



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

LUCAS HENRIQUE SILVEIRA GOMES

Teoria de Transporte Ótimo e os Grupos de Isometrias de Espaços Métricos de Medida

Campinas

2022

Lucas Henrique Silveira Gomes

Teoria de Transporte Ótimo e os Grupos de Isometrias de Espaços Métricos de Medida

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Christian da Silva Rodrigues

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Lucas Henrique Silveira Gomes e orientado pelo Prof. Dr. Christian da Silva Rodrigues.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

G585t Gomes, Lucas Henrique Silveira, 1997-
Teoria de transporte ótimo e os grupos de isometrias de espaços métricos de medida / Lucas Henrique Silveira Gomes. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Christian da Silva Rodrigues.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Transporte ótimo. 2. Distância de Wasserstein. 3. Geometria métrica. 4. Grupo de isometria. 5. Espaços de probabilidade. I. Rodrigues, Christian da Silva, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Optimal transport theory and the isometry groups of metric measure spaces

Palavras-chave em inglês:

Optimal transportation

Wasserstein distance

Metric geometry

Isometry group

Probability spaces

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Christian da Silva Rodrigues [Orientador]

Luiz Antonio Barrera San Martin

Paolo Piccione

Data de defesa: 10-03-2022

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-4321-6851>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/1012192339158186>

**Dissertação de Mestrado defendida em 10 de março de 2022 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). CHRISTIAN DA SILVA RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof(a). Dr(a). PAOLO PICCIONE

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, Silvana, por todo amor e carinho, à minha irmã, Priscilla, pelo apoio moral e palavras de incentivos e ao meu pai, Cleomar, por acreditar e investir na minha formação acadêmica.

Agradeço ao meu orientador Christian pelo acolhimento e ao incrível trabalho de orientação ao longo do turbulento período da pandemia.

Agradeço ao meu velho amigo João pelo apoio e companhia durante esta fase da pandemia.

Agradeço ao Santos, meu professor de Kendô, cujo ensinamentos me ajudaram durante esses tempos difíceis.

Agradeço ao meu bom amigo Arthur, cujo entusiasmo manteve nosso círculo de amizades em constante contato durante a fase de ensino remoto.

Agradeço a todos os meus amigos que conheci na UNICAMP, pelos nossos bons momentos e pela nossa constante curiosidade e interesse de aprender uns com os outros.

Agradeço ao Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro através da concessão de processo 132519/2020-8.

Resumo

Nesta dissertação estuda-se elementos da Teoria de Transporte Ótimo, de estruturas de comprimento em espaços métricos e de aproximação de espaços métricos com o objetivo de mostrar sob quais condições os grupos de isometrias de um espaço métrico de medida serão grupos de Lie. Em particular, mostra-se que os grupos de isometrias de espaços cujo problema de transporte ótimo é bem comportado são grupos de Lie.

Além disso, também estuda-se funcionais lagrangianos como generalização de funcionais de comprimento através da Teoria de Transporte Ótimo e como isto pode ser usado para mostrar que os espaços de Wasserstein são espaços geodésicos.

Palavras-chave: Transporte Ótimo, Distância de Wasserstein, Espaços de Probabilidade, Espaços Métricos de Medida, Grupos de Isometrias, Espaços de Comprimento, Funcionais Lagrangianos, Geometria de Métrica.

Abstract

In this dissertation, we study elements of the Theory of Optimal Transport, of length structures in metric spaces, and approximations of metric spaces with the goal of showing in which conditions the groups of isometries of a metric measure space will be Lie groups. In particular, we show that the isometry groups of spaces in which the optimal transport problem is well behaved are Lie groups.

Moreover, we also study lagrangian functionals as a generalization of length functionals by means of the theory of optimal transport and how this can be used to show that the Wasserstein spaces are geodesic.

Keywords: Optimal Transport, Wasserstein Distance, Probability Spaces, Metric Measure Spaces, Isometry Groups, Length Spaces, Lagrangian Functionals, Metric Geometry.

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\overline{\mathbb{R}}$	Espaço dos reais estendidos
$\mathcal{B}(X)$	σ -álgebra de Borel do espaço topológico X
$\text{card } A$	Cardinalidade do conjunto A
χ_A	Função característica do conjunto A
$C(X; Y)$	Espaço das funções contínuas do espaço topológico X ao Y
$C_b(X; \mathbb{R})$	Espaço das funções reais contínuas limitadas de um espaço X
$L^p(X, \mu)$	Espaço de Lebesgue do espaço de medida (X, μ) de ordem p
$\ \cdot\ _p$	Norma do espaço $L^p(X, \mu)$
$P(X)$	Conjunto das medidas de probabilidades de um espaço mensurável X
δ_x	Medida de Dirac no ponto x
$P_p(X)$	Espaço de Wasserstein de ordem p
W_p	Distância de Wasserstein de ordem p
$\Pi(\mu, \nu)$	Conjunto dos coupling das medidas de probabilidades μ e ν
$\gamma_1 \oplus \gamma_2$	Concatenação das curvas γ_1 e γ_2
$\text{diam } S$	Diâmetro de um subconjunto S de um espaço métrico
d_{GH}	Distância de Gromov-Hausdorff
d_{pGH}	Distância de Gromov-Hausdorff pontuada
d_E	Métrica usual do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$
$O(n)$	Conjunto das matrizes ortogonais $n \times n$

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	13
2.1	Topologia e Espaços Métricos	13
2.2	Teoria da Medida	17
2.3	Teoria da Medida com Topologia	20
2.4	Variedades Suaves e Riemannianas	23
2.5	Teoria de Grupos e Grupos de Lie	25
3	Teoria de Transporte Ótimo	29
3.1	O Problema do Transporte Ótimo de Monge e de Kantorovich	29
3.2	A Dualidade de Kantorovich	34
4	Os Espaços de Wasserstein	38
5	Espaços de Comprimento	43
5.1	Estrutura de Comprimento	43
5.2	Parametrização e Velocidade	55
6	Ações Lagrangianas	57
7	Distância entre Espaços Métricos	71
7.1	Distância de Gromov-Hausdorff	71
7.2	Distância de Gromov-Hausdorff Pontuada	77
7.3	Convergência de Gromov-Hausdorff Pontuada Equivariante	80
8	Grupos de Isometria de Espaços Métricos de Medida	82
8.1	O Teorema Principal	82
8.2	Teoria de Transporte Ótimo em Espaços Métricos de Medida	93
	Referências	95

Capítulo 1

Introdução

A Teoria de Transporte Ótimo vem se tornando uma útil ferramenta no estudo de limites inferiores de curvaturas de variedades riemannianas e suas possíveis generalizações para espaços métricos. Em [21], McCann estudou soluções do problema de minimização de um funcional de energia de gases em $\mathbb{R}^n$, levando naturalmente aos conceitos de interpolação de deslocamento entre densidades e deslocamento convexo de certos funcionais de energia. Isto levou, conseqüentemente, a uma generalização dos argumentos utilizados em $\mathbb{R}^n$ para o caso riemanniano, na qual a Teoria de Transporte Ótimo é fundamental no tratamento de interpolações entre medidas absolutamente contínuas com respeito à medida volume em variedades, que modelam as distribuições de gases. O estudo de certos funcionais de energia, que são deslocamentos convexos generalizados do trabalho de McCann, deu origem à descoberta de várias conexões com limites inferiores de curvaturas de variedades riemannianas, originando uma nova ferramenta no estudo de curvatura em geometria. Além disso, com os trabalhos de Lott e Villani em [19] e, independentemente, Sturm em [29], foi obtida uma generalização do conceito de limites inferiores de curvatura, frequentemente chamado de condição de curvatura, para espaços métricos de medida, espaços que não possuem estrutura suave, mas são munidos de uma medida fixada, analogamente ao caso riemanniano que possui a medida volume.

Este trabalho terá dois objetivos: estudar elementos da Teoria de Transporte Ótimo e um resultado recente apresentado em [26] e [27], em que o autor utiliza estruturas adicionais, motivado pelo estudo dessa curvatura generalizada, para mostrar que o grupo de isometrias de certos espaços métricos de medida é um grupo de Lie. Um resultado similar em espaços com condição de curvatura também é dado independentemente em [25]. Não trataremos curvatura nesta dissertação, entretanto os elementos aqui apresentados pavimentam o caminho para o estudo desses espaços e das aplicações da teoria de Lie sobre eles. Vejamos qual o interesse no estudo do grupo de isometrias em espaços com condição de curvatura.

Por um lado, em uma variedade riemanniana M , temos que $\text{Iso}(M)$, o conjunto de isometrias de M , é um grupo de Lie pelo teorema de Myers-Steenrod, que age

naturalmente em M . O estudo do grupo de isometrias de variedades riemannianas é particularmente interessante devido à sua aplicabilidade no estudo de espaços simétricos e como a curvatura do espaço se comporta sob quocientes. Em espaços simétricos globais, temos um resultado de classificação, a menos de isometrias locais, devido ao fato de que estes espaços podem ser descritos como o quociente de grupos de isometria agindo sobre o espaço. Assim, o estudo de espaços simétricos se reduz, em parte, ao estudo de certas propriedades de grupos de Lie.

Por outro lado, para certos espaços métricos X , temos que $\text{Iso}(X)$ é um grupo topológico na topologia compacta-aberta, que age continuamente em X . Assim, tendo noções de curvatura em espaços métricos de medida e ações de grupo de Lie nesses espaços, com o exemplo de classificação acima é natural se perguntar se podemos ter resultados similares de classificação, utilizando a ação de grupos de isometrias. Gerardo, em sua tese [27], também estudou a preservação de certas propriedades de curvatura sob o quociente de ações de grupos de Lie, agindo por isometrias. Isto motiva, além do estudo da Teoria de Transporte Ótimo, o porquê de estarmos interessados na estrutura de Lie de $\text{Iso}(X)$. Desta forma, focaremos nosso trabalho em estudar as ferramentas necessárias para a obtenção do seguinte resultado, escrito aqui informalmente, cujo enunciado preciso é dado pelo teorema 8.1:

Teorema 1.0.1. Seja X um espaço métrico de medida satisfazendo certas hipóteses topológicas e possuindo uma noção de “espaço tangente”. Então, $\text{Iso}(X)$ é um grupo de Lie.

A organização do texto é dada na sequência.

- No capítulo 2, enunciaremos os resultados sobre os aspectos de Topologia, de Teoria da Medida e da Teoria de Grupos relevantes para o estudo da Teoria de Transporte Ótimo e para o resultado principal.
- No capítulo 3, iniciaremos o estudo da Teoria de Transporte Ótimo. Começaremos com um exemplo logístico para motivar as formulações de Monge e de Kantorovich do problema do transporte ótimo. Veremos que o problema de Kantorovich sempre possuirá solução sob hipóteses não muito restritivas, diferentemente da solução de Monge. Ao final do capítulo, introduziremos brevemente o problema dual e a solução do problema de Monge em variedades riemannianas.
- No capítulo 4, definiremos os espaços de Wasserstein, fundamentais no estudo de espaços com condição de curvatura através da Teoria de Transporte Ótimo. Em particular, mostraremos que eles são espaços métricos e enunciaremos, sem demonstrar, algumas de suas propriedades. Ao final do capítulo teremos uma breve discussão para motivar a construção dos próximos capítulos.

- No capítulo 5, estudaremos espaços de comprimento, que servem como um espaço base para o estudo de noções de curvatura em espaços métricos. Veremos que esses espaços surgem naturalmente como a generalização da estrutura presente em variedades riemannianas. Também veremos que esses espaços possuem uma série de boas propriedades, inacessíveis para espaços métricos gerais.
- No capítulo 6, estudaremos ações lagrangianas, que são uma generalização das estruturas de comprimentos através da Teoria de Transporte Ótimo. Elas também generalizam a noção de ações lagrangianas encontrada na Física e na teoria do Cálculo Variacional. Em particular, as utilizaremos para mostrar que os espaços de Wasserstein são espaços de comprimento geodésicos, como definido no capítulo 4.
- No capítulo 7, estudaremos a distância de Gromov-Hausdorff e suas adaptações. Esta distância visa definir uma noção de aproximação entre espaços métricos e terá um papel fundamental para a definição de um conceito de espaços tangentes em espaços métricos de medida.
- Por fim, no capítulo 8, desenvolveremos as noções precisas de espaço métrico de medida e de espaços tangentes a fim de enunciarmos e demonstrarmos, da forma mais detalhada possível, o resultado principal desta dissertação. Ao final do capítulo, daremos uma breve aplicação da Teoria de Transporte Ótimo junto ao teorema principal.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo visa compilar os resultados e definições importantes para o desenvolvimento do resto da dissertação. Nem todos os resultados clássicos foram listados, porém as referências utilizadas para a construção do texto serão indicadas. O leitor experiente pode utilizar este capítulo somente como referência dos resultados utilizados ao longo deste trabalho.

2.1 Topologia e Espaços Métricos

Nesta seção concentraremos os resultados de topologia relevantes para a dissertação. Em geral, trabalharemos com espaços métricos, porém um conhecimento de topologia básica ainda é necessário. Nos basearemos principalmente nas referências [1], [23], [18] e [35].

As próximas definições são elementares, entretanto as enunciaremos aqui por completude.

Definição 2.1.1. Seja X um conjunto. Uma função não negativa $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma métrica se satisfaz:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ para todos $x, y \in X$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todos $x, y, z \in X$.

O par (X, d) é chamado de espaço métrico. Frequentemente diremos que X é um espaço métrico, ficando subentendido a métrica d .

Frequentemente, denotaremos a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^n$ por d_E . Assim, $d_E(x, y) := \|y - x\|$.

Definição 2.1.2. Seja X um conjunto e $\tau \subset 2^X$ um subconjunto do conjunto das partes de X . Dizemos que τ é uma topologia se satisfaz:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. Se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau$ for uma família de conjuntos em τ , então $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
3. Se $\{U_1, \dots, U_N\} \subset \tau$ for uma família finita de conjuntos em τ , então $\bigcap_{i=1}^N U_i \in \tau$.

O par (X, τ) é chamado de espaço topológico. Frequentemente diremos que X é um espaço topológico, ficando subentendido a topologia τ .

A próxima definição fixa nossa notação das bolas de um espaço métrico.

Definição 2.1.3. Seja (X, d) um espaço métrico. Denotaremos por

- $B(x, R)$ a bola aberta de centro $x \in X$ e raio $R > 0$;
- $B[x, R]$ a bola fechada de centro $x \in X$ e raio $R > 0$;
- $d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$ a distância de $x \in X$ ao conjunto $A \subset X$.

Também nos será útil denotarmos a bola aberta por $B(x, R, X)$ para enfatizá-la como subconjunto de X .

Lembre-se que, em espaços métricos, podemos definir uma vizinhança de um conjunto.

Definição 2.1.4. Seja (X, d) um espaço métrico. Definimos a ε -vizinhança $U(A, \varepsilon)$ de um subconjunto $A \subset X$ como sendo o conjunto:

$$U(A, \varepsilon) := \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon),$$

ou, equivalentemente, como:

$$U(A, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$$

A próxima definição é útil para a classificação de compactos em espaços métricos.

Definição 2.1.5. Sejam X um espaço métrico e $\varepsilon > 0$. Dizemos que um subconjunto $S \subset X$ é uma ε -rede de X se $d(x, S) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Dizemos que X é um espaço totalmente limitado se para todo $\varepsilon > 0$, existir uma ε -rede com finitos elementos de X .

Dentre as várias caracterizações de subconjuntos compactos, atentamos para o seguinte resultado.

Proposição 2.1.1. Um espaço métrico X será compacto se, e somente se, X for um espaço completo e totalmente limitado.

Demonstração. Veja a proposição 7 do capítulo 8 em [18]. $\square$

O próximo teorema terá várias aplicações ao longo do texto.

Teorema 2.1.1 (Lema do Número de Lebesgue para subconjuntos). Sejam (X, d) um espaço métrico, $K \subset X$ um compacto e $\{U_\alpha\}_\alpha$ uma cobertura aberta de X . Assim, existe um $\delta > 0$ tal que se $S \subset X$ for um conjunto com $\text{diam } S < \delta$ e $S \cap K \neq \emptyset$, então $\exists \alpha$ tal que $S \subset U_\alpha$.

Demonstração. A demonstração segue de uma pequena adaptação da prova da proposição 10 do capítulo 8 em [18]. $\square$

Uma consequência direta desse teorema é:

Corolário 2.1.1. Sejam (X, d) um espaço métrico, $K \subset X$ um compacto e $U \subset X$ um aberto tal que $K \subset U$. Então, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $U(K, \varepsilon) \subset U$.

Demonstração. Como U é aberto, então para todo $x \in U$ existe um $\delta(x) > 0$ tal que $U_x := B(x, \delta(x)) \subset U$. Vemos que $U = \bigcup_{x \in X} U_x \supset K$. Como K é compacto, existem $x_1, \dots, x_n \in K$ tais que $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ forma uma cobertura aberta de K . Pelo lema do número de Lebesgue para subconjuntos, existe um $\varepsilon > 0$ tal que se $\text{diam } A < 3\varepsilon$ com $A \cap K \neq \emptyset$, então existe um x_i tal que $A \subset U_{x_i}$. Desta forma, para todo $z \in K$, temos que $B(z, \varepsilon) \subset U_{x_i}$ para algum i . Isto implica que $U(K, \varepsilon) \subset U$. $\square$

A nossa definição de espaço localmente compacto é dada por:

Definição 2.1.6. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é localmente compacto se para todo $x \in X$ existir um aberto U contendo x e um compacto K tal que $x \in U \subset K$.

Boa parte dos resultados deste trabalho utilizará o espaço de funções contínuas. Assim, definimos:

Definição 2.1.7. Sejam X e Y espaços topológicos, e $C(X; Y)$ o conjunto das funções contínuas de X para Y . Se $K \subset X$ for um compacto e $U \subset Y$ for um aberto, defina o seguinte conjunto:

$$W(K, U) := \{f \in C(X; Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

Definimos a topologia compacto-aberta de $C(X; Y)$ como a topologia gerada pela sub-base $\{W(K, U)\}_{K, U}$.

É importante salientar a regularidade desses espaços em diversas topologias.

Proposição 2.1.2. Sejam X e Y espaços topológicos, com Y um espaço de Hausdorff. Considere $C(X; Y)$ com a topologia compacto-aberta. Então, $C(X; Y)$ é um espaço de Hausdorff.

Demonstração. Sejam $g, f \in C(X, Y)$ tais que $g \neq f$. Logo, existe um $x \in X$ tal que $g(x) \neq f(x)$. Como Y é Hausdorff, então existem abertos U_f contendo $f(x)$ e U_g contendo $g(x)$ tais que $U_f \cap U_g = \emptyset$. Portanto, $g \in W(\{x\}, U_g)$ e $f \in W(\{x\}, U_f)$, além disso $W(\{x\}, U_g) \cap W(\{x\}, U_f) = \emptyset$. $\square$

Proposição 2.1.3. Seja X um espaço métrico completo e separável. Considere $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Então, $C([a, b]; X)$ será um espaço completo e separável, quando dotado da topologia da convergência uniforme.

Demonstração. Veja o teorema 2.4.3 em [28]. $\square$

Por fim, uma breve fixação de notação.

Definição 2.1.8. Seja X um espaço métrico e $C([a, b]; X)$ o espaço das curvas de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ para X dotado da topologia da convergência uniforme. Dado $t \in [a, b]$, definimos por $e_t : C([a, b]; X) \rightarrow X$ a aplicação avaliação no instante t , ou seja, $e_t(\gamma) = \gamma(t)$. Dado dois instantes $s, t \in [a, b]$ também definimos a avaliação dupla $E_{s,t} : C([s, t]; X) \rightarrow X \times X$ por $E_{s,t}(\gamma) = (\gamma(s), \gamma(t))$.

Definição 2.1.9. Seja X um espaço métrico. Considere $\gamma_1 \in C([a, b]; X)$ e $\gamma_2 \in C([b, c]; X)$ duas curvas tais que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Definiremos a concatenação de γ_1 e γ_2 como sendo a função $\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, c] \rightarrow X$ tal que $\gamma_1 \oplus \gamma_2|_{[a,b]} = \gamma_1$ e $\gamma_1 \oplus \gamma_2|_{[b,c]} = \gamma_2$. Pelo lema da colagem de funções contínuas, $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \in C([a, c]; X)$.

Quando estivermos tratando do espaço das curvas $C([a, b]; X)$, sempre estaremos considerando que o espaço está dotado da topologia da convergência uniforme. Além disso, será comum denotarmos $\gamma_t = \gamma(t) = e_t(\gamma)$ para toda curva em $C([a, b]; X)$. Note que com a topologia uniforme, e_t e $E_{s,t}$ são contínuas para todos $s, t \in [a, b]$.

Agora, considere os reais estendidos $\overline{\mathbb{R}}$. Uma condição essencial para o desenvolvimento da teoria de transporte é a de semicontinuidade inferior definida a seguir.

Definição 2.1.10. Seja X um espaço métrico. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é semicontínua inferior se $f^{-1}((a, +\infty])$ for aberto para todo $a \in \mathbb{R}$.

Uma simples aplicação da definição acima mostra que essa regularidade é preservado sob soma.

Proposição 2.1.4. A soma de funções semicontínuas inferiores será semicontínua inferior.

Demonstração. De fato, seja X um espaço métrico e $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funções semicontínuas inferior. Seja $a \in \mathbb{R}$ e defina o seguinte conjunto para todo $r \in \mathbb{Q}$:

$$S_r := f^{-1}((r, +\infty]) \cap g^{-1}((a - r, +\infty]).$$

Por hipótese, S_r é aberto para todo $r \in \mathbb{Q}$. Agora,

$$(f + g)^{-1}((a, +\infty]) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r,$$

Logo, $f + g$ é semicontínua inferior. □

O próximo resultado também pode ser tomado como a definição de semicontinuidade inferior e é a propriedade que usaremos na prática.

Proposição 2.1.5. Seja X um espaço métrico e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função. Então:

$$f \text{ é semicontínua inferior} \iff [x_n \rightarrow x \implies \liminf_{\alpha} f(x_n) \geq f(x)].$$

Demonstração. Veja o lema 2.42 em [1]. □

Funções semicontínuas se comportam de forma semelhante a funções contínuas em compactos.

Proposição 2.1.6. Seja X um espaço métrico e considere uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua inferior. Se $K \subset X$ for compacto, então existirá um mínimo em $f(K)$.

Demonstração. Veja o teorema 2.43 em [1]. □

2.2 Teoria da Medida

Para elementos da Teoria da Medida, nos basearemos nas referências [1] e [6]. Compilaremos abaixo as definições básicas da teoria. Ao final, atentamos para a notação probabilística que será usada em momentos oportunos.

Definição 2.2.1. Seja X um conjunto e $\mathcal{A} \subset 2^X$ um subconjunto do conjunto das partes de X . Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra de X se satisfaz:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
2. Se $A \in \mathcal{A}$, então $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
3. Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ for uma sequência de conjuntos em $\mathcal{A}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

O par $(X, \mathcal{A})$ é chamado de espaço mensurável. Frequentemente diremos que X é um espaço mensurável, ficando subentendido a σ -álgebra $\mathcal{A}$.

Definição 2.2.2. Seja X um espaço topológico. Definimos como a σ -álgebra de Borel de X , denotado por $\mathcal{B}(X)$, como sendo a menor σ -álgebra contendo a topologia de X .

Assumiremos que todo espaço topológico, em particular para espaços métricos, está munido da σ -álgebra de Borel.

Definição 2.2.3. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma função não negativa $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é chamada de medida se satisfaz:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ for uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois, então $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Dizemos que a tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida. A medida também será chamada de finita se $\mu(X) < +\infty$ e de probabilidade se $\mu(X) = 1$.

Definição 2.2.4. Seja X um espaço mensurável. Dizemos que uma medida finita μ de X está concentrada em um subconjunto $A \subset X$ se $\mu(A) = \mu(X)$.

Definição 2.2.5. Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita uma função mensurável se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Definição 2.2.6. Se X for um conjunto e $A \subset X$ for subconjunto, definiremos a função característica de A em X por $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Se X for um espaço mensurável, é comum assumirmos que A seja mensurável.

Definição 2.2.7. Seja X um espaço mensurável. Uma função $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dita simples se for da forma $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, onde $a_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $A_i \subset X$ são mensuráveis para todo i .

Definição 2.2.8. Seja (X, μ) um espaço de medida.

- Definimos a integral de uma função simples $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por:

$$\int_X \phi(x) d\mu(x) := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

- Considere $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função mensurável não negativa. Definimos a integral de f por μ por:

$$\int_X f(x) d\mu(x) := \sup_{0 \leq \phi \leq f} \int_X \phi(x) d\mu(x),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções simples satisfazendo a desigualdade.

- Uma função mensurável $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dita integrável se as integrais $I^+ := \int_X \max\{f(x), 0\} d\mu(x)$ e $I^- := \int_X \max\{-f(x), 0\} d\mu(x)$ forem finitas. Neste caso, definimos:

$$\int_X f(x) d\mu(x) := I^+ - I^-.$$

Frequentemente omitiremos a variável de integração quando ela for evidente pelo contexto.

Definição 2.2.9. Sejam X e Y espaços mensuráveis. Considere $f : X \rightarrow Y$ uma função mensurável e μ uma medida em X . Definimos o pushforward de μ para Y através de f como sendo a medida $f_*(\mu)$ definida por $f_*(\mu)[B] = \mu(f^{-1}(B))$ para todo $B \subset Y$ mensurável.

O pushforward de medidas é nada mais do que uma mudança de variáveis dentro de uma integral, como ilustra o próximo resultado.

Proposição 2.2.1. Sejam X e Y espaços mensuráveis. Considere $f : X \rightarrow Y$ uma função mensurável e μ uma medida em X . Então, para toda função integrável $\psi : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ com relação à medida $f_*(\mu)$, temos que $\psi \circ f$ é integrável com relação à μ e

$$\int_Y \psi df_*(\mu) = \int_X \psi \circ f d\mu.$$

Demonstração. Mostraremos a identidade para funções $\psi : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas, já que as partes negativas e positivas para uma ψ integrável são mensuráveis e possuem integral finita. Assim, considere ϕ_n uma sequência crescente de funções simples convergindo pontualmente para ψ . Daí,

$$\phi_n \circ f = \sum_{i=1}^n a_i (\chi_{B_i} \circ f) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{f^{-1}(B_i)}.$$

Logo, $\phi_n \circ f$ é uma sequência crescente de funções simples convergindo pontualmente para $\psi \circ f$. O resultado segue do teorema da convergência monótona. $\square$

Não necessitaremos dos resultados da teoria de probabilidade, porém sua notação será mais versátil para tratar certos problemas da teoria de transporte que envolve mudança de variáveis. Em geral, os objetos probabilísticos são objetos já tratados em Teoria da Medida com uma notação diferente, como veremos na sequência.

Definição 2.2.10. Sejam $(\Omega, \mathcal{E})$ e $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma variável aleatória $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow X$ é uma função mensurável.

Definição 2.2.11. Seja $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Seja $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma variável aleatória. A esperança $\mathbb{E}X$ de X é definida como sendo a integral de X no espaço Ω :

$$\mathbb{E}X := \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

É comum em teoria de probabilidade omitir o espaço base $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ao tratar de variáveis aleatórias, assim, caso não especificarmos, o domínio de uma variável aleatória ficará subentendido.

2.3 Teoria da Medida com Topologia

Nesta seção, comentaremos sobre elementos da interação entre Teoria da Medida e Topologia na qual serão utilizados no desenvolvimento da teoria de transporte. Nos basearemos exclusivamente nos capítulos 12 e 15 em [1].

Inicialmente, definiremos a topologia usada no espaço das medidas de um espaço topológico.

Definição 2.3.1. Seja $(X, \mathcal{B}(X))$ um espaço topológico com a σ -álgebra de Borel. Seja $P(X)$ o espaço das medidas de probabilidade do espaço X e $C_b(X, \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas e limitadas em X . Considere o pareamento $\langle \cdot, \cdot \rangle : C_b(X, \mathbb{R}) \times P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\langle f, \mu \rangle := \int_X f d\mu.$$

A topologia gerada pela família de aplicações $\{\langle f, \cdot \rangle\}_{f \in C_b(X, \mathbb{R})}$ é chamada de topologia fraca de $P(X)$.

Dizemos que uma sequência $(\mu_n)_n \subset P(X)$ converge fracamente para $\mu \in P(X)$, denotado $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, se $\forall f \in C_b(X, \mathbb{R})$ temos:

$$\int f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu$$

Denotaremos uma curva de medidas por letras gregas em negrito, mas as medidas da curva por letras gregas sem negrito. Por exemplo: $\boldsymbol{\mu} \in C([s, t]; P(X))$ e $\mu_u := \boldsymbol{\mu}(u)$.

Uma peça central no estudo da interação entre Teoria da Medida e Topologia são os espaços poloneses.

Definição 2.3.2. Um espaço polonês é uma tripla $(X, d, \mathcal{B}(X))$, onde (X, d) é um espaço métrico completo e separável.

A condição definida a seguir sobre o comportamento de medidas, nos levará ao lema de Prokhorov, o qual nos ajudará a caracterizar os compactos dentro do espaço das medidas.

Definição 2.3.3. Seja X um espaço polonês. Dizemos que uma família de medidas $\mathcal{P} \subset P(X)$ é tight se dado $\varepsilon > 0$, existir um compacto $K \subset X$ tal que $\mu(X \setminus K) \leq \varepsilon$, para todo $\mu \in \mathcal{P}$.

A propriedade de tightness pode ser definida em espaços topológicos mais gerais, porém a definição dada aqui é a que usaremos para esta dissertação. Temos o seguinte resultado sobre os singletos $\{\mu\}$.

Teorema 2.3.1. Se X for um espaço polonês, então toda medida finita μ de X será tight.

Demonstração. Seja μ medida finita de X . Considere um conjunto denso enumerável $\{x_1, x_2, \dots\}$ de X e para $i, n \in \mathbb{N}$, defina os conjuntos $C_i^n := B[x_i, 1/n]$. Vemos que $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i^n$ para todo n . Portanto, para n fixo e $0 < \varepsilon < 1$, existe um natural k_n tal que

$$\mu \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k+n} C_i^n \right) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Defina $C := \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n$. Por construção, C é um conjunto fechado totalmente limitado, logo, pela completude de X , C é um compacto. Por fim:

$$1 - \mu(C) = \mu(X \setminus C) = \mu \left[\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k+n} C_i^n \right) \right] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k+n} C_i^n \right) < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

□

Por definição, a aplicação $\langle f, \cdot \rangle$ é contínua quando $f \in C_b(X; \mathbb{R})$. Porém, um caso de interesse é quando f é apenas semicontínua inferior.

