serviço de Apoio ao Estudante pelo apoio em relação ao Restaurante Universitário. Finalmente, pelo apoio financeiro ao conceder-me uma bolsa de estudante com número de processo 144489/2019-8 durante o período de mestrado, meus agradecimentos especiais ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a sociedade brasileira.

# Resumo

Nesta dissertação de mestrado, consideramos as equações de Navier-Stokes, as quais descrevem o comportamento de um fluido viscoso e incompressível preenchendo todo o espaço $\mathbb{R}^3$. Estudamos dois resultados de boa-colocação global e terminamos com um resultado de má-colocação. No primeiro resultado, obtém-se soluções globais, fortemente contínuas em relação ao tempo, para dados iniciais no espaço crítico de Lebesgue $L^3(\mathbb{R}^3)$ com uma condição de tamanho na norma deste espaço. No segundo, estende-se a classe de dados iniciais para os espaços críticos de Besov homogêneos $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, onde $3 < q \leqslant 6$ e $\alpha = 1 - 3/q$, obtendo-se a boa-colocação nestes espaços. Estes dois resultados são obtidos usando estimativas bilineares nos correspondentes espaços junto com argumentos de contração, isto é, ponto fixo de Banach. Finalmente, apresentamos um estudo de má-colocação no espaço crítico de Besov $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, o qual é maior que $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$ com os índices acima; de fato, $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ é o espaço crítico maximal para as equações de Navier-Stokes. Este trabalho é baseado no artigo [6] de M. Cannone e no artigo [3] de Bourgain e Pavlović.

**Palavras-chave**: Equações de Navier-Stokes; Espaços de Lebesgue; Espaços de Besov; Soluções brandas; Boa-colocação; Má-colocação

# Abstract

In this master dissertation, we consider the Navier-Stokes equations, which describe the behavior of a viscous and incompressible fluid filling the entire space $\mathbb{R}^3$. We study two global well-posedness results and conclude with a ill-posedness result. In the first result, one obtains global solutions, strongly continuous with respect to time, for initial data in the critical Lebesgue space $L^3(\mathbb{R}^3)$ with a size condition on the norm of this space. In the second, one extends the class of initial data to the critical homogeneous Besov spaces $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, where $3 < q \leqslant 6$ and $\alpha = 1 - 3/q$, obtaining well-posedness in these spaces. These two results are obtained using bilinear estimates on the corresponding spaces together with contraction arguments, i.e., Banach fixed point. Finally, we present a study of ill-posedness in the critical Besov space $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, which is larger than $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$ with the above indexes; in fact, $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ is the maximal critical space for the Navier-Stokes equations. This work is based on the article [6] by M. Cannone and the article [3] by Bourgain and Pavlović.

**Keywords**: Navier-Stokes equations, Lebesgue spaces, Besov spaces, Mild solutions, Well-posedness, Ill-posedness

# Lista de símbolos

| | |
|---|---|
| $L^p$ | Espaços de Lebesgue |
| $\|\cdot\|_p$ | Norma dos espaços de Lebesgue $L^p$ |
| $\mathscr{F}$ | Transformada de Fourier |
| $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ | Espaço das funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ |
| $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ | Classe de Schwartz em $\mathbb{R}^n$ |
| $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ | Espaço das distribuições temperadas em $\mathbb{R}^n$ |
| $\mathcal{P}$ | Conjunto dos polinômios de $n$ variáveis |
| $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ | Espaço das distribuções temperadas módulo polinômios em $\mathbb{R}^n$ |
| $R_j$ | j-ésima transformada de Riesz |
| $\mathbb{P}$ | Projetor de Leray |
| $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ | Espaços de Besov em $\mathbb{R}^n$ |
| $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^n)$ | Espaços de Besov homogêneos em $\mathbb{R}^n$ |
| $e^{t\Delta}, S(t)$ | Semigrupo do calor |

# Sumário

# Introdução

Nesta dissertação, estamos interessados nas equações de Navier-Stokes, as quais descrevem a evolução da velocidade e da pressão de um fluido viscoso e incompressível preenchendo todo o espaço $\mathbb{R}^3$. Estas são um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares cujo problema de Cauchy associado é dado por (veja, e.g., [18], [19])

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) - \nu\Delta u + \nabla p = F, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^3$ é um ponto do fluido, $t \in (0, \infty)$ o tempo e $u(t, x) = (u_i(t, x))_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ é um campo vetorial que descreve a velocidade de um elemento do fluido ocupando a posição $x$ em um tempo $t$. A pressão $p = p(t, x)$ exercida sobre o fluido é um campo escalar e a condição $\nabla \cdot u = 0$ representa que o fluido é incompressível. Assumimos que o fluido é homogêneo, assim a densidade $\rho$ é uma constante e pode ser tomada como sendo $\rho = 1$. Além disso, assumiremos que o fluido é viscoso, onde o atrito entre os elementos do fluido em diferentes velocidades acaba gerando uma força que é representada por $\nu\Delta u$ e a viscosidade do fluido é representada por $\nu$, uma constante positiva que será considerada como sendo $\nu = 1$. As forças externas ao fluido são representadas por $F(t, x)$, vamos considerar que o sistema não está exposto a forças externas, então $F = 0$.

As equações de Navier-Stokes são de grande interesse em geral, uma vez que contribuem para a resolução de problemas físicos que surgem em vários campos e são essenciais para a dinâmica dos fluidos, além de serem um dos problemas do milênio que ainda não foram resolvidos, para mais detalhes veja [1], embora existam várias soluções parciais. Como observado em [19], estas equações foram propostas por Claude L. M. H. Navier [23] em 1822, mas elas precisavam ser justificadas em bases mais sólidas. Assim, em seguida, elas foram estudas por vários autores que chegaram a estas equações por meio de diferentes perspectivas; aqui podemos destacar Cauchy [8], Poisson [27] e Saint-Venant [9], [10], mas em 1845 G. G. Stokes [30] estabeleceu um modelo claro que foi considerado o modelo final.

Nos anos seguintes, houve várias contribuições para a solução das equações de Navier-Stokes. Saltando alguns anos, em 1911 C. W. Oseen [25], [24] estendeu o trabalho de Lorentz [21] sobre os fluxos de Stokes para as equações de Stokes encontrando uma solução em forma integral via o famoso tensor de Oseen. Posteriormente, Oseen conseguiu converter as equações de Navier-Stokes em uma forma integro-diferencial contendo o tensor de Oseen e o núcleo do calor. Desta forma, considerando dados iniciais regulares, conseguiu resolver o problema em um intervalo de tempo pequeno $[0, T]$. Em 1934, J. Leray [20] destacou a dificuldade em mostrar que, mesmo assumindo dado inicial suave, a correspondente solução permanece suave para todo tempo finito. Entretanto, estas soluções satisfazem as equações de Navier-Stokes em um sentido mais fraco, as tão conhecidas soluções fracas de Leray. Depois que obteve-se a existência de soluções fracas, tentou-se encontrar resultados de regularidade ou de existência de soluções mais regulares por meio de fórmulas explícitas.

Por volta dos anos 60, a teoria de semigrupos de operadores começou a ser desenvolvida, de modo que um problema da forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = \mathcal{L}u + f(t,u), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

pode ser resolvido através do estudo das propriedades do semigrupo $S(t) = e^{t\Delta}$, e graças à fórmula de Duhamel, obtemos

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds.$$

As soluções desta equação integral são chamadas de soluções brandas (do inglês *mild*) e nos levam a uma outra forma de abordar as equações de Navier-Stokes. Em 1964, Fujita e Kato [12] resolveram o problema de soluções brandas via um argumento de contração e considerando dados iniciais no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$ e forças externas em $L^2((0,T), L^2)$ e, além disso, deram um critério para a existência de soluções globais. Em seguida, vários autores continuaram procurando soluções brandas em diferentes espaços, veja os livros [18] e [19] para um ótimo *survey*.

Deixe-nos observar que, para as equações de Navier-Stokes em $L^p(\mathbb{R}^3)$ com $p > 3$, a solução pode ser encontrada mostrando que o operador bilinear integral $B(u,v)$, isto é, o termo de Duhamel na formulação branda das equações de Navier-Stokes, é bicontínuo em $C([0,T),(L^p)^3) \times C([0,T),(L^p)^3)$, porém, para o caso $p = 3$, não temos o mesmo, pois o operador bilinear $B$ deixa de ser limitado em $C([0,T),(L^3)^3) \times C([0,T),(L^3)^3)$.

Em 1984, para dados iniciais suficientemente pequenos em $L^3(\mathbb{R}^3)$, T. Kato [16] demonstrou a boa-colocação de soluções brandas globais, mostrando que era suficiente considerar um subespaço $G \subset C([0,T),(L^3)^3)$ no qual o operador bilinear $B$ é contínuo. Em 1997, M. Cannone [6] generalizou o resultado de Kato e conseguiu mostrar que este resultado é verdadeiro para uma condição muito mais fraca, o caso em que os dados iniciais pertencem aos espaços de Besov homogêneos $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, com $3 < q \leqslant 6$ e $\alpha = 1 - 3/q$, e que sejam suficientemente pequenos na norma $\| \quad \|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}$. A estratégia foi mostrar que o operador bilinear $B$ é limitado e aplicar o teorema do ponto fixo de Banach em um subespaço $G_\infty \subset C([0,\infty), \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3))$, obtendo assim uma solução global.

Os espaços $L^3(\mathbb{R}^3)$ e $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3))$ têm uma propriedade de reescalonamento (do inglês *scaling*). Mais precisamente, observemos que se $u(t,x)$ e $p(t,x)$ resolvem as equações de Navier-Stokes, então $u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ e $p_\lambda(t,x) = \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x)$ também resolvem as mesmas equações para cada $\lambda > 0$ fixado. Além disso, temos a propriedade de invariância da norma $\|u(\lambda x)\|_X = \lambda \|u(x)\|_X$ para $X$ sendo $L^3(\mathbb{R}^3)$ e $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$. Espaços de Banach de distribuições temperadas $X$ com esta propriedade são chamados de críticos para as equações de Navier-Stokes e tem atraído grande interesse desde que são bons candidatos para resultados de existência global. Existe uma gama de tais espaços, tais como (apenas para mencionar alguns deles) $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, $L^3(\mathbb{R}^3)$, $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Todos os espaços críticos têm a propriedade de estarem incluídos no espaço de Besov $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, por exemplo, temos a cadeia de inclusões contínuas (veja, e.g., [7],[19])

$$L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3).$$

Por isso, naturalmente, há um interesse em saber se as equações (1) são ou não bem-colocadas no espaço de Besov $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$. Este problema esteve em aberto durante muito tempo até que em 2008 Bourgain e Pavlović [3] publicaram um artigo onde mostraram que em $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ temos um fenômeno de inflação da norma. Mais precisamente, para todo $\delta$ pequeno, podemos encontrar uma solução $u(t,x)$ do problema cujo valor inicial $u(0,x)$ é tão pequeno como $\delta$, mas, em um tempo pequeno $t$, a solução $u$ tem uma norma proporcionalmente grande a $1/\delta$, o que impede de estabelecer-se um resultado de boa-colocação para dados iniciais pequenos em $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$.

Iremos agora explicar a organização deste trabalho. No Capítulo 1, vamos introduzir ferramentas úteis, em caráter de preliminares, contendo elementos de Análise Funcional, Teoria da Medida e Análise Harmônica. Por exemplo, vamos relembrar a definição dos espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$, resultados importantes como a desigualdade de Young, teorema da mudança de variáveis, teorema da convergência dominada e transformada de Fourier, entre outros. Depois, relembramos o espaço das distribuições temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$, um espaço que conterá a maior parte dos espaços que definimos, e iremos estudar generalizações de alguns operadores e propriedades para este espaço, tais como transformadas de Fourier e de Riesz. Na sequência, definimos o Projetor de Leray, o semigrupo do calor $S(t)$ e a formulação branda das equações de Navier-Stokes. Na seção seguinte, revisamos a decomposição de Littlewood-Paley e o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Finalmente, terminamos o capítulo com uma seção onde tratamos a teoria dos espaços de Besov $B_p^{\alpha,q}$, para $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, bem como a sua versão homogênea para alguns conjuntos de índices. Os espaços de Besov são de distribuições temperadas e, por esse motivo, herdam muitas propriedades de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$. Na busca por soluções brandas globais, vamos utilizar a versão homogênea dos espaços de Besov, mais precisamente os espaços de Besov homogêneos críticos $\dot{B}_p^{-\alpha,\infty}$, os quais contêm o espaço de Lebesgue crítico $L^3(\mathbb{R}^3)$. A demonstração desta inclusão também faz parte do conteúdo da última seção do capítulo.

No Capítulo 2, baseado no artigo [6] de M. Cannone, e também tendo em perspectiva o artigo [16] de T. Kato, apresentamos dois resultados de existência global para as equações de Navier-Stokes, o primeiro resultado será provado no espaço de Lebesgue $L^3(\mathbb{R}^3)$ para dados iniciais suficientemente pequenos neste espaço e a solução terá uma continuidade forte em relação ao tempo, enquanto que o segundo resultado nos dará a existência de soluções globais em um espaço maior, o espaço de Besov homogêneo $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$ para dados iniciais suficientemente pequenos, mas a continuidade forte será substituída por uma continuidade fraca em relação ao tempo. Este último resultado fornece uma classe de espaços críticos maior que as tradicionais classes de Sobolev homogêneo e Lebesgue, tendo em vista a inclusão destes nos espaços de Besov homogêneos $\dot{B}_p^{-\alpha,\infty}$.

No Capítulo 3, baseado no artigo [3] de Bourgain e Pavlović, apresentamos um resultado de má-colocação no espaço de Besov homogêneo $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, o qual é o maior na classe dos espaços de Besov homogêneos críticos, considerando um efeito conhecido como "inflação" e uma norma utilizada apenas nesta parte. A má-colocação, em um certo sentido, é um resultado oposto aos teoremas de existência global do Capítulo 3, mas, por outro lado, complementa-os dentro da escala dos espaços de Besov homogêneos.

No Capítulo 4, será dedicado a apresentar uma série de nossas considerações finais sobre a dissertação e, em particular, uma descrição da motivação de cada capítulo.

# 1 Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos propriedades básicas sobre espaços funcionais como os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$, os espaços de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e os espaços das distribuições temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, que serão amplamente utilizadas nas demonstrações dos resultados estudados neste trabalho. A seguir, veremos alguns conceitos importantes em Mecânica dos Fluidos, relembraremos a transformada de Fourier e suas propriedades, e alguns operadores cuja definição é dada via esta transformada; por exemplo, as transformadas de Riesz e o Projetor de Leray. Finalmente, veremos a decomposição de Littlewood-Paley, o Teorema do ponto fixo de Banach e concluiremos com uma seção sobre os espaços de Besov, contendo sua definição e algumas propriedades úteis para nossos propósitos. Tendo em vista o problema alvo desta dissertação, focamos a maioria das definições e espaços em $\mathbb{R}^3$, mas alguns elementos da teoria podem ser apresentados no $\mathbb{R}^n$. As teorias e os conteúdos apresentados neste capítulo, bem como mais detalhes sobre eles, podem ser encontrados nas referências Bartle [2], Brezis [4], M. Cannone [5], Folland [11], Grafakos [13], Sawano [29].

## 1.1 Espaços de Lebesgue, convolução e Transformada de Fourier

Nesta seção, apresentaremos os espaços de Lebesgue $L^p$ e o operador de convolução. Começaremos com os espaços $L^p$, cuja definição foi retirada de Brezis [4, pp. 90–91].

**Definição 1.1.1.** *Considere o espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e seja $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos, para $p \neq \infty$, os espaços $L^p$ como o espaço normado*

$$L^p(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ mensurável} : \|f\|_p < \infty\},$$

*onde a norma é dada por*

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

*Para $p = \infty$, definimos $L^\infty$ como o espaço normado*

$$L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \ f \text{ é mensuravel e } \exists C \text{ constante tal que } \mu(\{x; |f(x)| > C\}) = 0\},$$

*com a norma*

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C \geqslant 0 : \mu(\{x : |f(x)| > C\}) = 0\},$$

*onde $\mu(\{x : |f(x)| > C\}) = 0$ é equivalente a dizer que $|f(x)| \leqslant C$ em quase todo ponto (q.t.p.) de $X$.*

**Observação 1.1.2.** *Os espaços $L^p$, munidos com a norma $\| \quad \|_p$, são de Banach; a demonstração pode ser encontrada em Brezis [4, p. 93].*

**Observação 1.1.3.** *Consideraremos $X = \mathbb{R}^3$, $\mu$ sendo a medida de Lebesgue e $\mathcal{M}$ a $\sigma$-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis. Abreviaremos o espaço $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ por $L^p$, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

O próximo resultado é a Desigualdade de Hölder, que pode ser encontrada em Brezis [4, p. 92].

**Proposição 1.1.4.** *(Desigualdade de Hölder) Assuma que $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ são tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, e seja $f \in L^p$ e $g \in L^q$. Então, temos que $fg \in L^1$ e vale a desigualdade*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |fg| = \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

Em seguida, apresentamos a Desigualdade de Minkowski que foi retirada de Folland [11, p. 183] e, na sequência, uma versão dela para Integrais, a qual pode ser consultada em Folland [11, p. 194].

**Proposição 1.1.5.** *(Desigualdade de Minkowski) Seja $f, g \in L^p$ onde $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Segue que $f + g \in L^p$ e vale a seguinte desigualdade*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p .$$

**Proposição 1.1.6.** *(A versão de Minkowski para Integrais) Assuma que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ são espaços de medida $\sigma$-finitos. Seja uma função $f$ em $X \times Y$ mensurável na $\sigma$-álgebra produto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.*

1. *Se $f \geqslant 0$ e $1 \leqslant p < \infty$ então*

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \int_Y \left[\int_X f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{1/p} d\nu(y).$$

2. *Se $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ para q.t.p. $y$, e a função $y \to \|f(\cdot, y)\|_p$ pertence a $L^1(\nu)$, então $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ para q.t.p. $x$, a função $x \to \displaystyle\int_Y f(x,y) d\nu(y)$ pertence a $L^p(\mu)$, e vale*

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_p \leqslant \int_Y \|f(\cdot, y)\|_p \, d\nu(y).$$

O seguinte resultado foi retirado de Folland [11, p. 74].

**Teorema 1.1.7.** *(Mudança de variáveis) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ um $C^1$-difeomorfismo. Então, $f \circ g$ é mensurável em $\Omega$, contanto que $f$ seja mensurável em $G(\Omega)$. Além disso, assumindo que ou $f$ é não-negativa ou $f$ é integrável, temos a seguinte fórmula de mudança de variáveis*

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx = \int_{\Omega} f \circ G(x) \left|\det D_x G\right| dx.$$

**Observação 1.1.8.** *Pelo teorema anterior podemos ver que em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leqslant p < \infty$ e $\lambda > 0$, temos a relação de escala (do inglês, scaling) da norma*

$$\|f(\lambda x)\|_p = \lambda^{-n/p} \|f(x)\|_p ,$$

*pois podemos considerar $G(x) = \lambda x$ em $\mathbb{R}^n$, logo $|\det D_x G| = \lambda^n$, e então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda x)|^p \lambda^n dx.$$

*Segue que*

$$\|f(x)\|_p = \left\|f(\lambda x)\lambda^{n/p}\right\|_p = \lambda^{n/p} \|f(\lambda x)\|_p ,$$

*o que nos leva a $\|f(\lambda x)\|_p = \lambda^{-n/p} \|f(x)\|_p$. Note também que o scaling funciona para caso $p = \infty$, isto é, a norma $L^\infty$, entendendo que $n/p = 0$ e então $\lambda^{-n/p} = 1$.*

O seguinte resultado foi retirado de Folland [11, p. 79], e é uma consequência do Teorema 1.1.7.

**Teorema 1.1.9.** *Seja $f$ uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$, integrável ou não-negativa tal que $f(x) = g(|x|)$, sendo o domínio de $g$ o intervalo $(0, \infty)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr,$$

*onde $\sigma(S^{n-1})$ representa o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.*

Um resultado fundamental em Teoria da Medida é o famoso Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o qual relembramos na sequência e será bastante útil ao longo desta dissertação. Este teorema afirma que se temos uma sequência de funções que converge q.t.p. para outra função, então, sob certas condições, podemos trocar o limite da integral com a integral do limite. A seguir, apresentamos-o em uma versão para espaços de medida gerais, conforme Bartle [2, p. 44].

**Teorema 1.1.10.** *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Considere uma sequência de funções mensuráveis $(f_n)$ que converge q.t.p. para uma função $f$ em $X$. Assuma que exista uma função integrável $g$, tal que, $|f_n| \leqslant g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, as funções $f_n$ e $f$ são integráveis e vale a propriedade*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

**Observação 1.1.11.** *Assumindo as mesmas condições do Teorema 1.1.10, pode-se também concluir que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f - f_n| d\mu = 0.$$

Um resultado fundamental em Análise Funcional que utilizaremos é o Teorema de Banach-Steinhaus, apresentado logo abaixo. Este teorema foi retirado de Brezis [4, p. 32].

**Teorema 1.1.12.** *(Banach-Steinhaus) Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach. Considere uma família $(T_i)_{i\in I}$ de aplicações lineares contínuas de $E$ para $F$. Suponha que*

$$\sup_{i\in I}\|T_i x\| < \infty, \quad \forall x \in E,$$

*então*

$$\sup_{i\in I}\|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty;$$

*em outras palavras, existe uma constante $c \geqslant 0$ tal que*

$$\|T_i x\| \leqslant c\,\|x\|\,, \quad \forall x \in E, \quad \forall i \in I.$$

Agora apresentamos um resultado que nos diz que a interseção de dois espaços $L^p$'s é densa em um espaço com índice intermediário, desde que $p$ seja finito. Esta propriedade será útil posteriormente e pode ser vista como uma consequência do Teorema da Convergência Dominada, tendo sido consultada em Folland [11, p. 185].

**Teorema 1.1.13.** *Seja $p, r, q$ tal que $1 \leqslant p \leqslant r \leqslant q < \infty$, então $L^p(X) \cap L^q(X)$ é um subespaço de $L^r(X)$ e como subespaço satisfaz*

$$\overline{L^p(X) \cap L^q(X)} = L^r(X),$$

*ou seja, $L^p(X) \cap L^q(X)$ é denso em $L^r(X)$.*

*Demonstração.* Primeiramente vejamos que $L^p(X) \cap L^q(X) \subset L^r(X)$. Se $p = q$, então o resultado é trivial. Suponha que $p < q$ e $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$. Tomando

$$c = \frac{1 - \frac{q}{r}}{1 - \frac{q}{p}},$$

podemos escrever

$$\frac{pq}{r} = cq + (1-c)p,$$
$$1 = \frac{1}{\frac{p}{cr}} + \frac{1}{\frac{q}{(1-c)r}}.$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder (veja Proposição 1.1.4), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_X |f|^r &= \int_X |f|^{cr}|f|^{(1-c)r} \leqslant \||f|^{cr}\|_{\frac{p}{cr}} \left\||f|^{(1-c)r}\right\|_{\frac{q}{(1-c)r}} \\ &= \left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{cr}{p}} \left(\int_X |f|^q\right)^{\frac{(1-c)r}{q}} \\ &= \|f\|_p^{cr} \, \|f\|_q^{(1-c)r} < \infty,\end{aligned}$$

então $\|f\|_r < \infty$. Segue que $f \in L^r(X)$ e temos que $L^p(X) \cap L^q(X)$ é um subespaço de $L^r(X)$. Agora mostraremos que este subespaço satisfaz $\overline{L^p(X) \cap L^q(X)} = L^r(X)$, sob a norma $\|\cdot\|_r$. Seja $f \in L^r(X)$, então considere a sequência de funções

$$f_n = f \cdot \chi_{\{n^{-1} \leqslant |f| \leqslant n\}},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, pela definição de $\chi$, as funções $f_n$ satisfazem $n^{-1} \leqslant |f_n| \leqslant n$, agora provaremos que $f_n \in L^p(X) \cap L^q(X)$, vejamos que

$$\begin{aligned}|f_n|^p &= |f_n|^r|f_n|^{p-r} \leqslant |f|^r|f_n|^{p-r} \leqslant |f|^r n^{r-p}, \\ |f_n|^q &= |f_n|^r|f_n|^{q-r} \leqslant |f|^r|f_n|^{q-r} \leqslant |f|^r n^{q-r},\end{aligned}$$

logo, como $f \in L^r(X)$, então

$$\begin{aligned}\int_X |f_n|^p dx &\leqslant \int_X n^{r-p}|f|^r dx < \infty, \\ \int_X |f_n|^q dx &\leqslant \int_X n^{q-r}|f|^r dx < \infty,\end{aligned}$$

isto é $f_n \in L^p(X) \cap L^q(X)$. Agora mostraremos que $\|f - f_n\|_r \to 0$ quando $n \to \infty$, primeiramente vejamos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Além disso,

$$|f - f_n|^r \leqslant |f|^r,$$

pois

$$\left(f - f \cdot \chi_{\{n^{-1} \leqslant |f| \leqslant n\}}\right)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, se } x \notin \{n^{-1} \leqslant |f| \leqslant n\}, \\ 0 & \text{, se } x \in \{n^{-1} \leqslant |f| \leqslant n\}. \end{cases}$$

Finalmente $|f|^r$ é integrável, pois $f \in L^r(X)$, pelo Teorema 1.1.10, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n|^r dx = 0.$$

Assim para todo $f \in L^r(X)$, existe uma sequência $f_n \in L^p(X) \cap L^q(X)$ tal que $f_n \to f$ em $L^r(X)$, e portanto segue que $L^p(X) \cap L^q(X)$ é denso em $L^r(X)$, como queríamos. $\square$

Agora vamos relembrar a definição do produto convolução ou, se preferir, do operador convolução, inicialmente para funções integráveis. Entretanto, como veremos mais abaixo, este produto pode ser definido sob outras condições nos fatores. A definição dada na sequência pode ser encontrada em Grafakos [13, p. 18].

**Definição 1.1.14.** *Para $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos $f * g$, o produto de convolução entre $f$ e $g$, como sendo a integral*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

**Observação 1.1.15.** *Tendo em vista a desigualdade de Young para convoluções (veja mais abaixo e também veja, e.g., Grafakos [13, p. 21]), este produto é bem definido uma vez que*

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

*Assim $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, no entanto, devemos notar que também por esta razão a Definição 1.1.14 é uma definição para q.t.p. em $\mathbb{R}^n$.*

A seguir, relembramos um importante resultado na teoria do produto de convolução, isto é, a famosa Desigualdade de Young. A proposição abaixo pode ser consultada em Grafakos [13, p. 21].

**Proposição 1.1.16.** *Assuma que $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ satisfazem a relação*

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

*Considere duas funções $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Então, segue que $f * g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com a estimativa*

$$\|f * g\|_q \leqslant \|f\|_p \|g\|_r .$$

A seguir, apresentamos a transformada de Fourier, a qual é uma ferramenta fundamental na área de Análise e, especialmente, em Análise Harmônica. Em Equações Diferenciais Parciais, área de pesquisa na qual inserem-se as equações de Navier-Stokes, vários operadores importantes que aparecem nos estudos podem ser definidos via esta transformada.

Antes de começar, apresentaremos a definição do espaço de Schwartz, pois é um espaço de funções no qual definiremos inicialmente a transforma de Fourier. A seguinte definição foi retirada de Sawano [29, pp. 42, 43] e a observação de Grafakos [13, p. 96].

**Definição 1.1.17.** *(Espaço das funções de Schwartz) Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, onde $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então definimos*

$$x^\alpha \partial^\beta f(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\beta_2} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\beta_n} f(x).$$

*Assim definimos o espaço das funções de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^m} \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : x^\alpha\partial^\beta f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

*Se $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ então $f$ será chamada de função teste.*

**Observação 1.1.18.** *Para descrever este espaço de outra forma, uma função pertence ao espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, se ela e todas as suas derivadas tiverem um decaimento maior que o de qualquer polinômio no infinito; por exemplo, as funções diferenciáveis com suporte compacto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ estão contidas no espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Uma definição equivalente é $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se para quaisquer multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ temos que*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right| = C_{\alpha,\beta} < \infty,$$

*onde $C_{\alpha,\beta}$ é uma contante. Os termos $\rho_{\alpha,\beta}(f)$ são chamadas de seminormas de Schwartz de $f$. Além disso, equipe $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ com a topologia mais fraca sob a qual cada $p_{\alpha,\beta}$ é contínua para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$.*

Agora apresentamos a definição da transformada de Fourier, e sua inversa, para funções na classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, as seguintes definições foram retiradas de Grafakos [13, pp. 99, 102].

**Definição 1.1.19.** *(Transformada de Fourier) Para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de $f$, denotada por $\mathscr{F}[f]$, $f^\wedge$ ou $\hat{f}$, da seguinte maneira*

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx,$$

*onde $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

**Definição 1.1.20.** *(Transformada inversa de Fourier) Para uma função $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada inversa de Fourier, denotada por $\mathscr{F}^{-1}[f]$ ou $f^\vee$, como uma função definida em $\mathbb{R}^n$ dada pela fórmula*

$$\mathscr{F}^{-1}[f](x) = \mathscr{F}[f](-x),$$

*onde $x \in \mathbb{R}^n$.*

Pode-se mostrar que a transformada de Fourier $\mathscr{F}$ é um isomorfismo em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, cuja inversa é $\mathscr{F}^{-1}$, isso pode ser visto em Grafakos [13, pp. 100, 102-103]. Além disso, devido à forma como definimos a inversa de Fourier, não é difícil ver que a transformada e sua inversa compartilham várias propriedades em comum ou versões delas muito próximas. A seguir veremos algumas propriedades que serão usadas neste trabalho, o seguinte teorema pode ser encontrado em Grafakos [13, p. 102].

**Teorema 1.1.21.** *Assuma que $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, temos as seguintes propriedades:*

*(1)* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx;$

*(2)* $\mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}[f]\right] = f = \mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}[f]\right];$

*(3)* $\|f\|_2 = \|\mathscr{F}[f]\|_2 = \left\|\mathscr{F}^{-1}[f]\right\|_2.$

Outras propriedades da transformada de Fourier são as seguintes, que foram retiradas de Grafakos [13, pp. 100-101].

**Teorema 1.1.22.** *Sejam $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $a \in \mathbb{C}$, $t > 0$, então*

*(1)* $\mathscr{F}[f+g] = \mathscr{F}[f] + \mathscr{F}[g];$

*(2)* $\mathscr{F}[af] = a\mathscr{F}[f];$

*(3)* $\mathscr{F}[f(tx)] = t^{-n}\mathscr{F}[f](t^{-1}\xi);$

*(4)* $\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F}[f] \cdot \mathscr{F}[g].$

## 1.2 Distribuições temperadas e Projetor de Leray

Nesta seção apresentamos o espaço das distribuições temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ que é o dual da classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Esse espaço contém vários espaços utilizados na área de equações diferenciais parciais, em particular os de Besov, sendo então importante rever sua definição e algumas de suas propriedades. A seguinte definição foi retirada de Sawano [29, p. 49].

**Definição 1.2.1.** *(Espaço das Distribuições Temperadas) Definimos $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ como o conjunto dos funcionais lineares $\hom(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ de modo que sejam contínuos, isto é,*

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) = \{f \in \hom(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \mathbb{C}) : f \text{ é contínua}\}.$$

*Denotamos o par $\langle f, \varphi\rangle$ como sendo o valor de $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ em $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é,*

$$\langle f, \varphi\rangle = f(\varphi).$$

A definição dada na sequência pode ser encontrada em Grafakos [13, p. 115].

**Definição 1.2.2.** *(Suporte de uma distribuição temperada) O suporte de $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, denotado por $\operatorname{supp} f$, é a intersecção de todos os conjuntos fechados $K$ tal que*

$$\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp}\phi \subset \mathbb{R}^n \backslash K \Rightarrow \langle u, \phi\rangle = 0.$$

*Diremos que uma distribuição temperada $u$ tem suporte compacto se $\operatorname{supp} u$ é compacto.*

Como definimos o espaço $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ sendo aquele das aplicações lineares contínuas em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, podemos estender alguns conceitos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ para o espaço $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, veremos uma definição estendida do produto e da convolução. A seguinte definição e a observação abaixo foram retiradas de Grafakos [13, pp. 111, 115], e Sawano [29, pp. 49, 52].

**Definição 1.2.3.** *Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então nós diremos que $\varphi$ tem no máximo crescimento polinomial no infinito, se para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, existem $C_\alpha, k_\alpha > 0$ tais que*

$$|(\partial^\alpha \varphi)(x)| \leqslant C_\alpha \left(1 + |x|\right)^{k_\alpha},$$

*para todo $x \in \mathbb{R}^n$. O conjunto de funções em $\mathbb{R}^n$ que têm no máximo crescimento polinomial no infinito será denotado por $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$.*

**Observação 1.2.4.** *O espaço de Schwartz pode ser caracterizado como segue, se $\varphi \in C^\infty$, então $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, para cada inteiro positivo $N$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, existe uma constante positiva $C_{\alpha,N}$ tal que*

$$|(\partial^\alpha \varphi)(x)| \leqslant C_{\alpha,N} \left(1 + |x|\right)^{-N},$$

*para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Este resultado pode ser encontrado em Grafakos [13, p. 96], e podemos ver que se $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\varphi$ tem no máximo crescimento polinomial no infinito.*

**Observação 1.2.5.** *O espaço das distribuições temperadas pode ser caracterizado como segue, seja $f$ uma aplicação linear de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{C}$, então $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, existe $C \in \mathbb{N}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, tal que*

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ |\beta| \leqslant k}} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \right),$$

*para cada $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Vamos agora demonstrar uma cadeia de imersões contínuas, este resultado pode ser encontrado em Sawano [29, pp. 44, 51].

**Teorema 1.2.6.** *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$, então*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

*Demonstração.* Seja $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, usando a Observação 1.2.4, se $p = \infty$, então $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, se $1 \leqslant p < \infty$, para $N = p(n+1)$, temos que

$$|\varphi(x)| \leqslant C_{N,0} \left(1 + |x|\right)^{-p(n+1)},$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\|f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-p(n+1)}(1+|x|)^{p(n+1)}|\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leqslant C_{N,\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-p(n+1)} dx\right)^{1/p} \\
&\leqslant C_{N,\alpha}\left\|(1+|x|)^{-(n+1)}\right\|_p.
\end{aligned}
$$

Logo $(1+|x|)^{-(n+1)} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para cada $1 \leqslant p < \infty$, então $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Agora, seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$
\langle F_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx,
$$

para cada $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim, usando a desigualdade de Hölder (veja a Proposição 1.1.4), podemos estimar

$$
\begin{aligned}
|\langle F_f, \varphi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)dx\right| \\
&\leqslant \|f\|_p \|\varphi\|_{p'} \\
&\leqslant C\|f\|_p \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leqslant N}} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\alpha \varphi(x)|\right),
\end{aligned}
$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, pois $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Em vista da Observação 1.2.5, podemos concluir que $F_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

**Definição 1.2.7.** *(Produto de $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$) Seja $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ então definimos o produto $\varphi \cdot f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ da seguinte maneira*

$$
\langle \varphi \cdot f, \psi\rangle = \langle f, \varphi \cdot \psi\rangle,
$$

*onde $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

**Observação 1.2.8.** *Vejamos que $\varphi \cdot \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, logo o produto $\varphi \cdot f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ está bem definido*

A seguinte definição foi retirada de Grafakos [13, p. 115].

**Definição 1.2.9.** *(Convolução de $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$) Seja $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, então podemos definir a convolução $\varphi * f$ como sendo*

$$
\langle \varphi * f, \psi\rangle = \langle f, \tilde{\varphi} * \psi\rangle
$$

*onde $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.*

Usando a Definição 1.2.9 podemos identificar a convolução $\varphi * f$ com uma função em $C^{\infty}$, o seguinte resultado foi retirado de Grafakos [13, p. 116]. e Sawano [29, p. 62].

**Proposição 1.2.10.** *Seja $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, então $\varphi * f$ é $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$(\varphi * f)(x) = \langle f, \varphi(x-y)\rangle\,,$$

*onde $\varphi(x-y) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ é fixado, e $y \in \mathbb{R}^n$ é a variável de $\varphi(x-y)$, então $(\varphi * f)(x)$ é definido para todos os $x \in \mathbb{R}^n$.*

*Ainda mais temos que para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, existem constantes $C_\alpha, k_\alpha > 0$ tais que*

$$|\partial^\alpha(\varphi * f)(x)| \leqslant C_\alpha\,(1+|x|)^{k_\alpha}\,.$$

Também podemos definir a transformada de Fourier $\mathscr{F}$ e a sua inversa $\mathscr{F}^{-1}$ para um elemento $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, as seguintes definições foram extraídas de Grafakos [13, p. 123], e Sawano [29, p. 68].

**Definição 1.2.11.** *(Transformada de Fourier de uma distribuição temperada) Para $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de f, denotada por $\mathscr{F}[f]$ (ou, mais compactamente, por $\hat{f}$), é definida como o elemento de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz a igualdade*

$$\langle \mathscr{F}[f], \varphi\rangle = \langle f, \mathscr{F}[\varphi]\rangle\,,$$

*para toda $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Como uma matéria de fato, a transformada de Fourier $\mathscr{F}[\cdot]$ é um isomorfismo em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, com sua transformada inversa $\mathscr{F}^{-1}[\cdot]$ dada conforme a definição a seguir.

**Definição 1.2.12.** *(Transformada inversa de Fourier de uma distribuição temperada) Para $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, a transformada inversa de Fourier de $f$, denotada por $\mathscr{F}^{-1}[f]$ (ou por $f^{\vee}$), é definida como o elemento de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ que verifica a igualdade*

$$\left\langle \mathscr{F}^{-1}[f], \varphi\right\rangle = \left\langle f, \mathscr{F}^{-1}[\varphi]\right\rangle,$$

*para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Na sequência, apresentamos a desigualdade de Hausdorff-Young útil para estabelecer uma relação entre a norma em $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ de uma função $f$ e a norma em $L^q(\mathbb{R}^n)$ de sua transformada de Fourier $\hat{f}$, este teorema pode ser consultado em Grafakos [13, p. 104].

**Teorema 1.2.13.** *(Hausdorff-Young) Seja $1 \leqslant p \leqslant 2$ e considere $q$ seu expoente conjugado, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, temos a estimativa*

$$\|\hat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p,$$

*para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

A seguir, apresentamos algumas propriedades da transformada de Fourier em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e sobre como ela interage com os produtos usual e de convolução. De fato, a transformada leva um tipo de produto no outro. O próximo resultado pode ser encontrado em Grafakos [13, pp. 120-121], e Sawano [29, pp. 70-71].

**Teorema 1.2.14.** *Seja $\varphi, \varphi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $f, f_j, g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $t > 0$ e $b \in \mathbb{C}$ então*

***(1)*** $\mathscr{F}[f + g] = \mathscr{F}[f] + \mathscr{F}[g]$;

***(2)*** $\mathscr{F}[bf] = b\mathscr{F}[f]$;

***(3)*** *Se $\varphi_j \to \varphi$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{\varphi}_j \to \hat{\varphi}$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e se $f_j \to f$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{f}_j \to \hat{f}$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ;*

***(4)*** $\mathscr{F}[f(t\varphi)] = t^{-n}\mathscr{F}[f](t^{-1}\varphi)$;

***(5)*** $\mathscr{F}[\partial^\alpha f] = (2\pi i\xi)^\alpha \mathscr{F}[f]$;

***(6)*** $\partial^\alpha \mathscr{F}[f] = \mathscr{F}[(-2\pi i x)^\alpha f]$;

***(7)*** $\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]] = f$;

***(8)*** $\mathscr{F}[\varphi * f] = \mathscr{F}[\varphi] \cdot \mathscr{F}[f]$;

***(9)*** $\mathscr{F}[\varphi \cdot f] = \mathscr{F}[\varphi] * \mathscr{F}[f]$.

**Observação 1.2.15.** *No item 3, a convergência $\varphi_j \to \varphi$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, quer dizer que, para quaisquer multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, temos que*

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_j - \varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left( \partial^\beta (\varphi_j - \varphi) \right)(x) \right| \to 0 \quad , \textit{quando } j \to \infty.$$

*Além disso, a convergência $f_j \to f$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$, quer dizer que, para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, temos que*

$$\langle f_j, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \quad , \textit{quando } j \to \infty.$$

*No item 4, usamos a notação $f(t\varphi)$ em vez de $\langle f, t\varphi \rangle$, para indicar que a transformada de Fourier é aplicada sobre uma distribuição temperada $g_t$, dada por $\langle g_t, \varphi \rangle = \langle f, t\varphi \rangle$.*

Agora introduzimos os multiplicadores de Fourier, um conceito que será usado ao longo deste trabalho, a definição foi retirada de Sawano [29, p. 131].

**Definição 1.2.16.** *(Multiplicadores de Fourier) Seja $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, então $\tau(D)f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é dado pela fórmula*

$$\tau(D)f = \mathscr{F}^{-1}\left[\tau \cdot \mathscr{F}[f]\right],$$

*onde $\tau \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. O operador $\tau(D)$ é chamado multiplicador de Fourier e $\tau$ é chamado símbolo de $\tau(D)$.*

**Observação 1.2.17.** *Podemos explicar este conceito dizendo que os multiplicadores de Fourier são operadores em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definidos em termos de sua frequência, que é dada pelo símbolo, sua definição requer três operações, a transformada de Fourier, o produto e a transformada inversa de Fourier.*

Na sequência, definimos a transformada de Riesz e, por meio dela, definiremos o Projetor de Leray, o qual tem um papel fundamental no estudo das equações de Navier-Stokes. A definição foi retirada de Grafakos [13, pp. 259-260], e Sawano [29, p. 146].

**Definição 1.2.18.** *(Transformada de Riesz) Seja $1 \leqslant j \leqslant n$, a transformada j-ésima de Riesz de $f$ é definida como*

$$R_j(f)(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)dy,$$

*onde $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e p.v. é o valor principal de integrais definido como o limite de integrais absolutamente convergentes*

$$p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geqslant \varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)dy.$$

A seguir apresentamos uma caracterização das transformadas de Riesz $R_j$ em termos da transformada de Fourier. O seguinte resultado foi retirado de Lemarié [18, p. 106], e Sawano [29, p. 157].

**Proposição 1.2.19.** *A transformada j-ésima de Riesz $R_j$ é um operador cujo símbolo é dado por*

$$m(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|},$$

*onde $\xi \in \mathbb{R}^n$, logo $R_j$ é dado por*

$$R_j f = \mathscr{F}^{-1}\left[-i\frac{\xi_j}{|\xi|} \cdot \mathscr{F}[f]\right],$$

*onde $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Definimos as transformadas de Riesz $R_j$ para o espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, mas vamos querer defini-las para um elemento $u$ do espaço $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, ou similar, para isso podemos tentar generalizar a Proposição 1.2.19, e definir esses operadores por meio de seu símbolo como $-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{u}$, porém o operador $|\xi|^{-1}$ não é suave na origem então temos que ter cuidado. Em Grafakos [14, p. 16], vemos que mesmo que o operador $|\xi|^{-s}$, onde $s \in \mathbb{R}$ nem sempre seja suave na origem, podemos considerar uma classe de equivalência de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e ter sucesso ao multiplicar $\hat{u}$ por uma função da forma $|\xi|^{-s}$ que pode não ser suave na origem, mais para isso vejamos a seguinte relação de equivalência.

**Definição 1.2.20.** *Seja $\beta \in \mathbb{N}_0^n = \{0, 1, 2, ...\}^n$, então um polinômio de $n$ variáveis reais com coeficientes complexos é um elemento da forma*

$$\sum_{|\beta| \leqslant m} c_\beta x^\beta = \sum_{\beta_1 + ... + \beta_n \leqslant m} c_{\beta_1, ..., \beta_n} x_1^{\beta_1} ... x_n^{\beta_n},$$

*onde $m \in \mathbb{N}$ e $c_\beta \in \mathbb{C}$, e denotamos por $\mathcal{P}$ o conjunto de todos esses polinômios.*

Com a definição acima, pode-se definir uma relação de equivalência em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ como segue: Sejam $u, v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, então

$$u \sim v \Leftrightarrow u - v \in \mathcal{P}. \tag{1.1}$$

De posse desta relação, podemos construir um espaço que essencialmente é o de todas as distribuições temperadas, mas desprezando parcelas polinomiais. Para sermos mais precisos, temos a seguinte definição que pode ser consultada em Grafakos [13, p. 121].

**Definição 1.2.21.** *Definimos $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ como o conjunto de todas as classes de equivalência $[u]$ dadas pela relação (1.1), sendo tal espaço chamado de espaço das distribuições temperadas módulo polinômios.*

A seguinte proposição foi retirada de Grafakos [13, p. 125].

