

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

SILAS DE SÁ CAVALCANTI MELO

O oscilador mecânico fracionário: uma modelagem via derivada de Hilfer

Campinas

2022

Silas de Sá Cavalcanti Melo

O oscilador mecânico fracionário: uma modelagem via derivada de Hilfer

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Silas de Sá Cavalcanti Melo e orientada pelo Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M491o Melo, Silas de Sá Cavalcanti, 1997-
O oscilador mecânico fracionário : uma modelagem via derivada de Hilfer /
Silas de Sá Cavalcanti Melo. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Oscilador mecânico fracionário. 2. Cálculo fracionário. 3. Derivada
fracionária de Hilfer. 4. Transformada de Laplace. I. Oliveira, Edmundo Capelas
de, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The fractional mechanical oscillator : a modeling via Hilfer
derivative

Palavras-chave em inglês:

Fractional mechanical oscillator

Fractional calculus

Hilfer fractional derivative

Laplace transformation

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]

Daniela dos Santos de Oliveira

Adrian Ricardo Gomez Plata

Data de defesa: 18-04-2022

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-3505-9670>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3326697962204438>

**Dissertação de Mestrado defendida em 18 de abril de 2022 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). ADRIAN RICARDO GOMEZ PLATA

Prof(a). Dr(a). DANIELA DOS SANTOS DE OLIVEIRA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado à minha irmã Jessica:
a pessoa mais doce do mundo.*

Agradecimentos

Ao meu orientador Edmundo, sou grato pela imensa paciência e dedicação. Admiro-o cada dia mais.

À minha irmã Jessica pela amizade, atenção e suporte durante a minha caminhada. Os momentos difíceis tornaram-se mais brandos graças a ela. Aos meus pais por fornecerem uma formação humana riquíssima ao longo dos anos.

À minha namorada Tayna pela doçura, incentivo e companheirismo, vou levar isso para sempre no coração.

Ao meu orientador da graduação Marco Aurélio por acreditar em mim mesmo em meio às adversidades da pandemia, seu apoio foi essencial.

Ao meu amigo Marcelo e à professora Flávia por me apresentarem às belezas do cálculo fracionário.

Ao meus amigos Ederson, Bruna, Adriano, Sandriely e Gabriel por compartilharem momentos incríveis nessa vida de proletariado.

Por fim, agradeço a todos os professores que tive, obrigado pelo maior ensinamento de todos: a certeza de que o conhecimento só adquire valor quando socializado.

Resumo

Este trabalho é um estudo de osciladores mecânicos sob o ponto de vista do cálculo fracionário. Busca-se estudar a equação diferencial ordinária fracionária que descreve o oscilador harmônico fracionário, bem como algumas de suas soluções particulares, a partir da derivada fracionária de Hilfer, recuperando as soluções via derivadas fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville. Trata-se de uma revisão bibliográfica que segue de perto as contribuições de outros autores a respeito do cálculo fracionário. Como resultado obteve-se uma alternativa à modelagem clássica do problema do oscilador harmônico amortecido.

Palavras-chave: Oscilador mecânico fracionário, cálculo fracionário, derivada fracionária de Hilfer, transformada de Laplace.

Abstract

This work is a study of mechanical oscillators from the point of view of fractional calculus. We seek to study the fractional ordinary differential equation that describes the fractional harmonic oscillator, as well as some of its particular solutions, from the Hilfer fractional derivative, retrieving the solutions via Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives. This is a literature review that closely follows the contributions of other authors regarding fractional calculus. As a result, an alternative to the classical modeling of the damped harmonic oscillator problem was obtained.

Keywords: Fractional mechanical oscillator, fractional calculus, Hilfer fractional derivative, Laplace transform.

Lista de Figuras

Figura 1 – Oscilador harmônico amortecido.	15
Figura 2 – Diagrama de resolução de uma EDO via transformada de Laplace.	19
Figura 3 – Função $y(t) = e^{t-2}$	25
Figura 4 – Solução do PVI da Eq.(1.19)	25
Figura 5 – $x(t)$ para todos os casos de oscilação simples ou amortecida.	29
Figura 6 – Seno fracionário para valores particulares de α	36
Figura 7 – Eq.(4.5) para alguns valores de γ e $\mu = 0$	61
Figura 8 – Eq.(4.5) para alguns valores de γ e $\mu = 1$	61
Figura 9 – Eq.(4.10), Eq.(4.14) e Eq(1.22) para $\omega = k = m = x_0 = 1, \gamma = 1.9$	64
Figura 10 – Eq.(4.17) para alguns valores de α	65
Figura 11 – Eq.(4.18) para alguns valores de α	66
Figura 12 – Solução para Eq.(4.35) com $\gamma = 2$	71
Figura 13 – Solução da Eq.(4.35) para $\gamma = 1,9$ e $\mu = 0$	71
Figura 14 – Solução da Eq.(4.35) para $\gamma = 1,9$ e $\mu = 1$	72
Figura 15 – Solução da Eq.(4.35) para $\gamma = 1,9, \mu = 0$ e $x_0 = 0,5$	72

Conteúdo

Introdução	11
1 Oscilador harmônico: simples e amortecido	14
1.1 Transformada de Laplace	16
1.1.1 Transformada de Laplace inversa	18
1.1.2 Propriedades da transformada de Laplace	20
1.2 Oscilador harmônico amortecido e a transformada de Laplace	26
1.2.1 Solução do oscilador harmônico amortecido	26
2 As funções de Mittag-Leffler	30
2.1 Funções de Mittag-Leffler de um parâmetro	30
2.2 Funções de Mittag-Leffler de dois parâmetros	34
2.3 Funções de Mittag-Leffler de três parâmetros	37
2.4 Funções de Mittag-Leffler e a transformada de Laplace	38
3 Noções preliminares do cálculo fracionário	41
3.1 Integral fracionária	42
3.1.1 Integral fracionária de Riemann-Liouville	43
3.2 Derivadas fracionárias	47
3.2.1 Formulação de Riemann-Liouville	48
3.2.2 Formulação de Caputo	50
3.3 Derivada de Hilfer	52
3.3.1 Transformada de Laplace da derivada de Hilfer	55
4 Oscilador mecânico fracionário	57
4.1 EDOF do oscilador harmônico fracionário	58
4.1.1 O problema da dimensão fracionária de tempo	58
4.2 Soluções particulares para a EDOF	59
4.2.1 Oscilador harmônico fracionário	59
4.2.2 Oscilador harmônico amortecido fracionário	64
4.2.3 Solução para a EDOF	65
4.3 Oscilador forçado fracionário sem amortecimento	68
4.3.1 Esboço das curvas do oscilador forçado fracionário	70
Considerações finais	73
Referências Bibliográficas	75

Introdução

Quando um determinado corpo executa um movimento periódico em torno de um ponto fixo diz-se que esse movimento é oscilatório. Um tipo especial de movimento oscilatório é o movimento harmônico. Enquadram-se nessa categoria os movimentos oscilatórios em que a aceleração e a força resultante agindo sobre o corpo são proporcionais e opostas ao seu deslocamento. Diante disso, a modelagem matemática do oscilador harmônico mostra-se como uma ferramenta de suma importância para o estudo dessas oscilações, sejam elas presentes em problemas envolvendo massas ligadas a molas, pêndulos que oscilam com pequena amplitude ou vibrações acústicas. Em geral, estuda-se o oscilador harmônico simples e o amortecido, sendo esse último aquele cujo o movimento harmônico se faz na presença de forças de atrito. Em geral, utiliza-se o termo oscilador mecânico para se referir a todas as classificações de osciladores harmônicos aqui apresentadas.

Tradicionalmente, a modelagem desses fenômenos parte do estudo de equações diferenciais ordinárias (EDOs) e suas condições iniciais. Isso significa que se recorre predominantemente ao uso dos operadores de derivação e integração cujas ordens são números naturais: $\frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2}, \dots, \frac{d^n}{dt^n}, n \in \mathbb{N}$. No que diz respeito ao oscilador harmônico, a modelagem ocorre por meio de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes, conforme a equação seguinte:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \beta \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0, \quad (1)$$

onde m representa a massa em kg , β é o coeficiente de amortecimento em kg/s , k a constante elástica da mola em N/m e x é o deslocamento do oscilador harmônico relativamente à sua posição de equilíbrio.

No entanto, o cálculo fracionário (CF) área que estuda as formulações de derivadas e integrais de ordens arbitrárias e suas aplicações, fornece a possibilidade de trabalhar esses mesmos fenômenos a partir de equações diferenciais ordinárias fracionárias, EDOFs. Mais precisamente, quando a modelagem fracionária é utilizada em uma equação diferencial que descreve um fenômeno físico, ao alterar a ordem da derivada espera-se encontrar uma descrição mais abrangente e refinada do fenômeno estudado.

Diferentemente do cálculo de ordem inteira, por vezes denominado de cálculo

clássico, não existe somente uma formulação dos operadores de derivação e integração do CF, uma vez que cada uma se adequa melhor a um contexto físico específico. Além disso, em [Kuroda, Tavoni e Camargo \(2015\)](#) é destacado que aparentemente o número de novas definições para derivadas e integrais fracionárias cresce cada vez mais, conforme o número de aplicações aumenta. Vale elencar as formulações de derivadas que mais se destacam nas aplicações, são elas: a de Riemann-Liouville, de Caputo, Grünwald-Letnikov, Riesz, Weyl e de Hilfer, sendo essa última o foco deste trabalho.

Historicamente, a formulação da derivada fracionária segundo Hilfer, ou apenas derivada de Hilfer, é considerada recente. Essa derivada recupera, para valores particulares de alguns parâmetros, as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo, além de recuperar também a de Weyl. No trabalho dos autores [Tomovski, Hilfer e Srivastava \(2010\)](#) são amplamente discutidas as soluções para algumas EDOs cujos operadores de derivação envolvidos seguem a formulação de Hilfer.

Diante do arcabouço teórico apresentado, é importante situar o estudo do oscilador harmônico via EDOs, ou melhor, o estudo do oscilador harmônico fracionário. Em [Bernal et al. \(2012\)](#) é proposta uma equação diferencial fracionária para descrever o oscilador harmônico simples e também o amortecido quando a ordem das derivadas é dada por uma constante 2γ tal que $0 < \gamma \leq 1$. Outra abordagem pode ser encontrada em [Rodrigues e Oliveira \(2015\)](#) em que a EDO correspondente ao modelo clássico tem os operadores modificados por derivadas de ordens arbitrárias segundo a formulação de Caputo. Mais detalhes sobre essa formulação podem ser encontrados em [Samko, Kilbas e Marichev \(1993\)](#).

Ainda, em [Bernal et al. \(2012\)](#) é introduzido um parâmetro arbitrário σ de dimensão temporal, unidade de medida segundo, a fim de garantir que todas as quantidades tenham suas dimensões ajustadas conforme a ordem γ , permitindo, assim, estudar o comportamento das soluções para valores intermediários de γ , resgatando a interpretação física do cálculo clássico. Essa mesma estratégia também pode ser encontrada em [Nasrolahpour \(2012\)](#). Em [Bernal et al. \(2012\)](#) a equação toma a forma:

$$\frac{m}{\sigma^{2(1-\gamma)}} \frac{d^{2\gamma}x(t)}{dt^{2\gamma}} + \frac{\beta}{\sigma^{(1-\gamma)}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} + kx(t) = 0, \quad (2)$$

onde o operador de diferenciação $\frac{d^\mu}{dt^\mu}$ refere-se à derivada de ordem μ segundo Caputo.

Uma outra maneira de abordar o oscilador harmônico fracionário é apresentada em [Vaz e Oliveira \(2022\)](#) onde na EDO trabalhada é considerado somente o termo proporcional à derivada primeira como sendo fracionário enquanto mantém o termo $m \frac{d^2}{dt^2}$. Isso permite discutir a modelagem fracionária do amortecimento sem fracionar o termo correspondente a oscilação.

De todo modo, a fim de generalizar essas análises este trabalho tem como

objetivo geral estudar a EDOF que descreve o oscilador harmônico fracionário a partir da derivada de Hilfer, recuperando as soluções via derivadas de Caputo e Riemann-Liouville. Para isso, o presente estudo fará uso das já citadas contribuições de [Tomovski, Hilfer e Srivastava \(2010\)](#) e [Bernal et al. \(2012\)](#), bem como do método da transformada de Laplace inversa.

No Capítulo 1 é apresentada a transformada de Laplace e algumas de suas propriedades, além da aplicação desses conceitos para resolver a EDO correspondente ao problema clássico do oscilador harmônico.

Já no Capítulo 2, há a apresentação e discussão sobre uma classe especial de funções: as chamadas funções de Mittag-Leffler. Essas funções têm um papel fundamental no CF, uma vez que a solução de muitas EDOFs são dadas em termos delas.

O Capítulo 3 é dedicado à exposição das noções preliminares do CF, definindo as formulações de integrais e derivadas fracionárias que serão utilizadas no último capítulo e apresentando alguns resultados auxiliares.

No Capítulo 4 há o estudo de soluções particulares da EDOF que descreve o oscilador mecânico fracionário via derivada de Hilfer. Já nas Considerações finais são elencados e discutidos os principais resultados deste trabalho, bem como ideias para uma possível extensão deste estudo. Por fim, nas referências bibliográficas há a listagem das teses de doutorado, dissertações de mestrado, artigos e livros que auxiliaram na composição desta dissertação.

Capítulo 1

Oscilador harmônico: simples e amortecido

EDOs e equações diferenciais parciais (EDPs) descrevem a variação de determinadas grandezas em função do tempo. “Seja a corrente presente em um circuito elétrico, as oscilações de uma membrana que vibra, ou o fluxo de calor que atravessa um condutor fechado” (SCHIFF, 1999, p.1) essas equações, quando combinadas com suas condições iniciais, possibilitam uma descrição matemática do fenômeno físico. Esses problemas são conhecidos como problemas de valor inicial (PVI).

O PVI presente neste estudo se refere ao movimento oscilatório harmônico ilustrado, por exemplo, pelo movimento de uma massa ligada a uma mola, provocando nela deformações logitudinais, tração ou compressão. Para encontrar uma EDO que descreva esse movimento, usa-se alguns resultados conhecidos da mecânica newtoniana.

Inicialmente é preciso caracterizar esse movimento: trata-se da repetição do movimento de um corpo em relação a um referencial adotado de tal forma que a aceleração e a força resultante agindo sobre o corpo são proporcionais e opostas ao seu deslocamento. Nesse exemplo, a oscilação está associada à tensão e deformação que agem na mola e a razão entre elas é conhecida como módulo da elasticidade do material. “A tensão para produzir uma certa deformação depende da natureza do material (...) se o limite de proporcionalidade não é excedido, a razão entre tensão e deformação é constante” (YOUNG et al., 2003, p.142).

Para além desse exemplo, a deformação tratada pode ser de vários tipos: seja no aumento do comprimento da mola, na torção de uma barra ou tira de borracha, ou seja, para qualquer corpo elástico desde que respeite o limite de proporcionalidade. Rigorosamente, essa deformação é denominada de deformação elástica, posto que ela tende a desaparecer com a retirada das forças que a originaram. É interessante comentar

que, como destacado em [Bauer, Westfall e Dias \(2012\)](#), existem também deformações plásticas que, ao contrário das elásticas, persistem mesmo após a retirada das forças que a originaram.

Ao estudar sistemas elásticos, o físico inglês Robert Hooke (1660) percebeu que existia uma relação matemática entre o módulo da força aplicada e a deformação da mola: quanto maior era o peso de um corpo suspenso por uma mola, maior era a deformação sofrida por ela proporcionalmente, ou melhor, a lei de Hooke afirma que as forças deformantes são proporcionais às deformações elásticas produzidas. Dessa constatação segue que

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -kx(t),$$

onde m é massa do corpo em kg , k é a constante de proporcionalidade do material e $x(t)$ é o deslocamento em função do tempo t . Ao invés de $kx(t)$ no segundo membro, força que o objeto exerce na mola para causar deslocamento, usa-se $-kx(t)$ para indicar que se trata da força que o corpo elástico puxa o objeto preso a ele, isto é, trata-se de uma força restauradora. Admitindo um sistema de forças conservativas, ou seja, cujo trabalho realizado não depende da trajetória, pode-se afirmar que essa EDO descreve o movimento harmônico simples.

Entretanto, a fim de modelar sistemas cada vez mais complexos outras forças são adicionadas ao sistema, tal como aquelas que representam o amortecimento do movimento, ou atrito interno, isto é, as forças que estão relacionadas a uma das propriedades mais sensíveis de materiais e estruturas, permitindo que a energia mecânica de um sistema seja dissipada, sobretudo na forma de calor. Usualmente considera-se o amortecimento como viscoso, isso quer dizer que a força de atrito tende a ser proporcional à velocidade do corpo em questão, representando uma oposição ao sentido do movimento. Portanto, ao acrescentar a força de atrito proporcional a $-\frac{d}{dt}x(t)$, a EDO descreverá o movimento harmônico amortecido, chegando assim à Eq.(1).

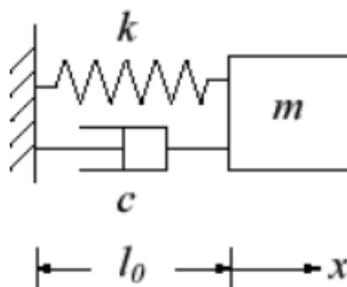


Figura 1 – Oscilador harmônico amortecido.

Em resumo, a Figura 1 caracteriza um sistema massa-mola que oscila na presença de um amortecedor viscoelástico, onde k é a constante elástica em N/m , l_0 é o

comprimento inicial da mola em metros, c é o coeficiente de amortecimento em kg/s , m é a massa do corpo em kg e x representa seu deslocamento em metros.

Uma vez apresentada a EDO a ser resolvida parte-se agora à metodologia necessária para resolvê-la.

1.1 Transformada de Laplace

O método da transformada de Laplace é uma ferramenta fundamental para resolver os PVIs, principalmente quando a EDO a ser estudada é linear e com coeficientes constantes, uma vez que reduz a questão a um problema algébrico. A EDO que descreve o oscilador harmônico amortecido pode ser resolvida por esse método. Para isso, é necessário antes definir a transformada de Laplace, a sua inversa e demonstrar algumas de suas propriedades.

Definição 1.1 (Schiff (1999)). *Conhecendo uma função $f(t)$ real ou complexa, definida para todo $t \geq 0$ e definindo também um parâmetro $s \in \mathbb{C}$ de tal forma que $Re(s) > 0$, então se a integral imprópria abaixo converge*

$$F(s) = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.1)$$

diz-se que $F(s)$ é a transformada de Laplace de f . Denota-se também $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

Vale destacar que a transformada de Laplace é uma transformada integral com núcleo $N(s, t) = e^{-st}$ e a existência dela é assegurada para uma classe de funções, conhecidas como funções admissíveis.

Definição 1.2. *Seja $f(t)$ uma função seccionalmente contínua no intervalo real $0 \leq t < \infty$. Dizemos que $f(x)$ é uma função de ordem exponencial se existem duas constantes positivas M e α , tais que para todo x , no intervalo $0 \leq t < \infty$, vale a desigualdade*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

Admite-se aqui que todas as funções $f = f(t)$ tratadas neste estudo são seccionalmente contínuas no intervalo $[0, \infty[$ e que todas serão de ordem exponencial quando $t \rightarrow \infty$. No teorema a seguir confirma-se a relação entre as funções de ordem exponencial e a existência da transformada de Laplace.

Teorema 1.1.1 (Zill (2012)). *Seja f uma função de ordem exponencial, isto é, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para M e α constantes reais positivas, então a transformada de Laplace de f , $\mathcal{L}[f(t)]$, existe para $Re(s) > \alpha$.*

Demonstração. Para demonstrar esse resultado deve-se escrever $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ em uma soma de duas parcelas

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^a e^{-st} f(t) dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (1.2)$$

sendo a uma constante real positiva.

