



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

ANDRES VALENTINO LANDETA BEJARANO

**Avaliação do modelamento da propagação de
ondas sísmicas pelo método lowrank**

Campinas

2022

Andres Valentino Landeta Bejarano

Avaliação do modelamento da propagação de ondas sísmicas pelo método lowrank

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Maria Amélia Novais Schleicher

Coorientador: Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Andres Valentino Landeta Bejarano e orientada pela Profa. Dra. Maria Amélia Novais Schleicher.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L233a Landeta Bejarano, Andres Valentino, 1995-
Avaliação do modelamento da propagação de ondas sísmicas pelo método lowrank / Andres Valentino Landeta Bejarano. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Maria Amélia Novais Schleicher.

Coorientador: Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Imageamento sísmico. 2. Método lowrank. I. Schleicher, Maria Amélia Novais, 1967-. II. Schleicher, Joerg Dietrich Wilhelm, 1964-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Evaluation of seismic wave propagation modeling by the lowrank method

Palavras-chave em inglês:

Seismic imaging

Lowrank method

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Maria Amélia Novais Schleicher [Orientador]

Ricardo Caetano Azevedo Biloti

Jessé Carvalho Costa

Data de defesa: 08-04-2022

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-8569-5523>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/9969942706431955>

**Dissertação de Mestrado defendida em 08 de abril de 2022 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). MARIA AMÉLIA NOVAIS SCHLEICHER

Prof(a). Dr(a). RICARDO CAETANO AZEVEDO BILOTI

Prof(a). Dr(a). JESSÉ CARVALHO COSTA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

A meu pai Wilson (in memoriam), sinto sua ausência todos os dias, eu gostaria de ter tido mais tempo com ele para celebrar nossa conquista juntos. Ele é minha inspiração para concluir meu mestrado.

*A minha mãe Ruth, minha companheira da vida, toda minha admiração sempre.
Tudo o que eu sou e vou chegar a ser, é por eles.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela sua misericórdia e por me mostrar que apesar de tudo, Ele nunca abandona a seu filho.

A Wilson e Ruth, meus pais, pelo seu amor, esforço e apoio incondicional para que seus filhos alcancem seus sonhos. A Nathalie, Carmen e Patricio, meus irmãos, que sempre acreditaram em mim e me cederam seu colo nos meus piores dias.

A minha orientadora professora Maria Amélia Novais Schleicher e meu co-orientador professor Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher, por seu tempo e dedicação me ensinando conhecimento valioso, para me tornar um excelente profissional. Aos meus demais professores do grupo de Geofísica Computacional, o professor Ricardo Biloti e o professor Lucio Santos por seus conselhos na elaboração do presente trabalho.

Agradeço especialmente ao professor Jessé Costa autor material do algoritmo do modelamento *lowrank* que compartilhou comigo e com o qual estou trabalhando.

Aos meus colegas Joyrles, José Jesús e Valdencastro do grupo de Geofísica Computacional, pela guia e ajuda no trabalho.

Ao Pedro Castro Verdezoto e o Enrique Lopez, sem suas indicações não tivesse conseguido chegar a estudar em umas das melhores universidades do mundo como é a UNICAMP.

À UNICAMP, IMECC, aos professores do programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e a secretaria de Pós-Graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço a FAEPEX/FUNCAMP pelo auxílio financeiro.

“Você é uma águia, filho, você nasceu para voar alto, suas asas estão prontas, vá com fé em direção ao seu destino.”

Wilson Landeta

Resumo

O modelamento da propagação da onda é uma parte fundamental para o imageamento sísmico, pelo qual se requer métodos precisos para representar o campo de onda. O método *lowrank* é aplicado à matriz propagadora determinada pela extrapolação da solução da equação da onda. Nesse trabalho, é avaliado o desempenho absoluto e relativo do método *lowrank* em meios homogêneos nos quais tem-se expressões teóricas, assim como em meios heterogêneos. Realizamos vários testes em modelos de meios homogêneos com diferentes discretizações espaciais e temporais, e a resposta do modelamento foi comparada com a solução analítica, mostrando boa acurácia cinematicamente, enquanto o desempenho na dinâmica foi afetado pelo intervalo de amostragem temporal, embora para cada modelo foi possível determinar uma discretização temporal no qual conseguiu-se um erro dinâmico menor que 1% para modelar a onda em meios homogêneos. Para determinar o desempenho relativo foi considerado o método de diferenças finitas tradicional de segunda ordem em tempo e espaço. Os coeficientes de reflexão aproximados pelo método *lowrank* considerando um modelo com um refletor plano foram comparados com os coeficientes de reflexão de ondas planas para os quais tem-se expressões teóricas. Neste caso, observa-se que com o método *lowrank* obtém-se os coeficientes com erro menor que 1% quando comparada ao coeficiente teórico, mostrando melhor resultado do que obtido por diferenças finitas. O tempo computacional dos métodos foi avaliado, sendo que *lowrank* apresenta um crescimento linear do tempo com o tamanho do modelo, isto sugere que para modelos de grande porte, *lowrank* economize o tempo de modelamento em comparação com diferenças finitas.

Palavras-chave: Imageamento sísmico, Método *lowrank*.

Abstract

Wave propagation modeling is a fundamental part of seismic imaging, whereby accurate methods are required to represent the wave field. The lowrank method is applied to the propagator matrix determined by extrapolating the solution of the wave equation. In this work, we evaluate the absolute and relative performance of the lowrank method in homogeneous media, in which one has theoretical expressions, as well as in heterogeneous media. We performed several tests in homogeneous models with different spatial and temporal discretizations, and compared the modeling response with the analytical solution, showing good kinematic accuracy. The quality of the dynamics was affected by the temporal sampling interval, although for each model it was possible to determine a temporal discretization in which a dynamic error of less than 1% was achieved by modeling the wave in homogeneous media. To determine relative performance the traditional second-order finite-difference method in time and space was considered. The reflection coefficients approximated by the lowrank method considering a model with a planar reflector were compared with the plane-wave reflection coefficients for which theoretical expressions are available. In this case, it is observed that with the lowrank method the coefficients are obtained with less than 1% error when compared to the theoretical coefficients, showing a better result than that obtained by finite differences. The computational time of the methods was evaluated, with lowrank showing a linear increase in time with model size, suggesting that for large models, lowrank can be expected to save modeling time compared to finite differences.

Keywords: Seismic imaging, Lowrank method.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Pulso de Ricker ($\Delta t = 0.001$ s).	28
Figura 2 – Comparação dos traços temporais da solução analítica com a solução obtida utilizando o método <i>lowrank</i> no modelo A com $\Delta t = 0.001$ s.	28
Figura 3 – Envelope dos traços temporais da solução analítica com a solução obtida utilizando o método <i>lowrank</i> no modelo A com $\Delta t = 0.001$ s.	29
Figura 4 – Comparação dos traços temporais da solução analítica com a solução obtida utilizando o método <i>lowrank</i> no modelo B com $\Delta t = 0.001$ s.	30
Figura 5 – Pulso de Ricker ($\Delta t = 0.0025$ s).	30
Figura 6 – Snapshot da propagação de onda no modelo A com uma fonte injetora localizada a 4.5 km da origem com uma profundidade de 1000 m após 1.5 s.	31
Figura 7 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 6(a).	31
Figura 8 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 6(b).	32
Figura 9 – Comparação dos traços temporais da solução analítica com <i>lowrank</i> e diferenças finitas no modelo A com $\Delta t = 0.0025$ s.	33
Figura 10 – Pulso de Ricker ($\Delta t = 0.005$ s).	33
Figura 11 – Snapshot da propagação de onda no modelo B com uma fonte injetora localizada a 4.5 km da origem com uma profundidade de 1000 m após 1.5 s.	34
Figura 12 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do centro do snapshot da Figura 11(a).	34
Figura 13 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do centro do snapshot da Figura 11(b).	35
Figura 14 – Comparação dos traços temporais da solução analítica com <i>lowrank</i> e diferenças finitas para o modelo B com $\Delta t = 0.005$ s.	35
Figura 15 – Snapshot da propagação de onda no modelo C com uma fonte injetora localizada a 2.25 km da origem com uma profundidade de 2.25 km após 1 s.	36
Figura 16 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 15(a), obtido por <i>lowrank</i> . Sobreposto é o mesmo traço na direção reversa, para confirmar simetria.	36
Figura 17 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 15(b), obtido por diferenças finitas.	37

Figura 18 – Tempo de modelamento do método <i>lowrank</i> e diferenças finitas considerando um meio homogêneo.	38
Figura 19 – Snapshot da propagação de onda no modelo D com uma fonte injetora localizada a 4.5 km da origem com uma profundidade de 1 km após 1.5 s.	39
Figura 20 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 19(a).	39
Figura 21 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 19(b).	40
Figura 22 – Traço temporal de <i>lowrank</i> no modelo D.	40
Figura 23 – Traço temporal de diferenças finitas no modelo D.	41
Figura 24 – Seção de fonte comum (tiro em 4500 m) no método de <i>lowrank</i>	41
Figura 25 – Seção de fonte comum (tiro em 4500 m) no método de diferenças finitas.	42
Figura 26 – (a) Primeiro experimento; (b) Segundo experimento considerando receptores espelho; (c) Terceiro experimento.	43
Figura 27 – Ilustração dos experimentos feitos para aproximar os coeficientes de reflexão.	43
Figura 28 – Comparação dos coeficientes de reflexão teórico com <i>lowrank</i> e diferenças finitas para o modelo E.	44
Figura 29 – Erro relativo dos coeficientes de reflexão aproximados pelo método <i>lowrank</i> e diferenças finitas para o modelo E.	45
Figura 30 – Comparação dos coeficientes de reflexão teórico com <i>lowrank</i> e diferenças finitas para o modelo F.	45
Figura 31 – Erro relativo dos coeficientes de reflexão aproximados pelo método <i>lowrank</i> e diferenças finitas para o modelo F.	46
Figura 32 – Comparação dos coeficientes de reflexão teórico com <i>lowrank</i> e diferenças finitas para o modelo G.	46
Figura 33 – Erro relativo dos coeficientes de reflexão aproximados pelo método <i>lowrank</i> e diferenças finitas para o modelo G.	47
Figura 34 – Modelo de velocidade sintético.	48
Figura 35 – Snapshot da propagação de onda em um meio de velocidade heterogêneo (Modelo BP) após 3 s.	48
Figura 36 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraída da Figura 35(a).	49
Figura 37 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraída da Figura 35(b).	49
Figura 38 – Traço temporal de <i>lowrank</i> no modelo de velocidade BP.	50
Figura 39 – Traço temporal de diferenças finitas no modelo de velocidade BP.	50
Figura 40 – Seção de fonte comum (fonte em 9 km) no modelo BP pelo método <i>lowrank</i>	51
Figura 41 – Seção de fonte comum (fonte em 9 km) no modelo BP por diferenças finitas.	51

Figura 42 – Modelo de velocidade Marmousi.	52
Figura 43 – Snapshot da propagação de onda no modelo de velocidade Marmousi após 1.5 s.	52
Figura 44 – Traço temporal de <i>lowrank</i> no modelo de velocidade Marmousi.	53
Figura 45 – Traço temporal de diferenças finitas no modelo de velocidade Marmousi.	53
Figura 46 – Seção de fonte comum no modelo Marmousi pelo método <i>lowrank</i>	54
Figura 47 – Seção de fonte comum no modelo Marmousi por diferenças finitas.	54

Lista de tabelas

Tabela 1 – Modelos com diferentes discretizações para um mesmo meio homogêneo. 37

Sumário

Introdução	15
1 Fundamentos teóricos	17
1.1 Extrapolação da onda acústica	17
1.2 Matriz de extrapolação de onda	21
2 Método <i>lowrank</i>	23
2.1 Decomposição matricial	23
2.2 Aproximação de posto baixo	24
2.2.1 Exemplo	25
3 Experimentos numéricos	27
3.1 Modelo de velocidade homogêneo	27
3.1.1 Comparação com a solução analítica	27
3.1.2 Comparação com diferenças finitas	29
3.2 Modelo de velocidade com duas camadas homogêneas	38
3.2.1 Comparação com diferenças finitas	38
3.2.2 Análise dos coeficientes de reflexão	40
3.3 Modelo de velocidade com heterogeneidade realista	47
3.3.1 Modelo BP	47
3.3.2 Modelo Marmousi	50
4 Conclusões	55
Referências	56

Introdução

Ao longo dos anos, o método sísmico de reflexão tem sido aplicado com a finalidade de obter informações precisas de subsuperfície. Para tal é crucial o entendimento da propagação de ondas sísmicas. Nesse contexto surgem vários métodos para a modelagem numérica das ondas sísmicas. Esse procedimento é aplicado por exemplo, na migração reversa no tempo (RTM, do inglês Reverse Time Migration) ou na inversão sísmica.

O modelamento consiste na representação do campo de onda em um determinado meio. Como a solução analítica da equação da onda só é possível em meios demasiadamente simples, necessita-se de aproximações numéricas para encontrar soluções da equação da onda em meios reais. Assim é possível conhecer o comportamento do campo de onda em meios de interesse, que variam por suas características físicas. Esses meios podem ser isotrópicos quando as propriedades do meio são as mesmas em qualquer direção ou anisotrópicos quando as propriedades do meio variam com a direção.

O método convencional é a extrapolação do campo de onda em tempo, aproximando as derivadas parciais da equação da onda por um esquema de diferenças finitas (FD, *Finite Differences*) (Etgen, 1986), que transforma a EDP num modelo discreto aproximando as derivadas parciais. Essa aproximações são obtidas facilmente da expansão de Taylor. As aproximações de diferenças finitas de ordem superior providenciam uma maior fidelidade na propagação do campo de onda permitindo computar, de forma acurada, ondas em modelos complexos e de grande porte (Etgen, 1986), sendo uma das suas principais desvantagens sua dispersão numérica, cuja redução aumenta o custo computacional.

Outra maneira frequentemente empregada é o uso dos métodos espectrais que usam a transformada de Fourier como ferramenta na equação da onda para manipulá-la nos domínios das variáveis associadas ao espectro, isto é, a frequência temporal e a frequência espacial ou número de onda, associadas às coordenadas do tempo e espaço, respectivamente. Os métodos espectrais proporcionam uma melhor precisão (Tal-Ezer et al., 1987). As suas principais desvantagens são as suas condições de contorno periódicas.

Um método relativamente recente é o modelamento da propagação de onda pelo método *lowrank*. Ele compreende a aproximação do operador da propagação de onda no domínio misto de espaço e número de onda. A decomposição *lowrank* é aplicada à matriz propagadora, selecionando um conjunto de menor dimensão de localizações espaciais representativas e um conjunto de menor dimensão de números de onda representativas (Fomel et al., 2013). O algoritmo de multiescala direcional implementado é usado como uma solução rápida para problemas de espalhamento acústico de alta frequência realizando um procedimento aleatório para gerar uma representação *lowrank* (Engquist and Ying, 2009).

Devido a sua flexibilidade, o método pode ser implementado para diferentes formulações da equação de onda, sejam essas acústicas ou elásticas, por exemplo. Basta dispor de uma expressão fechada para a velocidade de fase das ondas a serem propagadas.

No presente trabalho foi feita uma avaliação do modelamento da propagação de ondas sísmicas em um meio acústico pelo método *lowrank* incluindo uma comparação com o método de diferenças finitas para fins de avaliar o desempenho quanto à precisão, eficiência e custo computacional. No Capítulo 1 expõe-se o problema de extrapolação da onda acústica 3D, utilizando a transformada de Fourier para manipulá-la no domínio do número de onda. Define-se a função fase no domínio misto de espaço e número de onda e a matriz de extrapolação de onda. No Capítulo 2 apresenta-se o método *lowrank* para a decomposição da matriz de extrapolação de onda. No Capítulo 3 mostram-se os resultados dos experimentos numéricos do método *lowrank* e de diferenças finitas para a futura avaliação. Finalmente, no Capítulo 4 apresentam-se as conclusões deste trabalho.

1 Fundamentos teóricos

O presente capítulo contém a estratégia de modelamento que consiste na extrapolação da equação da onda acústica 3D para gerar a matriz propagadora no domínio misto na qual implementa-se o método *lowrank*. O desenvolvimento apresentado a seguir segue o trabalho de [Fomel et al. \(2013\)](#).

1.1 Extrapolação da onda acústica

A equação da onda acústica 3D com densidade constante é dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(\mathbf{x}, t) = v^2 \Delta P(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

onde v denota a velocidade de propagação, e P é o campo de pressão acústica. Considerando a velocidade constante, pode-se aplicar a transformada de Fourier no espaço, definida neste trabalho por

$$\hat{P}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} d\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

de modo que a EDP em (1.1) no domínio do número de onda fique

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{P}(\mathbf{k}, t) = -v^2 \|\mathbf{k}\|^2 \hat{P}(\mathbf{k}, t). \quad (1.3)$$

Esta EDO de segunda ordem em t com coeficiente $v^2 \|\mathbf{k}\|^2$ constante tem as soluções $\hat{P}(\mathbf{k}, t) = e^{\pm iv \|\mathbf{k}\| t}$, as quais formam um conjunto solução linearmente independente e qualquer combinação linear delas é também solução. Assim a solução geral é

$$\hat{P}(\mathbf{k}, t) = A(\mathbf{k}) e^{iv \|\mathbf{k}\| t} + B(\mathbf{k}) e^{-iv \|\mathbf{k}\| t}. \quad (1.4)$$

Note que os coeficientes $A(\mathbf{k})$ e $B(\mathbf{k})$ são independentes do tempo t , mas podem variar em função de \mathbf{k} . A solução fundamental a considerar é $B(\mathbf{k}) e^{-iv \|\mathbf{k}\| t}$ que corresponde à onda expandindo-se, pois substituindo na transformada inversa de Fourier, a fase fica constante para t crescente quando a onda se afasta da origem. Logo, para um tempo posterior $t + \Delta t$ temos

$$\hat{P}(\mathbf{k}, t + \Delta t) = B(\mathbf{k}) e^{-iv \|\mathbf{k}\| (t + \Delta t)} = e^{-iv \|\mathbf{k}\| \Delta t} \hat{P}(\mathbf{k}, t). \quad (1.5)$$

Pela transformada de Fourier inversa, sabemos que, dado um t_0 inicial fixo, a pressão acústica para $t = t_0 + \Delta t$ pode ser representada por

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}, t_0 + \Delta t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \quad (1.6)$$

Substituindo (1.5) em (1.6), obtemos

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) e^{i[\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - v\|\mathbf{k}\|\Delta t]} d\mathbf{k}. \quad (1.7)$$

Notamos que a equação (1.7) representa uma maneira de continuar o campo de onda do instante t_0 para o instante $t_0 + \Delta t$.