**Proposição 1.2.22.** *Seja $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, se $\hat{u}$ tem suporte no conjunto unitário $\{\xi_0\}$, então $u$ é uma combinação linear finita de funções $(-2\pi i\xi)^\alpha e^{2\pi i \xi \cdot \xi_0}$, onde $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, em particular se $\hat{u}$ tem suporte na origem, então $u$ é polinomial.*

**Observação 1.2.23.** *Nós vamos usar a notação $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ para evitar a notação de classe de equivalência, além disso da Proposição 1.2.22 e de Grafakos [13, p. 121], temos que se $u, v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$, então*

$$u = v \text{ em } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P} \Leftrightarrow \langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle \hat{v}, \phi \rangle, \forall \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \operatorname{supp} \phi \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

*Logo podemos ver que se $u = v$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ e $u \neq v$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é equivalente a dizer que $\operatorname{supp}(\hat{u} - \hat{v}) = \{0\}$, onde $u - v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

A Observação 1.2.23 mostra que a origem não tem muita relevância se $u = v$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$. O próximo passo é definir uma função $\eta(\xi)$ suave em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\xi| \geqslant 2, \\ 0 & \text{se } |\xi| < 1. \end{cases}$$

Então para todo $s \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$, definimos

$$\langle |\xi|^s \hat{u}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\langle \hat{u}, \eta\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) |\xi|^s \varphi(\xi) \right\rangle,$$

onde $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Podemos ver que $\eta\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)|\xi|^s$ é zero em uma vizinhança da origem, portanto, pode ser definido na origem, enquanto $|\xi|^s$ é indefinido dependendo de $s \in \mathbb{R}$. Se $\varepsilon$ tende a zero então $\eta\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)|\xi|^s\varphi(\xi)$ tende a uma função com suporte em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Além disso, se $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, por Grafakos [14, p. 16], temos que $|\xi|^s \hat{u}$ é um elemento de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ e não depende da escolha de $\eta$. Com a construção acima, estamos em condições de definir as transformadas de Riesz no espaço $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ por meio de variáveis de Fourier. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

**Definição 1.2.24.** *Para $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$, a transformada j-ésima de Riesz de u, onde $1 \leqslant j \leqslant n$, é denotada por $R_j u$ e tem o símbolo $-i\frac{\xi_j}{|\xi|}$, isto é, sua transformada de Fourier é dada por*

$$\mathscr{F}[R_j u](\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\mathscr{F}u(\xi).$$

A seguinte Proposição foi retirada de Grafakos [13, p. 274].

**Proposição 1.2.25.** *As transformadas de Riesz $R_j$, onde $1 \leqslant j \leqslant n$, são limitadas em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < \infty$.*

Usando a transformada de Riesz $R_j$ que definimos anteriormente, podemos definir o projetor de Leray. A seguinte Definição e resultado foram retirados de Lemarié [18, p. 106].

**Definição 1.2.26.** *(Projetor de Leray) Seja $u \in (\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^n$, o Projetor de Leray ou também chamado projetor de Helmholtz-Leray $\mathbb{P}$ de u é definido como*

$$\mathbb{P}u = (Id + R \otimes R)u,$$

*onde $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$, $R_j$ é a transformada j-ésima de Riesz, este operador está bem definido pois se $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$, então temos que $R_j v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$.*

Agora sabemos que o símbolo de $R_j$ é $-i\frac{\xi_j}{|\xi|}$, logo podemos achar a transformada de Fourier de $\mathbb{P}$.

**Proposição 1.2.27.** *Assuma que $u$ é um campo no espaço $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^n$. Então, podemos expressar o Projetor de Leray em variáveis de Fourier como*

$$\widehat{\mathbb{P}u} = \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \hat{u},$$

*onde $\delta_{i,j}$ é 1, se $i = j$, e 0, caso contrário.*

*Demonstração.* Se $u \in (\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^n$ é dada por

$$u = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n},$$

então usando a definição do projetor de Leray $\mathbb{P}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}u &= (Id + R\otimes R)u\\ &= (\delta_{i,j} + R_iR_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\, u\\ &= \left(u_i + \sum_{j=1}^{n} R_iR_ju_j\right)_{1\leqslant i\leqslant n}.\end{aligned}$$

Logo usando a transformada de Fourier e lembrando que $\widehat{R_jv} = -i\dfrac{\xi_j}{|\xi|}\hat{v}$ e $\hat{u} = (\hat{u}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, temos que

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{P}u} &= \left(\widehat{u_i} + \sum_{j=1}^{n} \widehat{R_iR_ju_j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\\ &= \left(\widehat{u_i} + \sum_{j=1}^{n}\left(-i\frac{\xi_i}{|\xi|}\right)\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\widehat{u_j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\\ &= \left(\widehat{u_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\widehat{u_j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\\ &= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\widehat{u}.\end{aligned}$$

Assim temos o resultado desejado. □

**Observação 1.2.28.** *Em Lemarié [18, p. 106], também podemos ver que o Projetor de Leray $\mathbb{P}$ pode ser definido como*

$$\mathbb{P}u = u - \nabla\frac{1}{\Delta}\left(\nabla\cdot u\right),$$

*pois*

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{P}u)^{\wedge} &= \hat{u} - \left(\nabla \frac{1}{\Delta}\left(\nabla \cdot u\right)\right)^{\wedge} \\
&= \hat{u} - \left((2\pi i \xi_i)\left(\frac{1}{\Delta}(\nabla \cdot u)\right)^{\wedge}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \\
&= \hat{u} - \left((2\pi i \xi_i)\left(\frac{-1}{4\pi^2|\xi|^2}\left(\sum_{j=1}^{n}(2\pi i \xi_j \hat{u}_j)\right)\right)\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \\
&= \hat{u} - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\hat{u}_j\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \\
&= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \widehat{u},
\end{aligned}
$$

*onde* $\dfrac{1}{\Delta}u = p$ *pode ser visto como solução de* $u = \Delta p$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial_j}\right)^{\wedge} = 2\pi i \xi_j$ *usando o Teorema 1.2.14 e* $\left(\dfrac{1}{\Delta}\right)^{\wedge} = \dfrac{-1}{4\pi^2|\xi|^2}$.

Com a ajuda da transformada de Fourier podemos mostrar facilmente as seguintes propriedades:

**Proposição 1.2.29.** *Assuma que* $u$ *é um campo no espaço* $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^n$*. Então, temos que*

***(1)*** $\mathbb{P}$ *é linear*

***(2)*** $\operatorname{div}(\mathbb{P}u) = 0$

***(3)*** *Se* $\operatorname{div} u = 0$*, então* $\mathbb{P}u = u$

*Demonstração.* Primeiramente se $u \in (\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^n$, então representaremos $u$ da seguinte maneira $u = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, onde $u_i \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$, logo

**(1)** Sejam $u, v \in (\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P})^n$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{P}(\alpha u + v))^{\wedge} &= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\alpha u + v)^{\wedge} \\
&= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\alpha \hat{u} + \hat{v}) \\
&= \alpha\left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\hat{u} + \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\hat{v} \\
&= (\alpha\mathbb{P}u + \mathbb{P}v)^{\wedge}.
\end{aligned}
$$

Assim $\mathbb{P}(\alpha u + v) = \alpha\mathbb{P}u + \mathbb{P}v$, logo $\mathbb{P}$ é linear.

**(2)** Primeiramente vejamos que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbb{P}u) &= \operatorname{div}\left(\left(u_i + \sum_{j=1}^{n} R_i R_j u_j\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial_i}\left(u_i + \sum_{j=1}^{n} R_i R_j u_j\right).\end{aligned}$$

Então usando a transformada de Fourier e lembrando o fato de que $\mathscr{F}\left[\dfrac{\partial}{\partial_k}\right] = 2\pi i\xi_k$, então

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}(\mathbb{P}u))^\wedge &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial_i}\left(u_i + \sum_{j=1}^{n} R_i R_j u_j\right)\right)^\wedge\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}(2\pi i\xi_i)\left(\widehat{u_i} + \sum_{j=1}^{n}\left(-i\frac{\xi_i}{|\xi|}\right)\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\widehat{u_j}\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(2\pi i\xi_i)\widehat{u_i} + \sum_{j=1}^{n}\left(-i\xi_j\right)\widehat{u_j}\sum_{i=1}^{n}(2\pi i\xi_i)\left(-i\frac{\xi_i}{|\xi|^2}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(2\pi i\xi_i)\widehat{u_i} + \sum_{j=1}^{n}\left(-2\pi i\xi_j\right)\widehat{u_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i^2}{|\xi|^2}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(2\pi i\xi_i)\widehat{u_i} + \sum_{j=1}^{n}\left(-2\pi i\xi_j\right)\widehat{u_j}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Então $\operatorname{div}(\mathbb{P}u) = 0$ assim obtemos o resultado desejado.

**(3)** Se $\operatorname{div} u = 0$, então

$$(\operatorname{div} u)^\wedge = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}u_j\right)^\wedge = \sum_{j=1}^{n}(2\pi i\xi_j)\hat{u_j} = 0.$$

Agora

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{P}u} &= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\widehat{u}\\ &= \left(\widehat{u_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\widehat{u_j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\\ &= \left(\widehat{u_i} + \left(i\frac{\xi_i}{|\xi|^2}\right)\sum_{j=1}^{n}(i\xi_j)\widehat{u_j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Usando o fato de $2\pi\sum_{j=1}^{n}(i\xi_j)\hat{u_j} = 0$ em (1.2), então

$$\widehat{\mathbb{P}u} = (\widehat{u_i})_{1\leqslant i\leqslant n} = \widehat{u}.$$

Assim $\mathbb{P}u = u$, logo temos que se $\operatorname{div} u = 0$ então $\mathbb{P}u = u$.

□

**Observação 1.2.30.** *Dos itens 1, 2 e 3 da Proposição 1.2.29 podemos concluir que o operador $\mathbb{P}$ é uma projeção, pois de* $\operatorname{div}(\mathbb{P}u) = 0$ *temos que* $\mathbb{P}(\mathbb{P}u) = \mathbb{P}u$*, logo* $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$*.*

**Proposição 1.2.31.** *O projetor de Leray $\mathbb{P}$ é um operador limitado entre os espaços* $(L^p(\mathbb{R}^n))^n$*, para* $1 < p < \infty$*.*

*Demonstração.* A transformada de Riesz é limitada em $L^p(\mathbb{R}^n)$, logo o projetor de Leray $\mathbb{P}$ é limitado sob a norma

$$\|\mathbb{P}u\|_p = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|(\mathbb{P}u)_j\|_p \, .$$

□

## 1.3 Semigrupo do calor e formulação branda

Estudamos as equações de Navier-Stokes que governam a evolução da velocidade

$$u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x)),$$

e a pressão $p(t,x)$ de um fluido incompressível prenchendo todo $\mathbb{R}^3$. O problema de Cauchy associado a essas equações tem a forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -(u \cdot \nabla)u - \nabla p, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, o operador $\Delta$ é o Laplaciano, definido por

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i}, \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

O operador $(u \cdot \nabla)v$ é definido por

$$(u \cdot \nabla)v = u_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial v}{\partial x_3}.$$

O operador $\nabla$ é o gradiente definido por

$$\nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3} \right).$$

O operador $\nabla \cdot$ é o divergente definido por

$$\nabla \cdot u = \operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Estudaremos agora o problema linear associado a (1.3). Em domínios arbitrários do $\mathbb{R}^3$, o Projetor de Leray $\mathbb{P}$ não comuta com derivadas e a parte linear das equações em (1.3) são as equações de Stokes. Entretanto, no presente caso em que o domínio é todo o $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{P}$ comuta com derivadas e então o problema linear reduz-se ao da equação do calor, a saber Estudaremos agora o problema linear associado, também conhecido como o problema de Cauchy para a equação do calor.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Além disso, em Lemarié [19, pp. 53-54], podemos ver que a solução clássica de (1.4) é da forma

$$u(t,x) = g(t,x) * u_0(x).$$

Onde

$$g(t,x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \tag{1.5}$$

é chamado o núcleo do calor. Agora vamos ver o seguinte

$$\begin{aligned} g(t,x) &= \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \\ &= \left(\frac{1}{t}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{|xt^{-\frac{1}{2}}|^2}{4}\right) \\ &= t^{-3/2} g(1, xt^{-1/2}). \end{aligned}$$

Em seguida, iremos verificar um resultado do núcleo do calor que usaremos mais tarde.

**Teorema 1.3.1.** *Seja $1 \leqslant p < \infty$, então*

$$\|\nabla g(t,x)\|_p = t^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} \|(\nabla g)(1,x)\|_p .$$

*Demonstração.* Vejamos que

$$\begin{aligned} \|\nabla g(t,x)\|_p &= \left\|\nabla \left(t^{-3/2} g(1, xt^{-1/2})\right)\right\|_p \\ &= t^{-3/2} \left\|t^{-1/2} (\nabla g)(1, xt^{-1/2})\right\|_p \\ &= t^{-\frac{3+1}{2}} \left\|(\nabla g)(1, xt^{-1/2})\right\|_p \\ &= t^{-\frac{3+1}{2}} \left(t^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{3}{p}} \|(\nabla g)(1,x)\|_p \\ &= t^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} \|(\nabla g)(1,x)\|_p . \end{aligned}$$

Usando a Observação 1.1.8, assim o resultado é demonstrado. ∎

Além disso, no estudo de semigrupos de operadores lineares temos que a equação do calor nos permite obter um semigrupo de operadores lineares, isso pode ser visto em Cannone [5, p. 28], Grigoryan [15, p. 4], e Pazy [26, pp. 1-3].

$$S(t)f = e^{t\Delta}f = g(t,x) * f \quad ,$$

onde $S(t)$ ou $e^{t\Delta}$ é chamado o semigrupo do calor e no desenvolvimento desta teoria pode-se ver em Pazy [26, p. 3] que ela satisfaz

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t\Delta} - I}{t} = \Delta. \tag{1.6}$$

Agora veremos algumas propriedades do semigrupo do calor $S(t)$ que serão úteis mais tarde, a seguinte proposição foi retirada de Grigoryan [15], pp. 4-5.

**Proposição 1.3.2.** *O núcleo do calor $g(t,x)$ satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(t,y)dy = 1.$$

**Teorema 1.3.3.** *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, então $S(t)f \to f$ quando $t \to 0^+$ na norma de $L^p(\mathbb{R}^3)$.*

*Demonstração.* Primeiramente temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(t,y)dy = 1,$$

usando a Proposição 1.3.2, logo temos que

$$\begin{aligned}
(S(t)f - f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} g(t,y)f(x-y)dy - \int_{\mathbb{R}^3} g(t,y)f(x)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} [f(x-y) - f(x)]g(t,y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} [f(x-y) - f(x)]t^{-3/2}g(1,t^{-1/2}y)dy.
\end{aligned}$$

Seja $G(z) = t^{1/2}z$, nós vemos que $|detD_zG| = (t^{1/2})^3 = t^{3/2}$, logo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} [f(x-y) - f(x)]t^{-3/2}g(1,t^{-1/2}y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} [f(x-G(z)) - f(x)]t^{-3/2}g(1,t^{-1/2}G(z))|detD_zG|dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} [f(x-t^{1/2}z) - f(x)]t^{-3/2}g(1,t^{-1/2}t^{1/2}z)t^{3/2}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} [f(x-t^{1/2}z) - f(x)]g(1,z)dz.
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\|S(t)f - f\|_p &= \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left|\int_{\mathbb{R}^3} [f(x-t^{1/2}z) - f(x)]g(1,z)dz\right|^p dx\right]^{1/p} \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |[f(x-t^{1/2}z) - f(x)]g(1,z)|^p dx\right)^{1/p} dz,
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Minkowski para Integrais (veja Proposição 1.1.6). Denotando-se por $\tau_{t^{1/2}z}f(x) = f(x - t^{1/2}z)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left| [f(x - t^{1/2}z) - f(x)]g(1,z) \right|^p dx \right)^{1/p} dz = \int_{\mathbb{R}^3} \|\tau_{t^{1/2}z}f - f\|_p \, |g(1,z)| dz.$$

Observe que $|\tau_{t^{1/2}z}f - f|^p \to 0$ quando $t \to 0^+$ e $|\tau_{t^{1/2}z}f - f|^p$ é dominada por $g = 2^p \left( |\tau_{t^{1/2}z}f|^p + |f|^p \right)$, onde $g$ é integrável desde que $|f|^p$ é integrável. Então, usando convergência dominada (veja Proposição 1.1.10), para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, para $|t| < \delta$, podemos estimar

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \|\tau_{t^{1/2}z}f - f\|_p \, |g(1,z)| dz &< \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon |g(1,z)| dz \\ &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} |g(1,z)| dz \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

o que implica o limite

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t)f - f\|_p = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

**Observação 1.3.4.** *Desde que $\|S(t)f - f\|_p \to 0$ quando $t \to 0^+$, então, para cada $t_0 > 0$, temos $\|S(t)f - S(t_0)f\|_p \to 0$ quando $t \to t_0$.*

*Demonstração.* Seja $t_0 \in \mathbb{R}_+$, Suponha que $t > t_0$ podemos escrever $t = t_0 + \varepsilon$, onde $\varepsilon = t - t_0 > 0$, logo

$$\begin{aligned} \|S(t)f - S(t_0)f\|_p &= \|S(t_0 + \varepsilon)f - S(t_0)f\|_p \\ &= \|S(t_0)S(\varepsilon)f - S(t_0)f\|_p \\ &= \|S(t_0)(S(\varepsilon)f - f)\|_p \,. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young para $1 + 1/q = 1/a + 1/b$, onde $a = 1$ e $b = q$

$$\|S(t_0)(S(\varepsilon)f - f)\|_p < \|g(t_0, x)\|_1 \, \|S(\varepsilon)f - f\|_p \,.$$

Agora $\|S(\varepsilon)f - f)\|_p \to 0$ quando $\varepsilon \to 0^+$, logo temos que

$$\lim_{t \to t_0^+} \|S(t)f - S(t_0)f\|_p = 0.$$

Se $t < t_0$, podemos escrever $t + \varepsilon = t_0$, onde $\varepsilon = t_0 - t > 0$, logo

$$\begin{aligned} \|S(t)f - S(t_0)f\|_p &= \|S(t)f - S(t + \varepsilon)f\|_p \\ &= \|S(t)f - S(t)S(\varepsilon)f\|_p \\ &= \|S(t)(f - S(\varepsilon)f)\|_p \\ &< \|g(t,x)\|_1 \, \|f - S(\varepsilon)f\|_q \,. \end{aligned}$$

Agora $\|S(\varepsilon)f - f)\|_p \to 0$ quando $\varepsilon \to 0^+$, logo temos que

$$\lim_{t\to t_0^-} \|S(t)f - S(t_0)f\|_p = 0.$$

Logo,

$$\lim_{t\to t_0} \|S(t)f - S(t_0)f\|_p = 0,$$

então nós temos que $S(t)f \to S(t_0)f$ quando $t \to t_0$ na norma de $L^p(\mathbb{R}^3)$. $\square$

**Observação 1.3.5.** *Para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ temos o seguinte*

$$\langle S(t)u_0, \varphi\rangle = \langle u_0, S(t)\varphi\rangle\,,$$

*onde $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$, pois*

$$\begin{aligned}
\langle S(t)u_0, \varphi\rangle &= \langle g(t,x) * u_0, \varphi\rangle \\
&= \langle u_0, g(t,-x) * \varphi\rangle \\
&= \langle u_0, g(t,x) * \varphi\rangle \\
&= \langle u_0, S(t)\varphi\rangle\,.
\end{aligned}$$

*Onde $g(t,x) = g(t,-x)$ pela definição de $g(t,x)$, ver (1.5).*

De posse do semigrupo do calor $S(t)$, e de algumas de suas propriedades, voltamo-nos para o problema de Cauchy (1.3). Primeiro, desejamos transformar as equações (1.3), eliminando o termo da pressão $p$, por meio do Projetor de Leray $\mathbb{P}$. Antes de proceder nesta direção, precisamos rever algumas outras propriedades de $\mathbb{P}$.

**Proposição 1.3.6.** *Se $\mathbb{P}$ é o Projetor de Leray, então*

***(1)*** $\mathbb{P}\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}$ ;

***(2)*** $\mathbb{P}\Delta = \Delta\mathbb{P}$ ;

***(3)*** $\mathbb{P}\nabla = 0$ .

*Demonstração.* Lembre-se de que a transformada de Fourier de $\mathbb{P}$ é dada pelo seguinte operador

$$\hat{\mathbb{P}} = \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3},$$

então

**(1)** Provaremos que $\left(\mathbb{P}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{\wedge} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}\right)^{\wedge}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{P}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\wedge} &= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\wedge} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\wedge}\left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}\right)^{\wedge}.
\end{aligned}$$

Assim temos que $\mathbb{P}\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}$.

**(2)** Vamos mostrar que $(\mathbb{P}\Delta)^{\wedge} = (\Delta\mathbb{P})^{\wedge}$. De fato,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P}\Delta)^{\wedge} &= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}(\Delta)^{\wedge} \\
&= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}\left(\sum_{j=1}^{3}(2\pi i\xi_j)^2\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{3}(2\pi i\xi_j)^2\right)\left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \\
&= (\Delta\mathbb{P})^{\wedge}.
\end{aligned}$$

Assim $\mathbb{P}\Delta = \Delta\mathbb{P}$.

**(3)** Vamos provar que $(\mathbb{P}\nabla)^{\wedge} = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P}\nabla)^{\wedge} &= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}(\nabla)^{\wedge} \\
&= \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}(2\pi i\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant 3} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi_1\xi_1}{|\xi|^2} & -\frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2} & -\frac{\xi_1\xi_3}{|\xi|^2} \\ -\frac{\xi_2\xi_1}{|\xi|^2} & 1 - \frac{\xi_2\xi_2}{|\xi|^2} & -\frac{\xi_2\xi_3}{|\xi|^2} \\ -\frac{\xi_3\xi_1}{|\xi|^2} & -\frac{\xi_3\xi_2}{|\xi|^2} & 1 - \frac{\xi_3\xi_3}{|\xi|^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\pi i\xi_1 \\ 2\pi i\xi_2 \\ 2\pi i\xi_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\pi i\xi_1 - 2\pi i\xi_1\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} \\ 2\pi i\xi_2 - 2\pi i\xi_2\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} \\ 2\pi i\xi_3 - 2\pi i\xi_3\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} \end{bmatrix} \\
&= (2\pi i\xi_j - 2\pi i\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant 3} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo $\mathbb{P}\nabla = 0$.

Assim, este resultado está provado. $\square$

Notamos que do item 3 da Proposição 1.2.19 temos que $\mathbb{P}(\nabla p) = 0$, ou seja, quando aplicado o projetor, o termo envolvendo a pressão desaparece, portanto o novo problema será independente desse termo, então aplicando o Projetor de Leray $\mathbb{P}$ às equações de Navier Stokes (1.3) obtemos o seguinte

$$\mathbb{P}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \mathbb{P}(\Delta u) = -\mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u] - \mathbb{P}(\nabla p).$$

Agora usamos $\nabla \cdot u = 0$ e pelas propriedades de $\mathbb{P}$ vistas nas Proposições 1.2.29 e 1.3.6 temos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

De $\nabla \cdot u = 0$ podemos ver que

$$(u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot (u \otimes u),$$

onde $u \otimes u = (u_i u_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, e o operador divergente $\nabla \cdot$ atua em $(u \otimes u)$ coluna por coluna, ou seja

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \begin{bmatrix} u_1u_1 \\ u_2u_1 \\ u_3u_1 \end{bmatrix} & \nabla \cdot \begin{bmatrix} u_1u_2 \\ u_2u_2 \\ u_3u_2 \end{bmatrix} & \nabla \cdot \begin{bmatrix} u_1u_3 \\ u_2u_3 \\ u_3u_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Então se $\nabla \cdot u = 0$ temos que

$$\mathbb{P}\left[(u \cdot \nabla)u\right] = \mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u).$$

Assim o sistema de equações (1.7) se torna

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Na sequência, usando o princípio de Duhamel e procedendo formalmente, podemos ver que $u$ satisfaz (1.8), se e somente se, $u$ satisfaz a equação integral

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)(s)\, ds. \tag{1.9}$$

**Observação 1.3.7.** *(Solução branda) Uma solução da equação* (1.9) *é chamada solução branda ou solução mild das equações de Navier-Stokes* (1.3)*.*

Agora vamos definir o seguinte operador bilinear

$$B(v,u)(t) = -\int_0^t S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(v\otimes u)(s)ds.$$

Podemos encontrar sua transformada de Fourier da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[\mathbb{P}\nabla\cdot(v\otimes u)\right]\\
&= \left(\delta_{j,k} - \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant 3} \mathscr{F}\left[\left(\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_l}(v_l u_k)\right)_{1\leqslant k\leqslant 3}\right]\\
&= \left(\delta_{j,k} - \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant 3} \left(\sum_{l=1}^{3}(2\pi i\xi_l)\,\hat{v_l} * \hat{u_k}\right)_{1\leqslant k\leqslant 3}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{3}\left(\delta_{j,k} - \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\right)\left(\sum_{l=1}^{3}(2\pi i\xi_l)\,\hat{v_l} * \hat{u_k}\right)\right)_{1\leqslant j\leqslant 3}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}2\pi\left[\left(\delta_{j,k}\,(i\xi_l) - \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\,(i\xi_l)\right)\hat{v_l} * \hat{u_k}\right]\right)_{1\leqslant j\leqslant 3}\\
&= -2\pi|\xi|\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left[\left(\delta_{j,k}\left(-i\frac{\xi_l}{|\xi|}\right) + \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\left(-i\frac{\xi_k}{|\xi|}\right)\left(-i\frac{\xi_l}{|\xi|}\right)\right)\hat{v_l} * \hat{u_k}\right]\right)_{1\leqslant j\leqslant 3}.
\end{aligned}$$

Podemos constatar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\delta_{j,k}u_k = u_j$, desde que $1\leqslant j\leqslant 3$, além disso $\mathscr{F}R_j = -i\dfrac{\xi_j}{|\xi|}$ então

$$\mathscr{F}\left[\mathbb{P}\nabla\cdot(v\otimes u)\right] = -2\pi|\xi|\mathscr{F}\left[\left(\sum_{l=1}^{3}R_l v_l u_j + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}R_jR_kR_l v_l u_k\right)_{1\leqslant j\leqslant 3}\right].$$

Seja $\Lambda$ o operador multiplicador de Fourier com símbolo $|\xi|$, ou seja, $\mathscr{F}[\Lambda f] = |\xi|\hat{f}$, e seja

$$B_s(f,g)(t) = -\int_0^t [S(t-s)\Lambda](fg)(s)ds,$$

onde $f,g\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$.

Então

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[B(v,u)(t)\right] \\
&= -\int_0^t \mathscr{F}\left[S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(v\otimes u)(s)\right]ds \\
&= 2\pi\int_0^t \exp(-4\pi^2(t-s)|\xi|^2)|\xi|\mathscr{F}\left[\left(\sum_{l=1}^{3}R_l v_l u_j + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}R_jR_kR_l v_l u_k\right)_{1\leqslant j\leqslant 3}\right]ds \\
&= 2\pi\mathscr{F}\left[\int_0^t S(t-s)\Lambda\left(\sum_{l=1}^{3}R_l v_l u_j + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}R_jR_kR_l v_l u_k\right)_{1\leqslant j\leqslant 3}\right]ds \\
&= 2\pi\mathscr{F}\left[\left(\sum_{l=1}^{3}R_l\int_0^t[S(t-s)\Lambda](v_lu_j)ds + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}R_jR_kR_l\int_0^t[S(t-s)\Lambda](v_lu_k)ds\right)_{1\leqslant j\leqslant 3}\right] \\
&= -2\pi\mathscr{F}\left[\left(\sum_{l=1}^{3}R_lB_s(v_l,u_j)(t) + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}R_jR_kR_lB_s(v_l,u_k)(t)\right)_{1\leqslant j\leqslant 3}\right].
\end{aligned}
$$

Assim temos que

$$
B(v,u)(t) = -2\pi\left(\sum_{l=1}^{3}R_lB_s(v_l,u_j)(t) + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}R_jR_kR_lB_s(v_l,u_k)(t)\right)_{1\leqslant j\leqslant 3}. \tag{1.10}
$$

Além disso, podemos usar o fato de que $\mathscr{F}\left[g(t-s,x)\right] = \exp(-4\pi^2(t-s)|\xi|^2)$ e $\mathscr{F}\Lambda = |\xi|$ como segue

$$
\begin{aligned}
|\xi|\exp(-4\pi^2(t-s)|\xi|^2) &= \frac{1}{2^4\pi^4(t-s)^2}\left(2\pi\sqrt{t-s}\right)^4|\xi|\exp(-4\pi^2(t-s)|\xi|^2) \\
&= \frac{1}{2^4\pi^4(t-s)^2}\left(2\pi\sqrt{t-s}\right)^3\left|\left(2\pi\sqrt{t-s}\right)\xi\right|\exp(-|\left(2\pi\sqrt{t-s}\right)\xi|^2),
\end{aligned}
$$

então, seja $\Theta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ tal que $\hat{\Theta}(\xi) = |\xi|\exp(-|\xi|^2)$, temos o seguinte

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[\Lambda g(t-s,x)\right] &= |\xi|\exp(-4\pi^2(t-s)|\xi|^2) \\
&= \frac{1}{2^4\pi^4(t-s)^2}\left(2\pi\sqrt{t-s}\right)^3\hat{\Theta}\left((2\pi\sqrt{t-s})\xi\right) \\
&= \frac{1}{2^4\pi^4(t-s)^2}\mathscr{F}\left[\Theta\left(\frac{x}{2\pi\sqrt{t-s}}\right)\right] \\
&= \mathscr{F}\left[\frac{1}{2^4\pi^4(t-s)^2}\Theta\left(\frac{x}{2\pi\sqrt{t-s}}\right)\right],
\end{aligned}
$$

logo

$$
B_s(f,g)(t) = -\int_0^t \frac{1}{2^4\pi^4(t-s)^2}\Theta\left(\frac{x}{2\pi\sqrt{t-s}}\right) * (fg)(s)ds. \tag{1.11}
$$

**Observação 1.3.8.** *Note que $C = \dfrac{1}{2^4\pi^4}$ é uma constante, então podemos considerar*

$$
B_s(f,g)(t) = -C\int_0^t (t-s)^{-2}\Theta\left(\frac{x}{2\pi\sqrt{t-s}}\right) * (fg)(s)ds,
$$

*deixando a constante $C$ fora.*

Assim, quando queremos limitar a norma em $L^p(\mathbb{R}^3)$ do operador bilinear $B$, então podemos simplesmente limitar a norma do operador $B_s$, uma vez que

$$\|B(v,u)(t)\|_p = 2\pi \sup_{1\leqslant j\leqslant 3} \left\| \sum_{l=1}^{3} R_l B_s(v_l,u_j)(t) + \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} R_j R_k R_l B_s(v_l,u_k)(t) \right\|_p .$$

Nós sabemos que $R_j$ são limitados em $L^p(\mathbb{R}^3)$ pela Proposição 1.2.25, logo usando a desigualdade triangular de $L^p(\mathbb{R}^3)$ temos que

$$\|B(v,u)(t)\|_p \leqslant \sup_{1\leqslant j\leqslant 3} \left( C_1 \sum_{l=1}^{3} \|B_s(v_l,u_j)(t)\|_p + C_2 \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \|B_s(v_l,u_k)(t)\|_p \right).$$

Portanto, se estivermos interessados em estimar $B(v,u)(t)$, em $L^p(\mathbb{R}^3)$, podemos estimar $B_s(f,g)(t)$ em $L^p(\mathbb{R}^3)$ e obter uma estimativa para $B(v,u)(t)$, chamaremos $B_s(f,g)(t)$ como a versão escalar de $B(v,u)(t)$, pois $u,v \in (\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P})^3$ e $f,g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$, às vezes será mais fácil trabalhar com $B_s$ na forma (1.11) porque é uma expressão mais simples.

## 1.4 Descomposição de Littlewood-Paley e teorema do ponto fixo

Nesta seção, relembramos a definição da decomposição de Littlewood-Paley, bem como o Teorema de Ponto Fixo de Banach. A primeira faz-se necessária por ser uma ferramenta básica na definição dos espaços de Besov, já o segundo é um resultado clássico frequentemente utilizado na análise de equações diferenciais. Este conteúdo pode ser consultado em Brezis [4], Lemarié [18] e Sawano [29].

**Definição 1.4.1.** *(Blocos Diádicos) Seja $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ tal que*

$$0 \leqslant \varphi(\xi) \leqslant 1, \qquad \begin{cases} \varphi(\xi) = 1, & se\ |\xi| \leqslant 1/2, \\ \varphi(\xi) = 0, & se\ |\xi| \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

*Seja $\psi(\xi) = \varphi(\xi/2) - \varphi(\xi)$, então $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ é tal que*

$$0 \leqslant \psi(\xi) \leqslant 1, \qquad \begin{cases} \psi(\xi) = 1, & se\ |\xi| = 1, \\ \psi(\xi) = 0, & se\ |\xi| \leqslant 1/2\ ou\ |\xi| \geqslant 2. \end{cases} \tag{1.13}$$

*Considere agora as funções*

$$\begin{aligned} \varphi_j(\xi) &= \varphi(2^{-j}\xi), \qquad j \in \mathbb{Z}; \\ \psi_j(\xi) &= \psi(2^{-j}\xi), \qquad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

*Definimos os Blocos Diádicos $S_j$ e $\Delta_j$ como os operadores com símbolo $\varphi_j(\xi)$ e $\psi_j(\xi)$, respectivamente, isto é, seja $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$, então para cada $j \in \mathbb{Z}$*

$$\begin{aligned} S_j f &= \mathscr{F}^{-1}[\varphi_j \cdot \mathscr{F} f] = \mathscr{F}^{-1}[\varphi_j] * f; \\ \Delta_j f &= \mathscr{F}^{-1}[\psi_j \cdot \mathscr{F} f] = \mathscr{F}^{-1}[\psi_j] * f. \end{aligned}$$

**Observação 1.4.2.** *A partir de $\psi(\xi) = \varphi(\xi/2) - \varphi(\xi)$, temos que, para cada $N \in \mathbb{N}$*

$$\varphi(\xi) + \sum_{j=0}^{N} \psi_j(\xi) = \varphi(\xi) + \sum_{j=0}^{N} \left(\varphi(2^{-j-1}\xi) - \varphi\left(2^{-j}\xi\right)\right) = \varphi(2^{-(N+1)}\xi).$$

*Então, conseguimos que $S_{N+1} = S_0 + \sum_{j=0}^{N} \Delta_j$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$; da mesma forma, temos que, para cada $K \in \mathbb{N}$,*

$$S_{N+K} = S_N + \sum_{j=N}^{N+K-1} \Delta_j, \tag{1.14}$$

*em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$. Em particular,*

$$\Delta_N = S_{N+1} - S_N. \tag{1.15}$$

*Agora, vejamos que*

$$\sum_{j=-N}^{-1} \psi_j(\xi) = \sum_{j=-N}^{-1} \left(\varphi(2^{-j-1}\xi) - \varphi(2^{-j}\xi)\right) = \varphi(\xi) - \varphi(2^N\xi).$$

*Logo, quando $N \to \infty$, temos que $S_0 = \sum_{j=-\infty}^{-1} \Delta_j$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$, pois $\lim_{N\to\infty} \varphi(2^N\xi)$ tende a uma distribuição com suporte em $\{0\}$. Assim, usando a Proposição 1.2.22, temos que $\lim_{N\to\infty} S_{-N} = 0$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$. Da mesma forma, para cada $N \in \mathbb{Z}$, segue que*

$$S_N = \sum_{j=-\infty}^{N-1} \Delta_j, \tag{1.16}$$

*em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$.*

*É importante dizer que $\varphi, \psi$ não precisam ter o suporte que usamos. De fato, em Cannone [5, p. 21], Lemarié [18, p. 62], e Sawano [29, p. 207], os autores definem as funções $\varphi, \psi$, mas não fazem de forma idêntica, e nota-se que as funções têm suportes diferentes. Vamos usar $\varphi, \psi$ para definir os espaços de Besov, então uma preocupação seria que o uso de $\varphi, \psi$ diferentes levaria a uma definição diferente, mas veremos que não há nenhum problema com isso, pois diferentes funções $\varphi$ geram normas equivalentes.*

O teorema a seguir fornece a definição de decomposição de Littlewood-Paley e foi retirado de Lemarié [18, pp. 23-24].

**Teorema 1.4.3.** *(Descomposição de Littlewood-Paley) Seja $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$, então, para todo $N \in \mathbb{Z}$, temos que*

$$f = S_N f + \sum_{j=N}^{\infty} \Delta_j f \text{ em } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3);$$

*a família $\{S_j, \Delta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ é chamada a decomposição da unidade de Littlewood-Paley.*

*Além disso, temos que*

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \ \text{ em } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}.$$

*Demonstração.* Seja $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ e $N, K \in \mathbb{N}$. Então, usando (1.14), temos que

$$\left\langle S_N f + \sum_{j=N}^{K} \Delta_j f, g \right\rangle = \langle S_{K+1} f, g \rangle = \langle f, S_{K+1} g \rangle .$$

Relembre que $S_{K+1} g = \mathscr{F}^{-1}[\varphi_{K+1} \mathscr{F} g]$. Seja $h(\xi) = \mathscr{F}[g](\xi)$ e note que

$$\lim_{K \to \infty} \varphi(2^{-(K+1)}\xi) h(\xi) = h(\xi).$$

Assim, segue que

$$\lim_{K \to \infty} \left\langle S_N f + \sum_{j=N}^{K} \Delta_j f, g \right\rangle = \lim_{K \to \infty} \langle f, S_{K+1} g \rangle = \langle f, g \rangle ,$$

o que implica que $S_N f + \sum_{j=N}^{\infty} \Delta_j f = f$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$.

Por outro lado, usando (1.15), temos que, para cada $K \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=-K}^{K} \psi_j(\xi) = \sum_{j=-K}^{K} \left( \varphi(2^{-j-1}\xi) - \varphi(2^{-j}\xi) \right) = \varphi(2^{-(K+1)}\xi) - \varphi(2^{K}\xi).$$

Agora $\lim_{K \to \infty} \varphi(2^{-(K+1)}\xi) = 1$ e $\lim_{K \to \infty} \varphi(2^K \xi)$ tende para uma distribuição com suporte em $\{0\}$. Usando (1.16), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{K \to \infty} \left\langle \sum_{j=-K}^{K} \Delta_j f, g \right\rangle &= \lim_{K \to \infty} \langle (S_{K+1} - S_{-K}) f, g \rangle \\ &= \lim_{K \to \infty} \langle f, (S_{K+1} - S_{-K}) g \rangle \\ &= \lim_{K \to \infty} \langle f, S_{K+1} g - S_{-K} g \rangle \\ &= \langle f, g \rangle , \end{aligned}$$

em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$, pois $\lim_{K \to \infty} S_{K+1} g = g$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ e $\lim_{K \to \infty} S_{-K} g = 0$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$. Assim, chegamos a igualdade $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \Delta_j f = f$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$ e o teorema está provado. ∎

O seguinte resultado pode ser encontrado em Lemarié-Rieusset [18], p. 24.

**Proposição 1.4.4.** *(Desigualdade de Bernstein) Seja $j \in \mathbb{Z}$ e $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Para uma distribuição $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, vale a estimativa*

$$\|\Delta_j f\|_q \leqslant \left\| \mathscr{F}^{-1} \tilde{\psi} \right\|_r \|\Delta_j f\|_p \, 2^{j(d/p - d/q)},$$

*onde* $\dfrac{1}{r} = 1 - \left( \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \right)$ *e* $\tilde{\psi}(\xi) = \varphi(\xi/4) - \varphi(4\xi)$.

Agora veremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, conhecido também pelo nome de Princípio da Contração. Entretanto, primeiro precisaremos relembrar algumas definições antes de enunciar tal teorema.

**Definição 1.4.5.** *Seja $X$ um conjunto não vazio, e seja uma aplicação $f : X \to X$. Dizemos que $x \in X$ é um ponto fixo para $f$, quando*

$$f(x) = x.$$

**Definição 1.4.6.** *Seja $(X, d)$ um espaço métrico, e seja $f : X \to X$, então dizemos que $f$ é uma contração estrita se existe $0 \leqslant k < 1$, tal que*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant kd(x_1, x_2),$$

*para todo $x_1, x_2 \in X$*

Finalmente, enunciamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o qual, nesta forma, pode ser consultado em Brezis [4], p. 138.

**Teorema 1.4.7.** *(Ponto fixo de Banach) Seja $f : X \to X$ uma contração em uma espaço métrico $(X, d)$ não trivial completo. Então, existe um único ponto fixo $x \in X$ de $f$ em $X$.*

O lema abaixo contém um resultado de ponto fixo para equações com estrutura quadrática como é o caso das equações de Navier-Stokes (1.3) e sua formulação branda (1.9). Este lema, bem como a sua demonstração, podem ser consultados em Cannone [5] e Lemarié-Rieusset [18].

**Lema 1.4.8.** *Seja $X$ um espaço de Banach munido com a norma $\|\cdot\|$. Considere uma forma bilinear contínua $B : X \times X \to X$, isto é, para todo $x_1, x_2 \in X$, temos a estimativa*

$$\|B(x_1, x_2)\| \leqslant \eta \|x_1\| \|x_2\|,$$

*onde $\eta$ é uma constante universal. Então, para cada $y \in X$, tal que $4\eta \|y\| < 1$, a equação*

$$x = y + B(x, x)$$

*tem uma solução $x \in X$. Mais ainda, esta solução $x$ é a única tal que*

$$\|x\| \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta \|y\|}}{2\eta}.$$

*Demonstração.* Seja $y \in X$ fixado, e

$$B_R = \{x \in X : \|x\| \leqslant R\},$$

onde

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta \|y\|}}{2\eta}. \tag{1.17}$$

Então podemos ver que $\|y\| + \eta R^2 = R$, pois

$$\begin{aligned}
&\|y\| + \eta \left( \frac{1 - 2\sqrt{1 - 4\eta \|y\|} + 1 - 4\eta \|y\|}{4\eta^2} \right) \\
&= \|y\| + \eta \left( \frac{2 - 2\sqrt{1 - 4\eta \|y\|}}{4\eta^2} \right) - \frac{4\eta \|y\|}{4\eta} \\
&= \frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta \|y\|}}{2\eta} \\
&= R.
\end{aligned}$$

Agora considere $F(x) = y + B(x, x)$, então $F$ é uma aplicação de $B_R$ em $B_R$, pois

$$\begin{aligned}
\|F(x)\| &= \|y + B(x, x)\| \\
&\leqslant \|y\| + \|B(x, x)\| \\
&\leqslant \|y\| + \eta \|x\| \|x\| \\
&\leqslant \|y\| + \eta \|x\|^2 \\
&\leqslant \|y\| + \eta R^2 \\
&= R.
\end{aligned}$$

A seguir, provamos que $F$ é uma contração. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(x')\| &= \|y + B(x, x) - y - B(x', x')\| \\
&= \|B(x, x) - B(x', x')\| \\
&= \|B(x, x) - B(x', x) + B(x', x) - B(x', x')\| \\
&= \|B(x - x', x) + B(x', x - x')\| \\
&\leqslant \|B(x - x', x)\| + \|B(x', x - x')\|.
\end{aligned}$$

Como $x, x' \in B_R$, temos que

$$\begin{aligned}
\|B(x - x', x)\| &\leqslant \eta \|x - x'\| \|x\| \leqslant \eta R \|x - x'\|, \\
\|B(x', x - x')\| &\leqslant \eta \|x'\| \|x - x'\| \leqslant \eta R \|x - x'\|,
\end{aligned}$$

logo

$$\|B(x - x', x)\| + \|B(x', x - x')\| \leqslant 2\eta R \|x - x'\|.$$

Usando $0 \leqslant 4\eta \|y\| < 1$, podemos ver que

$$\begin{aligned}
0 < \sqrt{1 - 4\eta \|y\|} &\leqslant 1 \\
-1 \leqslant -\sqrt{1 - 4\eta \|y\|} &< 0 \\
0 \leqslant 1 - \sqrt{1 - 4\eta \|y\|} &< 1.
\end{aligned}$$

Segue que

$$2\eta R = 2\eta \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta \|y\|}}{2\eta} \right)$$
$$= 1 - \sqrt{1 - 4\eta \|y\|},$$

e

$$0 \leqslant 2\eta R < 1.$$

Tomando agora a constante $C = 4\eta R$, temos que $0 \leqslant C < 1$ e

$$\|F(x) - F(x')\| \leqslant C \|x - x'\|,$$

mostrando que $F : B_R \to B_R$ é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (veja Teorema 1.4.7), $F$ possui um ponto fixo $x \in B_R$ tal que $F(x) = x$, o que nos dá

$$F(x) = y + B(x, x) = x.$$

Assim, a equação $x = y + B(x, x)$ admite uma única solução $x \in B_R \subset X$, onde $R$ é dado em (1.17). □

## 1.5 Espaços de Besov

Nesta última seção do capítulo, vamos definir os espaços de Besov $B_p^{\alpha,q}$ e os de Besov homogêneos $\dot{B}_p^{-\alpha,\infty}$. De fato, estes últimos, são os que serão utilizados mais tarde na análise das equações (1.3). O conteúdo desta seção é baseado nas referências Cannone [5], [6], Lemarié [18] e Sawano [29].

## Espaços de Besov $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$

Seja $\{S_j, \Delta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ a decomposição de Littlewood-Paley. Sejam $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos os espaços de Besov $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ como

$$B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3) : \|f\|_{B_p^{\alpha,q}} < \infty\},$$

onde $\|\cdot\|_{B_p^{\alpha,q}}$ é chamada a norma de Besov, e é definida, para $q \neq \infty$, como

$$\|f\|_{B_p^{\alpha,q}} = \|S_0 f\|_p + \left\{ \sum_{j\geqslant 0} \left( 2^{j\alpha} \|\Delta_j f\|_p \right)^q \right\}^{1/q}.$$

Para o caso $q = \infty$, considera-se

$$\|f\|_{B_p^{\alpha,\infty}} = \|S_0 f\|_p + \sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{j\alpha} \|\Delta_j f\|_p \,.$$

Esta definição foi retirada de Cannone [5, p. 24], Lemarié [18, p. 26], e Sawano [29, p. 207].