A primeira parcela existe, uma vez que f é seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t < b$ para qualquer b real positivo, neste caso $b = a$. Já para a segunda parcela tem-se:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^\infty e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_a^\infty |e^{-st} f(t)| dt \\ &\leq \int_a^\infty e^{-st} M e^{\alpha t} dt = \\ M \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b e^{(\alpha-s)t} dt &= M \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{(\alpha-s)b} - e^{(\alpha-s)a}}{\alpha - s}. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{Re}(s) > \alpha$, a segunda parcela é uma integral que converge e

$$\left| \int_a^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq M \frac{-e^{(\alpha-s)b}}{\alpha - s}, \quad (1.3)$$

ou seja, a transformada de f existe. ■

Proposição 1.1.1. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções de ordens exponenciais α e β respectivamente no intervalo $[0, \infty[$. Sejam a e b duas constantes e $af(t) \pm bg(t)$ uma função de ordem exponencial α maior ou igual a $\max\{\alpha, \beta\}$ então*

$$\mathcal{L}[af(t) \pm bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] \pm b\mathcal{L}[g(t)]. \quad (1.4)$$

Demonstração. De fato, pela definição da transformada de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[af(t) \pm bg(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} (af(t) \pm bg(t)) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} (af(t)) dt \pm \int_0^\infty e^{-st} (bg(t)) dt \\ &= a \int_0^\infty e^{-st} (f(t)) dt \pm b \int_0^\infty e^{-st} (g(t)) dt \\ &= a\mathcal{L}[f(t)] \pm b\mathcal{L}[g(t)], \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

A linearidade da transformada de Laplace é essencial para deduzir muitas outras propriedades associadas a ela. Por exemplo, a transformada de Laplace da função $f(t) = \operatorname{sen}(at)$, onde a é uma constante real, pode ser obtida através da linearidade da transformada de Laplace. Note que

$$F(s) = \mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)] = \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen}(at) dt = \frac{1}{2i} \int_0^\infty [e^{-t(s-ia)} - e^{t(s+ia)}] dt.$$

Ainda, pode-se escrever a transformada de Laplace de uma função exponencial como

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{(-s+a)t} dt = \frac{1}{s-a}, \quad s > a. \quad (1.5)$$

Assim, usando agora esse resultado juntamente da linearidade da transformada de Laplace, tem-se que

$$F(s) = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right] = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

$$\text{Analogamente, } \mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

1.1.1 Transformada de Laplace inversa

Sabendo que para as funções f de ordem exponencial existe $F = F(s)$, resta questionar: dada uma função $G = G(s)$ é possível garantir que existe $g(t)$ tal que $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$?

Vale frisar que o processo para encontrar a transformada de Laplace inversa faz uso do plano complexo. Além disso, como o objetivo deste trabalho é encontrar soluções particulares para EDOs lineares, é compreensível que a resposta para a pergunta acima seja positiva.

De fato, admite-se que as transformadas inversa e direta de Laplace são inversas uma da outra e, conhecendo a transformada de Laplace para determinadas funções, pode-se, através de manipulações algébricas e de algumas propriedades, encontrar a transformada inversa da função desejada. A notação usada é

$$f(t) \div F(s)$$

onde $f(t)$ é a função original e $F(s)$ sua transformada. O símbolo \div nesse contexto indica que o primeiro membro é a transformada de Laplace inversa do segundo membro.

A Figura 2 apresenta um diagrama que ilustra o procedimento para resolver uma EDO com coeficientes constantes via transformada de Laplace e sua inversa.

Por outro lado, se $F(s)$ é a transformada de Laplace de uma função f admissível de ordem exponencial α , vale a expressão

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (1.6)$$

onde γ é um número complexo arbitrário tal que $Re(\gamma) > \alpha$. Essa expressão é uma integral complexa calculada ao longo de uma reta paralela ao eixo y que passa pelo ponto $(\gamma, 0)$. A Eq.(1.6) também é conhecida como fórmula integral de Bromwich: trata-se da generalização

$$\begin{aligned} \frac{as + b}{(s + c)^2 + d} &= \frac{as}{(s + c)^2 - d} + \frac{b}{(s + c)^2 - d} \\ &= \frac{as}{[s - (c - \sqrt{d})][s - (c + \sqrt{d})]} + \frac{b}{[s - (c - \sqrt{d})][s - (c + \sqrt{d})]}. \end{aligned}$$

Introduzindo a notação $\lambda_1 = c - \sqrt{d}$ e $\lambda_2 = c + \sqrt{d}$ tem-se para o segundo membro da expressão precedente

$$\frac{as}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} + \frac{b}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}. \quad (1.11)$$

Diante disso, deve-se usar a linearidade da transformada de Laplace e o produto de convolução para cada uma das parcelas. De fato, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{b}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \right] &= b \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - \lambda_1} \right] * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - \lambda_2} \right] \\ &= b \int_0^t e^{\lambda_1 \tau} e^{\lambda_2(t-\tau)} d\tau = b e^{\lambda_2 t} \int_0^t e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau} d\tau = b e^{\lambda_2 t} \left(\frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \\ &= \frac{b}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \end{aligned}$$

De forma semelhante, obtém-se

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{as}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \right] = \frac{a}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}). \quad (1.12)$$

Logo, a função cuja transformada é dada pela Eq.(1.11) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{as + b}{(s + c)^2 - d} \right] &= \left(\frac{-ac + a\sqrt{d} - b}{2\sqrt{d}} \right) e^{-(c - \sqrt{d})t} + \left(\frac{ac + a\sqrt{d} + b}{2\sqrt{d}} \right) e^{-(c + \sqrt{d})t}, \\ \text{sejam } \frac{-ac + a\sqrt{d} - b}{2\sqrt{d}} &= C_1 \text{ e } \frac{ac + a\sqrt{d} + b}{2\sqrt{d}} = C_2, \text{ tem-se} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{as + b}{(s + c)^2 - d} \right] = e^{-ct} (C_1 e^{-\sqrt{d}t} + C_2 e^{\sqrt{d}t}), \quad (1.13)$$

que é o resultado desejado.

1.1.2 Propriedades da transformada de Laplace

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades fundamentais da transformada de Laplace para a resolução das equações diferenciais, em particular, no caso do

oscilador harmônico, objetivo deste trabalho. Além disso, será calculada a transformada de Laplace de algumas funções auxiliares como, por exemplo, a função de Heaviside e a delta de Dirac, ou simplesmente δ de Dirac, sendo assim, antes de prosseguir é crucial defini-las.

Definição 1.3 (Tonidandel e Araújo (2015)). *Seja $a \in \mathbb{R}$. A função de Heaviside, ou degrau unitário, é definida como*

$$H(t - a) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > a \\ \frac{1}{2} & \text{se } t = a \\ 0 & \text{se } t < a \end{cases} \quad (1.14)$$

essa função tem descontinuidade em $t = a$ e se mostra bastante útil para diversos estudos, mas destaca-se em particular o estudo de processos de liga/desliga, por exemplo, o crescimento gradual na voltagem ou corrente de um circuito.

Definição 1.4 (Dutra, Ribeiro e Porto (2018)). *Seja $a \in \mathbb{R}$. A função δ de Dirac, ou simplesmente função δ , é definida satisfazendo as seguintes condições*

$$\begin{aligned} \delta(t - a) &= 0, \text{ se } t \neq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1, \end{aligned} \quad (1.15)$$

muito embora seja chamada pelo nome de “função”, a δ de Dirac não é uma função como tradicionalmente se define, mas sim um funcional linear.

Ainda,

na realidade, hoje em dia já se sabe que a resposta para a questão “o que é uma função?” é bem mais simples. Uma função $f(t)$ pode ser entendida simplesmente como uma regra que associa a cada valor de t um valor de f (...). Logo, afirmar que o delta de Dirac não seja uma função simplesmente pelo fato de não ser possível traçá-la à mão não é suficiente. Em verdade, pode-se dizer que o delta de Dirac pertence a uma classe mais geral de funções, chamadas funcionais. (TONIDANDEL; ARAÚJO, 2015, p.4).

Enquanto uma função, no sentido clássico, associa um elemento do domínio a um único elemento do contradomínio, o funcional linear tem como domínio um espaço vetorial e seu contradomínio um conjunto numérico. Isso significa que “o funcional $\delta(t)$ e os números associados com ele não fazem sentido algum de maneira independente, (...) apenas possuem significado dentro do sinal de integração” (TONIDANDEL; ARAÚJO, 2015, p.5).

Além disso, a δ de Dirac apresenta diversas propriedades interessantes envolvendo transformadas integrais, porém, neste estudo serão retomadas duas delas: a primeira a propriedade de filtragem, ou seja, por normalização à unidade, como definida a função

de Heaviside, $\int_0^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt = f(a)$ e a segunda a respectiva transformada de Laplace, $\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-sa}$. Para mostrar esses dois resultados deve-se usar o fato de que a δ de Dirac é nula quando $t \neq a$, dessa forma, alterando os limites de integração para $a - \epsilon$ e $a + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e sabendo que $f(t)$ é contínua em $t = a$ então na vizinhança $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ de a seu valor tende a $f(a)$, conseqüentemente segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t-a)f(t)dt \approx f(a) \underbrace{\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t-a)dt}_{=1} = f(a),$$

já no que diz respeito à segunda propriedade basta usar o produto de convolução de Laplace juntamente da propriedade de filtragem, tem-se que

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = \int_0^{\infty} \delta(t-a)e^{-st}dt = e^{-as}.$$

Pode-se compreender também a $\delta(t)$ como elemento neutro da operação produto de convolução de Laplace. Um bom jeito de ilustrar a aplicabilidade da função δ de Dirac é imaginar problemas envolvendo impulso, ou seja, uma força de módulo grande aplicada durante um período muito pequeno de tempo. Esse contexto pode ser estendido para outros exemplos, tais como a modelagem da seguinte situação: uma criança sendo periodicamente impulsionada em um balanço.

Para descrever a força externa que provoca esse “trem de impulsos” de mesma intensidade e sentido é preciso definir a distribuição chamada de *pente de Dirac*. Seja J_0 a intensidade de cada impulso dado, então a intensidade da força F é representada pela distribuição

$$F(t) = J_0 \sum_{n=1}^N \delta(t - n\tau), \quad (1.16)$$

sendo τ o intervalo de tempo de cada empurrão e N o número de empurrões.

Ademais, uma discussão mais detalhada sobre a pente de Dirac e outras distribuições que são usadas nas transformações integrais pode ser encontrada em [Strichartz \(2003, p.77-78\)](#).

Essa descrição matemática será útil para os próximos capítulos, devido às propriedades da transformada de Laplace associadas a essas funções.

Proposição 1.1.2. *Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$, então $f(t-a)H(t-a)$ é a transformada inversa de $e^{-as}F(s)$, ou seja,*

$$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s), \quad a > 0.$$

Demonstração. Recorrendo à definição da transformada de Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] &= \int_0^{\infty} H(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \\ &= \int_0^a H(t-a)f(t-a)e^{-st}dt + \int_a^{\infty} H(t-a)f(t-a)e^{-st}dt,\end{aligned}$$

mas como $H(t-a)$ é nula para $t < a$ e um para $t > a$ então, tomando $p = t - a$ obtém-se

$$\begin{aligned}\int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st}dt &= \int_a^{\infty} f(p)e^{-s(p+a)t}dp \\ &= e^{-as} \int_0^{\infty} f(p)e^{-sp}dp = \mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s),\end{aligned}$$

que é o resultado esperado. ■

Proposição 1.1.3. *Sejam $f(t), f'(t) \dots, f^{(n-1)}(t)$ funções contínuas em $[0, \infty[$, de ordem exponencial de tal forma que a n -ésima derivada de f seja contínua por partes em $[0, \infty[$, assim*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0^+), \quad (1.17)$$

onde $f^{(k)}(0^+)$ é o limite da k -ésima derivada de f quando $t \rightarrow 0^+$.

Demonstração. Esse resultado pode ser demonstrado através de indução sobre n . Para $n = 1$ tem-se

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt.$$

Integrando por partes basta tomar $u = e^{-st}$ e $dt = f'(t)dt$, isso implica que $du = -se^{-st}dt$ e $v = f(t)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= uv - \int v du = e^{-st} \left(\lim_{w \rightarrow +\infty} f(t)|_0^w \right) + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}[f(t)] = sF(s) - f(0^+).\end{aligned}$$

Supondo que a proposição seja verdadeira para $n = k \geq 1$, isto é,

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k F(s) - s^{k-1} f(0^+) - s^{k-2} f(0^+) - \dots - f^{(k-1)}(0^+)$$

então para $n = k + 1$ observa-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(k+1)}(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f^{(k+1)}(t) dt = e^{-st} \lim_{w \rightarrow +\infty} f^{(k)}(t) |_0^w + s \int_0^w e^{-st} f^{(k)}(t) dt \\ &= -f^{(k)}(0^+) + s\mathcal{L}[f^{(k)}(t)].\end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução

$$\begin{aligned} & -f^{(k)}(0) + s \left(s^k F(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-1-i} f^{(i)}(0^+) \right) \\ &= -f^{(k)}(0) + s^{k+1} F(s) - \sum_{i=0}^k s^{k-i} f^{(i)}(0^+) \\ &= s^{k+1} F(s) - \sum_{i=0}^k s^{k-i} f^{(i)}(0^+), \end{aligned}$$

pelo princípio da indução o resultado é válido. ■

Proposição 1.1.4. *Seja $f(t)$ em função admissível e $t > 0$. Então,*

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s). \quad (1.18)$$

Demonstração. Seja $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, então $g'(t) = f(t)$. Pode-se escrever para a transformada de Laplace da derivada primeira

$$\mathcal{L} [g'(t)] = s\mathcal{L} [f(t)] - g(0^+).$$

Como $g(0) = 0$, conclui-se que

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L} [g'(t)] = \frac{1}{s} F(s),$$

que é o resultado desejado. ■

A fim de mostrar a aplicabilidade dos conceitos apresentados neste capítulo, é importante discutir um caso particular de EDO com condição inicial, isto é, um PVI dado por

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = \delta(t - 2), \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Para resolver esse PVI, recorre-se às propriedades apresentadas. Assim, aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$\mathcal{L} [y'(t) - y(t)] = \mathcal{L} [\delta(t - 2)].$$

Recorrendo ao fato de que a transformada de Laplace é linear,

$$\mathcal{L} [y'(t)] - \mathcal{L} [y(t)] = \mathcal{L} [\delta(t - 2)],$$

em adição a isso, usando a **Proposição 1.1.3** e introduzindo a notação $Y(s) = \mathcal{L} [y(t)]$, segue que

$$sY(s) - y(0) - Y(s) = e^{-2s} \Leftrightarrow (s - 1)Y(s) = e^{-2s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s - 1}.$$

Por fim, para encontrar $y(t)$ basta usar a **Proposição 1.3**, de onde segue

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{e^{-2s}}{s-1} \Leftrightarrow e^{-2s} \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}[H(t-2)e^{t-2}],$$

ou seja, $y(t) = H(t-2)e^{t-2}$.

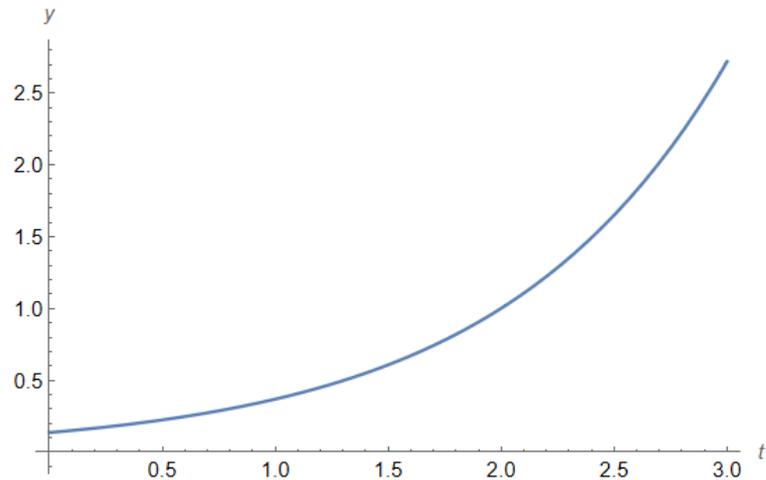


Figura 3 – Função $y(t) = e^{t-2}$

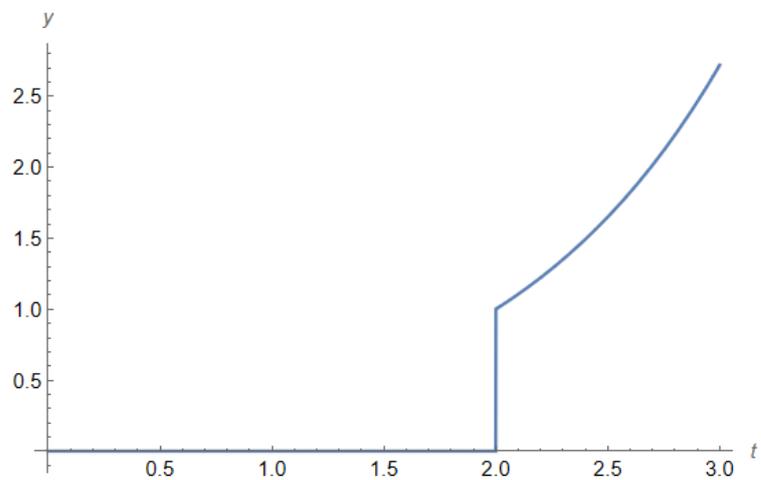


Figura 4 – Solução do PVI da Eq.(1.19)

Note nas Figuras 3 e 4 que a curva que descreve a solução da EDO é a curva que representa a função $y(t) = e^{t-2}$ sob ação da função de Heaviside. Percebe-se que o fator $H(t-2)$ faz com que y seja identicamente nula para valores inferiores a 2, mas para valores de t maiores que 2 a curva segue o comportamento da exponencial crescente.

1.2 Oscilador harmônico amortecido e a transformada de Laplace

Como exposto anteriormente no início deste capítulo: quando um corpo de massa m descreve uma trajetória e, após um determinado intervalo de tempo ele repete essa trajetória diz-se que seu movimento é periódico. A fim de compreender essa dinâmica é preciso definir um referencial (posição de equilíbrio), e determinar o período T de oscilação (tempo gasto pelo corpo para voltar aos mesmos pontos da trajetória), a frequência f (o inverso numérico do período $f = \frac{1}{T}$) e a função horária do seu deslocamento $x(t)$.

Dois casos são especialmente estudados: o movimento harmônico simples (MHS) cuja partícula que oscila recebe o nome de oscilador harmônico simples e o movimento harmônico amortecido que constituem modelos físicos fundamentais para estudar diversos casos de oscilações mecânicas. Diferente do presente estudo, em [Nussenzveig \(2013, p.120\)](#) a função $x(t)$ no MHS é determinada a partir da análise da conservação da energia associada ao sistema massa-mola, visto que “a energia total \mathcal{E} mantém-se constante, oscilando entre a forma cinética e a forma potencial” ([NUSSENZVEIG, 2013, p.121](#)). Contudo, para fazer uso das propriedades aqui discutidas, a função horária será determinada a partir do equacionamento das forças atuantes na partícula e suas condições iniciais de posição e de velocidade, em síntese, a resolução de um PVI.

Ainda, tradicionalmente não é necessário fazer uso das transformadas de Laplace para determinar a função $x(t)$ nesses modelos, uma vez que basta conhecer soluções particulares linearmente independentes, como consequência a solução geral será uma combinação linear delas. Entretanto, a fim de estender a ideia para as soluções das EDOFs seguintes aqui será apresentada a solução do oscilador harmônico amortecido via transformada de Laplace e a do oscilador harmônico simples como um caso particular quando não há amortecimento.

1.2.1 Solução do oscilador harmônico amortecido

Retomando à Eq.(1) é possível encontrar a função horária $x(t)$ do deslocamento da partícula no sistema. Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros da equação, tem-se

$$\mathcal{L} \left[\frac{m d^2 x(t)}{dt^2} \right] + \mathcal{L} \left[\beta \frac{dx(t)}{dt} \right] + \mathcal{L} [kx(t)] = 0,$$

ou ainda, na forma

$$m \mathcal{L} \left[\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right] + \beta \mathcal{L} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] + k \mathcal{L} [x(t)] = 0.$$

Pela **Proposição 1.1.3** pode-se escrever

$$ms^2X(s) - msx_0 - m\dot{x}_0 + \beta sX(s) - \beta x_0 + kX(s) = 0$$

que é uma equação algébrica em $X(s)$ cuja solução é dada por

$$X(s) = \frac{msx_0 + m\dot{x}_0 + \beta x_0}{ms^2 + \beta s + k} = \frac{msx_0 + m\dot{x}_0 + \beta x_0}{m\left(s + \frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4m} + k}.$$

Aplicando a transformada inversa e conhecendo as soluções via Eq.(1.13) é possível obter a solução geral da EDO, logo

$$x(t) = e^{\frac{-\beta}{2m}t} \left[C_1 e^{\left(\sqrt{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\sqrt{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \right], \quad (1.20)$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Vale a pena ressaltar que a relação entre β^2 e $4mk$ pode revelar bastante sobre o movimento, dado que a razão $\frac{\beta^2}{4m^2}$ está em uma raiz quadrada subtraída por uma parcela $\frac{k}{m}$. Assim, será feita uma análise dividindo-a em três possibilidades, a saber:

1. se $\beta^2 < 4mk \Rightarrow \frac{\beta^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$, então

$$x(t) = e^{\frac{-\beta}{2m}t} \left[C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}t} \right].$$

Diante desse resultado é essencial usar a relação de Euler, isto é, para um argumento θ vale a igualdade $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Note também que o radical que aparece nas exponenciais pode ser compreendido como a frequência da oscilação. Assim, a fim de sintetizar a notação usa-se para a frequência natural do oscilador harmônico simples $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e para a frequência do oscilador amortecido $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}$. Decorre que

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\frac{-\beta}{2m}t} [C_1 (\cos(\omega t) + \text{sen}(\omega t)) + C_2 (\cos(\omega t) - \text{sen}(\omega t))] \\ &= e^{\frac{-\beta}{2m}t} [(C_1 + C_2) \cos(\omega t) + (C_1 - C_2) \text{sen}(\omega t)], \end{aligned}$$

sendo $A = C_1 + C_2$ e $B = C_1 - C_2$ constantes, tem-se

$$x(t) = e^{\frac{-\beta}{2m}t} (A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t)).$$

Ainda, a solução para esse caso pode escrita como $x(t) = A_0 e^{\frac{-\beta}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$, onde A_0 e ϕ representam respectivamente a amplitude e a fase iniciais da oscilação.