Queremos generalizar o procedimento acima para um meio com velocidade dependente das variáveis espaciais. Neste caso, a equação (1.3) é inválida, pois dependeria tanto das coordenadas espaciais como dos números de onda. Por este motivo procura-se diretamente uma generalização da equação (1.7), usando a candidata

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) e^{i\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)} d\mathbf{k}, \quad (1.8)$$

onde $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)$ representa uma função fase generalizada definida no domínio misto de espaço e número de onda. Para substituir a candidata (1.8) na equação da onda (1.1), considerando $t = t_0 + \Delta t$, denotamos

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) e^{i\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)}, \quad (1.9)$$

cujas derivadas temporais são

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) &= \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \left(i \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) &= \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \left(i \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \left(i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) &= \left(i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \Delta \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) &= \left(i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) + \left(i \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \\ &\quad + \left(i \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = (i\Delta\phi - |\nabla\phi|^2) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t). \quad (1.11)$$

Substituindo a candidata (1.8) na equação da onda (1.1) e utilizando (1.10) e (1.11), obtemos

$$\left(i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = v^2 (i\Delta\phi - |\nabla\phi|^2) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t). \quad (1.12)$$

Igualando a parte real e a parte imaginária, obtemos

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 = v^2|\nabla\phi|^2, \quad (1.13)$$

e

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = v^2\Delta\phi. \quad (1.14)$$

Portanto, para que a candidata obedeça a equação da onda, tem que impor-se como condição as equações (1.13) e (1.14). Por último, extraindo a raiz quadrada de (1.13), chegamos em

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \pm v|\nabla\phi|. \quad (1.15)$$

Aqui, o sinal positivo corresponde à expansão da onda pois garante que ϕ cresça com t crescente. Em meios isotrópicos a velocidade de fase v não depende da direção de \mathbf{k} . Consideramos agora a expansão de Taylor para o operador de fase em torno de $\Delta t = 0$

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t) = \phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{k}) + \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\Delta t + \phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3), \quad (1.16)$$

onde $\phi_n = \left.\frac{\partial^n\phi}{\partial t^n}\right|_{\Delta t=0}$. A condição inicial para a função fase é obtida pelo fato de que, quando $\Delta t = 0$ em (1.8), esta se reduz à transformada de Fourier inversa, o que implica em

$$\phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, 0) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{k}. \quad (1.17)$$

Segue que

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} + \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\Delta t + \phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3). \quad (1.18)$$

Calculando o gradiente com respeito a \mathbf{x} da expressão acima, temos

$$\nabla\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t) = \mathbf{k} + \nabla\phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\Delta t + \nabla\phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3). \quad (1.19)$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} |\nabla\phi|^2 &= (\mathbf{k} + \nabla\phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\Delta t + \nabla\phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)) \\ &\quad \cdot (\mathbf{k} + \nabla\phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k})\Delta t + \nabla\phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)) \\ &= \|\mathbf{k}\|^2 + 2(\nabla\phi_1 \cdot \mathbf{k})\Delta t + [(\nabla\phi_2 \cdot \mathbf{k}) + |\nabla\phi_1|^2]\Delta t^2 + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (1.20)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} |\nabla\phi| &= \sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + 2(\nabla\phi_1 \cdot \mathbf{k})\Delta t + [(\nabla\phi_2 \cdot \mathbf{k}) + |\nabla\phi_1|^2]\Delta t^2 + O(\Delta t^3)} \\ &= \|\mathbf{k}\| \sqrt{1 + 2\frac{\nabla\phi_1 \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|^2}\Delta t + \frac{(\nabla\phi_2 \cdot \mathbf{k}) + |\nabla\phi_1|^2}{\|\mathbf{k}\|^2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3)}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Agora, usando a aproximação de Taylor para a raiz quadrada, até o termo linear

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \quad (1.22)$$

na aproximação (1.21), chegamos à aproximação linear para o gradiente da função fase ϕ

$$\begin{aligned} |\nabla\phi| &\approx \|\mathbf{k}\| \left(1 + \frac{\nabla\phi_1 \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|^2} \Delta t \right) \\ |\nabla\phi| &\approx \|\mathbf{k}\| + \frac{\nabla\phi_1 \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|} \Delta t. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Por outro lado, derivando (1.18) com respeito ao tempo e desprezando termos de segunda ordem, temos

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} \approx \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}) + \phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\Delta t. \quad (1.24)$$

Substituindo as aproximações (1.23) e (1.24) em (1.15), chegamos a

$$\phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}) + \phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})\Delta t \approx v\|\mathbf{k}\| + v \frac{\nabla\phi_1 \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|} \Delta t. \quad (1.25)$$

Igualando os coeficientes para termos com a mesma potência de Δt , obtemos

$$\phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = v\|\mathbf{k}\|, \quad (1.26)$$

e

$$\phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = v(\nabla v \cdot \mathbf{k}). \quad (1.27)$$

Substituindo essas duas últimas expressões na equação (1.18), concluímos que

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t) \approx \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} + v(\mathbf{x})\|\mathbf{k}\|\Delta t + v(\mathbf{x})(\nabla v \cdot \mathbf{k}) \frac{\Delta t^2}{2}. \quad (1.28)$$

Na equação (1.8) utiliza-se a função fase $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)$ para pequenos passos Δt . Portanto, na equação (1.28) podemos desprezar os termos de segunda ordem em diante, pelo qual obtém-se a seguinte expressão para o fator de fase

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t) \approx \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} + v(\mathbf{x})\|\mathbf{k}\|\Delta t. \quad (1.29)$$

A última equação é a expressão dada por [Etgen and Brandsberg-Dahl \(2009\)](#). A equação (1.29) explica a generalidade da aproximação (1.8) porque ela continua aplicável quando se possui uma expressão fechada para a velocidade de fase no espaço misto (\mathbf{x}, \mathbf{k}) , i.e., $v = v(\mathbf{x}, \mathbf{k})$. Logo, a equação (1.8) fica

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) e^{i[\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} + v(\mathbf{x})\|\mathbf{k}\|\Delta t]} d\mathbf{k}. \quad (1.30)$$

Correspondentemente, para um tempo $t = t_0 - \Delta t$, temos

$$P(\mathbf{x}, t_0 - \Delta t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) e^{i[\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - v(\mathbf{x})\|\mathbf{k}\|\Delta t]} d\mathbf{k}. \quad (1.31)$$

A soma das duas últimas equações resulta na expressão real

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) + P(\mathbf{x}, t_0 - \Delta t) \approx 2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} \cos[v(\mathbf{x})\|\mathbf{k}\|\Delta t] d\mathbf{k}. \quad (1.32)$$

Ao subtrair $2P(\mathbf{x}, t_0)$, podemos escrever

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) \approx 2P(\mathbf{x}, t_0) - P(\mathbf{x}, t_0 - \Delta t) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} [\cos(v(\mathbf{x})\|\mathbf{k}\|\Delta t) - 1] d\mathbf{k}. \quad (1.33)$$

O código utilizado realiza a propagação nesta forma, por estabilizar as contas numéricas.

O modelamento exposto está focado na fase da propagação, ou seja, tem como objetivo principal descrever a cinemática da propagação da onda. Porém, sendo uma generalização aproximada da equação (1.7), que é uma solução exata da equação da onda para v constante, espera-se um comportamento dinâmico aproximado. Nos experimentos numéricos avaliamos também a dinâmica desta aproximação.

1.2 Matriz de extrapolação de onda

Ao discretizar a equação (1.33), nós nos deparamos com a matriz de extrapolação de onda, definida por

$$W_{jl} = W(\mathbf{x}_j, \mathbf{k}_l) \approx 2[\cos(v(\mathbf{x}_j, \mathbf{k}_l)\|\mathbf{k}_l\|\Delta t) - 1]. \quad (1.34)$$

A matriz W com dimensão $N_x \times N_k$, onde N_x e N_k são as dimensões dos vetores \mathbf{x} e \mathbf{k} , respectivamente, depende das variáveis espaciais e espectrais. Deste modo W é uma matriz de grande porte, porém esparsa. O objetivo do método *lowrank* é tirar proveito da esparsidade e decompor a matriz utilizando matrizes de dimensões menores. Ou seja, procura-se uma fatoração aproximada de (1.34), com Δt fixo, da forma

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \approx \sum_{m=1}^{M_k} \sum_{n=1}^{M_x} U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_m) M_{mn} V(\mathbf{x}_n, \mathbf{k}), \quad (1.35)$$

onde M_x e M_k são dimensões significativamente menores do que N_x e N_k . Substituindo (1.35) em (1.33), obtemos

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} W(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) d\mathbf{k}$$

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) \approx \sum_{m=1}^{M_k} U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_m) \left(\sum_{n=1}^{M_x} M_{mn} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} V(\mathbf{x}_n, \mathbf{k}) \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) d\mathbf{k} \right) \right). \quad (1.36)$$

O custo computacional da última representação é equivalente a aplicar M_x transformadas rápidas de Fourier. O problema da equação (1.35) consiste em encontrar as matrizes U e V de dimensões $N_x \times M_k$ e $M_x \times N_k$, respectivamente. A procura exaustiva por estas matrizes seria proibitivamente caro. Engquist and Ying (2009) desenvolveram o método *lowrank* que realiza a decomposição da matriz de extrapolação de forma aproximada com um custo computacional reduzido. Este método é exposto no próximo capítulo.

2 Método *lowrank*

O presente capítulo baseia-se nos trabalhos feitos por [Engquist and Ying \(2009\)](#), que providenciam um procedimento aleatório melhorado para construir uma aproximação que garanta uma matriz de posto baixo, e o algoritmo de [Fomel et al. \(2013\)](#) na aplicação da decomposição *lowrank* na matriz de extrapolação da onda.

2.1 Decomposição matricial

Suponhamos que uma matriz $W \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ tenha posto aproximado r com uma acurácia de ϵ , isto é, existe uma matriz $\hat{W} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ com posto r tal que:

$$\|W - \hat{W}\| < \epsilon,$$

onde $(\|\cdot\|)$ representa uma norma matricial. Então, é possível construir sua decomposição de pseudoesqueleto ([Goreinov et al., 1997](#)) que consiste na seleção de r colunas e r linhas de W formando,

$$W \approx W(:, \Pi_1) \cdot D \cdot W(\Pi_2, :), \quad (2.1)$$

com Π_1 um conjunto de r colunas, Π_2 um conjunto de r linhas e $D = (W(\Pi_2, \Pi_1))^{-1}$. O conjunto Π_1 deve ser escolhido tal que o paralelepípedo r -dimensional gerado pelas colunas de Π_1 de W tenha o maior volume entre todos os paralelepípedos possíveis gerados por um conjunto de r colunas. Analogamente, o conjunto Π_2 é escolhido tal que o paralelepípedo gerado pelas linhas Π_2 de W tenha o maior volume r -dimensional entre todos os paralelepípedos possíveis gerados por um conjunto de r linhas.

Quando a matriz W é muito grande, a escolha dos conjuntos Π_1 e Π_2 não é uma tarefa trivial. Uma ideia para a escolha desses conjuntos é utilizar projeções aleatórias ([Liberty et al., 2007](#); [Sarlós, 2006](#)) que consiste em projetar as colunas (ou linhas) de W num subespaço de baixa dimensão aleatoriamente selecionado. Assim, para encontrar o conjunto Π_1 de colunas se segue o seguinte processo:

1. Projetar as colunas de W num subespaço s -dimensional aleatório, com s suficientemente grande.
2. Encontrar o conjunto de colunas projetadas que geram o maior volume r -dimensional.
3. Escolher as r colunas de W como resposta.

O processo análogo é feito para obter o conjunto Π_2 de linhas. Porém a complexidade do processo é de ao menos $O(N_x N_k \log(s))$ que implica um processo custoso computacionalmente quando N_x e N_k são grandes. Na próxima seção descreve-se um processo que substitui a projeção aleatória de todas as colunas ou linhas de W por uma projeção de um conjunto de colunas ou linhas selecionadas aleatoriamente de modo a encontrar conjuntos Π_1 e Π_2 com uma complexidade somente linear (Engquist and Ying, 2009).

2.2 Aproximação de posto baixo

Seja N_x o número de amostras no espaço e no domínio do número de onda. As amostras espaciais são dadas por $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{N_x}\}$ e as amostras no domínio de Fourier por $\mathbf{k} = \{k_1, \dots, k_{N_x}\}$. A matriz propagadora $W : N_x \times N_x$ com entradas $W(\mathbf{x}_j, \mathbf{k}_l)$ é formada pela equação (1.34) para $1 \leq j, l \leq N_x$.

A ideia do método *lowrank* é encontrar uma aproximação de posto baixo, definida pela fatoração

$$W \approx U M V^*, \quad (2.2)$$

onde $*$ indica a matriz adjunta, i.e., a conjugada da matriz transposta, U é uma submatriz que consiste em colunas associadas a $\{\mathbf{k}\}$ aproximando $W(:, \Pi_1)$, V^* é uma submatriz que consiste em linhas associadas a $\{\mathbf{x}\}$ aproximando $W(\Pi_2, :)$ e $M : r \times r$ possui posto completo igual a r . As submatrizes U e V^* , ambas ortonormais, são construídas tal que as colunas de U e as linhas de V^* consigam gerar de forma acurada o espaço coluna e o espaço linha de W , respectivamente. O algoritmo para obter a decomposição matricial começa com a escolha das colunas de U com a seguinte ideia.

Dada a matriz W com posto esperado r , o objetivo é procurar um conjunto Π_1 de colunas tal que o volume do conjunto de vetores projetados seja fortemente preservado, i.e., que o volume máximo projetado é próximo ao volume no espaço original. O lema de Johnson-Lindenstrauss (Johnson and Lindenstrauss, 1984), assegura que isso é possível. A projeção é feita num subespaço de dimensão menor, do qual na prática observa-se que só precisa ser de $O(r \log N_x)$. Dito isto, o algoritmo inicia selecionando aleatoriamente um conjunto Ω_1 de $\beta \cdot r$ colunas de W , onde β na prática é 3 ou 4. Para obter o paralelepípedo com maior volume r -dimensional computa-se a decomposição QR com pivotamento de colunas (Meyer, 2000). Nos experimentos numéricos, o posto r resultante foi estimado pelo seguinte critério de parada: Se a razão entre o primeiro e atual pivô da fatoração QR, for menor que 10^{-6} , a decomposição é interrompida e o posto r é igual ao número de pivôs na etapa anterior. Assim,

$$W(:, \Omega_1) P_1 = Q_1 R_1, \quad (2.3)$$

onde P_1 é a matriz de permutação de colunas, Q_1 é a matriz ortogonal e R_1 é a matriz triangular superior. Logo, as primeiras r colunas pivôs de Q_1 vão formar o conjunto Π_1 de colunas em U . Na prática observa-se que o volume do paralelepípedo gerado pelas colunas em $U(:, \Pi_1)$ é próximo ao máximo volume possível, isto devido à natureza oscilatória das colunas em W (Fomel et al., 2013).

Similar ao passo anterior, se escolhe um conjunto Ω_2 de $\beta \cdot r$ linhas de W e procura-se o paralelepípedo r -dimensional com maior volume. Para isto, computa-se a decomposição QR com pivotamento de colunas sobre $W(\Omega_2, :)^*$, obtendo

$$W(\Omega_2, :)^* P_2 = Q_2 R_2. \quad (2.4)$$

Segue que as primeiras r linhas pivôs da matriz Q_2 vão formar o conjunto Π_2 de linhas em V^* .

Uma vez computadas as matrizes U e V , o próximo passo é obter a matriz de posto baixo $M : r \times r$ tal que $W \approx U M V^*$. Para reduzir o custo da determinação da matriz M , Fomel et al. (2013) propõem escolher um conjunto Y de s linhas e um conjunto Z de s colunas aleatórias e minimizar

$$\min_M \|W(Y, Z) - U(Y, :)^* M V^*(Z, :)\|_F. \quad (2.5)$$

O resultado para (2.5) é dado explicitamente por,

$$M = (U(Y, :)^*)^\dagger \cdot W(Y, Z) \cdot (V^*(Z, :))^\dagger, \quad (2.6)$$

onde $(\cdot)^\dagger$ indica a pseudo-inversa.

2.2.1 Exemplo

Para exemplificar a aproximação de posto baixo seguindo o processo descrito foi construída uma matriz $W : 10 \times 10$, com posto 3, dada por

$$W = \begin{pmatrix} -2.047 & -1.023 & -2.047 & -4.094 & -1.842 & -2.968 & -0.921 & -0.460 & 0.716 & -2.968 \\ -0.561 & -0.280 & -0.496 & -1.057 & -0.511 & -1.558 & -1.062 & -0.531 & 1.012 & -1.623 \\ -2.135 & -1.067 & -2.135 & -4.27 & -1.921 & -2.612 & -0.477 & -0.238 & 0.263 & -2.612 \\ -0.576 & -0.288 & -1.278 & -1.854 & -0.448 & -1.853 & -0.575 & -0.287 & 0.447 & -1.151 \\ -2.355 & -1.177 & -1.774 & -4.129 & -2.177 & -2.361 & -0.587 & -0.293 & 0.409 & -2.942 \\ -1.905 & -0.952 & -0.622 & -2.527 & -1.842 & -1.830 & -1.208 & -0.604 & 1.145 & -3.113 \\ -0.735 & -0.367 & -1.044 & -1.779 & -0.631 & -2.220 & -1.176 & -0.588 & 1.072 & -1.911 \\ -1.512 & -0.756 & -1.524 & -3.036 & -1.359 & -2.688 & -1.164 & -0.582 & 1.012 & -2.676 \\ -2.321 & -1.161 & -2.321 & -4.642 & -2.089 & -4.264 & -1.943 & -0.972 & 1.711 & -4.264 \\ -1.197 & -0.598 & -0.655 & -1.852 & -1.132 & -1.193 & -0.538 & -0.269 & 0.472 & -1.735 \end{pmatrix}.$$

Para computar a matriz U , considera-se uma amostragem aleatória de 6 colunas de W , assim encontra-se $r = 3$ e a matriz U é dada por,

$$U = \begin{pmatrix} -0.385 & 0.182 & 0.763 \\ -0.105 & 0.007 & 0.131 \\ -0.401 & 0.190 & -0.576 \\ -0.108 & 0.509 & -0.137 \\ -0.443 & -0.169 & 0.052 \\ -0.358 & -0.668 & -0.140 \\ -0.138 & 0.267 & -0.121 \\ -0.284 & 0.142 & 0.058 \\ -0.436 & 0.206 & -0.086 \\ -0.225 & -0.247 & 0.013 \end{pmatrix},$$

analogamente, escolhendo aleatoriamente 6 linhas de W , se obtém a matriz V^* ,

$$V^* = \begin{pmatrix} -0.256 & -0.128 & -0.256 & -0.512 & -0.230 & -0.470 & -0.214 & -0.107 & 0.188 & -0.470 \\ -0.380 & -0.190 & 0.017 & -0.363 & -0.382 & 0.419 & 0.402 & 0.201 & -0.401 & 0.022 \\ 0.222 & 0.111 & -0.550 & -0.327 & 0.277 & -0.323 & 0.227 & 0.113 & -0.282 & 0.449 \end{pmatrix}.$$

Escolhendo conjuntos Y e Z , de 6 linhas e 6 colunas, respectivamente, se consegue obter a matriz de posto baixo

$$M = \begin{pmatrix} -14.195 & -7.826 & 1.652 \\ 4.727 & 1.484 & 1.006 \\ -4.127 & -2.542 & 0.964 \end{pmatrix}.$$

O produto das matrizes é

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} -1.263 & -0.631 & -0.948 & -2.211 & -1.168 & -1.023 & -0.075 & -0.037 & -0.018 & -1.339 \\ -0.456 & -0.228 & -0.224 & -0.681 & -0.434 & -0.243 & -0.019 & -0.010 & -0.003 & -0.475 \\ -4.392 & -2.196 & -1.652 & -6.044 & -4.227 & -1.841 & -0.189 & -0.094 & 0.024 & -4.582 \\ -1.857 & -0.928 & -1.234 & -3.092 & -1.733 & -1.370 & -0.135 & -0.067 & 0.012 & -1.992 \\ -2.715 & -1.357 & -0.829 & -3.544 & -2.632 & -0.912 & -0.082 & -0.041 & -0.0002 & -2.797 \\ -1.781 & -0.890 & 0.164 & -1.617 & -1.797 & 0.181 & 0.018 & 0.009 & -0.0014 & -1.763 \\ -1.653 & -0.826 & -0.882 & -2.536 & -1.565 & -0.979 & -0.096 & -0.048 & 0.009 & -1.750 \\ -2.077 & -1.038 & -0.958 & -3.035 & -1.981 & -1.056 & -0.098 & -0.049 & 0.0023 & -2.175 \\ -3.565 & -1.782 & -1.535 & -5.100 & -3.411 & -1.697 & -0.162 & -0.081 & 0.009 & -3.727 \\ -1.158 & -0.579 & -0.147 & -1.306 & -1.143 & -0.160 & -0.013 & -0.006 & -0.002 & -1.171 \end{pmatrix}.$$

Em geral, dado um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, a computação de Wx requer mn flops (do inglês, *Floating-point Operations Per Second*) enquanto a decomposição em (2.2), com suas dimensões

$$\begin{matrix} W & \approx & U & M & V^* \\ m \times n & & m \times r & r \times r & r \times n \end{matrix},$$

requer $mr + r^2 + rn$ flops. Considerando que $r \ll m, n$, isto diminui o custo computacional significativamente.

