



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

VITOR MATEUS MARTINI

Subestruturação dinâmica experimental de fundações de máquinas rotativas

CAMPINAS
2022

VITOR MATEUS MARTINI

Subestruturação dinâmica experimental de fundações de máquinas rotativas

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientadora: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Paiva Okabe

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO VITOR MATEUS MARTINI, ORIENTADO PELA PROFA. DRA. KATIA LUCCHESI CAVALCA DEDIDNI E CO-ORIENTADO PELO PROF. DR. EDUARDO PAIVA OKABE.

CAMPINAS

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

M366s Martini, Vitor Mateus, 1997-
Subestruturação dinâmica experimental de fundações de máquinas rotativas / Vitor Mateus Martini. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini.
Coorientador: Eduardo Paiva Okabe.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Rotores - Dinâmica. 2. Fundações. 3. Análise modal. 4. Dinâmica estrutural. I. Dedini, Katia Lucchesi Cavalca, 1963-. II. Okabe, Eduardo Paiva, 1976-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Experimental dynamic substructuring of rotating machinery foundations

Palavras-chave em inglês:

Rotordynamics

Foundations

Modal analysis

Structural dynamics

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Katia Lucchesi Cavalca Dedini [Orientador]

Gilberto Pechoto de Melo

Josué Labaki Silva

Data de defesa: 31-03-2022

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-9831-7302>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3068046313244965>

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Subestruturação dinâmica experimental de
fundações de máquinas rotativas**

Autor: Vitor Mateus Martini

Orientador: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Paiva Okabe

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini, Presidente

Universidade Estadual de Campinas - FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo

Universidade Estadual Paulista - DEM/UNESP

Prof. Dr. Josué Labaki Silva

Universidade Estadual de Campinas - FEM/UNICAMP

A Ata de Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 31 de março de 2022.

Dedico este trabalho à minha família: aqui estão os resultados dos seus esforços. Madson, a você dedico meu futuro.

Agradecimentos

A Deus, pelos dons concedidos e pelas infinitas bênçãos que me concede. É impossível agradecer o suficiente pela vida, mas reconheço que o verdadeiro autor de todas as coisas é Ele.

Aos meus pais, Eloí e Valdir, cujas palavras e ensinamentos reverberam ao meu entorno todos os dias e direcionam minhas decisões.

Aos meus irmãos, Kelli e João, pelo apoio mostrado nos momentos em que palavras faltaram para exprimir o cansaço. Seus exemplos me motivaram a seguir em frente.

Ao meu eterno alicerce e fonte da minha harmonia, Madson. Com você, aprendi que sou mais forte do que imagino e que posso ir tão longe quanto quiser.

Agradeço e tenho profunda gratidão aos professores Katia Lucchesi Cavalca e Eduardo Okabe. É imensurável a confiança depositada neste trabalho e a paciência para orientar com tamanha maestria.

Agradeço ao Leonardo Saint Martin pelo conhecimento e auxílio fornecidos. Seu esmero e dedicação à ciência certamente serão reconhecidos por onde passar.

À equipe do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR), que permanece unida quaisquer que sejam as situações.

À Universidade Estadual de Campinas e todo seu corpo docente, que constantemente abrem janelas pelas quais vislumbramos horizontes permeados pelo sucesso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo no 131848/2020-8.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”

(Albert Einstein)

“It matters not what someone is born, but what they grow to be”

(Albus Dumbledore)

Resumo

A subestruturação dinâmica permite a análise dos subsistemas que compõem uma estrutura pois possibilita o acoplamento ou o desacoplamento de cada subsistema. No acoplamento, determina-se a resposta dinâmica dada pela interação entre as subestruturas apenas conhecendo o comportamento individual de cada uma. No desacoplamento, se extrai a resposta de um componente cuja caracterização de seus modos e influência na dinâmica global são de difícil determinação a partir da medição de sua resposta dinâmica individual. Conhecendo o comportamento do sistema completo e de sua configuração parcial, ou seja, sem o componente de interesse, determinam-se as características dinâmicas deste último.

Foi analisada a aplicabilidade da subestruturação em uma fundação de máquinas rotativas pertencente ao banco de testes experimentais do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR) da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM/UNICAMP). A fundação consiste em uma base metálica e em duas estruturas de suporte de mancais (pedestais) onde foram empregadas técnicas de desacoplamento e acoplamento. Associou-se ainda a análise modal experimental, o método dos mínimos quadrados para exponenciais complexas (LSCE) e a reconstituição das funções de resposta em frequência por parâmetros modais.

Quatro métodos de desacoplamento - Padrão, Interface Estendida, Superdeterminado e Interno - foram utilizados para o desacoplamento do pedestal da base na condição em que ambos se encontram acoplados e suspensos, isto é, não estão montados à bancada de ensaios. A investigação das respostas desacopladas considerou os resultados da análise modal realizada e a influência de parâmetros como a quantidade e a localização de nós de medição utilizados, a ordem de aproximação dos modelos e a localização do ponto de excitação.

Com o posterior acoplamento numérico de um e dois pedestais à base, tanto suspensa quanto montada à bancada, e a comparação dos resultados da subestruturação com os experimentais, constatou-se que o método Superdeterminado se caracteriza como o mais adequado ao processo. O acoplamento foi realizado com diferentes nós de conexão e verificou-se que apenas um ponto foi o suficiente. O trabalho mostrou, assim, as vantagens da subestruturação tendo em vista que diferentes configurações podem ser testadas sem a necessidade de realizar os testes experimentais para determinar o comportamento dinâmico de cada configuração.

Palavras Chave: subestruturação; análise modal experimental; dinâmica de rotores; fundação.

Abstract

Dynamic substructuring allows the analysis of the subsystems that constitute a structure as it provides the means for the coupling or decoupling of each of these subsystems. In coupling, the dynamic response originated from the interaction between substructures is determined by knowing their individual behavior. In decoupling, one extracts the response of a component whose modes characterization and influence on the global dynamics is difficult to determine from the measurement of its individual dynamic response. Knowing the behavior of the complete system and its partial configuration, i.e., without the component of interest, it is possible to determine the dynamic characteristics of the latter.

The applicability of substructuring was investigated in a rotating machinery foundation of an experimental test rig pertaining to the Laboratory of Rotating Machinery (LAMAR) of the School of Mechanical Engineering (FEM/UNICAMP). The foundation consists of a metal base and two bearing support structures (pedestals) in which decoupling and coupling techniques were employed. Experimental modal analysis, the least squares method for complex exponentials (LSCE) and reconstitution of the frequency response functions by modal parameters were also associated.

Four decoupling methods - Standard, Extended Interface, Overdetermined, and Internal - were used to decouple the pedestal from the base in the condition where both are assembled and suspended, i.e., not attached to the test rig. The analysis of the decoupled responses considered the results of the modal analysis performed and the influence of parameters such as the number and location of measurement nodes, the order of approximation of the models, and the driving point location.

With the subsequent numerical coupling of one and two pedestals to the base, both suspended and attached to the test rig, and the comparison of the substructuring results with the experimental ones, it was observed that the Overdetermined method is considered as the most suitable for the process. The coupling was performed with different connection nodes and it was concluded that only one point was enough. The work thus demonstrates the advantages of substructuring considering that the different setups of the foundation structure can be tested without the necessity of performing the experimental test of each one of the configurations.

Key Words: substructuring; experimental modal analysis; rotor dynamics; foundation.

Lista de Ilustrações

Figura 1 – Níveis de decomposição de um sistema.....	21
Figura 2 – Domínios de representação da resposta dinâmica.....	31
Figura 3 – Sistema com múltiplas subestruturas.	35
Figura 4 – Fluxograma da metodologia de subestruturação.....	38
Figura 5 – Sistema genérico em acoplamento e desacoplamento.	42
Figura 6 – Relação de desacoplamento entre duas subestruturas genéricas.....	46
Figura 7 – Definição das condições de interface para cada método de desacoplamento.	50
Figura 8 – Fluxograma do método LSCE.....	59
Figura 9 – Diagrama de Estabilização.....	62
Figura 10 – Matriz de MAC.	64
Figura 11 – Sistema analítico de duas subestruturas.	65
Figura 12 – Sistema analítico de duas subestruturas com redução dos GDLs de B.....	67
Figura 13 – Fluxograma da estimação de parâmetros modais e síntese de FRFs.	69
Figura 14 – Sistema massa-mola global ABC.....	70
Figura 15 – Sistema de aquisição de dados (à esquerda) e bancada de testes (à direita).	71
Figura 16 – Vista superior da base metálica.....	72
Figura 17 – Base montada na fundação.....	72
Figura 18 – Base metálica com dois suportes de mancais acoplados.....	73
Figura 19 – Estrutura de suporte de mancal fixada à base suspensa por tubos de látex.....	74
Figura 20 – Localização dos nós de medição/excitação na base metálica.	75
Figura 21 – Pedestal dos mancais, pontos e direções de medição.....	76
Figura 22 – Discretização utilizada no processo de medição da base montada à fundação e com dois suportes de mancais.	77
Figura 23 – Região de acoplamento do pedestal à base metálica.....	79
Figura 24 – Regiões de acoplamento dos dois pedestais à base metálica.	88
Figura 25 – Funções de Resposta em Frequência da Subestrutura A (Y_A).....	90
Figura 26 – Funções de Resposta em Frequência da Subestrutura B (Y_B).	91
Figura 27 – Funções de Resposta em Frequência da Estrutura AB (Y_{AB}).	91
Figura 28 – FRF da subestrutura B na posição (2,3).....	92
Figura 29 – $Y_B(2,3)$ original e desacoplada pelo método Padrão.	94
Figura 30 – Erros relativos em amplitude e fase de $Y_B(2,3)$ com o método Padrão.....	95

Figura 31 – $YB(2,3)$ original e desacoplada pelo método de Interface Estendida.....	96
Figura 32 – Erros relativos em amplitude e fase de $YB(2,3)$ com o método Interface Estendida.	96
Figura 33 – $YB(2,3)$ original e desacoplada pelo método Superdeterminado.	97
Figura 34 – Erros relativos em amplitude e fase de $YB(2,3)$ com o método Superdeterminado.	98
Figura 35 – $YB(2,3)$ original e desacoplada pelo método Interno.....	99
Figura 36 – Erros relativos na amplitude e na fase de $YB(2,3)$ com método Interno.....	99
Figura 37 – Comparação entre resposta original e resposta acoplada da componente $YAB(1,1)$	100
Figura 38 – FRFs originais e sintetizadas da subestrutura A: componentes da terceira linha.	104
Figura 39 – FRFs originais e sintetizadas da estrutura AB: componentes da segunda linha.	104
Figura 40 – FRFs da subestrutura B de 2 GDLs desacoplada com método Superdeterminado.	106
Figura 41 – FRFs do sistema ABC obtidas por acoplamento duplo.	107
Figura 42 – Diagramas de estabilização do primeiro conjunto de nós da base isolada.....	110
Figura 43 – Diagrama de estabilização do sexto conjunto de nós da base isolada.	113
Figura 44 – Respostas originais e sintetizadas do terceiro conjunto de nós da base isolada..	114
Figura 45 – Diagramas de estabilização (ordens 20 e 30) do nó 147: base com um pedestal.	116
Figura 46 – Respostas originais e sintetizadas do quarto conjunto de nós da base com uma estrutura de suporte de mancais.....	120
Figura 47 – Esquema da matriz booleana de acoplamento entre a base e um pedestal.....	126
Figura 48 – Base e pedestal acoplados com resposta obtida pelo método Padrão.	127
Figura 49 – Matriz MAC para base e pedestal acoplados: comparação entre modos de vibrar experimentais e obtidos após o acoplamento com o resultado do método Padrão.....	128
Figura 50 – Matriz MAC para base e pedestal acoplados com resultado do método Padrão: utilização dos nós do quinto conjunto para desacoplamento e acoplamento.	129
Figura 51 – Base e pedestal acoplados com resposta obtida pelo método Interface Estendida.	130
Figura 52 – Matriz MAC para base e pedestal acoplados com resultado do método de Interface Estendida: utilização dos nós do terceiro conjunto para desacoplamento e acoplamento.....	131

Figura 53 – Base e pedestal acoplados com resposta obtida pelo método Superdeterminado: resposta obtida com o terceiro conjunto de nós.....	132
Figura 54 – Base e pedestal acoplados com resposta obtida pelo método Superdeterminado: resposta obtida com o quinto conjunto de nós.....	132
Figura 55 – Matriz de MAC para base e pedestal acoplados com resultado do método Superdeterminado: utilização dos nós do quinto conjunto para desacoplamento e acoplamento.	134
Figura 56 – Base e pedestal acoplados com resposta obtida pelo método Interno: resposta obtida com o quinto conjunto de nós.....	135
Figura 57 – Matriz de MAC para base e pedestal acoplados com resultado do método Interno: utilização dos nós do quinto conjunto para desacoplamento e acoplamento.	136
Figura 58 – Comparação entre respostas experimentais e sintetizadas para a base com duas estruturas de suporte de mancais: síntese com nós do quarto conjunto.....	140
Figura 59 – Regiões de acoplamento para os dois pedestais à base metálica.	141
Figura 60 – Nós de sintetização da resposta da base para acoplamento com dois pedestais.	142
Figura 61 – Comparação entre respostas originais e sintetizadas para a base isolada a ser acoplada com dois pedestais de mancais.	143
Figura 62 – Matriz de acoplamento da base com dois pedestais no primeiro caso.	143
Figura 63 – Matriz de acoplamento da base com dois pedestais no segundo caso.	144
Figura 64 – Resposta experimental da fundação suspensa com dois pedestais.....	146
Figura 65 – Comparação entre modos de vibrar da base isolada na condição livre e da base isolada e montada na bancada.	148

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Massas e rigidezes dos subsistemas A e B no primeiro sistema de referência.....	66
Tabela 2 – Massas e rigidezes dos subsistemas A e B no segundo sistema de referência.	68
Tabela 3 – Valores de massa e rigidez do subsistema C.	70
Tabela 4 – Condições (configurações) de medição e nós envolvidos.	77
Tabela 5 – Classificação dos nós da base metálica.	80
Tabela 6 – Conjuntos de nós utilizados na análise modal da base isolada.....	81
Tabela 7 – Classificação dos nós da estrutura de suporte de mancais.....	83
Tabela 8 – Conjuntos de nós utilizados na análise modal da base com um pedestal.	84
Tabela 9 – Classificação dos nós da base com duas estruturas de suporte de mancais.....	86
Tabela 10 – Conjuntos de nós utilizados na análise modal da base suspensa com dois pedestais.	87
Tabela 11 – Frequências naturais do sistema mecânico massa-mola da Figura 11.....	93
Tabela 12 – Frequências naturais do segundo sistema mecânico massa-mola.....	101
Tabela 13 – Parâmetros de simulação para utilização do LSCE.	102
Tabela 14 – Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados pelo LSCE.	103
Tabela 15 – Frequências naturais presentes nas FRFs desacopladas da subestrutura B.	105
Tabela 16 – Frequências naturais estimadas da resposta obtida por acoplamento duplo.....	108
Tabela 17 – Frequências identificadas nos diagramas de estabilização da base isolada.	111
Tabela 18 – Frequências naturais e fatores de amortecimentos estimados para a base isolada.	112
Tabela 19 – Frequências identificadas nos diagramas de estabilização da base com uma estrutura de suporte de mancal.	117
Tabela 20 – Parâmetros modais estimados para o primeiro conjunto de nós da base com uma estrutura de suporte de mancais.....	118
Tabela 21 – Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para base com uma estrutura de suporte de mancais.....	119
Tabela 22 – Parâmetros modais estimados com as funções de resposta em frequência sintetizadas da base com uma estrutura de suporte de mancais.	121
Tabela 23 – Comparação entre as frequências naturais estimadas para o pedestal por meio dos quatro métodos de desacoplamento.....	123
Tabela 24 – Frequências naturais estimadas pelas respostas desacopladas do pedestal.	125

Tabela 25 – Parâmetros modais da resposta acoplada com o resultado do método Padrão: acoplamento entre base e uma estrutura de suporte de mancal.	127
Tabela 26 – Parâmetros modais da resposta acoplada com o resultado do método de Interface Estendida: acoplamento entre base e uma estrutura de suporte de mancal.	130
Tabela 27 – Parâmetros modais da resposta acoplada com o resultado do método Superdeterminado: acoplamento entre base e uma estrutura de suporte de mancal.....	133
Tabela 28 – Parâmetros modais da resposta acoplada com o resultado do método Interno: acoplamento entre base e uma estrutura de suporte de mancal.	135
Tabela 29 – Frequências naturais preliminares da base suspensa com dois pedestais.	138
Tabela 30 – Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para a base suspensa com duas estruturas de suporte de mancais.	139
Tabela 31 – Frequências naturais e fatores de amortecimento do acoplamento entre base suspensa e duas estruturas de suporte de mancais.	145
Tabela 32 – Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para a base montada na bancada e sem pedestais.	148
Tabela 33 – Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para a base montada na bancada e com dois pedestais.	149
Tabela 34 – Frequências naturais, fatores de amortecimento e erros estimados da resposta acoplada numericamente entre base montada com dois pedestais.	150

Lista de Abreviaturas e Siglas

CMS – Síntese Modal de Componentes

EMA – Análise Modal Experimental

MEF– Método dos Elementos Finitos

FRF – Função de Resposta em Frequência

GDL – Grau de Liberdade

IRF – Função de Resposta ao Impulso

LAMAR – Laboratório de Máquinas Rotativas

LSCE – Mínimos Quadrados para Exponenciais Complexas

Lista de Símbolos

\mathbf{M} – Matriz de massa

\mathbf{K} – Matriz de rigidez

\mathbf{D} – Matriz de amortecimento

\mathbf{u} – Vetor de deslocamentos

\mathbf{f} – Vetor de excitações externas

t – Variável do tempo

ω – Variável da frequência

\mathbf{Z} – Matriz de impedância

\mathbf{Y} – Matriz de receptância

N – Número de graus de liberdade

m – Número de modos de vibrar

Φ – Matriz modal

$\tilde{\mathbf{M}}$ – Matriz de massa modal

$\tilde{\mathbf{K}}$ – Matriz de rigidez modal

$\tilde{\mathbf{D}}$ – Matriz de amortecimento modal

$\tilde{\mathbf{f}}$ – Vetor de esforços modais

\mathbf{g} – Vetor de esforços na interface (internas)

\mathbf{B} – Matriz booleana de compatibilidade

\mathbf{L} – Matriz booleana de equilíbrio

N_{sub} – Número de subestruturas em um sistema

\mathbf{Z}_g – Impedância do sistema acoplado pela abordagem primária

\mathbf{f}_g – Vetor de esforços externos do sistema acoplado pela abordagem primária

s_r – Polo complexo no domínio da transformada de Laplace

${}_r A_{ij}$ – Resíduo complexo (ou constante modal)

s - Variável da frequência complexa

α_{ij} – Função de resposta em frequência na posição i, j

h - Função de resposta ao impulso

z_r – Polo complexo no domínio Z

Δ – Incremento de tempo da série temporal amostrada

ω_r – Frequência natural não amortecida

ζ_r – Fator de amortecimento

\tilde{Y} – Matriz de receptância de estrutura acoplada (abordagem dual)

\hat{Y} – Matriz de receptância reduzida de estrutura acoplada (abordagem dual)

C – Matriz que impõe a condição de compatibilidade no desacoplamento

E – Matriz que impõe a condição de equilíbrio no desacoplamento

φ – Modo de vibrar ou autovetor

Sumário

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Objetivos	23
1.2	Estruturação do Trabalho	23
2	REVISÃO DA LITERATURA.....	25
2.1	Subestruturação e Síntese Modal de Componentes.....	25
2.2	Análise Modal	28
3	MODELAGEM TEÓRICA	30
3.1	Domínios de Representação da Resposta Dinâmica	30
3.2	Condições de Interface para Subestruturas Acopladas	34
3.3	Abordagem Primária	39
3.4	Abordagem Dual	40
3.5	Acoplamento	42
3.6	Desacoplamento	45
3.6.1	Método de Desacoplamento Padrão (colocado).....	50
3.6.2	Método de Desacoplamento de Interface Estendida (colocado)	51
3.6.3	Método de Desacoplamento Superdeterminado (não colocado).....	52
3.6.4	Método de Desacoplamento Interno (não colocado)	53
3.7	Análise Modal	54
3.7.1	Mínimos Quadrados para Exponenciais Complexas	55
3.7.2	Síntese das Funções de Resposta em Frequência.....	60
3.8	Diagramas de Estabilização	61
3.8.1	Indicador de Similaridade Modal (MAC)	63
4	METODOLOGIA	65
4.1	Subestruturação e Análise Modal de Sistemas Analíticos	65
4.2	Bancada de Ensaios	71

4.2.1	Aquisição e Organização dos Dados.....	73
4.3	Subestruturação e Análise Modal da Fundação	78
4.3.1	Análise Modal da Base Metálica Isolada.....	79
4.3.2	Análise Modal da Base Metálica com uma Estrutura de Suporte de Mancal.....	82
4.3.3	Desacoplamento de uma Estrutura de Suporte de Mancal.....	84
4.3.4	Análise Modal da Base Metálica com Duas Estruturas de Suporte de Mancal.....	85
4.3.5	Acoplamento de Duas Estruturas de Suporte de Mancal.....	87
4.3.6	Análise Modal da Fundação Montada e Acoplamento das Estruturas de Suporte de Mancais	88
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	90
5.1	Subestruturação e Análise Modal do Primeiro Sistema de Referência.....	90
5.1.1	Desacoplamento com Método Padrão.....	94
5.1.2	Desacoplamento com Método de Interface Estendida.....	95
5.1.3	Desacoplamento com Método Superdeterminado	97
5.1.4	Desacoplamento com Método Interno	98
5.2	Subestruturação e Análise Modal do Segundo Sistema de Referência.....	101
5.3	Subestruturação e Análise Modal da Fundação da Bancada Experimental	108
5.3.1	Resultados da Análise Modal da Base Isolada.....	109
5.3.2	Resultados da Análise Modal da Base com um Pedestal de Mancal ..	115
5.3.3	Resultados do Desacoplamento da Estrutura de Suporte de Mancais.	122
5.3.4	Resultados da Análise Modal da Base Suspensa com Dois Pedestais	137
5.3.5	Resultados do Acoplamento de Dois Pedestais à Base Isolada	141
5.3.6	Fundação Completa: Base e Pedestais Montados	147
6	CONCLUSÃO	152
6.1	Sugestões Para Trabalhos Futuros.....	154
	REFERÊNCIAS.....	156

1 INTRODUÇÃO

O advento do cálculo numérico em engenharia introduziu expressivas mudanças em diversas áreas do conhecimento, e atualmente é fundamental no projeto e análise dinâmica de estruturas e máquinas. Especialmente na engenharia estrutural, problemas que antes precisavam ser simplificados e ainda contavam com a imprescindível experiência do profissional, hoje são resolvidos numericamente (VAN DER SEIJS, 2016). Dessa forma, devido à velocidade atingida pelos computadores modernos, as fronteiras de análise se expandem, novos desafios surgem e demandam técnicas mais poderosas e funcionais.

Por volta de 1960, quando se introduziu o método dos elementos finitos (MEF), o conceito de modelagem atingiu altos níveis de detalhamento. A possibilidade de modelar estruturas complexas por subdomínios e simular seus comportamentos foi o passo inicial para o que hoje se conhece como análise por subestruturação (VAN DER SEIJS, 2016).

De acordo com Rixen et al. (2020), a subestruturação hoje é entendida como a divisão em subcomponentes de uma estrutura previamente discretizada em elementos finitos ou modelada experimentalmente. Ainda na década de 60, a combinação de elementos finitos com a técnica de subestruturação se mostrou necessária para resolver problemas com milhares de nós ou graus de liberdade (GDLs), tornando possível a redução e decomposição dos sistemas e consequentemente possibilitando a solução pelos computadores da época.

Em ambientes industriais, as análises experimentais e numéricas frequentemente são consideradas como duas frentes distintas do projeto de uma estrutura, máquina ou mecanismo. Inicialmente, a análise numérica participa da concepção do projeto, em seu design e especificações, enquanto as técnicas experimentais usualmente são utilizadas para validação do modelo após fabricação e montagem (VAN DER SEIJS, 2016). Com a subestruturação deu-se início a um tipo de modelagem que não necessariamente segue a mesma linha de raciocínio, ou seja, dados experimentais e numéricos poderiam ser associados a fim de se obter resultados cada vez mais representativos.

Grandes sistemas – como aeronaves, turbinas eólicas e hidrogeradores – podem ser modelados e analisados separadamente, ou seja, subdivididos em componentes. Diferentes equipes podem, então, determinar a dinâmica de seu subsistema e o acoplamento deve ser feito de forma criteriosa a fim de se prever corretamente a dinâmica do sistema global. Como

apontado por Rixen et al. (2020), isso é ainda mais relevante quando algum componente do sistema apresenta comportamento não-linear, como é o caso dos mancais hidrodinâmicos. A subestruturação otimiza o tempo da solução completa uma vez que o subsistema não-linear é analisado isoladamente e depois é acoplado a uma subestrutura que representa apenas a interface e os pontos de interesse do resto do sistema.

Outra grande vantagem apontada ocorre quando existe a necessidade de reprojetar, substituir ou trocar apenas um componente de uma máquina ou estrutura. Para evitar a resolução ou medição de todo o sistema novamente, utiliza-se o acoplamento por subestruturação para encontrar a nova resposta dinâmica global.

A Figura 1 mostra um fluxograma dos níveis de decomposição usados na subestruturação de um sistema. No primeiro nível, um sistema genérico contínuo é subdividido de duas maneiras: discretização por elementos finitos ou divisão em partes contínuas (desacoplamento experimental), A e B. No terceiro nível de decomposição, o sistema discretizado passa pela subestruturação e resulta em duas subestruturas, enquanto os subsistemas contínuos do nível dois passam por técnicas experimentais, como a reconstituição das funções de resposta em frequência, para determinação das características do acoplamento. Ainda, nota-se que nas subestruturas discretizadas também podem ser aplicadas técnicas de redução de modelo.

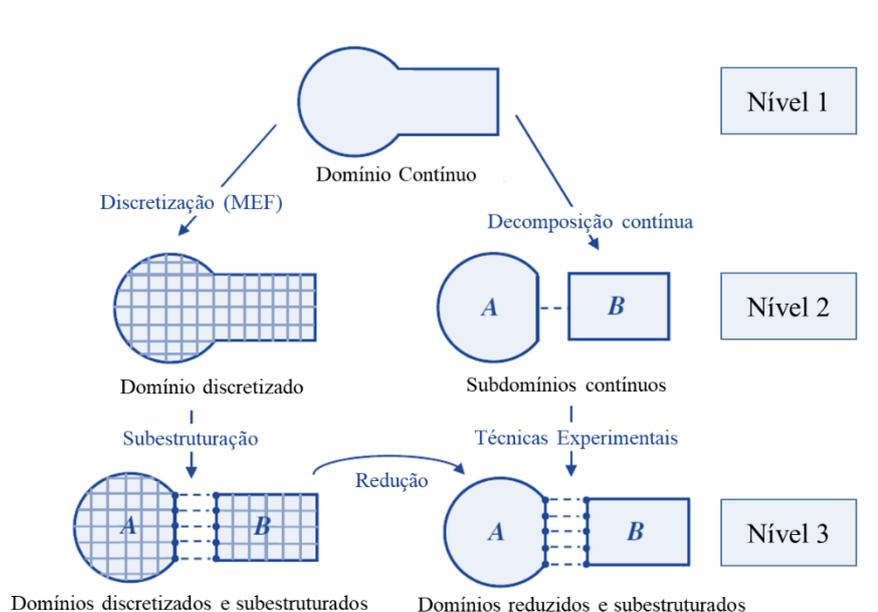


Figura 1 – Níveis de decomposição de um sistema.

Fonte: Adaptado de Rixen et al. (2008).

A subestruturação experimental é capaz de transmitir com maior conformidade as características do acoplamento que, normalmente, não são representadas com exatidão em um sistema composto por subestruturas modeladas por elementos finitos. Uma consequência direta dessa vantagem é a possibilidade de realizar o caminho inverso do acoplamento e extrair os parâmetros de um componente cuja caracterização dinâmica é difícil, ou mesmo impossível, de ser feita separadamente, ou seja, medições são possíveis apenas se o componente estiver montado no sistema (RIXEN; VOORMEEREN, 2012).

Essa técnica inversa, chamada de desacoplamento, permite que se obtenham modelos experimentais que também podem ser aplicados a grandes estruturas, como apontado por Peeters et al. (2014). Os autores usam essa técnica em turbinas eólicas visando a diminuição do ruído audível, especialmente em localizações urbanas, o que mostra a ampla área de utilização da teoria.

Neste trabalho, objetiva-se avaliar a aplicabilidade da subestruturação no conjunto fundação-mancais-rotor da bancada de testes do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR), pertencente à Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). A modelagem atual do conjunto, feita a partir do método dos elementos finitos, não permite representar com exatidão as interações que ocorrem nas interfaces entre a base da estrutura de suporte e os pedestais dos mancais e, por conseguinte, a modelagem do sistema rotor-fundação também é comprometida.

Este comprometimento, por sua vez, mostra-se por exemplo nas medições de vibração realizadas no sistema e que indicam frequências que não se sabe se pertencem ao rotor, se são induzidas pela vibração do rotor em operação ou ainda se pertencem a algum componente da fundação, como a base metálica ou as estruturas de suporte dos mancais.

Dessa forma, conhecendo o comportamento dinâmico da base com e sem a presença de um pedestal, pode-se caracterizar o pedestal dinamicamente realizando o desacoplamento do mesmo. A partir desse ponto, além da definição dos parâmetros modais individuais de cada componente, viabiliza-se a obtenção da resposta do sistema completo para diferentes configurações do pedestal, considerando o acoplamento dinâmico (de um ou mais) em quaisquer outras posições sem a necessidade de fisicamente vincular as subestruturas e realizar novas medições experimentais.

Além da aplicação mencionada, viabiliza-se a análise de quaisquer outras estruturas similares que são classificadas como fundações de máquinas rotativas. A subestruturação se

configura como uma técnica com ampla gama de aplicação, de maneira que sistemas de pequena escala, como centrífugas, ou de grande porte, como é o caso de hidrogeradores de usinas hidrelétricas, permitem a subdivisão e análise dos componentes que os formam.

1.1 Objetivos

Objetivo geral:

Implementar e avaliar uma metodologia de subestruturação dinâmica experimental para aplicação em fundações de máquinas rotativas.

Objetivos específicos:

- Implementar diferentes métodos de desacoplamento para subestruturação dinâmica;
- Comparar os métodos de subestruturação em sistemas analíticos;
- Implementar e verificar o procedimento de acoplamento dinâmico de subsistemas;
- Realizar a análise modal nos diferentes sistemas e comparar as funções de resposta em frequência geradas por diferentes abordagens;
- Analisar a sensibilidade dos modelos acoplados e desacoplados em relação aos nós da interface;
- Comparar as respostas experimentais nas diferentes configurações de fixação da estrutura com o uso da subestruturação.

1.2 Estruturação do Trabalho

Além do capítulo introdutório, este trabalho contém outros cinco capítulos. O Capítulo 2 apresenta a revisão da literatura e o estado da arte acerca da subestruturação e da análise modal. O Capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica necessária à análise da fundação. São abordados os domínios de representação da resposta dinâmica, as condições de interface associadas à subestruturação, também como os conceitos referentes às abordagens primária e

dual e às técnicas de acoplamento e desacoplamento. Abordam-se ainda a análise modal para a identificação dos parâmetros modais da fundação e o conceito de diagramas de estabilização e número MAC.

O Capítulo 4, por sua vez, descreve a metodologia proposta e utilizada para a obtenção dos resultados. Sistemas mecânicos analíticos são definidos para a análise inicial das técnicas de acoplamento e desacoplamento e, em seguida, a fundação e todas as suas configurações de montagem e medição são apresentadas.

O Capítulo 5 expõe e discute os resultados obtidos com a subestruturação e análise modal dos sistemas analíticos e da fundação. Finalmente, o Capítulo 6 sintetiza as principais conclusões do trabalho e traz as sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Subestruturação e Síntese Modal de Componentes

A análise dinâmica de sistemas complexos por divisão em subsistemas tem sua origem por volta de 1890, todavia teve uma considerável evolução a partir da década de 1960, em que a solução de problemas estruturais – especialmente os relacionados à aeronáutica – compreendiam sistemas com geometrias complexas, como fuselagens e asas. Para a época, visto a capacidade limitada de processamento dos computadores, foi imprescindível a criação de métodos que permitissem analisar um modelo em elementos finitos dividido em subestruturas (RIXEN et al., 2020).

Dentre esses métodos de análise de estruturas complexas, geralmente são utilizadas técnicas de subestruturação ou de síntese modal de componentes (*component-mode synthesis*, CMS) a fim de se obter a resposta dinâmica do sistema (CRAIG JR, 1995). Observando as necessidades e limitações existentes da época, Przemieniecki (1963) propôs a subestruturação para análise estática de estruturas. No trabalho, o autor realiza inicialmente um estudo separado em cada subestrutura assumindo que as interfaces estão fixas. Em seguida, determina os deslocamentos dessas interfaces ao resolver, para cada uma delas, as equações de equilíbrio, possibilitando analisar as subestruturas considerando a influência das interfaces.

Mais tarde, Hurty (1965) publicou um artigo em subestruturação e propôs a técnica CMS do domínio do tempo para análise dinâmica, em que utiliza modos definidos para cada componente (*component-modes*), os quais são acoplados para se obter um conjunto reduzido de equações para o sistema global. Dos autovetores desse sistema reduzido, os modos da estrutura original são sintetizados. Hurty utilizou três tipos de modos para os componentes: modos de corpo rígido, modos de conexão¹ e modos de interface fixa.

Diversos métodos para o acoplamento de subestruturas foram apresentados após o trabalho de Hurty. Craig e Bampton (1968), por exemplo, modificaram a abordagem de forma que utilizaram apenas modos de conexão e de interface fixa e mostraram que não há necessidade

¹ Um modo de conexão ou restrição é a deflexão estática induzida na estrutura ao se aplicar deslocamentos unitários a um ponto da interface enquanto os outros pontos são fixados.

em considerar modos de corpo rígido. Esse método, denominado Craig-Bampton, impõe compatibilidade entre os deslocamentos das interfaces e emprega o método de Rayleigh-Ritz para reduzir a ordem das matrizes da estrutura final.

Ainda na década de 60, as técnicas de subestruturação geraram uma série de artigos, como descrito por Seshu (1997). A comunidade científica, a partir desses trabalhos, tomou grande interesse na subestruturação dinâmica e no método CMS. Grandes avanços foram feitos por MacNeal (1971), que propôs um método híbrido em que utiliza modos de interface fixos-livres, ou seja, algumas coordenadas de conexão permanecem restritas (fixas) enquanto outras são livres.

Rubin (1975) explorou o procedimento trazido por MacNeal (1971) no sentido de aproximar os modos livre-livre não mantidos na formulação. Hintz (1975) utilizou um conjunto estaticamente completo de modos de interface e Craig e Chang (1976) apresentaram um método em que a flexibilidade residual é incluída no procedimento de acoplamento com interfaces livres.

Simultaneamente às primeiras publicações da década de 60, Gladwell (1964) desenvolveu uma técnica denominada análise modal ramificada (*branched-mode analysis*). De acordo com Seshu (1997) e Rixen et al. (2008), o processo é essencialmente uma síntese modal e também representa um dos pilares para o CMS. Benfield e Hruda (1971) apresentaram uma técnica similar em que os esforços de uma subestrutura aplicados em outras foram analisados no que foi chamado de síntese modal de componentes com interface carregada. Para comparar os diferentes métodos, Hurty et al. (1971) criaram critérios e exploraram as diferenças em termos de acurácia. Por fim, Curnier (1983) apresentou uma formulação unificada e comprovou a exatidão dos três métodos.

A partir de 1980, as técnicas de acoplamento se tornaram ainda mais relevantes para análises experimentais devido à melhoria vista nos equipamentos de medição, de forma que metodologias de acoplamento foram utilizadas para medir diretamente a função de resposta em frequência (FRF). Essas técnicas também foram utilizadas para acoplar estruturas de modificação, como massas e molas (RIXEN et al., 2008).

Até então, a subestruturação era realizada essencialmente no domínio do tempo, com a utilização das matrizes de massa, rigidez e – em alguns estudos – com a matriz de amortecimento. Entretanto, com o interesse pela subestruturação experimental em alta, Jetmundsen et al. (1988) formularam a subestruturação no domínio da frequência.

Como explicado por Jetmundsen et al. (1988), a subestruturação no domínio da frequência consiste em duas vertentes: métodos modais e métodos que utilizam as impedâncias das subestruturas. Evidentemente, os métodos de impedância dependem diretamente das matrizes de FRFs obtidas experimentalmente, o que se vincula fortemente à qualidade dos dados, além da necessidade de se conhecer completamente o modelo. Os métodos de acoplamento modal, por sua vez, são aqueles que dependem dos parâmetros modais e também enfrentam adversidades como o elevado custo computacional necessário para realizar a análise modal prévia à subestruturação.

Alguns anos mais tarde, uma nova abordagem para o método de Craig-Bampton foi apresentada por Rixen (2004), denominada dual. Diferentemente da abordagem original, que recebeu a denominação de clássica ou primária (*primal*), a abordagem dual se baseia no acoplamento das subestruturas através das forças de interface existentes, e não mais através da compatibilidade dos deslocamentos. Assim, vê-se que o método utiliza modos de interface livre no lugar dos modos de conexão e de interface fixa.

A partir disso, os trabalhos tiveram como objetivo refinar e incrementar os métodos de subestruturação. Rixen et al. (2015) revisitaram a formulação da abordagem dual do método de Craig-Bampton, dando especial atenção à influência do algoritmo para determinação dos modos de interface livre. Ainda, realizaram uma comparação detalhada entre as abordagens clássica e dual através da aplicação da teoria em estruturas bi e tridimensionais.

Após o início do século XXI, percebeu-se também um interesse no estudo da minimização e propagação de incertezas no universo da subestruturação devido à utilização da subestruturação no domínio da frequência associada a dados experimentais. O mau condicionamento numérico das matrizes de impedância, especialmente as das interfaces das subestruturas, pode inserir erros consideráveis nas funções de resposta em frequência, o que motivou Voormeeren et al. (2010) a apresentarem uma técnica de quantificação das incertezas do sistema acoplado por meio das incertezas das FRFs dos subsistemas.

Outra proposta para trabalhar com as incertezas foi feita por Peeters et al. (2018) com a utilização de um modelo modal para filtrar as FRFs e reduzir ruídos no contexto da qualidade do desacoplamento de componentes. Ainda, D'Ambrogio e Fregolent (2017) abordam a dificuldade de acesso para medição de pontos de interface e a possibilidade de substituição desses graus de liberdade por nós internos, sem detrimento da informação necessária.

2.2 Análise Modal

A análise modal consiste em um processo no qual são determinados os parâmetros modais do sistema, ou seja, características dinâmicas que definem a estrutura, como as frequências naturais, massas modais, fatores de amortecimento e os modos de vibrar (*mode shapes*). A metodologia é fundamentada na linearidade do sistema uma vez que sua resposta vibratória é determinada por uma combinação linear entre os modos (HE; FU, 2001)

As propriedades físicas de um sistema mecânico, como massa e rigidez, bem como suas distribuições espaciais, determinam quais são seus modos de vibrar. Estes, por sua vez, participam do resultado vibratório do sistema de forma parcial, sendo a intensidade de participação de cada modo definida tanto pelas características das excitações externas quanto pelas propriedades da estrutura. He e Fu (2001) explicam que essas propriedades físicas contribuem na construção das equações de movimento do sistema, as quais levam à obtenção dos parâmetros modais essencialmente pela solução de um problema de autovalor.

Os princípios desse tipo de análise, especialmente a perspectiva experimental, datam da década de 40, em que ainda se conhecia a análise modal como Teste de Ressonância ou Métodos de Impedância Mecânica, como explica Ewins (2000). O primeiro trabalho publicado nesse contexto foi o artigo de Kennedy e Pancu (1947), que descreveu a obtenção de frequências naturais e fatores de amortecimento em estruturas aeroespaciais. Um segundo artigo, elaborado por Bishop e Gladwell (1963), abordou a situação da teoria e sua relação com a implementação prática vigente da época.

Desde então, centenas de trabalhos foram publicados acerca da análise modal e suas três vertentes: a análise modal teórica, aplicada a sistemas analíticos e numéricos, e as metodologias de análise modal utilizadas em ambiente prático: a experimental (*experimental modal analysis*, EMA) e a operacional (*operational modal analysis*). As técnicas experimentais ganharam muito espaço na engenharia devido às melhorias nas formas de obtenção e análise de dados observadas nos últimos anos (HE; FU, 2001).

A EMA foi introduzida em laboratórios de vibração para analisar pequenas estruturas mecânicas, de forma a caracterizá-las dinamicamente. Os resultados são obtidos através de ferramentas, dispositivos e algoritmos que, hoje, estão consolidados e contam com fortes bases teóricas (MAGALHÃES, 2010). A análise é realizada fornecendo à estrutura uma entrada

conhecida, medindo-se a saída e encontrando-se a relação entre as duas. A entrada pode ter diferentes formas, como impulsiva ou senoidal, sendo que a escolha depende do objetivo do ensaio e da condição e limitação do instrumento de medição.

Em grandes estruturas, como pontes e barragens, a EMA também apresentou resultados satisfatórios, como foi o caso da ponte Tatara, no Japão (MAGALHÃES, 2010). No entanto, o grande problema sempre encontrado reside na logística e no porte dos equipamentos necessários para estes testes – além dos custos – os quais praticamente inviabilizam estes ensaios. Outra desvantagem da se dá pela interferência do funcionamento natural das grandes estruturas pela introdução de vibrações artificiais forçadas, o que pode alterar os resultados em casos de comportamentos não-lineares.

Isso reforça a importância dos métodos de subestruturação associados às técnicas de análise modal, pois permite a determinação do comportamento dinâmico antes de sua montagem em uma grande estrutura, que é de difícil excitação e sujeita a ruídos ambientais como ventos e variações térmicas. Deste modo, é possível prever o comportamento da estrutura antes de sua montagem, o que é fundamental para sua segurança em operação.

Na presente dissertação mostra-se a aplicação da análise modal nos dados experimentais provenientes da estrutura de fundação do rotor e dos suportes de mancais da bancada de ensaios do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR) da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp. A análise modal é abordada na seção 3.7.1.

3 MODELAGEM TEÓRICA

Neste capítulo, são abordados os conceitos fundamentais para o desenvolvimento do presente trabalho. Inicialmente, são explorados conceitos básicos referentes à subestruturação dinâmica, como os domínios matemáticos de representação da resposta dinâmica de um sistema mecânico. Em seguida, abordam-se as condições de interface para subestruturas acopladas e as duas abordagens de subestruturação dinâmica experimental, clássica e dual, imprescindíveis para o desenvolvimento das técnicas de acoplamento e desacoplamento.

Posteriormente, são discutidos os fundamentos da análise modal, com especial ênfase na técnica de extração de parâmetros modais denominada Mínimos Quadrados para Exponenciais Complexas (*Least Squares Complex Exponencial*, LSCE) e na síntese de funções de resposta em frequência (FRF) por meio dos parâmetros modais estimados, com uma descrição detalhada do equacionamento. Também são abordados os conceitos de diagramas de estabilização e do índice de similaridade modal (*Modal Assurance Criterion*, MAC).

3.1 Domínios de Representação da Resposta Dinâmica

Um aspecto conveniente da subestruturação é a possibilidade de representar a dinâmica das subestruturas de diversas maneiras, sejam no domínio físico – por matrizes de massa, rigidez e amortecimento – no do tempo, com a função de resposta ao impulso (ou *impulse response function*, IRF), no domínio da frequência, através de FRFs, no domínio modal ou em espaço de estados. Em seu trabalho, van der Seijs (2016) explica que os domínios mencionados são todos qualificados para simular comportamentos de múltiplas entradas e saídas (*multiple input/output*).

O domínio escolhido para a descrição da dinâmica de um determinado sistema estabelece a técnica de subestruturação a ser aplicada. Ainda que, matematicamente, todas sejam equivalentes, as abordagens acarretam em algoritmos e metodologias experimentais distintas (RIXEN et al., 2020). Invariavelmente, pode-se compatibilizar dados de vários domínios, também como combinar informações obtidas tanto analítica quanto experimentalmente.

