Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Jorge Féres Junior

Existência de Soluções Suaves e-Positivas de Equações Diferenciais Fracionárias de Evolução Impulsivas

CAMPINAS
2022

Jorge Féres Junior

Existência de Soluções Suaves e-Positivas de Equações Diferenciais Fracionárias de Evolução Impulsivas

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: José Vanterler da Costa Sousa

Coorientador: Edmundo Capelas de Oliveira

Este trabalho corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Jorge Féres Junior, e orientada pelo Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa.

Campinas
2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Féres Junior, Jorge, 1961-
F379e Existência de soluções suaves *e*-positivas de equações diferenciais fracionárias de evolução impulsivas / Jorge Féres Junior. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: José Vanterler da Costa Sousa.
Coorientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais fracionárias. 2. Soluções suaves e-positivas. 3. Medida de não-compacidade de Kuratowski. 4. Desigualdades de Gronwall. 5. Família alfa-resolvente (Equações diferenciais). I. Sousa, José Vanterler da Costa, 1985-. II. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Existence of *e*-positive mild solutions for impulsive evolution fractional differential equations
Palavras-chave em inglês:
Fractional differential equations
e-Positive mild solutions
Kuratowski measure of non-compactness
Gronwall inequalities
alpha-Resolvent family
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutor em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
José Vanterler da Costa Sousa [Orientador]
Daniela dos Santos de Oliveira
Rubens de Figueiredo Camargo
Gastão Silves Ferreira Frederico
Felix Silva Costa
Data de defesa: 08-04-2022
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-2779-9556
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/8669175958522041

Tese de Doutorado defendida em 08 de abril de 2022 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ VANTERLER DA COSTA SOUSA

Prof(a). Dr(a). DANIELA DOS SANTOS DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO

Prof(a). Dr(a). GASTÃO SILVES FERREIRA FREDERICO

Prof(a). Dr(a). FELIX SILVA COSTA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos:

Ao meu orientador, Professor Doutor José Vanterler da Costa Sousa, e ao meu coorientador, Professor Doutor Edmundo Capelas de Oliveira, pela dedicação, disponibilidade, paciência e apoio na condução desta tese.

Ao Prof. Dr. Aurélio e aos colegas que, de alguma forma, deram alguma contribuição.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) pela oportunidade de realizar o doutorado.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001."

RESUMO

Neste trabalho, usamos a medida de não-compacidade de Kuratowski e a desigualdade de Grönwall e algumas propriedades envolvendo a teoria dos operadores setoriais para obtermos a existência de soluções suaves e-positivas globais para uma classe de equações diferenciais fracionárias de evolução com impulsos para os casos: $0 < \alpha \leqslant 1$ e $1 < \alpha \leqslant 2$. Analisamos o caso $\alpha = 1$, recuperamos o caso inteiro. Assim, a fim de tornar mais consistente e elucidar o resultado investigado, apresentamos uma aplicação envolvendo um problema do tipo parabólico fracionário.

Palavras-chave: Equações diferenciais fracionárias, Soluções suaves e-positivas, Medida de não-compacidade de Kuratowski, Desigualdade de Grönwall, Família α-resolvente (Equações diferenciais).

ABSTRACT

In this work, we use the Kuratowski measure of non-compactness and Grönwall inequality and some properties involving the theory of sectorial operators to obtain the existence of global e-positive mild solutions for a class of impulsive evolution fractional differential equations for the cases: $0 < \alpha \leqslant 1$ and $1 < \alpha \leqslant 2$. We discussed the special case, that is, when $\alpha = 1$, we recover the entire case. In this sense, in order to make the investigated result more consistent and elucidate, we present an application involving a fractional parabolic problem.

Keywords: Fractional differential equations, e-Positive mild solutions, Kuratowski measure of non-compactness, Grönwall inequality, α-Resolvent family.

Sumário

Introdução **9**

1 Preliminares **15**
1.1 Espaços de funções 15
1.2 Medida de não-compacidade 18
1.3 Desigualdade de Grönwall 19

2 Cálculo fracionário com respeito a outra função **21**
2.1 Integrais fracionárias 21
2.2 Derivadas fracionárias 22
2.3 Derivadas fracionárias ψ-Hilfer 24
2.4 Derivadas obtidas a partir da ψ-Hilfer 31
2.5 Teoria dos operadores no cálculo fracionário 32

3 Existência de solução suave e-positiva **34**
3.1 Caso especial 44
3.2 Aplicação: um problema parabólico 45

Conclusões e perspectivas futuras **48**

Referências Bibliográficas **55**

Introdução

Neste trabalho, investigamos a existência de soluções suaves e-positivas para as classes de problemas fracionários não-lineares

$$\begin{cases} {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha}_{0+}\upsilon(t) + A\upsilon(t) &= f(t,\ \upsilon(t)),\ \ t \in J_\infty,\ \ \alpha \in (0,1), \\ \Delta\upsilon|_{t=t_k} &= I(\upsilon(t_k)),\ \ k \in \mathbb{N},\ \ t \neq t_k, \\ \upsilon(0) &= x_0. \end{cases} \tag{P1}$$

e

$$\begin{cases} {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha}_{0+}\upsilon(t) + A\upsilon(t) = f(t,\ \upsilon(t)),\ \ t \in J_\infty,\ \ \alpha \in (1,2), \\ \Delta\upsilon(t_k) = I(\upsilon(t_k)), \quad \Delta u'(t_k) = I(u'(t_k)),\ \ k \in \mathbb{N},\ \ t \neq t_k, \\ \upsilon(0) = x_0, \qquad \upsilon'(0) = x_1. \end{cases} \tag{P2}$$

onde $\upsilon : J_\infty = [0, +\infty) \to E$, $A : D(A) \subset E \to E$ é um operador setorial tipo (M, θ, α, μ) em E um espaço de Banach, $f \in C(J_\infty \times E, E)$, $\Delta\upsilon|_{t=t_k} = \upsilon(t_k^+) - \upsilon(t_k^-)$ é o salto da função u no ponto t_k que representa a função impulso $I : E \to E$, sendo $\upsilon(t_k^+)$ o limite à direita e $\upsilon(t_k^-)$ o limite à esquerda, em $t = t_k$ e $x_0 \in E$.

Considere ainda, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \cdots$, com $t_m \xrightarrow{m\to\infty} \infty$, uma partição em J_∞ e defina os intervalos: $J_0 = [0, t_1]$ e $J_k = (t_k, t_{k+1}]$ $(k \in \mathbb{N})$. E também, seja λ_1 o menor autovalor real positivo do operador linear A e $e_1 \in D(A)$ o autovetor positivo correspondente a λ_1. $\Delta\upsilon'|_{t=t_k}$ tem definição análoga ao $\Delta\upsilon|_{t=t_k}$ e $x_1 \in E$.

O operador ${}^{C}\mathbb{D}^{\alpha}_{0+}(\cdot)$ é a derivada fracionária de Caputo. Essa derivada é uma generalização natural das derivadas clássicas.

Ao longo dessa tese, entendemos por uma solução suave para os sistemas (P1) e (P2) uma função $\upsilon \in PC(J_\infty, E)$ tais que

$$\upsilon(t) = \mathbb{S}_\alpha(t)x_0 + \int_0^t \mathbb{T}_\alpha(t-s)f(s,\ \upsilon(s))ds + \mathbb{S}_\alpha(t)\sum_{i=1}^{k}\mathbb{S}_\alpha^{-1}(t_i)I(\upsilon(t_i))$$

e

$$\begin{aligned} \upsilon(t) &= \mathbb{S}_\alpha(t)x_0 + \mathbb{K}_\alpha(t)x_1 + \int_0^t \mathbb{T}_\alpha(t-s)f(s,\ \upsilon(s))ds + \mathbb{S}_\alpha(t)\sum_{i=1}^{k}\mathbb{S}_\alpha^{-1}(t_i)I(\upsilon(t_i)) \\ &+ \mathbb{K}_\alpha(t)\sum_{i=1}^{k}\mathbb{K}_\alpha^{-1}(t_i)I(\upsilon'(t_i)), \end{aligned}$$

respectivamente.

Os detalhes de $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$, $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{T}_\alpha(\cdot)$ são apresentados no Capítulo 2. Lembrando que, $\mathbb{S}_\alpha^{-1}(\cdot)$ e $\mathbb{K}_\alpha^{-1}(\cdot)$ denotam o inverso dos operadores-solução $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$, respectivamente, em $t = t_i$, $i = 1, 2, 3, \cdots, m$.

Uma carta de l'Hospital a Leibniz, formulando uma questão envolvendo uma possível generalização da derivada de ordem inteira para uma de ordem fracionária, foi um dos questionamento mais importantes que não se imaginava, em 1695, momento em que iniciou o primeiro passo para a construção de uma nova teoria, hoje conhecida como Cálculo Fracionário (CF). Atualmente esta teoria está bastante difundida, com uma gama enorme de definições de operadores fracionários (integrais e derivadas), bem como inúmeros resultados de outras áreas usando os conceitos fundamentais do Cálculo Fracionário [2, 41, 42, 56, 61, 62, 65, 67, 70]. Uma das consequências importantes que o cálculo fracionário proporciona, é a investigação de propriedades de equações diferenciais fracionárias, ponto principal deste trabalho.

Nos últimos anos, observamos um interesse crescente nas investigações de equações diferenciais fracionárias e aplicações [12, 16, 21, 22, 30, 54, 59, 66, 68]. O fato é que inúmeros pesquisadores têm justificado que trabalhar com operadores fracionários (derivadas e integrais) proporciona, em muitos casos, melhores resultados quando comparados com operadores clássicos (ordem inteira), em particular, quando se trata de aplicações [3, 4, 5, 40, 48, 63, 64]. Do ponto de vista teórico, ainda há um vasto caminho a ser explorado, uma vez que a teoria está sendo construída em diversas direções, principalmente envolvendo operadores setoriais e quase setoriais [8, 29, 36, 43, 63, 64, 69, 71, 74]. Além disso, muitas questões ainda precisam ser respondidas, o que enriquecerá a teoria em geral. Aqui, destacamos alguns trabalhos relevantes na teoria das equações diferenciais fracionárias envolvendo operadores setoriais e quase setoriais [17, 20, 73, 76, 78, 79]. Evidentemente, é notável a importância das equações diferenciais fracionárias tanto no âmbito teórico quanto no de aplicação.

Em 2012, Shu e Wang [51], consideraram a equação integrodiferencial fracionária semilinear no espaço de Banach X, dada por

$$\begin{cases} {}^{C}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha} u(t) &= Au(t) + f(t, u(t)) + \displaystyle\int_0^t q(t-s)\, g(s, u(s))\, ds \\ u(0) + m(u) &= u_0 \in X \\ u'(0) + n(u) &= u_1 \in X \end{cases} \tag{3}$$

onde ${}^{C}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha}(\cdot)$ é a derivada fracionária definida por Caputo com $1 < \alpha < 2$, A é um operador setorial tipo (M, θ, α, μ), definido do domínio $D(A) \subset X$ para X, as funções não lineares contínuas f, g são definidas de $[0,T] \times X \to X$, $q : [0,T] \to X$ são funções integráveis sobre $[0,T]$ e a condição não local $m : X \to X$, $n : X \to X$ são duas funções contínuas. Nesse sentido, os autores investigaram a existência e a unicidade de uma solução suave para o sistema (3), usando o teorema de Krasnoselskii, o teorema de Arzelà-Ascoli e o teorema do ponto fixo.

Em 2013, Yang e Liang [76], usando teoremas de ponto fixo e a teoria analítica de semigrupo, investigaram soluções positivas para o sistema de evolução via derivada fracionária de Caputo em espaços de Banach, dada por

$$\begin{cases} {}^{C}\mathbb{D}_{0+}^{q} u(t) + Av(t) &= f(t, u(t)), \quad q \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \in X \end{cases}$$

onde ${}^{C}\mathbb{D}_{0+}^{q}(\cdot)$ é a derivada fracionária definida por Caputo, $-A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $S(t)$, $t \geq 0$ de operador linear uniformemente limitado, e f é uma função não linear.

Ainda em 2013, Wang et al. [71], realizaram um estudo sobre controle ótimo para equações fracionárias de evolução não-lineares com impulsos. Neste trabalho, eles investigaram a existência de soluções suaves contínuas por partes e aplicações de controle parabólico impulsivo fracionário.

Em 2015, Wang e Shu [74], investigaram a existência de soluções suaves positivas de equações de evolução fracionárias com condições não locais de ordem $1 < \alpha < 2$, usando os teoremas de ponto fixo: de Schauder e de Krasnoselskii. No mesmo ano, Ding e Ahmad [20], investigaram soluções suaves (existência e unicidade) para equações de evolução fracionárias com operadores quase setoriais. Conforme destacado, vários estudos foram publicados, alguns importantes e relevantes para a teoria.

Em 2018 Shah et al. [49], utilizam o princípio da contração de Banach para discutir a existência e unicidade de uma solução suave de uma equação diferencial de evolução com impulsos. Fixam o impulso para obter a solução clássica, e estabelecem condições para que a solução suave se torne a solução clássica. É notável que a área de equações diferenciais fracionárias sejam elas, funcional, de evolução, com impulsos, sem impulsos, com retardo vêm ao longo dos anos se estabelecendo de forma rica e positiva, não somente pela quantidade de pesquisadores e trabalhos publicados, mas pela qualidade e impacto desses resultados. Podemos aqui destacar alguns trabalhos sobre existência, unicidade, estabilidade, atratividade, controlabilidade de soluções de equações diferenciais fracionárias [12, 15, 17, 21, 30, 35, 47, 51, 55, 57] e suas referências.

Passemos agora a discorrer sobre cada um dos capítulos deste trabalho:

No Capítulo 1, apresentamos as estruturas dos espaços de funções contínuas, funções absolutamente contínuas, funções contínuas por partes, funções reais p-integráveis e suas respectivas normas. Além disso, apresentamos a definição do espaço ponderado $C_{a,\alpha}$ e, também, discutimos os conceitos de família α-resolvente e operador setorial. Uma seção na qual abordamos a desigualdade de Grönwall e mais uma seção que aborda a ideia de medida de Kuratowski e alguns resultados relevantes na obtenção da principal contribuição desta pesquisa.

O Capítulo 2 é dedicado a derivada fracionária ψ-Hilfer. Apresentamos os conceitos básicos de derivadas e integrais fracionárias, e algumas propriedades. Motivados pelas derivadas fracionárias de Caputo, Riemann-Liouville e Hilfer, Sousa e Oliveira [56] introduzem a derivada fracionária ψ-Hilfer e então, apresentam propriedades, teoremas e lemas. Além disso, alguns casos particulares da derivada fracionária ψ-Hilfer são apresentados. Por fim, uma seção na qual discutimos o conceito de operador-solução dada pelas famílias α-resolventes $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$, $\mathbb{T}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$ em termos do resolvente $R(\lambda^\alpha, A)$ e também em termos de funções de Mittag-Leffler. Nesse sentido, são abordadas relações entre as famílias α-resolventes $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$, $\mathbb{T}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$ através da derivada clássica. Além disso, discutimos uma observação sobre a diferença entre uma integral calculada no intervalo determinado em relação ao intervalo particionado a partir da escolha de $n \in \mathbb{N}$.

No Capítulo 3, trabalhamos com os principais problemas desta tese, os sistemas (P1) e (P2). Motivados pelos trabalhos acima discutidos, pelas inúmeras questões em aberto que envolvem a teoria de equações diferenciais fracionárias, e com o objetivo de contribuir com novos resultados, em particular, envolvendo equações diferenciais fracionárias de evolução

impulsivas, investigamos a existência de soluções suaves e-positivas para os sistemas (P1) e (P2), envolvendo a teoria dos operadores setoriais, usando a medida de Kuratowski de não-compacidade e a desigualdade de Grönwall. Ou seja, vamos investigar o resultado a seguir:

Teorema 1. *Considere o espaço de Banach $(E, \|\cdot\|)$, com ordem parcial "$\leqslant$", cujo cone positivo E^+ é normal, e seja $-A$ é o gerador infinitesimal das famílias α-resolventes positivas $\{\mathbb{S}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$, $\{\mathbb{K}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$ e $\{\mathbb{T}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$. Para uma constante $\sigma > 0$ e $t \in J_\infty$, seja $x_0 \geqslant \sigma e_1$ e $\phi(t, \sigma e_1) \geqslant \lambda_1 \sigma e_1$. Se a não-linearidade de $\phi \in C(J_\infty \times E^+, E)$ satisfizer as condições a seguir:*

($\mathbf{H}_1$) *Para $t \in J_\infty$ e $x \in E^+$, existem funções a e $b \in C(J_\infty, E^+)$, tais que*

$$\|f(t,x)\| \leqslant a(t)\|x\| + b(t).$$

($\mathbf{H}_2$) *Para todo $R > 0$ e $T > 0$, existe $C = C(R,T) > 0$, tal que*

$$\phi(t,y) - \phi(t,x) \geqslant -C(y-x),$$

para todo $t \in [0,T]$ e para $0 \leqslant x \leqslant y$, com $\|x\|,\ \|Y\| \leqslant R$.

($\mathbf{H}_3$) *Para todo $R > 0$ e $T > 0$, existe $L = L(R,T) > 0$, tal que toda sequência monótona crescente $W = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^+ \cap \overline{B}(0,R)$ satisfaça*

$$\mu\Big(\phi(t,W)\Big) \leqslant L \cdot \mu(W), \quad \forall\ t \in [0,T].$$

Então, os sistemas (P1) *e* (P2) *têm solução suave e-positiva em J_∞.*

Quando E for um espaço de Banach ordenado e fracamente sequencialmente completo, excluímos a condição **($\mathbf{H}_3$)** de medida de não-compacidade do **Teorema 1** e obtemos o resultado a seguir:

Corolário 2. *Considere o espaço de Banach E, ordenado e completo de forma fraca e sequencial, cujo cone positivo E^+ seja normal, $-A$ seja o gerador infinitesimal das famílias α-resolventes positivas $\{\mathbb{S}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$, $\{\mathbb{K}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$ e $\{\mathbb{T}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$. Seja $x_0 \geqslant \sigma e_1$, $f(t, \sigma e_1) \geqslant \lambda_1 \sigma e_1$ para $\sigma > 0$ e $t \in J_\infty$. Se a não-linearidade de $f \in C(J_\infty \times E^+, E)$ satisfizer as suposições* **($\mathbf{H}_1$)** *e* **($\mathbf{H}_2$)**, *então os* sistemas (P1)-(P2) *têm uma solução suave e-positiva em J_∞.*

As principais dificuldades em trabalhar com a solução suave e-positiva que envolvem operadores solução $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$, $\mathbb{T}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$ residem nos seguintes fatos:

1. Quando se investiga propriedades de soluções suaves de equações diferenciais, envolvendo operador resolvente, função de Mittag-Leffler, em particular, problemas do tipo que envolvam as equações dos sistemas (P1) e (P2), é a não garantia que o operador-solução satisfaça a propriedade de semigrupo, isto é, $\mathbb{S}_\alpha(t+u) = \mathbb{S}_\alpha(t)\mathbb{S}_\alpha(u)$, no entanto existe um caminho que torna possível realizar a discussão dos resultados desejados. Shu et al. [52], propuseram uma definição mais apropriada para soluções suaves, uma vez que os operadores-solução não satisfazem a propriedade de semigrupo. Assim, substituíram o termo de impulso $\mathbb{S}_\alpha(t - t_i)$ por $\mathbb{S}_\alpha(t)\mathbb{S}_\alpha^{-1}(t_i)$, onde $\mathbb{S}_\alpha^{-1}(t_i)$ denota o inverso do operador-solução fracionário $\mathbb{S}_\alpha(t)$ em $t = t_i$, $(i = 1, 2, \cdots m)$. Além desse argumento válido, existem trabalhos que abordam esse tipo de problema, fornecendo uma expressão para $\mathbb{S}_\alpha(t+u)$ [14].

