



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

VÍCTOR CHAVES SANTOS

**Um estudo sobre as equações de
Navier-Stokes no espaço BMO^{-1}**

Campinas

2022

Víctor Chaves Santos

**Um estudo sobre as equações de
Navier-Stokes no espaço BMO^{-1}**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Víctor Chaves Santos e orientada pelo Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira .

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Santos, Víctor Chaves, 1998-
Sa59e Um estudo sobre as equações de Navier-Stokes no espaço BMO-1 / Víctor Chaves Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações de Navier-Stokes. 2. Soluções brandas (Equações diferenciais parciais). 3. Boa-colocação global. 4. Estabilidade de soluções (Equações diferenciais). 5. Espaço BMO-1 (Análise harmônica). I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A study about the Navier-Stokes equations in the space BMO-1

Palavras-chave em inglês:

Navier-Stokes equations

Mild solutions (Partial differential equations)

Global well-posedness

Stability of solutions (Differential equations)

Space BMO-1 (Harmonic analysis)

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]

João Vitor da Silva

Julio Cesar Valencia Guevara

Data de defesa: 04-03-2022

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-5182-7636>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/8987007505772810>

**Dissertação de Mestrado defendida em 04 de março de 2022 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). JOÃO VITOR DA SILVA

Prof(a). Dr(a). JULIO CESAR VALENCIA GUEVARA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado àqueles que aprendem quando fracassam
e que permanecem evoluindo quando obtêm sucesso.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela misericórdia da minha alma, pelas bênçãos concedidas durante toda a minha vida e pela Sua força que sempre me deu coragem, uma vontade estoica de enfrentar as dificuldades e uma sorte que minhas mãos não alcançam.

Agradeço à minha família, à minha mãe (Horkadia), ao meu pai (Josélio), à minha irmã (Laura), à minha avó (Josefa), aos meus parentes e em especial a minha tia Círia, que sempre me apoiaram de todas as formas possíveis, mesmo com todas as dificuldades, temos o privilégio de um lar de paz e cheio de boas conversas.

Às minhas amigas e amigos que gostam da minha presença em suas vidas, mesmo que com alguma paciência, permitindo trocas construtivas e levando-me a uma gratidão por ser útil de alguma forma. Agradeço imensamente. Em particular, a Larissa que sempre me ensina a rir mais um pouco da vida.

A todos os funcionários e professores do IMECC - UNICAMP agradeço, respeitosamente, pois se dedicaram para que o ensino de qualidade continuasse mesmo em um período tão complexo para o Brasil e para o mundo que está sendo a pandemia de COVID-19. Em especial, ao meu orientador professor Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira pela paciência com meu ritmo de estudos a distância e pelos conselhos certos na minha vida acadêmica durante o mestrado.

Por fim, agradeço ao apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - Processo nº 132221/2020-9 que através da bolsa de estudos tornou meu estudo e pesquisa, além de viável, um trabalho profissional.

*“Happy is the man that findeth wisdom,
and the man that getteth understanding.
For the merchandise of it is better
than the merchandise of silver,
and the gain thereof than fine gold.”*

(Holy Bible, Proverbs 3:13-14)

Resumo

Esta dissertação de mestrado estuda as soluções brandas das equações de Navier-Stokes em um espaço de distribuições temperadas, conhecido por BMO^{-1} , o qual é um dos maiores em que existe boa-colocação global de soluções para essas equações com uma condição de tamanho na norma do dado inicial. Com o objetivo de entender essas soluções, primeiramente será tratado as soluções clássicas e em seguida a noção de solução utilizada no espaço BMO^{-1} . A boa-colocação para dados iniciais no espaço BMO^{-1} é feita através da técnica de ponto fixo aplicado às equações quadráticas, levando em conta operadores bilineares limitados em espaços funcionais adequados. Posteriormente, é estudado um resultado sobre estabilidade no espaço BMO^{-1} . Este trabalho é baseado no artigo [20] de H. Koch e D. Tataru, considerando complementos, aprofundamentos e pontos de vista de Lemarié-Rieusset [22].

Palavras-chave: Equações de Navier Stokes; Soluções brandas; Boa-colocação; Estabilidade de soluções; Espaço BMO^{-1} .

Abstract

This master dissertation studies the mild solutions of the Navier-Stokes equations in a space of tempered distributions, the celebrated space BMO^{-1} , which is one of the largest space where there is global-in-time well-posedness of mild solutions for those equations under a smallness condition on the initial-data norm. In order to understand those solutions, first the classical solutions will be considered and after the notion of solution used in the space BMO^{-1} . The well-posedness for initial data in BMO^{-1} is obtained through the fixed point technique applied to quadratic equations, taking into account bilinear operators bounded in suitable functional spaces. Subsequently, a result on stability in the space BMO^{-1} is studied. This work is based on the article [20] by H. Koch and D. Tataru, considering complements, insights and points of view from the work [22] by Lemarié-Rieusset.

Keywords: Navier Stokes equations; Mild solutions; Well-posedness; Stability of solutions; Space BMO^{-1} .

Lista de símbolos

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{R}^n	Conjunto dos vetores com dimensão $n \in \mathbb{N}$
\mathcal{C}^k	Conjunto das funções de classe de diferenciabilidade $k \in \mathbb{N}$
L^p	Espaço de Lebesgue (das funções integráveis a Lebesgue)
$\ \cdot\ _{L^p}$	Norma dos espaços de Lebesgue
L^p_{loc}	Espaço das funções localmente integráveis
$*$	Convolução
\mathcal{S}	Classe das funções de Schwartz
\mathcal{S}'	Conjunto das distribuições temperadas
$\text{supp}(f)$	Suporte da função f
\hat{f}	Transformada de Fourier de f
f^\vee	Transformada inversa de Fourier
\rightharpoonup	Convergência fraca
ess sup	Supremo essencial
$W^{s,p}$	Espaço de Sobolev não homogêneo
$\dot{W}^{s,p}, \dot{H}^s$	Espaço de Sobolev homogêneo
BMO	Espaço das funções com oscilação média limitada
\mathcal{H}^p	Espaços de Hardy
h_t	Núcleo do calor
\mathbb{P}	Operador projeção de Leray
$O_{j,k}$	Tensor de Ossenz

BMO^{-1} Espaço crítico de Koch-Tataru

M_q^p Espaços de Morrey

$B_{p,q}^s$ Espaços de Besov

Sumário

Introdução	13
1 Preliminares de Análise	17
1.1 Integração e Espaços de Lebesgue	17
1.2 Convolução e Distribuições Temperadas	23
1.3 Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev	28
1.4 Espaços de Hardy e BMO	35
2 Soluções Clássicas	38
2.1 Equações de Poisson e do Calor	39
2.2 Decomposição de Helmholtz	44
2.3 Estimativas do Projetor de Leray	46
2.4 Equações de Stokes	48
2.5 Fórmulas de Oseen	49
2.6 Soluções Clássicas das Equações de Navier-Stokes	51
2.7 Soluções Globais Suaves para Dados Pequenos	58
3 Soluções Brandas em BMO^{-1}	63
3.1 Soluções Brandas das Equações de Navier-Stokes	64
3.2 Espaço BMO^{-1}	65
3.3 Existência e Unicidade em BMO^{-1}	69
3.3.1 Teorema de Koch-Tataru	72
3.3.2 Teorema de Koch-Tataru com viscosidade e termo da força	77
3.4 Estabilidade de Soluções Globais	85
4 Conclusão	93
REFERÊNCIAS	95
APÊNDICE A Índice	98

Introdução

O problema de valor inicial (PVI) para as equações de Navier-Stokes para um campo vetorial de velocidade $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) de um fluido incompressível, com um campo escalar de pressão p , é dado pelo conjunto de equações

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (1)$$

em que u_0 é um campo vetorial inicial com divergência livre, isto é, $\operatorname{div}(u_0) = 0$; $\nu > 0$ a viscosidade cinética; e f um campo vetorial de forças externas.

Além disso, o Laplaciano, o gradiente e o divergente são com relação as variáveis espaciais, ou seja, respectivamente

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad \operatorname{div} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Fisicamente, a equação $\operatorname{div}(u) = 0$ indica que o fluido é incompressível, a qual é a propriedade do fluido de opor-se a compressão e manter a sua densidade constante com o tempo. Assim, as equações (1) descrevem o movimento de um fluido incompressível.

A importância das equações de Navier-Stokes é difícil de mensurar com precisão, tendo em vista a sua extensa e diversa lista de aplicações nas ciências matemáticas e naturais, bem como nas engenharias. Um dos interesses fundamentais é entender parte do fenômeno da turbulência, e conectado a isso, surge o interesse matemático em analisar condições em que as soluções possam apresentar comportamento singular (ou de suavidade), bem como analisar como as equações evoluem a partir de dados iniciais singulares que apresentam fortes singularidades e que não decaem no infinito. De fato, em dimensão $n \geq 3$, a existência de soluções globais e suaves das equações de Navier-Stokes, até o presente momento, é um dos famosos Problemas do Milênio em aberto, com um prêmio de um milhão de dólares por sua solução oferecido pelo *Clay Mathematics Institute*. A descrição oficial do problema pode ser consultada na referência [9] de Charles L. Fefferman.

Uma das formas de analisar as equações de Navier-Stokes do ponto de vista de equações diferenciais parciais, assim como os demais modelos matemáticos, significa de acordo com Jacques Hadamard entender as seguintes propriedades:

- Existência de solução;
- Unicidade de solução;
- Dependência contínua de solução com relação aos dados iniciais.

Essas três propriedades formam a boa-colocação de um problema de valor inicial.

As equações de Navier-Stokes são localmente bem colocadas para um dado inicial suficientemente suave, impostas condições de fronteira sobre a pressão em ∞ . Já em *T. Kato and G. Ponce, Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations* (veja [18]) é obtido mais resultados gerais, por exemplo se $s > n/2$ então para um dado inicial em H^s existe uma única solução local em $\mathcal{C}([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n))$.

Outras referências indicadas pelo artigo principal [20], o qual baseia-se esta dissertação, são:

- *T. Kato, Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions* [17] é provado para um dado inicial em $L^n(\mathbb{R}^n)$.
- *Y. Giga and T. Miyakawa, Navier-Stokes flow in \mathbb{R}^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces* [11] e *M. Taylor, Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes equation* [34] provaram o mesmo resultado para certos espaços de Morrey.
- Resultados similares foram obtidos em *M. Cannone, A generalization of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations* ([6]) e *F. Planchon, Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the incompressible Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3* [30] para dados iniciais nos espaços de Besov $B_{p,\infty}^{-1+n/p}(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$). Para mais detalhes sobre os espaços de Besov, veja [21] e [31].
- Artigos mais recentes sobre o tópico anterior: *D. Iftimie, The resolution of the Navier-Stokes equations in anisotropic spaces* ([15]) e *P.-L. Lions and N. Masmoudi, Unicité des solutions faibles de Navier-Stokes dans $L^N(\Omega)$* [25].

Os exemplos acima são alguns dos vários espaços críticos em que conhece-se resultados de boa-colocação global com uma condição de tamanho na norma do dado inicial (i.e., uma condição de pequenez). Para mais exemplos, referimos o leitor aos livros [21], [22] e suas referências.

Estas condições de tamanho são sobre a norma do espaço em questão, o que permite considerar soluções com normas L^2 ou em espaços de Sobolev (com regularidade positiva) arbitrariamente grandes. Além disso, a "ampliação" dos espaços nos leva na direção de tentar encontrar um espaço limite em que um fluxo "razoável" é bem definido e as equações de Navier-Stokes são bem-colocadas.

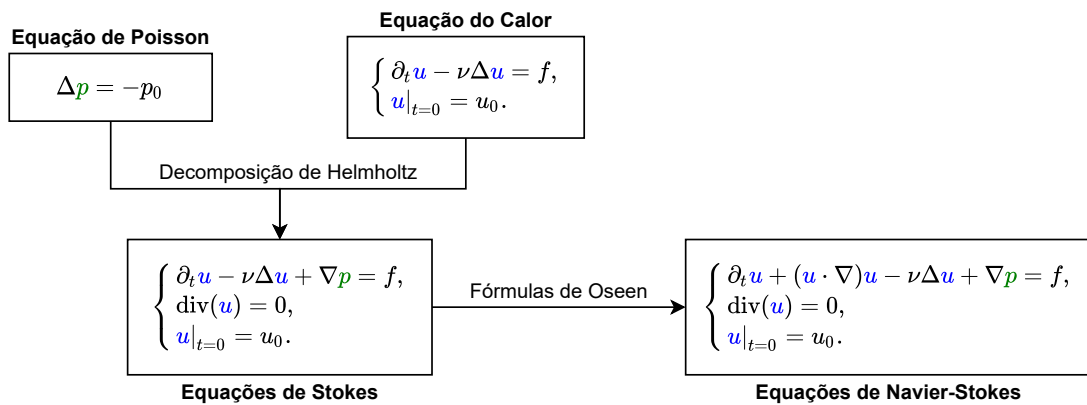
Nesta dissertação, o interesse principal é analisar a boa-colocação das equações de Navier-Stokes no espaço BMO^{-1} . Este é um dos maiores espaços críticos em que existe boa-colocação global de soluções para as equações de Navier-Stokes com uma condição de pequenez. De fato, comparando com os espaços acima, temos a seguinte sequência de inclusões contínuas do espaço de Lebesgue e de Besov (a ser definido posteriormente)

$$L^n(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,\infty}^{-1+n/p}(\mathbb{R}^n) \subset BMO^{-1},$$

o que mostra a "amplitude" de BMO^{-1} , veja o Capítulo 3 e o Capítulo Conclusão 4 para uma discussão mais detalhada.

Para tanto, iniciaremos com um capítulo de preliminares que revisa alguns tópicos de análise no \mathbb{R}^n , equações diferenciais parciais e análise harmônica, com o intuito de indicar as definições básicas usadas no restante do texto, assim como apresentar as notações adotadas. Na escolha dos tópicos apresentados nas preliminares, foi levado em conta a utilização posterior nos teoremas sobre boa-colocação e não tem o intuito de ser uma apresentação com desenvolvimento detalhado.

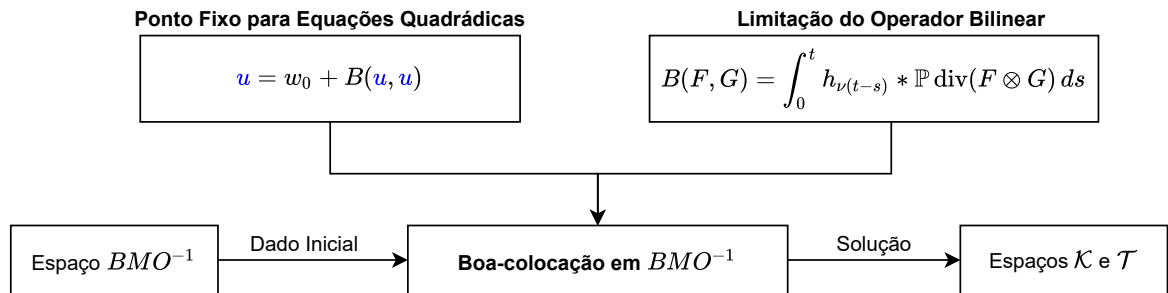
No segundo capítulo, Soluções Clássicas, são tratadas de forma sequencial as equações diferenciais: do calor, de Poisson e de Stokes; assim como conceitos que permitiram entender a construção da teoria clássica das equações de Navier-Stokes, tais como a decomposição de Helmholtz e as fórmulas de Oseen. Em resumo, o seguinte diagrama descreve a ideia geral do objetivo do capítulo.



Esse capítulo tem como objetivo introduzir as equações de Navier-Stokes do ponto de vista básico de equações diferenciais parciais, que de fato justifica o sentido do termo soluções clássicas. A dedução física do problema não é apresentada, uma referência para esse estudo de Mecânica dos Fluidos é Chorin [7, §1].

No terceiro capítulo, são enunciados e demonstrados os teoremas fundamentais sobre existência e unicidade no espaço BMO^{-1} , assim como a estabilidade neste espaço. Para isso, são explicadas as propriedades necessárias do espaço BMO^{-1} , assim como um

resultado sobre ponto fixo, ou princípio de contração, aplicado às equações quadráticas que permitirá reduzir o problema de existência e unicidade em estimar a forma bilinear associada à formulação integral das equações de Navier-Stokes, ou seja, à formulação de soluções brandas. Visualmente temos o diagrama abaixo, que sintetiza a estratégia a ser seguida.



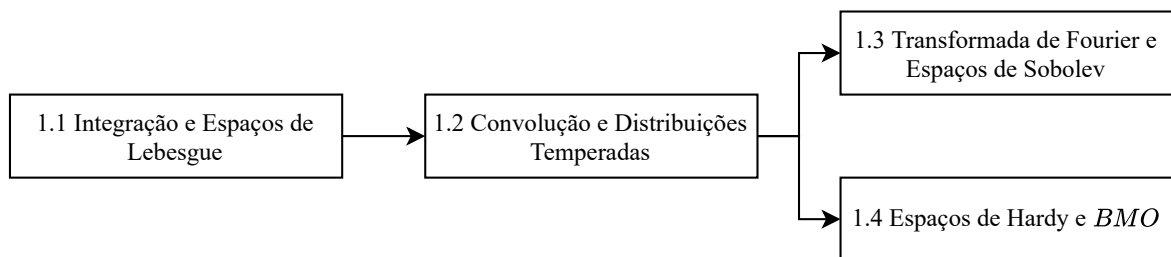
Em nosso estudo, o artigo base, e que fundamentou as ideias sobre existência e unicidade, é o trabalho pioneiro de Koch e Tataru [20]. Além disso, consideramos complementos e aprofundamentos desta teoria, bem como o resultado de estabilidade, encontrados na obra de Lemarié-Rieusset [22, §4, §5, §9] que é de fato um guia sobre os mais variados resultados e técnicas que abordam o problema das equações de Navier-Stokes.

Capítulo 1

Preliminares de Análise

Com o intuito de definir algumas notações e revisar alguns resultados de Análise no \mathbb{R}^n , Equações Diferenciais Parciais e áreas relacionadas, este capítulo fornecerá algumas ferramentas básicas para a compreensão de todo texto, e seu conteúdo é baseado nas referências [3],[4], [7], [8], [12], [24], [29], [32], conforme melhor explicado nas respectivas seções.

De fato, a primeira seção 1.1 revisa alguns resultados sobre integração e espaços de Lebesgue, como integração por partes, a regra de Leibniz para integrais e as propriedades básicas dos espaços de Lebesgue. Com isso, é definido na seção 1.2 o conceito de convolução e função de Schwartz para enunciar as definições e fatos sobre distribuições. Com esses conceitos, na seção 1.3 é abordado a transformada de Fourier e os espaços de Sobolev do ponto de vista clássico e através de distribuições temperadas. Por fim, na seção 1.4 os espaços de Hardy e BMO e sua dualidade. Em síntese, temos a dependência entre as seções de acordo com o diagrama abaixo.



1.1 Integração e Espaços de Lebesgue

Primeiramente, revisamos alguns resultados de integração em \mathbb{R}^n tendo como base [8, §Appendix C]. Suponha em toda seção que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e limitado com ∂U de classe C^1 .

Proposição 1.1 (Gauss-Green)

Para cada campo vetorial $u \in \mathcal{C}^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$ temos

$$\int_U \operatorname{div}(u) \, dx = \int_{\partial U} u \cdot \vec{n} \, dS$$

em que \vec{n} é campo vetorial normal unitário que aponta para fora ao longo de ∂U e dS o diferencial de área. Em particular, para $u \in \mathcal{C}^1(\bar{U})$ segue que para cada $i = 1, \dots, n$

$$\int_U \partial_i u \, dx = \int_{\partial U} u \cdot n_i \, dS.$$

Demonstração. A demonstração pode ser consultada como caso particular da demonstração do Teorema de Stokes em [24, §VII]. A versão aqui apresentada também é conhecido como Teorema da Divergência. ■

Com essa proposição podemos generalizar a integração por partes para funções em \mathbb{R}^n e obter as fórmulas de Green.

Proposição 1.2 (Integração por Partes)

Sejam $u, v \in \mathcal{C}^1(\bar{U})$ então para cada $i = 1, \dots, n$

$$\int_U (\partial_i u) v \, dx = - \int_U u (\partial_i v) \, dx + \int_{\partial U} uv \cdot n_i \, dS.$$

Demonstração. Aplicando a Proposição 1.1 para o produto $uv \in \mathcal{C}^1(\bar{U})$ e usando a regra do produto de derivadas segue o resultado. ■

Ademais, temos as seguintes propriedades sobre o operador Laplaciano.

Proposição 1.3 (Fórmulas de Green)

Sejam $u, v \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$, então

1. $\int_U \Delta u \, dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS;$
2. $\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_U u \Delta v \, dx + \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS;$
3. $\int_U u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS.$

Demonstração. Utilizando integração por partes com $\partial_i u$ no lugar de u e $v \equiv 1$, então

$$\int_U \partial_i^2 u \, dx = \int_{\partial U} \partial_i u \cdot n_i \, dS.$$

e assim obtemos o primeiro item somando em $i : 1 \leq i \leq n$. Para o segundo item tome $\partial_i v$ no lugar de v na integração por partes, então

$$\int_U \partial_i u \partial_i v \, dx = - \int_U u (\partial_i^2 v) \, dx + \int_{\partial U} u (\partial_i v) \cdot n_i \, dS.$$

e novamente somando em $i : 1 \leq i \leq n$ segue. Por fim, para o terceiro item alternamos no segundo item u e v e subtraímos as expressões. ■

Tomando uma família de regiões limitadas e suaves $U(t) \subset \mathbb{R}^n$ que depende de $t \in \mathbb{R}$ de modo suave, denote $\omega = \omega(t, x)$ como a velocidade da fronteira $\partial U(t)$. Então temos o seguinte resultado

Proposição 1.4 (Transporte de Reynolds)

Seja $f = f(t, x)$ uma função suficientemente suave, então

$$\frac{d}{dt} \int_{U(t)} f \, dx = \int_{\partial U(t)} f \omega \cdot \vec{n} \, dS + \int_{U(t)} \partial_t f \, dx.$$

Demonstração. O leitor pode encontrar vários tipos de demonstração para esta proposição, em particular, referimos [7, §1] a qual uma demonstração é realizada sob uma perspectiva da Mecânica dos Fluidos. ■

Como caso particular do Transporte de Reynolds temos

Proposição 1.5 (Regra de Leibniz para Integrais)

Sejam $f = f(t, s, x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ e funções $a = a(t), b = b(t)$ diferenciáveis e localmente limitadas, então

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(t, s, \cdot) \, ds \right) = \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t f \, ds + f(t, b(t), \cdot) \frac{d}{dt} b(t) - f(t, a(t), \cdot) \frac{d}{dt} a(t).$$

Considere no que segue \mathbb{R}^n com a medida de Lebesgue μ e Σ a σ -álgebra de Borel. Pode-se fazer toda teoria dos espaços de Lebesgue com medidas e σ -álgebras mais gerais, como por exemplo em [3] e [4]. Além disso, temos de forma análoga as próximas proposições para o espaço de Lebesgue restrito ao aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, considerado anteriormente. Naturalmente, quando não for especificado o domínio na notação da integral, estamos considerando todo o espaço em questão $\left(\int = \int_{\mathbb{R}^n} \right)$.

Definição 1.1

Dois funções são μ -equivalentes se são iguais μ -quase sempre. A classe de μ -equivalência de uma função f consiste do conjunto de todas as funções que são μ -equivalentes com f .

Definição 1.2 (Espaço L^p , $1 \leq p < +\infty$)

Considerando $1 \leq p < +\infty$, o espaço $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ é formado por todas as classes de μ -equivalências de funções reais f , Σ -mensuráveis, de modo que $|f|^p$ possui integral finita com respeito à medida μ . Denotaremos ainda

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.1)$$

Com o intuito de uso posterior será demonstrado as desigualdades clássicas do estudo dos espaços L^p . Essas desigualdades são úteis, por exemplo, para demonstrar que (1.1) é de fato uma norma e que L^p é um espaço de Banach.

Proposição 1.6 (Desigualdade de Young)

Sejam $a, b \in [0, +\infty)$ e $p, q > 1$ números reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \quad (1.2)$$

Demonstração. O caso $a = 0$ ou $b = 0$ é imediato. Considere $a \neq 0$, $b \neq 0$ e para cada $0 < \alpha < 1$, a função $f_\alpha : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_\alpha(t) = t^\alpha - \alpha t$.