Em situações experimentais, é usual dispor somente de informações advindas de medições, ou seja, não se conhecem parâmetros como matrizes de massa, amortecimento e rigidez da subestrutura. Por conseguinte, o acoplamento direto no domínio físico torna-se restrito, e deve-se optar por técnicas que manipulam séries temporais, dados em frequência ou até mesmo parâmetros modais. A Figura 2 apresenta um esquema ilustrativo que envolve os aspectos discutidos. Nota-se que a transformação das informações de um domínio para outro – exceto o físico – é realizada normalmente através de ferramentas amplamente conhecidas e fundamentadas.

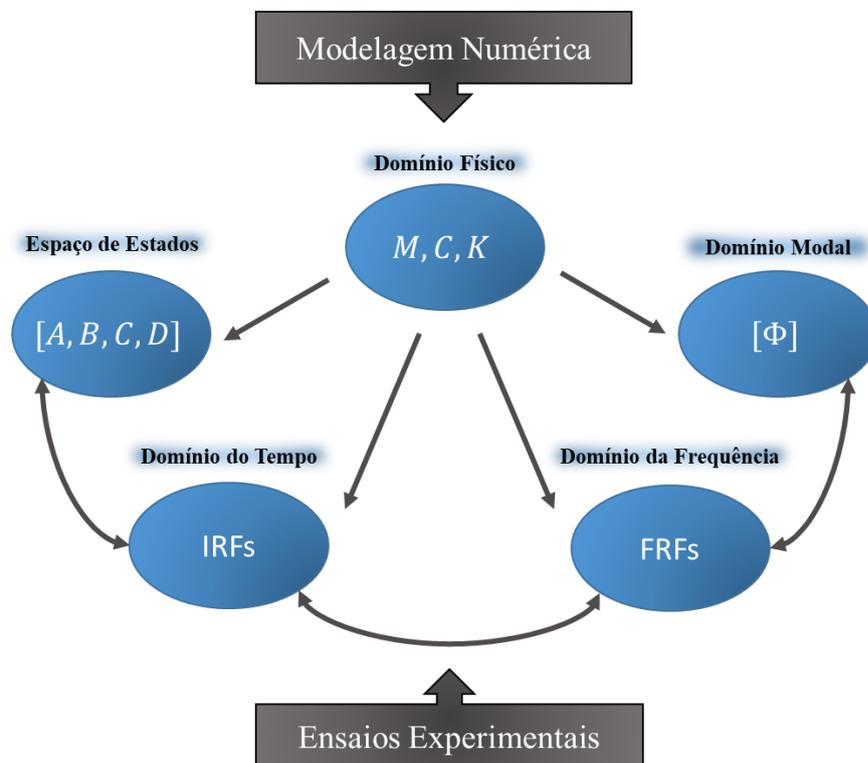


Figura 2 – Domínios de representação da resposta dinâmica.

Fonte: Adaptado de van der Seijs (2016).

Deve-se constatar que a modelagem numérica considera que o modelo está representado pelo método de elementos finitos (MEF) ou técnica equivalente (ex.: elementos de contorno). O domínio físico, assim denominado visto que as propriedades de massa, rigidez e amortecimento sugerem uma interpretação física do sistema, é caracterizado na dinâmica estrutural pela formulação elementar de segundo grau apresentada na Equação (1), dada para

um sistema de comportamento linear (ou linearizado) e invariante no tempo que está em equilíbrio com excitações externas $\mathbf{f}(t)$.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

Em que \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K} representam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, e $\mathbf{u}(t)$ representa o vetor de deslocamentos dos N graus de liberdade (GDL) do sistema. A grande quantidade de GDLs pode exigir uma redução do modelo a fim de viabilizar simulações dinâmicas muito complexas. Utiliza-se, então, o domínio da frequência e/ou a análise modal para se obter uma representação de ordem reduzida do modelo completo (VAN DER SEIJS, 2016). É interessante ressaltar que alguns autores como Jetmundsen et al. (1988) anteciparam na formulação que a matriz de amortecimento \mathbf{D} não é necessariamente constante.

Aplicando a transformada de Fourier na Equação (1), pode-se escrever o vetor de respostas $\mathbf{u}(t)$ e o vetor de excitações externas $\mathbf{f}(t)$ em função da frequência ω , como mostrado na Equação (2).

$$[-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{D} + \mathbf{K}]\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad (2)$$

Quando a excitação $\mathbf{f}(\omega)$ é unitária, os termos dentro dos colchetes são comumente escritos como a matriz de impedância mecânica $\mathbf{Z}(\omega)$. Esta consiste em funções complexas dependentes da frequência, e descreve a excitação necessária para gerar um deslocamento unitário em um GDL enquanto todos os outros estão fixados. O inverso da matriz de impedância, chamada de matriz de receptância $\mathbf{Y}(\omega)$, contém as FRFs do sistema, que descrevem os deslocamentos devido a uma entrada impulsiva. Matematicamente, tem-se a Equação (3).

$$\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad \text{ou} \quad \mathbf{Y}(\omega)\mathbf{f}(\omega) = \mathbf{u}(\omega) \quad (3)$$

Como previamente discutido, em testes experimentais os resultados obtidos são geralmente as matrizes de receptância, sendo este um dos motivos pela ampla utilização da subestruturação no domínio da frequência. Uma das principais dificuldades enfrentadas nesses testes é a inviabilidade de medir todos os pontos do sistema, isto é, a quantidade de sensores em geral não é suficiente para que todos os nós da estrutura sejam excitados e medidos. Entretanto, como será verificado neste trabalho, a análise modal é capaz de sobrepujar esse viés considerando-se a reciprocidade da estrutura (teorema de Betti ou Maxwell-Betti).

No domínio modal, o comportamento dinâmico da estrutura é caracterizado por uma combinação linear de modos de vibrar. A utilização de coordenadas modais $\mathbf{q}(t)$, também chamadas de coordenadas generalizadas ou principais, possibilita a definição da matriz modal Φ , com a qual se formula a Equação (4).

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (4)$$

A matriz Φ tem dimensão $N \times m$ e tem, em suas colunas, os m modos de vibrar dos N graus de liberdade do sistema.

O vetor de coordenadas $\mathbf{q}(t)$ é denominado vetor de amplitudes modais. A grande vantagem dessa transformação de variáveis se dá com a substituição da Equação (4) na Equação (1) e pré-multiplicando o resultado por Φ^T , como mostram as Equações (5) e (6).

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{D} \Phi \dot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{f}(t) \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t) \quad (6)$$

Na Equação (6), o símbolo (\sim) indica que as matrizes e vetores foram transformados pela matriz modal. No caso em que o amortecimento da estrutura é proporcional, essa expressão representa um sistema de equações desacopladas que pode ser resolvida para cada grau de

liberdade isoladamente. A Equação (6) é denominada de “representação modal” e descreve o modelo no domínio modal.

Estruturas reais são sistemas contínuos e, portanto, possuem infinitos graus de liberdade, de forma que possuem infinitas frequências naturais e modos de vibrar. Na prática, no entanto, são consideradas apenas as mais relevantes dentro de um determinado intervalo, de forma que o sistema passa a ter um número finito de graus de liberdade, o que possibilita utilizar somente alguns modos para definir a matriz Φ . Rixen et al. (2020) chamam essa circunstância de “representação modal reduzida”. A análise modal é abordada com mais detalhes na seção 3.7.

A representação em espaço de estados, por sua vez, permite que um sistema dinâmico de segunda ordem de N graus de liberdade seja representado por um conjunto de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem. Como apresentado por van der Seijs (2016), é igualmente possível trabalhar com o espaço de estados no domínio da frequência em técnicas de identificação de sistemas. Visto que neste trabalho não será utilizado o espaço de estados, a próxima seção abordará a subestruturação com enfoque no domínio da frequência.

3.2 Condições de Interface para Subestruturas Acopladas

Considerando que as subestruturas são partes de um mesmo sistema, duas condições de interface devem ser satisfeitas para garantir o completo acoplamento nos pontos de conexão, a saber: condição de compatibilidade e condição de equilíbrio (RIXEN et al., 2020). A condição de compatibilidade garante que os deslocamentos nos nós das interfaces sejam os mesmos para as subestruturas acopladas, enquanto a condição de equilíbrio assegura que os esforços internos transmitidos nesses mesmos pontos são de mesma intensidade, mas de sentidos opostos.

Matematicamente, as condições de equilíbrio e compatibilidade para duas subestruturas i e j acopladas são dadas respectivamente pelas Equações (7) e (8).

$$\mathbf{g}^i + \mathbf{g}^j = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^j = 0 \quad (8)$$

Nessas equações, g^i e g^j são os esforços internos sentidos pelos subsistemas i e j devido ao acoplamento e u^i e u^j são os respectivos deslocamentos dos nós (ou pontos) acoplados.

Na prática, como explicado por Rixen et al. (2020), mais de duas subestruturas podem estar conectadas, ou a numeração dos graus de liberdade pode não coincidir. A Figura 3 traz um exemplo de um sistema composto por cinco subestruturas.

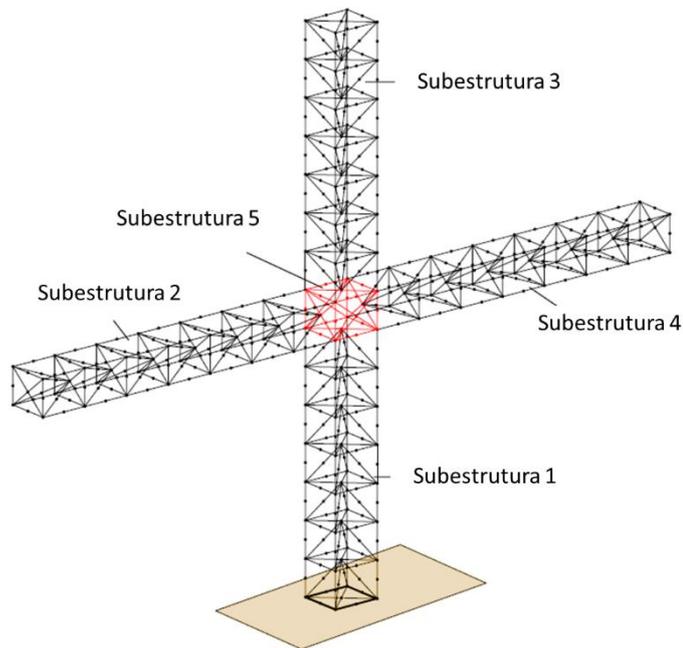


Figura 3 – Sistema com múltiplas subestruturas.

Fonte: Adaptado de Rixen (2004).

Tendo isso em vista, são utilizadas matrizes booleanas² (ou seja, matrizes lógicas compostas por falsos e verdadeiros) de localização para expressar as condições de compatibilidade e de equilíbrio, sendo \mathbf{B} a matriz utilizada para a compatibilidade e \mathbf{L} para o

² Nos casos em que as subestruturas são individualmente discretizadas ou o contato entre as interfaces é de deslizamento, dentre outras situações, as matrizes deixam de ser booleanas mas ainda podem ser empregadas na mesma formulação (RIXEN et al., 2008).

equilíbrio. Dessa forma, as Equações (7) e (8) são reescritas respectivamente como as Equações (9) e (10) para um sistema composto por N_{sub} subestruturas:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (10)$$

Em que \mathbf{g} e \mathbf{u} são os vetores globais de esforços internos e deslocamentos do sistema completo, respectivamente. Nota-se que a matriz \mathbf{L} representa o espaço nulo da matriz \mathbf{B} ou vice-versa, da mesma maneira que \mathbf{B}^T representa o espaço nulo de \mathbf{L}^T ou vice-versa (PEETERS et al., 2014).

É importante salientar que as condições de interface apresentadas consideram que as subestruturas são conectadas fortemente de modo que as igualdades apresentadas nas Equações (7) e (8) ocorrem entre quaisquer subestruturas i e j . Autores como Rixen e Voormeeren (2012), Rixen et al. (2008) e Rixen et al. (2015) discutem e propõem métodos de enfraquecimento (ou relaxamento) dessas condições, o que permite que as interfaces sejam levemente discrepantes.

Neste trabalho, considera-se a hipótese de que todas as subestruturas são fortemente acopladas ou, ainda, que mantêm o contato ao longo do tempo. Devido a isso, características peculiares como o aparecimento de autovalores negativos em altas frequências, comentado por Rixen et al. (2015) para o método de acoplamento fraco Craig-Bampton Dual, não estão presentes e não são discutidas em detalhes.

Retomando a expressão apresentada na Equação (3) para a dinâmica de um sistema no domínio da frequência e aplicando-a ao conceito de subestruturas, deve-se incluir o termo \mathbf{g} referente aos esforços presentes nas interfaces. Assim, tem-se a Equação (11), em que a dependência da frequência ω foi omitida por brevidade:

$$\mathbf{Z}\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{g} \quad (11)$$

sendo que:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{(1)} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{Z}^{(N_{sub})} \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(N_{sub})} \end{Bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(N_{sub})} \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{(N_{sub})} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Assim, entende-se que para cada subestrutura ou subsistema, tem-se uma equação dinâmica como a apresentada na Equação (13):

$$\mathbf{Z}^{(s)}\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{g}^{(s)} \text{ com } s = 1, \dots, N_{sub} \quad (13)$$

Finalmente, utilizando as Equações (9) e (10), que representam o acoplamento e o equilíbrio de forças entre as subestruturas, tem-se a Equação (14).

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\mathbf{u} &= \mathbf{f} + \mathbf{g} \\ \mathbf{B}\mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{L}^T\mathbf{g} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (14)$$

Destaca-se que as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{L}^T também podem ser escritas de forma expandida, como é feito na Equação (15).

$$\mathbf{L}^T = [\mathbf{L}^{(1)T} \dots \mathbf{L}^{(N_{sub})T}] \text{ e } \mathbf{B} = [\mathbf{B}^{(1)} \dots \mathbf{B}^{(N_{sub})}] \quad (15)$$

A solução da Equação (14) pode ser extremamente custosa devido à quantidade de variáveis de interface que precisam ser determinadas. Assim, geralmente as equações são reescritas antes de serem resolvidas (RIXEN et al., 2020). A primeira opção para reescrevê-las é definir e utilizar um conjunto único de variáveis de deslocamento para o sistema, o que caracteriza a abordagem clássica ou primária (*primal approach*). Por outro lado, pode-se manter

o conjunto global dessas variáveis, mas definir a priori forças de interface de forma que satisfaçam a condição de equilíbrio, abordagem denominada dual (*dual approach*).

A Figura 4 mostra um fluxograma das etapas principais da metodologia. Primeiramente, tem-se um sistema mecânico representado no domínio físico, isto é, com matrizes de massa, amortecimento e rigidez. Em seguida, tendo em vista os dois domínios principais discutidos na seção 3.1, pode-se tanto realizar uma análise de autovalor e representar o sistema no domínio modal quanto aplicar a transformada de Fourier e representar o sistema no domínio da frequência.

A partir disso, quaisquer das três representações devem percorrer uma etapa em comum: a definição das condições de equilíbrio. A etapa seguinte é a reformulação do problema considerando a abordagem clássica ou a dual, para, finalmente, se atingir os resultados de acoplamento ou desacoplamento.

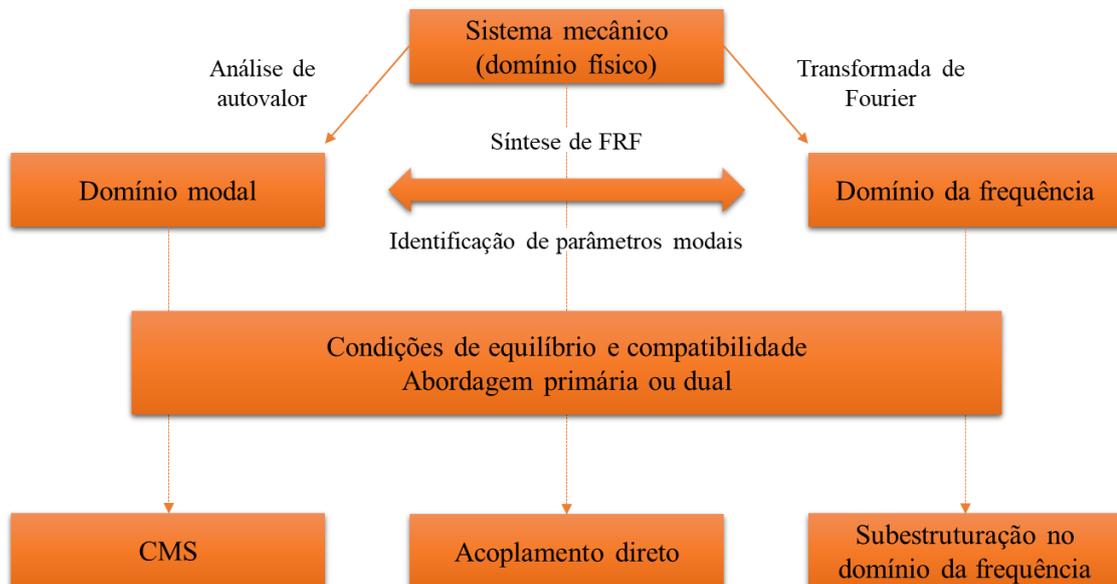


Figura 4 – Fluxograma da metodologia de subestruturação.

Fonte: adaptado de Rixen et al. (2008).

Na Figura 4, observa-se ainda que a síntese modal de componentes (CMS) é empregada junto ao domínio modal e que o acoplamento direto (via matrizes de massa, rigidez e amortecimento) é no domínio físico. Na próxima seção, as duas abordagens de subestruturação são tratadas mais detalhadamente com a apresentação das formulações matemáticas.

3.3 Abordagem Primária

A abordagem primária (*primal*) ou clássica é frequentemente utilizada em montagens realizadas via elementos finitos (RIXEN et al., 2008). A criação de um conjunto único de variáveis para a estrutura completa é feita como mostra a Equação (16).

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{u}_g \quad (16)$$

em que \mathbf{u}_g é o conjunto de variáveis de deslocamento para o sistema global. Com essa definição, os graus de liberdade (GDLs) de cada subestrutura são obtidos realizando um mapeamento da coordenada \mathbf{u}_g com o auxílio da matriz de localização \mathbf{L} .

Com a escolha de utilizar um conjunto único de variáveis para o sistema completo, a condição de compatibilidade é automaticamente satisfeita. Assim, tem-se a Equação (17):

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{u}_g = \mathbf{0} \quad (17)$$

Finalmente, substitui-se a relação da Equação (16) no sistema da Equação (14). Uma vez que a condição de compatibilidade já está satisfeita, elimina-se o termo de cargas internas \mathbf{g} pela pré-multiplicação da primeira linha por \mathbf{L}^T , obtendo o que mostra a Equação (18).

$$\mathbf{L}^T \mathbf{Z} \mathbf{L} \mathbf{u}_g = \mathbf{L}^T \mathbf{f} + \mathbf{L}^T \mathbf{g} \quad \text{ou} \quad \mathbf{Z}_g \mathbf{u}_g = \mathbf{f}_g \quad (18)$$

A expressão anterior caracteriza o problema de acoplamento pela abordagem primária. A abordagem dual é discutida em seguida.

3.4 Abordagem Dual

Na abordagem dual, a condição de equilíbrio é satisfeita a priori ao se escolher forças de interface como apresentado na Equação (19):

$$\mathbf{g} = -\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (19)$$

Em que $\boldsymbol{\lambda}$ são multiplicadores de Lagrange que correspondem fisicamente às intensidades das forças presentes nos pontos de acoplamento (RIXEN; VOORMEEREN, 2012). O sinal negativo é inserido para que o sistema de equações final seja simétrico. Dessa forma, tendo em vista que $\mathbf{BL} = \mathbf{0}$ e que conseqüentemente $\mathbf{L}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{0}$, essas forças de acoplamento satisfazem a condição de equilíbrio, como mostra a Equação (20):

$$\mathbf{L}^T \mathbf{g} = \mathbf{L}^T (-\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}) = -(\mathbf{L}^T \mathbf{B}^T) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (20)$$

Ainda em relação à Equação (19), Rixen et al. (2020) mostram que para as N_{sub} subestruturas, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{(N)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{B}^{(N)} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \quad (21)$$

O que mostra que as forças de conexão entre as subestruturas são geradas a partir de um conjunto único de forças de interconexão cujas intensidades são $\boldsymbol{\lambda}$ (RIXEN et al., 2008). Além disso, as forças são distribuídas à interface da i -ésima subestrutura através da respectiva matriz booleana $\mathbf{B}^{(i)}$, com o sinal negativo ou positivo, conforme apropriado. Realizando a substituição da Equação (19) na Equação (14), o sistema é escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{B}\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (22)$$

Vê-se que a condição de equilíbrio não está mais presente uma vez que é automaticamente atendida dada a escolha das forças de interface realizada na Equação (19). Comumente, utiliza-se a notação matricial para o sistema da Equação (22), de forma que se tem a Equação (23):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

É interessante ressaltar que na abordagem dual, as variáveis de deslocamento das interfaces aparecem o mesmo número de vezes quanto o número de subsistemas conectados em um determinado ponto (ou nó), ou seja, se uma variável de interface está relacionada a dois subsistemas, esta aparecerá duas vezes. Isso acontece uma vez que, diferentemente da abordagem primária, em que os nós de conexão das interfaces de cada subestrutura são substituídos por um conjunto único, a quantidade original é mantida.

Embora essas duas formas de representação apresentem diferenças, são matematicamente equivalentes, o que abre espaço para se fazer uma definição quando se deseja realizar a subestruturação. Rixen et al. (2020) explicam que o entendimento de cada abordagem apresenta diferença sob o ponto de vista mecânico.

A forma geral, isto é, antes de se definir uma abordagem, considera cada subsistema como independente, do que decorre a necessidade de definir os graus de liberdade (GDL) e as forças de conexão separadamente para cada subestrutura e de escrever todas as condições de interface explicitamente. Na abordagem primária, os esforços de interface são eliminadas e restam somente os GDLs únicos para toda a estrutura. A abordagem dual, por sua vez, estabelece as cargas de interface como globais, sendo que os GDLs permanecem definidos separadamente para cada subsistema. No âmbito experimental, em que a dinâmica da subestrutura é obtida por medição, é mais natural e prático utilizar a abordagem dual para acoplar ou desacoplar subsistemas por meio das medições das receptâncias.

Nos próximos tópicos, mostra-se um exemplo genérico do acoplamento e desacoplamento de dois subsistemas com a abordagem dual.

3.5 Acoplamento

A Figura 5 apresenta um sistema genérico composto por duas subestruturas, A e B. Na figura, distinguem-se duas situações diferentes: na primeira, objetiva-se conhecer o comportamento dinâmico do sistema AB considerando conhecidos A e B a priori (via medições, modelagem e/ou simulações), de forma que se realiza o acoplamento entre estes; na segunda, conhecem-se AB e A, e objetiva-se isolar B do conjunto, de maneira que se faz o desacoplamento entre AB e A.

Na Figura 5, os deslocamentos internos ao subsistema A são representados por \mathbf{u}_a e os deslocamentos internos ao subsistema B são representados por \mathbf{u}_b . Na interface da estrutura, tem-se os deslocamentos \mathbf{u}_c , embora as subestruturas isoladas recebam denominações diferentes para os deslocamentos de seus nós interface: \mathbf{u}_{c_A} e \mathbf{u}_{c_B} para as interfaces de A e B, respectivamente. As mesmas variáveis se aplicam tanto para o acoplamento quanto para o desacoplamento.

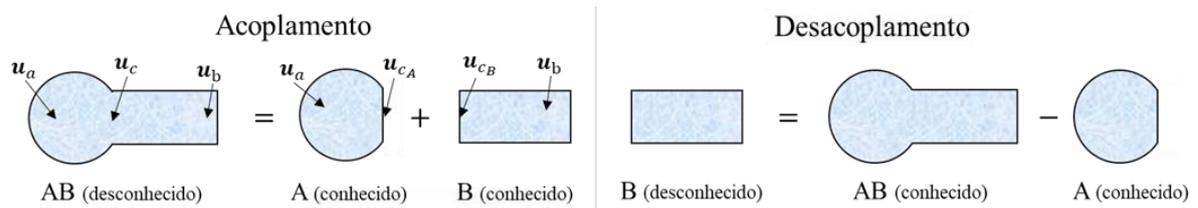


Figura 5 – Sistema genérico em acoplamento e desacoplamento.

Fonte: Adaptado de Rixen e Voormeeren (2010).

Nessa simbologia, a representa a quantidade de nós internos ao subsistema A, b representa a quantidade de nós internos ao subsistema B e c representa a quantidade de nós de interface.

Para exemplificar as técnicas que serão utilizadas na parte experimental deste trabalho, empregar-se-á a abordagem dual para realizar o acoplamento e o desacoplamento apresentados na Figura 5. Assim, entende-se que as impedâncias mecânicas e/ou receptâncias são previamente conhecidas e determinadas, seja por medição direta ou por análise modal.

Inicialmente, para o acoplamento, escrevem-se as matrizes de impedância para os subsistemas A e B como mostra a Equação (24).

$$\mathbf{Z}^A = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{aa}^A & \mathbf{Z}_{ac}^A \\ \mathbf{Z}_{ca}^A & \mathbf{Z}_{cc}^A \end{bmatrix} \text{ para A e } \mathbf{Z}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{bb}^B & \mathbf{Z}_{bc}^B \\ \mathbf{Z}_{cb}^B & \mathbf{Z}_{cc}^B \end{bmatrix} \text{ para B} \quad (24)$$

Em seguida, como foi mostrado na Equação (12), combinam-se as matrizes \mathbf{Z}^A e \mathbf{Z}^B em uma matriz de blocos \mathbf{Z} . Faz-se o mesmo, porém em forma de vetor, com os deslocamentos \mathbf{u}_a , \mathbf{u}_b , \mathbf{u}_{c_A} e \mathbf{u}_{c_B} . Assim, tem-se a Equação (25).

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{aa}^A & \mathbf{Z}_{ac}^A & 0 & 0 \\ \mathbf{Z}_{ca}^A & \mathbf{Z}_{cc}^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}_{bb}^B & \mathbf{Z}_{bc}^B \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}_{cb}^B & \mathbf{Z}_{cc}^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^A \\ \mathbf{u}^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_{c_A} \\ \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_{c_B} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Consequentemente, a matriz de receptância \mathbf{Y} pode ser obtida por \mathbf{Z}^{-1} . Como apontado por van der Seijs (2016), os zeros na matriz indicam que a estrutura ainda está desacoplada. Definem-se também dois vetores de esforços, internos e externos, \mathbf{g} e \mathbf{f} , e as matrizes booleanas \mathbf{B} e \mathbf{L} , dados conforme a Equação (26).

$$\mathbf{B} = [\mathbf{0}_{ca} \quad \mathbf{I}_{c_Ac_A} \quad \mathbf{0}_{bb} \quad -\mathbf{I}_{c_Bc_B}] \text{ e } \mathbf{L} = \text{null}(\mathbf{B})$$

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^A \\ \mathbf{g}^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_{c_A} \\ \mathbf{g}_{c_B} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^A \\ \mathbf{f}^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_{c_A} \\ \mathbf{f}_{c_B} \\ \mathbf{f}_b \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Na Equação (26), I são matrizes identidade cujas dimensões são dadas pelos subscritos utilizados; o mesmo se dá para as matrizes de zeros. Ainda, a expressão $null(\mathbf{B})$ indica que L é obtida calculando-se o espaço nulo da matriz \mathbf{B} . Por fim, a matriz \mathbf{B} depende diretamente da ordem em que são organizados matematicamente os nós da estrutura, ou seja, permutações na ordem abc devem ser acompanhadas pelas corretas adequações em \mathbf{B} , \mathbf{Z} , \mathbf{u} , \mathbf{f} e \mathbf{g} .

O sistema de equações da estrutura desacoplada pode ser escrito como apresentado anteriormente na Equação (14). Fazendo uso da abordagem dual e definindo um conjunto único (global) de forças de interface \mathbf{g} como apontado na Equação (19), elimina-se a priori a condição de equilíbrio. Desse modo, o sistema resultante é o mesmo mostrado na Equação (23). Por fim, fazendo uso da matriz \mathbf{Y} , van der Seijs (2016) mostra que a resposta \mathbf{u} pode ser isolada em função de \mathbf{Y} , \mathbf{B} , \mathbf{f} e λ como mostra a Equação (27).

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{Y}(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T \lambda) \\ \mathbf{B}\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (27)$$

Substituindo a primeira linha na segunda linha (dada pela condição de compatibilidade), tem-se a solução para os multiplicadores de Lagrange λ , vide Equação (28).

$$\lambda = (\mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{f} \quad (28)$$

Esses multiplicadores são as forças de conexão que mantêm as duas subestruturas conectadas. Pode-se, então, substituí-los na primeira linha da Equação (27) e obter-se, finalmente, o vetor de respostas \mathbf{u} . Assim, tem-se a Equação (29).

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}\mathbf{f} - \mathbf{Y}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{f} = [\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Y}]\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{f} \quad (29)$$

O termo entre colchetes, denominado $\tilde{\mathbf{Y}}$, representa a nova matriz de receptância, obtida após o acoplamento, e tem dimensão igual à soma $a + 2c + b$ uma vez que se utilizou a abordagem dual. As linhas e colunas correspondentes a $u_{c_A} = u_{c_B}$ são idênticas devido à

hipótese de acoplamento forte adotada e podem ser removidas se desejado, resultando na mesma matriz obtida pelo método primário (VAN DER SEIJS, 2016). A remoção é feita utilizando a matriz \mathbf{L} como apresentado na Equação (30).

$$\hat{\mathbf{Y}} = (\mathbf{L})^+ \tilde{\mathbf{Y}} (\mathbf{L}^T)^+ \quad (30)$$

O resultado dessa operação tem o mesmo efeito de manualmente escolher as linhas e colunas da matriz de receptância. Desse modo, tem-se $\hat{\mathbf{Y}}$, que representa o comportamento dinâmico da estrutura AB depois de realizado o acoplamento de A e B.

3.6 Desacoplamento

Diversos autores, como Rixen e Voormeeren (2010, 2012), perceberam o crescente interesse pelo problema inverso até então estudado: o desacoplamento. Em situações onde a dinâmica de um componente não pode ser medida separadamente – mas apenas quando está conectada a estruturas vizinhas – é necessário possuir uma metodologia que consiga identificar o comportamento desse componente.

Ainda considerando o sistema genérico apresentado na Figura 5, tem-se o conceito de desacoplamento abordado por Rixen e Voormeeren (2012), o qual segue uma linha de raciocínio que, resumidamente, pode ser descrita como:

- Um carregamento f_i excita o sistema AB no nó i , interno à subestrutura B, ou seja, $f_i \in \mathbf{f}^B$. Como resultado, o sistema acoplado AB tem uma resposta \mathbf{u}^{AB} ;
- A parte da resposta \mathbf{u}^{AB} que contém apenas termos do componente B, além de ser influenciada pela excitação aplicada, também reage às forças de conexão \mathbf{g}_c com o subsistema A;
- Assim, se forem aplicadas cargas opostas a essas de conexão ao sistema AB, infere-se que a influência de A não será mais observada por B.

A Figura 6 ilustra o nó de excitação na subestrutura B e a interação desta com a subestrutura A.

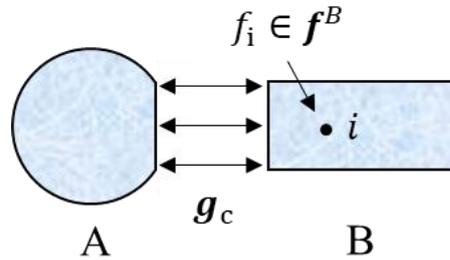


Figura 6 – Relação de desacoplamento entre duas subestruturas genéricas.

Fonte: Adaptado de Rixen e Voormeeren (2010).

Com essa lógica, pode-se perceber o que os autores propõem: o desacoplamento é entendido como o acoplamento do subsistema A ao sistema AB com o uso da subtração da impedância mecânica de A, de maneira a eliminar sua presença na resposta dinâmica de AB. Rixen e Voormeeren (2012) também apresentam diferentes métodos de acoplamento pela abordagem dual, os quais dependem essencialmente da escolha das matrizes booleanas quanto às condições de equilíbrio e de compatibilidade. Os diferentes métodos serão discutidos a partir do tópico 3.6.1.

Inicialmente, são definidas as matrizes de impedância conhecidas, ou seja, \mathbf{Z}^{AB} e \mathbf{Z}^A . A matriz \mathbf{Z}^A é a mesma apresentada na Equação (24), enquanto a matriz \mathbf{Z}^{AB} é dada pela Equação (31).

$$\mathbf{Z}^{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{aa}^{AB} & \mathbf{Z}_{ac}^{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_{ca}^{AB} & \mathbf{Z}_{cc}^{AB} & \mathbf{Z}_{cb}^{AB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{bc}^{AB} & \mathbf{Z}_{bb}^{AB} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Nota-se que essa matriz, \mathbf{Z}^{AB} , tem relação direta com a matriz $\hat{\mathbf{Y}}$ obtida no acoplamento, isto é, uma deve ser a inversa da outra.

As dinâmicas do subsistema A e do sistema AB são melhor entendidas no âmbito do desacoplamento quando explicitadas conforme as Equações (32) e (33). Nota-se que os sinais das cargas de interface entre as equações são opostos.

$$\mathbf{Z}^{AB}\mathbf{u}^{AB} = \mathbf{f}^{AB} + \mathbf{g}^{AB}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{aa}^{AB} & \mathbf{Z}_{ac}^{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_{ca}^{AB} & \mathbf{Z}_{cc}^{AB} & \mathbf{Z}_{cb}^{AB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{bc}^{AB} & \mathbf{Z}_{bb}^{AB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_c \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{Z}^A\mathbf{u}^A = \mathbf{f}^A - \mathbf{g}^A$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{aa}^A & \mathbf{Z}_{ac}^A \\ \mathbf{Z}_{ca}^A & \mathbf{Z}_{cc}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a^A \\ \mathbf{u}_c^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_c \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_c \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Como no desacoplamento as variáveis de deslocamento não se repetem visto que a estrutura conta de antemão com um conjunto único, utiliza-se apenas o subscrito c , não havendo necessidade de indicar com um subscrito adicional à qual subestrutura a variável pertence.

Em seguida, Rixen e Voormeeren (2012) abordam as condições de equilíbrio e compatibilidade. Entretanto, devido à presença de vários métodos de desacoplamento, é necessária uma alteração na simbologia utilizada para as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{L} , cujo motivo será visto mais à frente. Para a matriz que garante a compatibilidade, utilizar-se-á \mathbf{C} , enquanto para a matriz que define a localização das forças de conexão, utilizar-se-á \mathbf{E} .

Objetiva-se desacoplar o subsistema B do sistema AB. Uma vez que se deseja utilizar a abordagem dual, as Equações (32) e (33) podem ser reescritas com a substituição do termo de cargas de interface pela condição de equilíbrio, ou seja, $-\mathbf{E}^T\boldsymbol{\lambda}$. Considerando também a condição de compatibilidade entre \mathbf{u}^{AB} e \mathbf{u}^A pode-se reescrever a Equação (34) para o sistema AB e o subsistema A como mostra a Equação (34):

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{AB}\mathbf{u}^{AB} + \mathbf{E}^{AB^T}\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{f}^{AB} \\ \mathbf{Z}^A\mathbf{u}^A - \mathbf{E}^{A^T}\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{f}^A \\ \mathbf{C}^{AB}\mathbf{u}^{AB} + \mathbf{C}^A\mathbf{u}^A &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (34)$$

Pode-se multiplicar a segunda linha por (-1) e escrever um sistema simétrico matricial, conforme mostra a Equação (35).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{AB} & \mathbf{0} & \mathbf{E}^{AB^T} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Z}^A & \mathbf{E}^{A^T} \\ \mathbf{C}^{AB} & \mathbf{C}^A & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{AB} \\ \mathbf{u}^A \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{AB} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

O termo \mathbf{f}^A não aparece dado que comumente não são consideradas excitações externas agindo nos nós do subsistema A, de maneira que $\mathbf{f}^{AB} = \{\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{f}_b\}^T$. Em seguida, decorre da primeira e segunda linhas do sistema que se pode isolar \mathbf{u}^{AB} e \mathbf{u}^A da mesma forma feita para o acoplamento. A Equação (36) mostra o resultado.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{AB} &= \mathbf{Z}^{AB^{-1}} (\mathbf{f}^{AB} - \mathbf{E}^{AB^T} \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{u}^A &= \mathbf{Z}^{A^{-1}} \mathbf{E}^{A^T} \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (36)$$

Substituindo-os na equação da terceira linha e isolando $\boldsymbol{\lambda}$, chega-se na Equação (37).

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\mathbf{C}^{AB} \mathbf{Z}^{AB^{-1}} \mathbf{E}^{AB^T} - \mathbf{C}^A \mathbf{Z}^{A^{-1}} \mathbf{E}^{A^T} \right)^{-1} \mathbf{C}^{AB} \mathbf{Z}^{AB^{-1}} \mathbf{f}^{AB} \quad (37)$$

Substituindo $\boldsymbol{\lambda}$ novamente na primeira linha e fazendo $\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Y}$, obtém-se as respostas desacopladas \mathbf{u}^{AB} , apresentadas na Equação (38).

$$\mathbf{u}^{AB} = \left(\mathbf{Y}^{AB} - \mathbf{Y}^{AB} \mathbf{E}^{AB^T} (\mathbf{C}^{AB} \mathbf{Y}^{AB} \mathbf{E}^{AB^T} - \mathbf{C}^A \mathbf{Y}^A \mathbf{E}^{A^T})^{-1} \mathbf{C}^{AB} \mathbf{Y}^{AB} \right) \mathbf{f}^{AB} \quad (38)$$

O termo que multiplica \mathbf{f}^{AB} são as funções de resposta em frequências desacopladas dos graus de liberdade internos à subestrutura A (\mathbf{u}_a), do acoplamento (\mathbf{u}_c) e dos internos a B (\mathbf{u}_b).

Para resolver essa equação, Rixen e Voormeeren (2012) consideram quatro métodos diferentes, sendo dois do tipo colocados (*collocated*) e dois do tipo não-colocados (*non-collocated*). De acordo com os autores, as duas denominações representam duas situações: quando as condições de compatibilidade e equilíbrio são impostas aos mesmos graus de liberdade (GDL), diz-se que o método é “colocado”; quando as condições são impostas a dois conjuntos diferentes de GDLs, diz-se que o método é “não-colocado”.

Os métodos colocados são:

- Método de Desacoplamento Padrão (*Standard*);
- Método de Desacoplamento de Interface Estendida (*Extended Interface*);

Enquanto os métodos não colocados são:

- Método de Desacoplamento Superdeterminado (*Overdetermined*);
- Método de Desacoplamento Interno (*Internal*).

Não se deve confundir a denominação com a definição empregada na teoria de controle colocado e não-colocado.

A Figura 7 mostra as regiões e graus de liberdade em que são definidas as condições de interface para cada método de desacoplamento. Nota-se que para os métodos Padrão e de Interface Estendida, as condições de compatibilidade (regiões verdes) e condições de equilíbrio (regiões alaranjadas) são estabelecidas igualmente sejam para graus de liberdade de interface ou internos ao subsistema A. Por outro lado, observa-se que para os métodos Superdeterminado e Interno as condições de interface são definidas para dois conjuntos (ou regiões) distintos de graus de liberdade.

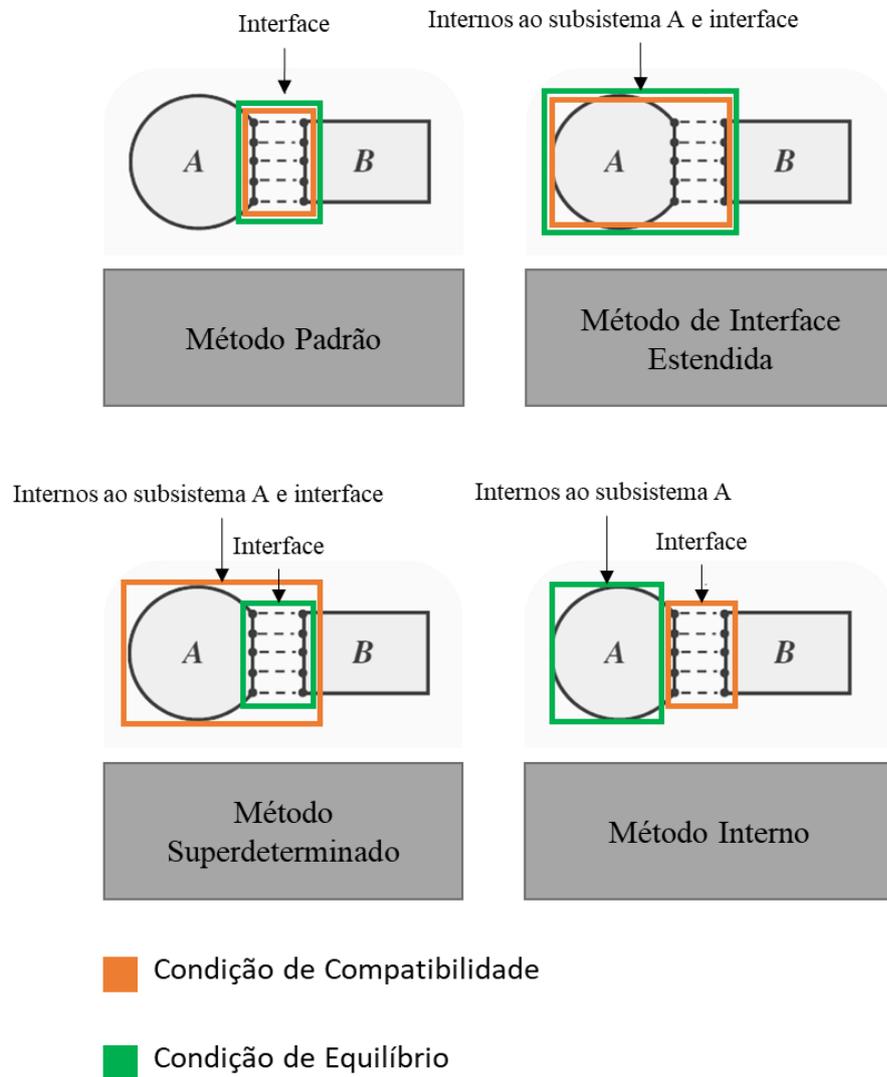


Figura 7 – Definição das condições de interface para cada método de desacoplamento.

A seguir, cada método é individualmente discutido.

3.6.1 Método de Desacoplamento Padrão (colocado)

No método Padrão, as matrizes booleanas E e C são iguais às matrizes B e L inicialmente definidas neste trabalho. Neste método, apenas os deslocamentos e os esforços dos nós da interface entre as subestruturas são utilizados para se escrever as condições de compatibilidade

e de equilíbrio e, dessa forma, as matrizes booleanas são iguais entre o sistema AB e o subsistema A, como apresenta a Equação (39).

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^A &= \mathbf{E}^A = [\mathbf{0}_{ca} \quad -\mathbf{I}_{cc}] \\ \mathbf{C}^{AB} &= \mathbf{E}^{AB} = [\mathbf{0}_{ca} \quad \mathbf{I}_{cc} \quad \mathbf{0}_{cb}] \end{aligned} \quad (39)$$

Esse método, no entanto, pode levar a diversas dificuldades em situações práticas tendo em vista que é exigido que se conheçam especificamente as informações dos nós de interface. Como já mencionado, a localização desses pontos tende a ser de difícil acesso, de maneira que se torna essencial realizar outras escolhas para os nós utilizados, próximos à interface mas não exatamente nela. Além disso, vale lembrar que essas condições de interface requerem acoplamento forte, como já discutido na seção 3.2. O método de Interface Estendida traz a primeira alternativa para melhorar os resultados obtidos.

3.6.2 Método de Desacoplamento de Interface Estendida (colocado)

Tendo em vista que os dados obtidos experimentalmente possuem erros inerentes de medição, espera-se uma pequena diferença entre \mathbf{Z}^A , a matriz de impedância exata da subestrutura A, e sua contraparte experimental. Na tentativa de solucionar essa questão, é proposta por Rixen e Voormeeren (2012) a utilização adicional de nós internos ao subsistema A no método de Interface Estendida. Uma vez que a resposta de deslocamento desses nós internos também é devida às cargas de interface, utilizá-las pode gerar resultados mais precisos para as FRFs desacopladas.

Tem-se, assim, que ambas as condições de interface utilizam informações tanto da região de interface quanto dos graus de liberdades internos à subestrutura A. As matrizes booleanas para este método são dadas pela Equação (40). Nota-se que são incluídos todos os a nós internos ao subsistema A.

$$\mathbf{C}^A = \mathbf{E}^A = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{cc} \end{bmatrix}$$

(40)

$$\mathbf{C}^{AB} = \mathbf{E}^{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{cc} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A escolha de quais nós internos utilizar não possui algum critério que deve ser fielmente seguido. Alguns parâmetros, como a qualidade das FRFs medidas, podem ser utilizados como auxílio na decisão. É ressaltado, no entanto, por Rixen e Voormeeren (2012) e Peeters et al. (2014), além de demonstrado por D'Ambrogio e Fregolent (2009), que a inversão matricial no método de Interface Estendida é singular quando não existem erros de medição na matriz de impedância da subestrutura A uma vez que a informação extra incluída na formulação está também presente nos dados provenientes da interface.