2. Na investigação da solução global dos sistemas (P1) e (P2) (**Teorema 1**), existe um problema em tentar controlar as normas dos operadores solução por meio de estimativas.

3. Outra dificuldade é obter a existência de solução global suave e-positiva, uma vez que foi necessário construir problemas paralelos com suas respectivas soluções suaves, para obter o resultado desejado.

4. No caso de operadores fracionários mais gerais como a derivada fracionária ψ-Hilfer com ordem $\alpha \in (n-1, n)$ e tipo $\beta \in (0, 1)$, certamente esses problemas apontados o tornam maiores nesse sentido. Além desses problemas, para isso é preciso mudar a estrutura do espaço $PC(J_\infty, E)$.

Uma consequência natural do resultado investigado, é o caso especial, isto é, tomando $\alpha = 1$ nos sistemas (P1) e (P2) e no **Teorema 1**, recuperamos o caso inteiro.

Com o intuito de apresentar uma aplicação a fim de enriquecer esse trabalho, vamos a seguir apresentar um problema parabólico fracionário.

Considere o domínio limitado $E \subset \mathbb{R}$, cuja a fronteira ∂E seja suficientemente suave e considere também o problema de valor de contorno inicial fracionário do tipo parabólico dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha \upsilon}{\partial t^\alpha} - \nabla^2 \upsilon &= g(y,t,\upsilon),\ y \in E \quad t \in J_\infty,\ t \neq t_k \\ \Delta \upsilon|_{t=t_k} &= I(\upsilon(t_k)),\ y \in E \quad k = 1,2,3,... \\ \upsilon|_{\partial E} &= 0 \\ \upsilon(y,0) &= \phi(y),\ y \in E. \end{cases} \tag{4}$$

onde $\dfrac{\partial^\alpha \upsilon}{\partial t^\alpha}$ é a derivada fracionária parcial de Caputo com $\alpha \in (0,1)$, ∇^2 é operador de Laplace, $g(y,t,\upsilon) : \overline{E} \times J_\infty \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é contínua.

Para o sistema (4), temos o resultado de existência:

Teorema 3. *Seja λ_1 o menor autovalor real positivo do operador de Laplace $-\nabla^2$ com a condição de contorno de $\upsilon|_{\partial_E} = 0$, $e_1 \in L^2(E)$ o autovalor positivo correspondente a λ_1. Seja $\varphi(x) \geq e_1(x)$, $g(x,t,\sigma e_1(x)) \geq \lambda_1 \sigma e_1(x)$ para $x \in \overline{E}$, $t \in J_\infty$ e $\sigma > 0$. Se a não-linearidade de $g(x,t,\upsilon) : \overline{E} \times J_\infty \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é contínua e satisfaz as seguintes condições:*

(A1) *Existe $a, b \in C(\overline{E} \times J_\infty, \mathbb{R}^+)$ tal que*

$$|g(y,t,\eta)| \leq a(y,t)|\eta| + b(y,t)$$

para qualquer $y \in \overline{E}$, $t \in J_\infty$, $\eta \in \mathbb{R}^+$.

(A2) *Para qualquer $R > 0$, $T > 0$ existe $M = M(R,T) > 0$ tal que*

$$g(y,t,\eta_2) - g(y,t,\eta_1) \geq -M(\eta_2 - \eta_1)$$

para algum $y \in \overline{E}$, $t \in J_\infty$ e $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2$, $|\eta_1|, |\eta_2| \leq R$.

Então, o sistema (4) *tem solução suave e-positiva.*

Uma consequência natural da aplicação feita, é quando tomamos $\alpha = 1$ no sistema (4), recuperamos o caso inteiro.

Concluímos a tese com os objetivos alcançados. Nesse sentido, apresentamos alguns problemas em aberto na teoria de equações diferenciais fracionárias que permitem dar continuidade a esse trabalho, e destacando o vasto caminho e trabalhos que podem ser discutidos na área.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos de análise funcional e de cálculo fracionário que serão necessários no desenvolvimento do texto. Iniciamos com algumas definições de espaços de funções e alguns conceitos fundamentais com relação a semigrupos. Finalizamos com o conceito sobre medida de Kuratowski e alguns lemas essenciais na discussão do principal resultado deste trabalho.

1.1 Espaços de funções

Definição 1.1 (Espaço das funções lineares limitadas)**.** [33] *Sejam S e T espaços normados, então temos que o espaço das funções lineares limitadas e sua norma, são dados por*

$$\mathcal{L}(S,T) := \{A : S \to T;\ A :\ \textit{um operador linear limitado}\}$$

$$\|A\|_{\mathcal{L}(S,T)} := \sup_{\|x\|_S=1} \|Ax\|_T = \sup_{\|x\|_S\leqslant 1} \|Ax\|_T = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_T}{\|x\|_S}.$$

De onde, segue:

(i) Se $T = S$, então $\mathcal{L}(S,S) = \mathcal{L}(S)$.

(ii) $\Big(\mathcal{L}(S),\ \|\cdot\|_{\mathcal{L}(S)}\Big)$ é um espaço de Banach.

(iii) $\|AB\|_{\mathcal{L}(S)} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(S)}\|B\|_{\mathcal{L}(S)}$.

Considere o intervalo $J = [a,b]$ e $p \in [1,\infty)$, definimos o espaço $L^p(J)$, das funções Lebesgue integráveis [33], e sua norma usual, como

$$L^p(J) := \left\{\upsilon : J \to \mathbb{R};\ \int_a^b |\upsilon(s)|^p ds < \infty\right\} \quad \text{e} \quad \|\upsilon\|_p = \left(\int_a^b |\upsilon(s)|^p ds\right)^{1/p}.$$

$(L^p(J), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.

Seja $n \in \mathbb{N}$, J um intervalo fechado e $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach:
• Definimos o espaço das funções contínuas e sua norma usual como

$$C(J,E) := \{f : J \to E;\ f : \text{contínua}\} \quad \text{e} \quad \|f\|_C := \sup_{t\in J}|f(t)|.$$

• Definimos o espaço das funções n-vezes continuamente diferenciáveis e sua norma usual como

$$C^n(J,E) := \left\{ f : J \to E;\ f^{(n)} \in C(J,E) \right\} \quad \text{e} \quad \|f\|_{C^n} := \sup_{t\in J} |f^{(n)}(t)|.$$

Note que os espaços definidos acima são de Banach.

Sejam $0 < a < b < \infty$ e $J = [a,b]$, definimos o espaço das funções n-vezes absolutamente contínuas como [33]

$$AC^n(J,\mathbb{R}) = AC^n(J) = \left\{ \phi : J \to \mathbb{R};\ \phi^{(n-1)} \in AC(J) \right\}.$$

Definição 1.2 (Espaço das Funções Contínuas por Partes)**.** [57, 58, 75] *Sejam E um espaço de Banach e $J_\infty = [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Definimos o espaço das funções contínuas, por segmentos, como*

$$PC(J_\infty, E) := \left\{ \begin{array}{l} \upsilon : J_\infty \to E;\ \upsilon(t) : \textit{contínua em } t \neq t_k,\ \textit{contínua à esquerda em} \\ t = t_k \textit{ e exista o limite à direita}, \upsilon(t_k^+),\ \textit{para } \forall\ t_k \in J_\infty,\ \textit{com } k \in \mathbb{N} \end{array} \right\},$$

munido da norma $\|\upsilon\|_{PC} = \{\sup\|\upsilon(t)\|;\ t \in J_\infty\}$ formam um espaço de Banach.

Definição 1.3 (Espaço Ponderado $C_{a,\alpha}$)**.** [50] *Sejam $a, \alpha \in \mathbb{R}$. Uma função $f : [a,\infty) \to E$ pertence ao espaço $C_{a,\alpha}$ se existir um número real $p > \alpha$ e uma função $g \in C([a,\infty); E)$ tais que $f(t) = t^p g(t)$. Além disso, dizemos que $f \in C^m_{a,\alpha}$ se $f^{(m)} \in C_{a,\alpha}$, para algum $m \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.4 (Operador compacto)**.** [74, 75] *Sejam X, Y espaços normados. Um operador linear $T : X \to Y$ é compacto (ou completamente contínuo) se, e somente se, para qualquer sequência limitada $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ a sequência $(Tx_n)_{n=1}^\infty \subset Y$ possui uma subsequência convergente em Y.*

Denotamos por $D(A)$ e $R(A)$, respectivamente, o domínio e a imagem de uma função A.

Usamos as notações clássicas: $f^{(n)}(x) = \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n f(x) = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.5. [53] *Uma sequência (x_n) em um espaço de Banach E é dita fracamente Cauchy se $x^*(x_n)$ é convergente para todo funcional $x^* \in E^*$. E^* é o dual de E.*

Definição 1.6. [53] *Seja E um espaço de Banach, dizemos que E é completo de forma fraca e sequencial, se toda sequência fracamente Cauchy converge fracamente.*

Definição 1.7 (Conjunto Resolvente)**.** [14] *Considere o operador linear $A : D(A) \subset E \to E$ e o subconjunto $Im(\lambda I - A)$ em E. Definimos $\rho(A)$ como o conjunto resolvente de A, que é formado pelos $\lambda \in \mathbb{C}$ que satisfazem as condições a seguir:*

1 *$(\lambda I - A)$ é um operador injetor.*

2 *$E = \overline{Im(\lambda I - A)}$.*

3 *$(\lambda I - A)^{-1} : Im(\lambda I - A) \to E$ é um operador limitado.*

Definição 1.8 (Resolvente)**.** [14] *Para cada $\lambda \in \rho(A)$, chamamos de resolvente ao operador linear $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$.*

Definição 1.9 (Espectro)**.** [14] *Seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Definimos o espectro de A como o complementar do conjunto resolvente, isto é, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.*

Definição 1.10 (Cone)**.** [39] *Seja E um espaço de Banach real. Um subconjunto não-vazio, fechado e convexo $E^+ \subset E$ é considerado um cone se ele satisfizer as seguintes condições:*

(*i*) *Se $x \in E^+$ e $\lambda \geqslant 0$, então $\lambda x \in E^+$.*

(*ii*) *Se $x \in E^+$ e $-x \in E^+$, então $x = 0$.*

Todo cone $E^+ \subset E$ induz uma ordem em E dada por: $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in E^+$.

Definição 1.11 (Cone normal)**.** *Um cone no espaço de Banach E é considerado normal se for possível encontrar $\delta > 0$, tal que*

$$\|x + y\| \geqslant \delta \cdot (\|x\| + \|y\|), \quad \forall\ x, y \in E^+.$$

Definição 1.12 (Semigrupo)**.** [14, 44] *Uma família $\Big\{T(t);\ t \geqslant 0\Big\} \subset \mathcal{L}(E)$ é considerada um semigrupo de operadores lineares em E, se:*

(*i*) *$T(0) = I$, onde I é o operador identidade em E;*

(*ii*) *$T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geqslant 0$.*

Se, além disso,

(*a*) *$\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} \xrightarrow{t \to 0^+} 0$, dizemos que o semigrupo é uniformemente contínuo;*

(*b*) *$\|T(t)x - x\|_E \xrightarrow{t \to 0^+} 0$, para cada $x \in E$, dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo.*

Definição 1.13 (Funções de Mittag–Leffler)**.** [50, 51] *Sejam $\alpha, \beta > 0$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos as funções Mittag–Leffler $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(\cdot)$, respectivamente, com um e com dois parâmetros, como*

$$\mathbb{E}_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \qquad e \qquad \mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Definição 1.14 (Operador setorial)**.** [50, 51] *Um operador linear fechado $A : D(A) \subset E \to E$ é considerado um operador setorial tipo (M, θ, α, μ) se existir $M > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que:*

1 *o α-resolvente de A exista fora do setor $\mu + \Sigma_\theta = \{\mu + \lambda^\alpha;\ \lambda \in \mathbb{C}, |\arg(-\lambda^\alpha)| < \theta\}$,*

2 *satisfaça a estimativa $\|(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\| \leqslant \dfrac{M}{|\lambda^\alpha - \mu|}, \quad \lambda^\alpha \notin \mu + \Sigma_\theta$.*

1.2 Medida de não-compacidade

A noção de medida de não-compacidade (MNC) introduzida por K. Kuratowski tem um papel importante na análise funcional, em particular, aplicada à teoria de equações diferenciais e integrais, e à teoria de operadores.

Considere a família $\mathscr{B}(E)$ dos subconjuntos limitados do espaço de Banach E e saiba que $B \subset E$ é limitado, se B estiver contido em alguma bola. Se $B \in \mathscr{B}(E)$ não for relativamente compacto, então existe um $\varepsilon > 0$, tal que B não possa ser recoberto por um número finito de ε-bolas. Além disso, também é impossível recobrir B por um número finito de conjuntos de diâmetro $< \varepsilon$.

Definição 1.15 (MNC)**.** [72, 75, 79] *Sejam $(E, \leqslant)$ um espaço ordenado de Banach e E^+ o cone positivo de E. Uma aplicação $\Phi : \mathscr{B}(E) \to E^+$ é denominada medida de não-compacidade em $\mathscr{B}(E)$ se $\Phi(\overline{co}B) = \Phi(B)$ para todo $B \in \mathscr{B}(E)$, onde $\overline{co}B$ representa o casco convexo de B.*

Definição 1.16 (MNC de Kuratowski)**.** [72, 75, 79] *Seja E um espaço de Banach. A MNC de Kuratowski de $B \in \mathscr{B}(E)$ é uma aplicação $\mu : \mathscr{B}(E) \to \mathbb{R}_+$ definida por*

$$\mu(B) = \inf\left\{\varepsilon > 0;\ B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \text{ e } \delta(B_k) \leqslant \varepsilon,\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}\right\}. \tag{1.1}$$

onde $\delta(X) = \max\{|a - b|;\ a, b \in X\}$ é o diâmetro do conjunto X.

Lema 1.17. [72, 75, 79] *Sejam S e T conjuntos limitados em um espaço de Banach Ω, seja $\bar{S}$ o fecho de S, $\overline{co}(S)$ o casco convexo de S e a um número real. Então a medida de não-compacidade possui as seguintes propriedades:*

(1) $\mu(S) = 0 \iff \overline{S}$ *for compacto;*

(2) $S \subset T \quad \Rightarrow \quad \mu(S) \leqslant \mu(T)$;

(3) $\mu(S) = \mu(\overline{S}) = \mu(\overline{co}(S))$;

(4) $\mu(aS) = |a|\ \mu(S)$;

(5) $\mu(S + T) \leqslant \mu(S) + \mu(T)$, *onde* $S + T = \{x + y;\ x \in S, y \in T\}$;

(6) $\mu(S \cup T) = \max\{\mu(S),\ \mu(T)\}$;

(7) $\mu(\{x\} \cup S) = \mu(S), \quad \forall x \in \Omega, \quad \emptyset \neq S \subset \Omega$;

Importante mencionar as observações a seguir:

O item (1) diz que a MNC μ é considerada regular.

O item (2) diz que a MNC μ é considerada monótona.

Os itens (4) e (5) indicam que μ é uma seminorma.

Para os próximos lemas, considere o intervalo $J_* = [0, b]$ e o espaço de Banach $C(J_*, E)$, então, para qualquer $B \subset C(J_*, E)$ e para todo $t \in J_*$, definimos os conjuntos

$$B(t) := \{v(t);\ v \in B\} \subset E \quad \text{e} \quad \int_0^t B(s)ds := \left\{\int_0^t v(s)ds;\ v \in B\right\}.$$

Lema 1.18. [72, 75, 79] *Seja $B \subset C(J_*; E)$ um conjunto limitado, então $B(t)$ é limitado em E e*

$$\mu(B(t)) \leqslant \mu(B), \text{ para todo } t \in J_*.$$

Lema 1.19. [72, 75, 79] *Considere o conjunto limitado e equicontínuo $B \subset C(J_*, E)$, então $\mu(B(t))$ é contínua em J_*,*

$$\mu(B) = \sup\{\mu(B(t));\ t \in J_*\} \qquad e \qquad \mu\left(\int_0^t B(s)ds\right) \leqslant \int_0^t \mu\Big(B(s)\Big)ds.$$

Lema 1.20. [72, 75, 79] *Seja $J = [a, b]$, $B \subset C(J;\ E)$ limitado e equicontínuo, então $\overline{co}(B) \subset C(J;\ E)$ também é limitado e equicontínuo.*

Lema 1.21. [72, 75, 79] *Seja $\{\upsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções Bochner-integráveis, de $J = [a, b]$ em E, com $\|u_n(t)\| \leqslant \overline{m}(t)$, para quase todo $t \in J$ e todo $n \geqslant 1$, onde $\overline{m} \in L(J; \mathbb{R}_+)$, então a função $\Phi(t) = \mu\Big(\{\upsilon_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\Big) \in L(J; \mathbb{R}_+)$ e satisfaz*

$$\mu\left(\left\{\int_a^t \upsilon_n(s)ds;\ n \in \mathbb{N}\right\}\right) \leqslant 2\int_a^t \Phi(s)ds. \tag{1.2}$$

Lema 1.22. [72, 75, 79] *Considere o conjunto limitado B. Então, existe uma sequência $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, de forma que*

$$\mu(B) \leqslant \mu\Big(\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}\Big) + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

O grau de não-compacidade de um conjunto é medido por meio de funções chamadas medidas de não-compacidade. Conforme apresentada acima, para a medida de não-compacidade de Kuratowski. Também podemos mencionar outras duas importantes e mais utilizadas medidas de não-compacidade, isto é, a medida de não-compacidade de Hausdorff que foi introduzida por Goldenstein et al. [24] em 1957, e posteriormente estudado por Goldenstein e Markus [25], e a medida de não-compacidade de Istratescu em 1972 [31].

Tal abordagem cria a possibilidade de definir medidas úteis e práticas de não compacidade em vários espaços de Banach. A medida de não compacidade é uma ferramenta muito útil em espaços de Banach. Eles são amplamente utilizados em teoria de ponto fixo, equações diferenciais, equações funcionais, equações integrais e integro-diferenciais, otimização, etc. [1, 6, 9, 37, 38]. Também podemos destacar o trabalho de Darbo [18] ao usar MNC para generalizar tanto o princípio clássico do ponto fixo de Schauder quanto o princípio de mapeamento da contração de Banach para os chamados operadores de condensação.