No próximo capítulo desenvolvemos o algoritmo em diferentes modelos nos experimentos numéricos para avaliar a qualidade da aproximação realizada.

3 Experimentos numéricos

Neste capítulo apresentamos os resultados dos experimentos numéricos para fins de avaliar a precisão, eficiência e custo computacional do modelamento pelo método *lowrank* (código do Prof. Jessé Costa/UFPA), e na qual foi considerado uma amostragem aleatória de 25 colunas e linhas. Para a avaliação do desempenho absoluto do modelo será considerado a solução analítica da equação da onda em um meio homogêneo, e o desempenho relativo será feito por comparação com o método de diferenças finitas (código do Seismic Unix). Devido às limitações dos recursos computacionais disponíveis, todos os experimentos numéricos foram realizados em duas dimensões.

3.1 Modelo de velocidade homogêneo

3.1.1 Comparação com a solução analítica

Em um meio homogêneo, a solução analítica da equação da onda é dada pela convolução entre a função da fonte e a função de Green. Isto permite avaliar a precisão da solução numérica, obtida pelo método *lowrank*.

Assim, o nosso primeiro modelo denominado de modelo A (901×451), é um meio homogêneo 2D com velocidade de propagação 2000 m/s, uma extensão superficial de 9 km e profundidade de 4.5 km, discretizada com um intervalo de amostragem espacial $\Delta x = \Delta z = 10$ m. Para o primeiro experimento numérico, usamos uma fonte injetora localizada a 4.5 km da origem com uma profundidade de 1 km. O tempo máximo de propagação foi de 2 s com um intervalo de amostragem temporal $\Delta t = 0.001$ s. O receptor é localizado a 4.5 km da origem com uma profundidade de 3 km.

O pulso injetado na fonte impulsiva corresponde à função Ricker implementada com uma frequência de pico de 5 Hz, mostrada na Figura 1. Assim, para obter a resposta analítica como variação do campo de onda em função do tempo, computa-se a convolução do pulso e a função de Green 2D, a qual é dada pela expressão,

$$G_{2D}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}) = \frac{H(t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{v})}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{v^2}}}, \quad (3.1)$$

onde $\|\cdot\|$ representa distância, \mathbf{x} é a localização do registro, \mathbf{y} é a localização da fonte e t é o tempo. Desse jeito, a Figura 2 mostra os traços temporais da solução analítica e da obtida utilizando o método *lowrank*, os quais são bem coincidentes. O formato do pulso nos dois traços é quase idêntico, com o *lowrank* superestimando levemente a amplitude. O tempo de chegada dos eventos é indistinguível e o seu valor de 1 s está correto para

a distância de propagação de 2 km em um meio com velocidade de 2000 m/s. O erro dinâmico relativo do modelamento considerando o pico dos traços foi de 0.015%. O posto r da matriz propagadora foi igual a 2.

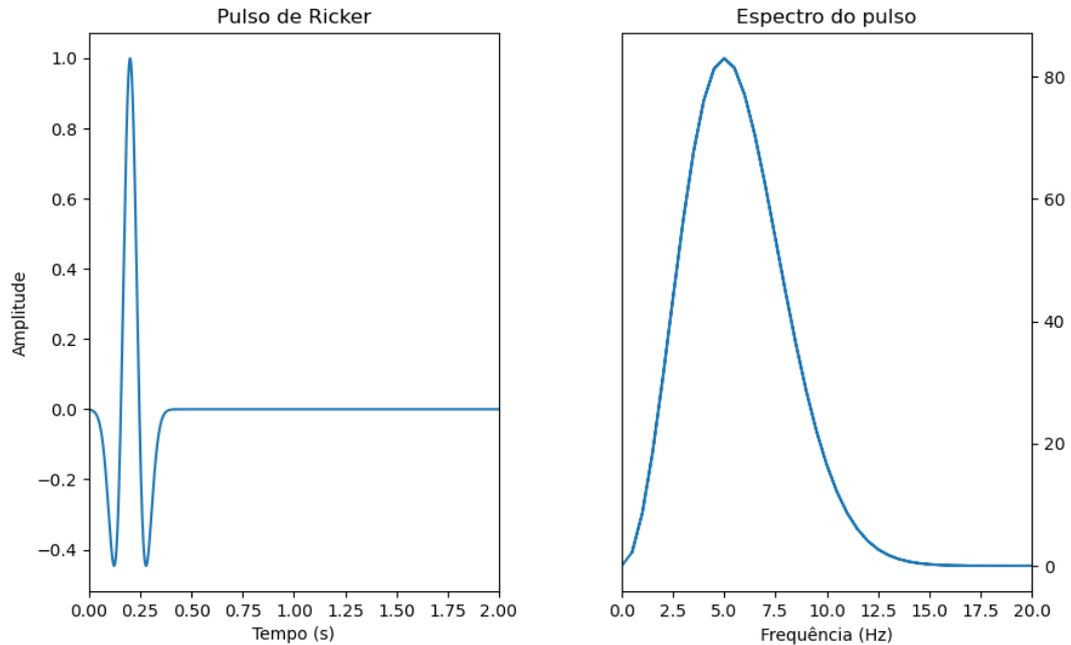


Figura 1 – Pulso de Ricker ($\Delta t = 0.001$ s).

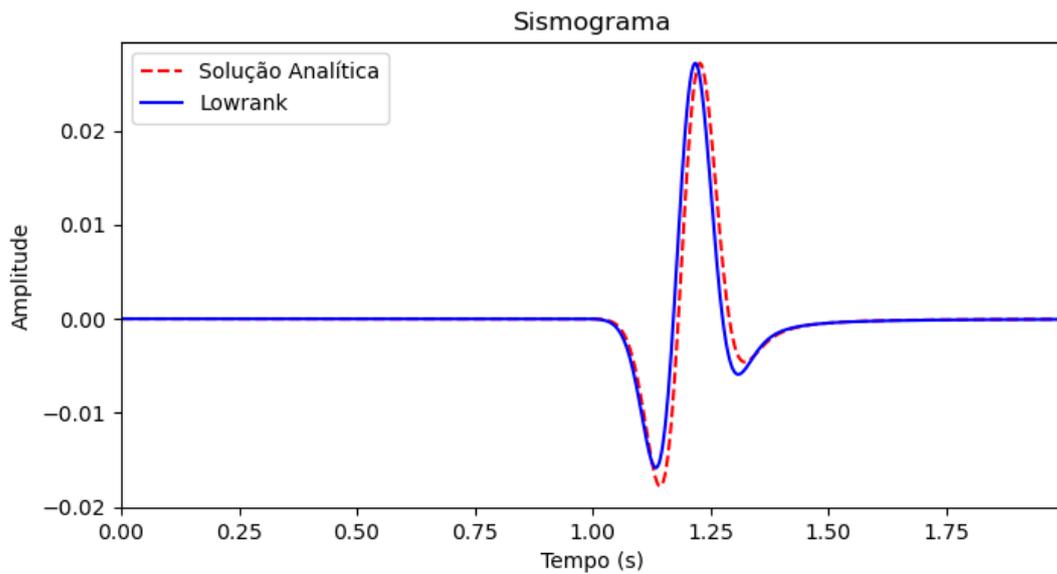


Figura 2 – Comparação dos traços temporais da solução analítica com a solução obtida utilizando o método *lowrank* no modelo A com $\Delta t = 0.001$ s.

Para verificar que a cinemática da propagação dos pulso é a correta, consideramos os envelopes normalizados da solução analítica e da solução obtida utilizando o método *lowrank*, mostrados na Figura 3. Concluímos que o tempo de trânsito dos pulsos é o correto, e o fato que os pulsos na Figura 2 não sejam totalmente coincidentes, é devido a uma diferença de fase entre os pulsos.

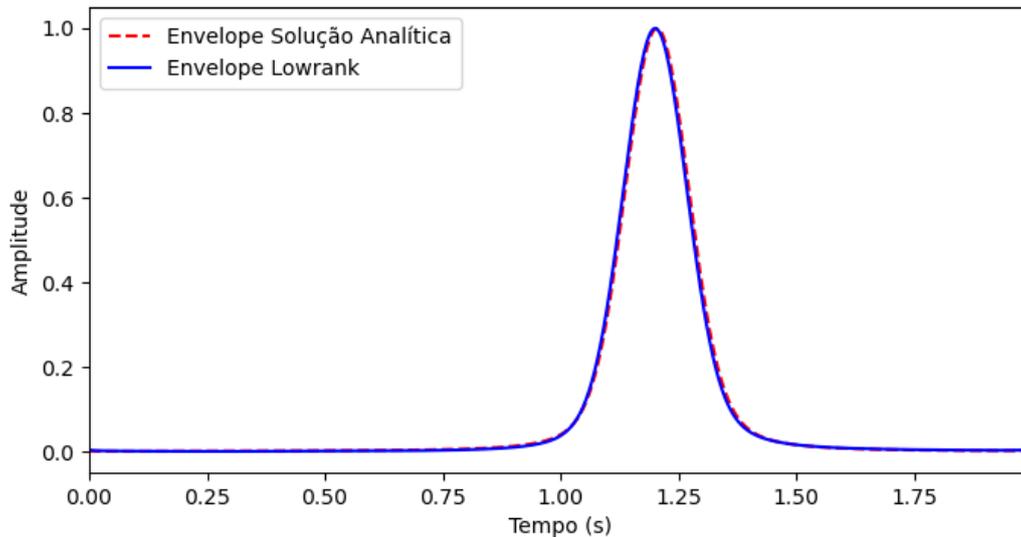


Figura 3 – Envelope dos traços temporais da solução analítica com a solução obtida utilizando o método *lowrank* no modelo A com $\Delta t = 0.001$ s.

Para avaliar a qualidade da aproximação em função da discretização espacial, consideramos o modelo B (451×226) com uma discretização espacial, $\Delta x = \Delta z = 20$ m, a fonte injetora e o receptor são localizados na mesma posição do experimento no modelo A. A Figura 4 mostra os traços temporais no experimento, o erro dinâmico de *lowrank* foi igual a 7.27%. Novamente o posto r foi igual a 2.

Note que para os experimento feitos foram considerados fonte e receptor longe da superfície para evitar efeitos de borda e a distorção do pulso. Para discretizações espaciais mais grossas, o traço temporal registrado manteve seu formato correto. Adicionalmente, avaliamos os resultados em função da discretização temporal. Notamos que o código foi calibrado para fornecer bons resultados para $\Delta t = 0.001$ s.

3.1.2 Comparação com diferenças finitas

Para a comparação com o método de diferenças finita foi usado o comando **sufdmod2** de Seismic Unix, que usa a aproximação tradicional de segunda ordem em tempo e espaço para as derivadas parciais na equação da onda, e na qual o intervalo de amostragem temporal é computado para que a estabilidade do método seja obedecida. Por isso, usamos o mesmo Δt para o método de *lowrank* nesta comparação.

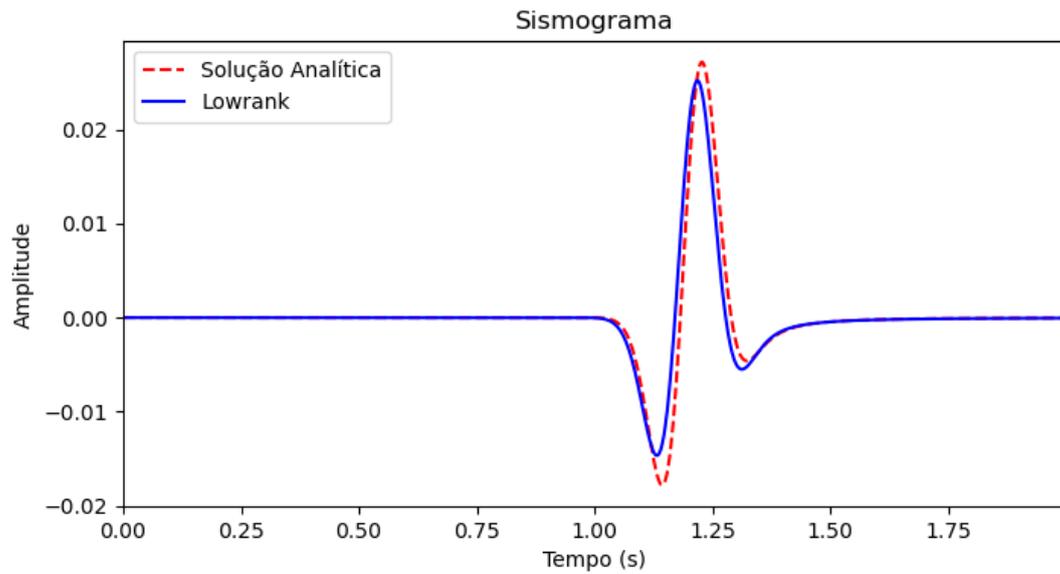


Figura 4 – Comparação dos traços temporais da solução analítica com a solução obtida utilizando o método *lowrank* no modelo B com $\Delta t = 0.001$ s.

Para este experimento, usamos o modelo A com um intervalo de amostragem temporal de 0.0025 s. O pulso de Ricker é mostrado na Figura 5. A Figura 6 mostra o snapshot da propagação no instante $t = 1.5$ s, modelado pelo método *lowrank* (Figura 6(a)), no qual observa-se o efeito de borda, e por diferenças finitas (Figura 6(b)).

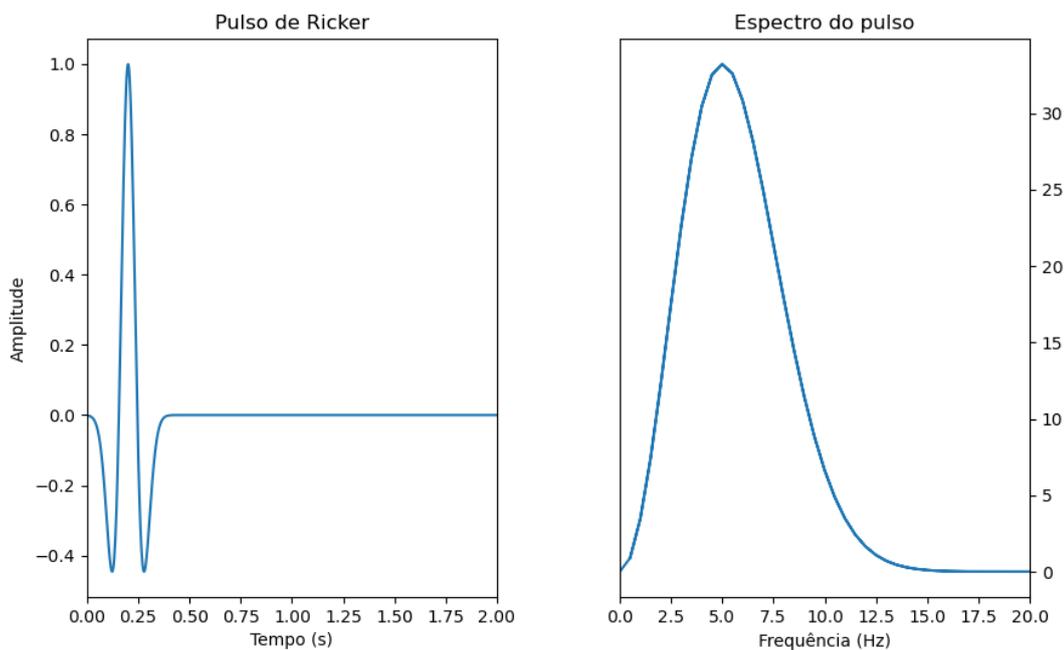


Figura 5 – Pulso de Ricker ($\Delta t = 0.0025$ s).

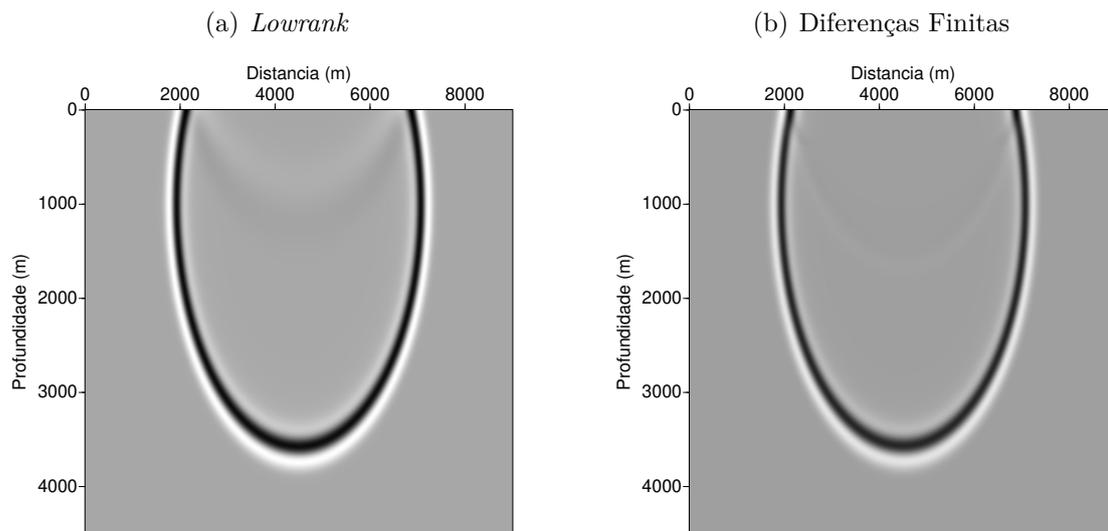


Figura 6 – Snapshot da propagação de onda no modelo A com uma fonte injetora localizada a 4.5 km da origem com uma profundidade de 1000 m após 1.5 s.