Note que $f'_\alpha(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha$ implica que $t = 1$ é tal que $f'(1) = 0$, $f'(t) > 0$ se $t < 1$, $f'(t) < 0$ se $t > 1$ e $f''(1) = \alpha(\alpha - 1) < 0$, isto é, f tem um máximo local em $t = 1$. Portanto

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) \leq f_\alpha(1) &\Rightarrow t^\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha \\ &\Rightarrow t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha), \forall t > 0. \end{aligned}$$

Substituindo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$, temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{q} \Rightarrow a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

■

Observação 1.1

De forma equivalente a desigualdade de Young pode ser escrita como

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

bastando fazer a substituição $a = A^p$ e $b = B^q$.

Proposição 1.7 (Desigualdade de Young com ε)

Sejam $A, B > 0$, $\varepsilon > 0$ e $p, q > 1$ números reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$AB \leq \varepsilon A^p + C(\varepsilon) B^q$$

para $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

Demonstração. Escrevendo $AB = ((\varepsilon p)^{1/p} A) \left(\frac{B}{(\varepsilon p)^{1/p}} \right)$, temos aplicando a desigualdade de Young

$$\begin{aligned} AB &\leq \frac{((\varepsilon p)^{1/p} A)^p}{p} + \frac{\left(\frac{B}{(\varepsilon p)^{1/p}} \right)^q}{q} \\ &\leq \varepsilon A^p + C(\varepsilon) B^q. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.8 (Desigualdade de Hölder para integrais)

Sejam $p, q > 1$ números reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ um espaço de medida. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$, então $fg \in L^1(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ e

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}. \quad (1.3)$$

Isto é,

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Caso $\|f\|_{L^p} = 0$, então $f = 0$ μ -quase sempre, logo $fg = 0$ μ -quase sempre e $\|fg\|_{L^1} = 0$ e então a desigualdade é satisfeita. Analogamente, caso $\|g\|_{L^q} = 0$.

Suponha que $\|f\|_{L^p} \neq 0 \neq \|g\|_{L^q}$. Observe que a desigualdade de Young (1.2) também é válida para $a = 0$ e $b = 0$. Tomando $a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p}$ e $b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q}$, segue que

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q} \\ &\Rightarrow |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \left[\frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q} \right]. \end{aligned}$$

Por fim, integrando

$$\begin{aligned} \int |f||g| d\mu &\leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \left[\frac{1}{p \|f\|_{L^p}^p} \int |f|^p d\mu + \frac{1}{q \|g\|_{L^q}^q} \int |g|^q d\mu \right] \\ \Rightarrow \|fg\|_{L^1} &\leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right] \\ \Rightarrow \|fg\|_{L^1} &\leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.9 (Desigualdade de Minkowski para integrais)

Sejam $1 \leq p < +\infty$ e $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ um espaço de medida. Se $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$, então $f + g \in L^p(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ e temos a desigualdade triangular

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Isto é,

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. O caso $p = 1$ é imediato da desigualdade triangular para o módulo. Se $\|f + g\|_{L^p} = 0$ tem-se $0 \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$, por causa da definição de $\|\cdot\|_{L^p}$. Então suponha que $\|f + g\|_{L^p} \neq 0$ e $1 < p < \infty$. Note que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p = \\ &= 2^p (\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})^p \end{aligned}$$

e daí $f + g \in L^p$. Agora observe que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &= |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &\leq (|f(x)| + |g(x)|) \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &= |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}, \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Tomando $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos $(p-1)q = p$, e assim

$$|f + g|^{p-1} = |f + g|^{\frac{p}{q}} \in L^q.$$

Pela desigualdade de Hölder (Proposição 1.8, página 21) tem-se

$$\int |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Somando as desigualdades, obtemos

$$\int |f + g|^p d\mu \leq \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

Dividindo pelo primeiro fator, segue que

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

A noção de espaço completo, e por sua vez de espaço de Banach, depende da definição de sequência de Cauchy, que é definido de forma natural através da norma do espaço.

Definição 1.3 (Sequência de Cauchy)

Uma sequência (f_n) em L^p é uma sequência de Cauchy em L^p ($1 \leq p \leq +\infty$) se $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tais que $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ implicam que $\|f_m - f_n\|_{L^p} < \varepsilon$. Um espaço vetorial é completo se toda sequência de Cauchy converge para algum elemento desse espaço.

Proposição 1.10 (L^p completo)

Se $1 \leq p < +\infty$, então L^p é um espaço normado completo, com a norma

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser consultada em [3, §6] e [4, §1].

■

A seguir, temos a definição do espaço L^∞ , que é o espaço das funções essencialmente limitadas.

Definição 1.4 (Espaço L^∞)

O espaço $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ é o conjunto de todas as classes de equivalência das funções reais Σ -mensuráveis tais que são limitadas em μ -quase sempre. Se $f \in L^\infty$ e $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$, então pondo $S(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\}$ define-se

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ess sup } f = \inf\{S(N) : N \in \Sigma, \mu(N) = 0\}.$$

Um elemento de L^∞ é denominado função essencialmente limitada.

Observação 1.2

Note que se $f \in L^\infty$ então $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ para μ -quase todo x . Além disso, se $A < \|f\|_{L^\infty}$ então existe E tal que $\mu(E) > 0$ e $|f(x)| \geq A, \forall x \in E$.

Proposição 1.11 (L^∞ completo)

O espaço L^∞ é um espaço normado completo sobre a norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Demonstração. A demonstração pode ser consultada em [3, §6] e [4, §1].

■

Usaremos também a notação para os espaços localmente de Lebesgue

$$L^p_{\text{loc}}(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in L^p(V) \text{ para cada } V \subset\subset U\}$$

em que $\subset\subset$ é a notação para compactamente mergulhado (Definição 1.22, página 33).

1.2 Convolução e Distribuições Temperadas

O conceito de convolução pode ser trabalhado mais geralmente para um grupo localmente compacto. No que segue trataremos apenas no grupo \mathbb{R}^n em todo o texto. Como referência básica desta seção, utilizamos a referência [12].

Definição 1.5 (Convolução)

Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a convolução $f * g$ por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy.$$

A próxima Proposição 1.12 implica, em particular que $L^1(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra de Banach com o produto convolução.

Proposição 1.12

Para quaisquer $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, seguem as propriedades

- $f * (g * h) = (f * g) * h$ (associatividade);
- $f * (g + h) = f * g + f * h$ e $(f + g) * h = f * g + f * h$ (distributividade);
- $f * g = g * f$ (comutatividade);
- $\alpha(f * g) = (\alpha f) * g$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (associatividade por escalar).

Demonstração. Segue das propriedades de linearidade de integração e mudança de variáveis. ■

Uma função de classe de Schwartz, de forma intuitiva, tem como comportamento o decaimento de suas derivadas mais rápido do que um decaimento polinomial no infinito. A definição ideal e precisa é dada a seguir.

Um vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com cada componente α_i sendo um número inteiro não negativo é denominado multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Definição 1.6 (Classe de Schwartz)

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ . A função f pertence à classe de Schwartz de \mathbb{R}^n , denotada por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se

$$\rho_{\alpha, \beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < +\infty,$$

para cada par α e β de multi-índices, em que $\rho_{\alpha, \beta}(f)$ é denominada seminorma de Schwartz de f .

A exemplo, a função $e^{-|x|^2}$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, porém $e^{-|x|}$ não, visto que não é diferenciável na origem. Note ainda que o conjunto das funções suaves com suporte compacto está contido no conjunto das funções de Schwartz, $\mathcal{C}_0^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

É possível obter uma alternativa para a caracterização de funções de Schwartz mais prática, por estimar apenas as derivadas, como é dado na seguinte observação.

Observação 1.3

Uma função $f \in C^\infty$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, para todo $N \in \mathbb{N}$ e multi-índice α existir $C_{\alpha,N} > 0$ constante tal que

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha,N}(1 + |x|)^{-N}.$$

Proposição 1.13

Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então fg e $f * g$ estão em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g),$$

para cada multi-índice α .

Demonstração. Consultar a demonstração em [12, §2].

■

Agora passemos para o estudo das distribuições e sua relação com funções de Schwartz e convolução. Para isso, será definido o suporte de uma função e notações de espaços de funções.

Definição 1.7 (Suporte)

O suporte de uma função real com domínio Ω é dado como

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Uma função f possui suporte compacto se o respectivo conjunto suporte for compacto. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o suporte é compacto se, e só se, é limitado.

Observação 1.4

Será denotado $C^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções reais infinitamente diferenciáveis com domínio Ω . Por sua vez, $C_0^\infty(\Omega)$ é conjunto das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto. As funções $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ serão denominadas, por vezes, de funções teste.

Analogamente como em Análise Funcional, é interessante entender os espaços duais de espaços de funções também como espaços de funções. A rigor, os espaços de funções de interesse sobre \mathbb{R}^n são o espaço das funções suaves com suporte compacto, das funções de Schwartz e das funções suaves:

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Os seus espaços duais, i.e. os espaços dos funcionais lineares contínuos no conjunto das funções testes, são denotados por

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^*,$$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^*,$$

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) = (C^\infty(\mathbb{R}^n))^*.$$

Por definição temos as noções de convergências

$$\begin{aligned} T_k \rightarrow T \in \mathcal{D}' &\iff T_k, T \in \mathcal{D}', T_k(f) \rightarrow T(f), \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n); \\ T_k \rightarrow T \in \mathcal{S}' &\iff T_k, T \in \mathcal{S}', T_k(f) \rightarrow T(f), \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \\ T_k \rightarrow T \in \mathcal{E}' &\iff T_k, T \in \mathcal{S}', T_k(f) \rightarrow T(f), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Além disso, os espaços duais são tais que

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Definição 1.8 (Distribuições Temperadas)

Os elementos do espaço $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ são denominados *distribuições*. Os elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ são denominados *distribuições temperadas*. Já os elementos de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ de *distribuições com suporte compacto*.

As notações usuais da ação de uma distribuição u sobre uma função teste f é dada por $\langle u, f \rangle = u(f)$.

Para certos espaços de funções, podemos identificar cada função g por $g \mapsto L_g$, em que L_g é o funcional dado por

$$L_g(f) = \int f(x)g(x) dx.$$

A exemplo, temos que a função constante igual a 1 está em \mathcal{S}' , porém não está em \mathcal{E}' . Mais geralmente, as funções L_{loc}^1 são distribuições, visto que se $g \in L_{\text{loc}}^1$ então a integral dada por $L_g(f)$ está bem definida para toda $f \in \mathcal{D}$, e além disso, se $f_k \rightarrow f$ em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $L_g(f_k) \rightarrow L_g(f)$ em \mathcal{D}' .

Observação 1.5

De forma análoga ao exemplo anterior, o espaço das funções L^p , $1 \leq p \leq \infty$ são distribuições temperadas, porém não estão em \mathcal{E}' , a menos que seja escolhida uma função de L^p com suporte compacto. Outro exemplo, relacionado são das funções g tais que $|g(x)| \leq C(1 + |x|)^k$ para algum $k \in \mathbb{R}$, essas funções são distribuições temperadas, pois dado um inteiro $m > n + k$ temos que

$$\begin{aligned} L_g(f) = \int fg &\leq C \int |f(x)|(1 + |x|)^k dx \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{(1 + |x|)^m |f(x)|\} \int (1 + |x|)^{k-m} dx \\ &\leq C' \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{(1 + |x|)^m |f(x)|\} \end{aligned}$$

com $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^m |f(x)|$ limitado por somas de seminormas de Schwartz $\rho_{\alpha,\beta}$. Assim, sempre que considerarmos espaços de funções em algum espaço de distribuição estamos se referindo à identificação $g \mapsto L_g$.

Motivado pela integração por partes sendo f, g funções de Schwartz (ou para funções em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ com Ω domínio, ver Definição 1.18, página 32) e α um multi-índice, então

$$\int (\partial^\alpha f)(x)g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int f(x)(\partial^\alpha g)(x)dx,$$

estenderemos o conceito de derivada para uma distribuição temperada interpretando essa expressão como ações de distribuições em funções.

Definição 1.9 (Derivadas Distribucionais)

Sejam $u \in \mathcal{S}'$ e α um multi-índice, defina

$$\langle \partial^\alpha u, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha f \rangle,$$

para cada $f \in \mathcal{S}$. No caso de u ser uma função, do ponto de vista de distribuições, as derivadas de u são denominadas derivadas distribucionais.

Definição 1.10 (Convolução com uma distribuição)

Sejam $u \in \mathcal{S}'$ e $h \in \mathcal{S}$, defina a convolução $h * u$ por

$$\langle h * u, f \rangle = \langle u, \tilde{h} * f \rangle$$

para cada $f \in \mathcal{S}$, em que $\tilde{h}(x) = h(-x)$ é a reflexão.

Definição 1.11 (Distribuição Limitada)

Sejam u uma distribuição e $f \in \mathcal{S}$. A distribuição u é limitada se $u * f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

O próximo teorema relaciona as definições apresentadas nesta seção.

Proposição 1.14

Sejam $u \in \mathcal{S}'$ e $\phi \in \mathcal{S}$, então $\phi * u \in C^\infty$. Além disso, para cada multi-índice α existem constantes $C_\alpha, k_\alpha > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha(\phi * u)(x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^{k_\alpha}.$$

Demonstração. Consultar a demonstração em [12, §2].



Agora, precisamos definir o espaço das distribuições temperadas módulo polinômios para ser usada na definição de espaço de Sobolev homogêneo (Definição 1.24, página 34).

Definição 1.12 (Distribuições Temperadas Módulo Polinômios)

Denotando \mathcal{P} o conjunto de todos os polinômios com $n \in \mathbb{N}$ variáveis reais, que podem ser escritos como

$$\sum_{|\beta| \leq m} c_\beta x^\beta = \sum_{\substack{\beta_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \\ \beta_1 + \dots + \beta_n \leq m}} c_{(\beta_1, \dots, \beta_n)} x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$$

com coeficientes complexos c_β e m um inteiro. Defina a relação de equivalência \sim em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dada por $u \sim v \iff u - v \in \mathcal{P}$. O espaço das classes de equivalência será denotado por \mathcal{S}'/\mathcal{P} .

A definição anterior está bem posta visto que de fato \sim é uma relação de equivalência ([12, §2]). Para ficar estabelecida uma topologia em \mathcal{S}'/\mathcal{P} (via sequências) temos a seguinte proposição.

Proposição 1.15

Denote $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções de Schwartz ϕ tais que

$$\int x^\alpha \phi(x) dx = 0$$

para todo multi-índice α . Dessa maneira, $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e herda a mesma topologia desse espaço. Além disso, tem como dual

$$(\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n))^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}.$$

Demonstração. Considere a aplicação $\rho : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n))^*$ que leva cada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ao funcional $L_u(p) = \int p(x)u(x) dx$. O núcleo de ρ é \mathcal{P} e a identificação segue do Teorema dos Isomorfismos ([4, §2.7]) com o Teorema de Riesz-Fréchet ([4, §5.5]).

■

E assim, podemos definir: $u_j \rightarrow u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ se, e somente se, $u_j, u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ e além disso $\langle u_j, \phi \rangle \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \langle u, \phi \rangle$ para cada $\phi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev

Tendo como base principal as referências [8], [12], será introduzida a transformada de Fourier no espaço das funções de Schwartz, visto que o rápido decaimento no infinito permite boas propriedades com problemas envolvendo convergência. Ademais, a transformada de Fourier, a ser definida, é um homeomorfismo no espaço das funções de Schwartz e assim a transformada inversa fica bem definida. Por essas razões, fica justificado o desenvolvimento nesse espaço. Considere como notação para $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Definição 1.13 (Transformada de Fourier)

Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, defina

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

A função \hat{f} é denominada transformada de Fourier de f .

Definição 1.14 (Transformada Inversa de Fourier)

Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, defina

$$f^\vee(x) = \widehat{f}(-x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. A aplicação

$$f \mapsto f^\vee$$

é denominada transformada inversa de Fourier.

As proposições a seguir sintetizam as propriedades básicas da transformada de Fourier e de sua inversa.

Proposição 1.16

Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{C}$, α um multi-índice, A uma matriz ortogonal e $t > 0$. Então temos as propriedades

• Principais:

1. $\widehat{f} \in \mathcal{S}$;
2. $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$;
3. $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$;
4. $\widehat{bf} = b\widehat{f}$;
5. $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$;
6. $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$;
7. $\partial^\alpha(\widehat{f})(\xi) = ((-2\pi i x)^\alpha f(x))^\wedge(\xi)$;
8. $\widehat{f \circ A}(\xi) = \widehat{f}(A\xi)$.

• Translação ($\tau^y(f)(x) = f(x - y)$):

1. $\widehat{\tau^y(f)}(\xi) = e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$;
2. $\tau^y(\widehat{f})(\xi) = (e^{2\pi i x \cdot y} f(x))^\wedge(\xi)$.

• Dilatação ($\delta^a(f)(x) = f(ax)$):

1. $\widehat{\delta^t(f)}(\xi) = t^{-n} \delta^{1/t}(\widehat{f})$.

• Reflexão ($\widetilde{f}(x) := f(-x)$):

1. $\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$;
2. $\widehat{\widehat{f}} = \widetilde{\widetilde{f}}$.

Demonstração. Pode ser consultada em [12, §2].

■

Corolário 1.1

A transformada de Fourier de uma função f radial, isto é, que pode ser escrita como $f(x) = \Phi(\|x\|)$ para cada x do seu domínio, em que Φ é uma função real não negativa, também é uma função radial. Além disso, produtos e convoluções de funções radiais são radiais.

Demonstração. Consultar na referência [12, §2].

■

A proposição a seguir apresenta identidades conhecidas da teoria, como a relação de Parseval e a identidade de Plancherel.

Proposição 1.17

Dadas $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x) dx;$
2. $(\widehat{f})^\vee = f = \widehat{(f^\vee)};$ (*Inversão de Fourier*)
3. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\widehat{h}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{h(\xi)} d\xi;$ (*Relação de Parseval*)
4. $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f^\vee\|_{L^2};$ (*Identidade de Plancherel*)
5. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g^\vee(x) dx.$

Demonstração. Pode ser consultada em [12, §2].

■

Corolário 1.2

A transformada de Fourier $\widehat{\cdot} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um homeomorfismo.

Demonstração. Consultar em [12, §2].

■

Assim como na seção anterior, em que as definições envolvendo distribuições generalizaram as que envolvem funções graças a identificação L_g , também temos a noção de transformada de Fourier para uma distribuição temperada.

Definição 1.15 (Transformada de Fourier de distribuições temperadas)

Seja $u \in \mathcal{S}'$ uma distribuição temperada, a transformada de Fourier \widehat{u} e a sua inversa u^\vee são definidas por

$$\langle \widehat{u}, f \rangle = \langle u, \widehat{f} \rangle, \quad \langle u^\vee, f \rangle = \langle u, f^\vee \rangle.$$

para cada $f \in \mathcal{S}$.

Esta definição de transformada de Fourier permitirá generalizar os espaços de Sobolev a serem definidos a seguir.

Os espaços de Sobolev são os ambientes ideais para o estudo de soluções de equações diferenciais parciais no sentido fraco. Porém, será introduzido as definições básicas de convergência fraca e derivada fraca de forma sintética, apenas com o objetivo de fundamentar parte do resultado sobre estabilidade em BMO^{-1} na Seção 3.4.

Definição 1.16 (Convergência Fraca)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave.

1. Para $1 \leq p < +\infty$, seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$. Tem-se que f_n converge fracamente para f , e denota-se $f_n \rightharpoonup f$ se

$$\int_{\Omega} f_n \varphi \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in L^q(\Omega),$$

em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $q := +\infty$ se $p = 1$.

2. Para $p = +\infty$, seja (f_n) uma sequência em $L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^\infty(\Omega)$. Neste caso, escreve-se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ se

$$\int_{\Omega} f_n \varphi \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega),$$

As próximas proposições estabelecem propriedades básicas de existência de aproximação por convergência fraca no espaço L^p .

Proposição 1.18

Considere $1 < p < +\infty$, seja (f_n) uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$. Então temos a existência de uma subsequência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \rightharpoonup f$, isto é, converge fracamente para alguma $f \in L^p(\Omega)$.

Demonstração. Consultar a demonstração na referência [29].

■

Proposição 1.19

Seja (f_n) uma sequência limitada em $L^\infty(\Omega)$. Então temos a existência de uma subsequência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$ para alguma $f \in L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Consultar a demonstração na referência [29].

■

Como visto em derivadas distribucionais, temos o conceito de derivada fraca que generaliza a derivada para funções localmente integráveis, a partir da integração por partes.

Definição 1.17

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo. Seja $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice. Para qualquer $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, defina o operador diferencial ∂^α por

$$\partial^\alpha \phi := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi.$$

Definição 1.18 (Derivada fraca)

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. A função $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, é α -derivada fraca de f para o multi-índice α , se para cada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx,$$

em que $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$. Denota-se $\partial^\alpha f = g$.

Assim, podemos definir os espaços de Sobolev e suas normas como os espaços das funções que possuem derivada fraca. Esses espaços são de Banach como será visto na proposição a seguir.

Definição 1.19 (Espaço de Sobolev)

O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ consiste de todas as funções integráveis $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tais que para cada multi-índice α , de modo que $|\alpha| \leq k$, existe a derivada fraca $\partial^\alpha u$ e pertence a $L^p(\Omega)$.

Definição 1.20 (Norma do Espaço de Sobolev)

Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, define-se a norma como

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |\partial^\alpha u| & (p = \infty). \end{cases}$$

Proposição 1.20

Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, com sua respectiva norma, é um espaço de Banach.

Demonstração. Consulte a demonstração [8, §5.2.3].

■

Denote o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$ por $W_0^{k,p}(\Omega)$. Para $p = 2$ denote $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$, assim como $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$. O espaço dos funcionais limitados $f : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$, é denotado por $H^{-1}(\Omega)$.

Proposição 1.21

O espaço $H_0^1(\Omega)$ é de Hilbert com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx + \int_{\Omega} fg dx.$$

Como notação, temos as próximas definições de continuamente mergulhado e compactamente mergulhado, que são importantes nas desigualdades apresentadas a seguir sobre o mergulho dos espaços de Sobolev em espaços de Lebesgue.

Definição 1.21 (Continuamente Mergulhado)

Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Se a aplicação inclusão

$$\begin{aligned} i : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

é contínua, ou seja, se existe $C > 0$ constante tal que para cada $x \in X$

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X,$$

então X está continuamente mergulhado Y , denotando-se $X \hookrightarrow Y$.

Definição 1.22 (Compactamente Mergulhado)

Sejam X e Y espaços de Banach, de modo que $X \subset Y$. O espaço X está compactamente mergulhado em Y , e denota-se $X \subset\subset Y$, quando

1. $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$, para algum $C > 0$ constante e para todo $u \in X$;
2. Toda sequência em X limitada é pré-compacta em Y , ou seja, dada uma sequência $(u_k)_{k=1}^\infty$ em X com $\sup_k \|u_k\|_X < +\infty$, então existe alguma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ convergente em Y .

A próxima proposição estima uma função $W_0^{1,p}$ que permite definir uma norma mais simples para o espaço H_0^1 .

Proposição 1.22 (Desigualdade de Poincaré)

Para $p \in [1, \infty)$ e $u \in W_0^{1,p}$, existe $C > 0$ constante dependendo de Ω e p de modo que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Consulte a demonstração na referência [8, §5.6.1].

■

Corolário 1.3

Uma norma em $H_0^1(\Omega)$ pode ser definida como

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

para $u \in H_0^1(\Omega)$. Esta norma é equivalente a norma padrão de $H^1(\Omega)$.

As relações básicas entre os espaços de Sobolev e espaços de Lebesgue através de estimativas são apresentados nas próximas proposições.

Proposição 1.23 (Imersões de Sobolev)

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$ e $p \in [1, +\infty)$.

1. Se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$;
2. Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$.

Demonstração. Consulte a demonstração em [8, §5.6].

Proposição 1.24 (Rellich - Kondrachov)

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$ e $p \in [1, +\infty)$.

1. Se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$;
2. Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$.

Demonstração. Consulte a demonstração em [8, §5.7].

Como resultado particular do Teorema 1.24 temos

Proposição 1.25

O espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ está compactamente mergulhado em $L^2(\Omega)$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 1.24 com $p = 2$.

Com a transformada de Fourier pode-se generalizar o espaço de Sobolev. Para mais detalhes e estudo desses espaços consultar a referência [13, §6.2.]