Dessa maneira, entende-se que os multiplicadores de Lagrange a mais se tornam redundantes, o que torna o problema singular devido à presença de colunas iguais nas matrizes de receptância. Para contornar esse possível obstáculo, pode-se, sem detrimento de outro aspecto, utilizar-se a pseudoinversa no lugar da operação de inversão comum presente na Equação (38). De acordo com Rixen e Voormeeren (2012), a utilização da pseudoinversa, que se dá pela decomposição da matriz em valores singulares, caracteriza um relaxamento implícito das condições de interface e equivale à eliminação dos multiplicadores repetidos.

3.6.3 Método de Desacoplamento Superdeterminado (não colocado)

Os métodos não-colocados são assim denominados uma vez que não utilizam o mesmo conjunto de nós para as duas condições de interface. No caso do método Superdeterminado, são utilizados apenas os da interface para a condição de equilíbrio, entretanto empregam-se tanto os deslocamentos (e esforços) dos nós internos à subestrutura A como os da interface para a compatibilidade. O objetivo dessa escolha é a minimização dos erros de medição das funções de resposta em frequência do subsistema A e do sistema AB. As matrizes booleanas são construídas como mostra a Equação (41):

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^A &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{cc} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}^{AB} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{cc} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{E}^A &= [\mathbf{0}_{ca} \quad -\mathbf{I}_{cc}] \\
\mathbf{E}^{AB} &= [\mathbf{0}_{ca} \quad \mathbf{I}_{cc} \quad \mathbf{0}_{cb}]
\end{aligned} \tag{41}$$

Neste método, o sistema resultante da substituição das matrizes da Equação (41) na Equação (38) é superdeterminado, fazendo com que o desacoplamento seja realizado com a solução das forças de interface por meio de mínimos quadrados. Ou seja, são determinados multiplicadores de Lagrange que minimizam a norma da incompatibilidade tanto na interface quanto nos deslocamentos dos nós internos de A. Devido à solução por mínimos quadrados, as condições de interface novamente contam com um relaxamento implícito na formulação (RIXEN; VOORMEEREN, 2012).

Tendo em vista os resultados obtidos por Rixen e Voormeeren (2012) e as características apontadas por van der Seijs (2016), são esperadas respostas com alta acurácia com a utilização do Método Superdeterminado. Os autores apontam que os multiplicadores de Lagrange determinados fornecem estimações melhores para as intensidades dos esforços de interface em relação aos outros métodos, o que mostra que geralmente é benéfico considerar nós internos adicionais em medições experimentais.

3.6.4 Método de Desacoplamento Interno (não colocado)

Essa formulação utiliza nós da interface para a compatibilidade, mas somente nós internos de A para o equilíbrio. Isso significa que a interface entre A e B é instrumentada apenas para obtenção dos sinais de deslocamento e não se excita o local, o que se torna útil nos casos em que o acesso com dispositivos de excitação é difícil (VAN DER SEIJS, 2016). Esforços são

aplicados em A tais que a condição de compatibilidade ainda é satisfeita, o que requer que os graus de liberdade da interface sejam controláveis de seus graus de liberdade internos.

Com o método Interno, tem-se uma vantagem em aplicações práticas tendo em vista que o mesmo evita a inversão das funções de resposta em frequência dos nós da interface, o que poderia ser uma dificuldade ou até mesmo inviabilizaria o desacoplamento especialmente quando se tratam de pontos de excitação nestes nós, os quais comumente estão localizados em regiões inacessíveis. Também chamados de *driving points*, os pontos de excitação são nós dessa estrutura em que simultaneamente ocorre medição e excitação e por isso caracterizam grande contratempo dependendo de suas localizações. As matrizes booleanas para o Método Interno são dadas pela Equação (42).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^A &= [\mathbf{0}_{ca} \quad -\mathbf{I}_{cc}] \\
 \mathbf{C}^{AB} &= [\mathbf{0}_{ca} \quad \mathbf{I}_{cc} \quad \mathbf{0}_{cb}] \\
 \mathbf{E}^A &= [-\mathbf{I}_{aa} \quad \mathbf{0}_{ac}] \\
 \mathbf{E}^{AB} &= [\mathbf{I}_{aa} \quad \mathbf{0}_{ac} \quad \mathbf{0}_{ab}]
 \end{aligned} \tag{42}$$

A eficácia de cada método depende do sistema e suas características, sendo necessário avaliar a melhor maneira de proceder para cada caso. Existem outros métodos não-colocados, como apresentam Peeters et al. (2014). Os autores apontam que a única condição necessária é que a quantidade de requisitos de compatibilidade seja maior ou igual à quantidade de requisitos de equilíbrio, e que esta última seja maior ou igual ao número de graus de liberdade dos nós de conexão. Essa relação pode ser entendida como: $\text{posto}(\mathbf{C}) \geq \text{posto}(\mathbf{E}) \geq c$.

3.7 Análise Modal

A necessidade de conhecer o comportamento das máquinas e estruturas, especialmente em relação a seus padrões vibratórios, leva inevitavelmente à necessidade de realizar testes,

ensaios e observações experimentais que, depois de corretamente realizados e analisados, permitem o entendimento e até a predição de fenômenos dinâmicos inerentes à vibração desses sistemas (EWINS, 2000).

Esses sistemas, por sua vez modelados geralmente pelo método dos elementos finitos (MEF), têm seus parâmetros validados através dos resultados obtidos pela análise modal realizada sobre dados experimentais. A comparação dos principais modos de vibrar entre os dois modelos – analítico e experimental – valida o modelo de elementos finitos para o uso de predições (EWINS, 2000).

Os testes realizados experimentalmente, por sua vez, têm o objetivo específico de estimar os parâmetros modais do sistema. Dentre métodos do domínio do tempo e do domínio da frequência, o método dos mínimos quadrados para exponenciais complexas, do domínio do tempo, é extremamente utilizado em ambiente experimental e é abordado no próximo tópico.

3.7.1 Mínimos Quadrados para Exponenciais Complexas

O Método dos Mínimos Quadrados para Exponenciais Complexas (LSCE), é um método de análise modal do domínio do tempo que utiliza as funções de resposta ao impulso (IRF) de um sistema a fim de determinar seus parâmetros modais (HE; FU, 2001). Mais especificamente, o método explora a relação entre as IRFs com múltiplos graus de liberdade (GDL) e seus polos (s_r) e resíduos (rA_{ij}) complexos.

De acordo com Böswald et al. (2006), o passo inicial na utilização do LSCE é a seleção da banda de frequências de interesse do sistema, isto é, uma faixa de frequências dentro de todo o intervalo disponível, levando em conta as propriedades da máquina ou da estrutura. Deve-se considerar nesta etapa que os picos de ressonância contidos na banda definida devem ser suficientes para descrever com acurácia o comportamento do sistema.

Em seguida, o método LSCE faz a estimação dos parâmetros modais através das IRFs da estrutura. Tendo em vista que geralmente os dados experimentais disponíveis estão no domínio da frequência, utiliza-se a transformação inversa de Laplace a fim de se obter as séries temporais. Seja $\alpha_{ij}(s)$ a função de transferência de um sistema com múltiplos GDLs, dada pela Equação (43).

$$\alpha_{ij}(s) = \sum_r^N \frac{{}_r A_{ij}}{s-s_r} + \frac{{}_r A_{ij}^*}{s-s_r^*} \quad (43)$$

em que os subscritos i e j representam a resposta na posição i devido à uma excitação na posição j , o subscrito r representa o r -ésimo modo, N é a quantidade de modos ou graus de liberdade do sistema e o asterisco representa o complexo conjugado.

A transformada inversa de Laplace, quando aplicada nesta equação, resulta na função de resposta ao impulso, dada pela Equação (44).

$$h_{ij}(t) = \sum_{r=1}^{2N} {}_r A_{ij} e^{s_r t} \quad (44)$$

Entende-se, dessa forma, que a IRF é uma superposição de exponenciais complexas, sendo que cada uma representa uma resposta modal atenuada. Os resíduos são quantias locais e dependem das posições i e j , enquanto a parte complexa é uma quantia global e depende dos autovalores da estrutura (BÖSWALD et al., 2006).

É mostrado por He e Fu (2001) que, se essa IRF for amostrada em uma série de intervalos temporais igualmente espaçados $k\Delta$ ($k = 0, \dots, N$), sendo Δ o incremento de tempo, tem-se a Equação (45):

$$h_k = h_{ij}(k\Delta) = \sum_{r=1}^{2N} {}_r A_{ij} e^{s_r k\Delta} = \sum_{r=1}^{2N} {}_r A_{ij} z_r^k \quad (k = 0, 1, \dots, 2N) \quad (45)$$

em que a transformada Z é utilizada ($e^{s_r k\Delta} = z_r^k$) uma vez que os dados são discretos.

As amostras h_k são, naturalmente, valores reais, enquanto os resíduos ${}_r A_{ij}$ e os polos s_r são quantias complexas cujas componentes imaginárias se anulam devido aos conjugados ${}_r A_{ij}^*$ e s_r^* . O próximo passo consiste na estimação dos polos e dos resíduos por meio dos dados amostrados. Pelo método de Prony, a influência dos termos locais pode ser separada da influência dos termos globais de forma que as raízes do sistema são calculadas por uma equação

polinomial. Assim, tem-se que z_r são as raízes desse polinômio com coeficientes reais β , como mostra a Equação (46), denominada Equação de Prony.

$$\beta_0 + \beta_1 z_r + \beta_2 z_r^2 + \cdots + \beta_{2N-1} z_r^{2N-1} + \beta_{2N} z_r^{2N} = 0 \quad (46)$$

Considerando que existem $2N + 1$ equações de resposta ao impulso, cada equação pode ser multiplicada por um coeficiente β correspondente e as expressões resultantes podem ser somadas, como demonstrado na Equação (47).

$$\sum_{k=0}^{2N} \beta_k h_k = \sum_{k=0}^{2N} \beta_k \sum_{k=0}^{2N} r A_{ij} z_r^k = \sum_{k=0}^{2N} r A_{ij} \sum_{k=0}^{2N} \beta_k z_r^k \quad (47)$$

Em comparação à Equação (46), sabe-se que a Equação (47) será nula quando z_r for uma raiz do polinômio de Prony. Logo, tem-se a relação apresentada pela Equação (48).

$$\sum_{k=0}^{2N} \beta_k h_k = 0 \quad (48)$$

Essa relação representa uma alternativa para estimar os coeficientes β numericamente. Ademais, na equação de Prony, Equação (46), pode-se assumir valor unitário para o coeficiente β_{2N} . Em seguida, tomando um conjunto de $2N$ amostras de IRFs, forma-se uma equação linear. Tomando-se $2N$ conjuntos de $2N$ amostras, tem-se um sistema linear de ordem $2N$, como mostrado na Equação (49). O número de linhas pode exceder o número de coeficientes β desde que se utilize uma solução via mínimos quadrados.

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{2N-1} & h_{2N} & \dots & h_{4N-2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{2N} \\ h_{2N+1} \\ \vdots \\ h_{4N-1} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Após os valores de β terem sido determinados, a Equação (46) pode ser resolvida para se estimar as raízes z_r . Estas raízes, por sua vez, que são os polos do sistema no domínio Z , auxiliam na dedução dos polos s_r pela relação $e^{s_r k \Delta} = z_r^k$. Os polos complexos (ou frequências naturais complexas), por fim, são constituídos pelas frequências naturais não amortecidas, ω_r , e fatores de amortecimento, ζ_r , da maneira apresentada na Equação (50) para o r -ésimo modo.

$$\begin{aligned} s_r &= -\zeta_r \omega_r + j \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \\ s_r^* &= -\zeta_r \omega_r - j \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \end{aligned} \quad (50)$$

Para calcular as frequências naturais e fatores de amortecimento a partir da raiz z_r no domínio Z , faz-se conforme a Equação (51).

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{\Delta} \sqrt{\ln(z_r) \ln(z_r^*)} \\ \zeta_r &= -\frac{\ln(z_r z_r^*)}{2\omega_r \Delta} \end{aligned} \quad (51)$$

Finalmente, os modos de vibrar do sistema também podem ser estimados dos dados das IRFs, bastando apenas resolver o sistema de equações apresentado na Equação (45), e reescrito em forma matricial na Equação (52), do qual são obtidos as constantes modais (ou resíduos modais) ${}_r A_{ij}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{2N-1} & z_2^{2N-1} & \dots & z_{2N}^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_1A_{ij} \\ {}_2A_{ij} \\ \vdots \\ {}_{2N}A_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{2N-1} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Com os resíduos calculados, a Equação (43) pode ser resolvida para uma faixa desejada de frequências e, dessa maneira, estimar a FRF para o ponto de medição i com excitação no ponto j . A Figura 8 apresenta um fluxograma que resume o procedimento realizado pelo LSCE.

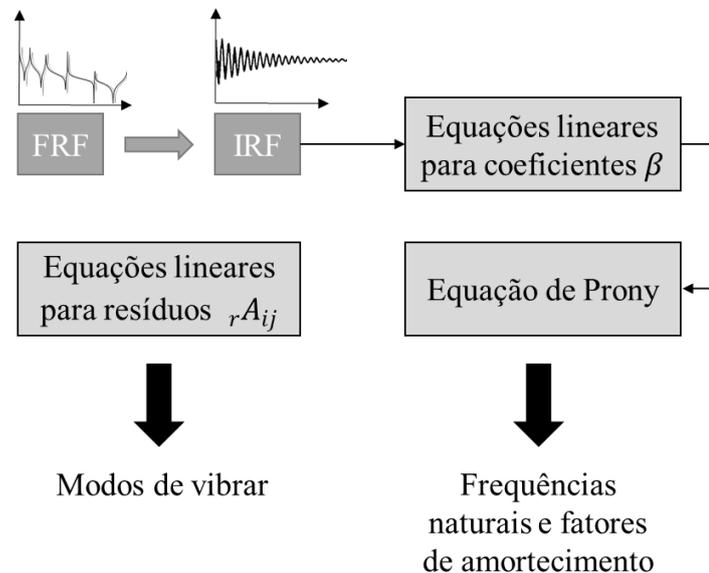


Figura 8 – Fluxograma do método LSCE.

Fonte: Adaptado de He e Fu (2001).

O método LSCE provê melhores resultados quanto maior for a quantidade de dados e quanto mais sofisticadas sejam as técnicas de solução de sistemas (HE; FU, 2001). Além disso, não é necessário para sua utilização o conhecimento das matrizes completas de FRFs. Em seguida é discutida a síntese da matriz completa a partir dos parâmetros encontrados pelo LSCE.

3.7.2 Síntese das Funções de Resposta em Frequência

Em ambientes industriais e/ou laboratoriais, não é habitual existir um sensor de medição para cada ponto de uma estrutura, de maneira que somente os pontos de interesse são medidos e excitados. Em outras palavras, as matrizes globais de receptância obtidas em um ensaio são esparsas, ou seja, possuem uma grande quantidade de zeros uma vez que apenas alguns graus de liberdade estão representados em linhas ou colunas completas. Assim, tem-se efetivamente matrizes não-quadradas, o que reflete em dificuldades no contexto da análise dinâmica do sistema (VAN DER SEIJS, 2016).

A Equação (43), apresentada na formulação do LSCE, traz uma alternativa de solução a essa questão. Com uma quantidade suficiente de frequências conhecidas dentro de uma faixa de operação, é possível aproximar uma matriz de receptância através dos polos e resíduos determinados pelo LSCE. É demonstrado por Ewins (2000) que a Equação (43) é aplicável a sistemas com amortecimento viscoso dos tipos proporcional e não-proporcional.

O autor reescreve a equação explicitando o cálculo dos resíduos como produtos entre os modos de vibrar, como mostra a Equação (53).

$$Y(\omega) = \sum_{r=1}^m \frac{\boldsymbol{\varphi}_r \boldsymbol{\varphi}_r^T}{i\omega - s_r} + \frac{(\boldsymbol{\varphi}_r \boldsymbol{\varphi}_r^T)^*}{i\omega - s_r^*} \quad (53)$$

Nesta equação, vê-se que o resultado para cada frequência ω retorna uma matriz $N \times N$ tendo em vista que, para um sistema de N graus de liberdade, cada r -ésimo modo $\boldsymbol{\varphi}_r$ tem tamanho N . Vale lembrar que a matriz modal $\boldsymbol{\Phi}$ contém todos os m modos. Por fim, o asterisco denota o complexo conjugado.

Uma grande vantagem dessa abordagem, técnica que será denominada “reconstituição” ou “síntese”, é que não há necessidade de realizar inversões matriciais. Além disso, como apontam He e Fu, (2001), observa-se claramente a contribuição individual de cada modo do sistema na faixa de operação escolhida.

É importante ressaltar que a equação de reconstituição apresentada não considera modos que estão fora da faixa de frequências utilizada na análise modal e que certamente influenciam,

em menor ou maior grau, as funções de resposta em frequência dentro do limite utilizado na sintetização. Como apontado por Ewins (2000), essas contribuições, também chamadas de resíduos, podem desempenhar grande diferença na qualidade da resposta sintetizada. O autor explica que os resíduos são classificados em inferior e superior e que considerar uma faixa de frequências ampla (maior do que a faixa de interesse) é uma alternativa para reduzir as influências desses.

3.8 Diagramas de Estabilização

Um diagrama de estabilização é, de acordo com Brincker et al. (2015), um gráfico de propriedades dinâmicas estimadas, tais como frequências naturais, para diferentes ordens (dimensões) de modelos de aproximação. Com sua utilização, viabiliza-se a extração de dados que podem tanto fornecer informações iniciais do sistema quanto confirmar parâmetros previamente conhecidos. São duas as vantagens principais: determinação da quantidade de modos contidos em uma faixa de frequências específica e verificação da estabilidade da variável dinâmica em análise, o que possibilita confirmar ou descartar a estimação realizada.

Quando se utilizam diagramas de estabilização, é necessário definir limites ou valores de checagem para a consistência das variáveis estimadas. Usualmente, exige-se que frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar sejam todos concomitantemente estáveis para que o modo completo seja considerado estável. A Figura 9 mostra um diagrama de estabilização genérico em que se observa um modo estável.

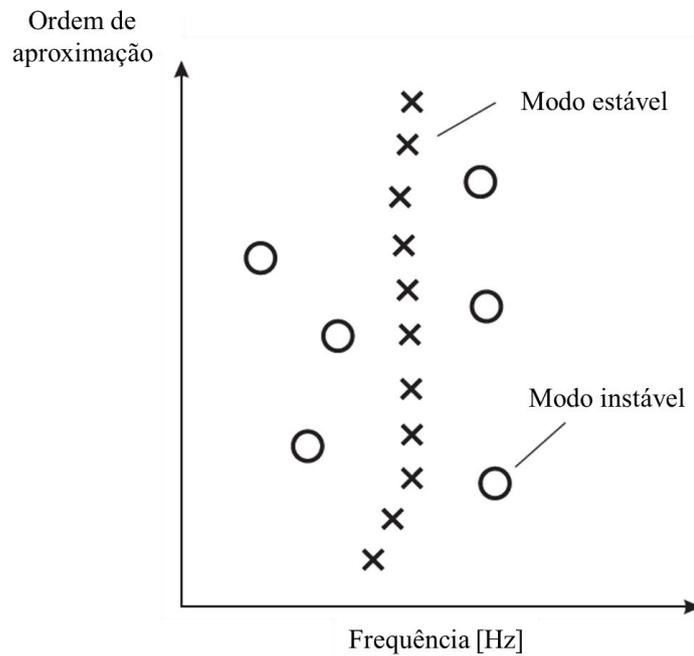


Figura 9 – Diagrama de Estabilização

Fonte: Adaptado de Brincker et al. (2015) .

Autores como Qin et al. (2016) mencionam que os pontos estáveis são dados geralmente por critérios segundo as Equações (54), (55) e (56) para frequências naturais (f), fatores de amortecimento (ζ) e modos de vibrar ($\boldsymbol{\varphi}$), respectivamente.

$$\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{f_i} \times 100\% \leq 1\% \quad (54)$$

$$\Delta \zeta_i = \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{\zeta_i} \times 100\% \leq 5\% \quad (55)$$

$$(1 - MAC(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_{i+1})) \times 100\% \leq 2\% \quad (56)$$

O indicador MAC, do inglês *modal assurance criterion*, representa a similaridade entre dois modos de vibrar e varia de 0 (modos completamente diferentes) a 1 (modos completamente iguais). É comum não utilizar o MAC – e conseqüentemente os modos de vibrar – no diagrama

de estabilização, mas apenas frequências naturais e fatores de amortecimento. Uma discussão mais detalhada sobre o cálculo do MAC é realizada na seção 3.8.1.

A determinação da ordem de aproximação de um diagrama de estabilização é determinada pelo usuário. A ordem deve ser suficientemente elevada, permitindo assim a identificação dos modos estáveis. Entretanto, se excessivamente elevada, modos espúrios podem ocorrer (BILBAO; BOROSCHEK, 2019). Apesar da existência de algoritmos automatizados para a definição da ordem e escolha dos modos estáveis, a seleção arbitrária ainda é muito utilizada. Assim, o que se faz é analisar diferentes ordens de aproximação para uma determinada resposta ou sistema até que se encontre a mais adequada para a representação de todos os modos.

Neste trabalho, os diagramas de estabilização serão utilizados como ferramenta de auxílio na identificação das frequências naturais (ou modos físicos) dos componentes da fundação com o algoritmo LSCE, além da filtragem de modos numéricos. Desse modo, a seleção da ordem de aproximação e dos modos estáveis resulta em um conjunto de frequências naturais a ser utilizado em uma nova estimação dos parâmetros modais pelo LSCE sem a presença de modos espúrios ou devido a ruídos.

3.8.1 Indicador de Similaridade Modal (MAC)

O MAC, ou indicador de similaridade modal, é um parâmetro estatístico sensível a grandes diferenças existentes entre modos de vibrar e é amplamente utilizado em diversas situações na análise de estruturas, como: comparação entre modos de vibrar obtidos numérica e experimentalmente, comparação entre modos calculados por diferentes ferramentas de estimação de parâmetros modais e a comparação entre modos obtidos para um nó através da excitação em diferentes locais, dentre outras aplicações (PASTOR, et al., 2012).

A definição do número MAC se deu após o desenvolvimento das funções de coerência aplicadas às funções de resposta em frequência e é uma constante escalar que representa o grau de consistência (ou linearidade) entre um modo escolhido e um modo de referência. Se o grau de relação for alto, o MAC se aproxima da unidade, caso contrário, o MAC se aproxima de zero. Isso ocorre devido ao fato de que o MAC é normalizado com os próprios vetores e não indica, portanto, validade ou ortogonalidade. Ainda, quando estão presentes erros de medição

nos modos comparados, tanto aleatórios quanto sistemáticos, o parâmetro MAC não os reconhece e quaisquer conclusões e hipóteses a respeito do sistema em análise não necessariamente estão corretas (ALLEMANG, 2003).

Matematicamente, o MAC é calculado conforme mostra a Equação (57) para dois modos de vibrar φ_i e φ_j complexos.

$$MAC = \frac{|\varphi_i^T \varphi_j^*|^2}{(\varphi_i^T \varphi_i^*)(\varphi_j^T \varphi_j^*)} \quad (57)$$

Comumente, constroem-se matrizes bi ou tridimensionais com os valores de MAC correspondentes a todos os modos de vibrar do sistema, como mostra o exemplo idealizado da Figura 10 para uma matriz tridimensional, que relaciona três modos. Observa-se que a correspondência de cada modo consigo mesmo é próxima à unidade (diagonal principal), enquanto os outros termos têm correspondência nula.

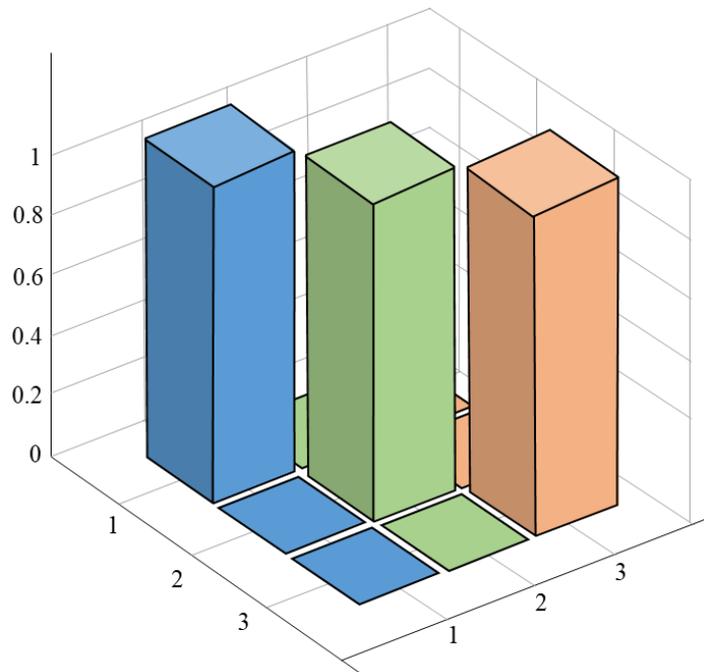


Figura 10 – Matriz de MAC.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, tem-se a metodologia utilizada para a obtenção dos resultados mostrados neste trabalho. São apresentados inicialmente os sistemas mecânicos analíticos sobre os quais foram empregadas as técnicas de subestruturação e análise modal e, em seguida, apresenta-se a bancada de ensaios, os detalhes relativos à aquisição dos dados de vibração e aborda-se a metodologia utilizada para a análise experimental da fundação.

4.1 Subestruturação e Análise Modal de Sistemas Analíticos

Com o intuito de verificar a formulação e os algoritmos de subestruturação e análise modal desenvolvidos, foram modelados analiticamente sistemas mecânicos massa-mola amortecidos. A definição dos sistemas foi inspirada no trabalho de Rixen e Voormeeren (2012), com o qual também foi possível realizar validações dos resultados. O primeiro sistema modelado é apresentado na Figura 11.

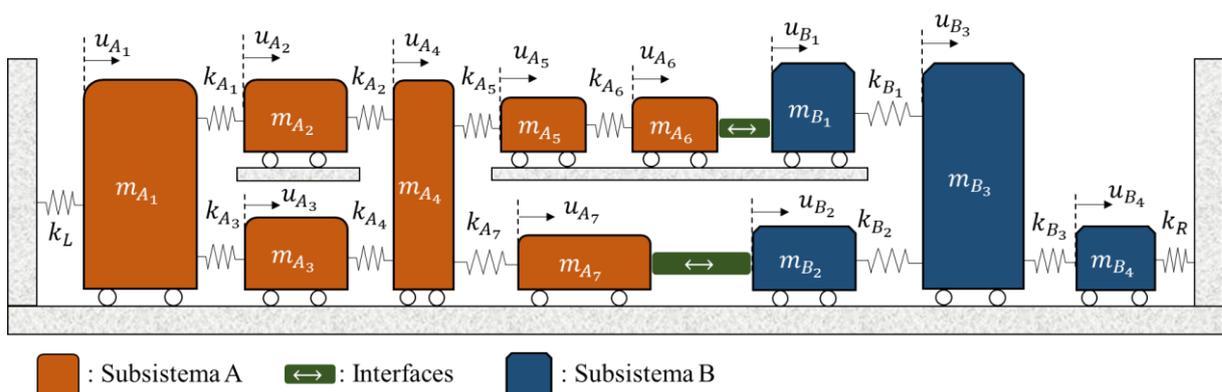


Figura 11 – Sistema analítico de duas subestruturas.

A subestrutura A tem sete graus de liberdade (GDLs), enquanto a subestrutura B tem 4 GDLs. As massas do subsistema A são representadas por m_{A_1} até m_{A_7} e as coordenadas de

deslocamento de cada massa são, respectivamente, u_{A_1} a u_{A_7} . Da mesma maneira, as massas do subsistema B são representadas por m_{B_1} a m_{B_4} e as coordenadas de deslocamento são, de forma respectiva, u_{B_1} a u_{B_4} . O acoplamento entre as duas partes é realizado em dois pontos de interface: entre os nós das variáveis de deslocamento u_{A_6} e u_{B_1} e entre os nós das variáveis u_{A_7} e u_{B_2} .

A disposição das massas e rigidezes segue o trabalho de Rixen e Voormeeren (2012), à exceção de uma adaptação: a fixação das subestruturas ao referencial inercial por meio das rigidezes k_L para o subsistema A e k_R para o subsistema B, como visto na Figura 11. Desse modo, foram eliminados os modos de corpo rígido do modelo. Os valores das rigidezes k_{A_1} a k_{A_7} e k_{B_1} a k_{B_3} , bem como das onze massas, estão dispostos na Tabela 1.

Tabela 1 – Massas e rigidezes dos subsistemas A e B no primeiro sistema de referência.

Subsistema A				Subsistema B			
Massa [kg]		Rigidez [N/m]		Massa [kg]		Rigidez [N/m]	
m_{A_1}	10	k_{A_1}	2000	m_{B_1}	2	k_{B_1}	1000
m_{A_2}	3	k_{A_2}	1000	m_{B_2}	4	k_{B_2}	1000
m_{A_3}	3	k_{A_3}	2000	m_{B_3}	8	k_{B_3}	2000
m_{A_4}	6	k_{A_4}	1000	m_{B_4}	5	k_R	4000
m_{A_5}	2	k_{A_5}	500				
m_{A_6}	2	k_{A_6}	200				
m_{A_7}	4	k_{A_7}	1000				
		k_L	700				

Definidas as propriedades, foram modelados o subsistema A, o subsistema B e o sistema AB. Construíram-se as matrizes de massa e rigidez e, ainda, matrizes de amortecimento proporcionais às matrizes de massa com fatores de proporcionalidade de 0,1, como feito por Rixen e Voormeeren (2012). O sistema AB possui nove GDLs uma vez que os pontos de interface entre A e B são acoplados e somam-se as massas e rigidezes envolvidas nesses pontos.

O estudo seguiu com o cálculo das matrizes de impedância mecânica (e funções de resposta em frequência) para uma faixa de frequências de 0 a 50 Hz com um total de 3000

pontos igualmente espaçados. Os resultados foram obtidos para os subsistemas A e B e para o sistema AB na forma de diagramas de amplitude e fase (ou diagramas de Bode). Assim, tem-se os resultados considerados como originais ou de referência.

A primeira etapa consistiu no desacoplamento da subestrutura B juntamente à avaliação das diferenças entre os quatro métodos de desacoplamento apresentados na seção 3.6. Foram determinados e analisados os diagramas de amplitude e fase da subestrutura B desacoplada com cada método, bem como os erros relativos desses resultados em função dos valores originais.

Ainda, fez-se o acoplamento entre as subestruturas A e B, cujo resultado foi comparado com o do sistema AB de referência, obtido diretamente pelas matrizes de massa, amortecimento e rigidez. Para estas simulações, consideram-se as matrizes completas de funções de resposta em frequência.

À vista das análises realizadas e resultados alcançados, os subsistemas foram alterados com o objetivo de facilitar a implementação e o estudo dos algoritmos de análise modal e de acoplamento múltiplo. Os valores de massa e rigidez dos subsistemas A e B foram alterados e ambos foram novamente montados (acoplados) com apenas um nó de conexão, constituindo um segundo sistema de referência.

A Figura 12 mostra a configuração do segundo sistema analítico global de referência, o qual apresenta, no total, oito graus de liberdade devido à redução de dois GDLs para a subestrutura B.

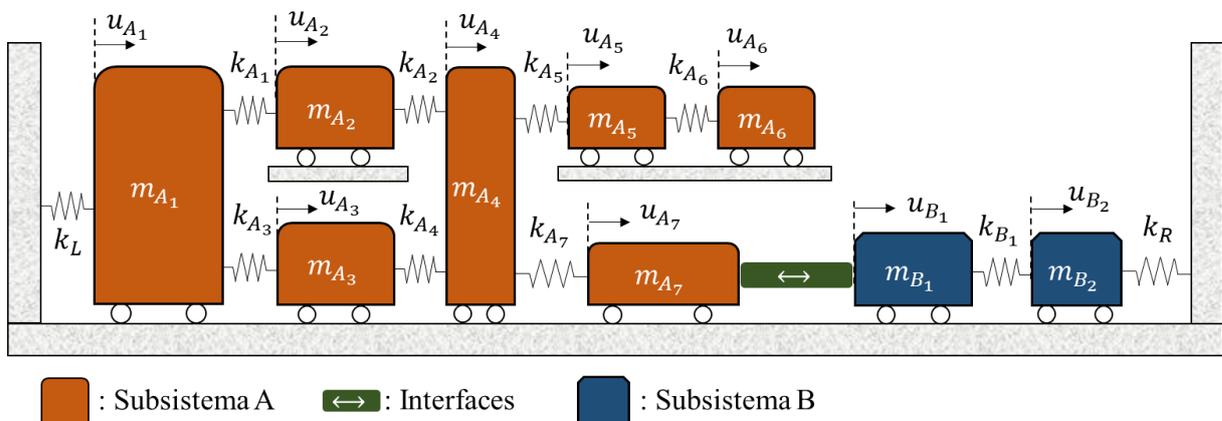


Figura 12 – Sistema analítico de duas subestruturas com redução dos GDLs de B.

Os novos parâmetros de massa e rigidez são apresentados na Tabela 2. A matriz de amortecimento possui a mesma proporcionalidade de 0,1 em relação à matriz de massa.

Tabela 2 – Massas e rigidezes dos subsistemas A e B no segundo sistema de referência.

Subsistema A				Subsistema B			
Massa [kg]		Rigidez [N/m]		Massa [kg]		Rigidez [N/m]	
m_{A_1}	6	k_{A_1}	2000	m_{B_1}	5	k_{B_1}	1000
m_{A_2}	3	k_{A_2}	1000	m_{B_2}	2	k_{C_1}	1000
m_{A_3}	3	k_{A_3}	2000				
m_{A_4}	8	k_{A_4}	1000				
m_{A_5}	2	k_{A_5}	500				
m_{A_6}	2	k_{A_6}	300				
m_{A_7}	4	k_{A_7}	1000				
		k_L	700				

A etapa seguinte consistiu na aplicação da análise modal e da reconstituição das FRFs sobre o segundo sistema de referência. Para tanto, utilizou-se uma quantidade menor de linhas das matrizes de receptância (apenas uma) em relação à dimensão total da matriz, o que representa uma situação encontrada no ambiente prático.

Foram definidos os parâmetros de simulação, como a frequência de amostragem, a ordem de aproximação (do polinômio de Prony), a faixa de frequências de interesse, as frequências naturais próximas (neste caso, obtidas diretamente via matrizes de massa, amortecimento e rigidez) e o ponto de excitação da estrutura, cujo autovetor será utilizado na seleção e escala (massa modal) dos demais $N - 1$ modos do sistema. A configuração correta do ponto de excitação requer que a receptância do nó em questão represente o maior número possível de modos.

Com a função *modalfit* do *Matlab* e esses parâmetros definidos, são estimados os parâmetros modais (frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar) apenas com os dados da linha escolhida. Finalmente, calculam-se os polos e os resíduos, possibilitando

a reconstituição da matriz completa de FRFs para o sistema, denominada Y_{LSCE} , com o uso da Equação (53).

Um fluxograma é apresentado na Figura 13 e mostra os passos percorridos na análise modal e os aspectos de cada um.

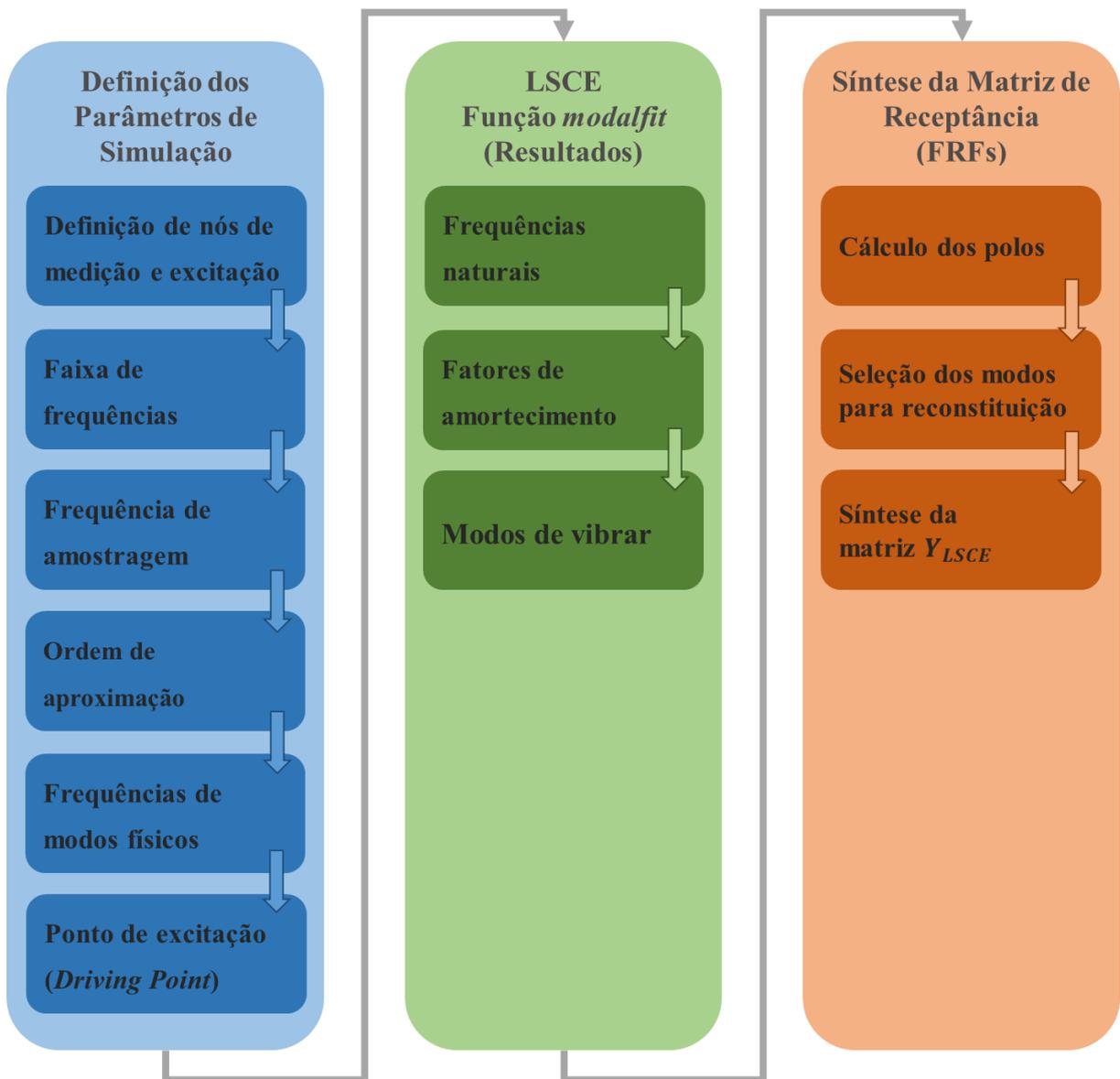


Figura 13 – Fluxograma da estimação de parâmetros modais e síntese de FRFs.

Dessa forma, com as FRFs sintetizadas do segundo sistema de referência, pôde-se realizar o desacoplamento de B com cada um dos métodos de desacoplamento, resultando na

subestrutura isolada. Esta, por sua vez, foi duplicada, originando um terceiro subsistema denominado C, cujos parâmetros físicos são idênticos aos de B apresentados na Tabela 2.

Finalmente, ambos subsistemas, B e C, foram acoplados ao subsistema A através de dois nós de conexão. O equacionamento apresentado nas Equações (24) a (30) foi implementado para o acoplamento do subsistema B ao nó da coordenada u_{A_6} e o acoplamento do subsistema C ao nó da coordenada u_{A_7} , constituindo dessa forma uma configuração ABC de nove GDLs obtido pelo acoplamento de FRFs sintetizadas, como pode ser visto na Figura 14.

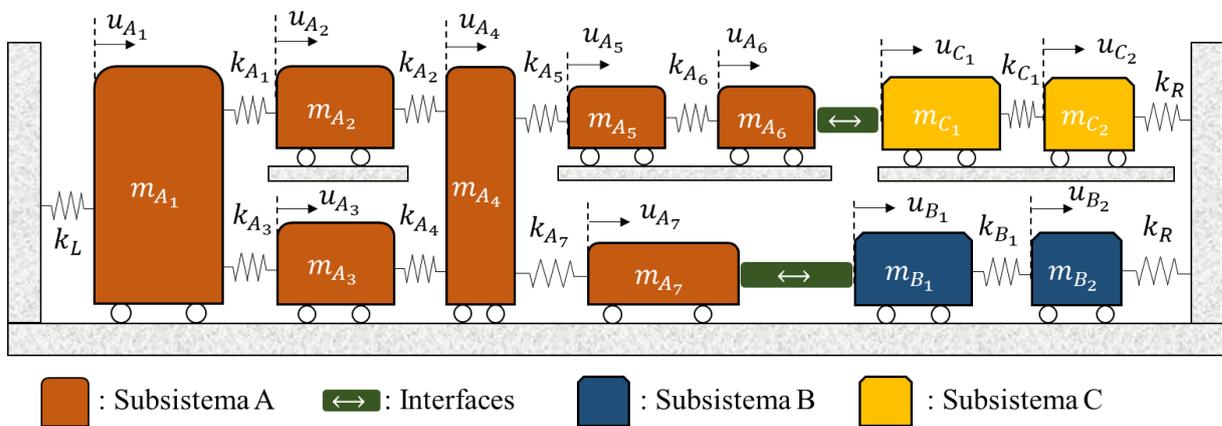


Figura 14 – Sistema massa-mola global ABC.

Escolheu-se por diferenciar o subsistema duplicado pela letra C para evitar ambiguidades nas variáveis em relação ao subsistema B, embora sejam idênticos em suas propriedades, como mostra a Tabela 3. A configuração ABC também foi modelada via matrizes de massa, amortecimento e rigidez para realizar as comparações dos resultados.

Tabela 3 – Valores de massa e rigidez do subsistema C.

Subsistema C			
Massa [kg]		Rigidez [N/m]	
m_{C_1}	5	k_{C_1}	1000
m_{C_2}	2	k_R	2000

Assim, é verificado e estudado o acoplamento de múltiplas subestruturas associado à análise modal de sistemas analíticos. A apresentação e discussão detalhada dos resultados obtidos é feita no Capítulo 4.3.6.

Após o estudo da formulação e dos algoritmos aplicados aos modelos analíticos, iniciou-se a análise dos dados de vibração da base metálica e dos suportes de mancais abordados no Capítulo 3.

4.2 Bancada de Ensaio

A bancada pertence ao Laboratório de Máquinas Rotativas da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp e foi projetada para permitir o estudo e a análise de dados de diferentes sistemas rotativos e fundações. A bancada, Figura 15, foi projetada por Dedini (1993) e permite reproduzir o comportamento dinâmico de máquinas rotativas de grande porte sustentadas por mancais hidrodinâmicos. Resumidamente, é composta por um grande bloco de concreto inercial, fixado ao solo, e por um segundo bloco, menor e igualmente de concreto, apoiado sobre o primeiro por um conjunto de molas e por uma espuma de poliuretano de alta densidade que fornecem amortecimento. Sobre o bloco menor, há uma placa de aço engastada que permite a fixação de até dez elementos de suporte para a base metálica onde o rotor é montado.



Figura 15 – Sistema de aquisição de dados (à esquerda) e bancada de testes (à direita).

Fonte: Martin (2020).

A base metálica, por sua vez, foi planejada para permitir o uso de vários suportes de mancais, em diferentes locais, de maneira a ser possível analisar máquinas rotativas compostas por um ou mais eixos. A base utilizada neste trabalho foi projetada por Martin (2020).

A base possui 1180 mm de comprimento, 290 mm de largura e 12 mm de espessura. Na Figura 16, tem-se a base de uma vista superior montada sobre o banco de testes por meio de quatro colunas, além de sete acelerômetros afixados à placa. A Figura 17 mostra novamente a base montada sobre a fundação inercial.