Proposição 2.3.1. Seja X um espaço métrico e considere uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Então, a aplicação $\langle f, \cdot \rangle$ será semicontínua inferior se f for semicontínua inferior e limitada por baixo.

Demonstração. Seja $(f_n)_n$ uma sequência crescente de funções Lipschitz limitadas convergindo pontualmente para f . Seja $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{w} \mu \in P(X)$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\int_X f_n d\mu_k \leq \int_X f d\mu_k$. Portanto,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu_k \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu_k.$$

Veja que $f_n \in C_b(X; \mathbb{R})$, logo $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu_k = \int_X f_n d\mu$. Pelo lema de Fatou, temos:

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &\leq \liminf_n \int_X f_n d\mu \leq \liminf_n \left(\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu_k \right) \\ &\leq \liminf_n \left(\liminf_k \int_X f d\mu_k \right) = \liminf_k \int_X f d\mu_k. \end{aligned}$$

□

O próximo teorema nos dá condições equivalentes de verificarmos quando duas medidas são iguais.

Teorema 2.3.2 (Teorema Portmanteau). Seja X um espaço metrizável com a σ -álgebra de Borel. Sejam μ e ν medidas finitas de X . São equivalentes:

1. $\mu = \nu$;
2. $\mu(U) = \nu(U)$ para todo aberto $U \subset X$;
3. $\mu(F) = \nu(F)$ para todo fechado $F \subset X$;
4. $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$ para toda função $f \in C_b(X, \mathbb{R})$.

Demonstração. Veja o teorema 15.1 em [1].

□

O próximo teorema é a versão do teorema de Arzelà-Ascoli para a topologia de $P(X)$.

Teorema 2.3.3 (Lema de Prokhorov). Seja X um espaço polonês. Uma família $\mathcal{P} \subset P(X)$ será pré-compacta se, e somente se, $\mathcal{P}$ for tight.

Demonstração. Veja o teorema 15.22 em [1].

□

O próximo resultado nos diz que $P(X)$ herda do espaço base a regularidade de ser polonês.

Teorema 2.3.4. Seja X um espaço metrizável. Então, X será polonês se, e somente se, $P(X)$ for polonês.

Demonstração. Veja o teorema 15.15 em [1].

□

Por conta disso $P(X)$ é primeiro enumerável, portanto não precisamos abordar redes ou filtros nesta dissertação. Para entender o porquê disso ser relevante, veja o capítulo 4 em [35].

Definição 2.3.4. Seja X um espaço métrico separável. Seja μ uma medida de X . O suporte $\text{supp } \mu$ de μ é definido como sendo o conjunto

$$\text{supp } \mu := \{x \in X \mid \text{se } \forall U \subset X \text{ aberto contendo } x \text{ temos } \mu(U) > 0\}$$

A separabilidade do espaço é necessária para garantir que o suporte $\text{supp } \mu$ seja sempre fechado e não vazio da forma que definimos. Para espaços topológicos quaisquer, a definição acima deve ser mais geral. Para uma discussão mais aprofundada veja a seção 12.3 em [1].

Uma ferramenta muito poderosa na Teoria da Medida com topologia são os teoremas de seleção. Em particular, utilizaremos o seguinte teorema para nossas aplicações.

Teorema 2.3.5 (Seleção Mensurável). Sejam X e Y dois espaços poloneses. Considere uma função sobrejetora $f : X \rightarrow Y$ mensurável. Se $f^{-1}(y)$ for compacto para todo $y \in Y$, então existirá uma função mensurável $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = \text{Id}$.

Demonstração. Este resultado é um corolário do teorema 5.12.1 em [28]. $\square$

Para mais resultados sobre seleção mensurável veja o capítulo 18 em [1] ou o capítulo 5 em [28].

2.4 Variedades Suaves e Riemannianas

Utilizaremos variedades riemannianas para motivar parte deste trabalho ao longo do texto. Também precisaremos das definições para estudarmos grupos de Lie mais adiante. Nos basearemos em [17] para os resultados e definições.

Definição 2.4.1. Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma variedade topológica de dimensão n sem bordo, se:

- (1) M for um espaço de Hausdorff;
- (2) M for um espaço segundo enumerável;
- (3) M for localmente euclidiana de dimensão n , isto é, se para todo ponto $p \in M$, existir um aberto $U \subset M$ contendo p , um aberto V de $\mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$.

Neste caso dizemos que o par (U, φ) é uma carta do ponto p . Chamamos U de domínio da carta e φ de coordenada local da carta.

Definição 2.4.2. Considere uma variedade topológica M de dimensão n sem bordo. Seja $\mathcal{A}'$ o conjunto de todas as cartas de M . Dizemos que um subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ é um atlas suave de M se:

1. $\bigcup_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}} U = M$
2. Para quaisquer duas cartas (U, φ) e (V, ψ) de um ponto $p \in M$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$ de $\mathcal{A}$, então a função $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é um difeomorfismo no sentido usual.

Neste caso, dizemos que (U, φ) e (V, ψ) são suavemente compatíveis e chamamos $\psi \circ \varphi^{-1}$ de função de transição. No caso em que $U \cap V = \emptyset$, as cartas são suavemente compatíveis por vacuidade.

Dizemos que $\mathcal{A}$ é um atlas maximal suave se: para qualquer carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}'$ de um ponto p tal que (U, φ) é suavemente compatível com qualquer outra carta de $\mathcal{A}$, implica que $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Neste caso, também chamamos $\mathcal{A}$ de estrutura suave em M .

Diremos que uma carta (U, φ) de um ponto $p \in M$ é uma carta suave se $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Por fim, dizemos que M é uma variedade suave de dimensão n se M for uma variedade topológica de dimensão n sem bordo dotada de uma estrutura suave $\mathcal{A}$.

Toda variedade suave possui uma estrutura chamada fibrado tangente, que possui a informação do vetor tangente de todas as curvas na variedade.

Definição 2.4.3. Seja M uma variedade suave. O espaço tangente de M no ponto p , denotado por $T_p M$, é definido como sendo o conjunto de todos os funcionais $v: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g), \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Definimos o fibrado tangente TM de M como a união $\sqcup_{p \in M} T_p M$. É possível mostrar que este conjunto possui estrutura de fibrados vetoriais.

Definição 2.4.4. Uma variedade riemanniana é um par (M, g) , onde M é uma variedade suave e g é uma forma bilinear simétrica positiva definida que varia suavemente ao longo de M . A forma g é chamada de tensor métrico, ou simplesmente métrica.

Toda variedade riemanniana possui uma medida natural chamada medida volume que definiremos a seguir.

Definição 2.4.5. Seja (M, g) uma variedade riemanniana de dimensão n . Seja (U, φ) uma carta de M e $A \in \mathcal{B}(M)$ tal que $A \subset U$. Se dx^n for a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e g_{ij} a expressão em coordenadas da métrica, então definiremos o volume de A em U por

$$\text{vol}_U(A) := \int_{\varphi(U)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx^n.$$

Esta definição é independente da carta, contando que A esteja contido no domínio da carta.

Devido à segunda enumerabilidade de variedades suaves, é possível extrair um atlas enumerável $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Dessa forma, podemos estender a definição de vol para o resto dos conjuntos em $\mathcal{B}(M)$.

Definição 2.4.6. Seja (M, g) uma variedade riemanniana de dimensão n e $A \subset \mathcal{B}(M)$. Definimos o volume de A por

$$\text{vol}(A) := \sum_{i=1}^{+\infty} \text{vol}_{U_i}(A_i),$$

onde A_i é definido recursivamente como

$$A_1 := A \cap U_1, \quad A_i := (A \cap U_i) \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k.$$

Esta definição é independente da escolha do atlas e vol configura uma medida em M .

Uma abordagem mais precisa e detalhada é dada em [2], capítulo XII.

2.5 Teoria de Grupos e Grupos de Lie

Iremos revisar rapidamente teoria de grupos e a teoria de grupos de Lie, assim como enunciar os resultados que serão usados para motivar o estudo feito nessa dissertação sobre os grupos de isometria. Nos basearemos em [17].

Definição 2.5.1. Seja G um conjunto e $\theta : G \times G \rightarrow G$ uma função. Denote por $gh := \theta(g, h)$. Assim, dizemos que (G, θ) é um grupo se:

1. $f(gh) = (fg)h$ para todos $f, g, h \in G$;
2. Existe um elemento $e \in G$ tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$;
3. Para todo $g \in G$, existe um elemento g^{-1} tal que $g^{-1}g = gg^{-1} = e$.

Definição 2.5.2. Seja G um grupo. Um subconjunto $H \subset G$ é dito um subgrupo de G , denotado por $H \leq G$, se H for não vazio e $hf^{-1} \in H$ para todos $f, h \in H$, cuja operação de grupo é a mesma de G .

Definição 2.5.3. Seja G um grupo e X um conjunto. Uma ação do grupo G pela esquerda em X é uma aplicação $\theta : G \times X \rightarrow X$ tal que:

1. $\theta(gh, x) = \theta(g, \theta(h, x))$ para todos $g, h \in G$ e $x \in X$;
2. $\theta(e, x) = x$ para todo $x \in X$, onde e denota a identidade do grupo.

É comum denotarmos a ação de um elemento $g \in G$ através de uma justaposição, isto é, $\theta(g, x) = gx$. Também denotaremos por $\text{Fix}(g)$ o conjunto dos pontos fixos de $g \in G$ através da ação.

Definição 2.5.4. Seja X um conjunto e G um grupo agindo pela esquerda em X . Definimos a seguinte relação de equivalência entre os pontos de X :

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } gx = y.$$

O conjunto das classes de equivalência é denotada por X/G .

A próxima definição será a peça central da parte final desta dissertação.

Definição 2.5.5. Seja G um grupo com $\theta : G \times G \rightarrow G$ e $\phi : G \rightarrow G$ sendo as operações de grupo: $\theta(g, h) = gh$ e $\phi(g) = g^{-1}$. Dizemos que G é um grupo topológico se G for dotado de uma topologia tal que as operações de grupo θ e ϕ são contínuas.

A seguinte proposição nos será útil para o capítulo final deste trabalho.

Proposição 2.5.1. Seja G um grupo topológico de Hausdorff primeiro enumerável. Se $H \leq G$ for um subgrupo, então $\overline{H}$ também será.

Demonstração. Veja a proposição 2.11 em [24]. □

Para mais resultados sobre grupos topológicos, veja a parte I em [24]. A próxima proposição será utilizada na demonstração do teorema principal deste trabalho.

Proposição 2.5.2. Considere $O(n)$ o grupo ortogonal de $\mathbb{R}^n$, isto é, o grupo de todas as matrizes $g \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $gg^t = g^t g = \text{Id}$. Então, para todo $g \in O(n)$ existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ tal que g possui a forma matricial:

$$g = \begin{bmatrix} A(\theta_1) & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & A(\theta_l) & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

com

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

e $\theta_i \in [0, 2\pi)$ para todo $i = 1, \dots, l$.

Demonstração. Veja o teorema 7.4 em [30]. $\square$

Iremos agora definir grupos de Lie.

Definição 2.5.6. Seja G um grupo com $\theta : G \times G \rightarrow G$ e $\phi : G \rightarrow G$ sendo as operações de grupo: $\theta(g, h) = gh$ e $\phi(g) = g^{-1}$. Dizemos que G é um grupo de Lie se G for dotado de uma topologia e uma estrutura suave tais que G seja uma variedade suave na qual as operações de grupo são suaves.

Se G for um grupo de Lie, é uma consequência direta da proposição 7.14 em [17] que a componente conexa G_0 contendo a identidade é um aberto e um subgrupo de G . Com isto, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.5.3. Seja G um grupo de Lie e seja G_0 a componente conexa contendo a identidade de G . Então, G_0 age em G pela esquerda e o quociente G/G_0 é discreto na topologia quociente.

Demonstração. A ação vem da operação natural de grupo. Seja $\pi : G \rightarrow G/G_0$ a aplicação quociente. Por definição da topologia quociente, um subconjunto $U \subset G/G_0$ será um aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U)$ for um aberto. Dessa forma, veja que G_0 é um elemento de G/G_0 , já que é um subgrupo, e $\pi^{-1}(G_0) = G_0$ que é um aberto de G . Logo, G_0 é um aberto de G/G_0 . Considere $R_g : G \rightarrow G$ a função multiplicação pela direita pelo elemento $g \in G$, definida por $R_g(h) = gh$. Veja que R_g é um homeomorfismo para todo $g \in G$, portanto $R_g(G_0)$ é aberto para todo $g \in G$. Agora, $\pi^{-1}([g]) = R_g(G_0)$ que é aberto para todo $g \in G$. Portanto, mostramos que G/G_0 é discreto. $\square$

Observe que isto nem sempre é verdade para grupos topológicos. De fato, se $G = \mathbb{Q}$ com a operação de soma, então a componente da identidade de G é o próprio 0 que não é aberto na topologia usual de $\mathbb{Q}$. Além disso, $\mathbb{Q}/\{0\} = \mathbb{Q}$, logo não é discreto. Assim, se G/G_0 não for discreto, então G não será um grupo de Lie. Usaremos esta observação no último capítulo.

Definição 2.5.7. Seja X um espaço métrico. O grupo de isometrias de X , denotado por $\text{Iso}(X)$, é o conjunto de todas as isometrias do espaço métrico X , dotado da topologia compacto-aberta.

Com esta definição, $\text{Iso}(X)$ é apenas um espaço topológico que possui uma estrutura de grupo. O seguinte importante resultado, nos mostra quando que $\text{Iso}(X)$ é um grupo topológico.

Teorema 2.5.1 (van Dantzig - van der Waerden). Seja X um espaço métrico conexo e localmente compacto. Então, $\text{Iso}(X)$ é um grupo topológico segundo enumerável e localmente compacto na topologia compacto-aberta, cuja ação de grupo em X é contínua.

Demonstração. Para uma demonstração, veja o teorema 4.7 do capítulo I em [16]. $\square$

Para variedades riemannianas, conseguimos mostrar que $\text{Iso}(X)$ é um grupo de Lie pelo teorema de Myers-Steenrod.

Teorema 2.5.2 (Myers-Steenrod). Seja M uma variedade riemanniana conexa sem bordo. Então, o grupo de isometrias $\text{Iso}(M)$ é um grupo de Lie.

Demonstração. Veja o teorema 3.4 do capítulo VI em [16]. $\square$

Capítulo 3

Teoria de Transporte Ótimo

Em geral, o problema de transporte ótimo é um problema de otimização de um funcional no espaço das medidas de probabilidades de um espaço mensurável. Há duas formulações do problema estudadas atualmente: a formulação devido aos trabalhos do matemático francês Gaspard Monge em 1781, e a formulação devido ao matemático soviético Leonid Kantorovich durante a segunda guerra mundial. Ambas as formulações surgiram a partir da necessidade de solucionar e otimizar problemas logísticos. A definição moderna destas formulações serão dadas na sequência.

3.1 O Problema do Transporte Ótimo de Monge e de Kantorovich

Antes da definição formal do problema, vejamos, com um simples exemplo, de como ele surge a partir de um problema logístico.

Exemplo 3.1.1. Suponha que queremos modelar o transporte de um lote de vacinas de um país, que chega em seus portos, para as suas cidades. Podemos modelar os portos deste país por um espaço discreto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e as cidades por outro espaço $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Ao invés de trabalharmos com valores absolutos das vacinas, modelamos o problema através de um valor percentual do total de vacinas do lote presente nos portos, dessa forma a distribuição das vacinas nos portos somam 100% do total e cada porto x_i possui uma fração $1 \geq a_i \geq 0$ do total. As vacinas devem ser completamente distribuídas para as cidades numa fração desejada de $1 \geq b_j \geq 0$ para cada cidade y_j . Estas informações podem ser modeladas por duas medidas de probabilidades $\mu := \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$ e $\nu := \sum_{j=1}^m b_j \delta_{y_j}$. Agora, transportar as vacinas de um porto para uma cidade envolve um custo, que será modelado por uma função positiva $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Assim, $c(x_i, y_j)$ é o custo de transportar as vacinas do porto x_i para a cidade y_j , caso o lote completo estivesse apenas no porto x_i . Por fim, precisamos de um plano de transporte que nos diz qual a fração $1 \geq \pi_{ij} \geq 0$ das vacinas em x_i será transportada para a cidade y_j . Veja que este plano

precisa respeitar as distribuições μ e ν , logo podemos modelar este plano através de uma medida de probabilidade $\pi := \sum_{i,j} \pi_{ij} \delta_{(x_i, y_j)}$ tal que $\sum_{j=1}^m \pi_{ij} = a_i$ e $\sum_{i=1}^n \pi_{ij} = b_j$. Com isso, temos o custo total $C := \sum_{i,j} \pi_{ij} c(x_i, y_j) = \int_{X \times Y} c d\pi$, que depende da escolha do plano. O problema do transporte ótimo é o problema de encontrar um plano tal que este valor C seja o menor possível.

Assim como no exemplo, a teoria abstrata do problema do transporte ótimo também utilizará as ferramentas gerais da Teoria da Medida, bem como a Teoria de Probabilidade, cujo uso será limitado a algumas definições e notações. Com isto, podemos generalizar naturalmente os conceitos utilizados no exemplo.

No exemplo, o plano de transporte foi modelado através de uma medida de probabilidade no espaço produto $X \times Y$. Existem duas definições equivalentes nas quais generalizam este plano, que chamaremos de coupling entre medidas.

Definição 3.1.1. Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida.

- Dizemos que uma medida $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ é coupling de μ e ν se $(\text{Proj}_1)_*(\pi) = \mu$ e $(\text{Proj}_2)_*(\pi) = \nu$, onde Proj_i é a projeção na entrada i .

Neste caso, denotamos o conjunto de todos os couplings entre μ e ν por $\Pi(\mu, \nu)$, que é não vazio por causa da medida produto.

- Dizemos que um par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de variáveis aleatórias de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P})$ para X e Y , respectivamente, é um coupling de (μ, ν) se $\text{lei}(\mathcal{X}) := \mathcal{X}_*(\mathbb{P}) = \mu$ e $\text{lei}(\mathcal{Y}) := \mathcal{Y}_*(\mathbb{P}) = \nu$.

Ambas as definições são equivalentes, no sentido de que dado $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ coupling entre μ e ν , $\pi := (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_* \mathbb{P}$ é coupling no espaço $X \times Y$. O outro lado é trivial, tomando $\text{Proj}_1, \text{Proj}_2$ como variáveis aleatórias. Nesta dissertação, o termo “coupling” será sinônimo com o termo “plano de transporte”.

É fácil ver que a definição de coupling também é equivalente às seguintes afirmações.

Lema 3.1.1. Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida, e $\pi \in P(X \times Y)$. São equivalentes:

1. $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$;
2. $\pi(A \times Y) = \mu(A)$ e $\pi(X \times B) = \nu(B)$ para todos $A \subset X$ e $B \subset Y$ mensuráveis;
3. Para todas as funções integráveis $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$, temos:

$$\int_{X \times Y} (\phi(x) + \psi(y)) d\pi(x, y) = \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu.$$

Vejamos agora como definir o custo total.

Definição 3.1.2. Sejam X e Y espaços mensuráveis, e seja $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função mensurável. Definimos o funcional de transporte ótimo $C : P(X) \times P(Y) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por:

$$C(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c \, d\pi$$

A função c é comumente chamada de “função custo”. Assim, podemos enunciar o problema do transporte ótimo de Kantorovich.

Problema do Transporte Ótimo de Kantorovich. Sejam X e Y espaços mensuráveis. Dado duas medidas $\mu \in P(X)$ e $\nu \in P(Y)$, e uma função custo $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, queremos encontrar $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ que minimize o funcional $C(\mu, \nu)$, ou seja, tal que

$$C(\mu, \nu) = \int_{X \times Y} c \, d\pi.$$

Caso este π exista, o chamamos de coupling ótimo.

O problema de Monge é uma versão mais restritiva do problema de transporte. No exemplo inicial, ao invés de transportarmos uma fração das vacinas em cada porto para outras cidades, nos restringimos a transportar o lote inteiro de um porto para uma única cidade. A modelagem desse tipo de plano é dada por uma função de X para Y definida a seguir.

Definição 3.1.3. Sejam X e Y espaços mensuráveis. Uma função mensurável $T : X \rightarrow Y$ é chamada de função de transporte entre $\mu \in P(X)$ e $\nu \in P(Y)$ se $T_*(\mu) = \nu$.

O conjunto de todas as funções de transportes entre as medidas $\mu \in P(X)$ e $\nu \in P(Y)$ será denotado por $\mathcal{B}(\mu, \nu)$.

Veja que uma função de transporte T define um coupling π entre μ e ν por $\pi := (\text{Id}, T)_*(\mu)$. Neste caso, dizemos que π é induzido por uma função de transporte.

Dada uma função custo c , a função de transporte nos indica quais valores do custo serão consideradas no cálculo do custo total através do valor $c(x, T(x))$. Assim, podemos enunciar o problema de Monge.

Problema do Transporte Ótimo de Monge. Sejam X e Y espaços mensuráveis. Dado duas medidas $\mu \in P(X)$ e $\nu \in P(Y)$, e uma função custo $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, queremos encontrar $T \in \mathcal{B}(\mu, \nu)$ que minimize o seguinte funcional

$$C(\mu, \nu) := \inf_{T \in \mathcal{B}(\mu, \nu)} \int_X c(x, T(x)) \, d\mu,$$

ou seja, encontrar uma função de transporte com o qual o ínfimo é atingido. Quando esta função existir, o chamaremos de função de transporte ótimo.

É evidente que se T for uma função de transporte ótimo, então $\pi := (\text{Id}, T)_*(\mu)$ será um coupling ótimo.

A formulação de Monge possui uma série de problemas comparado à formulação de Kantorovich. Primeiramente, $\mathcal{B}(\mu, \nu)$ pode ser vazio dependendo dos espaços X e Y , e das medidas μ e ν . Utilizando nosso exemplo, basta tomar $X = \{x\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $\mu = \delta_x$ e $\nu = \frac{1}{2}\delta_{y_1} + \frac{1}{2}\delta_{y_2}$. Dessa forma, o problema de Monge pode não estar bem definido. Além disso, mesmo que $\mathcal{B}(\mu, \nu)$ não seja vazio, é possível que haja sequências de funções de transporte que aproxima o coupling ótimo do problema de Kantorovich, porém o problema de Monge em si não possui solução, portanto o conjunto $\mathcal{B}(\mu, \nu)$ pode não ser “fechado”. Vejamos um exemplo onde isto acontece.

Exemplo 3.1.2. Um homeomorfismo linear de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ para $[c, d] \subset \mathbb{R}$ é uma função $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ da forma $f(t) = \frac{d-c}{b-a}(t-a) + c$. Considere os espaços de medida $(X, \mu) := (\{0\} \times [0, 1], dx_{\{0\} \times [0, 1]})$ e $(Y, \nu) := (\{-1, 1\} \times [0, 1], \frac{1}{2}dx_{\{-1\} \times [0, 1]} + \frac{1}{2}dx_{\{1\} \times [0, 1]})$, onde dx denota a medida de Lebesgue na reta. Defina uma sequência de funções $T_n : X \rightarrow Y$ tais que $T_n|_{[\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n}]}$ seja um homeomorfismo linear para $\{-1\} \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ para todo $k \in \mathbb{N}$; e $T_n|_{[\frac{2k+1}{2n}, \frac{2k+2}{2n}]}$ seja um homeomorfismo linear para $\{1\} \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se tomarmos a função custo $c(x, y) = |x - y|^2$ em $\{-1, 0, 1\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, então vemos que o problema de transporte de Kantorovich existe e é aproximado pelas funções T_n , ou seja, as funções T_n convergem para algo que não é uma função. Para outros contra-exemplos do gênero, veja a seção 8 em [5].

Veremos que este tipo de fenômeno não ocorre no problema de Kantorovich sob boas hipóteses. Para isto, utilizaremos as definições de subconjuntos tight.

Lema 3.1.2. Sejam X e Y espaços poloneses. Tome $P \subset P(X)$ e $Q \subset P(Y)$ subconjuntos tight. Considere

$$\Pi(P, Q) = \{\pi \in P(X \times Y) \mid (\text{Proj}_1)_*(\pi) \in P \text{ e } (\text{Proj}_2)_*(\pi) \in Q\}.$$

Então, $\Pi(P, Q)$ é subconjunto tight de $P(X \times Y)$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como P e Q são tight, existem compactos $K_0 \subset X$ e $K_1 \subset Y$ tais que:

- $\mu(X \setminus K_0) \leq \varepsilon \quad \forall \mu \in P;$
- $\nu(X \setminus K_1) \leq \varepsilon \quad \forall \nu \in Q.$

Considere $K := K_0 \times K_1$ compacto em $X \times Y$. Observe que temos $(X \times Y) \setminus K \subset [(X \times Y) \setminus (X \times K_1)] \cup [(X \times Y) \setminus (K_0 \times Y)]$. Pelas propriedades de medida, obtemos que

$$\begin{aligned} \pi((X \times Y) \setminus K) &\leq \pi[(X \times Y) \setminus (X \times K_1)] + \pi[(X \times Y) \setminus (K_0 \times Y)] \\ &= \pi[X \times (Y \setminus K_1)] + \pi[(X \setminus K_0) \times Y] \\ &= \nu(Y \setminus K_1) + \mu(X \setminus K_0) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\Pi(P, Q)$ é tight. $\square$

Assim, podemos demonstrar que $\Pi(\mu, \nu)$ é um conjunto muito bem comportado na topologia fraca de $P(X \times Y)$ para espaços poloneses.

Proposição 3.1.1. Sejam X e Y espaços poloneses. Considere $\mu \in P(X)$ e $\nu \in P(Y)$. Temos que $\Pi(\mu, \nu)$ é um subconjunto compacto de $P(X \times Y)$.

Demonstração. Toda medida finita μ em um espaço polonês é tight. Assim, $\{\mu\}$ e $\{\nu\}$ são subconjuntos tight. Pelo lema anterior, $\Pi(\mu, \nu)$ é tight. Pelo lema de Prokhorov, $\Pi(\mu, \nu)$ é pré-compacto. Basta mostrar que $\Pi(\mu, \nu)$ é fechado.

Sejam $\pi \in \overline{\Pi(\mu, \nu)}$ e $(\pi_n)_n \subset \Pi(\mu, \nu)$ uma sequência com $\pi_n \xrightarrow{w} \pi$. Defina $\mu_0 := (\text{Proj}_1)_*(\pi) \in P(X)$ e $\nu_0 := (\text{Proj}_2)_*(\pi) \in P(Y)$.

Agora, $(\text{Proj}_1)_*(\pi_n) = \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\phi \in C_b(X, \mathbb{R})$ e $\chi_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ for a função característica em Y , pela convergência fraca obteremos:

$$\int_X \phi d\mu = \int_{X \times Y} \phi(x) \chi_Y(y) d\pi_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{X \times Y} \phi(x) \chi_Y(y) d\pi(x, y) = \int_X \phi d\mu_0.$$

Pelo Teorema Portmanteau (2.3.2), obtemos $\mu_0 = \mu$. Analogamente, temos $\nu_0 = \nu$. Logo, $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. $\square$

O problema de Kantorovich sempre possui solução sob hipóteses não muito restritivas, como mostra o próximo teorema.

Teorema 3.1.1 (Existência de Couplings Ótimos). Sejam (X, μ) , (Y, ν) espaços poloneses e $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função custo semicontínua inferior e limitada por baixo. Então, existe pelo menos um $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ coupling ótimo, isto é:

$$C(\mu, \nu) = \int_{X \times Y} c d\pi.$$

Demonstração. Podemos supor $c \geq 0$ sem perda de generalidade. Como c é semicontínua inferior e limitada por baixo, temos que o funcional $I_c := \langle c, \cdot \rangle$ é semicontínuo inferior na topologia fraca de $P(X \times Y)$. Pelo proposição anterior $\Pi(\mu, \nu)$ é compacto, logo, como toda aplicação semicontínua inferior atinge um mínimo em compactos, existe um $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ tal que:

$$C(\mu, \nu) = \inf_{\pi'} I_c(\pi') = I_c(\pi).$$

$\square$

Uma versão mais geral do teorema de existência pode ser encontrada no capítulo 4 em [32]. O próximo teorema mostra qual a regularidade do funcional de transporte ótimo sob as mesmas hipóteses do teorema de existência. Este resultado será usado na construção de uma ação lagrangiana no espaço $P(X)$ em outro capítulo.

Teorema 3.1.2. Sejam (X, μ) , (Y, ν) espaços poloneses e $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função custo semicontínua inferior e limitada por baixo. Então, o funcional de transporte ótimo é semicontínuo inferior, isto é, se $(\mu_n)_n$ e $(\nu_n)_n$ são sequências em $P(X)$ e $P(Y)$, respectivamente, com $\mu_n \xrightarrow{w} \mu \in P(X)$ e $\nu_n \xrightarrow{w} \nu \in P(Y)$, então:

$$C(\mu, \nu) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} C(\mu_n, \nu_n).$$

Demonstração. Seja n_k uma subsequência tal que $C(\mu_{n_k}, \nu_{n_k}) \rightarrow \liminf_n C(\mu_n, \nu_n)$ quando $k \rightarrow +\infty$. Como (μ_n, ν_n) converge fracamente para (μ, ν) , então (μ_{n_k}, ν_{n_k}) também converge para (μ, ν) . Logo, os conjuntos $P := \{\mu_{n_k}\}_k \cup \{\mu\}$ e $Q := \{\nu_{n_k}\}_k \cup \{\nu\}$ são compactos, portanto tight. Por um lema anterior $\Pi(P, Q)$ também é tight, portanto pré-compacto. Tomando uma sequência $\pi_{n_k} \in \Pi(\mu_{n_k}, \nu_{n_k})$ de couplings ótimos, existe uma medida $\pi \in P(X \times Y)$ e uma subsequência n_{k_j} , tal que $\pi_{n_{k_j}} \xrightarrow{w} \pi$. Como $\langle c, \cdot \rangle$ é semicontínua inferior, obtemos:

$$\liminf_j C(\mu_{n_{k_j}}, \nu_{n_{k_j}}) = \liminf_j \langle c, \pi_{n_{k_j}} \rangle \geq \langle c, \pi \rangle.$$

Por um argumento análogo ao usado na demonstração da existência de couplings ótimos, temos $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Dessa forma,

$$\liminf_j C(\mu_{n_{k_j}}, \nu_{n_{k_j}}) \geq \langle c, \pi \rangle \geq C(\mu, \nu).$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \liminf_n C(\mu_n, \nu_n) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} C(\mu_{n_k}, \nu_{n_k}) = \lim_{j \rightarrow +\infty} C(\mu_{n_{k_j}}, \nu_{n_{k_j}}) = \liminf_j C(\mu_{n_{k_j}}, \nu_{n_{k_j}}) \\ &\geq C(\mu, \nu). \end{aligned}$$

□

Na próxima seção iremos discutir brevemente sob quais condições é possível formular uma versão análoga do teorema de existência de couplings ótimos para o problema de Monge, assim como apresentar alguns exemplos em geometria riemanniana. Como estes resultados serão usados apenas para uma aplicação no final do último capítulo, não nos preocuparemos em demonstrá-los.