1.3 Desigualdade de Grönwall

Em 1919, T. H. Grönwall [26] provou uma desigualdade notável que atraiu e continua a atrair considerável atenção na literatura. Na teoria de equações diferenciais, as desigualdades do tipo Grönwall de uma variável para as funções reais desempenham um papel muito importante. O primeiro uso da desigualdade de Grönwall para estabelecer limites e unicidade é devido a R. Bellman [10]. A desigualdade de Grönwall, que geralmente é provada em equações diferenciais elementares usando argumentos de continuidade, é uma ferramenta importante no estudo do comportamento qualitativo de soluções de equação

diferencial e estabilidade. O problema da análise de estabilidade de sistemas não-lineares com dependência temporal tem atraído a atenção de vários pesquisadores e tem produzido um vasto conjunto de resultados importantes [11, 27, 34]. Por outro lado, podemos destacar a importância da desigualdade de Grönwall na teoria de equações diferenciais fracionárias. Em 2007 Ye et al. [77], apresentaram uma generalização para a desigualdade de Grönwall a fim de discutir uma aplicação em equações diferenciais fracionárias. Em 2019, Sousa e Oliveira [60], motivados por inúmeras desigualdade de Grönwall e pela função $\psi(\cdot)$, introduziram uma versão mais geral, permitindo discutir problemas de equações diferenciais fracionárias mediante a derivada fracionária ψ-Hilfer.

A seguir, vamos apresentar a desigualdade de Grönwall (veja **Lema 1.24)**, cuja importância é fundamental na investigação de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais e equações diferenciais fracionárias. As respectivas provas, não serão apresentadas, mas podem ser encontradas em [60].

Teorema 1.23. [60] *Sejam u e v duas funções não-negativas e integráveis e a função g não-negativa, não decrescente, contínua e com domínio $J = [a, b]$. Considere a função crescente $\psi \in C^1(J)$ tal que $\psi'(t)$ seja não-nula, para todo $t \in J$. Se*

$$u(t) \leqslant v(t) + g(t) \int_a^t \psi'(\tau)\Big(\psi(t) - \psi(\tau)\Big)^{\alpha-1} u(\tau)d\tau,$$

então

$$u(t) \leqslant v(t) + \int_a^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \psi'(\tau)\Big(\psi(t) - \psi(\tau)\Big)^{\alpha k-1} v(\tau)d\tau.$$

Lema 1.24 (Desigualdade de Grönwall)**.** [60] *Sob a hipótese do* **Teorema 1.23***, seja v uma função não-decrescente em $[a, b]$. Então, para todo $s \in [a, b]$, temos*

$$u(s) \leqslant v(s)\mathbb{E}_\alpha\Big(g(s)\ \Gamma(\alpha)[\psi(s) - \psi(a)]^\alpha\Big),$$

onde $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ é a função Mittag-Leffler.

Por exemplo, tomando $\psi(t) = t$ no **Lema 1.24**, temos o seguinte caso particular:

Lema 1.25 (Desigualdade de Grönwall)**.** [60] *Sob a hipótese do* **Teorema 1.23***, seja v uma função não-decrescente em $[a, b]$. Então, para todo $s \in [a, b]$, temos*

$$u(s) \leqslant v(s)\mathbb{E}_\alpha\Big(g(s)\ \Gamma(\alpha)[s - a]^\alpha\Big),$$

onde $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ é uma função Mittag-Leffler.

Escolhendo $\psi(s) = s$ e $\alpha = 1$, temos o caso especial, dado por:

Lema 1.26 (Desigualdade de Grönwall)**.** [60] *Sob a hipótese do* **Teorema 1.23***, seja v uma função não-decrescente em $[a, b]$. Então, para todo $s \in [a, b]$, temos*

$$u(s) \leqslant v(s)e^{g(s)(s-a)}.$$

Note que, para cada escolha de $\psi(\cdot)$ no **Lema 1.24**, temos uma classe de generalizações da desigualdade de Grönwall.

Capítulo 2

Cálculo fracionário com respeito a outra função

O objetivo deste capítulo é apresentar detalhadamente uma abordagem sobre a teoria do cálculo fracionário com respeito a outra função, ou seja, em relação a função $\psi(\cdot)$. Primeiramente, é necessário e suficiente discutir os conceitos fundamentais das integrais de Riemann-Liouville com relação função $\psi(\cdot)$ e propriedades correlacionadas. Em vista disso, motivados pelas definições das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, Caputo, Hilfer e das próprias definições das integrais fracionárias ψ-Riemann-Liouville, apresentamos as definições das derivadas fracionária ψ e consequentemente propriedades, teoremas, lemas e casos obtidos da escolha de $\psi(\cdot)$. A derivada fracionária ψ-Hilfer, introduzida por Sousa e Oliveira [56] em meados de 2018, com a finalidade de agrupar uma enorme gama de derivadas fracionárias, em um único operador diferencial.

2.1 Integrais fracionárias

Existem inúmeras definições de integrais fracionárias, um caso especial e clássico é a definida por Riemann–Liouville, conforme a definição a seguir:

Definição 2.1. [2, 56] *Sejam $\alpha > 0$ e $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo com $-\infty < a < b < \infty$. Definimos as* ***integrais fracionárias de Riemann–Liouville*** *de ordem α, à esquerda e à direita, respectivamente, como*

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\phi(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds, \quad x > a \tag{2.1}$$

e

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\phi(s)}{(s-x)^{1-\alpha}}ds, \quad x < b. \tag{2.2}$$

Uma proposta para generalizar uma classe de definições de integrais fracionárias é dada pela definição a seguir, envolvendo uma função ψ.

Definição 2.2 (Integrais ψ-Riemann–Liouville)**.** [2, 33, 56] *Sejam $\alpha > 0$ e $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo com $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, considere ainda a função $\psi(x)$ crescente e positiva em (a, b), de forma que $\psi'(x)$ seja contínua em $(a,\ b)$. Definimos as* ***integrais fracionárias com relação à*** *ψ da função ϕ definida em J e ordem α, respectivamente, à esquerda e à direita, como*

$$\mathcal{I}^{\alpha;\psi}_{a^+}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \psi'(s)\Big(\psi(x)-\psi(s)\Big)^{\alpha-1}\phi(s)ds \tag{2.3}$$

e

$$\mathcal{I}_{b-}^{\alpha;\psi}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \psi'(s)\Big(\psi(s)-\psi(x)\Big)^{\alpha-1}\phi(s)ds. \tag{2.4}$$

A seguir dois lemas importantes no decorrer deste trabalho, outros resultados podem ser obtidos em [33].

Lema 2.3. *Para $\alpha, \beta > 0$, temos as seguintes propriedades de semigrupo:*

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\ \mathcal{I}_{a+}^{\beta;\psi}\phi(x) = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta;\psi}\phi(x) \qquad e \qquad \mathcal{I}_{b-}^{\alpha;\psi}\ \mathcal{I}_{b-}^{\beta;\psi}\phi(x) = \mathcal{I}_{b-}^{\alpha+\beta;\psi}\phi(x).$$

Demonstração. Veja [33] □

Lema 2.4. *Sejam $\alpha > 0$ e $\delta > 0$, assim*

1. *Se $\phi(t) = (\psi(t)-\psi(a))^{\delta-1}$, então $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t) = \dfrac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha+\delta-1}$.*

2. *Se $\varphi(t) = (\psi(b)-\psi(t))^{\delta-1}$, então $\mathcal{I}_{b-}^{\alpha;\psi}\varphi(t) = \dfrac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)}(\psi(b)-\psi(t))^{\alpha+\delta-1}$.*

Demonstração. Veja [33] □

Um exemplo é dado pela escolha de $\psi(s) = s$ nas Eq.(2.3) e Eq.(2.4), obtendo assim a **Definição 2.1**, da integral fracionária de Riemann–Liouville. A partir da escolha de ψ, a, b e tomando o limite dos parâmetros α e β na **Definição 2.2**, obtemos uma grande gama de integrais fracionárias [2, 56].

2.2 Derivadas fracionárias

Nesta seção, vamos apresentar os operadores ψ-Riemann-Liouville e ψ-Caputo cujas definições foram motivadas, respectivamente, pelas definições clássicas dos operadores de Riemann-Liouville e de Caputo, que definimos a seguir. Além disso, apresentamos alguns resultados básicos.

Definição 2.5 (Derivadas de Riemann–Liouville)**.** [33] *Sejam $J = (a,\ b)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1,\ n)$ e $\phi(x) \in AC^n(a,\ b)$. Definimos as* ***derivadas fracionárias de Riemann–Liouville*** *da função ϕ e ordens α, respectivamente, à esquerda e à direita, como*

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\phi(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1}\phi(s)ds \tag{2.5}$$

e

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\phi(x) = (-1)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha}\phi(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b (s-x)^{n-\alpha-1}\phi(s)ds. \tag{2.6}$$

Definição 2.6 (Derivadas de Caputo)**.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1, n)$, $J = [a,\ b]$ um intervalo com $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ e $\phi \in C^n(J,\ \mathbb{R})$. Definimos as* ***derivadas fracionárias de Caputo*** *da função ϕ e ordens α, respectivamente, à esquerda e à direita, como*

$${}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha}\phi(x) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \phi(x) \tag{2.7}$$

e

$${}^{C}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha}\phi(x) = \mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha}(-1)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n \phi(x). \tag{2.8}$$

Definição 2.7 (Derivadas de Hilfer)**.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1, n)$ e $\beta \in [0, 1]$. Definimos as* ***derivadas fracionárias de Hilfer*** *da função $\phi \in C^n(a, b)$ de ordem α e tipo β, respectivamente, à esquerda e à direita, como*

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta}\phi(x) = \mathcal{I}_{a^+}^{\beta(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}\phi(x)$$

e

$$D_{b^-}^{\alpha,\beta}\phi(x) = \mathcal{I}_{b^-}^{\beta(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \mathcal{I}_{b^-}^{(1-\beta)(n-\alpha)}\phi(x)$$

sendo $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(\cdot)$ e $\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}(\cdot)$ as integrais fracionárias de Riemann-Liouville dadas pela **Definição 2.1**.

Vamos considerar a seguinte notação para facilitar o desenvolvimento do trabalho:

$$\Psi^{[n]} := \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n.$$

Definição 2.8 (Derivadas ψ-Riemann–Liouville)**.** [2, 33, 56] *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1,\ n)$, $J = (a,\ b)$ e $\phi(x) \in AC^n(J)$, com $-\infty \leqslant a < x < b \leqslant \infty$, e ainda $\psi'(x) \neq 0$. Definimos as* ***derivadas fracionárias ψ-Riemann–Liouville*** *da função ϕ de ordens α, respectivamente, à esquerda e à direita, como*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha;\psi}\phi(x) &= \Psi^{[n]}\ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha;\psi}\phi(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha;\psi}\phi(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \psi'(s)(\psi(x)-\psi(s))^{n-\alpha-1}\phi(s)ds \qquad (2.9)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha;\psi}\phi(x) &= (-1)^n\Psi^{[n]}\ \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha;\psi}\phi(x) = \left(\frac{-1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha;\psi}\phi(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{-1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \psi'(s)(\psi(s)-\psi(x))^{n-\alpha-1}\phi(s)ds. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Lema 2.9. *Para $\alpha, \delta > 0$, então valem as propriedades:*

1 *Se $\phi(t) = (\psi(t)-\psi(a))^{\delta-1}$, então* $\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha;\psi}\phi(t) = \dfrac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\alpha+\delta-1}$.

2 *Se $\varphi(t) = (\psi(b)-\psi(t))^{\delta-1}$, então* $\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha;\psi}\varphi(t) = \dfrac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}\Big(\psi(b)-\psi(t)\Big)^{\alpha+\delta-1}$.

Demonstração. Veja [2, 56]. □

Considerando $\psi(t) = t$ e substituindo nas Eq.(2.9) e Eq.(2.10), obtemos as equações apresentadas na **Definição 2.5**.

Definição 2.10 (Derivadas ψ-Caputo)**.** [2, 33, 56] *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1, n)$, $J = [a,\ b]$ um intervalo com $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ e considere as funções $\phi, \psi \in C^n([a,\ b],\ \mathbb{R})$ de forma que ψ seja crescente e, para todo $t \in J$, a derivada $\psi'(t)$ seja não-nula. Definimos as*

derivadas fracionárias ψ-Caputo *de ϕ e ordens α, respectivamente, à esquerda e à direita, como*

$$ {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\phi(t) \tag{2.11} $$

e

$$ {}^{C}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha;\psi}\left(\frac{-1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\phi(t). \tag{2.12} $$

Teorema 2.11. *Se $\phi \in C^{n}[a,b]$ e $\alpha > 0$, então*

$$ {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t)\left[\phi(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(\psi(t)-\psi(a))^{k}\ \Psi^{[k]}\phi(a)\right] $$

e

$$ {}^{C}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha;\psi}\phi(t) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha;\psi}\phi(t)\left[\phi(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(\psi(b)-\psi(t))^{k}(-1)^{k}\ \Psi^{[k]}\phi(b)\right]. $$

Demonstração. Veja [2, 56]. □

Considerando $\psi(t) = t$ e substituindo nas Eq.(2.11) e Eq.(2.12), obtemos as equações apresentadas na **Definição 2.6**.

2.3 Derivadas fracionárias ψ-Hilfer

Nesta seção, vamos discutir de forma detalhada um novo conceito de derivada fracionária, introduzida recentemente por Sousa e Oliveira [56], denominada ψ-Hilfer, esta tem a finalidade agrupar uma enorme gama de definições de derivadas fracionárias em um único operador. Além disso, vamos discutir algumas propriedades essenciais para o cálculo fracionário e suas respectivas demonstrações.

Definição 2.12. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1, n)$, $\beta \in [0,1]$, $J = [a,\ b]$ um intervalo real com $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ e considere duas funções $\phi, \psi \in C^{n}([a,\ b],\ \mathbb{R})$ de modo que ψ seja crescente e, para todo $t \in J$, a derivada $\psi'(t)$ seja não-nula. Definimos as* ***derivadas fracionárias ψ-Hilfer*** *de ϕ com ordem α e tipo β, respectivamente, à esquerda e à direita, como*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t) \tag{2.13} $$

e

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{b-}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{-1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathcal{I}_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t). \tag{2.14} $$

Sejam $\alpha \in (0,1)$ e $\beta \in [0,1]$. O **espaço ponderado** $C_{\gamma;\psi}^{\alpha,\beta}(J,\mathbb{R})$ é definido como

$$ C_{\gamma;\psi}^{\alpha,\beta}(J) := \left\{ f \in C_{\gamma;\psi}(J);\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f \in C_{\gamma;\psi}(J)\right\},\ \text{com}\ \ \gamma = \alpha + \beta(1-\alpha). $$

Ainda mais, definindo $\gamma := \alpha + \beta(n-\alpha)$, podemos reescrever:

1. $\beta(n-\alpha) = \gamma - \alpha$ e

2. $(1-\beta)(n-\alpha) = (n-\alpha) - \beta(n-\alpha) = n - [\alpha + \beta(n-\alpha)] = n - \gamma$.

Agora, podemos substituir a ordem do operador de integração nas Eq.(2.13) e Eq.(2.14), conforme a notação anterior, segue

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathcal{I}_{a+}^{n-\gamma;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(t) \tag{2.15} $$

e

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{b-}^{\gamma-\alpha;\psi}\left(\frac{-1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathcal{I}_{b-}^{n-\gamma;\psi}\phi(t) = (-1)^{n}\mathcal{I}_{b-}^{\gamma-\alpha;\psi}\ \mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi}\phi(t). \tag{2.16} $$

sendo $\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}(\cdot)$ e $\mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi}(\cdot)$ os operadores ψ-Riemann-Liouville (**Definição 2.8**).

Como $n-\gamma = (1-\beta)(n-\alpha)$, temos as derivadas fracionárias ψ-Riemann–Liouville, dadas por

$$ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t) \ \Rightarrow\ \lim_{\alpha\to n^{-}}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(t) = \Psi^{[n]}\phi(t), $$

e

$$ \mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi}\phi(t) = \left(\frac{-1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathcal{I}_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t) \ \Rightarrow\ \lim_{\alpha\to n^{-}}\mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi}\phi(t) = (-1)^{n}\Psi^{[n]}\phi(t). $$

Teorema 2.13. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1, n)$, $\beta \in [0,1]$ e considere as funções $\phi, \psi \in C^{n+1}([a,\ b],\ \mathbb{R})$, então temos*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(a) + \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\int_{a}^{x}(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-\alpha}\ \frac{d}{ds}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(s)ds $$

e

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \frac{(-1)^{n}(\psi(b)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi}\phi(b) - \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{x}^{b}(\psi(s)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}\ \frac{d}{ds}\mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi}\phi(s)ds. $$

Demonstração. Primeiramente, usando a Eq.(2.15), temos

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{a}^{t}\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-\alpha-1}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(s)ds. \tag{2.17} $$

Considere

$$ \begin{cases} u = \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(s) \\ du = \dfrac{d}{ds}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(s)ds \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} dv = \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-\alpha-1}ds \\ v = \dfrac{-(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-\alpha}}{(\gamma-\alpha)} \end{cases} $$

e realizando a integração por partes na integral fracionária Eq.(2.17), obtemos

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\left[(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(a) + \int_{a}^{t}(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-\alpha}\ \frac{d}{ds}\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(s)ds\right] $$

que é o resultado desejado.

Analogamente, obtemos o outro caso. □

Se $f, \psi \in C^{n+1}([a,\ b],\ \mathbb{R})$, usando o fato de que $\Psi^{[n]}\phi(t) = \lim_{\alpha\to n^-} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(t)$ e aplicando limite em ambos os lados das Eq.(2.15) e Eq.(2.16), e usando **Teorema 2.13**, obtemos [56]

$$\lim_{\alpha\to n^-} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \Psi^{[n]}\phi(t) \quad \text{e} \quad \lim_{\alpha\to n^-} {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = (-1)^n\Psi^{[n]}\phi(t)$$

Teorema 2.14. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1,\ n)$, $\beta \in [0,1]$ e considerando a constante*

$$\kappa = \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}, \qquad com\ \ \gamma := \alpha+\beta(n-\alpha),$$

os operadores ψ-Hilfer são limitados, dados por

$$\left\|{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}} \leqslant \kappa \left\|\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}^n} \qquad e \qquad \left\|{}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}} \leqslant \kappa \left\|\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}^n}. \tag{2.18}$$

Demonstração. Primeiro, notamos que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}} &= \left\|\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a+}^{n-\gamma;\psi}\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}} \\
&= \max_{t\in[a,b]}\left|(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a+}^{n-\gamma;\psi}\phi(t)\right| \\
&= \max_{t\in[a,b]}\left|(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{n-\gamma-1}\phi(s)ds\right| \\
&\leqslant \frac{\|\phi\|_{C_{\gamma;\psi}^n}}{\Gamma(n-\gamma)} \max\left\{\left|\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{n-\gamma-1}ds\right|, \quad t\in[a,b]\right\} \\
&\leqslant \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\gamma}\left\|\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}^n}}{\Gamma(n-\gamma+1)}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Usando a definição do operador ψ-Hilfer e a Eq.(2.19), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}} &= \left\|\mathcal{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}} \\
&= \max\left\{\left|(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma}\mathcal{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(t)\right|, \quad t\in[a,b]\right\} \\
&\leqslant \frac{\left\|\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \max\left\{\left|\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-\alpha-1}ds\right|, \ \ t\in[a,b]\right\} \\
&\leqslant \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\left\|\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}} \\
&\leqslant \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\left\|\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}^n} = \kappa\left\|\phi\right\|_{C_{\gamma;\psi}^n},
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

Ainda mais, considere a derivada ψ-Hilfer e a função $\varphi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t)$, então temos

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\mu;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \varphi(t),$$

com $\mu = n(1-\beta)+\beta\alpha$.