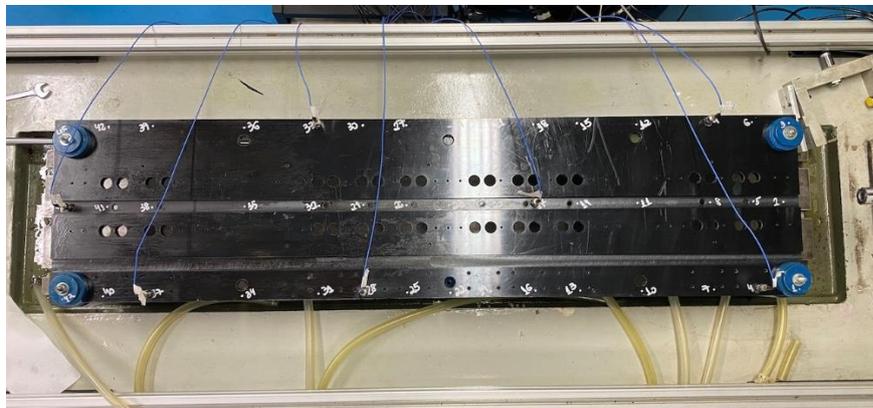


Figura 16 – Vista superior da base metálica.

Fonte: Martin (2020).



Figura 17 – Base montada na fundação.

Fonte: Martin (2020).

Os pedestais dos mancais são parte da fundação, como mostra a Figura 18, pois se mantêm fixos à mesma em relação ao movimento do rotor em operação.

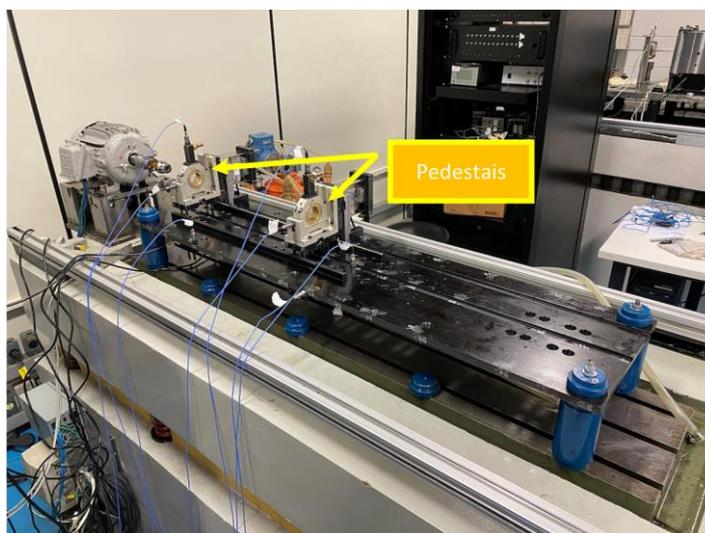


Figura 18 – Base metálica com dois suportes de mancais acoplados.

Fonte: Adaptado de Martin (2020).

4.2.1 Aquisição e Organização dos Dados

Os dados utilizados na análise modal e subestruturação da fundação foram adquiridos e reportados por Martin (2020) e são os dados de vibração, por exemplo, da base na configuração livre-livre, vide exemplo na Figura 19 em que é simulada essa condição pela suspensão da base por tubos de látex, e os da base fixada por quatro colunas sobre o restante da fundação, como mostrado na Figura 18. Mais especificamente, os dados disponíveis são:

- Condição 1: base na condição livre-livre sem estruturas de suporte de mancal;
- Condição 2: base na condição livre-livre com uma estrutura de suporte de mancal;
- Condição 3: base na condição livre-livre com duas estruturas de suporte de mancal;
- Condição 4: base montada na fundação com quatro colunas e sem estruturas de suporte de mancal;
- Condição 5: base montada na fundação com quatro colunas e duas estruturas de suporte de mancal.



Figura 19 – Estrutura de suporte de mancal fixada à base suspensa por tubos de látex.

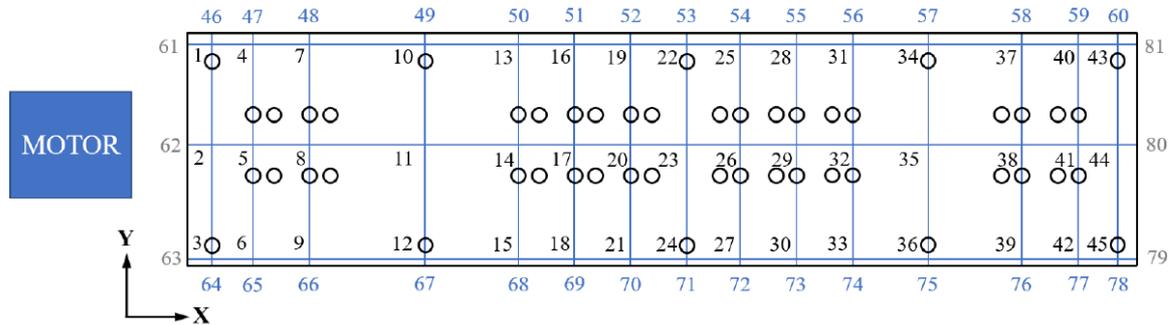
Fonte: Martin (2020).

A instrumentação e o armazenamento dos dados realizados por Martin (2020) não serão discutidos em detalhes. Ressalta-se que foram utilizados sete acelerômetros ICP (marca *PCB Piezotronics*, modelo 352C04), um condicionador modelo 483C da *PCB Piezotronics* e uma placa de aquisição da *National Instruments* modelo USB-6361 a uma frequência de amostragem de 10 kHz e janela exponencial.

As excitações foram realizadas com um martelo de impacto da marca *Brüel & Kjær* com transdutor de força acoplado e ponta intercambiável. Para cada ponto de excitação, Martin (2020) realizou a média de cinco medições.

Para a base metálica, Martin (2020) realizou uma discretização em 81 nós, como mostra a Figura 20. Observa-se uma classificação: nós com a numeração na cor preta (1 a 45) indicam medições e/ou excitações realizadas na direção *Z*, nós com a numeração na cor azul (46 a 60 e 64 a 78) indicam medições e/ou excitações na direção *Y*, enquanto nós com a numeração na cor cinza (61 a 63 e 79 a 81) indicam medições e/ou excitações na direção *X*.

Nota-se, ainda, a identificação dos eixos coordenados *X* e *Y* no canto inferior esquerdo. Esse sistema de referência é padrão para as análises realizadas na bancada do laboratório e é aqui mantido.



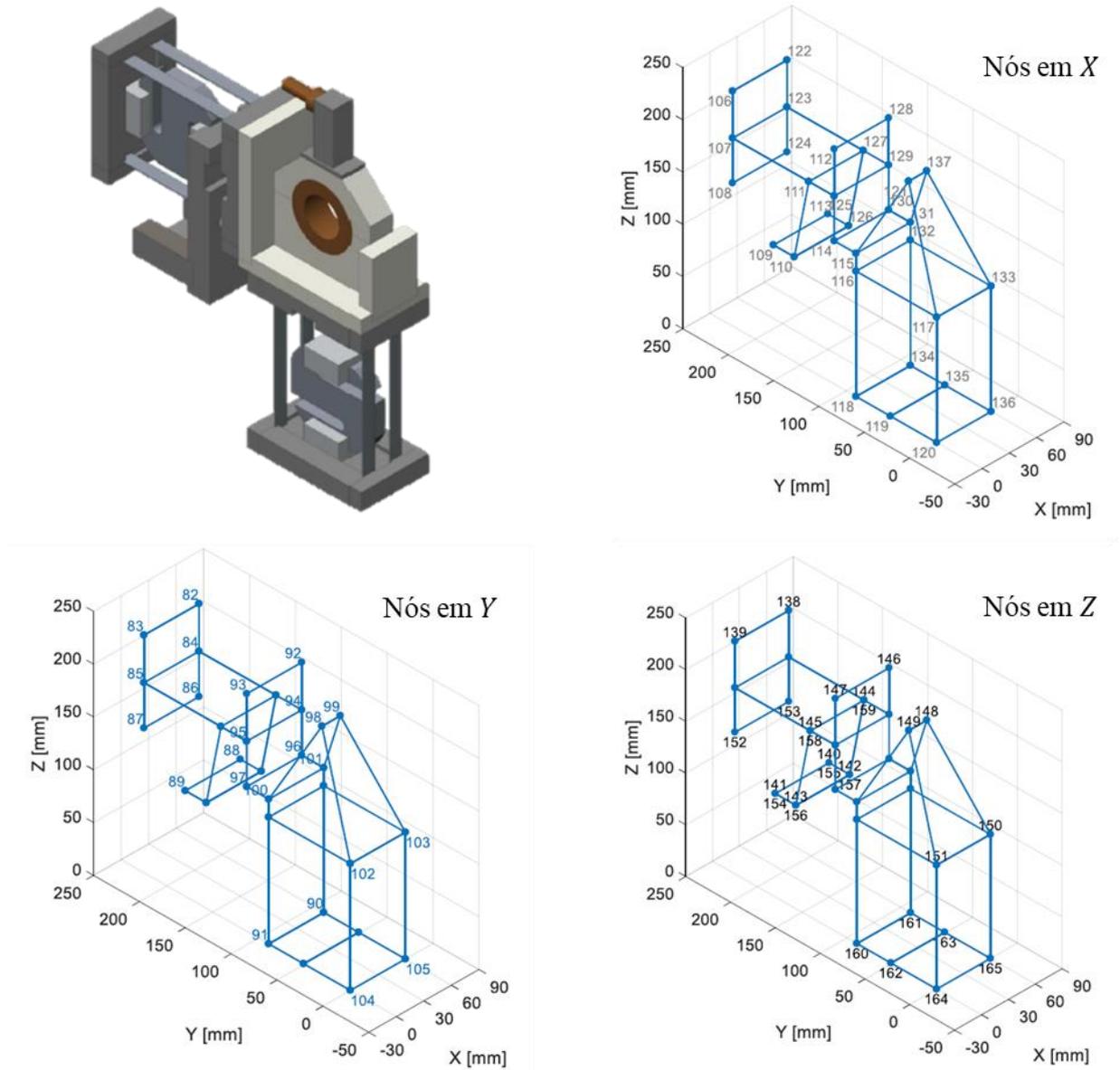


Figura 21 – Pedestal dos mancais, pontos e direções de medição.

Fonte: Martin (2020).

Para as Condições 3 e 5, Martin (2020) utilizou uma discretização distinta, conforme mostra a Figura 22. Nota-se que, além dos 81 nós originais da base, são definidos outros 9 pontos adicionais em cada estrutura de suporte de mancais, totalizando 99 pontos.

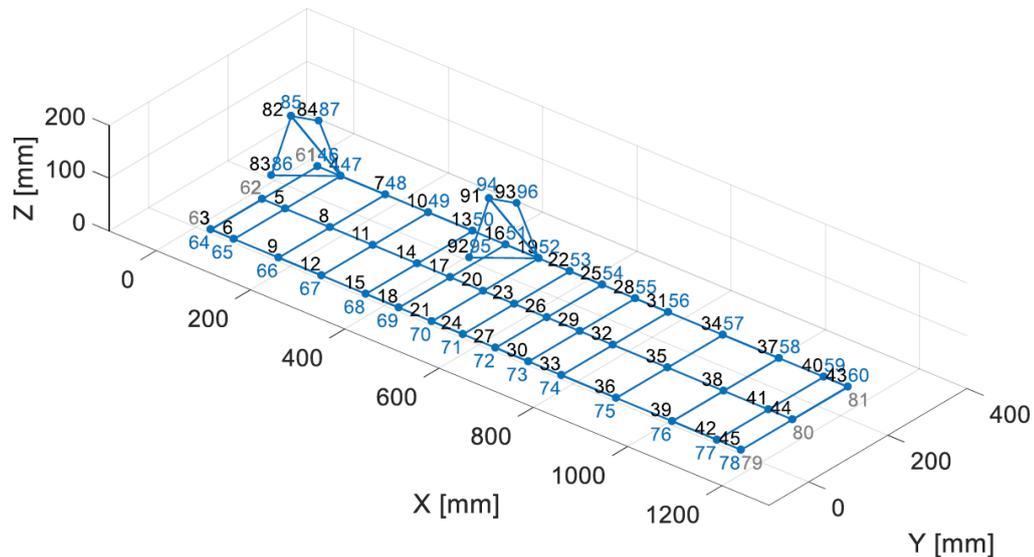


Figura 22 – Discretização utilizada no processo de medição da base montada à fundação e com dois suportes de mancais.

Fonte: Martin (2020).

Para cada conjunto de dados disponível, a Tabela 4 resume as características de medição de cada condição e mostra quais os nós de medição e excitação envolvidos.

Tabela 4 – Condições (configurações) de medição e nós envolvidos.

	Base	Estruturas de suporte dos mancais	Nós de excitação	Nós de medição
Condição 1	Livre	Sem	1 a 63	5, 13, 24, 35, 65, 75, 80
Condição 2	Livre	1	13 a 27, 50 a 54, 61 a 64, 84 a 165	16, 94, 103, 113, 134, 147, 151
Condição 3	Livre	2	1 a 63, 82 a 99	12, 26, 72, 82, 85, 91, 94
Condição 4	Montada com 4 colunas	Sem	1 a 63	5, 13, 24, 35, 65, 75, 80
Condição 5	Montada com 4 colunas	2	1 a 64, 79 a 99	12, 26, 72, 82, 85, 91, 94

Nas Condições 3 e 5 utilizam-se os nós da Figura 22 para os pedestais, enquanto que para as demais utilizam-se os nós da Figura 21. Nota-se que a quantidade de nós de medição (sete) é consideravelmente menor que a quantidade de nós de excitação em todas as condições. Os dados disponíveis apresentam 10000 pontos de frequência para cada nó excitado, com um incremento de 0,5 Hz em uma faixa de 0 a 5000 Hz. A próxima seção apresenta a organização e a classificação dos nós para realização da análise modal e subestruturação.

4.3 Subestruturação e Análise Modal da Fundação

Nesta seção descreve-se a metodologia adotada na análise modal e na subestruturação da fundação. Definem-se cinco etapas:

- a. Análise modal dos dados da base isolada na condição livre-livre (Condição 1), que consiste na estimação dos parâmetros modais e na reconstituição das funções de resposta em frequência com os parâmetros estimados;
- b. Análise modal dos dados da base na condição livre-livre com uma estrutura de suporte de mancais (Condição 2), também com a estimação dos parâmetros modais e reconstituição das funções de resposta em frequência;
- c. Desacoplamento da estrutura de suporte de mancais (ou pedestal) da base com a utilização dos quatro métodos de desacoplamento discutidos neste trabalho. Acoplamento do pedestal à base na Condição 1 (livre-livre) e comparação aos dados experimentais da Condição 2;
- d. Análise modal da base na condição livre-livre com duas estruturas de suporte de mancais (Condição 3), com estimação de parâmetros modais e reconstituição das funções de resposta em frequência;
- e. Acoplamento de dois pedestais à base na Condição 1 e comparação dos resultados aos obtidos experimentalmente na Condição 3 para validação final do objetivo proposto.
- f. Análise modal da base montada sem e com pedestais (Condições 4 e 5). Após, acoplamento dos pedestais à base na Condição 4 e comparação com Condição 5.

Para cada etapa de análise modal, foram realizadas análises referentes à: quantidade de nós utilizados na estimação dos parâmetros modais, definição de uma ordem suficiente de

aproximação para a estimação dos parâmetros modais pelo LSCE e localização do ponto de excitação. Os resultados avaliados são, essencialmente, as frequências naturais e fatores de amortecimento, tanto diretamente obtidos dos dados experimentais quanto obtidos das respostas sintetizadas. Os modos de vibrar são utilizados em comparações através de matrizes de critérios de similaridade modal (MAC).

Cada etapa é detalhada nos tópicos 4.3.1 a 4.3.5.

4.3.1 Análise Modal da Base Metálica Isolada

A primeira ação necessária foi a classificação e organização dos nós de medição da base discretizada por Martin (2020), tendo em vista que o processo de subestruturação posterior depende de quais nós das subestruturas são utilizados. A base metálica, doravante também denominada subestrutura A, possui a nós internos e c nós de interface, enquanto a estrutura de suporte de mancal, doravante também denominada subestrutura B, possui os mesmos c nós de interface e b nós internos.

Para os nós de interface e internos à subestrutura A, considera-se a Figura 23, em que é destacada a região da base metálica considerada como região de acoplamento na Condição 2. Essa escolha é uma aproximação e se deve ao fato de que a estrutura de suporte de mancais é fixada, na Condição 2, a 505 mm da aresta da base adjacente ao motor elétrico, conforme mostrado na Figura 19.

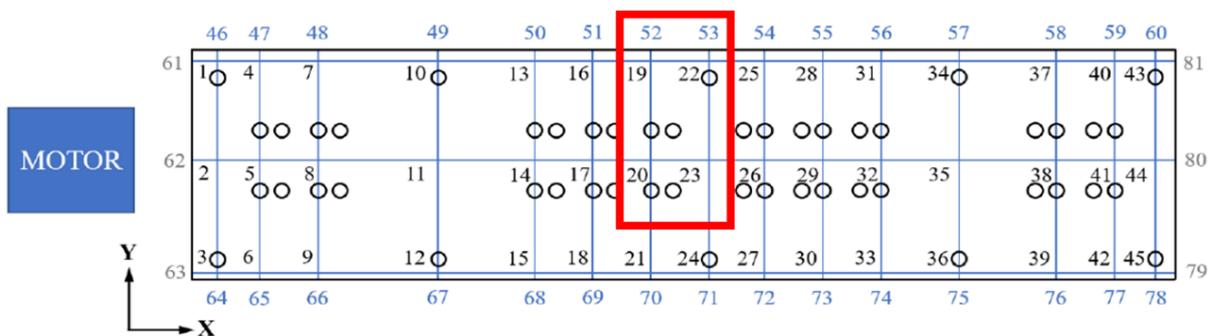


Figura 23 – Região de acoplamento do pedestal à base metálica.

Assim, os nós 19, 20, 22, 23 (direção Z), 52, 53 (direção Y) e 61, 62, 80 e 81 (direção X) foram considerados como nós de interface. Além disso, como apresentado na Tabela 4, existem apenas sete nós de medição e sessenta e três nós de excitação para a Condição 1. A Tabela 5 traz novamente essas informações e mostra, ainda, a classificação de nós internos e de nós de interface de acordo com as direções X, Y e Z e a demarcação da Figura 23.

Tabela 5 – Classificação dos nós da base metálica.

Direção	Nós internos (<i>a</i>)	Nós de interface (<i>c</i>)	Nós de excitação	Nós de medição
Direção X	63, 79	61, 62, 80, 81	61 a 63	80
Direção Y	46 a 51, 54 a 60, 64 a 69, 70 a 78	52, 53	46 a 60	65,75
Direção Z	1 a 18, 21, 24 a 45	19, 20, 22, 23	1 a 45	5, 13, 24, 35

Para a análise modal, optou-se pela utilização dos dados de apenas um nó de medição entre os sete disponíveis – mantendo o que foi feito para os sistemas analíticos. Tem-se em vista a preferência de utilização de um nó próximo à região de acoplamento para que a função de resposta em frequência desse ponto, que é também o local de definição do ponto de excitação, contenha os modos relevantes para o processo posterior de subestruturação. Para os nós de excitação, por sua vez, optou-se pela utilização mútua de nós das três direções igualmente próximos à região de acoplamento.

Dessa maneira, deu-se início à estimação dos parâmetros modais pelo LSCE. A banda de frequências utilizada foi de 5 a 250 Hz, faixa que despreza os efeitos do modo de corpo rígido em 0 Hz encontrado na condição livre-livre e possui um limite máximo suficiente para considerar grande parte da faixa de rotação do rotor quando este é acoplado à fundação. Desse modo, são considerados 491 pontos (dados) de frequência, os quais são amostrados (no algoritmo do LSCE) com uma frequência igual a duas vezes a maior frequência dos dados, ou seja, a taxa de amostragem é de 10 kHz.

Inicialmente, foi avaliada a melhor ordem de aproximação a ser priorizada através da observação dos diagramas de estabilização e das frequências naturais encontradas. Compararam-se os resultados obtidos com ordens iguais a 10, 20 e 30 a fim de se encontrar um valor que, além de ser satisfatório na estimação dos parâmetros modais da base, não resultasse em modos espúrios.

Os diagramas de estabilização funcionam, nesse âmbito, como uma ferramenta de eliminação prévia desses possíveis modos espúrios. Foram utilizados como valores de checagem de estabilidade erros de 1% para a frequência natural e 5% para os fatores de amortecimento, conforme mostrado nas Equações (54) e (55), sugeridas por Qin (2016).

Simultaneamente, foram definidas e utilizadas sete combinações diferentes de nós – entre os de medição e excitação – com o intuito de se conhecer aquela que resulta em uma estimação aceitável e que utilize a menor quantidade possível de pontos, o que configura uma vantagem computacional uma vez que cada nó possui 10000 medições em toda a faixa de frequências medida. A Tabela 6 traz os conjuntos definidos. Vale lembrar que o nó de medição é sempre utilizado como local do ponto de excitação (ou *driving point*).

Tabela 6 – Conjuntos de nós utilizados na análise modal da base isolada.

Conjunto	Nó de medição	Nós de excitação
1	13 ou 24	13, 20, 24, 51, 52, 54, 61, 62, 63
2	13	13, 20, 51, 52, 62, 63
3	13	13, 20, 52, 62
4	13	13, 20
5	13	13, 19
6	13	13
7	35	20, 35

Após a análise dos resultados comparativos e estimação dos parâmetros modais, realizou-se a síntese ou reconstituição das funções de resposta em frequência completas, ou seja, das

matrizes de ordem $N \times N$ sendo N a quantidade de nós de excitação utilizados. Finalmente, para esta etapa, as respostas sintetizadas foram avaliadas e os parâmetros modais foram comparados aos obtidos diretamente dos dados experimentais. As análises e os resultados são apresentados e discutidos no Capítulo 5.

4.3.2 Análise Modal da Base Metálica com uma Estrutura de Suporte de Mancal

Para a análise modal da base metálica com uma estrutura de suporte de mancal fixada (Condição 2), tem-se os b graus de liberdade adicionais internos do pedestal (subestrutura B), conforme apresentados nas malhas de medição da Figura 21. Como mencionado anteriormente, a subestrutura B está a 505 mm da aresta da base adjacente ao motor, na região destacada em vermelho na Figura 23.

Tendo em vista que as malhas não se conectam através de nós específicos e definidos, foi necessário estabelecer a região de acoplamento e eleger quais nós do pedestal que se caracterizam como nós de interface, sendo que estes são tomados como rigidamente acoplados à base e, portanto, valem as condições de equilíbrio e compatibilidade tratadas na fundamentação. Nas análises, utilizam-se os nós de interface da base nos cálculos necessários, todavia é de interesse identificar os do pedestal para que nenhum seja utilizado como nó interno.

A Tabela 7 apresenta as classificações dos nós da estrutura de suporte de mancais e os nós de medição e excitação. Vale salientar que a classificação dos nós da base permanece a mesma mostrada na Tabela 5, de modo que o que se tem é uma associação de informações.

Tabela 7 – Classificação dos nós da estrutura de suporte de mancais.

Direção	Nós internos (<i>b</i>)	Nós de interface (<i>c</i>)	Nós de excitação	Nós de medição
Direção <i>X</i>	106 a 108, 111, 112, 116 a 125, 127 a 129, 132 a 137	109, 110, 113 a 115, 126, 130, 131	61 a 64, 106 a 137	113, 134
Direção <i>Y</i>	82 a 87, 90 a 99, 102 a 105	88, 89, 100, 101	50 a 54, 84 a 105	94, 103
Direção <i>Z</i>	138, 139, 144 a 153, 158 a 165	141 a 143, 154 a 157	13 a 27, 138 a 165	16, 147, 151

Grande parte das considerações do tópico anterior, 4.3.1, são reutilizadas. Novamente opta-se pela utilização de apenas um nó de medição e de nós de excitação nas três direções. A faixa de frequências de análise é de 5 a 250 *Hz*, com a mesma quantidade de pontos (491), o mesmo incremento de frequência (0,5 *Hz*) e a mesma frequência de amostragem (10 *kHz*). Os parâmetros modais são calculados para diferentes combinações de nós, diferentes pontos de excitação e é definida uma ordem de aproximação principal entre 20 e 30 para o restante das análises.

É importante ressaltar que, com o intuito de se realizar o desacoplamento do pedestal em seguida, é necessário que os mesmos nós utilizados na análise modal da base na Condição 1 sejam utilizados na análise modal da Condição 2, além dos *b* nós adicionais internos da subestrutura B. Isso se dá visto que se deve conhecer a matriz de receptância da subestrutura A quando está isolada, também como a matriz da estrutura AB quando os subsistemas estão acoplados. Dessa forma, é possível posteriormente desacoplar o subsistema B. Os conjuntos apresentados na Tabela 8 representam os nós internos do pedestal a serem utilizados adicionalmente aos da base.

Tabela 8 – Conjuntos de nós utilizados na análise modal da base com um pedestal.

Conjunto	Nó de medição	Nós de excitação
1	94, 103, 134, 147, 151	92, 94, 98, 111, 112, 128, 134, 147, 150, 151
2	147	94, 98, 111, 112, 147, 151
3	147	94, 112, 147
4	147	94, 147
5	147	94, 98, 111, 112, 147, 151

Os conjuntos dois e seis possuem os mesmos nós de excitação, mas se relacionam a nós diferentes da base, conforme será discutido no próximo capítulo. A determinação dos parâmetros modais das funções de resposta em frequência é feita para os dados experimentais e, em seguida, para as matrizes de receptância sintetizadas. Os resultados são apresentados, comparados e discutidos no Capítulo 5.

4.3.3 Desacoplamento de uma Estrutura de Suporte de Mancel

Com a utilização das equações da seção 3.6 realizou-se o desacoplamento do pedestal. Para cada conjunto de nós apresentado na Tabela 8 e variações de ponto de excitação definidas, fez-se o desacoplamento da subestrutura B com os quatro métodos conhecidos: Padrão, Interface Estendida, Superdeterminado e Interno. Os conjuntos seis e sete da Tabela 6 não são considerados pois se tratam de análises específicas da base isolada.

Foram determinadas, pelo LSCE, as frequências naturais e fatores de amortecimento de cada uma das respostas desacopladas e em seguida compararam-se os resultados a fim de se

analisar a consistência entre os quatro métodos de desacoplamento e a influência das quantidades de nós utilizados.

As respostas desacopladas foram então validadas por um processo de acoplamento. Para tanto, tomou-se a base (e os dados) na Condição 1 e a ela acoplou-se o pedestal desacoplado, sendo este resultado então comparado com os dados experimentais da Condição 2 (medição da base com um pedestal montado). Essa comparação levou em consideração as frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar da fundação, sendo que para os modos empregam-se matrizes de similaridade modal, ou matrizes MAC.

4.3.4 Análise Modal da Base Metálica com Duas Estruturas de Suporte de Mancal

A etapa seguinte se deu pela análise modal da base na Condição 3, isto é, suspensa na condição livre-livre com duas estruturas de suporte de mancais montadas. Os pedestais são fixados a, respectivamente, 105 mm (mancal 1) e 505 mm (mancal 2) da aresta da base adjacente ao motor elétrico. Essas posições são as mesmas vistas na Figura 22 para a base montada na fundação, ou seja, a base livre-livre com dois mancais e a base montada à fundação com dois mancais compartilham da mesma malha de nós de medição. A classificação desses nós é feita na Tabela 9. Nesta condição, em que existem dois mancais, os nós internos e nós de interface são definidos separadamente. Além disso, não são consideradas medições na direção X visto que, em análise prévia, constatou-se que não existem modos nessa direção entre 5 e 250 Hz e que os ruídos medidos resultam em contrastes para o processo de extração de resultados.

Tabela 9 – Classificação dos nós da base com duas estruturas de suporte de mancais.

Direção	Nós internos base	Nós internos mancais		Nós de interface		Nós de excitação	Nós de medição
		Mancal 1	Mancal 2	Mancal 1	Mancal 2		
Direção X	63, 79, 80, 81	88 a 90	97 a 99	61, 62	61, 62	61 a 63, 88 a 90, 97 a 99	-
Direção Y	48 a 50, 53 a 60, 64 a 78	85, 87	94, 96	47, 86	51, 52, 95	46 a 60, 85 a 87, 94 a 96	72, 85, 94
Direção Z	3, 6 a 15, 18, 21 a 45	82, 84	91, 93	4, 5, 83	19, 20, 92	1 a 45, 82 a 84, 91 a 93	12, 26, 82, 91

Novamente, a análise modal é realizada com algumas combinações diferentes de nós e diferentes pontos de excitação e os mesmos parâmetros de simulação utilizados nos tópicos anteriores, como faixa de frequências de análise, limites de erros para os diagramas de estabilização e ordens de aproximação analisadas. Os conjuntos de nós utilizados na análise modal são dados pela Tabela 10. O nó 72, no qual se obtiveram medições, não foi considerado em nenhuma análise pois nele não ocorreu excitação, o que impede a definição do ponto de excitação nesse local.

Tabela 10 – Conjuntos de nós utilizados na análise modal da base suspensa com dois pedestais.

Conjunto	Nó de medição	Nós de excitação
1	12, 26, 82, 91, 85, 94	4, 5, 7, 8, 12, 19, 20, 22, 23, 26, 47, 48, 52, 53, 82, 85, 91, 94
2	82, 91	4, 5, 8, 19, 20, 22, 47, 48, 52, 53, 82, 85, 91, 94
3	91	4, 8, 19, 22, 47, 48, 52, 82, 91
4	91	4, 8, 19, 82, 91

Como são três subestruturas acopladas, optou-se por uma quantidade mínima de nós para o quarto conjunto que abordasse dois nós de interface (4 e 19, um para cada pedestal), um nó interno à base (8) e um nó interno a cada estrutura de suporte (82 para o pedestal do mancal 1 e 91 para o pedestal do mancal 2).

Após a construção e análise dos diagramas de estabilização e definição dos parâmetros a serem utilizados na identificação dos parâmetros modais, são determinados fatores de amortecimento, frequências naturais e modos de vibrar. Por fim, tem-se a síntese das matrizes completas de receptância e a verificação da qualidade da síntese.

4.3.5 Acoplamento de Duas Estruturas de Suporte de Mancal

Nesta etapa, fez-se o acoplamento entre duas estruturas de suporte de mancais – por meio dos dados obtidos no desacoplamento do tópico 4.3.3 – e a base na Condição 1. Os nós do pedestal, tanto de interface quanto internos, dependem exclusivamente do desacoplamento realizado. Assim, a quantidade de pontos de conexão entre cada pedestal e a base varia para cada resultado obtido previamente.

Com a análise dos parâmetros modais da resposta acoplada e a comparação com os parâmetros obtidos da resposta experimental tem-se a validação final tanto dos métodos de desacoplamento (e suas performances) quanto do processo de acoplamento entre múltiplas estruturas.

Para o acoplamento, faz-se novamente a síntese da matriz de respostas em frequência da base na Condição 1, entretanto, consideram-se nós em duas regiões de acoplamento, conforme mostra a Figura 24. A reconstituição leva em consideração a análise modal realizada anteriormente e as duas regiões são referentes à configuração efetuada por Martin (2020) e mostrada na Figura 22.

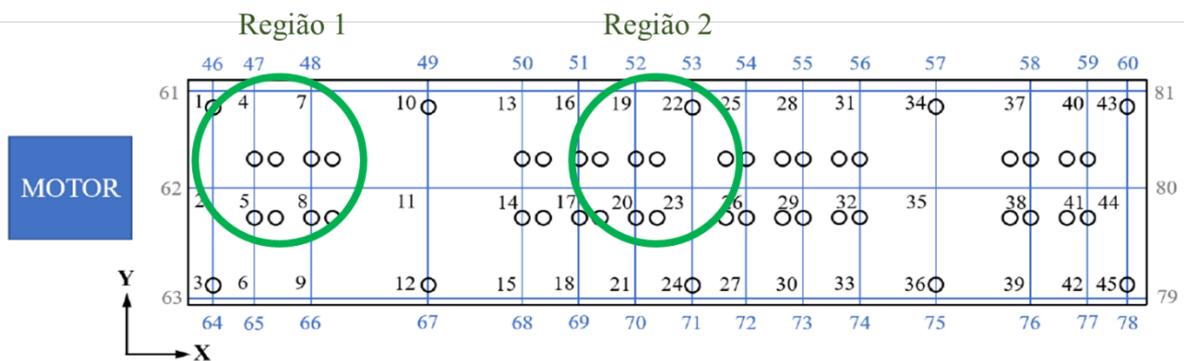


Figura 24 – Regiões de acoplamento dos dois pedestais à base metálica.

Após comparação dos resultados numéricos e experimentais, analisa-se o nível de aplicabilidade da subestruturação e das técnicas de desacoplamento e acoplamento à fundação.

4.3.6 Análise Modal da Fundação Montada e Acoplamento das Estruturas de Suporte de Mancais

Para a base montada com quatro colunas de fixação e sem mancais, Condição 4, Martin (2020) utilizou a mesma malha de medição e os mesmos nós da Condição 1. Dessa forma, o primeiro passo foi a comparação dos parâmetros modais da base montada com os parâmetros da base livre-livre para identificação das diferenças que a montagem introduz. A análise modal

da estrutura nessa configuração utiliza os mesmos conjuntos de nós e parâmetros do tópico 4.3.1.

Depois, realiza-se a análise modal da base montada com duas estruturas de suporte de mancais, Condição 5. Essa etapa caracteriza um passo muito importante pois é utilizada na inserção da fundação à modelagem da máquina rotativa através dos modos identificados. Em seguida, com a síntese das funções de resposta em frequência da base para as mesmas duas regiões retratadas na Figura 24, faz-se o acoplamento das estruturas de suporte de mancais e a comparação dos resultados obtidos com os resultados experimentais da análise modal.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os resultados obtidos. É válido ressaltar que a contribuição de (MARTIN, 2020) na etapa experimental consiste na definição das malhas de medição e obtenção dos dados correspondentes. Assim, entende-se que toda classificação e análise dos sinais e resultados foram realizados neste presente trabalho.

5.1 Subestruturação e Análise Modal do Primeiro Sistema de Referência

Considera-se o sistema massa-mola linear mostrado na Figura 11, cujos parâmetros físicos encontram-se na Tabela 1. A princípio são apresentados os diagramas completos de resposta em frequência (somente amplitude) da subestrutura A, da subestrutura B e do sistema AB, respectivamente na Figura 25, Figura 26 e Figura 27. A faixa de frequências para o cálculo das funções de resposta em frequência foi de 0 a 50 Hz com 3000 pontos igualmente espaçados. Nos gráficos, apresenta-se a faixa de 0 a 8 Hz, que contém todos os modos dos sistemas.

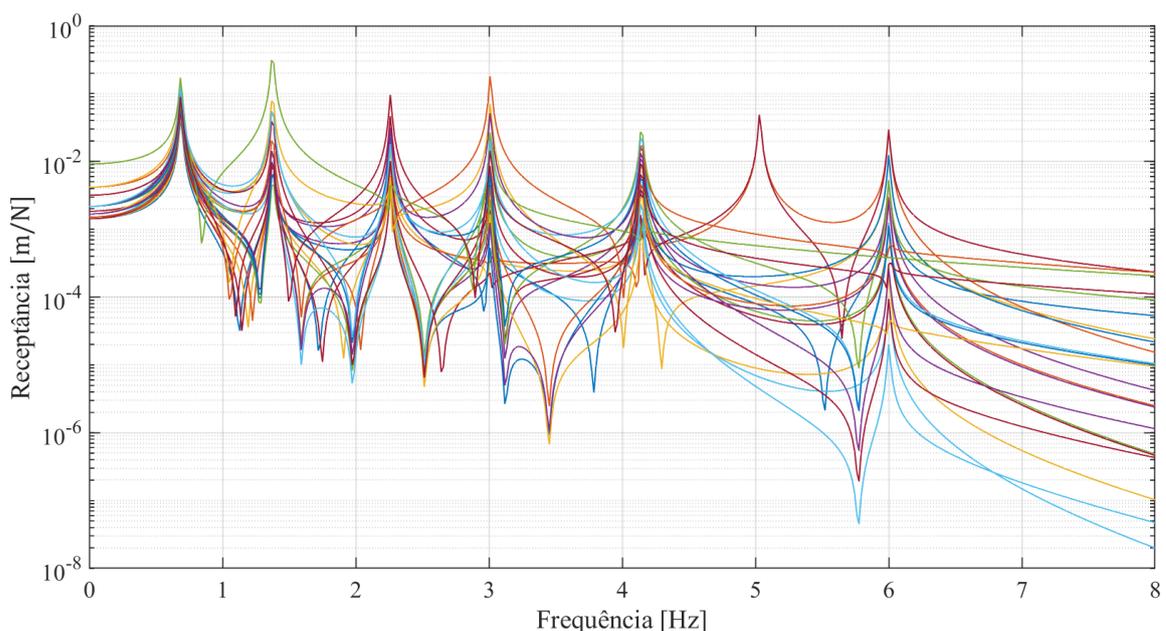


Figura 25 – Funções de Resposta em Frequência da Subestrutura A (Y_A).

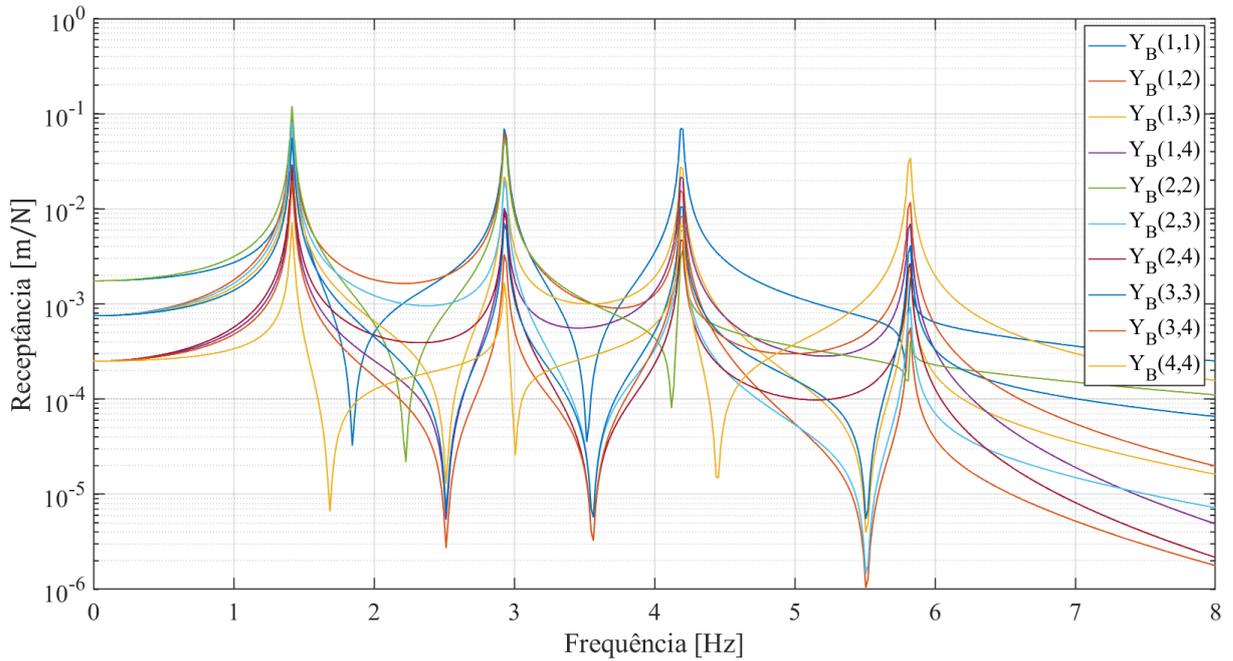


Figura 26 – Funções de Resposta em Frequência da Subestrutura B (Y_B).

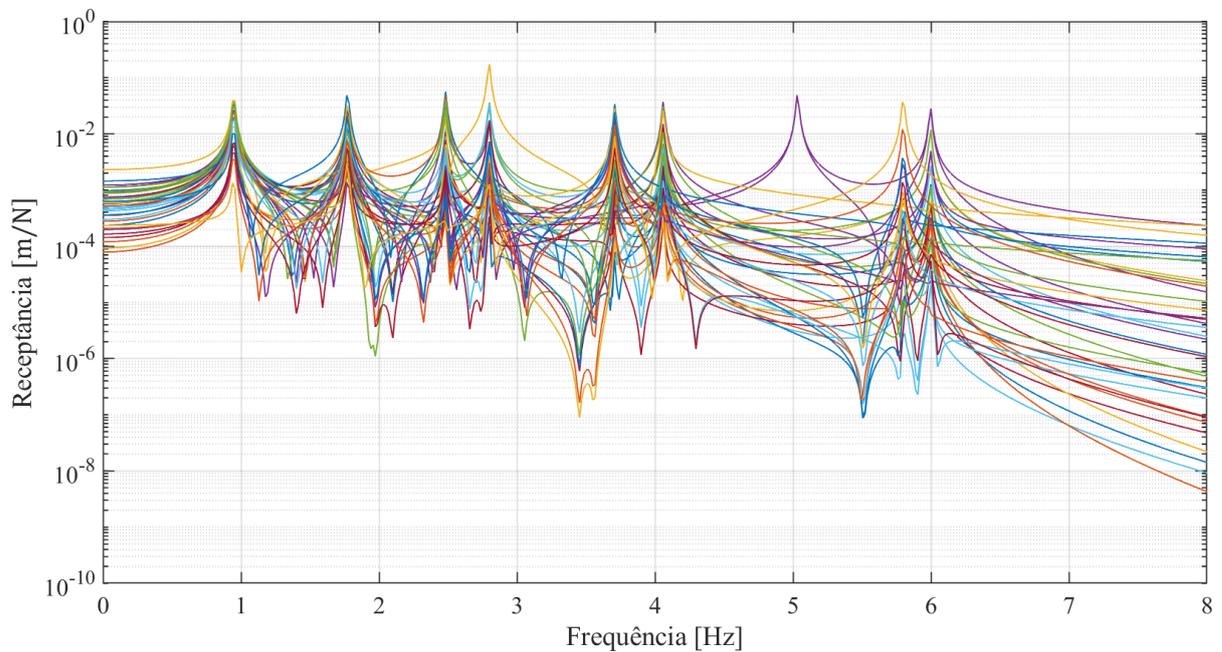


Figura 27 – Funções de Resposta em Frequência da Estrutura AB (Y_{AB}).

Nota-se a existência de sete picos de amplitude no diagrama da Figura 25, que conta com vinte e oito FRFs, sendo estas contidas no triângulo superior da matriz de receptância da

subestrutura A. Devido à propriedade de reciprocidade das funções de resposta em frequência, as componentes abaixo da diagonal principal são omitidas nos diagramas. Em comparação ao desenho da subestrutura A apresentado na Figura 11, vê-se que é a mesma quantidade de graus de liberdade (GDLs), referentes a cada um dos sete deslocamentos u_A , ou seja, todos os modos de vibrar estão contidos na faixa até 8 Hz. As FRFs são obtidas pelo cálculo da inversão da matriz de impedância mecânica, sendo esta, por sua vez, determinada com as matrizes de massa, rigidez e amortecimento.

Da mesma maneira, as quantidades de picos na Figura 26 (quatro picos), referente à subestrutura B, e na Figura 27 (nove picos), referente à estrutura AB, correspondem aos deslocamentos vistos na Figura 11. Como previamente mencionado, esses resultados serão considerados como referência com os quais serão realizadas as comparações.

Nos resultados do subsistema B, Figura 26, tem-se dez curvas retratadas. Para o estudo das técnicas de subestruturação e, especialmente, das técnicas de desacoplamento, escolheu-se apenas uma componente da matriz Y_B , referente aos deslocamentos u_{B_2} e u_{B_3} . Na Figura 28 é mostrado o diagrama de Bode da resposta $Y_B(2,3)$.