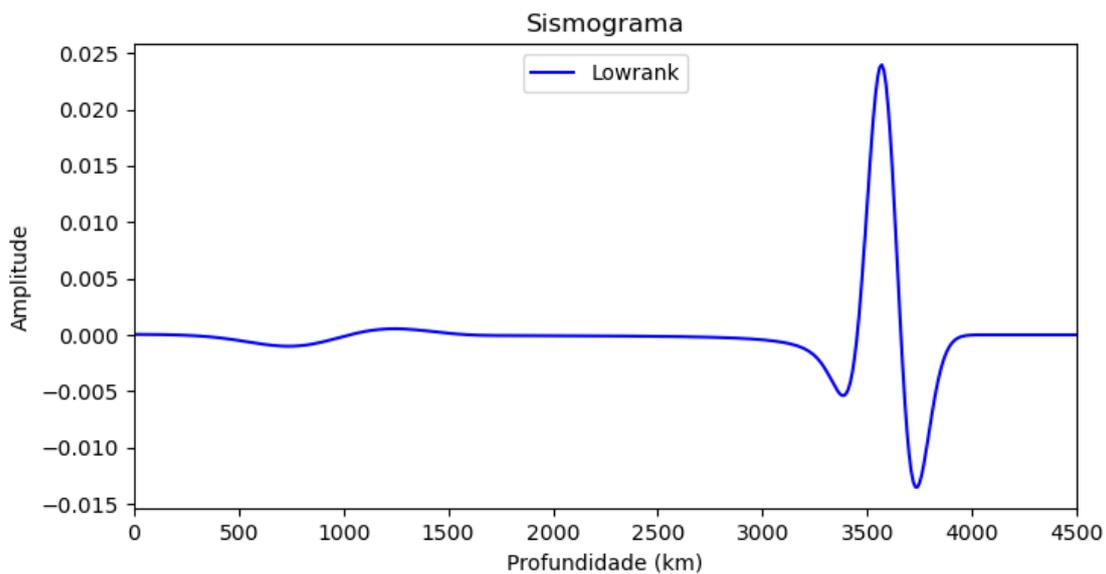


Figura 7 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 6(a).

Os traços espaciais extraídos dos snapshots do centro do modelo para o tempo 1.5 s é mostrado na Figura 7 o método *lowrank* e por diferenças finitas na Figura 8. Notamos que o evento está cinematicamente posicionado corretamente em ambos os traços. Na Figura 7 é visível um pulso pequeno gerado pelo efeito da borda, embora não afete o formato do pulso da onda direta. Observa-se que a amplitude diminui quando o Δt aumentou. Note-se que para estas discretizações, o resultado das diferenças finitas está livre do efeito de dispersão numérica perceptível.

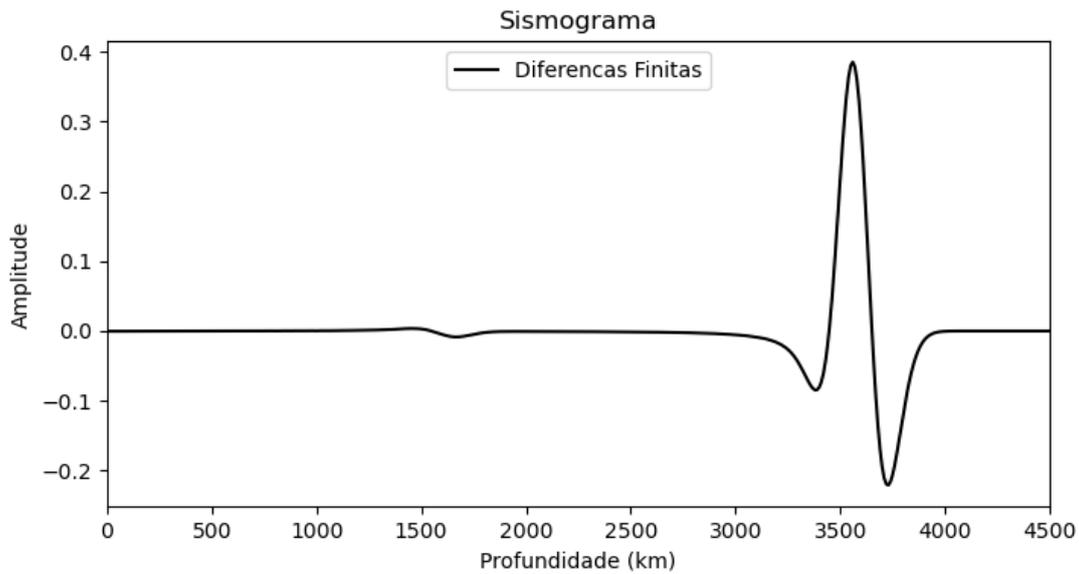


Figura 8 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 6(b).

Considerando o receptor localizado a 4.5 km da origem e uma profundidade de 3 km, os traços temporais dos modelamentos são comparados correspondentemente em relação à solução analítica. A Figura 9 mostra os traços temporais da solução analítica, do *lowrank* e das diferenças finitas. Os traços aproximados pelos dois métodos foram normalizados por uma escala de amplitude, determinada entre a razão dos picos dos traços da solução analítica e o aproximado, sendo que o fator de escala de *lowrank* é de 1.02 e de diferenças finitas, 0.06. Observamos que ambos os códigos fornecem amplitudes corretas para $\Delta x = \Delta z = 10$ m e $\Delta t = 0.0015$ s. Note que para a discretização dada, o método de *lowrank* subdimensiona levemente a onda, enquanto, diferenças finitas sobredimensiona consideravelmente a solução teórica. Por este motivo, estudamos a seguir somente as amplitudes relativas.

No modelo B o intervalo de amostragem temporal Δt foi de 0.005 s. O pulso de Ricker é mostrado na Figura 10. Note que a amostragem mais grossa não afeta visualmente o pulso. Os snapshots da propagação no instante $t = 1.5$ s são exibidos na Figura 11. O modelo B, o qual apresenta uma discretização espacial mais grossa, com a localização de fonte e receptor dada, não afeta as qualidades do *lowrank* e das diferenças finitas segundo as Figura 12 e 13, respectivamente. Embora uma discretização mais grossa, para arranjos de fonte e receptor perto da superfície, acrescenta dispersão numérica visível em diferenças finitas.

Os campos de onda em função do tempo registrado em um receptor localizado a 4.5 km da origem e uma profundidade de 3 km são mostrados na Figura 14. O traço temporal do método *lowrank* apresenta um fator de escala de 1.12, e o fator de escala

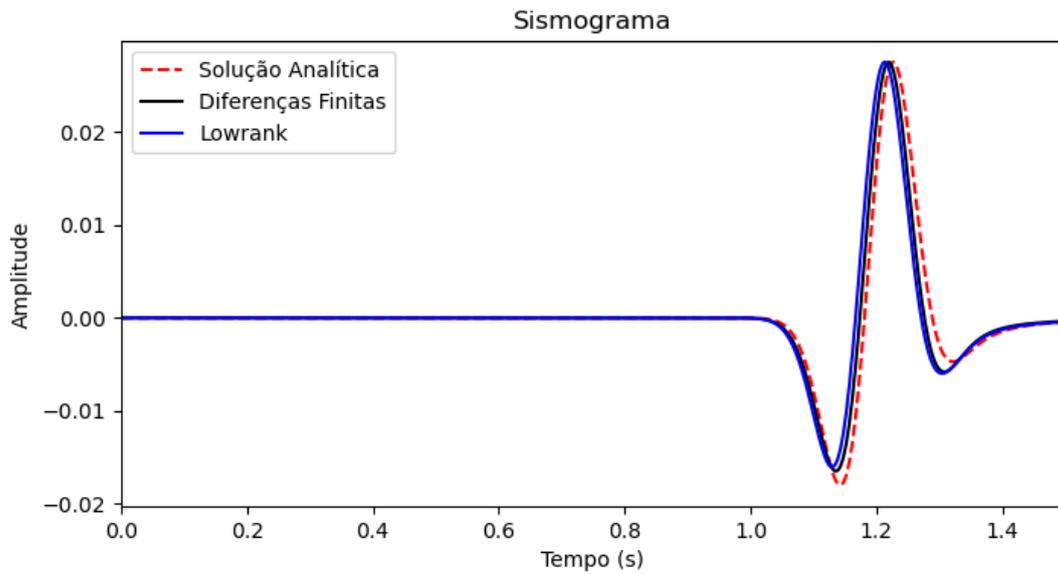


Figura 9 – Comparação dos traços temporais da solução analítica com *lowrank* e diferenças finitas no modelo A com $\Delta t = 0.0025$ s.

do traço temporal de diferenças finitas é de 0.07. No caso, mesmo que o intervalo de amostragem temporal não é o mais conveniente no *lowrank*, tem mais precisão que diferenças finitas.

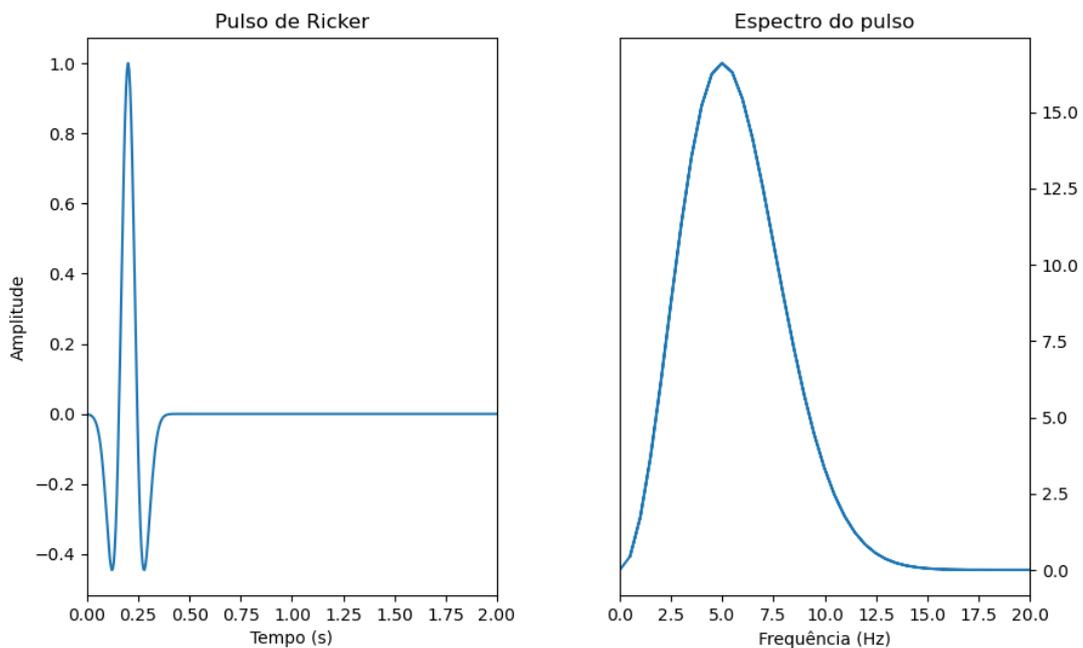


Figura 10 – Pulso de Ricker ($\Delta t = 0.005$ s).

Considera-se agora o modelo C (451×451) com uma fonte injetora localizada a 2.25 km da origem e uma profundidade de 2.25 km, isto para avaliar a simetria em todas

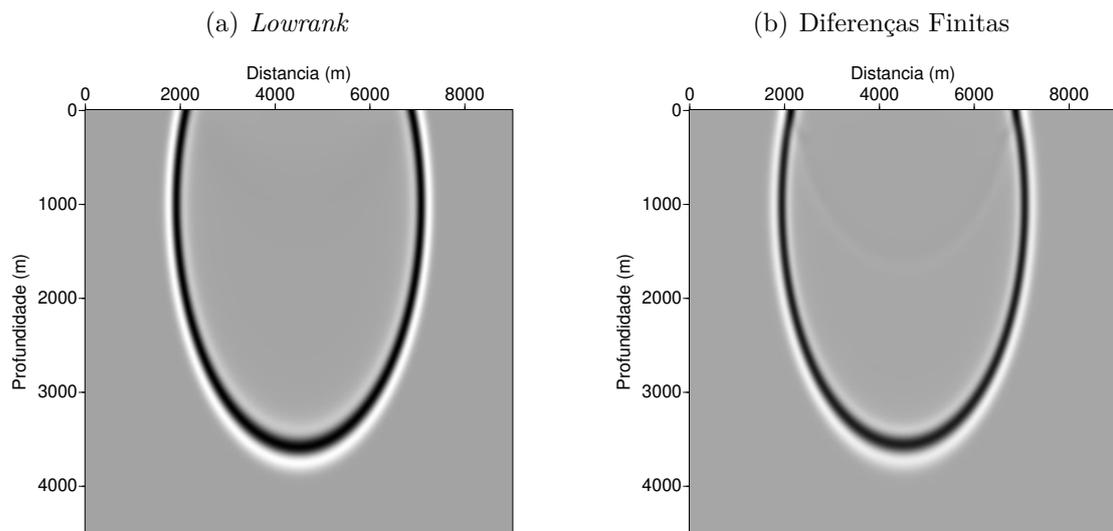


Figura 11 – Snapshot da propagação de onda no modelo B com uma fonte injetora localizada a 4.5 km da origem com uma profundidade de 1000 m após 1.5 s.

as direções de propagação. O tempo máximo de propagação foi de 1 s com um intervalo de amostragem temporal para estabilidade de $\Delta t = 0.0025$ s. Os snapshots da propagação no instante $t = 1$ s, estão exibidos na Figura 15, modelados pelo método *lowrank* (Figura 15(a)) e por diferenças finitas (Figura 15(b)).

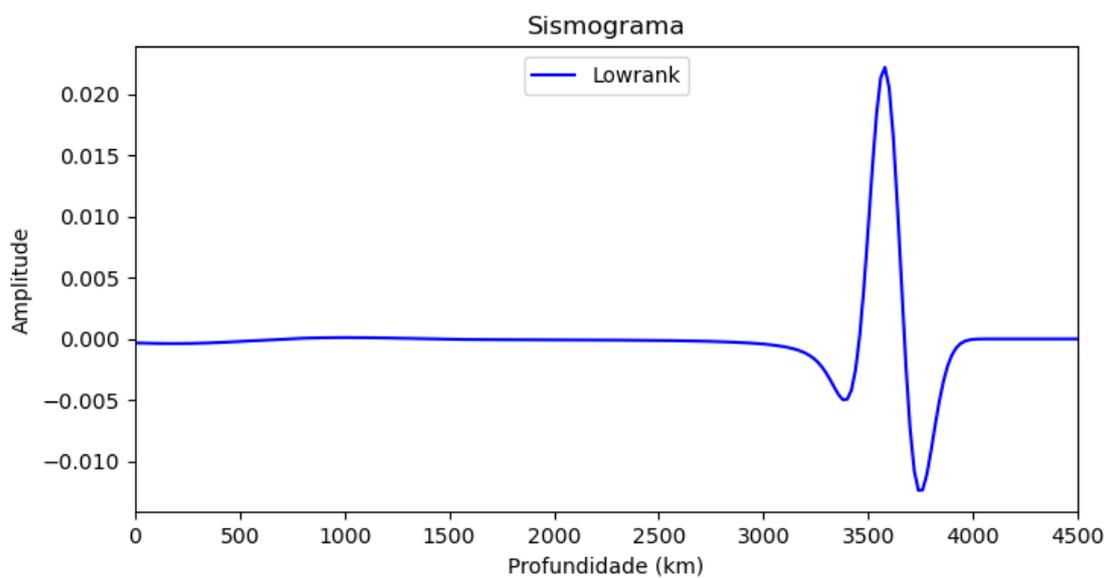


Figura 12 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do centro do snapshot da Figura 11(a).

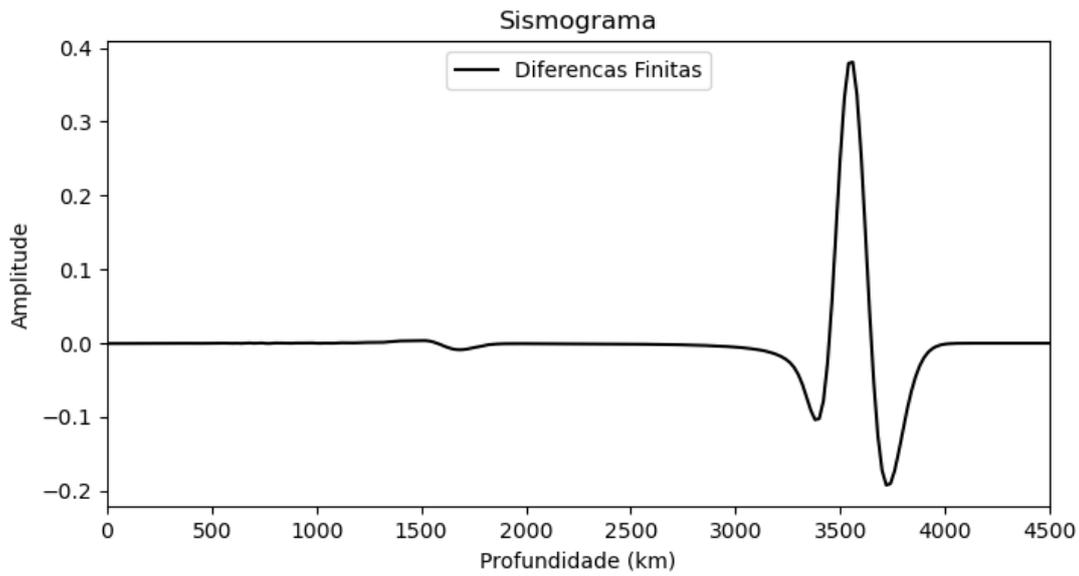


Figura 13 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do centro do snapshot da Figura 11(b).

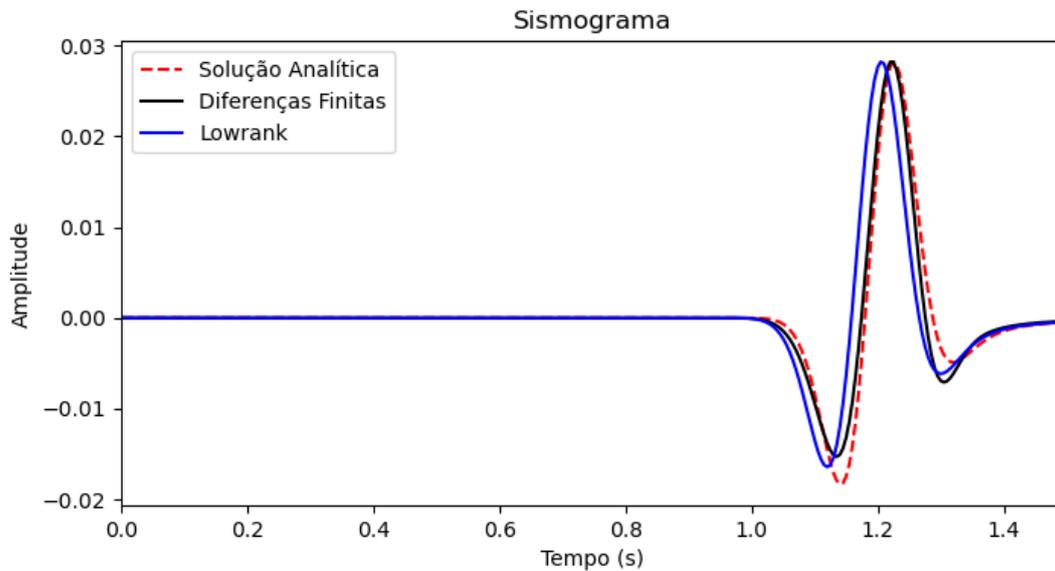


Figura 14 – Comparação dos traços temporais da solução analítica com *lowrank* e diferenças finitas para o modelo B com $\Delta t = 0.005$ s.

Os traços espaciais extraídos do snapshot do centro do modelo para o tempo 1 s são mostrados nas Figuras 16 e 17, para o *lowrank* e diferenças finitas, respectivamente. Os traços foram mostrados com seu reverso correspondente. As Figuras 16 e 17 confirmam uma simetria total da propagação em relação à posição da fonte.