Definição 1.23 (Espaços de Sobolev não Homogêneo)

Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 < p < +\infty$ os índices de regularidade e de integrabilidade, respectivamente. O espaço de Sobolev não homogêneo $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ é aquele formado por todas as $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$((1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u})^\vee \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, para cada $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, este espaço é de Banach munido com a norma

$$\|u\|_{W^{s,p}} = \|((1 + |\cdot|^2)^{s/2} \hat{u})^\vee\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Definição 1.24 (Espaços de Sobolev Homogêneo)

Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 < p < \infty$ os índices de regularidade e de integrabilidade, respectivamente. O espaço de Sobolev homogêneo, denotado por $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, é aquele formado por todas as $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ tais que

$$(|\xi|^s \hat{u})^\vee \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, para cada distribuição $u \in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, define-se a norma

$$\|u\|_{W^{s,p}} = \|(|\cdot|^s \hat{u})^\vee\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

munido com a qual, $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach. Também denotamos $\dot{H}^s = \dot{W}^{s,2}$ e \dot{H}^{-1} o dual de \dot{H}^1 .

1.4 Espaços de Hardy e BMO

O intuito dessa seção é introduzir os fatos básicos para definir os espaços de Hardy \mathcal{H}^p assim como sua decomposição atômica e por fim apresentar a relação de dualidade entre o espaço das funções com oscilação média limitada BMO e \mathcal{H}^1 . Os resultados e definições contidos nesta seção foram baseados da referência [32, §I.6., §III., §IV.].

Sejam f uma distribuição e $\Phi \in \mathcal{S}$ e considere ainda $\Phi_t(x) = t^{-n}\Phi(x/t)$ para $t > 0$. Denote

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}},$$

sendo Γ a função gama de Euler, e defina o núcleo de Poisson P_t por

$$P(x) = P_1 = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \quad P_t(x) = t^{-n}P(x/t).$$

Uma vez que $P \in L^1$, além da Definição 1.10, precisamos definir mais geralmente $f * P_t$ para f limitada. Sejam $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}$ então a convolução $f * h$ é a distribuição dada por

$$\langle f * h, \phi \rangle = \langle f * \tilde{\phi}, \tilde{h} \rangle = \int (f * \tilde{\phi})(x) \tilde{h}(x) dx.$$

Defina ainda $M_\Phi f(x)$ por

$$M_\Phi f(x) = \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|.$$

Sendo $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{\alpha_i, \beta_i}\}$ uma coleção finita de seminormas de \mathcal{S} , denote $\mathcal{S}_\mathcal{F}$ como o subconjunto de \mathcal{S} controlado por essa coleção \mathcal{F} de seminormas, isto é,

$$\mathcal{S}_\mathcal{F} = \{\Phi \in \mathcal{S} \mid \|\Phi\|_{\alpha_i, \beta_i} \leq 1, \text{ para toda } \|\cdot\|_{\alpha_i, \beta_i} \in \mathcal{F}\}.$$

Denote ainda

$$M_\mathcal{F} f(x) = \sup_{\Phi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}} M_\Phi f(x).$$

Por fim, sendo f uma distribuição limitada, sejam

$$\begin{cases} u(t, x) &= (f * P_t)(x), \\ u^*(x) &= \sup_{|x-y| \leq t} |u(t, y)|. \end{cases}$$

Considere todas as notações e definições na seguinte proposição

Proposição 1.26

Sejam f uma distribuição e $0 < p \leq \infty$. Então as condições abaixo são equivalentes

- Existe $\Phi \in \mathcal{S}$ tal que $\int \Phi dx \neq 0$ e $M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;
- Existe \mathcal{F} uma coleção de modo que $M_{\mathcal{F}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;
- A distribuição f é limitada e $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. A demonstração consta em [32, §III.1.].

■

Agora com todas essas preliminares podemos definir os espaços de Hardy. De fato, essa definição é denominada caracterização maximal de \mathcal{H}^p .

Definição 1.25 (Espaços de Hardy)

Os espaços de Hardy \mathcal{H}^p são constituídos pelas distribuições que satisfazem alguma das três propriedades equivalentes, e portanto todas, da Proposição 1.26.

Quando $1 < p \leq \infty$, então as condições são equivalentes com f ser uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Para $p = 1$ temos $\mathcal{H}^1 \subsetneq L^1$ e além disso uma condição para $f \in \mathcal{H}^1$ é de fato $\int f dx = 0$. (Essas observações são demonstradas na referência [32, III.1.]).

As funções de \mathcal{H} podem ser expressadas por funções denominada átomos, mais claramente,

Definição 1.26 (Átomos)

Associado a uma bola B , uma função a é denominada um átomo \mathcal{H}^1 se

- a possui o suporte em B ,
- $|a| \leq |B|^{-1}$ quase sempre, e
- $\int a dx = 0$.

Para $\Phi \in \mathcal{S}$ segue que

$$\|M_\Phi a\|_{L^1} \leq c,$$

com c independente de a e B . Em particular, $a \in \mathcal{H}^1$. Com essas observações podemos escrever para cada $f \in \mathcal{H}^1$

$$f = \sum_k \lambda_k a_k$$

com $\sum_k |\lambda_k| < \infty$ e a_k são átomos associados possivelmente com diferentes bolas B_k .

Agora vamos introduzir o espaço das funções de oscilação média limitada, denotado por BMO . Assim como o espaço \mathcal{H}^1 está relacionado com L^1 temos uma correspondência entre BMO e L^∞ .

Definição 1.27 (Espaço das Funções com Oscilação Média Limitada)

Uma função localmente integrável f pertence a BMO se

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx \leq A \quad (1.4)$$

para cada bola B de \mathbb{R}^n , em que $f_B = |B|^{-1} \int_B f dx$ é o valor médio de f na bola B e $A > 0$ uma constante. A norma $\|f\|_{BMO}$ é definido como o ínfimo das constantes A tal que a desigualdade (1.4) é satisfeita.

As funções limitadas são exemplos de funções em BMO . A próxima proposição mostra que BMO é o espaço dual de \mathcal{H}^1 .

Proposição 1.27

Considere o funcional linear contínuo ℓ sobre \mathcal{H}^1 dado por

$$\ell(g) = \int f(x)g(x) dx \quad (1.5)$$

para cada $g \in \mathcal{H}^1$, tal que a integral (1.5) converge, em que f é uma função de BMO . Além disso, seja \mathcal{H}_a^1 o subespaço de \mathcal{H}^1 formado pelas combinações lineares finitas de átomos \mathcal{H}^1 . Então temos as seguintes relações de dualidade

- Seja $f \in BMO$, então o funcional linear contínuo ℓ inicialmente definido em \mathcal{H}_a^1 tem um única extensão limitada em \mathcal{H}^1 e satisfaz para algum $c > 0$

$$\|\ell\| \leq c\|f\|_{BMO}.$$

- Reciprocamente, cada funcional linear contínuo ℓ sobre \mathcal{H}^1 pode escrito como em (1.5) com $f \in BMO$, e além disso, existe $c' > 0$ tal que

$$\|f\|_{BMO} \leq c'\|\ell\|.$$

Demonstração. A demonstração consta na referência [32, §IV. 1.2.].

■

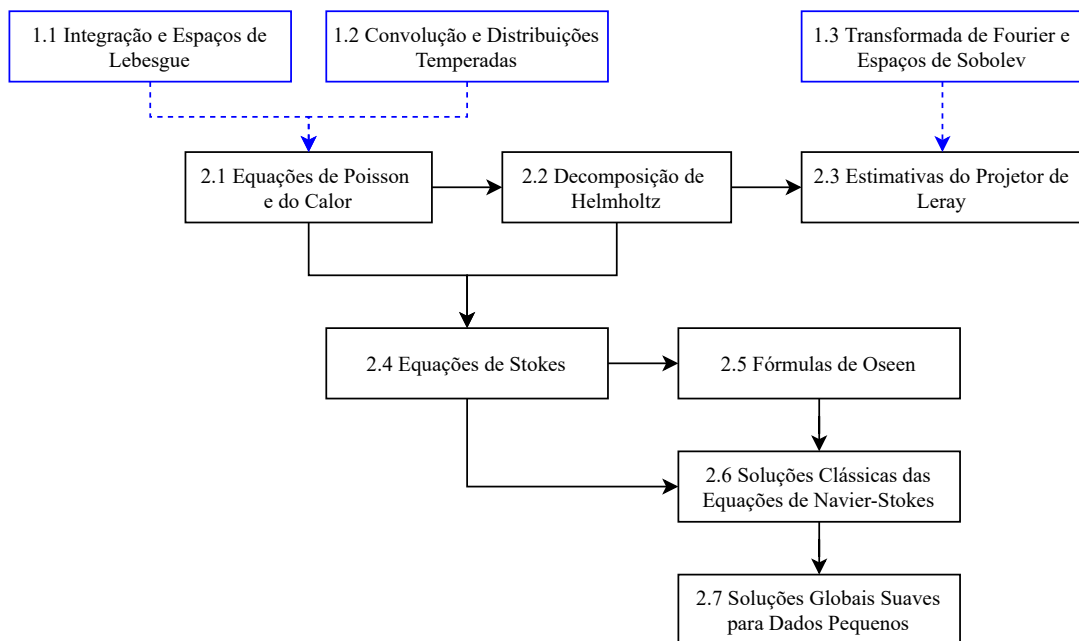
O espaço BMO será retomado na Seção 3.2 sob o ponto de vista da caracterização da medida de Carleson desse espaço.

Capítulo 2

Soluções Clássicas

O objetivo deste capítulo é uma abordagem das equações de Navier-Stokes utilizada no fim do século XIX e início do XX, a qual baseia-se apenas em algumas ferramentas clássicas do Cálculo Diferencial, tal como os trabalhos de Oseen [27],[28] e o desenvolvimento encontrado em Lemarié-Rieusset [22, §4].

De fato, o presente capítulo segue as referências [8], [20], [22] e [32]. Em síntese, o seguinte diagrama resume as relações entre as seções desse capítulo.



A seção 2.1 estuda a equação de Poisson e do calor como casos iniciais para ser aplicado nas equações de Stokes, seção 2.4, e posteriormente nas equações de Navier-Stokes 2.6.

As seções 2.2 e 2.3 definem a projeção de Leray que permite estudar as equações de Stokes e Navier-Stokes a partir dos resultados obtidos sobre equação do calor e de

Poisson. Já a seção 2.5 define a notação do tensor de Oseen cujas estimativas serão fundamentais na seção 2.6.

Na seção 2.6 será tratado o problema de valor inicial de Cauchy das equações de Navier-Stokes, considerando u_0 um campo de vetores com divergente livre em \mathbb{R}^3 , f uma força em $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ e $\nu > 0$ a viscosidade cinética. O objetivo é obter $T > 0$ e funções regulares u e p em $[0, T] \times \mathbb{R}^3$, sendo p a pressão e u o campo vetorial de velocidade, tais que

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Finalmente, na seção 2.7 como aplicação da demonstração da seção 2.6 é analisado as soluções globais para dados pequenos no sentido da norma.

2.1 Equações de Poisson e do Calor

O conteúdo desta seção está baseada nas referências [8, §2.3.] e [22, §4]. A primeira equação a ser estudada é a equação de Poisson. Para isso, definimos a função de Green dada como

$$G(x) = \frac{1}{4\pi|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

em que $|\cdot|$ é a norma euclidiana de \mathbb{R}^3 . O problema da equação de Poisson é encontrar solução u da equação $\Delta u = -u_0$, dada uma função inicial u_0 .

A análise dessa equação permitirá, na seção 2.2, decompor campos vetoriais como soma de um campo livre de divergência e de um campo irrotacional. De fato, temos a seguinte proposição sobre a solução desse problema.

Proposição 2.1 (Equação de Poisson)

Seja $u_0 \in C^1$ uma função em \mathbb{R}^3 tal que

$$\sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^\beta |\partial^\alpha u_0(x)| < +\infty \quad (2.2)$$

para algum $\beta \in (2, 3)$. Então a função

$$u = u_0 * G$$

é tal que $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e é solução clássica da equação de Poisson

$$\Delta u = -u_0.$$

Além disso, a solução satisfaz as seguintes propriedades de decaimento

1. $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\beta-2} |u(x)| < +\infty$;
2. $\sup_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\beta-1} |\partial^\alpha u(x)| < +\infty$.

Demonstração. Primeiramente, $u = u_0 * G$ está bem definida, assim como suas derivadas parciais visto que podemos estimar a convolução através da hipótese (2.2) e observar que o limite na origem existe. Assim, derivando a função $u = u_0 * G$ temos

$$\begin{aligned}\partial_j u &= u_0 * G_j, \\ \partial_i \partial_j u &= \partial_i u_0 * G_j,\end{aligned}$$

em que $G_j(x) = -\frac{x_j}{4\pi|x|^3}$. Dessa maneira,

$$\Delta u(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon < |y| < R} \sum_{j=1}^3 \partial_j u_0(x-y) G_j(y) dy. \quad (2.3)$$

Notemos que derivando o termo $u_0(x-y)G_j(y)$ em y segue que

$$\begin{aligned}\partial_j (u_0(x-y)G_j(y)) &= \partial_j u_0(x-y)G_j(y) + u_0(x-y)\partial_j G_j(y) \\ \Rightarrow \operatorname{div}(u_0(x-y)G_j(y)) &= \sum_{j=1}^3 \partial_j u_0(x-y)G_j(y) + u_0(x-y)\Delta G(y)\end{aligned} \quad (2.4)$$

Isolando a parcela do somatório em (2.4) e aplicando em (2.3), pelo Teorema da Divergência (Proposição 1.1, página 17), segue que

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\varepsilon^2 \int_{S^2} u_0(x - \varepsilon\sigma) \sum_{j=1}^3 \sigma_j G_j(\varepsilon\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad \left. - R^2 \int_{S^2} u_0(x - R\sigma) \sum_{j=1}^3 \sigma_j G_j(R\sigma) d\sigma + \int_{\varepsilon < |y| < R} u_0(x-y)\Delta G(y) dy \right).\end{aligned}$$

Como $\Delta G = 0$ em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ e $\sum_{j=1}^3 \sigma_j G_j(R\sigma) = -\frac{1}{4\pi R^2}$, então

$$\Delta u(x) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{S^2} u_0(x - \varepsilon\sigma) - u_0(x - R\sigma) d\sigma$$

e isso implica que $\Delta u(x) = -u_0(x)$, visto que $u_0(x - R\sigma) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow +\infty$. As estimativas de u e $\partial^\alpha u$ seguem de $U = u_0 * G$ e da hipótese inicial sobre u_0 . ■

Agora, passemos a equação do calor que possui uma parcela de derivada com relação ao tempo em comparação a equação de Poisson.

Defina $\Phi(x) = \pi^{-n/2} e^{-|x|^2}$ e $\Phi_t(x) = t^{-n} \Phi(x/t)$. Será denominado núcleo do calor h_t , em \mathbb{R}^n , a função dada por

$$h_t(x) = \Phi_{\sqrt{4t}}(x) = \frac{1}{(4t)^{n/2}} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}. \quad (2.5)$$

Usaremos ainda $h(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/4}$, e assim $h_t(x) = \frac{1}{t^{n/2}} h\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$.

As proposições a seguir descrevem as soluções clássicas da equação do calor.

Proposição 2.2 (Equação do Calor - homogênea)

Seja $u_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Então a função

$$u(t, x) = (h_t * u_0)(x)$$

é tal que $u \in \mathcal{C}^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{C}^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ e satisfaz, no sentido clássico, o problema de valor inicial da equação do calor homogênea em $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{em } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0, & \text{em } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Demonstração. Pela definição de u segue sua continuidade em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$. Por mudança de variáveis na convolução temos

$$u(t, x) = (h_t * u_0)(x) = \int h_t(x - y) u_0(y) dy = \int u_0(x - \sqrt{t}y) h(y) dy$$

e assim $u|_{t=0} = u_0$ e $u \in \mathcal{C}^\infty$ em $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$, visto que as derivadas de h_t decaem exponencialmente nas variáveis espaciais.

Como $(\partial_t - \Delta)u = u_0 * (\partial_t - \Delta)h_t$, afirmamos que $(\partial_t - \Delta)h_t = 0$. Com efeito, observando que $\partial_i h(x) = -\frac{x_i}{2} h(x)$ isso implica que

$$\partial_t \left(\frac{1}{t^{3/2}} h\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right) = -\frac{1}{t^{5/2}} \left(\frac{3}{2} - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{4t} \right) h\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

por outro lado também temos

$$\Delta \left(\frac{1}{t^{3/2}} h\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right) = -\sum_{i=1}^3 \partial_i \left(\frac{1}{2t^{5/2}} x_i h\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right) = \frac{1}{t^{5/2}} \left(\frac{3}{2} - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{4t} \right) h\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Portanto, a solução dada satisfaz o problema de valor inicial da equação de calor homogênea. ■

Proposição 2.3 (Equação do Calor - não homogênea)

Seja $f \in C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3) \cap C^1((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ uniformemente limitada com derivadas espaciais uniformemente limitadas. Então, temos que a função

$$u(t, x) = \int_0^t (h_{t-s} * f(s, \cdot))(x) ds$$

é tal que $u \in C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3) \cap C^1((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3) \cap C_x^2((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$. Além disso, a função u satisfaz, no sentido clássico, o problema de valor inicial da equação do calor não homogênea em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$, com dado inicial nulo, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, & \text{em } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = 0, & \text{em } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Demonstração. A demonstração é um caso particular da próxima Proposição 2.4 com $\nu = 1$ e $u_0 = 0$, a qual iremos fazer em seguida, e então preferimos postergar a presente prova para aquela parte. ■

Se $u_0 \in C^2$ ou $f \in C^2$ com derivadas limitadas, as soluções u da Proposição 2.2 e Proposição 2.3 são únicas na classe das funções contínuas de $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ com a propriedade de para todo $T > 0$

$$\sup_{0 < t < T, x \in \mathbb{R}^3, |\alpha| \leq 2} |\partial_x^\alpha u(t, x)| + |\partial_x^\alpha F(t, x)| < +\infty.$$

De fato, por linearidade basta mostrar que se $u_0 = 0$ e $f = 0$ então u é a função nula. Se $\partial_t u = \Delta u$ e $u|_{t=0} = 0$, então escrevendo

$$\frac{d}{dt} \int |u(t, x)|^2 e^{-|x|} dx = 2 \int u \partial_t u e^{-|x|} dx = 2 \int u \Delta u e^{-|x|} dx$$

e usando a integração por partes sem o termo da fronteira temos

$$2 \int u \Delta u e^{-|x|} dx = -2 \int |\nabla u|^2 e^{-|x|} dx + 2 \int u e^{-|x|} \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{|x|} \partial_j u dx.$$

Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 1.8, página 21, $p = q = 2$) em cada parcela do somatório, temos a estimativa para algum $C > 0$

$$2 \int u e^{-|x|} \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{|x|} \partial_j u dx \leq \frac{C}{2} \int |u(t, x)|^2 e^{-|x|} dx.$$

Logo, para algum $C' > 0$

$$\frac{d}{dt} \int |u(t, x)|^2 e^{-|x|} dx \leq C' \int |u(t, x)|^2 e^{-|x|} dx,$$

o que implica, usando a desigualdade de Grönwall ([8, §Appendix B]), que $\int |u(t, x)|^2 e^{-|x|} dx \leq e^{C't} \int |u(0, x)|^2 e^{-|x|} dx = 0$, e portanto $u \equiv 0$.

Continuando com os casos da equação do calor, podemos estender os dois problemas anteriores para obter um problema da equação do calor não homogênea, com valor inicial e com uma constante positiva na parcela do Laplaciano.

Proposição 2.4 (Equação do Calor Geral)

Sejam $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $f \in C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3) \cap C^1((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ uniformemente limitada com derivadas espaciais uniformemente limitadas. Então, para $\nu > 0$ fixado, a função

$$u = h_{\nu t} * u_0 + \int_0^t h_{\nu(t-s)} * f(s, \cdot) ds.$$

é tal que $u \in C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3) \cap C^1((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3) \cap C_x^2((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ e satisfaz, no sentido clássico, o problema de valor inicial da equação do calor geral com $\nu > 0$ em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u = f, & \text{em } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0, & \text{em } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Demonstração. Da expressão de u segue que $u|_{t=0} = h_0 * u_0 = u_0$. Note que $(\partial_t - \nu \Delta)(h_{\nu t} * u_0) = u_0 * (\partial_t - \nu \Delta)(h_{\nu t}) = 0$, visto que $(\partial_t - \nu \Delta)(h_{\nu t}) = 0$. Reescrevendo a expressão de u

$$\begin{aligned} u(t, x) &= h_{\nu t} * u_0 + \int_0^t \int h_{\nu(t-s)}(x - y) f(s, y) dy ds \\ &= h_{\nu t} * u_0 + w(t, x). \end{aligned}$$

em que $w(t, x) = \int_0^t \int h_{\nu s}(y) f(t - s, x - y) dy ds$. Usando a Regra de Leibniz para Integrais (Proposição 1.5, página 19) obtemos

$$\partial_t w(t, x) = \int_0^t \int h_{\nu s}(y) \partial_t f(t - s, x - y) dy ds + \int h_{\nu t}(y) \partial_t f(0, x - y) dy$$

e para cada $i, j = 1, 2, 3$

$$\partial_i \partial_j w(t, x) = \int_0^t \int h_{\nu s}(y) \partial_i \partial_j f(t - s, x - y) dy ds.$$

Calculando na expressão do problema

$$\begin{aligned} \partial_t w(t, x) - \nu \Delta w(t, x) &= \int_0^t \int h_{\nu s}(y) [(\partial_t - \nu \Delta_x) f(t - s, x - y)] dy ds + \\ &\quad + \int h_{\nu t}(y) f(0, x - y) dy \\ &= I_\varepsilon + J_\varepsilon + K. \end{aligned}$$

Em que

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int h_{\nu s}(y) [(-\partial_s - \nu \Delta_y) f(t-s, x-y)] dy ds \\ J_\varepsilon &= \int_0^\varepsilon \int h_{\nu s}(y) [(-\partial_s - \nu \Delta_y) f(t-s, x-y)] dy ds \\ K &= \int h_{\nu t}(y) f(0, x-y) dy \end{aligned}$$

Estimando J_ε através das hipóteses para f , temos

$$|J_\varepsilon| \leq (\|\partial_t f\|_{L^\infty} + \nu \|\partial^2 f\|_{L^\infty}) \int_0^\varepsilon \int h_{\nu s}(y) dy ds \leq \varepsilon C.$$

E para I_ε integramos por partes em s e observamos que h_s satisfaz a equação do calor homogênea (Proposição 2.2, página 41), então

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int h_{\nu s}(y) [(-\partial_s - \nu \Delta_y) f(t-s, x-y)] dy ds \\ &= \int_\varepsilon^t \int [(\partial_s - \nu \Delta_y) h_{\nu s}(y)] f(t-s, x-y) dy ds + \int h_{\nu \varepsilon}(y) f(t-\varepsilon, x-y) dy \\ &\quad - \int h_{\nu t}(y) f(0, x-y) dy \\ &= \int h_{\nu \varepsilon}(y) f(t-\varepsilon, x-y) dy - K. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int h_{\nu \varepsilon}(y) f(t-\varepsilon, x-y) dy = f(t, x).$$

■

2.2 Decomposição de Helmholtz

Seguindo a referência [22, §4], primeiramente, mantenhamos em mente os resultados sobre a equação de Poisson contidos na Proposição 2.1 (página 39). De posse deles, pode-se mostrar a famosa decomposição de Helmholtz para campos vetoriais, tão importante para a análise das equações de Navier-Stokes. Este é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 2.5 (Decomposição de Helmholtz)

Assuma que $F_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ é um campo vetorial de \mathbb{R}^3 satisfazendo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^\beta |\partial^\alpha F_0(x)| < +\infty$$

para todo $|\alpha| \leq 2$, e para algum $\beta \in (2, 3)$. Então existem únicos F e H campos de vetores C^1 e única função $p \in C^2$ em \mathbb{R}^3 tais que

1. $F_0 = F + H$;
2. F é solenoidal, isto é, livre de divergência: $\operatorname{div}(F) = 0$;
3. H é irrotacional: $\operatorname{rot}(H) = 0$, e além disso, $H = \nabla p$.

Além disso, temos as seguintes estimativas para F , H e p :

4. $\sup_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\beta-1} |\partial^\alpha F(x)| < +\infty$;
5. $\sup_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\beta-1} |\partial^\alpha H(x)| < +\infty$;
6. $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\beta-2} |p(x)| < +\infty$.

Demonstração. Para provar a unicidade suponha que existam dois pares de campos vetoriais (F_1, H_1) e (F_2, H_2) que satisfaçam os itens do enunciado.

Visto que $H_2 - H_1$ é irrotacional e \mathcal{C}^1 podemos escrever $H_2 - H_1 = \nabla q$ em que $q \in \mathcal{C}^2$, logo

$$\Delta q = \operatorname{div}(H_2 - H_1) = \operatorname{div}(F_1 - F_2) = 0.$$

Segue que q é uma função harmônica, bem como todas as suas derivadas. Além disso, as derivadas de q comportam-se como $O(|x|^{-\beta-2})$ no infinito. Portanto, as derivadas de q são iguais a 0 pelo Princípio do Máximo e, em particular, q é uma constante. Então, $F_1 - F_2 = H_2 - H_1 = 0$, o que nos leva a $H_1 = H_2$ e $F_1 = F_2$.