A seguir, apresentamos um teorema que nos garante que a definição dos espaços de Besov $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ são independentes da escolha de uma decomposição de Littlewood-Paley $\{S_j, \Delta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ particular, podendo este ser consultado em Sawano [29, p. 208].

**Teorema 1.5.1.** *Sejam $\{S_j, \Delta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ a decomposição de Littlewood-Paley decorrente de $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ definidos como em (1.12) e (1.13) que geram a norma de Besov $\|\cdot\|_{B_p^{\alpha,q}}$. Se $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\psi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ satisfazem*

$$\chi_{\{|\xi|\leqslant 1/2\}} \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant \chi_{\{|\xi|\leqslant 1\}},$$
$$\chi_{\{2\leqslant|\xi|\leqslant 1/2\}} \leqslant \tilde{\psi} \leqslant \chi_{\{1/4\leqslant|\xi|\leqslant 1\}},$$

*e geram outra decomposição de Littlewood-Paley $\{\tilde{S}_j, \tilde{\Delta}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ e outra norma de Besov $\|\cdot\|^*_{B_p^{\alpha,q}}$, então*

$$\|f\|_{B_p^{\alpha,q}} \sim \|f\|^*_{B_p^{\alpha,q}} \,,$$

*em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$.*

O seguinte resultado nos permite ver que os espaços de Besov estão posicionados entre a classe de Schwartz e o espaço das distribuições temperadas. Portanto, muitas propriedades anteriores são naturalmente estendidas a eles. A próxima proposição foi retirada de Sawano [29], p. 218.

**Proposição 1.5.2.** *Seja $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos as seguintes imersões*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \subset B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3).$$

## Espaços de Besov homogêneos $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$

Seja $q$ tal que $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$, então a quase-norma do espaço de Besov homogêneo $\dot{B}_q^{s,\infty}(\mathbb{R}^3)$ é definida por

$$\|v\|_{\dot{B}_q^{s,\infty}} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{js} \|\Delta_j v\|_q,$$

onde $\{S_j, \Delta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ é uma decomposição de Littlewood-Paley.

A seguinte definição de espaço de Besov homogêneo foi retirada de Cannone [5, p. 127], Lemarié [18, p. 29], e Sawano [29, p. 279].

**Definição 1.5.3.** *(Espaço de Besov Homogêneo) Seja* $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *e* $s \in \mathbb{R}$, *o espaço de Besov homogêneo* $\dot{B}_q^{s,\infty}(\mathbb{R}^3)$ *é dado por*

$$\dot{B}_q^{s,\infty}(\mathbb{R}^3) = \{v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P} : \|v\|_{\dot{B}_q^{s,\infty}} < \infty\}.$$

**Observação 1.5.4.** *Tomando* $\alpha = 1-3/q$ *e* $s = -\alpha$, *obtemos o espaço de Besov homogêneo* $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$ *como segue*

$$\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3) = \{v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P} : \|v\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \infty\},$$

*onde a norma é dada por*

$$\|v\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}\|\Delta_j v\|_q.$$

*Assim, daqui por diante, quando falarmos do espaço de Besov homogêneo* $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$ *ao longo deste trabalho, tomaremos* $\alpha = 1 - 3/q$, *a menos que especifiquemos outro* $\alpha$.

Como antes, veremos que esta definição não depende da escolha de um $\varphi$ na decomposição de Littlewood-Paley. Para o próximo teorema, referimos o leitor a Sawano [29, p. 280].

**Teorema 1.5.5.** *O espaço* $\dot{B}_q^{s,\infty}(\mathbb{R}^3)$ *não depende da escolha de* $\varphi$, *ou seja, para diferentes* $\varphi$ *obtemos quase-normas equivalentes* $\|\cdot\|_{\dot{B}_q^{s,\infty}}$.

O seguinte resultado nos permite obter uma equivalência entre normas, envolvendo a norma do espaço de Besov $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$ quando $\alpha > 0$, o que nos será útil mais adiante. Este lema foi retirado de M. Cannone [6], p. 522.

**Lema 1.5.6.** *Seja* $q$ *fixado tal que* $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *e* $\alpha > 0$. *Para toda distribuição temperada* $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$, *as seguintes quatro normas*

*(1)* $\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||\Delta_j v||_q$,

*(2)* $\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||S_j v||_q$,

*(3)* $\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}||S(t)v||_q$,

*(4)* $\sup_{t\geqslant 0} ||S(t)v||_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}$,

*são equivalentes e serão referidas somente como* $||v||_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}$.

*Demonstração.* (1) $\iff$ (2) Primeiramente vejamos que $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$, por (1.15), para todo $j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 2^{-j\alpha}||\Delta_j v||_q &= 2^{-j\alpha}||S_{j+1}v - S_j v||_q \\ &\leqslant 2^{-j\alpha}||S_{j+1}v||_q + 2^{-j\alpha}||S_j v||_q. \end{aligned}$$

Agora podemos ver que

$$2^{-j\alpha}||S_j v||_q \leqslant \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||S_j v||_q,$$

$$2^{-j\alpha}||S_{j+1} v||_q = 2^{\alpha}2^{-(j+1)\alpha}||S_{j+1} v||_q \leqslant 2^{\alpha} \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||S_j v||_q.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} 2^{-j\alpha}||\Delta_j v||_q &\leqslant 2^{-j\alpha}||S_{j+1} v||_q + 2^{-j\alpha}||S_j v||_q \\ &\leqslant 2^{\alpha} \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||S_j v||_q + \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||S_j v||_q. \end{aligned}$$

Assim, as últimas estimativas nos levam a

$$2^{-j\alpha}||\Delta_j v||_q \leqslant (2^{\alpha}+1) \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||S_j v||_q,$$

e então temos uma cota superior para o conjunto $\{2^{-j\alpha}||\Delta_j v||_q, j \in \mathbb{Z}\}$. Logo, existe uma constante $C = 2^{\alpha}+1$ tal que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||\Delta_j v||_q \leqslant C \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||S_j v||_q.$$

Agora, vamos mostrar que existe uma constante $C$ tal que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||S_j v||_q \leqslant C \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||\Delta_j v||_q.$$

Com efeito, lembrando que $S_j = \sum\limits_{k\leqslant j-1} \Delta_k$ onde $k \in \mathbb{Z}$, por (1.16), segue que

$$\begin{aligned} 2^{-j\alpha}||S_j v||_q &\leqslant 2^{-j\alpha} \left\| \sum_{k\leqslant j-1} \Delta_k v \right\|_q \\ &\leqslant \sum_{k\leqslant j-1} 2^{-j\alpha} \left\|\Delta_k v\right\|_q \\ &= \sum_{k\leqslant j-1} 2^{(k-j)\alpha}2^{-k\alpha} \left\|\Delta_k v\right\|_q \\ &\leqslant \left( \sum_{k\leqslant j-1} 2^{(k-j)\alpha} \right) \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha} \left\|\Delta_j v\right\|_q. \end{aligned}$$

Agora, observe que $\sum\limits_{k\leqslant j-1} 2^{(k-j)\alpha} = \sum\limits_{k-j\leqslant -1} 2^{(k-j)\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha} < \infty$, pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{-(n+1)\alpha}}{2^{-n\alpha}} = 2^{-\alpha} < 1,$$

e $\alpha > 0$. Portanto, pelo teste da razão, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha}$ é convergente, e assim existe uma constante $C = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-n\alpha}$ tal que

$$2^{-j\alpha}||S_j v||_q \leqslant C \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||\Delta_j v||_q,$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$. Segue que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}\|S_j v\|_q \leqslant C \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}\|\Delta_j v\|_q,$$

e, pelas considerações e estimativas acima, concluímos a equivalência dessas normas.

(2) $\iff$ (3) Primeiro lembremos que

$$\mathscr{F}\left[S(t)v\right] = ce^{-t|\xi|^2}\mathscr{F}v.$$

Agora, usando o fato de que $e^{-|\xi|^2} \neq 0$, então existe um $\tilde{\psi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\varphi(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)ce^{-|\xi|^2}.$$

Logo, para todo $j \in \mathbb{Z}$, temos que $\varphi(2^{-j}\xi) = \tilde{\psi}(2^{-j}\xi)ce^{-4^{-j}|\xi|^2}$, isto é,

$$\varphi_j = c\tilde{\psi}_j\mathscr{F}[g(4^{-j}, x)],$$

para cada $j \in \mathbb{Z}$. Assim, usando a desigualdade de Young (veja a Proposição 1.1.16), chegamos a

$$\begin{aligned}
2^{-j\alpha}\left\|\mathscr{F}^{-1}\left[\varphi_j\mathscr{F}v\right]\right\|_q &= c2^{-j\alpha}\left\|\mathscr{F}^{-1}\left[\tilde{\psi}_j\mathscr{F}[g(4^{-j}, x)]\mathscr{F}v\right]\right\|_q \\
&\leqslant c4^{-j\alpha/2}\left\|\mathscr{F}^{-1}\left[\tilde{\psi}_j\right]\right\|_1 \left\|\mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}[g(4^{-j}, x)]\mathscr{F}v\right]\right\|_q \\
&= c(4^{-j})^{\alpha/2}\left\|S(4^{-j})v\right\|_q \\
&= c\sup_{t>0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q,
\end{aligned}$$

e então

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}\left\|S_j v\right\|_q \leqslant c\sup_{t>0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q.$$

Agora $\sup_{t>0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q \leqslant c\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}\left\|S_j v\right\|_q$ é cumprida porque $\mathscr{F}[S(t)v]$ tem propriedades semelhantes a $\varphi(\xi)\mathscr{F}[v]$, então a independência de $\varphi$ nos permite obter o desejado, veja, e.g., Lemarié [18, pp. 44-45].

(3) $\iff$ (4) Primeiramente, podemos ver que

$$\|S(t)v\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \leqslant C\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)S(t)v\right\|_q = C\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(2t)v\right\|_q.$$

Agora, vamos mostrar que existe $C$ tal que

$$\sup_{t\geqslant 0}\|S(t)v\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \leqslant C\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q.$$

Desde que $\alpha > 0$, então $2^{\alpha/2} > 1$ e segue que

$$t^{\alpha/2}\left\|S(2t)v\right\|_q < 2^{\alpha/2}t^{\alpha/2}\left\|S(2t)v\right\|_q = (2t)^{\alpha/2}\left\|S(2t)v\right\|_q \leqslant \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q.$$

Agora notemos que $\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q \in \mathbb{R}$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}\sup_{t\geqslant 0}\left\|S(t)v\right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} &\leqslant C\sup_{t\geqslant 0}\left(t^{\alpha/2}\left\|S(2t)v\right\|_q\right)\\ &\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q\right)\\ &= \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q,\end{aligned}$$

e assim

$$\sup_{t\geqslant 0}\left\|S(t)v\right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \leqslant C\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q.$$

Agora vamos mostrar que existe uma constante $C$ tal que

$$\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q \leqslant C\sup_{t\geqslant 0}\left\|S(t)v\right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}.$$

Vejamos que $\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q = \sup_{t\geqslant 0}(2t)^{\alpha/2}\left\|S(2t)v\right\|_q$. Primeiro, podemos estimar

$$\begin{aligned}(2t)^{\alpha/2}\left\|S(2t)v\right\|_q &= \left(2^{\alpha/2}\right)\left(t^{\alpha/2}\left\|S(2t)v\right\|_q\right)\\ &\leqslant \left(2^{\alpha/2}\right)\left(\sup_{r\geqslant 0} r^{\alpha/2}\left\|S(r)S(t)v\right\|_q\right)\\ &= \left(C2^{\alpha/2}\right)\left\|S(t)v\right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}.\end{aligned}$$

Assim, tomando o supremo em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\sup_{t\geqslant 0}(2t)^{\alpha/2}\left\|S(2t)v\right\|_q \leqslant C2^{\alpha/2}\sup_{t\geqslant 0}\left\|S(t)v\right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}.$$

Assim, existe uma constate $C$ tal que

$$\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)v\right\|_q \leqslant C\sup_{t\geqslant 0}\left\|S(t)v\right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}},$$

o que conclui a demonstração da equivalência das normas. □

Agora veremos algumas inclusões contínuas envolvendo espaços de Lebesgue e de Besov. O lema abaixo pode ser consultado em M. Cannone [6], p. 523.

**Lema 1.5.7.** *Seja $q_1$ e $q_2$ dois índices tais que $3 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \infty$ e seja $\alpha_1 = 1 - 3/q_1$ e $\alpha_2 = 1 - 3/q_2$. Temos a seguinte cadeia de inclusões contínuas*

$$L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{q_1}^{-\alpha_1,\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{q_2}^{-\alpha_2,\infty}(\mathbb{R}^3).$$

*Demonstração.* Antes de iniciar a demonstração, observemos o seguinte, basta mostrar que para todo $j \in \mathbb{Z}$, $3 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \infty$ e toda distribuição temperada $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$, temos a sequência de desigualdades

$$2^{-j\alpha_2}\left\|\Delta_j v\right\|_{q_2} \leqslant c_1 2^{-j\alpha_1}\left\|\Delta_j v\right\|_{q_1} \leqslant c_2\left\|\Delta_j v\right\|_3 \leqslant c_3\left\|v\right\|_3, \tag{1.18}$$

onde $c_1$, $c_2$ e $c_3$ são constantes positivas.

De fato, suponha que $v \in L^3(\mathbb{R}^3)$, então

$$\|v\|_3 < \infty,$$

e, pela sequência de desigualdades, temos que

$$2^{-j\alpha_1} \|\Delta_j v\|_{q_1} \leqslant c \|v\|_3 < \infty, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Assim

$$\|v\|_{\dot{B}_{q_1}^{-\alpha_1,\infty}} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-j\alpha_1} \|\Delta_j v\|_{q_1} \leqslant c \|v\|_3 < \infty,$$

logo $v \in \dot{B}_{q_1}^{-\alpha_1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, para todo $v \in L^3(\mathbb{R}^3)$, e chegamos a inclusão contínua

$$L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{q_1}^{-\alpha_1,\infty}(\mathbb{R}^3).$$

Agora, suponha que $v \in \dot{B}_{q_1}^{-\alpha_1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, então

$$\|v\|_{\dot{B}_{q_1}^{-\alpha_1,\infty}} < \infty,$$

e, pela sequência de desigualdades, obtemos que

$$2^{-j\alpha_2} \|\Delta_j v\|_{q_2} \leqslant c 2^{-j\alpha_1} \|\Delta_j v\|_{q_1}, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Tomando o supremo em $j \in \mathbb{Z}$, em ambos os lados da última desigualdade, concluímos que

$$\|v\|_{\dot{B}_{q_2}^{-\alpha_2,\infty}} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-j\alpha_2} \|\Delta_j v\|_{q_2} \leqslant c \left( \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-j\alpha_1} \|\Delta_j v\|_{q_1} \right) < \infty.$$

Assim, temos que $v \in \dot{B}_{q_1}^{-\alpha_1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, para todo $v \in \dot{B}_{q_2}^{-\alpha_2,\infty}(\mathbb{R}^3)$, e portanto

$$\dot{B}_{q_1}^{-\alpha_1,\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{q_2}^{-\alpha_2,\infty}(\mathbb{R}^3).$$

Segue que

$$L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{q_1}^{-\alpha_1,\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{q_2}^{-\alpha_2,\infty}(\mathbb{R}^3).$$

Agora, vamos dedicar esta última parte da demonstração a provar o conjunto de estimativas em (1.18). Primeiramente, mostremos que

$$2^{-j\alpha_2} \|\Delta_j v\|_{q_2} \leqslant c 2^{-j\alpha_1} \|\Delta_j v\|_{q_1}.$$

Pela desigualdade de Bernstein, a Proposição 1.4.4 em $\mathbb{R}^3$ com $3 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \infty$ e $1/r = 1 - (1/q_1 - 1/q_2)$, podemos estimar

$$\|\Delta_j v\|_{q_2} \leqslant \left\| \mathscr{F}^{-1} \tilde{\psi} \right\|_r \|\Delta_j v\|_{q_1} 2^{j\left(\frac{3}{q_1} - \frac{3}{q_2}\right)}.$$

Assim, tomando $c = \left\|\mathscr{F}^{-1}\tilde{\psi}\right\|_r$ e usando o fato de $\alpha_1 = 1 - 3/q_1$ e $\alpha_2 = 1 - 3/q_2$, temos que

$$2^{\left(\frac{3j}{q_1} - \frac{3j}{q_2}\right)} = 2^{\left(-j + \frac{3j}{q_1} + j - \frac{3j}{q_2}\right)} = 2^{\left(-j+\frac{3j}{q_1}\right)} 2^{\left(j - \frac{3j}{q_2}\right)} = 2^{-j\alpha_1} 2^{j\alpha_2},$$

e então

$$\begin{aligned} \|\Delta_j v\|_{q_2} &\leqslant \left\|\mathscr{F}^{-1}\tilde{\psi}\right\|_r \|\Delta_j v\|_{q_1} 2^{j\left(\frac{3}{q_1} - \frac{3}{q_2}\right)} \\ &= c\,\|\Delta_j v\|_{q_1} 2^{-j\alpha_1} 2^{j\alpha_2}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a desigualdade

$$2^{-j\alpha_2} \|\Delta_j v\|_{q_2} \leqslant c 2^{-j\alpha_1} \|\Delta_j v\|_{q_1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Agora provaremos que

$$2^{-j\alpha_1} \|\Delta_j v\|_{q_1} \leqslant \|\Delta_j v\|_3 .$$

Novamente pela desigualdade de Bernstein(veja Proposição 1.4.4) em $\mathbb{R}^3$ com $3 \leqslant q_1 \leqslant \infty$ e $1/r = 1 - (1/3 - 1/q_1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Delta_j v\|_{q_1} &\leqslant \left\|\mathscr{F}^{-1}\tilde{\psi}\right\|_r \|\Delta_j v\|_3 2^{j\left(\frac{3}{3} - \frac{3}{q_1}\right)} \\ &= \left\|\mathscr{F}^{-1}\tilde{\psi}\right\|_r \|\Delta_j v\|_3 2^{j\left(1 - \frac{3}{q_1}\right)} \\ &= \left\|\mathscr{F}^{-1}\tilde{\psi}\right\|_r \|\Delta_j v\|_3 2^{j\alpha_1}. \end{aligned}$$

Tomando $c = \left\|\mathscr{F}^{-1}\tilde{\psi}\right\|_r$, obtemos a desigualdade

$$2^{-j\alpha_1} \|\Delta_j v\|_{q_1} \leqslant c\,\|\Delta_j v\|_3, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Finalmente provaremos que

$$\|\Delta_j v\|_3 \leqslant c\,\|v\|_3 .$$

Primeiramente, usando a desigualdade de Young(veja Proposição 1.1.16), para $p = 3$, $q = 3$, temos que $r = 1$ satisfaz

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{3},$$

segue que

$$\begin{aligned} \|\Delta_j v\|_3 &= \left\|\mathscr{F}^{-1}[\psi_j] * v\right\|_3 \\ &\leqslant \left\|\mathscr{F}^{-1}[\psi_j]\right\|_r \|v\|_3 , \end{aligned}$$

e então, tomando $c = \left\|\mathscr{F}^{-1}[\psi_j]\right\|_1$, chegamos na estimativa

$$\|\Delta_j v\|_3 \leqslant c\,\|v\|_3, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Assim, as estimativas acima nos levam a cadeia de desigualdades

$$2^{-j\alpha_2} \|\Delta_j v\|_{q_2} \leqslant c_1 2^{-j\alpha_1} \|\Delta_j v\|_{q_1} \leqslant c_2 \|\Delta_j v\|_3 \leqslant c_3 \|v\|_3 ,$$

e, portanto, podemos concluir a demonstração. $\square$

# 2 Boa-colocação em duas classes de espaços críticos

Neste capítulo, vamos demonstrar os resultados principais desta dissertação. Primeiramente, veremos um resultado de boa-colocação global para as equações (1.3) no espaço de Lebesgue $L^3(\mathbb{R}^3)$, e depois estendemos este resultado para os espaços de Besov homogêneos $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, os quais contêm o espaço de Lebesgue $L^3(\mathbb{R}^3)$, conforme vimos na Seção 1.5 do capítulo anterior. O conteúdo deste capítulo é baseado no trabalho de M. Cannone [6] com a observação que o resultado em $L^3(\mathbb{R}^3)$ é devido a T. Kato [16].

## 2.1 Resultado no espaço de Lebesgue $L^3(\mathbb{R}^3)$

Nesta seção, vamos considerar as equações (1.3) no espaço $L^3(\mathbb{R}^3)$. Lembre-se que o sistema (1.3) pode ser convertido em (1.9) pelas propriedades do operador $\mathbb{P}$, e pelo principio de Duhamel; para a conveniência do leitor, a seguir, relembramos a formulação branda dada em (1.9)

$$u(t) = S(t)u_0 - \int S(t-s)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)(s)\, ds. \tag{2.1}$$

Para iniciar o estudo, precisamos introduzir espaços de funções adequados, conhecidos como espaços tipo Kato.

**Definição 2.1.1.** *Para $3 < q \leqslant \infty$, seja $G$ o espaço de Banach das funções $v(t,x)$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} u(t,x) &\in C([0,\infty); L^3(\mathbb{R}^3)),\\ t^{\alpha/2}u(t,x) &\in C([0,\infty); L^q(\mathbb{R}^3)),\\ \lim_{t\to 0} t^{\alpha/2}\left\|u(t)\right\|_q &= 0, \end{aligned}$$

*e com a norma*

$$\|u\|_G = \sup_{t>0}\|u(t)\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t>0} t^{\alpha/2}\left\|u(t)\right\|_q.$$

**Observação 2.1.2.** *Para ver que $G$ é um espaço de Banach, veja T. Kato [16].*

Esta definição tem sentido, pois como vimos no Lema 1.5.7, o espaço de Lebesgue $L^3(\mathbb{R}^3)$ está imerso continuamente em $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$. Agora, estamos em condições de enunciar o primeiro resultado de boa-colocação do capítulo.

**Teorema 2.1.3.** *Seja $q$ fixado tal que $3 < q \leqslant 6$ e $\alpha = \alpha(q) = 1 - 3/q$. Existe uma constante universal $\delta > 0$ tal que se $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \delta$, e $\nabla \cdot u_0 = 0$ (no sentido de distribuições), então as equações de Navier-Stokes (1.3) tem uma solução branda $u$ em $C([0,\infty); L^3(\mathbb{R}^3))$. Além disso, esta solução é a única tal que*

$$\begin{aligned} u(t,x) &\in C\left([0,\infty); L^3(\mathbb{R}^3)\right), \\ t^{\alpha/2} u(t,x) &\in C\left([0,\infty); L^q(\mathbb{R}^3)\right), \\ \lim_{t\to 0} t^{\alpha/2} &\|u(t)\|_q = 0. \end{aligned}$$

Na próxima observação veremos como um dado inicial $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ pode satisfazer $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \delta$, como nas hipóteses do teorema

**Observação 2.1.4.** *Consideramos o dado inicial $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, além disso, sabemos que $L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$ (veja o Lema 1.5.7). Entretanto, $u_0$ também deve satisfazer a condição $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \delta$, para um $\delta$ suficientemente pequeno. Exemplos de dados satisfazendo essa condição podem ser construídos via a família de funções*

$$w_k = e^{ix\cdot k}, \text{ onde } k \in \mathbb{R}^3.$$

*A seguir, vamos mostrar que o produto $w_k u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$; com efeito, $|w_k| = 1$, logo, para cada $k \in \mathbb{R}^3$, temos que*

$$\|w_k u_0\|_3 = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |w_k|^3 |u_0|^3 dx\right)^{1/3} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^3 dx\right)^{1/3} = \|u_0\|_3 .$$

*Assim, de maneira trivial, segue que $\lim_{|k|\to\infty} \|w_k u_0\|_3 = \|u_0\|_3$. Ainda mais, para $|k|$ muito grande, temos que $w_k u_0 \to 0$ na norma do espaço $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, isto é,*

$$\begin{aligned} \|w_k u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} &= \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha} \|S_j(w_k u_0)\|_q \\ &= \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha} \left\|\mathscr{F}^{-1}[\varphi_j \mathscr{F}[w_k u_0]]\right\|_q \\ &= \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha} \left\|\mathscr{F}^{-1}\left[\varphi(2^{-j}\xi)\delta\left(\xi - \frac{k}{2\pi}\right) * \mathscr{F}[u_0]\right]\right\|_q , \end{aligned}$$

*onde $\varphi_j$ tem suporte compacto. Além disso, se $|k|$ é grande então $\delta\left(\xi - \dfrac{k}{2\pi}\right)$ tende à função nula. Assim, obtemos que*

$$\lim_{|k|\to\infty} \|w_k u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} = 0;$$

*então, podemos verificar a condição $\|w_k u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \delta$ escolhendo um $|k|$ grande o suficiente e ainda manter o dado inicial $w_k u_0$ em $L^3(\mathbb{R}^3)$.*

Esta propriedade pode ser apresentada de uma forma mais geral, tal como no seguinte lema:

**Lema 2.1.5.** *Seja $u$ uma função arbitrária em $L^3(\mathbb{R}^3)$ e seja $w_k(x)$, onde $k \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções tal que $\|w_k\|_\infty \leqslant C$ e $w_k \rightharpoonup 0$ (quando $k \to \infty$) no sentido de distribuções. Então, o produto $w_k u \to 0$ na topologia forte de $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, onde $q > 3$ e $\alpha = 1 - 3/q$.*

*Demonstração.* Sabemos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ é denso em $L^3(\mathbb{R}^3)$ (veja Brezis [4, p. 98]), o que nos permite usar um argumento de densidade.

Seja $\varepsilon > 0$ e $u \in L^3(\mathbb{R}^3)$, então podemos encontrar uma função $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\|u - g\|_3 \leqslant \varepsilon.$$

Considere $h = u - g$, então $h \in L^3(\mathbb{R}^3)$, assim temos que:

$$u = h + g,$$

onde $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $h \in L^3(\mathbb{R}^3)$ e

$$\|h\|_3 \leqslant \varepsilon.$$

Agora, lembrando que $L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$ pelo Lema 1.5.7, temos que

$$\begin{aligned}
\|w_k h\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} &\leqslant C_0 \|w_k h\|_3 \\
&= C_0 \left( \int_{\mathbb{R}^3} |w_k|^3 |h|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\leqslant C_0 \left( \int_{\mathbb{R}^3} |h|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= C_0 \|h\|_3 \\
&\leqslant C_0 \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $k \geqslant 0$, pois $\|w_k\|_\infty \leqslant C$. Por outro lado, pela desigualdade de Young (veja a Proposição 1.1.16) com $1 + 1/q = 1/r + 1/p$, segue que

$$\begin{aligned}
\|S_j(w_k g)\|_q &= \left\| \mathscr{F}^{-1}\left[\varphi(2^{-j}\xi)\right] * (w_k g) \right\|_q \\
&\leqslant \left\| 2^{3j} \mathscr{F}^{-1}\left[\varphi\right](2^j x) \right\|_r \|w_k g\|_p ,
\end{aligned}$$

onde $j \in \mathbb{Z}$, e então podemos estimar

$$\begin{aligned}
2^{-\alpha j} \|S_j(w_k g)\|_q &\leqslant 2^{-\alpha j} \left\| 2^{3j} \mathscr{F}^{-1}\left[\varphi\right](2^j x) \right\|_r \|w_k g\|_p \\
&\leqslant 2^{-\alpha j} 2^{3j} (2^j)^{-3/r} \left\| \mathscr{F}^{-1}\left[\varphi\right] \right\|_r \|w_k\|_\infty \|g\|_p \\
&= 2^{-j(1-\frac{3}{q})} 2^{(3j - \frac{3j}{r})} \left\| \mathscr{F}^{-1}\left[\varphi\right] \right\|_r \|w_k\|_\infty \|g\|_p .
\end{aligned}$$

Fazendo $C_1 = \left\| \mathscr{F}^{-1}[\varphi] \right\|_r$ e lembrando que $\|w_k\|_\infty \leqslant C$, obtemos que

$$\begin{aligned} 2^{-\alpha j} \left\| S_j(w_k g) \right\|_q &\leqslant C_1 C 2^{-j(1-\frac{3}{q})} 2^{(3j-\frac{3j}{r})} \|g\|_p \\ &= C_1 2^{-j(1-\frac{3}{q}-3+\frac{3}{r})} \|g\|_p \\ &= C_1 2^{-j(-2-\frac{3}{q}+\frac{3}{r})} \|g\|_p ; \end{aligned}$$

como $1/q + 1 = 1/r + 1/p$, note que

$$-\frac{3}{q} + \frac{3}{r} = 3 - \frac{3}{p},$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned} 2^{-\alpha j} \left\| S_j(w_k g) \right\|_q &\leqslant C_1 2^{-j(-2-\frac{3}{q}+\frac{3}{r})} \|g\|_p \\ &= C_1 2^{-j(-2+3-\frac{3}{p})} \|g\|_p \\ &= C_1 2^{-j(1-\frac{3}{p})} \|g\|_p . \end{aligned}$$

Na sequência, vamos mostrar que

$$2^{-\alpha j} \left\| S_j(w_k g) \right\|_q \leqslant C_1 \varepsilon.$$

Primeiro, observe que $2^{-j(1-3/p)} \to 0$, se $j(1-3/p) \to \infty$. Agora procederemos conforme os casos abaixo.

Para $p = q > 3$, temos que $(1 - 3/p) > 0$, e então

$$2^{-j\left(1-\frac{3}{p}\right)} \to 0, \quad \text{quando} \quad j \to \infty;$$

assim, como $\dfrac{\varepsilon}{\|g\|_p} > 0$, existe $j_1 > 0$ suficientemente grande tal que, para todo $j \geqslant j_1 > 0$, temos que

$$2^{-j\left(1-\frac{3}{p}\right)} \leqslant \frac{\varepsilon}{\|g\|_p}.$$

Logo, para $k \geqslant 0$ e $j, p, q$ como no presente caso, chegamos a estimativa

$$2^{-\alpha j} \left\| S_j(w_k g) \right\|_q \leqslant C_1 2^{-j\left(1-\frac{3}{p}\right)} \|g\|_p \leqslant C_1 \varepsilon.$$

Agora tomemos $1 \leqslant p < 3$, logo temos que $(1 - 3/p) < 0$, e então

$$2^{-j\left(1-\frac{3}{p}\right)} \to 0, \quad \text{quando} \quad j \to -\infty.$$

Como $\dfrac{\varepsilon}{\|g\|_p} > 0$, existe $j_0 < 0$ suficientemente grande em módulo, tal que para todo $j \leqslant j_0 < 0$, obtemos que

$$2^{-j\left(1-\frac{3}{p}\right)} \leqslant \frac{\varepsilon}{\|g\|_p}.$$

Assim, para todo $k \geqslant 0$ e todo $j \leqslant j_0 < 0$, temos que

$$2^{-\alpha j} \left\| S_j(w_k g) \right\|_q \leqslant C_1 2^{-j\left(1-\frac{3}{p}\right)} \left\| g \right\|_p \leqslant C_1 \varepsilon.$$

Resta o caso $j_0 < j < j_1$. Para $g \in C_0^\infty$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} w_k g = \lim_{k\to\infty} \langle w_k, g \rangle = \langle 0, g \rangle = 0, \tag{2.2}$$

pois $w_k$ é definido em $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, e $w_k \rightharpoonup 0$, quando $k \to \infty$, no sentido das distribuições. Agora vejamos que

$$S_j(w_k g) = \mathscr{F}^{-1}\left[\varphi_j \cdot \mathscr{F}[w_k g]\right] = \int_{\mathbb{R}^3} e^{2\pi i x\cdot\xi} \left( \varphi_j(\xi) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x\cdot\xi} w_k(x) g(x) dx \right) d\xi.$$

Seja

$$f_k(\xi) = e^{2\pi i x\cdot\xi} \left( \varphi_j(\xi) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x\cdot\xi} w_k(x) g(x) dx \right).$$

Por (2.2), podemos ver que $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} w_k(x) \left(e^{-2\pi i x\cdot\xi} g(x)\right) dx = 0$, e então $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(\xi) = 0$. Além disso, temos que

$$|f_k| \leqslant |e^{2\pi i x\cdot\xi}||\varphi_j(\xi)| \int_{\mathbb{R}^3} |e^{-2\pi i x\cdot\xi}||w_k(x)||g(x)| dx \leqslant C|\varphi_j(\xi)| \left\| g \right\|_1, \tag{2.3}$$

onde $|\varphi_j(\xi)|$ é integrável pois $\varphi_j(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema 1.1.10), segue que

$$\lim_{k\to\infty} S_j(w_k g) = 0. \tag{2.4}$$

Procedendo similarmente a (2.3), podemos estimar

$$|S_j(w_k(x)g(x))|^q = |\mathscr{F}^{-1}[\varphi_j] * (w_k g)|^q \leqslant C \left( |\mathscr{F}^{-1}[\varphi_j]| * |g| \right)^q,$$

onde $\left(|\mathscr{F}^{-1}[\varphi_j]| * |g|\right)^q$ é integrável, pois $\mathscr{F}^{-1}[\varphi_j] \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ e $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Assim, novamente pela Convergência Dominada, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |S_j(w_k g)|^q = 0.$$

Logo, existe uma constante $C_1$ e $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $k \geqslant k_0$ e $j_0 < j < j_1$, temos a estimativa

$$2^{-\alpha j} \left\| S_j(w_k g) \right\|_q \leqslant C_1 \varepsilon.$$

Assim, coletando todas as estimativas acima, existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geqslant k_0$,

$$\begin{aligned} \left\| w_k g \right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} &= \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\alpha j} \left\| S_j(w_k g) \right\|_q \\ &\leqslant C_1 \varepsilon. \end{aligned}$$

Além disso, no início da prova mostramos que

$$\|w_k h\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \leqslant C_0\varepsilon,$$

e então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geqslant k_0$,

$$\begin{aligned} \|w_k u\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} &= \|w_k(h+g)\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \\ &\leqslant \|w_k h\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \|w_k g\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \\ &\leqslant C_0\varepsilon + C_1\varepsilon \\ &= (C_0 + C_1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k u\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} = 0,$$

o que conclui a demonstração. □

Os desenvolvimentos acima motivam-nos a considerar uma função $w_k v_0$ como o valor inicial do problema, entretanto há uma dificuldade em relação a $w_k v_0$ ser livre de divergência. De fato, isso é verdadeiro ao menos em um sentido assintótico, isto é, $\nabla \cdot (w_k u_0)$ aproxima-se de 0 quando $|k| \to \infty$.

No lema a seguir, trataremos a questão acima, mas em um contexto mais geral.

**Lema 2.1.6.** *Seja $m(\xi) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}\right)$ uma função homogênea de grau 0 e seja $M$ o multiplicador de Fourier associado ao símbolo $m(\xi)$. Se consideramos $|\xi_0| = 1$, $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$ e $1 < p < \infty$, então*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{|\xi_0|=1} \|M(e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u(x)) - e^{i\lambda\xi_0\cdot x}m(\xi_0)u(x)\|_p = 0.$$

*Demonstração.* Mostraremos que o símbolo do operador $e^{-i\lambda\xi_0\cdot x}M(e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u(x)) - m(\xi_0)u(x)$ é dado por $m(\xi + \lambda\xi_0) - m(\lambda\xi_0)$.

Usaremos um argumento de densidade. É suficiente nos limitarmos às funções $u \in \mathcal{V} \subset L^p(\mathbb{R}^3)$, onde $\mathcal{V}$ é um subespaço denso de $L^p(\mathbb{R}^3)$, definido como as funções $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ tal que a transformada de Fourier $\hat{u}$ tem suporte compacto. Seja

$$u_\lambda = e^{-i\lambda\xi_0\cdot x}M(e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u) - m(\lambda\xi_0)u.$$

Mostraremos que a transformada de Fourier de $u_\lambda$ é dada por

$$\hat{u_\lambda}(\xi) = (m(\xi + \lambda\xi_0) - m(\lambda\xi_0))\hat{u}(\xi).$$

Primeiramente, acharemos a transformada de Fourier de

$$e^{-i\lambda\xi_0\cdot x}M(e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u),$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[e^{-i\lambda\xi_0\cdot x}M(e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u)\right](\xi)\\
&=\int_{\mathbb{R}^3}\left(e^{-i\lambda\xi_0\cdot x}M(e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u(x))\right)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^3}M\left(e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u(x)\right)e^{-2\pi ix\cdot\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)}dx\\
&=m\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)\mathscr{F}\left[e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u\right]\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)\\
&=m\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)\int_{\mathbb{R}^3}e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u(x)e^{-2\pi i\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)\cdot x}dx\\
&=m\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)\int_{\mathbb{R}^3}u(x)e^{2\pi ix\cdot\left(\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)}e^{2\pi ix\cdot\left(-\xi-\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)}dx\\
&=m\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)\int_{\mathbb{R}^3}u(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx\\
&=m\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)\hat{u}(\xi).
\end{aligned}$$

Agora acharemos a transformada de Fourier de

$$m(\lambda\xi_0)u(x).$$

Observe que $m(\xi)$ está sendo avaliado em $\xi=\lambda\xi_0$, e então não depende de $x$. Logo,

$$\mathscr{F}\left[m(\lambda\xi_0)u\right](\xi)=m(\lambda\xi_0)\mathscr{F}\left[u\right](\xi)=m(\lambda\xi_0)\hat{u}(\xi).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[e^{-i\lambda\xi_0\cdot x}M(e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u)-m(\lambda\xi_0)u\right]\\
&=\mathscr{F}\left[e^{-i\lambda\xi_0\cdot x}M(e^{i\lambda\xi_0\cdot x}u)\right](\xi)-\mathscr{F}\left[m(\lambda\xi_0)u\right](\xi)\\
&=m\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)\hat{u}(\xi)-m(\lambda\xi_0)\hat{u}(\xi)\\
&=\left(m(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi})-m(\lambda\xi_0)\right)\hat{u}(\xi),
\end{aligned}$$

e então

$$\hat{u_\lambda}(\xi)=\left(m\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)-m(\lambda\xi_0)\right)\hat{u}(\xi).$$

A função $\hat{u}$ tem suporte compacto e, sem perda de generalidade, podemos assumir que o suporte é dado por $\{\xi\in\mathbb{R}^3;\ |\xi|\leqslant R\}$. Considere agora

$$m\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)-m(\lambda\xi_0)=r_\lambda(\xi),$$

e usando que $\hat{u}(\xi)=0$ quando $|\xi|>R$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\hat{u_\lambda}(\xi)&=\left(m\left(\xi+\frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right)-m(\lambda\xi_0)\right)\hat{u}(\xi)\\
&=0.
\end{aligned}$$

Assim, podemos considerar apenas $|\xi| \leqslant R$. Note que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\xi + \frac{\lambda\xi_0}{2\pi}}{\left|\xi + \frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right|} = \frac{\xi_0}{|\xi_0|}.$$

Agora $m$ é uma função homogênea de grau 0, isto é,

$$m(\lambda\xi) = m(\xi), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Lembrando que $|\xi_0| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} m\left(\xi + \frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right) &= \lim_{\lambda\to\infty} m\left(\frac{\xi + \frac{\lambda\xi_0}{2\pi}}{\left|\xi + \frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right|}\right) \\
&= m\left(\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\xi + \frac{\lambda\xi_0}{2\pi}}{\left|\xi + \frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right|}\right) \\
&= m\left(\frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right) \\
&= m\left(\xi_0\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, para $r_\lambda$, podemos calcular o limite e obter que

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} r_\lambda(\xi) &= \lim_{\lambda\to\infty}\left(m\left(\xi + \frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right) - m(\lambda\xi_0)\right) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} m\left(\xi + \frac{\lambda\xi_0}{2\pi}\right) - \lim_{\lambda\to\infty} m(\lambda\xi_0) \\
&= m\left(\xi_0\right) - \lim_{\lambda\to\infty} m(\xi_0) \\
&= m\left(\xi_0\right) - m\left(\xi_0\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim $r_\lambda \to 0$, junto com todas as derivativas na norma de $L^\infty$, e então temos que $u_\lambda \to 0$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ quando $\lambda \to \infty$. Como consequência, segue que $\|u_\lambda\|_p \to 0$ quando $\lambda \to \infty$, como queríamos demonstrar. $\square$

**Observação 2.1.7.** *Aplicando este lema ao caso em que* $p = 3$, $M = \mathbb{P}$ *e*

$$m(\xi) = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\xi_1\xi_1}{|\xi|^2} & -\dfrac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2} & -\dfrac{\xi_1\xi_3}{|\xi|^2} \\ -\dfrac{\xi_2\xi_1}{|\xi|^2} & 1 - \dfrac{\xi_2\xi_2}{|\xi|^2} & -\dfrac{\xi_2\xi_3}{|\xi|^2} \\ -\dfrac{\xi_3\xi_1}{|\xi|^2} & -\dfrac{\xi_3\xi_2}{|\xi|^2} & 1 - \dfrac{\xi_3\xi_3}{|\xi|^2} \end{bmatrix},$$

*homogênea de grau* 0*, temos que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{|\xi_0|=1} \|\mathbb{P}(w_{\lambda\xi_0}u_0) - w_{\lambda\xi_0}m(\xi_0)u_0\|_3 = 0.$$

*Logo, consideremos* $k = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$*, onde* $|e_1|, |e_2|, |e_3| = 1$*, e* $u_0 = (u_0^1, u_0^2, u_0^3) \in L^3(\mathbb{R}^3)$ *então*

$$\lim_{k_1\to\infty} \|\mathbb{P}(e^{k_1e_1}(e^{k_2e_2+k_3e_3}u_0)) - e^{k_1e_1}e^{k_2e_2+k_3e_3}(u_0^2e_2 + u_0^3e_3)\|_3 = 0,$$
$$\lim_{k_2\to\infty} \|\mathbb{P}(e^{k_2e_2}(e^{k_1e_1+k_3e_3}u_0)) - e^{k_2e_2}e^{k_1e_1+k_3e_3}(u_0^1e_1 + u_0^3e_3)\|_3 = 0,$$
$$\lim_{k_3\to\infty} \|\mathbb{P}(e^{k_3e_3}(e^{k_1e_1+k_2e_2}u_0)) - e^{k_3e_3}e^{k_1e_1+k_2e_2}(u_0^1e_1 + u_0^2e_2)\|_3 = 0.$$

*Agora* $u_0 = u_0^1e_1 + u_0^2e_2 + u_0^3e_3$*, e* $w_ku_0 = e^{k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3}u_0$*, logo*

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{P}(e^{k_1e_1}(e^{k_2e_2+k_3e_3}u_0) + e^{k_2e_2}(e^{k_1e_1+k_3e_3}u_0) + e^{k_3e_3}(e^{k_1e_1+k_2e_2}u_0)) - 2w_ku_0\|_3 \\ &\leqslant \|\mathbb{P}(e^{k_1e_1}(e^{k_2e_2+k_3e_3}u_0)) - e^{k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3}(u_0^2e_2 + u_0^3e_3)\|_3 \\ &\quad + \|\mathbb{P}(e^{k_2e_2}(e^{k_1e_1+k_3e_3}u_0)) - e^{k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3}(u_0^1e_1 + u_0^3e_3)\|_3 \\ &\quad + \|\mathbb{P}(e^{k_3e_3}(e^{k_1e_1+k_2e_2}u_0)) - e^{k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3}(u_0^1e_1 + u_0^2e_2)\|_3. \end{aligned}$$

*Aplicando o limite quando* $|k| \to \infty$ *temos que* $2w_ku_0$ *aproxima-se de um vetor livre de divergência* $\mathbb{P}(w_ku_0)$*; em outras palavras, a divergencia* $\nabla \cdot (w_ku_0)$ *aproxima-se a* $0$*.*

Seguindo na direção da prova do teorema acima, começamos com um lema que nos dá informações sobre o comportamento da parte linear de (2.1).

**Lema 2.1.8.** *Seja* $3 < q \leqslant \infty$*. Se* $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$*, então* $S(t)u_0 \in G$*. Além disso, temos a estimativa*

$$\|S(t)u_0\|_G \leqslant C\,\|u_0\|_3\,, \tag{2.5}$$

*onde* $C > 0$ *é uma constante universal.*

*Demonstração.* Primeiramente, usando $3 < q \leqslant \infty$ e a Proposição 1.1.16 (desigualdade de Young), podemos estimar

$$\|S(t)u_0\|_q \leqslant \|g(t,x)\|_r\,\|u_0\|_3\,, \tag{2.6}$$

com

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{3}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \|g(t,x)\|_r &= \left\| \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{3/2} \exp\left(-\left(\frac{|x|}{2t^{1/2}}\right)^2\right)\right\|_r \\ &= \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2t^{1/2}}\right)^{-3/r} \left\|\exp\left(-(|x|)^2\right)\right\|_r \\ &= c\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= ct^{-\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

onde $c = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3/r}\left\|\exp\left(-(|x|)^2\right)\right\|_r$ e $\alpha = \left(1 - \frac{3}{q}\right)$. Desta igualdade, junto com (2.6), temos estimativa

$$t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_0\right\|_q \leqslant c\left\|u_0\right\|_3, \text{ para todo } t \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Se $q = 3$ temos que $\alpha = 1 - 3/q = 0$, $r = 1$ e

$$\left\|g(t,x)\right\|_1 = c.$$

A partir de (2.7) e o Lema 1.5.7 podemos estimar

$$\begin{aligned}\left\|S(t)u_0\right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_0\right\|_q &\leqslant C\left\|S(t)u_0\right\|_3 + t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_0\right\|_q \\ &\leqslant C\left\|g(t,x)\right\|_1\left\|u_0\right\|_3 + c\left\|u_0\right\|_3 \\ &\leqslant C\left\|u_0\right\|_3 + c\left\|u_0\right\|_3 \\ &\leqslant C\left\|u_0\right\|_3.\end{aligned}$$

Segue que

$$\left\|S(t)u_0\right\|_G = \sup_{t>0}\left\|S(t)u_0\right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t>0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_0\right\|_q \leqslant C\left\|u_0\right\|_3.$$

Note que, até aqui, mostramos que $S(t)u_0$ pertence a $L^\infty\left((0,\infty);L^3(\mathbb{R}^3)\right)$ e $t^{\alpha/2}S(t)u_0$ pertence a $L^\infty\left((0,\infty);L^q(\mathbb{R}^3)\right)$. Precisamos agora mostrar as correspondentes continuidades em relação ao tempo.