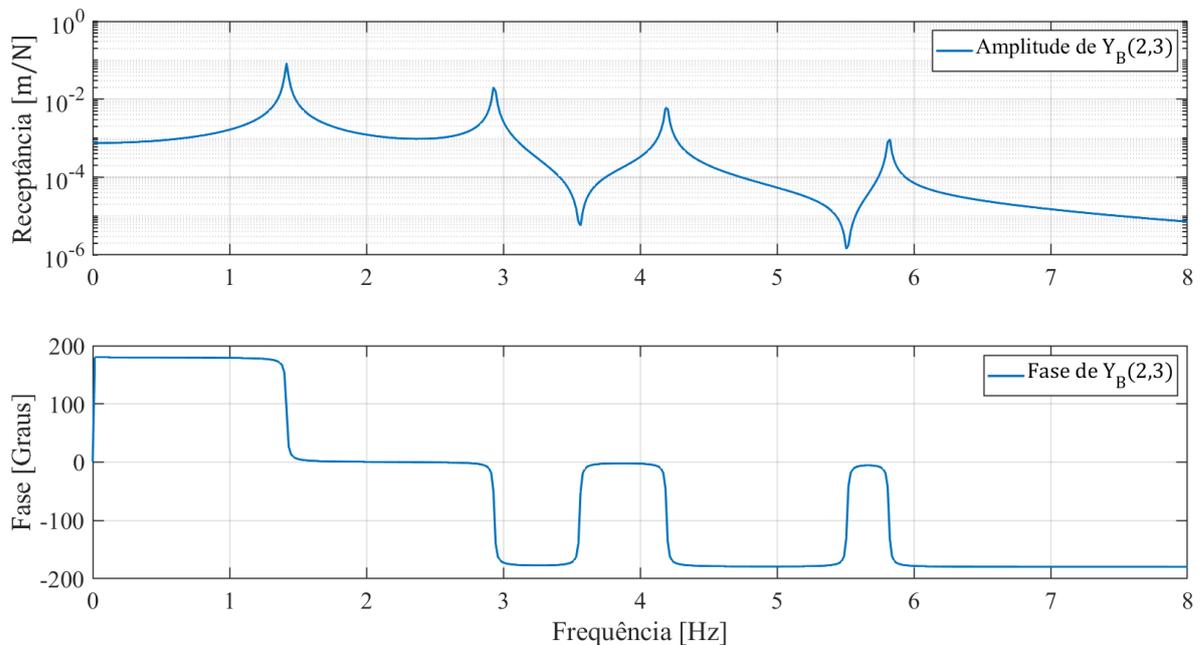


Figura 28 – FRF da subestrutura B na posição (2,3).

Para verificação, foram determinadas as frequências naturais dos sistemas usando o cálculo de autovalores. Com a função *eig* do *Matlab* foram obtidas as frequências apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11 – Frequências naturais do sistema mecânico massa-mola da Figura 11.

Subsistema A	Subsistema B	Sistema AB
Frequências Naturais [Hz]	Frequências Naturais [Hz]	Frequências Naturais [Hz]
0,69	1,42	0,95
1,38	2,93	1,77
2,26	4,19	2,48
3,01	5,82	2,80
4,15		3,71
5,03		4,06
6,00		5,03
		5,80
		6,00

Os picos nos diagramas da Figura 25, da Figura 26 e da Figura 27 coincidem com as frequências estimadas da Tabela 11.

Dando continuidade, obtiveram-se os resultados de desacoplamento da subestrutura B com o uso das matrizes completas Y_A e Y_{AB} e da Equação (38). Para tanto, é preciso definir as matrizes booleanas de acordo com os métodos apresentados. Não são consideradas excitações externas aplicadas aos nós internos de A e as excitações externas em B são representadas por componentes unitárias no vetor f^{AB} nas posições dos nós internos ao subsistema B.

O desacoplamento do subsistema B da Figura 11 foi realizado com os quatro métodos apresentados na seção 3.6. Destaca-se que os nós de interface correspondentes (pares) são considerados como um único nó, sendo que isso influencia diretamente nas dimensões das matrizes booleanas. Para o sistema em questão, tem-se: a nós internos à subestrutura A, b nós internos à subestrutura B e c nós de interface, com $a = 5$, $b = 2$ e $c = 2$. Os resultados para cada método são abordados separadamente.

5.1.1 Desacoplamento com Método Padrão

No método Padrão, que é colocado, são utilizados somente os graus de liberdade dos nós de interface para ambas as condições de interface. Isso significa que os graus de liberdade relativos aos deslocamentos u_{A_6} e u_{B_1} devem respeitar os requisitos de compatibilidade e equilíbrio, também como u_{A_7} e u_{B_2} . Na Figura 29, tem-se o diagrama de Bode da componente $Y_B(2,3)$ tanto original quanto obtida por desacoplamento com o método Padrão.

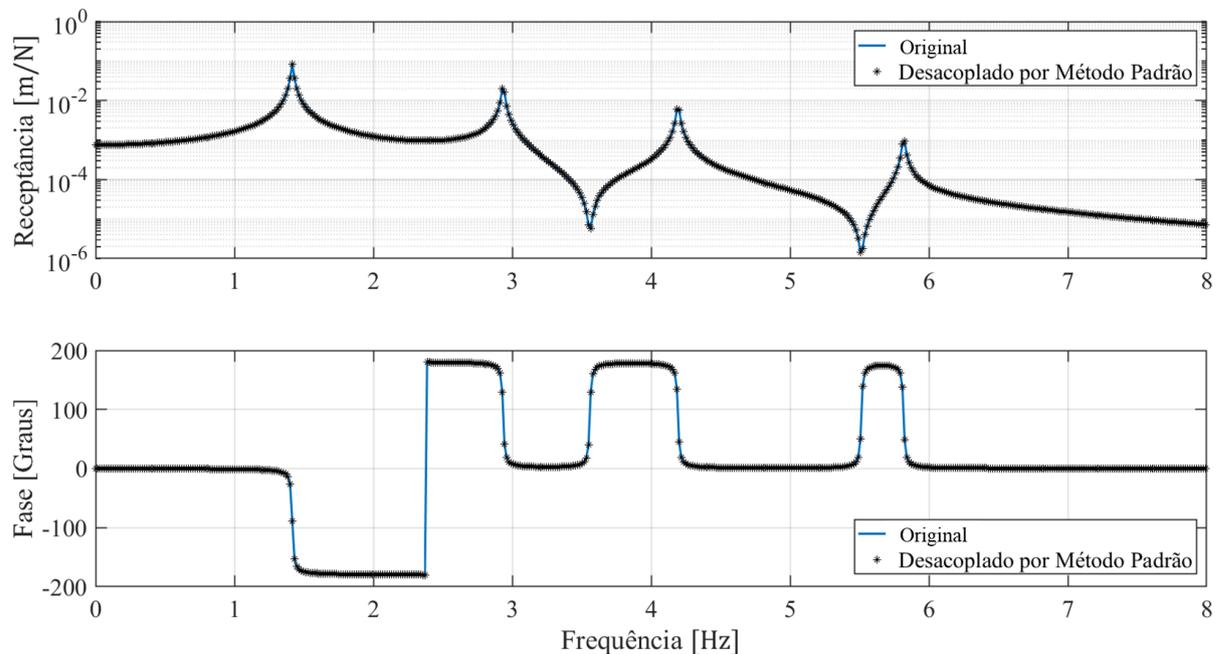


Figura 29 – $Y_B(2,3)$ original e desacoplada pelo método Padrão.

O erro relativo, calculado ponto a ponto tanto para a amplitude quanto para a fase, é apresentado na Figura 30. O cálculo do erro é feito pela razão entre a diferença e o valor original. A diferença, por sua vez, é dada entre o valor original e o valor estimado.

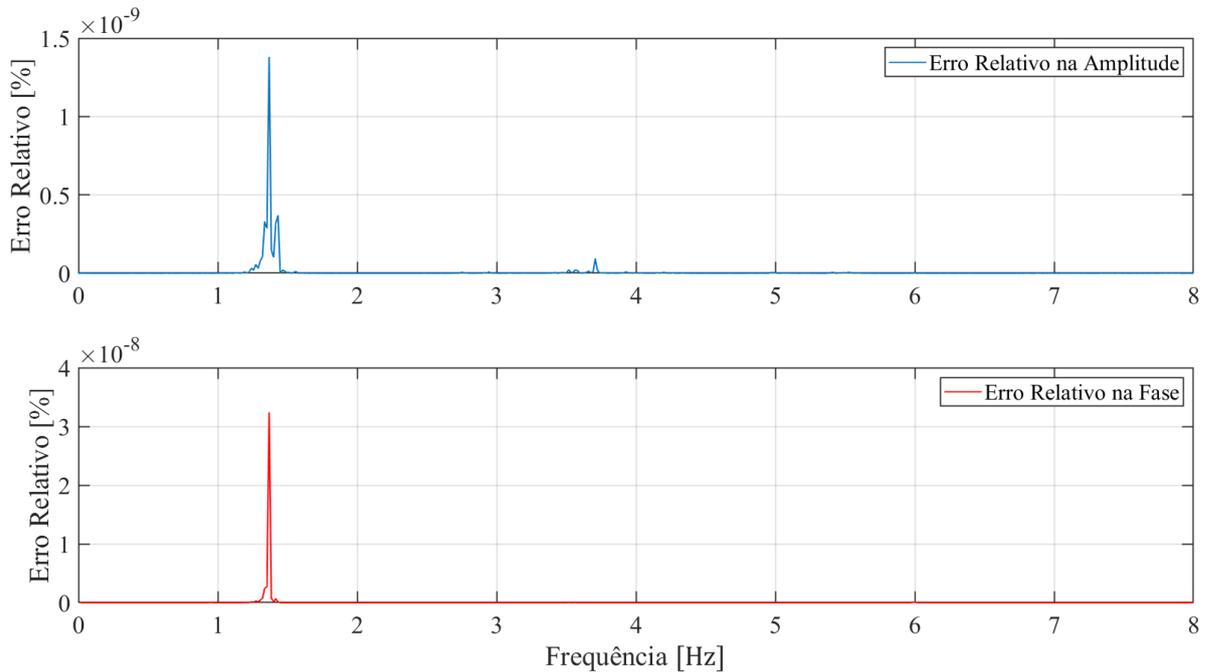


Figura 30 – Erros relativos em amplitude e fase de $Y_B(2,3)$ com o método Padrão.

Com base nos diagramas de Bode apresentados na Figura 29 e com os gráficos que mostram os erros relativos da Figura 30, observa-se que o método Padrão fornece resultados com erros muito baixos para o sistema massa-mola. Tendo em vista que os erros relativos para a amplitude e para a fase permaneceram próximos a zero, conclui-se que os erros numéricos decorrentes do cálculo computacional de desacoplamento são pequenos. É preciso lembrar, no entanto, que os dados utilizados não possuem ruído ou qualquer outro tipo de erro de medição.

Em seguida, o método de Interface Estendida é discutido. Esse, por sua vez, requer que seja levada em consideração a presença ou não de ruídos devido ao efeito de redundâncias.

5.1.2 Desacoplamento com Método de Interface Estendida

Neste método, todos os nós da subestrutura A (internos e de interface) são utilizados ao escrever as condições de equilíbrio e de compatibilidade, o que justifica o método ser do tipo colocado. As dimensões das matrizes booleanas diferem em relação às utilizadas no método anterior, mas a resposta \mathbf{Y}^{AB} permanece com a mesma dimensão, o que indica que mais

variáveis são consideradas para determinar a resposta \mathbf{u} . A seguir, na Figura 31, tem-se o diagrama de Bode, e o diagrama com os erros relativos na Figura 32.

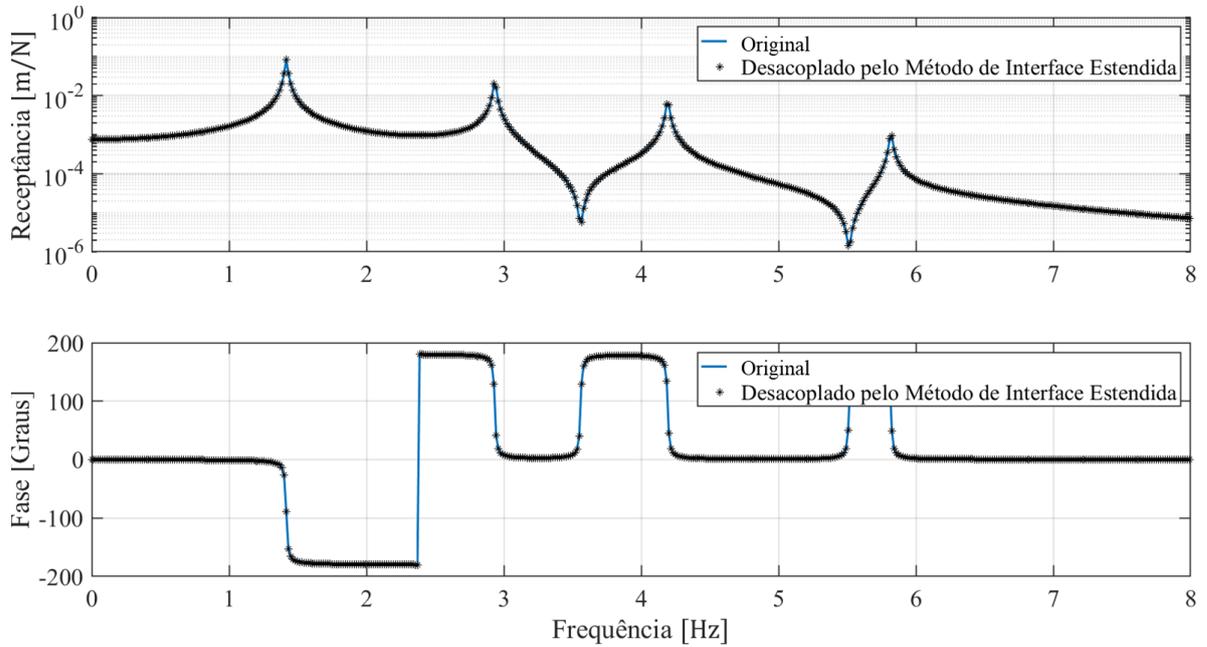


Figura 31 – $Y_B(2,3)$ original e desacoplada pelo método de Interface Estendida.

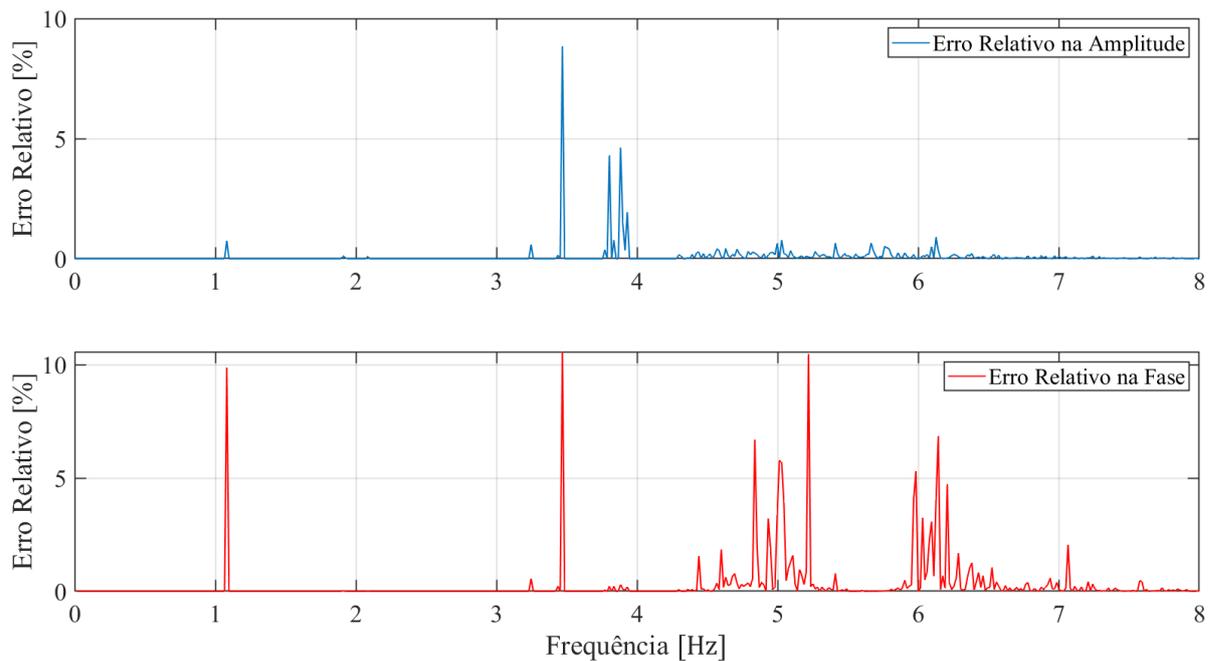


Figura 32 – Erros relativos em amplitude e fase de $Y_B(2,3)$ com o método Interface Estendida.

Pela análise do erro, veem-se valores de 10% tanto para a amplitude quanto para a fase. Tem-se uma inversão de matriz singular devido aos multiplicadores de Lagrange redundantes que tornam a matriz mal condicionada (colunas com valores iguais). Assim, empregou-se a decomposição em valores singulares através da inversa de Moore-Penrose (pseudoinversa). Em comparação aos erros obtidos com a função de inversão padrão do *Matlab* (decomposição LU), que são de 1000% para a amplitude e de mais de 100000% para a fase, mostra-se que de fato os erros numéricos são relativamente pequenos, o que contribui para a singularidade. Mostra-se, ainda, que a utilização da pseudoinversa apenas atenua os efeitos dessas singularidades.

5.1.3 Desacoplamento com Método Superdeterminado

No método Superdeterminado, não colocado, apenas os nós da interface são utilizados para a condição de equilíbrio, entretanto são utilizados tanto os internos ao subsistema A como os da interface para a compatibilidade. Desse modo, as matrizes booleanas para cada condição diferem entre si. O diagrama de bode é mostrado na Figura 33 e os erros relativos na Figura 34.

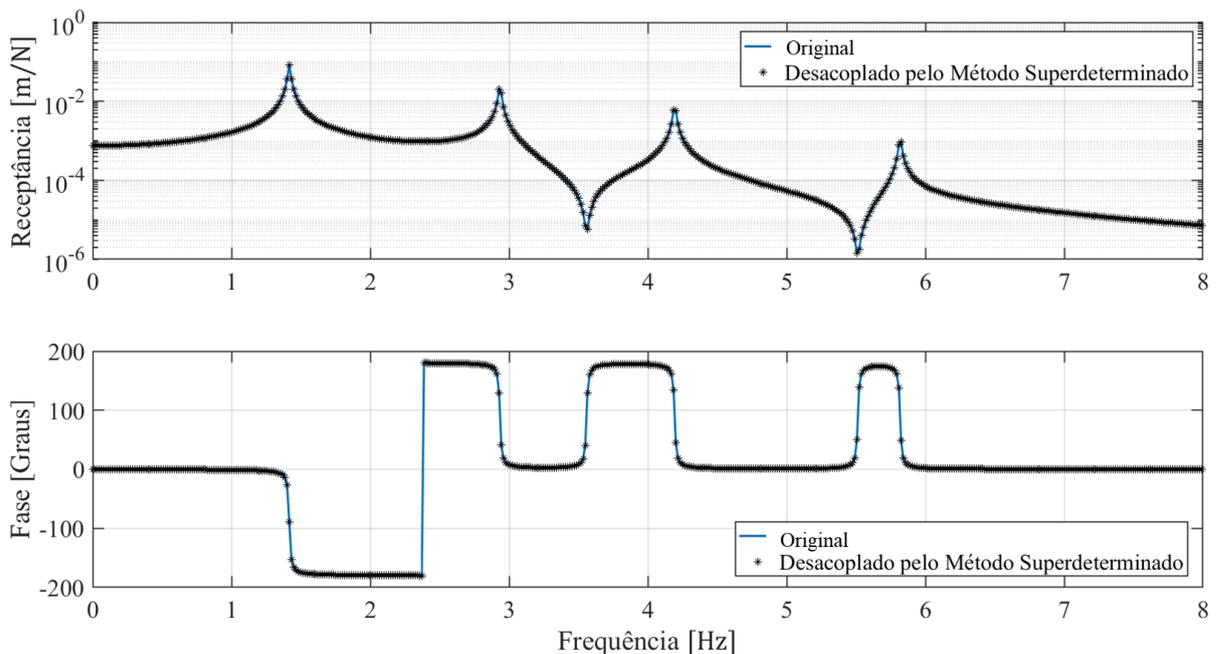


Figura 33 – $Y_B(2,3)$ original e desacoplada pelo método Superdeterminado.

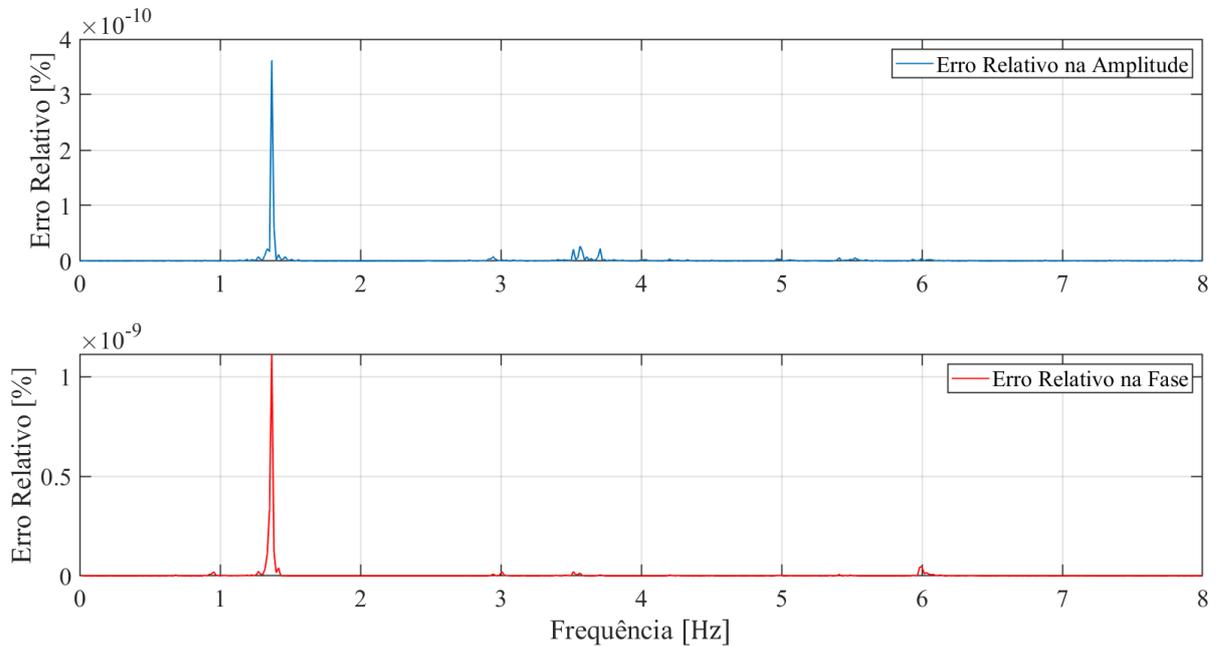


Figura 34 – Erros relativos em amplitude e fase de $Y_B(2,3)$ com o método Superdeterminado.

Os resultados para o método Superdeterminado sugerem que sua exatidão é ainda maior que a verificada com o método Padrão. De fato, os maiores valores de erro relativos vistos são cerca de dez vezes menores tanto para a fase quanto para a amplitude. Portanto, a Figura 34 assegura que o método é eficiente.

É interessante notar que a solução considera a determinação dos multiplicadores de Lagrange via mínimos quadrados. Dessa forma, as normas das incompatibilidades são minimizadas para todos os graus de liberdade da subestrutura A, o que reflete em melhores resultados para os graus de liberdade de B.

5.1.4 Desacoplamento com Método Interno

Por fim, o método Interno foi utilizado. Por ser não colocado, as matrizes booleanas também diferem entre cada uma das condições de interface. Neste caso, somente os deslocamentos $u_{A_6} = u_{B_1}$ e $u_{A_7} = u_{B_2}$ são empregados na compatibilidade, enquanto u_{A_1} a u_{A_5} são usados para o equilíbrio. Isso significa que são aplicados esforços em A tais que satisfazem

a compatibilidade na interface. Adiante estão o diagrama de Bode, Figura 35, e os diagramas de erros relativos, Figura 36.

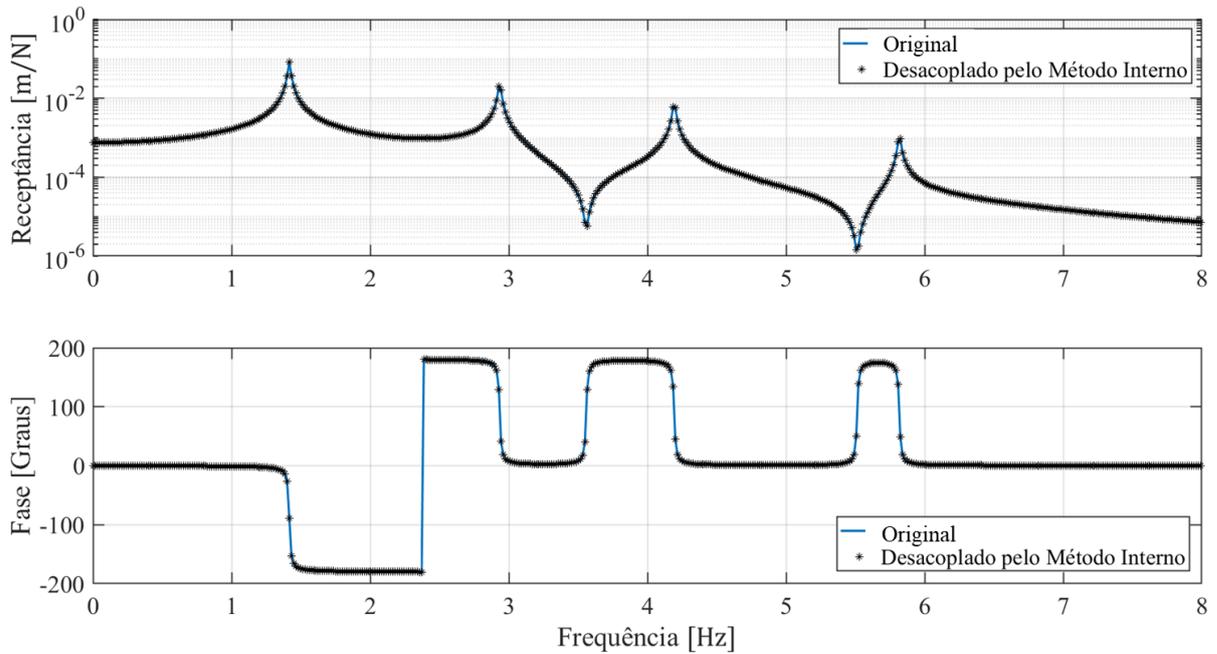


Figura 35 – $Y_B(2,3)$ original e desacoplada pelo método Interno.

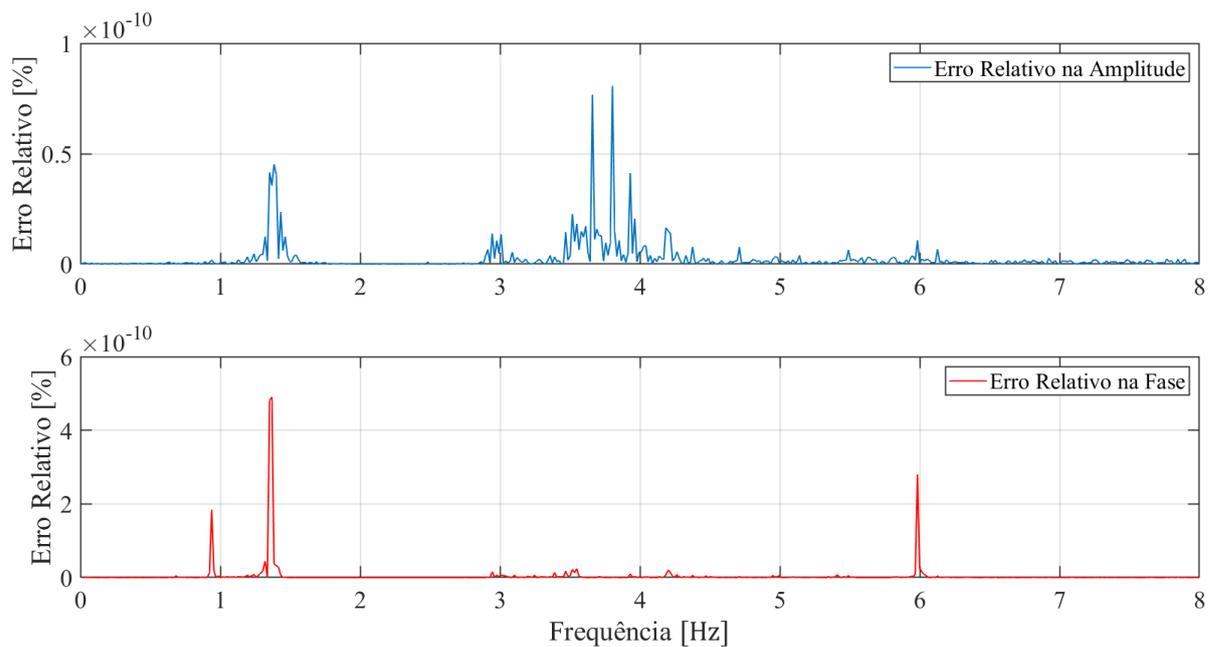


Figura 36 – Erros relativos na amplitude e na fase de $Y_B(2,3)$ com método Interno.

O método interno, por sua vez, também foi capaz de gerar a função de resposta em frequência (amplitude e fase) desacoplada condizente com a obtida a partir do modelo de referência. A ressalva em sua utilização se dá na exigência de que os nós de interface de A precisam ser controláveis de seus nós internos, o que não ocorre sempre em situações práticas.

A última atividade realizada no sistema da Figura 11 foi o acoplamento das subestruturas A e B e a verificação dos resultados com os valores de referência. Para o acoplamento, foram utilizadas as Equações (29) e (30) na determinação de \hat{Y}_{AB} , ou seja, a matriz de receptância obtida por acoplamento com os nós de interface repetidos devidamente removidos.

A matriz booleana \mathbf{B} deve relacionar quais nós são conectados, de maneira que se tem uma matriz de duas linhas (quantidade de pontos de conexão) e onze colunas (quantidade global de graus de liberdade). Vale lembrar que as linhas e colunas da matriz Y_{AB} referentes aos deslocamentos u_{A_6} e u_{B_1} , assim como os referentes a u_{A_7} e u_{B_2} são respectivamente idênticas.

Na Figura 37, tem-se o diagrama de Bode da componente $Y_{AB}(1,1)$ do sistema AB, relativa ao nó de deslocamento u_{A_1} . Os erros relativos máximos encontrados no acoplamento foram de $6,38 \cdot 10^{-12}$ para a amplitude e $4,16 \cdot 10^{-11}$ para a fase.

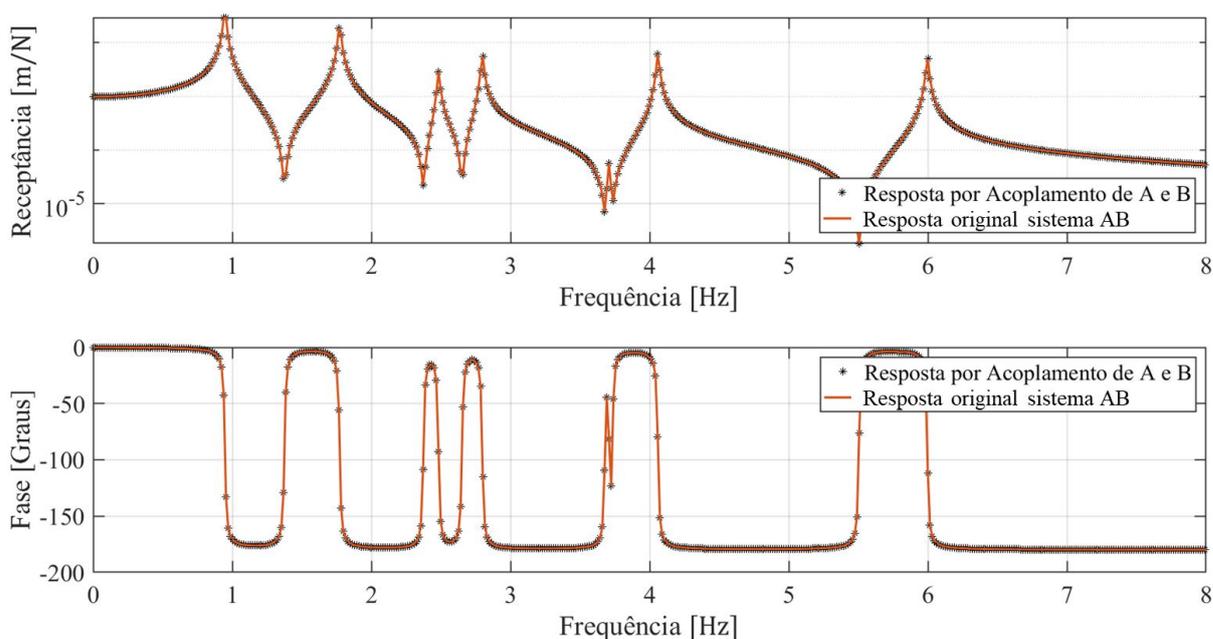


Figura 37 – Comparação entre resposta original e resposta acoplada da componente $Y_{AB}(1,1)$.

As outras componentes da matriz Y_{AB} também foram comparadas às respostas de referência mostradas na Figura 27 e constatou-se que igualmente coincidem.

5.2 Subestruturação e Análise Modal do Segundo Sistema de Referência

Após o estudo dos métodos de desacoplamento e aplicação do acoplamento simples, iniciaram-se as análises pertinentes ao acoplamento de mais de duas (múltiplas) subestruturas e às técnicas de análise modal com estimação de parâmetros modais pelo LSCE e reconstituição de matrizes de funções de resposta em frequência (FRFs). O segundo sistema mecânico massa-mola utilizado nesta etapa é mostrado na Figura 12, também como o acoplamento entre as subestruturas A, B e C é mostrado na Figura 14. Os parâmetros físicos estão dispostos na Tabela 3 e os nós classificados em internos e de interface são $a = 6$, $b = 1$ e $c = 1$.

Os diagramas de Bode serão omitidos pois são similares aos apresentados no tópico 5.1. Assim, decidiu-se pela determinação somente das frequências naturais pela função *eig* do *Matlab*. Os valores da Tabela 12 são da subestrutura A, da subestrutura B, do sistema AB da Figura 12 e do sistema ABC da Figura 14.

Tabela 12 – Frequências naturais do segundo sistema mecânico massa-mola.

Subsistema A	Subsistema B	Sistema AB	Sistema ABC
Frequências Naturais	Frequências Naturais	Frequências Naturais	Frequências Naturais
[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]
0,69	1,80	0,92	1,07
1,54	6,31	1,56	1,71
2,44		2,20	2,20
3,30		3,24	3,08
4,01		3,92	3,89
5,03		5,03	5,03
6,39		6,25	6,25
		6,39	6,27
			6,39

Notam-se alterações nas frequências de A e B resultantes das alterações nas massas e rigidezes das subestruturas.

A partir das respostas Y_A e Y_{AB} modeladas (originais) para A e AB, foram isoladas apenas a terceira linha de Y_A , relativa ao deslocamento u_{A_3} , e a segunda linha de Y_{AB} , relativa ao deslocamento u_{A_2} , vistos na Figura 12. A escolha dessas linhas se deu após verificar-se que todos os modos do sistema são representados com maior magnitude em relação às outras linhas, o que reduz o erro numérico computacional. Em outras palavras, foram analisados os diagramas de Bode para todas as linhas das matrizes e os picos de ressonância de cada diagrama foram comparados às frequências da Tabela 12, de forma que as linhas escolhidas são as que melhor representam os modos de cada sistema. Assim, tem-se uma matriz de apenas uma linha e sete colunas para o subsistema A e outra matriz de uma linha e oito colunas para o sistema AB. Isto posto, foi aplicado o algoritmo de estimação de parâmetros modais baseado no LSCE da maneira como foi apresentada na Figura 13.

Na Tabela 13 podem ser vistos os parâmetros de simulação determinados para a estimação dos parâmetros modais pelo LSCE.

Tabela 13 – Parâmetros de simulação para utilização do LSCE.

	Subestrutura A	Estrutura AB
Frequência de amostragem	100 Hz	100 Hz
Ordem de aproximação	20	30
Faixa de frequências de análise/interesse	0 a 15 Hz	0 a 15 Hz
Frequências naturais próximas	Apresentadas na Tabela 12	Apresentadas na Tabela 12
Ponto de excitação	Coluna 3 (u_{A_3})	Coluna 2 (u_{A_2})

Vê-se que a frequência de amostragem, que define a máxima frequência do diagrama, é suficientemente alta para ambas as simulações. Para a ordem de aproximação, que representa a ordem do polinômio de Prony da Equação (46), utilizou-se um valor cerca de três vezes maior

que a quantidade N de graus de liberdade de cada sistema. Para as faixas de frequências de interesse, foi verificado que um limite de 15 Hz abrangeria todos os modos presentes.

Em relação às frequências naturais de modos físicos, a função *modalfit* do *Matlab* as utiliza como facilitadoras na estimação dos parâmetros modais. No caso dos sistemas massa-mola, dos quais são conhecidas as frequências naturais, as mesmas são facilmente fornecidas ao algoritmo. Por fim, os pontos de excitação (*driving points*) são definidos na coluna de mesmo número da linha anteriormente escolhida. Em outras palavras, como a segunda linha foi escolhida em Y_{AB} , o ponto de excitação é definido na segunda coluna, sendo o mesmo feito para a terceira linha e a terceira coluna de Y_A .

As frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para A e AB estão dispostos na Tabela 14. Os modos não são mostrados devido à grande quantidade, embora tenham sido calculados. Vê-se que, para um arredondamento de centésimos, as frequências estimadas são idênticas às frequências originais.

Tabela 14 – Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados pelo LSCE.

Subsistema A		Sistema AB	
Frequências Naturais [Hz]	Fatores de Amortecimento	Frequências Naturais [Hz]	Fatores de Amortecimento
0,69	0,0114	0,92	0,0087
1,54	0,0052	1,56	0,0051
2,44	0,0033	2,20	0,0036
3,30	0,0024	3,24	0,0025
4,01	0,0020	3,92	0,0020
5,03	0,0016	5,03	0,0016
6,39	0,0012	6,25	0,0012
		6,39	0,0012

Com esses parâmetros modais determinados, os polos complexos (frequências naturais complexas) foram calculados pela Equação (50), permitindo a síntese das funções de resposta em frequência (FRFs) pela Equação (53). Na Figura 38 estão as FRFs da terceira linha da matriz de receptância do subsistema A, tanto as originais quanto as sintetizadas.

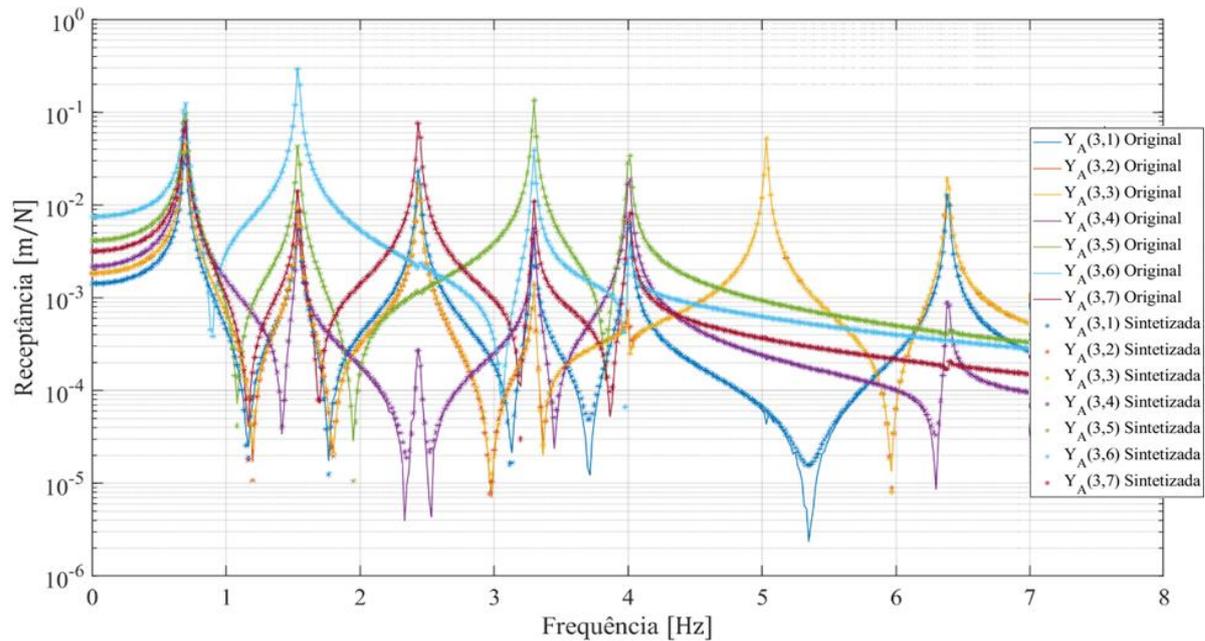


Figura 38 – FRFs originais e sintetizadas da subestrutura A: componentes da terceira linha.

As FRFs sintetizadas e as curvas originais possuem boa concordância, embora não sejam idênticas uma vez que se utiliza apenas uma linha da matriz de FRFs na análise modal. Na Figura 39, tem-se as FRFs da linha dois da matriz de receptância do sistema AB.

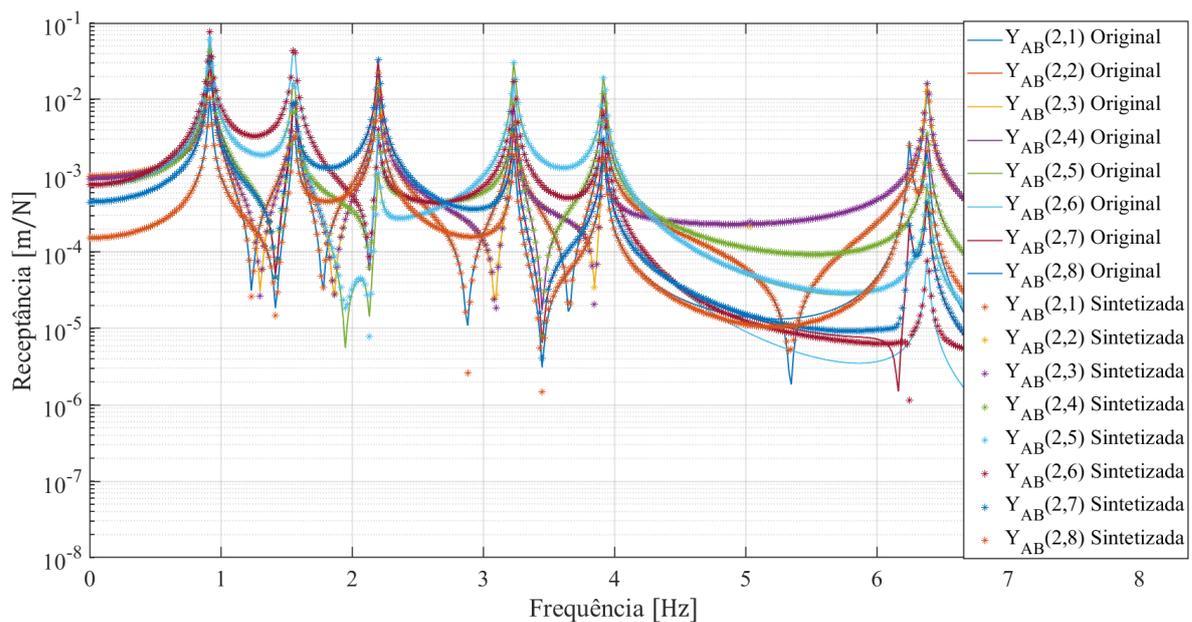


Figura 39 – FRFs originais e sintetizadas da estrutura AB: componentes da segunda linha.

Foi identificado que o pico de ressonância de uma das frequências do sistema AB não está presente no diagrama, tanto nas curvas originais pelo modelo de referência quanto nas sintetizadas. Em uma análise mais detalhada, foi constatado que essa frequência, 5,03 Hz, apesar de ter sido estimada numericamente pelo LSCE, como exposto na Tabela 14, não aparece nas FRFs dessa linha da matriz de receptâncias. Vale ressaltar que, embora sejam apresentadas apenas essas duas linhas de FRFs, as matrizes reconstituídas são completas, ou seja, não há perda de informação sobre nenhum modo do sistema.

Dessa forma, em posse das matrizes completas, realizou-se normalmente o desacoplamento da subestrutura B de dois GDLs. Para tanto, foram utilizados os quatro métodos de desacoplamento. Na Tabela 15 são mostrados os resultados para as frequências naturais estimadas pelo LSCE por cada um dos métodos de desacoplamento, assim como são indicados os erros relativos em relação aos valores de referência das frequências. A simulação utilizou os mesmos parâmetros da Tabela 13.

Tabela 15 – Frequências naturais presentes nas FRFs desacopladas da subestrutura B.

Frequências Naturais [Hz] e Erros Relativos [%]				
Referência	Padrão	Interface Estendida	Superdeterminado	Interno
1,79	1,56 (13,20%)	1,59 (11,25%)	1,73 (3,70%)	1,67 (6,84%)
6,31	6,25 (0,95%)	6,26 (0,96%)	6,25 (0,96%)	6,25 (0,96%)

O método Superdeterminado apresentou o menor erro relativo para a primeira frequência natural da subestrutura B, o que havia sido verificado na seção anterior. Essa avaliação não se estendeu aos fatores de amortecimento e aos modos de vibrar.