A existência pode ser provada resolvendo um problema de Poisson da seguinte forma: considere $H = \nabla p$, em que p é a solução de $\Delta p = \operatorname{div}(F_0)$, o que pode ser obtido via a Proposição 2.1. Tomando $F = F_0 - H$, obtemos que $F_0 = F + H$, $\operatorname{div}(F) = \operatorname{div}(F_0) - \operatorname{div}(H) = \operatorname{div}(F_0) - \Delta p = 0$ e $\operatorname{rot}(H) = \operatorname{rot}(\nabla p) = 0$, como desejado. ■

Assim, podemos definir uma projeção em campos vetoriais regulares tendo como resposta um campo vetorial livre de divergência. Esta é a célebre projeção de Leray, fundamental na análise das equações de Navier-Stokes, em particular na abordagem via soluções brandas (abordagem de semigrupo, Capítulo 3).

Definição 2.1 (Projeção de Leray)

Seja F_0 um campo vetorial suficientemente regular e considere a decomposição de Helmholtz $F_0 = F + H$, em que F é solenoidal e H irrotacional. Define-se a projeção de Leray $\mathbb{P} : F_0 \rightarrow F$ por

$$F = \mathbb{P}F_0.$$

A próxima seção caracteriza a projeção de Leray, bem como fornece algumas estimativas, através de multiplicadores de Fourier, que também é estudado através da transformada de Riesz, esse ponto de vista foi trabalhado, em particular, no trabalho de Kato [17].

2.3 Estimativas do Projetor de Leray

Como continuação sobre a projeção de Leray, serão enunciados algumas propriedades decorrentes da definição dada através dos multiplicadores de Fourier. As equações aqui obtidas são fundamentais para a demonstração do teorema de Koch-Tataru da seção 3.3, assim como na seção 3.2 sobre os espaços BMO^{-1} . Essa seção é baseada no trabalho de Koch-Tataru [20] e a referência [32, §IV].

Um operador integral singular T é um operador que pode ser expresso na forma

$$(Tf)(x) = \int K(x, y)f(y) dy,$$

em que a função núcleo K é singular quando $x = y$. Para operadores lineares limitados $T : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ que comutam com translações temos que existe uma função m limitada em \mathbb{R}^n , de modo que

$$\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Para esses e demais resultados consultar [32, §I]. A função m denomina-se multiplicador de Fourier. Além disso, para funções $f \in \mathcal{S}$, T pode ser escrito como convolução na forma

$$Tf = f * K$$

em que K é a distribuição dada por $\widehat{K} = m$.

Se tomarmos $m \in L^\infty$ então o correspondente operador será denotado por

$$m(D_x)u = (m\hat{u})^\vee \tag{2.6}$$

e é limitado em L^2 .

Proposição 2.6

Seja α um multi-índice e assumamos que o multiplicador de Fourier satisfaz

$$|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}.$$

1. Então, para cada multi-índice α , K definido por $\widehat{K} = m$ satisfaz a estimativa

$$|\partial_x^\alpha K(x)| \leq C'_\alpha |x|^{-n-|\alpha|}.$$

2. Se o multi-índice satisfaz $0 \leq |\alpha| \leq l$, em que $l = \lceil n/2 \rceil$, então K satisfaz

$$\int_{|x| \geq c|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq C,$$

para todo $y \neq 0$, em que $c > 1$.

Demonstração. A demonstração pode ser consultada em [32, §1, §6]. ■

Para multiplicadores m homogêneos de grau 0 e C^∞ longe da origem, temos o primeiro caso da Proposição 2.6.

Um exemplo de operador que satisfaz essa condição é a transformada de Riesz R_j , $j = 1, \dots, n$ definida por

$$R_j(f) = f * K_j,$$

em que $\widehat{K}_j(\xi) = \frac{\xi_j}{i|\xi|}$ e $K_j(x) = \frac{c_n x_j}{|x|^{n+1}}$, sendo $c_n > 0$ a constante definida na seção 1.4 na definição do núcleo de Poisson.

O operador projeção de Leray \mathbb{P} também pode ser definido pelo valor da matriz do multiplicador de Fourier

$$m(\xi) = \delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}. \tag{2.7}$$

Em essência, temos que $\mathbb{P} = I + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}$, sendo \mathcal{R} o vetor da transformada de Riesz, em outras palavras, $(\mathbb{P}f)_j = f_j + \sum_{1 \leq k \leq n} R_j R_k f_k$.

O multiplicador m do projetor de Leray satisfaz a condição de Mihlin-Hörmander

$$\sup_{\xi \neq 0} |\xi|^{|\alpha|} |\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq C \tag{2.8}$$

para algum $C > 0$ e para cada multi-índice α e assim a projeção de Leray pode ser entendido como um operador integral singular. Além disso, para Φ definido em (2.5), temos que

$$|(\mathbb{P}\Phi(x))| \leq c(1 + |x|)^{-n}.$$

Denotaremos o semigrupo do calor por $S(t)$ definido por

$$(S(t)u_0)(x) = (h_t * u_0)(x). \tag{2.9}$$

Usando *scaling* para a função $\Phi_{\sqrt{4t}}$, obtemos que o núcleo $k_t(x) = \mathbb{P}\Phi_{\sqrt{4t}}$ de $\mathbb{P}S(t)$ satisfaz

$$|\mathbb{P}\Phi_{\sqrt{4t}}| \leq c(\sqrt{t} + |x|)^{-n}.$$

Para o núcleo de $\mathbb{P} \nabla S(t)$, um procedimento similar leva-nos a estimativa de

$$|\mathbb{P} \nabla \Phi_{\sqrt{4t}}(x)| \leq c(\sqrt{t} + |x|)^{-n-1}, \quad (2.10)$$

visto que $\int \nabla \Phi dx = 0$, e assim compensando a singularidade do projetor de Leray de $\nabla \Phi_{\sqrt{4t}}$ na origem. De fato, apesar da singularidade de \mathbb{P} temos que $\widehat{\nabla \Phi}(0) = \int \nabla \Phi dx = 0$.

No caso do núcleo do operador $\mathbb{P}(I - S(t))$, temos a estimativa

$$|\mathbb{P}(\delta_0 - \Phi_{\sqrt{4t}})| \leq ct|x|^{-n-2} \quad (2.11)$$

pois $\int (\delta_0 - \Phi_t) dx = 0$ e $\int x_i(\delta_0 - \Phi_t) dx = 0$, o que permite um controle da singularidade na origem em variáveis de Fourier.

Considere $a \in C_0^\infty(B(0; 1))$ e seja $S(-t)a(t^{1/2}D_x)$. O núcleo k_t associado ao operador $S(-t)a(t^{1/2}D_x)$ é uma função de Schwartz e, usando *scaling*, pode-se mostrar que

$$|k_t(x)| \leq c_N t^{-n/2} \left(1 + \frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{-N}, \quad (2.12)$$

para todo $N \geq 1$.

2.4 Equações de Stokes

Seguindo o desenvolvimento de [22, §4], vamos introduzir nesta seção as equações de Stokes. Em síntese, as equações de Stokes são as equações de Navier-Stokes sem a parcela bilinear (i.e., as equações de Stokes são a parte linear das equações de Navier-Stokes), mas especificamente, dado um campo vetorial livre de divergência u_0 em \mathbb{R}^3 e uma força f em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$, o objetivo é encontrar funções regulares u e p em $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ tais que são soluções, no sentido clássico, de

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Proposição 2.7 (Equações de Stokes)

Sejam $u_0 \in \mathcal{C}^2$ um campo vetorial de \mathbb{R}^3 e f um campo vetorial dependente do tempo tal que se $|\alpha| \leq 2$, então $\partial_x^\alpha f$ é contínua em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$, e além disso, cumpre as seguintes estimativas

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |\partial^\alpha u_0(x)| < +\infty \quad e \quad \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^\beta |\partial^\alpha f(t, x)| < +\infty,$$

para algum $\beta \in (2, 3)$. Então existe única solução (u, p) para as equações de Stokes (2.13), de modo que

1. se $|\alpha| \leq 2$, então $\partial_x^\alpha p \in \mathcal{C}^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$;
2. se $|\alpha| \leq 2$, então $\partial_x^\alpha u \in \mathcal{C}^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ e limitada em cada faixa $(0, T) \times \mathbb{R}^3$;
3. $\partial_t u \in \mathcal{C}^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$.

Ademais, satisfaz as seguintes estimativas de decaimento

4. $\sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\beta-2} |p(t, x)| < +\infty$;
5. $\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\beta-1} |\partial_x^\alpha p(t, x)| < +\infty$ para algum $\beta \in (2, 3)$.

Demonstração. Seja a decomposição de Helmholtz de f dada por $f = F + H$ em que F tem divergência livre e $H = \nabla q$ é irrotacional. Aplicando a projeção de Leray na primeira equação de (2.13) (página 48), obtemos

$$\partial_t u - \nu \Delta u = F \quad \text{e} \quad 0 = \nabla q - \nabla p. \quad (2.14)$$

Portanto, p é determinada pela equação de Poisson $\Delta p = \operatorname{div}(f)$ e u é solução da equação do calor geral tendo como valor inicial u_0 e termo de força $F = \mathbb{P}f$. Assim, pelas Proposições 2.4 (página 43), 2.1 (página 39) e 2.5 (página 44) segue o resultado, visto que resolvendo a equação do calor e a equação de Poisson associadas ao problema temos

$$\begin{cases} p(t, x) = -\frac{1}{4\pi|x|} * \operatorname{div} f(t, x) = -\sum_{j=1}^3 \partial_j G * f_j(t, x), \\ u(t, x) = h_{\nu t} * u_0(x) + \int_0^t h_{\nu(t-s)} * (f(s, x) - \nabla p(s, x)) ds, \end{cases} \quad (2.15)$$

e as estimativas para p são análogas as da Proposição 2.1 (página 39). ■

2.5 Fórmulas de Oseen

Como continuidade da seção anterior, e tendo como base as referências [21] e [22], vamos estudar o tensor de Oseen que permite reescrever a expressão de u substituindo p , obtidas na proposição anterior. De fato, retomando a Proposição 2.7 (página 48), a solução (u, p) das equações de Stokes (2.13) (página 48) é dada por (2.15)

$$\begin{cases} p(t, x) = -\frac{1}{4\pi|x|} * \operatorname{div} f(t, x) = -\sum_{j=1}^3 \partial_j G * f_j(t, x), \\ u(t, x) = h_{\nu t} * u_0(x) + \int_0^t h_{\nu(t-s)} * (f(s, x) - \nabla p(s, x)) ds. \end{cases}$$

Assim, a k -coordenada de u é dada por

$$u_k = h_{\nu t} * u_{0,k} + \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \left(f_k + \partial_k \sum_{j=1}^3 \partial_j G * f_j \right) ds.$$

Por sua vez, podemos escrever a expressão dentro da integral, de modo a isolar as coordenadas de f , para obter

$$h_{\nu(t-s)} * \left(f_k + \partial_k \sum_{j=1}^3 \partial_j G * f_j \right) = \sum_{j=1}^3 f_j * (\delta_{j,k} h_{\nu(t-s)} + G * \partial_j \partial_k h_{\nu(t-s)}).$$

Motivado pelo desenvolvimento acima, define-se o Tensor de Oseen, como segue:

Definição 2.2 (Tensor de Oseen)

O tensor de Oseen é denotado por $(O_{j,k}(\nu t, x))_{1 \leq j, k \leq 3}$ e dado por

$$O_{j,k}(\nu t, x) = \delta_{j,k} h_{\nu t} + G * \partial_j \partial_k h_{\nu t}.$$

Denotando também $O_{j,k}(x) = O_{j,k}(1, x)$, então

$$O_{j,k}(\nu t, x) = \frac{1}{(\nu t)^{3/2}} O_{j,k} \left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}} \right).$$

O manuseio direto das expressões na Definição 2.2, por vezes, pode ser difícil. Na próxima proposição, apresentamos as famosas fórmulas de Oseen, as quais contêm expressões e expansões assintóticas bastante úteis na análise das equações de Stokes e, sua contrapartida não-linear, as equações de Navier-Stokes.

Proposição 2.8 (Fórmulas de Oseen)

O tensor de Oseen é equivalente à igualdade

$$O_{j,k}(x) = \delta_{j,k} h(x) + 2\partial_j \partial_k \left(\frac{1}{(4\pi)^{3/2} |x|} \int_0^{|x|} e^{-s^2/4} ds \right).$$

1. Quando x está próximo de 0, temos a expressão

$$O_{j,k}(x) = \delta_{j,k} h(x) + 2\partial_j \partial_k \left(\int_0^1 h(\theta x) d\theta \right);$$

2. E, para quando x se aproxima do infinito,

$$O_{j,k}(x) = \partial_j \partial_k \left(\frac{1}{4\pi |x|} \right) + \delta_{j,k} h(x) - 2\partial_j \partial_k \left(\frac{1}{(4\pi)^{3/2} |x|} \int_{|x|}^{\infty} e^{-s^2/4} ds \right). \quad (2.16)$$

Demonstração. Primeiramente, pela definição e notação do núcleo do calor e do tensor de Oseen, temos

$$O_{j,k}(x) = \delta_{j,k} h(x) + \partial_j \partial_k (G * h).$$

A função $G * h = \Phi$ é radial: $\Phi(x) = F(|x|)$, e satisfaz

$$-\Delta\Phi = h(x) = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} e^{-|x|^2/4} = H(|x|).$$

Com essas observações, note que podemos escrever

$$\begin{aligned} F''(r) + \frac{2}{r}F'(r) &= -H(r) \\ \Rightarrow (rF)'' &= -rH(r) = 2H'(r). \end{aligned}$$

Portanto, $F(r) = \frac{A}{r} + B + \frac{2}{r} \int_0^r H(s) ds$. Como Φ é limitado próximo de 0 e se anula no limite ao infinito, então $A = B = 0$.

Por fim, a última equação, para quando x se aproxima do infinito, é obtida pela primeira observando que $\frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^{|x|} e^{-s^2/4} = 1 - \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \int_{|x|}^{\infty} e^{-s^2/4}$. ■

Finalizamos esta seção com um corolário contendo estimativas de decaimento para o Tensor de Oseen.

Corolário 2.1

O tensor de Oseen $O_{j,k}$ é de classe C^∞ e satisfaz as seguintes estimativas

1. $|\partial^\alpha O_{j,k}(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{-3-|\alpha|}$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^3$;
2. $|\partial^\alpha (O_{j,k}(x) - \partial_j \partial_k G(x))| \leq C_\alpha e^{-|x|^2/8}$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^3$ e $|x| > 1$,

em que G é a função de Green $G(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$.

Demonstração. A primeira estimativa é demonstrada mais geralmente em [21, Proposition 11.1]. Para a segunda, usamos a expressão (2.16) (página 50). ■

2.6 Soluções Clássicas das Equações de Navier-Stokes

Ainda seguindo o desenvolvimento de Lemarié-Rieusset [22], vamos estudar nesta seção, e na próxima, as soluções clássicas das equações de Navier-Stokes e soluções globais para dados pequenos. Tomando a força f nas equações de Stokes como $f - (u \cdot \nabla)u$ e usando as fórmulas de Oseen, pode-se escrever e então analisar as equações de Navier-Stokes na sua forma integral. Com efeito, os detalhes são desenvolvidos a seguir.

Considere um campo vetorial u_0 tal que $\operatorname{div}(u_0) = 0$ em \mathbb{R}^3 e f uma força em $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$. O objetivo é encontrar $T > 0$ e funções regulares u e p em $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ tais que

$$u_k = h_{\nu t} * u_{0,k} + \int_0^t \sum_{j=1}^3 \mathcal{O}_{j,k}(\nu(t-s), \cdot) * (f_j - (u \cdot \nabla)u_j) ds$$

para $k = 1, 2, 3$ e

$$p(t, x) = - \sum_{j=1}^3 (f_j - (u \cdot \nabla)u_j) * \partial_j G.$$

Seja $A = (a_{j,k})_{1 \leq j, k \leq 3}$ uma matriz abstrata formada por funções a_{ij} e $f = (f_1, f_2, f_3)$ um campo vetorial. Usaremos a notação $::$ para representar o vetor com coordenadas $(A :: f)_k = \sum_{j=1}^3 a_{j,k} * f_j$. Assim, escrevendo $g = \mathcal{O}(\nu(t-s)) :: f$ como o vetor com coordenadas $g_k = \sum_{j=1}^3 \mathcal{O}_{j,k}(\nu(t-s)) * f_j$, o problema agora fica na forma

$$u = v_0 - \int_0^t \mathcal{O}(\nu(t-s)) :: (u \cdot \nabla)u ds, \quad (2.17)$$

em que

$$v_0 = h_{\nu t} * u_0 + \int_0^t \mathcal{O}(\nu(t-s)) :: f ds.$$

Seguindo uma ideia devido a Oseen ([27],[28]), primeiro resolve-se a equação com um parâmetro adicional ε

$$u_\varepsilon = v_0 - \varepsilon \int_0^t \mathcal{O}(\nu(t-s)) :: (u_\varepsilon \cdot \nabla)u_\varepsilon ds,$$

e, depois, procura-se a solução u_ε em termos de séries de potências em ε . Mais precisamente, escrevemos

$$u_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n.$$

E como $v_n = \left. \frac{\partial_\varepsilon^n u_\varepsilon}{n!} \right|_{\varepsilon=0}$ obtemos uma sequência de equações de Stokes dada por

$$v_{n+1} = - \sum_{k=0}^n \int_0^t \mathcal{O}(\nu(t-s)) :: (v_k \cdot \nabla)v_{n-k} ds,$$

e desse modo obtemos a sequência de equações diferenciais

$$\begin{cases} \partial_t v_0 = \nu \Delta v_0 + f - \nabla q_0, \\ \operatorname{div}(v_0) = 0, \\ v_0|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} \partial_t v_{n+1} = \nu \Delta v_{n+1} + \sum_{k=0}^n (v_k \cdot \nabla) v_{n-k} - \nabla q_{n+1}, \\ \operatorname{div}(v_{n+1}) = 0, \\ v_{n+1}|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

em que q_0 e q_{n+1} são as funções associadas a decomposição de Helmholtz, como descrito em (2.14) (página 49) e que faz o papel da pressão para cada termo da sequência de sistemas de equações diferenciais anterior.

Notemos que resolver o problema na forma (2.17) (página 52) segue em particular quando $\varepsilon = 1$, e assim, $u = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$. Portanto, para encontrar a solução clássica das equações de Navier-Stokes (2.1) (página 39), é suficiente encontrar $T > 0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{0 \leq t \leq T, \\ x \in \mathbb{R}^3, |\alpha| \leq 2}} |\partial_x^\alpha v_n(t, x)| < +\infty \quad (2.20)$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{0 \leq t \leq T, \\ x \in \mathbb{R}^3, |\alpha| \leq 1}} |\partial_x^\alpha q_n(t, x)| < +\infty. \quad (2.21)$$

Em particular, com isso obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{0 \leq t \leq T, \\ x \in \mathbb{R}^3}} |\partial_t^\alpha v_n(t, x)| < +\infty. \quad (2.22)$$

O próximo teorema fará o trabalho de estabelecer essas ideias.

Teorema 2.1 (Equações de Navier-Stokes)

Sejam $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ um campo vetorial e f um campo vetorial dependente do tempo tal que se $|\alpha| \leq 2$, então $\partial_x^\alpha f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ é contínua, e além disso, cumpre as estimativas

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |\partial^\alpha u_0(x)| < +\infty \quad e \quad \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^4 |\partial^\alpha f(t, x)| < +\infty.$$

Então existe um tempo $T > 0$ e única solução (u, p) para as equações de Navier-Stokes (2.1) (página 39) tais que

1. se $|\alpha| \leq 2$, então $\partial_x^\alpha p \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{R}^3)$;
2. se $|\alpha| \leq 2$, então $\partial_x^\alpha u \in \mathcal{C}^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$;
3. $\partial_t u \in \mathcal{C}^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$.

Além disso, temos as estimativas

$$4. \sup_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |\partial_x^\alpha p(t, x)| < +\infty;$$

$$5. \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |\partial_x^\alpha u(t, x)| < +\infty.$$

Demonstração.

A ideia da demonstração é estimar a norma dos campos vetoriais v_n dados por (2.18) (página 52) e (2.19) (página 53). Assim, retomando essa sequência de equações diferenciais, temos $n \geq 0$

$$\begin{cases} \partial_t v_n = \nu \Delta v_n + \sum_{j=0}^3 \partial_j g_{j,n} - \nabla q_n, \\ \operatorname{div}(v_n) = 0, \\ v_n|_{t=0} = \delta_{n,0} u_0. \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} g_{j,0} &= -f * \partial_j G, \\ g_{j,n+1} &= -\sum_{k=0}^n v_{j,k} \cdot v_{n-k}. \end{cases}$$

Na forma integral temos

$$v_n = \delta_{n,0} h_{\nu t} * u_0 + \sum_{j=1}^3 \int_0^t \partial_j \mathcal{O}(\nu(t-s)) :: g_{j,n} ds. \quad (2.23)$$

Logo, queremos estimar

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |v_n(t, x)| &\leq \delta_{n,0} \sup_{0 \leq t \leq T} |h_{\nu t} * u_0(x)| + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \int \sup_{0 \leq t \leq T} |g_{j,n}(t, y)| \left(\int_0^t |\partial_j \mathcal{O}(\nu(t-s), x-y)| ds \right) dy. \end{aligned}$$

Pelas fórmulas de Oseen (Proposição 2.8, página 50 e Corolário 2.1, página 51), temos para $0 \leq \delta < 1$,

$$|\partial_j \mathcal{O}(\nu(t-s), x-y)| \leq C \frac{1}{\nu^2(t-s)^2 + |x-y|^4} \leq C \frac{t^\delta}{(t-s)^\delta} \frac{1}{\nu^2(t-s)^2 + |x-y|^4} \quad (2.24)$$

visto que $(t-s)^\delta \leq t^\delta$, e assim aplicando a integral em s

$$\int_0^t |\partial_j \mathcal{O}(\nu(t-s), x-y)| ds \leq C t^\delta \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu^2 \theta^2 + |x-y|^4} \frac{d\theta}{\theta^\delta},$$

e aplicando a mudança de variáveis $\bar{\theta} = \frac{\nu}{|x-y|^2} \theta$ segue que

$$C t^\delta \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu^2 \theta^2 + |x-y|^4} \frac{d\theta}{\theta^\delta} = C'_\delta \frac{\nu^\delta t^\delta}{\nu |x-y|^{2+2\delta}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\bar{\theta}^2 + 1) \bar{\theta}^\delta} d\bar{\theta} = C_\delta \frac{\nu^\delta t^\delta}{\nu |x-y|^{2+2\delta}}.$$

Em síntese, o que temos agora é

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |v_n(t, x)| &\leq \delta_{n,0} \sup_{0 \leq t \leq T} |h_{\nu t} * u_0(x)| + \\ &+ C_\delta \frac{\nu^\delta T^\delta}{\nu} \sum_{j=1}^3 \int \sup_{0 \leq t \leq T} |g_{j,n}(t, y)| \frac{1}{|x-y|^{2+2\delta}} dy. \end{aligned}$$

Analogamente, para $|\alpha| \leq 2$ temos

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |\partial_x^\alpha v_n(t, x)| &\leq \delta_{n,0} \sup_{0 \leq t \leq T} |h_{\nu t} * \partial_x^\alpha u_0(x)| + \\ &+ C_\delta \frac{\nu^\delta T^\delta}{\nu} \sum_{j=1}^3 \int \sup_{0 \leq t \leq T} |\partial_x^\alpha g_{j,n}(t, y)| \frac{1}{|x-y|^{2+2\delta}} dy. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nos próximos passos será estimado por indução de forma mais explícita a norma de v_n e de suas derivadas, e para isso primeiramente será estimado cada parcela da expressão anterior.