Primeiro vamos mostrar que $S(t)u_0 \in C([0,\infty);L^3(\mathbb{R}^3))$. De fato, usando o Teorema 1.3.3, para $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, podemos concluir que

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|S(t)u_0 - u_0\right\|_3 = 0,$$

e então $S(t)u_0$ é contínuo em $t = 0^+$. Em vista da Observação 1.3.4, isso também implica que

$$\lim_{t\to t_0}\left\|S(t)u_0 - S(t_0)u_0\right\|_3 = 0, \text{ para cada } t_0 > 0.$$

Segue que $S(t)u_0$ é contínuo para todo $t \in [0,\infty)$ na norma de $L^3(\mathbb{R}^3)$; em outras palavras, obtemos que

$$S(t)u_0 \in C([0,\infty);L^3(\mathbb{R}^3)).$$

No próximo passo, vamos mostrar que $t^{\alpha/2}S(t)u_0 \in C([0,\infty);L^q(\mathbb{R}^3))$. Seja $\varepsilon > 0$, primeiramente, pelo Teorema 1.1.13, temos que $L^3(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ é denso em $L^3(\mathbb{R}^3)$. Considere $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, então existe $v_0 \in L^3(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\left\|u_0 - v_0\right\|_3 < \frac{\varepsilon}{3c}. \tag{2.8}$$

Denotando $G_t(u_0) = t^{\alpha/2}S(t)u_0$, e então usando (2.7), temos que

$$\|G_t(u_0)\|_q \leqslant c\,\|u_0\|_3\,. \tag{2.9}$$

Agora, para cada $v_0 \in L^3(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$, usando $v_0 \in L^q(\mathbb{R}^3)$ e a Observação 1.3.4, temos que

$$\lim_{t\to t_0} \|G_t(v_0) - G_{t_0}(v_0)\|_q = 0. \tag{2.10}$$

Assim, existe $\delta > 0$ tal que, se $|t - t_0| < \delta$, então

$$\|G_t(v_0) - G_{t_0}(v_0)\|_q < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.11}$$

Vamos demonstrar que todo $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ cumpre (2.10). Usando (2.8), (2.9) e (2.11), temos que, se $|t - t_0| < \delta$, então

$$\begin{aligned}
\left\|t^{\alpha/2}S(t)u_0 - t_0^{\alpha/2}S(t_0)u_0\right\|_q &= \|G_t(u_0) - G_t(v_0) + G_t(v_0) - G_{t_0}(v_0) + G_{t_0}(v_0) - G_{t_0}(u_0)\|_q \\
&= \|G_t(v_0) - G_{t_0}(v_0) + G_t(u_0 - v_0) - G_{t_0}(u_0 - v_0)\|_q \\
&\leqslant \|G_t(v_0) - G_{t_0}(v_0)\|_q + \|G_t(u_0 - v_0)\|_q + \|G_{t_0}(u_0 - v_0)\|_q \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + c\,\|u_0 - v_0\|_3 + c\,\|u_0 - v_0\|_3 \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + c\frac{\varepsilon}{3c} + c\frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que se $|t - t_0| < \delta$, então

$$\left\|t^{\alpha/2}S(t)u_0 - t_0^{\alpha/2}S(t_0)u_0\right\|_q < \varepsilon.$$

Logo

$$\lim_{t\to t_0} \left\|t^{\alpha/2}S(t)u_0 - t_0^{\alpha/2}S(t_0)u_0\right\|_q = 0, \text{ para todo } t_0 > 0.$$

Então, temos que

$$t^{\alpha/2}S(t)u_0 \in C((0;\infty), L^q(\mathbb{R}^3)), \tag{2.12}$$

para cada $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Observe que para obter $t^{\alpha/2}S(t)u_0 \in C([0,\infty), L^q(\mathbb{R}^3))$, ainda precisamos examinar a continuidade em $t = 0^+$, abordaremos esse caso abaixo.

Em seguida, provaremos que

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\alpha/2}\,\|S(t)u_0\|_q = 0.$$

Vimos no Teorema 1.1.13 que $L^3(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ é denso em $L^3(\mathbb{R}^3)$; assim, existe uma sequência $u_{0,k}$ em $L^3(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_{0,k} - u_0\|_3 = 0. \tag{2.13}$$

Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\|S(t)u_{0,k}\|_q \leqslant \|g(t,x)\|_1\,\|u_{0,k}\|_q = C\,\|u_{0,k}\|_q\,,$$

e então

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_{0,k}\right\|_q &\leqslant \lim_{t\to 0^+} t^{\alpha/2}C\left\|u_{0,k}\right\|_q\\&= 0.\end{aligned}$$

Segue que

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_{0,k}\right\|_q = 0, \tag{2.14}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Agora, usando a desigualdade de Young para $1/q+1 = 1/r+1/3$ e (2.13), temos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_{0,k} - S(t)u_0\right\|_q &= \lim_{k\to\infty} t^{\alpha/2}\left\|S(t)(u_{0,k}-u_0)\right\|_q\\&\leqslant \lim_{k\to\infty} t^{\alpha/2}\left\|g(t,x)\right\|_r\left\|u_{0,k}-u_0\right\|_3\\&= C\lim_{k\to\infty}\left\|u_{0,k}-u_0\right\|_3\\&= 0,\end{aligned}$$

o que nos leva a

$$\lim_{k\to\infty}\left\|t^{\alpha/2}S(t)u_{0,k} - t^{\alpha/2}S(t)u_0\right\|_q = 0. \tag{2.15}$$

Usando (2.15), temos que, para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $k > k_0$, então

$$\left\|t^{\alpha/2}S(t)u_{0,k} - t^{\alpha/2}S(t)u_0\right\|_q < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Desde que $\left\|t^{\alpha/2}S(t)u_0\right\|_q - \left\|t^{\alpha/2}S(t)u_{0,k}\right\|_q \leqslant \left\|t^{\alpha/2}S(t)u_{0,k} - t^{\alpha/2}S(t)u_0\right\|_q$, então

$$\left\|t^{\alpha/2}S(t)u_0\right\|_q < \frac{\varepsilon}{2} + \left\|t^{\alpha/2}S(t)u_{0,k}\right\|_q,$$

onde $k > k_0$. Agora usando (2.14), para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $0 \leqslant t < \delta$, então

$$t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_{0,k}\right\|_q < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, existe $\delta > 0$, tal que, se $0 \leqslant t < \delta$, então

$$\begin{aligned}t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_0\right\|_q &< \frac{\varepsilon}{2} + t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_{0,k}\right\|_q\\&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\\&= \varepsilon,\end{aligned}$$

onde $k > k_0$. Segue que

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_0\right\|_q = 0.$$

Combinando este fato com (2.12), temos que $t^{\alpha/2}S(t)u_0 \in C([0,\infty); L^q(\mathbb{R}^3))$.

Em resumo, coletando todas as passagens do desenvolvimento acima, mostramos as propriedades

$$\begin{aligned} S(t)u_0 &\in C\left([0,\infty); L^3(\mathbb{R}^3)\right), \\ t^{\alpha/2} S(t)u_0 &\in C\left([0,\infty); L^q(\mathbb{R}^3)\right), \\ \lim_{t\to 0} t^{\alpha/2} \|S(t)u_0\|_q &= 0, \end{aligned}$$

as quais nos dizem que $S(t)u_0 \in G$, para todo $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, bem como as correspondentes estimativas obtidas nos mostram (2.5). □

No lema enunciado a seguir, analisamos a continuidade da forma bilinear $B(\cdot,\cdot)$.

**Lema 2.1.9.** *Seja $3 < q \leqslant 6$. O operador bilinear $B(u,v)(t)$ definido por*

$$B(u,v)(t) = -\int_0^t S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes v)(s)ds,$$

*é bicontinuo em $G\times G \to G$.*

*Demonstração.* Primeiramente, usando a desigualdade de Minkowski para Integrais (veja a Proposição 1.1.6), para cada $r \geqslant 3$, temos que

$$\left\| \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes v)ds \right\|_r \leqslant \int_0^t \|S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes v)\|_r \, ds.$$

Se $r = 3$, então podemos usar a imersão de $L^3(\mathbb{R}^3)$ no espaço de Besov $\dot{B}_q^{-\alpha}(\mathbb{R}^3)$ para estimar esta norma do seguinte modo

$$\begin{aligned} \|S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes v)\|_3 &= \|S(t-s)\nabla\cdot\mathbb{P}(u\otimes v)\|_3 \\ &= \|\nabla\cdot S(t-s)\mathbb{P}(u\otimes v)\|_3, \end{aligned}$$

uma vez que eles têm uma transformada de Fourier idêntica. Agora, sejam $p$ tal que $\dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{q}$, notemos que, se $3 < q \leqslant 6$, então $1 \leqslant p < 3/2$; pela desigualdade de de Young (veja a Proposição 1.1.16), podemos estimar

$$\begin{aligned} \|\nabla\cdot S(t-s)\mathbb{P}(u\otimes v)\|_3 &\leqslant \|\nabla\cdot g(t-s,x)\|_p \, \|\mathbb{P}(u\otimes v)\|_{q/2} \\ &\leqslant C(t-s)^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} \|\mathbb{P}(u\otimes v)\|_{q/2} \\ &\leqslant C(t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}} \|u\otimes v\|_{q/2} \\ &\leqslant C(t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}} \|u\|_q \, \|v\|_q, \end{aligned}$$

onde acima também usamos as propriedades vistas no Teorema 1.3.1 e Proposição 1.2.31. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes v)\|_3\,ds &\leqslant C\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}}\|u\|_q\|v\|_q\,ds \\
&= C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{q}}s^{-\alpha}s^{\alpha/2}\|u\|_q s^{\alpha/2}\|v\|_q\,ds \\
&\leqslant C\int_0^1 (t-tz)^{-\frac{3}{q}}(tz)^{-\alpha}tdz(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|u\|_q)(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|v\|_q) \\
&\leqslant C\int_0^1 t^{-\frac{3}{q}}t^{-\alpha}t(1-z)^{-\frac{3}{q}}z^{-\alpha}zdz(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|u\|_q)(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|v\|_q) \\
&\leqslant C\int_0^1 t^{-\frac{3}{q}+1-\alpha}(1-z)^{-\frac{3}{q}}z^{-\alpha}dz(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|u\|_q)(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|v\|_q) \\
&\leqslant C\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}z^{-\alpha}dz(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|u\|_q)(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|v\|_q).
\end{aligned}$$

Se $q>3$ e $\alpha = 1-3/q$ então $\displaystyle\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}z^{-\alpha}dz = C$ é finita; logo

$$\|B(u,v)(t)\|_3 \leqslant C\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|u(t,x)\|_q\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|v(t,x)\|_q,$$

e então

$$\sup_{t\geqslant 0}\|B(u,v)\|_3 \leqslant C(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|u(t,x)\|_q)(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|v(t,x)\|_q).$$

o que mostra uma estimativa para o operador bilinear quando $r=3$.

Para $r=q>3$, procedemos como segue:

$$\begin{aligned}
\|S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes v)\|_q &= \|S(t-s)\nabla\cdot\mathbb{P}(u\otimes v)\|_q \\
&= \|\nabla\cdot S(t-s)\mathbb{P}(u\otimes v)\|_q \\
&\leqslant C(t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}}\|\mathbb{P}(u\otimes v)\|_{q/2} \\
&\leqslant C(t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}}\|u\otimes v\|_{q/2} \\
&\leqslant C(t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}}\|u\|_q\|v\|_q,
\end{aligned}$$

onde acima novamente usamos Teorema 1.3.1 e Proposição 1.2.31, além da Proposição 1.1.16 (desigualdade de Young). Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes v)ds\right\|_q &\leqslant C\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}}s^{-\alpha}s^{\alpha/2}\|u\|_q s^{\alpha/2}\|v\|_q\,ds \\
&\leqslant C\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}}s^{-\alpha}ds\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|u(t,x)\|_q\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|v(t,x)\|_q.
\end{aligned}$$

Agora fazendo $s = tz$, segue que $ds = tdz$, e então

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}} s^{-\alpha} ds &= \int_0^1 (t-tz)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}} (tz)^{-\alpha} tdz \\
&= \int_0^1 t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}} t^{-\alpha} (1-z)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}} z^{-\alpha} tdz \\
&= \int_0^1 t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)+\frac{1}{2}-\alpha} (1-z)^{-\frac{3}{2q}-\frac{1}{2}} z^{-\alpha} dz \\
&= t^{\frac{\alpha}{2}-\alpha} \int_0^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}(-\alpha+1)-\frac{1}{2}} z^{-\alpha} dz \\
&= t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\alpha} dz,
\end{aligned}$$

Note que, para $q > 3$ e $\alpha = 1 - 3/q$, a integral $\int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\alpha} dz = C < \infty$, o que nos leva a estimativa

$$\|B(u,v)(t)\|_q \leqslant t^{-\alpha/2} C \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u(t,x)\|_q \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|v(t,x)\|_q ,$$

e, consequentemente, obtemos que

$$\sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|B(u,v)\|_q \leqslant C \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u(t,x)\|_q \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|v(t,x)\|_q .$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|B(u,v)\|_G &= \sup_{t \geqslant 0} \|B(u,v)\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|B(u,v)\|_q \\
&\leqslant \sup_{t \geqslant 0} \|B(u,v)\|_3 + \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|B(u,v)\|_q \\
&\leqslant C \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u(t,x)\|_q \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|v(t,x)\|_q \\
&\leqslant C \|u(t,x)\|_G \|v(t,x)\|_G \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

pelo Lema 1.5.7 e as estimativas obtidas até esta parte da demonstração, assim mostram-nos que $B : G \times G \to G$ é bicontínua.

Na sequência, provaremos uma condição adicional; mais precisamente

$$\lim_{t \to 0} \|B(u,v)(t)\|_3 = 0, \tag{2.16}$$

relembre que

$$\lim_{t \to 0} t^{\alpha/2} \|u(t)\|_q = \lim_{t \to 0} t^{\alpha/2} \|v(t)\|_q = 0.$$

Primeiramente, nós temos que para $\varepsilon > 0$ dado temos

$$\begin{aligned}
t^{\alpha/2} \|u(t)\|_q &\leqslant \varepsilon, \\
t^{\alpha/2} \|v(t)\|_q &\leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

para $0 \leqslant t < h$, e então, pelos desenvolvimentos e estimativas anteriores, podemos estimar

$$\begin{aligned}\|B(u,v)(t)\|_3 &\leqslant C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{q}}s^{-\alpha}(s^{\alpha/2}\|u(s)\|_q)(s^{\alpha/2}\|v(s)\|_q)ds \\ &\leqslant C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{q}}s^{-\alpha}ds\left(\sup_{0\leqslant t<h} t^{\alpha/2}\|u(t)\|_q\right)\left(\sup_{0\leqslant t<h} t^{\alpha/2}\|v(t)\|_q\right) \\ &= C\left(\sup_{0\leqslant t<h} t^{\alpha/2}\|u(t)\|_q\right)\left(\sup_{0\leqslant t<h} t^{\alpha/2}\|v(t)\|_q\right) \\ &\leqslant C\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Segue que

$$\|B(u,v)(t)\|_3 \leqslant C\varepsilon^2, \text{ quando } 0 \leqslant t < h.$$

Com isso, obtemos a propriedade (2.16).

Por outro lado, procedendo similarmente, também podemos estimar

$$\begin{aligned}\|B(u,v)(t)\|_q &\leqslant C\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{2}}s^{-\alpha}(s^{\alpha/2}\|u(s)\|_q)(s^{\alpha/2}\|v(s)\|_q)ds \\ &\leqslant t^{-\frac{\alpha}{2}}C\int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1}z^{-\alpha}dz\left(\sup_{0\leqslant t<h} t^{\alpha/2}\|u(t)\|_q\right)\left(\sup_{0\leqslant t<h} t^{\alpha/2}\|v(t)\|_q\right) \\ &= t^{-\frac{\alpha}{2}}C\left(\sup_{0\leqslant t<h} t^{\alpha/2}\|u(t)\|_q\right)\left(\sup_{0\leqslant t<h} t^{\alpha/2}\|v(t)\|_q\right) \\ &< t^{-\frac{\alpha}{2}}C\varepsilon^2,\end{aligned}$$

e então

$$t^{\frac{\alpha}{2}}\|B(u,v)(t)\|_q < C\varepsilon^2, \text{ quando } 0 \leqslant t < h,$$

o que nos leva a conclusão que

$$\lim_{t\to 0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|B(u,v)(t)\|_q = 0,$$

como queríamos demonstrar.

□

### 2.1.1 Demonstração do Teorema 2.1.3

Com base nos lemas anteriores, estamos prontos para demonstrar o Teorema 2.1.3. Seja $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, pelo Lema 2.1.8 temos que $S(t)u_0 \in G$, onde

$$\|S(t)u_0\|_G = \sup_{t>0}\|S(t)u_0\|_{B_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t>0} t^{\alpha/2}\|S(t)u_0\|_q.$$

Observemos que $\|S(t)u_0\|_G$ é equivalente à norma de $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}$ pelo Lema 1.5.6, isto é, as normas

$$\sup_{t>0}\|S(t)u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \quad \text{e} \quad \sup_{t>0} t^{\alpha/2}\|S(t)u_0\|_q,$$

são equivalentes; em particular, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} t^{\alpha/2} \left\| S(t)u_0 \right\|_q \leqslant K \sup_{t>0} \left\| S(t)u_0 \right\|_{B_q^{-\alpha,\infty}} .$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| S(t)u_0 \right\|_G &= \sup_{t>0} \left\| S(t)u_0 \right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t>0} t^{\alpha/2} \left\| S(t)u_0 \right\|_q \\
&\leqslant \sup_{t>0} \left\| S(t)u_0 \right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + K \sup_{t>0} \left\| S(t)u_0 \right\|_{B_q^{-\alpha,\infty}} \\
&= (K+1) \sup_{t>0} \left\| S(t)u_0 \right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \\
&= c \left\| u_0 \right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} .
\end{aligned}$$

Pois, no Lema 1.5.6, consideramos como $\left\| u_0 \right\|_{B_q^{-\alpha,\infty}}$ qualquer uma das normas equivalentes listadas em seu enunciado.

Agora, desejamos aplicar o Lema 1.4.8. Seja $G$ o espaço de Banach introduzido na Definição 2.1.1 e $B : G \times G \to G$ a aplicação bilinear definida no Lema 2.1.9. Primeiramente, vamos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$4\eta \left\| S(t)u_0 \right\|_G < \delta.$$

Agora suponha que $\delta = \dfrac{1}{c4\eta}$, e $\left\| u_0 \right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \delta$ então

$$\left\| S(t)u_0 \right\|_G \leqslant c \left\| u_0 \right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < c\delta = c\frac{1}{c4\eta} = \frac{1}{4\eta}.$$

Então se $\left\| u_0 \right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \delta$, temos que

$$4\eta \left\| S(t)u_0 \right\|_G < 1.$$

Assim, pelo Lema 1.4.8, a equação

$$\begin{aligned}
x &= S(t)u_0 + B(x,x) \\
&= S(t)u_0 - \int_0^t S(t)\mathbb{P}\nabla \cdot (x \otimes x)(s) ds
\end{aligned}$$

tem uma solução $u \in G$, ou seja, uma solução satisfazendo

$$\begin{aligned}
u(t,x) &\in C\left([0,\infty); \dot{B}_q^{\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)\right), \\
t^{\alpha/2} u(t,x) &\in C\left([0,\infty); L^q(\mathbb{R}^3)\right), \\
\lim_{t\to 0} t^{\alpha/2} \left\| u(t) \right\|_q &= 0.
\end{aligned}$$

Além disso, $u$ é a única solução tal que $\left\| u \right\|_G < R$, onde

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta \left\| S(t)u_0 \right\|_G}}{2\eta},$$

e ela é uma solução branda das equações (1.3), como desejado.

## 2.2 Resultado no espaço de Besov $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$

Nesta seção, vamos estender o resultado para os espaços de Besov $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$. Como vimos na Seção 1.5 (Lema 1.5.7, p. 49), este espaço contém continuamente o espaço $L^3(\mathbb{R}^3)$, isto é, $L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, o que significa que o resultado tem validade em um espaço maior $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, ou seja, estendemos o resultado para funções que possuem menos "regularidade" que $L^3(\mathbb{R}^3)$.

Além disso, uma propriedade das equações de Navier-Stokes (1.3) é que elas são invariantes sob o *scaling* $(u, p) \to (u_\lambda, p_\lambda)$, para todo $\lambda > 0$, onde

$$u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x),$$
$$p_\lambda(t,x) = \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x).$$

Em outras palavras, suponhamos que $(u, p)$ é uma solução do sistema (1.3), então o mesmo vale para $(u_\lambda, p_\lambda)$, para todo $\lambda > 0$. Soluções invariantes por *scaling*, isto é, $u = u_\lambda$ para cada $\lambda > 0$, são chamadas soluções auto-similares do sistema (1.3).

A seguinte definição pode ser encontrada em Cannone [5, p. 32].

**Definição 2.2.1.** *(Continuidade fraça) Seja $E$ um espaço de Banach funcional, isto é, temos as imersões contínuas $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow E \hookrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ e $u(t,x)$ campo de vectores definido em $t \in [0,T)$ e com valores sobre $E$. Dizemos que $u(t,x)$ é fracamente contínua no sentido de distribuições e denotamos*

$$u(t,x) \in C_*([0,T), E),$$

*se $u(t,x)$ é limitado em $E$, ou seja,*

$$u(t,x) \in L^\infty([0,T); E), \tag{2.17}$$

*e se a continuidade em $t$ da aplicação*

$$u(t,x) : (0,T) \to E \tag{2.18}$$

*é definida pela injeção de $E$ dentro de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$, ou seja, convergência no sentido de distribuções.*

Uma vez que este conceito está introduzido, veremos que o resultado da seção anterior pode ser reformulado para os espaços de Besov, com algumas alterações, tais como o uso da continuidade fraca no tempo. Na sequência, apresentamos os dois teoremas principais deste capítulo.

**Teorema 2.2.2.** *Seja $3 < q \leqslant 6$ e $\alpha = \alpha(q) = 1 - \dfrac{3}{q}$. Existe uma constante absoluta $\delta > 0$ tal que se $u_0 \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \delta$ e $\nabla \cdot u_0 = 0$ no sentido de distribuções, então as* *equações de Navier-Stokes* (1.3) *têm uma solução branda $u$ satisfazendo*

$$u(t,x) \in C_* \left((0,\infty); \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)\right), \tag{2.19}$$

$$t^{\alpha/2}u(t,x) \in C_* \left((0,\infty); L^q(\mathbb{R}^3)\right). \tag{2.20}$$

*Além disso, se $3 < q \leqslant 4$,*

$$u(t,x) - S(t)u_0 \in C_* \left((0,\infty); \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right), \tag{2.21}$$

*e, se $4 < q \leqslant 6$,*

$$u(t,x) - S(t)u_0 \in C_* \left((0,\infty); L^3(\mathbb{R}^3)\right). \tag{2.22}$$

*Além disso, a solução $u(t,x)$ verificando (2.19)-(2.20) é a única tal que*

$$\sup_{t\geqslant 0} \|u(t)\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u(t)\|_q \leqslant R,$$

*onde $R = R\left(\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}\right)$ é uma constante dada.*

Os espaços de Besov homogêneos permitem-nos considerar dados iniciais homogêneos e obter soluções auto-similares. Este é o conteúdo do próximo teorema.

**Teorema 2.2.3.** *Seja $3 < q \leqslant 6$ e $\alpha = \alpha(q) = 1 - 3/q$. Existe uma constante absoluta $\delta > 0$ tal que se $u_0 \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \delta$, $\nabla \cdot u_0 = 0$ (no sentido de distribuições) e $u_0(x) = \lambda u_0(\lambda x)$ para todo $\lambda > 0$, então as equações de Navier-Stokes* (1.3) *têm uma solução branda auto-similar, as quais podem ser escrita na forma*

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

*onde $V \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ é tal que*

$$V(x) = S(1)u_0 + W(x),$$

*com $W \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, se $3 < q \leqslant 4$, e $W \in L^3(\mathbb{R}^3)$, se $4 < q \leqslant 6$. O valor inicial $u_0$ é tomado por $u(t,x)$ no sentido fraco de distribuições. Finalmente, existe uma única solução $u(t,x)$ tal que $V \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ e*

$$\|V\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \|V\|_q \leqslant R,$$

*onde $R = R(\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}})$ é uma constante dada.*

Na próxima observação, veremos exemplos de dados iniciais que estão nos espaços de Besov $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, mas não estão nos espaços $L^3(\mathbb{R}^3)$, desta forma, poderemos ver que a condição $u_0 \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}$ é mais geral, também consideraremos funções homogêneas de grau $-1$, ou seja, que satisfazem $u_0(x) = \lambda u_0(\lambda x)$, conforme indicado pelas hipóteses do Teorema 2.22. Para mais detalhes, veja Cannone [6], [7] e Lemarié [18].

**Observação 2.2.4.** *Exemplos de funções que pertencem aos espaços de Besov, e não pertencem a qualquer espaço de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$, são as funções homogêneas não triviais. Mais precisamente, para nosso caso, temos que funções homogêneas $f$ de grau $-1$ pertencem ao espaço de Besov $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, com $1 \leqslant q \leqslant \infty$ e $\alpha = 1 - 3/q$; por exemplo, consideremos*

$$f(x) = \frac{\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|},$$

*onde $\Omega : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$, e $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$, então podemos ver que, para cada $\lambda > 0$,*

$$\lambda f(\lambda x) = \lambda \frac{\Omega\left(\frac{\lambda x}{|\lambda x|}\right)}{|\lambda x|} = \frac{\lambda}{\lambda} \frac{\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|} = f(x),$$

*isto é, $f(x)$ é homogênea de grau $-1$, além disso $f \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$.*

*Agora, podemos tentar buscar um dado inicial com divergente nulo. Considerando*

$$u_0(x) = \left(0, -\frac{x_3}{|x|^2}, \frac{x_2}{|x|^2}\right),$$

*então*

$$\nabla \cdot u_0 = 2\frac{x_3 x_2}{|x|^4} - 2\frac{x_2 x_3}{|x|^4} = 0.$$

*Além disso, as funções nas coordenadas de $u_0$ são da forma $f(x) = \dfrac{\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|}$, onde $\Omega(x) \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$, assim $u_0 \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$. Note também que $u_0 \notin L^p(\mathbb{R}^3)$, para qualquer $1 \leqslant p \leqslant \infty$, desde que $1/(|x|^p)$ não é integrável em todo $\mathbb{R}^3$, logo pode ser um dado inicial escolhido para o Teorema 2.21 ou o Teorema 2.22, mas não para o Teorema 2.1.3.*

Caminhando na direção das demonstrações dos teoremas, primeiramente, definamos um novo espaço de funções do tipo Kato.

**Definição 2.2.5.** *Definimos $G_\infty$ como o espaço de Banach que consiste de todas as funções $u(t,x)$ verificando (2.19), (2.20) e com a norma*

$$\|u\|_{G_\infty} = \sup_{t \geqslant 0} \|u(t)\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u(t)\|_q$$

*finita.*

Agora, apresentaremos alguns lemas que serão essenciais na demonstração dos resultados.

**Lema 2.2.6.** *Seja $3 < q \leqslant \infty$. Se $u_0 \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, então $S(t)u_0 \in G_\infty$. Além disso, temos a estimativa*

$$\|S(t)u_0\|_{G_\infty} \leqslant C \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}, \tag{2.23}$$

*onde $C > 0$ é uma constante universal.*

*Demonstração.* Recordando o Lema 1.5.6, as seguintes normas são equivalentes

$$\sup_{t>0} \|S(t)u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \qquad \text{e} \qquad \sup_{t>0} t^{\alpha/2} \|S(t)u_0\|_q ,$$

e ambas são equivalentes à norma $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}$; então, podemos nos referir a todas elas como $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + t^{\alpha/2} \|S(t)u_0\|_q &\leqslant C \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + C \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \\ &= C \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} , \end{aligned}$$

o que implica a estimativa

$$\|u_0\|_G = \sup_{t>0} \|S(t)u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t>0} t^{\alpha/2} \|S(t)u_0\|_q \leqslant C \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} . \tag{2.24}$$

Agora, pela hipótese, sabemos que $u_0 \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, isto é,

$$\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \infty.$$

Logo, podemos concluir que $\|u_0\|_G < \infty$. Além disso, podemos ver que

$$\begin{aligned} &\sup_{t>0} \|S(t)u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \infty, \\ &\sup_{t>0} t^{\alpha/2} \|S(t)u_0\|_q < \infty. \end{aligned}$$

Então podemos conlcuir que $S(t)u_0 \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $\forall t > 0$.

Agora, desde que $\sup_{t>0} \|S(t)u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \leqslant c < \infty$, então a condição (2.17) segue imediatamente.

Agora vamos mostrar (2.18), ou seja $S(t)u_0 : (0,\infty) \to \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3))$ é contínua no sentido de distribuições. Considere o espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, relembrando que $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ é o dual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ e $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$, para cada $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, precisamos mostrar que

$$\lim_{t\to 0} \langle S(t)u_0 - u_0, \varphi \rangle = 0.$$

Primeiramente, note que

$$\langle S(t)u_0, \varphi \rangle = \langle u_0, S(t)\varphi \rangle ,$$

e então, por linearidade,

$$\langle S(t)u_0 - u_0, \varphi \rangle = \langle u_0, S(t)\varphi - \varphi \rangle .$$

Agora consideremos $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ pares, tais que, $0 \leqslant \varphi \leqslant \chi_{B(4)}$, $0 \leqslant \psi \leqslant \chi_{B(2)\setminus B(1)}$, onde $B(n)$ é a bola de raio $n$ em $\mathbb{R}^3$, e

$$\varphi^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\langle u_0, S(t)\varphi - \varphi\rangle &= \left\langle S_0^2 u_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j^2 u_0, S(t)\varphi - \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle S_0^2 u_0, S(t)\varphi - \varphi \right\rangle + \sum_{j=0}^{\infty} \left\langle \Delta_j^2 u_0, S(t)\varphi - \varphi \right\rangle \\
&= \langle S_0 u_0, S_0(S(t)\varphi - \varphi)\rangle + \sum_{j=0}^{\infty} \langle \Delta_j u_0, \Delta_j (S(t)\varphi - \varphi)\rangle \\
&\leqslant \|S_0 u_0\|_q \|S_0(S(t)\varphi - \varphi)\|_p + \sum_{j=0}^{\infty} \|\Delta_j u_0\|_q \|\Delta_j(S(t)\varphi - \varphi)\|_p \\
&= \|S_0 u_0\|_q \|S_0(S(t)\varphi - \varphi)\|_p + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\alpha} \|\Delta_j u_0\|_q 2^{j\alpha} \|\Delta_j(S(t)\varphi - \varphi)\|_p .
\end{aligned}$$

Como $\|S_0 u_0\|_q \leqslant C \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}$ e $2^{-j\alpha} \|\Delta_j u_0\|_q \leqslant \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}$, para cada $j \geqslant 0$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
|\langle u_0, S(t)\varphi - \varphi\rangle| &\leqslant C \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \|S(t)\varphi - \varphi\|_{B_p^{\alpha,1}} \\
&= C \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} \left( \|S_0(S(t)\varphi - \varphi)\|_p + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} \|\Delta_j(S(t)\varphi - \varphi)\|_p \right),
\end{aligned}$$

onde $p = q'$. Assim, basta mostrar que $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)\varphi - \varphi\|_{\dot{B}_p^{\alpha,1}} = 0$. Com efeito, para $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, temos que $S(t)\varphi - \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, e relembre a inclusão contínua $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \subset B_p^{s,r}$, para cada $p, r \geqslant 1$ e $s \in \mathbb{R}$; em particular, seja $f_t(j) = 2^{j\alpha} \|\Delta_j(S(t)\varphi - \varphi)\|_p$, mostraremos que $f_t(j) \to 0$, quando $t \to 0^+$; primeiramente vejamos que

$$\begin{aligned}
2^{\alpha j} \|\Delta_j(S(t)\varphi - \varphi)\|_p &\leqslant 2^{\alpha j} \left\| 2^{3j} \mathscr{F}^{-1}[\varphi_j](2^j x) \right\|_1 \|S(t)\varphi - \varphi\|_p \\
&= 2^{\alpha j} \left\| \mathscr{F}^{-1}[\varphi_j] \right\|_1 \|S(t)\varphi - \varphi\|_p .
\end{aligned}$$

Desde que $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)\varphi - \varphi\|_p = 0$ (veja Observação 1.3.4), segue que

$$\lim_{t\to 0^+} 2^{\alpha j} \|\Delta_j(S(t)\varphi - \varphi)\|_p = 0.$$

Agora mostraremos que existe $g$ somável, tal que $f_t \leqslant g$. Seja $\alpha_0 > \alpha$, temos que $S(t)\varphi - \varphi \in B_p^{\alpha_0,1}$, e para cada $j \geqslant 0$,

$$\|\Delta_j(S(t)\varphi - \varphi)\|_p \leqslant 2^{-j\alpha_0} \|S(t)\varphi - \varphi\|_{B_p^{\alpha_0,1}} . \tag{2.25}$$

Como $\alpha - \alpha_0 < 0$ e $\|S(t)\varphi - \varphi\|_{B_p^{\alpha_0,1}} \leqslant C$, tomando $g(j) = C2^{j(\alpha-\alpha_0)}$, observe que $f_t(j) \leqslant g(j)$ e

$$\sum_{j=0}^{\infty} g(j) \leqslant C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\alpha-\alpha_0)} < \infty.$$

Assim, $g(j)$ é somável, e então aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (uma versão particular para somas, veja Teorema 1.1.10), segue que

$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha}\left\|\Delta_j(S(t)\varphi-\varphi)\right\|_p=\sum_{j=0}^{\infty}\lim_{t\to 0^+} 2^{j\alpha}\left\|\Delta_j(S(t)\varphi-\varphi)\right\|_p=0.$$

Pois, pelo Teorema 1.2.6, temos que $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)\subset L^p(\mathbb{R}^3)$, para $p\geqslant 1$. Logo, o Teorema 1.3.3 implica que $\lim\limits_{t\to 0^+}\|S(t)\varphi-\varphi\|_p=0$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^+}\|S(t)\varphi-\varphi\|_{\dot{B}_p^{\alpha,1}}\\
&=\lim_{t\to 0^+}\left(\left\|S_0(S(t)\varphi-\varphi)\right\|_p+\sum_{j=0}^{\infty}2^{j\alpha}\left\|\Delta_j(S(t)\varphi-\varphi)\right\|_p\right)\\
&=\lim_{t\to 0^+}\left\|S_0(S(t)\varphi-\varphi)\right\|_p+\lim_{t\to 0^+}\sum_{j=0}^{\infty}2^{j\alpha}\left\|\Delta_j(S(t)\varphi-\varphi)\right\|_p\\
&=0.
\end{aligned}$$

Assim, para $p=q'$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+}|\langle u_0,S(t)\varphi-\varphi\rangle| &\leqslant C\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}\lim_{t\to 0^+}\|S(t)\varphi-\varphi\|_{\dot{B}_p^{\alpha,1}}\\
&=0.
\end{aligned}$$

Agora, note que se $t=t_0+\varepsilon$, então

$$\begin{aligned}
\langle S(t)u_0-S(t_0)u_0,\varphi\rangle &=\langle S(t_0)S(\varepsilon)u_0-S(t_0)u_0,\varphi\rangle\\
&=\langle S(t_0)(S(\varepsilon)u_0-u_0),\varphi\rangle\\
&=\langle S(\varepsilon)u_0-u_0,S(t_0)\varphi\rangle\,.
\end{aligned}$$

Além disso, usando a Observação 1.3.5, obtemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0^+}|\langle S(t)u_0-S(t_0)u_0,\varphi\rangle| &=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle S(\varepsilon)u_0-u_0,S(t_0)\varphi\rangle\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle S(t_0)(S(\varepsilon)u_0-u_0),\varphi\rangle\\
&=0.
\end{aligned}$$

Similarmente, se $t<t_0$ então $t+\varepsilon=t_0$, onde $\varepsilon=t_0-t>0$, e portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0^-}|\langle S(t)u_0-S(t_0)u_0,\varphi\rangle| &=\lim_{\varepsilon\to 0^+}|\langle S(t)u_0-S(t)S(\varepsilon)u_0,\varphi\rangle|\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle u_0-S(\varepsilon)u_0,S(t)\varphi\rangle\\
&=0.
\end{aligned}$$

Segue que $S(t)u_0$ é fracamente contínua e podemos concluir que

$$S(t)u_0 \in C_*((0,\infty); \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)).$$

Na sequência, mostraremos que $t^{\alpha/2}S(t)u_0 \in C_*((0,\infty), L^q(\mathbb{R}^3))$; primeiramente, vejamos que

$$\begin{aligned} t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_0\right\|_q &\leqslant \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\left\|S(t)u_0\right\|_q \\ &\leqslant C\left\|u_0\right\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

o que implica que $t^{\alpha/2}S(t)u_0 \in L^q(\mathbb{R}^3)$, para todo $t \geqslant 0$. Além disso, $t^{\alpha/2}S(t)u_0$ é limitada no espaço de Besov $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, ou seja, $t^{\alpha/2}S(t)u_0 \in L^\infty([0,\infty), \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3))$.

Agora mostraremos que $t^{\alpha/2}S(t)u_0$ é fracamente contínua, isto é,

$$\lim_{t\to t_0}\left\langle t^{\alpha/2}S(t)u_0 - t_0^{\alpha/2}S(t_0)u_0, \varphi\right\rangle = 0.$$

Primeiramente, note que podemos estimar

$$\begin{aligned} &|\left\langle t^{\alpha/2}S(t)u_0 - t_0^{\alpha/2}S(t_0)u_0, \varphi\right\rangle| \\ &= |\left\langle t^{\alpha/2}S(t)u_0 - t_0^{\alpha/2}S(t)u_0 + t_0^{\alpha/2}S(t)u_0 - t_0^{\alpha/2}S(t_0)u_0, \varphi\right\rangle| \\ &\leqslant |\left\langle t^{\alpha/2}S(t)u_0 - t_0^{\alpha/2}S(t)u_0, \varphi\right\rangle| + |\left\langle t_0^{\alpha/2}S(t)u_0 - t_0^{\alpha/2}S(t_0)u_0, \varphi\right\rangle| \\ &\leqslant |\left\langle (t^{\alpha/2} - t_0^{\alpha/2})S(t)u_0, \varphi\right\rangle| + |\left\langle t_0^{\alpha/2}(S(t)u_0 - S(t_0)u_0), \varphi\right\rangle| \\ &\leqslant |t^{\alpha/2} - t_0^{\alpha/2}||\left\langle S(t)u_0, \varphi\right\rangle| + |t_0^{\alpha/2}||\left\langle (S(t)u_0 - S(t_0)u_0), \varphi\right\rangle|, \end{aligned}$$

e, tomando o limite, obtemos que

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to t_0}|\left\langle t^{\alpha/2}S(t)u_0 - t_0^{\alpha/2}S(t_0)u_0, \varphi\right\rangle| \\ &\leqslant \lim_{t\to t_0}|t^{\alpha/2} - t_0^{\alpha/2}||\left\langle S(t)u_0, \varphi\right\rangle| + |t_0^{\alpha/2}|\lim_{t\to t_0}|\left\langle S(t)u_0 - S(t_0)u_0, \varphi\right\rangle| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue que $t^{\alpha/2}S(t)u_0$ é fracamente contínua e concluímos que

$$t^{\alpha/2}S(t)u_0 \in C_*((0,\infty), \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)).$$

Em resumo, mostramos as três propriedades

$$\begin{aligned} S(t)u_0 &\in C_*\left((0,\infty); \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)\right), \\ t^{\alpha/2}S(t)u_0 &\in C_*((0,\infty); L^q(\mathbb{R}^3)), \\ \left\|S(t)u_0\right\|_{G_\infty} &< \infty, \end{aligned}$$

o que implica $S(t)u_0 \in G_\infty$, para cada $u_0 \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$. Além disso, a estimativa (2.23) foi obtida em (2.24). Logo, a demonstração está completa. □

A seguir, mostraremos propriedades da forma bilinear $B(v,u)(t)$. Primeiro notemos que, por (1.11), podemos estudar $B(v,u)(t)$ via a sua versão escalar $B(f,g)(t)$, ou seja,

$$B(f,g)(t) = -\int_0^t (t-s)^{-2}\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{t-s}}\right) * (fg)(s)ds,$$

onde, $f, g$ são campos escalares e $\Theta(x)$ é uma função analítica com decaimento $O(|x|^{-4})$, quando $|x| \to \infty$, a prova é idêntica aos cálculos utilizados para obter posteriormente (2.29), ao usar o fato de que $\hat{\Theta}(\xi) = |\xi|e^{-|\xi|^2}$.

A seguir, provaremos algumas estimativas para a forma bilinear que serão fundamentais para nossos objetivos.