A solução é o produto de uma combinação linear de senos e cossenos, que representa a oscilação, por uma exponencial decrescente, que representa o amortecimento. A classificação atribuída para esse caso é de *oscilador harmônico subamortecido*, pois o termo de amortecimento é pequeno em relação à frequência natural ω_0 . Ademais, é possível recuperar também o oscilador harmônico simples, basta fixar $\beta = 0$, assim:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

2. se $\beta^2 > 4mk \Rightarrow \frac{\beta^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$ isso implica que o radicando é positivo, ou melhor, tratam-se de exponenciais puras (sem a unidade imaginária i no expoente), repare que

$$x(t) = e^{\frac{-\beta}{2m}t} (C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t}) = C_1 e^{(-\omega - \frac{\beta}{2m})t} + C_2 e^{(-\omega + \frac{\beta}{2m})t},$$

com C_1 e C_2 constantes. Ainda mais, pode-se expressar $x(t)$ em termos das funções seno e cosseno hiperbólicos.

Esse caso é chamado de *oscilador harmônico superamortecido*, posto que o termo de amortecimento é grande em relação à frequência natural ω_0 .

3. se $\beta^2 = 4mk \Rightarrow \frac{\beta^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$ a frequência ω se anula. Contudo, a solução encontrada a partir da Eq.(1.20) é somente uma solução particular para esse caso, visto que as duas funções exponenciais são linearmente dependentes, ou seja, podem ser escritas como um múltiplo uma da outra. Para isso é indispensável encontrar uma outra solução linearmente independente, essa solução é obtida como o produto do fator exponencial pela variável t , mais precisamente: a função $x(t)$ é dada como o produto de uma exponencial por um polinômio do primeiro grau, obtém-se

$$x(t) = e^{\frac{-\beta}{2m}t} (C_1 + C_2 t),$$

com C_1 e C_2 constantes.

Esse caso é chamado de *oscilador harmônico crítico amortecido*. Assim, um sistema de amortecimento crítico sofre a perturbação inicial, mas retorna à posição de equilíbrio sem oscilar.

A Figura 5 ilustra cada um dos casos de oscilações amortecidas, bem como a oscilação sem amortecimento. Note que no oscilador subamortecido a solução apresentada mantém a solução combinada de amortecimento, enquanto nos demais casos, com exceção do MHS, o amortecimento é predominante em relação à oscilação. Note também que nos três casos as constantes C_1 e C_2 que aparecem na solução são determinadas pelas condições iniciais.

Para além de encontrar a solução da EDO, é fundamental comentar também sobre o balanço de energia mecânica total do sistema, denotando-a pelo símbolo \mathcal{E} . Sabe-se

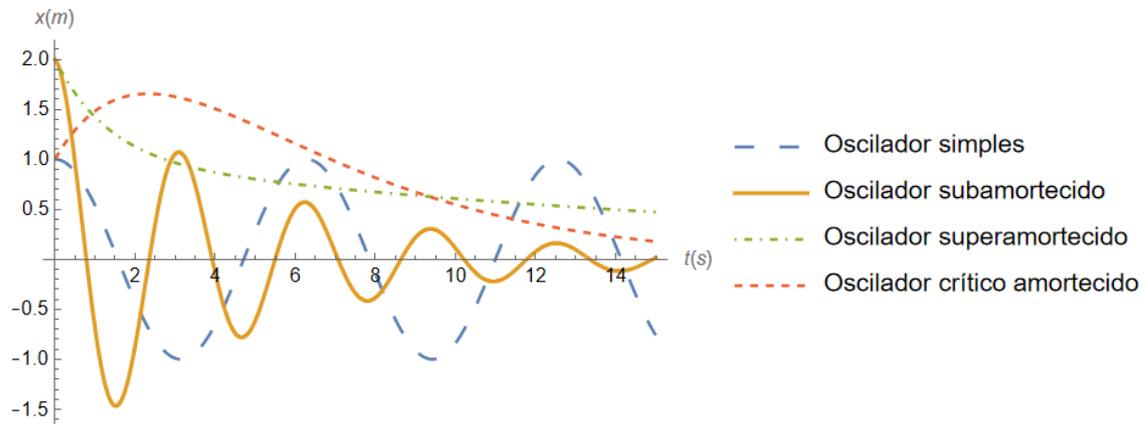


Figura 5 – $x(t)$ para todos os casos de oscilação simples ou amortecida.

que a energia mecânica é dada pela soma da energia cinética com a energia potencial, neste caso elástica, ou seja:

$$\mathcal{E} = \frac{m(v(t))^2}{2} + \frac{k(x(t))^2}{2},$$

onde $v(t) = \dot{x}(t)$ e $k = m\omega^2$. Para o oscilador subamortecido nota-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \left[m\omega^2 A_0^2 e^{\frac{-\beta}{m}t} \sin^2(\omega t + \phi) + k A_0^2 e^{\frac{-\beta}{m}t} \cos^2(\omega t + \phi) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(k A_0^2 e^{\frac{-\beta}{m}t} \right) \left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi) \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Logo, pela relação fundamental da trigonometria,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{\frac{-\beta}{m}t}. \quad (1.22)$$

Assim, verifica-se que a energia total do sistema não se conserva, em outras palavras, a energia é dissipada por uma exponencial decrescente conforme o tempo passa. Tal efeito é esperado, já que a força de atrito é uma força dissipativa.

Capítulo 2

As funções de Mittag-Leffler

Assim como no cálculo clássico as soluções de muitas EDOs são expressas em termos de exponenciais, no CF as funções de Mittag-Leffler desempenham um papel semelhante na solução das EDOs lineares de coeficientes constantes. Além de generalizar a função exponencial, essas funções possuem propriedades interessantes relacionadas à operação de derivação e integração fracionárias, como será exposto no próximo capítulo.

Conforme mais publicações são feitas na área do CF, surge a necessidade de generalizar essas funções cada vez mais: neste trabalho serão discutidas as funções de Mittag-Leffler de um, dois e três parâmetros. Entretanto, há generalizações dessas funções para n parâmetros, onde $n \in \mathbb{N}$, em particular, uma generalização de seis parâmetros foi proposta por [Salim e Faraj \(2012\)](#). Mais detalhes sobre a função de Mittag-Leffler podem ser encontrados em [Teodoro \(2014, p.18-39\)](#).

2.1 Funções de Mittag-Leffler de um parâmetro

A função de Mittag-Leffler proposta por [Mittag-Leffler \(1903\)](#) generaliza a função exponencial a partir da introdução de um parâmetro α e é definida por meio de uma série de potências cujos termos envolvem a função gama. Diante disso, cabe então definir também a função gama, bem como outras funções auxiliares.

Definição 2.1.1 ([Camargo \(2009\)](#)). *Dada a integral imprópria*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

tal que $\text{Re}(z) > 0$, define-se $\Gamma(z)$ como a função gama do número complexo z .

Note que a função gama possui singularidade para $z \in \mathbb{Z}_-$. Além disso, através da substituição de variável $z = y + 1$ e da integração por partes tem-se

$$\begin{aligned}\Gamma(y+1) &= \int_0^{\infty} t^y e^{-t} dt \\ \Gamma(y+1) &= \int_0^{\infty} t^y e^{-t} dt = y\Gamma(y).\end{aligned}$$

Note que para $y = n \in \mathbb{N}$ a relação retoma a função fatorial,

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Vale a pena mencionar também a função gama incompleta: é definida pela mesma integral, mas alterando o intervalo de integração,

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (2.2)$$

No entanto, essa não é a única forma de se pensar em uma generalização para o fatorial. A chamada fórmula de Stirling estabelece uma relação assintótica para o fatorial de um número, ou melhor, uma aproximação da função gama para argumentos assintoticamente grandes, neste trabalho utiliza-se a fórmula da seguinte maneira:

$$\Gamma(z + \alpha) \approx \sqrt{2\pi} z^{z+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-z}, \quad (2.3)$$

para $|z| \rightarrow \infty$ e $\alpha < \infty$.

Em [Mortici \(2010\)](#) essa e outras fórmulas assintóticas para a função gama são discutidas e demonstradas detalhadamente.

Definição 2.1 ([Camargo \(2009\)](#)). A função beta denotada por $B(p, q)$ onde $\text{Re}(p) > 0$ e $\text{Re}(q) > 0$, é definida pela integral definida

$$\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (2.4)$$

ou ainda adotando a variável $t = \sin^2(\theta)$ a função pode ser escrita como

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}(\theta) \cos^{2q-1}(\theta) d\theta. \quad (2.5)$$

Teorema 2.1.1 ([Oliveira \(2019\)](#)). Sejam $\text{Re}(p) > 0$ e $\text{Re}(q) > 0$, a seguinte relação entre as funções gama e beta é válida

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (2.6)$$

Demonstração. Considere o seguinte produto:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{p-1} du \int_0^{\infty} e^{-v} v^{q-1} dv = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u-v} u^{p-1} v^{q-1} dudv.$$

Ao introduzir a mudança de variável $u = x^2$ e $y = v^2$, decorre que:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy,$$

introduzindo as coordenadas polares $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$ obtém-se

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr \right) \underbrace{\left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta \right)}_{=B(p,q)} \\ &= \Gamma(p)\Gamma(q) = 2B(p, q) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr. \end{aligned}$$

Por fim, uma outra mudança de variável $t = r^2$ permite escrever

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p, q) \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{p+q-1} dt}_{\Gamma(p+q)} \Rightarrow B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

que é o resultado desejado. Ainda, desse resultado observa-se também a simetria da função beta, isto é, $B(p, q) = B(q, p)$. ■

Definição 2.1.2 (Oliveira (2014)). [Função de Mittag-Leffler de um parâmetro] Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$ e $z \in \mathbb{C}$ então a série

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{2.7}$$

define a função de Mittag-Leffler de parâmetro α .

Como a função de Mittag-Leffler é definida por meio de uma série de potências então ela tem como domínio todos os valores de z para os quais a série converge.

Para investigar sua convergência vale a pena mencionar o teste da razão para séries de funções, especificamente: sejam a_k a k -ésima parcela da série em questão e $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$, o teste afirma que se $L < 1$ a série é absolutamente convergente (e portanto convergente), se $L > 1$ a série é divergente e se $L = 1$ o teste é inconclusivo, ou seja, será necessário uma investigação mais apurada da série em questão.

No caso da função de Mittag-Leffler $a_k = \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$. Dessa forma,

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}}{\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |z| \left| \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |z| \left| \frac{\alpha k}{\alpha(k+1)} \right| \left| \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \right|,$$

repare o fator $\frac{\alpha k}{\alpha(k+1)} \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow \infty$.

Agora, para analisar o quociente entre as funções gama pode-se recorrer à aproximação de Stirling, Eq.(2.3), pois como $k \rightarrow \infty$ então $|\alpha k| \rightarrow \infty$, o que quer dizer que:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} |z| \left| \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \right| \approx \lim_{k \rightarrow \infty} |z| \left| \frac{\sqrt{2\pi} (\alpha k)^{\alpha k - \frac{1}{2}} e^{-\alpha k}}{\sqrt{2\pi} (\alpha k)^{\alpha k + \alpha - \frac{1}{2}} e^{-\alpha k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |z| |(\alpha k)^{-\alpha}|$$

Perceba que se $Re(\alpha) < 0$ então $L \rightarrow \infty$ conforme $k \rightarrow \infty$, o que implica que a série é divergente em todo o plano complexo (exceto para $z = 0$), porém se $Re(\alpha) = 0$ tem-se $L = |z|$, isto é, a série será convergente somente para $|z| < 1$, apenas para pontos interiores a um círculo de raio um e centrado na origem do plano complexo. Assim, a condição $Re(\alpha) > 0$ fica bem justificada, pois neste caso $L = 0$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$, tornando a série $E_\alpha(\cdot)$ convergente e, conseqüentemente, a função de Mittag-Leffler de um parâmetro bem definida para todo o plano complexo.

Mostra-se agora que as funções de Mittag-Leffler de um parâmetro $0 \leq \alpha \leq 1$ interpolam as funções exponencial e $\frac{1}{1-x}$, para $x \in \mathbb{R}$.

Por definição da função de Mittag-Leffler de um parâmetro para $\alpha = 0$ tem-se:

$$E_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(0k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

como $E_0(\cdot)$ só converge para $x < 1$ retoma-se aqui a série geométrica

$$E_0(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Notavelmente, agora para $\alpha = 1$, tem-se

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Sendo assim, para $0 \leq \alpha \leq 1$ e $x < 1$

$$\begin{aligned} \frac{x^k}{k!} &\leq \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \leq x^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\ &\Leftrightarrow e^x \leq E_\alpha(x) \leq \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Proposição 2.1.1. *Sejam $z \in \mathbb{C}$ e α um parâmetro real, então*

$$E_{2\alpha}(z) = \frac{1}{2} \left(E_\alpha(z^{\frac{1}{2}}) + E_\alpha(-z^{\frac{1}{2}}) \right). \quad (2.8)$$

Demonstração. Basta desenvolver as séries $E_\alpha(z^{\frac{1}{2}})$ e $E_\alpha(-z^{\frac{1}{2}})$, tem-se

$$E_\alpha(z^{\frac{1}{2}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = 1 + \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{z^1}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots$$

e

$$E_\alpha(-z^{\frac{1}{2}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = 1 - \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{z^1}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots,$$

somando ambas, obtém-se

$$E_\alpha(z^{\frac{1}{2}}) + E_\alpha(-z^{\frac{1}{2}}) = 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2\alpha k + 1)} \right) = 2E_{2\alpha}(z), \quad (2.9)$$

o que encerra a demonstração. ■

Como já mencionado, será mostrado que a função de Mittag-Leffler de um parâmetro recupera várias funções elementares, dentre elas, aqui, recupera-se o cosseno trigonométrico e o cosseno hiperbólico.

Com algumas mudanças de variável e recorrendo à **Proposição 2.1.1**, obtém-se

$$E_2(-z^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x)^{2k}}{(2k)!} = \cos(z)$$

bem como também,

$$E_2(x^2) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!}}{2} = \frac{e^x + e^{-z}}{2} = \cosh(z).$$

2.2 Funções de Mittag-Leffler de dois parâmetros

Para prosseguir o estudo das funções de Mittag-Leffler é indispensável discutir a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros introduzida por [Wiman \(1905\)](#).

Definição 2.2 ([Teodoro \(2014\)](#)). *Seja $E_{\alpha,\beta}(z)$ uma função complexa com dois parâmetros complexos α e β tais que $Re(\alpha) > 0$, $\beta \in \mathbb{C}$ e*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (2.10)$$

a série $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ é denominada de função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

Além disso, para $\beta = 1$ obtém-se a função de Mittag-Leffler de um parâmetro: $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$. Observa-se também que a introdução do parâmetro β em nada altera o domínio da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros em relação a de um parâmetro,

uma vez que a série que a define continua sendo convergente em todo o plano complexo quando $Re(\alpha) > 0$ e $\beta \in \mathbb{C}$.

Em analogia à função de Mittag-Leffler de um parâmetro, pode-se recuperar várias funções elementares a partir da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Assim, as funções elementares $\text{sen}(z)$ e $\text{senh}(z)$ também podem ser recuperadas pelas funções de Mittag-Leffler, isto é,

$$E_{2,2}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}{z} = \frac{\text{sen}(z)}{z}$$

$$E_{2,2}(z^2) = E_{2,2}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}{z} = \frac{\text{senh}(z)}{z}.$$

Outras relações clássicas que recorrem à função exponencial podem ser associadas à função de Mittag-Leffler. Um bom exemplo é a relação de Euler para a forma trigonométrica de um número complexo: sabe-se que para um número complexo $|z| = 1$ de argumento θ tem-se $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$ onde i representa a unidade imaginária. No trabalho de [Xiao-Jun \(2011\)](#) a mesma relação é generalizada usando funções trigonométricas fracionárias, ou seja, funções de Mittag-Leffler que recuperam para determinados parâmetros as funções $\cos(\theta)$ e $\text{sen}(\theta)$.

De acordo com o autor, para $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$E_{\alpha,1}(i^\alpha z^\alpha) = \cos_\alpha(z^\alpha) + i^\alpha \text{sen}_\alpha(z^\alpha) \tag{2.11}$$

onde

$$\cos_\alpha(z^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2\alpha k}}{\Gamma(2\alpha k + 1)} = E_{2\alpha,1}(-z^{2\alpha})$$

e

$$\text{sen}_\alpha(z^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{(2k+1)\alpha}}{\Gamma(2(k+1)\alpha + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{(2k+1)\alpha}}{\Gamma(2\alpha k + \alpha + 1)} = z^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(-z^{2\alpha}).$$

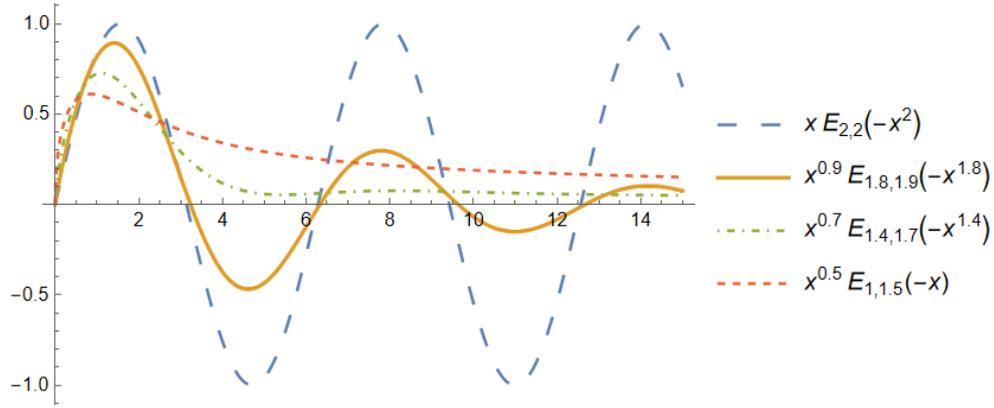
A partir dessas expressões e fixando $\alpha = 1$, decorre que:

$$\cos_1(z) = \cos(z) = E_{2,1}(-z^2)$$

$$\text{sen}_1(z) = \text{sen}(z) = zE_{2,2}(-z^2).$$

Na Figura 6 há o esboço das curvas que descrevem a função $\text{sen}_\alpha(x^\alpha)$ de variável real para valores de $\alpha = 1; 0,9; 0,7$ e $0,5$.

No entanto, vale destacar que essa generalização fracionária apresentada para as funções trigonométricas não é única. Por exemplo: [Tseytlin \(1984\)](#) propôs as funções $S_{C_\alpha}(z)$ e $C_{S_\alpha}(z)$ como sendo funções seno e cosseno fracionárias. Mais precisamente, $S_{C_\alpha}(z) = zE_{2-\alpha,2}(-z^{2-\alpha})$ e $C_{S_\alpha}(z) = E_{2-\alpha,1}(-z^{2-\alpha})$ recuperando as funções elementares para $\alpha = 0$.


 Figura 6 – Seno fracionário para valores particulares de α .

Proposição 2.2.1. *Sejam $Re(\alpha) > 0$ e $z \in \mathbb{C}$, então*

$$E_{\alpha}(-z) = E_{2\alpha}(z^2) - zE_{2\alpha,\alpha+1}(z^2). \quad (2.12)$$

Demonstração. Ao desenvolver o segundo membro da equação, obtém-se

$$\begin{aligned} E_{2\alpha}(z^2) - zE_{2\alpha,\alpha+1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2\alpha k + 1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2\alpha k + \alpha + 1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} - \frac{z}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{z^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{z^4}{\Gamma(4\alpha + 1)} - \dots, \end{aligned}$$

perceba que as parcelas de índices pares ficam positivas enquanto as parcelas de índices ímpares ficam negativas. Logo,

$$E_{2\alpha}(z^2) - zE_{2\alpha,\alpha+1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(-z),$$

que é o resultado desejado. ■

Vale a pena discutir também as aplicações numéricas da função de Mittag-Leffler. Sabe-se que a função de Mittag-Leffler aparece como solução de diversas equações integro-diferenciais, possibilitando a descrição de determinados fenômenos físicos, principalmente aqueles estudados pelo cálculo fracionário. Ademais, como visto nos exemplos anteriores, para valores particulares dos parâmetros, a função de Mittag-Leffler consegue interpolar funções clássicas tal como a exponencial e as funções trigonométricas. Diante disso, surge a necessidade de encontrar fórmulas de aproximações assintóticas para essa função.