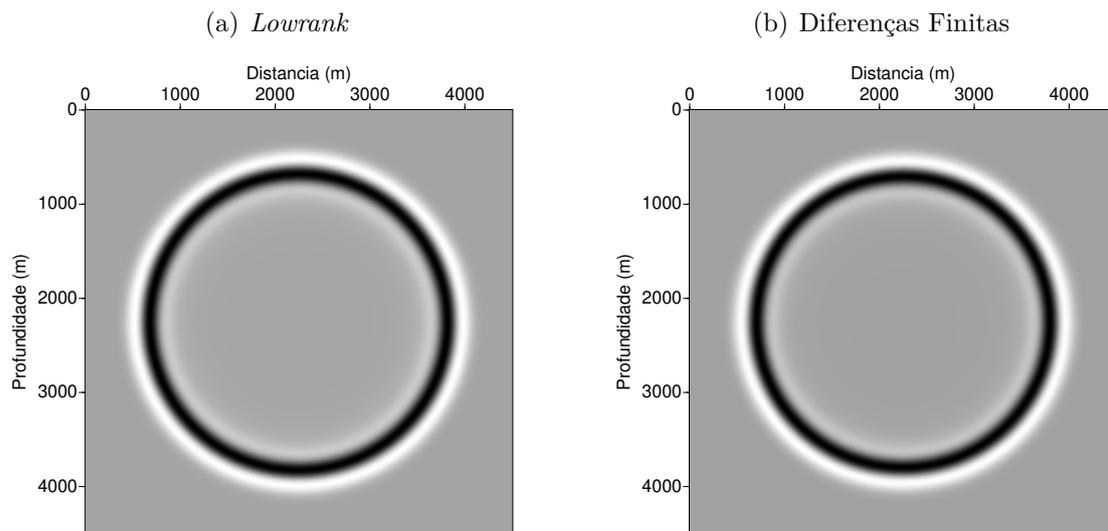


Figura 15 – Snapshot da propagação de onda no modelo C com uma fonte injetora localizada a 2.25 km da origem com uma profundidade de 2.25 km após 1 s.

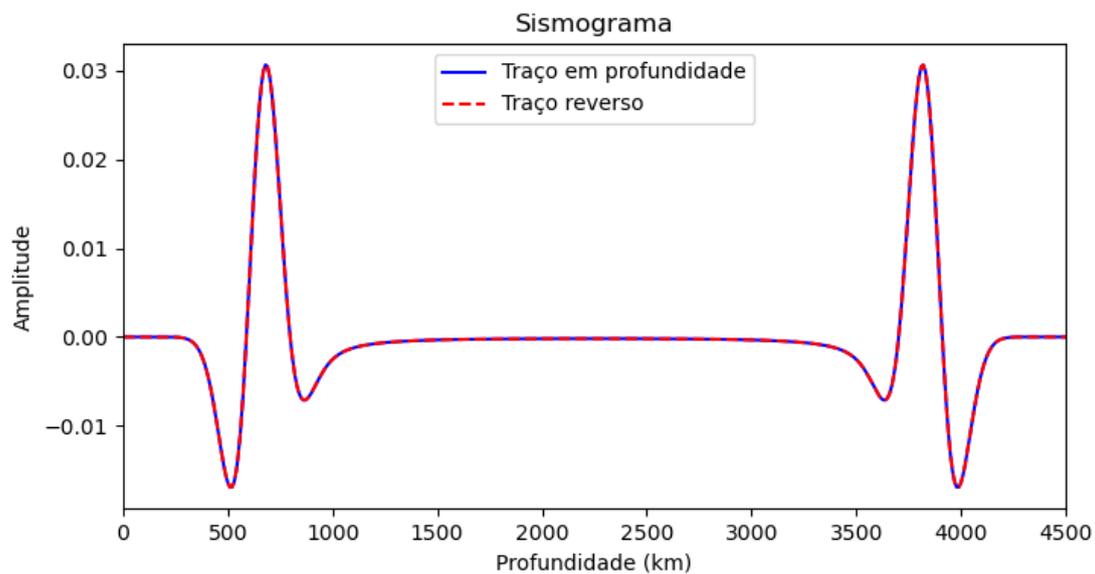


Figura 16 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 15(a), obtido por *lowrank*. Sobreposto é o mesmo traço na direção reversa, para confirmar simetria.

Para avaliar o tempo computacional de modelamento, foram feitos vários testes em um meio homogêneo com diferentes discretizações espaciais, e com intervalo de amostragem temporal determinado para a estabilidade do método de diferenças finitas, sempre usando um modelo com extensão superficial de 9 km e uma profundidade de 4.5 km, uma velocidade de propagação de 2000 m/s e um tempo máximo de propagação de 2 s. Os diferentes modelos são apresentados na Tabela 1. A Figura 18 mostra os tempos de

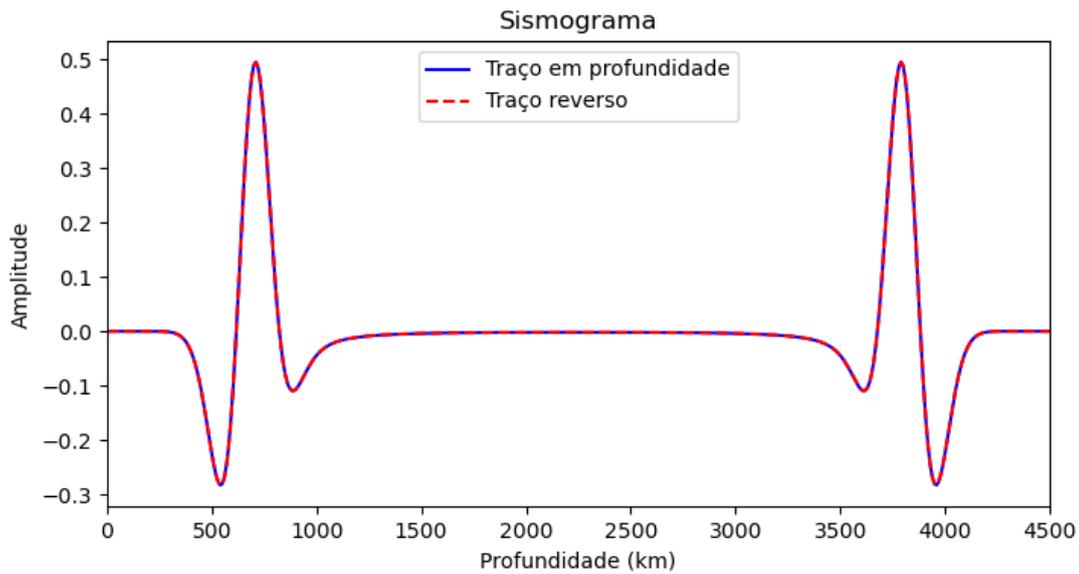


Figura 17 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 15(b), obtido por diferenças finitas.

modelamento. Assim, apesar de nossas limitações computacionais, podemos concluir que para modelos de grande porte espera-se que o tempo computacional do modelamento por diferenças finitas seja maior em comparação com o método *lowrank*. Pelo gráfico da Figura 18, estimamos que já para uma discretização de $\Delta x = \Delta z = 1.5$ m, com 6001×3001 pontos na malha, o tempo computacional do diferenças finitas excederia o do *lowrank*.

Notamos que o tempo computacional aumenta quando o meio é heterogêneo. O tempo utilizado no modelo Marmousi, de dimensões 767×243 pontos, i.e., com 186381 pontos na malha, foi de 102 s, e no modelo BP, de dimensões 901×451 pontos, i.e., com 406351 pontos na malha, foi de 762 s.

Modelos	$n_x \times n_z$	$\Delta x = \Delta z$ (m)	Δt (s)
Modelo 1	181×91	50	0.01250
Modelo 2	451×226	20	0.00500
Modelo 3	601×301	15	0.00375
Modelo 4	901×451	10	0.00250
Modelo 5	1801×901	5	0.00125
Modelo 6	3601×1801	2.5	0.00075

Tabela 1 – Modelos com diferentes discretizações para um mesmo meio homogêneo.

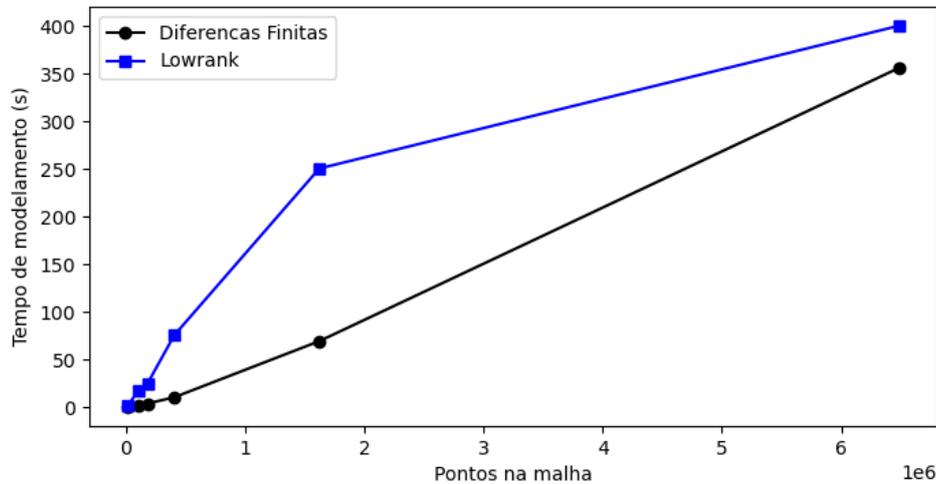


Figura 18 – Tempo de modelamento do método *lowrank* e diferenças finitas considerando um meio homogêneo.

3.2 Modelo de velocidade com duas camadas homogêneas

Nessa seção avaliamos o desempenho dos modelamentos para caracterizar os eventos de reflexão considerando modelos de velocidade com duas camadas homogêneas e um refletor plano horizontal.

3.2.1 Comparação com diferenças finitas

Chamamos de modelo D (901x451) um meio com duas camadas homogêneas que compreende uma extensão horizontal de 9 km e uma profundidade de 4.5 km. A velocidade de propagação da primeira e segunda camada são de 2000 m/s e 2500 m/s, respectivamente. O refletor plano horizontal encontra-se a uma profundidade de 2 km. A discretização espacial é dada por $\Delta x = \Delta z = 10$ m. O intervalo de amostragem temporal para estabilidade de diferenças finitas foi de 0.002 s. A fonte impulsiva localizada a 4.5 km da origem e a uma profundidade de 1 km.

A Figura 19 mostra os snapshots da propagação de onda para o instante 1.5 s. Observamos que os eventos diretos, refletidos e transmitidos mostram um bom comportamento cinemático, i.e., encontram-se posicionados corretamente. Nas Figuras 20 e 21 são mostrados os traços espaciais na posição da fonte para *lowrank* e diferenças finitas, respectivamente. Nas Figuras 20 e 21, é claramente visível a onda refletida pela borda.

Os traços temporais registrados por um receptor localizado a 4.5 km da origem e a uma profundidade de 500 m são mostrados na Figura 22 (*lowrank*) e na Figura 23 (diferenças finitas).

Considerando um arranjo de 901 receptores com uma configuração do tipo *split*

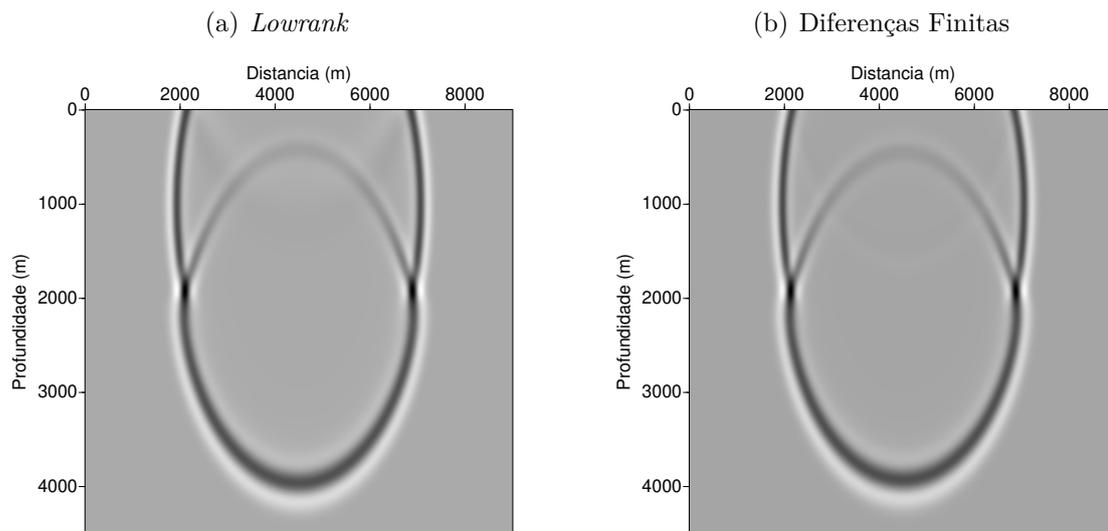


Figura 19 – Snapshot da propagação de onda no modelo D com uma fonte injetora localizada a 4.5 km da origem com uma profundidade de 1 km após 1.5 s.

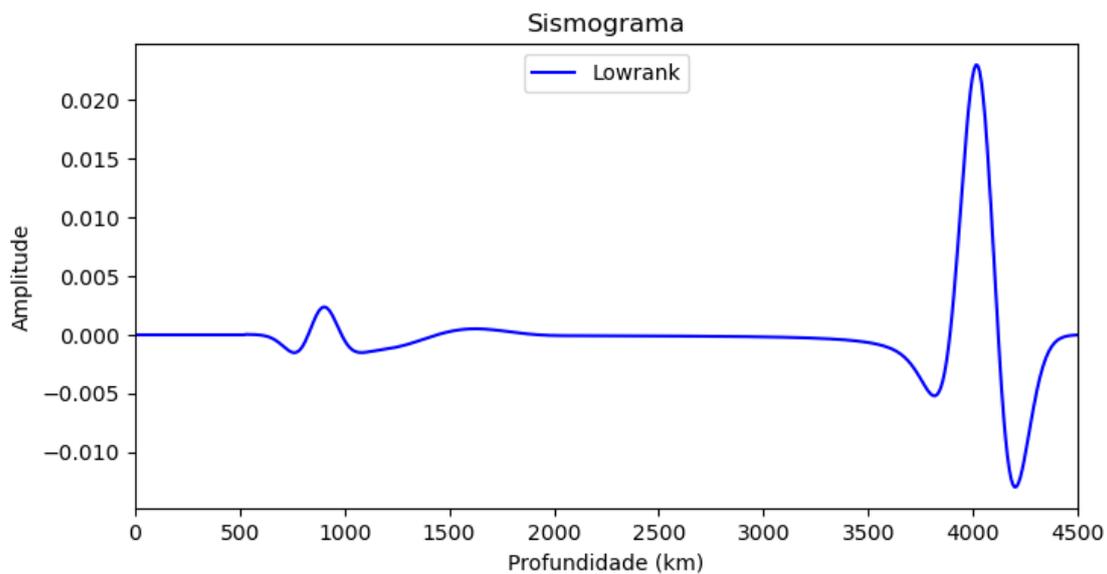


Figura 20 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 19(a).

spread espaçados a cada 10 m e um tempo máximo de propagação de 3 s, obtém-se a seção de fonte comum para o modelamento *lowrank* na Figura 24 e para diferenças finitas na Figura 25. Semelhante aos experimentos anteriores, o método de diferenças finitas sobredimensiona as amplitudes, enquanto *lowrank* mostra-se mais confiável, embora os dois métodos proporcionam uma boa resposta em cinemática. Como era esperado, na Figura 25 observa-se o efeito de borda.

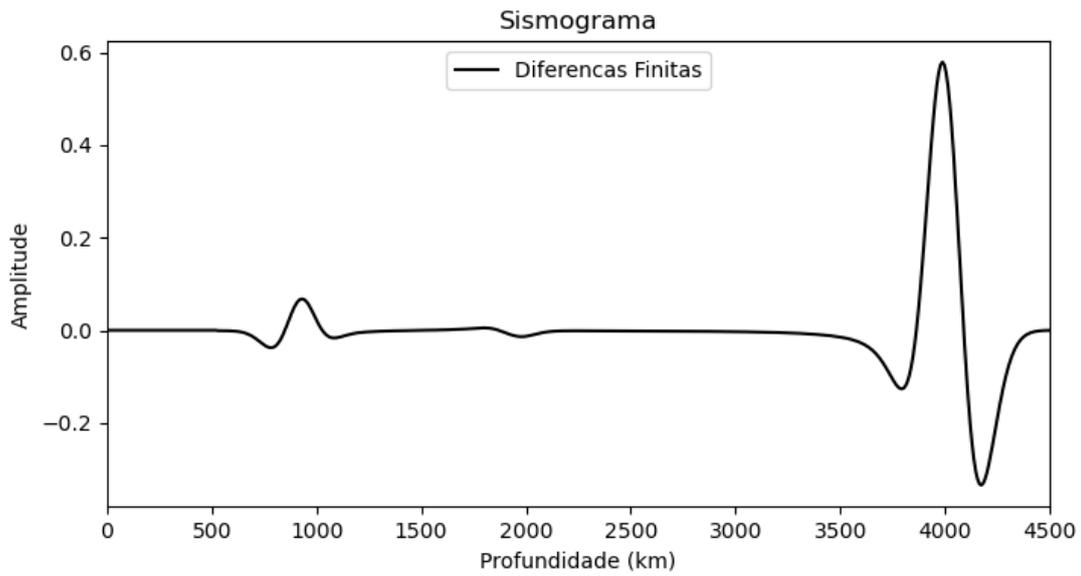


Figura 21 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraído do snapshot da Figura 19(b).

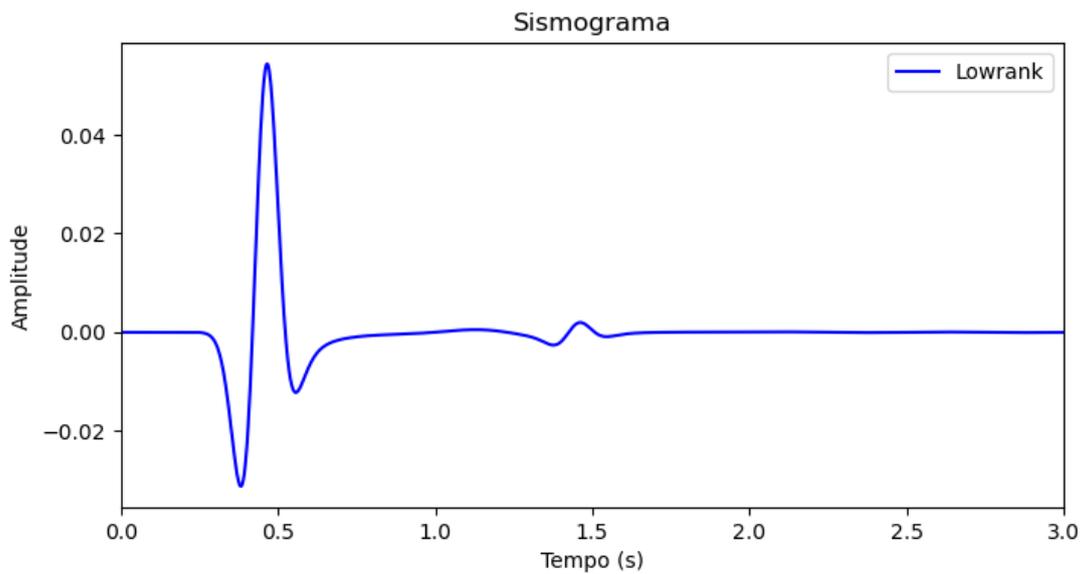


Figura 22 – Traço temporal de *lowrank* no modelo D.