Assim, obtemos a relação entre os operadores ψ-Hilfer e ψ-Caputo, dada por

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = {}^{C}D_{a+}^{\mu;\psi}\varphi(t) = {}^{C}D_{a+}^{\mu;\psi}\left[\mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t)\right].$$

Teorema 2.15. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1,\ n)$, $\beta \in [0,1]$ e $f \in C^n([a,\ b],\ \mathbb{R})$, então*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \mathcal{D}_{a+}^{n-\beta(n-\alpha);\psi}\left[\mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^k\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(a)}{k!}\right] $$

e

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \mathcal{D}_{b-}^{n-\beta(n-\alpha);\psi}\left[\mathcal{I}_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(\psi(b)-\psi(t))^k\ \mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi}\phi(b)}{k!}\right], $$

com $\gamma = \alpha + \beta(k-\alpha)$.

Demonstração. De fato, considere $\delta = n - \beta(n-\alpha)$ e $\varphi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t)$, do **Teorema 2.11**, obtemos

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) &= {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\delta;\psi}\varphi(t)\\
&= \mathcal{D}_{a+}^{\delta;\psi}\left[\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^k\Psi^{[k]}\varphi(a)\right]\\
&= \mathcal{D}_{a+}^{\delta;\psi}\left[\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^k\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^k\mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi}\phi(a)\right]\\
&= \mathcal{D}_{a+}^{\delta;\psi}\left[\mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^k\mathcal{D}_{a+,k}^{\delta;\psi}\phi(a)\right],
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

Teorema 2.16. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1,\ n)$, $\beta \in [0,1]$ e $f \in C^n([a,\ b],\ \mathbb{R})$, então*

$$ \mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \phi(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}\ \Psi^{[n-k]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(a) $$

e

$$ \mathcal{I}_{b-}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \phi(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(\psi(b)-\psi(t))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}\ \Psi^{[n-k]}\ \mathcal{I}_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(b). $$

Demonstração. Usando o **Lema 2.3** e a definição de derivada fracionária ψ-Hilfer, obtemos

$$ \mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\left(\mathcal{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(t)\right) = \mathcal{I}_{a+}^{\gamma;\psi}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(t). \tag{2.20} $$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a+}^{\gamma;\psi}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\int_a^t (\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1}\frac{d}{ds}\Psi^{[n-1]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-2}\frac{d}{ds}\Psi^{[n-2]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}\Psi^{[n-1]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(a) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma-2)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-3}\frac{d}{ds}\Psi^{[n-3]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}\Psi^{[n-1]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(a) \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-2}\Psi^{[n-2]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(a) \\
&\ \ \vdots \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma-n)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-n-1}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(s)ds \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}\Psi^{[n-k]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(a)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathcal{I}_{a+}^{\gamma;\psi}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{\gamma-n;\psi}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}\Psi^{[n-k]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(a). \tag{2.21}$$

Introduzindo os parâmetros $A = \gamma - n = \alpha + \beta(n-\alpha) = \alpha + \beta n - \beta\alpha$ e $B = (1-\beta)(n-\alpha) = n - \alpha - \beta n + \beta\alpha$, temos $A + B = 0$, usando o **Lema 2.3** e pela Eq. (2.20), concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) &= \mathcal{I}_{a+}^{\gamma-n;\psi}\mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma+1-k)}\ \Psi^{[n-k]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(a) \\
&= \phi(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma+1-k)}\ \Psi^{[n-k]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(a),
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

Teorema 2.17. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1,\ n)$, $\beta \in [0,1]$ e $\phi, \varphi \in C^n([a,\ b],\ \mathbb{R})$, então*

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\varphi(t) \Leftrightarrow \phi(t) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k} \tag{2.22}$$

e

$${}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\varphi(t) \Leftrightarrow \phi(t) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} d_k(\psi(b)-\psi(t))^{\gamma-k}. \tag{2.23}$$

Demonstração. Suponha que ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t) = {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\varphi(t)$, isto é, ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\phi(t)-\varphi(t)) = 0$.

Aplicando a integral ψ-Riemann–Liouville à esquerda em ambos os lados desta equação, temos

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big(\phi(t)-\varphi(t)\Big)=0.$$

Do **Teorema 2.16**, vem que

$$\phi(t)-\varphi(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma+1-k)}\ \Psi^{[n-k]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(\phi-\varphi)(a)=0.$$

Então, concluímos que

$$\phi(t)=\varphi(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-k},$$

sendo $c_k=\dfrac{\Psi^{[n-k]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(\phi-\varphi)(a)}{\Gamma(\gamma+1-k)}$.

Para provar a recíproca, admitimos que

$$\phi(t)=\varphi(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-k}. \tag{2.24}$$

Aplicando o operador ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\cdot)$ na Eq.(2.24), obtemos

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t)={}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\varphi(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-k}.$$

Usando a igualdade ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{k}=0,\ \forall k\in[1..n]$, concluímos

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\phi(t)={}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\varphi(t),$$

que é o resultado desejado. □

Lema 2.18. *Sejam $n\in\mathbb{N}$, $\gamma\in[n-1,\ n)$ e $\phi\in C_\gamma[a,b]$, então*

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(a)=\lim_{t\to a+}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t)=0,\quad n-1\leqslant\gamma<\alpha.$$

Demonstração. Note que $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t)\in C_\gamma[a,b]$ é limitada. Assim $f\in C_\gamma[a,b]$, então $\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma}\phi(t)$ é contínua em $[a,b]$ e daí

$$\Big|\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma}\phi(t)\Big|<M\quad\Rightarrow\quad|\phi(t)|<\Big|\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{-\gamma}\Big|\,M, \tag{2.25}$$

$t\in[a,b]$ para alguma constante M positiva.

Da Eq.(2.25), segue

$$\Big|\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t)\Big|<\Big|\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{-\gamma}\Big|\,M=M\frac{\Gamma(n-\gamma)}{\Gamma(\alpha+n-\gamma)}\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\alpha-\gamma}. \tag{2.26}$$

Assim $\gamma<\alpha$, o lado direito $\to 0$ quando $x\to a+$, então temos

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(a)=\lim_{t\to a+}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t)=0,$$

o que prova o resultado. □

Teorema 2.19. *Sejam $\alpha > 0$, $\beta \in [0,1]$ e $\phi \in C^1[a,\ b]$, então temos*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\ \mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t) = \phi(t) \quad \text{e} \quad {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\ \mathcal{I}_{b-}^{\alpha;\psi}\phi(t) = \phi(t). $$

Demonstração. De fato, temos

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\ \mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t) &= \mathcal{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\ \mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t) \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a+}^{n-\beta n+\beta\alpha;\psi}\phi(t) \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\phi(t). \end{aligned}$$

Utilizando o **Teorema 2.16** e o **Lema 2.18**, concluímos que

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\ \mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t) &= \mathcal{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ \mathcal{D}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\phi(t) \\ &= \phi(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma+1-k)}\ \Psi^{[n-k]}\ \mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\phi(a) \\ &= \phi(t), \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

O próximo resultado diz respeito à lei do semigrupo entre os operadores $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ e ${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\cdot)$.

Teorema 2.20. *Sejam $m,n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1,\ n)$, $\beta \in [0,1]$ e $\phi \in C^{m+n}([a,\ b],\ \mathbb{R})$, então, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos*

$$\Big(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\Big)^k\ \Big({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big)^m\ \phi(t) = \frac{\Big({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big)^m \phi(c)\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}.$$

e

$$\Big(\mathcal{I}_{b-}^{\alpha;\psi}\Big)^k\ \Big({}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\Big)^m\ \phi(t) = \frac{\Big({}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\Big)^m \phi(d)\Big(\psi(b)-\psi(t)\Big)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$$

para algum $c \in (a,x)$ e $d \in (x,b)$.

Demonstração. Usando o **Lema 2.3**, temos $\Big(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\Big)^k = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\cdot\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\cdot\ldots\cdot\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi} = \mathcal{I}_{a+}^{k\alpha;\psi}$, então

$$\begin{aligned} \Big(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\Big)^k\ \Big({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big)^m\ \phi(t) &= \mathcal{I}_{a+}^{k\alpha;\psi}\ \Big({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big)^m \phi(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{k\alpha-1}\ \Big({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big)^m \phi(s)ds \\ &= \frac{\Big({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big)^m \phi(c)}{\Gamma(k\alpha)}\int_a^t \psi'(s)\Big(\psi(t)-\psi(s)\Big)^{k\alpha-1}ds \\ &= \frac{\Big({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big)^m f(c)\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{k\alpha}}{k\alpha\Gamma(k\alpha)} \\ &= \frac{\Big({}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\Big)^m \phi(c)\Big(\psi(t)-\psi(a)\Big)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}, \end{aligned}$$

com $c \in (a,x)$, garantido pelo teorema do valor médio para integrais [28]. □

2.4 Derivadas obtidas a partir da ψ-Hilfer

Usando a derivada fracionária ψ-Hilfer, **Definição 2.12**, variando a escolha de ψ, a, b e tomando o limite dos parâmetros α e β, obtemos uma ampla classe de derivadas fracionárias [56]. Aqui vamos citar algumas particulares.

1. Para $\psi(t) = t$ na Eq.(2.13), obtemos

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;x}\phi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathcal{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}\phi(t) = D_{a^+}^{\alpha,\beta}\phi(t) $$

   a derivada fracionária de Hilfer.

2. Tomando o limite $\beta \to 0$ nos dois lados da Eq.(2.13), obtemos

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,0;\psi}\phi(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathcal{I}_{a+}^{(n-\alpha);\psi}\phi(t) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t) $$

   a derivada fracionária ψ-Riemann–Liouville.

3. Para $\psi(x) = x$ e tomando o limite $\beta \to 0$ nos dois lados da Eq.(2.13), obtemos

$$ \begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,0;x}\phi(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha;x}\phi(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}\phi(s)ds \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\phi(t), \end{aligned} $$

   a derivada fracionária de Riemann–Liouville.

4. Tomando o limite $\beta \to 1$ nos dois lados da Eq.(2.13), obtemos

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,1;\psi}\phi(t) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\phi(t) = {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\phi(t) $$

   a derivada fracionária ψ-Caputo.

5. Considere $\psi(t) = t$ e tomando o limite $\beta \to 1$ nos dois lados da Eq.(2.13), obtemos

$$ \begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,1;t}\phi(t) &= \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha;t}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\phi(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\phi(s)ds \\ &= {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha}\phi(t), \end{aligned} $$

   a derivada fracionária de Caputo.

A seguir alguns pontos que merecem ser destacados.

1. Da escolha da função $\psi(\cdot)$, dos parâmetros a, b e dos limites de $\beta \to 1$ e $\beta \to 0$, é possível obter inúmeras classes de casos particulares. Acima, apresentamos somente os casos de derivadas fracionárias clássicas.

2. Quando se discute um caso particular do operador ψ-Hilfer, as propriedades são mantidas.

3. As regras tipo Leibniz I e II também existem para a derivada ψ-Hilfer, e ainda é possível discutir possíveis casos particulares. A pergunta natural que pode surgir, é porque "tipo"? Como sabemos existe um critério a ser satisfeito para saber se de fato, uma derivada é considerada fracionária ou não. Por exemplo, a derivada fracionária de Caputo não satisfaz tal regra. Então, a palavra "tipo"na regra de Leibniz, aborda exatamente essa questão. As regras tipo Leibniz I e II englobam todas as possíveis derivadas fracionárias. Para maiores detalhes veja [61].

2.5 Teoria dos operadores no cálculo fracionário

A teoria de operadores-solução é de extrema importância em diversas áreas, em particular, quando se trata dos operadores setoriais e quase-setoriais. Ao longo desses anos e com a crescente ascensão do cálculo fracionário e sua importância na teoria de equações diferenciais, motivou cada vez mais seu uso na discussão de propriedades de equações diferenciais, como existência e unicidade, atratividade, estabilidade, etc. Aqui, temos como objetivo apresentar as definições fundamentais dos operadores-solução $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$, $\mathbb{T}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$ e alguns resultados que são importantes para o desenvolvimento do trabalho [50]. Na literatura existem inúmeros trabalhos de grande importância que tratam de teoria de operadores, em particular, trabalhos que abordam problemas de equações diferenciais fracionárias [7, 19, 28, 46, 79].

Vamos discutir soluções suave e-positivas envolvendo operadores setoriais de uma equação diferencial fracionária de evolução impulsiva não linear de ordem $0 < \alpha < 1$, e para isso, os operadores $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{T}_\alpha(\cdot)$ já são suficientes para caracterizar sua respectiva solução suave. No entanto, quando se discute o mesmo tipo de problema, mas para equações diferenciais fracionárias com ordem $1 < \alpha < 2$, é necessário introduzir o operador-solução $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$. Consequentemente, discutimos propriedades importantes envolvendo esses operadores.

Definição 2.21 (Família α-Resolvente)**.** [51] *Considere o operador linear A, fechado e densamente definido, em um espaço de Banach E. O conjunto limitado $\{\mathbb{S}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$ é considerado uma família de operadores α-resolventes gerada por A se satisfizer condições a seguir:*

(a) $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$ *é fortemente contínuo em* $\mathbb{R}_+$ *e* $\mathbb{S}_\alpha(0) = I$*;*

(b) $\mathbb{S}_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ *e* $A\mathbb{S}_\alpha(t)x = \mathbb{S}_\alpha(t)Ax$ *para todo* $x \in D(A)$*,* $t \geqslant 0$*;*

(c) Para todo $x \in D(A)$ *e* $t \geqslant 0$*,* $\mathbb{S}_\alpha(t)x = x + \mathcal{I}_0^\alpha \mathbb{S}_\alpha(t)Ax$*.*

Os operadores-solução podem ser definidos através de integrais com núcleo $R(\lambda^\alpha, A)$, assim como, em termos das funções Mittag-Leffler. Tais operadores aparecem definidas e equiparadas no **Lema 2.22**.

Lema 2.22. [50, 51, 74] *Seja A um operador setorial tipo (M, θ, α, μ) e c um caminho apropriado, então*

$$\mathbb{S}_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_c e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha, A)d\lambda = \mathbb{E}_{\alpha,1}(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(1+\alpha k)}. \tag{2.27}$$

$$\mathbb{T}_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_c e^{\lambda t}R(\lambda^\alpha, A)d\lambda = t^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) = t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha+\alpha k)}. \tag{2.28}$$

$$\mathbb{K}_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_c e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-2}R(\lambda^\alpha, A)d\lambda = t\mathbb{E}_{\alpha,2}(At^\alpha) = t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(2+\alpha k)}. \tag{2.29}$$

Demonstração. Ver [50] □

Na discussão de soluções tipo "mild"ou suave para equações diferenciais fracionárias, em particular, as que vamos abordar nesse trabalho, elas são obtidas por meio da transformada de Laplace, e assim são expressas em termos dos operadores solução $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$, $\mathbb{T}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$ dependendo da ordem da derivada fracionária.

No próximo Lema apresentamos as relações entre os operadores-solução.

Lema 2.23. [50, 51, 74] *Seja A um operador setorial tipo (M, ξ, α, μ), então*

$$\frac{d}{ds}(\mathbb{K}_\alpha(t)) = \mathbb{S}_\alpha(t) \qquad e \qquad \frac{d}{ds}(\mathbb{S}_\alpha(t)) = A\mathbb{T}_\alpha(t).$$

Demonstração. Ver [50] □

Lema 2.24. [50, 51, 74] *Seja A um operador setorial tipo (M, ξ, α, μ) e $\alpha \in (0, 1)$, então*

(1)

$$^C\mathbb{D}^\alpha_{0+}[\mathbb{S}_\alpha(t)x_0] = A[\mathbb{S}_\alpha(t)x_0];$$

(2)

$$^C\mathbb{D}^\alpha_{0+}\left(\int_0^t \mathbb{T}_\alpha(t-\xi)\phi(\xi)d\xi\right) = A\int_0^t \mathbb{T}_\alpha(t-\xi)\phi(\xi)d\xi + \phi(t);$$

onde $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{T}_\alpha(\cdot)$ são dados pelas Eq.(2.27) *e* Eq.(2.28).

Demonstração. Ver [50] □

Corolário 2.25. [50, 51, 74] *Para $t_k > 0$ e sob as condições do* **Lema 2.24**,

$$^C\mathbb{D}^\alpha_{0+}\left(\int_{t_k}^t \mathbb{T}_\alpha(t-\xi)\phi(\xi)d\xi\right) = A\int_{t_k}^t \mathbb{T}_\alpha(t-\xi)\phi(\xi)d\xi + \phi(t).$$

Como estamos trabalhando com equações diferenciais fracionárias com impulsos, é importante notar o resultado que apresentamos a seguir.

Lema 2.26. [50, 51, 74] *Para $t_k > 0$,*

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t \mathbb{T}_\alpha(t-\xi)\phi(\xi)d\xi\right] \neq \frac{d}{dt}\left[\int_{t_k}^t \mathbb{T}_\alpha(t-\xi)\phi(\xi)d\xi\right].$$

Demonstração. Ver [50] □

A seguinte observação, tem o mesmo objetivo do **Lema 2.26**, isto é, apresentar a diferença entre uma integral calculada no intervalo determinado em relação ao intervalo particionado a partir da escolha de $k \in \mathbb{N}$.

$$^C\mathbb{D}^\alpha_{0+}\left(\int_0^t \mathbb{T}_\alpha(t-\xi)f(\xi)d\xi\right) \neq {}^C\mathbb{D}^\alpha_{0+}\left(\int_{t_k}^t \mathbb{T}_\alpha(t-\xi)f(\xi)d\xi\right), \quad t_k > 0.$$

Capítulo 3

Existência de solução suave e-positiva

Conforme abordado, a teoria de operadores fracionários, tem chamado a atenção de pesquisadores de várias áreas, o que permitiu um crescimento exponencial nesses últimos anos. Embora tenha um volume importante de trabalhos de alto calibre, existem questões e problemas que ainda não foram possíveis solucionar. Problemas de existência de solução suave e-positiva, é um problema ainda pouco abordado na teoria de equações diferenciais fracionárias, muitas vezes por falta de ferramentas e por questões estruturais do tipo de equação diferencial fracionária que se trabalha. Por exemplo, ainda não existe nenhum problema do tipo que vamos abordar aqui, envolvendo a derivada fracionária ψ-Hilfer. Então essas questões destacadas, foram uma das motivações que permitiu a discussão do principal resultado deste trabalho. Nesse capítulo, vamos investigar o ponto principal desta tese, isto é, estudamos as soluções suaves e-positivas, buscando a existência de tal solução, para dois problemas de valor inicial com equação diferencial fracionária de evolução impulsiva não-linear em espaço de Banach, usando a desigualdade de Grönwall, o critério de Cauchy e a medida de não-compacidade de Kuratowski [60, 72, 75, 79]. Por outro lado, discutimos algumas ideias de espaço de Sobolev $W_0^{1,p}$ e $W^{m,p}$ para $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^{+}$ e através da aplicação do **Corolário 3.3**, investigamos a existência de solução envolvendo um problema de valor de contorno inicial do tipo parabólico fracionário.