**Lema 2.2.7.** *Existem constantes universais positivas $C_1$, $C_2$, e $C_3$, tais que, as seguintes estimativas são válidas:*
*Se* $3 < q \leqslant 4$,

$$\|B(u,v)(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leqslant C_1\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|u(t)\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|v(t)\|_q\right). \tag{2.26}$$

*Se* $4 < q \leqslant 6$,

$$\|B(u,v)(t)\|_3 \leqslant C_2\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|u(t)\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|v(t)\|_q\right). \tag{2.27}$$

*Se* $3 < q \leqslant 6$,

$$t^{\alpha/2}\|B(u,v)(t)\|_q \leqslant C_3\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|u(t)\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|v(t)\|_q\right). \tag{2.28}$$

*Demonstração.* Inicialmente suponhamos que $3 < q \leqslant 4$. A norma $\dot{H}^{1/2}$ de um campo escalar $f$ é dada por

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{H}^{1/2}} &= \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\xi||\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right]^{1/2} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\xi|^{1/2}\hat{f}(\xi)\right)^2 d\xi\right]^{1/2} \\
&= \left\||\xi|^{1/2}\hat{f}(\xi)\right\|_2.
\end{aligned}$$

Em vista do fato que o operador $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ tem símbolo $\mathscr{F}(\Lambda) = |\xi|$, então $\Lambda^{1/2}$ é um operador cujo símbolo é $|\xi|^{1/2}$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{H}^{1/2}} &= \left\||\xi|^{1/2}\hat{f}(\xi)\right\|_2 \\
&= \left\|\mathscr{F}^{-1}(|\xi|^{1/2}\hat{f}(\xi))\right\|_2 \\
&= \left\|\Lambda^{1/2} f\right\|_2.
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo o operador bilinear $B(v,u)(t)$ por sua versão escalar $B(f,g)(t)$, e aplicando o operador $\Lambda^{1/2}$, chegamos à expressão

$$\Lambda^{1/2}B(f,g)(t) = -\int_0^t \Lambda^{1/2}((t-s)^{-2}\Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (fg)(s))ds.$$

Vamos aplicar a transformada de Fourier à igualdade acima. Lembremos que no espaço $\mathbb{R}^3$ temos que $\mathscr{F}[f(ax)](\xi) = a^{-3}\mathscr{F}[f](a^{-1}\xi)$, onde $a$ é uma constante, e então

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[\Lambda^{1/2}B(f,g)(t)\right] \\
&= -\int_0^t \mathscr{F}\left[\Lambda^{1/2}\left((t-s)^{-2}\Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (fg)(s)\right)\right]ds \\
&= -\int_0^t |\xi|^{1/2}(t-s)^{-2}\mathscr{F}\left[\Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)\right] \cdot \mathscr{F}[(fg)(s)]ds \\
&= -\int_0^t (t-s)^{-2}|\xi|^{1/2}(\sqrt{t-s})^3\hat{\Theta}\left(\xi\sqrt{t-s}\right) \cdot \mathscr{F}[(fg)(s)]ds \\
&= -\int_0^t (t-s)^{-2}(t-s)^{-1/4}|\xi\sqrt{t-s}|^{1/2}(\sqrt{t-s})^3\hat{\Theta}\left(\xi\sqrt{t-s}\right) \cdot \mathscr{F}[(fg)(s)]ds \\
&= -\int_0^t (t-s)^{-9/4}\left((\sqrt{t-s})^3|\xi\sqrt{t-s}|^{1/2}\hat{\Theta}\left(\xi\sqrt{t-s}\right)\right) \cdot \mathscr{F}[(fg)(s)]ds \\
&= -\int_0^t (t-s)^{-9/4}\mathscr{F}\left[\left(\Lambda^{1/2}\Theta\right)\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)\right] \cdot \mathscr{F}[(fg)(s)]ds \\
&= -\int_0^t (t-s)^{-9/4}\mathscr{F}\left[\left(\Lambda^{1/2}\Theta\right)\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (fg)(s)\right]ds.
\end{aligned}$$

Definindo $\Theta_1 = \Lambda^{1/2}\Theta$, podemos escrever

$$\Lambda^{1/2}B(f,g)(t) = -\int_0^t (t-s)^{-9/4}\Theta_1\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (fg)(s)ds.$$

Agora veremos que o núcleo $\Theta_1 = \Lambda^{1/2}\Theta$ está em $L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Vamos começar mostrando que $\Theta_1 \in L^\infty$; para isso, observe que $\mathscr{F}\left[\Theta\right](\xi) = |\xi|e^{-|\xi|^2}$, e então

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[\Theta_1](\xi) &= \mathscr{F}[\Lambda^{1/2}\Theta] \\
&= |\xi|^{1/2}|\xi|e^{-|\xi|^2} \\
&= |\xi|^{3/2}e^{-|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

Observemos que $|\xi|^{3/2}e^{-|\xi|^2}$ pertence ao espaço $L^1(\mathbb{R}^3)$; de fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{3/2}e^{-|\xi|^2}d\xi &= \sigma(\mathbb{S}^2)\int_0^\infty r^{3/2}e^{-|r|^2}r^2dr \\
&= \sigma(\mathbb{S}^2)\int_0^\infty r^{7/2}e^{-r^2}dr < \infty,
\end{aligned}$$

onde a última integral pode ser verificada numericamente como sendo 0.566502, e portanto a integral é finita. Aplicando Hausdorff-Young (veja Teorema 1.2.13), temos que

$$\|\mathscr{F}^{-1}[|\xi|^{3/2}e^{-|\xi|^2}]\|_\infty \leqslant \||\xi|^{3/2}e^{-|\xi|^2}\|_1 < \infty,$$

e então segue que $\Theta_1 = \Lambda^{1/2}\Theta \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Agora, vejamos que $\Theta_1 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Primeiro, relembremos a propriedade

$$(\partial^\alpha \mathscr{F}[f])(\xi) = \mathscr{F}[(-2\pi i x)^\alpha f(x)](\xi).$$

Além disso, observemos que

$$|x|^4 = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i^2 x_j^2.$$

Desejamos mostrar que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\hat{\Theta}_1 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, logo a transformada inversa de Fourier $C|x|^4\Theta_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, e com alguma manipulação adicional obteríamos que $\Theta_1 \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

A seguir, relembre que

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right] = (-2\pi i)^2 x_i^2 = c x_i^2.$$

Então, usando esta igualdade, podemos ver que

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right] = \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right] = c^2 \sum_{i,j=1}^{3} x_i^2 x_j^2 = c^2|x|^4.$$

Analisando agora $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\hat{\Theta}_1$, lembrando que $\hat{\Theta}_1 = |\xi|^{3/2}e^{-|x|^2}$, e definindo $g(t) = t^{3/2}e^{-t^2}$, observe que

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}}\right)e^{-t^2},\\
g''(t) &= \left(\frac{3}{4}t^{-\frac{1}{2}} - 8t^{\frac{3}{2}} + 4t^{\frac{7}{2}}\right)e^{-t^2},\\
g'''(t) &= \left(-\frac{3}{8}t^{-\frac{3}{2}} - \frac{27}{2}t^{\frac{1}{2}} + 30t^{\frac{5}{2}} - 8t^{\frac{9}{2}}\right)e^{-t^2},\\
g^{(iv)}(t) &= \left(\frac{9}{16}t^{-\frac{5}{2}} - \frac{24}{4}t^{-\frac{1}{2}} + 102t^{\frac{3}{2}} - 96t^{\frac{7}{2}} + 16t^{\frac{11}{2}}\right)e^{-t^2}.
\end{aligned}$$

Usando a regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \xi_j} g(|\xi|) = g'(|\xi|)\left(\frac{\xi_j}{|\xi|}\right),\\
&\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} g(|\xi|) = g''(|\xi|)\left(\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\right) + g'(|\xi|)\left(\frac{1}{|\xi|} - \frac{\xi_j^2}{|\xi|^3}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} g(|\xi|) = g'''(|\xi|)\left(\frac{\xi_i\xi_j^2}{|\xi|^3}\right) + g''(|\xi|)\left(\frac{\xi_i}{|\xi|^2} - 3\frac{\xi_i\xi_j^2}{|\xi|^4}\right) + g'(|\xi|)\left(-\frac{\xi_i}{|\xi|^3} + 3\frac{\xi_i\xi_j^2}{|\xi|^5}\right),\\
&\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} g(|\xi|) = g^{(iv)}(|\xi|)\left(\frac{\xi_i^2\xi_j^2}{|\xi|^4}\right) + g'''(|\xi|)\left(\frac{\xi_i^2+\xi_j^2}{|\xi|^3} - 6\frac{\xi_i^2\xi_j^2}{|\xi|^5}\right)\\
&+ g''(|\xi|)\left(\frac{1}{|\xi|^2} - 3\frac{\xi_i^2+\xi_j^2}{|\xi|^4} + 15\frac{\xi_i^2\xi_j^2}{|\xi|^6}\right) + g'(|\xi|)\left(-\frac{1}{|\xi|^3} + 3\frac{\xi_i^2+\xi_j^2}{|\xi|^5} - 15\frac{\xi_i^2\xi_j^2}{|\xi|^7}\right).
\end{aligned}$$

Queremos mostrar que $\dfrac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}g(|\xi|) \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Para isso, usamos desigualdades do tipo $\xi_i/|\xi| \leqslant 1$, $\xi_i/|\xi|^2 \leqslant |\xi|/|\xi|^2 \leqslant 1/|\xi|$, $\xi_i\xi_j/|\xi|^3 \leqslant |\xi||\xi|/|\xi|^3 \leqslant 1/|\xi|$, $\xi_i^2/|\xi|^4 \leqslant |\xi|^2/|\xi|^4 \leqslant 1/|\xi|^2$ e $(\xi_i^2+\xi_j^2)/|\xi|^3 \leqslant 2|\xi|^2/|\xi|^3 \leqslant 2/|\xi|$, para proceder como segue

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}g(|\xi|)\right| &\leqslant \left|g^{(iv)}(|\xi|)\right| + |g'''(|\xi|)|\left|\frac{2}{|\xi|}+6\frac{1}{|\xi|}\right| \\ &\quad + |g''(|\xi|)|\left|\frac{1}{|\xi|^2}+6\frac{1}{|\xi|^2}+15\frac{1}{|\xi|^2}\right| + |g'(|\xi|)|\left|\frac{1}{|\xi|^3}+6\frac{1}{|\xi|^3}+15\frac{1}{|\xi|^3}\right| \\ &= \left|g^{(iv)}(|\xi|)\right| + 7\left|g'''(|\xi|)\frac{1}{|\xi|}\right| + 22\left|g''(|\xi|)\frac{1}{|\xi|^2}\right| + 22\left|g'(|\xi|)\frac{1}{|\xi|^3}\right|.\end{aligned}$$

Observe também que as seguintes funções estão em $L^1(\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned}\left|g^{(iv)}(|\xi|)\right| &= \left|\frac{9}{16}|\xi|^{-\frac{5}{2}} - \frac{24}{4}|\xi|^{-\frac{1}{2}} + 102|\xi|^{\frac{3}{2}} - 96|\xi|^{\frac{7}{2}} + 16|\xi|^{\frac{11}{2}}\right| e^{-|\xi|^2}, \\ \left|g'''(|\xi|)\frac{1}{|\xi|}\right| &= \left|-\frac{3}{8}|\xi|^{-\frac{5}{2}} - \frac{27}{2}|\xi|^{-\frac{1}{2}} + 30|\xi|^{\frac{3}{2}} - 8|\xi|^{\frac{7}{2}}\right| e^{-|\xi|^2}, \\ \left|g''(|\xi|)\frac{1}{|\xi|^2}\right| &= \left|\frac{3}{4}|\xi|^{-\frac{5}{2}} - 8|\xi|^{-\frac{1}{2}} + 4|\xi|^{\frac{3}{2}}\right| e^{-|\xi|^2}, \\ \left|g'(|\xi|)\frac{1}{|\xi|^3}\right| &= \left|\frac{3}{2}|\xi|^{-\frac{5}{2}} - 2|\xi|^{-\frac{1}{2}}\right| e^{-|\xi|^2},\end{aligned}$$

pois $|\xi|^{-\frac{5}{2}}e^{-|\xi|^2} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ e as demais funções têm um grau superior que as torna "mais integráveis". De fato, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|\xi|^2}}{|\xi|^{5/2}}d\xi = C\int_0^\infty \frac{r^2}{r^{\frac{5}{2}}}e^{-r^2}dr = C\int_0^\infty \frac{1}{r^{1/2}}e^{-r^2}dr < \infty.$$

Do mesmo modo, as funções $|\xi|^{-\frac{1}{2}}e^{-|\xi|^2}$, $|\xi|^{\frac{1}{2}}e^{-|\xi|^2}$, $|\xi|^{\frac{7}{2}}e^{-|\xi|^2}$ e $|\xi|^{\frac{11}{2}}e^{-|\xi|^2}$ pertencem ao espaço $L^1(\mathbb{R}^3)$; assim, segue que $\left|g^{(iv)}(|\xi|)\right| + 7\left|g'''(|\xi|)\dfrac{1}{|\xi|}\right| + 22\left|g''(|\xi|)\dfrac{1}{|\xi|^2}\right| + 22\left|g'(|\xi|)\dfrac{1}{|\xi|^3}\right|$ está no espaço $L^1(\mathbb{R}^3)$, e então

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}g(|\xi|)\right|d\xi \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^3}\left[\left|g^{(iv)}(|\xi|)\right| + 7\left|g'''(|\xi|)\frac{1}{|\xi|}\right| + 22\left|g''(|\xi|)\frac{1}{|\xi|^2}\right| + 22\left|g'(|\xi|)\frac{1}{|\xi|^3}\right|\right]d\xi \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Uma vez que $\dfrac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}g(|\xi|) \in L^1(\mathbb{R}^3)$, segue que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}\hat{\Theta}_1 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Usando Hausdorff-Young (veja Teorema 1.2.13), podemos estimar

$$\left\|\mathscr{F}^{-1}\left[\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}\hat{\Theta}_1\right]\right\|_\infty = c^2\left\||x|^4\Theta_1\right\|_\infty \leqslant \left\|\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}\hat{\Theta}_1\right\|_1 < \infty.$$

Isto é $|x|^4\Theta_1 \leqslant C$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, então

$$(1+|x|)^4\,\Theta_1(x) \leqslant C, \tag{2.29}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, pois $(1+|x|)^4$ é de forma polinomial de grau menor ou igual a 4, e similarmente podemos mostrar que $|x|^n\Theta_1 \leqslant C$, para todo $0 \leqslant n < 4$ e $x \in \mathbb{R}^3$; assim, podemos estimar

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Theta_1| dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{C}{(1+|x|)^4}\right] dx < \infty,$$

pois a função $(1+|x|)^{-\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^3)$, para $\alpha p > 3$, e assim segue que $\Theta_1 \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

Usando a desigualdade de Young (veja a Proposição 1.1.16) com $1/2+1 = 1/m + 2/q$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\|B(f,g)(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} = \left\|\Lambda^{\frac{1}{2}} B(f,g)(t)\right\|_2 \\
&= \left\|\int_0^t (t-s)^{-9/4}\Theta_1\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (fg)(s)ds\right\|_2 \\
&\leqslant c\int_0^t (t-s)^{-\frac{9}{4}} \left\|\Theta_1\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)\right\|_m \|f(s)g(s)\|_{q/2}\, ds \\
&\leqslant c\int_0^t (t-s)^{-\frac{9}{4}} (t-s)^{\frac{3}{2m}} \|\Theta_1\|_m \|f(s)g(s)\|_{q/2}\, ds \\
&\leqslant c\left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2m}} s^{-\alpha} ds\right) \|\Theta_1\|_m \cdot \left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|f(t)\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|g(t)\|_q\right).
\end{aligned}$$

Se $3 < q \leqslant 4$, então $m \geqslant 1$, o que implica que $\|\Theta_1\|_m < \infty$. Além disso, fazendo $s = tz$ e lembrando que $\alpha = 1 - 3/q$ e $1/2 + 1 = 1/m + 2/q$, chegamos a

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2m}} s^{-\alpha} ds &= \int_0^1 (t-tz)^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2m}} (tz)^{-\alpha} t dz \\
&= \int_0^1 (1-z)^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2m}} z^{-\alpha} t^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2m}} t^{-\alpha} t dz \\
&= \int_0^1 (1-z)^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2m}} z^{-\alpha} t^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2m}-\alpha+1} dz \\
&= \int_0^1 (1-z)^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2m}} z^{-\alpha} t^{-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-\frac{3}{q}-\left(1-\frac{3}{q}\right)+1} dz \\
&= \int_0^1 (1-z)^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2m}} z^{-\alpha} dz.
\end{aligned}$$

Usando o teste de comparação, não é difícil mostrar que a integral $\int_0^1 (1-z)^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2m}} z^{-\alpha} dz$ é finita.

Assim, concluímos que

$$\|B(f,g)(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leqslant C\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|f(t)\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|g(t)\|_q\right).$$

De forma similar, podemos usar a desigualdade de Young (veja a Proposição 1.1.16) com $1/3+1=1/m+2/q$ para estimar a norma $L^3(\mathbb{R}^3)$ de $B(f,g)$ como segue:

$$\begin{aligned}
&\|B(f,g)(t)\|_3\\
&=\left\|\int_0^t (t-s)^{-2}\Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)*(fg)(s)ds\right\|_3\\
&\leqslant \int_0^t (t-s)^{-2}\left\|\Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)\right\|_m \|f(s)g(s)\|_{q/2}\,ds\\
&\leqslant \int_0^t (t-s)^{-2}(t-s)^{\frac{3}{2m}}\|\Theta\|_m\|f(s)g(s)\|_{q/2}\,ds\\
&\leqslant \left(\int_0^t (t-s)^{-2+\frac{3}{2m}}s^{-\alpha}ds\right)\|\Theta\|_m\cdot\left(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|f(t)\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|g(t)\|_q\right).
\end{aligned}$$

Se $4<q\leqslant 6$, então $m\geqslant 1$, e $\|\Theta\|_m<\infty$. Novamente, fazemos $s=tz$ e, neste caso, temos que $\alpha=1-3/q$ e $1/3+1=1/m+2/q$, o que nos leva a

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{-2+\frac{3}{2m}}s^{-\alpha}ds &= \int_0^1 (t-tz)^{-2+\frac{3}{2m}}(tz)^{-\alpha}tdz\\
&= \int_0^1 (1-z)^{-2+\frac{3}{2m}}z^{-\alpha}t^{-2+\frac{3}{2m}-\alpha+1}dz\\
&= \int_0^1 (1-z)^{-2+\frac{3}{2m}}z^{-\alpha}t^{-2+2-\frac{3}{q}-\left(1-\frac{3}{q}\right)+1}dz\\
&= \int_0^1 (1-z)^{-2+\frac{3}{2m}}z^{-\alpha}dz\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\|B(f,g)(t)\|_3 \leqslant C\left(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|f(t)\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|g(t)\|_q\right).$$

Finalmente, considerando $1/q+1=1/n+2/q$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
&\|B(f,g)(t)\|_q\\
&=\left\|\int_0^t (t-s)^{-2}\Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)*(fg)(s)ds\right\|_q\\
&\leqslant \int_0^t (t-s)^{-2}\left\|\Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)\right\|_n \|f(s)g(s)\|_{q/2}\,ds\\
&\leqslant \int_0^t (t-s)^{-2}(t-s)^{\frac{3}{2n}}\|\Theta\|_n\|f(s)g(s)\|_{q/2}\,ds\\
&\leqslant \left(\int_0^t (t-s)^{-2+\frac{3}{2n}}s^{-\alpha}ds\right)\|\Theta\|_n\cdot\left(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|f(t)\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0}t^{\alpha/2}\|g(t)\|_q\right).
\end{aligned}$$

Se $3 < q \leqslant 6$, então $n > 1$, e $\|\Theta\|_n < \infty$. Desde que $\alpha = 1 - 3/q$ e $1/q + 1 = 1/n + 2/q$, usando a mudança de variáveis $s = tz$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-s)^{-2+\frac{3}{2n}} s^{-\alpha} ds &= \int_0^1 (t-tz)^{-2+\frac{3}{2n}} (tz)^{-\alpha} t dz \\ &= \int_0^1 (1-z)^{-2+\frac{3}{2n}} z^{-\alpha} t^{-2+\frac{3}{2n}-\alpha+1} dz \\ &= \int_0^1 (1-z)^{-2+\frac{3}{2n}} z^{-\alpha} t^{-2+3/2-\frac{3}{2q}-\left(1-\frac{3}{q}\right)+1} dz \\ &= t^{-\alpha/2} \int_0^1 (1-z)^{-2+\frac{3}{2n}} z^{-\alpha} dz.\end{aligned}$$

Logo,

$$t^{\alpha/2} \|B(f,g)(t)\|_q \leqslant C \left( \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|f(t)\|_q \right) \left( \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|g(t)\|_q \right).$$

□

**Lema 2.2.8.** *Seja o operador bilinear $B(v,u)(t)$ definido por*

$$B(u,v)(t) = -\int_0^t S(t-s)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes v)(s) ds.$$

*Suponha que $u \in G_\infty$ e satisfaz (1.9), logo temos o seguinte:*

*Se $3 < q \leqslant 4$, então*

$$B(u,u)(t) \in C_* \left( (0,\infty); \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \right).$$

*Se $4 < q \leqslant 6$, então*

$$B(u,u)(t) \in C_* \left( (0,\infty); L^3(\mathbb{R}^3) \right).$$

*Demonstração.* Seja $u \in G_\infty$, assim

$$\sup_{t \geqslant 0} \|u\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \infty \quad \text{e} \quad \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u\|_q \leqslant c < \infty.$$

O Lema 2.2.7 nos fornece as seguintes estimativas:

Se $3 < q \leqslant 4$, então, para todo $t \geqslant 0$,

$$\|B(u,u)(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leqslant C_1 \left( \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u\|_q \right) \left( \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u\|_q \right) \leqslant C_1 c^2 < \infty.$$

Se $4 < q \leqslant 6$, então, para todo $t \geqslant 0$,

$$\|B(u,u)(t)\|_3 \leqslant C_2 \left( \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u\|_q \right) \left( \sup_{t \geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u\|_q \right) \leqslant C_2 c^2 < \infty.$$

Segue que $B(u,u)(t)$ é limitada, conforme os casos de intervalos de q:

Se $3 < q \leqslant 4$,

$$\|B(u,u)(t)\|_{L^\infty((0,\infty);\dot{H}^{1/2})} < \infty.$$

Se $4 < q \leqslant 6$,

$$\|B(u,u)(t)\|_{L^\infty((0,\infty);L^3)} < \infty.$$

Falta mostrar que $B(u,u)(t)$ é fracamente contínua para $3 < q \leqslant 6$, ou seja, $B(u,u)(t)$ é contínua no sentido de distribuições. Para isso, considere $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, então

$$\lim_{t\to 0^+} \langle B(u,u)(t), \varphi\rangle = \lim_{t\to 0^+} \langle u(t,x) - S(t)u_0, \varphi\rangle .$$

Uma vez que $u(t,x) \in G_\infty$, então $u(t,x) \in C_*\left((0,\infty), \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}\right)$. Logo, acontece que $u(t,x)$ converge a $u(0,x)$ no sentido de distribuções, isto é, $\lim_{t\to 0^+} \langle u(t,x) - u(0,x), \varphi\rangle = 0$, para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Além disso, $u_0 \in B_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$ e, pelo Lema 2.2.6, obtemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \langle B(u,u)(t), \varphi\rangle &= \lim_{t\to 0^+} \langle u(t,x) - S(t)u_0, \varphi\rangle \\
&= \lim_{t\to 0^+} \langle u(t,x) - u_0 + u_0 - S(t)u_0, \varphi\rangle \\
&= \lim_{t\to 0^+} \langle u(t,x) - u(0,x), \varphi\rangle - \lim_{t\to 0^+} \langle S(t)u_0 - u_0, \varphi\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que $B(u,u)(t) \in C_*\left((0,\infty), \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right)$, para $3 < q \leqslant 4$; e $B(u,u)(t) \in C_*\left((0,\infty), L^3(\mathbb{R}^3)\right)$, para $4 < q \leqslant 6$, o que conclui a demonstração. □

### 2.2.1 Demonstração do Teorema 2.2.2

Seja $u_0 \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, usando o Lema 2.2.6, obtemos $S(t)u_0 \in G_\infty$, logo

$$\|S(t)u_0\|_{G_\infty} = \sup_{t\geqslant 0} \|S(t)u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2} \|S(t)u_0\|_q < \infty.$$

Agora, aplicando o Lema 1.5.6, temos que existe uma constante $c$ tal que

$$\|S(t)u_0\|_{G_\infty} = \sup_{t\geqslant 0} \|S(t)u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2} \|S(t)u_0\|_q \leqslant c \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} . \tag{2.30}$$

Considerando as constantes $C_1$ de (2.26), se $3 < q \leqslant 4$, ou $C_2$ de (2.27), se $4 < q \leqslant 6$, e $C_3$ de (2.28), temos as seguintes estimativas, conforme cada intervalo de $q$:

Para $3 < q \leqslant 4$,

$$\begin{aligned}
&\|B(u,v)(t)\|_{G_\infty}\\
&= \sup_{t\geqslant 0} \|B(u,v)(t)\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2} \|B(u,v)(t)\|_q\\
&\leqslant c \sup_{t\geqslant 0} \|B(u,v)(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} + \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2} \|B(u,v)(t)\|_q\\
&\leqslant cC_1 \left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|u\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|v\|_q\right) + C_3 \left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|u\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|v\|_q\right)\\
&\leqslant \eta \left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|u\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|v\|_q\right),
\end{aligned}$$

onde $\eta$ é uma constante definida como o máximo entre $cC_1$ e $C_3$.

Para $4 < q \leqslant 6$,

$$\begin{aligned}
&\|B(u,v)(t)\|_{G_\infty}\\
&= \sup_{t\geqslant 0} \|B(u,v)(t)\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2} \|B(u,v)(t)\|_q\\
&\leqslant c \sup_{t\geqslant 0} \|B(u,v)(t)\|_3 + \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2} \|B(u,v)(t)\|_q\\
&\leqslant cC_2 \left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|u\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|v\|_q\right) + C_3 \left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|u\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|v\|_q\right)\\
&\leqslant \eta \left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|u\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|v\|_q\right),
\end{aligned}$$

onde $\eta$ agora é uma constante definida como o máximo entre $cC_2$ e $C_3$; de fato, podemos tomar um único $\eta$ em vez de considerar diferentes constantes para diferentes casos, desde que temos apenas duas desigualdades e ambas têm a mesma forma. Agora, se $u, v \in G_\infty$, então $0 \leqslant \sup_{t\geqslant 0} \|u\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \infty$ e $0 \leqslant \sup_{t\geqslant 0} \|v\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \infty$; logo,

$$\|B(u,v)(t)\|_{G_\infty} \leqslant \eta \left(\sup_{t\geqslant 0} \|u\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|u\|_q\right)\left(\sup_{t\geqslant 0} \|v\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2}\|v\|_q\right).$$

Coletando as estimativas acima, concluímos que existe uma constante $\eta$ tal que

$$\|B(u,v)(t)\|_{G_\infty} \leqslant \eta \|u\|_{G_\infty} \|v\|_{G_\infty}, \text{ para todo } u, v \in G_\infty.$$

Considere agora a constante $\delta$ como sendo

$$\delta = \frac{1}{c4\eta}.$$

Se $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \delta$, então, pela desigualdade (2.30), obtemos que

$$\|S(t)u_0\|_{G_\infty} \leqslant c \|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < c\delta = c\frac{1}{c4\eta} = \frac{1}{4\eta},$$

o que é equivalente a

$$4\eta \|S(t)u_0\|_{G_\infty} < 1.$$

Assim, aplicando agora o Lema 1.4.8, obtemos um ponto fixo $u \in G_\infty$ para o operador $F(u)$ dado por

$$F(u) = S(t)u_0 + B(u,u),$$

isto é, $u = S(t)u_0 + B(u,u)$ é uma solução branda de (1.3). Além disso, ela é a única solução branda tal que $\|u\|_{G_\infty} < R$, onde

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta \|S(t)u_0\|_{G_\infty}}}{2\eta}.$$

Agora, aplicando o Lema 2.2.8 para $u$, a qual satisfaz (1.9), obtemos as seguintes propriedades:

Se $3 < q \leqslant 4$, então

$$u - S(t)u_0 = B(u,u)(t) \in C_* \left((0,\infty); \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)\right).$$

Se $4 < q \leqslant 6$, então

$$u - S(t)u_0 = B(u,u)(t) \in C_* \left((0,\infty); L^3(\mathbb{R}^3)\right).$$

Assim, para a conveniência do leitor, resumimos o que obtivemos nos desenvolvimentos acima: com uma condição de tamanho no dado inicial (via uma constante absoluta $\delta > 0$), mostramos que existe uma solução global branda $u(t,x)$ das equações (1.3) satisfazendo $u(t,x) \in C_* \left((0,\infty); \dot{B}_q^{\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3))\right)$ e $t^{\alpha/2}u(t,x) \in C_* \left((0,\infty); L^q(\mathbb{R}^3)\right)$, a qual é a única tal que $\|u(t,x)\|_{G_\infty} \leqslant R$; além disso, $u(t,x) - S(t)u_0 \in C_*((0,\infty); \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))$, se $3 < q \leqslant 4$, e $u(t,x) - S(t)u_0 \in C_*((0,\infty); L^3(\mathbb{R}^3))$, se $4 < q \leqslant 6$. Com isso, concluímos a demonstração do teorema.

### 2.2.2 Demostração do Teorema 2.2.3

Note que podemos usar as hipóteses do Teorema 2.2.3 no Teorema 2.2.2, desta forma temos que existe uma constante absoluta $\delta > 0$ tal que se $u_0 \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} < \delta$ e $\nabla \cdot u_0 = 0$ (no sentido de distribuições), então as equações (1.3) têm uma solução branda $u(t,x)$; em outras palavras, $u$ verifica (1.9).

Considerando agora o reescalonamento $u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$, onde $\lambda > 0$, podemos ver que $u_\lambda$ também é uma solução de (1.9), mas com dado inicial $\lambda u_0(\lambda x)$, ou seja, o dado $u_0$ também reescalonado. Pelas hipóteses do Teorema 2.2.3, temos que o dado inicial é homogêneo de grau $-1$, isto é, $u_0 = \lambda u_0(\lambda x)$. Portanto, segue que

$$u_\lambda(0,x) = \lambda u_0(\lambda x) = u_0(x).$$

Assim, $u(t,x)$ e $u_\lambda(t,x)$ têm o mesmo valor inicial $u_\lambda(0,x) = u(0,x)$. Por outro lado, o espaço $G_\infty$ é invariante pelo *scaling* $u \to u_\lambda$. Logo, pela parte de unicidade do Teorema 2.2.2, obtemos que

$$u(t,x) = u_\lambda(t,x), \text{ para cada } \lambda > 0,$$

isto é, $u$ é uma solução branda auto-similar. Agora, tomando $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$, chegamos a

$$u_\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}} u\left(\frac{1}{\sqrt{t}^2}t, \frac{1}{\sqrt{t}}x\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} u\left(1, \frac{1}{\sqrt{t}}x\right),$$

e, então, vemos que $u(t,x)$ pode ser escrita como

$$u(t,x) = u_\lambda(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

onde $V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = u\left(1, \frac{1}{\sqrt{t}}x\right)$. Pelo Teorema 2.2.2, temos que

$$\begin{aligned} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) &= u\left(1, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3), \\ V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) &= u\left(1, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) \in L^q(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Logo, $V(x) \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$. Além disso,

$$W(x) = V(x) - S(1)u_0(x) = u\,(1,x) - S(1)u_0(x).$$

Então, usando $u_0(x) = u_{\frac{1}{\sqrt{t}}}(0,x)$, temos que $V(x) = S(1)u_0(x) + W(x)$; e, pelo Teorema 2.2.2, para $3 < q \leqslant 4$, segue que

$$W(x) = u\,(1,x) - S(1)u_0(x) \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3),$$

e, para $4 < q \leqslant 6$,

$$W(x) = u\,(1,x) - S(1)u_0(x) \in L^3(\mathbb{R}^3).$$

Finalmente, observemos que $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} u\left(1, \frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ é a única solução tal que $V(x) = u\,(1,x) \in \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ e

$$\begin{aligned} \|V\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \|V\|_q &= \|u(1,x)\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \|u(1,x)\|_q \\ &\leqslant \sup_{t\geqslant 0} \|u(t,x)\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}} + \sup_{t\geqslant 0} t^{\alpha/2} \|u(t,x)\|_q \\ &\leqslant R, \end{aligned}$$

onde $R = R\left(\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}}\right)$ é uma constante que depende da norma do dado inicial no espaço de Besov $\dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$. Isso completa a demonstração do teorema.

# 3 O fenômeno da "inflação" e a má-colocação no espaço crítico maximal $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$

Este capítulo é dedicado a demonstrar a má-colocação das equações de Navier-Stokes (1.3) no espaço de Besov homogêneo $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, definido como

$$\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3) : \|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}} < \infty\},$$
$$\|f(x)\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/2} \left\| e^{t\Delta} f(x) \right\|_{L^\infty}.$$

Além disso, definimos a quantidade

$$\|f\|_{X_T} = \sup_{0<t<T} t^{1/2} \|f(t,\cdot)\|_{\infty} + \sup_{x_0} \sup_{0<R<T} \left( \frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|} \int_0^R \int_{B(x_0,\sqrt{R})} |f(\cdot,y)|^2 \, dydt \right)^{1/2}.$$

No Teorema 2.2.2 do capítulo anterior, obtemos a existência e unicidade no espaço de Besov homogêneo $\dot{B}_{q}^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$. Neste resultado, precisamos tomar um dado inicial arbitrário $u_0 \in \dot{B}_{q}^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$ de forma que $\|u_0\|_{\dot{B}_{q}^{-\alpha,\infty}} < \delta$ para uma constante universal $\delta > 0$. Logo, temos uma solução global única $u(t,x)$, bem como a dependência contínua em relação aos dados iniciais advinda como uma consequência do argumento de ponto fixo. Essas três propriedades, existência, unicidade e dependência contínua, é o que podemos chamar de boa-colocação das equações (1.3) no espaço de Besov homogêneo.

A seguir, vamos considerar um espaço maior do que o espaço $\dot{B}_{q}^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)$, o espaço de Besov homogêneo $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, que é invariante pela relação de escala (i.e., um espaço crítico). No entanto, vamos mostrar que não podemos obter um resultado semelhante ao Teorema 2.2.2 para o espaço $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$. De fato, vamos mostrar que, para todo $\delta > 0$ pequeno, podemos encontrar dados iniciais $u_0$ de modo que $\|u_0\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}} < \delta$, mas a solução $u(t,x)$ de (1.3) é proporcionalmente grande a $1/\delta$ na norma de $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ próximo a $t = 0$. Isto, naturalmente, implica na má-colocação em $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$. De fato, em uma vizinhança de $u(t,x) \equiv 0$, podemos encontrar soluções que são arbitrariamente grandes em $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, este resultado está contido no artigo de Bourgain e Pavlović [3].

Mais precisamente, o objetivo será provar o seguinte teorema:

**Teorema 3.0.1.** *Para cada $\delta > 0$, podemos encontrar uma solução $u$ das equações (1.3) e $0 < T < \delta$, tais que $u(0) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$,*

$$\|u(0)\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}} \leqslant \delta,$$

*e*

$$\|u(T)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}} > \frac{1}{\delta}.$$

Reescrevendo a formulação branda (1.9) das equações (1.3), chegamos à expressão

$$u = e^{t\Delta}u_0 - u_1 + y. \tag{3.1}$$

Aqui consideramos que o dado inicial $u_0$ pertence ao espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \cap \dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^3)$ e

$$\begin{aligned} u_1(t,x) &= B(e^{t\Delta}u_0(x), e^{t\Delta}u_0(x)), \\ B(v,u)(t) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}[(v\cdot\nabla)u(s)]ds, \end{aligned}$$

e $y$ é dada por

$$y = u - e^{t\Delta}u_0 + u_1.$$

Usando o fato que $u$ satisfaz (1.9) e $e^{t\Delta}u_0$ satisfaz (1.4), podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} \partial_t y - \Delta y &= \partial_t\left(u - e^{t\Delta}u_0 + u_1\right) - \Delta\left(u - e^{t\Delta}u_0 + u_1\right) \\ &= \partial_t u - \partial_t e^{t\Delta}u_0 + \partial_t u_1 - \Delta u + \Delta e^{t\Delta}u_0 - \Delta u_1 \\ &= \Delta u - \mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u] - \Delta e^{t\Delta}u_0 + \partial_t u_1 - \Delta u + \Delta e^{t\Delta}u_0 - \Delta u_1 \\ &= -\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u] + \partial_t u_1 - \Delta u_1. \end{aligned}$$

Agora vamos desenvolver $\partial_t u_1 - \Delta u_1$, usando ideias em Pazy [26], pág 107. Primeiramente, vejamos que para todo $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{S(h)-I}{h}u_1 &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t e^{(t+h-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0\cdot\nabla)e^{s\Delta}u_0]ds - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0\cdot\nabla)e^{s\Delta}u_0]ds\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0\cdot\nabla)e^{s\Delta}u_0]ds - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0\cdot\nabla)e^{s\Delta}u_0]ds\right] \\ &- \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0\cdot\nabla)e^{s\Delta}u_0]ds - \int_0^t e^{(t+h-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0\cdot\nabla)e^{s\Delta}u_0]ds\right] \\ &= \frac{u_1(x,t+h)-u_1(t,x)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0\cdot\nabla)e^{s\Delta}u_0]ds, \end{aligned}$$

e então, aplicando o limite $h \to 0$, chegamos a

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{e^{h\Delta}-I}{h}\right)u_1(t,x) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{u_1(t+h,x)-u_1(t,x)}{h} \\ &\quad - \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0\cdot\nabla)e^{s\Delta}u_0]ds. \end{aligned}$$

Usando (1.6), obtemos

$$\partial_t^+ u_1(t,x) - \Delta u_1(t,x) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0\cdot\nabla)e^{s\Delta}u_0]ds.$$

Por outro lado, se denotarmos $v(t,x) = \mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{s\Delta}u_0]$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{s\Delta}u_0]ds - \mathbb{P}[(e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0]\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta}v(s,x) - v(t,x)ds\right| \\
&\leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} ds \sup_{s\in[t,t+h]}\left|e^{(t+h-s)\Delta}v(s,x) - v(s,x) + v(s,x) - v(t,x)\right| \\
&= \frac{h}{h}\sup_{s\in[t,t+h]}\left|\left(e^{(t+h-s)\Delta} - Id\right)v(s,x) + (v(s,x) - v(t,x))\right| \\
&\leqslant \sup_{s\in[t,t+h]}\left|e^{(t+h-s)\Delta} - Id\right|_{\mathscr{L}(L^p,L^p)} \sup_{s\in[t,t+h]}|v(s,x)| + \sup_{s\in[t,t+h]}|v(s,x) - v(t,x)|.
\end{aligned}$$

Agora, se $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, então, para todo $t > 0$, segue que $e^{t\Delta}u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, $(e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ e

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{s\Delta}u_0 - (e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0]\right| \\
&\leqslant \|\mathbb{P}\|_{\mathscr{L}(L^p,L^p)}\left|[(e^{s\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{s\Delta}u_0 - (e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0]\right|,
\end{aligned}$$

onde $\sup_{s\in[t,t+h]}\left|[(e^{s\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{s\Delta}u_0 - (e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0]\right| \to 0$ quando $h \to 0$, pois $(e^{s\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{s\Delta}u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\partial_t^+ u_1(t,x) - \Delta u_1(t,x) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta}\mathbb{P}[(e^{s\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{s\Delta}u_0]ds \\
&= \mathbb{P}[(e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0].
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\partial_t y - \Delta y = -\mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u] + \mathbb{P}[(e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0].$$

Considere agora

$$\begin{cases}
G_1 = \mathbb{P}[(e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)y - (u_1 \cdot \nabla)y - (y \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0 + (y \cdot \nabla)u_1], \\
G_2 = \mathbb{P}[(y \cdot \nabla)y], \\
G_3 = \mathbb{P}[-(e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)u_1 - (u_1 \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0 + (u_1 \cdot \nabla)u_1],
\end{cases}$$

e note que

$$G_1 + G_2 + G_3 = \mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u] - \mathbb{P}[(e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0].$$

Então, $y$ satisfaz a equação diferencial parcial

$$\partial_t y - \Delta y + G_1 + G_2 + G_3 = 0. \tag{3.2}$$

Depois das primeiras considerações acima, no que segue, vamos desenvolver a demonstração do Teorema 3.0.1. Cabe comentar que para mostrar o fenômeno de "inflação", precisaremos trabalhar com uma classe especial de dados iniciais e fazer várias estimativas relativamente explícitas para os termos associados às equações de Navier-Stokes. Assim, o desenvolvimento será um tanto longo e, devido a isso, o dividiremos em três subseções. Na primeira, apresentamos a mencionada classe de dados, bem como algumas estimativas para ela. Na seção subsequente, analisamos a primeira iterada associada a formulação branda (1.9) e, na última, a diferença entre esta iterada e a solução.

## 3.1 Uma classe de dados iniciais

Vamos escolher um dado inicial $u_0$ que pertence ao espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \cap \dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, e que pode ser alterado para ser pequeno na norma do espaço $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, como descrevemos no início da seção.

Fixemos $Q > 0$, inicialmente grande e que eventualmente faremos crescer tanto quanto quisermos, seja $r = r(Q)$ um inteiro muito maior que $Q$ e que iremos descrever ao longo deste capítulo. Com esses parâmetros, definamos o dado inicial $u_0$ como sendo

$$u_0 = \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ v_s \cos(k_s \cdot x) + v'_s \cos(k'_s \cdot x) \right], \tag{3.3}$$

onde as constantes $k_s, k'_s \in \mathbb{R}^3$ e $v_s, v'_s \in \mathbb{S}^2$ são construídas como a seguir. Aqui $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

Primeiramente consideremos $k_0 \in \mathbb{R}^3$, cuja norma dependerá de $Q$ (entretanto muito maior do que $Q$) e que também será dado com mais precisão ao longo do desenvolvimento. Agora, considere $k_s$, onde $s \in \{1, 2, ..., r\}$ como vetores paralelos a $k_0$ e de modo que a sequência $|k_s|$ é "*lacunary*", termo que se refere ao fato de estarem crescendo cada vez de forma mais espalhada, por exemplo

$$|k_s| = 2^s |k_0| |k_{s-1}|. \tag{3.4}$$

Agora seja $\eta \in \mathbb{S}^2$, e $k'_s$ definidos como vetores de $\mathbb{R}^3$ que satisfazem

$$k_s - k'_s = \eta. \tag{3.5}$$

Em seguida, definimos os vetores $v_s, v'_s \in \mathbb{S}^2$, para cada $s \in \{1, 2, ..., r\}$, eles serão vetores unitários tais que

$$\begin{cases} k_s \cdot v_s = 0, \\ k'_s \cdot v_s = -\dfrac{1}{2}, \\ \|v_s\| = 1, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} k'_s \cdot v'_s = 0, \\ k_s \cdot v'_s = \dfrac{1}{2}, \\ \|v'_s\| = 1. \end{cases}$$

Este sistema de equações tem solução, uma vez que $k_s$ e $k'_s$ são linearmente independentes, o que é verdade para um $\eta$ apropriado em (3.5); por outro lado, desse sistema de equações temos as seguintes propriedades que usaremos mais tarde

$$k_s \cdot v_s = 0 = k_s' \cdot v_s', \tag{3.6}$$

$$\eta \cdot v_s = \eta \cdot v'_s = 1/2. \tag{3.7}$$

Sob essas condições, $u_0$ cumpre que $\nabla \cdot u_0 = 0$. Com efeito, usando (3.6), temos que

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot u_0 &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ v_s \cos(k_s \cdot x) + v_s' \cos(k_s' \cdot x) \right] \right)^j \\
&= \sum_{j=1}^{3} \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_s \cos(k_s \cdot x) \right)^j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_s' \cos(k_s' \cdot x) \right)^j \right] \\
&= \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ \sum_{j=1}^{3} \left( -v_s^j \mathrm{sen}(k_s \cdot x) k_s^j \right) + \sum_{j=1}^{3} \left( -v'^j_s \mathrm{sen}(k_s' \cdot x) k'^j_s \right) \right] \\
&= \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ -v_s \cdot k_s \mathrm{sen}(k_s \cdot x) - v'_s \cdot k_s' \mathrm{sen}(k_s' \cdot x) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que a solução $e^{t\Delta}u_0(x)$ do problema do calor é dada por

$$e^{t\Delta}u_0 = \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ v_s \cos(k_s \cdot x) e^{-|k_s|^2 t} + v_s' \cos(k_s' \cdot x) e^{-|k_s'|^2 t} \right]. \tag{3.8}$$

Além disso, para todo $t > 0$, usando (3.5) e $v_s, v_s' \in \mathbb{S}^2$, segue que

$$\begin{aligned}
t^{1/2} \left\| e^{t\Delta} u_0 \right\| &= t^{1/2} \left\| \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ v_s \cos(k_s \cdot x) e^{-|k_s|^2 t} + v_s' \cos(k_s' \cdot x) e^{-|k_s'|^2 t} \right] \right\| \\
&\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t} \left\| v_s \cos(k_s \cdot x) \right\| + t^{1/2} e^{-|k_s'|^2 t} \left\| v_s' \cos(k_s' \cdot x) \right\| \right] \\
&= \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} \left[ |k_s| t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t} \left\| v_s \cos(k_s \cdot x) \right\| + |k_s| t^{1/2} e^{-|k_s'|^2 t} \left\| v_s' \cos(k_s' \cdot x) \right\| \right] \\
&\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} \left[ |k_s| t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t} + (|k_s'| + 1) t^{1/2} e^{-|k_s'|^2 t} \right] \\
&\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} \left[ |k_s| t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t} + |k_s'| t^{1/2} e^{-|k_s'|^2 t} + t^{1/2} e^{-|k_s'|^2 t} \right].
\end{aligned}$$

Esta série de funções, dependendo de $t$, é limitada por um múltiplo de $\dfrac{Q}{\sqrt{r}}$. Para ver isso, considere a função $f_a(t) = a t^{1/2} e^{-a^2 t}$, onde $a$ é uma constante positiva, e vejamos que $f_a(t)$ é limitada e atinge seu máximo em $t_0 = \dfrac{1}{2a^2}$. Em outras palavras, temos que

$$0 \leqslant a t^{1/2} e^{-a^2 t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}} \quad \forall t > 0,$$

$$f_a(t_0) = a \left( \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \right)^{1/2} e^{-a^2 \left( \frac{1}{2a^2} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

O crucial será notar que há um intervalo compacto onde $f_a(t)$ cresce até atingir seu máximo. Mais especificamente, no intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2a^2}\right]$ a função é estritamente crescente e no intervalo $\left[\dfrac{1}{2a^2}, \infty\right)$ a função é estritamente decrescente, então $\dfrac{1}{2|k_s|^2}$ é o ponto de máximo de $|k_s|t^{1/2}e^{-a^2t}$. Em seguida, escolhemos um intervalo apropriado para que a soma das funções $f_{|k_s|}(t)$ deste tipo não se sobreponham. Vamos considerar $s \in \{1, 2, ..., r\}$ e o intervalo $A_{s,|k_s|}$ definido por

$$A_{s,|k_s|} = \left[\frac{2^{-s+1}}{2|k_s|^2}, \frac{2\log(2^{2s})}{2|k_s|^2}\right].$$

Primeiro vamos ver que $t_0 = \dfrac{1}{2|k_s|^2}$ pertence ao intervalo $A_{s,|k_s|}$. Com efeito, para $s \geqslant 1$ temos que $2^{-s+1} \leqslant 1$ e $2\log 2^{2s} > 1$, assim obtemos

$$\frac{1}{2|k_s|^2} \in A_{s,|k_s|} = \left[\frac{2^{-s+1}}{2|k_s|^2}, \frac{2\log(2^{2s})}{2|k_s|^2}\right], \quad \forall s = 1, 2, ..., r.$$