3.2.2 Análise dos coeficientes de reflexão

Para corroborar que as amplitudes dos eventos refletidos são bem aproximadas no método de *lowrank*, foram realizados experimentos considerando o refletor plano, onde os coeficientes de reflexão são muito bem aproximados pelos coeficientes de reflexão de ondas planas, para os quais a expressão teórica em um meio com densidade constante é

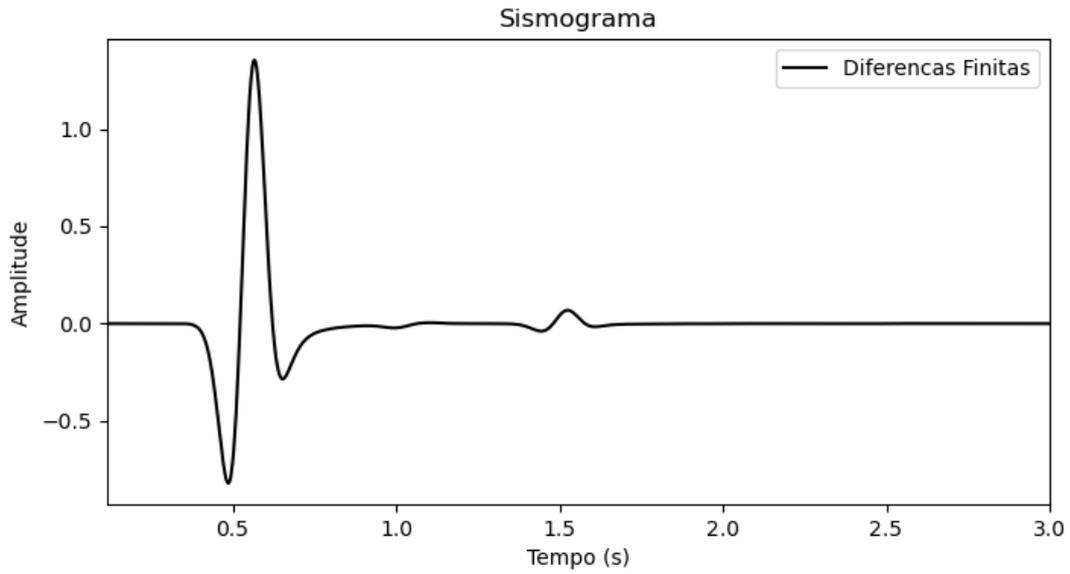


Figura 23 – Traço temporal de diferenças finitas no modelo D.

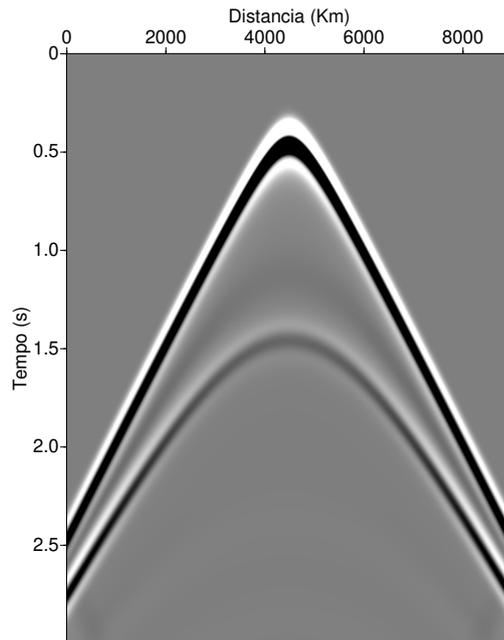


Figura 24 – Seção de fonte comum (tiro em 4500 m) no método de *lowrank*.

dada por,

$$R = \frac{v_2 \cos \theta - v_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \sin \theta\right)^2}}{v_2 \cos \theta + v_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \sin \theta\right)^2}}, \quad (3.2)$$

onde R é o coeficiente de reflexão, v_1 e v_2 são as velocidades de propagação da primeira e

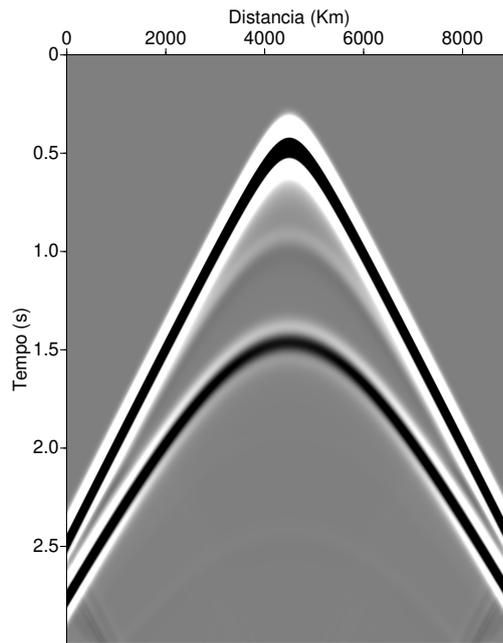


Figura 25 – Seção de fonte comum (tiro em 4500 m) no método de diferenças finitas.

segunda camada, respectivamente, e θ é o ângulo de incidência.

O refletor plano horizontal foi sempre localizado a 2 km de profundidade. Para determinar os coeficientes de reflexão obtidos pelos métodos *lowrank* e de diferenças finitas foram realizados três experimentos detalhados a seguir. Para o primeiro experimento considera-se um modelo E (901×451) que compreende uma extensão horizontal de 9 km e uma profundidade de 4.5 km, as velocidades de propagação da primeira e segunda camada são 2000 m/s e 2200 m/s, respectivamente, com um arranjo de 200 receptores na profundidade de 500 m, espaçados 10 m com uma configuração *end-on spread* e um receptor em incidência normal. A fonte injetora é localizada na mesma posição para os três experimentos, sendo em $x = 4500$ m, $z = 1000$ m. O segundo experimento considera um meio homogêneo com as mesmas dimensões do modelo E e velocidade de propagação igual da primeira camada do modelo E. O arranjo de receptores (receptores espelho) para esse experimento foi localizado de tal forma que a distância percorrida e o tempo de trânsito da onda propagada sejam os mesmos que no primeiro experimento. Para que a onda direta não possa alterar a amplitude da onda refletida, ela foi simulada em um terceiro experimento no modelo homogêneo com fonte e receptores nas mesmas posições do primeiro experimento, e subtraída dos dados obtidos no primeiro experimento. A Figura 26 esquematiza os experimentos realizados.

Nessa seção, o intervalo de amostragem temporal para *lowrank* foi de 0.001 s, enquanto diferenças finitas foi determinado para cumprir com a condição de estabilidade.

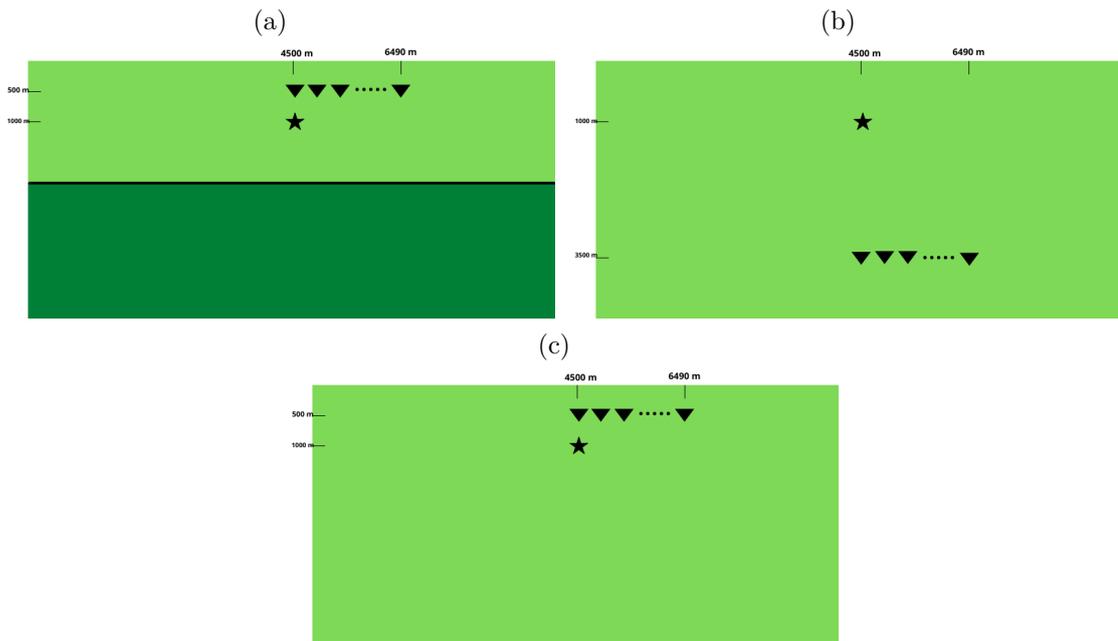


Figura 26 – (a) Primeiro experimento; (b) Segundo experimento considerando receptores espelho; (c) Terceiro experimento.

Para o modelo E, a discretização temporal de diferenças finitas foi de 0.00227273 s. A Figura 27 mostra os pulsos registrados após subtrair a onda direta. Nela aprecia-se o pulso refletido registrado para os receptores em incidência normal e o pulso registrado no receptor espelho. Como era esperado, os pulsos são coincidentes cinematicamente. No caso, os traços mostrados são gerados pelo método *lowrank*.

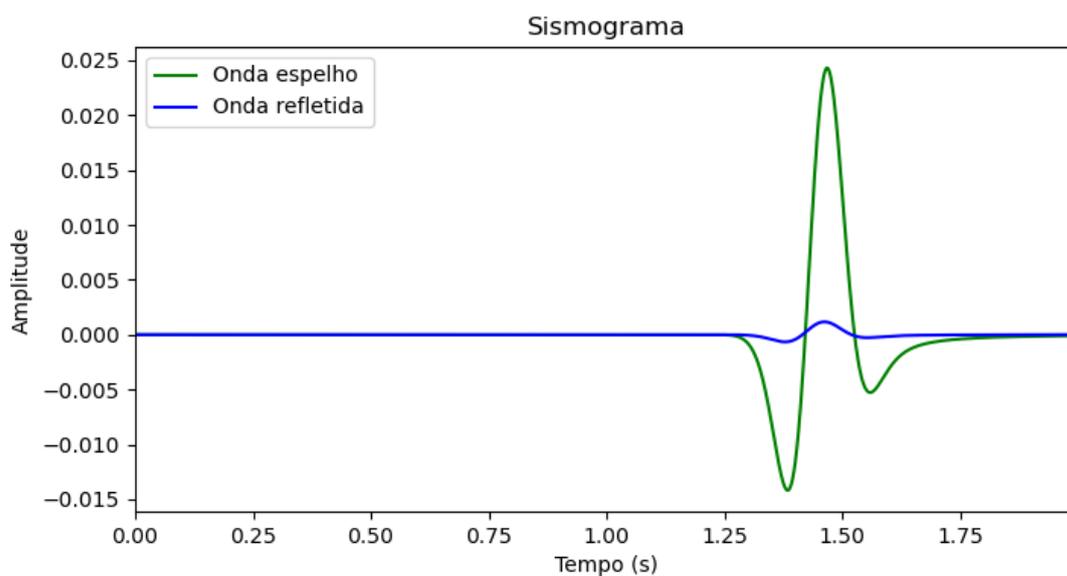


Figura 27 – Ilustração dos experimentos feitos para aproximar os coeficientes de reflexão.

O coeficiente de reflexão é dada pela razão entre a onda refletida registrada no

receptor original e a onda registrada no receptor espelho do meio homogêneo. A Figura 28 mostra as aproximações dos coeficientes de reflexão para o modelo E, segundo o arranjo de receptores descrito, e os coeficientes de reflexão teórico dada pela expressão (3.2).

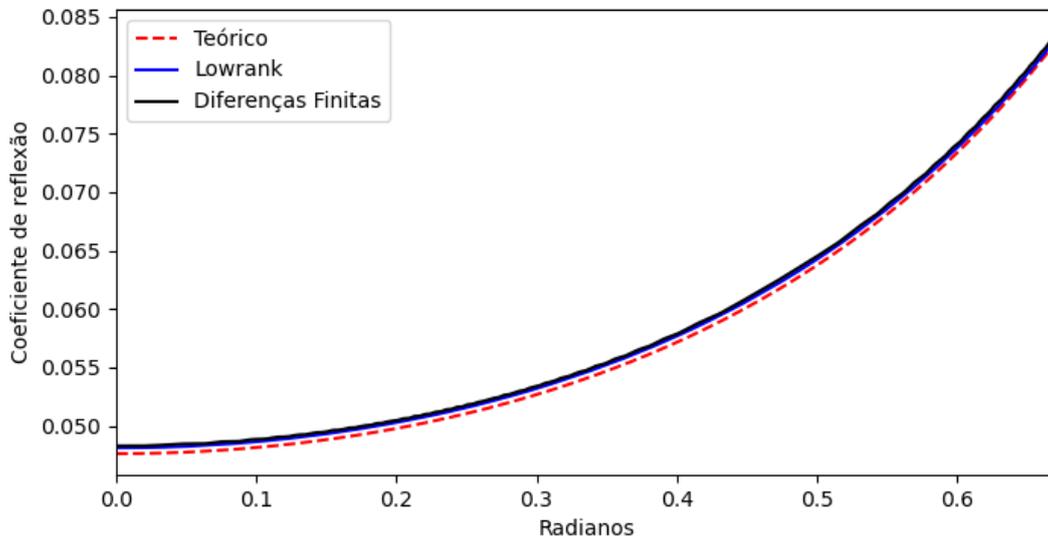


Figura 28 – Comparação dos coeficientes de reflexão teórico com *lowrank* e diferenças finitas para o modelo E.

Aprecia-se uma boa aproximação dos coeficientes de reflexão pelos métodos *lowrank* e diferenças finitas. O erro relativo das aproximações do *lowrank* e das diferenças finitas são mostradas na Figura 29. Os erros relativos apresentam uma maior flutuação dos dados pelo método de diferenças finitas do que pelo método de *lowrank*, e ambos dos casos tem valores superiores ao valor teórico para ângulos pequenos e pelo seu comportamento, espera-se que para ângulos maiores, esses sejam subdimensionados.

Consideramos agora um modelo ao qual chamamos de modelo F (901×451), simulando o contraste de velocidade entre um sedimento e um corpo salino, isto é, a velocidade de propagação da primeira e segunda camada de 2500 m/s e 4500 m/s, respectivamente. O mesmo arranjo de receptores é implementado, e o modelo espelho é um meio homogêneo de 2500 m/s. O intervalo de amostragem temporal para diferenças finitas foi de 0.00111111 s. As aproximações dos coeficientes de reflexão são mostrados na Figura 30. Nesse caso, os coeficientes de reflexão nos métodos de *lowrank* e diferenças finitas foram ligeiramente sobredimensionados para ângulos de incidência pequenos e subdimensionados para ângulos maiores, isto observa-se no erro relativo das aproximações na Figura 31, a qual apresenta valores positivos para ângulos pequenos e cresce negativamente com o ângulo de reflexão.

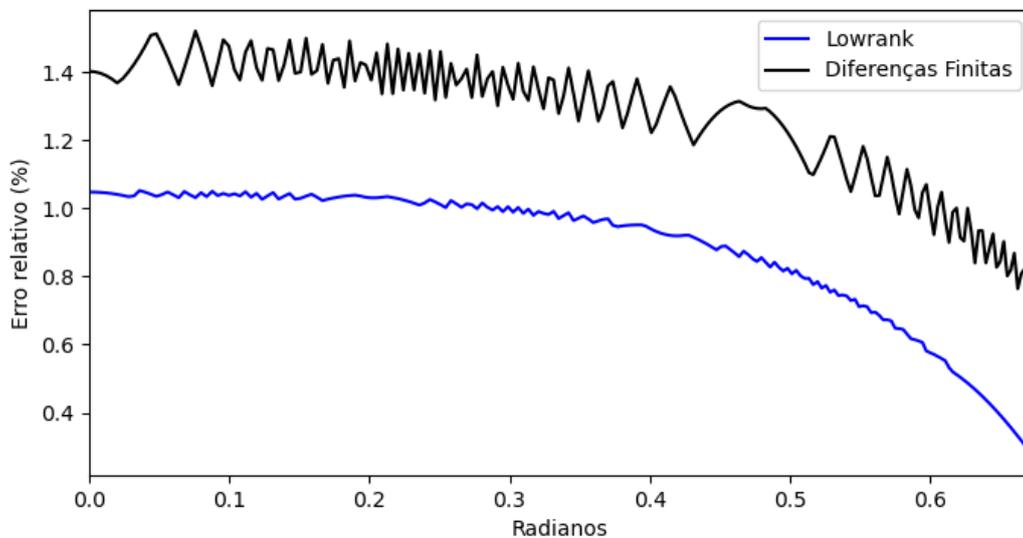


Figura 29 – Erro relativo dos coeficientes de reflexão aproximados pelo método *lowrank* e diferenças finitas para o modelo E.

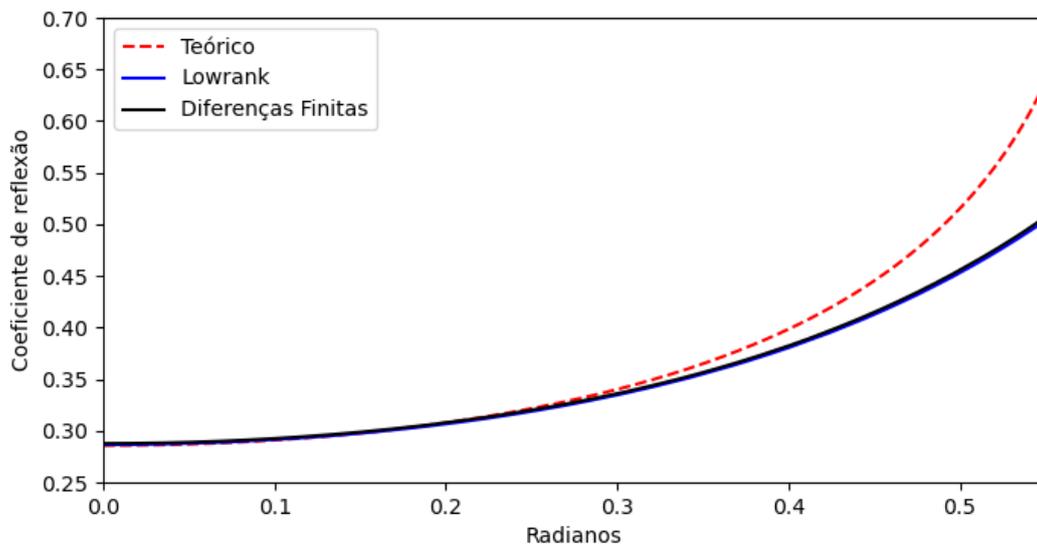


Figura 30 – Comparação dos coeficientes de reflexão teórico com *lowrank* e diferenças finitas para o modelo F.

Por último, simulando um contraste de um sedimento com outro que contém gás ou líquido nos poros, chamamos de modelo G (901×451) com velocidade de propagação da primeira e segunda camada de 2500 m/s e 2000 m/s, respectivamente. A discretização temporal para diferenças finitas foi de 0.002 s. Os coeficientes de reflexão teóricos e aproximados são mostrados na Figura 32, note que o sinal negativo representa uma inversão da polaridade da onda após a reflexão com a camada de menor velocidade.