3.2 A Dualidade de Kantorovich

Assim como várias áreas da matemática, muitas vezes um certo problema possui uma formulação mais natural quando descrito através de funções ou funcionais. A dualidade de Kantorovich surge da tentativa de reescrever o problema de transporte ótimo de Kantorovich através de funções c -côncavas definidas na sequência.

Definição 3.2.1. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Seja $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ duas funções. A c -concavificação de ϕ é a função $\phi^c : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por:

$$\phi^c(y) := \inf_{x \in X} [c(x, y) - \phi(x)].$$

Se ψ for uma função definida em Y , então sua c -concavificação será dada por:

$$\psi^c(x) := \inf_{y \in Y} [c(x, y) - \psi(y)].$$

Dizemos que ϕ é c -côncava se existir uma função ψ tal que $\psi^c = \phi$. Equivalentemente, ϕ será c -côncava se $\phi^{cc} := (\phi^c)^c = \phi$.

Dois outros conjuntos importantes são definidos a seguir.

Definição 3.2.2. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Seja $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ duas funções. Definiremos os conjuntos:

$$\partial^c \phi := \{(x, y) \in X \times Y \mid \phi(x) + \phi^c(y) = c(x, y)\};$$

$$\partial^c \phi(x) := \{y \in Y \mid (x, y) \in \partial^c \phi\}, \quad \forall x \in X.$$

O primeiro conjunto é chamado de c -superdiferencial de ϕ .

O nome superdiferencial vem de um caso riemanniano em que, sob certas hipóteses, é possível mostrar que se $y \in \partial^c \phi(x)$, então y é ponto onde existe um supergradiente. Veja o lema 3.7 em [8].

Definição 3.2.3. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Seja $\Gamma \subset X \times Y$ e $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função. Dizemos que Γ é c -ciclicamente monótono se para todo $N \in \mathbb{N}$, toda família de pontos $(x_i, y_i) \in X \times Y$, $1 \leq i \leq N$ e toda permutação σ de $\{1, \dots, N\}$ temos:

$$\sum_{i=1}^N c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^N c(x_i, y_{\sigma(i)}).$$

Estes conceitos são generalizações de elementos encontrados naturalmente em teoria de análise convexa. Com isto, temos o seguinte teorema fundamental.

Teorema 3.2.1 (Teorema Fundamental do Transporte Ótimo). Sejam X e Y espaços poloneses. Seja $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada por baixo. Sejam $\mu \in P(X)$ e $\nu \in P(Y)$ tais que

$$c(x, y) \leq a(x) + b(y),$$

para algum $a \in L^1(X, \mu)$ e $b \in L^1(Y, \nu)$. Além disso, seja $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. São equivalentes:

1. π é coupling ótimo.
2. O conjunto $\text{supp } \pi$ é c -ciclicamente monótono.

3. Existe uma função mensurável c -côncava $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que $\max\{\phi, 0\} \in L^1(X, \mu)$ e $\text{supp } \pi \subset \partial^c \phi$.

Demonstração. Veja o teorema 1.13 em [3]. $\square$

Sejam X e Y espaços poloneses e $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Sejam $\mu \in P(X)$ e $\nu \in P(Y)$, e defina $\mathcal{L}_c := \{(\phi, \psi) \in L^1(X, \mu) \times L^1(Y, \nu) \mid \phi(x) + \psi(y) \leq c(x, y) \quad \forall x, y \in X, Y\}$. O problema dual de Kantorovich é maximizar a seguinte quantia:

$$\int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu.$$

Sob algumas hipóteses, este problema é equivalente ao problema de transporte de Kantorovich.

Teorema 3.2.2 (Dualidade de Kantorovich). Com as mesmas hipóteses do teorema anterior, a seguinte igualdade é válida para quaisquer $\mu \in P(X)$ e $\nu \in P(Y)$:

$$C(\mu, \nu) = \sup_{(\phi, \psi) \in \mathcal{L}_c} \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu.$$

Além disso, existe uma função c -côncava ϕ tal que o máximo é atingido pelo par $(\phi, \phi^c) \in \mathcal{L}_c$.

Demonstração. Veja o teorema 1.17 em [3]. $\square$

Com este teorema e o teorema fundamental do transporte ótimo, temos o seguinte teorema de existência do problema de Monge.

Teorema 3.2.3 (Existência de Função de Transporte Ótimo). Assuma as mesmas hipóteses do teorema fundamental e seja $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ um coupling ótimo. Então, π será induzido por uma função de transporte ótimo se, e somente se, existir um conjunto mensurável $\Gamma \subset X \times Y$ tal que π é concentrado em Γ e para $x \in X$ μ -q.t.p. existe apenas um $y \in Y$ tal que $(x, y) \in \Gamma$. Neste caso, a função T é definido μ -q.t.p. por $T(x) := y$, para $(x, y) \in \Gamma$.

Demonstração. Veja o lema 1.20 em [3]. $\square$

A condição dada no teorema acima é notoriamente difícil de se obter em ambientes muitos gerais. Porém, em [20] McCann mostra a existência de transporte ótimo em variedades riemannianas, enunciado a seguir.

Teorema 3.2.4. Sejam

- (M, g) uma variedade riemanniana completa e conexa;
- d a métrica induzida por g ;
- $c = \frac{1}{2}d^2$ a função custo;

- $\mu \ll \text{vol}$ e ν medidas em $P(M)$ de suportes compactos X e Y , respectivamente.

Então, existe uma função $\psi : M \rightarrow M$ tal que $\psi|_X$ é c -côncava com relação ao conjunto Y , isto é, ψ^c é definido em Y apenas, na qual a aplicação

$$T(x) := \exp_x(-\nabla\psi(x))$$

é a função de transporte ótimo entre μ e ν . Além disso, esta aplicação é única em quase todo ponto de M .

Demonstração. Veja o teorema 3.2 em [8]. □

Uma importante observação é que o problema dual e resultados similares podem ser escritos através de funções c -convexas, cuja definição é completamente análoga à de funções c -côncavas. Para ver as diferenças entre ambas as definições e resultados, veja o capítulo 5 em [32] e compare com o capítulo 1 em [3].

Capítulo 4

Os Espaços de Wasserstein

Os espaços de Wasserstein são uma “quase”-metrização da topologia fraca do espaço de probabilidades de um espaço métrico, através do funcional de transporte ótimo. Eles são vitais em uma série de aplicações da Teoria de Transporte Ótimo, pois envolve o problema de minimização do custo gerado através de uma métrica. Além disso, os espaços de Wasserstein são uma peça fundamental na generalização do conceito de curvatura para espaços que não possuem estrutura suaves.

Definição 4.0.1. Seja (X, d) um espaço polonês e $p \in [1, +\infty)$. A distância de Wasserstein $W_p : P(X) \times P(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é definida por:

$$W_p(\mu, \nu) := \left(\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d^p d\pi \right)^{1/p}.$$

Note que $W_p(\mu, \nu) = C(\mu, \nu)^{1/p}$ para a função custo $c = d^p$. Veja que o espaço X e a função custo d^p satisfazem o teorema de existência de coupling ótimo, então sempre poderemos escrever $W_p(\mu, \nu) = \left(\int_{X \times X} d^p d\pi \right)^{1/p}$ para algum π coupling ótimo entre μ e ν .

A função distância W_p pode assumir valores infinitos como no exemplo:

Exemplo 4.0.1. Seja $X = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ e defina uma métrica $d(x, y) = \frac{1}{1-|x-y|} - 1$ em X . Se π for coupling entre dx , medida de Lebesgue em X , e δ_0 , medida de Dirac em 0, então teremos que π será concentrada em $X \times \{0\}$. Assim:

$$\int_{X \times X} d d\pi = \int_X d(0, x) dx = +\infty.$$

Como o coupling é arbitrário, vemos que $W_1(dx, \delta_0) = +\infty$.

Por conta disso, restringimos o espaço de probabilidades para garantirmos que W_p só possua valores finitos.

Definição 4.0.2. Seja (X, d) um espaço polonês e $p \geq 1$. Definimos o espaço de Wasserstein de ordem p como sendo o conjunto:

$$P_p(X) := \left\{ \mu \in P(X) \mid W_p(\mu, \delta_{x_0})^p = \int_X d(x_0, x)^p d\mu(x) < +\infty \right\},$$

com x_0 arbitrário.

Proposição 4.0.1. A definição acima não depende do ponto x_0 para qualquer $p \geq 1$.

Demonstração. Considere dois pontos $x_0, x_1 \in X$, com $x_0 \neq x_1$. Tome $\mu \in P(X)$ tal que $W_p(\mu, \delta_{x_0})^p < +\infty$. Logo,

$$\begin{aligned} W_p(\mu, \delta_{x_1})^p &= \int_X d(x_1, x)^p d\mu(x) \leq 2^p \int_X [d(x_0, x)^p + d(x_0, x_1)^p] d\mu(x) \\ &\leq 2^p W_p(\mu, \delta_{x_0})^p + 2^p d(x_0, x_1)^p < +\infty. \end{aligned}$$

□

Tendo que o espaço $P_p(X)$ está bem definido, podemos mostrar que W_p é, de fato, finita quando restrita a $P_p(X)$.

Proposição 4.0.2. A função distância W_p restrita a $P_p(X)$ só atinge valores finitos, para todo $p \geq 1$.

Demonstração. De fato, tome $\mu, \nu \in P_p(X)$. Se $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, então:

$$\begin{aligned} W_p(\mu, \nu)^p &\leq \int_{X \times X} d(x, y)^p d\pi(x, y) \\ &\leq \int_{X \times X} d(x, x_0)^p d\pi(x, y) + \int_{X \times X} d(x_0, y)^p d\pi(x, y) \\ &= 2^p \left[\int_X d(x_0, x)^p d\mu(x) + \int_X d(x_0, y)^p d\nu(y) \right] < +\infty. \end{aligned}$$

□

Para mostrarmos que $(P_p(X), W_p)$ é um espaço métrico, precisaremos do próximo resultado sobre colagem de couplings. Em topologia é possível “colar” duas funções contínuas em uma nova função contínua que estende as duas anteriores, contando que as funções originais coincidam em um subconjunto fechado do mesmo espaço. Um resultado similar existe para couplings, contando que as probabilidades marginais de cada coupling coincidam.

Proposição 4.0.3 (Lema da Colagem). Sejam X_1, X_2 e X_3 espaços poloneses, e $\mu_1 \in P(X_1)$, $\mu_2 \in P(X_2)$ e $\mu_3 \in P(X_3)$. Se $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ for coupling de μ_1 e μ_2 , e $(\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3)$ de μ_2 e μ_3 , então existirá um coupling $(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3)$ entre μ_1, μ_2 e μ_3 de modo que $\text{lei}(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) = \text{lei}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ e $\text{lei}(\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3) = \text{lei}(\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3)$.

Demonstração. A demonstração requer o uso de ferramentas de desintegração de medidas que foge do escopo desta dissertação. Para mais detalhes veja o lema 7.6 em [33]. □

Com isso, segue o nosso resultado desejado.

Teorema 4.0.1. Utilizando a mesma notação W_p para denotar a distância de Wasserstein restrita a $P_p(X)$, obtemos que a dupla $(P_p(X), W_p)$ é um espaço métrico para todo $p \geq 1$.

Demonstração.

- Passo 1: Desigualdade Triangular.

Utilizaremos a notação de probabilidade.

Sejam $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in P_p(X)$. Sejam $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ e $(\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3)$ couplings ótimos entre (μ_1, μ_2) e (μ_2, μ_3) , respectivamente, para a função custo $c := d^p$. Pelo lema da colagem, existe uma tripla $(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3)$ com $\text{lei}(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) = \text{lei}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ e $\text{lei}(\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3) = \text{lei}(\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3)$. Assim:

$$\begin{aligned} W_p(\mu_1, \mu_3) &\leq \mathbb{E}c(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_3)^{1/p} \leq (\mathbb{E}[d(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) + d(\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3)]^p)^{1/p} \\ &= \|d(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) + d(\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3)\|_p \leq \|d(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)\|_p + \|d(\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3)\|_p, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue pela desigualdade de Minkowski aplicado nas funções $d(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2), d(\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3) \in L^p(\Omega, \mathbb{P})$. Por fim:

$$\begin{aligned} W_p(\mu_1, \mu_3) &\leq \|d(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)\|_p + \|d(\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3)\|_p \\ &= \mathbb{E}c(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)^{1/p} + \mathbb{E}c(\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3)^{1/p} \\ &= W_p(\mu_1, \mu_2) + W_p(\mu_2, \mu_3), \end{aligned}$$

já que $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ e $(\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3)$ são couplings ótimos.

- Passo 2: $W_p(\mu, \nu) = 0 \iff \mu = \nu$.

$\implies$) Sejam $\mu, \nu \in P_p(X)$ tais que $W_p(\mu, \nu) = 0$. Seja $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ coupling ótimo. Assim, $0 = W_p(\mu, \nu)^p = \int_{X \times X} d^p d\pi$. Como $d^p \geq 0$, obtemos que $d = 0$ π -q.t.p.. Logo, existe $A \subset X \times X$ mensurável tal que $\pi(A) = 1$ e $d|_A \equiv 0$. Dessa forma, se $(x, y) \in A$, então $x = y$, isto é, A é subconjunto da diagonal Δ de $X \times X$. Seja $V \subset X$ mensurável. Obtemos que:

$$\begin{aligned} \mu(V) &= \pi(V \times X) = \pi\left([(V \times X) \cap \Delta] \bigcup [(V \times X) \cap (X \setminus \Delta)]\right) \\ &= \pi([V \times V] \cap \Delta) = \pi\left([(X \times V) \cap \Delta] \bigcup [(X \times V) \cap (X \setminus \Delta)]\right) \\ &= \pi(X \times V) = \nu(V). \end{aligned}$$

$\impliedby$) Seja $\mu \in P_p(X)$. Defina $\pi := (\text{Id}, \text{Id})_*\mu$. Assim, $\pi \in \Pi(\mu, \mu)$ e $\pi(\Delta) = 1$. Logo, $\int_{X \times X} d^p d\pi = 0$. Como $\int_{X \times X} d^p d\pi \geq 0$ para todo coupling $\pi \in \Pi(\mu, \mu)$, vemos que π é coupling ótimo. Assim, $W_p(\mu, \mu) = 0$.

- Passo 3: $W_p(\mu, \nu) = W_p(\nu, \mu)$.

Sejam $\mu, \nu \in P(X)$. Considere o homeomorfismo $g : X \times X \rightarrow X \times X$ dado por $g((x, y)) = (y, x)$. Assim, g_* define uma bijeção entre $\Pi(\mu, \nu)$ e $\Pi(\nu, \mu)$. Tomando o ínfimo em ambos os conjuntos, obteremos que $W_p(\mu, \nu) = W_p(\nu, \mu)$.

□

O próximo teorema exemplifica a quase metrização da topologia fraca de $P(X)$.

Teorema 4.0.2. Sejam X um espaço polonês e $p \geq 1$. Considere $(\mu_n)_n$ uma sequência em $P_p(X)$ e $\mu \in P(X)$. São equivalentes:

1. $W_p(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
2. $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{w} \mu$ e para algum (e portanto para todo) $x_0 \in X$, temos que

$$\int_X d(x_0, x)^p d\mu_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X d(x_0, x) d\mu(x).$$

Demonstração. Veja o teorema 7.12 em [33].

□

Note que o teorema acima nos diz que a topologia da métrica é mais fina que a topologia de subespaço de $P_p(X)$ em $P(X)$, porém, analogamente ao caso da topologia fraca, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.0.3. Seja X um espaço métrico. Então, $P_p(X)$ será um espaço polonês se, e somente se, X for um espaço polonês.

Demonstração. Veja a proposição 6.18 em [32].

□

Agora, suponha que X seja uma variedade riemanniana. Sejam $A, B \subset X$ regiões compactas disjuntas de X . Se tivermos medidas de probabilidade μ e ν com suporte em A e B , respectivamente, uma função de transporte T entre μ e ν pode ser interpretado como sendo o deslocamento da distribuição de massa em A para B . Veja que esta função não nos dá informação de como o deslocamento é feito. Na interpretação logística discreta, só nos importamos com os espaços de saída e chegada, cobrindo todas as possíveis dificuldades do transporte na função custo. Nosso caso de interesse utiliza a função distância d como função custo. Considerando que nossa distribuição μ de massa tem que ser deslocada continuamente através de X , ou seja, a massa não é teleportada de A para B , é natural estudarmos o comportamento do deslocamento de μ ao longo de uma família de curvas em X até B . Isto pode descrever uma curva de medidas intermediárias μ_t em $P_p(X)$. Como geodésicas minimizantes caracterizam as curvas de menor distância, é natural de se esperar que um transporte ótimo entre μ e ν deve transportar μ para ν ao longo de geodésicas minimizantes entre A e B . Além disso, a curva de medidas, descrita por este deslocamento, também deveria descrever uma curva de “tamanho” pequeno em $P_p(X)$. De fato, se esta curva for muito longa comparada com o caminho percorrido por μ

em X , de forma intuitiva, temos mais estados intermediários do que o necessário neste deslocamento, o que indicaria que o transporte de μ a ν não seria ótimo. Desta forma, gostaríamos que estas curvas de medidas μ descrevessem uma “geodésica minimizante” em $P_p(X)$. Entretanto, em espaços métricos gerais, não temos as noções de “geodésicas minimizantes”. Além disso, o espaço pode nem mesmo ser conexo por caminhos, e mesmo que fosse, precisaríamos que $P_p(X)$ também possuísse estes conceitos de forma compatível com a nossa discussão. O próximo capítulo discutirá exatamente como construímos estes conceitos em espaços métricos gerais.

Capítulo 5

Espaços de Comprimento

5.1 Estrutura de Comprimento

Considere (M, g) uma variedade riemanniana. Temos

$$L(\gamma) := \int_I |\dot{\gamma}| dt,$$

o funcional comprimento de curva definido no espaço das curvas suaves por partes $\mathcal{C}$ em intervalos da forma $I = [t_i, t_f]$.

Vejamos algumas propriedades de L e $\mathcal{C}$:

- $\mathcal{C}$ é invariante por concatenação de curvas, por restrição de intervalos e por reparametrizações difeomórficas;
- Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}$ são tais que $\gamma_1(t_f) = \gamma_2(t_i)$, então $\gamma_3 := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \in \mathcal{C}$ e $L(\gamma_3) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$;
- $L(\gamma|_{[t_i, t]})$ é contínua em t ;
- L é invariante por reparametrizações difeomórficas, isto é, se ϕ é difeomorfismo entre intervalos fechados, então $L(\gamma \circ \phi) = L(\gamma)$;
- $L(\gamma) > 0$ se γ escapa de um aberto. Em outras palavras, L só será nula se γ for constante.

Para um espaço topológico X , tomamos estas propriedades como definição para podermos fazer uma análise de curvas no espaço X . Portanto, definimos:

Definição 5.1.1. Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Dizemos que uma classe de curvas

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{\text{intervalos da forma } I=[t_i, t_f]} C(I; X)$$

é uma família admissível de curvas se $\mathcal{C}$ for invariante por:

- concatenação de curvas;
- restrição para intervalos fechados;
- classe de reparametrizações contendo os homeomorfismos $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ da forma $\phi(t) = \frac{d-c}{b-a}(t-a) + c$.

Definição 5.1.2. Seja X um espaço topológico de Hausdorff e $\mathcal{C}$ uma família admissível de curvas, dizemos que uma aplicação $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é um funcional comprimento sobre $\mathcal{C}$ se satisfaz:

- Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}$ são tais que $\gamma_1(t_f) = \gamma_2(t_i)$, então $\gamma_3 := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \in \mathcal{C}$ e $L(\gamma_3) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$;
- $L(\gamma, t_i, t)(\gamma) := L(\gamma|_{[t_i, t]})$ é contínua em t ;
- L é invariante pela classe de reparametrizações;
- $L(\gamma) > 0$ se γ escapa de um aberto. Em outras palavras, L só será nula se γ for constante. De forma mais precisa, seja $x \in X$ e $U \subset X$ aberto contendo x . Então:

$$\inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}, \gamma(t_i) = x, \gamma(t_f) \in X \setminus U\} > 0.$$

O par $(\mathcal{C}, L)$ é chamado de estrutura de comprimento.

Definição 5.1.3.

- Se um espaço métrico (X, d) possui uma estrutura de comprimento $(\mathcal{C}, L)$, dizemos que X é um espaço de comprimento se para todos $x, y \in X$, temos

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}, \gamma(t_i) = x, \gamma(t_f) = y\}.$$

Neste caso, dizemos que a métrica d é intrínseca. Denotaremos um espaço de comprimento pela quádrupla $(X, d, \mathcal{C}, L)$, ou pela tripla (X, d, L) , ou somente por X , dependendo do contexto. Veja que um espaço de comprimento é, em particular, conexo por caminhos.

- Dizemos que uma curva $\gamma \in \mathcal{C}$ é uma geodésica, se $d(\gamma(t_i), \gamma(t_f)) = L(\gamma)$.

Nossa definição de geodésica para espaços de comprimentos difere da noção riemanniana, onde uma geodésica é somente um minimizante local do funcional comprimento. Em [7], o termo geodésica coincide com o termo riemanniano, porém adotamos a definição em [27], nossa referência principal.

Em um espaço métrico (X, d) qualquer, sempre podemos definir um funcional comprimento L_d na classe das curvas contínuas com domínio em intervalos fechados da

seguinte forma. Sejam $\gamma \in C(I, X)$ e $P = \{t_0 = t_i, t_1, \dots, t_N = t_f\}$ uma partição de I . Defina a variação de γ por P pela expressão:

$$\Sigma(\gamma, P) = \sum_{j=0}^{N-1} d(\gamma_{t_j}, \gamma_{t_{j+1}}).$$

Tomando o supremo em todas as partições de I , obtemos um funcional comprimento.

Definição 5.1.4. Seja (X, d) um espaço métrico. A estrutura de comprimento $(\mathcal{C}, L_d)$ induzido por d é definida por:

- $\mathcal{C} := \{\gamma : I \rightarrow X \mid I = [t_i, t_f], \text{ para alguns } t_i, t_f \in \mathbb{R}\}$, onde a classe de reparametrizações será tomada como sendo todas as funções monótonas contínuas sobrejetoras entre intervalos fechados;
- $L_d(\gamma) := \sup_P \Sigma(\gamma, P)$, onde o supremo é tomado sobre todas as partições de I , o domínio de γ .

Chamamos de curva retificável qualquer curva $\gamma : [t_i, t_f] \rightarrow X$ com $L_d(\gamma) < +\infty$.

Note que $\mathcal{C}$ é trivialmente uma classe de curvas admissíveis. Agora, precisamos verificar que L_d é, de fato, um funcional comprimento. Para isto, iremos precisar do seguinte lema.

Lema 5.1.1. Seja (X, d) um espaço métrico. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ uma curva retificável. Se P for uma partição, defina $|P| := \max_i \{t_{i+1} - t_i\}$. Então, $L_d(\gamma) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \Sigma(\gamma, P)$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $|P| < \delta$, então $L_d(\gamma) - \Sigma(\gamma, P) < \varepsilon$.

Demonstração. Como γ é retificável, então dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0 = a, \dots, t_N = b\}$ de $[a, b]$ com $L_d(\gamma) - \Sigma(\gamma, P) < \varepsilon/N$. Tome $\tau := 1/2 \min_i \{t_{i+1} - t_i\}$ e defina $B_i := (t_i - \tau, t_i + \tau) \cap [a, b]$. Note que os abertos (t_i, t_{i+1}) e B_i formam uma cobertura de $[a, b]$. Pelo lema do número de Lebesgue, existe um $\delta_0 > 0$ tal que se $A \subset [a, b]$ possuir diâmetro $\text{diam } A < \delta_0$, então A estará contido em algum dos abertos da cobertura.

Utilizando a continuidade uniforme de γ , seja $\delta_1 > 0$ tal que se $t, s \in [a, b]$ são tais que $|t - s| < \delta$, então $d(\gamma(t), \gamma(s)) < \varepsilon/N$. Tome $P_0 = \{s_0 = a, \dots, s_M = b\}$ partição de $[a, b]$ tal que $|P_0| < \min\{\delta_0, \delta_1, |P|\}$. Pelo princípio da casa dos pombos, teremos $M \geq N$.

Como $|P_0| < \delta_0$, então $[s_j, s_{j+1}]$ está contido em algum intervalo (t_i, t_{i+1}) , ou em algum B_i . Pela construção da cobertura, isto implica que para todo $j = 0, \dots, M$, existe no máximo um $t_i \in [s_j, s_{j+1}]$. Portanto, tome $j(i) \in \mathbb{N}$ tal que $t_i \in I_{j(i)} := [s_{j(i)}, s_{j(i)+1}]$. Note que $j(0) = 0$ e $j(N) = M - 1$. Pela desigualdade triangular, temos:

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq d(\gamma(t_i), \gamma(s_{j(i)+1})) + \sum_{l=j(i)+1}^{j(i+1)} d(\gamma(s_l), \gamma(s_{l+1})) + d(\gamma(s_{j(i+1)}), \gamma(t_{i+1})).$$

Veja que $\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=j(i)+1}^{j(i+1)} d(\gamma(s_l), \gamma(s_{l+1})) = \sum_{j=0}^{M-1} d(\gamma(s_j), \gamma(s_{j+1})) = \Sigma(\gamma, P_0)$. Observe também que $|s_{j(i)+1} - t_i| < \delta_1$ e $|s_{j(i+1)} - t_{i+1}| < \delta_1$. Portanto, obtemos que:

$$\begin{aligned} \Sigma(\gamma, P) &= \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_i), \gamma(s_{j(i)+1})) + \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(s_{j(i+1)}), \gamma(t_{i+1})) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=j(i)+1}^{j(i+1)} d(\gamma(s_l), \gamma(s_{l+1})) \\ &< \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{N} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{N} + \Sigma(\gamma, P_0) < 2\varepsilon + \Sigma(\gamma, P_0), \end{aligned}$$

na qual implica que

$$L_d(\gamma) - \Sigma(\gamma, P_0) = L_d(\gamma) - \Sigma(\gamma, P) + \Sigma(\gamma, P) - \Sigma(\gamma, P_0) < 3\varepsilon.$$

□

Com o lema, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1.1. O funcional induzido $L_d(\gamma)$ é um funcional comprimento em (X, d) . Além disso, L_d é semicontínua inferior na topologia uniforme das curvas contínuas.

Demonstração. Escreva $L = L_d$.

- Se $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$, então $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.

Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, $\gamma_1 : [a, t_0] \rightarrow X$ e $\gamma_2 : [t_0, b] \rightarrow X$ curvas. Dado uma partição P de $[a, b]$, podemos definir duas partições Q e Y de $[a, t_0]$ e $[t_0, b]$, respectivamente, a partir de $P \cup \{t_0\}$. Logo:

$$\Sigma(\gamma, P) \leq \Sigma(\gamma, P \cup \{t_0\}) \leq \Sigma(\gamma|_{[a, t_0]}, Q) + \Sigma(\gamma|_{[t_0, b]}, Y) \leq L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

Tomando o supremo em P , obtemos $L(\gamma) \leq L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.

Para a outra desigualdade, tome Q partição de $[a, t_0]$ e Y de $[t_0, b]$. Defina $P = Q \cup Y$ partição de $[a, b]$. Assim:

$$L(\gamma) \geq \Sigma(\gamma, P) = \Sigma(\gamma_1, Q) + \Sigma(\gamma_2, Y).$$

Tomando o supremo em Q e em Y , obtemos a outra desigualdade.

- L_d é invariante pela classe de reparametrizações.

Seja $\gamma : I = [a, b] \rightarrow X$ e seja $\phi : J = [c, d] \rightarrow I$ uma reparametrização. Seja $P = \{t_0, \dots, t_N\}$ uma partição de $[a, b]$. Como ϕ é monótona e contínua, então $\phi^{-1}(\{t_i\}) = [u_i, v_i]$, para alguns $u_i, v_i \in [c, d]$. Note que $u_0 = v_0 \in \{c, d\}$ e $u_N = v_N \in \{c, d\}$. Considere $A := \{i \in \{0, \dots, N\} \mid u_i \neq v_i\}$ e seja $M := 2 \text{card } A + (N + 1 - \text{card } A) - 1$. Defina $P_0 := \{s_0, \dots, s_M\}$ como a ordenação do conjunto $\{u_0, \dots, u_N, v_0, \dots, v_N\}$. Assim, $d(\gamma \circ \phi(s_i), \gamma \circ \phi(s_{i+1})) = 0$ para alguns dos termos de P_0 . Vemos que $\Sigma(\gamma \circ \phi, P_0) = \Sigma(\gamma, P)$. Observe que o mesmo argumento será válido se tomarmos $x_i, y_i \in [u_i, v_i]$ com $x_i < y_i$ ao invés de utilizarmos u_i e v_i para definirmos a partição P_0 .

Agora, tome uma partição $P_0 = \{s_0, \dots, s_M\}$ qualquer de $[c, d]$. Defina a partição $P = \{t_0, \dots, t_N\}$ como o ordenamento do conjunto $\phi(P_0)$. Como ϕ é monótona, os pontos $t_i \in \phi(P_0)$ nas quais ϕ não é injetora, definem intervalos $\phi^{-1}(t_i) = [s_j, s_{j+1}]$ para algum j dependente de i . Vemos que $\gamma \circ \phi$ é constante ao longo desses intervalos, portanto $\Sigma(\gamma, P) = \Sigma(\gamma, P_0)$.

Mostramos que os conjuntos $\{\Sigma(\gamma, P) \mid P \text{ é uma partição de } [a, b]\}$ e $\{\Sigma(\gamma \circ \phi, P_0) \mid P_0 \text{ é uma partição de } [c, d]\}$ são iguais. Logo $L(\gamma \circ \phi) = L(\gamma)$.