Os conjuntos $A_{s+1,|k_{s+1}|}$ e $A_{s,|k_s|}$ são disjuntos, basta notar que $2\log 2^{2(s+1)} < 2^{-s+1}$, para todo $s \in \{1, 2, ..., r-1\}$, onde log é o logaritmo natural com base $e$. Vamos demonstrar isso observando que $|k_{s+1}| = 2^s|k_s||k_0|$, e então

$$\frac{2\log 2^{2(s+1)}}{2|k_{s+1}|^2} = \frac{\log 2^{2(s+1)}}{|k_s|^2 2^{2s}|k_0|^2} < \frac{2^s|k_0|^2}{|k_s|^2 2^{2s}|k_0|^2} = \frac{2^{-s}}{|k_s|^2} = \frac{2^{-s+1}}{2|k_s|^2},$$

onde usamos o fato que $\log 2^{2(s+1)} < 2^s|k_0|^2$, para $s \geqslant 1$ e $|k_0|^2 > 1.4715$, o que pode ser assumido, uma vez que $|k_0|$ depende de $Q$ e $Q$ é grande. Então, podemos ver que

$$\left[\frac{2^{-(s+1)+1}}{2|k_{s+1}|^2}, \frac{2\log(2^{2(s+1)})}{2|k_{s+1}|^2}\right] \cap \left[\frac{2^{-s+1}}{2|k_s|^2}, \frac{2\log(2^{2s})}{2|k_s|^2}\right] = \varnothing, \quad \forall s = 1, 2, ..., r-1.$$

Então, concluímos que todos os $A_{s,|k_s|}$ são disjuntos para $s \in \{1, 2, ..., r\}$, isto é,

$$\bigcap_{i=1}^{r} A_{i,|k_i|} = \varnothing.$$

Avaliando a função $f_{|k_s|}(t)$ nos pontos extremos do intervalo $A_{s,|k_s|}$, para todo $s \in \{1, 2, ..., r\}$, temos que

$$f_{|k_s|}\left(\frac{2^{-s+1}}{2|k_s|^2}\right) = |k_s|\left(\frac{2^{-s+1}}{2|k_s|^2}\right)^{1/2} e^{-|k_s|^2\left(\frac{2^{-s+1}}{2|k_s|^2}\right)} = |k_s|\left(\frac{2^{-s/2}}{|k_s|}\right)e^{-2^{-s}} < \frac{1}{2^{s/2}},$$

$$\begin{aligned} f_{|k_s|}\left(\frac{2\log(2^s)}{2|k_s|^2}\right) &= |k_s|\left(\frac{2\log(2^s)}{2|k_s|^2}\right)^{1/2} e^{-|k_s|^2\left(\frac{2\log(2^s)}{2|k_s|^2}\right)} = \left(\log(2^{2s})\right)^{1/2} e^{-\log(2^{2s})} \\ &\leqslant \frac{(2^s)^{1/2}}{2^{2s}} = \frac{1}{2^s} < \frac{1}{2^{s/2}}, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $e^{-2^{-s}} < 1$, $\sqrt{\log(2^{2s})} < \sqrt{2^{2s}}$ e $\dfrac{1}{2^s} < \dfrac{1}{2^{s/2}}$, para $s \geqslant 1$. Assim,

$$\text{Se } t \in A_{s,|k_s|} = \left[\frac{2^{-s+1}}{2|k_s|^2}, \frac{2\log(2^{2s})}{2|k_s|^2}\right] \Rightarrow 0 \leqslant f_{|k_s|}(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}},$$
$$\text{Se } t \notin A_{s,|k_s|} = \left[\frac{2^{-s+1}}{2|k_s|^2}, \frac{2\log(2^{2s})}{2|k_s|^2}\right] \Rightarrow 0 \leqslant f_{|k_s|}(t) < \frac{1}{2^{s/2}}.$$

Então chamaremos o intervalo $A_{s,|k_s|}$ como intervalo significativo, pois os valores de $f_{|k_s|}$ fora do intervalo $A_{s,|k_s|}$ são limitados. Então, como os intervalos $A_{s,|k_s|}$ são disjuntos, a ideia será que a soma das funções $f_{|k_s|}(t)$ é limitada; com efeito, provaremos usando indução. Primeiramente, vejamos que:

$$\text{Se } t \in A_{1,|k_1|} \Rightarrow 0 \leqslant f_{|k_1|}(t) + f_{|k_2|}(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}} + \frac{1}{2^{2/2}},$$
$$\text{Se } t \in A_{2,|k_2|} \Rightarrow 0 \leqslant f_{|k_1|}(t) + f_{|k_2|}(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}} + \frac{1}{2^{1/2}},$$
$$\text{Se } t \notin A_{1,|k_1|} \cup A_{2,|k_2|} \Rightarrow 0 \leqslant f_{|k_1|}(t) + f_{|k_2|}(t) \leqslant \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{2^{2/2}}.$$

Então, podemos juntar as duas primeiras desigualdades da seguinte forma

$$\text{Se } t \in \bigcup_{i=1}^{2} A_{i,|k_i|} \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{i=1}^{2} f_{|k_i|}(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}} + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2^{i/2}},$$
$$\text{Se } t \notin \bigcup_{i=1}^{2} A_{i,|k_i|} \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{i=1}^{2} f_{|k_i|}(t) \leqslant \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2^{i/2}}.$$

Agora, para $1 < n < r$, suponha que o seguinte seja verdade:

$$\text{Se } t \in \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,|k_i|} \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} f_{|k_i|}(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i/2}},$$
$$\text{Se } t \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,|k_i|} \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} f_{|k_i|}(t) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i/2}}.$$

Então, podemos ver que:

$$\text{Se } t \in \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,|k_i|} \Rightarrow 0 \leqslant f_{|k_{n+1}|}(t) + \sum_{i=1}^{n} f_{|k_i|}(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i/2}} + \frac{1}{2^{(n+1)/2}},$$
$$\text{Se } t \in A_{n+1,|k_{n+1}|} \Rightarrow 0 \leqslant f_{|k_{n+1}|}(t) + \sum_{i=1}^{n} f_{|k_i|}(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i/2}},$$
$$\text{Se } t \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,|k_i|} \cup A_{n+1,|k_{n+1}|} \Rightarrow 0 \leqslant f_{|k_{n+1}|}(t) + \sum_{i=1}^{n} f_{|k_i|}(t) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i/2}} + \frac{1}{2^{(n+1)/2}}.$$

Novamente, juntamos as duas primeiras desigualdades para obter

$$\text{Se } t \in \bigcup_{i=1}^{n+1} A_{i,|k_i|} \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} f_{|k_i|}(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^{i/2}},$$
$$\text{Se } t \notin \bigcup_{i=1}^{n+1} A_{i,|k_i|} \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} f_{|k_i|}(t) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^{i/2}}.$$

Assim, provamos que $\sum_{s=1}^{r} |k_s| t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t}$ é limitado por uma constante, para todo $t \geqslant 0$; mais especificamente

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{r} f_{|k_s|}(t) = \sum_{s=1}^{r} |k_s| t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t} &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}} + \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{2^{s/2}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{2e}} + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^s = \frac{1}{\sqrt{2e}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.\end{aligned}$$

Se denotarmos $C = \frac{1}{\sqrt{2e}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, então vamos notar que a constante C não depende de $r$ ou $Q$, assim podemos aumentar $r$ sem qualquer alteração, logo a constante $C$ é independente de qualquer variável. Aqui usamos apenas a propriedade "*lacunary*" (3.9) de $|k_s|$. Desde que vamos usar a conclusão da limitação do somatório novamente, vamos destacá-la na sequência: existe uma constante $C > 0$, independente de $r$, tal que

$$\sum_{s=1}^{r} |k_s| t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t} < C, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Similarmente, a série $\sum_{s=1}^{r} |k'_s| t^{1/2} e^{-|k'_s|^2 t}$ é limitada, uma vez que $k'_s$ é "*lacunary*" por (3.5); assim, existe uma outra constante $C > 0$, independente de $r$, de modo que

$$\sum_{s=1}^{r} \left[ |k_s| t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t} + |k'_s| t^{1/2} e^{-|k'_s|^2 t} \right] < C, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Finalmente, a série $\sum_{s=1}^{r} t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t}$ também é limitada, vejamos que

$$\sum_{s=1}^{r} t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t} \leqslant \frac{1}{|k_0|} \sum_{s=1}^{r} |k_s| t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t} \leqslant \frac{1}{|k_0|} C < C.$$

Logo, existe uma constante $C > 0$, novamente independente de $r$, tal que, para todo $t \geqslant 0$, temos a estimativa

$$t^{1/2} \left\| e^{t\Delta} u_0(x) \right\| \leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} \left[ |k_s| t^{1/2} e^{-|k_s|^2 t} + |k'_s| t^{1/2} e^{-|k'_s|^2 t} + t^{1/2} e^{-|k'_s|^2 t} \right] < C \frac{Q}{\sqrt{r}}.$$

Portanto, chegamos a seguinte estimativa para a norma do dado inicial

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/2} \left\| e^{t\Delta} u_0 \right\|_{\infty} < C \frac{Q}{\sqrt{r}}.$$

Agora, seja $\delta > 0$ pequeno, então iremos escolher $r$ de tal forma que

$$C \frac{Q}{\sqrt{r}} < \delta. \tag{3.10}$$

Em vista de (3.10), se $Q$ cresce, então $r$ também deve crescer, de modo que a desigualdade seja preservada. Assim, concluímos que

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}} < \delta.$$

Em resumo, esta seção nos diz que, para cada $\delta > 0$, temos um dado inicial $u_0$, cuja expressão é dada por (3.3), tal que $\nabla \cdot u_0 = 0$ e sua norma no espaço de Besov $\dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}$ é menor que $\delta$.

## 3.2 Análise da primeira iterada

Uma vez que temos os dados iniciais $u_0$, vamos agora analisar a parte $u_1$ da equação (3.1) dada por $u_1(t,x) = B(e^{t\Delta}u_0(x), e^{t\Delta}u_0(x))$. Primeiro, vamos lembrar que, por (3.8), temos o seguinte

$$e^{t\Delta}u_0 = \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ v_s \cos(k_s \cdot x) e^{-|k_s|^2 t} + v_s' \cos(k_s' \cdot x) e^{-|k_s'|^2 t} \right].$$

Então, podemos calcular $((e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla) e^{t\Delta}u_0)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
((e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla) e^{t\Delta}u_0) &= \sum_{j=1}^{3} (e^{t\Delta}u_0)^j \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{t\Delta}u_0) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left( \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ v_s^j \cos(k_s \cdot x) e^{-|k_s|^2 t} + v'^j_s \cos(k_s' \cdot x) e^{-|k_s'|^2 t} \right] \right) \cdot \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^{r} |k_s| \left[ v_s \cos(k_s \cdot x) e^{-|k_s|^2 t} + v_s' \cos(k_s' \cdot x) e^{-|k_s'|^2 t} \right] \right) \\
&= \frac{Q^2}{r} \sum_{s=1}^{r} \sum_{q=1}^{r} \sum_{j=1}^{3} \left( |k_s| \left[ v_s^j \cos(k_s \cdot x) e^{-|k_s|^2 t} + v'^j_s \cos(k_s' \cdot x) e^{-|k_s'|^2 t} \right] \right) \cdot \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left( |k_q| \left[ v_q \cos(k_q \cdot x) e^{-|k_q|^2 t} + v_q' \cos(k_q' \cdot x) e^{-|k_q'|^2 t} \right] \right).
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\cos(k_q\cdot x) = (-\mathrm{sen}(k_q\cdot x)k_q^j)$, então

$$\begin{aligned}
&\frac{Q^2}{r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}\sum_{j=1}^{3}\left(|k_s|\left[v_s^j\cos(k_s\cdot x)e^{-|k_s|^2t} + {v'}_s^j\cos(k'_s\cdot x)e^{-|k'_s|^2t}\right]\right)\cdot\\
&\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|k_q|\left[v_q\cos(k_q\cdot x)e^{-|k_q|^2t} + v'_q\cos(k'_q\cdot x)e^{-|k'_q|^2t}\right]\right)\\
&= \frac{Q^2}{r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}\sum_{j=1}^{3}\left(|k_s|\left[v_s^j\cos(k_s\cdot x)e^{-|k_s|^2t} + {v'}_s^j\cos(k'_s\cdot x)e^{-|k'_s|^2t}\right]\right)\cdot\\
&\left(|k_q|\left[v_q(-\mathrm{sen}(k_q\cdot x)k_q^j)e^{-|k_q|^2t} + v'_q(-\mathrm{sen}({k'}_q\cdot x){k'}_q^j)e^{-|k'_q|^2t}\right]\right)\\
&= \frac{Q^2}{r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}\sum_{j=1}^{3}\Bigg(|k_s||k_q|\left[v_s^j\cos(k_s\cdot x)e^{-|k_s|^2t} + {v'}_s^j\cos(k'_s\cdot x)e^{-|k'_s|^2t}\right]\cdot\\
&\left[-k_q^jv_q\mathrm{sen}(k_q\cdot x)e^{-|k_q|^2t} - {k'}_q^jv'_q\mathrm{sen}({k'}_q\cdot x)e^{-|k'_q|^2t}\right]\Bigg)\\
&= \frac{Q^2}{r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}|k_s||k_q|\sum_{j=1}^{3}\Bigg(-v_s^jk_q^jv_q\cos(k_s\cdot x)\mathrm{sen}(k_q\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k_q|^2)t}\\
&\quad - v_s^j{k'}_q^j{v'}_q\cos(k_s\cdot x)\mathrm{sen}({k'}_q\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|{k'}_q|^2)t}\\
&\quad - {v'}_s^jk_q^jv_q\cos({k'}_s\cdot x)\mathrm{sen}(k_q\cdot x)e^{-(|{k'}_s|^2+|k_q|^2)t}\\
&\quad - {v'}_s^j{k'}_q^j{v'}_q\cos({k'}_s\cdot x)\mathrm{sen}({k'}_q\cdot x)e^{-(|{k'}_s|^2+|{k'}_q|^2)t}\Bigg).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando a fórmula $\cos(a)\text{sen}(b) = \dfrac{1}{2}(\text{sen}(a+b) - sen(a-b))$, podemos escrever o lado direito em (3.11) como

$$
\begin{aligned}
\text{L.D. de (3.11)} = \frac{Q^2}{r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}|k_s||k_q|\Big(&-\sum_{j=1}^{3} v_s^j k_q^j v_q \cos(k_s\cdot x)\text{sen}(k_q\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k_q|^2)t}\\
&-\sum_{j=1}^{3} v_s^j k'^j_q v'_q \cos(k_s\cdot x)\text{sen}(k'_q\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_q|^2)t}\\
&-\sum_{j=1}^{3} v'^j_s k^j_q v_q \cos(k'_s\cdot x)\text{sen}(k_q\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_q|^2)t}\\
&-\sum_{j=1}^{3} v'^j_s k'^j_q v'_q \cos(k'_s\cdot x)\text{sen}(k'_q\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_q|^2)t}\Big)\\
= \frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}|k_s||k_q|\Big(&-v_s\cdot k_q v_q\text{sen}((k_s+k_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k_q|^2)t}\\
&+v_s\cdot k_q v_q\text{sen}((k_s-k_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k_q|^2)t}\\
&-v_s\cdot k'_q v'_q\text{sen}((k_s+k'_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_q|^2)t}\\
&+v_s\cdot k'_q v'_q\text{sen}((k_s-k'_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_q|^2)t}\\
&-v'_s\cdot k_q v_q\text{sen}((k'_s+k_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_q|^2)t}\\
&+v'_s\cdot k_q v_q\text{sen}((k'_s-k_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_q|^2)t}\\
&-v'_s\cdot k'_q v'_q\text{sen}((k'_s+k'_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_q|^2)t}\\
&+v'_s\cdot k'_q v'_q\text{sen}((k'_s-k'_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_q|^2)t}\Big)\\
= \frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}|k_s||k_q|\Big(&\mp v_s\cdot k_q v_q\text{sen}((k_s\pm k_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k_q|^2)t}\\
&\mp v_s\cdot k'_q v'_q\text{sen}((k_s\pm k'_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_q|^2)t}\\
&\mp v'_s\cdot k_q v_q\text{sen}((k'_s\pm k_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_q|^2)t}\\
&\mp v'_s\cdot k'_q v'_q\text{sen}((k'_s\pm k'_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_q|^2)t}\Big).
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Podemos agora dividir esta soma em duas partes, uma onde $q \neq s$, e outra onde $q = s$; primeiro supondo que $q = s$ em (3.12), chegamos a

$$
\begin{aligned}
&\text{L.D. de (3.12)}\\
&= \frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=s}|k_s||k_s|\Big(\mp k_s\cdot v_s v_s\text{sen}((k_s\pm k_s)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k_s|^2)t}\\
&\mp k'_s\cdot v_s v'_s\text{sen}((k_s\pm k'_s)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}\\
&\mp k_s\cdot v'_s v_s\text{sen}((k'_s\pm k_s)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_s|^2)t}\\
&\mp k'_s\cdot v'_s v'_s\text{sen}((k'_s\pm k'_s)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_s|^2)t}\Big).
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Usando $k_s \cdot v_s = 0 = k'_s \cdot v'_s$, obtemos que

$$\text{L.D. de (3.13)} = \frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2\Big( \mp k'_s \cdot v_s v'_s \text{sen}((k_s \pm k'_s)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}$$
$$\mp k_s \cdot v'_s v_s \text{sen}((k'_s \pm k_s)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_s|^2)t}\Big), \tag{3.14}$$

logo

L.D. de (3.14)

$$= \frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2 e^{-(|k'_s|^2+|k_s|^2)t}\text{sen}((k_s \pm k'_s)\cdot x)[\mp k'_s \cdot v_s v'_s - k_s \cdot v'_s v_s]$$
$$= \frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2 e^{-(|k'_s|^2+|k_s|^2)t}\text{sen}((k_s \pm k'_s)\cdot x)[((-k_s \mp k'_s)\cdot v_s)v'_s + ((-k_s \mp k'_s)\cdot v'_s)v_s]$$

$$= -\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2 e^{-(|k'_s|^2+|k_s|^2)t}\text{sen}((k_s \pm k'_s)\cdot x)[((k_s \pm k'_s)\cdot v'_s)v_s + ((k_s \pm k'_s)\cdot v_s)v'_s]. \tag{3.15}$$

Observe o símbolo $\pm$ em (3.15), que é uma abreviação para considerar uma soma positiva e uma soma negativa, então, vamos dividir a série $((e^{t\Delta}u_0 \cdot \nabla)e^{t\Delta}u_0)$ em 3 partes, $N_1$ é a parte negativa de (3.15), $N_2$ é a parte positiva de (3.15), e $N_3$ é (3.12) quando $q \neq s$, isto é

$$N_1(t,x) = -\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2 e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}\text{sen}((\eta)\cdot x)[((\eta)\cdot v'_s)v_s + ((\eta)\cdot v_s)v'_s],$$

$$N_2 = -\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2 e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}\text{sen}((k_s + k'_s)\cdot x)[((k_s + k'_s)\cdot v'_s)v_s + ((k_s + k'_s)\cdot v_s)v'_s],$$

e

$$N_3(t,x) = \frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|\Big( \mp v_s \cdot k_q v_q \text{sen}((k_s \pm k_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k_q|^2)t}$$
$$\mp v_s \cdot k'_q v'_q \text{sen}((k_s \pm k'_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_q|^2)t}$$
$$\mp v'_s \cdot k_q v_q \text{sen}((k'_s \pm k_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_q|^2)t}$$
$$\mp v'_s \cdot k'_q v'_q \text{sen}((k'_s \pm k'_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_q|^2)t}\Big).$$

Uma vez que separamos essas três partes, vamos calcular a norma em $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ e a quantidade $\|\cdot\|_{X_T}$ de cada uma delas. De fato, $\|\cdot\|_{X_T}$ também tem propriedades de norma em um espaço funcional considerado na análise das equações de Navier-Stokes em $BMO^{-1}$, veja [17]. Antes disso, vamos ver que, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[k\beta\text{sen}(\alpha\cdot x)] &= k\beta\text{sen}(\alpha\cdot x) + \nabla\left(\frac{1}{(-\Delta)}\nabla\cdot(k\beta\text{sen}(\alpha\cdot x))\right)\\ &= k\beta\text{sen}(\alpha\cdot x) + \nabla\left(\frac{1}{(-\Delta)}(k\alpha\cdot\beta\cos(\alpha\cdot x))\right)\\ &= k\beta\text{sen}(\alpha\cdot x) + \nabla\left(\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|^2}k\cos(\alpha\cdot x)\right)\\ &= k\left(\beta\text{sen}(\alpha\cdot x) - \alpha\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|^2}\text{sen}(\alpha\cdot x)\right).\end{aligned}$$

Segue que

$$\mathbb{P}[k\beta \mathrm{sen}(\alpha \cdot x)] = k\left(\beta \mathrm{sen}(\alpha \cdot x) - \alpha \frac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\|^2} \mathrm{sen}(\alpha \cdot x)\right). \tag{3.16}$$

## Norma de $N_1$ em $\dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}$

Agora vamos calcular a norma de $N_1$ em $\dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^3)$, onde usamos a caracterização da norma dos espaços de Besov não homogêneos na forma do grupo de calor, que pode ser visto em Lemarié-Rieusset [18], p. 44.

$$\|f\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/2} \left\|e^{t\Delta} f\right\|_{\infty}.$$

Então, usando (3.6), (3.7) e (3.16), obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}N_1(t,x) &= -\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r} |k_s|^2 e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}\mathbb{P}\left[\mathrm{sen}(\eta \cdot x)[(\eta \cdot v'_s)v_s + (\eta \cdot v_s)v'_s]\right] \\
&= -\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r} |k_s|^2 e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}\mathbb{P}\left[\frac{1}{2}(v_s + v'_s)\mathrm{sen}(\eta \cdot x)\right] \\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r} |k_s|^2 e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}\left((v_s + v'_s - \eta)\mathrm{sen}(\eta \cdot x)\right).
\end{aligned}$$

Agora, considere $u_1$ dado por

$$u_1 = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_1(s,x)ds,$$

então

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_1(s,x)ds \\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r} |k_s|^2 \int_0^t e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)s}\left((v_s + v'_s - \eta)e^{-(t-s)|\eta|^2}\mathrm{sen}(\eta \cdot x)\right) ds \\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r} |k_s|^2 \int_0^t e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2-|\eta|^2)s} e^{-t|\eta|^2} ds \left((v_s + v'_s - \eta)\mathrm{sen}(\eta \cdot x)\right) \\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r} |k_s|^2 \int_0^t e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2-1)s} e^{-t} ds \left((v_s + v'_s - \eta)\mathrm{sen}(\eta \cdot x)\right) \\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r} |k_s|^2 \left(\frac{1 - e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2-1)t}}{|k_s|^2 + |k'_s|^2 - 1}\right) e^{-t}\left((v_s + v'_s - \eta)\mathrm{sen}(\eta \cdot x)\right) \\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r} \frac{|k_s|^2}{|k_s|^2 + |k'_s|^2 - 1}\left(e^{-t} - e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}\right)\left((v_s + v'_s - \eta)\mathrm{sen}(\eta \cdot x)\right),
\end{aligned}$$

onde $\eta = k_s - k_s'$ é um vetor unitário. Assim,

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} N_1(s,x) ds \right\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{1/2} \left\| e^{t\Delta} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} N_1(s,x) ds \right\|_{\infty} \\
= \sup_{t>0} t^{1/2} & \left\| e^{t\Delta} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} N_1(s,x) ds \right\|_{\infty} \\
= \sup_{t>0} t^{1/2} & \left\| -\frac{Q^2}{4r} \sum_{s=1}^{r} \frac{|k_s|^2}{|k_s|^2 + |k'_s|^2 - 1} \left( e^{-t} - e^{-(|k_s|^2 + |k'_s|^2)t} \right) \left( (v_s + v_s' - \eta) e^{t\Delta} \mathrm{sen}(\eta \cdot x) \right) \right\|_{\infty} \\
= \frac{Q^2}{4r} \sup_{t>0} t^{1/2} & \left| \sum_{s=1}^{r} \left( \frac{|k_s|^2}{|k_s|^2 + |k'_s|^2 - 1} \right) \left( e^{-t} - e^{-(|k_s|^2 + |k'_s|^2)t} \right) \right| \\
\times & \left\| \left( (v_s + v_s' - \eta) e^{-t|\eta|^2} \mathrm{sen}(\eta \cdot x) \right) \right\|_{\infty} \\
= \frac{Q^2}{4r} \sup_{t>0} t^{1/2} & \left| \sum_{s=1}^{r} \left( \frac{|k_s|^2}{|k_s|^2 + |k'_s|^2 - 1} \right) \left( e^{-t} - e^{-(|k_s|^2 + |k'_s|^2)t} \right) e^{-t} \right| \\
\times & \left\| ((v_s + v_s' - \eta) \mathrm{sen}(\eta \cdot x)) \right\|_{\infty} \\
= \frac{Q^2}{4r} \sup_{t>0} & \left| \sum_{s=1}^{r} \left( \frac{|k_s|^2}{|k_s|^2 + |k'_s|^2 - 1} \right) \left( t^{1/2} e^{-2t} - t^{1/2} e^{-(|k_s|^2 + |k'_s|^2 + 1)t} \right) \right| \\
\times & \left\| ((v_s + v_s' - \eta) \mathrm{sen}(\eta \cdot x)) \right\|_{\infty} .
\end{aligned}
$$

Agora, lembrando que $k_0$ pode ser tomado muito maior que $Q$, e assumindo ao menos que $|k_0| > 2$, usando (3.4) e (3.5), temos que $|k_s| > 8$ e $7 < |k_s'| < 9$, para $s \in \{1, 2, ..., r\}$. Segue que

$$0.4444 < c_s = \frac{|k_s|^2}{|k_s|^2 + |k'_s|^2 - 1} < 0.5714.$$

Observe que $c_s \to 0.5$ quando $s \to \infty$. Logo, podemos considerar

$$c_s \approx 0.5, \quad \forall s \in \{1, 2, ..., r\}, \text{ para } s \text{ suficientemente grande.} \tag{3.17}$$

Por outro lado, novamente, se $|k_0|$ é pelo menos maior que 2, então $|k_s|^2 + |k_s'|^2 + 1$ é muito grande, por (3.4) e (3.5). Assim, podemos estimar

$$t^{1/2} e^{-(|k_s|^2 + |k'_s|^2 + 1)t} < t^{1/2} e^{-2t}, \quad \forall t > 0, s = 1, 2, ..., r.$$

Agora $f_1 = t^{1/2} e^{-2t}$ é uma função limitada que tem um máximo global em $t = \dfrac{1}{4}$, em outras palavras

$$0 \leqslant t^{1/2} e^{-2t} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{e}}, \qquad\qquad f_1(1/4) = \frac{1}{2\sqrt{e}}, \quad \forall t > 0.$$

Por outro lado, a função $f_{2,s}(t) = t^{1/2}e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2+1)t}$ também é limitada e atinge seu máximo global no ponto $t = \dfrac{1}{2(|k_s|^2+|k'_s|^2+1)}$, mais especificamente

$$0 \leqslant f_{2,s}(t) = t^{1/2}e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2+1)t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e(|k_s|^2+|k'_s|^2+1)}}, \quad \forall t > 0$$
$$f_2\left(\frac{1}{2(|k_s|^2+|k'_s|^2+1)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e(|k_s|^2+|k'_s|^2+1)}}.$$

Novamente vamos aproximar o valor de $\dfrac{1}{\sqrt{2e(|k_s|^2+|k'_s|^2+1)}}$, para ver que $f_{2,s}$ é bem pequeno e não há problema em substituí-lo por um certo termo adequado. Suponha novamente que $|k_0| > 2$, então por (3.4) temos que $|k_s| > 8$ para $s \in \{1,2,...,r\}$. Usando (3.5), podemos concluir que $\dfrac{1}{2}|k_s|^2 < |k'_s|^2 + 1$, logo $(3/2)|k_s^2| < |k_s|^2 + |k'_s|^2 + 1$ e

$$\frac{1}{\sqrt{2e}\sqrt{|k_s|^2+|k'_s|^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{2e}\left(\sqrt{\frac{3}{2}|k_s|^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3e}|k_s|}.$$

Desde que $s$ cresce em direção ao infinito, então $\dfrac{1}{\sqrt{2e(|k_s|^2+|k'_s|^2+1)}}$ converge para 0. Assim, $f_{2,s}(t)$ é limitado por $\dfrac{1}{\sqrt{3e}}\dfrac{1}{|k_s|}$, para todo $s \in \{1,2,...,r\}$. Então, temos que $f_1 > f_{2,s}$, $0 \leqslant f_1 \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ e $0 \leqslant f_{2,s} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3e}|k_s|}$, onde podemos supor que $|k_s| > 8$ para todo $s$. Logo $f(1/4) - f_{2,s}(1/4) > \dfrac{1}{2\sqrt{e}} - \dfrac{1}{\sqrt{3e}|k_s|}$ e $f(t) - f_{2,s}(t) < \dfrac{1}{2\sqrt{e}}$, o que nos leva a estimativa

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}|k_s|}\right) \leqslant \sup_{t>0}(f_1(t) - f_{2,s}(t)) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{e}}.$$

Por (3.4), temos que $\dfrac{1}{|k_s|}$ vai rapidamente para 0, então

$$\sup_{t>0}\,(f_1(t) - f_{2,s}(t)) \approx \frac{1}{2\sqrt{e}}. \tag{3.18}$$

Finalmente, observe que $v_s$, $v'_s$ e $\eta$ são unitários e $\text{sen}(\eta \cdot x)$ é limitado por 1, assim $\|((v_s + v'_s - \eta)\text{sen}(\eta \cdot x))\|_\infty$ é menor que 3; então existe uma constante $C$, não maior do que 3, de modo que

$$\|((v_s + v'_s - \eta)\text{sen}(\eta \cdot x))\|_\infty = C. \tag{3.19}$$

A seguir, usando as aproximações (3.17), (3.18) e (3.19) e considerando $C > 0$ uma constante cujo valor pode mudar quando combinado com outras constantes, obtemos que

$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_1(s,x)ds\right\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}} \approx \frac{Q^2}{4r}\sum_1^r 0.5\frac{1}{2\sqrt{e}}C = \left(\frac{0.5C}{8\sqrt{e}}\right)\frac{Q^2}{r}r = CQ^2. \tag{3.20}$$

Assim, a norma $\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_1(s,x)ds\right\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}}$ cresce quando $Q$ também cresce, ou seja, esta norma pode ser "inflada" por $Q$. este fenômeno é denominado "inflação da norma" e será usado mais tarde.

## Norma de $N_2$ em $X_T$

Nesta parte vamos estimar a integral $\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(s,x)ds$, como fizemos com $N_1$. Usando (3.6), (3.7) e (3.16), concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}N_2(t,x)\\
&= -\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2 e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}\mathbb{P}[\mathrm{sen}((k_s+k'_s)\cdot x)((k_s+k'_s)\cdot v'_s)v_s + ((k_s+k'_s)\cdot v_s)v'_s]\\
&= -\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2 e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}\mathbb{P}\left[\frac{1}{2}(v_s-v'_s)\mathrm{sen}((k_s+k'_s)\cdot x)\right]\\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2 e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)t}\left(\left(v_s-v'_s+\frac{k_s+k'_s}{|k_s+k'_s|^2}\right)\mathrm{sen}((k_s+k'_s)\cdot x)\right).
\end{aligned}
$$

Para facilitar o manuseio, denote

$$
u_2 = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(s,x)ds.
$$

Agora, procedemos como segue

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(s,x)ds\\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2\int_0^t e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2)s}\left(\left(v_s-v'_s+\frac{k_s+k'_s}{|k_s+k'_s|^2}\right)e^{-(t-s)|k_s+k'_s|^2}\right.\\
&\qquad\left.\times\ \mathrm{sen}((k_s+k'_s)\cdot x)\right)ds\\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2\int_0^t e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2-|k_s+k'_s|^2)s}e^{-t|k_s+k'_s|^2}ds\\
&\qquad\times\left(\left(v_s-v'_s+\frac{k_s+k'_s}{|k_s+k'_s|^2}\right)\mathrm{sen}((k_s+k'_s)\cdot x)\right)\\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2\left(\frac{e^{-(|k_s|^2+|k'_s|^2-|k_s+k'_s|^2)s}e^{-t|k_s+k'_s|^2}}{-(|k_s|^2+|k'_s|^2-|k_s+k'_s|^2)}\right)\Bigg|_0^t\\
&\qquad\times\left(\left(v_s-v'_s+\frac{k_s+k'_s}{|k_s+k'_s|^2}\right)\mathrm{sen}((k_s+k'_s)\cdot x)\right)\\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2\left(\frac{e^{-t(|k_s|^2+|k'_s|^2-|k_s+k'_s|^2)}e^{-t|k_s+k'_s|^2}-e^{-t|k_s+k'_s|^2}}{|k_s+k'_s|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2}\right)\\
&\qquad\times\left(\left(v_s-v'_s+\frac{k_s+k'_s}{|k_s+k'_s|^2}\right)\mathrm{sen}((k_s+k'_s)\cdot x)\right)\\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}|k_s|^2\left(\frac{e^{-t(|k_s|^2+|k'_s|^2)}-e^{-t|k_s+k'_s|^2}}{|k_s+k'_s|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2}\right)\\
&\qquad\times\left(\left(v_s-v'_s+\frac{k_s+k'_s}{|k_s+k'_s|^2}\right)\mathrm{sen}((k_s+k'_s)\cdot x)\right).
\end{aligned}
$$

Assim

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(s,x)ds = -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\left(|k_s|^2 e^{-t(|k_s|^2+|k'_s|^2)}\right)\left(\frac{1-e^{-t(|k_s+k_s'|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2)}}{|k_s+k_s'|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2}\right)$$
$$\times\left(\left(v_s - v_s' + \frac{k_s+k_s'}{|k_s+k_s'|^2}\right)\operatorname{sen}((k_s+k_s')\cdot x)\right).$$

Logo, temos que

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(s,x)ds = -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\left(|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)\left(|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right)\left(\frac{1-e^{-t(|k_s+k_s'|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2)}}{|k_s+k_s'|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2}\right)$$
$$\times\left(\left(v_s - v_s' + \frac{k_s+k_s'}{|k_s+k_s'|^2}\right)\operatorname{sen}((k_s+k_s')\cdot x)\right).$$

A seguir, analisamos a norma de $u_2$ em $X_T$, isto é,

$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(s,x)ds\right\|_{X_T} = \sup_{t>0} t^{1/2}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(s,x)ds\right\|_{\infty}$$
$$+\sup_{x_0}\sup_{0<R<T}\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^R\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(y,s)ds\right|^2 dydt\right)^{1/2}.$$

Para estimar esta norma, vamos primeiro ver que a função $f_\lambda(t) = \left(\frac{1-e^{-t\lambda}}{\lambda t}\right)$ é limitada para $t \geqslant 0$, quando $\lambda > 0$. Com efeito,

$$f_\lambda(t) = \left(\frac{1-e^{-t\lambda}}{\lambda t}\right) \leqslant 1, \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Por (3.5), temos que $|k_s+k_s'|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2$ é positivo. Assumindo que $|k_0|>1$, para cada $s \in \{1,2,...,r\}$

$$\begin{aligned}|k_s+k_s'|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2 &= (k_s+k_s')\cdot(k_s+k_s') - k_s\cdot k_s - k'_s\cdot k'_s\\ &= 2k_s\cdot k'_s = k_s\cdot k_s - k_s\cdot\eta > 0.\end{aligned}$$

Então, chegamos a desigualdade

$$\left(\frac{1-e^{-t(|k_s+k_s'|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2)}}{(|k_s+k_s'|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2)t}\right) \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Além disso $v_s, v'_s$ são unitários, $\frac{k_s+k_s'}{|k_s+k_s'|^2}$ é um vetor cujo comprimento é $\frac{1}{|k_s+k_s'|} < 1$ e $|\operatorname{sen}((k_s+k_s')\cdot x)| \leqslant 1$. Então, existe uma constante $C>0$, não do que 3, de modo que

$$\left\|\left(v_s - v_s' + \frac{k_s+k_s'}{|k_s+k_s'|^2}\right)\operatorname{sen}((k_s+k_s')\cdot x)\right\|_{\infty} = C.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}t^{1/2}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}N_2 ds\right\|_\infty &= t^{1/2}\Bigg\| -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\left(|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)\left(t|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right)\\ &\times\left(\frac{1-e^{-t(|k_s+k'_s|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2)}}{(|k_s+k'_s|^2-|k_s|^2-|k'_s|^2)t}\right)\left(\left(v_s-v'_s+\frac{k_s+k'_s}{|k_s+k'_s|^2}\right)\operatorname{sen}((k_s+k'_s)\cdot x)\right)\Bigg\|_\infty\\ &\leqslant \frac{Q^2}{4r}\left|\sum_{s=1}^{r}\left(t^{1/2}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)\left(t|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right)\right| C.\end{aligned}$$

Agora $g(t)=t|k_s|e^{-t|k'_s|^2}$ é uma função que atinge seu máximo global em $t_0=\dfrac{1}{|k'_s|^2}$ e onde seu valor é $f(t_0)=\left(\dfrac{|k_s|}{|k'_s|^2}e^{-1}\right)$, se $|k_0|>1$. Então, por (3.4), temos que $\dfrac{|k_s|}{|k'_s|^2}\approx 0$; logo, para cada $s\in\{1,2,...,r\}$, chegamos a estimativa

$$\left(t|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right) < e^{-1}, \quad \forall t\geqslant 0.$$

Então, considerando $C>0$ como uma constante que pode mudar quando associada a outras constantes e usando (3.9), para todo $t\geqslant 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}t^{1/2}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}N_2 ds\right\|_\infty &\leqslant \frac{Q^2}{4r}\left|\sum_{s=1}^{r}\left(t^{1/2}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)\left(t|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right)\right| C\\ &< C\frac{Q^2}{r}\left|\sum_{s=1}^{r} t^{1/2}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right| < C\frac{Q^2}{r}.\end{aligned}$$

Assim concluimos que

$$\sup_{t>0} t^{1/2}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(s,x)ds\right\|_\infty < C\frac{Q^2}{r}. \tag{3.21}$$

Por outro lado, usando as mesmas desigualdades acima, se $x_0\in\mathbb{R}^3$ e $0<R<T$, então

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^R\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(y,s)ds\right|^2 dydt\right)^{1/2}\\ &\leqslant \left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^R\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\left|\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\left(|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)\left(t|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right)C\right|^2 dydt\right)^{1/2}\\ &\leqslant C\frac{Q^2}{4r}\left(\int_0^R\left|\sum_{s=1}^{r}\left(t^{1/2}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)\left(t^{1/2}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right)\right|^2\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}dydt\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Aqui podemos ver que $\displaystyle\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}dy$ cumpre o seguinte

$$\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}dy=\frac{|B(x_0,\sqrt{R})|}{|B(x_0,\sqrt{R})|}=1.$$

Por outro lado, a função $f_s(t) = t^{1/2}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}$ é limitada, mais especificamente

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant f_s(t) &\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)\frac{|k_s|}{|k'_s|},\\
f_s\left(\frac{1}{2|k'_s|^2}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)\frac{|k_s|}{|k'_s|}.
\end{aligned}
$$

Para $|k_0| > 2$, temos que $|k_s| > 8$. Logo, por (3.5), segue que $0.889 < \dfrac{|k_s|}{|k'_s|} < 1.143$. Então, usando (3.4) e (3.5), podemos considerar $\dfrac{|k_s|}{|k'_s|} \approx 1$. Com isso, podemos estimar

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^R\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(y,s)ds\right|^2 dydt\right)^{1/2}\\
&\leqslant C\frac{Q^2}{4r}\left(\int_0^R\left|\sum_{s=1}^r\left(t^{1/2}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)\left(t^{1/2}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right)\right|^2\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}dydt\right)^{1/2}\\
&\approx C\frac{Q^2}{4r}\frac{1}{\sqrt{2e}}\left(\int_0^R\left(\sum_{s=1}^r t^{1/2}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)^2 dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Agora vejamos que

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{s=1}^r t^{1/2}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)^2 &= \left(\sum_{s=1}^r t^{1/2}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)\left(\sum_{q=1}^r t^{1/2}|k_q|e^{-t|k_q|^2}\right)\\
&= \sum_{s=1}^r\sum_{q=1}^r t^{1/2}|k_s|t^{1/2}|k_q|e^{-t|k_s|^2}e^{-t|k_q|^2}\\
&= \sum_{q=1}^r |k_q|e^{-t|k_q|^2}\left(\sum_{s=1}^r t|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right).
\end{aligned}
$$

Vimos anteriormente que uma função do tipo $g_s(t) = t|k_s|e^{-t|k_s|^2}$ é limitada, com efeito

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant g_s(t) = t|k_s|e^{-t|k_s|^2} &\leqslant \frac{e^{-1}}{|k_s|},\\
g_s\left(\frac{1}{|k_s|^2}\right) &= \frac{e^{-1}}{|k_s|}.
\end{aligned}
$$

Usando a propriedade "*lacunary*" de $k_s$ (veja (3.4)), se $|k_s| = 2^{\frac{s(s+1)}{2}}|k_s|^{s+1}$ e $|k_0| > 2$, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^r t|k_s|e^{-t|k_s|^2} &\leqslant \sum_{s=1}^r\frac{e^{-1}}{|k_s|} = e^{-1}\sum_{s=1}^r\frac{1}{2^{\frac{s(s+1)}{2}}|k_0|^{s+1}}\\
&< e^{-1}\sum_{s=0}^\infty\left(\frac{1}{2^{\frac{s}{2}}|k_0|}\right)^s\\
&< e^{-1}\sum_{s=0}^\infty\left(\frac{1}{2}\right)^s < \infty.
\end{aligned}
$$

Assim, existe uma constante $C > 0$, não dependendo de $r$, tal que $\sum_{s=1}^{r} g_s(t) \leqslant C$; logo

$$\begin{aligned}\left(\sum_{s=1}^{r} t^{1/2}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)^2 &= \sum_{q=1}^{r} |k_q|e^{-t|k_q|^2}\left(\sum_{s=1}^{r} t|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)\\ &\leqslant C\sum_{q=1}^{r} |k_q|e^{-t|k_q|^2}.\end{aligned}$$

Assim, a partir da desigualdade acima, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^R \left(\sum_{s=1}^{r} |k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)^2 dt\right)^{1/2} &\leqslant \left(\int_0^R C\sum_{q=1}^{r} |k_q|e^{-t|k_q|^2}dt\right)^{1/2}\\ &\leqslant \sqrt{C}\left(\sum_{q=1}^{r} |k_q|\int_0^R e^{-t|k_q|^2}dt\right)^{1/2}\\ &\leqslant \sqrt{C}\left(\sum_{q=1}^{r} |k_q|\left(\frac{1-e^{-R|k_q|^2}}{|k_q|^2}\right)\right)^{1/2}\\ &\leqslant \sqrt{C}\left(\sum_{q=1}^{r} \frac{1-e^{-R|k_q|^2}}{|k_q|}\right)^{1/2}\\ &< \sqrt{C}r^{1/2}.\end{aligned}$$

Nos termos acima, observe que $\dfrac{1-e^{-R|k_q|^2}}{|k_q|} < 1$, pois $|k_q| > 1$ e $1 - e^{-R|k_q|^2} < 1$, para todo $0 < R < T$. Assim, coletando as estimativas e constantes anteriores, obtemos que

$$\sup_{x_0}\sup_{0<R<T}\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^R\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(y,s)ds\right|^2 dydt\right)^{1/2} \leqslant C\frac{Q^2}{r}r^{1/2}. \tag{3.22}$$

Agora, usando (3.21) e (3.22) em conjunto, e desde que por (3.10) podemos assumir r>1, obtemos as seguintes estimativas

$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_2(s,x)ds\right\|_{X_T} < C\left(\frac{Q^2}{r} + \frac{Q^2}{r}r^{1/2}\right) \leqslant C\frac{Q^2}{\sqrt{r}}. \tag{3.23}$$

## Norma de $N_3$ em $X_T$

Finalmente, calculamos a norma de $N_3$ em $X_T$. Vejamos que

$$\begin{aligned}N_3(t,x) = \frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|\Big( &\mp v_s\cdot k_q v_q \mathrm{sen}((k_s \pm k_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k_q|^2)t}\\ &\mp v_s\cdot {k'}_q {v'}_q \mathrm{sen}((k_s \pm {k'}_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|{k'}_q|^2)t}\\ &\mp {v'}_s\cdot k_q v_q \mathrm{sen}(({k'}_s \pm k_q)\cdot x)e^{-(|{k'}_s|^2+|k_q|^2)t}\end{aligned}$$

$$\mp v'_s \cdot k'_q v'_q \text{sen}((k'_s \pm k'_q) \cdot x) e^{-(|k'_s|^2 + |k'_q|^2)t}\Big). \quad (3.24)$$

Para analisar (3.24), precisamos suas parcelas e fatores separadamente. Primeiro, escolhemos os $k_s$ para que sejam paralelos a $k_0$, então, para todo $1 \leqslant k_s, k_q \leqslant r$, temos que

$$k_s = \frac{|k_s|}{|k_q|} k_q,$$
$$k_q = \frac{|k_q|}{|k_s|} k_s.$$

Note agora que $k_q \cdot v_s = \frac{|k_q|}{|k_s|} k_s \cdot v_s = 0$, e então

$$\begin{aligned}
k_q \cdot v_s &= \frac{|k_q|}{|k_s|} k_s \cdot v_s = 0, \\
k'_q \cdot v_s &= (k_q - \eta) \cdot v_s = -\eta \cdot v_s = -\frac{1}{2}, \\
k_q \cdot v'_s &= \frac{|k_q|}{|k_s|} k_s \cdot v'_s = \frac{1}{2} \frac{|k_q|}{|k_s|}, \\
k'_q \cdot v'_s &= \left( \frac{|k_q|}{|k_s|} k_s - \eta \right) v'_s = \frac{1}{2} \frac{|k_q|}{|k_s|} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