No arcabouço teórico atual existem diversas fórmulas assintóticas para a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, mas destaca-se aqui uma fórmula assintótica para a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros introduzida por [Djrbashian \(1966\)](#) e retrabalhada por [Gorenflo et al. \(2014, p.64\)](#): sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onde $0 < \alpha < 2$ e uma constante δ escolhida tal que satisfaça a relação $\pi\alpha/2 < \delta < \min\{\pi, \pi\alpha\}$, então para todo $p \in \mathbb{N}$ e

$|z| \rightarrow \infty$, tem-se

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-p}), \quad \forall z, |\arg z| \leq \delta, \quad (2.13)$$

onde a notação $O(|z|^{-1-p})$ indica que para todo p e z vale a relação $|O(|z|^{-1-p})| < A|z|^{-1-p}$ sendo A uma constante real, isto é, conforme $|z| \rightarrow \infty$ o termo $A|z|^{-1-p}$ torna-se suficientemente pequeno.

Para chegar a Eq.(2.13) Djrbashian (1966) utilizou a forma integral da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, expandindo assintoticamente a integral correspondente.

2.3 Funções de Mittag-Leffler de três parâmetros

A função de Mittag-Leffler de três parâmetros foi introduzida por Prabhakar (1971) e para defini-la é necessário apresentar o símbolo de Pochhammer. Neste trabalho o símbolo aparece na sua forma ascendente.

Definição 2.3 (Oliveira (2019)). *Seja $a \in \mathbb{C}$. O símbolo de Pochhammer denotado por $(a)_n$ é definido através da expressão*

$$(a)_n = \begin{cases} a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1), & \text{se } n = 1, 2, 3, \dots \\ 1, & \text{se } n = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Note que para $n \in \mathbb{N}$, $(1)_n = n!$, pois $(1)_n = 1(1+1)(2+1)(3+1) \cdots (1+n-1) = n!$, generalizando assim o conceito de fatorial.

Sendo assim, expresso como um quociente de funções gamma, tem-se

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Definição 2.4 (Oliveira (2014)). *Sejam α, β e a parâmetros complexos tais que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ e $a > 0$, assim a função de Mittag-Leffler de três parâmetros $E_{\alpha,\beta}^a(\cdot)$ é dada por*

$$E_{\alpha,\beta}^a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!}, \quad (2.15)$$

ou ainda,

$$E_{\alpha,\beta}^a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k) z^k}{\Gamma(a) \Gamma(\alpha k + \beta) k!}.$$

Veja que para $a = 1$ tem-se $E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$, recuperando a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

2.4 Funções de Mittag-Leffler e a transformada de Laplace

Nesta seção será discutida a transformada de Laplace inversa para uma expressão envolvendo a função de Mittag-Leffler de três parâmetros, recuperando resultados importantes para as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros.

Teorema 2.4.1 (Tomovski, Hilfer e Srivastava (2010)). *Seja $t \in \mathbb{R}$ e a uma constante real, tem-se*

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\rho}(\pm at^{\alpha}) \doteq \frac{1}{s^{\beta}} \frac{s^{\alpha\rho}}{(s^{\alpha} \mp a)^{\rho}}. \quad (2.16)$$

para $a > 0$ e $\beta > 0$, onde $\left| \frac{a}{s^{\alpha}} \right| < 1$.

Demonstração. Aplicando a definição da transformada de Laplace no primeiro membro e recorrendo à definição da função de Mittag-Leffler de três parâmetros apresentada na seção anterior, segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\rho} \{\pm at^{\alpha}\}] &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{(\pm at^{\alpha})^k}{k!} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^k (\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} dt, \end{aligned}$$

Basta agora introduzir a mudança de variável $y = st$, assim

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^{\beta}} \frac{(\pm a)^k (\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k! s^{\alpha k}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha k + \beta - 1} dy.$$

Além disso,

$$\int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha k + \beta - 1} dy = \Gamma(\alpha k + \beta).$$

Dessa forma, usando esse resultado e a representação do símbolo de Pochhammer em termos da função gama tem-se

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^{\beta}} \frac{(\pm a)^k (\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k! s^{\alpha k}} \Gamma(\alpha k + \beta) = \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\rho + k)}{k! \Gamma(\rho)} \left(\frac{\mp a}{s^{\alpha}} \right)^k.$$

Ainda, para $\left| \frac{a}{s^{\alpha}} \right| < 1$ tem-se uma série convergente, isto é,

$$\mathcal{L} [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\rho} \{\pm at^{\alpha}\}] = \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{\left(1 \mp \frac{a}{s^{\alpha}}\right)^{\rho}} = \frac{s^{\alpha\rho}}{s^{\beta} (s^{\alpha} \mp a)^{\rho}},$$

encerrando, assim, a demonstração. ■

Para $\rho = 1$ obtém-se a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros:

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)] = \frac{1}{s^\beta} \frac{s^\alpha}{(s^\alpha \mp a)} \quad (2.17)$$

e, por fim, fixando $\beta = 1$ na Eq.(2.17) obtém-se a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de um parâmetro:

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm at^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha \mp a)}. \quad (2.18)$$

Contudo, pode-se chegar nesse mesmo resultado com a proposição a seguir.

Proposição 2.4.1. *Seja $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, então para a função Mittag-Leffler tem-se a relação integral de Laplace*

$$\int_0^\infty e^{-x} E_\alpha(x^\alpha z) dx = \frac{1}{1-z}, \quad \alpha \geq 0, \quad (2.19)$$

cuja região de convergência contém o disco unitário e é limitada pela curva $Re(z^{\frac{1}{\alpha}}) = 1$.

Demonstração. Para demonstrar esse resultado basta efetuar a integração levando em conta a definição da função de Mittag-Leffler e da função gama. De fato, nota-se que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} E_\alpha(x^\alpha z) dx &= \int_0^\infty e^{-x} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{\alpha k} z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha k} dx}_{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^\infty z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1, \end{aligned}$$

Logo, diante desse resultado, introduzindo as mudanças de variável $x = st$ e $z = \pm t^\alpha$ na Eq.(2.19) tem-se

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm t^\alpha)] := \int_0^\infty e^{-st} E_\alpha(\pm t^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp 1},$$

que é o resultado desejado. ■

Vale a pena mencionar também a monotonicidade completa da função de Mittag-Leffler. Mais precisamente, uma função $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é dita completamente monótona se possui derivadas $f^{(n)}(x)$, de todas as ordens, $n \in \mathbb{N}$ e também as derivadas alternando os sinais, isto é, $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ para todo $x \in]0, \infty[$. Além disso, essa propriedade faz com que a função de Mittag-Leffler desempenhe um papel fundamental em uma gama de aplicações, tal como em [Oliveira, Mainardi e Vaz \(2014\)](#) onde a função de

Mittag-Leffler fornece modelos adequados para estudar processos de relaxamento anômalo. Uma discussão mais profunda sobre a monotonicidade da função de Mittag-Leffler pode ser encontrada em [Oliveira \(2020\)](#).

Capítulo 3

Noções preliminares do cálculo fracionário

O cálculo clássico, ou cálculo de ordem inteira, é um amplo campo da matemática que se dedica a estudar fenômenos relacionados a variações e a movimento, para isso emprega-se as operações de derivação e de integração: usualmente a derivação é introduzida a partir do limite de um quociente enquanto a integral como o limite de um somatório. Seu surgimento está associado a resolução de problemas práticos tal como o cálculo de determinadas áreas e volumes ou até mesmo a determinação de retas tangentes a curvas e problemas de otimização. Já o cálculo fracionário surge em 30 de setembro de 1695 “quando l’Hospital escreveu uma carta a Leibniz perguntando qual seria o significado de uma derivada de ordem $1/2$ ” (OLIVEIRA, 2014).

Porém, segundo Herrmann (2014) durante muito tempo, o tratamento de Abel para o problema da tautócrona (1823) foi representado como um exemplo singular da aplicação do cálculo fracionário. Em particular, trata-se do problema de encontrar a curva plana descrita por um objeto que desliza, sem forças dissipativas, apenas sob a ação da gravidade, de módulo constante, até seu ponto de mínimo cujo tempo de descida não depende do ponto de partida.

Esse cenário mudou drasticamente nas últimas décadas, uma vez que com o advento do CF novas questões em física fundamental são levantadas, dentre elas questões que não podem ser formuladas adequadamente usando métodos tradicionais. Um bom exemplo disso se faz presente no estudo de polímeros: em Dartora, Zanella e Cabrera (2021) é destacado que a razão entre a tensão aplicada em um polímero e a deformação produzida por ele não satisfaz a lei de Hooke, não correspondendo à abordagem usual do problema. Mostra-se ainda nesse trabalho que esses materiais apresentam efeitos não locais que podem ser descritos com melhor precisão com EDOFs e essa constatação se sustenta quando a modelagem fracionária é comparada com dados experimentais.

Outra aplicação importante do cálculo fracionário é na teoria difusiva. Os modelos tradicionais de difusão podem ser aplicados em diferentes cenários: transporte de substâncias da membrana celular de seres vivos, transporte de água em organismos ou até mesmo transporte de elétrons em semicondutores. No entanto,

quando a dinâmica do sistema é regida por fatores que vão além das forças aleatórias de colisão entre as partículas, outros elementos devem ser agregados à equação de difusão, de forma a explicitar a influência destes novos elementos na dinâmica do sistema (MARIN, 2020, p.12).

Esse comportamento é conhecido como difusão anômala. Em Marin (2020) é destacada a aplicabilidade do cálculo fracionário em descrever o efeito de memória, presente na difusão anômala, posto que o comportamento das partículas que compõem esse sistema não é descrito somente pelo estado atual de cada uma, mas também por eventos que aconteceram no passado. Em geral, a modelagem fracionária parece traduzir bem fenômenos de não localidade temporal. Vale destacar que a não localidade e o efeito de memória serão discutidos com mais detalhes no Capítulo 4.

Sendo assim, neste capítulo serão apresentadas uma gama de definições e resultados essenciais do CF para discutir o oscilador mecânico fracionário no capítulo subsequente. Mais precisamente, serão apresentadas as formulações de integral e derivada fracionárias de Riemann-Liouville, bem como as formulações de derivada fracionária de Caputo e Hilfer.

3.1 Integral fracionária

A integração fracionária será introduzida como uma generalização da integral de ordem inteira, para isso mostra-se que a integral de ordem $n \in \mathbb{N}$ de uma função integrável $f(t)$ pode ser compreendida como o produto de convolução de Laplace entre $f(t)$ e a função de Gel'fand-Shilov de ordem n . Após isso, o conceito de fatorial é generalizado a partir da função gama, permitindo generalizar também a ordem da integral.

Definição 3.1 (Oliveira (2019)). *Sejam $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $\nu \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$, define-se a função de Gel'fand-Shilov como*

$$\phi_n(t) := \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0 \end{cases} \quad e \quad \phi_\nu(t) := \begin{cases} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde Γ indica a função gama definida no capítulo anterior.

Proposição 3.1.1. *Sejam α e β números reais definidos fora das singularidades da função gama, isto é, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$ e $*$ o produto de convolução de Laplace tem-se que $\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t)$.*

Demonstração. Usando a definição do produto de convolução de Laplace:

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \int_0^\infty \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\tau^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(t \left[1 - \frac{\tau}{t} \right]^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} \right) d\tau,$$

e introduzindo a mudança de variável $y = \frac{\tau}{t}$, isto é, $dy = \frac{d\tau}{t}$ tem-se

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (t[1-y])^{\alpha-1} (ty)^{\beta-1} t dy = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} (y)^{\beta-1} y dy.$$

A integral que aparece no segundo membro da equação anterior corresponde à função beta $B(\alpha, \beta)$ que, de acordo com o **Teorema 2.1.1** pode ser representada por um quociente de funções gama, ou seja, $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$, segue

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \phi_{\alpha+\beta}(t), \tag{3.2}$$

que é o resultado desejado.

Proposição 3.1.2. *A transformada de Laplace da função de Gel'fand-Shilov é dada por*

$$\mathcal{L}[\phi_\nu(t)] = s^{-\nu}.$$

Demonstração. Para mostrar esse resultado basta usar o produto de convolução de Laplace e a definição da função gama, isto é,

$$\mathcal{L}[\phi_\nu(t)] = \int_0^\infty \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-st} dt.$$

Com a mudança de variável $st = y$ decorre que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-st} dt &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{s} \right)^{\nu-1} e^{-y} \frac{dy}{s} \\ &= \frac{1}{s^\nu \Gamma(\nu)} \underbrace{\int_0^\infty y^{\nu-1} e^{-y} dy}_{\Gamma(\nu)} = \frac{1}{s^\nu \cancel{\Gamma(\nu)}} \Gamma(\cancel{\nu}) = s^{-\nu}, \end{aligned}$$

finalizando a demonstração.

3.1.1 Integral fracionária de Riemann-Liouville

Definição 3.2 (Camargo (2009)). *Seja $n \in \mathbb{N}$ e f uma função causal então o operador integral de ordem inteira I é definido como*

$$If(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1,$$

em geral, tem-se

$$I^n f(t) = \underbrace{I(I(\dots f(t)))}_{n \text{ vezes}} = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_2 dt_1, \quad (3.3)$$

onde o operador I^n representa a n -ésima integral da função $f(t)$.

Sendo assim, é crucial mostrar agora a relação entre a função ϕ_n com a integral de ordem n usando o produto de convolução de Laplace.

Teorema 3.1.1 (Teodoro (2014)). *Sendo $f(\tau)$ uma função integrável e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Demonstração. Para demonstrar esse resultado será utilizada a indução em n . Para $n = 1$ tem-se

$$I f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{1-1}}{(1-1)!} f(\tau) d\tau = \phi_1(t) * f(t).$$

A partir da hipótese de indução $I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t)$ deve-se mostrar que o resultado é válido para $n + 1$. Dessa forma, tomando $I^{n+1} f(t)$ obtém-se

$$I^{n+1} f(t) = I [I^n f(t)] = I [\phi_n(t) * f(t)] = \int_0^t \phi_n(\tau_1) * f(\tau_1) d\tau_1 = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau.$$

Nesta etapa da demonstração vale mencionar o teorema de Goursat, cuja demonstração pode ser encontrada em Brown, Churchill e Doering (2015), que possibilita alterar a ordem de integração, sendo assim,

$$I^{n+1} f(t) = \int_0^t \int_{\tau}^t \frac{(\tau_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau_1 d\tau.$$

Repare que a primeira integral na variável τ_1 pode ser calculada separadamente,

$$\int_{\tau}^t \frac{(\tau_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau_1 = f(\tau) = \int_{\tau}^t \frac{(\tau_1 - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau_1,$$

introduzindo a mudança de variável $y = \tau_1 - \tau$ que implica $dy = d\tau_1$, então

$$f(\tau) \int_0^{t-\tau} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy = \frac{f(\tau)(t-\tau)^n}{n!},$$

que é o resultado desejado.

Finalmente, a expressão fica

$$I^{n+1}f(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)(t-\tau)^n}{n!} d\tau = \phi_{n+1}(t) * f(t). \quad (3.5)$$

Demonstrada a relação entre a função ϕ_n e a integral de ordem n , basta agora usar a definição da função de Gel'fand-Shilov para um complexo $\nu = \alpha$ tal que $Re(\alpha) > 0$.

Definição 3.3 (Rodrigues e Oliveira (2015)). *Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $Re(\alpha) > 0$. Define-se a integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda de ordem α aplicada em uma função $f \in L^p[a, b]$, $1 \leq p < +\infty$, $-\infty < a < b < +\infty$ para $t \in [a, b]$ como*

$$(I^\alpha f)(t) \equiv I^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad t > a. \quad (3.6)$$

Neste trabalho é usada a integral de Riemann-Liouville para $a = 0$.

Tal integral de Riemann-Liouville também pode ser definida à direita, basta alterar o intervalo de integração: ao invés de integrar de a até t , basta integrar de t a b com $b > t$. Contudo, neste trabalho será usada apenas a definição de integral fracionária à esquerda, bem como todas as outras definições que recorrem a ela.

Além de tudo, a **Proposição 3.1.1** garante a chamada propriedade de semi-grupo para as integrais fracionárias: seja $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} I^\alpha I^\beta f(t) &= \phi_\alpha(t) * I^\beta f(t) = \phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) * f(t) \\ &= \phi_{\alpha+\beta}(t) * f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Devido a sua importância, apresentam-se resultados que serão utilizados no texto por meio de proposições, ou ainda, casos particulares.

Sendo $a \in \mathbb{R}^*$ e $f(t) = a$ uma função constante, então a integral fracionária de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ pode ser obtida por

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= I^\alpha(a) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} a d\tau \\ &= \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} d\tau, \end{aligned}$$

a partir da mudança de variável $\tau = yt$ segue que

$$I^\alpha(a) = \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-y)^{\alpha-1} t dy = \frac{at^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} dy,$$

além disso, a integral no último membro indica a função beta $B(1, \alpha) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}$, sabendo que $\Gamma(1) = 0! = 1$, é possível concluir que

$$I^\alpha a = \frac{at^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad (3.8)$$

É possível encontrar também a integral fracionária de ordem α da função exponencial $f(t) = e^{\lambda t}$ sendo λ uma constante real. Perceba que

$$I^\alpha e^{\lambda t} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} e^{\lambda \tau} d\tau,$$

seja $y = t - \tau \Rightarrow -dy = d\tau$, então

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^0 (y)^{\alpha-1} e^{\lambda(t-y)} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (y)^{\alpha-1} e^{\lambda(t-y)} dy \\ &= \frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy. \end{aligned}$$

Por fim, introduzindo a mudança de variável $u = \lambda y$ e usando a definição da função gama incompleta tem-se

$$\frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda t} \frac{u^{\alpha-1}}{\lambda^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{du}{\lambda} = \frac{\lambda^{-\alpha} e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^{\lambda t} u^{\alpha-1} e^{-u} du}_{\gamma(\alpha, \lambda t)} = \frac{\gamma(\alpha, \lambda t) e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha) \lambda^\alpha}.$$

Agora, será calculada a integral de ordem α da seguinte expressão envolvendo a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros

$$t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\pm \lambda t^\alpha).$$

Utilizando a definição da integral fracionária de Riemann-Liouville tem-se que

$$\begin{aligned} I^\alpha (t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\pm \lambda t^\alpha)) &= \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\pm \lambda \tau^\alpha) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm \lambda)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm \lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha k + \beta - 1} d\tau. \end{aligned}$$

Introduzindo a substituição $\tau = yt$ obtém-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned} I^\alpha (t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\pm \lambda t^\alpha)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm \lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) \Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - y)^{\alpha-1} y^{\alpha k + \beta} t^{\alpha k + \beta} dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm \lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) \Gamma(\alpha)} t^{\alpha k + \alpha + \beta - 1} \int_0^1 (1 - y)^{\alpha-1} y^{\alpha k + \beta - 1} dy, \end{aligned}$$

a integral na variável y no segundo membro representa a função beta, de acordo com o **Teorema 2.1.1**, $B(\alpha k + \beta, \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha k + \beta) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha k + (\beta + \alpha))}$.

Diante disso, é possível concluir que

$$\begin{aligned} I^\alpha (t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm\lambda t^\alpha)) &= t^{\beta+\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm\lambda)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta) \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha k + \beta) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha k + (\beta + \alpha))} \\ &= t^{\beta+\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + (\beta + \alpha))} = t^{\beta+\alpha-1} E_{\alpha,\beta+\alpha}(\pm\lambda t^\alpha). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Proposição 3.1.3. *A transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α aplicada a uma função $f(t)$ é dada por*

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = \frac{F(s)}{s^\alpha}, \quad (3.10)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $\text{Re}(\alpha) > 0$.

Demonstração. Antes é preciso retomar que $(I^\alpha f)(t) = \phi_\alpha * f(t)$. Dessa maneira,

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = \mathcal{L}\left[\underbrace{\phi_\alpha(t) * f(t)}_{\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)F(s)]}\right] = \Phi(s)F(s),$$

onde $\Phi_\alpha(s) = \mathcal{L}[\phi_\alpha(t)]$. Pela **Proposição 3.1.2**

$$\Phi_\alpha(s)F(s) = s^{-\alpha}F(s) = \frac{F(s)}{s^\alpha},$$

o que encerra a demonstração e generaliza o resultado da **Proposição 1.1.4**.

3.2 Derivadas fracionárias

Atualmente há uma gama de generalizações da derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária. As duas mais notáveis são a de Riemann-Liouville e a de Caputo: a primeira surge naturalmente a partir do fato de que a derivação é o operador inverso à esquerda da integração, enquanto a segunda parece mais adequada para estudar alguns fenômenos físicos. Vale a pena mencionar também a formulação de derivada fracionária de Grünwald-Letnikov bastante prática para aplicações numéricas. Mais detalhes sobre essas e outras formulações de derivadas fracionárias podem ser encontrados em Podlubny (1999). Já em Oliveira (2019, p.1) há uma descrição cronológica do desenvolvimento do cálculo fracionário desde o seu surgimento até os tempos atuais, destacando os principais trabalhos e suas contribuições à área.