- $L_a(\gamma|_{[s,t]})$ é contínua, tanto em s quanto em t .

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ e considere $t \in [a, b]$. Iremos mostrar que $f(t) := L(\gamma|_{[a,t]})$ é uma função contínua. Dado um $t_0 \in [a, b]$, iremos demonstrar a continuidade à direita de f em t_0 . A continuidade à esquerda será análogo.

Sejam $t, t_0 \in [a, b]$, com $t > t_0$ e $\varepsilon > 0$. Tome $P = \{s_0 = a, \dots, s_N = b\}$ partição de $[a, b]$ tal que $L(\gamma) - \Sigma(\gamma, P) < \varepsilon$. Suponha que $t_0 = s_i$, refinando P se necessário. Temos que:

$$L(\gamma, t_0, s_{i+1}) - d(\gamma(t_0), \gamma(s_{i+1})) = L(\gamma, t_0, s_{i+1}) + \sum_{j \neq i} d(\gamma(s_j), \gamma(s_{j+1})) - \Sigma(\gamma, P).$$

Veja que para qualquer partição P_0 de $[t_0, s_{i+1}]$, temos que $P \cup P_0$ é um refinamento da partição de P . Assim, $L(\gamma) \geq \Sigma(\gamma, P \cup P_0) = \Sigma(\gamma|_{[t_0, s_{i+1}]}, P_0) + \sum_{j \neq i} d(\gamma(s_j), \gamma(s_{j+1}))$. Tomando o supremo em P_0 , obtemos que $L(\gamma) \geq L(\gamma, t_0, s_{i+1}) + \sum_{j \neq i} d(\gamma(s_j), \gamma(s_{j+1}))$, portanto:

$$L(\gamma, t_0, s_{i+1}) - d(\gamma(t_0), \gamma(s_{i+1})) < \varepsilon.$$

Agora, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $t - t_0 < \delta_0$, então $d(\gamma(t), \gamma(t_0)) < \varepsilon$. Além disso, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|P| < \delta_1$, então $L(\gamma) - \Sigma(\gamma, P) < \varepsilon$. Tome $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ e $t \in [a, b]$ tal que $t - t_0 < \delta$. Considere partições P_0 de $[a, t_0]$ e P_1 de $[t, b]$ tais que $|P_0|, |P_1| < \delta$. Defina $P := P_0 \cup P_1 \cup \{t\}$ partição de $[a, b]$. Veja que $|P| < \delta$. Assim, $L(\gamma) - \Sigma(\gamma, P) < \varepsilon$, logo pelo argumento acima obtemos que $L(\gamma, t_0, t) - d(\gamma(t_0), \gamma(t)) < \varepsilon$, que implica $L(\gamma, a, t) - L(\gamma, a, t_0) = L(\gamma, t_0, t) < 2\varepsilon$.

No caso $t < t_0$, por um argumento análogo, obteremos $L(\gamma, a, t_0) - L(\gamma, a, t) < 2\varepsilon$. Assim, a função f é contínua em t_0 . Já que t_0 é arbitrário, f é contínua em $[a, b]$.

- $L(\gamma) > 0$ se γ escapa de um aberto U .

Seja $B(p, r)$ bola aberta de centro p e raio $r > 0$. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ é uma curva tal que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) \in X \setminus B(p, r)$, então $L(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b)) \geq r > 0$. Como as bolas formam uma base para a topologia de X , obtemos que $L(\gamma) > 0$ se γ escapa de um aberto.

- L é semicontínuo inferior.

Seja $\gamma_n : [a, b] \rightarrow X$ sequência de curvas convergindo pontualmente para $\gamma : [a, b] \rightarrow X$. Tome $\varepsilon > 0$ e fixe $P = \{t_0 = a, \dots, t_N = b\}$ partição de $[a, b]$ tal que $L(\gamma) - \Sigma(\gamma, P) < \varepsilon$. Tome j grande o suficiente tal que $d(\gamma_j(t_i), \gamma(t_i)) < \varepsilon$ para todo i . Então,

$$L(\gamma) \leq \Sigma(\gamma, P) + \varepsilon \leq \Sigma(\gamma_j, P) + \sum_i d(\gamma_j(t_i), \gamma(t_i)) + \varepsilon \leq L(\gamma_j) + \varepsilon + (N+1)\varepsilon$$

Logo, $L(\gamma) \leq L(\gamma_j) + (N+2)\varepsilon$ para j grande o suficiente. Portanto, $L(\gamma) \leq \liminf_n L(\gamma_n) + (N+2)\varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$. Assim, $L(\gamma) \leq \liminf_n L(\gamma_n)$. Como convergência uniforme implica em convergência pontual, obtemos que L é semicontínuo inferior. $\square$

Nem sempre a métrica d é intrínseca com relação ao funcional induzido L_d . Como exemplo, tome $X = \mathbb{R}^2 \setminus B[0, 1]$ com a distância euclidiana. Nenhuma curva com pontos finais no eixo x aproxima o valor da distância entre os pontos. Porém, quando d já for intrínseca com relação a uma estrutura de comprimento, então d será intrínseca com relação a L_d . A estrutura original e a induzida podem diferir. Um exemplo simples é tomar $X = \mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana e definir um funcional comprimento L que dá valor infinito para qualquer curva que não seja uma reta, porém é igual ao funcional induzido nas retas. A métrica euclidiana será intrínseca com relação a esse funcional, porém o funcional difere do induzido. O próximo teorema nos diz quando os funcionais são iguais.

Teorema 5.1.2. Seja $(X, d, \mathcal{C}, L)$ um espaço de comprimento. Então:

1. d é intrínseca em relação a L_d ;
2. Se L for um funcional semicontínuo inferior, então $L(\gamma) = L_d(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathcal{C}$.

Demonstração. Para o primeiro item, mostraremos:

- Afirmação: $L_d(\gamma) \leq L(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathcal{C}$.

De fato, seja $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ uma curva em $\mathcal{C}$ e P uma partição de $[a, b]$. Assim,

$$\begin{aligned} \Sigma(\gamma, P) &= \sum_i d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \sum_i L(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}) = L(\gamma) \\ \implies L_d(\gamma) &\leq L(\gamma) \end{aligned}$$

Com isto, para $x, y \in X$, tomando o ínfimo nas curvas $\gamma \in \mathcal{C}$ tais que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$, obtemos que $\inf_{\gamma} L_d(\gamma) \leq d(x, y)$. Como $L_d(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$ para qualquer curva $\gamma \in \mathcal{C}$, vemos que $\inf_{\gamma} L_d(\gamma) = d(x, y)$. Logo, concluímos o primeiro item.

Para o segundo item, só nos resta mostrar que:

- Afirmação: $L_d(\gamma) \geq L(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathcal{C}$.

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ uma curva em $\mathcal{C}$ e $\varepsilon > 0$. Considere uma partição $P = \{t_0 = a, \dots, t_N = b\}$ de $[a, b]$ tal que $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < \varepsilon$ para todo i . Como d é intrínseca com relação a L , então para cada $i = 0, \dots, N-1$, existem curvas $\sigma_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow X$ com $\sigma_i(t_i) = \gamma(t_i)$ e $\sigma_i(t_{i+1}) = \gamma(t_{i+1})$ tais que $L(\sigma_i) \leq d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \varepsilon/N$.

Defina $h_\varepsilon := \bigoplus_{i=0}^{N-1} \sigma_i$. Se $t \in [t_i, t_{i+1}]$, então $d(\gamma(t), h_\varepsilon(t)) = d(\gamma(t), \sigma_i(t))$ e $d(\gamma(t), \gamma(t_i)) < \varepsilon$ pela continuidade uniforme de γ . Utilizando a desigualdade triangular obtemos:

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), h_\varepsilon(t)) &\leq d(\gamma(t), \gamma(t_i)) + d(\gamma(t_i), \sigma_i(t)) \\ &\leq \varepsilon + L(\sigma_i) \\ &\leq \varepsilon + d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \varepsilon/N < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

portanto h_ε converge pontualmente para γ . Dessa forma:

$$\begin{aligned} L(h_\varepsilon) &= \sum_i L(\sigma_i) \leq \sum_i [d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \varepsilon/N] \leq \Sigma(\gamma, P) + \varepsilon \leq L_d(\gamma) + \varepsilon \\ \implies L(\gamma) &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} L(h_\varepsilon) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (L_d(\gamma) + \varepsilon) \\ \implies L(\gamma) &\leq L_d(\gamma). \end{aligned}$$

□

Como passo intermediário na demonstração deste teorema, obtemos a desigualdade $L_d(\gamma) \leq L(\gamma)$. Isto mostra que L_d é mais fundamental que qualquer outra estrutura de comprimento, pois não é possível definir uma estrutura de comprimento que dá valor finito para curvas não retificáveis. Por conta disso e da discussão acima, quando não especificado, entenderemos por espaços métricos de comprimento os espaços métricos cuja métrica é intrínseca com relação à estrutura induzida.

Espaços de comprimento possuem boas propriedades em relação à extensão de bolas e do comportamento de seus abertos. Uma propriedade muito útil é da existência de ε -ponto-médio, definido a seguir.

Definição 5.1.5. Seja X um espaço métrico. Dizemos que X possui a propriedade do ε -ponto-médio se para todos $x, y \in X$ e $r_1, r_2 > 0$ tais que $r_1 + r_2 > d(x, y)$, então $B(x, r_1) \cap B(y, r_2) \neq \emptyset$.

O nome ε -ponto-médio decorre de podermos tomar $2r = \varepsilon + d(x, y)$. Como veremos a seguir, espaços de comprimento sempre possuem esta propriedade.

Proposição 5.1.1. Se X for um espaço métrico de comprimento, então X possuirá a propriedade do ε -ponto-médio.

Demonstração. Sejam $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$ e $r_1, r_2 > 0$ tais que $r_1, r_2 \leq d(x, y)$ com $r_1 + r_2 = d(x, y) + \varepsilon > d(x, y)$ (caso $r_i > d(x, y)$ o resultado é trivial). Como a métrica d é intrínseca, então existe uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ tal que $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ e $L(\gamma) - d(x, y) < \varepsilon/2$. Lembre-se que a função $L(t) = L(\gamma, a, t)$ é contínua e $L(\gamma) \geq d(x, y) \geq r_1 > r_1 - \varepsilon/2 > 0$. Assim, pelo teorema do valor intermediário, existe um ponto $t_0 \in [a, b]$ tal que $L(t_0) = r_1 - \varepsilon/2$, ou seja, $d(x, \gamma(t_0)) \leq L(t_0) < r_1$. Além disso,

$$\begin{aligned} L(\gamma, a, t_0) + L(\gamma, t_0, b) &= L(\gamma) < d(x, y) + \varepsilon/2 \\ \implies d(y, \gamma(t_0)) &\leq L(\gamma, t_0, b) < d(x, y) + \varepsilon - r_1 = r_2. \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que $\gamma(t_0) \in B(x, r_1) \cap B(y, r_2)$. □

A propriedade do ε -ponto-médio recupera muitas das propriedades intuitivas do espaço métrico euclidiano. Veremos algumas aplicações da propriedade que serão utilizadas mais abaixo.

Lema 5.1.2. Se X for um espaço métrico de comprimento, então $\overline{B(x, R)} = B[x, R]$ para todo $x \in X$ e $R > 0$.

Demonstração.

- $\overline{B(x, R)} \subset B[x, R]$.

De fato, seja $y \in \overline{B(x, R)}$. Portanto, existe uma sequência $(y_n)_n \subset B(x, R)$ tal que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Logo, $d(x, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} R = R$. Assim, $y \in B[x, R]$.

- $\overline{B(x, R)} \supset B[x, R]$.

De fato, seja $y \in B[x, R]$. Pela propriedade do ε -ponto-médio, existe $y_n \in B(x, R) \cap B(y, 1/n)$. Claramente, $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$ e $y_n \in B(x, R)$ para todo n , ou seja, $y \in \overline{B(x, R)}$. □

Esta propriedade pode falhar, mesmo para espaços métricos muito regulares. Por exemplo, seja $B[0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ e defina $X := B[0, 2] \setminus B(0, 1) \cup [-1, 1] \times \{0\}$ com a métrica induzida de $\mathbb{R}^2$. Este espaço é compacto e conexo por caminhos, porém $[-1, 1] \times \{0\} = \overline{B(0, 1)} \neq B[0, 1] = S^1 \cup [-1, 1] \times \{0\}$, onde S^1 é o círculo de raio 1 em $\mathbb{R}^2$.

Lema 5.1.3. Se X for um espaço métrico de comprimento, $x, y \in X$ e $r > 0$ com $r < d(x, y)$, então $d(y, B(x, r)) = d(x, y) - r$.

Demonstração. Escreva $r_0 := d(x, y) - r$. Pela propriedade do ε -ponto-médio, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um $z_n \in B(x, r) \cap B(y, r_0 + 1/n)$. Dessa forma,

$$d(y, B(x, r)) = \inf_{z \in B(x, r)} d(y, z) \leq \inf_n d(y, z_n) \leq \inf_n (r_0 + 1/n) = r_0.$$

Por outro lado se $z \in B(x, r)$, então

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) < r + d(z, y) \\ \implies d(y, B(x, r)) &\geq \inf_{z \in B(x, r)} d(x, y) - r = r_0. \end{aligned}$$

Portanto, $d(y, B(x, r)) = d(x, y) - r$. □

Lembrando que a ε -vizinhança de um conjunto $A \subset X$ de um espaço métrico é definida por $U(A, \varepsilon) := \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$, temos o seguinte resultado:

Lema 5.1.4. Se X for um espaço métrico de comprimento, então $B(x, R + \varepsilon) = U(B(x, R), \varepsilon)$ para todos $x \in X$ e $R, \varepsilon > 0$.

Demonstração. A inclusão $U(B(x, R), \varepsilon) \subset B(x, R + \varepsilon)$ é trivial. Assim, considere $z \in B(x, R + \varepsilon)$. Veja que $R + \varepsilon > d(x, z)$. Logo, pela propriedade do ε -ponto-médio, existe $y \in B(x, R) \cap B(z, \varepsilon)$. Em outras palavras, $z \in B(y, \varepsilon)$, com $y \in B(x, R)$, ou seja, $z \in U(B(x, R), \varepsilon)$. □

Novamente, esta propriedade pode falhar mesmo em espaços muito regulares. O exemplo anterior também ilustra esse efeito. Em geral, estas propriedades ilustram o porquê do nome “intrínseco” para a métrica. Nos nossos exemplos, a métrica induzida geralmente depende de informação “fora” do espaço.

Nos lemas anteriores, apenas utilizamos a propriedade do ε -ponto-médio para demonstrar os resultados. Se o espaço for completo, esta propriedade é equivalente à métrica ser intrínseca.

Teorema 5.1.3. Seja X um espaço métrico completo que possui a propriedade do ε -ponto-médio. Então, X é um espaço de comprimento.

Demonstração. Veja o teorema 2.4.16 em [7]. □

Espaços métricos geodésicos possuem uma propriedade ainda mais forte que a do ε -ponto-médio, que é a propriedade do ponto médio, isto é, para todos $x, y \in X$, se $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ são tais que $r_1 + r_2 = d(x, y)$, então $B[x, r_1] \cap B[y, r_2] \neq \emptyset$. Assim como no caso mais fraco, se X for completo, X será geodésico se, e somente se, o espaço possui a propriedade do ponto médio.

Pelo teorema de Hopf-Rinow em variedades riemannianas sem bordo, obtemos que se a variedade for completa como espaço métrico, então para todo par de pontos existirá uma curva minimizante conectando estes pontos. No presente caso, temos o seguinte resultado similar:

Teorema 5.1.4. Seja (X, d) um espaço métrico com a estrutura de comprimento induzido por d . Se X for completo e localmente compacto, então para todo par de pontos $x, y \in X$ existe uma geodésica $\gamma \in \mathcal{C}$ com $\gamma(t_i) = x$ e $\gamma(t_f) = y$. Em particular, se X for dotado de uma estrutura cujo funcional comprimento seja semicontínuo inferior, então existirá uma geodésica da classe admissível conectando os pontos x e y .

Se uma geodésica for definida como localmente minimizante de L apenas, temos um teorema muito mais próximo do teorema de Hopf-Rinow original. Sua formulação precisa pode ser encontrada em [7], teorema 2.5.28.

Para demonstrar este resultado, precisaremos da versão no espaço das curvas do teorema de Arzelà-Ascoli:

Teorema 5.1.5 (Arzelà-Ascoli). Seja X um espaço métrico compacto. Se $(\gamma_n)_n$ for uma sequência de curvas $\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow X$ com comprimento uniformemente limitada, isto é, tais que para todo n temos $L(\gamma_n) \leq C$, para algum $C > 0$, então existirá uma subsequência uniformemente convergente, após uma reparametrização das curvas para o mesmo intervalo.

Demonstração. Veja o teorema 2.5.14 em [7]. $\square$

Lembre-se que um espaço métrico Heine-Borel é tal que todo subconjunto fechado e limitado é compacto. Nesses espaços, sempre conseguimos a existência de geodésicas.

Proposição 5.1.2. Seja X um espaço métrico Heine-Borel (não necessariamente de comprimento). Portanto, dados $x, y \in X$, se existir uma curva retificável $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$, então existirá uma curva que liga x à y que minimiza o funcional comprimento da estrutura induzida.

Demonstração. Considere $(\gamma_n)_n$ uma sequência de curvas retificáveis $\gamma_n : [a, b] \rightarrow X$ tais que $\gamma_n(a) = x$, $\gamma_n(b) = y$ e $L(\gamma_n)$ converge de forma decrescente para o valor $\inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}, \gamma(t_i) = x, \gamma(t_f) = y\}$, que é finito pela existência da curva retificável. Sempre podemos tomar tal sequência através da propriedade do ínfimo e através de reparametrizações para o mesmo domínio. Assim, $L(\gamma_1) \geq L(\gamma_n) \geq d(\gamma_n(s), \gamma_n(t))$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $s, t \in [a, b]$. Ou seja, $\gamma_n([a, b]) \subset B[x, L(\gamma_1)]$ para todo n . Portanto, $(\gamma_n)_n$ é uma sequência de curvas num espaço compacto e de comprimento uniformemente limitado. Pelo teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência uniformemente convergente. Seja γ o limite. Pela semicontinuidade de L , obtemos que $L(\gamma) \leq \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}, \gamma(t_i) = x, \gamma(t_f) = y\}$, ou seja, γ é minimizante de L com pontos fixos x e y . $\square$

Com o próximo teorema e a proposição acima, o teorema da existência de geodésicas sai como um corolário.

Teorema 5.1.6. Seja X um espaço métrico localmente compacto, completo e de comprimento. Então, X possui a propriedade Heine-Borel, isto é, todo subconjunto fechado e limitado é compacto.

Demonstração. A ideia é mostrar que toda bola fechada é compacta supondo, por absurdo, que existe um $R > 0$ na qual as bolas de raio maior não são compactas. Utilizamos as propriedades do espaço para construir uma bola um pouco maior que será compacta.

Seja $x \in X$ e defina:

$$R := \sup\{r > 0 \mid B[x, r] \text{ é compacta}\}.$$

Como X é localmente compacto, então existe um $r > 0$ na qual $B[x, r]$ é compacto, logo $R > 0$. Suponha, por absurdo, que $R < +\infty$. Denote $B := B[x, R]$.

- B é compacta.

O conjunto B é fechado no espaço completo X , portanto B também é completo. Assim, basta mostrar que B é totalmente limitada.

Seja $\varepsilon > 0$ e $r := R - \varepsilon/3$. Suponha que $\varepsilon < R$ e sejam $B' := B[x, r]$ e $y \in B$. Como $0 < r < R$, temos que B' é compacto, logo totalmente limitado. Portanto, existe uma $\varepsilon/3$ -rede finita $S \subset B'$ de B' . Agora, $d(y, B') \leq \varepsilon/3$. De fato, $d(y, B') = d(x, y) - r = d(x, y) - R + \varepsilon/3 \leq R - R + \varepsilon/3 = \varepsilon/3$.

Assim, existe $y' \in B'$ tal que $d(y, y') < \varepsilon/2$. Como S é $\varepsilon/3$ -rede de B' , então temos que $d(y', S) \leq \varepsilon/3 < \varepsilon/2$ por definição. Logo, se $z \in S$, temos:

$$\begin{aligned} d(y, z) &\leq d(y, y') + d(y', z) \\ \implies d(y, S) &\leq d(y, y') + d(y', S) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $y \in B$ é arbitrário, mostramos que S é ε -rede finita de B . Portanto, B é totalmente limitada, logo é compacta.

Agora, como X é localmente compacta, então para todo $y \in B$, existe um aberto pré-compacto $U_y \subset X$ contendo y . Como B é compacto, existem $y_1, \dots, y_n \in B$ tais que $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$ forma uma cobertura aberta de B . Note que $U := U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ é pré-compacta. Pelo corolário 2.1.1, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $U(B, \varepsilon) \subset U$.

Lembre-se que $U(B, \varepsilon) = B(x, R + \varepsilon)$ e $\overline{B(x, R + \varepsilon)} = B[x, R + \varepsilon] \subset \overline{U}$. Como $\overline{U}$ é compacto, obtemos que $B[x, R + \varepsilon]$ é compacto para $\varepsilon > 0$, o que contradiz a definição de R .

Assim, mostramos que toda bola fechada é compacta, logo o espaço é Heine-Borel. $\square$

As condições de completude e compacidade local do teorema 5.1.4 são apenas suficiente, porém ambas são essenciais para garantirmos que o espaço seja geodésico. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.1.1.

- Um espaço métrico geodésico que não é completo, nem localmente compacto.

Todo espaço vetorial normado $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico de comprimento com a métrica induzida da norma e a estrutura de comprimento induzida da métrica. Agora, se V possuir dimensão infinita, então V não é localmente compacto. Assim, tome V como o espaço dos polinômios de coeficientes reais no intervalo $[0, 1]$ com a norma da convergência uniforme. Pelo teorema de Weierstrass, temos que V não é completo e como V é espaço de dimensão infinita, obtemos que V é o espaço desejado.

Exemplo 5.1.2.

- Um espaço métrico de comprimento localmente compacto, mas não completo e nem geodésico.

Basta tomar $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ com a métrica euclidiana. A métrica continua intrínseca e o espaço é localmente compacto, porém não há geodésicas conectando pontos no eixo x .

Exemplo 5.1.3.

- Um espaço métrico de comprimento completo, mas não localmente compacto e nem geodésico.

Considere

$$X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([0, 1 + 1/n] \times \{n\}) / \sim,$$

onde estamos identificando os pontos $(0, n) \sim (0, k)$ e $(1 + 1/n, n) \sim (1 + 1/k, k)$, para todos os $n, k \in \mathbb{N}$. Denote por $A \in X$ o ponto $A = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{(1 + 1/n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Com a topologia quociente de $\mathbb{R}^2$, X é um espaço de Hausdorff conexo por caminhos. Podemos definir uma métrica d em X da seguinte forma: se $x \in [0, 1 + 1/n]$ e $y \in [0, 1 + 1/k]$, então $d((x, n), (y, k)) := \min\{x + y, 2 + 1/n - x + 1/k - y\}$. Esta métrica é intrínseca com relação à estrutura induzida. Veja que (X, d) é completo, já que se $(z_l)_l \subset X$ for sequência de Cauchy, teremos que, ou a sequência se acumula em algum intervalo $[0, 1 + 1/n] \times \{n\}$ para algum n , ou ela converge para os pontos A ou B . Além disso, X não é localmente compacto, pois dado $\delta > 0$, a sequência $((\delta/2, n))_n \subset B[0, \delta]$ não possui subsequência convergente. Por fim, X não é geodésico, já que $d(A, B) = 1$, mas não há um caminho de tamanho 1.

5.2 Parametrização e Velocidade

Em variedades riemannianas, toda curva suave por partes pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco de modo a obtermos uma curva cujo vetor tangente possui norma unitária ao longo da curva. Podemos obter um resultado análogo para espaços de comprimento. Em um primeiro momento, temos o seguinte resultado sobre reparametrizações:

Proposição 5.2.1. Seja (X, d) um espaço métrico de comprimento dotado da estrutura de comprimento induzida (não necessariamente intrínseca). Então, para toda curva retificável $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, existe uma curva $\tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \rightarrow X$ e uma reparametrização $\phi : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$ não decrescente, tais que $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$ e $L(\tilde{\gamma}, t_0, t) = t - t_0$.

Demonstração. A ideia é similar ao caso riemanniano. Basta tomar $\phi(t) := L(\gamma, a, t)$. Agora, γ pode ter intervalos onde é constante, assim ϕ pode não ser inversível. Para contornar o problema, definimos $\tilde{\gamma}$ selecionando um desses $t \in [a, b]$ onde a curva “estaciona” para podermos correr ao longo do intervalo $[0, L(\gamma)]$, isto é, para $\tau \in [0, L(\gamma)]$, tomamos $t \in [a, b]$ tal que $\phi(t) = \tau$ e definimos $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(t)$. Para uma demonstração detalhada, veja a proposição 2.5.9 em [7]. $\square$

Note que nem toda geodésica já é expressada com a parametrização de comprimento de arco. Por conta disso, é comum na literatura definir uma geodésica como sendo uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ no espaço métrico X tal que $d(\gamma(t), \gamma(t_0)) = |t - t_0|d(\gamma(a), \gamma(b))$.

Em espaços métricos, não possuímos estrutura para definirmos vetor tangente de uma curva, mas ainda podemos falar sobre velocidade da curva:

Definição 5.2.1. Seja (X, d) um espaço métrico e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ uma curva. A velocidade $v_\gamma(t)$ de γ em $t \in [a, b]$ é definida por

$$v_\gamma(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t + \varepsilon), \gamma(t))}{|\varepsilon|},$$

quando o limite existir.

O próximo teorema nos informa que o limite existe em quase todo ponto.

Teorema 5.2.1. Seja (X, d) um espaço métrico e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ uma curva retificável. Defina $f(t) := L(\gamma|_{[a, t]})$. Então, a velocidade $v_\gamma(t)$ existe para quase todo ponto $t \in [a, b]$ e $f'(t) = v_\gamma(t)$. Assim, $L_d(\gamma) = \int_a^b v_\gamma(t) dt$.

Demonstração. Veja o teorema 2.7.6 em [7]. $\square$

A hipótese utilizada no teorema 2.7.6 em [7] foi trocada aqui de “curva Lipschitz” por curva retificável. Isto é possível pois $f(t)$ é uma função contínua monótona, dessa forma a sua derivada existe em quase todo ponto.

Toda curva γ retificável possui reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma}$. Logo, $d(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t)) \leq L(\tilde{\gamma}, t_0, t) = t - t_0$. Através de uma reparametrização linear, podemos reparametrizar $\tilde{\gamma}$ de modo a obter uma curva $\hat{\gamma}$ tal que $L(\hat{\gamma}, t_0, t) = v(t - t_0)$ para qualquer constante v . Se X for um espaço de comprimento e γ for uma geodésica, podemos aplicar esta parametrização para obter uma curva $\hat{\gamma}$ tal que $d(\hat{\gamma}(t_0), \hat{\gamma}(t)) = L(\hat{\gamma}, t_0, t) = v(t - t_0)$, portanto $v_{\hat{\gamma}}(t) = v$ para todo t . Essa observação nos será útil para a demonstração de que os espaços de Wasserstein são geodésicos.

Capítulo 6

Ações Lagrangianas

Para as aplicações de transporte ótimo em espaços métricos de medida, precisamos do fato de que $P_p(X)$ são espaços geodésicos se X for geodésico. O teorema 5.1.4 nos diz que se $P_p(X)$ for localmente compacto, então W_p será intrínseca com relação ao funcional induzido L_{W_p} , pois $P_p(X)$ é completo caso X também o seja. Porém, $P_p(X)$ só será localmente compacto, quando X for compacto (observação 7.9.1 em [4]). Entretanto, muitos objetos de interesse não são, em geral, compactos. Assim, para obter este resultado, iremos estudar a generalização dessa estrutura de comprimento em X . Para isto, nos basearemos na teoria desenvolvida no capítulo 7 em [32].

De forma análoga de como generalizamos os resultados do funcional comprimento riemanniano para espaço métricos gerais, podemos generalizar o conceito de métrica intrínseca e funcional comprimento para uma função custo c , tomando como definição alguns resultados anteriores.

Definição 6.0.1. Sejam

- (X, d) um espaço polonês;
- $t_i, t_f \in \mathbb{R}$, com $t_i < t_f$;
- $(\mathcal{A})^{t_i, t_f} = \{(\mathcal{A}^{s, t}, c^{s, t})\}_{[s, t] \subset [t_i, t_f]}$ uma família de funcionais e funções custos:

$$\mathcal{A}^{s, t} : C([s, t]; X) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$c^{s, t} : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Dizemos que $(\mathcal{A})^{t_i, t_f}$ é uma ação lagrangiana em X se:

- 1) $\mathcal{A}^{s, t}$ for semicontínua inferior com respeito à topologia uniforme de $C([s, t]; X)$;
- 2) para todos $t_i \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq t_f$ e curva $\gamma : [t_1, t_3] \rightarrow X$, temos que $\mathcal{A}^{t_1, t_3}(\gamma) = \mathcal{A}^{t_1, t_2}(\gamma|_{[t_1, t_2]}) + \mathcal{A}^{t_2, t_3}(\gamma|_{[t_2, t_3]})$;

3) $\forall x, y \in X$ tivermos:

$$c^{s,t}(x, y) = \inf\{\mathcal{A}^{s,t}(\gamma) \mid \gamma(s) = x, \gamma(t) = y\};$$

4) dada uma P partição de $[t_i, t_f]$ e tivermos

$$\Sigma(\gamma, P) := \sum_{j=0}^{N=|P|-2} c^{t_i, t_f}(\gamma_{t_j}, \gamma_{t_{j+1}}),$$

então

$$\mathcal{A}^{t_i, t_f}(\gamma) = \sup_P \Sigma(\gamma, P).$$

Podemos definir $c^{s,s} = 0$.

Estes funcionais são chamados de lagrangianos, pois além de generalizar estruturas de comprimento, eles também generalizam os funcionais lagrangianos da teoria de cálculo das variações, comumente encontradas em teorias físicas. Em particular, se $L : TM \times [0, 1]$ for uma função suave definida no fibrado tangente de uma variedade M , frequentemente chamada de lagrangiana, então o funcional $\mathcal{E}(\gamma) := \int_{[0,1]} L(\gamma_t, \dot{\gamma}_t, t) dt$ é chamado de ação lagrangiana. As funções $c^{s,t}$ são chamadas de funções custos, devido à seguinte definição.