Na Figura 40, são apresentadas as FRFs do triângulo superior da matriz de receptância da subestrutura B desacoplada pelo método Superdeterminado, também como as curvas originais.

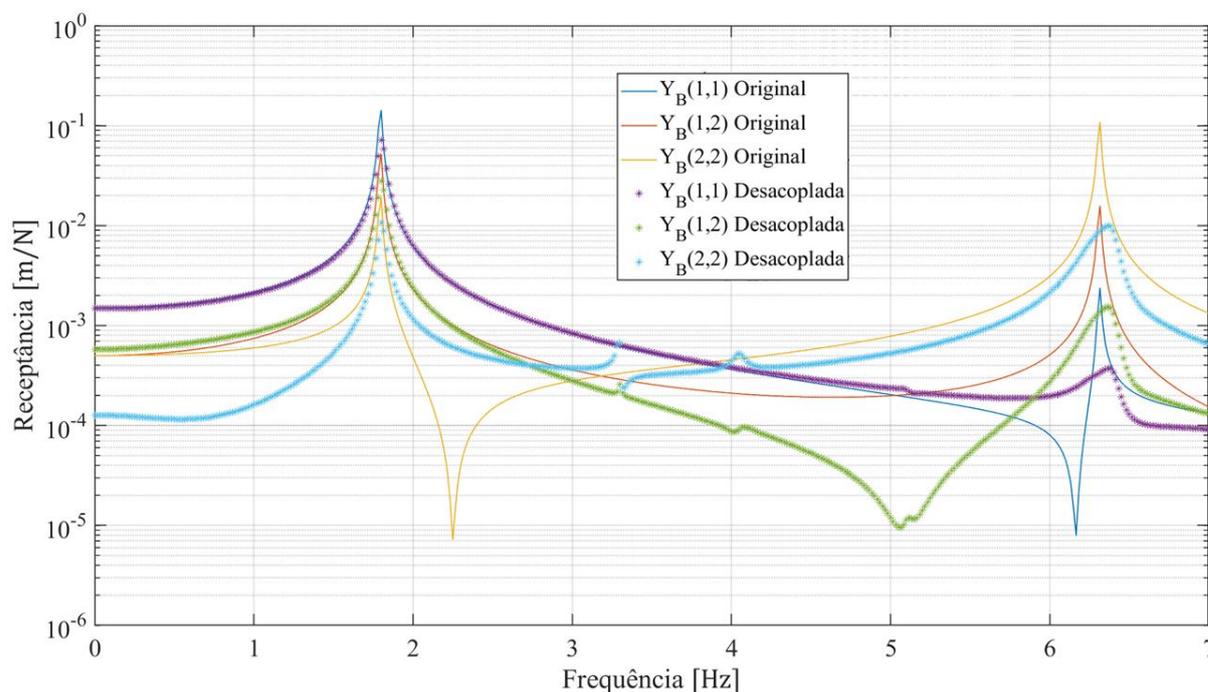


Figura 40 – FRFs da subestrutura B de 2 GDLs desacoplada com método Superdeterminado.

Vê-se que os picos da segunda frequência natural estimados não coincidem efetivamente no diagrama com as curvas originais. No entanto, os resultados numéricos mostram que o desacoplamento com FRFs sintetizadas tem êxito, embora não produza uma resposta tão boa quanto o desacoplamento com FRFs completas. Como discutido na seção 3.7, a função *modalfit* não calcula os resíduos da análise modal e estes não são utilizados na sintetização, o que pode influenciar diretamente o processo de desacoplamento.

Para finalizar a verificação da formulação, a subestrutura B desacoplada foi duplicada, formando a subestrutura C, e ambas foram acopladas ao subsistema A como mostrado na Figura 14. Com três subestruturas, o algoritmo foi readequado para construir a matriz de blocos correta com as três matrizes de receptância: a matriz sintetizada da subestrutura A ($Y_{A_{LSCF}}$) e as duas matrizes repetidas de B, obtidas por desacoplamento.

Definiram-se três matrizes Booleanas, uma para cada subsistema. A quantidade de linhas de cada matriz é igual à quantidade de pontos de conexão entre os subsistemas. Ainda, os únicos termos não nulos são aqueles relacionados aos nós de deslocamentos u_{A_7} , u_{B_1} , u_{A_6} e u_{C_1} . Isto posto, foi realizado o acoplamento e o diagrama foi comparado ao da resposta obtida pela modelagem do sistema ABC via matrizes de massa e rigidez. Vale ressaltar que a Equação (30)

foi empregada para eliminar as linhas e colunas repetidas ao final do acoplamento e obter-se a matriz \hat{Y}_{ABC} . O resultado é exibido na Figura 41 para as funções de resposta em frequência da quarta linha do triângulo superior da matriz \hat{Y}_{ABC} .

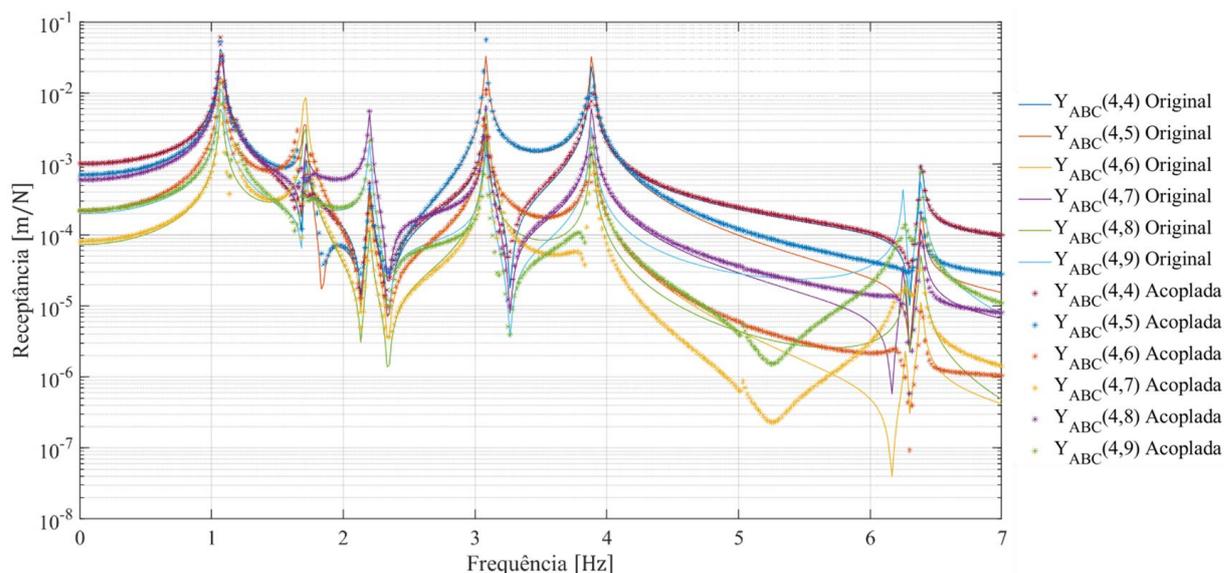


Figura 41 – FRFs do sistema ABC obtidas por acoplamento duplo.

Para o sistema ABC, a quarta linha também não representa graficamente a frequência de 5,03 Hz. Além disso, as frequências de 6,25 e 6,27 Hz são muito próximas e de difícil distinção. O que se percebeu em uma análise individual de cada FRF sintetizada é que algumas apresentam maior similaridade com as curvas originais em relação do que outras. No entanto, isso não se configura como um problema para a dinâmica do sistema.

Para verificar essa afirmação, a resposta \hat{Y}_{ABC} foi analisada pelo LSCE para a estimação dos parâmetros modais, os quais puderam ser comparados os valores originais dispostos na Tabela 12. A linha escolhida para a simulação foi a terceira, a ordem de aproximação foi definida como 20, a frequência de amostragem manteve-se em 100 Hz e a banda de análise igualmente de 0 a 15 Hz. Os resultados são mostrados na Tabela 16 para as frequências naturais juntamente aos erros relativos calculados com os dados originais do modelo completo da Tabela 12.

Tabela 16 – Frequências naturais estimadas da resposta obtida por acoplamento duplo.

Sistema ABC	
Frequências Naturais Estimadas [Hz]	Erros Relativos [%]
1,07	0,19%
1,75	2,46%
2,20	0,04%
3,08	0,09%
3,90	0,16%
5,03	0,01%
6,25	0,03%
6,25	0,30%
6,39	0,04%

Uma vez que o maior erro relativo encontrado está entre 2% e 3%, entende-se que as informações dinâmicas do sistema ABC estão contidas na quarta linha da matriz \hat{Y}_{ABC} . Sendo esta obtida via matrizes sintetizadas (também desacoplada, no caso do subsistema B), conclui-se que a subestruturação associada à análise modal foi eficaz para os modelos analisados.

5.3 Subestruturação e Análise Modal da Fundação da Bancada Experimental

Os resultados da análise da bancada experimental, obtidos conforme a metodologia apontada no Capítulo 4, seção 4.3, são apresentados e discutidos a seguir.

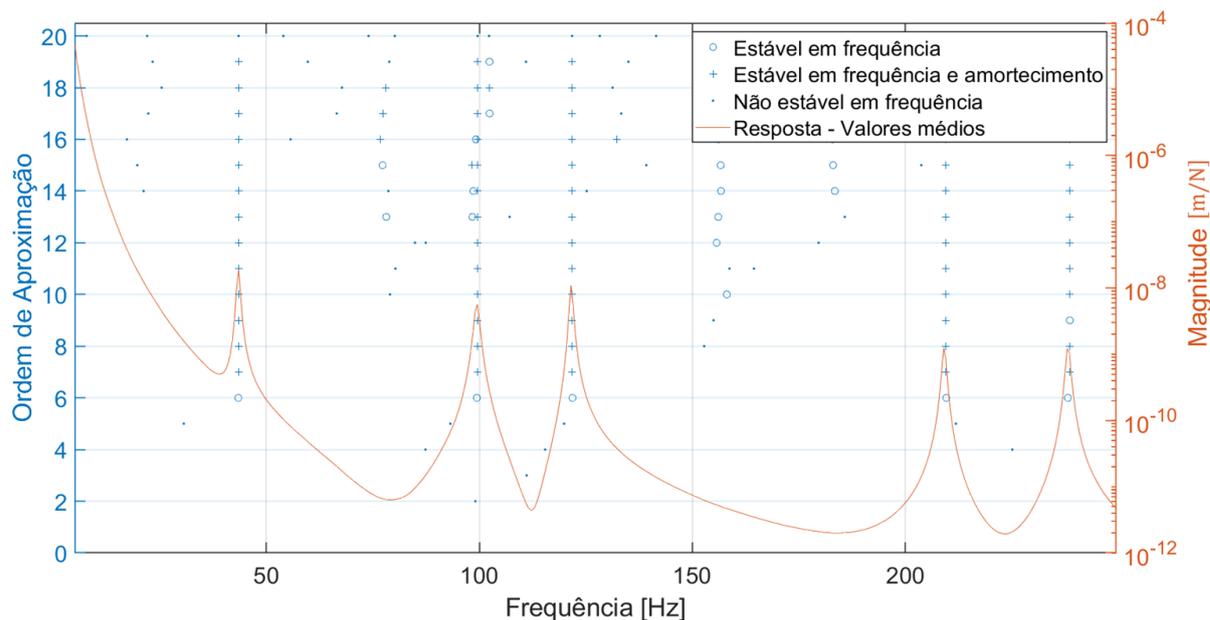
5.3.1 Resultados da Análise Modal da Base Isolada

O primeiro conjunto de nós da Tabela 6 foi utilizado na construção de diagramas de estabilização com diferentes ordens de aproximação e com dados dos nós 13 e 24, que são os nós mais próximos da região de acoplamento que possuem medições. O conjunto possui nove nós de excitação, três em cada direção, sendo cinco nós internos à base e quatro de interface.

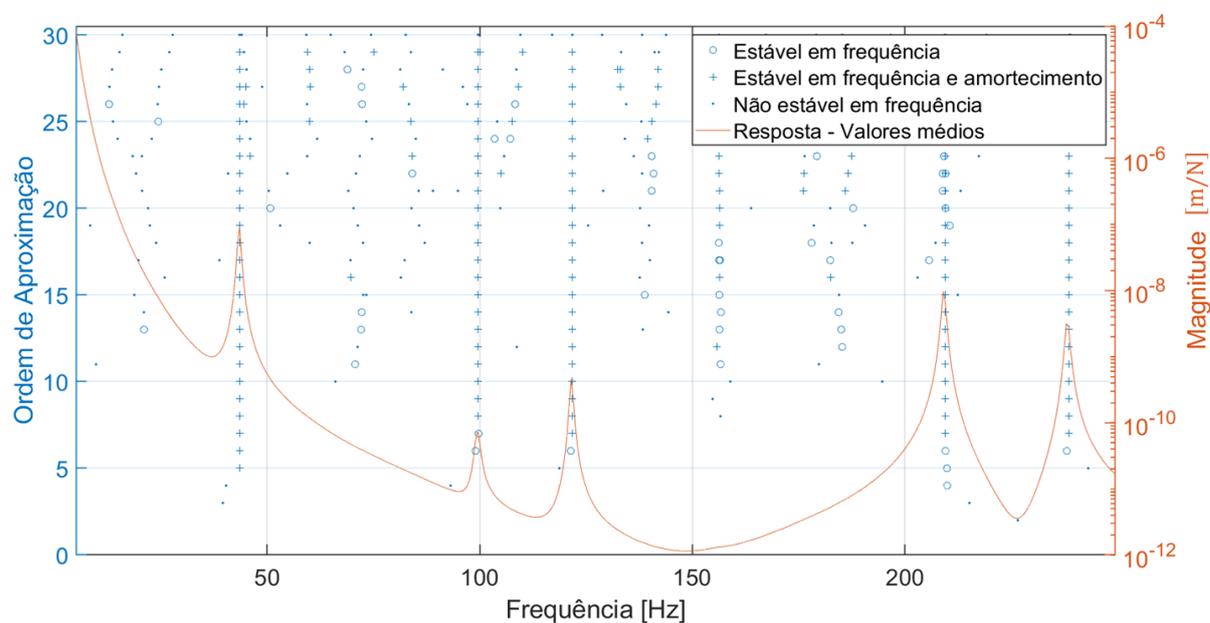
Foram construídos e analisados seis diagramas de estabilização: 1) ordem 30 e dados do nó 13, 2) ordem 30 e dados do nó 24, 3) ordem 20 e dados do nó 13, 4) ordem 20 e dados do nó 24, 5) ordem 10 e dados no nó 13 e, finalmente, 6) ordem 10 e dados do nó 24. Vale lembrar a ordem de aproximação é um parâmetro arbitrário definido de maneira que melhor represente todos os modos da subestrutura.

Pela observação dos diagramas e dos resultados numéricos associados, viu-se que, entre as ordens de aproximação simuladas, a ordem 20 traz modos estáveis mais definidos que os observados para a ordem 10 ao mesmo tempo em que não gera modos espúrios como se vê para a ordem 30. Ainda, para todos os casos, verificou-se que a utilização dos dados do nó 13 nesse conjunto resulta em picos de ressonância representados com maior amplitude. A Figura 42(a) mostra o diagrama de estabilização construído com dados do nó 13 e ordem 20 e a Figura 42(b) o diagrama construído com os dados do nó 24 e ordem 30.

Verifica-se a maior amplitude em um modo de aproximadamente 100 Hz no diagrama relativo ao nó 13 em comparação ao diagrama do nó 24 e, ainda, a diferença na quantidade de modos espúrios. No diagrama da Figura 42(b), construído com ordem 30, a quantidade de pontos tidos como estáveis prejudica a análise do sistema ao passo em que o diagrama da Figura 42(a) mostra como estáveis apenas cinco picos de ressonância.



a) Diagrama de estabilização de ordem 20 com as respostas médias obtidas no nó 13.



b) Diagrama de estabilização de ordem 30 com as respostas médias obtidas no nó 24.

Figura 42 – Diagramas de estabilização do primeiro conjunto de nós da base isolada.

As médias das frequências naturais identificadas para esses cinco picos de modos físicos na faixa de frequências de 5 a 250 Hz estão dispostas na Tabela 17.

Tabela 17 – Frequências identificadas nos diagramas de estabilização da base isolada.

Frequências naturais [Hz]
43,48
99,59
121,80
209,50
238,62

Tem-se, dessa maneira, que as frequências da Tabela 17 podem ser utilizadas como um filtro de modos numéricos na função *modalfit* do *Matlab*. Além disso, priorizar-se-á a utilização dos dados do acelerômetro do nó 13 e a ordem 20 para as análises posteriores.

Embora os diagramas de estabilização sejam construídos com o LSCE, de maneira que os fatores de amortecimento para a última ordem também são determinados, consideram-se apenas as frequências naturais nessa etapa de filtragem.

Foi identificado pelos resultados das simulações que a frequência de 99,4 Hz não é sempre estimada quando se utilizam os dados do nó 24 e ordens menores que 30. Desse modo, optar pelo nó 13 permite que se empreguem ordens menores nas simulações, o que reduz o custo computacional e a presença dos modos espúrios.

Para confirmar a quantidade de modos na faixa de frequências em análise, foram adicionados os nós 5, 8, 19, 26, 38, 41 e 53 aos nós do primeiro conjunto e obteve-se um novo diagrama de estabilização com ordem 20. Mesmo com nós mais afastados da região de acoplamento, como os nós 5, 8, 38 e 41, observou-se que a quantidade de modos permanece igual a cinco e que, ainda, é desnecessária a utilização de um número excessivo de pontos de excitação.

Em seguida, realizou-se a estimação dos parâmetros modais propriamente ditos através do LSCE. Utilizando o nó 13 como ponto de excitação (à exceção do conjunto sete), as frequências obtidas previamente, ordem de aproximação igual a 20 e todos os conjuntos de nós da Tabela 6, tem-se as frequências naturais e fatores de amortecimento listados na Tabela 18. As médias entre os resultados com todos os conjuntos de nós também são calculadas e apresentadas. Os modos de vibrar, por sua vez, são estimados mas não são apresentados.

Tabela 18 – Frequências naturais e fatores de amortecimentos estimados para a base isolada.

Conjuntos de nós	Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento	Conjuntos de nós	Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
Conjunto 1 13 20 24 51 52 54 61 62 63	43,48	0,0095	Conjunto 2 13 20 51 52 62 63	43,48	0,0094
	99,59	0,0069		99,58	0,0069
	121,77	0,0036		121,77	0,0036
	209,53	0,0025		209,53	0,0025
	238,64	0,0024		238,64	0,0024
Conjunto 3 13 20 52 62	43,48	0,0094	Conjunto 4 13 20	43,48	0,0094
	99,58	0,0069		99,58	0,0069
	121,77	0,0036		121,77	0,0036
	209,53	0,0025		209,52	0,0025
	238,64	0,0024		238,64	0,0024
Conjunto 5 13 19	43,47	0,0093	Conjunto 6 13	43,48	0,0093
	99,58	0,0069		99,58	0,0069
	121,77	0,0036		121,77	0,0035
	209,53	0,0025		209,52	0,0025
	238,64	0,0024		238,64	0,0024
Conjunto 7 20 35	43,47	0,0093	Médias	43,48	0,0094
	99,65	0,0117		99,59	0,0076
	121,76	0,0036		121,77	0,0036
	209,58	0,0026		209,53	0,0025
	238,64	0,0024		238,64	0,0024

Embora a quantidade de nós decresça até o conjunto seis, os parâmetros modais estimados apresentam a mesma precisão. Tem-se assim que, para a base metálica isolada, a utilização apenas do nó 13 é suficiente para que sejam medidos e identificados os cinco modos da base existentes entre 5 e 250 Hz.

O sétimo conjunto, que apresenta um nó de medição afastado da região de acoplamento (35), resultou em parâmetros modais semelhantes apesar da diferença no amortecimento do

modo de 99,65 Hz. O diagrama de estabilização correspondente ao sétimo conjunto pode ser visto na Figura 43.

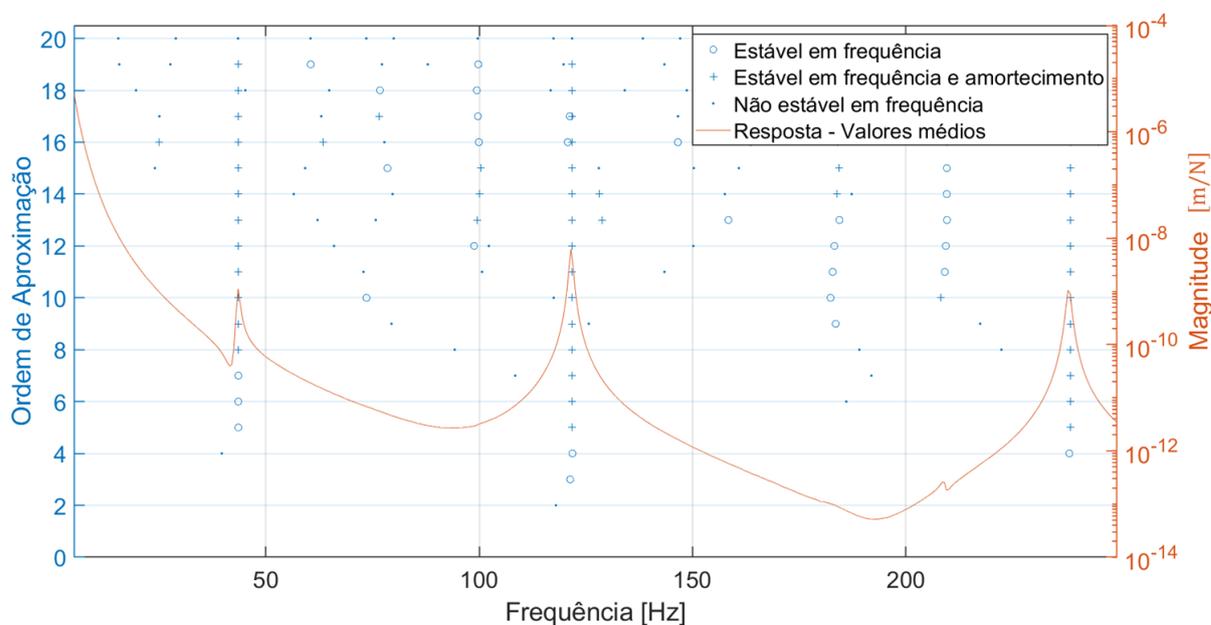
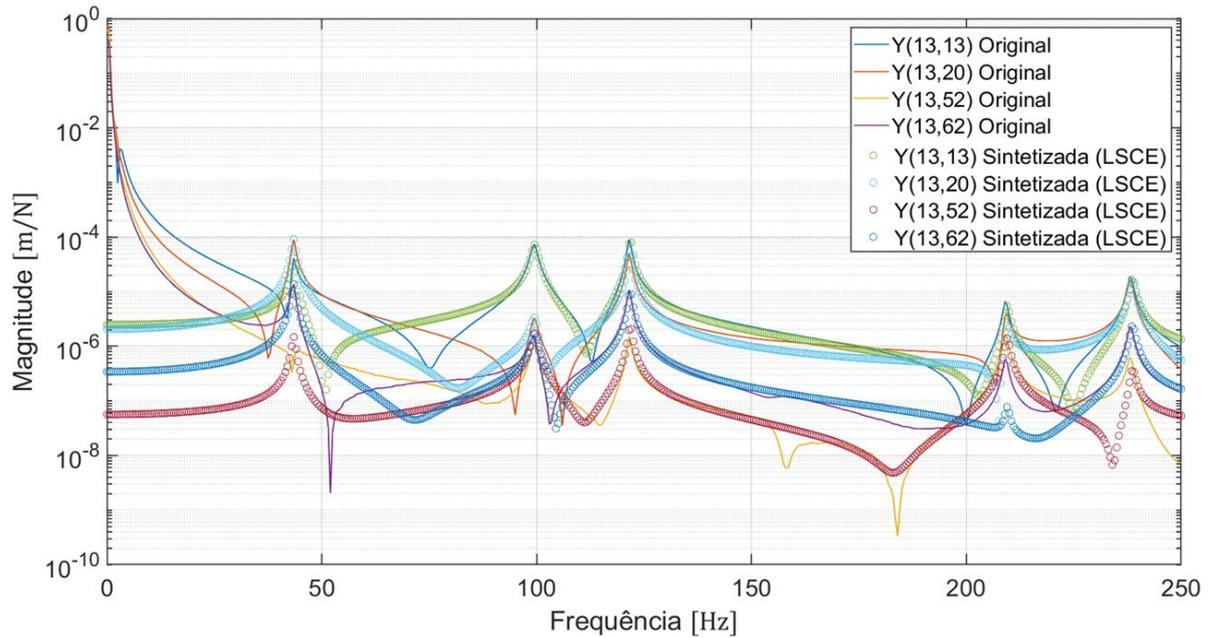


Figura 43 – Diagrama de estabilização do sexto conjunto de nós da base isolada.

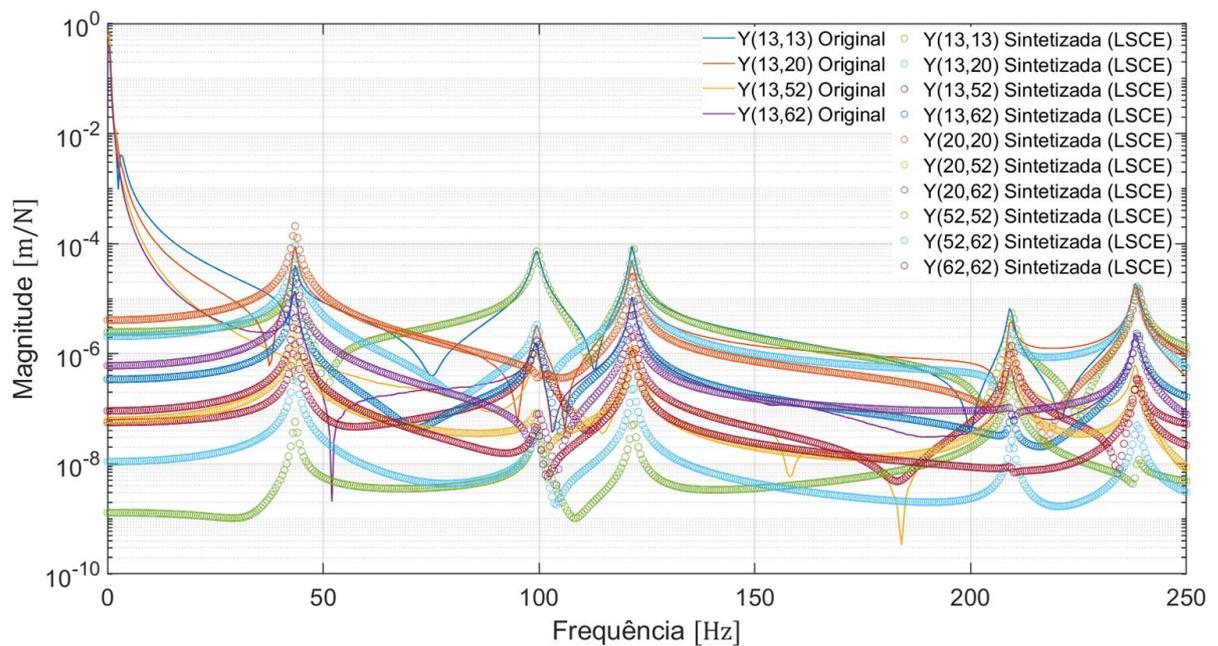
Nota-se que o diagrama apresenta essencialmente apenas três modos: 43,48 Hz, 121,80 Hz e 238,62 Hz. Todavia, verificando os pontos estáveis (em frequência e amortecimento) para ordens próximas a 20, vê-se que em aproximadamente 100 e 210 Hz existe um comportamento que indica a identificação dos dois outros modos restantes. De fato, com o fornecimento das frequências da Tabela 17, o algoritmo estima os parâmetros corretamente.

Entre os conjuntos quatro e cinco, que possuem as mesmas quantidades de nós, foi verificado que os nós 19 e 20 influenciam diferentemente o posterior desacoplamento do pedestal, como será visto.

A etapa seguinte se caracteriza pela síntese das matrizes completas de receptância a partir dos parâmetros modais estimados. A dimensão da matriz reconstituída depende essencialmente da quantidade de nós cujos modos foram estimados. A Figura 44 mostra, para o terceiro conjunto de nós, as curvas originais e sintetizadas. Na Figura 44(a) tem-se a comparação entre as curvas da linha relativa ao nó 13 da matriz de receptância e na Figura 44(b) tem-se também as componentes do triângulo superior da matriz sintetizada.



a) Comparação entre curvas originais e sintetizadas da primeira linha.



b) Componentes originais da primeira linha e componentes sintetizadas do triângulo superior.

Figura 44 – Respostas originais e sintetizadas do terceiro conjunto de nós da base isolada.

Nota-se na Figura 44(a) a elevada similaridade entre as curvas originais e sintetizadas, o que corrobora o processo de reconstituição. Para atestar essa conclusão, as respostas sintetizadas foram submetidas ao algoritmo de identificação de parâmetros modais para verificação dos resultados. Como conclusão, os parâmetros obtidos foram os mesmos independentemente da definição do ponto de excitação ou de qual linha/coluna da matriz sintetizada é escolhida para a simulação: as cinco frequências naturais e fatores de amortecimento são identificados e são próximos aos vistos na Tabela 18.

Em seguida, são apresentados e discutidos os resultados da análise modal da base com uma estrutura de suporte de mancal.

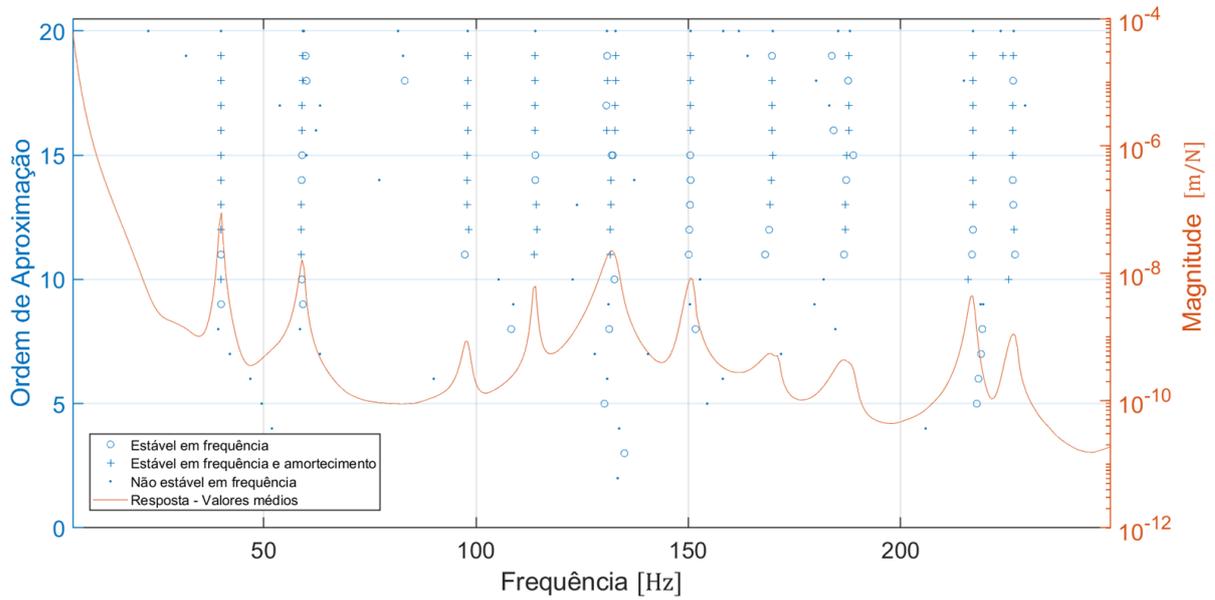
5.3.2 Resultados da Análise Modal da Base com um Pedestal de Mancal

Para a análise modal da base com uma estrutura de suporte de mancal, tem-se os conjuntos de nós adicionais definidos na Tabela 8. Esses nós, internos à subestrutura B (pedestal), são utilizados juntamente aos da Tabela 6, ou seja, entende-se que um conjunto de nós da Tabela 8 se associa ao conjunto de mesmo número da Tabela 6. Nesta etapa, foi possível comparar as frequências naturais e fatores de amortecimento estimados com os resultados apresentados por Martin (2020).

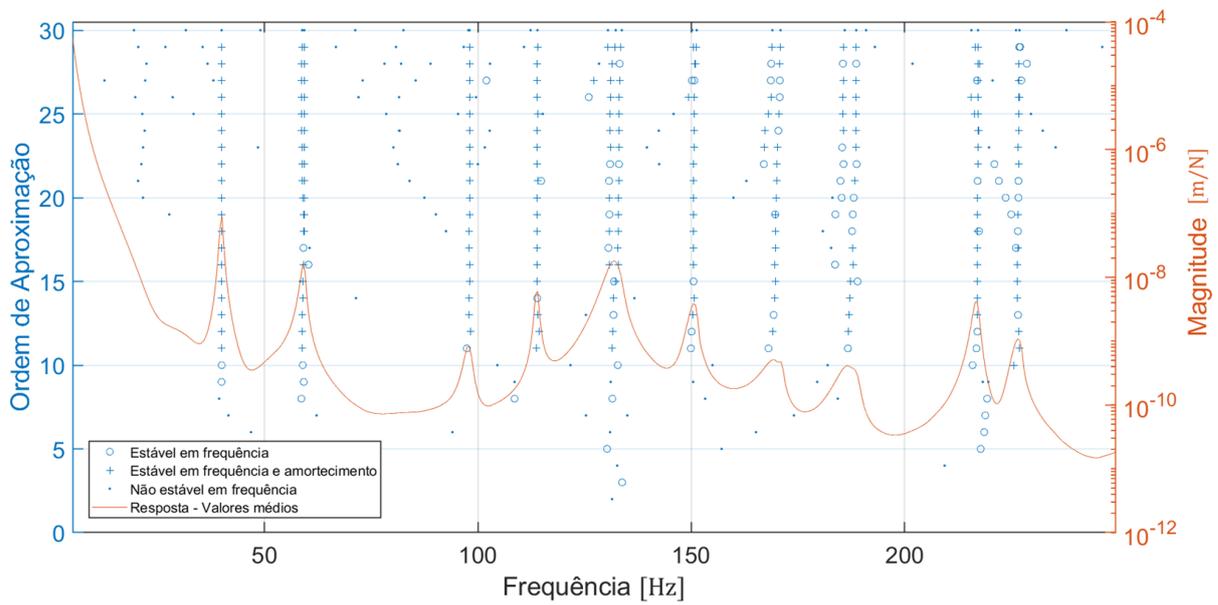
O primeiro conjunto foi utilizado para a definição da ordem de aproximação e dos nós cujos dados são melhor representados. Para tanto, fez-se a comparação dos diagramas de estabilização com os dados dos nós 94, 103, 134, 147 e 151 e para as ordens 20 e 30. Os dados dos nós 16 e 113 não foram considerados pois são, respectivamente, um nó interno à base e outro de interface.

Entre os diagramas de todos os nós, os do 147 apresentam dez picos de ressonância (dez modos) bem definidos. Os nós 94, 103 e 134 apresentam, em seus respectivos diagramas, alguns modos não muito bem definidos, especialmente os dos nós 103 e 134. Por fim, os diagramas do nó 151 não mostram o último pico, de modo que se utilizará o nó 147 para a análise modal subsequente. A Figura 45 traz os diagramas do nó 147 para as ordens a) 20 e b) 30.

Constata-se novamente que a ordem de aproximação 30 resulta em vários pontos considerados como estáveis e que podem prejudicar a filtragem manual dos modos físicos.



a) Diagrama de estabilização de ordem 20 com as respostas médias obtidas no nó 147.



b) Diagrama de estabilização de ordem 30 com as respostas médias obtidas no nó 147.

Figura 45 – Diagramas de estabilização (ordens 20 e 30) do nó 147: base com um pedestal.

As médias das frequências identificadas nos diagramas são apresentadas na Tabela 19.

Tabela 19 – Frequências identificadas nos diagramas de estabilização da base com uma estrutura de suporte de mancal.

Frequências naturais [Hz]
39,94
59,24
97,96
113,92
131,79
150,66
169,62
187,05
217,01
226,85

Os resultados de Martin (2020) para as frequências da base com uma estrutura de suporte de mancais validam os dados da Tabela 19.

Definindo a ordem de aproximação de 20 devido aos resultados analisados, os parâmetros modais da estrutura foram estimados para o primeiro conjunto de nós. A Tabela 20 mostra as frequências naturais e fatores de amortecimento obtidos com os dados do nó 147 e com o fornecimento das frequências de modos físicos da Tabela 19.

Em relação aos resultados apresentados por Martin (2020), os fatores de amortecimento estimados com ordem 20 também são semelhantes. Para a ordem 10, cujos resultados não são apresentados, o modo de 169 Hz não é estimado e algumas frequências obtidas diferem consideravelmente dos valores médios.

Tabela 20 – Parâmetros modais estimados para o primeiro conjunto de nós da base com uma estrutura de suporte de mancais.

Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
39,92	0,0099
59,22	0,0110
98,04	0,0093
113,94	0,0044
130,80	0,0192
150,56	0,0066
169,79	0,0104
185,68	0,0318
217,05	0,0040
226,78	0,0054

Em seguida, utilizaram-se os quatro conjuntos de nós restantes da Tabela 8 para a determinação dos parâmetros modais. Os resultados são apresentados na Tabela 21 e todos consideram ordem de aproximação 20 e ponto de excitação no nó 147.

Nos conjuntos 3 e 4, existe uma diferença de pouco mais de 1 Hz para a frequência do oitavo modo em relação ao valor esperado de 185 Hz, todavia a média dos resultados obtidos com várias simulações acomoda essa diferença. Todos os modos restantes possuem amortecimentos semelhantes entre si.

Foi constatado que a utilização apenas do nó 147 para a identificação dos dez modos da estrutura composta por base e pedestal não é suficiente. O conjunto 4 mostrou que um nó adicional ao 147, no mínimo, deve ser utilizado para a correta estimação da frequência de 170 Hz. De fato, para verificação, foram utilizados outros nós em substituição ao 94, como 90, 112, 148 e 165, e todas as simulações identificaram corretamente os dez modos existentes nessa faixa de frequências.

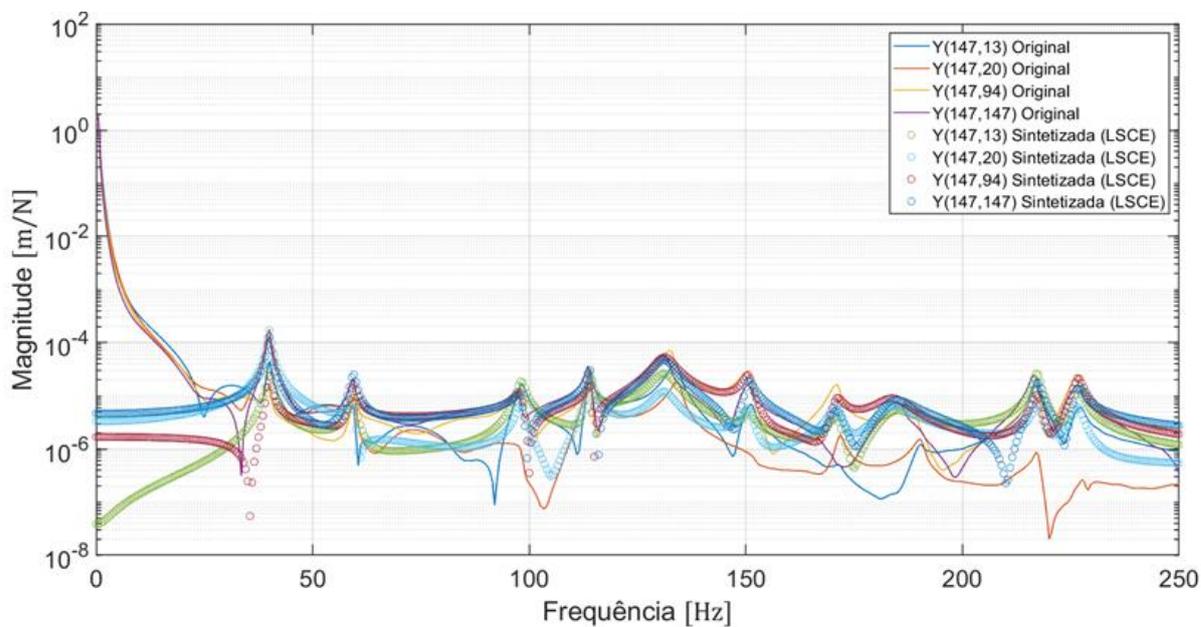
Os modos de vibrar estimados não são apresentados, todavia serão utilizados posteriormente para comparação com os resultados da subestruturação por meio dos valores de similaridade modal (MAC).

Tabela 21 – Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para base com uma estrutura de suporte de mancais.

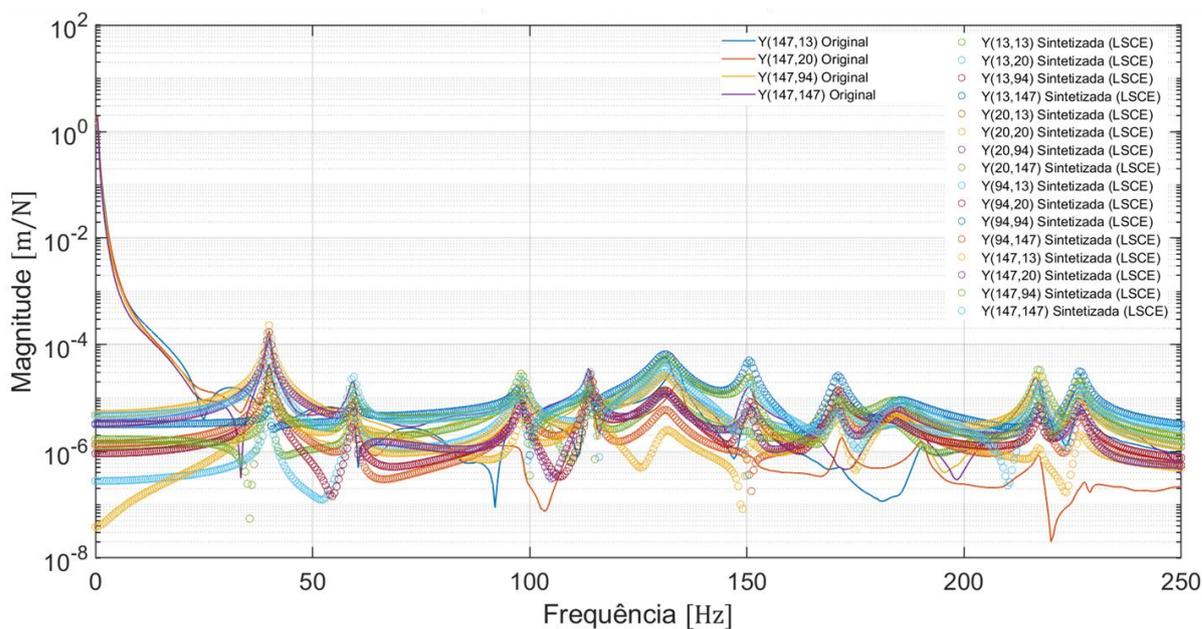
Conjuntos de nós	Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento	Conjuntos de nós	Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
Conjunto 2 nós base + 94 98 111 112 147 151	39,92	0,0099	Conjunto 3 nós base + 94 112 147	39,91	0,0099
	59,40	0,0097		59,36	0,0100
	98,06	0,0092		98,07	0,0093
	113,97	0,0043		113,98	0,0043
	131,11	0,0190		131,15	0,0182
	150,61	0,0064		150,63	0,0067
	170,81	0,0072		170,88	0,0071
	185,21	0,0173		183,95	0,0219
	217,11	0,0040		217,22	0,0038
	226,54	0,0049		226,64	0,0046
Conjunto 4 nós base + 94 147	39,92	0,0099	Conjunto 5 nós base + 94 98 111 112 147 151	39,92	0,0099
	59,32	0,0102		59,32	0,0096
	98,09	0,0094		98,06	0,0092
	113,99	0,0043		113,95	0,0044
	131,17	0,0179		131,06	0,0195
	150,59	0,0067		150,63	0,0064
	170,89	0,0072		170,81	0,0072
	183,92	0,0214		185,19	0,0171
	217,22	0,0038		217,10	0,0040
226,62	0,0046	226,66	0,0048		

Finalmente, realizou-se a síntese das respostas em frequência. A Figura 46 mostra, para o quarto conjunto de nós (13, 20, 94 e 147), as respostas sintetizadas, sendo que em a) tem-se

as curvas originais e sintetizadas da quarta linha da matriz (linha do nó 147) e em b) tem-se essas mesmas curvas originais e as componentes sintetizadas do triângulo superior da matriz.



a) Comparação entre curvas originais e sintetizadas da quarta linha.



b) Componentes originais da quarta linha e componentes sintetizadas do triângulo superior.