- **Estimativa de $h_{\nu t} * \partial_x^\alpha u_0$.**

Seja $K(x) = \sup_{t>0} \int h_{\nu t}(x-y) \frac{dy}{1+|y|}$, então $\|K\|_\infty \leq 1$. Além disso, para $|x| > 2$ temos $\int_{|y|>|x|/2} h_{\nu t}(x-y) \frac{dy}{1+|y|} \leq \frac{2}{|x|}$, visto que $|y| > |x|/2 \Rightarrow \frac{1}{1+|y|} \leq \frac{2}{|x|}$. Por outro lado, $h_{\nu t}(x) \leq C \frac{1}{|x|^3}$ implica

$$\int_{|y|<|x|/2} h_{\nu t}(x-y) \frac{dy}{1+|y|} \leq C \frac{8}{|x|^3} \int_{|y|<|x|/2} \frac{dy}{|y|} \leq C' \frac{1}{|x|}.$$

Portanto, $K(x) \leq C \frac{1}{1+|x|}$. Com isso, podemos estimar $h_{\nu t} * \partial_x^\alpha u_0(x)$, multiplicando por $(1+|x|)^{-1}(1+|x|)$ dentro da convolução e usando propriedade de supremo

$$\sup_{t \leq 0} |h_{\nu t} * \partial_x^\alpha u_0(x)| \leq CK(x) \sup_{y \in \mathbb{R}^3} (1+|y|) |\partial_x^\alpha u_0(y)|.$$

- **Estimativa de $\partial_x^\alpha g_{j,0}$.**

Relembrando que $g_{j,0} = -f * \partial_j G$, seja $I(x) = \int \frac{1}{(1+|y|)^4} \frac{dy}{|x-y|^2}$. Segue que $I(x) \leq C \frac{1}{(1+|x|)^2}$ e como $\partial_j G(x) = -\frac{x_j}{4\pi|x|^3} [(1+|y|)^4|x-y|^2]^{-1} [(1+|y|)^4|x-y|^2]$, podemos estimar

$$\sup_{t \geq 0} |\partial_x^\alpha g_{j,0}(t, x)| \leq CI(x) \sup_{t \geq 0, y \in \mathbb{R}^3} (1+|y|)^4 |\partial_x^\alpha f(t, y)|. \quad (2.26)$$

- **Estimativa de $\partial_x^\alpha v_0$.**

Tomando $n = 0$ em (2.25) (página 55), podemos usar as estimativas anteriores. De fato, sejam

$$A_0 = \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} (1 + |y|) |\partial_x^\alpha u_0(y)|,$$

$$B_0 = \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{t \geq 0, y \in \mathbb{R}^3} (1 + |y|)^4 |\partial_x^\alpha f(t, y)|,$$

então

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{t \geq 0} |\partial_x^\alpha v_0(t, x)| \leq CA_0 \frac{1}{1 + |x|} + C \frac{B_0}{\nu} \int \frac{1}{1 + |y|^2} \frac{dy}{|x - y|^2}.$$

Segue que

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{t \geq 0} |\partial_x^\alpha v_0(t, x)| \leq C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \frac{1}{1 + |x|}$$

em que C_0 não depende de u_0 nem de f , ou ν .

• **Estimativa de $\partial_x^\alpha v_n$ e $\partial_x^\alpha g_{j,n+1}$.**

A ideia é mostrar, por indução, que para $0 \leq \delta < 1/2$ existe K_δ constante que depende apenas de δ de modo que para todo $T > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq T} |\partial_x^\alpha v_n(t, x)| \leq \frac{\left(K_\delta \frac{\nu^\delta T^\delta}{\nu} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \right)^n}{(1 + n)^4} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \frac{1}{1 + |x|}. \quad (2.27)$$

Para $n = 0$ é verdade pelo passo anterior. Suponha que é verdade para $n = 0, \dots, N$, então mostraremos que vale para $n = N + 1$. Com efeito, visto que $g_{j,N+1} = -\sum_{k=0}^N v_{j,k} \cdot v_{N-k}$ e como estamos interessados em derivadas com $|\alpha| \leq 2$ (o que justifica a constante 4 na expressão abaixo), então com a estimativa anterior, segue que

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq T} |\partial_x^\alpha g_{j,N+1}(t, x)| \leq 4D_{N+1} \left(C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \right)^2 \frac{1}{(1 + |x|)^2},$$

em que

$$D_{N+1} = \sum_{k=0}^N \frac{\left(K_\delta \frac{\nu^\delta T^\delta}{\nu} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \right)^k}{(1 + k)^4} \frac{\left(K_\delta \frac{\nu^\delta T^\delta}{\nu} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \right)^{N-k}}{(1 + (N - k))^4}.$$

Isolando o que não depende de k no somatório temos

$$\begin{aligned} D_{N+1} &= \left(K_\delta \frac{\nu^\delta T^\delta}{\nu} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \right)^N \sum_{k=0}^N \frac{1}{(1 + k)^4} \frac{1}{(1 + (N - k))^4} \\ &= \left(K_\delta \frac{\nu^\delta T^\delta}{\nu} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \right)^N \cdot 2 \sum_{k=0}^{N/2} \frac{1}{(1 + k)^4} \frac{1}{(1 + (N - k))^4} \\ &\leq \left(K_\delta \frac{\nu^\delta T^\delta}{\nu} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \right)^N \frac{32}{(N + 2)^4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}. \end{aligned}$$

Visto que $1 + (N - k) \geq N/2 + 1$, para $k \leq N/2$. Escrevendo $C_1 = 32 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$, e estimando (2.25) (página 55) para $N + 1$ temos

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq T} |\partial_x^\alpha v_{N+1}(t, x)| \leq J(x) C_1 C_\delta K_\delta^N \frac{\left(\frac{\nu^\delta T^\delta}{\nu} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \right)^{N+1}}{(N+2)^4} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right)$$

com

$$J(x) = \int \frac{1}{|x-y|^{2+2\delta}} \frac{dy}{(1+|y|)^2} \leq D_\delta \frac{1}{(1+|x|)^{1+2\delta}} \leq D_\delta \frac{1}{(1+|x|)},$$

observando que $1 < 2 + 2\delta < 3$. Isso finaliza a demonstração da afirmação por indução, tomando $K_\delta = C_1 C_\delta D_\delta$.

• **Estimativa de $\partial_x^\alpha q_n$.**

Para estimar q_n e suas derivadas escrevemos primeiramente, a partir da expressão da pressão (2.15) (página 49) para as equações (2.19) (página 53), que

$$\partial_x^\alpha q_n = - \sum_{j=1}^3 \partial_x^\alpha g_{j,n} * \partial_j G,$$

e assim

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq T} |\partial_x^\alpha q_n(t, x)| \leq C \frac{\left(K_\delta \frac{\nu^\delta T^\delta}{\nu} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \right)^n}{(1+n)^4} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \frac{1}{1+|x|}.$$

Tomando, por exemplo, $\delta = 1/4$ e T suficientemente pequeno temos

$$K_{1/4} \frac{T^{1/4}}{\nu^{3/4}} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \leq 1, \tag{2.28}$$

com isso temos, portanto, a convergência normal de $\sum_{n=0}^{+\infty} \partial_x^\alpha v_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \partial_x^\alpha q_n$, isto é, as limitações (2.20), (2.21) e (2.22) (página 53) e isso finaliza a demonstração. ■

O resultado e desenvolvimentos acima, mostram-nos o nível de regularidade que os dados iniciais e soluções devem ter para a construção de soluções conectadas a uma noção de "soluções clássicas". Motivado por isso e com a intenção de formalizar essas noções, temos as seguintes duas definições abaixo:

Definição 2.3 (Dado Regular)

Um dado regular para o problema de valor inicial das equações de Navier-Stokes é formado por um campo vetorial $u_0 \in \mathcal{C}^2$ em \mathbb{R}^3 e um campo vetorial dependente do tempo $f(t, x)$ tal que $\partial_x^\alpha f$ é contínua em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$, para $|\alpha| \leq 2$ e além disso satisfazem as estimativas

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1+|x|) |\partial_x^\alpha u_0(x)| < +\infty \quad \text{e} \quad \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1+|x|)^4 |\partial_x^\alpha f(t, x)| < +\infty.$$

Definição 2.4 (Soluções Clássicas de Navier-Stokes)

Uma solução clássica das equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

associada ao dado regular (u_0, f) é uma solução (u, p) tal que existe um tempo $T > 0$ e

1. se $|\alpha| \leq 2$, então $\partial_x^\alpha p$ é contínua em $[0, T] \times \mathbb{R}^3$;
2. se $|\alpha| \leq 2$, então $\partial_x^\alpha u$ é contínua em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$;
3. $\partial_t u$ é contínua em $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$.

E cumpre as estimativas

4. $\sup_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |\partial_x^\alpha p(t, x)| < +\infty$;
5. $\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |\partial_x^\alpha u(t, x)| < +\infty$.

2.7 Soluções Globais Suaves para Dados Pequenos

No Teorema 2.1 (página 53), obtivemos a existência de solução clássica até um certo tempo de existência $T > 0$, suficientemente pequeno, e sem assumir restrições de tamanho no dado inicial. Se conseguíssemos obter $T = \infty$ no Teorema 2.1, teríamos consequentemente resolvido o Problema do Milênio do *Clay Mathematics Institute*. Entretanto, as estimativas obtidas na prova do Teorema 2.1 não parecem ser promissoras neste sentido. Um aspecto que emerge é a dependência das estimativas em relação ao tempo de existência T . Alternativamente, assumindo uma condição de pequenez nos dados u_0 e f e adaptando a demonstração do Teorema 2.1, podemos obter soluções clássicas globais, isto é, sem restrição no tempo de existência T . Este é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 2.2 (Soluções Globais)

Considerando a Definição 2.3 (página 57), temos que existe uma constante ε_0 tal que, se

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |\partial_x^\alpha u_0(x)| < \varepsilon_0 \nu \quad e \quad \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^4 |\partial_x^\alpha f(t, x)| < \varepsilon_0 \nu^2,$$

então a solução clássica (u, p) associada ao dado regular (u_0, f) é definida para todo tempo $t \in \mathbb{R}^+$ e satisfaz

1. $\sup_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |\partial_x^\alpha p(t, x)| < +\infty$;

$$2. \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |\partial_x^\alpha u(t, x)| < +\infty.$$

Demonstração. Na demonstração do Teorema 2.1 (página 53) foi escolhido $\delta = 1/4$, então $\lim_{T \rightarrow 0} T^\delta = 0$, e obtemos a desigualdade (2.28) (página 57), para T suficientemente pequeno. Se tomarmos $\delta = 0$, a condição sobre os parâmetros e constantes torna-se

$$K_0 \frac{1}{\nu} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \leq 1, \quad (2.29)$$

a qual não depende do tempo de existência T . Além disso, não é difícil ver que (2.29) (página 59) é satisfeita quando A_0 e B_0 são suficientemente pequenos. Assim, lembrando a demonstração do Teorema 2.1 e as constantes A_0 e B_0 , e tomando ε_0 suficientemente pequeno, obtemos (2.29) e o resultado desejado, tendo em vista que

$$A_0 = \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} (1 + |y|) |\partial_x^\alpha u_0(y)| < \varepsilon_0 \nu,$$

$$B_0 = \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{t \geq 0, y \in \mathbb{R}^3} (1 + |y|)^4 |\partial_x^\alpha f(t, y)| \varepsilon_0 \nu^2.$$

■

Um tópico também de interesse na análise de soluções das equações de Navier-Stokes é como elas se comportam depois de passado um grande tempo desde o início da dinâmica, ou mesmo qual o seu comportamento limite quando o tempo tende ao infinito. No teorema a seguir, mostra-se que a solução u tende a zero, quanto $t \rightarrow \infty$, se a força externa f apresenta um certo decaimento no tempo.

Teorema 2.3

Considere as mesmas hipóteses do Teorema 2.2 (página 58) e que, além disso, a força f apresenta o decaimento

$$\sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + \sqrt{\nu t} + |x|)^3 |f(t, x)| < +\infty,$$

então a solução u obtida no Teorema 2.2 decai conforme a estimativa

$$\sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + \sqrt{\nu t} + |x|) |u(t, x)| < +\infty.$$

Demonstração. Primeiramente, notemos as seguintes limitações

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int \frac{1}{|y|} \frac{1}{1 + |x - y|^4} dy < +\infty,$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int \frac{1}{|y|^{1/2}} \frac{1}{1 + |x - y|^4} dy < +\infty,$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int \frac{1}{|y|^2} \frac{1}{1 + |x - y|^4} dy < +\infty,$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int \frac{1}{|y|^2} \frac{1}{1 + |x - y|^2} dy < +\infty,$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int \frac{1}{1 + |x - y|^4} dy < +\infty.$$

De fato, como para $|x - y| \leq 1$ temos por compacidade a limitação das integrais na bola $B[x; 1]$, então basta analisar a integral fora dessa bola. Tomando a mudança de variáveis $u = x - y$, segue que para $|u| \geq 1$ temos $|u|^{-1} \leq 1$, $|u|^{-1/2} \leq 1$ e $|u|^{-2} \leq 1$, logo podemos estimar as três primeiras desigualdades pela última limitação. Para as duas últimas, notemos que $|u| \geq 1$ implica $1 + |u|^4 \geq 1 + |u|^2$. Assim, basta estimar

$$\int \frac{1}{1 + |u|^2} du$$

que pode ser feito através de coordenadas polares. Além disso, pela mudança de variável $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{\nu t}}y$ e estimativas temos

$$\sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^3} \nu t \int \frac{1}{|y| \nu^2 t^2 + |x - y|^4} dy < +\infty, \quad (2.30)$$

$$\sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^3} (\nu t)^{3/4} \int \frac{1}{|y|^{1/2} \nu^2 t^2 + |x - y|^4} dy < +\infty,$$

$$\sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^3} (\nu t)^{3/2} \int \frac{1}{|y|^2 \nu^2 t^2 + |x - y|^4} dy < +\infty,$$

$$\sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^3} \sqrt{\nu t} \int \frac{1}{|y|^2 \nu t + |x - y|^2} dy < +\infty, \quad (2.31)$$

$$\sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^3} \sqrt{\nu t} \int \frac{1}{\nu^2 t^2 + |x - y|^4} dy < +\infty.$$

Escrevendo $E_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)|u_0(x)|$, e analogamente como em (2.24) (página 54), podemos em seguida usar (2.30)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |h_{\nu t} * u_0(x)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int \frac{\sqrt{\nu t}}{\nu^2 t^2 + |x - y|^4} \frac{E_0}{|y|} dy \leq C' \frac{E_0}{\sqrt{\nu t}}.$$

Além disso, se $F_0 = \sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + \sqrt{\nu t} + |x|)^3 |f(t, x)|$, então procedendo de forma análoga a (2.26) (página 55) e usando (2.31)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |g_{j,0}(t, x)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int \frac{1}{|x - y|^2} \frac{F_0}{\sqrt{\nu t}(\nu t + |y|^2)} dy \leq C'' \frac{F_0}{\nu t}.$$

Desde que $(1 + |x|^2)|g_{j,0}(t, x)|$ é controlada, então

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{1/2} |g_{j,0}(t, x)| \leq C \frac{B_0^{1/4} F_0^{3/4}}{(\nu t)^{3/4}}.$$

Assim, temos a estimava

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^3 \int_0^t \partial_j \mathcal{O}(\nu(t-s)) \because g_{j,0} ds \right| &\leq C B_0^{1/4} F_0^{3/4} \int_0^t \int \frac{1}{\nu^2(t-s)^2 + |x-y|^4} \frac{1}{(\nu s)^{3/4} |y|^{1/2}} dy \\ &\leq C' B_0^{1/4} F_0^{3/4} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/4}} \frac{1}{s^{3/4}} \frac{ds}{\nu^{3/2}} \\ &= C'' \frac{B_0^{1/4} F_0^{3/4}}{\nu \sqrt{\nu t}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|v_0(t, x)| \leq C \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \left(E_0 + \frac{B_0^{1/4} F_0^{3/4}}{\nu} \right) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\nu t}}.$$

sendo $\alpha_0 = C \left(E_0 + \frac{B_0^{1/4} F_0^{3/4}}{\nu} \right)$. Relembrando (2.27) (página 56) e tendo em vista (2.29) (página 59), temos para $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^3$

$$|v_n(t, x)| \leq \frac{1}{(1+n)^4} C_0 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right) \frac{1}{1+|x|}.$$

Queremos estudar a sequência (α_n) definida por $\alpha_n = \sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^3} \sqrt{\nu t} |v_n(t, x)|$.

Assim, podemos estimar (2.23) (página 54) para cada parcela de $g_{j,n}$

$$|\partial_j \mathcal{O}(\nu(t-s)) \colon (v_{j,k} v_{n-k})| \leq \min \left(\frac{\alpha_k \alpha_{n-k}}{\nu^{3/2}} \frac{1}{s\sqrt{t-s}}, \frac{C_0^2 \left(A_0 + \frac{B_0}{\nu} \right)^2}{\nu^{3/2} (1+k)^4 (1+n-k)^4} \frac{1}{(t-s)^{3/2}} \right). \quad (2.32)$$

Para isso, note primeiramente que tomando $0 < \gamma < 1/\sqrt{2}$ então

$$\int_0^{(1-\gamma^2)t} \frac{ds}{(t-s)^{3/2}} = \frac{2}{\gamma\sqrt{t}}, \quad (2.33)$$

$$\int_{(1-\gamma^2)t}^t \frac{ds}{s\sqrt{(t-s)}} \leq \frac{4\gamma}{\sqrt{t}}. \quad (2.34)$$

Pela definição recursiva de v_{n+1} (2.23) (página 54) e com as desigualdades acima ((2.32), (2.33), (2.34)) podemos obter duas constantes A_1 e A_2 , que dependem de ν , u_0 e f , mas não de n e nem de γ , tais que

$$\alpha_{n+1} \leq A_1 \gamma \sum_{k=0}^n \alpha_k \alpha_{n-k} + A_2 \frac{1}{\gamma(2+n)^4}.$$

Fixe n_0 tal que

$$(2+n_0)^2 \geq 2A_2 \left(\sqrt{2} + 2A_1 \frac{2\pi^2}{3} \right)$$

e defina $\rho = 1 + \sup_{0 \leq k \leq n_0} (k+1)^2 \alpha_k$.

Afirmamos que $\alpha_n \leq \frac{\rho}{(1+n)^2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, sendo $n \leq n_0$ segue pela definição de γ . Por indução, assuma que vale para $0 \leq k \leq n$, com $n \geq n_0$. Para mostrar que vale para α_{n+1} , estimamos

$$A_1 \gamma \sum_{k=0}^n \alpha_k \alpha_{n-k} \leq A_1 \gamma \rho \frac{4}{(n+2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = A_1 \frac{2\pi^2}{3} \gamma \rho^2,$$

tomando

$$\gamma = \frac{1}{\left(\sqrt{2} + 2A_1 \frac{2\pi^2}{3}\right) \rho}$$

temos $0 < \gamma < 1/\sqrt{2}$ e

$$A_1 \gamma \sum_{k=0}^n \alpha_k \alpha_{n-k} \leq \frac{\rho}{2(2+n)^2}.$$

Além disso,

$$A_2 \frac{1}{\gamma(2+n)^4} \leq \frac{1}{(n_0+1)^2} A_2 \left(\sqrt{2} + 2A_1 \frac{2\pi^2}{3}\right) \frac{\rho}{(2+n)^2} \leq \frac{\rho}{2(2+n)^2}.$$

Portanto, segue a afirmação e com isso

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < +\infty \tag{2.35}$$

o que implica o resultado do teorema, visto que

$$(1 + \sqrt{\nu t} + |x|)|u(t, x)| = (1 + |x|)|u(t, x)| + \sqrt{\nu t}|u(t, x)|.$$

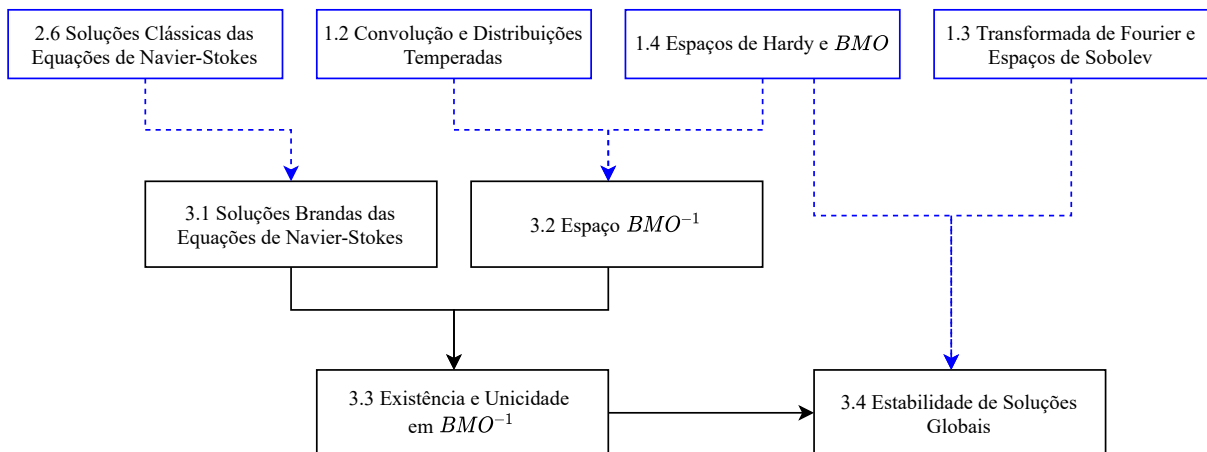
e a primeira parcela é estimada pelo Teorema 2.2 (página 58) e a segunda por (2.35). ■

Capítulo 3

Soluções Brandas em BMO^{-1}

Esse capítulo concentra os esforços dos dois anteriores com o intuito de entender um dos maiores espaços no qual as soluções das equações de Navier-Stokes estão bem colocadas, a saber o espaço BMO^{-1} . De fato, colocando em perspectiva, no capítulo anterior estudamos métodos que permitem obter soluções sob boas condições de regularidade e decaimento. Agora, vamos considerar uma abordagem que envolve uma outra noção de solução e um espaço funcional que permite considerar dados iniciais bastante singulares.

O próximo diagrama indica a necessidade das preliminares dos capítulos anteriores, assim como a relação entre as seções deste capítulo.



Na seção 3.1 é justificado o termo soluções brandas, assim como referências históricas para o estudo das equações tratadas nesse trabalho. A seção 3.2 enuncia a caracterização ideal dos espaços BMO e BMO^{-1} para os resultados seguintes.

As seções 3.3 e 3.4 demonstram os principais resultados de todo o texto: a existência e unicidade em BMO^{-1} , a partir da técnica iterativa de ponto fixo para uma equação quadrática, e por fim um teorema sobre a estabilidade de soluções em BMO^{-1} .

3.1 Soluções Brandas das Equações de Navier-Stokes

De acordo com Lemarié-Rieusset [22], a história da pesquisa sobre as soluções das equações de Navier-Stokes foram marcados por três períodos. No primeiro, buscaram fórmulas explícitas para potenciais hidrodinâmicos dadas pelos trabalhos de Lorentz (1896) [26] e Ossen (1911) [27], além da introdução das soluções fracas dadas por Leray (1934) [23].

Já na década de cinquenta, a segunda abordagem foi baseada no método de aproximação de Faedo-Galerkin que torna o estudo das equações diferenciais parciais no estudo de equações diferenciais ordinárias em um espaço de dimensão finita. Esse ponto de vista foi desenvolvido por Hopf [14] e Ladyzhenskaya [19].

Nos meados dos anos sessenta, o terceiro período foi marcado pela teoria dos semigrupos de operadores. Mais especificamente, considera-se problemas não-lineares da forma

$$\begin{cases} \partial_t u - \mathcal{L}u = f(t, u) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

em que \mathcal{L} é um operador ilimitado definido em um espaço de Banach adequado. Nesta perspectiva, o primeiro passo é analisar o semigrupo $U(t) = e^{t\mathcal{L}}$, o qual, via o Princípio de Duhamel [8, §2.3.], podemos escrever as equações (3.1) na forma integral

$$u(t, \cdot) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)f(s, u(s, \cdot)) ds.$$

Browder (1964) [5] e Kato (1965) [16] denominaram as soluções desta formulação integral como soluções brandas (*mild solutions*). Dependendo da estrutura da não-linearidade f , argumentos de contração (ponto fixo de Banach) em espaços funcionais adequados mostram-se bastante frutíferos na análise deste tipo de soluções.

O problema de valor inicial das equações de Navier-Stokes que será analisado em boa parte desse capítulo é da forma

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

sendo u o campo velocidade, p é a pressão, f uma força externa e $\nu > 0$ a viscosidade cinética. As variáveis desconhecidas são u e p , dado um campo vetorial de velocidade inicial u_0 em \mathbb{R}^3 .