Definição 6.0.2. Seja X um espaço polonês e $(\mathcal{A})^{t_i, t_f}$ uma ação lagrangiana. Então, denotaremos por $C^{s,t}$ os funcionais de transporte ótimo com funções custos $c^{s,t}$.

Observe que, por uma reparametrização, sempre podemos reduzir o estudo de funcionais lagrangianos $(\mathcal{A})^{t_i, t_f}$ para seu equivalente no intervalo $[0, 1]$. Assim, consideramos apenas funcionais $(\mathcal{A})^{0,1}$. Perceba também que um espaço métrico de comprimento (X, d, L_d) define naturalmente uma ação lagrangiana.

Funcionais lagrangianos possuem várias propriedades análogas às de funcionais de comprimento, porém para obter que os espaços de Wasserstein herdam a propriedade de ser geodésico do espaço métrico base, precisamos de hipóteses específicas sobre as curvas minimizantes dos funcionais lagrangianos.

Definição 6.0.3. Sejam (X, d) um espaço polonês e $(\mathcal{A})^{0,1}$ uma ação lagrangiana em X . Seja $\Gamma_{A \rightarrow B}^{s,t}$ o conjunto das curvas minimizantes de $\mathcal{A}^{s,t}$ partindo de $A \subset X$ e chegando em $B \subset X$.

Dizemos que $(\mathcal{A})^{0,1}$ é coerciva se as seguintes condições forem válidas:

- 1) $\inf_{s < t} \inf_{\gamma} \mathcal{A}^{s,t}(\gamma) > -\infty$, em outras palavras, $c^{s,t}$ são uniformemente limitadas por baixo;
- 2) Se $s < t$ e $K_s, K_t \neq \emptyset$ forem compactos em X tais que $c^{s,t}(K_s, K_t) \subset \mathbb{R}$, então o conjunto $\Gamma_{K_s \rightarrow K_t}^{s,t}$ será compacto não vazio.

O primeiro item nos diz que todas as funções de interesse proveniente dos funcionais são limitadas por baixo, logo não precisaremos nos preocupar com a boa definição de subtrações desses valores. O segundo item pede, em particular, que o espaço X seja geodésico em relação à ação, isto é, sempre existe uma curva minimizante conectando dois pontos. Por conta disso, se $(\mathcal{A})^{0,1}$ satisfaz 1), porém temos somente que $\Gamma_{\{x\} \rightarrow \{y\}}^{s,t} \neq \emptyset$, para todos $x, y \in X$, diremos que o espaço X é geodésico em relação à ação.

Vejamos agora, algumas propriedades desses funcionais.

Proposição 6.0.1. Sejam (X, d) um espaço polonês e $(\mathcal{A})^{0,1}$ uma ação lagrangiana em X . Se X for geodésico em relação à ação lagrangiana, então serão válidos:

- 1) Se $\gamma : [s, t] \rightarrow X$ for curva minimizante de $\mathcal{A}^{s,t}$, então $\gamma|_{[c,d]}$ será curva minimizante de $\mathcal{A}^{c,d}$, para todo subintervalo $[c, d] \subset [s, t]$.
- 2) Para todos os tempos intermediários $t_1 < t_2 < t_3$ em $[0, 1]$, e $x_1, x_3 \in X$, temos:

$$c^{t_1, t_3}(x_1, x_3) = \inf_{x_2 \in X} \{c^{t_1, t_2}(x_1, x_2) + c^{t_2, t_3}(x_2, x_3)\},$$

e se existir x_2 mínimo, então existirá uma curva minimizante partindo de x_1 e chegando em x_3 passando por x_2 no tempo t_2 .

- 3) Uma curva γ pertencerá a $\Gamma^{s,t}$ se, e somente se, para todo $t_1 < t_2 < t_3$ em $[s, t]$, tem-se:

$$c^{t_1, t_3}(\gamma_{t_1}, \gamma_{t_3}) = c^{t_1, t_2}(\gamma_{t_1}, \gamma_{t_2}) + c^{t_2, t_3}(\gamma_{t_2}, \gamma_{t_3})$$

- 4) Se as funções custos $c^{s,t}$ são contínuas, então Γ será fechado na topologia uniforme.

Demonstração. Iremos mostrar o segundo item. Para os demais, veja a proposição 7.16 em [32].

Sejam $x_1, x_2, x_3 \in X$ e considere duas curvas minimizantes $\gamma_1 : [t_1, t_2] \rightarrow X$ e $\gamma_2 : [t_2, t_3] \rightarrow X$ tais que $\gamma_1(t_1) = x_1$, $\gamma_1(t_2) = \gamma_2(t_2) = x_2$ e $\gamma_2(t_3) = x_3$. Defina $\gamma_3 := \gamma_1 \oplus \gamma_2$. Daí,

$$\begin{aligned} c^{t_1, t_3}(x_1, x_3) &\leq \mathcal{A}^{t_1, t_3}(\gamma_3) \\ &= \mathcal{A}^{t_1, t_2}(\gamma_1) + \mathcal{A}^{t_2, t_3}(\gamma_2) \\ &= c^{t_1, t_2}(x_1, x_2) + c^{t_2, t_3}(x_2, x_3) \\ \implies c^{t_1, t_3}(x_1, x_3) &\leq \inf_{x_2 \in X} \{c^{t_1, t_2}(x_1, x_2) + c^{t_2, t_3}(x_2, x_3)\} \end{aligned}$$

Agora, considere $\gamma : [t_1, t_3] \rightarrow X$ uma curva minimizante com $\gamma(t_1) = x_1$ e $\gamma(t_3) = x_3$. Pelo primeiro item, obtemos que

$$c^{t_1, t_2}(x_1, \gamma(t_2)) + c^{t_2, t_3}(\gamma(t_2), x_3) = \mathcal{A}^{t_1, t_3}(\gamma) = c^{t_1, t_3}(x_1, x_3),$$

ou seja, o ínfimo é atingido por $\gamma(t_2)$. Logo, obtemos a igualdade. $\square$

A propriedade da coercividade é mais forte que a existência de curvas minimizantes e nos permite mostrar os seguintes resultados.

Proposição 6.0.2. Sejam (X, d) um espaço polonês e $(\mathcal{A})^{0,1}$ uma ação lagrangiana coerciva em X . Então, são válidas:

- 1) $c^{s,t}$ são semicontínuas inferiores.
- 2) Se para todos $s < t$ tivermos $\text{Im } c^{s,t} \subset \mathbb{R}$, então existirá uma aplicação mensurável $S_{s \rightarrow t} : X \times X \rightarrow C([s, t], X)$ tal que $S_{s \rightarrow t}(x, y) \in \Gamma_{x \rightarrow y}^{s,t}$ para todos $x, y \in X \times X$.

Demonstração. Iremos demonstrar o segundo item. O primeiro pode ser encontrado na proposição 7.16 em [32].

Considere $\Gamma^{s,t}$ o conjunto de todas as curvas minimizantes de domínio $[s, t]$, independente dos pontos iniciais e finais. Seja $E_{s,t} : \Gamma^{s,t} \rightarrow X \times X$ a aplicação avaliação $E_{s,t}(\gamma) = (\gamma(s), \gamma(t))$. Como a ação é coerciva, então $E_{s,t}$ é sobrejetora e $E_{s,t}^{-1}(\{(x, y)\}) = \Gamma_{x \rightarrow y}^{s,t}$, que é um compacto. Agora, $C([s, t]; X)$ dotado da métrica do supremo é um espaço métrico completo separável. Sabemos pelo item 4) da proposição anterior que $\Gamma^{s,t}$ é um subconjunto fechado em $C([s, t]; X)$, portanto ele também é um espaço métrico completo separável. Dotando $\Gamma^{s,t}$ da σ -álgebra de Borel, vemos que $\Gamma^{s,t}$ é um espaço polonês. Por fim, como $E_{s,t}$ é uma função contínua entre espaços poloneses, cujas fibras são compactas, então obtemos uma função mensurável $S_{s \rightarrow t} : X \times X \rightarrow C([s, t], X)$ tal que $E_{s,t} \circ S_{s \rightarrow t} = \text{Id}$, pelo teorema da seleção mensurável (2.3.5). $\square$

Relembre que o transporte ótimo entre duas distribuições não nos informa como o transporte foi feito. Assim, gostaríamos de saber quais são os estados intermediários ao longo desse transporte. Logo, temos o trabalho de interpolar os estados iniciais e finais deste transporte. Como discutido anteriormente, uma ideia é utilizar a estrutura de comprimento induzida de $P_p(X)$. Intuitivamente, espera-se que a interpolação em $P_p(X)$ tenha o menor comprimento possível.

Uma interpolação simples é dada pela combinação convexa entre duas medidas de $P_p(X)$. Porém, esta interpolação não funciona nesse contexto, pois dados $x, y \in X$ e considerando as medidas $\delta_x, \delta_y \in P_p(X)$, temos que $\mu(t) := (1 - t)\delta_x + t\delta_y$ e vemos que $W_p(\mu_u, \mu_v) = \sqrt[p]{|u - v|}d(x, y)$. Assim, $L_{W_p}(\mu) = +\infty$, exceto quando $p = 1$. Para casos mais gerais (e para o caso $p = 2$ mais comumente estudados na literatura), precisamos levar em consideração a estrutura do espaço base para obter uma boa noção de interpolação.

Uma ideia de outra interpolação pode ser encontrada no caso riemanniano. Como, sob algumas hipóteses, o problema de Monge em variedades possui uma solução através da aplicação exponencial, interpolar estas medidas é algo relativamente simples, já que $\exp$ contém a informação das geodésicas do espaço, como o próximo teorema exemplifica.

Teorema 6.0.1. Sejam

- (M, g) uma variedade riemanniana completa e conexa;
- d a métrica induzida por g ;
- $c = \frac{1}{2}d^2$ a função custo;
- $\mu \ll \text{vol}$ e ν medidas em $P(M)$ de suporte compacto.

Então, existe uma função $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a aplicação

$$T_t(x) := \exp_x(-t\nabla\psi(x))$$

é a função de transporte ótimo entre μ e $\mu_t := (T_t)_*(\mu)$ para todo $t \in [0, 1]$, com $\mu_1 = \nu$.

Demonstração. Veja o corolário 5.2 em [8]. □

Entretanto, sabemos que a obtenção de soluções de Monge não são, em geral, fácil. Portanto, buscamos uma “versão de Kantorovich” para o problema de interpolação. Para isto, denotando por $\Gamma^{0,1}$ o conjunto de todas as geodésicas de M de domínio $[0, 1]$, note que podemos definir uma função $S : M \rightarrow \Gamma^{0,1}$ por $S(x)[t] = T_t(x)$. Assim, podemos definir uma medida em $\Gamma^{0,1}$ por $S_*(\mu)$ com a propriedade de que $(e_t)_*(S_*(\mu)) = \mu_t$, onde e_t é a aplicação avaliação. Dessa forma, $S_*(\mu)$ se comporta como uma espécie de coupling no espaço das geodésicas para a interpolação. Para um espaço métrico polonês X dotado de uma ação lagrangiana coerciva, vimos pelo item 2) da proposição 6.0.2 que sempre podemos tomar uma função mensurável S dos pontos do espaço para o conjunto das curvas minimizantes, assim, dado um coupling $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, para $\mu, \nu \in P(X)$, podemos definir uma medida no espaço das curvas pelo mesmo processo. Esta medida se comporta de forma semelhante ao caso riemanniano acima. Isto nos induz à seguinte definição.

Definição 6.0.4. Seja X um espaço polonês e $(\mathcal{A})^{0,1}$ uma ação lagrangiana tal que X seja geodésico em relação à ação. Considere $\mu, \nu \in P(X)$.

- Um coupling dinâmico entre μ e ν é uma medida $\Pi \in P(C([0, 1]; X))$ tal que:
 1. $(e_0)_*\Pi = \mu$;
 2. $(e_1)_*\Pi = \nu$.
- Um coupling dinâmico $\Pi \in P(C([0, 1]; X))$ é dito ótimo se $\Pi(\Gamma^{0,1}) = 1$ e $(e_0, e_1)_*\Pi \in \Pi(\mu, \nu)$ for coupling ótimo. Denotamos:

$$\text{OptGeo}(\mu, \nu) := \{\text{Todos os couplings dinâmicos ótimos entre } \mu \text{ e } \nu\}.$$

Também será útil indicar por $\text{OptGeo}_{s,t}$ quando o domínio das curvas for $[s, t] \subset [0, 1]$.

- Uma curva $\mu \in C([0, 1]; P(X))$ é dita interpolação de deslocamento entre μ e ν se existir um $\Pi \in \text{OptGeo}(\mu, \nu)$ tal que $(e_t)_*(\Pi) = \mu_t$.

Observe que o coupling dinâmico é a versão de Kantorovich para o problema de interpolação desejada, além disso, da forma definida, é natural esperarmos que estas interpolações de deslocamento tenham relação com as curvas minimizantes do funcional comprimento de $P_p(X)$. Veremos mais abaixo que este é de fato o caso.

Para demonstrarmos que $P_p(X)$ são espaços geodésicos para $p \geq 1$, iremos construir um funcional lagrangiano coercivo em $P_p(X)$ que compartilhará das mesmas geodésicas de L_{W_p} . O resultado final será uma completa caracterização das geodésicas de $P_p(X)$ como interpolações de deslocamento. Para isso, precisaremos do seguinte lema.

Lema 6.0.1. Seja $(\mathcal{A})^{0,1}$ uma ação lagrangiana coerciva (ou no mínimo "geodésica") em X . Então, os funcionais de transporte ótimo $C^{s,t}$ satisfazem a desigualdade triangular: dados $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \in [0, 1]$ e $\mu_{t_1}, \mu_{t_2}, \mu_{t_3} \in P(X)$, temos

$$C^{t_1, t_3}(\mu_{t_1}, \mu_{t_3}) \leq C^{t_1, t_2}(\mu_{t_1}, \mu_{t_2}) + C^{t_2, t_3}(\mu_{t_2}, \mu_{t_3})$$

Demonstração. Sejam (X_{t_1}, X_{t_2}) e (Y_{t_2}, Y_{t_3}) couplings ótimos entre (μ_{t_1}, μ_{t_2}) e (μ_{t_2}, μ_{t_3}) , respectivamente. Seja $(Z_{t_1}, Z_{t_2}, Z_{t_3})$ colagem dos couplings ótimos. Utilizando a desigualdade triangular das funções custos $c^{s,t}$ (devido ao fato de que $\mathcal{A}$ é "lagrangiano geodésico") obtemos:

$$\begin{aligned} C^{t_1, t_3}(\mu_{t_1}, \mu_{t_3}) &\leq \mathbb{E} c^{t_1, t_3}(Z_{t_1}, Z_{t_3}) = \int_{\Omega} c^{t_1, t_3}(Z_{t_1}, Z_{t_3}) d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\Omega} c^{t_1, t_2}(Z_{t_1}, Z_{t_2}) d\mathbb{P} + \int_{\Omega} c^{t_2, t_3}(Z_{t_2}, Z_{t_3}) d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E} c^{t_1, t_2} + \mathbb{E} c^{t_2, t_3} \\ &= C^{t_1, t_2}(\mu_{t_1}, \mu_{t_2}) + C^{t_2, t_3}(\mu_{t_2}, \mu_{t_3}). \end{aligned}$$

□

Uma boa propriedade de couplings dinâmicos ótimos é que ser ótimo é preservada por restrições.

Proposição 6.0.3. Sejam $\Pi \in \text{OptGeo}_{s,t}(\mu, \nu)$ e $[u, v] \subset [s, t]$, com $C^{s,t}(\mu, \nu) < +\infty$. Então, $\Pi^{u,v} := (r_{u,v})_* \Pi \in \text{OptGeo}_{u,v}((e_u)_*(\Pi^{u,v}), (e_v)_*(\Pi^{u,v}))$, onde $r_{u,v} : \Gamma^{s,t} \rightarrow \Gamma^{u,v}$ é a restrição $r_{u,v}(\gamma) = \gamma|_{[u,v]}$.

Demonstração. Basta mostrar que $\pi_{u,v} := (E_{u,v})_* \Pi$ é coupling ótimo. Para isto, defina $\mu \in C([s, t]; P(X))$ por $\mu(u) = \mu_u := (e_u)_* \Pi$. Note que:

$$\begin{aligned} C^{s,u}(\mu_s, \mu_u) + C^{u,v}(\mu_u, \mu_v) + C^{v,t}(\mu_v, \mu_t) &\leq \mathbb{E} c^{s,u}(e_s, e_u) + \mathbb{E} c^{u,v}(e_u, e_v) + \mathbb{E} c^{v,t}(e_v, e_t) \\ &= \mathbb{E} c^{s,t}(e_s, e_t) = C^{s,t}(\mu_s, \mu_t) < +\infty, \end{aligned}$$

pois $\pi = (E_{s,t})_*\Pi$ é coupling ótimo. Pela desigualdade triangular dos funcionais de transporte ótimo, obtemos:

$$C^{s,t}(\mu_s, \mu_t) \leq C^{s,u}(\mu_s, \mu_u) + C^{u,v}(\mu_u, \mu_v) + C^{v,t}(\mu_v, \mu_t).$$

Combinando com a desigualdade acima, obtemos a igualdade:

$$C^{s,u}(\mu_s, \mu_u) + C^{u,v}(\mu_u, \mu_v) + C^{v,t}(\mu_v, \mu_t) = \mathbb{E}c^{s,u}(e_s, e_u) + \mathbb{E}c^{u,v}(e_u, e_v) + \mathbb{E}c^{v,t}(e_v, e_t).$$

Concluimos através de um argumento por contradição. Suponha, por absurdo, que $\mathbb{E}c^{u,v}(e_u, e_v) > C^{u,v}(\mu_u, \mu_v)$. Logo,

$$C^{s,u}(\mu_s, \mu_u) + C^{v,t}(\mu_v, \mu_t) < \mathbb{E}c^{s,u}(e_s, e_u) + \mathbb{E}c^{v,t}(e_v, e_t).$$

Então, $\mathbb{E}c^{s,u}(e_s, e_u) > C^{s,u}(\mu_s, \mu_u)$ ou $\mathbb{E}c^{v,t}(e_v, e_t) > C^{v,t}(\mu_v, \mu_t)$. Supondo qualquer um dos casos, obteremos o outro. Assim, nenhum coupling será ótimo e obtemos a desigualdade estrita:

$$C^{s,u}(\mu_s, \mu_u) + C^{u,v}(\mu_u, \mu_v) + C^{v,t}(\mu_v, \mu_t) < \mathbb{E}c^{s,u}(e_s, e_u) + \mathbb{E}c^{u,v}(e_u, e_v) + \mathbb{E}c^{v,t}(e_v, e_t),$$

o que contradiz a igualdade anterior. Portanto, $\mathbb{E}c^{u,v}(e_u, e_v) = C^{u,v}(\mu_u, \mu_v)$ e obtemos que $\pi_{u,v}$ é ótimo. $\square$

Da mesma forma que um espaço métrico sempre tem uma estrutura de comprimento induzida pela métrica, dado um funcional lagrangiano coercivo $(\mathcal{A})^{0,1}$ em X , podemos definir um funcional $(\mathbb{A})^{0,1}$ em $P(X)$ por:

$$\mathbb{A}^{s,t}(\boldsymbol{\mu}) := \sup_P \sum_{i=0}^{|P|-2} C^{t_i, t_{i+1}}(\mu_{t_i}, \mu_{t_{i+1}}),$$

onde $\boldsymbol{\mu}$ é uma curva em $P(X)$. Esta será nossa ação lagrangiana desejada.

Inicialmente, já temos que é possível minimizar esse funcional através das interpolações de deslocamento.

Proposição 6.0.4. Considere:

- (X, d) um espaço polonês;
- $(\mathcal{A})^{0,1}$ uma ação lagrangiana coerciva em X ;
- funções custos associada $c^{s,t}$ contínuas para todos $0 \leq s < t \leq 1$;
- $C^{s,t}(\mu, \nu)$ funcionais de transporte ótimo para $\mu, \nu \in P(X)$ de funções custos $c^{s,t}$;
- um intervalo $[s, t] \subset [0, 1]$.

Se $\mu, \nu \in P(X)$, então existirá uma curva $\boldsymbol{\mu} \in C([s, t]; P(X))$, com $\mu_s = \mu$ e $\mu_t = \nu$, tal que

$$\mathbb{A}^{s,t}(\boldsymbol{\mu}) = C^{s,t}(\mu_s, \mu_t).$$

Demonstração.

- Caso 1: μ e ν tais que $C^{0,1}(\mu, \nu) = +\infty$.

Neste caso, qualquer curva $\boldsymbol{\mu}$ serve, pois:

$$+\infty = C^{0,1}(\mu, \nu) \leq \Sigma(\boldsymbol{\mu}, P) \leq \mathbb{A}^{s,t}(\boldsymbol{\mu}).$$

- Caso 2: μ e ν tais que $C^{0,1}(\mu, \nu) < +\infty$.

Como $(\mathcal{A})^{0,1}$ é coercivo, então existe uma função mensurável $S_{s \rightarrow t} : X \times X \rightarrow \Gamma^{s,t}$ com $E_{s,t} \circ S_{s \rightarrow t} = \text{Id}$. Assim, seja $\pi_{s,t} \in \Pi(\mu, \nu)$ coupling ótimo. Defina $\Pi \in \text{OptGeo}_{s,t}(\mu, \nu)$ por $\Pi := (S_{s \rightarrow t})_*(\pi_{s,t})$ e $\boldsymbol{\mu}(u) = \mu_u := (e_u)_*\Pi$.

Seja $P = \{t_0 = s, \dots, t_N = t\}$ uma partição de $[s, t]$. Pela proposição anterior, obtemos que $\pi_{t_i, t_{i+1}} := (E_{t_i, t_{i+1}})_*\Pi$ é coupling ótimo para todo $i = 0, \dots, N-1$. Concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} C^{t_i, t_{i+1}}(\mu_{t_i}, \mu_{t_{i+1}}) &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E} c^{t_i, t_{i+1}}(e_{t_i}, e_{t_{i+1}}) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N-1} c^{t_i, t_{i+1}}(e_{t_i}, e_{t_{i+1}}) \right] \\ &= \mathbb{E} c^{s,t}(e_s, e_t) = C^{s,t}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Isto vale para qualquer partição P , logo, tomando o supremo em ambos os lados, obtemos:

$$\mathbb{A}^{s,t}(\boldsymbol{\mu}) = C^{s,t}(\mu_s, \mu_t).$$

□

Com os resultados anteriores, podemos mostrar que $(\mathbb{A})^{0,1}$ é, de fato, lagrangiana.

Teorema 6.0.2. Considere:

- (X, d) um espaço polonês;
- $(\mathcal{A})^{0,1}$ uma ação lagrangiana coerciva em X ;
- Funções custos associada $c^{s,t}$ contínuas para todos $0 \leq s < t \leq 1$;
- $C^{s,t}(\mu, \nu)$ funcionais de transporte ótimo para $\mu, \nu \in P(X)$ de funções custos $c^{s,t}$;

Então, $(\mathbb{A})^{0,1}$ é uma ação lagrangiana.

Demonstração.

- Passo 1: $\mathbb{A}^{s,t}$ é semicontínua inferior $\forall s, t \in [0, 1]$ com $s < t$.

Dado $\mu \in C([s, t]; P(X))$, seja $P = \{t_0 = s, \dots, t_N = t\}$ partição de $[s, t]$. Defina $A_i : C([s, t]; P(X)) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por $A_i(\mu) := C^{t_i, t_{i+1}}(\mu_{t_i}, \mu_{t_{i+1}})$. Como $c^{u,v}$ são contínuas para todos $u, v \in [0, 1]$ com $u > v$, segue do teorema 3.1.2 que A_i será semicontínua inferior na topologia pontual de curvas em $C([s, t]; P(X))$ (logo, será semicontínua inferior na topologia uniforme) para todo $i = 0, \dots, N - 1$. Desta forma,

$$\Sigma(\mu, P) = \sum_i A_i(\mu),$$

isto é, $\Sigma(\mu, P)$ é soma finita de funções semicontínuas inferiores, logo é semicontínua inferior. Como $\mathbb{A}^{s,t}(\mu) = \sup_P \Sigma(\mu, P)$, então $\mathbb{A}^{s,t}$ é supremo de uma família de funcionais semicontínuas inferiores, portanto é semicontínua inferior (veja o lema 2.41 em [1]).

- Passo 2: Dado uma curva $\mu \in C([s, t]; P(X))$, então

$$\mathbb{A}^{s,t}(\mu) = \mathbb{A}^{s,v}(\mu|_{[s,v]}) + \mathbb{A}^{v,t}(\mu|_{[v,t]}),$$

para todo $s < v < t$.

De fato, seja $P = \{t_0 = s, \dots, t_j = v, \dots, t_N = t\}$ partição de $[s, t]$. Veja que podemos definir partições $L = \{t_0 = s, \dots, t_j = v\}$ de $[s, v]$ e $Q = \{t_j = v, \dots, t_N = t\}$ de $[v, t]$. Portanto, obtemos que

$$\mathbb{A}^{s,t}(\mu) \geq \Sigma(\mu, P) = \Sigma(\mu|_{[s,v]}, L) + \Sigma(\mu|_{[v,t]}, Q).$$

Tomando os supremos individuais das partições de $[s, v]$ e $[v, t]$, obtemos a desigualdade $\mathbb{A}^{s,t}(\mu) \geq \mathbb{A}^{s,v}(\mu|_{[s,v]}) + \mathbb{A}^{v,t}(\mu|_{[v,t]})$.

Para a outra desigualdade, utilizaremos a desigualdade triangular nos funcionais de transporte ótimo. Considere $P = \{t_0 = s, \dots, t_N = t\}$ partição de $[s, t]$. Seja $v \in (s, t)$ e considere j tal que $v \in [t_j, t_{j+1}]$. Assim,

$$C^{t_j, t_{j+1}}(\mu_{t_j}, \mu_{t_{j+1}}) \leq C^{t_j, v}(\mu_{t_j}, \mu_v) + C^{v, t_{j+1}}(\mu_v, \mu_{t_{j+1}}).$$

Logo:

$$\Sigma(\mu, P) \leq \Sigma(\mu|_{[s,v]}, L) + \Sigma(\mu|_{[v,t]}, Q) \leq \mathbb{A}^{s,v}(\mu|_{[s,v]}) + \mathbb{A}^{v,t}(\mu|_{[v,t]}),$$

onde introduzimos as partições $L = \{t_0 = s, \dots, t_j = v\}$ de $[s, v]$ e $Q = \{t_j = v, \dots, t_N = t\}$ de $[v, t]$. Tomando o supremo nas partições P de $[s, t]$, obtemos a outra desigualdade:

$$\mathbb{A}^{s,t}(\mu) \leq \mathbb{A}^{s,v}(\mu|_{[s,v]}) + \mathbb{A}^{v,t}(\mu|_{[v,t]})$$

- Passo 3: $\forall \mu, \nu \in P(X)$ temos:

$$C^{s,t}(\mu, \nu) = \inf\{\mathbb{A}^{s,t}(\boldsymbol{\mu}) \mid \mu_s = \mu, \mu_t = \nu\}.$$

De fato, temos

$$\mathbb{A}^{s,t}(\boldsymbol{\mu}) \geq C^{s,t}(\mu, \nu)$$

pela definição de $\mathbb{A}^{s,t}$. Assim, $C^{s,t}(\mu, \nu) \leq \inf\{\mathbb{A}^{s,t}(\boldsymbol{\mu}) \mid \mu_s = \mu, \mu_t = \nu\}$. Nas hipóteses do teorema, lembre-se que dados $\mu, \nu \in P(X)$, existe uma curva $\boldsymbol{\mu}$ com $\mu_s = \mu, \mu_t = \nu$ e $C^{s,t}(\mu, \nu) = \mathbb{A}^{s,t}(\boldsymbol{\mu})$, isto é, existe uma curva onde o ínfimo é atingido. Concluimos a afirmação do passo.

- Passo 4: $\mathbb{A}^{s,t}(\boldsymbol{\mu}) \geq \Sigma(\boldsymbol{\mu}, P)$.

Trivial pela definição de $\mathbb{A}^{s,t}$. □

Veja que do passo 3 da demonstração acima, temos que a $P(X)$ é geodésico em relação à ação $(\mathbb{A})^{0,1}$. Até então, mostramos que as interpolações de deslocamento são os minimizantes de $(\mathbb{A})^{0,1}$. O próximo teorema nos mostra que elas são as únicas minimizantes.

Teorema 6.0.3. Considere:

- (X, d) um espaço polonês;
- $(\mathcal{A})^{0,1}$ uma ação lagrangiana coerciva em X ;
- Funções custos associada $c^{s,t}$ contínuas para todos $0 \leq s < t \leq 1$;
- $C^{s,t}(\mu, \nu)$ funcionais de transporte ótimo para $\mu, \nu \in P(X)$ de funções custos $c^{s,t}$;

Sejam $\mu, \nu \in P(X)$ tais que $C^{0,1}(\mu, \nu) < +\infty$. Seja $\boldsymbol{\mu} \in C([0, 1]; P(X))$ tal que $\mu_0 = \mu$ e $\mu_1 = \nu$. São equivalentes:

- (1) $\boldsymbol{\mu}$ é interpolação de deslocamento entre μ e ν .
- (2) Para toda tripla $t_1 < t_2 < t_3$ em $[0, 1]$, temos que:

$$C^{t_1, t_3}(\mu_{t_1}, \mu_{t_3}) = C^{t_1, t_2}(\mu_{t_1}, \mu_{t_2}) + C^{t_2, t_3}(\mu_{t_2}, \mu_{t_3}).$$

- (3) $\boldsymbol{\mu}$ é curva minimizante da ação $(\mathbb{A})^{0,1}$.

Demonstração. A equivalência (2) $\iff$ (3) nada mais é que o item 3) da proposição 6.0.1. Notando que provamos que $P(X)$ é geodésico com relação a $(\mathbb{A})^{0,1}$ no teorema anterior, a equivalência já está provada.

Para (1) $\implies$ (3), basta utilizar o mesmo argumento na prova da proposição da existência de interpolação de deslocamento.

Para a implicação (2) $\implies$ (1), a curva é construída através dos diádicos em $[0, 1]$ e o lema da colagem. A demonstração precisa é demasiadamente longa e foge do objetivo deste capítulo. Para uma demonstração completa veja o teorema 7.21 em [32]. $\square$

Por fim, $(\mathbb{A})^{0,1}$ é coerciva:

Teorema 6.0.4. Com as hipóteses anteriores, $(\mathbb{A})^{0,1}$ é uma ação lagrangiana coerciva.