Antes de discutir as formulações de derivadas fracionárias é preciso comentar sobre o conceito de continuidade absoluta de uma função, visto que esse conceito aparece na definição da derivada fracionária de Caputo.

Definição 3.4 (Ranjbar-Motlagh (2020)). Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é dita absolutamente contínua no intervalo limitado $[a, b]$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon \quad (3.11)$$

para toda coleção finita $\{(a_i, b_i), 1 \leq i \leq n\}$ de subintervalos disjuntos de $[a, b]$ com

$$\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta.$$

Sendo assim, denota-se por $AC[a, b]$ o espaço das funções complexas absolutamente contínuas em $[a, b]$ e $AC^n[a, b]$ o espaço das funções f tal que suas derivadas até a ordem $n - 1$ são absolutamente contínuas em $[a, b]$, isto é, $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)} \in AC[a, b]$. Ademais, analogamente denota-se por $C^n([a, b], \mathbb{C})$ as função f de $[a, b]$ em \mathbb{C} cujas derivadas até a ordem $n - 1$ são contínuas.

Evidentemente a continuidade absoluta garante a continuidade, porém a continuidade por si só não implica a variação limitada de uma função f no intervalo $[a, b]$, ou seja, existem funções contínuas que não são diferenciáveis em ponto algum, por exemplo, a função de van der Waerden definida como $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \{10^n x\}$, onde $\{x\}$ indica a distância de x ao inteiro mais próximo, Thim (2003). Porém, se a continuidade for absoluta a implicação é verdadeira.

Ainda, a variação de uma função f é dada pelo supremo da soma apresentada na Eq.(3.11). Para mais detalhes sobre esse conceito consulte Ranjbar-Motlagh (2020).

3.2.1 Formulação de Riemann-Liouville

No estudo das variáveis complexas é comum se deparar com a fórmula integral de Cauchy envolvendo a derivada de ordem n de uma função,

$$f^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad (3.12)$$

segundo Camargo (2009) muito embora esse seja um dos primeiros resultados ligados a derivada fracionária de Riemann-Liouville, para encontrar a formulação não basta tomar $n := \alpha \notin \mathbb{N}$ e ao invés de $n!$ tomar $\Gamma(\alpha + 1)$, visto que quando isso ocorre obtém-se em $z = \xi$ um ponto de ramificação, além do mais, o contorno C também deve ser alterado para o contorno de Bromwich, como já citado no Capítulo 1.

Sendo assim, a derivada fracionária de ordem α no sentido de Riemann-Liouville não será definida como uma extensão da Eq.(3.12), mas sim a partir da integral fracionária de Riemann-Liouville, em outras palavras, será uma derivada de ordem inteira de uma integral fracionária, de tal modo que a lei dos expoentes, Eq.(3.7), seja satisfeita.

Definição 3.5 (Oliveira (2019)). *Sejam $t \in \mathbb{R}$, $Re(\alpha) > 0$, $n = Re(\alpha) + 1$, com $[Re(\alpha)]$ a parte inteira de $Re(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$. A derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda de ordem α aplicada na função $f \in L^p[a, b]$ onde $1 \leq p < +\infty$, $-\infty < a < b < +\infty$ para $t \in [a, b]$, é definida como*

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D^\alpha f)(t) &\equiv {}^{RL}D^\alpha f(t) := \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Portanto, veja que

$${}^{RL}D^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n [\phi_{n-\alpha} * f(t)].$$

É interessante mencionar que a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma constante não é zero. Para tal, calcula-se a derivada de ordem $0 < \alpha \leq 1$ da função constante $f(t) = a$ tal que $a \in \mathbb{R}^*$. Logo, tem-se, usando a Eq.(3.8),

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(t) &= {}^{RL}D^\alpha a = \frac{d}{dt} (I^{1-\alpha} a) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{at^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = a \frac{(1-\alpha)t^{-\alpha}}{\Gamma(1+(1-\alpha))} = \frac{at^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Assim, a derivada de ordem arbitrária segundo Riemann-Liouville de uma função constante não é identicamente nula como ocorre no cálculo clássico.

Teorema 3.2.1 (Teodoro (2014)). *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha, \beta \leq n$ tal que $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^*$, então a derivada fracionária de Riemann-Liouville da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é dada por*

$${}^{RL}D^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm \lambda t^\alpha)] = t^{\beta-\alpha-1} E_{\alpha,\beta-\alpha}(\pm \lambda t^\alpha). \quad (3.14)$$

Demonstração. Essa demonstração decorre do resultado já conhecido, Eq.(3.9), uma vez que a derivada fracionária de Riemann-Liouville é calculada a partir da integral fracionária de Riemann-Liouville. Pode-se escrever

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm \lambda t^\alpha)] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n [I^{n-\alpha} (t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm \lambda t^\alpha))] \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n [t^{n-\alpha+\beta-1} E_{\alpha,\beta+n-\alpha}(\pm \lambda t^\alpha)] = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm \lambda) t^{\alpha k+n-\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta + n - \alpha)}. \end{aligned}$$

Sabe-se também que a derivada da função potência é dada por

$$\frac{d^n t^k}{dt^n} = \frac{k!}{(k-n)!} t^{k-n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} t^{k-n}. \quad (3.15)$$

Reordenando os termos e utilizando o resultado da Eq.(3.15) na expressão $t^{\alpha k+n-\alpha+\beta-1}$ segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n t^{\alpha k+n-\alpha+\beta-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + n - \alpha)} \frac{\Gamma(\alpha k + n - \alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta - \alpha)} t^{\alpha k+\beta-\alpha-1} \\ & t^{\beta-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm\lambda)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + (\beta - \alpha))} = t^{\beta-\alpha-1} E_{\alpha, \beta-\alpha}(\pm\lambda t^\alpha), \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

Em particular, fixando $\beta = 1$ tem-se que $\alpha < 1$ e

$${}^{RL}D^\alpha E_\alpha(t^\alpha) = t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(t^\alpha). \quad (3.16)$$

3.2.2 Formulação de Caputo

Definição 3.6 (Oliveira (2019)). *Sejam $t \in \mathbb{R}$, $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ com $[Re(\alpha)]$ a parte inteira de $Re(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$. Dada uma função $f(t) \in AC^n[a, b]$, com $-\infty < a < b < +\infty$, a derivada fracionária de ordem α segundo Caputo aplicada à função f para $t \in [a, b]$ é definida como*

$$\begin{aligned} ({}^C D^\alpha f)(t) &\equiv {}^C D^\alpha f(t) := (I^{n-\alpha} f^{(n)})(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $f^{(n)}$ indica a n -ésima derivada da função f .

Ademais, a derivada fracionária segundo Caputo de uma função equivale a uma integral fracionária aplicada em uma derivada de ordem inteira.

Apesar de tanto a derivada segundo Riemann-Liouville quanto a derivada segundo Caputo envolverem derivadas de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária em suas expressões elas não são equivalentes, pois comutar as operações de derivação e integração altera efetivamente o resultado encontrado. Nos resultados a seguir essa diferença ficará mais evidente.

A fim de mostrar uma particular diferença entre as formulações de derivada fracionária apresentadas, será mostrado que: diferente da formulação de Riemann-Liouville e em concordância com os resultados do cálculo clássico, a derivada fracionária segundo Caputo de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ de uma função constante $f(t) = a$,

$a \in \mathbb{R}^*$ é identicamente nula. Da definição de derivada fracionária de Caputo, tem-se

$${}^C D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (3.18)$$

como $\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} a = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$${}^C D^\alpha a = 0. \quad (3.19)$$

Agora, será calculada a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ com $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ da função de Mittag-Leffler de um parâmetro. Segue

$${}^C D^\alpha (E_\alpha(t^\alpha)) = I^{n-\alpha} (D^n E_\alpha(t^\alpha)),$$

pela definição da função de Mittag-Leffler de um parâmetro e usando o resultado da Eq.(3.15) tem-se

$$\begin{aligned} & I^{n-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right] \\ &= I^{n-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k - n + 1)} t^{\alpha k - n} \right] \\ &= I^{n-\alpha} [t^{-n} E_{\alpha, 1-\alpha}(t^\alpha)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De acordo com o resultado já obtido, Eq.(3.9), o operador de integração fracionária de ordem $n-\alpha$ aplicado à função de Mittag-Leffler de dois parâmetros adiciona $n-\alpha$ ao expoente da variável t e ao segundo parâmetro da função de Mittag-Leffler, ou seja,

$$I^{n-\alpha} [t^{-n} E_{\alpha, 1-\alpha}(t^\alpha)] = t^{-\alpha} E_{\alpha, 1-\alpha}(t^\alpha), \quad (3.21)$$

o que implica necessariamente que $\alpha < 1$. Introduzindo a mudança de variável $k^* := k + 1$ na equação Eq.(3.21) obtém-se

$${}^C D^\alpha (E_\alpha(t^\alpha)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)} = \sum_{k^*=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k^*}}{\Gamma(\alpha k^* + 1)} = E_\alpha(t^\alpha). \quad (3.22)$$

Em oposição à derivada fracionária segundo Riemann-Liouville para a mesma função Eq.(3.16), esse resultado generaliza a propriedade $\frac{d}{dt} e^t = e^t$, reforçando a ideia de que a função de Mittag-Leffler generaliza a função exponencial.

Embora muitas das propriedades do cálculo clássico tenham suas generalizações no CF empregando as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo, o mesmo não pode ser dito das seguintes relações envolvendo funções trigonométricas e os processos de derivação

$$\frac{d^n}{dt^n} \text{sen}(\Omega t) = \Omega^n \text{sen} \left(\Omega t + \frac{n\pi}{2} \right) \quad \text{e} \quad \frac{d^n}{dt^n} \text{cos}(\Omega t) = \Omega^n \text{cos} \left(\Omega t + \frac{n\pi}{2} \right), \quad (3.23)$$

sendo $n \in \mathbb{N}$.

Conforme Garrappa, Kaslik e Popolizio (2019) apesar dessas propriedades serem extremamente úteis para o cálculo clássico, pois simplificam alguns processos de derivação, em geral não são mais verdadeiras com derivadas fracionárias, a menos que uma definição muito especial seja utilizada, no caso a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov.

Empregando a mesma estratégia utilizada para determinar a integral fracionária da função exponencial e introduzindo a substituição $\cos(\Omega t) = \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2}$ obtém-se para a função $f(t) = \cos(\Omega t)$, tal que $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $n = [Re(\alpha)]$, as seguintes expressões

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha \cos(\Omega t) &= \frac{t^{-\alpha}}{2} [(E_{1,1-\alpha}(i\Omega t)) + E_{1,1-\alpha}(-i\Omega t)] \\ {}^CD^\alpha \cos(\Omega t) &= i^n \Omega^n \frac{t^{n-\alpha}}{2} [(E_{1,n-\alpha+1}(i\Omega t)) + (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\Omega t)]. \end{aligned}$$

Note que para nenhuma das formulações de derivadas fracionárias apresentadas o resultado da Eq.(3.23) que relaciona o operador de derivação com a fase das funções trigonométricas é recuperado.

Resta agora mencionar as condições para que as duas formulações coincidam.

Teorema 3.2.2 (Oliveira (2014)). *Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n - 1 < \alpha \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$, então a derivada fracionária de Riemann-Liouville pode ser relacionada com a derivada fracionária de Caputo a partir da seguinte equação*

$${}^{RL}D^\alpha f(t) = {}^CD^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a), \quad t > 0 \quad (3.24)$$

Demonstração. Oliveira (2014, p.56).

Decorre do **Teorema 3.2.2** que as formulações de derivada fracionária de Riemann-Liouville e Caputo são iguais somente se $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

3.3 Derivada de Hilfer

Nas últimas três décadas o cálculo fracionário vem ganhando popularidade conforme suas aplicações em diversas áreas da ciência aumentam. Seguindo esse avanço, novas formulações de derivada fracionária são propostas, cada uma mais adequada a um contexto diferente. Não por acaso trabalhos como Teodoro, Machado e Oliveira (2019) surgem para responder questões relacionadas às condições necessárias para uma formulação de derivada ser considerada uma derivada fracionária.

Além disso, diante das múltiplas formas de se definir uma derivada fracionária, outra questão fundamental emerge: é possível obter uma formulação de derivada fracionária que generaliza outras formulações?

Buscando interpolar as formulações de derivada fracionária de Riemann-Liouville e de Caputo em um mesmo operador, Hilfer (2000) propôs um operador de derivada fracionária, atualmente denominado de derivada fracionária de Hilfer, que introduzindo um parâmetro $0 \leq \mu \leq 1$ consegue recuperar ambas as formulações de derivada fracionária, cada uma para um valor particular de μ . Outras extensões da ideia de Hilfer podem ser encontradas tal como as formulações: Hilfer-Hadamard (presente em Abbas et al. (2017)), Hilfer-Prabhakar (presente em Garra et al. (2014)), Hilfer-Katugampola (presente em Oliveira e Oliveira (2017)) e ψ -Hilfer (presente em Souza e Oliveira (2017)).

Para resolver uma EDOF cujos operadores de derivação seguem a formulação de derivada fracionária de Hilfer, objetivo deste trabalho, deve-se então definir esse operador e investigar algumas de suas propriedades.

Definição 3.3.1 (Oliveira (2019)). *Sejam $0 < \alpha \leq 1$ e $0 \leq \mu \leq 1$ a ordem e o tipo da derivada fracionária, respectivamente, então a derivada de Hilfer à direita/ à esquerda, em relação a t é dada por:*

$${}^H D_{a\pm}^{\alpha,\mu} x(t) = \pm I_{a\pm}^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(I_{a\pm}^{(1-\mu)(1-\alpha)} \right) x(t) \quad (3.25)$$

para funções x as quais o segundo membro da equação exista.

Todavia, a definição apresentada evoca uma questão: como recuperar o caso clássico, onde há uma EDO de segunda ordem, se a ordem α da derivada de Hilfer está entre 0 e 1? É preciso então de uma definição mais geral.

Definição 3.3.2 (Oliveira (2019)). *Sejam $n - 1 < \alpha < n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $\Lambda = [a, b]$ um intervalo fechado $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $t \in \Lambda$ e $x \in C^m(\Lambda, \mathbb{R})$. O operador fracionário de Hilfer denotado por ${}^H D_{a+}^{\alpha,\mu}$ de ordem α e tipo μ com $0 \leq \mu \leq 1$ é dado por:*

$${}^H D_{a+}^{\alpha,\mu} = I_{a+}^{\mu(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{(1-\mu)(n-\alpha)} x(t), \quad (3.26)$$

onde I_{a+}^{μ} é a integral de Riemann-Liouville.

Repare que para $\mu = 0$ retoma-se a formulação de derivada fracionária de Riemann-Liouville e para $\mu = 1$ a formulação de derivada fracionária de Caputo.

Lema 3.3.1. *O seguinte resultado é válido para o operador fracionário de Hilfer ${}^H D^{\alpha,\mu}$ de ordem $0 < \alpha < 1$ e tipo $0 \leq \mu \leq 1$ com $\text{Re}(\alpha) > 0$*

$${}^H D^{\alpha,\mu} [t^{\beta-1}] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} t^{\beta-\alpha-1}, \quad (3.27)$$

onde $t > 0$.

Demonstração. A partir da definição do operador de derivada fracionária de Hilfer nota-se que a demonstração deve ser separada em três etapas: primeiro calcular a integral fracionária de ordem $(1 - \alpha)(1 - \mu)$, depois derivar a função encontrada na variável t para enfim calcular a integral fracionária de ordem $\mu(1 - \alpha)$.

A integral fracionária de ordem $(1 - \alpha)(1 - \mu)$ é dada pela expressão

$$I^{(1-\alpha)(1-\mu)} t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma((1-\alpha)(1-\mu) + \beta)} t^{(1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 1},$$

uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em Oliveira (2014, p.43). Agora, derivando em t a partir da Eq.(3.15) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I^{(1-\alpha)(1-\mu)} t^{\beta-1} &= \frac{[(1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 1] \Gamma(\beta)}{\Gamma((1-\alpha)(1-\mu) + \beta)} t^{(1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 2} \\ &= \frac{[(1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 1] \Gamma(\beta)}{[(1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 1] \Gamma((1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 1)} t^{(1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 2}. \end{aligned}$$

Por fim, aplicando a integral de ordem $\mu(1 - \alpha)$ segue que

$$\begin{aligned} {}^H D^{\alpha, \mu} t^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma((1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 1)} (I^{\mu(1-\alpha)}) [t^{(1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 2}] \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma((1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 1)} \frac{\Gamma((1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 1)}{\Gamma(\mu(1-\alpha) + (1-\alpha)(1-\mu) + \beta - 1)} t^{\beta - \alpha - 1}, \end{aligned}$$

repare que a expressão na função gama no denominador do segundo membro pode ser simplificada $\mu(1 - \alpha) + (1 - \alpha)(1 - \mu) + \beta - 1 = \beta - \alpha$, dessa forma, é possível concluir que

$${}^H D^{\alpha, \mu} t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} t^{\beta - \alpha - 1}, \quad (3.28)$$

que é o resultado desejado.

Da Eq.(3.28) decorre que a derivada fracionária de ordem α da função $t^{\beta-1}$ independe do parâmetro μ , ou seja, o resultado é o mesmo tanto via derivada fracionária de Riemann-Liouville quanto via derivada fracionária de Caputo.

Teorema 3.3.1. *Sejam $t > 0$, $0 < \nu < 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ e tomando $\gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ tem-se que*

$${}^H D^{\nu, \mu} [t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(\lambda t^{\alpha})] = t^{\beta - \nu - 1} E_{\alpha, \beta - \nu}(\lambda t^{\alpha}), \quad (3.29)$$

onde $Re(\alpha) > 0$ e $\beta \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Para demonstrar esse resultado emprega-se a definição da função de Mittag-Leffler de três parâmetros, bem como o resultado demonstrado no **Lema 3.3.1**. Assim, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 {}^H D^{\nu,\mu} [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(\omega t^\alpha)] &= \left({}^H D^{\nu,\mu} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k (\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} t^{\alpha k + \beta - 1} \right] \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k (\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} {}^H D^{\nu,\mu} [t^{\alpha k + \beta - 1}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k (\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta - \nu)} t^{\alpha k + \beta - \nu - 1} \\
 &= t^{\beta - \nu - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k (\lambda)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta - \nu)} = t^{\beta - \nu - 1} E_{\alpha,\beta - \nu}^\gamma(\lambda t^\alpha),
 \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração.

Novamente, ao fixar $\nu = \alpha$ recupera-se o resultado do **Teorema 3.2.1** e, sobretudo, como a solução independe do parâmetro μ pode-se dizer que o resultado é o mesmo para as formulações de derivada fracionária de Riemann-Liouville e de Caputo.

3.3.1 Transformada de Laplace da derivada de Hilfer

Para resolver a EDOF presente no próximo capítulo é fundamental deduzir a expressão da transformada de Laplace da derivada fracionária de Hilfer de ordem $0 < \alpha \leq 1$ e tipo $0 \leq \beta \leq 1$ de uma função f tal como definido na Eq.(3.25),

$$\mathcal{L} [D_{0+}^{\alpha,\beta} f(t)] = \mathcal{L} \left[I_{0+}^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(t) \right]. \quad (3.30)$$

Denota-se $A(t) = \frac{d}{dt} I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(t)$, então pela **Proposição 3.1.3**, obtém-se

$$\mathcal{L} \left[I_{0+}^{\beta(1-\alpha)} (A(t)) \right] = \frac{\mathcal{L} [A(t)]}{s^{\beta(1-\alpha)}}, \quad (3.31)$$

sendo, a partir da transformada de Laplace da derivada,

$$\mathcal{L} [A(t)] = \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} \left(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(t) \right) \right] = s \mathcal{L} \left[I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(t) \right] - I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(0^+). \quad (3.32)$$

Além disso, novamente pela **Proposição 3.1.3**, pode-se escrever

$$\mathcal{L} \left[I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(t) \right] = \frac{F(s)}{s^{\beta(1-\alpha)}}. \quad (3.33)$$

Por fim, ao substituir as Eq.(3.32) e Eq.(3.33) na Eq.(3.31), implica que:

$$\mathcal{L} \left[D_{0+}^{\alpha,\beta} f(t) \right] = s^\alpha F(s) - s^{\beta(\alpha-1)} I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(0^+), \quad (3.34)$$

onde $I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(t)$.

A partir do mesmo raciocínio pode-se encontrar a expressão para a transformada de Laplace quando a ordem da derivada é $1 < \gamma \leq 2$ e o tipo $0 \leq \mu \leq 1$. Portanto,

$$\mathcal{L} [{}^H D_{0+}^{\gamma, \mu} x(t)] = s^\gamma F(s) - s^{\mu(\gamma-2)} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\gamma)-1} x(t)|_{t=0} - s^{1+\mu(\gamma-2)} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\gamma)} f(t)|_{t=0}. \quad (3.35)$$

Uma vez apresentadas as funções de Mittag-Leffler no Capítulo 2 e as formulações de derivada fracionária, em particular a formulação de Hilfer, discute-se agora o oscilador mecânico fracionário com a derivada de Hilfer através da metodologia da transformada de Laplace, foco principal deste trabalho, no Capítulo 4.