A reformulação para um problema integral, usando os desenvolvimentos apresentados no Capítulo 2, é encontrar u tal que

$$u = h_{\nu t} * u_0 - \int_0^t \sum_{j=1}^3 \partial_j \mathcal{O}(\nu(t-s)) :: (f * \partial_j G + u_j u) ds,$$

o que é equivalente a

$$u = h_{\nu t} * u_0 - \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}(-f + \operatorname{div} u \otimes u) ds. \quad (3.2)$$

3.2 Espaço BMO^{-1}

Nesta seção, tendo como ponto de partida o artigo [20] e os aprofundamentos em [22], vamos definir o espaço BMO^{-1} bem como sua versão local. Para isso, observemos que as equações de Navier-Stokes possui o *scaling* para $\lambda > 0$

$$\begin{cases} u(t, x) & \mapsto \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x) \\ p(t, x) & \mapsto \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x) \end{cases} \quad (3.3)$$

e para o dado inicial

$$u_0(x) \mapsto \lambda u_0(\lambda x). \quad (3.4)$$

Um espaço de Banach E de distribuições temperadas, $E \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, é denominado crítico se é invariante por (3.4), isto é,

$$\|u_0\|_E = \|\lambda u_0(\lambda x)\|_E,$$

para cada $\lambda > 0$ e $u_0 \in E$.

O espaço BMO^{-1} é um dos maiores espaços críticos (invariante pelo *scaling* das equações) em que se conhece a boa-colocação (veja seção 3.3) de soluções brandas das equações de Navier-Stokes, com uma condição de tamanho na norma (condição de pequenez), de fato quizá o maior. Começemos supondo que

$$u \in L_{loc}^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n),$$

o que é natural, desde que representa uma condição de "energia" localmente finita. Agora relembre que as equações de Navier-Stokes são invariantes com respeito ao *scaling*. Outra condição natural seria assumir que as limitações/estimativas envolvendo a norma L^2 fossem invariantes por translações e pelo *scaling* (3.3), o que nos leva a uma versão de limitação L^2 invariantes por translações e *scaling*

$$\sup_{x, R > 0} |B(x, R)|^{-1} \int_{[0, R^2] \times B(x, R)} |u|^2 dy dt < \infty, \quad (3.5)$$

em que $|\cdot|$, quando aplicada a conjuntos mensuráveis, denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n . Em vista da formulação integral (3.2), e da parcela correspondente ao dado inicial, a ideia é escolher como espaço para o dado inicial o espaço das distribuições temperadas u_0 em \mathbb{R}^n para o qual a *extensão calórica*, isto é, a convolução com o núcleo calor $h_{\nu t} * u_0$, satisfaz (3.5). De fato, este espaço é conhecido e consiste das distribuições que podem ser escritas como divergente de um campo vetorial com coordenadas em BMO .

Motivado pelas considerações acima, e para melhor formalizar as correspondentes ideias, a seguir relembramos a definição do espaço BMO . Para a conveniência do leitor, antes relembramos as notações que estamos usando para o núcleo do calor e seu *scaling*:

$$\Phi(x) = \pi^{-n/2} e^{-|x|^2} \text{ e } \Phi_t(x) = t^{-n} \Phi(x/t).$$

Definição 3.1 (Espaço BMO)

O espaço BMO consiste das distribuições temperadas v tais que

$$\|v\|_{BMO} := \sup_{x, R > 0} \left(2|B(x, R)|^{-1} \int_{B(x, R)} \int_0^R t |\nabla(\Phi_t * v)|^2 dt dy \right)^{1/2} < +\infty.$$

Denotaremos BMO_R , para algum $R > 0$, como o espaço local de BMO , ou seja, das distribuições temperadas v tais que

$$\|v\|_{BMO_R} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 0 < r < R} \left(2|B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} \int_0^r t |\nabla(\Phi_t * v)|^2 dt dy \right)^{1/2} < +\infty.$$

A definição anterior é a caracterização da medida de Carleson de BMO , que é equivalente a definição padrão (1.27, página 37), como referência para essa caracterização consultar [32].

Agora, para um dado inicial v , considere a solução w da equação do calor homogênea

$$w_t - \Delta w = 0.$$

Assumindo certas condições de regularidade e decaimento em v e w (seção 2.1, página 39), a solução é unicamente dada por

$$w(t) = v * \Phi_{\sqrt{4t}}. \tag{3.6}$$

Logo, em vista da mudança de variável $z = t^{1/2}$, equivalentemente podemos considerar na definição de BMO a quantidade

$$\|v\|_{BMO} = \sup_{x, R > 0} \left(|B(x, R)|^{-1} \int_{B(x, R)} \int_0^{R^2} |\nabla w|^2 dt dy \right)^{1/2}.$$

Definição 3.2 (Espaço BMO^{-1})

O espaço BMO^{-1} é o subespaço das distribuições temperadas v de modo que sendo w a extensão calórica de v (3.6) temos

$$\|v\|_{BMO^{-1}} := \sup_{x, R > 0} \left(|B(x, R)|^{-1} \int_{B(x, R)} \int_0^{R^2} |w|^2 dt dy \right)^{1/2} < +\infty.$$

Denotaremos BMO_R^{-1} , para algum $R > 0$, a versão local do espaço BMO^{-1} , ou seja, o espaço das distribuições temperadas v tais que

$$\|v\|_{BMO_R^{-1}} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 0 < r < R} \left(|B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} \int_0^{r^2} |w|^2 dt dy \right)^{1/2} < +\infty.$$

em que w é a extensão calórica de v (3.6).

Observe que a expressão $\|\cdot\|_{BMO}$ não é uma norma, pois se anula para funções constantes. Isso não ocorre com BMO^{-1} . Além disso, note que o divergente de um campo vetorial, com coordenadas em BMO , está em BMO^{-1} . A próxima proposição mostra que a recíproca também é verdadeira, além de servir como fonte de exemplos de distribuições em BMO^{-1} .

Proposição 3.1

Seja u um distribuição temperada. Então $u \in BMO^{-1}$ se, e somente se, existem $f^i \in BMO$ de modo que $u = \sum_{i=1}^n \partial_i f^i$.

Demonstração. Suponha que $f^i \in BMO$, $1 \leq i \leq n$ e sejam v^i as extensões calóricas respectivas. Então, sendo $Q(x, R) = (0, R^2) \times B(x, R)$,

$$|B(x, R)|^{-1} \int_{Q(x, R)} \sum_{i=1}^n |\partial_i v^i|^2 dx dt \leq \sum_{i=1}^n |B(x, R)|^{-1} \int_{B(x, R)} \int_0^{R^2} |\nabla v^i|^2 dt dy \leq \sum_{i=1}^n \|f^i\|_{BMO}^2,$$

pela definição de BMO . Isso implica que $\operatorname{div}(f) = \nabla \cdot f \in BMO^{-1}$. A recíproca segue do próximo Lema.

Lema 3.1

Sejam $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogêneo de grau zero e $u \in BMO^{-1}$, então existe $c > 0$ de modo que

$$\|m(D_x)u\|_{BMO^{-1}} \leq c\|u\|_{BMO^{-1}}.$$

De fato, para a recíproca suponha que $u \in BMO^{-1}$ e sejam $R_{ij} = \partial_i \partial_j \Delta^{-1}$ e $u_{ij} = R_{ij}u$. Então $u_{ij} \in BMO^{-1}$ pelo Lema 3.1, e existem funções f^i com $\partial_j f^i = u_{ij}$, visto

que por construção $\partial_k u_{ij} = \partial_i u_{kj}$. Por fim, segue que $f^i \in BMO$ e $u = \sum_{i=1}^n \partial_i f^i$, visto que $\sum_{i=1}^n R_{ii} = 1$. ■

Agora, vamos mostrar o Lema 3.1.

Demonstração. Sejam $u \in BMO^{-1}$ e v a sua respectiva extensão calórica. Precisamos mostrar, com $T = m(D_x)$, que

$$|B(x, R)|^{-1} \|Tv\|_{L^2(Q(x,R))}^2 \leq c \|u\|_{BMO^{-1}}^2.$$

por *scaling* e translação temos

$$\|Tv\|_{L^2(Q(0,1))} \leq c \|u\|_{BMO^{-1}}.$$

Afirmamos que

$$\|v(t, x)\| \leq ct^{-1/2} \|u\|_{BMO^{-1}}. \tag{3.7}$$

e por *scaling* e translação é suficiente provar para $x = 0$ e $t = 1$. A afirmação se reduz a limitações, visto que o núcleo de calor, avaliado em $t = 1$, está em um espaço de Schwartz.

Para $0 < t \leq 1$ escrevemos

$$\begin{aligned} Tv(t) &= TS(t)u \\ &= T(S(t) - S(1))u + TS(1)u. \end{aligned}$$

Usando a propriedade do semigrupo do calor $S(t+s) = S(t)S(s)$, $t, s \in \mathbb{R}^+$ para $S(1) = S(1-t)S(t)$, e além disso, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo em $S'(t) = \Delta S(t)$ no intervalo $[1, +\infty)$,

$$\begin{aligned} T(S(t) - S(1))u + TS(1)u &= T(S(t) - S(1))u + \int_1^\infty T\Delta S(s)u \, ds \\ &= T(1 - S(1-t))v(t) + \int_1^\infty T\Delta S(s/2)v(s/2) \, ds. \end{aligned} \tag{3.8}$$

O operador $T(1 - S(1-t))$ é limitado em L^2 , e os núcleos k_t satisfazem a limitação uniforme, por (2.11) (página 48)

$$|k_t(x)| \leq c|x|^{-n-2}.$$

Isso implica que a primeira parcela de (3.8) pode ser estimado por

$$\|T(1 - S(1-t))v(t)\|_{L^2(B(0,1))} \leq c \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|v(t)\|_{L^2(B(x,1))},$$

uniformemente em $0 < t < 1$. Por outro lado, para o segundo termo podemos usar (3.7) (página 68) para uma estimativa forte em L^∞

$$\begin{aligned} \left\| \int_1^\infty T\Delta S(s/2)v(s/2) ds \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq c \int_1^\infty s^{-1} \|v(s/2)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\leq c \|u\|_{BMO^{-1}}, \end{aligned}$$

pois o núcleo $k(t)$ de $T\Delta S(t)$ satisfaz

$$\|k(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq ct^{-1}.$$

Isso completa a demonstração. ■

3.3 Existência e Unicidade em BMO^{-1}

As equações de Navier-Stokes, em particular a sua formulação branda, apresenta uma não-linearidade com estrutura bilinear. Assim, um resultado abstrato de ponto fixo para equações com estrutura quadrática em espaço de Banach será útil para estudar as equações de Navier-Stokes. Este é o conteúdo da próxima proposição, a qual pode ser encontrada em [22, Theorem 5.1] e [21, Theorem 13.2], bem como sua demonstração.

Proposição 3.2

Seja $B : E \times E \rightarrow E$ um operador bilinear limitado definido num espaço de Banach E , isto é,

$$\|B(u, v)\|_E \leq C_0 \|u\|_E \|v\|_E.$$

1. Se $0 < \delta < \frac{1}{4C_0}$ e para algum $w_0 \in E$ temos $\|w_0\|_E \leq \delta$, então a equação

$$u = w_0 + B(u, u)$$

possui única solução em $B[0; 2\delta]$ de maneira que $\|u\|_E \leq 2\delta$ e existe dependência contínua com relação a w_0 , isto é, se $\|v_0\|_E \leq \delta$, $v = v_0 + B(v, v)$ e $\|v\|_E \leq 2\delta$, então

$$\|u - v\|_E \leq \frac{1}{1 - 4C_0\delta} \|w_0 - v_0\|_E.$$

2. Se para algum $w_0 \in E$ temos $\|w_0\|_E \leq \frac{1}{4C_0}$, então a equação

$$u = w_0 + B(u, u)$$

possui única solução em E de modo que $\|u\|_E \leq \frac{1}{2C_0}$ e $\|u\|_E \leq 2\|w_0\|_E$.

Demonstração. Para a primeira parte, defina indutivamente $u_{n+1} = w_0 + B(u_n, u_n)$, com $u_0 = w_0$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por indução, segue que

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}\|_E &\leq \|u_0\|_E + C_0 \|u_n\|_E^2 \\ &\leq \delta + 4C_0\delta^2 \leq 2\delta \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_E &= \|B(u_n - u_{n-1}, u_n) + B(u_{n-1}, u_n - u_{n-1})\|_E \\ &\leq (4C_0\delta) \|u_n - u_{n-1}\|_E \end{aligned}$$

e logo $\|u_{n+1} - u_n\|_E \leq (4C_0\delta)^n \|u_1 - u_0\|_E$. Desde que $4C_0\delta < 1$ segue como no Teorema do ponto fixo de Banach ([4, §9.4]) a existência e unicidade de solução.

Para a dependência contínua sobre w_0 escrevemos

$$u - v = w_0 - v_0 + B(u - v, u) + B(v, u - v)$$

e assim

$$\begin{aligned} \|u - v\|_E &\leq \|w_0 - v_0\|_E + C_0 \|u\|_E \|u - v\|_E + C_0 \|v\|_E \|u - v\|_E \\ &\leq \|w_0 - v_0\|_E + 4C_0\delta \|u - v\|_E. \end{aligned}$$

Logo, $\|u - v\|_E \leq \frac{1}{1 - 4C_0\delta} \|w_0 - v_0\|_E$.

Para a segunda parte, faremos de forma análoga ao método de Ossen apresentado na seção 2.6 (página 51). Seja $u_\varepsilon = w_0 + \varepsilon B(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$, escrevendo como série de potências em ε temos $u_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k$ em que

$$u_{k+1} = \sum_{n=0}^k B(u_n, u_{k-n}).$$

e assim aplicando a norma temos

$$\|u_{k+1}\|_E \leq C_0 \sum_{n=0}^k \|u_n\|_E \|u_{k-n}\|_E.$$

A norma de u_n é dominada por α_n com $\alpha_0 = \|w_0\|_E$ e

$$\alpha_{k+1} = C_0 \sum_{n=0}^k \alpha_n \alpha_{k-n}.$$

A função α_ε definida por

$$\alpha_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \alpha_n$$

é solução de

$$\alpha_\varepsilon = \alpha_0 + C_0\varepsilon\alpha_\varepsilon^2.$$

E dessa forma, a série de α_ε converge para $1 - 4C_0\varepsilon\alpha_0 \geq 0$ e

$$\alpha_\varepsilon = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_0\varepsilon\alpha_0}}{2C_0\varepsilon} = \frac{2\alpha_0}{1 + \sqrt{1 - 4C_0\varepsilon\alpha_0}}.$$

Isso mostra a existência de solução em E e $\|u\|_E \leq 2\|w_0\|_E$.

Para a unicidade quando $\|w_0\|_E = \frac{1}{4C_0}$, temos que existe solução u tal que $\|u\|_E \leq \frac{1}{2C_0}$ e se $\|u\|_E < \frac{1}{2C_0}$, então a solução é única na bola $B_0 = \{v \in E \mid 2C_0\|v\|_E \leq 1\}$, visto que para $v \in B_0$ temos

$$\begin{aligned} \|u - v\|_E &= \|B(u, u - v) + B(u - v, v)\|_E \\ &\leq C_0\|u - v\|_E(\|u\|_E + \|v\|_E) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + C_0\|u\|_E\right)\|u - v\|_E. \end{aligned}$$

e assim

$$\left(\frac{1}{2} - C_0\|u\|_E\right)\|u - v\|_E \leq 0$$

o que implica $\|u - v\|_E = 0$.

Considere agora o operador $F(u) = w_0 + B(u, u)$. Seja $v_0 \in E$ tal que $\|v_0\|_E \leq \frac{1}{2C_0}$ e $v_{n+1} = F(v_n)$. Pela série de potências de u temos $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ e pelo desenvolvimento anterior $\|u_n\|_E \leq \alpha_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \leq \frac{1}{2C_0}$. Assim, se $\|u\|_E = \frac{1}{2C_0}$ temos $\|u_n\|_E = \alpha_n$. Além disso, $\|v_0\|_E \leq \frac{1}{2C_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_E$. Provaremos por indução que

$$\|v_k - \sum_{n=0}^{k-1} u_n\|_E \leq \sum_{n=k}^{\infty} \|u_n\|_E.$$

De fato, escrevendo

$$v_{k+1} - \sum_{n=0}^k u_n = \left(F(v_k) - F\left(\sum_{n=0}^{k-1} u_n\right)\right) + \left(F\left(\sum_{n=0}^{k-1} u_n\right) - \sum_{n=0}^k u_n\right) = A_k + B_k,$$

em que A_k e B_k são as respectivas parcelas do segundo membro. Segue que

$$A_k = B\left(v_k - \sum_{n=0}^{k-1} u_n, v_k - \sum_{n=0}^{k-1} u_n\right) + B\left(v_k - \sum_{n=0}^{k-1} u_n, \sum_{n=0}^{k-1} u_n\right) + B\left(\sum_{n=0}^{k-1} u_n, v_k - \sum_{n=0}^{k-1} u_n\right),$$

calculando a norma

$$\begin{aligned} \|A_k\|_E &\leq C_0 \|v_k - \sum_{n=0}^{k-1} u_n\|_E \left(\|v_k - \sum_{n=0}^{k-1} u_n\|_E + 2 \left\| \sum_{n=0}^{k-1} u_n \right\|_E \right) \\ &\leq C_0 \sum_{n=k}^{\infty} \|u_n\|_E \left(\sum_{n=k}^{\infty} \|u_n\|_E + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \|u_n\|_E \right). \end{aligned}$$

Já para parcela B_k

$$\begin{aligned} B_k &= u_0 + B \left(\sum_{n=0}^{k-1} u_n, \sum_{n=0}^{k-1} u_n \right) - u_0 - \sum_{p=1}^k \sum_{q=0}^{p-1} B(u_q, u_{p-1-q}) \\ &= \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{p=k-q}^{k-1} B(u_p, u_q), \end{aligned}$$

e calculando a norma

$$\|B_k\|_E \leq C_0 \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{p=k-q}^{k-1} \|u_p\|_E \|u_q\|_E.$$

Por fim, juntando as estimativas

$$\begin{aligned} \|v_{k+1} - \sum_{n=0}^k u_n\|_E &\leq C_0 \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_E \right)^2 - \left(\sum_{n=0}^{k-1} \|u_n\|_E \right)^2 \right) \\ &\leq 2C_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_E \right) \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \|u_n\|_E \right) \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \|u_n\|_E. \end{aligned}$$

E isso implica que v_n converge para u o que mostra o último item da proposição. ■

3.3.1 Teorema de Koch-Tataru

Considere inicialmente o caso

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - \Delta u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.9)$$

em que u é a velocidade e p a pressão. Denote para os campos vetoriais u, v de \mathbb{R}^n com divergência livre, o produto $u \otimes v$ como a matriz definida por $(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$, e visto como vetor $(u \otimes v)_j = (u_1 v_j, \dots, u_n v_j)$ para cada $1 \leq j \leq n$.

Definição 3.3 (Espaços \mathcal{K} e \mathcal{T})

Seja $Q(x, R) = (0, R^2) \times B(x, R)$. A definição de BMO^{-1} motiva definir os espaços de

funções \mathcal{K} e \mathcal{T} em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ tais que as respectivas normas são finitas

$$\|u\|_{\mathcal{K}} = \sup_t t^{1/2} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x, R > 0} \left(|B(x, R)|^{-1} \int_{Q(x, R)} |u|^2 dy dt \right)^{1/2}$$

$$\|f\|_{\mathcal{T}} = \sup_t t \|f(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x, R > 0} \left(|B(x, R)|^{-1} \int_{Q(x, R)} |f| dy dt \right).$$

Denotaremos \mathcal{K}_R e \mathcal{T}_R , para algum $R > 0$, como os espaços locais de \mathcal{K} e \mathcal{T} , respectivamente. Ou seja, os espaços de funções em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ com normas finitas

$$\|u\|_{\mathcal{K}_R} = \sup_{0 < t < R} t^{1/2} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x, 0 < r < R} \left(|B(x, r)|^{-1} \int_{Q(x, r)} |u|^2 dy dt \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

$$\|f\|_{\mathcal{T}_R} = \sup_{0 < t < R} t \|f(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x, 0 < r < R} \left(|B(x, r)|^{-1} \int_{Q(x, r)} |f| dy dt \right).$$

Teorema 3.1 (Existência e Unicidade em BMO^{-1})

Para as equações de Navier-Stokes (3.9) (página 72) existe única solução global suficientemente pequena em \mathcal{K} para cada u_0 dado inicial com $\operatorname{div}(u_0) = 0$ suficientemente pequeno em BMO^{-1} .

A ideia é usar argumentos de ponto fixo, isto é, a Proposição 3.2 (página 69). Reescrevendo as equações de Navier-Stokes temos, com a notação $Vf(t, x) = \int_0^t (h_{t-s} * f(s, \cdot))(x) ds$,

$$u(t, x) = S(t)u_0(x) - (V\nabla\mathbb{P}N(u))(t, x), \quad N(u) = u \otimes u. \quad (3.11)$$

De fato, considerando o termo bilinear $\tilde{N}(u, v) = u \otimes v$, podemos ver que $N(u) = \tilde{N}(u, u)$ e então (3.11) tem uma estrutura conforme a Proposição 3.2 (página 69). Para um dado inicial pequeno queremos obter solução em \mathcal{K} usando essa proposição, pois visto que N é quadrático, a constante de Lipschitz pequena segue do dado inicial controlado com adição da não linearidade também limitada. Assim, o resultado é consequência de dois próximos lemas. Os detalhes com estimativas decorrentes da aplicação da Proposição 3.2 (página 69) será analisado na subseção 3.3.2 (página 77).

Lema 3.2

A aplicação $N(u) = u \otimes u$ mapeia continuamente \mathcal{K} em \mathcal{T} , ou seja, se $\|u\|_{\mathcal{K}} < +\infty$ então existe $C > 0$ constante de maneira que $\|N(u)\|_{\mathcal{T}} \leq C\|u\|_{\mathcal{K}}^2$.

Demonstração. Para cada $1 \leq j \leq n$ temos com propriedade de supremo

$$\|(u \otimes u)_j\|_{\mathcal{T}} = \sup_t t \|(u \otimes u)_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x, R > 0} \left(|B(x, R)|^{-1} \int_{Q(x, R)} |(u \otimes u)_j| dy dt \right).$$

$$\leq \left(\sup_t t^{1/2} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right)^2 + \left(\sup_{x, R > 0} \left(|B(x, R)|^{-1} \int_{Q(x, R)} |u|^2 dy dt \right)^{1/2} \right)^2.$$

E como $u \in \mathcal{K}$ cada parcela da expressão anterior é finita. ■

Lema 3.3

A aplicação $V\nabla\mathbb{P}$ mapeia continuamente \mathcal{T} em \mathcal{K} , em que V é dado por $Vf(t, x) = \int_0^t (h_{t-s} * f(s, \cdot))(x) ds$ sendo f um campo vetorial.

Demonstração.

- **Passo 1. Escalonamento e translação**

Precisamos provar pontualmente a estimativa

$$|V\nabla\mathbb{P}g(t, x)| \leq ct^{-1/2}\|g\|_{\mathcal{T}}$$

e a estimativa em L^2

$$\|V\nabla\mathbb{P}g\|_{L^2(Q(x, R))}^2 \leq c|B(x, R)|\|g\|_{\mathcal{T}}^2.$$

para $g \in \mathcal{T}$.

Ambas as estimas são invariantes por escala e translação, portanto é suficiente mostrar que para o tempo $t = 1$ e na origem temos

$$|V\nabla\mathbb{P}g(1, 0)| \leq c\|g\|_{\mathcal{T}_1} \quad (3.12)$$

e

$$\|V\nabla\mathbb{P}g\|_{L^2(Q(0,1))}^2 \leq c\|g\|_{\mathcal{T}_1}^2. \quad (3.13)$$

Seja \mathcal{X} a função característica de $[0, 1] \times B(0, 2)$, assim podemos escrever $g = \mathcal{X}g + (1 - \mathcal{X})g$, e note que cada parcela está em \mathcal{T} . Como o núcleo K de $V\nabla\mathbb{P}$ satisfaz (seção 2.3, página 46)

$$|K(t, x)| \leq c(\sqrt{t} + |x|)^{-n-1}. \quad (3.14)$$

Então

$$\|V\nabla\mathbb{P}(1 - \mathcal{X})g\|_{L^\infty(Q(0,1))} \leq c \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{Q(x,1)} |g| dx dt.$$

Assim, é suficiente olhar para $\mathcal{X}f$, para isso considere que f tem suporte em $[0, 1] \times B(0, 2)$.

- **Passo 2. Primeira estimativa ((3.12))**

Se g tem o suporte em $[0, 1] \times B(0, 2)$ então a estimativa (3.12) segue da limitação do núcleo (3.14).

De fato, para a parte de g em $[0, 1/2] \times B(0, 2)$ usamos a limitação de g em L^1 e a limitação do núcleo longe de 0. Para a parte de g em $[1/2, 1] \times B(0, 2)$ usamos a limitação de g na norma L^∞ e a integrabilidade do núcleo próximo de 0.