Figura 46 – Respostas originais e sintetizadas do quarto conjunto de nós da base com uma estrutura de suporte de mancais.

Visivelmente, as curvas sintetizadas apresentam similaridade com as experimentais (originais), especialmente nos valores dos picos de frequência e amplitudes dos modos. Diferenças maiores se encontram apenas nas regiões de antirressonância.

Os parâmetros modais dessas respostas sintetizadas foram estimados. Utilizou-se a linha relativa ao nó 20 e ordem 20 para a aplicação do LSCE. As frequências naturais e fatores de amortecimento são mostrados na Tabela 22. Os resultados, tanto para frequência quanto para amortecimento, mostram que a análise modal e a sintetização das funções de resposta em frequência se deram de maneira efetiva tendo em vista que a informação dinâmica da estrutura se manteve nos dados reconstituídos.

Tabela 22 – Parâmetros modais estimados com as funções de resposta em frequência sintetizadas da base com uma estrutura de suporte de mancais.

Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
39,99	0,0099
59,42	0,0102
98,27	0,0094
114,20	0,0043
131,42	0,0179
150,87	0,0067
171,21	0,0072
184,27	0,0214
217,63	0,0038
227,06	0,0046

Considerando que se utilizaram quatro nós, sendo um interno à base, um de interface e dois internos à subestrutura B, espera-se que qualquer quantidade acima dessa seja suficiente para o correto desacoplamento da estrutura de suporte de mancais desde que os nós escolhidos sejam próximos à região de acoplamento e que se utilizem os nós 13 e 147 como pontos de excitações nas respectivas análises da base isolada e da base com um pedestal. Essa verificação é realizada no próximo tópico.

5.3.3 Resultados do Desacoplamento da Estrutura de Suporte de Mancais

O desacoplamento do pedestal foi realizado com os quatro métodos de desacoplamento discutidos e para cada um dos cinco conjuntos de nós da Tabela 8 em associação aos nós dos respectivos conjuntos da Tabela 6. O processo utiliza as matrizes de receptância sintetizadas para a base isolada e para a base com um pedestal e os parâmetros modais da subestrutura são estimados através das respostas desacopladas. Para cada conjunto, foram realizadas simulações distintas considerando, a cada uma, um ponto de excitação diferente, sendo que o total para cada conjunto varia de acordo com a quantidade de nós do próprio conjunto. A ordem de aproximação nessa etapa é definida inicialmente como 20.

Com a avaliação da consistência dos valores de frequência estimados foi possível definir quais modos são de fato físicos e pertencem à estrutura de suporte de mancais, também como foi possível filtrar e desconsiderar frequências de modos espúrios. A Tabela 23 mostra as frequências médias obtidas para cada método de desacoplamento e para cada conjunto.

Para o primeiro conjunto, são desacoplados quatorze nós, sendo quatro de interface e dez internos ao pedestal. Para o segundo conjunto, são três nós de interface e seis internos, enquanto no terceiro conjunto são os mesmos três de interface e também três internos. O conjunto quatro resulta em um nó de interface e dois internos e, por fim, o quinto conjunto em um nó de interface e seis nós internos à estrutura de suporte do mancal.

Os diagramas de estabilização de cada simulação foram utilizados como ferramentas de auxílio na identificação das frequências naturais e comparação com os dados da Tabela 23.

Tabela 23 – Comparação entre as frequências naturais estimadas para o pedestal por meio dos quatro métodos de desacoplamento.

Conjunto	Frequências naturais [Hz]			
	Padrão	Interface Estendida	Superdeterminado	Interno
1 (médias de 14 amostras)	57,00	71,22	56,36	58,95
	103,16	-	101,27	93,05
	-	119,27	118,24	111,38
	129,33	-	131,30	131,58
	151,72	-	-	-
	169,71	-	172,63	173,98
	-	211,81	-	212,22
	225,36	228,58	228,16	225,77
2 (médias de 9 amostras)	58,41	63,03	55,90	45,80
	100,77	104,80	100,80	105,80
	-	-	120,15	-
	132,77	133,12	132,46	133,44
	170,93	169,89	174,06	174,92
	207,50	-	210,43	212,91
3 (médias de 6 amostras)	224,31	221,45	222,13	225,23
	-	-	-	36,74
	56,79	46,63	54,41	58,06
	100,83	103,53	101,10	99,58
	-	-	119,31	119,01
	132,02	131,50	131,17	128,18
	-	-	-	150,98
	170,79	-	172,99	173,92
	207,55	209,11	210,97	211,09
	225,40	222,60	223,46	231,18

continua

conclusão Tabela 23

Conjunto	Frequências naturais [Hz]			
	Padrão	Interface Estendida	Superdeterminado	Interno
4 (médias de 3 amostras)	-	-	46,86	36,45
	59,21	-	58,75	58,32
	100,64	-	100,54	100,13
	-	-	-	120,78
	128,87	127,79	128,22	-
	149,81	147,53	150,33	150,86
	172,35	168,90	172,77	173,52
	209,37	194,32	213,06	210,13
5 (6 amostras)	224,67	222,15	228,84	231,36
	-	-	39,56	40,77
	59,55	60,15	59,56	58,77
	96,70	108,41	98,90	99,04
	112,90	111,37	118,04	113,78
	131,40	138,02	133,30	133,51
	-	-	-	147,73
	170,30	173,16	-	174,91
185,20	188,70	184,04	-	
218,16	-	222,32	216,59	
232,77	226,07	229,21	-	

Finalmente, são calculados os valores médios finais para as frequências naturais, considerando os cinco conjuntos e os quatro métodos de desacoplamento. Tem-se, assim, as nove frequências dispostas na Tabela 24. Vale ressaltar que estas frequências serão utilizadas no algoritmo de estimação de parâmetros modais como indicadoras da localização dos modos físicos do pedestal.

Tabela 24 – Frequências naturais estimadas pelas respostas desacopladas do pedestal.

Frequências naturais [Hz]
39,87
57,47
100,01
118,95
130,80
151,01
173,03
208,87
225,57

Algumas observações podem ser feitas em relação aos resultados apresentados: primeiramente, é importante ressaltar que as frequências médias apresentadas na Tabela 24 não sugerem que, obrigatoriamente, os quatro métodos de desacoplamento tiveram resultados satisfatórios. De fato, analisando a Tabela 23, vê-se que o método de Interface Estendida, ao contrário dos demais, falha na representação de várias das frequências naturais do pedestal em todos os conjuntos de nós analisados. Além disso, diversos modos espúrios foram filtrados pois apresentaram frequências distintas das médias encontradas.

Os métodos Padrão, Superdeterminado e Interno melhor representaram as frequências nas simulações. Em média, o método Interno estimou as nove frequências do sistema, sendo o primeiro a identificar a frequência de 38,87 Hz. Especialmente para o quinto conjunto, em que se consideram os nós 13, 19 e seis nós internos ao pedestal, nota-se precisão nas frequências estimadas.

Para os conjuntos quatro e cinco, os quais possuem apenas o nó 13 interno à base, verificou-se pequena variação dos valores das frequências naturais estimadas. Conclui-se, assim, que poucos nós não impedem a obtenção de resultados consistentes, à exceção do método de Interface Estendida.

Outra observação é que a quantidade de modos espúrios estimados pelo método Padrão é menor em comparação aos demais. Dentre as amostras de frequências obtidas com o método

Padrão, apenas três frequências estimadas se afastam consideravelmente das apresentadas na Tabela 24, sendo estas referente à simulação do quarto conjunto.

Ademais, não se notou influência considerável pela variação do ponto de excitação utilizado na aplicação do algoritmo LSCE ao pedestal desacoplado.

Finalmente, a resposta desacoplada do pedestal foi acoplada à base isolada (Condição 1) e as funções de resposta em frequência obtidas foram então comparadas às experimentais (Condição 2), assim como como os parâmetros modais. Essa etapa configura uma verificação final da efetividade encontrada em cada método de acoplamento em relação ao pedestal do mancal. Em primeiro lugar, utilizaram-se os dados do terceiro conjunto de nós, que conta com o nó 13 interno à base, os nós de interface 20, 52 e 62 e os nós 94, 112 e 147 do pedestal. Tem-se, assim, que o acoplamento é feito em três pontos, um em cada direção axial.

A matriz booleana de acoplamento para esse caso possui três linhas – uma para cada ponto de acoplamento – e dez colunas, sendo quatro para os nós da base e seis para os nós do pedestal, como mostra o esquema da Figura 47. As numerações dos nós são mantidas, facilitando a visualização do acoplamento entre os pontos 20, 52 e 62.

$$\begin{array}{c}
 \text{Base} \qquad \qquad \qquad \text{Pedestal} \\
 \left[\begin{array}{cccc|ccccc}
 \boxed{13} & \boxed{20} & \boxed{52} & \boxed{62} & \boxed{20} & \boxed{52} & \boxed{62} & \boxed{94} & \boxed{112} & \boxed{147} \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Figura 47 – Esquema da matriz booleana de acoplamento entre a base e um pedestal.

O acoplamento é então realizado com as respostas obtidas pelos quatro métodos de desacoplamento. A Figura 48 mostra a comparação das funções de resposta em frequência (FRFs) obtidas com o acoplamento pelo resultado do método Padrão e as FRFs experimentais. As curvas apresentadas são as componentes da linha do nó 147.

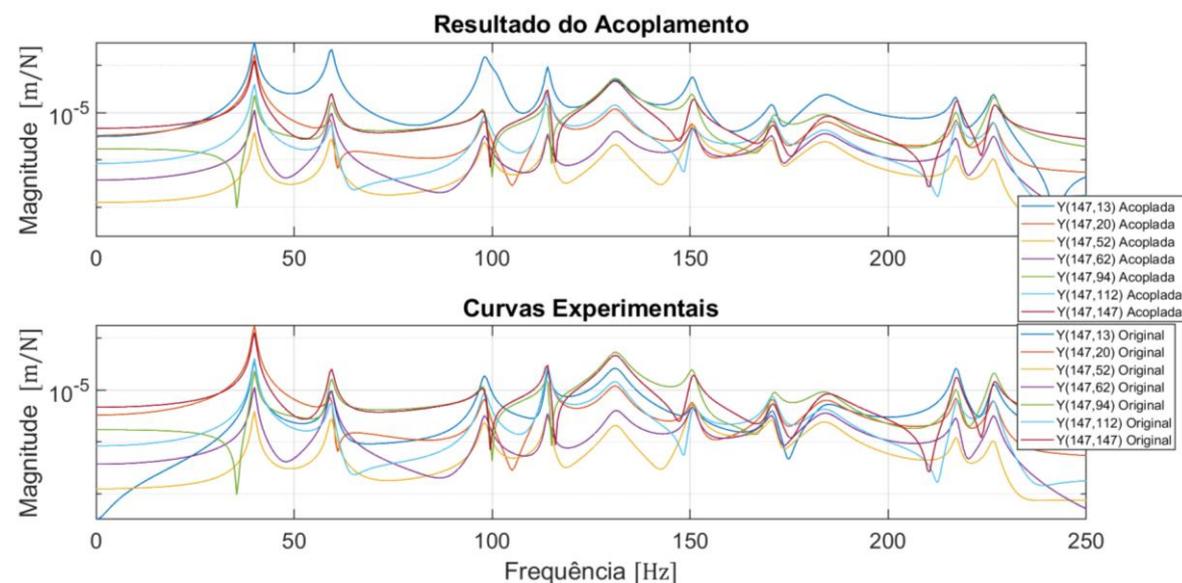


Figura 48 – Base e pedestal acoplados com resposta obtida pelo método Padrão.

Nota-se a semelhança entre as curvas originais (experimentais) e as obtidas com o acoplamento pela resposta do método Padrão. De fato, estimando as frequências naturais e fatores de amortecimento dos resultados do acoplamento para a linha do nó 147, vê-se que as informações dinâmicas se mantêm, como mostra a Tabela 25.

Tabela 25 – Parâmetros modais da resposta acoplada com o resultado do método Padrão: acoplamento entre base e uma estrutura de suporte de mancal.

Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
39,99	0,0099
59,46	0,0100
98,25	0,0093
114,20	0,0043
131,40	0,0182
150,91	0,0067
171,20	0,0071
184,30	0,0219
217,64	0,0038
227,07	0,0046

Em relação aos resultados para a fundação com um pedestal apresentados na Tabela 22, identifica-se a notável correspondência entre as frequências e fatores de amortecimento estimados, o que mostra a qualidade obtida no desacoplamento pelo método Padrão para esse conjunto de nós. Tendo em vista que os dez modos foram identificados, pode-se também calcular a matriz de similaridade modal, ou matriz MAC, comparando os modos obtidos diretamente dos dados experimentais e os modos obtidos após o acoplamento. A Figura 49 traz essa comparação em uma matriz de MAC tridimensional em que a escala de cores representa valores de 0 a 1.

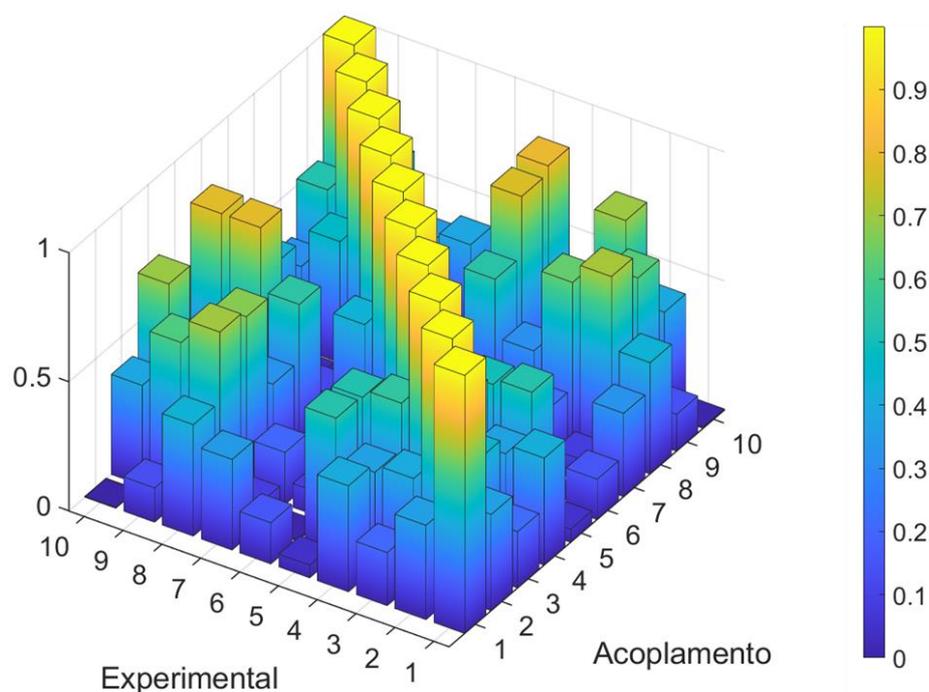


Figura 49 – Matriz MAC para base e pedestal acoplados: comparação entre modos de vibrar experimentais e obtidos após o acoplamento com o resultado do método Padrão.

A matriz MAC mostra, na diagonal principal, que os modos experimentais e obtidos por acoplamento são, de fato, semelhantes. Percebeu-se que a pequena quantidade de nós de excitação (sete) contribui para que os valores fora da diagonal principal não sejam tão próximos a zero. Na comparação de modos com o número MAC, sabe-se que os resultados são mais representativos das formas modais quanto maior a quantidade de pontos utilizados, o que tende a reduzir os valores fora das diagonais principais para sistemas lineares. O que se notou,

entretanto, é que o aumento da quantidade de nós para esse caso específico não pode ser aleatório para que haja melhoria na matriz MAC. Em uma simulação com o primeiro conjunto foi verificado uma piora nos resultados, enquanto que com o quinto conjunto verificou-se uma melhora.

Tem-se, assim, que o método Padrão encontra mais efetividade quando se utiliza o nó interno à base 13, o nó de interface 19 e no mínimo cinco nós internos ao pedestal, como os apresentados na Tabela 8. Na Figura 50 tem-se a matriz MAC que considera o resultado do desacoplamento feito com todos os nós do quinto conjunto. Embora se constate a melhora mencionada para os valores MAC, sabe-se que o resultado anterior é suficiente para atestar a efetividade do método de desacoplamento em discussão.

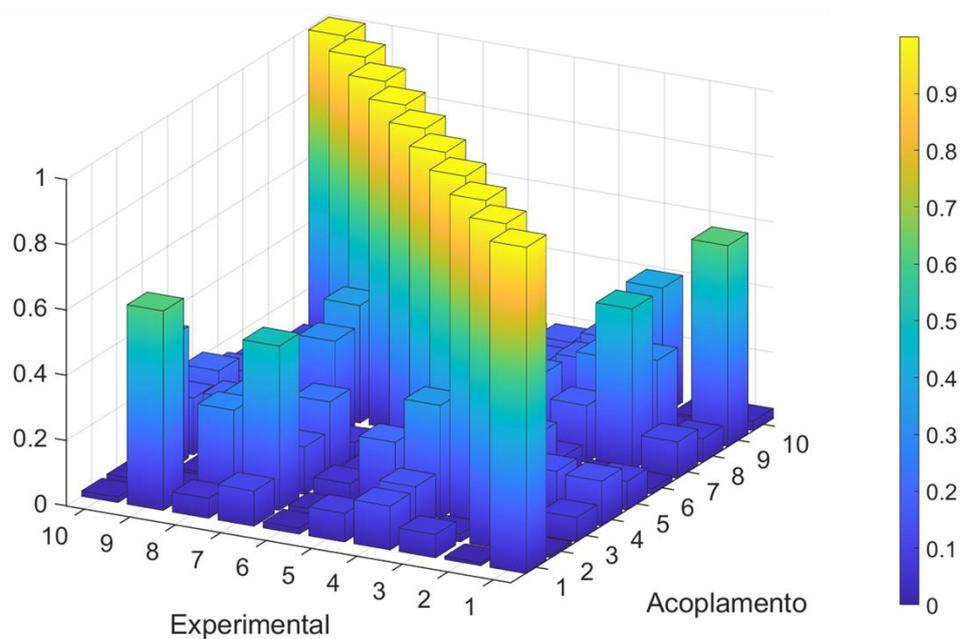


Figura 50 – Matriz MAC para base e pedestal acoplados com resultado do método Padrão: utilização dos nós do quinto conjunto para desacoplamento e acoplamento.

Na Figura 51 tem-se as funções de resposta em frequência (linha do nó 147) originais e calculadas por acoplamento com a resposta do pedestal obtida pelo método de Interface Estendida e o terceiro conjunto de nós.

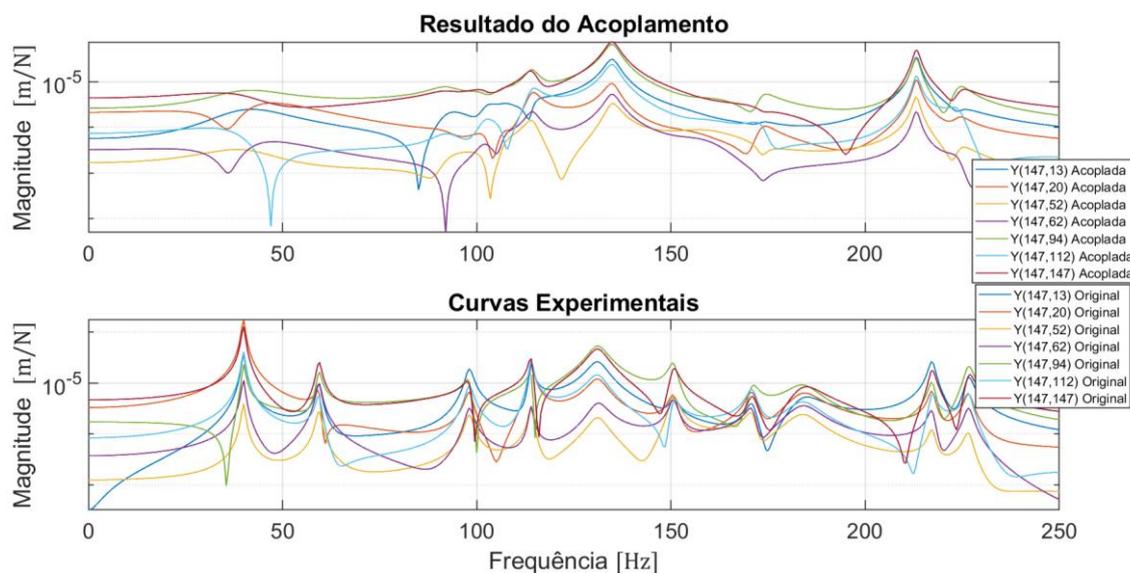


Figura 51 – Base e pedestal acoplados com resposta obtida pelo método Interface Estendida.

Neste caso, observa-se que as respostas não inferem semelhança, especialmente para frequências abaixo de 100 Hz. Este resultado sugere, mas não assegura, que as medições dos subsistemas contam com erros mínimos atrelados ao processo de obtenção dos dados, o que pode levar às mesmas singularidades observadas para o sistema analítico da seção anterior. As frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para essa resposta acoplada estão na Tabela 26.

Tabela 26 – Parâmetros modais da resposta acoplada com o resultado do método de Interface Estendida: acoplamento entre base e uma estrutura de suporte de mancal.

Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
42,65	0,2593
107,16	0,0197
135,12	0,0133
158,15	0,0539
173,66	0,0133
213,58	0,0038
224,46	0,0100

De fato, verifica-se que apenas sete modos são identificados entre os dez e que existem divergências entre os que foram identificados e os valores esperados, como o fator de amortecimento de mais de 25% do primeiro modo e diferenças de até 8 Hz para as frequências naturais. Na simulação com o quinto conjunto de nós, que teve bons resultados para o método Padrão, verificam-se piores resultados para o método de Interface Estendida. A seguir, na Figura 52, tem-se a matriz MAC com comparações entre os sete modos identificados.

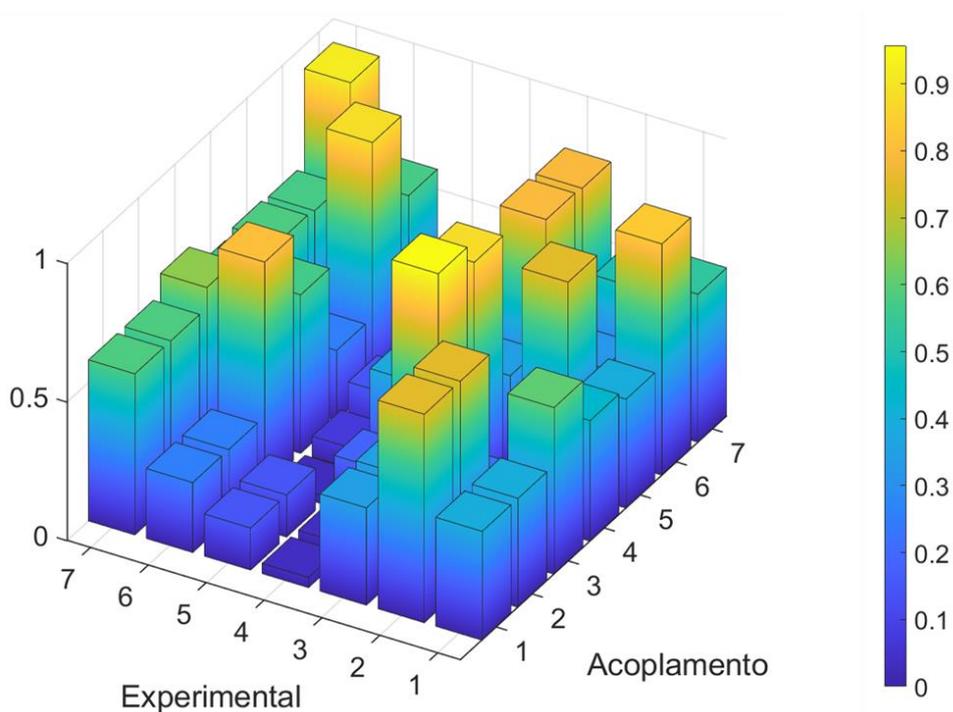


Figura 52 – Matriz MAC para base e pedestal acoplados com resultado do método de Interface Estendida: utilização dos nós do terceiro conjunto para desacoplamento e acoplamento.

A comparação entre os modos demonstra que o reacoplamento do pedestal (obtido pelo método de Interface Estendida) à base não é equivalente à resposta experimental da fundação na mesma configuração. Considera-se também a possibilidade de que o método não admita a hipótese de interfaces rigidamente acopladas, sendo necessário inserir relaxamento na formulação, conforme discutido por Rixen e Voormeeren (2012). Em seguida, a Figura 53 traz a comparação entre as funções de resposta (FRFs) em frequência originais e acopladas com o resultado do método Superdeterminado para o terceiro conjunto de nós.

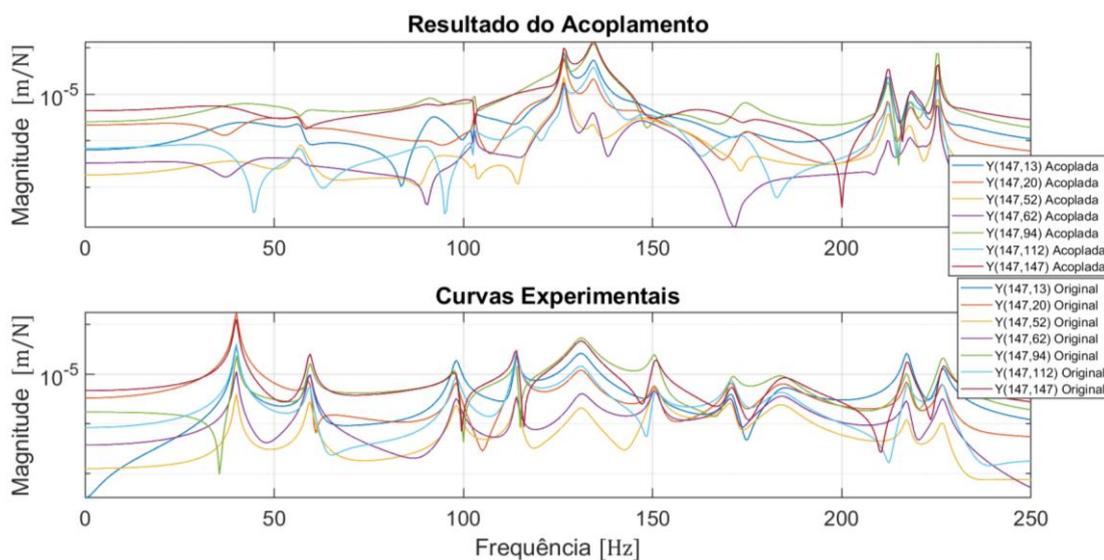


Figura 53 – Base e pedestal acoplados com resposta obtida pelo método Superdeterminado: resposta obtida com o terceiro conjunto de nós.

Constata-se pela resposta acoplada que o método Superdeterminado não traz a mesma qualidade que o método Padrão para esse conjunto de nós. Modos espúrios e frequências repetidas estão presentes na resposta do pedestal, que afetam diretamente o acoplamento. O processo foi repetido com os nós do quinto conjunto e o resultado é mostrado na Figura 54.

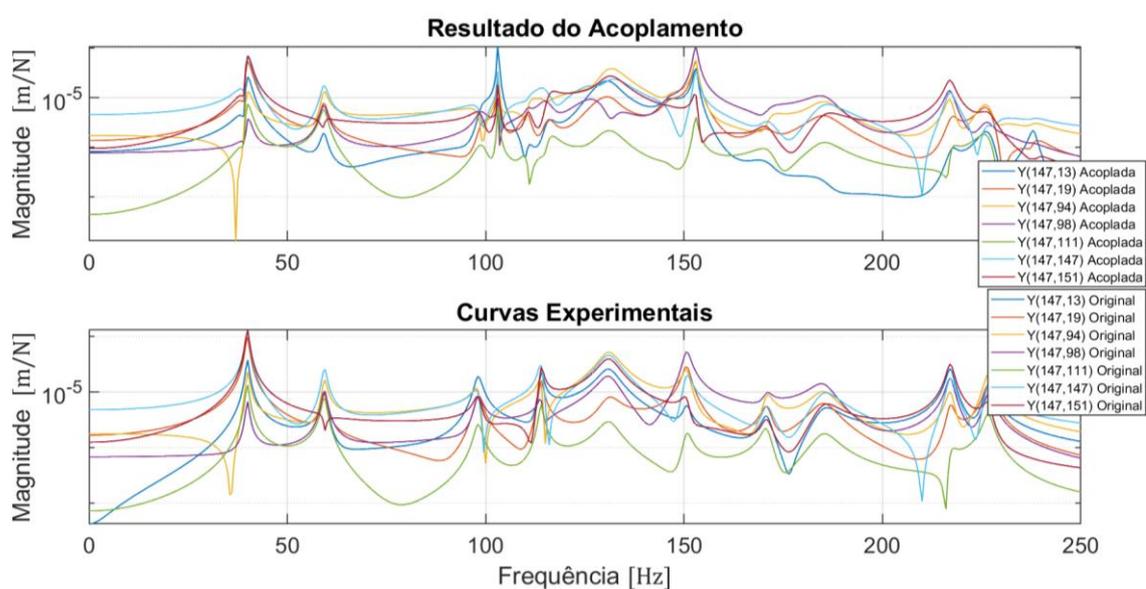


Figura 54 – Base e pedestal acoplados com resposta obtida pelo método Superdeterminado: resposta obtida com o quinto conjunto de nós.

Decorre que o quinto conjunto de nós leva a melhores resultados para o acoplamento com o pedestal desacoplado pelo método Superdeterminado. A Tabela 27 mostra os resultados estimados da resposta acoplada com esse conjunto.

Tabela 27 – Parâmetros modais da resposta acoplada com o resultado do método Superdeterminado: acoplamento entre base e uma estrutura de suporte de mancal.

Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
40,28	0,0263
59,32	0,0128
98,97	0,0155
116,02	0,0149
131,51	0,0259
153,19	0,0031
171,14	0,0136
185,50	0,0205
217,50	0,0049
227,10	0,0101

Apesar de uma diferença de aproximadamente 2 Hz nas quarta e sexta frequências naturais, vê-se que são semelhantes às frequências da fundação mostradas na Tabela 21 e na Tabela 22. Considera-se que o método Superdeterminado apresenta bons resultados por determinar os esforços de interface em um processo de mínimos quadrados – o que minimiza as incertezas na interface – e conter um relaxamento implícito na formulação.

Por fim, é construída a matriz MAC para os modos obtidos com o quinto conjunto de nós, a qual pode ser vista na Figura 55.

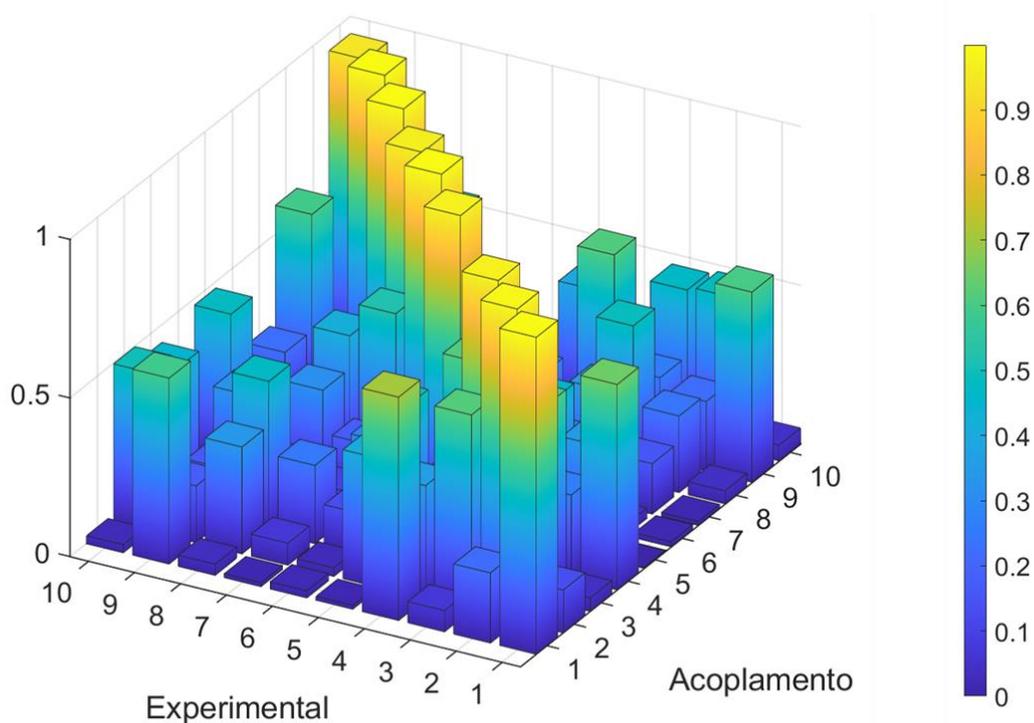


Figura 55 – Matriz de MAC para base e pedestal acoplados com resultado do método Superdeterminado: utilização dos nós do quinto conjunto para desacoplamento e acoplamento.

A matriz MAC mostra que nove dos dez modos apresentam alta semelhança. O quarto modo, cujo MAC é próximo a 0,6, é referente à frequência de 114,20 *Hz* identificada com um erro de aproximadamente 2 *Hz*. Com o aumento da quantidade de nós internos do pedestal considerados, verificou-se a tendência de aumento do MAC para esse modo.

Finalmente, tem-se a avaliação do resultado do método Interno, cuja comparação da resposta acoplada com a resposta original é apresentada na Figura 56 para as componentes da linha do nó 147 e com os nós do quinto conjunto. A resposta acoplada utilizando os nós do terceiro conjunto não são apresentadas pois seguem o mesmo comportamento do que foi visto para o método Superdeterminado.

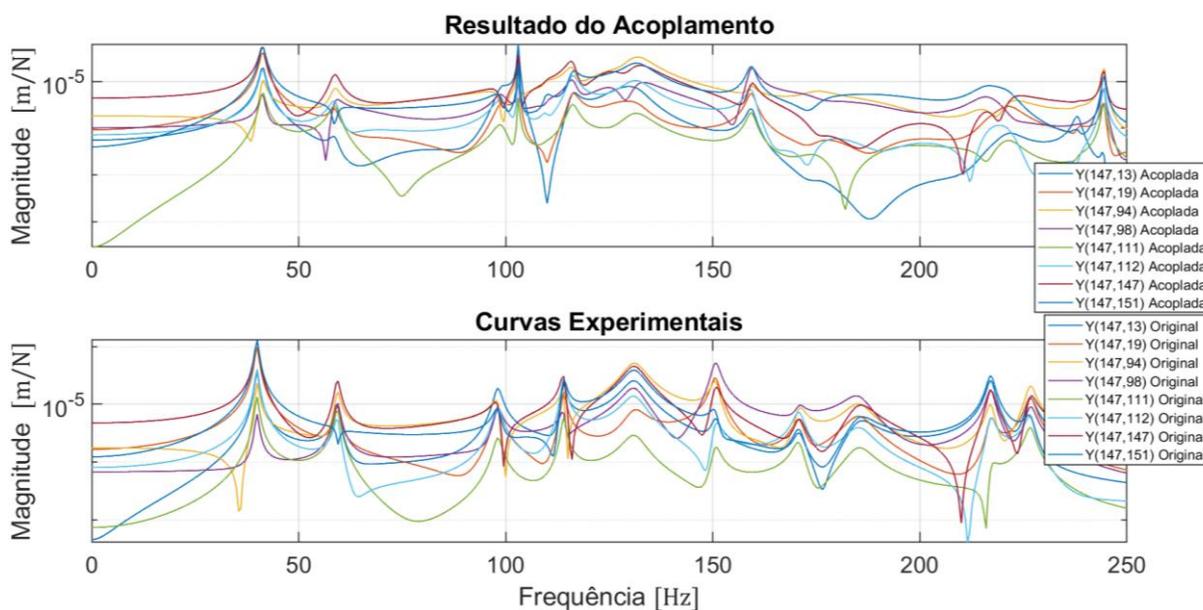


Figura 56 – Base e pedestal acoplados com resposta obtida pelo método Interno: resposta obtida com o quinto conjunto de nós.

Observa-se que a semelhança entre os picos de ressonância é menor para frequências superiores a 100 Hz. As frequências naturais e fatores de amortecimento estimados da resposta acoplada estão dispostas na Tabela 28.

Tabela 28 – Parâmetros modais da resposta acoplada com o resultado do método Interno: acoplamento entre base e uma estrutura de suporte de mancal.

Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
41,36	0,0139
58,81	0,0186
99,01	0,0163
116,32	0,0101
131,69	0,0275
159,59	0,0063
175,02	0,0263
194,75	0,0837
216,52	0,0176

A última frequência natural não é identificada na resposta acoplada. Além disso, observa-se que a partir da sexta frequência natural existem diferenças maiores em relação aos valores originais, especialmente para as frequências de aproximadamente 150 Hz, 170 Hz e 185 Hz, as quais são estimadas respectivamente como 159,59 Hz, 175,02 Hz e 194,75 Hz. Na matriz MAC, Figura 57, também nota-se essa característica, onde apenas os quatro primeiros modos apresentam similaridade (MAC próximo à unidade). O décimo modo é desconsiderado uma vez que não foi identificado.

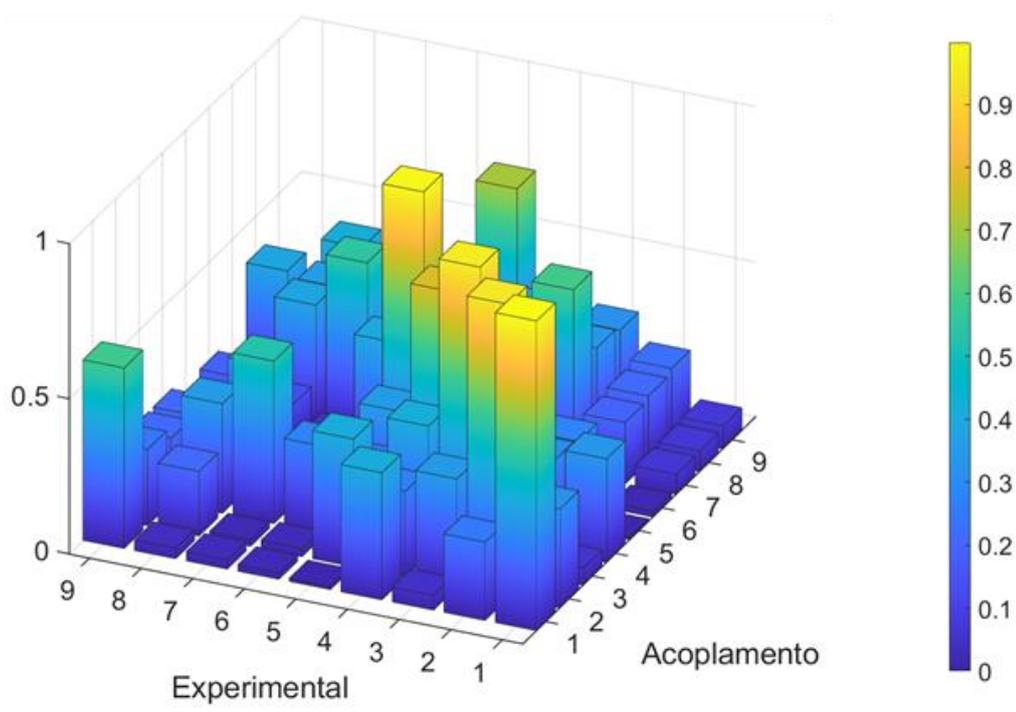


Figura 57 – Matriz de MAC para base e pedestal acoplados com resultado do método Interno: utilização dos nós do quinto conjunto para desacoplamento e acoplamento.

Conclui-se assim que o método Interno não desacopla o pedestal com a mesma qualidade que os métodos Padrão e Superdeterminado. Outros conjuntos de nós também foram simulados, o que não trouxe melhora nos resultados.

5.3.4 Resultados da Análise Modal da Base Suspensa com Dois Pedestais

A análise modal da base suspensa e com duas estruturas de suporte de mancais (Condição 3) segue o mesmo procedimento conhecido: análise dos diagramas de estabilização para definição do nó cujas medições representam melhor os modos do sistema, definição da ordem de aproximação, filtragem de modos espúrios e predefinição das frequências dos modos físicos. O primeiro dos conjuntos da Tabela 10, que conta com uma grande quantidade de nós, tanto internos à base quanto das duas interfaces e internos aos pedestais, foi utilizado na análise desses parâmetros.

Verificou-se que os nós 82 e 91 resultam em diagramas de estabilização com modos melhor definidos. Em seguida, foram avaliadas as ordens de aproximação e possíveis frequências naturais. Entre as respostas dos nós 82 e 91, notou-se nos diagramas de estabilização que o primeiro apresenta uma frequência estável em 117 Hz que não é vista no segundo. Ainda, o diagrama do nó 91 também mostra uma frequência em 167 Hz que não é vista no primeiro. Apesar disso, o algoritmo de identificação de parâmetros modais foi capaz de estimar as duas frequências tanto para o nó 82 quanto para o nó 91, além de outra em 58 Hz cuja visualização é dificultada nos dois diagramas devido à pequena amplitude do modo.

No total, doze frequências naturais estão contidas entre 0 e 250 Hz , sendo que a identificação é feita com sucesso para uma ordem de aproximação de no mínimo 20 sem a presença de modos espúrios.

É interessante notar que o nó 82 é interno ao pedestal do mancal 1 e o nó 91 é interno ao pedestal do mancal 2, ambos na direção Z . Tendo em vista que no caso da base com apenas um pedestal também se verificou que um de seus nós internos (147) representava melhor todos os modos do sistema, é provável que realizar medições nas estruturas de suporte de mancais seja mais prudente para a identificação dos modos de todo o conjunto uma vez que medições na base tendem a omitir modos dos pedestais.

A Tabela 29 traz as médias das frequências naturais filtradas pelos diagramas de estabilização dos nós 82 e 91 para ordens de aproximação de 20 e 30.

Tabela 29 – Frequências naturais preliminares da base suspensa com dois pedestais.

Frequências naturais [Hz]
34,25
57,40
62,15
78,64
104,25
117,22
133,88
159,07
165,31
175,52
197,03
231,23

Essas frequências são então utilizadas na estimação dos parâmetros modais para os demais conjuntos (dois, três e quatro) de nós da base com dois pedestais. Para tanto, utilizam-se os dados do nó 91 e ordem 20. Os resultados para as frequências naturais e fatores de amortecimento estão organizados na Tabela 30. As médias entre os parâmetros obtidos para os três conjuntos de nós também são calculadas e apresentadas.

Tabela 30 – Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para a base suspensa com duas estruturas de suporte de mancais.

Conjuntos de nós	Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento	Conjuntos de nós	Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
Conjunto 2 4 5 8 19 20 22 47 48 52 53 82 85 91 94	34,26	0,0115	Conjunto 3 8 19 22 47 48 52 82 91	34,25	0,0115
	56,11	0,0568		56,38	0,0781
	62,13	0,0131		62,16	0,0130
	78,63	0,0081		78,64	0,0079
	104,26	0,0060		104,24	0,0061
	116,68	0,0153		115,44	0,0172
	133,95	0,0076		133,93	0,0073
	158,93	0,0131		158,88	0,0133
	166,45	0,0090		166,51	0,0086
	175,71	0,0136		175,87	0,0138
	196,93	0,0063		197,09	0,0063
231,46	0,0065	231,49	0,0061		
Conjunto 4 4 8 19 82 91	34,25	0,0115	Médias	34,25	0,0115
	56,63	0,0763		56,38	0,0704
	62,15	0,0129		62,16	0,0130
	78,63	0,0080		78,64	0,0080
	104,32	0,0061		104,24	0,0061
	114,00	0,0202		115,44	0,0176
	133,88	0,0073		133,93	0,0074
	158,86	0,0132		158,88	0,0132
	166,64	0,0089		166,51	0,0088
	175,53	0,0158		175,87	0,0144
	196,56	0,0070		197,09	0,0065
231,43	0,0060	231,48	0,0062		

Conjuntos com menor número de nós do que os cinco considerados no quarto conjunto começam a apresentar mais ocorrências de frequências não identificadas e erros maiores em relação aos valores médios. Dessa forma, tendo em vista que cinco nós é uma quantidade pequena, opta-se por manter o quarto conjunto como possuindo a quantidade mínima com a qual é possível realizar uma estimação dos parâmetros modais com qualidade e erros aceitáveis. De fato, vê-se que a sexta frequência natural – de aproximadamente 116 *Hz* – é identificada como 114 *Hz* no quarto conjunto, ao passo em que o amortecimento do modo passa de 1,53% para 2,02%

Finalmente, as matrizes de receptância completas são sintetizadas através dos parâmetros estimados com os dados das medições do nó 91. A Figura 58 mostra a comparação entre as curvas experimentais (originais) e a sintetizadas para a linha do nó 91.