Capítulo 4

Oscilador mecânico fracionário

A modelagem fracionária do oscilador mecânico é bastante abrangente e, devido a isso, é importante elencar algumas contribuições sobre o tema. No que diz respeito à modelagem via derivada fracionária de Riemann-Liouville destaca-se o trabalho de [Łabędzki, Pawlikowski e Radowicz \(2019\)](#) em que a formulação é usada para entender oscilações em estruturas contínuas de materiais viscoelásticos a partir da modelagem da EDOF correspondente ao oscilador harmônico forçado por uma força periódica descrita por uma função $f(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t)$. Uma abordagem semelhante é encontrada em [Chung e Jung \(2014\)](#), onde a força motriz é expressa em termos de uma função cosseno de Mittag-Leffler, mas usando a derivada fracionária de Caputo.

Ademais, entre os trabalhos que utilizam a formulação de derivada fracionária de Caputo para modelar o oscilador mecânico fracionário destacam-se outros dois: em [Parovik \(2020\)](#) um estudo numérico correspondente é realizado usando a derivada fracionária de Caputo, empregando o método das diferenças finitas para resolver EDOFs e outros métodos numéricos para construir oscilogramas e trajetórias de fase para compreender o comportamento gráfico dessas soluções. Em especial, esse estudo fornece evidências de que a ordem da derivada é responsável pela intensidade de dissipação de energia em sistemas oscilatórios fracionários.

Enquanto em [Bernal et al. \(2012\)](#), já discutido na Introdução, a modelagem do oscilador harmônico fracionário realizada possibilita, com a introdução do parâmetro σ de dimensão temporal, interpretar fisicamente as soluções da EDOF correspondente.

Portanto, levando em conta essas contribuições e recorrendo à metodologia da transformada de Laplace inversa, neste capítulo será apresentada e discutida a solução da EDOF correspondente ao oscilador mecânico fracionário a partir da modelagem via derivada fracionária de Hilfer, recuperando os casos precedentes via derivada fracionária de Riemann-Liouville e Caputo.

4.1 EDOF do oscilador harmônico fracionário

Inspirado no trabalho de [Bernal et al. \(2012\)](#), propõe-se a seguinte EDOF para estudar o oscilador harmônico fracionário:

$$\frac{m}{\sigma^{2-\gamma}} {}^H D_{0+}^{\gamma,\mu}(x(t)) + \frac{\beta}{\sigma^{1-\alpha}} {}^H D_{0+}^{\alpha,\mu}(x(t)) + kx(t) = g(t), \quad (4.1)$$

onde $0 < \alpha \leq 1$ e $1 < \gamma \leq 2$.

Nesta seção será estudado o caso em que $g(t)$ é identicamente nula, ou seja, situação na qual o oscilador recebe sua energia inicial, devido ao deslocamento e velocidade iniciais e depois é solto, permitindo oscilar livremente. Separa-se em duas situações: a primeira onde não há forças dissipativas e a segunda com forças dissipativas proporcionais à velocidade. Vale ressaltar que na próxima seção a mesma metodologia será utilizada para analisar a situação em que o oscilador sofre uma força externa periódica.

Note que o expoente do parâmetro de tempo σ foi modificado ao comparar as Eq.(2) e Eq.(4.1), tal decisão se ancora no seguinte fato: como o objetivo é generalizar a EDOF presente na Eq.(4.1) e nem sempre $\gamma = 2\alpha$ então é preciso alterar o expoente do parâmetro σ de $2(1 - \gamma)$ para $(2 - \gamma)$. Porém, antes é necessário esclarecer o papel que esse parâmetro σ desempenha.

4.1.1 O problema da dimensão fracionária de tempo

A aplicação das ferramentas do CF em diversas áreas da física vem crescendo com o tempo, principalmente nas teorias de campo não locais. Mais precisamente,

no domínio do tempo, a extensão de uma descrição local para uma não-local se manifesta como um efeito de memória, que afirma aproximadamente que o comportamento real de um determinado objeto não é apenas influenciado pelo estado real do sistema, mas também por eventos, que aconteceram no passado ([HERRMANN, 2014](#), p. 1; tradução nossa).

Ainda nessa perspectiva, [Rodrigues e Oliveira \(2015\)](#) exemplificam que enquanto uma integral de ordem inteira de uma variável representa a soma de pontos de mesmo peso, independente do quão no passado eles estejam, uma integral fracionária “é também uma soma ponderada, mas com os pesos diminuindo para trás no tempo” ([RODRIGUES; OLIVEIRA, 2015](#)). No geral, a dinâmica fracionária se mostra como uma base para investigação de fenômenos relacionados a algum nível de complexidade, ou melhor, “o operador fracionário reflete processos dissipativos intrínsecos que são suficientemente complicados por natureza” ([STANISLAVSKY, 2006](#), p.1).

No entanto, a relação do CF com esses efeitos ainda não é completamente conhecida e o uso dos operadores de derivação de ordem não inteira pode originar questões relacionadas à unidade de medida das grandezas trabalhadas. Por exemplo, dada a função $x(t)$ que descreve o deslocamento de uma partícula em função do tempo, como é possível compreender a unidade de medida relacionada à derivada de ordem 0,5 de $x(t)$ em relação ao tempo t ? De acordo a análise dimensional, enquanto a grandeza $x(t)$ é medida em metros e $\frac{dx(t)}{dt}$ em m/s , pode-se inferir que $\frac{d^{0,5}x(t)}{dt^{0,5}}$ será medida em $m/s^{0,5}$, produzindo uma outra questão: como interpretar essa grandeza fisicamente?

Em [Gómez-Aguilar et al. \(2011\)](#), [Nasrolahpour \(2012\)](#) e [Bernal et al. \(2012\)](#) é proposta a introdução de um parâmetro arbitrário σ de dimensão temporal a fim de ajustar as unidades de medida e, portanto, refinar a modelagem. Assim, para uma derivada de ordem $n - 1 < \gamma \leq n$ para $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\frac{d^n}{dt^n} \rightarrow \frac{1}{\sigma^{n-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma},$$

note que para $\gamma = 1,75$ o índice n assume valor de 2. Dessa maneira, enquanto a unidade de medida de $\frac{d^{1,75}x(t)}{dt^{1,75}}$ é $m/s^{1,75}$, a de $\frac{1}{\sigma^{0,25}} \frac{d^{1,75}x(t)}{dt^{1,75}}$ é m/s^2 , possibilitando interpretar essa grandeza como a aceleração da partícula.

Por mais que essa abordagem permita o refinamento da descrição matemática dos fenômenos, retomando à interpretação física clássica dos operadores de derivação, ela não pode ser compreendida totalmente como uma interpretação física definitiva da derivada fracionária em si.

4.2 Soluções particulares para a EDOF

Tal como no estudo de EDOs de ordens superiores, a EDOF descrita em Eq.(4.1) será resolvida primeiramente para os casos particulares, isto é, casos em que os coeficientes β e m são nulos, mas não simultaneamente.

4.2.1 Oscilador harmônico fracionário

Ao fixar o termo de amortecimento como zero, que aqui pode ser compreendido como coeficiente de atrito, espera-se que a solução clássica recuperada indique um fenômeno com oscilação e sem amortecimento, tanto pela formulação de Caputo quanto de Riemann-Liouville. Impondo essas condições, tem-se que:

$${}^H D_{0+}^{\gamma;\mu} (x(t)) = -\frac{k}{m} \sigma^{2-\gamma} x(t). \quad (4.2)$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros da equação, recorrendo ao resultado da Eq.(3.35) e denotando $\omega^\gamma = \frac{k}{m}\sigma^{2-\gamma}$, onde ω representa a frequência do movimento quando $\gamma = 2$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [{}^H D_{0+}^{\gamma,\mu} (x(t))] &= -\omega^\gamma X(s) \\ &= s^\gamma X(s) - s^{\mu(\gamma-2)} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\gamma)-1} x(t)|_{t=0} - s^{1+\mu(\gamma-2)} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\gamma)} x(t)|_{t=0}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Além disso, é introduzida a notação $I_{0+}^{(1-\mu)(2-\gamma)-1} x(t)|_{t=0} = x(\dot{0}) = 0$, o que no contexto físico indicaria a velocidade inicial do corpo que oscila, neste caso o corpo parte do repouso, e $I_{0+}^{(1-\mu)(2-\gamma)} x(t)|_{t=0} = x(0) = x_0$, que indicaria a posição inicial da partícula. Dessa forma, a Eq.(4.3) pode ser reescrita como:

$$X(s) = \frac{s^{1+\mu(\gamma-2)} x_0}{s^\gamma + \omega^\gamma} \quad (4.4)$$

cuja inversa da transformada de Laplace é conhecida graças ao **Teorema 2.4.1**, bastando adotar $\alpha := \gamma$ e $\beta := \gamma - \mu(\gamma - 2) - 1$. Ainda, ela é dada por:

$$x(t) = x_0 t^{\gamma-\mu(\gamma-2)-2} E_{\gamma,\gamma-\mu(\gamma-2)-1}(-\omega^\gamma t^\gamma) = x_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \omega^{\gamma k} t^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k + \gamma - \mu(\gamma - 2) - 1)}. \quad (4.5)$$

Deve-se agora estudar a solução separadamente para dois valores distintos do parâmetro $\mu = 0$ e $\mu = 1$.

Veja que para $\mu = 0$ tem-se

$$x(t) = x_0 t^{\gamma-2} E_{\gamma,\gamma-1}(-\omega^\gamma t^\gamma) = x_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \omega^{\gamma k} t^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k + \gamma - 1)}, \quad (4.6)$$

e fixando $\gamma = 2$, obtém-se:

$$x(t) = x_0 E_{2,1}(-\omega^2 t^2) = x_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = x_0 \cos(\omega t).$$

Enquanto que para $\mu = 1$ tem-se

$$x(t) = x_0 E_{\gamma,1}(-\omega^\gamma t^\gamma) = x_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \omega^{\gamma k} t^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k + 1)} = x_0 C s_{2-\gamma}(\omega t) \quad (4.7)$$

e fixando $\gamma = 2$:

$$x(t) = x_0 E_{2,1}(-\omega^2 t^2) = x_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = x_0 \cos(\omega t). \quad (4.8)$$

Embora as soluções encontradas não sejam as mesmas para $\mu = 0$ e $\mu = 1$ para todo valor de γ , ou seja, não sejam as mesmas para as formulações de Riemann-Liouville e Caputo, respectivamente, quando $\gamma = 2$ elas coincidem. Esse resultado também é coerente com o que se esperava para o oscilador harmônico: ao anular o coeficiente de atrito, elimina-se também o amortecimento, restando somente a oscilação, comportamento esperado em um sistema conservativo. Trata-se do *oscilador harmônico simples*, descrito pela função trigonométrica cosseno, com frequência ω .

Ainda, é válido estudar o comportamento geométrico das curvas que descrevem as soluções para valores intermediários de γ , isto é, para valores de γ entre 1 e 2.

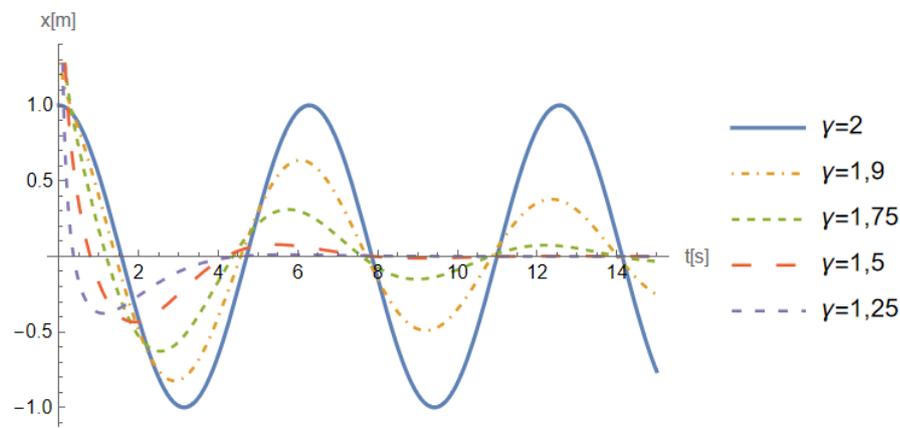


Figura 7 – Eq.(4.5) para alguns valores de γ e $\mu = 0$

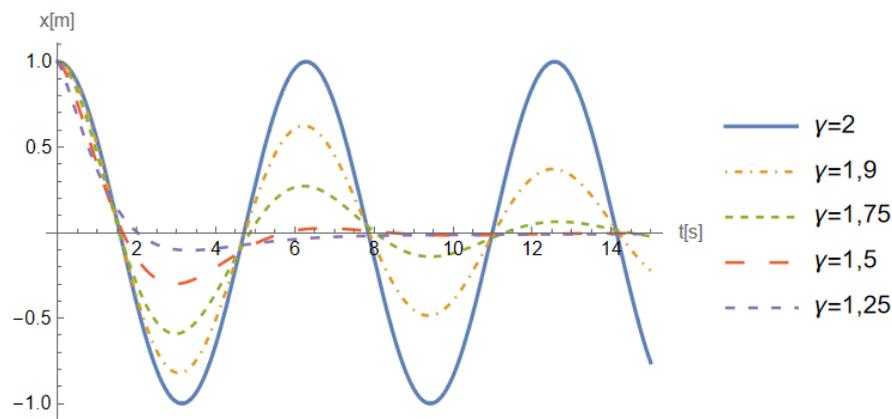


Figura 8 – Eq.(4.5) para alguns valores de γ e $\mu = 1$

Ao comparar as soluções presentes nas Figuras 7 e 8, é evidente que as funções $x(t)$ obtidas através da formulação de derivada fracionária de Caputo mantêm a fase, orientação das cristas e vales, mesmo alterando a ordem da derivada, enquanto as funções $x(t)$ obtidas através da formulação de Riemann-Liouville sofrem defasagem conforme a ordem da derivada é alterada.

Por mais que o termo de amortecimento tenha se anulado, nota-se nas Figuras 7 e 8 que para valores de γ próximos de 2, tanto quando $\mu = 0$ ou $\mu = 1$, as curvas que descrevem as soluções se assemelham às curvas apresentadas na solução do oscilador harmônico amortecido clássico. Portanto, apresenta-se aqui uma alternativa à modelagem do problema do oscilador amortecido, pois as soluções, em ambos os casos, apresentam a oscilação combinada de amortecimento sem envolver o termo de amortecimento. Em outras palavras, o amortecimento pode ser reproduzido alterando a ordem da derivada γ e não necessariamente adicionando o termo com o coeficiente de atrito à EDO.

Dessa forma, ao invés de resolver uma EDO linear de segunda ordem completa, isto é, a EDO presente na Eq.(1) com três termos, de coeficientes constantes, basta resolver a EDOF presente na Eq.(4.2) simplificada e alterar a ordem da derivada.

Agora, deve-se comparar as soluções do oscilador harmônico amortecido, caso clássico, e do oscilador harmônico fracionário para um valor de γ próximo de 2. Para isso é preciso retomar os conceitos físicos trabalhados nos dois modelos: como visto no Capítulo 1 o oscilador harmônico amortecido pode ser classificado como superamortecido, crítico amortecido e subamortecido, isto é, o comportamento do corpo em questão depende da relação algébrica existente entre o termo de amortecimento, simbolizado por β^2 , e a oscilação, simbolizada por $4mk$. Em especial, no estudo das oscilações subamortecidas foi obtida uma equação, mais precisamente a Eq.(1.22), que descreve o balanço enérgico do sistema com do passar o tempo.

Contudo, uma das dificuldades de comparar esse modelo com o modelo fracionário se dá justamente pelo fato de que as grandezas físicas discutidas usando o cálculo clássico nem sempre apresentam correspondentes no CF. Porém, por mais que essa constatação seja verdadeira, vale mencionar também que a metodologia usada por Bernal et al. (2012) permite retomar a interpretação física usual dos operadores de derivação fracionários a partir do parâmetro σ . Dessa forma, para todos os valores $1 < \gamma \leq 2$ pode-se compreender a unidade de medida da grandeza \mathcal{E}_γ que representa a energia mecânica total do oscilador harmônico fracionário de ordem γ como $J = kg \frac{m^2}{s^2}$ como na Eq.(1.22). Em particular, para a formulação de derivada fracionária de Caputo é possível simplificar mais a expressão, além disso, mantendo a definição de energia mecânica como a soma da energia cinética com a potencial elástica segue que

$$\mathcal{E}_\gamma(t) = \frac{m(v_\gamma(t))^2}{2} + \frac{k(x_\gamma(t))^2}{2}, \quad (4.9)$$

onde

$$x_\gamma(t) = x_0 E_{\gamma,1}(-\omega^\gamma t^\gamma)$$

e

$$v_\gamma(t) = {}^C D^{\gamma-1}(x_0 E_{\gamma,1}(-\omega^\gamma t^\gamma)) = x_0 t^{\gamma-1} E_{\gamma,2}(-\omega^\gamma t^\gamma).$$

Logo, a Eq.(4.9) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{E}_\gamma(t) = \frac{x_0^2}{2} \left[m (t^{\gamma-1} E_{\gamma,2}(-\omega^\gamma t^\gamma))^2 + k (E_{\gamma,1}(-\omega^\gamma t^\gamma))^2 \right]. \quad (4.10)$$

Porém, realizando o mesmo procedimento para a formulação de derivada fracionária de Riemann-Liouville obtém-se ${}^{RL}D^{\gamma-1} (E_{\gamma,\gamma-1}(-\omega^\gamma t^\gamma)) = t^{-1} E_{\gamma,0}(-\omega^\gamma t^\gamma)$, o que não pode acontecer, já que para a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ deve-se ter $Re(\beta) > 0$. No entanto, ao expandir a série que define a função de Mittag-Leffler e impondo a substituição $k := k + 1$ pode-se obter

$$x_\gamma(t) = x_0 t^{\gamma-2} E_{\gamma,\gamma-1}(-\omega^\gamma t^\gamma) \quad (4.11)$$

e

$$v_\gamma(t) = {}^{RL}D^{\gamma-1} (E_{\gamma,\gamma-1}(-\omega^\gamma t^\gamma)) = t^{-1} E_{\gamma,0}(-\omega^\gamma t^\gamma) \quad (4.12)$$

onde

$$t^{-1} E_{\gamma,0}(-\omega^\gamma t^\gamma) := -\omega^\gamma t^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(-\omega^\gamma t^\gamma). \quad (4.13)$$

Por fim, substituindo na Eq.(4.9) tem-se

$$\mathcal{E}_\gamma(t) = \frac{x_0^2}{2} \left[m \omega^{2\gamma} (t^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(-\omega^\gamma t^\gamma))^2 + k (t^{\gamma-2} E_{\gamma,\gamma-1}(-\omega^\gamma t^\gamma))^2 \right], \quad (4.14)$$

repare que o termo $\omega^{2\gamma}$ na primeira parcela altera a unidade de medida da expressão, uma vez que a unidade de medida do termo $\frac{x_0^2}{2} m (t^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(-\omega^\gamma t^\gamma))^2$ é $kgm^2/s = Js$ e ao multiplicar por $\omega^{2\gamma}$ cuja unidade de medida é $1/s^2$ tem-se J/s . Dessa forma para corresponder ao contexto físico trabalhado o termo adequado seria ω^γ .

Vale a pena também comparar graficamente as expressões que representam o dispêndio da energia mecânica no oscilador harmônico fracionário e no modelo clássico subamortecido. Tomando $\omega = k = m = x_0 = 1$, $\gamma = 1.9$ e $\mathcal{E}(t) = \frac{e^{-t}}{2}$.

Nota-se na Figura 9 que tanto no oscilador harmônico amortecido clássico quanto no oscilador harmônico fracionário via derivada de Caputo para os mesmos parâmetros fixados tem-se a mesma quantidade de energia mecânica inicial $\mathcal{E}(0) = 0.5$. Entretanto, no oscilador harmônico fracionário via derivada de Riemann-Liouville, apesar dos parâmetros fixados serem os mesmos dos demais modelos, a quantidade de energia inicial é diferente, o que não traduz adequadamente o fenômeno físico estudado. Por outro lado, verifica-se que o decaimento da energia mecânica do sistema se dá mais rapidamente no modelo clássico subamortecido do que nos modelos fracionários. Por fim, comparando os modelos fracionários quando $t \rightarrow \infty$ percebe-se que o decaimento da energia mecânica é, em ambos os modelos, acompanhado de oscilação.