- **Passo 3. Ideia para segunda estimativa ((3.13))**

Queremos mostrar a estimativa a seguir que é mais forte do que (3.13)

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla V g|^2 dx dt \leq \|g\|_{\mathcal{T}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}. \quad (3.15)$$

o operador \mathbb{P} não aparece, pois é um operador limitado em L^2 e que comuta com ∇V . Também não precisamos da restrição sobre o suporte de g .

Seja $a \in C_0^\infty$ satisfazendo $a(\xi) = 1$ se $|\xi| \leq 1$ e $a(\xi) = 0$ se $|\xi| \geq 2$. Considere os multiplicadores $A_t = a(t^{1/2} D_x)$, então para $t \leq 1$, temos

$$\|(1 - A_t)g\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq ct^{1/2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

e assim estimando com o operador $V\nabla$ em L^2

$$\|V\nabla(1 - A_t)g\|_{L^2((0,1) \times \mathbb{R}^n)}^2 \leq c \int_0^1 \|(1 - A_t)g\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)}^2 \leq c \|g\|_{\mathcal{T}} \|g\|_{L^1((0,1) \times \mathbb{R}^n)}.$$

- **Passo 4. Estimativa de $V\nabla A_t$**

Para estimar $V\nabla A_t g$, lembre a notação do semigrupo do calor como S e tome $k_t(x)$ o núcleo de $S(-t)A_t$, que está bem definido desde que a imagem de A_t consiste das funções com a transformada de Fourier com suporte compacto. Então, para cada $N \geq 1$, temos de (2.12) (página 48) que

$$|k_t(x)| \leq c_N t^{-n/2} \left(1 + \frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{-N}.$$

Em particular, $\|k_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty$ uniformemente em t . Logo, com a notação

$$(S(-t)A_t g)(x, t) = (S(-t)A_t(g(\cdot, t)))(x)$$

segue

$$\|S(-t)A_t g\|_{\mathcal{T}} \leq c \|g\|_{\mathcal{T}}, \quad \text{e} \quad \|S(-t)A_t g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq c \|g(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Sejam $w(t) = S(-t)A_t g(t)$ e $v(t) = \nabla V A_t g$. Usando a definição de V temos que v pode ser escrito como

$$v(t) = \nabla S(t) \int_0^t w(s) ds. \quad (3.16)$$

Para concluir, de acordo com (3.15), precisamos mostrar a estimativa

$$\|v\|_{L^2((0,1) \times \mathbb{R}^n)}^2 \leq c \|w\|_{\mathcal{T}} \|w\|_{L^1((0,1) \times \mathbb{R}^n)} \quad (3.17)$$

Com efeito, usando a expressão (3.16) temos

$$\|v\|_{L^2((0,1) \times \mathbb{R}^n)}^2 \leq \int_0^1 \left\| \nabla S(t) \int_0^t w(s) ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dt,$$

e por integração por partes

$$\int_0^1 \left\| \nabla S(t) \int_0^t w(s) ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dt = -2 \int_0^1 \int_0^t \int_0^s \langle \Delta S(2t)w(s), w(\theta) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\theta ds dt,$$

agora usando o Teorema de Fubini segue

$$\begin{aligned} &= -2 \int_0^1 \int_0^t \int_0^s \langle \Delta S(2t)w(s), w(\theta) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\theta ds dt \\ &= -2 \int_0^1 \int_s^1 \int_0^s \langle \Delta S(2t)w(s), w(\theta) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\theta dt ds =: I_1. \end{aligned}$$

Por sua vez, como $\partial_t S(t) = \Delta S(t)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue

$$\begin{aligned} I_1 &= -2 \int_0^1 \int_s^1 \int_0^s \langle \Delta S(2t)w(s), w(\theta) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\theta dt ds. \\ &= \int_0^1 \int_0^s \langle (S(2s) - S(2))w(s), w(\theta) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\theta ds =: I_2. \end{aligned}$$

Usando que $S(t)$ é autoadjunta e estimando a integral temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \int_0^s \langle (S(2s) - S(2))w(s), w(\theta) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\theta ds \\ &= \int_0^1 \left\langle w(s), (S(2s) - S(2)) \int_0^s w(\theta) d\theta \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\leq \int_0^1 \|w(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \left\| (S(2s) - S(2)) \int_0^s w(\theta) d\theta \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} ds. \end{aligned}$$

Se for estimado a limitação independente do t

$$\left\| S(2s) \int_0^s w(\theta) d\theta \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c \|w\|_{\mathcal{T}}, \quad (3.18)$$

então isso implica (3.17), isto é,

$$\|v\|_{L^2((0,1) \times \mathbb{R}^n)}^2 \leq c \|w\|_{\mathcal{T}} \|w\|_{L^1((0,1) \times \mathbb{R}^n)}. \quad (3.19)$$

• **Passo 5. Estimativa de (3.18)**

Primeiramente, note que estimando por cima com a integral em $Q(x, R)$

$$\begin{aligned} |B(x, R)|^{-1} \left\| \int_0^{R^2} w(\theta) d\theta \right\|_{L^1(B(x, R))} &\leq |B(x, R)|^{-1} \int_{Q(x, R)} |w(x, t)| dx dt \\ &\leq \|w\|_{\mathcal{T}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

O operador $S(2t)$ tem um núcleo $k_{2t}(x)$ dado por

$$\begin{aligned} k_{2t}(x) &= c_n t^{-n/2} e^{-|x|^2/8t}, \\ &= c_n (\sqrt{t})^{-n} e^{-|x/\sqrt{t}|^2/8} \end{aligned}$$

portanto, age como o operador média na escala de \sqrt{t} . Assim, se usarmos (3.20) em um quadriculado de cubos de tamanho \sqrt{t} obtemos

$$\begin{aligned} \left\| S(2s) \int_0^s w(\theta) d\theta \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int k_{2s}(x-y) \int_0^y w(\theta) d\theta dy \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \|w\|_{\mathcal{T}} \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} e^{-|q|^2} \leq c \|w\|_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

E isso prova (3.18) e finaliza a demonstração. ■

3.3.2 Teorema de Koch-Tataru com viscosidade e termo da força

Agora seguindo a versão de [22] do Teorema de Koch-Tataru, considere as equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

e sua reformulação

$$u = h_{\nu t} * u_0 - \int_0^t \sum_{j=1}^3 \partial_j \mathcal{O}(\nu(t-s)) :: (f * \partial_j G + u_j u) ds.$$

Para que a integral da expressão anterior faça sentido, precisamos supor hipóteses de integrabilidade sobre u em $[0, T) \times \mathbb{R}^3$. Além disso, de hipóteses sobre ser uniforme em x , para termos invariância sobre translações e invariância sobre *scaling* $u \mapsto \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ (3.3). Em síntese, precisamos que

$$\sup_{0 < t < T, x \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{t^{3/2}} \int \int_{(0,t) \times B(x, \sqrt{t})} |u(s, y)|^2 dy ds < +\infty.$$

Koch e Tataru obtivemos uma forma de entender os espaços associado a esses dados iniciais como derivadas de funções do espaço BMO ou de maneira local em BMO_T , assim como indicado na Proposição 3.1 (página 67) e seguinte.

Proposição 3.3

Para uma função mensurável F em $(0, T) \times \mathbb{R}^3$, com $T \in (0, +\infty]$, define

$$\|F\|_{X_T} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T} \left(\frac{1}{t^{3/2}} \int \int_{(0,t) \times B(x, \sqrt{t})} |F(s, y)|^2 dy ds \right)^{1/2}.$$

1. Então, para $T < +\infty$ e $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ tem-se

$$\|h_{\nu t} * u_0\|_{X_T} < +\infty \Leftrightarrow \exists (f_0, \dots, f_3) \in (BMO_T(\mathbb{R}^3))^4, u_0 = f_0 + \sum_{j=1}^3 \partial_j f_j$$

e a norma $\|h_{\nu t} * u_0\|_{X_T}$ é equivalente ao ínfimo de $\sum_{j=0}^3 \|f_j\|_{BMO_T}$ sobre todas as

decomposições $u_0 = f_0 + \sum_{j=1}^3 \partial_j f_j$.

2. Similarmente, tem-se

$$\|h_{\nu t} * u_0\|_{X_\infty} < +\infty \Leftrightarrow \exists (f_0, \dots, f_3) \in (BMO(\mathbb{R}^3))^4, u_0 = f_0 + \sum_{j=1}^3 \partial_j f_j$$

e a norma $\|h_{\nu t} * u_0\|_{X_\infty}$ é equivalente ao ínfimo de $\sum_{j=0}^3 \|f_j\|_{BMO}$ sobre todas as decom-

posições $u_0 = f_0 + \sum_{j=1}^3 \partial_j f_j$.

Demonstração. Essa proposição é uma reformulação da Proposição 3.1 (página 67). ■

Com o intuito de estimar o operador bilinear associado às equações de Navier-Stokes da próxima Proposição 3.4 (página 80) precisamos do seguinte lema

Lema 3.4

Se $F, G \in \mathcal{K}$, então $\mathcal{A}(F, G) = \int_0^{+\infty} h_{\nu s} * (F \otimes G) ds$ pertence ao espaço $(BMO)^9$ e

$$\|\mathcal{A}(F, G)\|_{BMO} \leq C_\nu \|F\|_{\mathcal{K}} \|G\|_{\mathcal{K}}.$$

Demonstração. É necessário estimar a norma BMO de

$$W(x) = \int_0^{+\infty} h_{\nu t} * w(s, \cdot) ds$$

notando que w satisfaz

$$\|w\|_{(1)} = \sup_{t > 0, x \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{t^{3/2}} \int \int_{(0,t) \times B(x, \sqrt{t})} |w(s, y)| dy ds < +\infty$$

e

$$\sup_{t>0} t \|w(t, \cdot)\|_{\infty} < +\infty.$$

Visto que se $F, G \in \mathcal{K}$ então $F \otimes G \in \mathcal{T}$, assim como no Lema 3.2 (página 73), e isso motiva as estimativas sobre w .

Como BMO é espaço dual do espaço de Hardy \mathcal{H}^1 , precisamos provar que sendo \mathbb{A}_{∞} o conjunto de átomos de \mathcal{H}^1 , isto é, $a \in \mathbb{A}_{\infty}$ se para algum $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^3$, temos o suporte de a em $B(x_0, r)$, $\|a\|_{\infty} \leq \frac{1}{|B(x_0, r)|}$ e $\int a \, dx = 0$; então

$$\sup_{a \in \mathbb{A}_{\infty}} \left| \int a(x) W(x) \, dx \right| \leq C_{\nu} (\|w\|_{(1)} + \sup_{t>0} t \|w(t, \cdot)\|_{\infty}).$$

De fato, se a é átomo, associado a bola $B(x_0, r)$, então podemos escrever $a = \sum_{i=1}^3 \partial_i \alpha_i$, com α_i tendo suporte em $x_0 + [-r, r]^3$ e $\|\alpha_j\|_{\infty} \leq Cr^{-1}$, e assim $\|\alpha_j\|_1 \leq 8Cr^2$, isso implica usando propriedade de convolução (1.13, página 25) e estimativas do gradiente do núcleo que

$$\begin{aligned} \left| \int a(x) \int_{r^2}^{+\infty} h_{\nu s} * w(s, \cdot) \, ds \, dx \right| &\leq 24C \int_{r^2}^{+\infty} r^2 \|\nabla h_{\nu s} * w(s, \cdot)\|_{\infty} \, ds \\ &\leq C' r^2 (\sup_{t>0} t \|w(t, \cdot)\|_{\infty}) \int_{r^2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} =: E_1 \end{aligned}$$

e como $1/t^2$ é decrescente temos

$$E_1 = C' r^2 (\sup_{t>0} t \|w(t, \cdot)\|_{\infty}) \int_{r^2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq C'' \sup_{t>0} t \|w(t, \cdot)\|_{\infty}.$$

Por outro lado, escrevendo $w = w_1 + w_2$ em que $w_1(s, y) = 1_{B(x_0, 3r)}(y) w(s, y)$, então

$$\begin{aligned} \left| \int a(x) \int_0^{r^2} h_{\nu s} * w_1(s, \cdot) \, ds \, dx \right| &\leq \|a\|_{\infty} \int_0^{r^2} \|w_1(s, \cdot)\|_1 \, ds \\ &\leq C \|a\|_{\infty} r^3 \|w\|_{(1)} \\ &\leq C' \|w\|_{(1)}, \end{aligned}$$

e para w_2 usamos a seguinte estimativa sobre o núcleo do calor

$$\left| \int a(x) \int_0^{r^2} h_{\nu s} * w_2(s, \cdot) \, ds \, dx \right| \leq C \int_{B(x_0, r)} \int_0^{r^2} \int_{|x_0 - y| > 3r} |a(x)| \frac{\nu s}{|x - y|^5} |w(s, y)| \, dy \, ds \, dx.$$

Podemos estimar a integral anterior como

$$\leq C' \nu r^2 \int_{B(x_0, r)} \int_0^{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |a(x)| \frac{1}{(|y - x_0| - r)^5} |w(s, y)| \, dy \, ds \, dx =: E_2,$$

considerando os anéis $A_k = B(x_0, (k+3)r) - B[x_0, (k+2)r]$, temos para $y \in A_k$ que $|y - x_0| - r \geq (k+2)r - r = (k+1)r$, logo

$$E_2 \leq C' \nu r^2 \int_{B(x_0, r)} \int_0^{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |a(x)| \frac{1}{((k+1)r)^5} |w(s, y)| dy ds dx =: E_3,$$

usando a estimativa L^1 de a e separando o somatório

$$\begin{aligned} E_3 &\leq C'' \nu r^{-3} |a|_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^5} \int_0^{r^2} \int_{A_k} |w(s, y)| dy ds \\ &\leq C''' \nu \|w\|_{(1)}. \end{aligned}$$

E isso conclui a demonstração do lema, visto que estimamos a integral em s nos intervalos $[0, r^2]$ e $[r^2, +\infty)$. ■

A próxima proposição estabelece a limitação do operador bilinear associado as equações de Navier-Stokes para a aplicação da Proposição 3.2 (página 69).

Proposição 3.4

O operador bilinear

$$B(F, G) = \int_0^t \sum_{j=1}^3 \partial_j \mathcal{O}(\nu(t-s)) :: (F_j G) ds = \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P} \operatorname{div}(F \otimes G) ds$$

é limitado no espaço \mathcal{K}_T para cada $T \in (0, +\infty]$.

Demonstração.

Primeiramente, sendo $F \in \mathcal{K}_T$ e G definido em $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ por $G(t, x) = 1_{(0, T)}(t) F(t, x)$, então $G \in \mathcal{K}$. De fato, para $t < T$ temos

$$\begin{aligned} \int \int_{(0, t) \times B(x, \sqrt{t})} |G(s, y)|^2 dy ds &= t^{3/2} \frac{1}{t^{3/2}} \int \int_{(0, t) \times B(x, \sqrt{t})} |G(s, y)|^2 dy ds \\ &\leq \|F\|_{X_T}^2 t^{3/2}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Para $t \geq T$, cobrimos a bola $B(x, \sqrt{t})$ por um número finito N_t de bolas $B(x_i, \sqrt{T})$ com $N_t = O\left(\left(\frac{t}{T}\right)^{3/2}\right)$ e estimamos N_t vezes usando (3.21)

$$\begin{aligned} \int \int_{(0, t) \times B(x, \sqrt{t})} |G(s, y)|^2 dy ds &\leq \sum_{1 \leq i \leq N_t} \int \int_{(0, T) \times B(x_i, \sqrt{T})} |F(s, y)|^2 dy ds \\ &\leq N_t \|F\|_{X_T}^2 T^{3/2} \\ &\leq C \|F\|_{X_T}^2 t^{3/2}, \end{aligned}$$

em que a última desigualdade segue da definição de N_t (*big O notation*).

Como

$$B(F, G) = \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P} \operatorname{div}(F \otimes G) ds$$

pode ser estimado apenas com os valores de F e G para $s < T$, quando $t < T$, então basta mostrar o teorema para $T = +\infty$.

Assim, tome $F, G \in \mathcal{K}$ e fixe $T > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^3$ o objetivo será provar que para algum $C > 0$ constante que não depende de T nem de x_0 , temos

$$|B(F, G)(T, x_0)| \leq C \|F\|_{\mathcal{K}} \|G\|_{\mathcal{K}} T^{-1/2}$$

e além disso,

$$\int_0^T \int_{B(x_0, \sqrt{T})} |B(F, G)(t, x)| dx dt \leq \|F\|_{\mathcal{K}} \|G\|_{\mathcal{K}} T^{3/2}.$$

- Sejam $\chi_{x_0, T} = 1_{(0, T)}(t) 1_{B(x_0, 5\sqrt{T})}(x)$ e $\psi_{x_0, T} = 1_{(0, T)}(t)(1 - 1_{B(x_0, 5\sqrt{T})}(x))$. Para $0 < t \leq T$ temos

$$B(F, G)(t, x) = B(\chi_{x_0, T} F, G)(t, x) + B(\psi_{x_0, T} F, G)(t, x).$$

- Se $x \in B(x_0, \sqrt{T})$, então

$$\begin{aligned} |B(\psi_{x_0, T} F, G)(t, x)| &\leq C \int_0^t \int \psi_{x_0, T}(s, y) |F(s, y)| |G(s, y)| \frac{dy ds}{(\sqrt{\nu(t-s)} + |x-y|)^4} \\ &\leq C' \int_0^T \int_{|y-x_0| > 4\sqrt{T}} \frac{1}{|x-y|^4} |F(s, y)| |G(s, y)| dy ds \\ &\leq C' \sum_{k \in \mathbb{Z}^3, k \neq 0} \frac{1}{|k|^4 T^2} \int_0^T \int_{y \in x_0 + k\sqrt{T} + [-\sqrt{T}/2, \sqrt{T}/2]^3} |F(s, y)| |G(s, y)| dy ds \\ &\leq C'' T^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^3, k \neq 0} \frac{1}{|k|^4} \|F\|_{X_\infty} \|G\|_{X_\infty}. \end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{cases} |B(\psi_{x_0, T} F, G)(T, x_0)| \leq C \|F\|_{\mathcal{K}} \|G\|_{\mathcal{K}} T^{-1/2}, \\ \int_0^T \int_{B(x_0, \sqrt{T})} |B(\psi_{x_0, T} F, G)(t, x)|^2 dt dx \leq \|F\|_{\mathcal{K}} \|G\|_{\mathcal{K}} T^{3/2}. \end{cases}$$

- Para estimar $B(\chi_{x_0, T} F, G)$ será usado a ideia de Auscher e Frey [2] conforme Lemarié [22] e decompor, primeiramente, em

$$B(\chi_{x_0, T} F, G) = A_1(\chi_{x_0, T} F, G) + A_2(\chi_{x_0, T} F, G) + A_3(\chi_{x_0, T} F, G)$$

sendo

$$\begin{cases} A_1(\chi_{x_0,T}F, G) &= \int_0^t (h_{\nu(t-s)} - h_{\nu(t+s)}) * \mathbb{P} \operatorname{div}(\chi_{x_0,T}F \otimes G) ds, \\ A_2(\chi_{x_0,T}F, G) &= \int_0^{+\infty} h_{\nu(t+s)} * \mathbb{P} \operatorname{div}(\chi_{x_0,T}F \otimes G) ds, \\ A_3(\chi_{x_0,T}F, G) &= - \int_t^{+\infty} h_{\nu(t+s)} * \mathbb{P} \operatorname{div}(\chi_{x_0,T}F \otimes G) ds. \end{cases}$$

- Rescrevendo $A_1(\chi_{x_0,T}F, G)$ como

$$A_1(\chi_{x_0,T}F, G) = -2\nu \int_0^1 \left(\int_0^t \Delta h_{\nu(t-s)} * h_{2\nu\theta s} * \mathbb{P} \operatorname{div}(\chi_{x_0,T}F \otimes G) s ds \right) d\theta,$$

e mais ainda como

$$A_1(\chi_{x_0,T}F, G) = -2\nu \int_0^1 A_4(A_{5,\theta}(\chi_{x_0,T}F, G)) d\theta,$$

em que

$$\begin{cases} A_4(H) &= \int_0^t \Delta h_{\nu(t-s)} * H ds, \\ A_{5,\theta}(\chi_{x_0,T}F, G)(s, \cdot) &= sW_{2\nu\theta s} * \mathbb{P} \operatorname{div}(\chi_{x_0,T}F \otimes G). \end{cases}$$

Escreveremos também $A_2(\chi_{x_0,T}F, G)$ como

$$A_2(\chi_{x_0,T}F, G) = h_{\nu t} * \mathbb{P} \operatorname{div} A_6(\chi_{x_0,T}F, G)$$

sendo

$$A_6(\chi_{x_0,T}F, G) = \int_0^{+\infty} h_{\nu s} * (\chi_{x_0,T}F \otimes G) ds.$$

Em síntese, a decomposição agora é

$$\begin{aligned} B(\chi_{x_0,T}F, G) &= -2\nu \int_0^1 A_4(A_{5,\theta}(\chi_{x_0,T}F, G)) d\theta + h_{\nu t} * \mathbb{P} \operatorname{div} A_6(\chi_{x_0,T}F, G) + \quad (3.22) \\ &\quad + A_3(\chi_{x_0,T}F, G). \end{aligned}$$

- Para a última parcela $A_3(\chi_{x_0,T}F, G)(T, x_0) = 0$, visto que $\chi_{x_0,T}(T, x_0) = 0$. Sejam $\alpha(t) = \|\chi_{x_0,T}(t, \cdot)F(t, \cdot)\|_2$ e $\beta = \sup_{t>0} \sqrt{t}\|G(t, \cdot)\|_\infty$. Então

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{B(x_0, \sqrt{T})} |A_3(\chi_{x_0, T} F, G)(t, x)|^2 dx dt &\leq \int_0^{+\infty} \int |A_3(\chi_{x_0, T} F, G)(t, x)|^2 dx dt \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \|h_{\nu(t+s)} * \mathbb{P} \operatorname{div}(\chi_{x_0, T} F \otimes G)(s, \cdot)\|_2 ds \right)^2 dt \\
 &\leq C \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t+s}} \|\chi_{x_0, T} F \otimes G(s, \cdot)\|_2 ds \right)^2 dt \\
 &\leq C \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t+s}\sqrt{s}} \beta \alpha(s) ds \right)^2 dt \\
 &\leq C \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \beta^2 \alpha^2(s) ds \right) \left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{(t+\tau)\sqrt{\tau}} d\tau \right) dt \\
 &= C' \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \beta^2 \alpha^2(s) ds \right) dt \\
 &= 2C' \int_0^{+\infty} \beta^2 \alpha^2(s) ds \\
 &\leq C'' T^{3/2} \|F\|_{X_\infty} (\sup_{t>0} \sqrt{t} \|G\|_\infty)^2.
 \end{aligned}$$

- Para a penúltima parcela de (3.22) (Página 82) temos

$$\begin{aligned}
 \|h_{\nu T} * \mathbb{P} \operatorname{div} A_6(\chi_{x_0, T} F, G)\|_\infty &\leq CT^{-1/2} \|A_6(\chi_{x_0, T} F, G)\|_{BMO} \\
 &C_\nu T^{-1/2} \|F\|_{\mathcal{K}} \|G\|_{\mathcal{K}}.
 \end{aligned}$$

Semelhantemente,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{B(x_0, \sqrt{T})} |h_{\nu T} * \mathbb{P} \operatorname{div} A_6(\chi_{x_0, T} F, G)|^2 dx dt &\leq CT^{3/2} \|h_{\nu T} * \mathbb{P} \operatorname{div} A_6(\chi_{x_0, T} F, G)\|_{X_\infty}^2 \\
 &\leq C' T^{3/2} \|A_6(\chi_{x_0, T} F, G)\|_{BMO}^2 \\
 &\leq C'' \|F\|_{\mathcal{K}}^2 \|G\|_{\mathcal{K}}^2.
 \end{aligned}$$

- Por fim, precisamos estimar $A_1(\chi_{x_0, T} F, G)$. Tome novamente $\alpha(t) = \|\chi_{x_0, T}(t, \cdot) F(t, \cdot)\|_2$ e $\beta = \sup_{t>0} \sqrt{t} \|G(t, \cdot)\|_\infty$. Usando a regularidade máxima do núcleo do calor [21, Theorem 7.3] temos

$$\|A_4(H)\|_{L^2 L^2((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)} \leq C \|H\|_{L^2 L^2((0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)}.$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_0^1 A_4(A_{5,\theta}(\chi_{x_0,T}F, G)) d\theta \right\|_{L^2L^2} &\leq \int_0^1 \|A_4(A_{5,\theta}(\chi_{x_0,T}F, G))\|_{L^2L^2} d\theta \\
 &\leq C \int_0^1 \|A_{5,\theta}(\chi_{x_0,T}F, G)\|_{L^2L^2} d\theta \\
 &\leq C' \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \frac{s}{\theta} \alpha^2(s) \frac{\beta^2}{s} ds \right)^{1/2} d\theta \\
 &= 2C' \|\chi_{x_0,T}F\|_{L^2L^2} \beta \\
 &\leq C'' T^{3/4} \|F\|_{X_\infty} \sup_{t>0} \sqrt{t} \|G\|_\infty.
 \end{aligned}$$

- Portanto, com todas essas estimativas resulta que

$$\begin{aligned}
 |A_1(\chi_{x_0,T}F, G)(T, x_0)| &\leq C \int_0^T \int \frac{\chi_{x_0,T}(s, y)}{(\sqrt{\nu(T-s)} + |x_0 - y|)^4} |F(s, y)| |G(s, y)| dy ds \\
 &\leq \frac{C'}{T^2} \int_0^{T/2} \int \chi_{x_0,T}(s, y) |F(s, y)| |G(s, y)| dy ds + \\
 &\quad + C \int_{T/2}^T \int \|F(s, \cdot)\|_\infty \|G(s, \cdot)\|_\infty \frac{ds dy}{(\sqrt{\nu(T-s)} + |x_0 - y|)^4} \\
 &\leq C'' T^{-1/2} (\|F\|_{X_\infty} \|G\|_{X_\infty} + (\sup_{t>0} \sqrt{t} \|F(t, \cdot)\|_\infty) (\sup_{t>0} \sqrt{t} \|G(t, \cdot)\|_\infty)).
 \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

Agora com o resultado da Proposição 3.2 (página 69) e limitação do operador bilinear, realizada anteriormente, podemos demonstrar o próximo teorema sobre a boa-colocação com um dado inicial em BMO_T^{-1} .