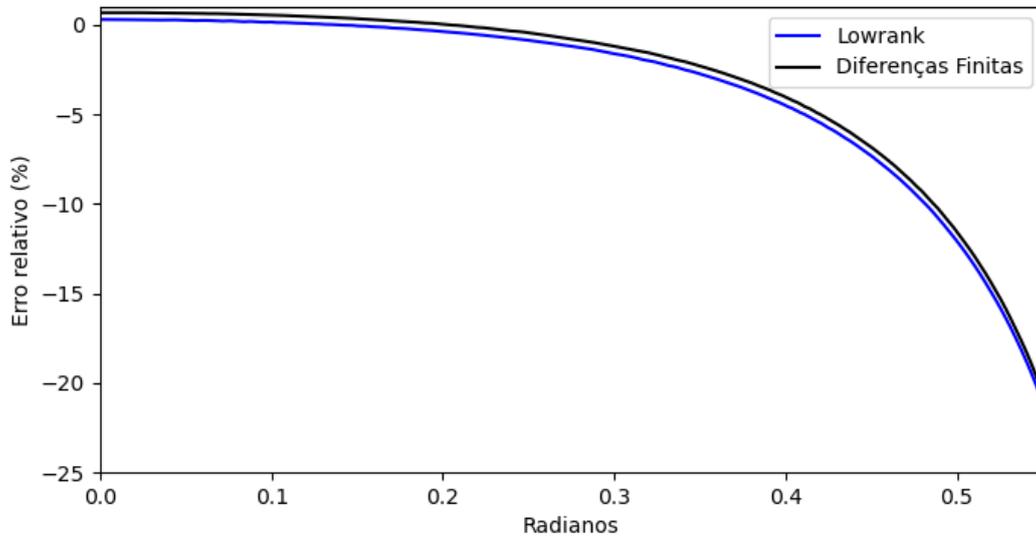


Figura 31 – Erro relativo dos coeficientes de reflexão aproximados pelo método *lowrank* e diferenças finitas para o modelo F.

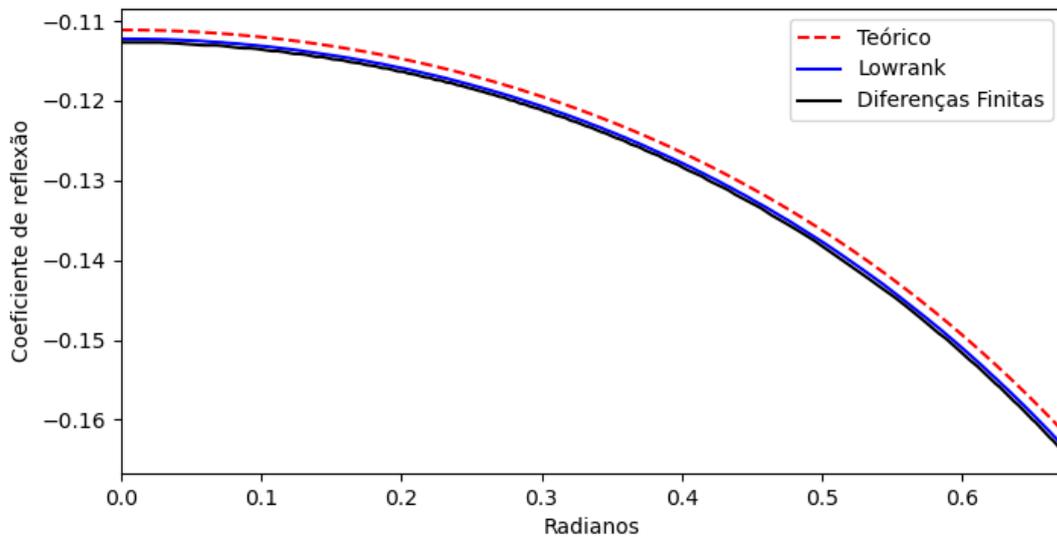


Figura 32 – Comparação dos coeficientes de reflexão teórico com *lowrank* e diferenças finitas para o modelo G.

Os erros relativos de *lowrank* e diferenças finitas são mostrados na Figura 33. Nela observa-se que os dois têm um comportamento crescente com o ângulo de incidência. Em geral, dos experimentos numéricos feitos, podemos concluir que o modelamento por *lowrank* mostra-se ligeiramente mais preciso para caracterizar coeficientes de reflexão em comparação com diferenças finitas, mantendo em todos os casos um erro relativo mínimo em ângulos de incidência pequenos.

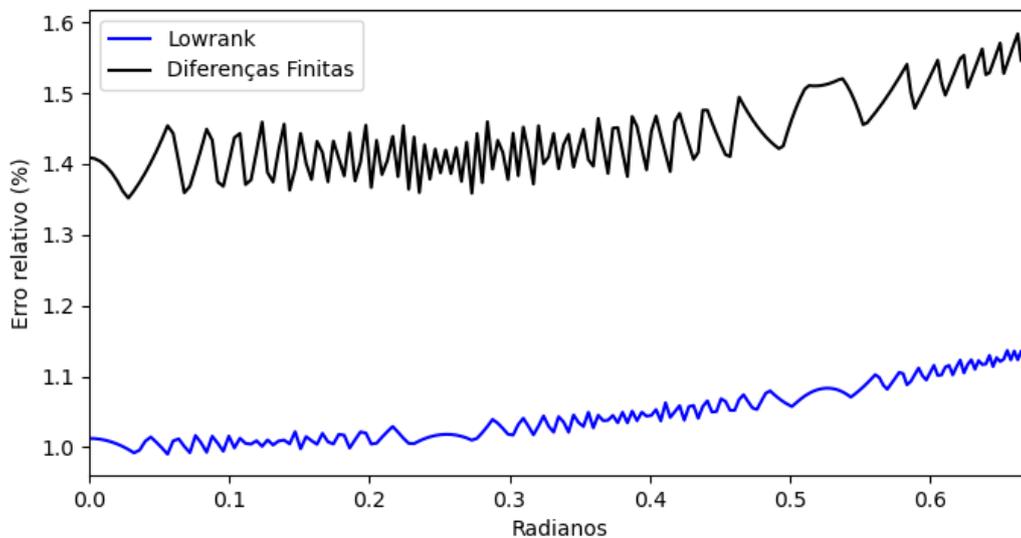


Figura 33 – Erro relativo dos coeficientes de reflexão aproximados pelo método *lowrank* e diferenças finitas para o modelo G.

3.3 Modelo de velocidade com heterogeneidade realista

3.3.1 Modelo BP

Nessa seção considera-se um modelo 2D com velocidade heterogênea exposta na Figura 34. Trata-se de uma parte do modelo da velocidade V_p do modelo TTI da BP. Para os nossos testes, desconsideramos os demais parâmetros elásticos. O modelo tem uma extensão horizontal de 18 km e uma profundidade de 9 km. A discretização espacial usada corresponde a $\Delta x = \Delta z = 20$ m, o intervalo temporal para o método de *lowrank* foi de 0.001 s e para estabilidade de diferenças finitas igual a 0.00228846 s. A fonte impulsiva foi localizada a 9 km da origem e a 100 m de profundidade.

A Figura 35 mostra o snapshot da propagação no instante 3 s, modelado pelo método *lowrank* (Figura 35(a)) e por diferenças finitas (Figura 35(b)). Os dois métodos posicionam bem os eventos de reflexão, embora os pulsos modelados pelos dois métodos não apresentem o mesmo formato. Seria necessária uma terceira modelagem independente para avaliar qual dos resultados melhor aproxima a solução desejada.

Esse fenômeno pode ser observado também na Figura 37, na qual, em contraste com a Figura 36, é visível que a onda é mais distorcida após as reflexões nas mudanças de velocidade no modelo.

Os traços temporais registrados em um receptor localizado a 4.5 km da origem em uma profundidade de 20 m são mostradas nas Figuras 38 e 39, para *lowrank* e diferenças finitas, respectivamente. Na Figura 39 é visível um pouco de dispersão numérica em diferenças finitas.

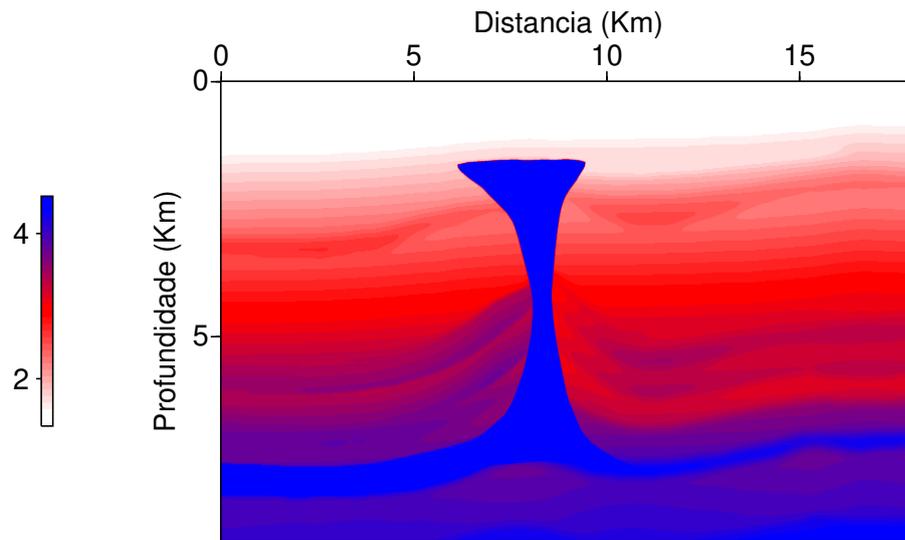


Figura 34 – Modelo de velocidade sintético.

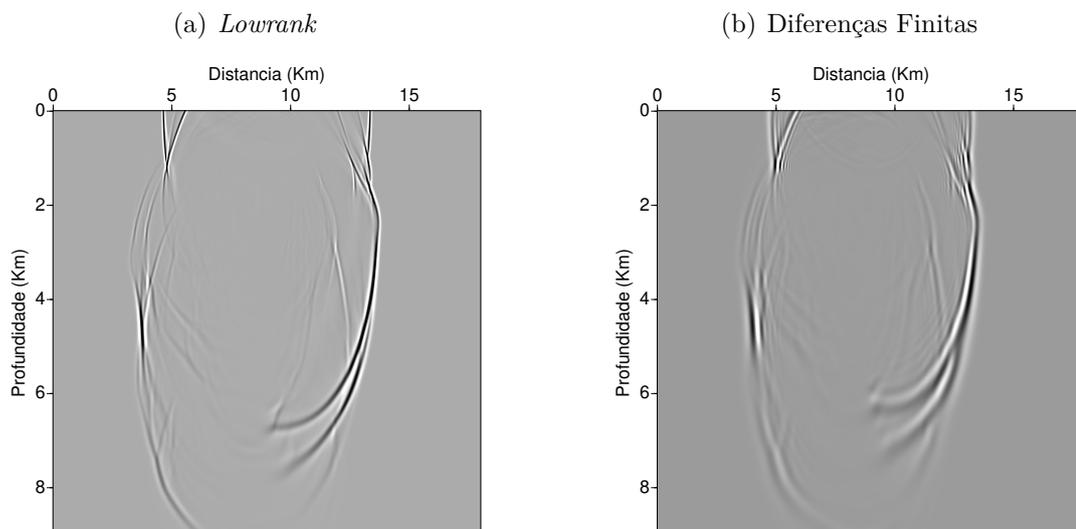


Figura 35 – Snapshot da propagação de onda em um meio de velocidade heterogêneo (Modelo BP) após 3 s.

Considerando um arranjo de receptores com uma configuração *split spread* espaçados 20 m com uma profundidade de 20 m, consegue-se a seção de tiro comum para os dois métodos, mostrados na Figura 40 para *lowrank* e na Figura 41 para diferenças finitas. Da seção gerada pelo *lowrank* é possível separar mais eventos de reflexão segundo a Figura 40. Na Figura 41 notamos uma forte presença de dispersão numérica.

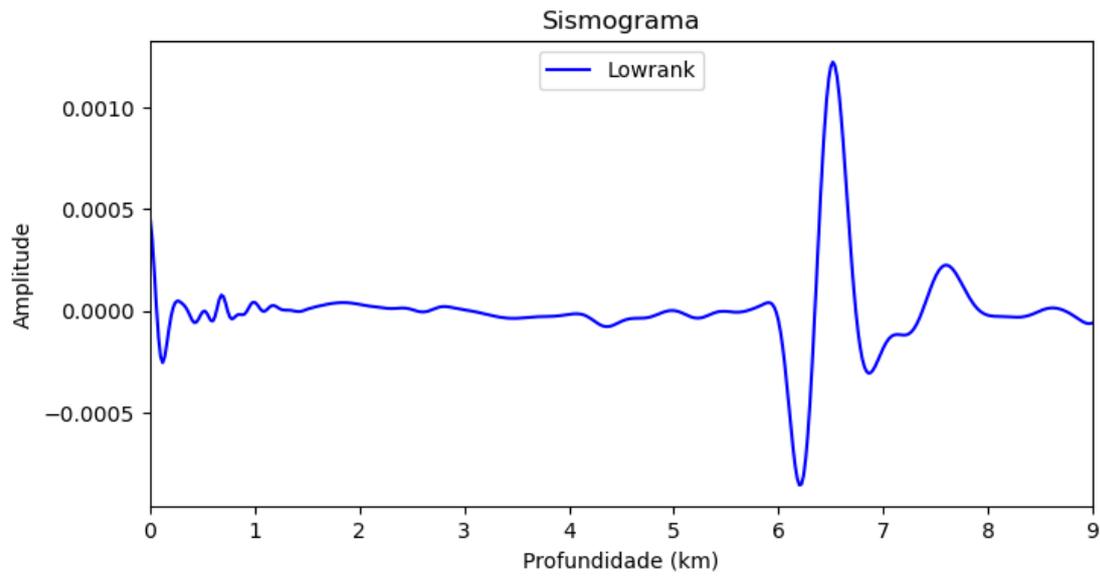


Figura 36 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraída da Figura 35(a).

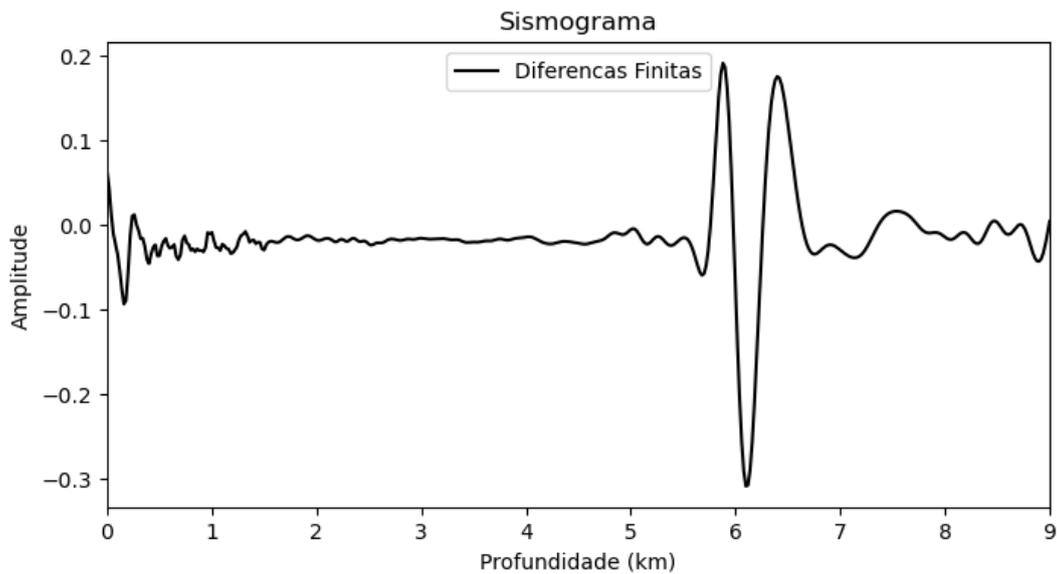


Figura 37 – Traço vertical espacial na posição da fonte extraída da Figura 35(b).

O tempo de modelamento da evolução do campo pelo *lowrank* foi de 12.7 minutos, enquanto diferenças finitas de 18.7 segundos. O posto aproximado foi igual a 3. No caso, aprecia-se que *lowrank* gera mais custo computacional.

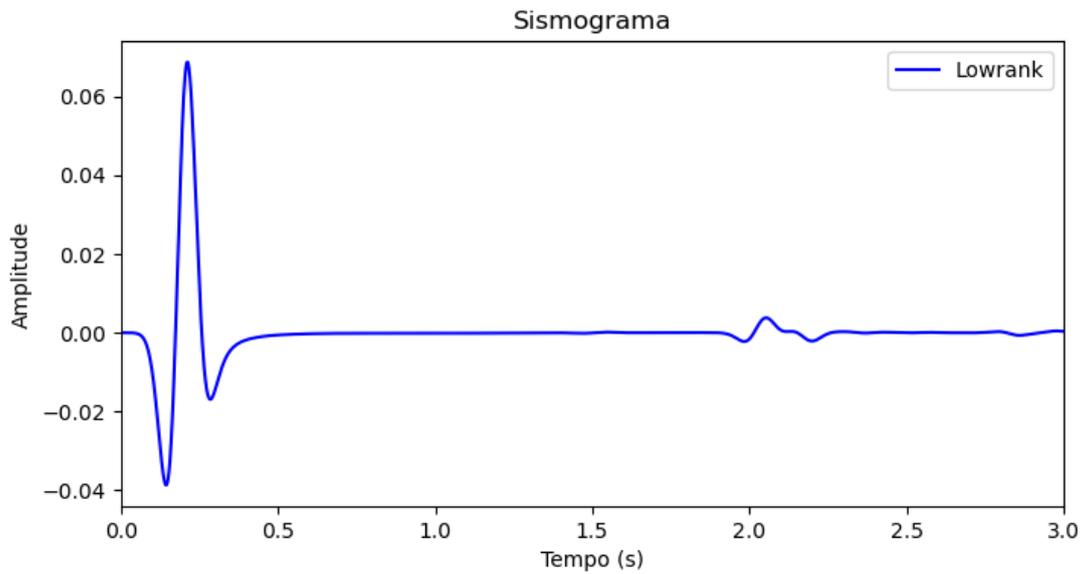
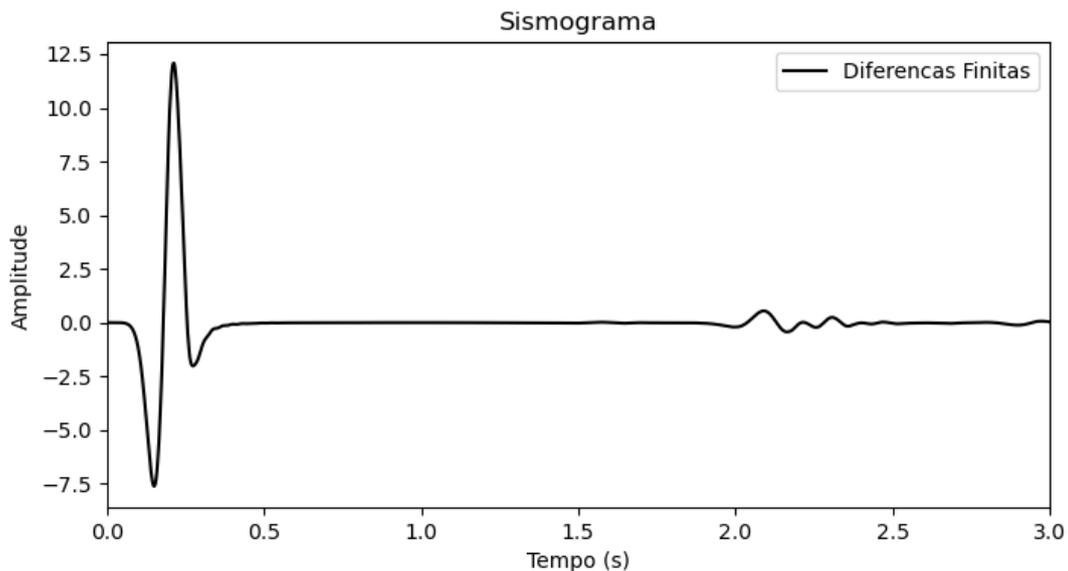
Figura 38 – Traço temporal de *lowrank* no modelo de velocidade BP.