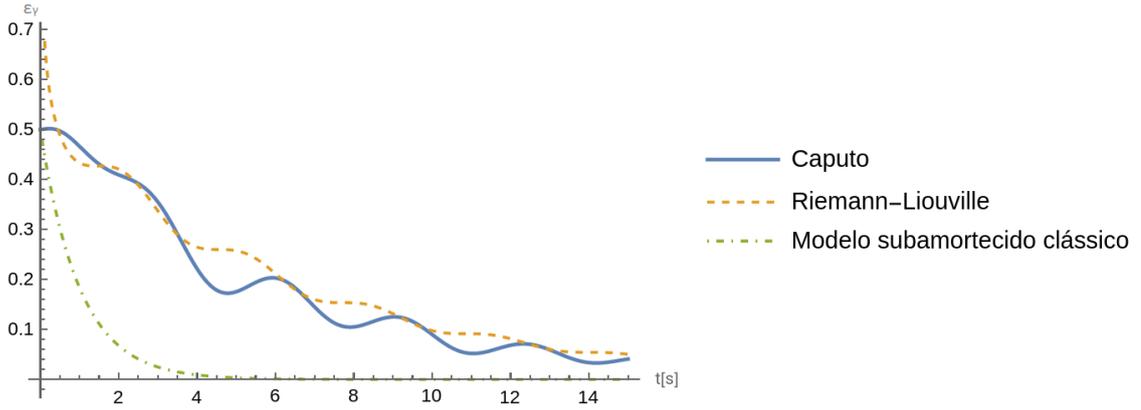


Figura 9 – Eq.(4.10), Eq.(4.14) e Eq(1.22) para $\omega = k = m = x_0 = 1$, $\gamma = 1.9$.

Há ainda a possibilidade de comparar o dispêndio de energia no oscilador harmônico fracionário a partir da aproximação assintótica da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, dessa forma a Eq.(4.10) pode ser reescrita como

$$\mathcal{E}_\gamma(t) \approx \frac{x_0^2}{2} \left[m \left(\frac{-t^{\gamma-2}}{\gamma\omega} e^{-\omega t} - \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k t^{\gamma-k-1}}{\omega^k \Gamma(2-\gamma k)} \right)^2 + k \left(\frac{1}{\gamma} e^{-\omega t} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{-k}}{\omega^k \Gamma(2-\gamma k)} \right)^2 \right],$$

onde $p \in \mathbb{N}$.

Perceba que a energia mecânica total é dada por uma expressão envolvendo funções exponenciais decrescentes e funções potência de expoente negativo, o que indica necessariamente um padrão de decaimento da energia para $t \rightarrow \infty$.

4.2.2 Oscilador harmônico amortecido fracionário

A rigor, ainda que experimentalmente não se registre uma massa nula para um ponto material e tecnicamente esse corpo não se caracterize como um oscilador, o estudo do caso em que $m \rightarrow 0$ e $\beta \neq 0$ se justifica por dois fatores. Primeiro fator: note que se a massa for muito menor do que o valor do coeficiente de atrito, espera-se que a oscilação seja pequena em relação ao amortecimento para quaisquer valores intermediários de α . Segundo fator: é fundamental estudar as semelhanças e diferenças do comportamento das curvas que descrevem as soluções tanto para $\mu = 0$ quanto $\mu = 1$.

Agora, a análise se concentrará na situação em que a massa se torna desprezível em relação ao amortecimento, por conveniência fixa-se $m = 0$. Assim, espera-se obter soluções que se assemelhem a uma exponencial decrescente. A Eq.(4.1) se reduz a:

$${}^H D_{0+}^{\alpha,\mu} x(t) = -\frac{k\sigma^{(1-\alpha)}}{\beta} x(t) \quad (4.15)$$

cuja solução pode ser encontrada empregando o resultado da Eq.(2.16) na equação anterior. Logo,

$$\frac{s^{\mu(\alpha-1)}}{\frac{k\sigma^{(1-\alpha)}}{m} + s^\alpha} \div x_0 t^{\alpha-\mu(\alpha-1)-1} E_{\alpha, \alpha-\mu(\alpha-1)} \left(\frac{-k\sigma^{(1-\alpha)}}{\beta} t^\alpha \right) \quad (4.16)$$

Com a finalidade de recuperar o caso para Riemann-Liouville fixa-se $\mu = 0$ e para Caputo $\mu = 1$. Tem-se respectivamente:

$$x(t) = x_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(\frac{-k\sigma^{(1-\alpha)}}{\beta} t^\alpha \right) \quad (4.17)$$

e

$$x(t) = x_0 E_{\alpha, 1} \left(\frac{-k\sigma^{(1-\alpha)}}{\beta} t^\alpha \right). \quad (4.18)$$

Quando $\alpha = 1$ recupera-se o mesmo resultado em ambos

$$x(t) = x_0 E_{1,1} \left(\frac{-k\sigma^0}{\beta} t \right) = x_0 e^{\frac{-k}{\beta} t}. \quad (4.19)$$

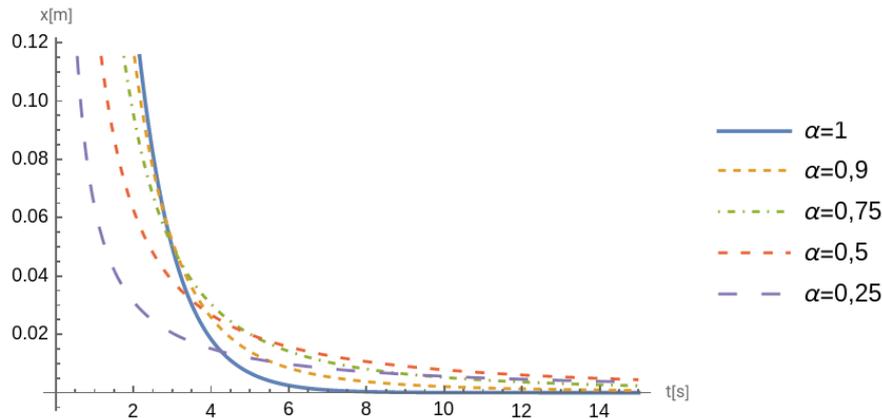
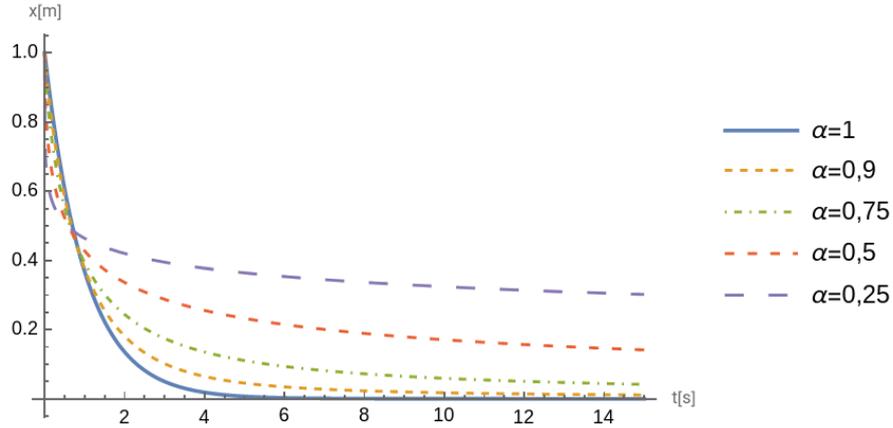


Figura 10 – Eq.(4.17) para alguns valores de α .

Ao comparar as Figuras 10 e 11 percebe-se que para diferentes valores de $0 < \alpha \leq 1$ a modelagem via derivada fracionária de Riemann-Liouville não interpola as soluções particulares tal como aquela via derivada fracionária de Caputo em virtude do fato de que para valores de α cada vez menores o padrão de relaxamento é menos intenso do que para valores maiores de α .

4.2.3 Solução para a EDOF

Para obter a solução da Eq.(4.1), faz-se necessário simplificar o primeiro membro dessa equação. Admitindo que $m \neq 0$ e, dessa forma, multiplicando ambos os membros por $\frac{\sigma^{(2-\gamma)}}{m}$, obtém-se:


 Figura 11 – Eq.(4.18) para alguns valores de α .

$${}^H D_{0+}^{\gamma,\mu}(x(t)) + \frac{\beta\sigma^{(1+\alpha-\gamma)}}{m} {}^H D_{0+}^{\alpha,\mu}(x(t)) + \frac{k\sigma^{(2-\gamma)}}{m} x(t) = 0. \quad (4.20)$$

Introduzindo a notação $\frac{\beta\sigma^{(1+\alpha-\gamma)}}{m} = \theta$ e $\frac{k\sigma^{(2-\gamma)}}{m} = \omega^\gamma$, a equação pode ser simplificada e escrita na forma:

$${}^H D_{0+}^{\gamma,\mu}(x(t)) + \theta {}^H D_{0+}^{\alpha,\mu}(x(t)) + \omega^\gamma x(t) = 0. \quad (4.21)$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros da equação e recordando das expressões obtidas em Eq.(3.32) e Eq.(3.35), a transformada da função $x(t)$ pode ser expressa como

$$X(s) = \frac{s^{1+\mu(\gamma-2)} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\gamma)} x(t)|_{t=0} + s^{\mu(\alpha-1)} I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)} x(t)|_{t=0}}{s^\gamma + \theta s^\alpha + \omega^\gamma} + \frac{s^{\mu(\gamma-2)} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\gamma)-1} x(t)|_{t=0}}{s^\gamma + \theta s^\alpha + \omega^\gamma}.$$

Fixando $\gamma = 1 + \alpha$ tem-se que $I_{0+}^{(1-\mu)(2-\gamma)} x(t)|_{t=0} = I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)} x(t)|_{t=0} = x(0) = x_0$. Por outro lado, $I_{0+}^{(1-\mu)(2-\gamma)-1} x(t)|_{t=0} = \dot{x}_0$, é possível escrever

$$X(s) = \underbrace{\frac{s^{1+\mu(\gamma-2)} x_0}{s^\gamma + \theta s^\alpha + \omega^\gamma}}_{X_1(s)} + \underbrace{\frac{s^{\mu(\alpha-1)} x_0}{s^\gamma + \theta s^\alpha + \omega^\gamma}}_{X_2(s)} + \underbrace{\frac{s^{\mu(\gamma-2)} \dot{x}_0}{s^\gamma + \theta s^\alpha + \omega^\gamma}}_{X_3(s)}. \quad (4.22)$$

Como a transformada de Laplace é linear, é possível encontrar a transformada inversa para cada termo da equação anterior, separando os cálculos a fim de simplificá-los,

$$X_1(s) = \frac{x_0 s^{1+\mu(\gamma-2)}}{s^\gamma + \theta s^\alpha + \omega^\gamma} = \frac{x_0 s^{1+\mu(\gamma-2)}}{s^\gamma + \omega^\gamma} \left(\frac{1}{1 + \frac{\theta s^\alpha}{s^\gamma + \omega^\gamma}} \right). \quad (4.23)$$

Para que a inversa da expressão acima exista, deve-se ter $|\theta s^\alpha| < |-s^\gamma - \omega^\gamma|$ o que implica $\frac{|\theta s^\alpha|}{|s^\gamma + \omega^\gamma|} < 1$. Isso permite expandir a expressão em uma série geométrica:

$$X_1(s) = x_0 \frac{s^{1+\mu(\gamma-2)}}{s^\gamma + \omega^\gamma} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\theta)^n s^{\alpha n}}{(s^\gamma + \omega^\gamma)^n} = x_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\theta)^n s^{\alpha n + \mu(\gamma-2) + 1}}{(s^\gamma + \omega^\gamma)^{n+1}} \quad (4.24)$$

recorrendo aos resultados apresentados sobre a transformada de Laplace inversa envolvendo a função de Mittag-Leffler de três parâmetros:

$$X_1(s) = \mathcal{L} \left[x_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-\theta)^n t^{(\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(2-\gamma) - 2} E_{\gamma, (\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(2-\gamma) - 1}^{n+1} (-\omega^\gamma t^\gamma) \right] (s). \quad (4.25)$$

Analogamente, para os demais termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{x_0 s^{\mu(\alpha-1)}}{s^\gamma + \theta s^\alpha + \omega^\gamma} \\ &= \mathcal{L} \left[x_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-\theta)^n t^{(\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(1-\alpha) - 1} E_{\gamma, (\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(1-\alpha)}^{n+1} (-\omega^\gamma t^\gamma) \right] (s) \end{aligned} \quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned} X_3(s) &= \frac{\dot{x}_0 s^{\mu(\gamma-2)}}{s^\gamma + \theta s^\alpha + \omega^\gamma} \\ &= \mathcal{L} \left[\dot{x}_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-\theta)^n t^{(\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(2-\gamma) - 1} E_{\gamma, (\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(2-\gamma)}^{n+1} (-\omega^\gamma t^\gamma) \right] (s). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Note que a solução é dada por uma série de funções de Mittag-Leffler de três parâmetros:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-\theta)^n [x_0 t^{(\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(2-\gamma) - 2} E_{\gamma, (\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(2-\gamma) - 1}^{n+1} (-\omega^\gamma t^\gamma) + \\ &\quad x_0 t^{(\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(1-\alpha) - 1} E_{\gamma, (\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(1-\alpha)}^{n+1} (-\omega^\gamma t^\gamma) + \\ &\quad \dot{x}_0 t^{(\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(2-\gamma) - 1} E_{\gamma, (\gamma-\alpha)n + \gamma + \mu(2-\gamma)}^{n+1} (-\omega^\gamma t^\gamma)]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Em adição a isso, como a fase e a amplitude são determinadas pelas condições iniciais, toma-se $\dot{x}(0) = 0$, uma vez que o valor de $\dot{x}(0)$ representa, quando $\gamma = 2$, a velocidade inicial. Neste caso tomando esse valor como zero tem-se o corpo partindo do repouso.

Basta verificar agora para $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, $\mu = 1$ e, tanto para $\mu = 0$ quanto para $\mu = 1$, pois o parâmetro μ sempre aparece como fator do produto $\mu(1 - \gamma)$ ou $\mu(2 - \gamma)$. Em suma, fixando $m = 0$ tem-se que :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 E_{2,1}(-\omega^2 t^2) + x_0 t E_{2,2}(-\omega^2 t^2) = x_0 \cos(\omega t) + x_0 \text{sen}(\omega t) \\ &= x_0 \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ao fixar $n = 0$ o termo de amortecimento $(-\theta)^n$ presente na solução fixa-se no valor 1, isso significa que para esse caso o amortecimento não está presente, o que remete ao oscilador harmônico simples. Por mais que essa solução não seja coincidente com a solução apresentada na Eq.(4.8), as mudanças ocorrem devido à escolha das condições iniciais, provocando diferenças entre as soluções no que diz respeito à fase e a amplitude do movimento.

Vale comparar a dedução aqui apresentada com os resultados expostos em outros trabalhos.

Teorema 4.2.1 (Tomovski, Hilfer e Srivastava (2010)). *Tomando $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, $0 < \mu_1 < 1$, $0 < \mu_2 < 1$ $a, b, c \in \mathbb{R}$; considerando a seguinte equação diferencial:*

$$a(D_{0+}^{\alpha_1, \mu_1} x)(t) + b(D_{0+}^{\alpha_2, \mu_2} x)(t) + cx(t) = f(t) \quad (4.30)$$

no espaço de funções Lebesgue integráveis $x \in L(0, \infty+)$ cujas condições iniciais são

$$(I_{0+}^{(1-\mu_1)(1-\alpha_1)} x)(0) = c_2 \text{ e } (I_{0+}^{(1-\mu_2)(1-\alpha_2)} x)(0) = c_1, \quad (4.31)$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Logo, a EDOF, Eq.(4.30), tem solução no espaço $L(0, \infty+)$ dada por:

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{b} \sum_{p=0}^{\infty} \left(-\frac{a}{b}\right)^p & [ac_1 t^{(\alpha_2-\alpha_1)p+\alpha_2+\mu_1(1-\alpha_1)-1} E_{\alpha_2, (\alpha_2-\alpha_1)p+\alpha_2+\mu_1(1-\alpha_1)}^{p+1} \left\{-\frac{c}{b} t^{\alpha_2}\right\} \\ & + bc_2 t^{(\alpha_2-\alpha_1)p+\alpha_2+\mu_2(1-\alpha_2)-1} E_{\alpha_2, (\alpha_2-\alpha_1)p+\alpha_2+\mu_2(1-\alpha_2)}^{p+1} \left\{-\frac{c}{b} t^{\alpha_2}\right\} \\ & + \left(E_{\alpha_2, (\alpha_2-\alpha_1)p+\alpha_2}^{p+1} f\right) \left(-\frac{c}{b} t^{\alpha_2}\right)]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Demonstração. Tomovski, Hilfer e Srivastava (2010, p.804).

Para a situação discutida neste capítulo considere nesse caso em que $f(t)$ é uma função identicamente nula e $1 < \alpha_1 \leq 2$.

4.3 Oscilador forçado fracionário sem amortecimento

Ao analisar a Eq.(4.1) surge uma questão natural: o que ocorre quando a função $g(t)$ não é nula? Mais rigorosamente, o que ocorre quando $g(t)$ é uma função periódica com frequência própria? O corpo que executa o movimento descrito pela Eq.(4.1) quando adotada uma função periódica $g(t)$ é denominado de oscilador harmônico forçado. Em outras palavras, o segundo membro da equação sendo diferente de zero indica que há forças externas adicionando energia ao sistema. Assim, nesta seção a força externa também será modelada como uma função periódica tal como realizada em Łabędzki, Pawlikowski e

Radowicz (2019) e Parovik (2020), mas ao invés de usar funções trigonométricas emprega-se aqui a função *pente de Dirac* já apresentada no Capítulo 1, Eq.(1.16), tal como realizado em Dutra, Ribeiro e Porto (2018) onde os osciladores forçados são estudados a partir das ferramentas do cálculo clássico.

Apresenta-se aqui a modelagem do oscilador harmônico fracionário forçado por um pente de Dirac sem amortecimento. Para isso a Eq.(4.1) pode ser reescrita como

$$\frac{m}{\sigma^{2-\gamma}} {}^H D_{0+}^{\gamma;\mu}(x(t)) + k.x(t) = J_0 \sum_{n=1}^N \delta(t - n\tau). \quad (4.33)$$

onde J_0 é o impulso medido em Ns , τ é o intervalo de tempo de cada empurrão em segundos, N o número de empurrões e δ a função delta de Dirac.

Tomando $x(0) = x_0$ e $\dot{x}_0 = 0$, ou seja, admitindo que o corpo parte do repouso em uma posição predeterminada e introduzindo a $\omega_0^\gamma = \frac{k}{m}\sigma^{2-\gamma}$ e $J_0^* = J_0\sigma^{2-\gamma}$ na Eq.(4.33), tem-se

$${}^H D_{0+}^{\gamma;\mu}(x(t)) + \omega_0^\gamma x(t) = J_0^* \sum_{n=1}^N \delta(t - n\tau).$$

Aplicando a transformada de Laplace nos dois membros da equação,

$$\mathcal{L} [{}^H D_{0+}^{\gamma;\mu}(x(t))] + \mathcal{L} [\omega_0^\gamma x(t)] = \mathcal{L} \left[J_0^* \sum_{n=1}^N \delta(t - n\tau) \right],$$

usando a transformada de Laplace para a derivada fracionária de Hilfer para $1 < \gamma \leq 2$ tem-se

$$\begin{aligned} s^\gamma X(s) - s^{1+\mu(\gamma-2)} x_0 &= -\omega_0^\gamma X(s) + J_0^* \sum_{n=1}^N \mathcal{L} [\delta(t - n\tau)] \\ s^\gamma X(s) - s^{1+\mu(\gamma-2)} x_0 &= -\omega_0^\gamma X(s) + J_0^* \sum_{n=1}^N e^{-n\tau s} \\ (s^\gamma + \omega_0^\gamma) X(s) &= s^{1+\mu(\gamma-2)} x_0 + J_0^* \sum_{n=1}^N e^{-n\tau s} \\ X(s) &= \frac{s^{1+\mu(\gamma-2)}}{s^\gamma + \omega_0^\gamma} + J_0^* \sum_{n=1}^N \left(\frac{e^{-n\tau s}}{s^\gamma + \omega_0^\gamma} \right). \end{aligned}$$

A partir da transformada de Laplace para a derivada de Hilfer e isolando o termo $X(s) = \mathcal{L} [x(t)]$, segue que:

$$\begin{aligned}
s^\gamma X(s) - s^{1+\mu(\gamma-2)}x_0 &= -\omega_0^\gamma X(s) + J_0^* \sum_{n=1}^N \mathcal{L}[\delta(t - n\tau)] \\
s^\gamma X(s) - s^{1+\mu(\gamma-2)}x_0 &= -\omega_0^\gamma X(s) + J_0^* \sum_{n=1}^N e^{-n\tau s} \\
(s^\gamma + \omega_0^\gamma) X(s) &= s^{1+\mu(\gamma-2)}x_0 + J_0^* \sum_{n=1}^N e^{-n\tau s} \\
X(s) &= \frac{s^{1+\mu(\gamma-2)}}{s^\gamma + \omega_0^\gamma} + J_0^* \sum_{n=1}^N \left(\frac{e^{-n\tau s}}{s^\gamma + \omega_0^\gamma} \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, resta aplicar a transformada de Laplace inversa para cada uma das parcelas: a segunda parcela tem a transformada inversa calculada pela **Proposição 1.1.2**, enquanto a primeira parcela tem a transformação já avaliada no **Teorema 2.4.1**, então

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 t^{\gamma-\mu(\gamma-2)-2} E_{\gamma, \gamma-\mu(\gamma-2)-1}(-\omega_0^\gamma t^\gamma) + \\
&J_0^* \sum_{n=1}^N [H(t - n\tau)] (t - n\tau)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(\omega_0^\gamma (t - n\tau)^\gamma).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Tomando $\mu = 0$ é recuperada a solução de acordo com Riemann-Liouville e para $\mu = 1$ de acordo com Caputo. Além disso, para $\gamma = 2$ a solução coincide entre ambas as formulações, percebe-se que

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 E_{2,1}(-\omega_0^\gamma t^2) + J_0^* \sum_{n=1}^N H(t - n\tau) (t - n\tau) \frac{\text{sen}(\omega_0(t - n\tau))}{\omega_0(t - n\tau)} \\
&= x_0 \cos(\omega_0 t) + J_0^* \sum_{n=1}^N H(t - n\tau) \frac{\text{sen}(\omega_0(t - n\tau))}{\omega_0}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

4.3.1 Esboço das curvas do oscilador forçado fracionário

Assim, é possível esboçar o gráfico para a solução da Eq.(4.35). Tomando os valores: $x_0 = 0,01m$, $J_0 = 0,005Ns$, $\tau = 6$, $N = 360$, $\sigma = 1s$, $\omega_0 = 1$ e $t_{\text{total}} = 216$.