A seguir, podemos usar (3.16) para calcular os três seguintes termos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\mp k'_q \cdot v_s v'_q \text{sen}((k_s \pm k'_q) \cdot x)\right] \\
&= \pm \frac{1}{2} \left( v'_q \text{sen}((k_s \pm k'_q) \cdot x) - \frac{(k_s \pm k'_q)(k_s \cdot v'_q)}{|k_s \pm k'_q|^2} \text{sen}((k_s \pm k'_q) \cdot x) \right) \\
&= \pm \frac{1}{2} \left( v'_q \text{sen}((k_s \pm k'_q) \cdot x) - \frac{1}{2} \frac{(k_s \pm k'_q)\,|k_s|}{|k_s \pm k'_q|^2 |k_q|} \text{sen}((k_s \pm k'_q) \cdot x) \right) \\
&= \pm \frac{1}{2} \text{sen}((k_s \pm k'_q) \cdot x) \left( v'_q - \frac{1}{2} \frac{(k_s \pm k'_q)\,|k_s|}{|k_s \pm k'_q|^2 |k_q|} \right)
\end{aligned}$$

$$= \pm \frac{1}{2} \text{sen}((k_s \pm k'_q) \cdot x) V_1, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\mp k_q \cdot v'_s v_q \text{sen}((k'_s \pm k_q) \cdot x)\right] \\
&= \mp \frac{1}{2} \frac{|k_q|}{|k_s|} \left( v_q \text{sen}((k'_s \pm k_q) \cdot x) - \frac{(k'_s \pm k_q)(k'_s \cdot v_q)}{|k'_s \pm k_q|^2} \text{sen}((k'_s \pm k_q) \cdot x) \right) \\
&= \mp \frac{1}{2} \frac{|k_q|}{|k_s|} \left( v_q \text{sen}((k'_s \pm k_q) \cdot x) - \frac{1}{4} \frac{(k'_s \pm k_q)}{|k'_s \pm k_q|^2} \text{sen}((k'_s \pm k_q) \cdot x) \right) \\
&= \mp \frac{1}{2} \frac{|k_q|}{|k_s|} \text{sen}((k'_s \pm k_q) \cdot x) \left( v_q - \frac{1}{4} \frac{(k'_s \pm k_q)}{|k'_s \pm k_q|^2} \right)
\end{aligned}$$

$$= \mp \frac{1}{2}\frac{|k_q|}{|k_s|}\text{sen}(({k'}_s \pm k_q)\cdot x)V_2, \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\mp {k'}_q \cdot {v'}_s {v'}_q \text{sen}(({k'}_s \pm {k'}_q)\cdot x)\right] \\
&= \mp\left(\frac{|k_q|}{2|k_s|} - \frac{1}{2}\right)\left({v'}_q\text{sen}(({k'}_s \pm {k'}_q)\cdot x) - \frac{({k'}_s \pm {k'}_q)\,({k'}_s \cdot {v'}_q)}{|{k'}_s \pm {k'}_q|^2}\text{sen}(({k'}_s \pm {k'}_q)\cdot x)\right) \\
&= \mp\left(\frac{|k_q|}{2|k_s|} - \frac{1}{2}\right)\left({v'}_q\text{sen}(({k'}_s \pm {k'}_q)\cdot x) - \left(\frac{|k_q|}{2|k_s|} - \frac{1}{2}\right)\frac{({k'}_s \pm {k'}_q)}{|{k'}_s \pm {k'}_q|^2}\text{sen}(({k'}_s \pm {k'}_q)\cdot x)\right) \\
&= \mp\left(\frac{|k_q|}{2|k_s|} - \frac{1}{2}\right)\text{sen}(({k'}_s \pm {k'}_q)\cdot x)\left({v'}_q - \left(\frac{|k_q|}{2|k_s|} - \frac{1}{2}\right)\frac{({k'}_s \pm {k'}_q)}{|{k'}_s \pm {k'}_q|^2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \mp\left(\frac{|k_q|}{2|k_s|} - \frac{1}{2}\right)\text{sen}(({k'}_s \pm {k'}_q)\cdot x)V_3. \tag{3.27}$$

Vamos verificar que os $V_1, V_2, V_3$ são limitados; de fato, ${v'}_q$ e $\dfrac{(k_s \pm {k'}_q)}{|k_s \pm {k'}_q|}$ são unitários, e uma vez que os vetores $k_s$ são paralelos e, $k_s, {k'}_s$ maiores que 2, se $q < s$ então temos que $|k_q||k_s \pm k_q| \geqslant |k_s|$ para os $|k_q|$ que satisfazem $2 < |k_q| < |k_s| - \dfrac{3}{2}$. Note que isso é verificado pois $q < s$ e por (3.4). Além disso, por (3.5), temos que $|{k'}_q| \approx |k_q|$. Mas precisamente, $|k_q| - 1 \leqslant |{k'}_q| \leqslant |k_q| + 1$, então temos que $|{k'}_q||k_s \pm {k'}_q| \geqslant |k_s|$ e

$$\begin{aligned}
&V_1 = {v'}_q - \frac{1}{2}\frac{(k_s \pm {k'}_q)|k_s|}{|k_s \pm {k'}_q|^2|k_q|} = {v'}_q - \frac{1}{2}\frac{(k_s \pm {k'}_q)}{|k_s \pm {k'}_q|}\frac{|k_s|}{|k_q||k_s \pm {k'}_q|}, \\
&\text{Se } s < q, \text{ então } \frac{|k_s|}{|k_q|} < 1 \Rightarrow |V_1| = C < 2, \\
&\text{Se } s > q, \text{ então } \frac{|k_s|}{|k_s \pm {k'}_q||k_q|} \leqslant 1 \Rightarrow |V_1| = C \leqslant 2.
\end{aligned}$$

Agora, para $V_2$, uma vez que $v_q$ é unitário, segue que

$$\begin{aligned}
&V_2 = v_q - \frac{1}{4}\frac{({k'}_s \pm k_q)}{|{k'}_s \pm k_q|^2}, \\
&\text{Se } s \neq q, \text{ então } \left|\frac{({k'}_s \pm k_q)}{|{k'}_s \pm k_q|^2}\right| < 1 \Rightarrow |V_2| = C < 2.
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos verificar o mesmo para $V_3$, que é como os dois casos anteriores

$$\begin{aligned}
&V_3 = {v'}_q - \frac{1}{2}\left(\frac{|k_q|}{|k_s|} - 1\right)\frac{({k'}_s \pm {k'}_q)}{|{k'}_s \pm {k'}_q|^2} == {v'}_q - \frac{1}{2}\left(\frac{|k_q|}{|{k'}_s \pm {k'}_q||k_s|} - \frac{1}{|{k'}_s \pm {k'}_q|}\right)\frac{({k'}_s \pm {k'}_q)}{|{k'}_s \pm {k'}_q|}, \\
&\text{Se } q < s, \text{ então } \frac{|k_q|}{|k_s|} < 1 \Rightarrow |V_3| = C < 3, \\
&\text{Se } q > s, \text{ então } \frac{|k_q|}{|{k'}_s \pm {k'}_q||k_s|} \leqslant 1 \Rightarrow |V_3| = C \leqslant 3.
\end{aligned}$$

Na sequência, vamos limitar as integrais de $N_3$ por um termo mais simple e conhecido anteriormente. Primeiramente, usamos $v_s \cdot k_q = 0$ em (3.24) para obtermos que

$$N_3(t,x) = \frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|\Big( \mp v_s \cdot {k'}_q {v'}_q \mathrm{sen}((k_s \pm {k'}_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|{k'}_q|^2)t}$$
$$\mp {v'}_s \cdot k_q v_q \mathrm{sen}(({k'}_s \pm k_q)\cdot x)e^{-(|{k'}_s|^2+|k_q|^2)t}$$
$$\mp {v'}_s \cdot {k'}_q {v'}_q \mathrm{sen}(({k'}_s \pm {k'}_q)\cdot x)e^{-(|{k'}_s|^2+|{k'}_q|^2)t}\Big).$$

Denote por $u_3$ a integral

$$u_3 = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_3(s,x)ds,$$

logo $u_3$ pode ser decomposto como uma soma com 3 parcelas, ou seja,

$$u_3 =$$

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[\mp\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|v_s\cdot {k'}_q{v'}_q\mathrm{sen}((k_s\pm {k'}_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|{k'}_q|^2)t}\right]ds \tag{3.28}$$

$$+\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[\mp {v'}_s\cdot k_q v_q\mathrm{sen}(({k'}_s\pm k_q)\cdot x)e^{-(|{k'}_s|^2+|k_q|^2)t}\right]ds \tag{3.29}$$

$$+\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[\mp {v'}_s\cdot {k'}_q {v'}_q\mathrm{sen}(({k'}_s\pm {k'}_q)\cdot x)e^{-(|{k'}_s|^2+|{k'}_q|^2)t}\right]ds. \tag{3.30}$$

Usando (3.25) em (3.28), podemos proceder como segue

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[\mp\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|v_s\cdot {k'}_q{v'}_q\mathrm{sen}((k_s\pm {k'}_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|{k'}_q|^2)t}\right]ds$$
$$= \pm\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|e^{-s(|k_s|^2+|{k'}_q|^2)}\mathbb{P}\left[{k'}_q\cdot v_s{v'}_q\mathrm{sen}((k_s\pm {k'}_q)\cdot x)\right]\right)ds$$
$$= \pm\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|\int_0^t e^{-s(|k_s|^2+|{k'}_q|^2)}e^{(t-s)\Delta}\mathrm{sen}((k_s\pm {k'}_q)\cdot x)V_1 ds$$

$$= \pm\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|\int_0^t e^{-s(|k_s|^2+|{k'}_q|^2)}e^{-(t-s)|k_s\pm {k'}_q|^2}\mathrm{sen}((k_s\pm {k'}_q)\cdot x)V_1 ds. \tag{3.31}$$

Agora, para a próxima parte, usamos (3.26) em (3.29) para chegar a expressão

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[\mp {v'}_s\cdot k_q v_q\mathrm{sen}(({k'}_s\pm k_q)\cdot x)e^{-(|{k'}_s|^2+|k_q|^2)t}\right]ds$$
$$= \mp\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|e^{-s(|{k'}_s|^2+|k_q|^2)}\mathbb{P}\left[k_q\cdot {v'}_s v_q\mathrm{sen}(({k'}_s\pm k_q)\cdot x)\right]\right)ds$$
$$= \mp\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|\frac{|k_q|}{|k_s|}\int_0^t e^{-s(|{k'}_s|^2+|k_q|^2)}e^{(t-s)\Delta}\mathrm{sen}(({k'}_s\pm k_q)\cdot x)V_2 ds$$

$$= \mp\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s\pm k_q|^2}\text{sen}((k'_s\pm k_q)\cdot x)V_2ds. \tag{3.32}$$

Para a última parcela, usamos (3.25) em (3.30), e então

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[\mp v'_s\cdot k'_q v'_q\text{sen}((k'_s\pm k'_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_q|^2)t}\right]ds$$
$$= \mp\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|e^{-s(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}\mathbb{P}\left[k'_q\cdot v'_s v'_q\text{sen}((k'_s\pm k'_q)\cdot x)\right]\right)ds$$
$$= \mp\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|\left(\frac{|k_q|}{|k_s|}-1\right)\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}e^{(t-s)\Delta}\text{sen}((k'_s\pm k'_q)\cdot x)V_3ds$$

$$= \mp\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}\left(|k_q|^2-|k_s||k_q|\right)\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s\pm k'_q|^2}\text{sen}((k'_s\pm k'_q)\cdot x)V_3ds. \tag{3.33}$$

Antes de calcular as integrais, vamos observar as relações

$$|k'_s+k'_q|^2-|k'_s|^2-|k'_q|^2 = |k'_s|^2+|k'_q|^2+2k'_s\cdot k'_q-|k'_s|^2-|k'_q|^2 = 2k'_s\cdot k'_q>0,$$
$$|k'_s|^2+|k'_q|^2-|k'_s-k'_q|^2 = |k'_s|^2+|k'_q|^2-(|k'_s|^2+|k'_q|^2-2k'_s\cdot k'_q) = 2k'_s\cdot k'_q>0.$$

Do mesmo modo, temos que

$$|k'_s+k_q|^2-|k'_s|^2-|k_q|^2>0,$$
$$|k'_s|^2+|k_q|^2-|k'_s-k_q|^2>0,$$
$$|k_s+k'_q|^2-|k_s|^2-|k'_q|^2>0,$$
$$|k_s|^2+|k'_q|^2-|k_s-k'_q|^2>0.$$

Uma vez que percebemos isso, então calculamos as integrais anteriores, tomando cada sinal como um caso.

Em primeiro lugar, para $\int_0^t e^{-s(|k_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k_s\pm k'_q|^2}ds$, obtemos que

$$\int_0^t e^{-s(|k_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k_s+k'_q|^2}ds = te^{-t(|k_s|^2+|k'_q|^2)}\left(\frac{1-e^{-t(|k_s+k'_q|^2-|k_s|^2-|k'_q|^2)}}{t(|k_s+k'_q|^2-|k_s|^2-|k'_q|^2)}\right),$$
$$\int_0^t e^{-s(|k_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k_s-k'_q|^2}ds = te^{-t(|k_s-k'_q|^2)}\left(\frac{1-e^{-t(|k_s|^2+|k'_q|^2-|k_s-k'_q|^2)}}{t(|k_s|^2+|k'_q|^2-|k_s-k'_q|^2)}\right).$$

No caso da integral $\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s\pm k_q|^2}ds$, conseguimos

$$\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s+k_q|^2}ds = te^{-t(|k'_s|^2+|k_q|^2)}\left(\frac{1-e^{-t(|k'_s+k_q|^2-|k'_s|^2-|k_q|^2)}}{t(|k'_s+k_q|^2-|k'_s|^2-|k_q|^2)}\right),$$
$$\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s-k_q|^2}ds = te^{-t(|k'_s-k_q|^2)}\left(\frac{1-e^{-t(|k'_s|^2+|k_q|^2-|k'_s-k_q|^2)}}{t(|k'_s|^2+|k_q|^2-|k'_s-k_q|^2)}\right).$$

Finalmente, para a integral $\displaystyle\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s \pm k'_q|^2}ds$, chegamos a expressão

$$\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s+k'_q|^2}ds = te^{-t(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}\left(\frac{1-e^{-t(|k'_s+k'_q|^2-|k'_s|^2-|k'_q|^2)}}{t(|k'_s+k'_q|^2-|k'_s|^2-|k'_q|^2)}\right),$$

$$\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s-k'_q|^2}ds = te^{-t(|k'_s-k'_q|^2)}\left(\frac{1-e^{-t(|k'_s|^2+|k'_q|^2-|k'_s-k'_q|^2)}}{t(|k'_s|^2+|k'_q|^2-|k'_s-k'_q|^2)}\right).$$

Primeiro, se $\lambda > 0$, então uma função da forma $f = \dfrac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t}$ é menor que 1 para todo $t > 0$, isto é,

$$0 < g_\lambda(t) = \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda t} \leqslant 1, \quad \forall t > 0. \tag{3.34}$$

E todas as integrais anteriores têm uma função desta forma, logo ao limitar a integral, essas funções da forma $g_\lambda$ são limitadas por 1. Assim, tendo em vista esta estimativa, estudaremos as integrais anteriores sem preocupar-nos com as funções $g_\lambda$ e os vetores $V_i$, uma vez que ambos são limitados.

Portanto, para a primeira parcela (3.31), temos duas integrais, para cada sinal, desta forma

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[-\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|v_s\cdot k'_q v'_q \mathrm{sen}((k_s+k'_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_q|^2)t}\right]ds\\
&= +\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|\int_0^t e^{-s(|k_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k_s+k'_q|^2}\mathrm{sen}((k_s+k'_q)\cdot x)V_1 ds\\
&= +\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|te^{-t(|k_s|^2+|k'_q|^2)}g_\lambda(t)\mathrm{sen}((k_s+k'_q)\cdot x)V_1,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[+\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|v_s\cdot k'_q v'_q \mathrm{sen}((k_s-k'_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_q|^2)t}\right]ds\\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|\int_0^t e^{-s(|k_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k_s-k'_q|^2}\mathrm{sen}((k_s-k'_q)\cdot x)V_1 ds\\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|te^{-t(|k_s-k'_q|^2)}g_\lambda(t)\mathrm{sen}((k_s-k'_q)\cdot x)V_1.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Para a segunda parcela (3.32), temos duas integrais, para cada sinal, desta forma

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[-v'_s\cdot k_q v_q \mathrm{sen}((k'_s+k_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_q|^2)t}\right]ds\\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s+k_q|^2}\mathrm{sen}((k'_s+k_q)\cdot x)V_2 ds\\
&= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2te^{-t(|k'_s|^2+|k_q|^2)}g_\lambda(t)\mathrm{sen}((k'_s+k_q)\cdot x)V_2,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[+v'_s\cdot k_q v_q \text{sen}((k'_s+k_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_q|^2)t}\right]ds\\
&\quad= +\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s-k_q|^2}\text{sen}((k'_s-k_q)\cdot x)V_2 ds\\
&\quad= +\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2 te^{-t(|k'_s-k_q|^2)}g_\lambda(t)\text{sen}((k'_s-k_q)\cdot x)V_2. \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

E, para a terceira parcela que corresponde a expressão (3.33), temos novamente duas integrais, correspondendo aos sinais $+$ e $-$, e então

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[-v'_s\cdot k'_q v'_q \text{sen}((k'_s+k'_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_q|^2)t}\right]ds\\
&\quad= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}\left(|k_q|^2-|k_s||k_q|\right)\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s+k'_q|^2}\text{sen}((k'_s+k'_q)\cdot x)V_3 ds\\
&\quad= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}\left(|k_q|^2-|k_s||k_q|\right) te^{-t(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}g_\lambda(t)\text{sen}((k'_s+k'_q)\cdot x)V_3, \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[+v'_s\cdot k'_q v'_q \text{sen}((k'_s-k'_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_q|^2)t}\right]ds\\
&\quad= +\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}\left(|k_q|^2-|k_s||k_q|\right)\int_0^t e^{-s(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}e^{-(t-s)|k'_s-k'_q|^2}\text{sen}((k'_s-k'_q)\cdot x)V_3 ds\\
&\quad= +\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}\left(|k_q|^2-|k_s||k_q|\right) te^{-t(|k'_s-k'_q|^2)}g_\lambda(t)\text{sen}((k'_s-k'_q)\cdot x)V_3. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Agora, para $a,b,c>0$ tal que $b-c>0$, uma função da forma $h_{a,b,c}(t)=ate^{-t(b-c)}$ é limitada para todo $t\geqslant 0$; mais especificamente, temos que

$$
\begin{aligned}
0\leqslant f_{a,b,c}(t)\leqslant e^{-1}\frac{a}{b-c},\quad t\geqslant 0,\\
f_{a,b,c}(t)\left(\frac{1}{b-c}\right)=e^{-1}\frac{a}{b-c}.
\end{aligned}
$$

Com isso, podemos transformar a soma dentro das integrais para uma forma mais familiar. Vamos usar usar (3.4) e (3.5), então $|k_s|=2^{\frac{s(s+1)}{2}}|k_0|^{s+1}$ e $|k'_s|\approx|k_s|$; mais especificamente $|k_s|-1\leqslant|k'_s|\leqslant|k_s|+1$.
Para (3.35), vemos o seguinte

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|te^{-t(|k_s|^2+|k'_q|^2)} &= \sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\sum_{q\neq s}|k_q|te^{-t|k'_q|^2}\\
\leqslant\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\sum_{q\neq s}e^{-1}\frac{|k_q|}{|k'_q|^2} &= \sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\left(e^{-1}\sum_{q\neq s}\frac{1}{|k'_q|}\frac{|k_q|}{|k'_q|}\right),
\end{aligned}
$$

e, para (3.36), temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|te^{-t(|k_s-k'_q|^2)}\\
&\quad=\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\sum_{q>s}|k_q|te^{-t(|k'_q|^2-2k_s\cdot k'_q)}+\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}\sum_{s>q}|k_s|te^{-t(|k_s|^2-2k_s\cdot k'_q)}\\
&\quad\leqslant\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\sum_{q>s}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_q|^2-2k_s\cdot k'_q}\right)+\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_s|}{|k_s|^2-2k_s\cdot k'_q}\right).
\end{aligned}$$

Notemos agora que, por (3.4) e (3.5), segue que $\dfrac{|k_q|}{|k'_q|}\approx 1$ e $2^q\leqslant|k'_q|$, para todo $q\in\{1,2,...,r\}$. Assim,

$$e^{-1}\sum_{q\neq s}\frac{1}{|k'_q|}\frac{|k_q|}{|k'_q|}\approx e^{-1}\sum_{q\neq s}\frac{1}{|k'_q|}\leqslant e^{-1}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2^q}=e^{-1}.$$

Por outro lado, lembrando que $u\cdot v=|u||v|\cos(\theta)$, e por (3.4) e (3.5), para $q>s$, temos que $1-2\dfrac{|k_s|}{|k_q|}\cos(\theta)\approx 1$, pois $\dfrac{1}{2}<1-2\dfrac{|k_s|}{|k_q|}\cos(\theta)<\dfrac{3}{2}$. Segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|k_q|}\left(|k'_q|^2-2k_s\cdot k'_q\right)&=|k'_q|\left(\frac{|k'_q|}{|k_q|}-2\frac{|k_s|}{|k'_q|}\frac{|k'_q|}{|k_q|}\cos(\theta)\right)\\
&\approx|k'_q|\left(1-2\frac{|k_s|}{|k_q|}\cos(\theta)\right)\\
&>\frac{1}{2}|k'_q|.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{q>s}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_q|^2-2k_s\cdot k'_q}\right)&<2e^{-1}\sum_{q>s}\frac{1}{|k'_q|}\\
&<2e^{-1}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2^q}\\
&=2e^{-1}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, para $s>q$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|k_s|}\left(|k_s|^2-2k_s\cdot k'_q\right)&=|k_s|\left(\frac{|k_s|}{|k_s|}-2\frac{|k_s|}{|k_s|}\frac{|k'_q|}{|k_s|}\cos(\theta)\right)\\
&=|k_s|\left(1-2\frac{|k'_q|}{|k_s|}\right)\\
&>|k_s|\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_s|}{|k_s|^2-2k_s\cdot k'_q}\right)<2e^{-1}\sum_{s>q}\frac{1}{|k_s|}<2e^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^s}=2e^{-1}.$$

Portanto, para (3.35), chegamos a

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|te^{-t(|k_s|^2+|k'_q|^2)} < e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2},$$

e, para (3.36), temos que

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|te^{-t(|k_s-k'_q|^2)} < 2e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2} + 2e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}.$$

Para (3.37), podemos estimar

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2te^{-t(|k'_s|^2+|k_q|^2)} &= \sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}\sum_{s\neq q}|k_q|te^{-t|k'_s|^2}\\ &= \sum_{s=1}^{r}e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}|k_q|^2te^{-t|k_q|^2} + \sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}\sum_{s>q}|k_q|te^{-t|k'_s|^2}\\ &\leqslant \sum_{s=1}^{r}e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}\left(e^{-1}\right) + \sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_s|^2}\right),\end{aligned}$$

e, para (3.38),

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2te^{-t(|k'_s-k_q|^2)}\\ &= \sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}\sum_{s>q}|k_q|te^{-t(|k_s|^2-2k'_s\cdot k_q)} + \sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}\frac{|k_q|^2}{|k_s|}te^{-t(|k_q|^2-2k'_s\cdot k_q)}\\ &\leqslant \sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k_s|^2-2k'_s\cdot k_q}\right) + \sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}\left(\frac{e^{-1}|k_q|^2}{|k_s|(|k_q|^2-2k'_s\cdot k_q)}\right).\end{aligned}$$

Agora note que

$$\sum_{s=1}^{r}e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}\left(e^{-1}\right) = e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|r-s|e^{-t|k'_s|^2}.$$

Se $s>q$, então $|k'_s|>|k_q|$, e portanto

$$\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_q|^2}{|k_q||k'_s|^2}\right) = e^{-1}\sum_{s>q}\frac{1}{|k'_s|}\frac{|k_q|}{|k'_s|} \leqslant e^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^q} = e^{-1}.$$

Por outro lado, usando os mesmos argumentos que usamos anteriormente, se $s>q$, usando (3.4) então $\dfrac{k_s}{k_q} - 2\cos(\theta) > |k_0|$, e

$$\begin{aligned}\frac{1}{|k_q|}\left(|k_s|^2-2k'_s\cdot k_q\right) &= |k_s|\left(\frac{|k_s|}{|k_q|} - 2\frac{|k'_s|}{|k_s|}\frac{|k_q|}{|k_q|}\cos(\theta)\right)\\ &= |k_s|\left(\frac{|k_s|}{|k_q|} - 2\frac{|k'_s|}{|k_s|}\cos(\theta)\right)\\ &> |k_s||k_0|,\end{aligned}$$

o que nos leva a

$$\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k_s|^2-2k'_s\cdot k_q}\right)<e^{-1}\sum_{s>q}\frac{1}{|k_s||k_0|}<e^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^s}=e^{-1}.$$

Similarmente, se $q>s$ então $\dfrac{1}{2}<1-2\dfrac{|k'_s|}{|k_q|}\cos(\theta)<\dfrac{3}{2}$, e assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{|k_q|^2}\left(|k_s|(|k_q|^2-2k'_s\cdot k_q)\right) &= |k_s|\left(1-2\frac{|k'_s|}{|k_q|}\frac{|k_q|}{|k_q|}\cos(\theta)\right)\\ &= |k_s|\left(1-2\frac{|k'_s|}{|k_q|}\cos(\theta)\right)\\ &> \frac{1}{2}|k_s|.\end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\sum_{q>s}\left(\frac{e^{-1}|k_q|^2}{|k_s|(|k_q|^2-2k'_s\cdot k_q})\right)<2e^{-1}\sum_{q>s}\frac{1}{|k_s|}<e^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^s}=2e^{-1}.$$

Coletando os desenvolvimentos anteriores, obtemos, para (3.37),

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2te^{-t(|k'_s|^2+|k_q|^2)}\leqslant e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|r-s|e^{-t|k'_s|^2}+e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2},$$

e, para (3.38),

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2te^{-t(|k'_s-k_q|^2)}<e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}+2e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}.$$

Em contra partida, para (3.39), temos o seguinte manuseio:

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}\left(|k_q|^2-|k_s||k_q|\right)te^{-t(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}\\ &\quad=\sum_{s=1}^{r}e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}|k_q|^2te^{-t|k'_q|^2}+\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}\sum_{s>q}|k_q|te^{-t|k'_s|^2}\\ &\qquad-\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q\neq s}|k_q|te^{-t|k'_q|^2}\\ &\quad\leqslant\sum_{s=1}^{r}e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}\left(e^{-1}\right)+\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_s|^2}\right)+\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q\neq s}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_q|^2}\right),\end{aligned}$$

e, para (3.40),

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}(|k_q|^2-|k_s||k_q|)te^{-t(|k'_s-k'_q|^2)}\\
&\quad=\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}\sum_{s>q}|k_q|te^{-t(|k'_s|^2-2k'_s\cdot k'_q)}+\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}\frac{|k_q|^2}{|k_s|}te^{-t(|k'_q|^2-2k'_s\cdot k'_q)}\\
&\qquad-\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}|k_q|te^{-t(|k'_q|^2-2k'_s\cdot k'_q)}-\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}\sum_{s>q}|k_s|te^{-t(|k'_s|^2-2k'_s\cdot k'_q)}\\
&\quad\leqslant\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_s|^2-2k'_s\cdot k'_q}\right)+\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}\left(\frac{e^{-1}|k_q|^2}{|k_s|(|k'_q|^2-2k'_s\cdot k'_q)}\right)\\
&\qquad+\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\sum_{q>s}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_q|^2-2k'_s\cdot k'_q}\right)+\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_s|}{|k'_s|^2-2k'_s\cdot k'_q}\right).
\end{aligned}$$

Agora, como antes, obtemos que

$$\sum_{q\neq s}\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_q|^2}\approx e^{-1}\sum_{q\neq s}\frac{1}{|k'_q|}<e^{-1}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2^q}=e^{-1}.$$

E, para as somas do tipo $s>q$, temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_s|^2}\right)\leqslant e^{-1}\sum_{s>q}\frac{1}{|k'_s|}\leqslant e^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^s}=e^{-1},\\
&\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_s|^2-2k'_s\cdot k'_q}\right)\leqslant e^{-1}\sum_{s>q}\frac{1}{|k'_s||k_0|}\leqslant e^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^s}=e^{-1},\\
&\sum_{s>q}\left(\frac{e^{-1}|k_s|}{|k'_s|^2-2k'_s\cdot k'_q}\right)<2e^{-1}\sum_{s>q}\frac{1}{|k_s|}<2e^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^s}=2e^{-1}.
\end{aligned}$$

Para as somas do tipo $q>s$, segue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{q>s}e^{-1}=e^{-1}\sum_{s<q\leqslant r}1=e^{-1}|r-s|,\\
&\sum_{q>s}\left(\frac{e^{-1}|k_q|^2}{|k_s|(|k'_q|^2-2k'_s\cdot k'_q)}\right)\leqslant 2e^{-1}\sum_{q>s}\frac{1}{|k_s|}\leqslant 2e^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^s}=2e^{-1},\\
&\sum_{q>s}\left(\frac{e^{-1}|k_q|}{|k'_q|^2-2k'_s\cdot k'_q}\right)\leqslant 2e^{-1}\sum_{q>s}\frac{1}{|k'_q|}\leqslant 2e^{-1}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2^q}=2e^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo, para (3.39), temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}\left(|k_q|^2-|k_s||k_q|\right)te^{-t(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}\\
&\leqslant e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|r-s|e^{-t|k'_s|^2}+e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}+e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2},
\end{aligned}$$

e, para (3.40),

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}(|k_q|^2-|k_s||k_q|)te^{-t(|k'_s-k'_q|^2)}$$
$$\leqslant e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}+2e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}+e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}+2e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}.$$

Coletando os cálculos acima, chegamos a estimativas úteis para as parcelas (3.31), (3.32) e (3.33). Primeiro, para (3.31), temos que

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[-\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|v_s\cdot k'_q v'_q\mathrm{sen}((k_s+k'_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_q|^2)t}\right]ds$$
$$=+\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|te^{-t(|k_s|^2+|k'_q|^2)}g_\lambda(t)\mathrm{sen}((k_s+k'_q)\cdot x)V_1$$

$$<+\frac{Q^2}{4r}e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}g_\lambda(t)\mathrm{sen}((k_s+k'_q)\cdot x)V_1, \tag{3.41}$$

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[+\frac{Q^2}{2r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|v_s\cdot k'_q v'_q\mathrm{sen}((k_s-k'_q)\cdot x)e^{-(|k_s|^2+|k'_q|^2)t}\right]ds$$
$$=-\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_s||k_q|te^{-t(|k_s-k'_q|^2)}g_\lambda(t)\mathrm{sen}((k_s-k'_q)\cdot x)V_1$$

$$<-\frac{Q^2}{4r}\left(2e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}+2e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}\right)g_\lambda(t)\mathrm{sen}((k_s-k'_q)\cdot x)V_1. \tag{3.42}$$

Para (3.32), segue que

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[-v'_s\cdot k_q v_q\mathrm{sen}((k'_s+k_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_q|^2)t}\right]ds$$
$$=-\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2te^{-t(|k'_s|^2+|k_q|^2)}g_\lambda(t)\mathrm{sen}((k'_s+k_q)\cdot x)V_2$$

$$\leqslant-\frac{Q^2}{4r}\left(e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|r-s|e^{-t|k'_s|^2}+e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}\right)g_\lambda(t)\mathrm{sen}((k'_s+k_q)\cdot x)V_2, \tag{3.43}$$

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[+v'_s\cdot k_q v_q\mathrm{sen}((k'_s+k_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k_q|^2)t}\right]ds$$
$$=+\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}|k_q|^2te^{-t(|k'_s-k_q|^2)}g_\lambda(t)\mathrm{sen}((k'_s-k_q)\cdot x)V_2$$

$$< +\frac{Q^2}{4r}\left(e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}+2e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right)g_\lambda(t)\text{sen}((k'_s-k_q)\cdot x)V_2. \tag{3.44}$$

E, para o termo (3.33), chegamos a

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[-v'_s\cdot k'_q v'_q\text{sen}((k'_s+k'_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_q|^2)t}\right]ds$$
$$= -\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}\left(|k_q|^2-|k_s||k_q|\right)te^{-t(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}g_\lambda(t)\text{sen}((k'_s+k'_q)\cdot x)V_3$$
$$\leqslant -\frac{Q^2}{4r}\left(e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|r-s|e^{-t|k'_s|^2}+e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}+e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right)$$
$$\cdot\quad g_\lambda(t)\text{sen}((k'_s+k'_q)\cdot x)V_3, \tag{3.45}$$

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\left[+v'_s\cdot k'_q v'_q\text{sen}((k'_s-k'_q)\cdot x)e^{-(|k'_s|^2+|k'_q|^2)t}\right]ds$$
$$= +\frac{Q^2}{4r}\sum_{s=1}^{r}\sum_{q\neq s}\left(|k_q|^2-|k_s||k_q|\right)te^{-t(|k'_s-k'_q|^2)}g_\lambda(t)\text{sen}((k'_s-k'_q)\cdot x)V_3$$
$$\leqslant +\frac{Q^2}{4r}\left(e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}+2e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}+e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}\right.$$
$$\left.+2e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}\right)\cdot\quad g_\lambda(t)\text{sen}((k'_s-k'_q)\cdot x)V_3. \tag{3.46}$$

Então, com (3.41), (3.42), (3.43), (3.44), (3.45) e (3.46), encontramos que a norma no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, cumpre o seguinte:

$$\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_3(s,x)ds\right|$$
$$\leqslant C\frac{Q^2}{r}\left(e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}+2e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}+2e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}+\right.$$
$$e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|r-s|e^{-t|k'_s|^2}+e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}+e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}+2e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}$$
$$+e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|r-s|e^{-t|k'_s|^2}+e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k_q|^2}+e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}+$$
$$\left.e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}+2e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}+e^{-1}\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k'_s|^2}+2e^{-1}\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}\right)$$
$$< C\frac{Q^2}{r}\left(\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}+\sum_{q=1}^{r}|k_q|e^{-t|k'_q|^2}+\sum_{s=1}^{r}|r-s|e^{-t|k'_s|^2}\right). \tag{3.47}$$

Com isso, podemos agora encontrar a norma no espaço $X_T$, vamos denotar como $C$ uma constante independente das variáveis $r, Q$ e que absorve qualquer outra constante que não dependa de variáveis. Com efeito,

$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_3(s,x)ds\right\|_{X_T} = \sup_{t>0} t^{1/2}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_3(s,x)ds\right\|_{\infty}$$
$$+\sup_{x_0}\sup_{0<R<T}\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^R\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_3(y,s)ds\right|^2 dydt\right)^{1/2}.$$

Notando que

$$\sup_{t>0} t^{1/2}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_3(s,x)ds\right\|_{\infty}$$
$$\leqslant C\frac{Q^2}{r}\sup_{t>0} t^{1/2}\left(\sum_{s=1}^r |k_s|e^{-t|k_s|^2}+\sum_{q=1}^r |k_q|e^{-t|k'_q|^2}+\sum_{s=1}^r |r-s|e^{-t|k'_s|^2}\right)$$

$$= C\frac{Q^2}{r}\sup_{t>0}\left(\sum_{s=1}^r |k_s|t^{1/2}e^{-t|k_s|^2}+\sum_{q=1}^r |k_q|t^{1/2}e^{-t|k'_q|^2}+\sum_{s=1}^r |r-s|t^{1/2}e^{-t|k'_s|^2}\right), \tag{3.48}$$

e, usando a propiedade (3.9), lembrando que $|k_0|$ é escolhido dependendo de $Q$ (mais tarde, em (3.74), veremos que na verdade $|k_0|$ é muito maior do que $Q$), podemos supor que $|k_0|$ e $r$ são proporcionais, assim chegamos ao seguinte

$$\sum_{s=1}^r |k_s|t^{1/2}e^{-t|k_s|^2}+\sum_{q=1}^r |k_q|t^{1/2}e^{-t|k'_q|^2} \leqslant \sum_{s=1}^r |k_s|t^{1/2}e^{-t|k_s|^2}+C\sum_{q=1}^r |k'_q|t^{1/2}e^{-t|k'_q|^2} < 2C, \tag{3.49}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^r |r-s|t^{1/2}e^{-t|k'_s|^2} &< C\sum_{s=1}^r \frac{|r-s||k'_s|}{|k_s|}t^{1/2}e^{-t|k'_s|^2}\\ &= C\sum_{s=1}^r \frac{|r-s|}{2^s|k_0||k_{s-1}|}|k'_s|t^{1/2}e^{-t|k'_s|^2}\\ &= C\frac{1}{|k_0|}\sum_{s=1}^r \frac{r}{2^s|k_{s-1}|}|k'_s|t^{1/2}e^{-t|k'_s|^2}\\ &< C\frac{r}{|k_0|}\sum_{s=1}^r |k'_s|t^{1/2}e^{-t|k'_s|^2} \leqslant C\frac{r}{|k_0|}.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Então, $N_3$ tem duas partes $N_{3,1}, N_{3,2}$, de modo que $N_3 = N_{3,1}+N_{3,2}$ e

$$\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_{3,1}(s,x)ds\right| < C\frac{Q^2}{r}\left(\sum_{s=1}^r |k_s|e^{-t|k_s|^2}\right), \tag{3.51}$$

$$\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_{3,2}(s,x)ds\right| < C\frac{Q^2}{r}\left(\sum_{s=1}^r |r-s|e^{-t|k'_s|^2}\right). \tag{3.52}$$

Usando (3.48), (3.49), (3.50), (3.51) e (3.52)

$$\sup_{t>0} t^{1/2}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_{3,1}(s,x)ds\right\|_\infty \leqslant \sup_{t>0} t^{1/2}\left(C\frac{Q^2}{r}\left(\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right)\right) \leqslant C\frac{Q^2}{r}, \quad (3.53)$$

$$\sup_{t>0} t^{1/2}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_{3,2}(s,x)ds\right\|_\infty \leqslant \sup_{t>0} t^{1/2}\left(C\frac{Q^2}{r}\left(\sum_{s=1}^{r}|r-s|e^{-t|k'_s|^2}\right)\right) \leqslant C\frac{Q^2}{|k_0|}. \quad (3.54)$$

Por outro lado, é claro que $\dfrac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\displaystyle\int_{B(x_0,\sqrt{R})} dy = 1$, logo, usando (3.51),

$$\begin{aligned}
&\sup_{x_0}\sup_{0<R<T}\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^R\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_{3,1}(y,s)ds\right|^2 dydt\right)^{1/2}\\
&\leqslant C\frac{Q^2}{r}\sup_{0<R<T}\left(\int_0^R\left|\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right|^2 dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^R\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}|k_s||k_q|e^{-t(|k_s|^2+|k_q|^2)}dt\right)\\
&=\left(\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}|k_s||k_q|\left(\frac{1-e^{-t(|k_s|^2+|k_q|^2)}}{|k_s|^2+|k_q|^2}\right)\right)\\
&<\left(\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}\frac{|k_s||k_q|}{|k_s|^2+|k_q|^2}\right).
\end{aligned}$$

Observemos que se $q<s$, então $\dfrac{|k_q|}{|k_s|}<2^{-s}$, e

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}\frac{|k_s||k_q|}{|k_s|^2+|k_q|^2} &= \sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}\frac{1}{\frac{|k_s|}{|k_q|}+\frac{|k_q|}{|k_s|}} = \sum_{s=1}^{r}1+2\sum_{s=1}^{r}\sum_{q<s}\frac{1}{\frac{|k_s|}{|k_q|}+\frac{|k_q|}{|k_s|}}\\
&< r+2\sum_{s=1}^{r}\sum_{q<s}\frac{|k_q|}{|k_s|} < r+2\sum_{s=1}^{r}2^{-s} < r+2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x_0}\sup_{0<R<T}\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^R\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_{3,1}(y,s)ds\right|^2 dydt\right)^{1/2}\\
&\leqslant C\frac{Q^2}{r}\sup_{0<R<T}\left(\int_0^R\left|\sum_{s=1}^{r}|k_s|e^{-t|k_s|^2}\right|^2 dt\right)^{1/2}\\
&\leqslant C\frac{Q^2}{r}\sup_{0<R<T}\left(\left(\sum_{s=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}\frac{|k_s||k_q|}{|k_s|^2+|k_q|^2}\right)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\leqslant C\frac{Q^2}{r}\sup_{0<R<T}(r+2)^{1/2} = C\frac{Q^2}{r}(r+2)^{1/2} \approx C\frac{Q^2}{r^{1/2}}. \tag{3.55}$$

Por outro lado, usando (3.52),

$$\begin{aligned}
&\sup_{x_0}\sup_{0<R<T}\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^R\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_{3,2}(y,s)ds\right|^2 dydt\right)^{1/2}\\
&\leqslant C\frac{Q^2}{r}\sup_{0<R<T}\left(\int_0^R\left|\sum_{s=1}^r |r-s|e^{-t|k'_s|^2}\right|^2 dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Agora, estimamos

$$\begin{aligned}
&\int_0^R\left|\sum_{s=1}^r |r-s|e^{-t|k'_s|^2}\right|^2 dt\\
&< r^2\int_0^R\sum_{s=1}^r\sum_{q=1}^r e^{-t(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}dt = r^2\sum_{s=1}^r\sum_{q=1}^r\left(\frac{1-e^{-t(|k'_s|^2+|k'_q|^2)}}{|k'_s|^2+|k'_q|^2}\right)\\
&\leqslant r^2\sum_{s=1}^r\sum_{q=1}^r\frac{1}{|k'_s|^2+|k'_q|^2} \approx r^2\left(\sum_{s=1}^r\frac{1}{2|k_s|^2}+\sum_{s=1}^r\sum_{q\neq s}\frac{1}{|k_s|^2+|k_q|^2}\right)\\
&= \frac{r^2}{|k_0|^2}\left(\sum_{s=1}^r\frac{|k_0|^2}{2|k_s|^2}+\sum_{s=1}^r\sum_{q\neq s}\frac{|k_0|^2}{|k_s|^2+|k_q|^2}\right)\\
&= \frac{r^2}{|k_0|^2}\left(\sum_{s=1}^r\frac{|k_0|^2}{2|k_s|^2}+\sum_{s=1}^r\sum_{q<s}\frac{|k_0|^2}{|k_s|^2+|k_q|^2}+\sum_{s=1}^r\sum_{q\neq s}\frac{|k_0|^2}{|k_s|^2+|k_q|^2}\right)\\
&= \frac{r^2}{|k_0|^2}\left(\sum_{s=1}^r\frac{|k_0|^2}{2|k_s|^2}+\sum_{q=1}^r\sum_{s>q}\frac{|k_0|^2}{|k_q|^2\left(1+\frac{|k_s|^2}{|k_q|^2}\right)}+\sum_{s=1}^r\sum_{q>s}\frac{|k_0|^2}{|k_s|^2\left(1+\frac{|k_q|^2}{|k_q|^2}\right)}\right)\\
&= \frac{r^2}{|k_0|^2}\left(\sum_{s=1}^r\frac{|k_0|^2}{2|k_s|^2}+\sum_{q=1}^r\frac{|k_0|^2}{|k_q|^2}\sum_{s>q}\frac{1}{\left(1+\frac{|k_s|^2}{|k_q|^2}\right)}+\sum_{s=1}^r\frac{|k_0|^2}{|k_s|^2}\sum_{q>s}\frac{1}{\left(\frac{|k_q|^2}{|k_s|^2}+1\right)}\right)\\
&< \frac{r^2}{|k_0|^2}\left(\sum_{s=1}^r\frac{|k_0|^2}{2|k_s|^2}+\sum_{q=1}^r\frac{|k_0|^2}{|k_q|^2}\sum_{s>q}\frac{1}{2^s}+\sum_{s=1}^r\frac{|k_0|^2}{|k_s|^2}\sum_{q>s}\frac{1}{(2^q)}\right)\\
&= \frac{r^2}{|k_0|^2}.
\end{aligned}$$

Uma vez que se $s>q$, então $\left(1+\dfrac{|k_s|^2}{|k_q|^2}\right) > 2^s$ e $|k_s| = 2^{\frac{s(s+1)}{2}}|k_0|^{s+1}$.