Demonstração. A primeira propriedade de coercividade é satisfeita devido à coercividade de $(\mathcal{A})^{0,1}$, pois obtemos que as funções custos $c^{s,t}$ são uniformemente limitadas por baixo por uma constante $K > +\infty$, na qual implica que $C^{s,t} > K$.

Sejam $\mathcal{K}_s, \mathcal{K}_t \subset P(X)$ compactos não vazios tais que $C^{s,t}(\mathcal{K}_s, \mathcal{K}_t) < +\infty$. Pelo teorema anterior, mostramos que existe uma bijeção entre os seguintes conjuntos:

$$\Gamma_{\mathcal{K}_s \rightarrow \mathcal{K}_t}^{s,t} := \{\boldsymbol{\mu} \in C([s, t]; P(X)) \mid \mu_s \in \mathcal{K}_s, \mu_t \in \mathcal{K}_t, \mathbb{A}(\boldsymbol{\mu}) = C^{s,t}(\mu_s, \mu_t)\};$$

$$\begin{aligned} \text{OptGeo}_{s,t}(\mathcal{K}_s, \mathcal{K}_t) &:= \{\Pi \in P(C([s, t]; X)) \mid (e_s)_* \Pi \in \mathcal{K}_s, (e_t)_* \Pi \in \mathcal{K}_t, \\ &\quad \pi_{s,t} := (E_{s,t})_* \Pi \text{ é coupling ótimo}\}. \end{aligned}$$

A aplicação é dado por $e_* : \text{OptGeo}_{s,t}(\mathcal{K}_s, \mathcal{K}_t) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{K}_s \rightarrow \mathcal{K}_t}^{s,t}$, definida como $e_*(\Pi)(u) := (e_u)_* \Pi$. A demonstração consiste em mostrar que e_* é contínua e que $\text{OptGeo}_{s,t}(\mathcal{K}_s, \mathcal{K}_t)$ é compacto. Novamente, veja o teorema 7.21 em [32] para uma demonstração detalhada. $\square$

Concluimos a sequência de resultados mostrando que $(P_p(X), W_p, L_{W_p})$ é um espaço de comprimento geodésico através de uma aplicação da coercividade do funcional $(\mathbb{A})^{0,1}$. Este teorema se encontra em [32] como corolário 7.23.

Teorema 6.0.5. Seja (X, d, L) um espaço polonês de comprimento localmente compacto com funcional comprimento $L = L_d$. Considere os espaços $(P_p(X), W_p)$ de Wasserstein para $p \geq 1$. Então, $(P_p(X), W_p, L_{W_p})$ é um espaço de comprimento geodésico. Além disso, se $\mu, \nu \in P_p(X)$ e $\boldsymbol{\mu} \in C([0, 1]; P_p(X))$ for uma curva entre μ e ν , então as seguintes afirmações são equivalentes para $p > 1$:

1. $\boldsymbol{\mu}$ é interpolação de deslocamento entre μ e ν .
2. $\boldsymbol{\mu}$ é uma geodésica de $P_p(X)$.

Demonstração. Utilizamos os teoremas anteriores. Para isto, precisamos definir uma ação lagrangiana coerciva em X de modo que as geodésicas do funcional induzido $(\mathbb{A})^{0,1}$ sejam justamente as geodésicas do funcional de comprimento L_{W_p} .

Lembre-se que para curvas retificáveis, obtemos que $L_d(\gamma) = \int_s^t v_\gamma(t') dt'$, onde v_γ é a velocidade da curva definida em quase todo ponto do intervalo $[s, t]$. Defina o funcional

$$\mathcal{A}^{s,t}(\gamma) := \int_s^t v_\gamma(t')^p dt',$$

se $\gamma \in C([s, t]; X)$ for retificável e $+\infty$ caso contrário. Como $\mathcal{A}$ é definida via uma integral, então o funcional satisfaz $t_i \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq t_f \implies \mathcal{A}^{t_1,t_3} = \mathcal{A}^{t_1,t_2} + \mathcal{A}^{t_2,t_3}$.

Defina $c^{s,t}(x, y) := \inf\{\mathcal{A}^{s,t}(\gamma) \mid \gamma(s) = x, \gamma(t) = y\}$. Note que $c^{s,t}$ é contínua. Precisamos mostrar que $(\mathcal{A})^{0,1}$ é uma ação lagrangiana coerciva.

- Passo 1: $\mathcal{A}^{s,t}$ é semicontínua inferior.

Seja $\gamma \in C([s, t]; X)$. Se escrevermos $f_\gamma(u) := L(\gamma, s, u)$, então temos $f_\gamma \in L^p([s, t])$ para todo $p \geq 1$. Assim, podemos definir um funcional $I : L^p([s, t]) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por

$$I(f) := \int_s^t |f'(u)|^p du.$$

Logo, $\mathcal{A}^{s,t}(\gamma) = I(f_\gamma)$. Agora, a semicontinuidade desse tipo de funcional é conhecida na literatura. Veja o teorema 1 da seção 8.2.2 em [9] e o lema 4.3.1 em [14].

- Passo 2: $c^{s,t}(x, y) = \frac{d(x,y)^p}{(t-s)^{p-1}}$.

Como $p \geq 1$, temos que a função real $f(x) = x^p$ é convexa. Pela desigualdade de Jensen, temos

$$\mathcal{A}^{s,t}(\gamma) \geq \left(\frac{1}{t-s} \int_s^t v_\gamma(t') dt' \right)^p = \frac{L(\gamma)^p}{(t-s)^{p-1}}.$$

Dado dois pontos $x, y \in X$, vemos que $c^{s,t}(x, y) \geq \frac{d(x,y)^p}{(t-s)^{p-1}}$. Agora, existe γ geodésica de velocidade constante $v_\gamma(u) = \frac{L(\gamma)}{t-s}$ para todo $u \in [s, t]$, indo de x para y . Assim,

$$\mathcal{A}^{s,t}(\gamma) = \int_s^t \left(\frac{L(\gamma)}{t-s} \right)^p dt' = \frac{L(\gamma)^p}{(t-s)^{p-1}} = \frac{d(x,y)^p}{(t-s)^{p-1}}.$$

Logo, $\mathcal{A}^{s,t}(\gamma) \geq c^{s,t}(x, y) \geq \frac{d(x,y)^p}{(t-s)^{p-1}} = \mathcal{A}^{s,t}(\gamma)$. Dessa forma, obtemos a igualdade.

- Passo 3: $\mathcal{A}^{s,t}(\gamma) = \sup_P \Sigma(\gamma, P)$.

Quando γ não for retificável, a igualdade será trivial. Defina $\mathcal{A}_c^{s,t}(\gamma) := \sup_P \Sigma(\gamma, P)$. Utilizaremos a mesma argumentação de 5.1.2.

Seja $\gamma : [s, t] \rightarrow X$ uma curva retificável e $\varepsilon > 0$. Considere uma partição $P = \{t_0 = a, \dots, t_N = b\}$ de $[a, b]$ tal que $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < \varepsilon$ para todo i . Como X é um espaço geodésico, então para cada $i = 0, \dots, N-1$, existem geodésicas de velocidade constante $\sigma_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow X$ com $\sigma_i(t_i) = \gamma(t_i)$ e $\sigma(t_{i+1}) = \gamma(t_{i+1})$.

Defina $h_\varepsilon := \bigoplus_{i=0}^{N-1} \sigma_i$. Se $t \in [t_i, t_{i+1}]$, então $d(\gamma(t), h_\varepsilon(t)) = d(\gamma(t), \sigma_i(t))$ e $d(\gamma(t), \gamma(t_i)) < \varepsilon$ pela continuidade uniforme de γ . Utilizando a desigualdade triangular obtemos:

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), h_\varepsilon(t)) &\leq d(\gamma(t), \gamma(t_i)) + d(\gamma(t_i), \sigma_i(t)) \\ &< \varepsilon + L(\sigma_i) = \varepsilon + d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

portanto h_ε converge pontualmente para γ . Como geodésicas de velocidade constante são minimizantes do funcional $\mathcal{A}^{s,t}$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{s,t}(h_\varepsilon) &= \sum_i \mathcal{A}^{t_i, t_{i+1}}(\sigma_i) = \sum_i c^{t_i, t_{i+1}}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \Sigma(\gamma, P) \leq \mathcal{A}_c^{s,t}(\gamma) \\ \implies \mathcal{A}^{s,t}(\gamma) &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}^{s,t}(h_\varepsilon) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_c^{s,t}(\gamma) \\ \implies \mathcal{A}^{s,t}(\gamma) &\leq \mathcal{A}_c^{s,t}(\gamma). \end{aligned}$$

Por fim, veja que dado qualquer partição P de $[s, t]$, segue que $\Sigma(\gamma, P) \leq \sum_i \mathcal{A}^{t_i, t_{i+1}}(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}) = \mathcal{A}^{s,t}(\gamma)$. Tomando o supremo sobre todas as partições, obtemos que $\mathcal{A}_c^{s,t}(\gamma) \leq \mathcal{A}^{s,t}(\gamma)$. Assim, a igualdade se verifica.

- Passo 4: $\mathcal{A}^{s,t}$ é coercivo.

A coercividade de $\mathcal{A}^{s,t}$ segue da coercividade de L , já que as curvas minimizantes de $\mathcal{A}^{s,t}$ são geodésicas de L , e pelo item 4) da proposição 6.0.1, o conjunto das curvas minimizantes de $\mathcal{A}^{s,t}$ é fechado. Dessa forma, considere $\Gamma_{K_s \rightarrow K_t}^{s,t}$ o conjunto de todas as geodésicas de L definidas em $[s, t]$ partindo de $K_s \subset X$ e chegando em $K_t \subset X$, com K_s e K_t compactos não vazios. Considere $F := \overline{\bigcup_{(x,y) \in K_s \times K_t} B(x, d(x,y))}$. Veja que F é limitado, e como X é Heine-Borel pelo teorema 5.1.6, então F é compacto. Além disso, se $x \in K_s$ e $y \in K_t$, temos que a geodésica $\gamma : [s, t] \rightarrow X$ de x para y está contida em F , caso contrário existiria um $u \in [s, t]$ tal que $d(x, \gamma(u)) > d(x, y)$, logo $d(x, y) = d(x, \gamma(u)) + d(\gamma(u), y) > d(x, y)$, absurdo. Dessa forma, as curvas em $\Gamma_{K_s \rightarrow K_t}^{s,t}$ possuem comprimento uniformemente limitado. Pelo teorema de Arzelà-Ascoli em espaços de comprimento compactos (teorema 2.5.14 em [7]), temos que $\Gamma_{K_s \rightarrow K_t}^{s,t}$ é compacto na topologia uniforme.

- Passo 5: $P_p(X)$ é um espaço geodésico.

Pelo teorema anterior, $(\mathbb{A})^{0,1}$ é uma ação lagrangiana coerciva com $C^{s,t}(\mu, \nu) = \frac{W_p(\mu, \nu)^p}{(t-s)^{p-1}}$ para todo $\mu, \nu \in P_p(X)$. Considere $\boldsymbol{\mu} \in C([0, 1]; P(X))$ definida por $\boldsymbol{\mu}(u) := (e_u)_*(\Pi)$ uma interpolação de deslocamento em $P(X)$ com $\mu_0, \mu_1 \in P_p(X)$. Então:

$$\begin{aligned}
W_p(\mu_s, \mu_t)^p &= \int_{X \times X} d^p d(E_{s,t})_* \Pi \\
&= \int_{\Gamma^{s,t}} d \circ E_{s,t}^p d\Pi \\
&= \int_{\Gamma^{0,1}} (t-s)^p d \circ E_{0,1}^p d\Pi \\
&= (t-s)^p W_p(\mu_0, \mu_1)^p.
\end{aligned}$$

Portanto, $\boldsymbol{\mu}$ é uma curva em $P_p(X)$ e caracteriza uma geodésica para o funcional L_{W_p} , já que

$$L_{W_p}(\boldsymbol{\mu}) = \sup_P \Sigma(\boldsymbol{\mu}, P) = W_p(\mu_0, \mu_1).$$

□

Um dos motivos da importância deste resultado é devido à própria definição de condições de curvaturas em espaços métricos. Em [21], McCann estudou a convexidade de certos funcionais de energia em relação às medidas no espaço $P_2(\mathbb{R}^n)$. Esta convexidade é considerada sobre as geodésicas de $P_2(\mathbb{R}^n)$, levando naturalmente à necessidade da caracterização de suas geodésicas.

Para o próximo capítulo, iremos focar no desenvolvimento da última ferramenta necessária para mostrarmos que os grupos de isometria de certos espaços geodésicos sejam grupos de Lie.

Capítulo 7

Distância entre Espaços Métricos

Constantemente em análise, estudamos propriedades de objetos através de aproximações. Muitas vezes em que se é esperado que um certo espaço ou função possui uma propriedade específica, buscamos construir sequências que aproximem o objeto original e que possuem a propriedade desejada. Frequentemente, é mais fácil trabalhar com as aproximações do objeto do que com o objeto em si. Dessa forma, a noção de espaços métricos é fundamental em análise, pois podemos dar rigor ao quanto um objeto está próximo do outro através da métrica definida. Um bom exemplo onde isto acontece e é amplamente usado são os espaços de funções.

Da mesma forma que podemos estudar aproximações de funções através de outras funções, a distância de Gromov-Hausdorff é uma tentativa de estudar aproximações de espaços métricos por outros espaços métricos. Gostaríamos de definir uma distância entre espaços e estudar a “topologia” gerada por essa distância. Porém, não podemos definir estes conceitos da forma usual, pois não existe um conjunto de todos os espaços métricos (todo conjunto pode ser dotado da métrica discreta). Veremos que mesmo com este problema conseguimos definir uma noção satisfatória de distância entre espaços métricos limitados. Para o caso ilimitado, precisaremos adaptar as definições e nos limitar ao estudo de espaços métricos pontuados, isto é, uma dupla (X, p) , com $p \in X$. Nos basearemos no capítulo 7 em [7].

7.1 Distância de Gromov-Hausdorff

Podemos formular a distância de Gromov-Hausdorff de duas formas: a forma extrínseca e a forma intrínseca. Começaremos com a forma extrínseca.

Definição 7.1.1. Sejam X e Z dois espaços métricos e $f : X \rightarrow Z$ uma função. Dizemos que f é mergulho isométrico de X em Z se f for injetora e preserva distâncias, ou seja, se f for uma isometria entre X e $f(X)$. Neste caso, dizemos que X é isometricamente mergulhado em Z .

Se Z for um espaço métrico, então todo subconjunto de Z será isometricamente mergulhado em Z , quando dotado da métrica induzida. Veja que para dois espaços métricos X e Y isometricamente mergulhados em Z , podemos tratar ambos os espaços como subconjuntos de Z , tornando Z em um espaço ambiente. Assim, reduzimos o problema de definir a distância entre dois espaços X e Y para o de definir uma noção de distância entre subconjuntos do espaço maior Z . Com isto, introduzimos a distância de Hausdorff.

Definição 7.1.2. Seja (X, d) um espaço métrico. Defina a distância de Hausdorff $d_H : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ por:

$$d_H(A, B) := \inf\{r > 0 \mid A \subset U(A, r) \text{ e } B \subset U(B, r)\},$$

na qual $d_H(A, B) := +\infty$ caso o conjunto seja vazio.

Uma forma equivalente de escrever a distância de Hausdorff é dado por:

Lema 7.1.1.

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}.$$

Demonstração. Tome $R = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}$. Portanto, $d(a, B) \leq \sup_{a \in A} d(a, B) \leq R$ e $d(b, A) \leq \sup_{b \in B} d(b, A) \leq R$. Vemos que para todo $\varepsilon > 0$, obtemos $A \subset U(B, R + \varepsilon)$ e $B \subset U(A, R + \varepsilon)$, isto é, R é um ponto de acumulação do conjunto $\{r > 0 \mid A \subset U(A, r) \text{ e } B \subset U(B, r)\}$.

Seja $R_0 > 0$ um limitante inferior do conjunto $\{r > 0 \mid A \subset U(A, r) \text{ e } B \subset U(B, r)\}$. Se $R_0 > R$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $R + \varepsilon < R_0$ e $R + \varepsilon \in \{r > 0 \mid A \subset U(A, r) \text{ e } B \subset U(B, r)\}$, absurdo já que R_0 é limitante inferior. Portanto, $R_0 \leq R$ para todo limitante inferior, logo $R = d_H(A, B)$. □

Lembre-se que uma semi-métrica em X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz todas as características de métrica, exceto que $d(p, q) = 0$ não implica que $p = q$. A distância de Hausdorff é uma semi-métrica no conjuntos das partes de um espaço métrico X .

Teorema 7.1.1. Seja X um espaço métrico. Então:

1. d_H é uma semi-métrica em X ;
2. $d_H(A, \overline{A}) = 0 \quad \forall A \subset X$;
3. Se $A, B \subset X$ forem fechados, então $d_H(A, B) = 0 \iff A = B$.

Demonstração. Veja a proposição 7.3.3 em [7]. □

Uma boa propriedade da distância de Hausdorff é que o conjunto dos subconjuntos fechados em X , dotado dessa distância, é um espaço métrico. Veremos que algo semelhante ocorre com espaços métricos compactos e a distância de Gromov-Hausdorff.

Utilizando mergulhos isométricos, podemos definir a distância de Gromov-Hausdorff a partir da distância de Hausdorff.

Definição 7.1.3. Sejam X e Y espaços métricos. A distância de Gromov-Hausdorff entre X e Y é a quantia $d_{GH}(X, Y) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que $d_{GH}(X, Y) < r$ para todo $r > 0$ se, e somente se, existir um espaço métrico Z e mergulhos isométricos $f : X \rightarrow Z$ e $g : Y \rightarrow Z$ tais que $d_H(f(X), g(Y)) < r$.

Veja que não definimos d_{GH} como um função, pois a classe de espaços métricos não forma um conjunto. A forma definida é a mais abrangente possível, mas não a mais prática. Veja que d_{GH} se comporta como um ínfimo nos espaços métricos Z onde podemos mergulhar os espaços originais. De fato, podemos reduzir esta definição a um ínfimo de um conjunto a partir do seguinte processo.

Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Considere $X \sqcup Y$ união disjunta entre X e Y . Defina o conjunto:

$$D(d_X, d_Y) := \{d : X \sqcup Y \rightarrow \mathbb{R} \mid d|_{X \times X} = d_X, d|_{Y \times Y} = d_Y \text{ e } d \text{ é uma semi-métrica}\}.$$

Para todo $d \in D(d_X, d_Y)$, podemos definir a seguinte relação de equivalência:

$$\forall x, y \in X \sqcup Y, \quad x \sim y \iff d(x, y) = 0.$$

Denotando o espaço quociente por $Z := X \sqcup Y /_d$, podemos definir uma métrica $\tilde{d}$ em Z por $\tilde{d}([x], [y]) := d(x, y)$ para todos $[x], [y] \in Z$. É possível mostrar que $\tilde{d}$ é bem definida. Denotando por $\pi_Z : X \sqcup Y \rightarrow Z$ a aplicação canônica do quociente, $\iota_X : X \rightarrow X \sqcup Y$ e $\iota_Y : Y \rightarrow X \sqcup Y$ as funções de inclusão, vemos que as aplicações $f_X := \pi_Z \circ \iota_X$ e $f_Y := \pi_Z \circ \iota_Y$ são mergulhos isométricos por construção. Agora, defina o conjunto

$$\mathcal{E}(X, Y) := \{(X \sqcup Y /_d, \tilde{d}) \mid d \in D(d_X, d_Y)\}.$$

Por fim, podemos definir

$$d_{GH}(X, Y) := \inf_{Z \in \mathcal{E}(X, Y)} d_H(\pi_Z \circ \iota_X(X), \pi_Z \circ \iota_Y(Y)).$$

Proposição 7.1.1. As duas definições da distância de Gromov-Hausdorff são equivalentes.

Demonstração. Escreva $D := \inf_{Z \in \mathcal{E}(X, Y)} d_H(\pi_Z \circ \iota_X(X), \pi_Z \circ \iota_Y(Y))$. Seja $r > 0$ tal que existe um espaço métrico Z e mergulhos isométricos $f : X \rightarrow Z$ e $g : Y \rightarrow Z$ com $d_H(f(X), g(Y)) < r$. Defina uma semi-métrica d em $X \sqcup Y$ por:

$$d(x, y) := \begin{cases} d(f(x), f(y)), & \text{se } x, y \in X \\ d(f(x), g(y)), & \text{se } x \in X \text{ e } y \in Y \\ d(g(x), f(y)), & \text{se } x \in Y \text{ e } y \in X \\ d(g(x), g(y)), & \text{se } x, y \in Y \end{cases}$$

Assim, $\sup_{x \in X} d(x, Y) < r$ e $\sup_{y \in Y} d(y, X) < r$ pela construção de d . Isto implica que $D < r$.

Se r for tal que $D < r$, então, pela construção de D acima e pela propriedade do ínfimo é imediato de que existe um espaço métrico Z e mergulhos isométricos de X e Y em Z na qual a distância de Hausdorff é menor que r .

□

Com esta definição, podemos mostrar que d_{GH} satisfaz a desigualdade triangular.

Proposição 7.1.2. Sejam (X_1, d_{X_1}) , (X_2, d_{X_2}) e (X_3, d_{X_3}) espaços métricos. Então:

$$d_{GH}(X_1, X_3) \leq d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3).$$

Demonstração. Veja a proposição 7.3.16 em [7].

□

A forma extrínseca envolve a construção de um outro espaço métrico Z para podermos analisar a distância entre dois espaços métricos. A forma intrínseca elimina essa necessidade, comparando os espaços métricos diretamente através de correspondências, definidas a seguir.

Definição 7.1.4. Sejam X e Y dois conjuntos.

- Dizemos que $\mathfrak{R} \subset X \times Y$ não vazio é uma correspondência entre X e Y se $\text{Proj}_1(\mathfrak{R}) = X$ e $\text{Proj}_2(\mathfrak{R}) = Y$.
- Se X e Y forem espaços métricos, então definimos a distorção de uma correspondência $\mathfrak{R}$ entre X e Y por:

$$\text{dis } \mathfrak{R} := \sup\{|d_Y(y, y') - d_X(x, x')| \mid (x, y), (x', y') \in \mathfrak{R}\}.$$

Veja que se $f : X \rightarrow Y$ for sobrejetora, então o gráfico de f define uma correspondência entre X e Y . Neste caso, a distorção do gráfico de f mede o quão longe f está de ser uma isometria entre os espaços X e Y . Se considerarmos todas as aplicações sobrejetoras entre X e Y , é intuitivo esperar que se X e Y não forem isométricos, então deve existir uma cota inferior para as distorções dessas aplicações. Esta cota inferior define o quão “distante” os espaços estão de serem isométricos. O próximo teorema mostra que esta cota define a distância de Gromov-Hausdorff.

Teorema 7.1.2. Sejam X e Y dois espaços métricos. Então,

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_{\mathfrak{R}} \text{dis } \mathfrak{R},$$

na qual o ínfimo é tomado entre todas as correspondências $\mathfrak{R}$ entre X e Y .

Demonstração. Precisamos mostrar que $2d_{GH}(X, Y)$ é um limitante inferior do conjunto $\{\text{dis } \mathfrak{R} \mid \mathfrak{R} \text{ é correspondência entre } X \text{ e } Y\}$. Seja $\mathfrak{R}$ uma correspondência e escreva $2r := \text{dis } \mathfrak{R}$. Defina uma semi-métrica d em $X \sqcup Y$ por:

$$d(x, y) := \begin{cases} \inf\{d_X(x, x') + d_Y(y, y') + r \mid (x', y') \in \mathfrak{R}\}, & \text{se } x \in X \text{ e } y \in Y \\ \inf\{d_X(y, y') + d_Y(x, x') + r \mid (y', x') \in \mathfrak{R}\}, & \text{se } x \in Y \text{ e } y \in X \\ d_X(x, y), & \text{se } x, y \in X \\ d_Y(x, y), & \text{se } x, y \in Y \end{cases}$$

Por construção, basta verificar que d satisfaz a desigualdade triangular. Para pontos somente em X ou somente em Y , segue direto das métricas d_X e d_Y . Então, considere $x, z \in X$ e $y \in Y$. Seja $(x', y') \in \mathfrak{R}$. Temos que,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d_X(x, x') + d_Y(y, y') + r \\ &\leq d_X(x, z) + d_X(z, x') + d(y, y') + r = d(x, z) + d_X(z, x') + d(y, y') + r. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo em $(x', y') \in \mathfrak{R}$ obtemos a desigualdade triangular. O último caso é análogo.

Por definição, se $(x, y) \in \mathfrak{R}$, temos $d(x, y) = r$. Para este x , isto implica que $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y) \leq r$. O mesmo ocorre para $d(y, X)$. Passando para o espaço métrico quociente $X \sqcup Y / \sim_d$, obtemos que $d_{GH}(X, Y) \leq r$ por construção.

Por fim, vamos mostrar que se $r > 0$ for tal que $r > d_{GH}(X, Y)$, então $2r$ não será limitante inferior do conjunto $\{\text{dis } \mathfrak{R} \mid \mathfrak{R} \text{ é correspondência}\}$. Pela definição da distância d_{GH} , existe um espaço métrico Z tal que X e Y podem ser isometricamente mergulhados e, identificando X e Y com seus mergulhos, temos $d_H(X, Y) \leq r - \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$ pequeno. Defina $\mathfrak{R} := \{(x, y) \in X \times Y \mid d_Z(x, y) \leq r - \varepsilon\}$.

- $\mathfrak{R}$ é uma correspondência entre X e Y .

De fato, dado $x \in X$ temos que $d_Z(x, Y) \leq \sup_{x' \in X} d_Z(x', Y) \leq r - \varepsilon$ pela distância de Hausdorff. Assim, pela propriedade do ínfimo, existe um $y \in Y$ tal que $d_Z(x, y) \leq r - \varepsilon$, isto é, existe um $y \in Y$ tal que $(x, y) \in \mathfrak{R}$. Analogamente, também teremos que dado $y \in Y$ existe um $x \in X$ tal que $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

- $\text{dis } \mathfrak{R} < 2r$.

De fato, sejam $(x, y), (x', y') \in \mathfrak{R}$. Então,

$$\begin{aligned} |d_X(x, x') - d_Y(y, y')| &= |d_Z(x, x') - d_Z(y, y')| \\ &\leq |d_Z(x', y) - d_Z(y, y') + d_Z(x, x') - d_Z(x', y)| \\ &\leq d_Z(x', y') + d_Z(x, y) \leq 2r - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando o supremo, vemos que $\text{dis } \mathfrak{R} \leq r < 2r$. Portanto, $2r$ não é limitante inferior. Mostramos que $d_{GH}(X, Y)$ é um ínfimo. $\square$

Deste resultado, segue naturalmente a formalização da discussão acima.

Definição 7.1.5. Sejam $\varepsilon > 0$, X e Y espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de ε -isometria se $\text{dis } f < \varepsilon$ e $f(X)$ for uma ε -rede de Y , onde $\text{dis } f$ é a distorção do gráfico de f em $X \times f(Y)$.

Observe que não estamos impondo que uma ε -isometria seja contínua.

Corolário 7.1.1. Sejam X e Y espaços métricos. São válidas:

- 1) Se $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, então existirá uma 2ε -isometria $f : X \rightarrow Y$.
- 2) Se existir uma ε -isometria $f : X \rightarrow Y$, então $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon$.

Demonstração.

- 1) Seja $\mathfrak{R}$ uma correspondência entre X e Y tal que $\text{dis } \mathfrak{R} < 2\varepsilon$. Escolha $f : X \rightarrow Y$ tal que $(x, f(x)) \in \mathfrak{R}$. Claramente, $\text{dis } f \leq \text{dis } \mathfrak{R} < 2\varepsilon$. Assim, resta mostrar que $f(X)$ é uma 2ε -rede de Y . Para isso, seja $y \in Y$ e $x \in X$ tal que $(x, y) \in \mathfrak{R}$. Então,

$$d_Y(y, f(x)) = |d_Y(y, f(x)) - d_X(x, x)| \leq \text{dis } \mathfrak{R} < 2\varepsilon.$$

2)

Defina $\mathfrak{R} := \{(x, y) \in X \times Y \mid d_Y(y, f(x)) \leq \varepsilon\}$. Vemos que $\mathfrak{R}$ é uma correspondência entre X e Y , já que $f(X)$ é uma ε -rede de Y . Logo, se $(x, y), (x', y') \in \mathfrak{R}$, então

$$\begin{aligned} |d_Y(y, y') - d_X(x, x')| &= |d_Y(y, y') - d_X(x, x') + d_Y(f(x), f(x')) - d_Y(f(x), f(x')) + \\ &\quad + d_Y(f(x), y') - d_Y(f(x), y')| \\ &\leq |d_Y(y, y') - d_Y(f(x), y')| + |d_Y(f(x), f(x')) - d_X(x, x')| + \\ &\quad + |d_Y(f(x), y') - d_Y(f(x), f(x'))| \\ &< \varepsilon + d_Y(y, f(x)) + d_Y(y', f(x')) \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{dis } \mathfrak{R} \leq 3\varepsilon$, que implica que $d_{GH}(X, Y) \leq 3/2\varepsilon < 2\varepsilon$. $\square$

Com a definição intrínseca, é possível demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 7.1.3. Sejam X e Y espaços métricos compactos. Então, $d_{GH}(X, Y) = 0$ se, e somente se, X e Y forem isométricos.

Demonstração. Veja o teorema 7.3.30 em [7]. □

A compacidade aqui é utilizada para garantir que X e Y sejam limitados e fechados, pois pela forma extrínseca, mergulhando X e Y em um espaço ambiente Z , se $\text{diam } X = +\infty$ ou $\text{diam } Y = +\infty$, podemos obter que a distância de Hausdorff entre os conjuntos seja infinita. Além disso, vimos que $d_H(X, Y) = 0$ implicará que $X = Y$, somente quando X e Y forem fechados.