O resultado presente na Figura 12 corresponde à descrição física do fenômeno do batimento. Apesar da frequência natural do oscilador ser diferente da frequência da carga externa, com o tempo fica claro que ocorre uma sobreposição de duas oscilações escalonadas. Os “saltos” representados na figura indicam a ação da função de Heaviside periodicamente.

Agora, alterando a ordem $\gamma = 1,9$ seguem os contornos das curvas para $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$, conforme Figura 12 e Figura 13, respectivamente.

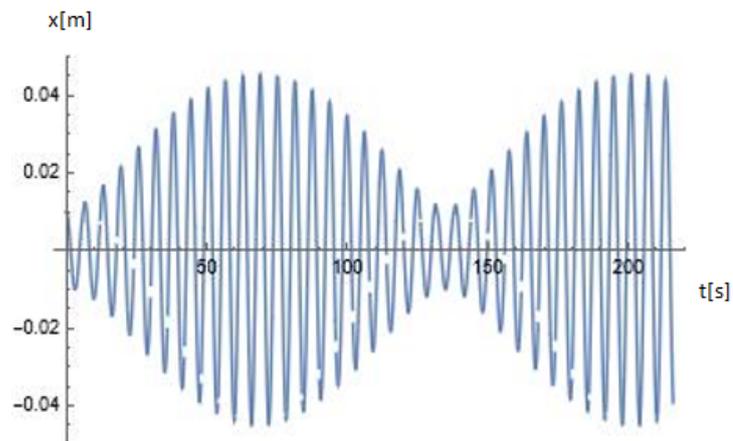


Figura 12 – Solução para Eq.(4.35) com $\gamma = 2$.

Em ambas as formulações derivadas, Figuras 13 e 14, para um pequeno valor de x_0 ocorre um aumento na amplitude de movimento, mas logo em seguida há um regime de relaxamento que tende a estabilizar a amplitude de oscilação.

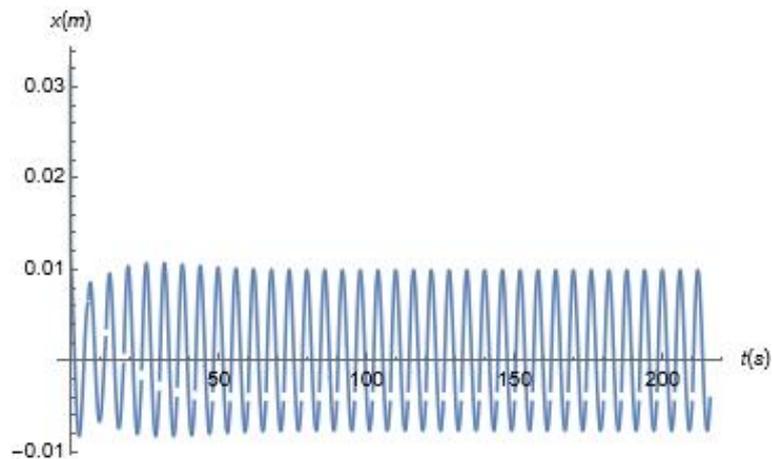
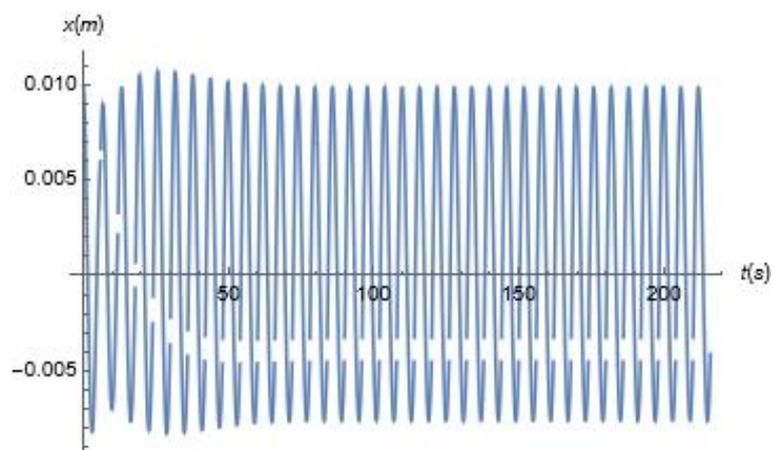
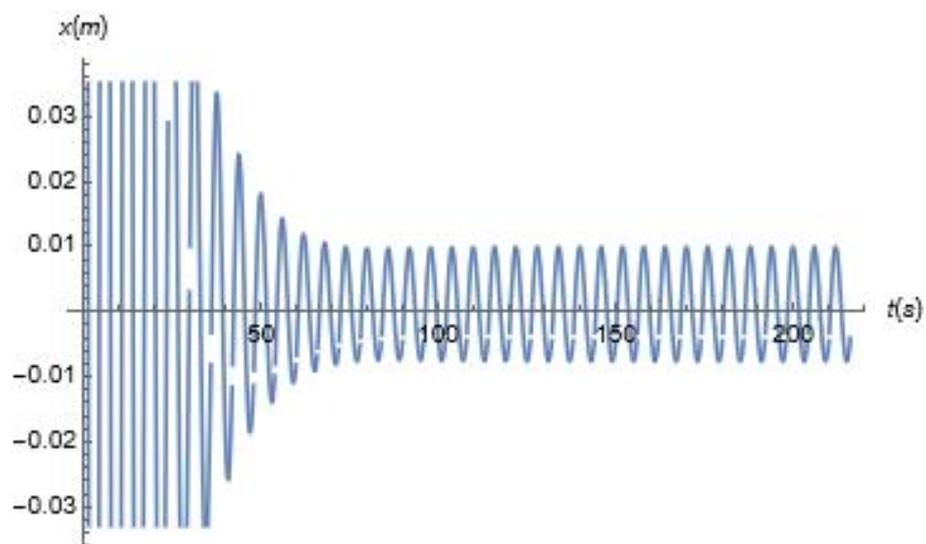


Figura 13 – Solução da Eq.(4.35) para $\gamma = 1,9$ e $\mu = 0$.

Note que, alterar $x_0 = 0,5$ acarreta em um aumento do efeito de relaxamento como indica a Figura 15. Esta solução mostra o acoplamento entre a força externa, que tende a manter a batida, e um efeito de fricção, que tende a dissipá-lo.

Figura 14 – Solução da Eq.(4.35) para $\gamma = 1,9$ e $\mu = 1$.Figura 15 – Solução da Eq.(4.35) para $\gamma = 1,9$, $\mu = 0$ e $x_0 = 0,5$.

Considerações finais

Neste trabalho foram estudados alguns modelos de osciladores mecânicos, desde os modelos clássicos até os modelos fracionários, sendo que boa parte da discussão apresentada se amparou na comparação entre os operadores de derivação fracionária: seja de Riemann-Liouville, Caputo, ou propriamente, de Hilfer. Para isso, foi utilizada majoritariamente a metodologia da transformada de Laplace, visto que ela permitiu transformar o problema de partida em um problema mais simples. Considere-se então a metodologia das transformadas integrais como uma ferramenta indispensável para o estudo de equações diferenciais fracionárias de coeficientes constantes.

No Capítulo 1 foi estudado o oscilador mecânico clássico a partir da introdução das principais propriedades da transformada de Laplace tal como sua linearidade, a existência e unicidade de sua transformada inversa, bem como as propriedades relacionadas ao produto de convolução, operação essa essencial para construir o conceito de integração fracionária posteriormente. O resultado apresentado na análise do oscilador harmônico amortecido pela transformada de Laplace serviu de base para compará-lo com os modelos fracionários apresentados no Capítulo 4, pois a solução do oscilador harmônico amortecido é dada em termos de funções exponenciais.

Essa constatação confirma a observação de que as funções de Mittag-Leffler cumprem no cálculo fracionário o mesmo papel da função exponencial no cálculo clássico, pois emergem naturalmente nas soluções dos osciladores mecânicos fracionários, ou melhor, aparecem como solução das equações diferenciais ordinárias fracionárias de coeficientes constantes. No Capítulo 2 foram apresentadas as funções de Mittag-Leffler de um, dois e três parâmetros, além de suas transformadas de Laplace, o que auxiliou na resolução das equações diferenciais fracionárias no Capítulo 4.

A exposição dos principais conceitos do cálculo fracionário no Capítulo 3 não apenas serviu de fundamento para a discussão do oscilador mecânico, mas também foi possível notar diferenças importantes em relação às formulações de derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo. No geral, por mais que foi apresentada a condição para que ambas as formulações de derivada coincidam, a formulação de derivada fracionária de Riemann-Liouville não pôde generalizar alguns resultados do cálculo clássico: como

a derivada de uma constante e a derivada de uma exponencial (no caso uma expressão envolvendo a função de Mittag-Leffler). Já a formulação de derivada fracionária de Caputo conseguiu retomar esses resultados do cálculo clássico.

A formulação de derivada fracionária de Hilfer se destacou como uma ferramenta facilitadora da modelagem do oscilador mecânico fracionário, visto que em um mesmo operador foi possível encontrar as soluções tanto em Riemann-Liouville quanto em Caputo, sem a necessidade de calculá-las separadamente, apenas alterando o valor do parâmetro μ . Além disso, usando a derivada fracionária de Hilfer em algumas funções, fica evidente que quando a solução apresentada não depende do parâmetro μ isso indica que essa solução é a mesma tanto calculada via derivada fracionária de Riemann-Liouville quanto via derivada fracionária de Caputo.

A modelagem fracionária do oscilador harmônico presente no Capítulo 4 revelou que, a partir do estudo das propriedades algébricas das soluções e da análise do esboço das curvas que representam as funções $x(t)$ encontradas, ao alterar a ordem das derivadas presentes na equação diferencial fracionária proposta, é possível emular o padrão de amortecimento sem a presença do termo de amortecimento na equação. Além do mais, a utilização do parâmetro σ de dimensão temporal ajustou as unidades de medidas correspondentes aos operadores de derivação fracionária, retomando sua interpretação física clássica, e possibilitando estudar o dispêndio de energia mecânica do sistema. Esse mesmo padrão de relaxamento provocado pela alteração da ordem da derivada fracionária pôde ser percebido também nas soluções do oscilador forçado fracionário. No mais, destaca-se a formulação de derivada fracionária de Caputo como sendo a mais adequada para descrever o fenômeno físico discutido.

Já a solução encontrada para o oscilador harmônico amortecido fracionário é dada como uma série de funções de Mittag-Leffler de três parâmetros e, ao retirar o termo de amortecimento, o resultado encontrado retoma o oscilador harmônico simples para ambas as formulações de derivada fracionária: tanto de Riemann-Liouville quanto de Caputo, atingindo, assim, o objetivo central desse estudo.

Uma continuação desse trabalho é o estudo sistemático das oscilações amortecidas forçadas, discutindo mais detalhadamente a relação existente entre a modelagem fracionária e os efeitos físicos dissipativos em teorias de campos não-locais. Além disso, espera-se que seja possível discutir e comparar as formulações de derivadas fracionárias, bem como as condições iniciais mais apropriadas para a modelagem desse sistema físico.

Referências Bibliográficas

- ABBAS, S.; BENCHOHRA, M.; LAZREG, J.; ZHOU, Y. *A survey on Hadamard and Hilfer fractional differential equations: analysis and stability*. *Chaos, Solitons Fractals*, **102**, p. 47–71, 2017. Citado na página 53.
- BAUER, W.; WESTFALL, G. D.; DIAS, H. *Física para Universitários - Mecânica*. São Paulo, SP: McGraw Hill, 2012. Citado na página 15.
- BERNAL, J.; GÓMEZ-AGUILAR, J.; CORDOVA, T.; GUZMAN-CABRERA, R.; ROSALES-GARCIA, J. *Fractional mechanical oscillators*. *Revista Mexicana de Física*, **58**, p. 348–352, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 12, 13, 57, 58, 59 e 62.
- BROWN, J.; CHURCHILL, R.; DOERING, C. I. *Várias Complexas e Aplicações*. 9. ed. Porto Alegre, RS: AMGH, 2015. Citado na página 44.
- CAMARGO, R. F. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 43 e 48.
- CHUNG, W. S.; JUNG, M. *Fractional damped oscillators and fractional forced oscillators*. *Journal of the Korean Physical Society*, **64**, p. 186–191, 2014. Citado na página 57.
- DARTORA, C.; ZANELLA, F.; CABRERA, G. *Emergence of fractional quantum mechanics in condensed matter physics*. *Physics Letters A*, **415**, p. 127643, 2021. Citado na página 41.
- DEBNATH, L.; BHATTA, D. *Integral Transforms and Their Applications*. 3. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2014. Citado na página 19.
- DJRBASHIAN, M. *Integral Transforms and Representation of Functions in the Complex Domain*. Nauka, Moscow, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- DUTRA, R.; RIBEIRO, L.; PORTO, C. *Oscilador forçado por um pente de Dirac: uma aplicação da transformada de Fourier-Mellin*. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **41**, p. 1–7, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 69.
- GARRA, R.; GORENFLO, R.; POLITO, F.; TOMOVSKI, Z. *Hilfer-Prabhakar derivatives and some applications*. *Applied Mathematics and Computation*, **242**, p. 576–589, 2014. Citado na página 53.
- GARRAPPA, R.; KASLIK, E.; POPOLIZIO, M. *Evaluation of fractional integrals and derivatives of elementary functions: overview and tutorial*. *MDPI Mathematics*, **7**, n. 5, p. 2–21, 2019. Citado na página 52.

- GÓMEZ-AGUILAR, J.; ROSALES, J.; BERNAL, J.; TKACH, V.; GUÍA, M. *Fractional electromagnetic wave. The Interdisciplinary Journal of Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, **1**, p. 4–8, 2011. Citado na página 59.
- GORENFLO, R.; KILBAS, A.; MAINARDI, F.; ROGOSIN, S. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. 1. ed. Heidelberg, Germany: Springer, 2014. Citado na página 36.
- HERRMANN, R. *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*. 2. ed. Toh Tuck Link, Singapore: World Scientific, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 58.
- HILFER, R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. 1. ed. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2000. Citado na página 53.
- KURODA, L.; TAVONI, R.; CAMARGO, R. Oscilador harmônico fracionário. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, **3**, p. 1–2, 2015. Citado na página 12.
- ŁABĘDZKI, P.; PAWLIKOWSKI, R.; RADOWICZ, A. *On fractional forced oscillator. AIP Conference Proceedings 2077, 020036*, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 69.
- MARIN, D. *O cálculo Fracionário Aplicado a Fenômenos Difusivos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, 2020. Citado na página 42.
- MITTAG-LEFFLER, G. *Sur la Nouvelle Fonction $E_\alpha(x)$* . *C. R. Acad. Sci. Paris*, **137**, p. 554–558, 1903. Citado na página 30.
- MORTICI, C. *The asymptotic series of the generalized Stirling formula. Computers Mathematics with Applications*, **60**, p. 786–791, 2010. Citado na página 31.
- NASROLAHPOUR, H. *Algebraic long-time decay in fractional classical mechanics. Prespacetime Journal, No 3*, **3**, p. 1194 – 1196, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 59.
- NUSSENZVEIG, M. *Curso de Física Básica: Mecânica (vol.1)*. São Paulo, SP: Blucher, 2013. Citado na página 26.
- OLIVEIRA, D.; OLIVEIRA, E. C. *Hilfer-Katugampola fractional derivative. Computational and Applied Mathematics*, **37**, p. 3672–3690, 2017. Citado na página 53.
- OLIVEIRA, D. dos Santos de. *Derivada Fracionária e as Funções de Mittag-Leffler*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 32, 37, 41, 52 e 54.
- OLIVEIRA, E. C. *Solved Exercises in Fractional Calculus*. 1. ed. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. Citado 7 vezes nas páginas 31, 37, 42, 47, 49, 50 e 53.
- _____. *Sobre a clássica função de Mittag-Leffler. Revista Matemática Universitária*, **1**, p. 1–21, 2020. Citado na página 40.
- OLIVEIRA, E. C.; MAINARDI, F.; VAZ, J. *Fractional models of anomalous relaxation based on the Kilbas and Saigo function. Meccanica*, **49**, p. 2049–2060, 2014. Citado na página 39.

- PAROVIK, R. *Mathematical modeling of linear fractional oscillators*. *MDPI Mathematics*, n. 11, **8**, p. 1–26, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 69.
- PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations*. San Diego: Mathematics in Science and Engineering, Vol.198, Academic Press, 1999. Citado na página 47.
- PRABHAKAR, T. R. *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel*. *Yokohama Mathematical Journal*, **19**, p. 7–15, 1971. Citado na página 37.
- RANJBAR-MOTLAGH, A. *A Remark on isometries of absolutely continuous spaces*. *Journal of Function Spaces*, **2020**, p. 1–3, 2020. Citado na página 48.
- RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. *Introdução ao cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática*. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **37**, p. 1–12, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 12, 45 e 58.
- SALIM, T.; FARAJ, A. *A generalization of Mittag-Leffler function and integral operator associated with fractional calculus*. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, **3**, p. 1–13, 07 2012. Citado na página 30.
- SAMKO, S.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. 1. ed. Amsterdam: Gordon and Breach, 1993. Citado na página 12.
- SCHIFF, J. *The Laplace Transform: Theory and Applications*. Auckland, New Zealand: Springer, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.
- SOUZA, J. V. C.; OLIVEIRA, E. C. *On the ψ -Hilfer fractional derivative*. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **60**, p. 72–91, 2017. Citado na página 53.
- STANISLAVSKY, A. *Hamiltonian formalism of fractional systems*. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, **49**, p. 93–101, 2006. Citado na página 58.
- STRICHARTZ, R. S. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2003. Citado na página 22.
- TEODORO, G. S. *Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 30, 34, 44 e 49.
- TEODORO, G. S.; MACHADO, J. A. T.; OLIVEIRA, E. C. *A review of definitions of fractional derivatives and other operators*. *Journal of Computational Physics*, **388**, p. 195–208, 2019. Citado na página 52.
- THIM, J. *Continuous Nowhere Differentiable Functions*. Dissertação (Mestrado) — Luleå University of Technology, Luleå, Suécia, 2003. Citado na página 48.
- TOMOVSKI, Z.; HILFER, R.; SRIVASTAVA, H. M. *Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions*. *Integral Transforms and Special Functions*, **21**, n. 11, p. 797–814, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 38 e 68.

TONIDANDEL, D.; ARAÚJO, A. *A função delta revisitada: de Heaviside a Dirac*. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **37**, p. 3306–1, 2015. Citado na página 21.

TSEYTLIN, A. I. *Métodos Aplicados de Solução de Problemas de Valor Limite em Engenharia Civil (em Russo)*. Stroyizdat, Moscow: Universidade Estatal de Moscovo, 1984. Citado na página 35.

VAZ, J.; OLIVEIRA, E. C. *On the fractional Kelvin-Voigt oscillator*. *Mathematics in Engineering*, **4**, p. 1–23, 2022. Citado na página 12.

WIMAN, A. *Über den fundamental satz in der theorie der funktionen $E_\alpha(x)$* . *Acta Math*, **29**, p. 191–201, 1905. Citado na página 34.

XIAO-JUN, Y. *Fractional trigonometric functions in complex-valued space: applications of complex number to local fractional calculus of complex function*. *China University of Mining and Technology*, Xuzhou, China, 2011. Citado na página 35.

YOUNG, H.; FREEDMAN, R.; SEARS, F.; ZEMANSKY, M. *Sears e Zemansky Física I: Mecânica*. São Paulo, SP: Pearson Addison Wesley, 2003. Citado na página 14.

ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. São Paulo: CENGAGE Learning, 2012. Citado na página 16.