Figura 39 – Traço temporal de diferenças finitas no modelo de velocidade BP.

3.3.2 Modelo Marmousi

Por último, considera-se o modelo de velocidade Marmousi, mostrado na Figura 42, o qual é discretizado numa malha de 767×243 . A fonte injetora é localizada a 4596 m da origem e 120 m de profundidade. O intervalo de amostragem espacial é de 12 m. Nesse caso o intervalo de amostragem temporal foi igual a 0.00102604 s.

O campo de onda foi propagado por 1.5 s e os snapshots são apresentados na Figura 43. No caso os dois métodos apresentam maior similaridade entre os campos de onda modelados do que no modelo BP.

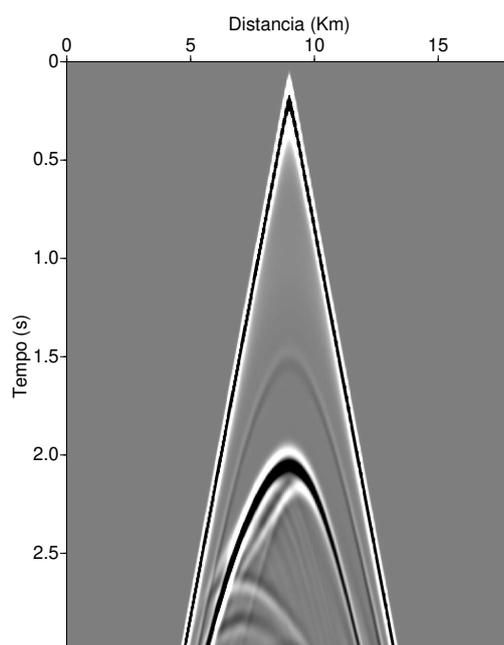


Figura 40 – Seção de fonte comum (fonte em 9 km) no modelo BP pelo método *lowrank*.

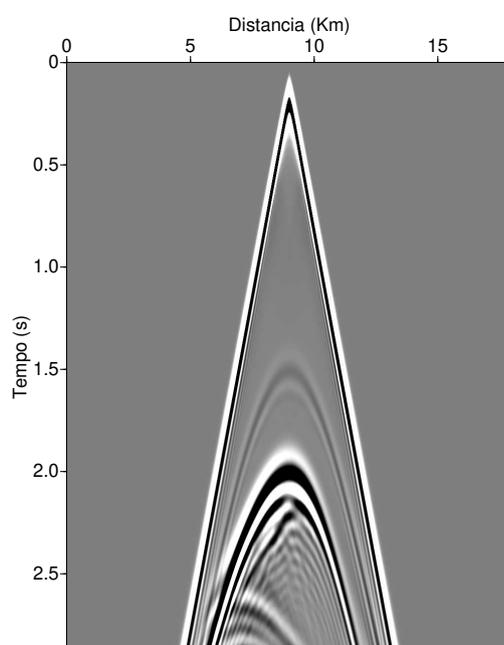


Figura 41 – Seção de fonte comum (fonte em 9 km) no modelo BP por diferenças finitas.

Considerando um receptor localizado a 4596 m da origem e uma profundidade de 12 m, os tracos temporais para os dois métodos foram registrados, exibidos nas Figuras 44 e 45 para *lowrank* e diferenças finitas, respectivamente. A seção de tiro comum gerado

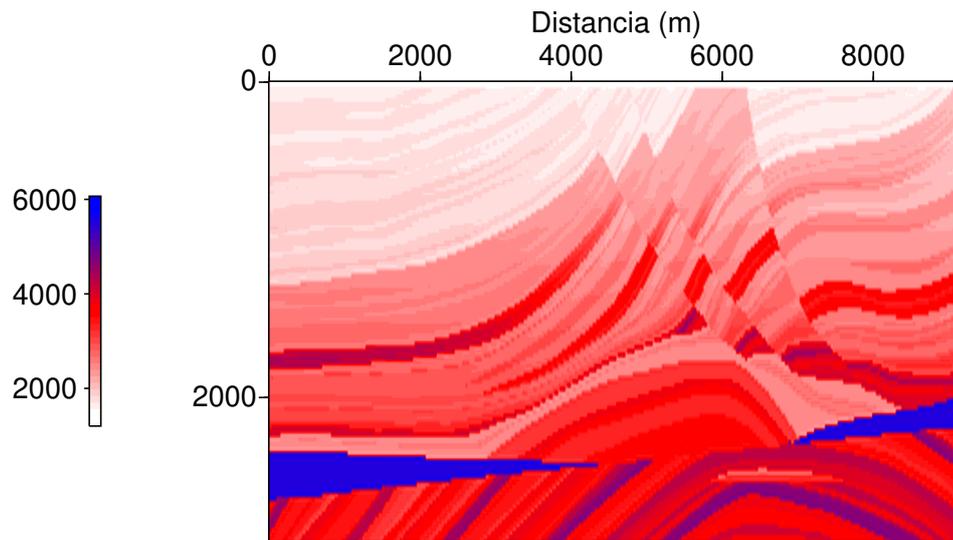


Figura 42 – Modelo de velocidade Marmousi.

pele método *lowrank* é mostrado na Figura 46 e de diferenças finitas na Figura 47. As seções sísmicas geradas nos dois métodos permite distinguir os diferentes eventos de reflexão.

O tempo computacional do *lowrank* para modelar a propagação da onda foi de 1.68 minutos, enquanto diferenças finitas foi de 9.6 segundos. No caso, o posto aproximado foi igual 2.

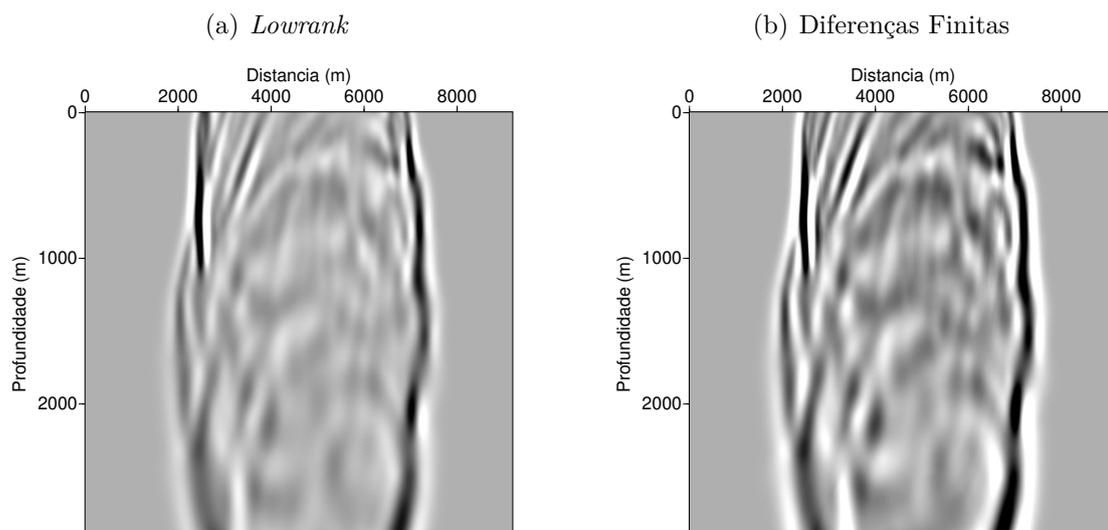


Figura 43 – Snapshot da propagação de onda no modelo de velocidade Marmousi após 1.5 s.

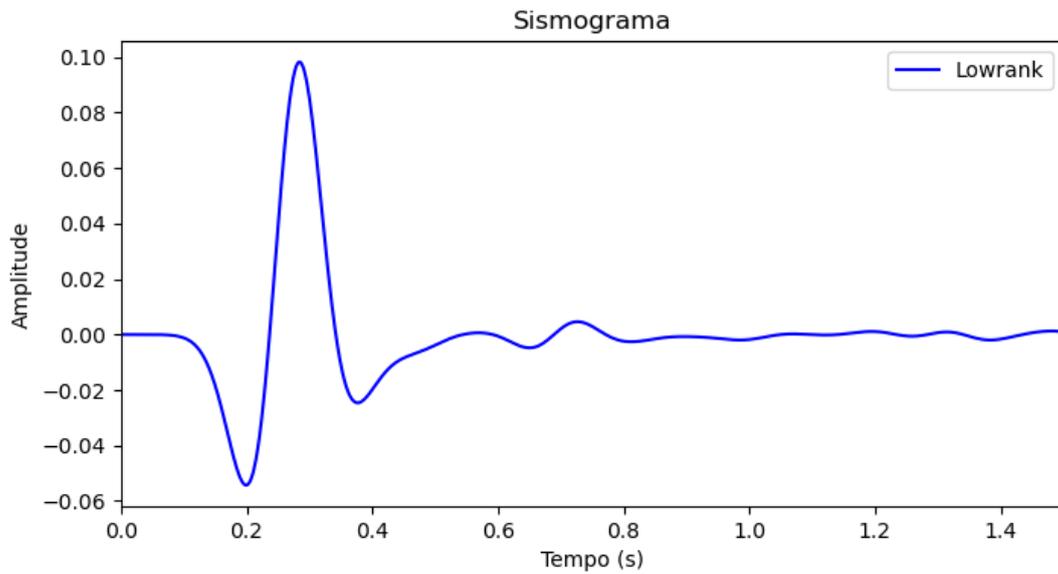


Figura 44 – Traço temporal de *lowrank* no modelo de velocidade Marmousi.

Para realizar o modelamento da onda em modelos de velocidades heterogêneas realistas, o método *lowrank* apresentou problemas para obter uma aproximação de posto baixo usando a mesma discretização temporal que o método de diferenças finitas, e que usualmente eram muito maiores que o efetivo a ser usado no *lowrank*. O mesmo problema foi observado para Δt pequenos. Pelo qual, para um modelamento mais preciso mediante o método *lowrank* é importante obter um intervalo de amostragem temporal dentro do qual o método funcione de forma confiável.

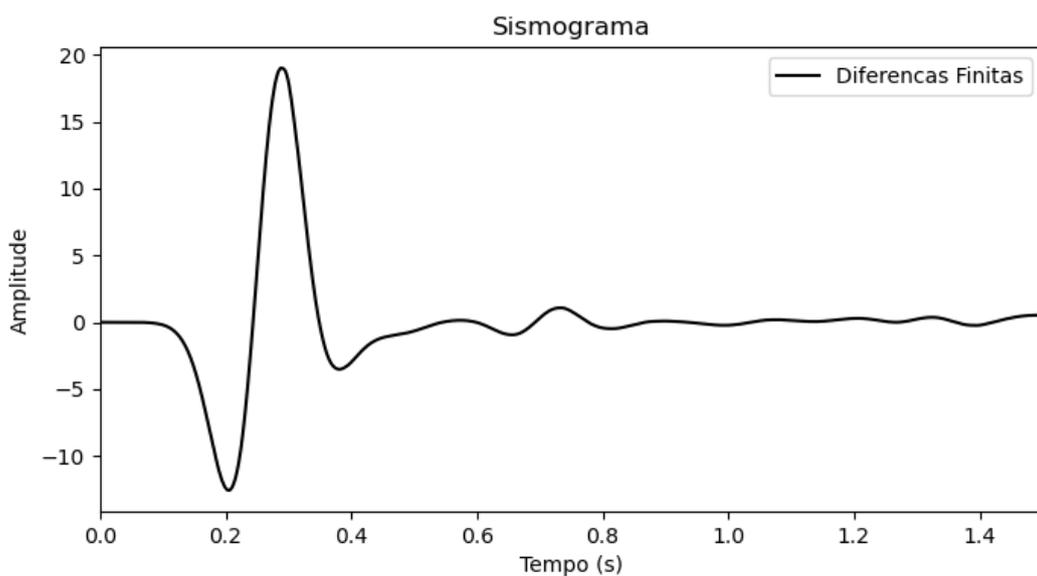


Figura 45 – Traço temporal de diferenças finitas no modelo de velocidade Marmousi.

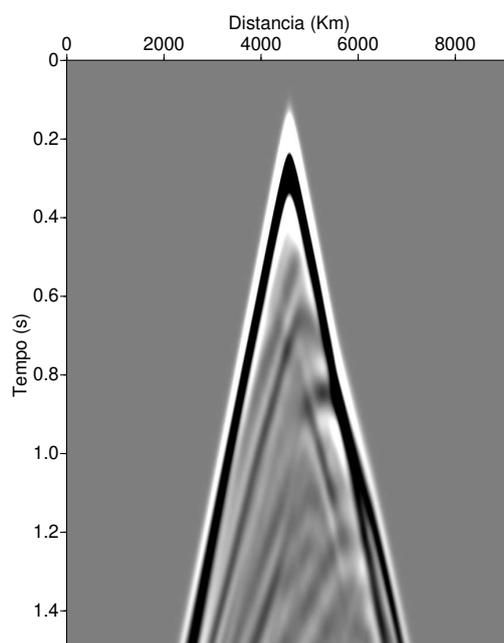


Figura 46 – Seção de fonte comum no modelo Marmousi pelo método *lowrank*.

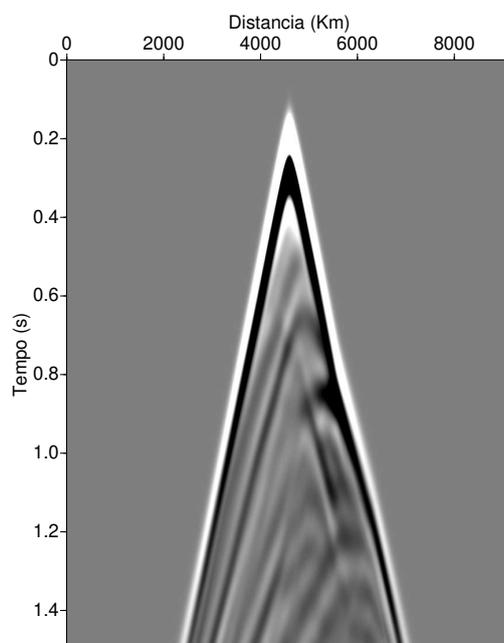


Figura 47 – Seção de fonte comum no modelo Marmousi por diferenças finitas.

4 Conclusões

Por meio de experimentos numéricos em diferentes modelos conseguiu-se avaliar o desempenho absoluto e relativo do método *lowrank*. A primeira parte dos experimentos foi considerando meios homogêneos, pois existe a solução analítica para a equação da onda. Assim, para várias discretizações de um mesmo modelo, obtêm-se uma resposta teórica em cinemática e dinâmica. Dos testes afirma-se que para diferentes discretizações espaciais, é possível encontrar um intervalo de amostragem temporal para o qual o método *lowrank* apresenta um erro dinâmico menor a 1%, enquanto o código de diferenças finitas utilizado sobredimensiona a amplitude e é mais sensível à dispersão numérica para discretizações espaciais grossas. Isto também afeta à cinemática pois a onda chega ligeiramente antes que a solução teórica. As amplitudes absolutas foram de difícil comparação por ambos os programas apresentaram fatores de escala em função da discretização. O método *lowrank* sempre posicionou a onda corretamente. Para modelos pequenos, *lowrank* precisa maior tempo de modelamento, mas o crescimento linear com o tamanho da malha sugere que para modelos de grande porte possa se esperar uma melhor eficácia. Note-se aqui que, para a modelagem de múltiplas fontes no mesmo modelo, a decomposição da matriz propagadora precisa ser feita somente uma única vez.

Mesmo que o método *lowrank* não considere os coeficientes de reflexão, esses são bem aproximados, pelo qual mostra-se mais confiável para exibir eventos de reflexão em meios com um refletor plano, em comparação com diferenças finitas.

Logo, após um minucioso estudo, pode-se afirmar que para modelar ondas sísmicas em meios homogêneos e até meios com um refletor plano, o método de *lowrank* tem um melhor desempenho, mesmo para modelos pequenos, nos quais, embora o custo computacional é maior em comparação com diferenças finitas, apresenta um melhor benefício, pois modela a onda com muita precisão. Para modelos heterogêneos, o método de diferenças finitas tem a vantagem de poder diminuir a discretização espacial e assim evitar um maior efeito de dispersão numérica. No método de *lowrank*, foi observado que uma diminuição de discretização espacial ou temporal pode reduzir a qualidade do resultado.

Para trabalhos futuros, pode ser considerado tanto diferentes decomposições da matriz propagadora, como aproximações da submatriz de baixo posto, que permita diminuir as quantidades de operações e computar a evolução do campo de onda com maior eficiência. Recomenda-se uma comparação com diferenças finitas sob melhor controle do Δt , pois o código em **sufdmod2** não proporciona flexibilidade na escolha da discretização temporal.

Referências

- Engquist, B. and Ying, L. (2009). A fast directional algorithm for high frequency acoustic scattering in two dimensions. *Communications in Mathematical Sciences*, 7(2):327–345. Citado 4 vezes nas páginas 15, 22, 23 e 24.
- Etgen, J. T. (1986). High-order finite-difference reverse time migration with the 2-way non-reflecting wave equation. Citado na página 15.
- Etgen, J. T. and Brandsberg-Dahl, S. (2009). The pseudo-analytical method: Application of pseudo-Laplacians to acoustic and acoustic anisotropic wave propagation. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 28(1):2552–2556. Citado na página 20.
- Fomel, S., Ying, L., and Song, X. (2013). Seismic wave extrapolation using lowrank symbol approximation. *Geophysical Prospecting*, 61(3):526–536. Citado 4 vezes nas páginas 15, 17, 23 e 25.
- Goreinov, S. A., Tyrtyshnikov, E. E., and Zamarashkin, N. L. (1997). A theory of pseudoskeleton approximations. *Linear Algebra and Its Applications*, 261(1-3):1–21. Citado na página 23.
- Johnson, W. B. and Lindenstrauss, J. (1984). Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space. 26. Citado na página 24.
- Liberty, E., Woolfe, F., Martinsson, P. G., Rokhlin, V., and Tygert, M. (2007). Randomized algorithms for the low-rank approximation of matrices. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 104(51):20167–20172. Citado na página 23.
- Meyer, C. D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Citado na página 24.
- Sarlós, T. (2006). Improved approximation algorithms for large matrices via random projections. *Proceedings - Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS*, pages 143–152. Citado na página 23.
- Tal-Ezer, H., Kosloff, D., and Koren, Z. (1987). An Accurate Scheme for Seismic Forward Modelling. *Geophysical Prospecting*, 35(5):479–490. Citado na página 15.