Dessa forma, a distância de Gromov-Hausdorff se comporta como uma métrica na classe de espaços métricos compactos, a menos de isometrias. A classe de todos os espaços métricos compactos ainda não forma um conjunto, porém existem espaços métricos chamados espaços universais de Urysohn, na qual sempre é possível mergulhar isometricamente qualquer espaço compacto. Um exemplo de tal espaço é $C([0, 1]; \mathbb{R})$, o espaço de todas as funções contínuas de $[0, 1]$ para $\mathbb{R}$ com a métrica do supremo (para uma demonstração veja o corolário 5.18 em [10]). Portanto, se Z for um espaço universal de Urysohn, e considerando o conjunto de todas as classes de subconjuntos compactos isométricos de Z , então a distância de Gromov-Hausdorff, definida de forma apropriada, é de fato uma métrica neste conjunto. Assim, passando a uma classe de isometria, podemos estudar limites de sequências de espaços métricos compactos da forma usual em análise.

Os resultados de aproximação entre espaços do próximo capítulo serão feitas através de espaços possivelmente ilimitados, dessa forma nosso próximo passo é estender a definição da distância de Gromov-Hausdorff para acomodar esses espaços.

7.2 Distância de Gromov-Hausdorff Pontuada

Vimos que para espaços ilimitados a distância de Gromov-Hausdorff pode ser infinita. Assim, a distância de Gromov-Hausdorff não é muito útil para espaços mais gerais. Como generalizar esta definição? Uma ideia é comparar os conjuntos limitados de cada espaço ao invés dos espaços como um todo, similar ao que ocorre quando generalizamos da convergência uniforme de funções cujo domínio é compacto, para a convergência uniforme de funções em subconjuntos compactos. A questão, então, se torna: quais pares de conjuntos devem ser comparados e como a comparação deve ser feita para que haja uma boa noção de convergência? Podemos utilizar a estrutura de espaço métrico para isto. Lembre-se que um espaço métrico X pode ser escrito como a união de bolas abertas concêntricas num ponto p , isto é, $X = \cup_{r>0} B(p, r)$. Dado dois espaços métricos X e Y , e pontos $p \in X$ e $q \in Y$, podemos comparar as bolas $B(p, r) \subset X$ e $B(q, r) \subset Y$, coletar a

distância para todo $r > 0$ no sentido de Hausdorff, e se essa coleção for limitada, então podemos usar a cota superior dessa coleção para definir uma noção de distância entre os espaços X e Y . Isto dá origem às seguintes definições:

Definição 7.2.1. Um espaço métrico pontuado é uma tripla (X, d, p) , com (X, d) um espaço métrico e $p \in X$. Uma isometria pontuada $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ é uma isometria entre os espaços métricos X e Y tal que $f(p) = q$.

Para facilitar a distinção entre as bolas de um espaço e outro, iremos indicar o espaço com a notação $B(p, r, X)$.

Definição 7.2.2. Sejam (X, d_X, p) e (Y, d_Y, q) espaços métricos pontuados. A distância de Gromov-Hausdorff pontuada $d_{pGH}((X, p), (Y, q))$ entre X e Y é a quantia tal que para todo $r > 0$, então $d_{pGH}((X, p), (Y, q)) < r$ se, e somente se, existe um espaço métrico (Z, d_Z) e mergulhos isométricos $f : X \rightarrow Z$ e $g : Y \rightarrow Z$ tais que

$$d_H(f(B(p, R, X)), g(B(q, R, Y))) + d_Z(p, q) < r, \quad \forall R > 0.$$

A distância $d_Z(p, q)$ é necessária para a formulação intrínseca da distância d_{pGH} . A partir de agora, muitos dos resultados passados são facilmente adaptados para a distância pontuada.

Proposição 7.2.1. A distância de Gromov-Hausdorff pontuada entre (X, d_X, p) e (Y, d_Y, q) pode ser escrita por:

$$\begin{aligned} d_{pGH}((X, p), (Y, q)) = \inf_{Z \in \mathcal{E}(X, Y)} \sup_{R > 0} & d_H(\pi_Z \circ \iota_X(B(p, R, X)), \pi_Z \circ \iota_Y(B(q, R, Y))) \\ & + d_Z(\pi_Z \circ \iota_X(p), \pi_Z \circ \iota_Y(q)). \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração é semelhante ao da proposição 7.1.1. □

A forma intrínseca é formulada a partir de correspondências entre as bolas. Seja $\mathfrak{R}(R)$ o conjunto de todas as correspondências entre $B(p, R, X)$ e $B(q, R, Y)$ contendo (p, q) . Considere $T \in \prod_{R > 0} \mathfrak{R}(R)$. Então, temos a formulação intrínseca:

Teorema 7.2.1. Sejam (X, d_X, p) e (Y, d_Y, q) dois espaços métricos pontuados. Então,

$$d_{pGH}((X, p), (Y, q)) = \frac{1}{2} \inf_{T \in \prod_{R>0} \mathfrak{R}(R)} \left(\sup_{R>0} \text{dis } T(R) \right).$$

Demonstração. A demonstração é similar à da distância de Gromov-Hausdorff (teorema 7.1.2). Começamos mostrando que $2d_{pGH}((X, p), (Y, q))$ é um limitante inferior do conjunto $\{\sup_{R>0} \text{dis } T(R) \mid T \in \prod_{R>0} \mathfrak{R}(R)\}$. Para isto, escreva $2r := \sup_{R>0} \text{dis } T(R)$. Inicialmente, note que $\cup_{R>0} T(R)$ é uma correspondência entre X e Y . De fato, para $x \in X$, temos $R > 0$ tal que $x \in B(p, R, X)$, logo existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in T(R)$, assim $(x, y) \in \cup_{R>0} T(R)$. O mesmo ocorre para $y \in Y$. Portanto, podemos definir uma semi-métrica d em $X \sqcup Y$ por:

$$d(x, y) := \begin{cases} \inf\{d_X(x, x') + d_Y(y, y') + r/2 \mid (x', y') \in \cup_{R>0} T(R)\}, & \text{se } x \in X \text{ e } y \in Y \\ \inf\{d_X(y, y') + d_Y(x, x') + r/2 \mid (y', x') \in \cup_{R>0} T(R)\}, & \text{se } x \in Y \text{ e } y \in X \\ d_X(x, y), & \text{se } x, y \in X \\ d_Y(x, y), & \text{se } x, y \in Y \end{cases}$$

Note que $(p, q) \in \cup_{R>0} T(R)$, logo $d(p, q) = r/2$. Analogamente à demonstração do teorema 7.1.2, obteremos que d é, de fato, uma semi-métrica satisfazendo a desigualdade $d_H(B(p, R, X), B(q, R, Y)) \leq r/2$. Portanto, obtemos que $d_{pGH}((X, p), (Y, q)) \leq r$.

Agora, suponha que $r > 0$ seja tal que $r > d_{pGH}((X, p), (Y, q))$. Por definição, existirá um Z espaço ambiente de X e Y tal que $d_H(B(p, R, X), B(q, R, Y)) + d_Z(p, q) \leq r - \varepsilon$ para todo $R > 0$ e para algum $\varepsilon > 0$ pequeno. Defina $T(R) := \{(x, y) \in B(p, R, X) \times B(q, R, Y) \mid d_Z(x, y) \leq r - \varepsilon\}$. Vemos que $(p, q) \in T(R)$ para todo $R > 0$. Além disso, o fato de que $d_H(B(p, R, X), B(q, R, Y)) \leq r - \varepsilon$ implica que $T(R)$ é correspondência para todo $R > 0$. Por uma conta similar ao teorema 7.1.2, obteremos que $\sup_{R>0} \text{dis } T(R) < 2r$. $\square$

Em relação a ε -isometrias, temos o seguinte corolário:

Corolário 7.2.1. Sejam (X, d_X, p) e (Y, d_Y, q) espaços métricos pontuados. São válidas:

1. Se $d_{pGH}((X, p), (Y, q)) < \varepsilon$, então para todo $R > 0$ existem 2ε -isometrias $f_R : B(p, R, X) \rightarrow B(q, R, Y)$, com $f_R(p) = q$.
2. Se para todo $R > 0$ existirem ε -isometrias $f_R : B(p, R, X) \rightarrow B(q, R, Y)$ tais que $f_R(p) = q$, então $d_{pGH}((X, p), (Y, q)) < 2\varepsilon$.

Demonstração. A demonstração é totalmente análoga ao caso de Gromov-Hausdorff. $\square$

Por fim, a hipótese correta para obtermos um resultado análogo do teorema 7.1.3, é a propriedade Heine-Borel.

Teorema 7.2.2. Sejam (X_n, d_n, p_n) uma sequência de espaços métricos pontuados Heine-Borel. Então, se (X, d_X, p) e (Y, d_Y, q) são espaços métricos Heine-Borel e, se são limites pela distância d_{pGH} de (X_n, d_n, p_n) , então (X, p) e (Y, q) serão isométricos como espaços pontuados.

Vários autores utilizam a seguinte definição para tratar convergência de Gromov-Hausdorff pontuada.

Definição 7.2.3.

- Sejam (X, d_X, p) e (Y, d_Y, q) espaços métricos pontuados. Uma ε -aproximação de Gromov-Hausdorff pontuada é uma ε -isometria pontuada $f_\varepsilon : B(p, 1/\varepsilon, X) \rightarrow B(q, 1/\varepsilon, Y)$.
- Dizemos que (X, d_X, p) é um limite de Gromov-Hausdorff pontuada de uma sequência (X_n, d_n, p_n) , se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que existem f_ε^n ε -aproximações de Gromov-Hausdorff pontuadas.

Assumindo a hipótese de que (X_n, d_n, p_n) e o limite (X, d_X, p) são espaços de comprimento com a propriedade Heine-Borel, então esta noção de convergência é equivalente à definição dada neste capítulo. Para uma demonstração deste fato veja o corolário 2.10 de [13].

Terminamos o capítulo com a definição da convergência equivariante, que será necessária para a demonstração do teorema principal.

7.3 Convergência de Gromov-Hausdorff Pontuada Equivariante

Lembre-se que se G for um grupo que age pela esquerda em dois conjuntos X e Y , então uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita equivariante se a ação comuta com a função, isto é, se $f(gx) = gf(x)$ para todos $x \in X$ e $g \in G$. Similarmente à definição de ε -isometria, uma função $f : X \rightarrow Y$ entre espaços métricos é dita ε -equivariante se $d(gf(x), f(gx)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Definição 7.3.1. Seja X um espaço métrico e G um grupo topológico agindo pela esquerda em X . Se $\Lambda \leq G$ for um subgrupo fechado e $R > 0$, então definimos $\Lambda(R) := \{g \in \Lambda \mid d(gp, p) < R\}$.

Definiremos agora a convergência de Gromov-Hausdorff pontuada equivariante que será utilizada no próximo capítulo.

Definição 7.3.2. Sejam (X, d_X, Γ, p) e (Y, d_Y, Λ, q) dois espaços métricos de comprimento Heine-Borel pontuados, com $\Gamma \leq \text{Iso}(X)$ e $\Lambda \leq \text{Iso}(Y)$ subgrupos fechados. Uma aproximação de Gromov-Hausdorff ε -equivariante entre os espaços é uma tripla de funções (f, φ, ψ) , $f : B(p, 1/\varepsilon, X) \rightarrow Y$, $\phi : \Gamma(1/\varepsilon) \rightarrow \Lambda(1/\varepsilon)$ e $\psi : \Lambda(1/\varepsilon) \rightarrow \Gamma(1/\varepsilon)$, tais que:

1. f é uma ε -isometria;
2. Se $\gamma \in \Gamma(1/\varepsilon)$, $x \in B(p, 1/\varepsilon, X)$ e $\gamma(x) \in B(p, 1/\varepsilon, X)$, então:

$$d(f \circ \gamma(x), \varphi(\gamma)(f(x))) < \varepsilon;$$

3. Se $\mu \in \Lambda(1/\varepsilon)$, $x \in B(p, 1/\varepsilon, X)$ e $\psi(\mu)(x) \in B(p, 1/\varepsilon, X)$, então:

$$d(f(\psi(\mu)(x)), \mu(f(x))) < \varepsilon.$$

Assim, dizemos que uma sequência de espaços $(X_n, d_n, \Gamma_n, p_n)$ converge para um espaço (Y, d_Y, Γ, q) no sentido de Gromov-Hausdorff pontuada equivariante, denotado por $(X_n, d_n, \Gamma_n, p_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{epGH} (Y, d_Y, \Gamma, q)$, se dado $\varepsilon > 0$, existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então existe (f_n, φ_n, ψ_n) aproximação de Gromov-Hausdorff ε -equivariante entre $(X_n, d_n, \Gamma_n, p_n)$ e (Y, d_Y, Γ, q) .

O próximo resultado mostra que sempre é possível restringir uma convergências em pGH para uma convergência em $epGH$, passando a uma subsequência se necessário.

Proposição 7.3.1 (Fukaya-Yamaguchi). Seja $(X_i, d_i, \Gamma_i, p_i)$ sequência de espaços métricos de comprimento Heine-Borel pontuados, com $\Gamma_i \leq \text{Iso}(X_i)$ fechado e (Y, d_Y, q) um espaço de comprimento Heine-Borel pontuado. Se $(X_i, d_i, p_i) \xrightarrow[i \rightarrow +\infty]{epGH} (Y, d_Y, q)$, então existe um grupo $\Gamma \subset \text{Iso}(Y)$ e uma subsequência i_k tal que

$$(X_{i_k}, d_{i_k}, \Gamma_{i_k}, p_{i_k}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{epGH} (Y, d_Y, \Gamma, q).$$

Demonstração. Veja proposição 3.6 em [11]. □

Capítulo 8

Grupos de Isometria de Espaços Métricos de Medida

Neste capítulo enunciaremos e demonstraremos o resultado principal citado na introdução desta dissertação.

8.1 O Teorema Principal

Vimos que o grupo de isometrias de um espaço métrico nem sempre será um grupo topológico. Para isso, pedimos que o espaço seja conexo e localmente compacto (teorema 2.5.1). Isto ainda não é suficiente para mostrar que o grupo seja um grupo de Lie, conforme ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 8.1.1. Seja $S(0, r) \subset \mathbb{R}^2$ o círculo de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ e raio $r > 0$. Identifique os pontos $(0, 1/n)$ de todos os círculos $S(0, 1/n)$. Denote o ponto de identificação por p . O espaço resultante $\mathbb{H}$ é chamado de anéis havaianos. Dote $\mathbb{H}$ da métrica obtida pelo funcional de comprimento em $\mathbb{H}$ e note que d restrita a qualquer círculo é a métrica intrínseca daquele círculo. Com esta métrica, $\mathbb{H}$ é um espaço geodésico Heine-Borel.

Agora, toda isometria de $\mathbb{H}$ precisa fixar o ponto de identificação p , pois qualquer função que não fixe p precisa deslocar o ponto para dentro de algum dos círculos, e este deslocamento sempre será maior que a circunferência de algum dos círculos, tornando impossível a preservação de distâncias. Logo, apenas duas isometrias sobram para cada círculo: a identidade e a reflexão pelo eixo x . Como cada círculo é independente a menos do ponto p que está fixado, obtemos que $\text{Iso}(\mathbb{H}) = \prod_{n=1}^{+\infty} \mathbb{Z}_2$, na qual $\mathbb{Z}_2$ é o grupo de dois elementos. A topologia compacto-aberta em $\text{Iso}(\mathbb{H})$ coincide com a topologia produto, tornando o grupo de isometrias totalmente desconexo. Dessa forma, a componente da identidade $\text{Iso}_0(\mathbb{H})$ é a própria identidade, o que faz com que $\text{Iso}(\mathbb{H}) / \text{Iso}_0(\mathbb{H}) = \text{Iso}(\mathbb{H})$, que não é discreto por construção. Logo, $\text{Iso}(\mathbb{H})$ é um grupo topológico que não é um grupo de Lie.

Como o grupo de isometrias de uma variedade riemanianna conexa sem bordo é um grupo de Lie pelo teorema de Myers–Steenrod, então uma ideia é adaptar as estruturas fundamentais de variedades para espaços métricos. Uma dessas estruturas já foi discutida: a estrutura de comprimento. Uma outra estrutura que constantemente aparece no estudo da teoria de transporte em variedades riemanniana é a medida volume. Vários resultados em Teoria de Transporte Ótimo utilizando a medida volume podem ser adaptados e generalizados para espaços métricos. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 8.1.1. Dizemos que uma tripla $(X, d, \mathbf{m})$ é um espaço métrico de medida, se:

- (X, d) for um espaço métrico polonês;
- $\mathbf{m} \neq 0$ for medida na σ -álgebra de Borel de X tal que $\mathbf{m}$ seja finita em subconjuntos limitados e $\text{supp } \mathbf{m} = X$.

Iremos abreviar espaço métrico de medida por espaço MM.

Esta medida fixada $\mathbf{m}$ dá origem a um outro grupo de isometria de interesse, definida a seguir.

Definição 8.1.2. Seja $(X, d, \mathbf{m})$ um espaço MM. Um isomorfismo de espaço MM é uma isometria $f : X \rightarrow X$ de espaços métricos satisfazendo: $f_*\mathbf{m} = \mathbf{m}$. Denotamos por $\text{Iso}_m(X)$ todos os isomorfismos de espaço MM de X .

Naturalmente, sob as hipóteses do teorema de van Dantzig - van der Waerden, $\text{Iso}_m(X)$ é um subgrupo localmente compacto.

Proposição 8.1.1. Seja $(X, d, \mathbf{m})$ espaço MM conexo e localmente compacto. Então, $\text{Iso}_m(X)$ é um subgrupo localmente compacto fechado de $\text{Iso}(X)$ com respeito à topologia compacto-aberta.

Demonstração. Veja lema 4.5 em [26].

□

Com a distância de Gromov-Haudorff é possível adaptar a estrutura de espaços tangentes para espaços métricos. Ao tratar a distância de Gromov-Hausdorff, nos será útil denotarmos a bola aberta de um espaço métrico X por $B(x, R, X)$.

Definição 8.1.3. Dizemos que um espaço pontuado (Y, d_Y, q) é um cone tangente em $p \in X$ se $(X, \lambda d_X, p) \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{pGH} (Y, d_Y, q)$.

O limite de $(X, \lambda d_X, p)$ pode não ser único, assim definimos $\text{Tan}(X, p)$ como o conjunto de todos os limites (Y, d_Y, q) de $(X, \lambda d_X, p)$ quando $\lambda \rightarrow +\infty$ ($\text{Tan}(X, p)$ pode ser vazio). Frequentemente denotaremos por $\frac{1}{r}X$, ou por $r^{-1}X$, o espaço métrico $(X, \frac{1}{r}d_X, p)$.

Defina os conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_k &:= \{x \in X \mid \text{Tan}(X, x) = \{(\mathbb{R}^k, d, 0)\}\}; \\ (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta} &:= \{x \in X \mid d_{pGH}(B(x, 1, r^{-1}X), B(0, 1, \mathbb{R}^k)) < \varepsilon, \forall 0 < r < \delta\}; \\ \mathcal{R} &:= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_k.\end{aligned}$$

Dizemos que $(X, d_X, \mathbf{m})$ possui tangentes euclidianas **m**-q.t.p. se $\mathbf{m}(X \setminus \mathcal{R}) = 0$ e se existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{R} = \bigcup_{k=1}^N \mathcal{R}_k$.

A condição de tangentes euclidianas tomado aqui como definição é, na realidade, uma propriedade de certos espaços geodésicos que possuem uma noção apropriada de curvatura. Os autores Mondino e Naber mostraram este resultado em 2014 no artigo [22], publicado em 2019. O próximo lema mostra outra forma de escrever $\mathcal{R}_k$.

Lema 8.1.1. Se $(X, d, \mathbf{m})$ for um espaço MM de comprimento e Heine-Borel com tangentes euclidianas **m**-q.t.p., então:

$$\mathcal{R}_k = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\delta > 0} (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Tome $x \in \mathcal{R}_k$ e seja $\varepsilon > 0$. Por definição, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $0 < r < \delta(\varepsilon)$, então:

$$d_{pGH}((X, r^{-1}d, x), (\mathbb{R}^k, d_E, 0)) < \varepsilon.$$

Pela definição geral da convergência de Gromov-Hausdorff pontuada, para todo $R > 0$ existe uma ε -isometria $f^R : B(x, R, r^{-1}X) \rightarrow B(0, R, \mathbb{R}^k)$ tal que $f^R(x) = 0$. Assim, basta tomar $R = 1$.

Agora, seja $x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\delta > 0} (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta}$. Logo, $x \in \bigcup_{\delta > 0} (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta}$ para todo $\varepsilon > 0$. Dessa forma, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $x \in (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)}$. Seja $0 < \varepsilon < 1$ e tome $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon^2 < \varepsilon$. Como $x \in (\mathcal{R}_k)_{\tilde{\varepsilon}, \delta(\tilde{\varepsilon})}$, portanto se $0 < R < \delta(\tilde{\varepsilon})$, então existe uma $\tilde{\varepsilon}$ -isometria $f_{\tilde{\varepsilon}} : B(x, \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}, B(x, 1, \frac{1}{R}X)) \rightarrow B(0, \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}, B(0, 1, \mathbb{R}^k))$ com $f_{\tilde{\varepsilon}}(x) = 0$. Como $1/\tilde{\varepsilon} > 1$, vemos que $f_{\tilde{\varepsilon}}$ é uma $\tilde{\varepsilon}$ -isometria entre $B(x, 1, \frac{1}{R}X)$ e $B(0, 1, \mathbb{R}^k)$.

Seja $r < \varepsilon\delta(\varepsilon^2)$, dessa forma $R := r/\varepsilon < \delta(\tilde{\varepsilon})$. Defina $f_{\varepsilon} : B(x, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{r}X) \rightarrow B(0, 1, \mathbb{R}^k)$ por $f_{\varepsilon}(y) := \frac{1}{\varepsilon}f_{\tilde{\varepsilon}}(y)$. Assim:

$$1) \ f_{\varepsilon}(x) = 0;$$

$$2) \ \forall z, y \in B(x, \frac{1}{\varepsilon}, 1/rX), \text{ temos:}$$

$$|d_{1/r}(z, y) - d_E(f_{\varepsilon}(z), f_{\varepsilon}(y))| = \frac{1}{\varepsilon} |d_{1/R}(z, y) - d_E(f_{\tilde{\varepsilon}}(z), f_{\tilde{\varepsilon}}(y))| < \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon = \varepsilon,$$

isto é, $\text{dis } f_{\varepsilon} \leq \varepsilon$.

3) $\forall y \in B(0, \frac{1}{\varepsilon}, \mathbb{R}^k)$, temos $z = \varepsilon y \in B(0, 1, \mathbb{R}^k)$. Como $f_{\tilde{\varepsilon}}$ é $\tilde{\varepsilon}$ -isometria, então existe um $u \in B(x, 1, \frac{1}{R}X) = B(x, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{r}X)$ tal que $d_E(z, f_{\tilde{\varepsilon}}(u)) < \tilde{\varepsilon}$. Portanto, $\varepsilon d_E(y, \frac{1}{\varepsilon} f_{\tilde{\varepsilon}}(u)) < \tilde{\varepsilon}$. Concluimos que $d_E(y, f_{\varepsilon}(u)) < \varepsilon$, isto é, a ε -vizinhança de $f_{\varepsilon}(B(x, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{R}X))$ cobre $B(0, 1, \mathbb{R}^k)$.

□

Estamos prontos para enunciar o teorema principal desta dissertação.

Teorema Principal. Seja $(X, d, \mathbf{m})$ um espaço MM localmente compacto e de comprimento tal que X tenha tangentes euclidianas $\mathbf{m}$ -q.t.p.. Tome $G \in \{\text{Iso}(X), \text{Iso}_m(X)\}$.

Então G será grupo de Lie se, e somente se, a seguinte condição for válida:

- Existe um $x \in X$ e constantes $s > 0$, $0 < FIX < \mu(B(x, s))$, tais que para todo $g \in G \setminus \{\text{Id}\}$ temos

$$\mathbf{m}(\text{Fix}(g) \cap B(x, s)) < FIX. \quad (*)$$

Além disso $\text{Iso}_m(X)$ será grupo de Lie se $\text{Iso}(X)$ também for.

Este resultado é o teorema A da tese de Gerardo Sosa em [27], também encontrada, de forma mais próxima à enunciada aqui, em seu artigo [26] como teorema 1.1. Entretanto, as hipóteses foram trocadas, de um lado, para concordar com o teorema A de [25] que utiliza hipóteses naturais da área, e, de outro, pois a hipótese utilizada por Gerardo é, até o conhecimento do autor desta dissertação, insuficiente para a demonstração do teorema. Gerardo utiliza a hipótese “ $\overline{B(x, R)} = B[x, R]$ para todo $x \in X$ e $R > 0$ ”, que é válida em espaços de comprimento conforme foi visto anteriormente, ao invés de pedir que o espaço seja de comprimento. Ao longo da demonstração, esta hipótese não bate com a utilização de resultados como a proposição de Fukaya-Yamaguchi, além de concluir que espaços localmente compactos que possuem esta propriedade são Heine-Borel, o que possui um contra-exemplo: basta dotar $\mathbb{R}$ da métrica $d(x, y) := \frac{d_E(x, y)}{1 + d_E(x, y)}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Porém, com uma pequena adaptação da demonstração encontrada em [26], o resultado continua válido sob as hipóteses utilizadas aqui. A prova do teorema segue as ideias de Gerardo em [26] e de Santos em [25].

Uma interpretação da afirmação do teorema é que o grupo de isometrias será um grupo de Lie se ele desloca bastante os pontos de X . Veja que $\text{Iso}_m(X)$ será grupo de Lie quando $\text{Iso}(X)$ for, pois $\text{Iso}_m(X)$ é fechado em $\text{Iso}(X)$ (veja o teorema 20.12 em [17]).

A ideia do teorema é utilizar a propriedade de nenhum subgrupo pequeno para caracterizar quando um grupo topológico possui uma estrutura de grupo de Lie.

Definição 8.1.4. Um grupo topológico G possui a propriedade de nenhum subgrupo pequeno, abreviado por NSS (no small subgroup), se existe um aberto $U \subset G$ contendo a identidade, cujo único subgrupo contido em U é o subgrupo trivial. Dizemos que G possui a propriedade dos subgrupos pequenos se o contrário for válido.

O próximo teorema é uma versão simplificada do teorema de Gleason-Yamabe que caracteriza os grupos de Lie através da propriedade de nenhum subgrupo pequeno. A demonstração deste resultado é extremamente não trivial, necessitando o desenvolvimento de muitas ferramentas. Uma boa referência que visa discutir este tipo de resultado é [31].

Teorema 8.1.1 (Gleason-Yamabe). Seja G um grupo topológico localmente compacto. Então, G será um grupo de Lie (de dimensão finita) se, e somente se, G possuir a propriedade NSS.

Dessa forma, a ideia passa a demonstrar a contra-positiva da equivalência do teorema principal, ou seja, dado um grupo que possui subgrupos pequenos, então é possível construir subgrupos que quebram a desigualdade (*) e vice-versa. Começamos com o primeiro, para isto precisaremos do próximo lema.

Lema 8.1.2. Seja (X, d) um espaço métrico Heine-Borel. Fixe $x \in X$. Então, os conjuntos

$$U(x, R, \varepsilon) := \{g \in G \mid \sup_{y \in \overline{B(x, R)}} d(y, g(y)) < \varepsilon\}, \quad R, \varepsilon > 0,$$

formam uma base das vizinhanças da identidade em G .

Demonstração.

- $U(x, R, \varepsilon)$ é aberto para todo $x \in X$ e para todos $R, \varepsilon > 0$.

De fato, seja $f \in \overline{G \setminus U(x, R, \varepsilon)}$ e $(g_n)_n \subset G \setminus U(x, R, \varepsilon)$ sequência convergindo para f . Como convergência compacto-aberta implica em convergência pontual, então $g_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(y)$ para todo $y \in \overline{B(x, R)}$. Agora, $G \setminus U(x, R, \varepsilon) = \{g \in G \mid \sup_{y \in \overline{B(x, R)}} d(y, g(y)) \geq \varepsilon\}$, assim, como X é Heine-Borel, temos que $\overline{B(x, R)}$ é compacta para todo $R > 0$, logo existe um $y_n \in \overline{B(x, R)}$ tal que $d(y_n, g_n(y_n)) = \sup_{y \in \overline{B(x, R)}} d(y, g_n(y)) \geq \varepsilon$. Utilizando compacidade novamente, existe uma subsequência de $(y_n)_n$ (que também denotaremos por $(y_n)_n$) convergindo para um $y_\infty \in \overline{B(x, R)}$. Note que, como g_n é isometria, temos:

$$\begin{aligned} d(g_n(y_n), f(y_\infty)) &\leq d(g_n(y_n), g_n(y_\infty)) + d(g_n(y_\infty), f(y_\infty)) \\ &= d(y_n, y_\infty) + d(g_n(y_\infty), f(y_\infty)). \end{aligned}$$

Ambos os termos à direita tendem a zero, logo $g_n(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(y_\infty)$. Desta forma, pela continuidade da métrica, obtemos que $d(f(y_\infty), y_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(g_n(y_n), y_n) \geq \varepsilon$, assim $\sup_{y \in \overline{B(x, R)}} d(f(y), y) \geq \varepsilon$, ou seja, $f \in G \setminus U(x, R, \varepsilon)$, o que implica que $U(x, R, \varepsilon)$ é aberto.

- Dado um aberto $W = W(K_1, U_1) \cap \dots \cap W(K_k, U_k)$ da base da topologia compacto-aberta contendo a identidade, então para qualquer $x \in X$, existem $\varepsilon > 0$ e $R > 0$ tais que $U(x, R, \varepsilon) \subset W$.

De fato, como W é vizinhança da identidade, então $K_i \subset U_i$ para todo i . Pelo corolário 2.1.1, obtemos um $\varepsilon_i > 0$ tal que $U(K_i, \varepsilon) \subset U_i$, para todo i . Defina $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$. O conjunto $K = K_1 \cup \dots \cup K_k$ é compacto, logo limitado. Portanto, tome $x \in X$ e $R > 0$ tal que $K \subset B(x, R)$.

Agora, considere $g \in U(x, R, \varepsilon)$. Então, se $y \in K_i$, temos $y \in \overline{B(x, R)}$, logo $d(y, g(y)) < \varepsilon$, ou seja, $g(y) \in U(K_i, \varepsilon) \subset U_i$. Mostramos que $g \in W$.

□

Portanto, segue uma das afirmações contra-positivas do teorema principal.