Primeiramente, apresentamos os dois principais problemas a serem investigados.

Considere a equação diferencial fracionária de evolução impulsiva não-linear do tipo Caputo, dada por

$$\begin{cases} {}^{C}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha} v(t) + Av(t) &= \phi(t,\ v(t)), \quad t \in J_\infty, \\ \Delta v|_{t=t_k} &= I(v(t_k)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \neq t_k, \\ v(0) &= x_0. \end{cases} \tag{P1}$$

onde $v : J_\infty = [0, +\infty) \to E$, $A : D(A) \subset E \to E$ é um operador setorial tipo (M, θ, α, μ) em E, $\phi \in C(J_\infty \times E, E)$, $\Delta v|_{t=t_k} = v(t_k^+) - v(t_k^-)$ é o salto da função u no ponto t_k que representa a função impulso $I : E \to E$, sendo que $v(t_k^+)$ e $v(t_k^-)$ representam os limites à direita e à esquerda de $v(t)$ em $t = t_k$, respectivamente, e $x_0 \in E$. Além disso, ${}^{C}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha}(\cdot)$ é a derivada definida por Caputo, $\alpha \in (0, 1)$ é a ordem de derivação e E é um espaço de Banach.

Considere ainda, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \cdots$, com $t_m \xrightarrow{m\to\infty} \infty$, uma partição em J_∞ e defina os intervalos: $J_0 = [0, t_1]$ e $J_k = (t_k, t_{k+1}]$ $(k \in \mathbb{N})$. E também, seja λ_1 o menor autovalor real positivo do operador linear A e $e_1 \in D(A)$ o autovetor positivo correspondente a λ_1.

Note que no sistema (P1) apresentado, a ordem $\alpha \in (0,1)$. Agora, vamos considerar uma situação semelhante, o sistema (P2), no entanto vamos admitir que a ordem da derivada fracionária seja $\alpha \in (1,2)$, como segue

$$\begin{cases} {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha}_{0+}\upsilon(t) + A\upsilon(t) = \phi(t,\ \upsilon(t)), \quad t \in J_\infty, \\ \Delta\upsilon(t_k) = I(\upsilon(t_k)), \quad \Delta\upsilon'(t_k) = I(\upsilon'(t_k)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \neq t_k, \\ \upsilon(0) = x_0, \qquad \upsilon'(0) = x_1. \end{cases} \tag{P2}$$

onde as variáveis são as mesmas do sistema (P1), ressaltando que $\Delta\upsilon'|_{t=t_k}$ tem definição análoga ao $\Delta\upsilon|_{t=t_k}$ e $x_1 \in E$.

O próximo passo, é definir as soluções dos respectivos sistemas (P1) e (P2).

Definição 3.1 (Solução suave)**.** [50, 51, 52] *Uma função abstrata $\upsilon \in PC(J_\infty, E)$ é uma solução suave para o* sistema (P1) *se satisfizer a seguinte equação integral*

$$\upsilon(t) = \mathbb{S}_\alpha(t)x_0 + \int_0^t \mathbb{T}_\alpha(t-s)\phi(s,\ \upsilon(s))ds + \mathbb{S}_\alpha(t)\sum_{i=1}^{k}\mathbb{S}_\alpha^{-1}(t_i)I(\upsilon(t_i)). \tag{3.1}$$

Para o sistema (P2) *se satisfizer*

$$\begin{aligned}\upsilon(t) = \mathbb{S}_\alpha(t)x_0 + \mathbb{K}_\alpha(t)x_1 + \int_0^t \mathbb{T}_\alpha(t-s)\phi(s,\ \upsilon(s))ds \\ + \mathbb{S}_\alpha(t)\sum_{i=1}^{k}\mathbb{S}_\alpha^{-1}(t_i)I(\upsilon(t_i)) + \mathbb{K}_\alpha(t)\sum_{i=1}^{k}\mathbb{K}_\alpha^{-1}(t_i)I(\upsilon'(t_i)),\end{aligned} \tag{3.2}$$

com $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$, $\mathbb{T}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$ dados pelas Eq.(2.27), Eq.(2.28) *e* Eq.(2.29)*, respectivamente. Lembrando que, $\mathbb{S}_\alpha^{-1}(\cdot)$ e $\mathbb{K}_\alpha^{-1}(\cdot)$ denotam o inverso dos operadores-solução $\mathbb{S}_\alpha(\cdot)$ e $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$, respectivamente, em $t = t_i$, $i = 1, 2, 3, \cdots, m$.*

Além disso, se existir $e \geqslant 0$ e $\sigma > 0$, de modo que $\upsilon(t) \geqslant \sigma e$ para $t \in J_\infty$, então a chamamos de uma **solução suave e-positiva** [75].

Para o espaço de Banach $(E, \|\cdot\|)$, considere o operador $A : D(A) \subset E \to E$, linear e fechado, tal que $-A$ seja o gerador infinitesimal das famílias α-resolventes $\{\mathbb{S}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$, $\{\mathbb{K}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$ e $\{\mathbb{T}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$. Então, existem $\widetilde{M} > 0$ e $\delta > 0$ [54, 72, 73], tais que, para $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\|\mathbb{S}_\alpha(t)\|_C &\leqslant \widetilde{M}e^{\delta t}, \\ \|\mathbb{K}_\alpha(t)\|_C &\leqslant \widetilde{M}e^{\delta t}, \\ \|\mathbb{T}_\alpha(t)\|_C &\leqslant \widetilde{M}e^{\delta t}.\end{aligned}$$

A seguir, através do **Teorema 3.2**, vamos investigar a principal contribuição deste trabalho e discutir algumas consequências do resultado obtido.

Teorema 3.2. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach com ordem parcial "$\leqslant$", cujo cone positivo E^+ é normal, e $-A$ é o gerador infinitesimal das famílias α-resolventes positivas $\{\mathbb{S}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$, $\{\mathbb{K}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$ e $\{\mathbb{T}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$. Para uma constante $\sigma > 0$ e $t \in J_\infty$, seja $x_0 \geqslant \sigma e_1$ e $\phi(t, \sigma e_1) \geqslant \lambda_1 \sigma e_1$. Se a não-linearidade de $\phi \in C(J_\infty \times E^+, E)$ satisfizer as seguintes condições:*

($\mathbf{H}_1$) *Para $t \in J_\infty$ e $x \in E^+$, existem funções a e $b \in C(J_\infty, E^+)$, tais que*

$$\|\phi(t,x)\| \leqslant a(t)\|x\| + b(t).$$

(H$_2$) *Para todo $R > 0$ e $T > 0$, existe $C = C(R,T) > 0$, tal que*

$$\phi(t,y) - \phi(t,x) \geqslant -C \cdot (y - x),$$

para todo $t \in [0,T]$ e para $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, com $\|x\|,\ \|y\| \leqslant R$.

(H$_3$) *Para todo $R > 0$ e $T > 0$, existe $L = L(R,T) > 0$, tal que toda sequência monótona crescente $W = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^+ \cap \overline{B}(0,R)$ satisfaça*

$$\mu\Big(\phi(t,W)\Big) \leqslant L\mu(W), \quad \forall\ t \in [0,T].$$

Então, os sistemas (P1) *e* (P2) *têm solução suave e-positiva em J_∞.*

Demonstração do sistema (P2).
(I) Existência global de soluções suaves *e*-positivas no intervalo $\underline{J_0 = [0,t_1]}$. Note que o sistema (P2) é equivalente ao sistema (3.3) com a equação fracionária de evolução sem impulso em E,

$$\begin{cases} {}^C\mathbb{D}^\alpha_{0+}\upsilon(t) + A\upsilon(t) = \phi(t,\upsilon(t)), \quad t \in J_0, \\ \upsilon(0) = x_0, \quad \upsilon'(0) = x_1. \end{cases} \tag{3.3}$$

A seguir, vamos subdividir esta primeira parte em dois passos:
(A) A existência local de soluções suaves para o sistema (3.3) em $\underline{J_0 = [0,t_1]}$.

Para todo $t_0 \geqslant 0$ e $x_0 \in E$, provamos que o sistema (3.4) com equação fracionária de evolução

$$\begin{cases} {}^C\mathbb{D}^\alpha_{t_0+}\upsilon(t) + A\upsilon(t) = \phi(t,\upsilon(t)), \quad t > t_0, \\ \upsilon(t_0) = x_0, \quad \upsilon'(t_0) = x_1, \end{cases} \tag{3.4}$$

admite uma solução suave *e*-positiva em $I = [t_0, t_0 + h_{t_0}]$, onde $h_{t_0} \in (0,1)$ será definido adiante.

Considere o intervalo $I_* = [0, t_0 + 1]$, $n \in \{1,\ 2\}$ e escreva:

(*i*) As constantes

$$\begin{aligned} M_{t_0} &= \sup\left\{(t-t_0)^{n-\alpha}\|\mathbb{S}_\alpha(t)\|;\ t \in I_*\right\}, \\ \widetilde{M}_{t_0} &= \sup\left\{(t-t_0)^{n-\alpha}\|\mathbb{K}_\alpha(t)\|;\ t \in I_*\right\}, \\ \overline{M}_{t_0} &= \sup\left\{(t-t_0)^{n-\alpha}\|\mathbb{T}_\alpha(t)\|;\ t \in I_*\right\}, \\ R_{t_0} &= (M_{t_0} + \overline{M}_{t_0})(\|x_0\|+1) + \sigma e_1 + \widetilde{M}_{t_0}\|x_1\|, \end{aligned}$$

onde n admite os valores:

$$\begin{cases} n = 1, \text{ para } \alpha \in (0,1), \\ n = 2, \text{ para } \alpha \in (1,2). \end{cases}$$

(*ii*) Sejam a e b as funções na condição **(H$_1$)**, então

$$a_{t_0} = \max_{t\in I_*} a(t) \quad \text{e} \quad b_{t_0} = \max_{t\in I_*} b(t).$$

(*iii*) E as constantes nas condições **(H$_2$)** e **(H$_3$)**, respectivamente,

$$C = C(R_{t_0}, t_0 + 1) \quad \text{e} \quad L = L(R_{t_0}, t_0 + 1).$$

Somando a parcela $Cv(t)$ em ambos os lados da equação no sistema (3.4), podemos reescrevê-lo como

$$\begin{cases} {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha}_{t_0+}v(t) + (A+CI)v(t) = \phi(t,v(t)) + Cv(t), \quad t > t_0, \\ v(t_0) = x_0, \quad v'(t_0) = x_1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Considere os operadores $\widetilde{S}_\alpha(t) = e^{-Ct}\mathbb{S}_\alpha(t)$, $\widetilde{K}_\alpha(t) = e^{-Ct}\mathbb{K}_\alpha(t)$ e $\widetilde{T}_\alpha(t) = e^{-Ct}\mathbb{T}_\alpha(t)$ pertencentes, respectivamente, às famílias α-resolventes positivas:

$$\{\mathbb{S}_\alpha(t);\, t \geqslant 0\}, \quad \{\mathbb{K}_\alpha(t);\, t \geqslant 0\} \;\text{ e }\; \{\mathbb{T}_\alpha(t);\, t \geqslant 0\},$$

todas geradas por $-(A+CI)$. E, defina a aplicação Λ como

$$(\Lambda v)(t) = \widetilde{S}_\alpha(t-t_0)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(t-t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t} \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,v(s)) + Cv(s)\Big]ds, \quad t \in I. \tag{3.6}$$

Note que a função $\Lambda : C(I,E^+) \to C(I,E)$ é contínua e crescente, pelo fato de f ser contínua e pela condição $\mathbf{(H_2)}$. Além disso, um ponto fixo de Λ também é uma solução do sistema (3.5) em I.

Defina o conjunto Ω:

$$\Omega := \Big\{v \in C(I,E^+);\ \|v(t)\|_C \leqslant R_{t_0},\ v(t) \geqslant \sigma e_1,\ t \in I\Big\}.$$

Então, $\Omega \subset C(I,E^+)$ é não-vazio, limitado, convexo e fechado. Seja h_{t_0}, tal que

$$(h_{t_0})^\alpha \leqslant \min\left\{1,\ \frac{(\|x_0\|+1)\alpha}{(a_{t_0}+C)R_{t_0}+b_{t_0}}\right\},$$

então pela Eq.(3.6) e pela condição $\mathbf{(H_1)}$, para cada $u \in \Omega$ e $t \in I$, temos

$$\begin{aligned}
\|(\Lambda v)(t)\| &= \left\|\widetilde{S}_\alpha(t-t_0)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(t-t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t} \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,v(s)) + Cv(s)\Big]ds\right\| \\
&\leqslant \|\widetilde{S}_\alpha(t-t_0)\|\|x_0\| + \|\widetilde{K}_\alpha(t-t_0)\|\|x_1\| + \int_{t_0}^{t} \left\|\widetilde{T}_\alpha(t-s)\right\| \|\phi(s,v(s)) + Cv(s)\|\, ds \\
&\leqslant M_{t_0}\|\|x_0\| + \widetilde{M}_{t_0}\|\|x_1\| + \overline{M}_{t_0}\int_{t_0}^{t} \|\phi(s,v(s)) + Cv(s)\|\,(t-s)^{\alpha-2}ds \\
&\leqslant M_{t_0}\|\|x_0\| + \widetilde{M}_{t_0}\|\|x_1\| + \overline{M}_{t_0}\int_{t_0}^{t} \Big[(a(s)+C)\|v(s)\| + b(s)\Big](t-s)^{\alpha-2}ds \\
&\leqslant M_{t_0}\|\|x_0\| + \widetilde{M}_{t_0}\|\|x_1\| + \overline{M}_{t_0}\Big[(a_{t_0}+C)R_{t_0}+b_{t_0}\Big]\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-2}ds.
\end{aligned}$$

Usamos o fato de $(t-s)^{2-\alpha}\left\|\widetilde{T}_\alpha(t-s)\right\| \leqslant \overline{M}_{t_0}$, e como $(t-t_o) < h_{t_0}$, segue

$$\begin{aligned}
\|(\Lambda v)(t)\| &\leqslant M_{t_0}\|x_0\| + \widetilde{M}_{t_0}\|\|x_1\| + \overline{M}_{t_0}\Big[(a_{t_0}+C)R_{t_0}+b_{t_0}\Big]\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} \\
&\leqslant M_{t_0}\|x_0\| + \widetilde{M}_{t_0}\|\|x_1\| + \overline{M}_{t_0}\Big[(a_{t_0}+C)R_{t_0}+b_{t_0}\Big]\frac{(h_{t_0})^\alpha}{\alpha} \\
&\leqslant M_{t_0}\|x_0\| + \widetilde{M}_{t_0}\|\|x_1\| + \overline{M}_{t_0}\frac{[(a_{t_0}+C)R_{t_0}+b_{t_0}]}{\alpha}\frac{(\|x_0\|+1)\alpha}{[(a_{t_0}+C)R_{t_0}+b_{t_0}]} \\
&\leqslant M_{t_0}\ (\|x_0\|+1) + \widetilde{M}_{t_0}\|\|x_1\| + \overline{M}_{t_0}\ (\|x_0\|+1) \\
&\leqslant [M_{t_0} + \overline{M}_{t_0}]\ (\|x_0\|+1) + \widetilde{M}_{t_0}\|\|x_1\| \leqslant R_{t_0}.
\end{aligned}$$

Agora, seja $\omega_0(t) = \sigma e_1,\ \forall t \in I$, disto segue que $v_0 \in \Omega$. Assim

$$\varphi(t) := {}^{C}\mathbb{D}^{\alpha}_{0+}\omega_0(t) + (A + CI)\omega_0(t) = \lambda_1\sigma e_1 + C\sigma e_1 \leqslant \phi(t, \sigma e_1) + C\sigma e_1. \tag{3.7}$$

Visto que $\widetilde{S}_\alpha(t)$, $\widetilde{K}_\alpha(t)$ e $\widetilde{T}_\alpha(t)$ são operadores α-resolventes positivos e Λ é um operador crescente, então, da Eq.(3.6), obtemos

$$\begin{aligned}\sigma e_1 = \omega_0(t) &= \widetilde{S}_\alpha(t-t_0)\omega_0(t_0) + \widetilde{K}_\alpha(t-t_0)\omega_0(t_0) + \int_{t_0}^{t}\widetilde{T}_\alpha(t-s)\varphi(s)ds\\ &\leqslant \widetilde{S}_\alpha(t-t_0)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(t-t_0)v_0(t_0) + \int_{t_0}^{t}\widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\sigma e_1) + C\sigma e_1\Big]ds\\ &\leqslant (\Lambda(\sigma e_1))(t).\end{aligned}$$

Note que $\sigma e_1 \leqslant v(t)$ $(\forall t \in I)$, então

$$\sigma e_1 \leqslant \Big(\Lambda(\sigma e_1)\Big)(t) \leqslant (\Lambda v)(t), \quad t \in I.$$

Com isso, $\Lambda : \Omega \to \Omega$ é contínua e crescente. Vamos mostrar que o conjunto $\Lambda(\Omega)$ é uma família de funções equicontínuas em $C(I, E^+)$, usando o método iterativo monótono.

Seja $\omega_0 = \sigma e_1 \in \Omega$ e defina a sequência $\{\omega_n\}$ pela iteração

$$\omega_n = \Lambda\omega_{n-1}, \quad n = 1, 2, ... \tag{3.8}$$

Como Λ é um operador crescente e $v_1 = \Lambda v_0 \geqslant v_0$, temos a sequência monótona,

$$\omega_0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_n \leqslant \cdots \tag{3.9}$$

Portanto, $\{\omega_n\} = \{\Lambda\omega_{n-1}\} \subset \Lambda(\Omega) \subset \Omega$ é limitado e equicontínuo.

Sejam $B = \{\omega_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e $B_0 = \{\omega_{n-1};\ n \in \mathbb{N}\}$, então $B_0 = B \cup \{\omega_0\}$ e pela propriedade de medida de não-compacidade, temos $\mu(B(t)) = \mu(\Lambda(B_0)(t))$ para $t \in I$.