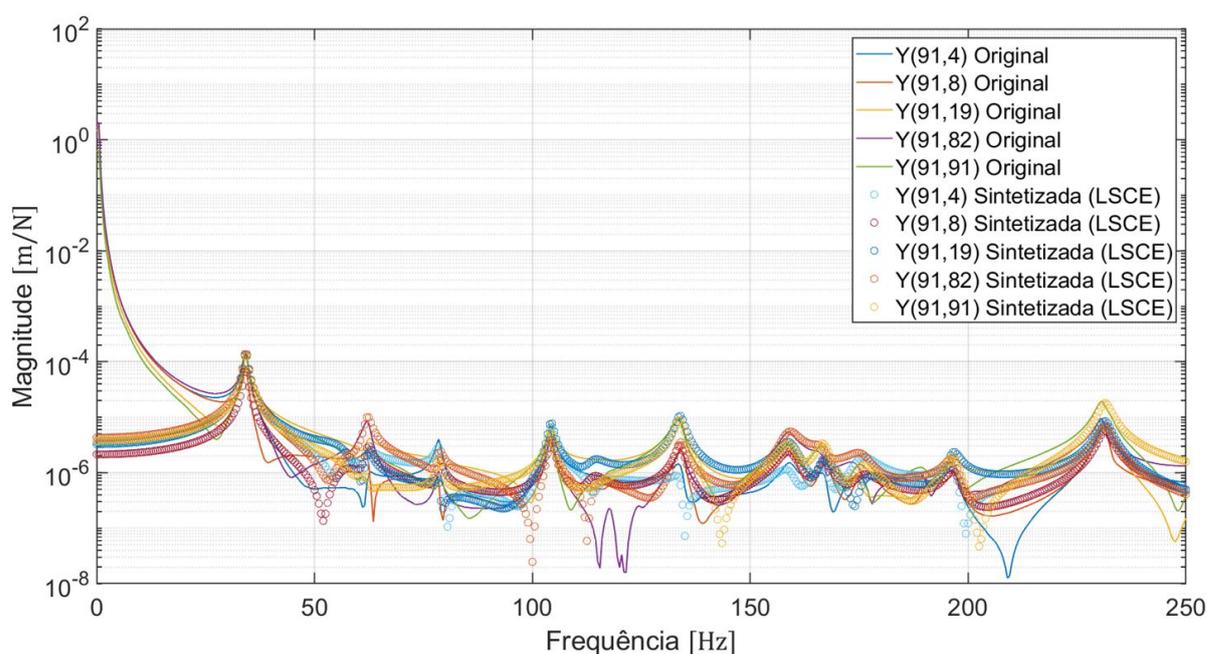


Figura 58 – Comparação entre respostas experimentais e sintetizadas para a base com duas estruturas de suporte de mancais: síntese com nós do quarto conjunto.

Os parâmetros modais das respostas sintetizadas foram calculados e são análogos aos apresentados na Tabela 30 para o quarto conjunto, apresentando diferenças desprezíveis para todas as frequências e fatores de amortecimento do sistema. Os mesmos resultados são observados com a utilização de qualquer linha da matriz de receptância reconstituída.

5.3.5 Resultados do Acoplamento de Dois Pedestais à Base Isolada

Para o acoplamento de dois pedestais à base isolada e comparação dos resultados aos obtidos na análise modal do tópico anterior, 5.3.4, escolheram-se as melhores respostas desacopladas da etapa de desacoplamento. Deve-se considerar, no entanto, que os diferentes conjuntos de nós simulados levam a quantidades diferentes de nós de interface e internos disponíveis para o acoplamento.

Assim, tem-se a estrutura de suporte de mancais desacoplada pelos métodos Padrão e Superdeterminado com o terceiro e o quinto conjuntos de nós da Tabela 8. Com o terceiro conjunto, são desacoplados três nós de interface (20, 52 e 62) e três nós internos (94, 112 e 147), enquanto o quinto conjunto conta com apenas um nó de interface (19) e seis nós internos (94, 98, 111, 112, 147 e 151).

Diferentemente do reacoplamento de apenas uma estrutura de suporte efetuado anteriormente – em que as matrizes de receptância das subestruturas haviam sido previamente sintetizadas para o desacoplamento – é necessário realizar a reconstituição das respostas para a base com os nós onde as conexões dos dois pedestais à base são feitas. A Figura 59 especifica as duas regiões de acoplamento.

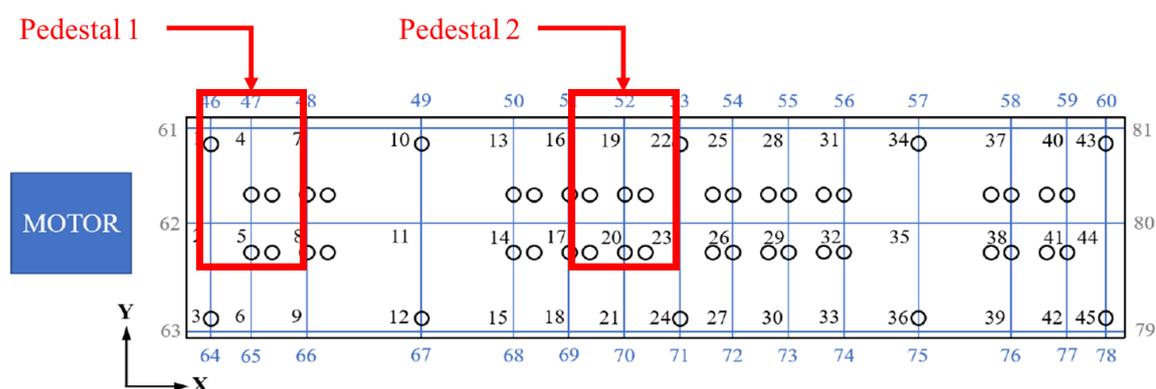


Figura 59 – Regiões de acoplamento para os dois pedestais à base metálica.

As funções de resposta em frequência para a base isolada precisam incluir os devidos nós necessários das duas regiões de acoplamento destacadas. Uma vez que as respostas

desacopladas contam, no total entre os dois conjuntos, com os nós de interface 19, 20, 52 e 62, os nós da base a serem incluídos na sintetização são mostrados na Figura 60. Além dos pontos de interface, dois nós internos à base também são incluídos (9 e 13).

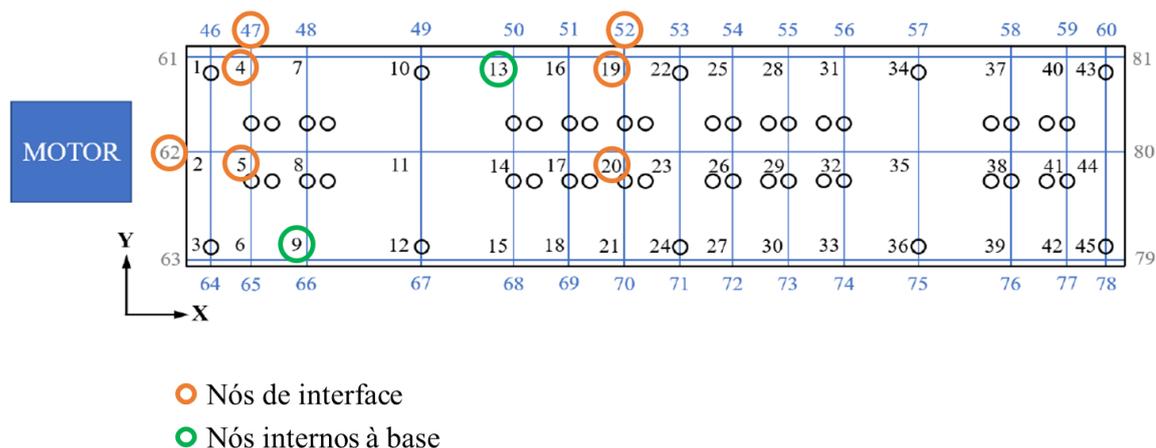


Figura 60 – Nós de sintetização da resposta da base para acoplamento com dois pedestais.

Em suma, caso se acoplem os pedestais obtidos com o terceiro conjunto, utilizar-se-ão os nós de interface 20, 52 e 62 para o pedestal 2 e os nós 5, 47 e 62 para o pedestal 1. Por outro lado, caso se acoplem pedestais obtidos com o quinto conjunto, utilizar-se-á apenas o nó de interface 19 para o pedestal 2 e o nó 4 para o pedestal 1.

A princípio, faz-se a análise modal da base para todos os nós da Figura 60. Os dados do nó 13 são empregados e o mesmo é definido como ponto de excitação. Com a identificação dos parâmetros modais, realiza-se a síntese das matrizes completas de receptância da base. A Figura 61 traz, para a linha do nó 13, a comparação entre as funções de resposta em frequência originais e sintetizadas para mostrar que, de fato, o procedimento ocorre com êxito.

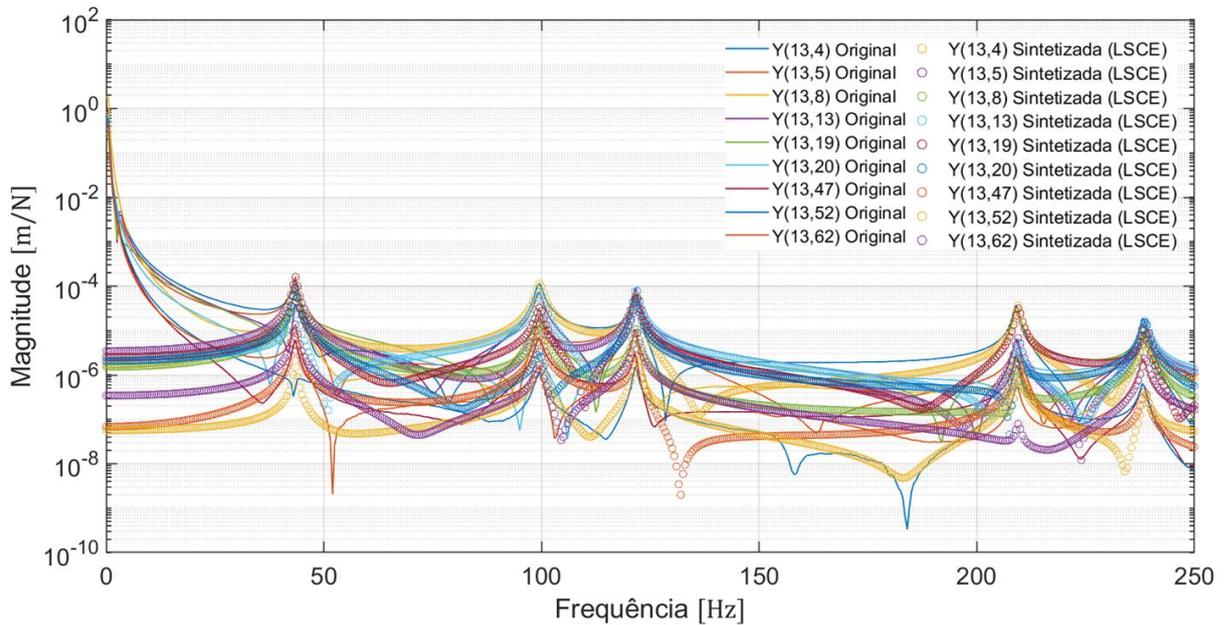


Figura 61 – Comparação entre respostas originais e sintetizadas para a base isolada a ser acoplada com dois pedestais de mancais.

Em seguida, deve-se construir a matriz booleana de localização dos nós de conexão, sendo uma matriz para cada conjunto. A matriz para o acoplamento entre a base e os pedestais cujos nós são 20, 52, 62, 94, 112 e 147 (conjunto três) possui vinte e uma colunas, sendo esse o total de nós entre as três subestruturas, e seis linhas, sendo esse o total de pontos a serem acoplados. A matriz é mostrada na Figura 62. As reticências indicam o preenchimento com zeros.

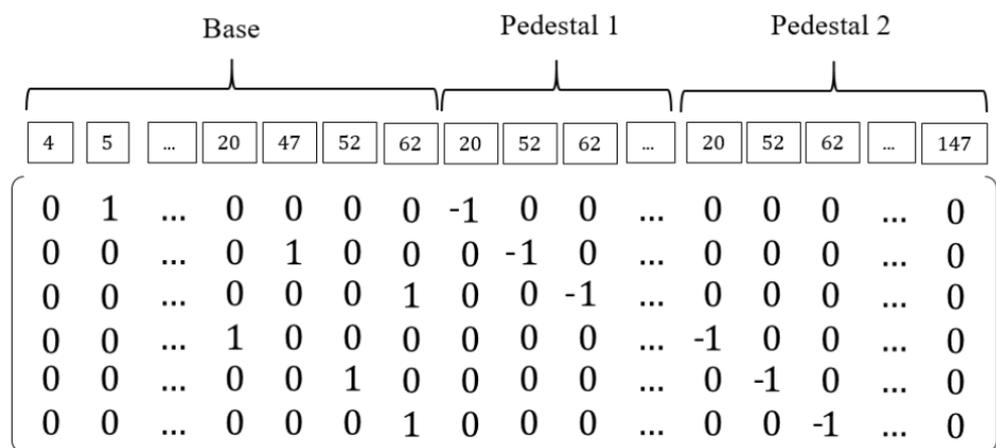


Figura 62 – Matriz de acoplamento da base com dois pedestais no primeiro caso.

Em segundo lugar, tem-se a matriz para o quinto conjunto (cujos nós do pedestal são 19, 94, 98, 111, 112, 147, 151). Esta possui vinte e três colunas e duas linhas e pode ser vista na Figura 63.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 \text{Base} & & \text{Pedestal 1} & & \text{Pedestal 2} & & \\
 \hline
 \boxed{4} & \boxed{\dots} & \boxed{19} & \boxed{\dots} & \boxed{19} & \boxed{94} & \boxed{\dots} & \boxed{19} & \boxed{94} & \boxed{\dots}
 \end{array} \\
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 1 & \dots & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\
 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Figura 63 – Matriz de acoplamento da base com dois pedestais no segundo caso.

O acoplamento foi implementado e os resultados consideram o método Padrão e o Método Superdeterminado. Na Tabela 31 é possível visualizar as frequências naturais e fatores de amortecimento da fundação estimados para cada caso. O algoritmo de identificação de parâmetros modais (LSCE) foi utilizado para cada um dos pontos de excitação disponíveis nas respostas e os melhores resultados são apresentados. Também é apresentado ao lado da frequência natural o correspondente erro relativo em relação às médias da Tabela 30.

Com a comparação e os erros relativos, verifica-se facilmente que o acoplamento realizado com o pedestal obtido do quinto conjunto de nós – identificado como caso 2 na tabela – e com o método Superdeterminado se aproxima mais da resposta experimental. Em segundo lugar, tem-se o acoplamento feito com o pedestal obtido do quinto conjunto de nós (também caso 2) e com o método Padrão. As frequências naturais estimadas se aproximam mais das obtidas com a análise modal da fundação nessa condição, embora alguns fatores de amortecimento apresentem divergências que não podem ser prontamente desconsideradas.

O que se nota com o acoplamento, no entanto, é que alguns modos, especialmente aqueles próximos ou de baixa amplitude, não são identificados com precisão. A estimação das frequências da resposta acoplada considera a informação prévia da localização dos modos físicos obtidos na análise modal e, assim, modos com pouca participação na resposta também são fornecidos ao algoritmo. Este, por sua vez, nem sempre é capaz de identificar esse modo de baixa amplitude.

Tabela 31 – Frequências naturais e fatores de amortecimento do acoplamento entre base suspensa e duas estruturas de suporte de mancais.

Caso	Método Padrão		Método Superdeterminado	
	Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento	Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
Caso 1 (pedestal do conjunto 3) Ponto de excitação: Padrão: nó 4 Superdeterminado: nó 20	38,15 (11,4%)	0,8432	40,10 (17,1%)	0,7271
	62,83 (11,4%)	0,3558	57,09 (1,3%)	0,1263
	62,83 (1,1%)	0,3558	57,09 (8,2%)	0,1263
	62,83 (20,1%)	0,3558	79,33 (0,9%)	0,4386
	98,01 (6,0%)	0,0078	101,41 (2,7%)	0,0171
	115,76 (0,3%)	0,0269	123,41 (7,1%)	0,0404
	115,76 (13,6%)	0,0269	128,50 (4,1%)	0,0715
	173,48 (9,2%)	0,0120	169,29 (6,5%)	0,4676
	173,48 (4,2%)	0,0120	169,29 (1,7%)	0,4676
	174,67 (0,7%)	0,0024	174,01 (1,1%)	0,0030
	209,07 (6,1%)	0,0079	202,63 (2,8%)	0,1130
	230,28 (0,5%)	0,0330	223,78 (3,3%)	0,0059
Caso 2 (pedestal do conjunto 5) Ponto de excitação: Padrão: nó 112.2 ³ Superdeterminado: nó 5	52,37 (52,9%)	0,0130	35,58 (3,9%)	0,7645
	59,34 (5,3%)	0,0143	58,44 (3,7%)	0,0692
	60,61 (2,5%)	0,0239	59,89 (3,7%)	0,0291
	60,61 (22,9%)	0,0239	78,57 (0,1%)	0,2920
	101,14 (3,0%)	0,0342	107,56 (3,2%)	0,0272
	119,36 (3,4%)	0,0735	115,51 (0,1%)	0,0185
	131,45 (1,9%)	0,0131	133,67 (0,2%)	0,0285
	166,91 (5,1%)	0,1311	147,74 (7,0%)	0,0458
	166,91 (0,2%)	0,1311	170,57 (2,4%)	0,0148
	170,20 (3,2%)	0,0217	178,35 (1,4%)	0,0902
	185,24 (6,0%)	0,0246	185,26 (6,0%)	0,0281
	229,07 (1,0%)	0,0100	228,54 (1,3%)	0,0210

³ O termo 112.2 indica que é o nó 112 do pedestal do mancal 2.

A Figura 64 mostra a resposta experimental da fundação com dois pedestais e são destacados os modos que possuem maior amplitude nas funções de resposta em frequência.

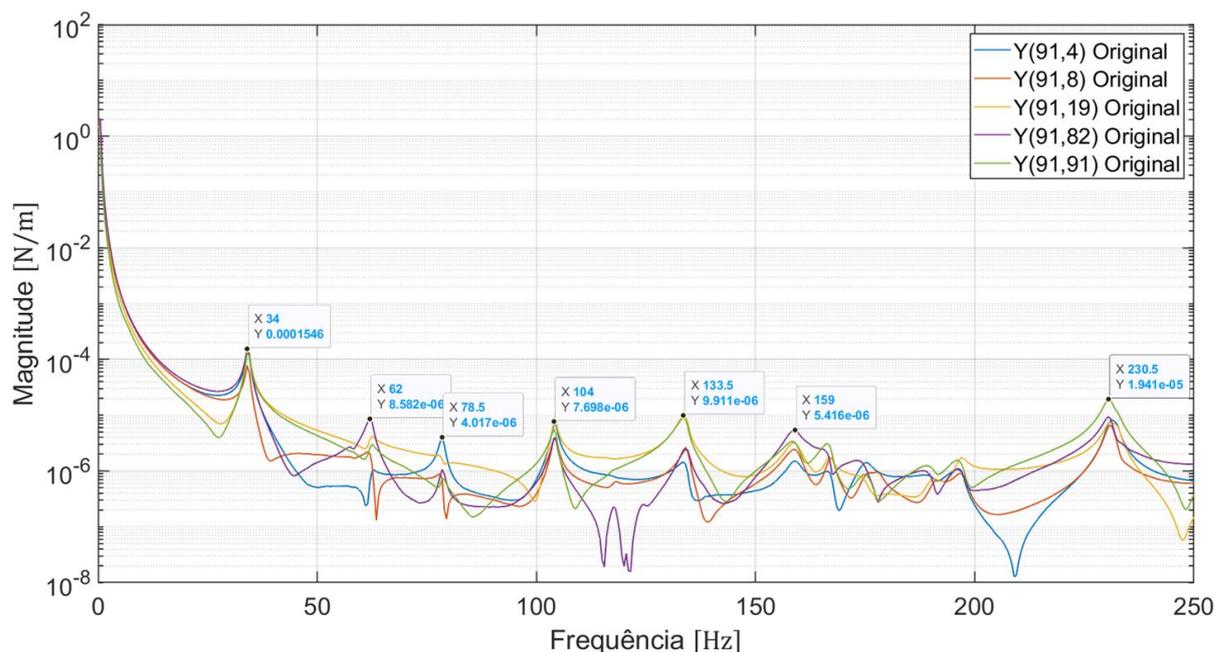


Figura 64 – Resposta experimental da fundação suspensa com dois pedestais.

Observando a Figura 64, que mostra as respostas em frequência de medições no nó 91 da base, e as frequências na coluna do método Superdeterminado para o caso 2 presentes na Tabela 30, percebem-se duas situações:

1) Os modos de aproximadamente 58 e 62 Hz, por serem próximos, não são rigorosamente estimados com distinção. O modo de 58 Hz, como discutido anteriormente, está presente, por exemplo, nas respostas dos nós 12 e 26 da base;

2) Entre aproximadamente 159 Hz e 230 Hz (frequências oito e onze, respectivamente), nota-se na Figura 64 que as amplitudes das respostas do sistema são baixas. Nessa faixa de frequências, por sua vez, foram encontrados os modos de 167 Hz, 175 Hz e 197 Hz na análise modal da fundação. Todavia, verifica-se na Tabela 31 que esses modos não são identificados com acurácia, especialmente o de 197 Hz.

Outra observação importante deve ser feita em relação à diferença entre os resultados dos dois casos: o acoplamento dos pedestais à fundação com apenas um nó de interface na direção Z e seis nós internos à estrutura de suporte (94, 98, 111, 112, 147 e 151) levou a resultados mais

próximos aos reais do que o acoplamento com três nós de interface (20, 52, 62) nas três direções e três nós internos (94, 112 e 147). Assim, constata-se que, mais importante que a quantidade de nós de conexão considerada na subestruturação, é a escolha do nó de interface adequado e da consideração de uma quantidade suficiente de nós internos da subestrutura a ser desacoplada. Além disso, a qualidade da medição também tem influência direta no processo.

Levando em consideração que se verificou a aplicabilidade da subestruturação, do desacoplamento e do acoplamento das subestruturas da fundação e, ainda, se verificou a eficácia entre quatro métodos de desacoplamento, pode-se então empregar a metodologia na fundação montada à bancada de ensaios.

5.3.6 Fundação Completa: Base e Pedestais Montados

A última parte deste trabalho consistiu no estudo da fundação montada na bancada como mostra a Figura 17, base montada na fundação. Inicialmente, tem-se a análise modal da fundação na Condição 4, para a qual se utilizaram todos os conjuntos de nós da base isolada presentes na Tabela 6. Verificou-se que qualquer conjunto resulta nos mesmos parâmetros modais. Foi mantido o nó 13 como ponto de excitação, a mesma faixa de frequências e a ordem de aproximação vinte.

As frequências naturais e fatores de amortecimento são apresentados na Tabela 32 e representam as médias dos resultados obtidos com o LSCE para os cinco primeiros conjuntos de nós da base. Assim, entende-se que a etapa prévia de análise dos diagramas de estabilização e filtragem de modos espúrios também é realizada.

Tabela 32 – Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para a base montada na bancada e sem pedestais.

Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
44,92	0,0127
106,26	0,0187
127,73	0,0109
151,65	0,0197
174,55	0,0184

Em relação aos parâmetros da base na Condição 1, vê-se que apenas o primeiro modo não se altera consideravelmente. A segunda frequência natural aumentou de 99 para 106 Hz, a terceira frequência aumentou de 121 para 127 Hz, a quarta diminuiu de 209 para 151 Hz e a quinta diminuiu de 238 para 174 Hz. Alterações grandes eram esperadas da fixação da base metálica com quatro colunas à bancada, que é rígida.

A comparação entre os modos da base nas duas condições é mostrada na matriz MAC da Figura 65. Nota-se claramente que apenas o primeiro modo da base se mantém pouco alterado.

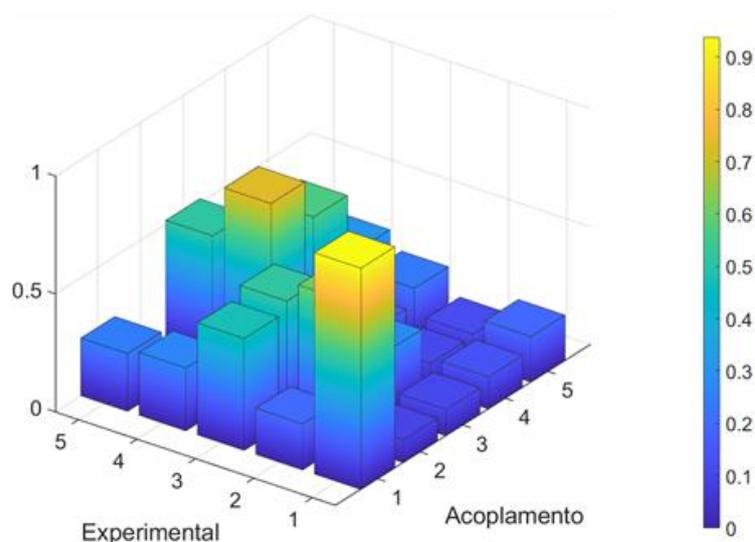


Figura 65 – Comparação entre modos de vibrar da base isolada na condição livre e da base isolada e montada na bancada.

Em seguida, tem-se a análise modal da base montada e com duas estruturas de suporte de mancais (Condição 5). Tendo em vista que a malha de medições é a mesma utilizada na Condição 3, utilizam-se os mesmos conjuntos de nós e mesmos parâmetros. Após verificação dos diagramas de estabilização e filtragem dos modos espúrios, tem-se as frequências naturais e fatores de amortecimento da Tabela 33, obtidos pela média dos resultados dos conjuntos da Tabela 10, ordem vinte e ponto de excitação no nó 91, relativo ao pedestal do mancal 2.

Tabela 33 – Frequências naturais e fatores de amortecimento estimados para a base montada na bancada e com dois pedestais.

Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
37,03	0,0364
58,71	0,0152
80,05	0,0154
95,16	0,0609
123,64	0,0264
132,67	0,0215
169,61	0,0119
186,33	0,0128
219,51	0,0134
241,06	0,0099

Dez modos são identificados até 250 Hz para a fundação completa. Deve-se ressaltar, no entanto, que os modos de 58,71 Hz, 123,64 Hz e 169,61 Hz são de baixa participação (amplitude) e podem, como visto anteriormente, exercer influência na subestruturação da fundação. Em relação às frequências da Condição 3, vê-se que a quantidade diminuiu de doze para dez. Com o aumento da rigidez do sistema e, portanto, das frequências, é possível que dois modos tenham se deslocado para além do limite de 250 Hz ou, ainda, suas amplitudes são extremamente baixas e desprezadas pelo algoritmo.

A fixação da base com pedestais à fundação por meio de quatro colunas certamente ocasiona em um aumento significativo na rigidez do sistema, de modo que se pode prever o aumento das frequências naturais. Uma avaliação das formas modais da estrutura seria

necessária para entender o comportamento de cada frequência natural e associá-las às frequências obtidas na Condição 3.

A etapa principal da análise da fundação montada é o acoplamento de duas estruturas de suporte de mancais numericamente. Assim, percorre-se o procedimento conhecido: sintetização das matrizes de funções de resposta em frequência para a base (sem pedestais) montada na fundação com nós das duas regiões de conexão e acoplamento dos pedestais. Para esse fim, utilizam-se as conclusões do tópico 5.3.5 acerca dos nós de acoplamento e do método Superdeterminado para a resposta da estrutura de suporte de mancal.

Para posterior comparação com as medições experimentais, os pedestais são novamente acoplados conforme a Figura 59. São utilizados pedestais com nós do quinto conjunto (19, 94, 98, 111, 112, 147 e 151), sendo 19 o nó de interface dos pedestais que se conecta aos nós 4 e 19 da base. A matriz de receptância sintetizada para a base compreende os nós da Figura 60.

Na Tabela 34 tem-se os parâmetros modais estimados para a resposta acoplada. A estimação considera o ponto de excitação no nó 9 por ser o que apresentou a melhor acurácia. Ao lado das frequências e fatores de amortecimento, são apresentados respectivamente o erro relativo e o erro absoluto em relação aos valores de referência da Tabela 33.

Tabela 34 – Frequências naturais, fatores de amortecimento e erros estimados da resposta acoplada numericamente entre base montada com dois pedestais.

Frequências naturais [Hz]	Fatores de amortecimento
39,81 (7,49%)	0,0274 (0,0090)
59,32 (1,03%)	0,0138 (0,0014)
76,54 (4,38%)	0,2229 (0,2076)
98,74 (3,76%)	0,0148 (0,0461)
116,63 (5,67%)	0,0108 (0,0156)
131,90 (0,58%)	0,0218 (0,0003)
170,13 (0,31%)	0,0149 (0,0030)
184,61 (0,92%)	0,0354 (0,0227)
217,09 (1,10%)	0,0047 (0,0087)
239,12 (0,81%)	0,0174 (0,0075)

A utilização do erro absoluto para os fatores de amortecimento foi definida tendo em vista que o cálculo do erro relativo entre valores muito pequenos resulta em quantias altas e que podem levar a interpretações errôneas.

Os dez modos da fundação são identificados com alta exatidão. Considerando que a resposta utilizada para o acoplamento do pedestal foi obtida da base metálica na Condição 1, em que estavam suspensos e livres de interação com a bancada de testes, erros relativos de 7,5% são aceitáveis, como o observado para o primeiro modo. Percebe-se, ainda, que a subestruturação nesta etapa teve mais sucesso que a realizada no acoplamento das estruturas de suporte à base na Condição 3.

Verifica-se que os erros absolutos dos fatores de amortecimento são baixos, à exceção do terceiro modo, em que ocorre uma defasagem de mais de 20%. Tendo em vista que o fator de amortecimento é um parâmetro que apresenta alta sensibilidade a operações matemáticas, variações em alguns parâmetros de simulação resultam em diferenças que podem ser significativas. O mesmo fator de amortecimento determinado com o ponto de excitação no nó 5, por exemplo, é de 0,0258, o que representa um erro absoluto de apenas 1%.

Com estes resultados, mostra-se que o acoplamento do pedestal pode ser efetuado numericamente à fundação em qualquer quantidade e em quaisquer posições. Pressupondo que se disponham de medições de qualidade de nós próximos à região de acoplamento, tanto para a base quanto para o pedestal (ou outra subestrutura a ser desacoplada), os processos de subestruturação podem ser utilizados com eficácia garantida.

6 CONCLUSÃO

A subestruturação dinâmica experimental se mostrou uma ferramenta promissora na análise de estruturas. Sua capacidade de combinar as respostas dinâmicas de diversos subsistemas possibilita que cada condição seja identificada da melhor maneira possível antes do acoplamento do sistema global. Por facilitar a utilização de dados experimentais, é capaz de incluir informações que comumente não são bem descritas por outras técnicas, como informações de amortecimento e acoplamentos nas interfaces.

Com a fundamentação teórica, constatou-se que a subestruturação realizada no domínio da frequência se apresenta como uma metodologia muito útil para sistemas cujas respostas experimentais obtidas são em função da frequência. Desse modo, a formulação é facilmente escrita com o uso das matrizes de impedância mecânica e receptância dos subsistemas. Combinadas às respostas de rotores e mancais, as quais podem ser escritas no domínio da frequência, o acoplamento e desacoplamento de subestruturas se torna uma técnica versátil que fornece respostas mais próximas à realidade.

Além disso, verificou-se que nestas situações experimentais, em que não é necessário medir e excitar todos os pontos de interesse de uma estrutura, a aplicação da análise modal experimental tem capacidade de, através do método dos mínimos quadrados para exponenciais complexas (LSCE), permitir a sintetização das matrizes completas de funções de resposta em frequência através dos modos estimados em uma faixa de frequências de interesse.

A implementação dos procedimentos de desacoplamento e acoplamento possibilitou a aplicação da subestruturação em sistemas massa-mola e uma análise preliminar do desempenho das técnicas. Mostrou-se ainda a eficiência dos procedimentos de estimação de parâmetros modais pelo LSCE e a reconstituição de matrizes de receptância por meio dos parâmetros identificados. O desacoplamento e o acoplamento das subestruturas se deram tanto com os dados obtidos diretamente da modelagem quanto com os obtidos via sintetização, de forma que as funções de resposta em frequência obtidas por diferentes abordagens puderam ser comparadas.

Os resultados preliminares dos quatro métodos de desacoplamento mostraram que, quando se utilizam dados puros e sem erros de medição, todos apresentam bons desempenhos e resultam em respostas similares às de referência. A comparação entre os métodos indica que

o Superdeterminado supera os demais em termos de exatidão posto que resulta em menores erros relativos e em maior acurácia no desacoplamento da subestrutura analisada. O desacoplamento e o acoplamento entre as subestruturas analíticas também se mostraram efetivos tanto para matrizes de receptância originais quando para as reconstituídas.

Em seguida, fez-se a análise experimental da fundação de máquinas rotativas do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR). A fundação é uma estrutura inercial que, além de suportar o rotor, interage dinamicamente com a máquina operação. A parcela da fundação considerada consiste em um base metálica e duas estruturas de suportes de mancais, também chamadas de pedestais, que, por sua vez, não viabilizam a realização de medições se não estiverem acopladas à base.

Foram analisadas cinco condições diferentes para o sistema: base sem pedestais e suspensa (simulando o componente livre de interações com a bancada, ou “livre-livre”), base com um pedestal e na condição livre-livre, base com dois pedestais e na condição livre-livre, base sem pedestais e montada à bancada de testes e base com dois pedestais e também montada à bancada de testes.

A aplicação da análise modal experimental ao sistema em cada uma das cinco condições resultou na identificação das frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar existentes até o limite de 250 Hz. A associação do algoritmo LSCE aos diagramas de estabilização permitiu a filtragem de modos espúrios, a definição de ordens de aproximação adequadas dos modelos utilizados e a investigação da influência da variação do ponto de excitação (*driving point*) definido em cada análise. Em particular, verificou-se a influência da quantidade de nós de medição utilizados na análise modal em relação à qualidade e precisão dos resultados.

O desacoplamento de uma estrutura de suporte de mancais realizado para a base na condição livre-livre mostrou novamente as diferenças entre os quatro métodos de desacoplamento – considerando dados experimentais – e as influências das quantidades de nós de medição utilizados no processo. Com a validação do procedimento de desacoplamento através do acoplamento do pedestal à base isolada e comparação dos resultados numéricos e experimentais, verificou-se que os métodos Padrão e Superdeterminado apresentam os melhores desempenhos.

Em seguida, com o acoplamento de duas estruturas de suporte de mancais à base, tanto na condição livre-livre quanto montada à bancada, constatou-se que, de fato, o método

Superdeterminado se caracteriza como o mais adequado ao desacoplamento do pedestal uma vez que os parâmetros modais das respostas acopladas exibiram correspondência aos obtidos com respostas experimentais. Como visto em trabalhos de referência, o método Superdeterminado de fato mostrou o melhor desempenho em diversas situações experimentais. Ainda, a comparação entre o acoplamento realizado com os nós de interface diferentes e com dois pedestais descritos por nós internos diferentes apontou as distinções entre cada opção e a que repercute em melhores resultados.

Demonstrou-se, em geral, a aplicabilidade da subestruturação em uma fundação de máquinas rotativas e a versatilidade das técnicas de acoplamento e desacoplamento em componentes reais. As conclusões acerca dos diferentes métodos de desacoplamento e as influências decorrentes dos diversos parâmetros da análise modal experimental expõem a vantagem de utilização da metodologia para a subestruturação de sistemas grandes em que alterações físicas são praticamente inviáveis.

Com a subestruturação da fundação, viabiliza-se finalmente seu acoplamento ao rotor por meio do método das coordenadas mistas (CAVALCA, 1993) em que a fundação, representada por coordenadas modais, é incluída na análise com a mesma quantidade de modos que são efetivamente identificados na faixa de frequências (rotação) do rotor, representado por coordenadas físicas. Assim, novos ensaios e simulações podem ser facilmente executados com diferentes configurações de montagem do sistema.

Viabiliza-se ainda a implementação de técnicas de aprendizado de máquina para a detecção de defeitos e diagnóstico de falhas da fundação a partir da resposta do rotor uma vez que os comportamentos individuais e saudáveis da base e dos pedestais são conhecidos. Além disso, com a análise modal operacional, possibilita-se a investigação do sistema e sua análise quando este se encontra em operação, contribuindo para o estudo em tempo real da máquina rotativa e da fundação.

6.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Devido à grande relevância do tema abordado no presente trabalho, juntamente aos resultados e desafios encontrados na aplicação e utilização da subestruturação, sugerem-se, para trabalhos futuros:

- 1) Implementação da análise de incertezas associada à subestruturação, com definição de intervalos de confiança para as respostas acopladas e desacopladas;
- 2) Verificação da influência em considerar os resíduos inferior e superior na síntese das matrizes de receptância e na subestruturação;
- 3) Aplicação de métodos de relaxamento das condições de interface através da utilização do domínio modal;
- 4) Analisar aplicabilidade dos conceitos de observabilidade e controlabilidade para definir nós adequados de medição e excitação das estruturas e subsistemas;
- 5) Representação da fundação por coordenadas modais e associação à máquina rotativa por meio do método das coordenadas mistas. Com a introdução do rotor na análise, será possível simular a resposta do sistema para diferentes configurações de montagem dos pedestais;
- 6) Investigação da aplicabilidade de técnicas de aprendizado de máquinas e da análise modal operacional para detecção de defeitos tanto nos componentes individuais da fundação quanto no rotor.

Referências

- ALLEMANG, R. J. The modal assurance criterion – twenty years of use and abuse. **Sound & Vibration**, v. 37, p. 14-23, 2003.
- BENFIELD, W. A.; HRUDA, R. F. Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution. **AIAA Journal**, v. 9, p. 1255-1261, 1971.
- BILBAO, J. A.; BOROSCHEK, R. L. Interpretation of stabilization diagrams using density-based clustering algorithm. **Engineering Structures**, v. 178, p. 245-257, 2019.
- BISHOP, R. E. D.; GLADWELL, G. M. L., 1963. An investigation into the theory of resonance testing. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, v. 255, p. 241-280, 1963.
- BÖSWALD, M.; GÖGE, D.; FÜLLEKRUG, U.; GOVERS, Y. A Review of Experimental Modal Analysis Methods with respect to their Applicability to Test Data of Large Aircraft Structures. **ISMA**, p. 2461-2481, 2006.
- BRINCKER, R.; VENTURA, C. E. **Introduction to Operational Modal Analysis**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2015.
- CAVALCA, K. L. **L'interazione tra rotori e struttura portante: metodologie per la sua modellazione**. 1993. Tese (Doutorado) – Departamento de Mecânica, Politécnico de Milão, Milão, 1993.
- CRAIG JR, R. R. Substructure Methods in Vibration. **ASME. Journal of Vibration and Acoustics**, Volume 117(B), p. 207-213, 1995.
- CRAIG JR, R. R.; BAMPTON, M. C. C. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. **AIAA Journal**, 6(7), pp. 1313-1319, 1968.

CRAIG JR, R. R.; CHANG, C. J. Free Interface Methods of Substructure Coupling for Dynamic Analysis. **AIAA Journal**, v. 14, p. 1633-1635, 1976.

CURNIER, A. On Three Modal Synthesis Variants. **Journal of Sound and Vibration**, v. 90, p. 527-540, 1983.

D'AMBROGIO, W.; FREGOLENT, A. Decoupling procedures in the general framework of Frequency Based Substructuring. **Proceedings of the IMAC-XXVII**, p. 9-12, fev 2009.

D'AMBROGIO, W.; FREGOLENT, A. Replacement of unobservable coupling DOFs in substructure decoupling. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 95, p. 380-396, 2017.

DEDINI, F. G. **Identificazione dei cuscinetti e della fondazione di rotori: metodologie e risultati sperimentali**. 1993. Tese (Doutorado) - Politécnico de Milão, Milão, 1993.

EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory, Practice and Application**. 2 ed. Baldock, Hertfordshire: Research Studies Press LTD, 2000.

GLADWELL, G. Branch Mode Analysis of Vibrating Systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 1, p. 41-59, 1964.

HE, J.; FU, Z.-F. **Modal Analysis**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.

HINTZ, R. M. Analytical Methods in Component Mode Synthesis. **AIAA Journal**, v. 13, p. 1007-1016, 1975.

HURTY, W. C. Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. **AIAA Journal**, v. 3:4, p. 678-685, 1965.

HURTY, W. C.; COLLINS, J. D.; HART, G. C. Dynamic Analysis of Large Structures by Modal Synthesis Technique. **Computers and Structures**, v.1, p. 535-563, 1971.

JETMUNDTSEN, B.; BIELAWA, R.; FLANNELLY, W. Generalized Frequency Domain Substructure Synthesis. **Journal of the American Helicopter Society**, v. 33(1), p. 55-65, 1988.

KENNEDY, C. C.; PANCU, C. D. P. Use of Vectors in Vibration Measurement and Analysis. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 14(11), p. 603-625, 1947.

MACNEAL, R. H. A Hybrid Method of Component Mode Synthesis. **Computers & Structures**, v.1, p. 581-601, 1971.

MAGALHÃES, F. M. R. L. **Operational Modal Analysis for Testing and Monitoring of Bridges and Special Structures**. 2010. Tese (Doutorado) – Universidade do Porto, Porto, 2010.

MARTIN, L. B. S. **Interação entre rotor e fundação flexível sujeita a variações estruturais**. 2020. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2020.

PASTOR, M; BINDA, M.; HARČARIK, T. Modal Assurance Criterion. **Procedia Engineering**, v. 48, p. 543-548, 2012.

PEETERS, P.; MANZATO, S.; TAMAROZZI, T.; DESMET, W. Reducing the impact of measurement errors in FRF-based substructure decoupling using a modal model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 99, p. 384-402, 2018.

PEETERS, P.; TAMAROZZI, T.; VANHOLLEBEKE, F.; DESMET, W. A robust approach for substructure decoupling. **Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA**, p. 3907-3921, 2014.

PRZEMIENIECKI, J. S. Matrix structural analysis of substructures. **AIAA Journal**, v. 1(1), p. 138-147, 1963.

QIN, S.; KANG, J.; WANG, Q. Operational Modal Analysis Based on Subspace Algorithm with an Improved Stabilization Diagram Method. **Shock and Vibration**, p. 1-10, 2016.

RIXEN, D. et al. *Substructuring in Engineering Dynamics*. Udine: Springer, 2020.

RIXEN, D. J. A dual Craig-Bampton method for dynamic substructuring. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v.168, p. 383-391, 2004.

RIXEN, D. J.; GRUBER, F. M.; RUTZMOSEER, J. B. Comparison between primal and dual Craig-Bampton substructure reduction techniques. **XI International Conference on Engineering Vibration**, 2015.

RIXEN, D. J.; VOORMEEREN, S. N. A dual approach to substructure decoupling techniques. **Proceedings of the IMAC-XXVIII**, 2010.

RIXEN, D. J.; VOORMEEREN, S. N. A family of substructure decoupling techniques based on a dual assembly approach. **Mechanical Systems and Signal Processing**, p. 379-396, 2012.

RIXEN, D. J.; VOORMEEREN, S. N.; de KLERK, D. General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review, and Classification of Techniques. **AIAA Journal**, v. 46(5), p. 1169-1181, 2008.

RUBIN, S. Improved Component Mode Representation for Structural Dynamic Analysis. **AIAA Journal**, v.13, p. 995-1006, 1975.

SESHU, P. Substructuring and Component Mode Synthesis. **Shock and Vibration**, v. 4(3), p. 199-210, 1997.

VAN DER SEIJS, M. **Experimental Dynamic Substructuring: Analysis and Design Strategies for Vehicle Development**. 2016. Tese (Doutorado) – Universidade Técnica de Delft, Delft, 2016.

VOORMEEREN, S. N.; DE KLERK, D.; RIXEN, D. J. Uncertainty quantification in experimental frequency based substructuring. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 24(1), p. 106-118, 2010.