Proposição 8.1.2. Seja $(X, d, \mathbf{m})$ um espaço MM localmente compacto e de comprimento. Então, G possuirá a propriedade dos subgrupos pequenos se para todo $x \in X$, $s > 0$ e $0 < \xi' < 1$, existir um subgrupo não trivial $\Lambda = \Lambda_{x,s,\xi'} \leq G$ tal que para todo $g \in \Lambda$ temos que

$$\mathbf{m}(X \setminus \text{Fix } g \cap B(x, s)) \leq \xi' \mathbf{m}(B(x, s)).$$

Demonstração. Seja $x \in X$, $N \in \mathbb{N}$ e defina:

$$\xi'_N := \frac{1}{\mathbf{m}(B(x, N))} \inf_{y \in B(x, N)} \mathbf{m}(B(y, 1/N) \cap B(x, N)).$$

Note que $\xi'_N \leq 1$.

- $\xi'_N > 0$.

Seja $(y_n)_n \subset B(x, N)$ sequência tal que $\mathbf{m}(B(y_n, 1/N) \cap B(x, N))$ converge para o ínfimo. Pelo teorema 5.1.6, temos que X é Heine-Borel, portanto $B(x, N)$ é pré-compacto, logo existe uma subsequência que converge para $y_\infty \in \overline{B(x, N)}$, que também denotaremos por $(y_n)_n$. Como $y_\infty \in \text{supp } \mathbf{m} = X$, então para todo $\tau > 0$ temos $\mathbf{m}(B(y_\infty, \tau) \cap B(x, N)) > 0$. Seja $\tau < \frac{1}{3}N$, e n_0 tal que se $n > n_0$, então $d(y_\infty, y_n) < \tau$. Assim, $B(y_\infty, \tau) \subset B(y_n, 1/N)$ para todo $n > n_0$. Logo:

$$\begin{aligned} \inf_{y \in B(x, N)} \mathbf{m}(B(y, 1/N) \cap B(x, N)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{m}(B(y_n, 1/N) \cap B(x, N)) \\ &\geq \mathbf{m}(B(y_\infty, \tau) \cap B(x, N)) > 0. \end{aligned}$$

Agora, tome $0 < \xi_N < \xi'_N$ e escreva $\Lambda_N := \Lambda_{x,N,\xi_N} \leq G$ subgrupo não-trivial dado pela hipótese. Assim, pela construção de ξ_N , se $g \in \Lambda_N$ obtemos:

$$\mathbf{m}(X \setminus \text{Fix } g \cap B(x, N)) \leq \xi_N \mathbf{m}(B(x, N)) < \mathbf{m}(B(y, 1/N) \cap B(x, N)), \quad (*)$$

para todo $y \in B(x, N)$.

Sejam $g \in G$ e $z \in X \setminus \text{Fix } g$. Assim, $d(z, g(z)) > 0$. Tome $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < 2t < d(z, g(z))$. Considere $B(z, t)$. Como g é isometria, temos $g(B(z, t)) = B(g(z), t)$.

Note que $B(z, t) \cap B(g(z), t) = \emptyset$, portanto $B(z, t) \cap g(B(z, t)) = \emptyset$. Logo, $d(w, g(w)) > 0$ para todo $w \in B(z, t)$. Isto implica que $B(z, t) \subset X \setminus \text{Fix } g$.

Se $g \in \Lambda_N$ e $y \in B(x, N)$, então se $d(y, g(y)) > 2/N$ temos pelo argumento acima que $B(y, 1/N) \subset X \setminus \text{Fix } g$. Logo:

$$\mathbf{m}(B(x, N) \cap X \setminus \text{Fix } g) \geq \mathbf{m}(B(x, N) \cap B(y, 1/N)),$$

o que contradiz (*), assim $d(y, g(y)) \leq 2/N$. Pela continuidade da métrica, obtemos que $d(y, g(y)) \leq 2/N$ para todos $y \in \overline{B(x, N)}$.

Tomando os abertos $U(x, N, 3/N)$ definidos no lema anterior, vemos que $\Lambda_N \subset U(x, N, 3/N)$. Como $U(x, N, 3/N)$ formam uma base da identidade em G , obtemos que G possui a propriedade do subgrupo pequeno. □

Para a outra afirmação, será útil definir o maior deslocamento possível de se obter a partir de um subgrupo de $\text{Iso}(X)$.

Definição 8.1.5. Se X for um espaço métrico, $\Lambda \subset \text{Iso}(X)$, $r > 0$ e $x \in X$, defina:

$$\text{Disp}(\Lambda, r, x) := \sup\{d(gx, x) \mid g \in \Lambda \text{ e } \overline{B(x, r/2)}\}.$$

Essa função será contínua sob as hipóteses do teorema.

Lema 8.1.3. Seja X um espaço MM localmente compacto de comprimento. Então, $\text{Disp}(\Lambda, r, p)$ é contínua em r para todo $r > 0$ com Λ compacto em $\text{Iso}(X)$ e $p \in X$ fixo.

Demonstração. Sejam $\delta > 0$, $x \in \overline{B(p, r)}$, $y \in \overline{B(p, \frac{r}{2} + \frac{\delta}{2})}$ e $h \in \Lambda$. Logo,

$$d(x, y) \geq d(x, h(x)) - d(h(x), y) \geq d(x, h(x)) - d(h(x), h(y)) - d(h(y), y).$$

Como g é isometria, então

$$d(x, h(x)) - d(y, h(y)) \leq 2d(x, y).$$

Temos que X é Heine-Borel pelo teorema 5.1.6, logo existem $(x_0, g) \in \overline{B(p, \frac{r}{2})} \times \Lambda$ e $(y_0, h) \in \overline{B(p, \frac{r}{2} + \frac{\delta}{2})} \times \Lambda$ tais que:

- $d(x_0, g(x_0)) = \text{Disp}(\Lambda, r, p)$;
- $d(y_0, h(y_0)) = \text{Disp}(\Lambda, r + \delta, p)$.

Em particular:

- $G_0 := \sup_{x \in \overline{B(p, r/2)}} d(x, g(x)) = \text{Disp}(\Lambda, r, p)$;
- $H_0 := \sup_{y \in \overline{B(p, r/2 + \delta/2)}} d(y, h(y)) = \text{Disp}(\Lambda, r + \delta, p)$.

Escreva $H_1 := \sup_{y \in \overline{B(p, r/2)}} d(x, h(y))$. Se $H_1 > G_0$, então existe um $x_1 \in \overline{B(p, r/2)}$ tal que $d(x_1, h(x_1)) > d(x_0, g(x_0))$ o que contradiz a definição de (x_0, g) . Portanto, $H_1 \leq G_0$. Vemos que $H_0 \geq G_0 \geq H_1$, assim:

$$\begin{aligned} H_0 - G_0 &\leq H_0 - H_1 = \sup_{y \in \overline{B(p, \frac{r}{2} + \frac{\delta}{2})}} \left(\inf_{x \in \overline{B(p, \frac{r}{2})}} d(y, h(y)) - d(x, h(x)) \right) \\ &\leq \sup_{y \in \overline{B(p, \frac{r}{2} + \frac{\delta}{2})}} \left(\inf_{x \in \overline{B(p, \frac{r}{2})}} 2d(x, y) \right) \\ &\leq d_H \left(\overline{B(p, \frac{r}{2})}, \overline{B(p, \frac{r}{2} + \frac{\delta}{2})} \right). \end{aligned}$$

Agora, como X é espaço de comprimento, então para $y \in \overline{B(p, r/2 + \delta/2)} \setminus \overline{B(p, r/2)}$, obtemos que $d(y, \overline{B(p, r/2)}) = d(p, y) - r/2 \leq \delta/2$ pelo lema 5.1.3. Logo, $d_H(\overline{B(p, r/2)}, \overline{B(p, r/2 + \delta/2)}) \leq \delta/2$.

Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta \leq \varepsilon$, vemos que $H_0 - G_0 \leq \delta/2 < \varepsilon$. O caso $\delta < 0$ é similar. $\square$

A próxima proposição conclui a outra afirmação contra-positiva.

Proposição 8.1.3. Seja $(X, d, \mathbf{m})$ um espaço MM localmente compacto e de comprimento com tangentes euclidianas $\mathbf{m}$ -q.t.p.. Se G possuir a propriedade do subgrupo pequeno, então para todo $x \in X$, $s > 0$, e $0 < \xi < 1$, existirá um subgrupo não trivial $\Lambda = \Lambda_{x,s,\xi} \leq G$, tal que para todo $g \in \Lambda$ temos:

$$\mathbf{m}(\text{Fix}(g) \cap B(x, s)) \geq \xi \mathbf{m}(B(x, s)).$$

Demonstração. Iremos provar por absurdo. Suponha que a afirmação seja falsa. Então, existem $x \in X$, $s > 0$ e $0 < \xi < 1$ tais que $\forall K \leq G$ não trivial, existe um $f \in K$ diferente da identidade com

$$\mathbf{m}(\text{Fix}(f) \cap B(x, s)) < \xi \mathbf{m}(B(x, s)).$$

Para $\varepsilon > 0$ fixo, note que se $\delta' \leq \delta''$, então $(\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta''} \subset (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta'}$ para todo k . Portanto, podemos escrever $(\mathcal{R}_k)_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, 1/n}$. Como $\mathbf{m}(\mathcal{R}) = \mathbf{m}(X)$, então $\mathbf{m}(\bigcup_k (\mathcal{R}_k)_\varepsilon) = \mathbf{m}(X)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(B(x, s)) &= \mathbf{m}(B(x, s) \cap \bigcup_k (\mathcal{R}_k)_\varepsilon) = \mathbf{m}(B(x, s) \cap \bigcup_k \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, 1/n}) \\ &= \mathbf{m}(\bigcup_k B(x, s) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, 1/n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{m}(\bigcup_k \bigcup_{j \leq n} B(x, s) \cap (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, 1/j}). \end{aligned}$$

Agora, $\bigcup_{j \leq n} B(x, s) \cap (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, 1/j} = B(x, s) \cap (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, 1/n}$, logo:

$$\mathbf{m}(B(x, s)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{m}(\bigcup_k B(x, s) \cap (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, 1/n}).$$

Como $\xi < 1$, vemos que existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\xi \mathbf{m}(B(x, s)) < \mathbf{m}(B(x, s) \cap \cup_k(\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, 1/N}).$$

Dessa forma, defina $\delta_\varepsilon := \min\{s, 1/N\}$. Assim,

$$\mathbf{m}(B(x, s) \cap \cup_k(\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta_\varepsilon}) > \xi \mathbf{m}(B(x, s)) > \mathbf{m}(\text{Fix}(f) \cap B(x, s)) \quad (*)$$

Isto implica que $(B(x, s) \cap \cup_k(\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta_\varepsilon}) \setminus \text{Fix}(f) \neq \emptyset$, caso contrário teríamos $B(x, s) \cap \cup_k(\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta_\varepsilon} \subset \text{Fix}(f) \cap B(x, s)$ o que é absurdo devido a (*).

Considere $U(x, 2s, \delta_\varepsilon/20)$. Como G é um grupo topológico que possui a propriedade do subgrupo pequeno, então existe um subgrupo não trivial $\Lambda_\varepsilon \subset U(x, 2s, \delta_\varepsilon/20)$. Pela proposição 2.5.1, podemos supor que Λ_ε é fechado. Como G é um espaço localmente compacto de Hausdorff, então na construção de δ_ε , podemos tomá-lo ainda menor para garantirmos que $U(x, 2s, \delta_\varepsilon/20)$ seja pré-compacto em G , assim Λ_ε será compacto. Pelo argumento acima, temos $g \in \Lambda_\varepsilon$ diferente da identidade e $x_\varepsilon \in B(x, s)$ tais que:

- $x_\varepsilon \in (B(x, s) \cap \cup_k(\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta_\varepsilon}) \setminus \text{Fix}(f)$ e
- $0 < d(x_\varepsilon, g(x_\varepsilon)) < \frac{\delta_\varepsilon}{20}$.

Escreva $\theta := 20d(x_\varepsilon, g(x_\varepsilon)) < \delta_\varepsilon$. Por construção, temos:

$$\frac{1}{20}\theta = d(x_\varepsilon, g(x_\varepsilon)) \leq \text{Disp}(\Lambda_\varepsilon, \theta, x_\varepsilon).$$

Como $x_\varepsilon \in B(x, s)$ e $\delta_\varepsilon \leq s$, então $\overline{B(x_\varepsilon, \delta_\varepsilon/2)} \subset \overline{B(x, 2s)}$. Dessa forma, $\text{Disp}(\Lambda_\varepsilon, \delta_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq \text{Disp}(\Lambda_\varepsilon, 4s, x) < \frac{\delta_\varepsilon}{20}$. Logo, pelo teorema do valor intermediário, obtemos que existe um $r_\varepsilon > 0$ tal que $\theta \leq r_\varepsilon < \delta_\varepsilon$ e $\text{Disp}(\Lambda_\varepsilon, r_\varepsilon, x_\varepsilon) = \frac{r_\varepsilon}{20}$.

Portanto, construímos uma quádrupla $(\delta_\varepsilon, r_\varepsilon, x_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon)$ tal que:

- $0 < r_\varepsilon \leq \delta_\varepsilon$;
- $x_\varepsilon \in \cup_k(\mathcal{R}_k)_{\varepsilon, \delta_\varepsilon}$;
- $\Lambda_\varepsilon \leq G$;
- $\text{Disp}(\Lambda_\varepsilon, r_\varepsilon, x_\varepsilon) = \frac{r_\varepsilon}{20}$.

Note que se g for isometria de X , então também será de $\frac{1}{r}X$ para todo $r > 0$. Assim, Λ_ε é subgrupo compacto não trivial de $\text{Iso}(\frac{1}{r_\varepsilon}X)$.

Considere agora uma sequência decrescente $(\varepsilon_n)_n$ com $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Pela construção acima, obtemos uma sequência de espaços métricos pontuados

$(X_n, d_n, p_n, \Lambda_n) := (B(x_n, 1, r_n^{-1}X), r_n^{-1}d_X, x_n, \Lambda_n)$, onde $x_n := x_{\varepsilon_n}$, $r_n := r_{\varepsilon_n}$ e $\Lambda_n := \Lambda_{\varepsilon_n}$.

É importante notar que temos uma subsequência $(x_{n_l})_l$ tal que $x_{n_l} \in (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon_{n_l}, \delta_{\varepsilon_{n_l}}}$, para algum k fixo, pelo princípio da casa dos pombos, já que k atinge uma quantidade finita de naturais. Denotaremos a subsequência por $(x_n)_n$ sem perda de generalidade. Dessa forma, como $x_n \in (\mathcal{R}_k)_{\varepsilon_n, \delta_{\varepsilon_n}}$ e $(\varepsilon_n)_n$ converge para zero, tomando $(Y, d_Y, q) := (B(0, 1, \mathbb{R}^k), d_E, 0)$ vemos que dado um $\tilde{\varepsilon} > 0$, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_{pGH}((X_n, d_n, p_n), (Y, d_Y, q)) < \varepsilon_n < \tilde{\varepsilon},$$

ou seja, $(X_n, d_n, p_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{pGH} (Y, d_Y, q)$.

Pela proposição 7.3.1, existe um subgrupo $H \leq \text{Iso}(B(0, 1, \mathbb{R}^k))$ e uma subsequência (que indexaremos por n sem perda de generalidade) tal que

$$(X_n, d_n, p_n, \Lambda_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{epGH} (Y, d_Y, q, H).$$

Com isto, iremos demonstrar que H será não trivial e tal que $\text{Disp}(H, 1, 0) \leq 1/20$, o que irá contradizer com o lema 8.1.4, concluindo assim a proposição.

- H é um subgrupo não trivial.

Pela convergência equivariante, temos uma família de aplicações

- $f_n : B(x_n, 1, r_n^{-1}X) \rightarrow B(0, 1, \mathbb{R}^k)$;
- $\phi_n : \Lambda_n(1/\varepsilon_n) \rightarrow H(1/\varepsilon_n)$;
- $\psi_n : H(1/\varepsilon_n) \rightarrow \Lambda_n(1/\varepsilon_n)$;

com as propriedades da definição 7.3.2.

Como X é Heine-Borel pelo teorema 5.1.6, e Λ_n são compactos, então existem $\tilde{x}_n \in \overline{B(x_n, r_n/2, X)} = \overline{B(x_n, 1/2, r_n^{-1}X)} \subset B(x_n, 1, r_n^{-1}X)$ e $\tilde{g}_n \in \Lambda_n$ tais que $\text{Disp}(\Lambda_n, r_n, x_n) = d(\tilde{g}_n \tilde{x}_n, \tilde{x}_n) = r_n/20$. Portanto,

$$\frac{1}{r_n} d(\tilde{g}_n x_n, x_n) \leq \frac{1}{r_n} \text{Disp}(\Lambda_n, r_n, x_n) = \frac{1}{20} < \frac{1}{\varepsilon_n},$$

para algum n grande. Para tal n obtemos $\tilde{g}_n \in \Lambda_n(1/\varepsilon_n)$. Podemos supor que isto é o caso para todo n excluindo os termos maiores que $1/20$ se necessário. Assim, utilizando as propriedades das aplicações, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{20} &= \frac{1}{r_n} d(\tilde{g}_n \tilde{x}_n, \tilde{x}_n) < d_E(f_n(\tilde{g}_n \tilde{x}_n), f_n(\tilde{x}_n)) + \varepsilon_n \\ &\leq d_E(\tilde{g}_n \tilde{x}_n, \phi_n(\tilde{g}_n)(f_n(\tilde{x}_n))) + d_E(\phi_n(\tilde{g}_n)(f_n(\tilde{x}_n)), f_n(\tilde{x}_n)) + \varepsilon_n \\ &< 2\varepsilon + d_E(\phi_n(\tilde{g}_n)(f_n(\tilde{x}_n)), f_n(\tilde{x}_n)). \end{aligned}$$

Como $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, então existe um n grande na qual $1/20 - 2\varepsilon_n > 0$, isto é, existe um $h := \phi_n(\tilde{g}_n) \in H$ diferente da identidade.

- $\text{Disp}(H, 1, 0) \leq \frac{1}{20}$.

Sejam $y \in \overline{B(0, 1/2, \mathbb{R}^k)}$ e $h \in H$. Para n grande, temos $h, h^{-1} \in H(1/\varepsilon_n)$. Como X é espaço geodésico, então existe $y' \in B[0, 1/2 - 2\varepsilon, \mathbb{R}^k] \cap B[y, 2\varepsilon, \mathbb{R}^k]$. Como f_n é ε_n -isometria, então existe um $x' \in B(x_n, 1, r_n^{-1}X)$ tal que $d_E(f_n(x'), y') < \varepsilon_n$. Assim,

$$d_E(y, f_n(x')) \leq d(y, y') + d_E(y', f_n(x')) < 3\varepsilon_n.$$

Agora, veja que

$$d_E(x_n, f_n(x')) \leq d_E(x_n, y') + d_E(y', f_n(x')) < 1/2 - \varepsilon_n.$$

Então,

$$d_E(0, x') \leq d_n(f_n(0), f_n(x')) + \varepsilon_n = d_n(x_n, f_n(x')) + \varepsilon < 1/2,$$

ou seja, $x' \in B(x_n, 1/2, r_n^{-1}X)$.

Por fim, temos que:

$$\begin{aligned} d_E(y, hy) &\leq d_E(y, f_n(x')) + d_E(f_n(x'), hy) \\ &\leq 3\varepsilon_n + d_E(h^{-1}f_n(x'), y) \\ &\leq 3\varepsilon_n + d_E(h^{-1}f_n(x'), f_n(\psi_n(h^{-1})(x')) + d_E(f_n(\psi_n(h^{-1})(x')), y) \\ &\leq 4\varepsilon_n + d_E(f_n(\psi_n(h^{-1})(x')), f_n(x')) + d_E(f_n(x'), y) \\ &\leq 8\varepsilon_n + d_n(\psi_n(h^{-1})(x'), x') = 8\varepsilon_n + r_n^{-1}d_X(\psi_n(h^{-1})(x'), x') \\ &\leq 8\varepsilon_n + \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Portanto, quando n tende a infinito, obtemos que $d_e(y, hy) \leq 1/20$. Isto implica que $\text{Disp}(H, 1, 0) \leq 1/20$, o que é um absurdo.

□

Por fim, o lema utilizado na proposição acima é demonstrado.

Lema 8.1.4. Sejam $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ e $H \leq \text{Iso}(B(0, 1))$ um subgrupo não trivial. Então, $\text{Disp}(H, 1, 0) \geq 1/20$.

Demonstração. Pelo teorema 11.4 de [34], toda isometria de $B(0, 1)$ se estende de forma única para uma isometria de $\mathbb{R}^n$. Assim, o grupo de isometria de $B(0, 1)$ é formado por isometrias de $\mathbb{R}^n$ restritas a $B(0, 1)$. Vemos que o grupo ortogonal se restringe a isometrias de $B(0, 1)$, porém translações não se restringem para isometrias de $B(0, 1)$. Assim, $\text{Iso}(B(0, 1)) = O(n)$.

Seja $H \leq \text{Iso}(B(0, 1))$ não trivial. Logo, existe $g \in H$ com $g \neq \text{Id}$. Pela proposição 2.5.2, existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ onde g possui a forma da proposição. como g não é a identidade, existe pelo menos um -1 na diagonal ou algum $\theta_i > 0$.

Iremos supor que $\theta_1 > 0$. Logo, considere o plano gerado por $\{u_1, u_2\}$ e a matriz de rotação $A_1(\theta_1)$ no plano. Como $\theta_1 \in (0, 2\pi)$, então se $\theta_1 \in (0, \pi/2)$ existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $k\theta \in [\pi/2, 3/2\pi]$, logo

$$d_E \left(A(\theta_1)^k \left(\frac{1}{2}u_1 \right), \frac{1}{2}u_1 \right) = d_E \left(A(k\theta_1) \left(\frac{1}{2}u_1 \right), \frac{1}{2}u_1 \right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{20},$$

pela lei dos cossenos. Os outros casos são similares.

Por fim, se existir apenas um -1 na diagonal, então, supondo que esteja na primeira entrada, temos $d_E(g(1/2u_1), 1/2u_1) = 1 > 1/20$. Dessa forma, $\text{Disp}(H, 1, 0) \geq 1/20$. $\square$

8.2 Teoria de Transporte Ótimo em Espaços Métricos de Medida

Para concluir esta dissertação, iremos mostrar uma rápida aplicação da Teoria de Transporte Ótimo e do teorema principal. Assim, considere a seguinte definição.

Definição 8.2.1. Um espaço MM $(X, d, \mathbf{m})$ possui bom comportamento de transporte, abreviado por GTB (good transport behavior), se para todos $\mu, \nu \in P_2(X)$ com $\mu \ll \mathbf{m}$, então todo $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ ótimo é induzido por uma função de transporte T .

Esta definição se torna natural quando consideramos o desenvolvimento da teoria de transporte em espaços métricos de medida. Muitos dos espaços estudados possuem esta propriedade, em particular os espaços geodésicos que possuem uma noção apropriada de curvatura. Além disso, já vimos um resultado similar para variedades riemannianas no capítulo de ações lagrangianas (teorema 6.0.1). Em particular, os espaços GTB são espaços onde o problema de Monge possuem solução. Com isto, o seguinte lema ilustra que estes espaços deslocam bastante os pontos do espaço.

Lema 8.2.1. Seja $(X, d, \mathbf{m})$ um espaço métrico geodésico com GTB e $g \neq \text{Id}$ uma isometria de X . Então, $\mathbf{m}(\text{Fix}(g)) = 0$.

Demonstração. Como $g \neq \text{Id}$, então existe um $p \in X$ tal que $g(p) \neq p$. Suponha por contradição que exista $A \subset \text{Fix}(\phi)$ limitado tal que $\mathbf{m}(A) > 0$. Defina as seguintes medidas em X :

$$\mu(B) := \frac{1}{\mathbf{m}(A)} \mathbf{m}(A \cap B), \forall B \subset X \text{ mensurável};$$

$$\nu := \frac{1}{2}\delta_p + \frac{1}{2}\delta_{g(p)}.$$

Sejam $\pi_1 \in \Pi(\mu, \delta_p)$ e $\pi_2 \in \Pi(\mu, \delta_{g(p)})$ couplings ótimos. Defina $\pi := \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$. Veja que $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ e não pode ser induzido por uma função de transporte. De fato,

suponha que exista uma função T de transporte tal que $\pi = (\text{Id}, T)_*\mu$ e seja Γ o gráfico de T . Pela hipótese do GTB, existem T_1 induzindo π_1 e T_2 induzindo π_2 transportes. Sejam Γ_1 e Γ_2 os gráficos de T_1 e T_2 , respectivamente. Como π_1 e π_2 são medidas de probabilidades, então $\pi_1(\Gamma) = \pi_2(\Gamma) = 1$. Logo, $\pi(\Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)) = 0$, isto é, $\pi(\Gamma \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)) = 1$, portanto para x μ -q.t.p. temos que $T(x) = T_1(x)$ e $T(x) = T_2(x)$, o que só é possível se $T_1(x) = T_2(x)$, isto é, $T_1 = T_2$ em quase todo ponto, o que é impossível.

Por fim, basta mostrar que π é ótimo, o que contradiria a propriedade GTB. Tome $\Gamma := A \times \{x, g(x)\}$. Note que π é concentrada em Γ e para todo $y \in A$ obtemos que

$$d(y, x)^2 = d(g(y), g(x))^2 = d(y, g(x))^2.$$

Assim, Γ é d^2 -ciclicamente monótono. Pelo teorema fundamental do transporte ótimo, obtemos que π é ótimo. $\square$

Dessa forma, se X também for localmente compacto e possuir tangente euclidianas, segue do teorema principal que $\text{Iso}(X)$ é um grupo de Lie. Em particular, isto ocorre em certos espaços com condição de curvatura e é a versão utilizada por Santos em sua tese [25], para mostrar que o grupo de isometrias do espaço é um grupo de Lie.

Referências

- [1] ALIPRANTIS, C.D.; BORDER, K.C. **Infinite Dimensional Analysis**. 3. ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- [2] AMANN, Herbert; ESCHER, Joachim. **Analysis III**. Basel: Birkhäuser, 2009.
- [3] AMBROSIO, Luigi; GIGLI, Nicola. A User's Guide to Optimal Transport. In: PICCOLI, Benedetto; RASCLE, Michel (Ed.). **Modelling and Optimisation of Flows on Networks**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. P. 1–155.
- [4] AMBROSIO, Luigi; GIGLI, Nicola; SAVARÉ, Giuseppe. **Gradient flows**: in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures. Basel: Birkhäuser, 2005.
- [5] AMBROSIO, Luigi; PRATELLI, Aldo. Existence and stability results in the L1 theory of optimal transportation. In: AMBROSIO, Luigi et al. **Optimal Transportation and Applications**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. P. 123–160.
- [6] BARTLE, Robert G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2014.
- [7] BURAGO, Dmitri; BURAGO, Yuri; IVANOV, Sergei. **A Course in Metric Geometry**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2001.
- [8] CORDERO-ERAUSQUIN, Dario; MCCANN, Robert J; SCHMUCKENSCHLÄGER, Michael. A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb. **Inventiones mathematicae**, Springer, v. 146, n. 2, p. 219–257, nov. 2001.
- [9] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. 2. ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
- [10] FABIAN, Marián et al. **Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry**. New York: Springer, 2001.
- [11] FUKAYA, Kenji; YAMAGUCHI, Takao. The Fundamental Groups of Almost Nonnegatively Curved Manifolds. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 136, n. 2, p. 253–333, set. 1992.

- [12] GALAZ-GARCIA, Fernando et al. On quotients of spaces with Ricci curvature bounded below. **Journal of Functional Analysis**, Elsevier, v. 275, n. 6, p. 1368–1446, set. 2018.
- [13] JANSEN, Dorothea. Notes on Pointed Gromov-Hausdorff Convergence. **arXiv e-prints**, mar. 2017. arXiv: 1703.09595 [math.MG].
- [14] JOST, Jürgen; LI-JOST, Xianqing. **Calculus of Variations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [15] KELL, Martin. Transport maps, non-branching sets of geodesics and measure rigidity. **Advances in Mathematics**, Elsevier, v. 320, p. 520–573, nov. 2017.
- [16] KOBAYASHI, Shoshichi; NOMIZU, Katsumi. **Foundations of Differential Geometry**. Hoboken, New Jersey: Wiley, 1963. v. 1.
- [17] LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2012.
- [18] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1983.
- [19] LOTT, John; VILLANI, Cédric. Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 169, n. 3, p. 903–991, mai. 2009.
- [20] MCCANN, Robert J. Polar factorization of maps on Riemannian manifolds. **Geometric & Functional Analysis GAFA**, Springer, v. 11, n. 3, p. 589–608, ago. 2001.
- [21] _____. A Convexity Principle for Interacting Gases. **Advances in Mathematics**, Elsevier, v. 128, n. 1, p. 153–179, jun. 1997.
- [22] MONDINO, Andrea; NABER, Aaron. Structure theory of metric measure spaces with lower Ricci curvature bounds. **Journal of the European Mathematical Society**, EMS Press, v. 21, n. 6, p. 1809–1854, mar. 2019.
- [23] MUNKRES, J.R. **Topology**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, Inc., 2000.
- [24] SAN MARTIN, L. A. B. **Grupos de Lie**. Campinas: Editora Unicamp, 2016.
- [25] SANTOS RODRÍGUEZ, Jaime. **Symmetries of Curved Metric Measure Spaces**. 2020. Tese (Doutorado) – Universidad Autónoma de Madrid.
- [26] SOSA, Gerardo. The Isometry Group of an RCD Space is Lie. **Potential Analysis**, Springer, v. 49, n. 2, p. 267–286, out. 2017.
- [27] SOSA GARCÍAMARÍN, Gerardo. **On Symmetric Transformations in Metric Measured Geometry**. 2017. Tese (Doutorado) – Leipzig University.
- [28] SRIVASTAVA, S. M. **A Course on Borel Sets**. New York: Springer, 1998.

- [29] STURM, Karl-Theodor. On the geometry of metric measure spaces. **Acta mathematica**, Institut Mittag-Leffler, v. 196, n. 1, p. 65–131, jul. 2006.
- [30] SUETIN, P.K.; KOSTRIKIN, Alexandra I; MANIN, Yu I. **Linear Algebra and Geometry**. Boca Raton: CRC Press, 1989.
- [31] TAO, Terence. **Hilbert’s Fifth Problem and Related Topics**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2014.
- [32] VILLANI, Cédric. **Optimal Transport: old and new**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.
- [33] _____. **Topics in Optimal Transportation**. 1. ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2003.
- [34] WELLS, J. H.; WILLIAMS, L. R. **Embeddings and Extensions in Analysis**. Berlin, Heidelberg: Springer, 1975.
- [35] WILLARD, Stephen. **General Topology**. Mineola: Dover Publications, 1970.