Substituindo $\Lambda(B_0)(t)$, definido pela Eq.(3.6), obtemos

$$\mu(B(t)) = \mu\left(\left\{\int_{t_0}^{t}\widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\omega_{n-1}(s)) + C\omega_{n-1}(s)\Big]ds;\ n \in \mathbb{N}\right\}\right),$$

uma vez que, pelo item (3) do **Lema 1.17**, temos que $\mu\Big(\widetilde{S}_\alpha(t-t_0)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(t-t_0)x_1\Big) = 0$.

Usando o **Lema 1.21**, temos

$$\begin{aligned}\mu(B(t)) &\leqslant 2\int_{t_0}^{t}\mu\left(\left\{\widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\omega_{n-1}(s)) + C\omega_{n-1}(s)\Big];\ n \in \mathbb{N}\right\}\right)ds\\ &\leqslant 2\int_{t_0}^{t}\|\widetilde{T}_\alpha(t-s)\|\mu\left(\left\{\phi(s,\omega_{n-1}(s)) + C\omega_{n-1}(s);\ n \in \mathbb{N}\right\}\right)ds.\end{aligned}$$

Como $(t-s)^{2-\alpha}\ \|\widetilde{T}_\alpha(t-s)\| \leqslant \overline{M}_{t_0}$, temos

$$\mu(B(t)) \leqslant 2\overline{M}_{t_0}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-2}\left[\mu\Big(\phi(s,B_0(s))\Big) + \mu\Big(CB_0(s)\Big)\right]ds.$$

Pela condição $\mathbf{(H_3)}$, para qualquer $t \in I$, temos

$$\begin{aligned}\mu\Big(B(t)\Big) &\leqslant 2\overline{M}_{t_0}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-2}\left[L\mu\Big(B_0(s)\Big) + C\mu\Big(B_0(s)\Big)\right]ds\\ &\leqslant 2\overline{M}_{t_0}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-2}[L+C]\mu\Big(B_0(s)\Big)ds\\ &\leqslant 2\overline{M}_{t_0}(L+C)\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-2}\mu(B_0(s))ds\\ &\leqslant 0 + 2\overline{M}_{t_0}(L+C)\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-2}\mu(B_0(s))ds.\end{aligned}$$

Pela desigualdade generalizada de Grönwall para integral fracionária, **Lema 1.24**, temos

$$\mu\Big(B(t)\Big) \leqslant 0\,\mathbb{E}_\alpha\Big(2\overline{M}(L+C)\Gamma(\alpha)(t-s)^\alpha\Big) = 0.$$

Logo, $\mu(B(t)) \equiv 0$ para $t \in I$. O **Lema 1.19** diz que $\mu(B) = \max_{t\in I}\mu(B(t)) = 0$, isto é, $\{\omega_n\}$ é relativamente compacto em $C(I, E^+)$. Portanto, existe uma subsequência $\{\omega_{n_k}\} \subset \{\omega_n\}$ tal que $\omega_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \upsilon^* \in \Omega$. Combinando isso com a sequência em (3.9) e a normalidade do cone E^+, é fácil ver que $\omega_n \xrightarrow{n\to\infty} \upsilon^*$. Faça $n \to \infty$ na Eq.(3.8). Da continuidade do operador Λ, temos que $\upsilon^* = \Lambda\upsilon^*$ é um ponto fixo. Portanto, $\upsilon^* \in \Omega \subset C(I, E^+)$ é uma solução suave e-positiva do sistema (3.4).

(B) A existência global de soluções suaves para o sistema (3.3) em $J_0 = [0, t_1]$.

Vimos no item **(A)** que o sistema (3.3) tem uma solução suave e-positiva $u_0 \in C([0, h_0], E^+)$ expressa por

$$\upsilon_0(t) = \widetilde{S}_\alpha(t)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(t)x_1 + \int_0^t \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s, \upsilon_0(s)) + C\upsilon_0(s)\Big]ds.$$

Pelo teorema da extensão, (veja [44]), u_0 pode ser estendido para uma solução suave do sistema (3.3), que também é denotada por $u_0 \in C([0, T), E^+)$, cujo intervalo de existência é $[0, T)$.

O objetivo agora, é mostrar que $T > t_1$. Então, considere

$$\overline{a} = \max_{t\in[0,T+1]} a(t), \qquad \overline{b} = \max_{t\in[0,T+1]} b(t),$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \sup\Big\{\|(t-T)^{2-\alpha}\mathbb{S}_\alpha(t)\|;\ t \in [0,\ T+1]\Big\},\\
\widetilde{M_1} &= \sup\Big\{\|(t-T)^{2-\alpha}\mathbb{K}_\alpha(t)\|;\ t \in [0,\ T+1]\Big\},\\
\overline{M}_1 &= \sup\Big\{\|(t-T)^{2-\alpha}\mathbb{T}_\alpha(t)\|;\ t \in [0,\ T+1]\Big\}.
\end{aligned}$$

Suponha $T \leqslant t_1$ e traçando a norma da solução u_0, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\upsilon_0(t)\| &= \left\|\widetilde{S}_\alpha(t)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(t)x_1 + \int_0^t \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s, \upsilon_0(s)) + C\upsilon_0(s)\Big]\right\| ds\\
&\leqslant \left\|\widetilde{S}_\alpha(t)\right\| \|x_0\| + \left\|\widetilde{K}_\alpha(t)\right\| \|x_1\| + \int_0^t \left\|\widetilde{T}_\alpha(t-s)\right\| \left\|\Big[\phi(s, \upsilon_0(s)) + C\upsilon_0(s)\Big]\right\| ds.
\end{aligned}$$

Usando a condição $\mathbf{(H_1)}$, escrevemos

$$\begin{aligned}
\|\upsilon_0(t)\| &\leqslant M_1\|x_0\| + \widetilde{M_1}\|x_1\| + \overline{M}_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \left\|\Big[\phi(s, \upsilon_0(s)) + C\upsilon_0(s)\Big]\right\| ds\\
&\leqslant M_1\|x_0\| + \widetilde{M_1}\|x_1\| + \overline{M}_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\Big[\overline{a}\|\upsilon_0(s)\| + \overline{b} + C\|\upsilon_0(s)\|\Big]ds\\
&\leqslant M_1\|x_0\| + \widetilde{M_1}\|x_1\| + \overline{M}_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\Big[\overline{b} + (\overline{a}+C)\|\upsilon_0(s)\|\Big]ds\\
&\leqslant M_1\|x_0\| + \widetilde{M_1}\|x_1\| + \overline{M}_1\overline{b}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}ds + \overline{M}_1(\overline{a}+C)\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\|\upsilon_0(s)\|ds\\
&\leqslant M_1\|x_0\| + \widetilde{M_1}\|x_1\| + \overline{M}_1\overline{b}\,\frac{T^\alpha}{\alpha} + \overline{M}_1(\overline{a}+C)\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\|\upsilon_0(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade generalizada de Grönwall para integral fracionária, **Corolário 1.24**, temos

$$\begin{aligned}\|\upsilon_0(t)\| &\leqslant \Big(M_1\|x_0\|+\widetilde{M_1}\|x_1\|+\overline{M}_1\bar{b}\,\frac{T^\alpha}{\alpha}\Big)\,\mathbb{E}_\alpha\Big(M_1(\overline{a}+C)\Gamma(\alpha)t\Big)\\ &\leqslant \Big(M_1\|x_0\|+\overline{M}_1\bar{b}\,\frac{T^\alpha}{\alpha}\Big)\,\mathbb{E}_\alpha\Big(M_1(\overline{a}+C)\Gamma(\alpha)T\Big) := M_2. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Defina a constante

$$N_0 := \sup\Big\{\|\phi(t,x)\|;\ t\in[0,\ T+1] \text{ e } \|x\|\leqslant M_2\Big\}. \qquad (3.11)$$

Como $\widetilde{S}_\alpha(t)$ e $\widetilde{K}_\alpha(t)$ são contínuas na norma do operador para $t>0$, para qualquer $0<\tau_1<\tau_2<T$, consideremos as seguintes funções:

$$\upsilon_0(\tau_2) = \widetilde{S}_\alpha(\tau_2)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(\tau_2)x_1 + \int_0^{\tau_2}\widetilde{T}_\alpha(\tau_2-s)\Big(\phi(s,\upsilon_0(s))+C\upsilon_0(s)\Big)ds \qquad (3.12)$$

$$\upsilon_0(\tau_1) = \widetilde{S}_\alpha(\tau_1)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(\tau_1)x_1 + \int_0^{\tau_1}\widetilde{T}_\alpha(\tau_1-s)\Big(\phi(s,\upsilon_0(s))+C\upsilon_0(s)\Big)ds. \qquad (3.13)$$

Subtraindo a Eq.(3.13) da Eq.(3.12), obtemos,

$$\begin{aligned}\upsilon_0(\tau_2)-\upsilon_0(\tau_1) = \widetilde{S}_\alpha(\tau_2)x_0 - \widetilde{S}_\alpha(\tau_1)x_0 \ &+\widetilde{K}_\alpha(\tau_2)x_1-\widetilde{K}_\alpha(\tau_1)x_1\\ &+\int_0^{\tau_2}\widetilde{T}_\alpha(\tau_2-s)\Big[\phi(s,\upsilon_0(s))+C\upsilon_0(s)\Big]ds\\ &-\int_0^{\tau_1}\widetilde{T}_\alpha(\tau_1-s)\Big[\phi(s,\upsilon_0(s))+C\upsilon_0(s)\Big]ds.\end{aligned}$$

Rearranjando as integrais com relação aos limites de integração, obtemos

$$\begin{aligned}\upsilon_0(\tau_2)-\upsilon_0(\tau_1) = \widetilde{S}_\alpha(\tau_2)x_0 - \widetilde{S}_\alpha(\tau_1)x_0 \ &+\widetilde{K}_\alpha(\tau_2)x_1-\widetilde{K}_\alpha(\tau_1)x_1\\ &+\int_0^{\tau_1}\Big[\widetilde{T}_\alpha(\tau_2-s)-\widetilde{T}_\alpha(\tau_1-s)\Big]\Big[\phi(s,\upsilon_0(s))+C\upsilon_0(s)\Big]ds\\ &+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\widetilde{T}_\alpha(\tau_2-s)\Big[\phi(s,\upsilon_0(s))+C\upsilon_0(s)\Big]ds.\end{aligned}$$

Desta forma, segue

$$\begin{aligned}\|\upsilon_0(\tau_2)-\upsilon_0(\tau_1)\|\leqslant\ &\|\widetilde{S}_\alpha(\tau_2)x_0-\widetilde{S}_\alpha(\tau_1)x_0\|+\|\widetilde{K}_\alpha(\tau_2)x_1-\widetilde{K}_\alpha(\tau_1)x_1\|\\ &+\int_0^{\tau_1}\|\widetilde{T}_\alpha(\tau_2-s)-\widetilde{T}_\alpha(\tau_1-s)\|\|\phi(s,\upsilon_0(s))+C\upsilon_0(s)\|ds\\ &+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\|\widetilde{T}_\alpha(\tau_2-s)\|\|\phi(s,\upsilon_0(s))+C\upsilon_0(s)\|ds.\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável, $s\leftarrow\tau_1-s$, na primeira integral, temos

$$\begin{aligned}\|\upsilon_0(\tau_2)-\upsilon_0(\tau_1)\|\leqslant\ &\|\widetilde{S}_\alpha(\tau_2)x_0-\widetilde{S}_\alpha(\tau_1)x_0\|+\|\widetilde{K}_\alpha(\tau_2)x_1-\widetilde{K}_\alpha(\tau_1)x_1\|\\ &+\int_0^{\tau_1}\|\widetilde{T}_\alpha(\tau_2-\tau_1+s)-\widetilde{T}_\alpha(s)\|\|\phi(s,\upsilon_0(s))+C\upsilon_0(s)\|ds\\ &+\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha-2}(\tau_2-s)^{2-\alpha}\|\widetilde{T}_\alpha(\tau_2-s)\|\|\phi(s,\upsilon_0(s))+C\upsilon_0(s)\|ds.\end{aligned}$$

Utilizando as Eqs.(3.11)-(3.10) e a constante $\overline{M}_1$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\upsilon_0(\tau_2)-\upsilon_0(\tau_1)\| \leqslant\ & \|\widetilde{S}_\alpha(\tau_2)x_0-\widetilde{S}_\alpha(\tau_1)x_0\|+\|\widetilde{K}_\alpha(\tau_2)x_1-\widetilde{K}_\alpha(\tau_1)x_1\| \\ & +(N_0+CM_2)\int_0^{\tau_1}\|\widetilde{T}_\alpha(\tau_2-\tau_1+s)-\widetilde{T}_\alpha(s)\|ds \\ & +\overline{M}_1(N_0+CM_2)\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha-2}ds.\end{aligned}$$

Disto, segue que

$$\begin{aligned}\|\upsilon_0(\tau_2)-\upsilon_0(\tau_1)\| \leqslant\ & \|\widetilde{S}_\alpha(\tau_2)x_0-\widetilde{S}_\alpha(\tau_1)x_0\|+\|\widetilde{K}_\alpha(\tau_2)x_1-\widetilde{K}_\alpha(\tau_1)x_1\| \\ & +(N_0+CM_2)\int_0^{\tau_1}\|\widetilde{T}_\alpha(\tau_2-\tau_1+s)-\widetilde{T}_\alpha(s)\|ds \\ & +\overline{M}_1(N_0+CM_2)\frac{(\tau_2-\tau_1)^\alpha}{\alpha}.\end{aligned}$$

Quando $\tau_1\to T^-$ e $\tau_2\to T^-$, obtemos,

$$\begin{cases}\|\widetilde{S}^*_\alpha(\tau_2)x_0-\widetilde{S}^*_\alpha(\tau_1)x_0\|\xrightarrow{\tau_1,\tau_2\to T^-}0,\\ \|\widetilde{K}^*_\alpha(\tau_2)x_1-\widetilde{K}^*_\alpha(\tau_1)x_1\|\xrightarrow{\tau_1,\tau_2\to T^-}0,\\ \dfrac{(\tau_2-\tau_1)^{\alpha 1}}{\alpha}\xrightarrow{\tau_1,\tau_2\to T^-}0,\\ \displaystyle\int_0^T\|\widetilde{T}^*_\alpha(\tau_2-\tau_1+s)-\widetilde{T}^*_\alpha(s)\|ds\xrightarrow{\tau_1,\tau_2\to T^-}0.\end{cases}$$

Assim $\|\upsilon_0(\tau_2)-\upsilon_0(\tau_1)\|\equiv 0$. Pelo critério de Cauchy, existe $\overline{x}\in E^+$ tal que $\lim\limits_{t\to T^-}u_0(t)=\overline{x}$.

Consideramos o sistema com equação fracionária de evolução e sem impulso em E, dado por

$$\begin{cases}{}^c\mathbb{D}^\alpha_{0+}\upsilon(t)+(A+CI)\upsilon(t)=\phi(t,\upsilon(t))+C\upsilon(t), \quad t>T,\\ \upsilon(T)=\overline{x}\text{ e }\upsilon'(T)=\overline{y}.\end{cases}\tag{3.14}$$

Usando a parte **(A)**, temos que o sistema (3.14) tem uma solução suave e-positiva v em $[T,\ T+h_T]$. Seja

$$\overline{\upsilon}(t)=\begin{cases}\upsilon_0(t), & t\in[0,T),\\ \omega(t), & t\in[T,\ T+h_T].\end{cases}$$

É fácil ver que $\overline{\upsilon}(t)$ é uma solução suave e-positiva do sistema (3.3) em $[0,T+h_T]$. Assim sendo, $\overline{\upsilon}(t)$ é uma extensão de $\upsilon_0(t)$, isto é uma contradição. Assim, $T>t_1$, i.e., a solução suave e-positiva global $\upsilon_0(t)$ do sistema (3.3) existe em J_0, que é também uma solução suave e-positiva do sistema (P2) em J_0.

(II) Nesta segunda parte, provamos a existência global de soluções suaves e-positivas no intervalo.