Desde que $|k_0|$ é proporcional a $Q$, logo poderemos escolher $k_0$ para que $\dfrac{Q}{|k_0|}$

seja muito pequeno, mas, por enquanto, deixamos $|k_0|$ como está, assim temos que

$$\begin{aligned}
&\sup_{x_0}\sup_{0<R<T}\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^R\int_{B(x_0,\sqrt{R})}\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}N_{3,2}(y,s)ds\right|^2 dydt\right)^{1/2}\\
&\leqslant C\frac{Q^2}{r}\sup_{0<R<T}\left(\int_0^R\left|\sum_{s=1}^{r}|r-s|e^{-t|k'_s|^2}\right|^2 dt\right)^{1/2}\\
&\leqslant C\frac{Q^2}{r}\sup_{0<R<T}\left(\frac{r^2}{|k_0|^2}\right)^{1/2} = C\frac{Q^2}{r}\frac{r}{|k_0|} = C\frac{Q^2}{|k_0|}. \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de (3.53), (3.54), (3.55) e (3.56), chegamos às desigualdades

$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}N_{3,1}dt\right\|_{X_T} \leqslant C\frac{Q^2}{\sqrt{r}},$$
$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}N_{3,2}dt\right\|_{X_T} \leqslant C\frac{Q^2}{|k_0|}.$$

Então, $u_1$ pode ser separado em três partes de acordo com suas normas, mais especificamente, temos que

$$u_1 = u_{1,0} + u_{1,1} + u_{1,2},$$

tal que

$$\|u_{1,0}\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}} \approx C_1Q^2 \Rightarrow \|u_{1,0}\|_{X_T} \leqslant C_1\sqrt{T}Q^2. \qquad (3.57)$$

Além disso,

$$\|u_{1,1}\|_{X_T} \leqslant C_2\frac{Q^2}{|k_0|}, \qquad (3.58)$$

e

$$\|u_{1,2}\|_{X_T} \leqslant C_3\frac{Q^2}{\sqrt{r}}. \qquad (3.59)$$

Acima, as constantes $C_i$ são independentes de variáveis como $r, Q$. Também, usando (3.57), (3.58) e (3.59), obtemos a estimativa

$$\|u_1\|_{X_T} \leqslant C\left(\sqrt{T}Q^2 + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}}\right). \qquad (3.60)$$

## 3.3 Análise da diferença da solução e a primeira iterada

Agora buscaremos limitar a parte $y$, que é a última parte de (3.1). Para isso, introduzimos uma sequência de constantes $r_\alpha$ como segue. Seja $\beta = Q^3$, então definimos

$$r_\alpha = r - \alpha Q^{-3}r = r\left(1-\alpha Q^{-3}\right), \quad \alpha = 1,2,...,\beta. \qquad (3.61)$$

É fácil ver que $r_\alpha$ é uma sequência decrescente de números reais, de tal forma que

$$r > r_1 > r_2 > r_3 > ... > r_{\beta-1} > r_\beta = 0. \qquad (3.62)$$

Agora, com base na sequência definida em (3.4), para todo $s \geqslant 0$, consideramos

$$|k_s|^2 = 2^{s(s+1)}|k_0|^{2s+2}. \tag{3.63}$$

Depois destas explicações iniciais, considere a série de números $T_\alpha^{-1}$ definidos por

$$T_\alpha = \frac{1}{|k_{r_\alpha}|^2}.$$

Uma vez que $r_\alpha$ é decrescente para $\alpha \in \{1, 2, ..., \beta\}$ e $|k_0|^2 \leqslant |k_s|^2 < \infty$ para $s \geqslant 0$, então $0 < \dfrac{1}{|k_s|^2} \leqslant \dfrac{1}{|k_0|^2}$, e segue que

$$0 < T_1 < T_2 < ... < T_\beta = \frac{1}{|k_0|^2}, \quad \beta = Q^3. \tag{3.64}$$

Agora, por (3.2), podemos usar o princípio de Duhamel para encontrar a forma integral de $y$, com um dado inicial $y(T_\alpha)$; assim, temos que para $t \geqslant T_\alpha$

$$y(t) = e^{(t-T_\alpha)\Delta}y(T_\alpha) - \int_{T_\alpha}^{t} e^{(t-s)\Delta}[G_1 + G_2 + G_3](s)ds, \tag{3.65}$$

onde $G_1, G_2$ e $G_3$ são definidos em (3.2). Novamente, podemos usar o princípio de Duhamel em (3.65), com dado inicial $y(0) = 0$, para obter

$$y(t) = -\int_0^t e^{(t-s)\Delta}[G_1 + G_2 + G_3](s)ds.$$

Avaliando a última equação para $t = T_\alpha$, chegamos a expressão

$$\begin{aligned} e^{(t-T_\alpha)\Delta}y(T_\alpha) &= -\int_0^{T_\alpha} e^{(t-T_\alpha)\Delta}e^{(T_\alpha-s)\Delta}[G_1 + G_2 + G_3](s)ds \\ &= -\int_0^t e^{(t-s)\Delta}[G_1 + G_2 + G_3](s)\chi_{[0,T_\alpha]}ds, \end{aligned}$$

onde $\chi_{[0,T_\alpha]}(t)$ é a função característica que satisfaz $\chi_{[0,T_\alpha]}(t) = 1$ se $t \in [0, T_\alpha]$ e $\chi_{[0,T_\alpha]}(t) = 0$ para $t \notin [0, T_\alpha]$. Então, para $t \geqslant T_\alpha$, temos que

$$y(t) = -\int_0^t e^{(t-s)\Delta}[G_1 + G_2 + G_3](s)\chi_{[0,T_\alpha]}ds - \int_{T_\alpha}^t e^{(t-s)\Delta}[G_1 + G_2 + G_3](s)ds.$$

Denote a norma de cada integral como

$$\begin{aligned} I &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}[G_1 + G_2 + G_3](s)\chi_{[0,T_\alpha]}ds \right\|_{X_{\alpha+1}}, \\ II &= \left\| \int_{T_\alpha}^t e^{(t-s)\Delta}[G_1 + G_2 + G_3](s)ds \right\|_{X_{\alpha+1}} \\ &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}[G_1 + G_2 + G_3](s)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}ds \right\|_{X_{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Então, podemos limitar $y$ no espaço $X_{T_{\alpha+1}}$ da seguinte forma

$$\|y\|_{T_{\alpha+1}} \leqslant I + II.$$

Antes de estimar, vejamos que podemos limitar a norma de (3.8), o termo $e^{t\Delta}u_0$ no espaço $X_{T_\alpha}$, como segue

$$\begin{aligned}\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\alpha}} &\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}} \sup_{t<T_\alpha} \sqrt{t} \sum_{s=1}^{r} |k_s| e^{-t|k_s|^2} \\ &+ \frac{Q}{\sqrt{r}} \sup_{x_0} \sup_{0<R<T_\alpha} \left( \frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|} \int_0^t \int_{B(x_0,\sqrt{R})} \left| \sum_{q=1}^{r} |k_q| e^{-s|k'_q|^2} \right|^2 dxds \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Anteriormente, vimos que

$$\sup_{0<R<T_\alpha} \left( \frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|} \int_0^t \int_{B(x_0,\sqrt{R})} \left| \sum_{q=1}^{r} |k_q| e^{-s|k_q|^2} \right|^2 dxds \right)^{1/2} = (r+2)^{1/2}.$$

Logo, usando (3.5), temos que $|k_s| \approx |k'_s||$; além disso, usando (3.9) e o anterior, podemos estimar

$$\left\|e^{t\Delta u_0}\right\|_{X_{T_\alpha}} \leqslant C \left( \frac{Q}{\sqrt{r}} + \frac{Q}{\sqrt{r}}(r+2)^{1/2} \right) \approx C \left( \frac{Q}{\sqrt{r}} + Q \right) \leqslant CQ.$$

No que segue, usaremos a estimativa bilinear

$$\|B(u,v)\|_{X_T} \leqslant C \|u\|_{X_T} \|v\|_{X_T}. \tag{3.66}$$

A demonstração da estimativa (3.66) está fora do escopo desta dissertação, mas ela pode ser encontrada em detalhes nas referências [17], [19] e [22].

Então, usando (3.2) e a desigualdade (3.66), temos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned} I \leqslant C \Big( &\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\alpha}} \|y\|_{X_{T_\alpha}} + \|u_1\|_{X_{T_\alpha}} \|y\|_{X_{T_\alpha}} + \|y\|_{X_{T_\alpha}} \left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\alpha}} + \|y\|_{X_{T_\alpha}} \|u_1\|_{X_{T_\alpha}} \\ &+ \|y\|_{X_{T_\alpha}} \|y\|_{X_{T_\alpha}} + \left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\alpha}} \|u_1\|_{X_{T_\alpha}} + \|u_1\|_{X_{T_\alpha}} \left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\alpha}} + \|u_1\|_{X_{T_\alpha}} \|u_1\|_{X_{T_\alpha}} \Big) \\ &\leqslant C \left( \left( \left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\alpha}} + \|u_1\|_{X_{T_\alpha}} + \|y\|_{X_{T_\alpha}} \right) \|y\|_{X_{T_\alpha}} + \left( \left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\alpha}} + \|u_1\|_{X_{T_\alpha}} \right) \|u_1\|_{X_{T_\alpha}} \right) \\ \leqslant C \Bigg( &\left( Q + Q^2 T_\alpha^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} + \|y\|_{X_{T_\alpha}} \right) \|y\|_{X_{T_\alpha}} \\ &+ \left( Q + Q^2 T_\alpha^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} \right) \left( Q^2 T_\alpha^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} \right) \Bigg). \end{aligned}$$

Na sequência, tratamos com a parcela $II$. Mas antes disso, vamos ver como estimar um termo da forma $\left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t)\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}}$. Primeiro defina

$$L_1 = \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s<r_{\alpha+1}} |k_s| \left[ v_s \cos(k_s \cdot x) e^{-|k_s|^2 t} + v'_s \cos(k'_s \cdot x) e^{-|k'_s|^2 t} \right] \chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t),$$

$$L_2 = \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{r_{\alpha+1}\leqslant s\leqslant r_\alpha} |k_s| \left[ v_s \cos(k_s \cdot x) e^{-|k_s|^2 t} + v'_s \cos(k'_s \cdot x) e^{-|k'_s|^2 t} \right] \chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t).$$

Observe que $(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t) = L_1 + L_2$. Usando (3.4), temos $|k_n| = 2^n|k_0||k_{n-1}|$, logo $\sum\limits_{s<n}|k_s| < |k_n|$ devido ao crescimento rápido dos termos da série. Assim, podemos estimar $L_1$ como segue:

$$
\begin{aligned}
\|L_1\|_{X_{T_{\alpha+1}}} &\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}} \sup_{t<T_{\alpha+1}} \sqrt{t} \sum_{s<r_{\alpha+1}} |k_s| e^{-|k_s|^2 t}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t) \\
&+ \frac{Q}{\sqrt{r}} \sup_{t<T_{\alpha+1}} \sqrt{t} \sum_{s<r_{\alpha+1}} |k_s| e^{-|k'_s|^2 t}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t) \\
&+ \frac{Q}{\sqrt{r}} \sup_{x_0} \sup_{0<R<T_{\alpha+1}} \left( \frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|} \int_0^t \int_{B(x_0,\sqrt{R})} \left| \sum_{q<r_{q+1}} |k_q| e^{-s|k_q|^2}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t) \right|^2 dxds \right)^{1/2} \\
&+ \frac{Q}{\sqrt{r}} \sup_{x_0} \sup_{0<R<T_{\alpha+1}} \left( \frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|} \int_0^t \int_{B(x_0,\sqrt{R})} \left| \sum_{q<r_{q+1}} |k_q| e^{-s|k'_q|^2}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t) \right|^2 dxds \right)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}} T^{1/2}_{\alpha+1} |k_{r_{\alpha+1}-1}| + \frac{Q}{\sqrt{r}} T^{1/2}_{\alpha+1} |k'_{r_{\alpha+1}-1}| \\
&+ \sup_{0<R<T_{\alpha+1}} \left( R|k_{r_{\alpha+1}-1}|^2 \right)^{1/2} + \sup_{0<R<T_{\alpha+1}} \left( R|k'_{r_{\alpha+1}-1}|^2 \right)^{1/2} \\
&\leqslant C T^{1/2}_{\alpha+1} |k_{r_{\alpha+1}-1}| < C\frac{Q}{\sqrt{r}},
\end{aligned}
$$

onde acima usamos o fato que $T_{\alpha+1} = |k_{r_{\alpha+1}}|^{-2}$, o que implica que

$$
T^{1/2}_{\alpha+1} |k_{r_{\alpha+1}-1}| = |k_{r_{\alpha+1}}|^{-1} |k_{r_{\alpha+1}-1}| < 1
$$

Por outro lado, para $L_2$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|L_2\|_{X_{T_{\alpha+1}}} &\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}} \sup_{t<T_{\alpha+1}} \sqrt{t} \sum_{r_{\alpha+1}\leqslant s\leqslant r_\alpha} |k_s| e^{-|k_s|^2 t}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t) \\
&+ \frac{Q}{\sqrt{r}} \sup_{t<T_{\alpha+1}} \sqrt{t} \sum_{r_{\alpha+1}\leqslant s\leqslant r_\alpha} |k_s| e^{-|k'_s|^2 t}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t) \\
&+ \frac{Q}{\sqrt{r}} \sup_{x_0} \sup_{0<R<T_{\alpha+1}} \left( \frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|} \int_0^t \int_{B(x_0,\sqrt{R})} \left| \sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha} |k_q| e^{-s|k_q|^2}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(s) \right|^2 dxds \right)^{1/2} \\
&+ \frac{Q}{\sqrt{r}} \sup_{x_0} \sup_{0<R<T_{\alpha+1}} \left( \frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|} \int_0^t \int_{B(x_0,\sqrt{R})} \left| \sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha} |k_q| e^{-s|k'_q|^2}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(s) \right|^2 dxds \right)^{1/2} \\
&\leqslant C\frac{Q}{\sqrt{r}} + C\frac{Q}{\sqrt{r}} \\
&+ \sup_{0<R<T_{\alpha+1}} (r_\alpha - r_{\alpha+1})^{1/2} + \sup_{0<R<T_{\alpha+1}} (r_{\alpha - r\alpha+1})^{1/2} \\
&\leqslant C\left( \frac{Q}{\sqrt{r}} + \frac{Q}{\sqrt{r}} (Q^{-3}r)^{1/2} \right) \\
&\leqslant CQ^{-1/2},
\end{aligned}
$$

onde acima usamos a propriedade "*lacunary*" de $k_s$, mais especificamente (3.9), então temos que $\sup\sum\sqrt{t}|k_s|e^{-|k_s|^2t}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t) < C$, para uma constante $C > 0$. Agora, desde que $|k_s| \approx |k'_s|$, o mesmo vale para $\sup\sum\sqrt{t}|k_s|e^{-|k'_s|^2t}$, e podemos adaptar os cálculos anteriores para este caso; mais especificamente, usando $|k_q| = 2^{\frac{q(q+1)}{2}}|k_0|^{q+1}$, para $0 < R < T_{\alpha+1}$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^t\left|\sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha}|k_q|e^{-s|k_q|^2}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(s)\right|^2 ds\right)\\
&= \left(\int_0^t\sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha}\ \sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q'\leqslant r_\alpha}|k_q||k_{q'}|e^{-t(|k_q|^2+|k_{q'}|^2)}\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(s)ds\right)\\
&= \left(\sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha}\ \sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q'\leqslant r_\alpha}|k_q||k_{q'}|\left(\frac{e^{-T_\alpha(|k_q|^2+|k_{q'}^2|)}-e^{-T_{\alpha+1}(|k_q|^2+|k_{q'}|^2)}}{|k_q|^2+|k_{q'}^2|}\right)\right)\\
&< C\sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha}\ \sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q'\leqslant r_\alpha}\frac{|k_q||k_{q'}|}{|k_q|^2+|k_{q'}^2|}\\
&= C\left(\sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha}\frac{|k_q|^2}{2|k_q|^2}+2\sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha}\ \sum_{q'<q}\frac{|k_q||k_{q'}|}{|k_q|^2+|k_{q'}^2|}\right)\\
&< C\left(\sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha}1+\sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha}\ \sum_{q'<q}\frac{|k_{q'}|}{|k_q|}\right)\\
&< C\left((r_\alpha-r_{\alpha+1})+\sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha}2^{-q}\sum_{q'<q}2^{-((q-1)+(q-2)+\ldots+(q'+1))}\right)\\
&< C\left((r_\alpha-r_{\alpha+1})+\sum_{r_{\alpha+1}\leqslant q\leqslant r_\alpha}\frac{1}{2^q}\right)\\
&< C((r_\alpha-r_{\alpha+1})+1)\approx(r_\alpha-r_{\alpha+1}).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$(r_\alpha - r_{\alpha+1}) = r - \alpha Q^{-3}r - r + (\alpha+1)Q^{-3}r = Q^{-3}r,$$

e assim chegamos às estimativas

$$\|L_1\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \leqslant C\frac{Q}{\sqrt{r}}, \tag{3.67}$$

$$\|L_2\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \leqslant CQ^{-1/2}. \tag{3.68}$$

Então, usando (3.67) e (3.68), conseguimos estimar $(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}$ da seguinte maneira

$$\left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \leqslant CQ^{-1/2}.$$

Além disso, usando (3.60), obtemos

$$\left\|u_1\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}]}(t)\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \leqslant C\left(Q^2T_{\alpha+1}^{1/2}+\frac{Q^2}{|k_0|}+\frac{Q^2}{\sqrt{r}}\right).$$

Por (3.2) e usando a propriedade (3.66) de $B(u,v)$, podemos estimar $II$ como segue

$$
\begin{aligned}
II \leqslant C \Bigg( & \left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + \left\|u_1\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
&+ \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \left\|u_1\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
&+ \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + \left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \left\|u_1\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
&+ \left\|u_1\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
&+ \left\|u_1\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \left\|u_1\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \Bigg) \\
&\leqslant C \Bigg( \left( \left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + \left\|u_1\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \right) \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
&+ \left( \left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + \left\|u_1\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \right) \left\|u_1\chi_{[T_\alpha,T_{\alpha+1}](t)}\right\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
\leqslant C \Bigg( & \left( Q^{-1/2} + Q^2 T_{\alpha+1}^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} + \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \right) \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
&+ \left( Q^{-1/2} + Q^2 T_{\alpha+1}^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} \right) \left( Q^2 T_{\alpha+1}^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} \right) \Bigg).
\end{aligned}
$$

Coletando as estimativas para as duas parcelas $I$ e $II$, chegamos a seguinte estimativa para a norma de $y$:

$$
\begin{aligned}
\|y\|_{T_{\alpha+1}} &\leqslant I + II \\
&\leqslant C \Bigg( \left( Q + Q^2 T_\alpha^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} + \|y\|_{X_{T_\alpha}} \right) \|y\|_{X_{T_\alpha}} \\
&+ \left( Q + Q^2 T_\alpha^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} \right) \left( Q^2 T_\alpha^{1/2} + + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} \right) \\
&+ \left( Q^{-1/2} + Q^2 T_{\alpha+1}^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} + \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \right) \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
&+ \left( Q^{-1/2} + Q^2 T_{\alpha+1}^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} \right) \left( Q^2 T_{\alpha+1}^{1/2} + \frac{Q^2}{|k_0|} + \frac{Q^2}{\sqrt{r}} \right) \Bigg).
\end{aligned}
$$

Relembrado que $T$ está sendo considerado pequeno, suponha que

$$
T < Q^{-8}. \tag{3.69}
$$

Usando (3.64), note que $T_\alpha < T_\beta = \dfrac{1}{|k_0|^2} < T < Q^{-8}$; em outras palavras, temos que

$$
T_\alpha^{1/2} < Q^{-4}.
$$

Além disso, isso implica que $Q^4 < |k_0|$. Usando (3.10), podemos considerar $r$ muito maior do que $Q$ e assumir $Q^4 < r$. Denotando $\sigma_{\alpha,k_0,r} = T_\alpha^{1/2} + \dfrac{1}{|k_0|} + \dfrac{1}{\sqrt{r}}$, observe que $Q\sigma_{\alpha,k_0,r} < 1$, e então

$$\begin{aligned}
&\left(Q + Q^2\sigma_{\alpha,k_0,r} + \|y\|_{X_{T_\alpha}}\right)\|y\|_{X_{T_\alpha}} \\
&+ \left(Q + Q^2\sigma_{\alpha,k_0,r}\right)\left(Q^2\sigma_{\alpha,k_0,r}\right) + \left(Q^{-1/2} + Q^2\sigma_{\alpha+1,k_0,r} + \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}}\right)\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
&+ \left(Q^{-1/2} + Q^2\sigma_{\alpha+1,k_0,r}\right)\left(Q^2\sigma_{\alpha+1,k_0,r}\right) \\
&< Q\|y\|_{X_{T_\alpha}} + Q\|y\|_{X_{T_\alpha}} + \|y\|^2_{X_{T_\alpha}} + Q^3(1+1)\left(\sigma_{\alpha,k_0,r}\right) + Q^{-1/2}\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
&\quad + Q^2\left(\frac{1}{|k_{r_{\alpha+1}}|} + \frac{1}{|k_0|} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right)\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + \|y\|^2_{X_{T_{\alpha+1}}} + Q^3\left(Q^{-3/2}+1\right)\left(\sigma_{\alpha+1,k_0,r}\right) \\
&< 2Q\|y\|_{X_{T_\alpha}} + \|y\|^2_{X_{T_\alpha}} + 2Q^3\left(\sigma_{\alpha,k_0,r}\right) + Q^{-1/2}\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + 3Q^{-1/2}\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \\
&\quad + \|y\|^2_{X_{T_{\alpha+1}}} + 2Q^3\sigma_{\alpha+1,k_0,r}.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Como $T_\alpha < T_{\alpha+1}$, então $\sigma_{\alpha,k_0,r} < \sigma_{\alpha+1,k_0,r}$ e $\|y\|_{X_{T_\alpha}} < \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}}$; em seguida, continuando com a desigualdade anterior, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\text{L.D. de (3.70)} \\
&< 2Q\|y\|_{X_{T_\alpha}} + \|y\|^2_{X_{T_{\alpha+1}}} + 2Q^3\sigma_{\alpha+1,k_0,r} + 4Q^{-1/2}\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + \|y\|^2_{X_{T_{\alpha+1}}} + 2Q^3\sigma_{\alpha+1,k_0,r} \\
&= 2\|y\|^2_{X_{T_{\alpha+1}}} + 4Q^{-1/2}\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + 4Q^3\sigma_{\alpha+1,k_0,r} + 2Q\|y\|_{X_{T_\alpha}} \\
&< 4\left(\|y\|^2_{X_{T_{\alpha+1}}} + Q^{-1/2}\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + Q^3\sigma_{\alpha+1,k_0,r} + Q\|y\|_{X_{T_\alpha}}\right),
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \leqslant C\left(Q^{-1/2}\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + \|y\|^2_{X_{T_{\alpha+1}}} + Q^3\left(T^{1/2}_{\alpha+1} + \frac{1}{|k_0|} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) + Q\|y\|_{X_{T_\alpha}}\right). \tag{3.71}$$

Suponha que

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} &< C\left(Q^3\sigma_{\alpha+1,k_0,r} + Q\|y\|_{X_{T_\alpha}}\right) \\
&= C\left(Q^3\left(T^{1/2}_{\alpha+1} + \frac{1}{|k_0|} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) + Q\|y\|_{X_{T_\alpha}}\right),
\end{aligned}$$

logo, $\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}}$ satisfaz (3.71), isto é

$$0 \leqslant Q^{-1/2}\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} + \|y\|^2_{X_{T_{\alpha+1}}} + Q^3\sigma_{\alpha+1,k_0,r} + Q\|y\|_{X_{T_\alpha}} - \frac{1}{C}\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}},$$

pois $Q^3\sigma_{\alpha+1,k_0,r} + Q\|y\|_{X_{T_\alpha}} - (1/C)\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} \geqslant 0$; agora, $T^{1/2}_{\alpha+1} < T_\beta$, logo $\sigma_{\alpha+1,k_0,r} < \sigma_{\beta,k_0,r}$, e usando o fato que $T^{1/2}_\beta = \dfrac{1}{|k_0|}$, chegamos a uma desigualdade recursiva

$$\|y\|_{X_{T_{\alpha+1}}} < C\left(Q^3\left(T^{1/2}_{\alpha+1} + \frac{1}{|k_0|} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) + Q\|y\|_{X_{T_\alpha}}\right)$$

$$< C\left(Q^3\left(T_\beta^{1/2}+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)+Q\left\|y\right\|_{X_{T_\alpha}}\right). \tag{3.72}$$

Se começarmos com $\|y\|_{X_{T_1}} < C\left(Q^3T_\beta^{1/2}+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$, em seguida, iterando (3.72) de 1 para $\beta = Q^3$, então obtemos uma constante $C > 0$ (que coleta as constantes das interações), tal que,

$$\|y\|_{X_{T_\beta}} < CQ^{\beta+3}\left(T_\beta^{1/2}+\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Assim, obtemos uma estimativa para a norma de $y$ no espaço $X_{T_\beta}$. Em vista de (3.64), temos que $T_\beta < T$; assim, podemos repetir o processo mais uma vez com a norma em $X_{T_\beta}$. Com efeito, temos que

$$y(t) = -\int_0^t e^{(t-s)\Delta}[G_1+G_2+G_3](s)\chi_{[0,T_\beta]}(s)ds - \int_{T_\beta}^t e^{(t-s)\Delta}[G_1+G_2+G_3](s)ds.$$

Então, podemos limitar $y$ no espaço $X_T$ da seguinte forma

$$\|y\|_{X_T} \leqslant I + II, \tag{3.73}$$

onde

$$\begin{aligned} I_\beta &= \left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}[G_1+G_2+G_3](s)\chi_{[0,T_\beta]}(s)ds\right\|_{X_T}, \\ II_\beta &= \left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}[G_1+G_2+G_3](s)\chi_{[T_\beta,T]}(s)ds\right\|_{X_T}. \end{aligned}$$

Lembrando que $T_\beta^{1/2} = \frac{1}{|k_0|}$, então

$$\|u_1\|_{X_{T_\beta}} \leqslant C\left(T_\beta^{1/2}Q^2+\frac{Q^2}{|k_0|}+\frac{Q^2}{\sqrt{r}}\right) < C\left(T_\beta^{1/2}Q^2+\frac{Q^2}{\sqrt{r}}\right).$$

Assim, usando (3.2), podemos estimar

$$\begin{aligned} I_\beta \leqslant C\Big(&\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\beta}}\|y\|_{X_{T_\beta}}+\|u_1\|_{X_{T_\beta}}\|y\|_{X_{T_\beta}}+\|y\|_{X_{T_\beta}}\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\beta}}+\|y\|_{X_{T_\beta}}\|u_1\|_{X_{T_\beta}} \\ &+\|y\|_{X_{T_\beta}}\|y\|_{X_{T_\beta}}+\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\beta}}\|u_1\|_{X_{T_\beta}}+\|u_1\|_{X_{T_\beta}}\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\beta}}+\|u_1\|_{X_{T_\beta}}\|u_1\|_{X_{T_\beta}}\Big) \\ \leqslant C\Big(&\left(\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\beta}}+\|u_1\|_{X_{T_\beta}}+\|y\|_{X_{T_\beta}}\right)\|y\|_{X_{T_\beta}}+\left(\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_{T_\beta}}+\|u_1\|_{X_{T_\beta}}\right)\|u_1\|_{X_{T_\beta}}\Big) \\ \leqslant C\Bigg(&\left(Q+Q^2T_\beta^{1/2}+\frac{Q^2}{\sqrt{r}}+Q^{Q^3+3}\left(T_\beta^{1/2}+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right)Q^{Q^3+3}\left(T_\beta^{1/2}+\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \\ &+\left(Q+Q^2T_\beta^{1/2}+\frac{Q^2}{\sqrt{r}}\right)\left(Q^2T_\beta^{1/2}+\frac{Q^2}{\sqrt{r}}\right)\Bigg). \end{aligned}$$

Escolha agora $T_\beta = \dfrac{1}{|k_0|^2}$ e $r$ de modo que $I_\beta < Q^4 T$, o que pode ser feito já que, por (3.69), temos $Q^4T < Q^{-4}$, e $|k_0|$ e $r$ são muito maiores que $Q^2$. Assim, não há problemas em tomá-los maiores ainda de forma que $I_\beta < Q^{-4}$; por exemplo, podemos tomar

$$|k_0|, r = CQ^{(Q^3+8)^2}. \tag{3.74}$$

Assim, com as escolhas adequadas para $|k_0|$ e $r$, temos a desigualdade

$$I_\beta \leqslant Q^4 T.$$

Antes de continuar com $II_\beta$, estimaremos o valor de $\left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\beta,T]}(t)\right\|$; vejamos que

$$\begin{aligned}\left\|(e^{t\Delta})u_0\chi_{[T_\beta,T]}(t)\right\|_{X_T} &= \sup_{0<t<T} t^{1/2}\left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\beta,T]}(t)\right\|_\infty \\ \sup_{x_0}\sup_{0<R<T} &\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^t\int_{B(x_0,\sqrt{R})}|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\beta,T]}|(s)dydt\right),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}&\sup_{0<t<T} t^{1/2}\left\|(e^{t\Delta}u_0)\chi_{[T_\beta,T]}(t)\right\| \\ &= \frac{Q}{\sqrt{r}}\sup_{0<t<T} t^{1/2}\left\|\sum_{q=1}^{r}|k_q|\left(v_q\cos(k_q\cdot x)e^{-|k_q|^2t}\chi_{[T_\beta,T]}(t) + v'_q\cos(k'_q\cdot x)e^{-|k'_q|t}\chi_{[T_\beta,T]}(t)\right)\right\|_\infty \\ &\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}}\sup_{0<t<T}\sum_{q=1}^{r} t^{1/2}|k_q|e^{-|k_q|^2t}\chi_{[T_\beta,T]}(t) + \frac{Q}{\sqrt{r}}\sup_{0<t<T}\sum_{q=1}^{r} t^{1/2}|k_q|e^{-|k'_q|t}\chi_{[T_\beta,T]}(t) \\ &\leqslant C\frac{Q}{\sqrt{r}}.\end{aligned}$$

Usando agora (3.9), obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x_0}\sup_{0<R<T}\left(\frac{1}{|B(x_0,\sqrt{R})|}\int_0^t\int_{B(x_0,\sqrt{R})}|(e^{s\Delta}u_0)\chi_{[T_\beta,T]}|^2(s)dyds\right)\\
&\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}}\sup_{0<R<T}\left(\int_0^t\left(\sum_{q=1}^r|k_q|e^{-|k_q|^2s}\chi_{[T_\beta,T]}(s)+e^{-|k'_q|s}\chi_{[T_\beta,T]}(s)\right)^2\right)ds\\
&\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}}\sup_{0<R<T}\int_0^t\left(\sum_{q=1}^r\sum_{q'=1}^r|k_q||k_{q'}|e^{-(|k_q|^2+|k_{q'}|^2)s}\chi_{[T_\beta,T]}(s)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{q=1}^r\sum_{q'=1}^r|k_q||k_{q'}|e^{-(|k'_q|^2+|k'_{q'}|^2)s}\chi_{[T_\beta,T]}(s)\right)ds\\
&\leqslant \sup_{T_\beta<R<T}\left(\frac{Q}{\sqrt{r}}\left(\sum_{q=1}^r\sum_{q'=1}^r|k_q||k_{q'}|\left(\frac{1-e^{-(|k_q|^2+|k_{q'}|^2)(R-T_\beta)}}{(|k_q|^2+|k_{q'}|^2)T_\beta}\right)T_\beta e^{-(|k_q|^2+|k_{q'}|^2)T_\beta}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\sum_{q=1}^r\sum_{q'=1}^r|k_q||k_{q'}|\left(\frac{1-e^{-(|k'_q|^2+|k'_{q'}|^2)(R-T_\beta)}}{(|k'_q|^2+|k'_{q'}|^2)T_\beta}\right)T_\beta e^{-(|k'_q|^2+|k'_{q'}|^2)T_\beta}\right)ds\right)\\
&\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}}\left(\sum_{q=1}^r\sqrt{T_\beta}|k_q|e^{-t|k_q|^2}\sum_{q'=1}^r\sqrt{T_\beta}|k_{q'}|e^{-T_\beta|k_{q'}|^2}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{q=1}^r\sqrt{T_\beta}|k_q|e^{-T_\beta|k'_q|^2}\sum_{q'=1}^r\sqrt{T_\beta}|k_{q'}|e^{T_\beta|k'_{q'}|^2}\right)\\
&\leqslant \frac{Q}{\sqrt{r}}2C^2=C\frac{Q}{\sqrt{r}}.
\end{aligned}
$$

E, então, chegamos a expressão

$$\left\|(e^{t\Delta})u_0\chi_{[T_\beta,T]}\right\|_{X_T}\leqslant C\frac{Q}{\sqrt{r}}.$$

Usando agora (3.2), podemos estimar a parcela $II_\beta$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
II_\beta &\leqslant C\left(\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_T}\|y\|_{X_T}+\|u_1\|_{X_T}\|y\|_{X_T}+\|y\|_{X_T}\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_T}+\|y\|_{X_T}\|u_1\|_{X_T}\right.\\
&\quad\left.+\|y\|_{X_T}\|y\|_{X_T}+\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_T}\|u_1\|_{X_T}+\|u_1\|_{X_T}\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_T}+\|u_1\|_{X_T}\|u_1\|_{X_T}\right)\\
&\leqslant C\left(\left(\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_T}+\|u_1\|_{X_T}+\|y\|_{X_T}\right)\|y\|_{X_T}+\left(\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{X_T}+\|u_1\|_{X_T}\right)\|u_1\|_{X_T}\right)\\
&\leqslant C\left(\left(\frac{Q}{\sqrt{r}}+Q^2T^{1/2}+\frac{Q^2}{\sqrt{r}}+\|y\|_{X_T}\right)\|y\|_{X_T}\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{Q}{\sqrt{r}}+Q^2T^{1/2}+\frac{Q^2}{\sqrt{r}}\right)\left(Q^2T^{1/2}+\frac{Q^2}{\sqrt{r}}\right)\right)\\
&=\left(C\left(\frac{Q}{\sqrt{r}}+Q^2T^{1/2}\right)+C\|y\|_{X_T}\right)\|y\|_{X_T}+\left(C\left(\frac{Q^3T^{1/2}}{\sqrt{r}}+\frac{Q^4}{r}\right)\right)+CQ^4T^{1/2}\\
&\leqslant\left(C\left(\frac{Q}{\sqrt{r}}+Q^2T^{1/2}\right)+C\|y\|_{X_T}\right)\|y\|_{X_T}+2CQ^4T.
\end{aligned}
$$

Como as últimas estimativas para cada parcela $I_\beta$ e $II_\beta$, usando (3.70), chegamos a

$$\|y\|_{X_T} \leqslant I_\beta + II_\beta \leqslant \left( C\left(\frac{Q}{\sqrt{r}} + Q^2T^{1/2}\right) + C\,\|y\|_{X_T}\right)\|y\|_{X_T} + 3CQ^4T.$$

Segue que

$$\|y\|_{X_T} \leqslant 3CQ^4T.$$

Então

$$\|y\|_\infty = T^{-1/2}\left\|T^{1/2}y\right\|_\infty \leqslant T^{-1/2}\,\|y\|_{X_T} \leqslant 3C_4Q^4T^{1/2}, \tag{3.75}$$

Combinando (3.1), (3.57), (3.58), (3.59) e (3.75), obtemos a seguinte estimativa por baixo:

$$\begin{aligned}
&\left\|u(T) - e^{T\Delta}u_0\right\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} = \|u_1(T,x) - y(T,x)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty}\\
&\geqslant \|u_{1,0}(T,x)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} - \|u_{1,1}(T,x)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} - \|u_{1,2}(T,x)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} - \|y(T,x)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty}\\
&\geqslant \|u_{1,0}(T,x)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} - C\,\|u_{1,1}(T,x)\|_\infty - C\,\|u_{1,2}(T,x)\|_\infty - C\,\|y(T,x)\|_\infty\\
&= \|u_{1,0}(T,x)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} - CT^{-1/2}\left\|T^{1/2}u_{1,1}(T,x)\right\|_\infty - CT^{-1/2}\left\|T^{1/2}u_{1,2}(T,x)\right\|_\infty\\
&\quad - CT^{-1/2}\left\|T^{1/2}y(T,x)\right\|_\infty\\
&\geqslant \|u_{1,0}(T,x)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} - CT^{-1/2}\,\|u_{1,1}\|_{X_T} - CT^{-1/2}\,\|u_{1,2}\|_{X_T} - CT^{-1/2}\,\|y\|_{X_T}\\
&\geqslant C_1Q^2 - CC_2\frac{Q^2}{|k_0|}T^{-1/2} - CC_3\frac{Q^2}{\sqrt{r}}T^{-1/2} - C3C_4Q^4T^{1/2}\\
&\geqslant CQ^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{rT}} - \frac{1}{|k_0|\sqrt{T}} - 3Q^2T^{1/2}\right),
\end{aligned}$$

onde $\|f\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} < C\,\|f\|_\infty$, para $f = u_{1,1}, u_{1,2}, y$, pois elas contêm funções da mesma natureza para nossos propósitos; mais precisamente, elas contêm termos como $\mathrm{sen}(\beta\cdot x)$, $\cos(\beta\cdot x)$, logo $e^{t\Delta}\mathrm{sen}(\beta\cdot x) = e^{-t|\beta|}\mathrm{sen}(\beta\cdot x)$ e $e^{t\Delta}\cos(\beta\cdot x) = e^{-t|\beta|}\cos(\beta\cdot x)$, onde $e^{-t|\beta|}$ decaem muito mais rápido do que o crescimento de $t^{1/2}$, para $t > 0$; nesta direção, um resultado mais geral pode ser encontrado em Sawada [28], p. 81.

Com os desenvolvimentos e estimativas acima, chegamos a seguinte estimativa para $u(T)$

$$\|u(T)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} \geqslant Q^2C\left(1 - \frac{1}{\sqrt{rT}} - \frac{1}{|k_0|\sqrt{T}} - 3Q^2T^{1/2} - \frac{1}{Q\sqrt{r}}\right).$$

Uma vez que $r, |k_0|^2$ são maiores do que $T$ ($r, |k_0|^2$ são tão grandes quanto necessário, em particular podem ser usados (3.69) e (3.74)), então $\frac{1}{\sqrt{rT}} - \frac{1}{|k_0|\sqrt{T}} - 3Q^2T^{1/2} - \frac{1}{Q\sqrt{r}}$ é pequeno, e podemos supor que $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{rT}} - \frac{1}{|k_0|\sqrt{T}} - 3Q^2T^{1/2} - \frac{1}{Q\sqrt{r}}\right) > 1/2$; assim,

$$\|u(T)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} > Q^2\frac{C}{2}.$$

Portanto, para cada $\delta > 0$ pequeno, se escolhermos $Q > \frac{1}{\delta}$, podemos encontrar uma solução branda $u(t,x)$ das equações (1.3) e $0 < T < Q^{-8} < \delta$ tal que $\|u(x,0)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} < \delta$, porém com $\|u(T,x)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_\infty} > Q^2\frac{C}{2} > \frac{1}{\delta}$. Assim, concluímos a demonstração do teorema.

**Observação 3.3.1.** *Na demonstração acima, mostramos o famoso fenômeno de "inflação" na norma do espaço* $\dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}$ *para as equações de Navier-Stokes* (1.3). *Além disso, equivalentemente, para cada* $\delta > 0$*, obtemos que*

$$\sup_{\|u(0)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}} \leqslant \delta} \ \sup_{0<t<\delta} \|u(t)\|_{\dot{B}^{-1,\infty}_{\infty}} = \infty.$$

# 4 Conclusões

A partir do desenvolvimento deste trabalho, podemos fazer uma lista de conclusões e considerações em relação a pesquisas posteriores sobre equações e espaços semelhantes ou relacionados.

(i) Este trabalho permitiu ao autor conhecer e entrar em contato com algumas ferramentas de Análise Funcional e Análise Harmônica utilizadas para resolver as equações de Navier-Stokes, uma equação que modela fluidos e é objeto de estudos e pesquisa até os dias de hoje, além do contato com novos espaços funcionais, tais como os espaços de Besov.

(ii) Obtivemos uma cadeia de imersões $L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_q^{-\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, o que nos dá uma relação, de um menor para outro maior, entre esses espaços funcionais.

(iii) Os resultados de boa-colocação mostram um exemplo de como podemos generalizar um resultado de um espaço crítico menor para um espaço crítico maior em troca de algumas propriedades, enquanto o resultado de má-colocação indica que há um limite para esse processo, sendo este limite o espaço de Besov homogêneo crítico $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$, o qual de fato é o maior espaço crítico (veja, e.g., [18] e [19]).

(iv) Apesar de termos a má-colocação das equações (1) no espaço crítico maximal $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, ainda pode-se estudar outros subespaços críticos de $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ a fim de descobrir quais são suas propriedades de boa-colocação em relação às equações de Navier-Stokes. Uma questão natural seria tentar descobrir se há (ou não) um espaço maximal para a boa-colocação. Pelos resultados estudados aqui, caso exista, este espaço não poderia ser do tipo Besov homogêneo como os considerados no Capítulo 3. Um candidato a tal espaço maximal para a boa-colocação é o famoso espaço de Koch e Tataru $BMO^{-1}$, para mais detalhes veja [17], [18] e [19].

# Referências


[1] Navier-Stokes Millennium Prize Problem. Clay Mathematics Institute. URL: http://www.claymath.org/millennium-problems/navier-stokes-equation (version: 2022-02-02). Citado na página 11.

[2] Bartle, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Wiley & Sons, 2014. Citado nas páginas 15 e 17.

[3] Bourgain, J., and Pavlović, N. Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D. *Journal of Functional Analysis 255*, 9 (2008), 2233–2247. Citado nas páginas 7, 8, 13, 14 e 90.

[4] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Science & Business Media, 2010. Citado nas páginas 15, 16, 18, 42, 45 e 57.

[5] Cannone, M. *Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes.* PhD thesis, Paris 9, 1994. Citado nas páginas 15, 35, 43, 45, 47, 48 e 72.

[6] Cannone, M. A generalization of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations. *Revista Matemática Iberoamericana 13*, 3 (1997), 515–541. Citado nas páginas 7, 8, 12, 14, 47, 49, 52, 55 e 73.

[7] Cannone, M., et al. Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations. *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics 3* (2004), 161–244. Citado nas páginas 13 e 73.

[8] Cauchy, A. De la pression ou la tension dans un corps solide. *Exercices de Mathématiques 2* (1827), 42–57. Citado na página 11.

[9] de Saint-Venant, A. B. *Mémoire sur la dynamique des fluides.* Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Bachelier, 1843. Citado na página 11.

[10] de Saint-Venant, A. B. Note à joindre un Mémoire sur la dynamique des fluides. *Comptes Rendus 17* (1843), 1240–1244. Citado na página 11.

[11] Folland, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, vol. 40. John Wiley & Sons, 1999. Citado nas páginas 15, 16, 17 e 18.

[12] Fujita, H., and Kato, T. On the Navier-Stokes initial value problem. I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 16* (1964), 269–315. Citado na página 12.

[13] Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis*, 2 ed., vol. 2. Springer, 2008. Citado nas páginas 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 e 29.

[14] Grafakos, L. *Modern Fourier Analysis*, 2 ed., vol. 250. Springer, 2009. Citado nas páginas 28 e 29.

[15] Grigoryan, A. *Heat Kernel and Analysis on Manifolds*, vol. 47. American Mathematical Soc., 2009. Citado na página 35.

[16] Kato, T. Strong $L^p$-Solutions of the Navier-Stokes Equation in $\mathbb{R}^m$, with Applications to Weak Solutions. *Mathematische Zeitschrift 187* (1984), 471–480. Citado nas páginas 12, 14 e 55.

[17] Koch, H., and Tataru, D. Well-posedness for the Navier–Stokes equations. *Advances in Mathematics 157*, 1 (2001), 22–35. Citado nas páginas 101, 127 e 137.

[18] Lemarié-Rieusset, P. G. *Recent Developments in the Navier-Stokes Problem*. CRC Press, 2002. Citado nas páginas 11, 12, 27, 29, 30, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 51, 73, 102 e 137.

[19] Lemarié-Rieusset, P. G. *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century*. CRC Press, 2018. Citado nas páginas 11, 12, 13, 34, 127 e 137.

[20] Leray, J. Essai sur le Mouvement dún Fluide Visqueux Emplissant léspace. *Acta Math. 63*, 1 (1934), 193–248. Citado na página 12.

[21] Lorentz, H. A. *Eene algemeene stelling omtrent de beweging eener vloeistof met wrijving en eenige daaruit afgeleide gevolgen*. Zittingsvergslag vand de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 1896. Citado na página 11.

[22] Miura, H., and Sawada, O. On the regularizing rate estimates of Koch-Tataru's solution to the Navier–Stokes equations. *Asymptotic Analysis 49*, 1, 2 (2006), 1–15. Citado na página 127.

[23] Navier, C. Mémoire sur les lois du Mouvement des Fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France 6*, 1823 (1827), 389–440. Citado na página 11.

[24] Oseen, C. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, vol. 5 of *Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern*. Akademische Verlagsgesellschaft. Citado na página 11.

[25] Oseen, C. W. Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelquesunes de leurs applications. *Acta Mathematica 34*, 1 (1911), 205–284. Citado na página 11.

[26] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012. Citado nas páginas 35 e 91.

[27] POISSON, S.-D. *Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques.* F. Didot, 1828. Citado na página 11.

[28] SAWADA, O. A description of Bourgain-Pavlovic's ill-posedness theorem of the Navier-Stokes equations in the critical Besov space. *Methods and Applications of Analysis 2* (1995), 307–319. Citado na página 135.

[29] SAWANO, Y. *Theory of Besov Spaces*, vol. 56. Springer, 2018. Citado nas páginas 15, 20, 22, 23, 25, 26, 27, 42, 43, 47, 48 e 49.

[30] STOKES, G. G. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. *Trans. Cambridge Phl. Soc. 8* (1849), 287–319. Citado na página 11.