Inicialmente, vamos provar que o sistema (P2) tem solução suave e-positiva global em $J_1=(t_1,t_2]$. Consideramos o sistema com equação fracionária de evolução sem impulso em J_1

$$\begin{cases}{}^C\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{0+}\upsilon(t)+(A+CI)\upsilon(t)=\phi(t,\upsilon(t))+C\upsilon(t), \quad t\in J_1,\\ \upsilon(t_1^+)=\upsilon_0(t_1)+I(\upsilon_0(t_1)),\\ \upsilon'(t_1^+)=\upsilon_0'(t_1)+I(\upsilon_0'(t_1)).\end{cases}\tag{3.15}$$

Claramente, uma solução suave e-positiva global do sistema (3.15) em J_1 é também uma solução suave e-positiva do sistema (P2) em J_1. Da prova da parte (I), para $t \in J_0 = [0, t_1]$, temos

$$\upsilon_0(t) = \widetilde{S}_\alpha(t)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(t)x_1 + \int_0^t \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\upsilon(s)) + C\upsilon(s)\Big]ds. \tag{3.16}$$

Por argumento semelhante à prova de (I), o sistema (3.15) tem uma solução suave e-positiva $\upsilon_1 \in C(J_1, E^+)$, com $J_1 = (t_1, t_2]$, dada por

$$\upsilon_1(t) = \widetilde{S}_\alpha(t)\theta_0 + \widetilde{K}_\alpha(t)\bar{\theta}_0 + \int_0^t \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\upsilon(s)) + C\upsilon(s)\Big]ds. \tag{3.17}$$

Pela condição impulsiva e das Eq.(3.16) e Eq.(3.17), obtemos

$$\begin{cases} \theta_0 = x_0 + \widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_1)\ I\Big(\upsilon_0(t_1)\Big), \\ \bar{\theta}_0 = x_1 + \widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_1)\ I\Big(\upsilon_0'(t_1)\Big). \end{cases} \tag{3.18}$$

Então, para $t \in J_1 = (t_1, t_2]$, obtemos

$$\begin{aligned} \upsilon_1(t) = \widetilde{S}_\alpha(t)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(t)x_1 + \int_0^t \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\upsilon(s)) + C\upsilon(s)\Big]ds \\ + \widetilde{S}_\alpha(t)\widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_1)\ I\Big(\upsilon_0(t_1)\Big) + \widetilde{K}_\alpha(t)\widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_1)\ I\Big(\upsilon_0'(t_1)\Big). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Agora, considere $J_2 = (t_2, t_3]$ e $\upsilon_2 \in C(J_2, E^+)$, logo

$$\upsilon_2(t) = \widetilde{S}_\alpha(t)\theta_1 + \widetilde{K}_\alpha(t)\bar{\theta}_1 + \int_0^t \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\upsilon(s)) + C\upsilon(s)\Big]ds. \tag{3.20}$$

Pela condição impulsiva e das Eq.(3.19) e Eq.(3.20), obtemos

$$\begin{cases} \theta_1 = x_0 + \widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_1)\ I\Big(\upsilon_0(t_1)\Big) + \widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_2)\ I\Big(\upsilon_1(t_2)\Big). \\ \bar{\theta}_1 = x_1 + \widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_1)\ I\Big(\upsilon_0'(t_1)\Big) + \widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_2)\ I\Big(\upsilon_1'(t_2)\Big). \end{cases} \tag{3.21}$$

Assim, para $t \in J_2 = (t_2, t_3]$, temos

$$\begin{aligned} \upsilon_2(t) = \widetilde{S}_\alpha(t)\theta_1 + \widetilde{K}_\alpha(t)\bar{\theta}_1 + \int_0^t \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\upsilon(s)) + C\upsilon(s)\Big]ds \\ + \widetilde{S}_\alpha(t)\widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_1)\ I\Big(\upsilon_0(t_1)\Big) + \widetilde{S}_\alpha(t)\widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_2)\ I\Big(\upsilon_1(t_2)\Big) \\ + \widetilde{K}_\alpha(t)\widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_1)\ I\Big(\upsilon_0'(t_1)\Big) + \widetilde{K}_\alpha(t)\widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_2)\ I\Big(\upsilon_1'(t_2)\Big). \end{aligned}$$

Suponha que, para $t \in J_{k-1}\ \ (k = 4, 5, \ldots)$, o sistema (P2) tenha uma solução suave e-positiva $u_{k-1} \in C(J_{k-1}, E^+)\ \ (k = 4, 5, \ldots)$. Então, para $t \in J_k\ \ (k = 3, 4, \ldots)$, o sistema com equação fracionária de evolução sem impulso em E, dada por

$$\begin{cases} {}^C\mathbb{D}_{0+}^\alpha \upsilon(t) + (A + CI)\upsilon(t) = \phi(t, \upsilon(t)) + C\upsilon(t), \quad t \in J_k,\ k = 3, 4, \ldots \\ \upsilon(t_k^+) = \upsilon_{k-1}(t_k) + I(\upsilon_{k-1}(t_k)), \\ \upsilon'(t_k^+) = \upsilon_{k-1}'(t_k) + I(\upsilon_{k-1}'(t_k)), \end{cases} \tag{3.22}$$

tem solução suave e-positiva $\upsilon_k \in C(J_k, E^+)$ expressa por

$$\begin{aligned}
\upsilon_k(t) &= \widetilde{S}_\alpha(t)\theta_{k-1} + \widetilde{K}_\alpha(t)\bar{\theta}_{k-1} + \int_{t_k}^{t} \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\upsilon(s)) + C\upsilon(s)\Big]ds \\
&= \widetilde{S}_\alpha(t)\Big[x_0 + \widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_1)\ I\Big(\upsilon_0(t_1)\Big) + \widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_2)\ I\Big(\upsilon_1(t_2)\Big) + \cdots + \widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_k) I\Big(\upsilon_{k-1}(t_k)\Big)\Big] \\
&+ \widetilde{K}_\alpha(t)\Big[x_1 + \widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_1)\ I\Big(\upsilon_0'(t_1)\Big) + \widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_2)\ I\Big(\upsilon_1'(t_2)\Big) + \cdots + \widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_k) I\Big(\upsilon_{k-1}'(t_k)\Big)\Big] \\
&\quad + \int_{t_k}^{t} \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\upsilon(s)) + C\upsilon(s)\Big]ds
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\upsilon_k(t) = \widetilde{S}_\alpha(t)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(t)x_1 &+ \int_0^t \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\upsilon(s)) + C\upsilon(s)\Big]ds \\
&+ \widetilde{S}_\alpha(t)\sum_{j=1}^{k} \widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_j) I(\upsilon_{j-1}(t_j)) + \widetilde{K}_\alpha(t)\sum_{j=1}^{k} \widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_j) I(\upsilon_{j-1}'(t_j)). \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Agora, definimos a função u como

$$\upsilon(t) = \begin{cases} \upsilon_0(t), & t \in J_0, \\ \upsilon_1(t), & t \in J_1, \\ \cdots & \\ \upsilon_k(t), & t \in J_k\ (k = 2, 3, \ldots). \end{cases} \quad (3.24)$$

É claro que $\upsilon(t) \in PC(J_\infty, E^+)$ é uma solução suave e-positiva do sistema (P2), que satisfaz

$$\begin{aligned}
\upsilon(t) = \widetilde{S}_\alpha(t)x_0 + \widetilde{K}_\alpha(t)x_1 &+ \int_0^t \widetilde{T}_\alpha(t-s)\Big[\phi(s,\upsilon(s)) + C\upsilon(s)\Big]ds \\
&+ \widetilde{S}_\alpha(t)\sum_{i=1}^{k} \widetilde{S}_\alpha^{-1}(t_i) I(\upsilon(t_i)) + \widetilde{K}_\alpha(t)\sum_{i=1}^{k} \widetilde{K}_\alpha^{-1}(t_i) I(\upsilon'(t_i)). \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Pela propriedade de existência global de $u_i(t)$ em J_i, $i \in \mathbb{N}$, a solução $\upsilon(t)$ definida pela Eq.(3.24) é uma solução suave e-positiva global do sistema (P2) em J_∞. □

Quando E for um espaço de Banach ordenado e fracamente sequencialmente completo, excluímos a condição **(H$_3$)** de medida de não-compacidade do **Teorema 3.2** e obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.3. *Seja E um espaço de Banach ordenado e completo de forma fraca e sequencial, cujo cone positivo E^+ seja normal, $-A$ seja o gerador infinitesimal das famílias α-resolventes positivas $\{\mathbb{S}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$, $\{\mathbb{K}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$ e $\{\mathbb{T}_\alpha(t);\ t \geqslant 0\}$. Seja $x_0 \geqslant \sigma e_1$, $\phi(t, \sigma e_1) \geqslant \lambda_1 \sigma e_1$ para $\sigma > 0$ e $t \in J_\infty$. Se a não-linearidade de $\phi \in C(J_\infty \times E^+, E)$ satisfizer as suposições* **(H$_1$)** *e* **(H$_2$)**, *então o* sistema (P2) *tem uma solução suave e-positiva em J_∞.*

Note que, os cálculos foram feitos para o sistema (P2). Para o sistema (P1), as contas são análogas, basta excluir os termos referentes ao operador $\mathbb{K}_\alpha(\cdot)$.

3.1 Caso especial

Uma das principais consequências quando se investiga problemas de equações diferenciais fracionárias, é recuperar os casos $\alpha \to 1$ e $\alpha \to 2$, de modo a obtermos os casos inteiros, respectivamente. Então, o que se espera é que isso aconteça nos resultados aqui investigados, em particular, nos sistemas (P1) e (P2).

Então, tomando os limites com $\alpha \to 1$ e $\alpha \to 2$ nos sistemas (P1) e (P2), obtemos os casos clássicos dados por

$$\begin{cases} v'(t) + Av(t) &= f(t,\ v(t)), \quad t \in J_\infty, \\ \Delta v|_{t=t_k} &= I(v(t_k)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \neq t_k, \\ v(0) &= x_0. \end{cases} \tag{P3}$$

e

$$\begin{cases} v''(t) + Av(t) = f(t,\ v(t)), \quad t \in J_\infty, \\ \Delta v(t_k) = I(v(t_k)), \quad \Delta v'(t_k) = I(v'(t_k)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \neq t_k, \\ v(0) = x_0, \qquad v'(0) = x_1, \end{cases} \tag{P4}$$

respectivamente.

Consequentemente, as respectivas soluções suaves, são dada por

Definição 3.4 (Solução suave)**.** *Uma função abstrata $v \in PC(J_\infty, E)$ é uma solução suave para o* sistema (P3) *se satisfaz a seguinte equação integral*

$$v(t) = S_1(t)x_0 + \int_0^t T_1(t-s)\phi(s,\ v(s))ds + S_1(t)\sum_{i=1}^{k} S_1^{-1}(t_i)I(v(t_i)).$$

Por por outro lado, é solução suave para o sistema (P4) *se satisfaz*

$$v(t) = S_2(t)x_0 + K_2(t)x_1 + \int_0^t T_2(t-s)\phi(s,\ v(s))ds \\ + S_2(t)\sum_{i=1}^{k} S_2^{-1}(t_i)I(v(t_i)) + K_2(t)\sum_{i=1}^{k} K_2^{-1}(t_i)I(v'(t_i)),$$

com $S_k(\cdot)$, $T_k(\cdot)$ e $K_k(\cdot)$ com $k = 1, 2$, dados pelas Eq.(2.27)*,* Eq.(2.28) *e* Eq.(2.29)*, respectivamente. Lembrando que, $S_k^{-1}(\cdot)$ e $K_k^{-1}(\cdot)$ denotam o inverso dos operadores-solução $S_k(\cdot)$ e $K_k(\cdot)$, respectivamente, em $t = t_i$, $i = 1, 2, 3, \cdots, m$.*

Vale ressaltar que $S_1(\cdot)$ e $T_1(\cdot)$ dados pelas Eq.(2.27) e Eq.(2.29), no caso $\alpha = 1$, temos a função exponencial, e nesse caso, é um semigrupo, propriedade de grande relevância da teoria de operadores. Por fim, o principal resultado deste trabalho, é válido para o caso clássico, como segue:

Teorema 3.5. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach com ordem parcial "$\leqslant$", cujo cone positivo E^+ é normal, e $-A$ é o gerador infinitesimal das famílias α-resolventes positivas $\{S_k(t);\ t \geqslant 0\}$, $\{K_k(t);\ t \geqslant 0\}$ e $\{T_k(t);\ t \geqslant 0\}$ com $k = 1, 2$. Para uma constante $\sigma > 0$ e $t \in J_\infty$, seja $x_0 \geqslant \sigma e_1$ e $\phi(t, \sigma e_1) \geqslant \lambda_1 \sigma e_1$. Se a não-linearidade de $\phi \in C(J_\infty \times E^+, E)$ satisfizer as condições $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ e $(\mathbf{H}_3)$, então os* sistemas (P3) *e* (P4) *têm solução suave e-positiva em J_∞.*

Por outro lado, também temos o seguinte resultado:

Corolário 3.6. *Seja E um espaço de Banach ordenado e completo de forma fraca e sequencial, cujo cone positivo E^+ seja normal, $-A$ seja o gerador infinitesimal das famílias α-resolventes positivas $\{S_k(t);\ t \geqslant 0\}$, $\{K_k(t);\ t \geqslant 0\}$ e $\{T_k(t);\ t \geqslant 0\}$ com $k = 1, 2$. Seja $x_0 \geqslant \sigma e_1$, $\phi(t, \sigma e_1) \geqslant \lambda_1 \sigma e_1$ para $\sigma > 0$ e $t \in J_\infty$. Se a não-linearidade de $\phi \in C(J_\infty \times E^+, E)$ satisfizer as suposições $(\mathbf{H}_1)$ e $(\mathbf{H}_2)$, então os* sistemas (P3)-(P4) *têm uma solução suave e-positiva em J_∞.*

Mencionamos a seguir, duas observações relevantes:

- Semigrupo analítico e semigrupo diferenciável são semigrupos equicontínuos [44]. Em aplicações de equações diferenciais parciais, como a equação de onda fortemente amortecida, a equação do tipo parabólica, etc., seus semigrupos de solução são os semigrupos analíticos. Portanto, é conveniente aplicar o **Teorema 3.5** a essas equações.

- Por outro lado, um dos problemas em aberto (veja Conclusões e Perspectivas Futuras) é a questão que envolve a propriedade de semigrupo para operadores fracionários. Como é sabido, não é válido [45]. Nesse sentido, não é possível a priori discutir diretamente os problemas apontados no item anterior envolvendo semigrupo e aplicar o **Teorema 3.2**.

3.2 Aplicação: um problema parabólico

Nessa seção, usamos o **Corolário 3.3** para investigar a existência de soluções suaves e-positivas para um problema de valor de contorno inicial fracionário do tipo parabólico.

Seja $I = (a, b)$ um intervalo aberto, definimos o espaço de Sobolev como [13]

$$W_0^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I);\ \exists\ g \in L^p(I) \ \text{ e } \ \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi,\ \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}$$

com $1 \leq p \leq \infty$. Para $p = 2$, denotamos por $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

Note que $W_0^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, é reflexivo para $1 < p < \infty$ e é separável para $1 \leq p \leq \infty$.

Por outro lado, dado $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^+$ e $1 \leq p < \infty$ definimos por indução o espaço [13]

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I),\ \textit{tal que},\ u' \in W^{m-1,p} \right\}.$$

Definimos também

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

Para $m = 2$, temos $H^2(I) = W^{2,2}(I)$. Note que $u \in W^{m,p}(I)$ se, e somente se, existir m funções $g_1, g_2, ..., g_m \in L^p(I)$ tal que

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g^j \varphi,\ ,\ \varphi \in C_c^\infty(I),$$

$\forall j = 1, 2, ..., m$ onde $D_j\varphi$ denote a j-ésima derivada de φ e $C_c^\infty(I)$ é o espaço das funções testes.

Considere o domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}$ cuja a fronteira $\partial\Omega$ seja suficientemente suave. Consideramos o problema de valor de contorno inicial fracionário do tipo parabólico dado

por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \nabla^2 u &= g(x,t,u),\ x \in \Omega \quad t \in J_\infty,\ t \neq t_k \\ \Delta u|_{t=t_k} &= I(\upsilon(t_k)),\ x \in \Omega \quad k = 1,2,3,... \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \\ \upsilon(x,0) &= \phi(x),\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.26}$$

onde $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ é a derivada parcial fracionária de Caputo $(0 < \alpha < 1)$, ∇^2 é operador de Laplace, $g(x,t,u) : \overline{\Omega} \times J_\infty \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é contínua. Para o problema (3.26), temos o seguinte resultado de existência:

Teorema 3.7. *Seja λ_1 um autovalor real positivo minimal do operador de Laplace $-\nabla^2$ com a condição de contorno de $u|_{\partial\Omega}= 0$, $e_1 \in L^2(\Omega)$ o autovalor positivo correspondente a λ_1. Seja $\varphi(x) \geq e_1(x)$, $g(x,t,\sigma e_1(x)) \geq \lambda_1 \sigma e_1(x)$ para $x \in \overline{\Omega}$, $t \in J_\infty$ e $\sigma > 0$. Se a não linearidade de $g(x,t,u) : \overline{\Omega} \times J_\infty \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é contínua e satisfaz as seguintes condições:*

(A1) *Existe $a, b \in C(\overline{\Omega} \times J_\infty, \mathbb{R}^+)$ tal que*

$$|g(x,t,\eta)| \leq a(x,t)|\eta| + b(x,t),$$

para qualquer $x \in \overline{\Omega}$, $t \in J_\infty$, $\eta \in \mathbb{R}^+$.

(A2) *Para qualquer $R > 0$, $T > 0$ existe $M = M(R,T) > 0$ tal que*

$$g(x,t,\eta_2) - g(x,t,\eta_1) \geq -M(\eta_2 - \eta_1),$$

para algum $x \in \overline{\Omega}$, $t \in J_\infty$ e $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2$, $|\eta_1|, |\eta_2| \leq R$.

Então, o sistema (3.26) *tem solução suave e-positiva.*

Demonstração. Seja $E = L^2(\Omega)$. Então, E é um espaço completo de Banach sequencialmente e ordenado. Seja $K = \{u \in L^2(\Omega)/\upsilon(x) \geq 0,\ q.t.p.\, x \in \Omega\}$. Então, K é normal em E. Agora, definimos um operador A dado por

$$\begin{cases} D(A) &= H^2(\Omega) \cup H_0^1(\Omega) \\ Au &= -\nabla^2 u. \end{cases} \tag{3.27}$$

O operador $A : D(A) \subset E \to E$ definido pela Eq.(3.27) é um operador auto-adjunto positivo definido com resolvente compacto. Então, o espectro $\sigma(A)$ de A consiste em todos os autovalores reais positivos e pode ser organizado em sequência como

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots,\ \lambda_n \to \infty,\ n \to \infty.$$

Pelo princípio do máximo da equação parabólica, $-A$ é um gerador infinitesimal das famílias α-resolventes positivos em $L^2(\Omega)$. Para $v \in L^2(\Omega)$, seja

$$\phi(t,v) := g(\cdot,t,v(\cdot)),\ I_k(v(t_k)) = I(v(\cdot),t_k).$$

Então, a equação parabólica impulsiva fracionária do sistema (3.26) é reescrita na forma da equação diferencial fracionária de evolução impulsiva fracionária do sistema (P1) em $E = L^2(\Omega)$. Note que todas as condições do **Corolário 3.3** são satisfeitas. Assim, o sistema (P1) tem uma solução suave e-positiva $u^* \in PC(J_\infty, E)$ que também é uma solução suave do sistema (3.26). □

Observação 3.8. *Uma consequência natural da aplicação aqui investigada, é o caso* $\alpha = 1$. *Desta forma, basta tomar* $\alpha = 1$ *no* sistema (3.26) *e usar o* **Teorema 3.7**, *e obter o resultado para o caso inteiro. Note que também é possível discutir outros casos particulares, a partir da variação de* α *no intervalo* $(0, 1)$.

Conclusões e perspectivas futuras

A teoria de equações diferenciais fracionárias, como discutido na introdução, é de fato importante e ao longo dos anos vem crescendo consideravelmente pelas inúmeras contribuições positivas impactadas pela unificação do cálculo fracionário e das equações diferenciais. Por outro lado, operadores-solução para alguns tipos de equações diferenciais fracionárias, são dados em termos de uma família α-resolvente cujo gerador é um operador setorial A tipo (M, θ, α, μ). Esses tipos de famílias, são obtidos via transformada integral, em particular a transformada de Laplace, e como abordado neste trabalho, é possível obter uma relação dessa família α-resolvente $S_\alpha(\cdot)$, $T_\alpha(\cdot)$ e $K_\alpha(\cdot)$, com as funções Mittag-Leffler.

A técnica da medida de não-compacidade de Kuratowski e da desigualdade de Grönwall, são de suma importância na discussão de propriedades de equações descritas por derivadas fracionárias. Por outro lado, a desigualdade de Grönwall, envolvendo a função $\psi(\cdot)$ é nova, que contém uma ampla classe de casos particulares. Além disso, apresentamos detalhadamente uma explanação sobre o novo operador fracionário ψ-Hilfer, em particular, discutimos teoremas, lemas e propriedades que acercam a derivada, que são de suma importância na justificativa de um operador ser de fato considerado fracionário. Nesse sentido, discutimos alguns casos obtidos da derivada fracionária ψ-Hilfer, em particular, a de Caputo, uma vez que é fundamental na formulação do principal objetivo do trabalho, isto é, as equações que aparecem nos sistemas (P1) e (P2). Com isso, fechamos os Capítulo 1 e Capítulo 2.

Por fim, uma vez que toda estrutura necessária e suficiente para a formulação e discussão dos sistemas (P1) e (P2) foram bem fundamentadas, tornou possível desenvolver o principal resultado desse trabalho, ou seja, investigamos a existência de soluções suaves e-positivas para sistemas com equação diferencial fracionária de evolução impulsiva para $0 < \alpha < 1$ (veja o sistema (P1)), onde podemos notar a presença das famílias α-resolventes $S_\alpha(\cdot)$ e $T_\alpha(\cdot)$; e para $1 < \alpha < 2$ (veja o sistema (P2)), podemos notar, a inclusão de mais uma família α-resolvente, $K_\alpha(\cdot)$, na formulação da solução suave. A fim de obter o principal resultado, utilizamos a medida de não-compacidade de Kuratowski e a desigualdade de Grönwall. Nesse sentido, afim de elucidar o resultado investigado, apresentamos uma aplicação envolvendo um problema de valor limite inicial do tipo parabólico fracionário. O resultado apresentado neste trabalho, é totalmente novo e como consequência positiva, foi submetido à publicação o artigo [23] intitulado "The e-positive mild solutions for impulsive evolution fractional differential equations with sectorial operator" em Differential Equations and Applications, onde discutimos o sistema (P1). Sendo assim, concluímos o Capítulo 3. Uma continuação natural do trabalho, é investigar e discutir os problemas em aberto, conforme destacados a seguir.

Comentários sobre problemas em aberto:

1. Uma melhor propriedade para S_α.

Uma das propriedades de suma importância na teoria de operadores, é o semigrupo. No entanto, quando se investiga questões envolvendo operadores fracionários, essa propriedade não é válida, isto é, para $S_\alpha(t) = \mathbb{E}_\alpha(-t^\alpha A)$, temos $S_\alpha(t+s) \neq S_\alpha(t)S_\alpha(s)$. Por outro lado, é sabido que no caso inteiro é válido, ou seja, $e^{s+t} = e^s e^t$. Embora não valha a lei de semigrupo para $S_\alpha(t)$ com $0 < \alpha < 1$, temos uma propriedade que melhor se aproxima, dada por [45]

$$\begin{aligned}&\int_0^{t+s}(t+s-\tau)^{-\alpha}S_\alpha(\tau)d\tau - \int_0^t(t+s-\tau)^{-\alpha}S_\alpha(\tau)d\tau - \int_0^s(t+s-\tau)^{-\alpha}S_\alpha(\tau)d\tau\\ &= \alpha\int_0^t\int_0^s(t+s-\tau_1-\tau_2)^{(1-\alpha)}S_\alpha(\tau_1)S_\alpha(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \tag{3.28}$$

com $t,\ s \geq 0$.

A teoria de equações diferenciais fracionárias envolvem operadores solução $S_\alpha(\cdot), T_\alpha(\cdot)$ e $K_\alpha(\cdot)$, em particular conforme visto no Capítulo 3. No entanto, não é tarefa fácil investigar soluções de equações diferenciais fracionárias, uma vez que, a construção da solução suave, é obtida por meio de transformada integral, em particular, as transformadas de Laplace e Fourier. E a propriedade de semigrupo, nesse caso é perdida, e uma forma de sanar esse ponto, é utilizar propriedades que permitam construir a solução e estejam bem definidas. Além disso, outro caminho é tentar obter uma melhor propriedade $S_\alpha(t+s)$ ou $S_\alpha(t)S_\alpha(s)$ e lidar com a teoria que existe.

2. Solução suave para problemas do tipo (P1) envolvendo a derivada fracionária ψ-Hilfer.

Considere a equação diferencial fracionária de evolução impulsiva não-linear no sentido da derivada fracionária ψ-Hilfer, dada por

$$\left\{\begin{array}{rcl} {}^{H}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}\upsilon(t) + A\upsilon(t) &=& \phi(t,\ \upsilon(t)),\quad t \in J_\infty,\\ \Delta\upsilon|_{t=t_k} &=& I(\upsilon(t_k)),\quad k \in \mathbb{N},\quad t \neq t_k,\\ \upsilon(0) &=& x_0. \end{array}\right. \tag{3.29}$$

Mudamos apenas a derivada fracionária, as demais informações para o sistema (3.29) são as mesmas apresentadas no sistema (P1).

Podemos indagar, qual o motivo de reservar o Capítulo 2 para apresentar detalhadamente uma explanação do novo operador fracionário ψ-Hilfer, uma vez que o principal resultado foi construido com o operador de Caputo? Ou então, porque não investigar o sistema (P1) no sentido da derivada fracionária ψ-Hilfer, uma vez que já existe uma transformada de Laplace com relação a uma outra função [32] e a derivada é mais geral? A resposta para essa questão, é bem simples, ainda não temos uma expressão (solução suave) para o sistema (3.29) conforme foi apresentada para os sistemas (P1) e (P2) na **Definição 3.1**. Esse é outro problema em aberto que se tem na teoria de equações diferenciais fracionárias. Recetemente Jarad and Abdeljawad, discutiram um problema de Cauchy fracionário (veja Teorema 5.2 [32]) envolvendo a derivada fracionária ψ-Caputo, no entanto sem o operador infinitesimal A. Nessa questão, existe um problema a ser contornado no plano complexo quando tentamos obter a solução suave via a transformada de Laplace com relação a uma outra função. Certamente, resolvendo esse problema, inúmeras questões importantes poderão ser investigadas.

Referências Bibliográficas

[1] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina, and B. N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhauser Verlag, Bassel, 1992.

[2] R. Almeida, *A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **44** (2017), 460–481.

[3] R. Almeida, N. R. O. Bastos, and M. T. T. Monteiro, *A fractional malthusian growth model with variable order using an optimization approach*, Statistics, Optimization & Information Computing **6** (2018), no. 1, 4–11.

[4] R. Almeida, A. M. C. Brito da Cruz, N. Martins, and M. T. T. Monteiro, *An epidemiological mseir model described by the Caputo fractional derivative*, Inter. J. Dyn. Control **7** (2019), no. 2, 776–784.

[5] R. Almeida, R. Kamocki, A. B Malinowska, and T. Odzijewicz, *Optimal leader-following consensus of fractional opinion formation models*, J. Comput. Appl. Math. (2020), 112996.

[6] J. Appell, *Measures of noncompactness, condensing operators and fixed points: an application-oriented survey*, Fixed Point Theory **6** (2005), no. 2, 157–229.

[7] D. Araya and C. Lizama, *Almost automorphic mild solutions to fractional differential equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **69** (2008), no. 11, 3692–3705.

[8] A. Babaei, B. P. Moghaddam, S. Banihashemi, and J. A. T. Machado, *Numerical solution of variable-order fractional integro-partial differential equations via Sinc collocation method based on single and double exponential transformations*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **82** (2020), 104985.

[9] J. Banas and K. Goebel, *Measures of noncompactness in Banach spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York, Basel: Marcel Dekker, Inc **60** (1980).

[10] R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill Book Co, Inc, New York, 1953.

[11] A. Benabdallah, I. Ellouze, and M. A. Hammami, *Practical stability of nonlinear time-varying cascade systems*, J. Dyn. Control Sys. **15** (2009), no. 1, 45–62.

[12] I. Benedetti, V. Obukhovskii, and V. Taddei, *Evolution fractional differential problems with impulses and nonlocal conditions*, Disc. Cont. Dyn. Sys.-S **13** (2020), no. 7, 1899.

[13] H. Brezis and H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, vol. 2, New York: Springer, 2011.

[14] P. M. Carvalho Neto, *Fractional differential equations: a novel study of local and global solutions in Banach spaces*, Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo, 2013.

[15] C. Chen and M. Li, *On fractional resolvent operator functions*, Semigroup Forum **80** (2010), no. 1, 121–142.

[16] P. Chen, X. Zhang, and Y. Li, *Fractional non-autonomous evolution equation with nonlocal conditions*, J. Pseudo-Diff. Oper. Appl. **10** (2019), no. 4, 955–973.

[17] ———, *Existence and approximate controllability of fractional evolution equations with nonlocal conditions via resolvent operators*, Frac. Cal. Appl. Anal. **23** (2020), no. 1, 268–291.

[18] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova **24** (1955), 84–92.

[19] A. Debbouche and D. Baleanu, *Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delay integro-differential systems*, Comput. Math. Appl. **62** (2011), no. 3, 1442–1450.

[20] X.-L. Ding and B. Ahmad, *Analytical solutions to fractional evolution equations with almost sectorial operators*, Adv. Diff. Equ. **2016** (2016), no. 1, 1–25.

[21] S. D. Eidelman and A. N. Kochubei, *Cauchy problem for fractional diffusion equations*, J. Diff. Equ. **199** (2004), no. 2, 211–255.

[22] M. Fečkan, Jin-Rong Wang, and Y. Zhou, *On the new concept of solutions and existence results for impulsive fractional evolution equations*, Dyn. Partial Diff. Equ. **8** (2011), no. 4, 345–361.

[23] J. Féres Junior, J. Vanterler da C. Sousa, and E. Capelas de Oliveira, *The e-positive mild solutions for impulsive evolution fractional differential equations with sectorial operator*, Submetido, Diff. Equ. and Appl. (2020).

[24] I. Ts Gohberg, L. S. Goldenstein, and A. S. Markus, *Investigations of some properties of bounded linear operators with their q-norms*, Ucenie Zapiski, Kishinevskii Gosuniversitet **29** (1957), 29–36.

[25] L. S. Goldenstein and A. S. Markus, *On a measure of noncompactness of bounded sets and linear operators*, Studies in Algebra Math. Anal., Kishinev (1965), 45–54.

[26] T. H. Gronwall, *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations*, Ann. Math. (1919), 292–296.

[27] M. A. Hammami, *On the stability of nonlinear control systems with uncertainty*, J. Dyn. Control Sys. **7** (2001), no. 2, 171–179.

[28] H. R. Henríquez and C. Lizama, *Compact almost automorphic solutions to integral equations with infinite delay*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **71** (2009), no. 12, 6029–6037.

[29] E. Hernández, Donal O'Regan, and K. Balachandran, *On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **73** (2010), no. 10, 3462–3471.

[30] ———, *Existence results for abstract fractional differential equations with nonlocal conditions via resolvent operators*, Indaga. Math. **24** (2013), no. 1, 68–82.

[31] V. I. Istratescu, *On a measure of noncompactness*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie **16** (1972), no. 2, 195–197.

[32] F. Jarad and T. Abdeljawad, *Generalized fractional derivatives and Laplace transform*, Disc. Cont. Dyn. Sys.-S **13** (2020), no. 3, 709.

[33] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204, Elsevier Science Limited, Amsterdam, 2006.

[34] Shi-you Lin, *Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations*, J. Inequ. Appl. **2013** (2013), no. 1, 1–9.

[35] C. Lizama and G. M. N'Guérékata, *Mild solutions for abstract fractional differential equations*, Applicable Anal. **92** (2013), no. 8, 1731–1754.

[36] J. A. T. Machado and A. M. Lopes, *Fractional-order kinematic analysis of biomechanical inspired manipulators*, J. Vibration Control **26** (2020), no. 1-2, 102–111.

[37] E. Malkowsky, *Modern functional analysis in theory of sequence spaces and matrix transformations*, Jordan J. Math. Stat. **1** (2008), no. 1, 1–29.

[38] ———, *Compact matrix operators between some bk spaces*, Modern Methods of Analysis and Its Applications, Anamaya Publ., New Delhi (2010), 86–120.

[39] A. L. M. Martinez, *Pontos fixos em cones de espaços de Banach e uma equação diferencial de quarta ordem*, dissertação, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2006.

[40] O. Nikan, Z. Avazzadeh, and J. A. T. Machado, *Numerical investigation of fractional nonlinear sine-Gordon and Klein-Gordon models arising in relativistic quantum mechanics*, Engineering Analysis with Boundary Elements **120** (2020), 223–237.

[41] D. S. Oliveira and E. Capelas de Oliveira, *Hilfer–Katugampola fractional derivatives*, Comput. Appl. Math. **37** (2018), no. 3, 3672–3690.

[42] ———, *On a Caputo-type fractional derivative*, Adv. Pure Appl. Math. **10** (2019), no. 2, 81–91.

[43] M. D Ortigueira and J. A. T. Machado, *On the properties of some operators under the perspective of fractional system theory*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **82** (2020), 105022.

[44] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, vol. 44, Springer Science & Business Media, New York, 2012.

[45] J. Peng and K. Li, *A novel characteristic of solution operator for the fractional abstract Cauchy problem*, J. Math. Anal. Appl. **385** (2012), no. 2, 786–796.

[46] R. Poongodi and R. Murugesu, *Existence of mild solution for fractional nonlocal neutral impulsive integro-differential equations with state-dependent delay.*, Nonlinear studies **23** (2016), no. 2.

[47] P. S. Ramos, J. Vanterler da C. Sousa, and E. Capelas de Oliveira, *Existence and uniqueness of mild solutions for quasi-linear fractional integro-differential equations*, Evolution Equations & Control Theory **11** (2019), no. 1, 1–24.

[48] K. Sayevand and J. A. T. Machado, *A survey on fractional asymptotic expansion method: A forgotten theory*, Frac. Calc. Appl. Anal. **22** (2019), no. 5, 1165–1176.

[49] V. Shah, R. K. George, J. Sharma, and P. Muthukumar, *Existence and uniqueness of classical and mild solutions of generalized impulsive evolution equation*, Inter. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **19** (2018), no. 7-8, 775–780.

[50] X.-B. Shu and Y. Shi, *A study on the mild solution of impulsive fractional evolution equations*, Appl. Math. Comput. **273** (2016), 465–476.

[51] X.-B. Shu and Q. Wang, *The existence and uniqueness of mild solutions for fractional differential equations with nonlocal conditions of order* $1 < \alpha < 2$, Comput. Math. Appl. **64** (2012), no. 6, 2100–2110.

[52] Xiao-Bao Shu, L. Shu, and F. Xu, *A new study on the mild solution for impulsive fractional evolution equations*, arXiv:1907.03088 (2019).

[53] V. B. Silva, *Sequências em espaços de Banach e espaços de Banach de sequências*, Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo, 2018.

[54] J. Vanterler da C. Sousa, T. Abdeljawad, and D. S. Oliveira, *Mild and classical solutions for fractional evolution differential equation*, Accept for publication. Palestine J. Math. (2019).

[55] J. Vanterler da C. Sousa, M. Benchohra, and G. M. N'Guérékata, *Attractivity for differential equations of fractional order and ψ-Hilfer type*, Frac. Cal. Appl. Anal. **23** (2020), no. 4, 1188–1207.

[56] J. Vanterler da C. Sousa and E. Capelas de Oliveira, *On the ψ-Hilfer fractional derivative*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **60** (2018), 72–91.

[57] ———, *On the Ulam–Hyers–Rassias stability for nonlinear fractional differential equations using the ψ-Hilfer operator*, J. Fixed Point Theory Appl. **20** (2018), no. 3, 96.

[58] ———, *Ulam–Hyers stability of a nonlinear fractional Volterra integro-differential equation*, Appl. Math. Lett. **81** (2018), 50–56.

[59] ———, *Fractional order pseudoparabolic partial differential equation: Ulam–Hyers stability*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **50** (2019), no. 2, 481–496.

[60] ———, *A Gronwall inequality and the Cauchy type problem by means of ψ-Hilfer operator*, Differ. Equ. Appl. **11** (2019), no. 1, 87–106.

[61] ———, *Leibniz type rule: ψ-Hilfer fractional operator*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **77** (2019), 305–311.

[62] ———, *On the ψ-fractional integral and applications*, Comput. Appl. Math. **38** (2019), no. 1, 4.

[63] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira, and L. A. Magna, *Fractional calculus and the ESR test*, AIMS Math. **2** (2017), no. 4, 692–705.

[64] J. Vanterler da C. Sousa, M. N. N. dos Santos, L. A. Magna, and E. Capelas de Oliveira, *Validation of a fractional model for erythrocyte sedimentation rate*, Comput. Appl. Math. **37** (2018), no. 5, 6903–6919.

[65] J. Vanterler da C. Sousa, G. S. F. Frederico, and E. Capelas de Oliveira, *ψ-Hilfer pseudo-fractional operator: new results about fractional calculus*, Comput. Appl. Math. **39** (2020), no. 4, 1–33.

[66] J. Vanterler da C. Sousa, F. Jarad, and T. Abdeljawad, *Existence of mild solutions to Hilfer fractional evolution equations in Banach space*, Ann. Funct. Anal. **12** (2021), 12.

[67] J. Vanterler da C. Sousa, J. A. Tenreiro Machado, and E. Capelas de Oliveira, *The ψ-Hilfer fractional calculus of variable order and its applications*, Comput. Appl. Math. **39** (2020), no. 4, 1–35.

[68] J. Vanterler da C. Sousa, D. S. Oliveira, and E. Capelas de Oliveira, *A note on the mild solutions of Hilfer impulsive fractional differential equations*, Chaos, Solitons & Fractals **147** (2021), 110944.

[69] B. Sundaravadivoo, *Controllability analysis of nonlinear fractional order differential systems with state delay and non-instantaneous impulsive effects*, Disc. Cont. Dyn. Sys.-S **13** (2020), no. 9, 2561.

[70] G. Sales Teodoro, J.A. T. Machado, and E. Capelas de Oliveira, *A review of definitions of fractional derivatives and other operators*, J. Comput. Phys. **388** (2019), 195–208.

[71] J. Wang, M. Feckan, and Y. Zhou, *Relaxed controls for nonlinear fractional impulsive evolution equations*, J. Opt. Theory Appl. **156** (2013), no. 1, 13–32.

[72] J. Wang, Y. Zhou, and M. Fečkan, *Abstract Cauchy problem for fractional differential equations*, Nonlinear Dyn. **71** (2013), no. 4, 685–700.

[73] R.-N. Wang, D.-H. Chen, and T.-J. Xiao, *Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators*, J. Diff. Equ. **252** (2012), no. 1, 202–235.

[74] X. Wang and X. Shu, *The existence of positive mild solutions for fractional differential evolution equations with nonlocal conditions of order* $1 < \alpha < 2$, Adv. Diff. Equ. **2015** (2015), no. 1, 159.

[75] H. Yang, *Positive solutions for the initial value problems of impulsive evolution equations*, J. Math. Res. Exposition **31** (2011), 1047–1056.

[76] H. Yang and Y. Liang, *Positive solutions for the initial value problem of fractional evolution equations*, Abs. Appl. Anal. **2013** (2013).

[77] H. Ye, J. Gao, and Y. Ding, *A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation*, J. Math. Anal. Appl. **328** (2007), no. 2, 1075–1081.

[78] D. Zhang and Y. Liang, *Existence and controllability of fractional evolution equation with sectorial operator and impulse*, Adv. Diff. Equ. **2018** (2018), no. 1, 219.

[79] D. Zhao, Y. Liu, and X. Li, *Controllability for a class of semilinear fractional evolution systems via resolvent operators*, Commun. Pure Appl. Anal. **18** (2019), no. 1, 455.