Teorema 3.2 (Koch-Tataru)

Sejam $T \in (0, +\infty]$ e as equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Existem constantes $\varepsilon_0, C_0 > 0$, que não dependem de T , mas dependem de ν , tais que se

1. $f = \operatorname{div}(F)$ com $F \in \mathcal{T}_T$ e $\|F\|_{\mathcal{T}_T} < \varepsilon_0$,
2. $u_0 \in BMO_T^{-1}$ e $\operatorname{div}(u_0) = 0$,
3. $\|1_{0<t<T} h_{\nu t} * u_0\|_{\mathcal{K}_T} < \varepsilon_0$,

então as equações (3.23) possuem única solução $u \in \mathcal{K}_T$ de maneira que $\|u\|_{\mathcal{K}_T} \leq C_0 \varepsilon_0$. Ademais, essa solução satisfaz

$$\|u\|_{\mathcal{K}_T} \leq C_0 (\|1_{0 < t < T} h_{\nu t} * u_0\|_{\mathcal{K}_T} + \|F\|_{\mathcal{T}_T}).$$

Demonstração. Relembrando do problema na forma integral

$$u = h_{\nu t} * u_0 - \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}(-f + \operatorname{div} u \otimes u) ds.$$

notemos que

$$u = h_{\nu t} * u_0 + \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}f ds - B(u, u).$$

Para estimar as primeiras duas parcelas em \mathcal{K}_T , usamos a hipótese $f = \operatorname{div}(F)$, $f \in \mathcal{T}_T$ e o Lema 3.3 (página 74) e assim

$$\left\| h_{\nu t} * u_0 + \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}f ds \right\|_{\mathcal{K}_T} \leq C_0 (\|1_{0 < t < T} h_{\nu t} * u_0\|_{\mathcal{K}_T} + \|F\|_{\mathcal{T}_T}).$$

E assim, usando a Proposição 3.2 (página 69) e a limitação de B pela Proposição 3.4 (página 80) o resultado é obtido. ■

3.4 Estabilidade de Soluções Globais

Esta seção é devotada a um estudo de estabilidade de soluções brandas em BMO^{-1} encontrado na referência [22, Theorem 9.8]. Seja u_0 um dado inicial regular para o qual existe uma solução branda global para as equações de Navier-Stokes com força externa $f = 0$. Em síntese, o resultado apresentado nesta seção mostra que dados iniciais que são perturbações pequenas na norma BMO^{-1} de u_0 ainda geram soluções brandas globais. Resultados de estabilidade neste espírito podem ser encontrados, por exemplo, em Kawanago [33]; Gallagher, Iftimie and Planchon [10] e Auscher, Dubois and Tchamitchian [1].

Para o resultado sobre estabilidade a ser apresentado, precisamos da caracterização dos espaços de Besov:

Definição 3.4 (Espaços de Besov)

Para $p > n$ defina o espaço de Besov $B_{p,\infty}^{-1+n/p}(\mathbb{R}^n)$ através da caracterização em termos da extensão calórica, isto é, a distribuição temperada u pertence a $B_{p,\infty}^{-1+n/p}$ se, e só se, a extensão calórica de v , dada por $S(t)u$, (ver (2.9), (3.6)), satisfaz

$$\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ct^{-(1-n/p)/2} \quad \text{para} \quad 0 < t \leq 1. \quad (3.24)$$

E para o caso homogêneo temos

$$u \in \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1} \Leftrightarrow \sup_{t>0} t^{1/2} \|v(t)\|_{L^\infty} < +\infty.$$

Para outras definições e caracterizações dos espaços de Besov, veja [31] e [21].

Observação 3.1

Notemos que $BMO^{-1} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$ e assim se $F \in BMO^{-1}$ temos que existe $C_1 > 0$ constante tal que

$$\sup_{t>0} t^{1/2} \|S(t)F\|_{L^\infty} = \|F\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}} \leq C_1 \|F\|_{BMO^{-1}}. \quad (3.25)$$

Dessa maneira, podemos estimar a norma de $h_{\nu t} * F$ em \mathcal{K}_T (ver (3.10), página 73), de fato

$$\begin{aligned} \|h_{\nu t} * F\|_{\mathcal{K}_T} &= \sup_{0<t<T} t^{1/2} \|h_{\nu t} * F\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x,0<r<T} \left(|B(x,r)|^{-1} \int_{Q(x,r)} |h_{\nu t} * F|^2 dy dt \right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{t>0} t^{1/2} \|h_{\nu t} * F\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x,r>0} \left(|B(x,r)|^{-1} \int_{Q(x,r)} |h_{\nu t} * F|^2 dy dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

agora usando (3.25) na primeira parcela e notando que a segunda é a norma de BMO^{-1} , obtemos que existe $C_2 > 0$ constante tal que

$$\begin{aligned} \|h_{\nu t} * F\|_{\mathcal{K}_T} &\leq C_2 \|F\|_{BMO^{-1}} + \|F\|_{BMO^{-1}} \\ &\leq C \|F\|_{BMO^{-1}}. \end{aligned}$$

Observação 3.2

Da observação anterior notemos ainda que podemos estimar com a norma L^∞ . De fato, se $F \in L^\infty \cap BMO^{-1}$, então estimando superiormente pela norma de L^∞ , usando a desigualdade de Young para convoluções ([12, §1.2.3]) para a primeira parcela e (3.25) na segunda, obtemos

$$\begin{aligned} \|h_{\nu t} * F\|_{\mathcal{K}_T} &\leq C_3 T^{1/2} \|F\|_{L^\infty} + C_4 \|F\|_{L^\infty} \left(|B(x,T)|^{-1} \int_{Q(x,T)} C_5 t^{-1/2} dy dt \right)^{1/2} \\ &= C_3 T^{1/2} \|F\|_{L^\infty} + C_6 \|F\|_{L^\infty} \left(\int_{[0,T^2]} t^{-1/2} dt \right)^{1/2} \\ &= C_3 T^{1/2} \|F\|_{L^\infty} + C_7 \|F\|_{L^\infty} \left(\int_{(0,T^2]} t^{-1/2} dt \right)^{1/2} \\ &= C_3 T^{1/2} \|F\|_{L^\infty} + C_8 T^{1/2} \|F\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Portanto, existe $C > 0$ constante, de maneira que

$$\|h_{\nu t} * F\|_{\mathcal{K}_T} \leq CT^{1/2} \|F\|_{L^\infty}.$$

Teorema 3.3

Seja \mathcal{B} o espaço dos campos vetoriais suaves $u : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que $u : [0, +\infty) \rightarrow BMO^{-1}$ é fraca-* contínua, satisfaz

$$\sup_{t \in (T_1, T_2)} \|u(t, \cdot)\|_\infty < +\infty, \text{ para cada } 0 < T_1 < T_2 < +\infty,$$

e

$$\begin{cases} \partial_t u = \nu \Delta u - \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u) \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases}.$$

Seja $u \in \mathcal{B}$ tal que $u_0 = u(0, \cdot) \in \overline{L^2 \cap BMO^{-1}}^{BMO^{-1}}$ e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(t, \cdot) - u_0\|_{BMO^{-1}} = 0.$$

Então segue que $u : [0, +\infty) \rightarrow BMO^{-1}$ é fortemente contínua, verifica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot)\|_{BMO^{-1}} = 0,$$

e satisfaz a seguinte propriedade: existe $\varepsilon_0 > 0$, que depende de u , tal que para todo campo vetorial v_0 com divergência livre e com $\|v_0 - u_0\|_{BMO^{-1}} < \varepsilon_0$, existe $v \in \mathcal{B}$ tal que $v(0, \cdot) = v_0$.

Demonstração.

- **Continuidade forte em BMO^{-1} .**

A continuidade de $t \mapsto u$ no ponto inicial $t = 0$ é dada pela hipótese

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(t, \cdot) - u_0\|_{BMO^{-1}} = 0.$$

Para $t > 0$, note que u é limitada com todas as derivadas em cada subconjunto compacto $[T_0, T_1]$ de $(0, +\infty)$, pertencendo a L^∞ . Então $\partial_t u$ é limitada em $[T_0, T_1]$ com valores em BMO^{-1} , e assim, u é localmente Lipschitz de $(0, +\infty)$ para BMO^{-1} .

- **Decaimento para $t \rightarrow +\infty$.**

Provaremos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot)\|_{BMO^{-1}} = 0$. Lembrando do espaço \mathcal{K}_T , para $0 < T \leq +\infty$, como o espaço das funções mensuráveis h em $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ de modo que

$$\begin{cases} \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|h(t, \cdot)\|_\infty < +\infty, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T} \left(\frac{1}{t^{3/2}} \int \int_{(0,t) \times B(x, \sqrt{t})} |h(s, y)|^2 ds dy \right)^{1/2} < +\infty. \end{cases}$$

Pela Proposição 3.4 (página 80), o operador bilinear

$$B(F, G) = \int_0^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P} \operatorname{div}(F \otimes G) ds$$

é limitado no espaço \mathcal{K}_T para cada $T \in (0, +\infty]$, isto é,

$$\|B(F, G)\|_{\mathcal{K}_T} \leq C_0 \|F\|_{\mathcal{K}_T} \|G\|_{\mathcal{K}_T} \quad (3.26)$$

com $C_0 > 0$ constante, que depende de ν mas não de T . Além disso, pela Observação 3.1 (página 86)

$$\|h_{\nu t} * F\|_{\mathcal{K}_T} \leq C_1 \|F\|_{BMO^{-1}}, \quad (3.27)$$

também com constante C_1 , que depende de ν mas não de T .

Como u_0 é limite de $u(t, \cdot)$ em BMO^{-1} e $u(t, \cdot)$ pertence a L^∞ para $t > 0$, então usando a definição da norma de \mathcal{K}_T

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \|h_{\nu t} * u_0\|_{\mathcal{K}_T} = 0$$

e tomando $T_0 > 0$ tal que

$$\|h_{\nu t} * u_0\|_{\mathcal{K}_{T_0}} < \frac{1}{8C_0}.$$

Pela continuidade forte de $t \mapsto u$, tomemos $T_1 > 0$ tal que

$$\sup_{0 < \tau < T_1} \|h_{\nu t} * u(\tau, \cdot)\|_{\mathcal{K}_{T_0}} \leq \frac{1}{8C_0}.$$

Então, pela iteração do ponto fixo de Banach e assim como (2.17) (página 52), podemos construir solução $v_\tau(t, x)$ das equações de Navier-Stokes em $(0, T_0) \times \mathbb{R}^3$ com valor inicial $v_\tau(0, \cdot) = u(\tau, \cdot)$ tal que $v_\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\tau, n}$, de modo que

$$\begin{cases} v_{\tau, 0} & = h_{\nu t} * u(\tau, \cdot) \\ v_{\tau, n+1} & = v_{\tau, 0} - B(v_{\tau, n}, v_{\tau, n}) \end{cases}$$

e além disso,

$$\|v_{\tau, n+1} - v_{\tau, n}\|_{\mathcal{K}_{T_0}} \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{4C_0}.$$

Para $\tau > 0$, temos $v_{\tau, 0} \in L_t^\infty L_x^\infty$ e

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < T_0} \|v_{\tau, n+1}(t, \cdot) - v_{\tau, n}(t, \cdot)\|_\infty \leq \\ & \leq C \sup_{0 < t < T_0} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\nu(t-s)}} \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{s} \|v_{\tau, n}(s, \cdot) - v_{\tau, n-1}(s, \cdot)\|_\infty \\ & \quad \cdot (\|v_{\tau, n}(s, \cdot)\|_\infty + \|v_{\tau, n-1}(s, \cdot)\|_\infty) ds \\ & \leq C' \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{1}{2^n C_0} \sup_{0 < t < T_0} (\|v_{\tau, n}(t, \cdot) + v_{\tau, n-1}(t, \cdot)\|_\infty) \end{aligned}$$

e logo

$$\sup_{0 < t < T_0} \|v_{\tau, n+1}(t, \cdot) - v_{\tau, n}(t, \cdot)\|_\infty \leq C \frac{1}{2^n} \|u(\tau, \cdot)\|_\infty,$$

em que C depende de ν e C_0 . Então $v_\tau \in L^\infty((0, T_0) \times L_x^\infty)$ e por unicidade das soluções brandas em $L_t^\infty L_x^\infty$, temos que

$$v_\tau(t, s) = u(\tau + t, x).$$

Para mais detalhes sobre os espaços do tipo $L^q((0, T); L^p)$ com $1 \leq p, q \leq \infty$ e mais geralmente $L^q((0, T); X)$, em que X é um espaço de Banach, veja [35], [8] e [17].

Agora, note que

$$\|u\|_{\mathcal{K}_{T_0}} \leq \liminf_{\tau \rightarrow 0} \|v_\tau\|_{\mathcal{K}_{T_0}} \leq \frac{1}{4C_0},$$

e como $\|v_0\|_{\mathcal{K}_{T_0}} \leq \frac{1}{4C_0}$, então $u = v_0$ em $(0, T_0)$, por unicidade das soluções brandas suficientemente pequenas.

Agora, como u_0 pertence ao fecho de $L^2 \cap BMO^{-1}$ em BMO^{-1} , considere $\delta > 0$ em $0 < \delta \leq \frac{1}{32} \frac{1}{C_0 C_1}$ escrevemos $u_0 = \alpha_0 + \beta_0$ com $\beta_0 \in L^2 \cap BMO^{-1}$ e $\|\alpha_0\|_{BMO^{-1}} \leq \delta$. Podemos supor ainda que $\operatorname{div} \alpha_0 = 0$, visto que o operador projeção de Leray \mathbb{P} é limitado em L^2 e BMO^{-1} .

Como $\|h_{\nu t} * \alpha_0\|_{\mathcal{K}} \leq C_1 \delta \leq \frac{1}{32C_0}$, então podemos obter uma solução global branda das equações de Navier-Stokes em $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ com valor inicial $\alpha(0, \cdot) = \alpha_0$. Essa solução é tal que $\|\alpha\|_{\mathcal{K}} \leq 2C_1 \delta$ e pelo Lema 3.4 (página 78) temos $\sup_{0 < t} \|\alpha(t, \cdot)\|_{BMO^{-1}} \leq C_2 \delta$. Assim, tome δ tal que $C_2 \delta \leq \frac{1}{8C_1 C_0}$.

Note que $\beta = u - \alpha$ é uma solução branda de

$$\beta = h_{\nu t} * \beta_0 - B(\alpha, \beta) - B(\beta, \alpha) - B(\beta, \beta).$$

Novamente, podemos construir uma iteração de Banach (Contração de Picard) em um pequeno intervalo $(0, T_1)$ tal que $\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$ com

$$\begin{cases} \gamma_0 &= h_{\nu t} * \beta_0 \\ \gamma_{n+1} &= \gamma_0 - B(\alpha, \gamma_n) - B(\gamma_n, \alpha) - B(\gamma_n, \gamma_n). \end{cases}$$

Se tomarmos δ e T_1 suficientemente pequenos tais que $24C_1^2 C_0 \delta < 1$ e $\|u\|_{\mathcal{K}_{T_1}} < C_1 \delta$, então $\|\gamma_0\|_{\mathcal{K}_{T_1}} \leq 3C_1 \delta$ e $\|\gamma_n\|_{\mathcal{K}_{T_1}} \leq 4C_1 \delta$.

Ademais,

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < T_1} \|\gamma_{n+1}(t, \cdot) - \gamma_n(t, \cdot)\|_2 \\ & \leq C \sup_{0 < t < T_1} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\nu(t-s)}} \frac{1}{\sqrt{s}} \|\gamma_n(t, \cdot) - \gamma_{n-1}(t, \cdot)\|_2 \\ & \quad \cdot \sqrt{s} (\|\gamma_n(s, \cdot)\|_\infty + \|\gamma_{n-1}(s, \cdot)\|_\infty + \|\alpha(s, \cdot)\|_\infty) ds \\ & \leq C_3 C_1 \delta \sup_{0 < t < T_1} \|\gamma_n(t, \cdot) - \gamma_{n-1}(s, \cdot)\|_2 \end{aligned}$$

Sendo $C_3 C_1 \delta < 1$, então γ_n converge em $L_t^\infty L_x^2$. Isso mostra que $\beta \in L^\infty((0, T_1), L^2)$ para T_1 suficientemente pequeno. Como α e β pertence a $L^\infty((T_1, T_2) \times L^\infty)$ para cada $T_2 > T_1$, então β pertence a $L^\infty((T_1, T_2), L^2)$.

Além disso, $\operatorname{div}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha + \beta \otimes \beta) \in L^\infty((0, T_1), \dot{H}^{-1})$ e assim $\beta - h_{\nu(t-T_1)} * \beta(T_1, \cdot) \in L^2((T_1, T_2), H^1)$. Por fim, β pertence a $L^\infty((T_1, T_2), L^2) \cap L^2((T_1, T_2), H^1)$ e $\partial_t \beta \in L^2((T_1, T_2), H^{-1})$. Derivando a norma L^2 de β

$$\partial_t \|\beta(t, \cdot)\|_2^2 = 2 \int \beta \cdot \partial_t \beta \, dx,$$

e como $\operatorname{div} u = 0$ e $\beta = u - \alpha$ então

$$\int \beta \cdot ((\alpha + \beta) \cdot \nabla \beta) \, dx = 0$$

segue que

$$\begin{aligned} \partial_t \|\beta(t, \cdot)\|_2^2 &= -2\nu \|\nabla \otimes \beta\|_2^2 + 2 \int \alpha \cdot (\beta \cdot \nabla \beta) \, dx \\ &\leq -\nu \|\nabla \otimes \beta\|_2^2 + \frac{1}{\nu} \|\alpha\|_2^2 \leq \frac{1}{\nu} \|\alpha\|_2^2. \end{aligned}$$

Isso implica, usando a desigualdade Grönwall, que

$$\|\beta(t, \cdot)\|_2^2 \leq \|\beta(T_1, \cdot)\|_2^2 e^{\frac{1}{\nu} \int_{T_1}^t \frac{C_1^2 \delta^2}{s} ds} = \|\beta(T_1, \cdot)\|_2^2 \left(\frac{t}{T_1} \right)^{\frac{C_1^2 \delta^2}{\nu}}$$

e

$$\int_{T_1}^t \|\nabla \otimes \beta\|_2^2 ds \leq \frac{1}{\nu} \|\beta(T_1, \cdot)\|_2^2 \left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{C_1^2 \delta^2}{\frac{C_1^2 \delta^2}{\nu}} \int_{T_1}^t s^{\frac{C_1^2 s^2}{\nu}} \frac{ds}{s} \right).$$

Por interpolação, obtemos

$$\|\beta\|_{(L^4(T_1, T_2), L^3)} \leq C_4 \|\beta(T_1, \cdot)\|_2 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{C_1 \delta^2}{2\nu}}.$$

Se δ é suficientemente pequeno para que $\frac{C_1^2 \delta^2}{\nu} < \frac{1}{4}$, então

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \|\beta(t, \cdot)\|_3 = 0$$

e assim

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\beta(t, \cdot)\|_{BMO^{-1}} = 0.$$

Então podemos tomar $T_3 > 0$ tal que $\|\beta(T_3, \cdot)\|_{BMO^{-1}} < C_2 \delta$. Isso implica que $\|u(T_3, \cdot)\|_{BMO^{-1}} < 2C_2 \delta$ e assim $\|h_{\nu(t-T_3)} * u(T_3, \cdot)\|_{\mathcal{K}} \leq 2C_1 C_2 \delta \leq \frac{1}{4C_0}$.

Por fim, isso implica que u pode ser estimado em $(T_3, +\infty)$ por

$$\|u(T_3 + t, \cdot)\|_{\mathcal{K}} \leq 4C_1C_2\delta$$

e assim

$$\sup_{t>T_3} \|u(t, \cdot)\|_{BMO^{-1}} \leq 2C_2\delta + C_4(4C_1C_2\delta)^2.$$

Como δ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, portando

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot)\|_{BMO^{-1}} = 0.$$

• **Estabilidade.**

Primeiramente, já temos que

$$\|B(F, G)\|_{\mathcal{K}_T} \leq C_0\|F\|_{\mathcal{K}_T}\|G\|_{\mathcal{K}_T},$$

$$\|B(F, G)\|_{L^\infty BMO^{-1}} \leq C_0\|F\|_{\mathcal{K}_T}\|G\|_{\mathcal{K}_T}.$$

para uma constante $C_0 > 0$ que depende de ν mas não de T . Além disso, pela Observação 3.1 (página 86) temos para uma constante $C_1 > 0$

$$\|h_{\nu t} * w_0\|_{\mathcal{K}_T} \leq C_1\|w_0\|_{BMO^{-1}}.$$

E pela Observação 3.2 (página 86)

$$\|h_{\nu t} * w_0\|_{\mathcal{K}_T} \leq C_2\sqrt{T}\|w_0\|_{\infty}.$$

Se α_0, β_0 e γ_0 são tais que $\operatorname{div}(\alpha_0 + \beta_0) = \operatorname{div} \gamma_0 = 0$, $\|\alpha_0\|_{BMO^{-1}} \leq \frac{1}{16C_0C_1}$, $\|\beta_0\|_{\infty} \leq M$ e $\|\gamma_0\|_{BMO^{-1}} \leq \frac{1}{16C_0C_1}$, então para $T = \frac{1}{(16C_2C_0M)^2}$, temos $\|h_{\nu t} * (\alpha_0 + \beta_0)\|_{\mathcal{K}_T} \leq \frac{1}{8C_0}$, e assim as equações de Navier-Stokes com valor inicial $\alpha_0 + \beta_0$ possui solução branda w em $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ com $\|w\|_{\mathcal{K}_T} \leq \frac{1}{4C_0}$.

E como $\|h_{\nu t} * \gamma_0\|_{\mathcal{K}_T} \leq \frac{1}{16C_0}$, então as equações de Navier-Stokes com valor inicial $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0$ possui solução branda $w + \gamma$ em $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ com $\|\gamma\|_{\mathcal{K}_T} \leq 2C_1\|\gamma_0\|_{BMO^{-1}}$. Além disso, $\|\gamma(T, \cdot)\|_{BMO^{-1}} \leq \left(1 + \frac{5}{4}C_1\right)\|\gamma_0\|_{BMO^{-1}}$.

Pela continuidade forte de u de $[0, +\infty)$ para o fecho de $L^\infty \cap BMO^{-1}$ em BMO^{-1} e como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot)\|_{BMO^{-1}} = 0$, tome $T_0 > 0$ tal que $\|u(T_0, \cdot)\|_{BMO^{-1}} \leq \frac{1}{8C_0C_1}$. Pela compacidade de $u([0, T_0])$ em BMO^{-1} , pode-se tomar $M < +\infty$ tal que para cada $t \in [0, T_0]$ temos a decomposição $u(t, \cdot) = \alpha_t + \beta_t$ com $\|\beta_t\|_{\infty} \leq M$ e $\|\alpha_t\|_{BMO^{-1}} < \frac{1}{16C_0C_1}$.

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N}T_0 < \frac{1}{(16C_2C_0M)^2}$, e se

$$\|v_0 - u_0\|_{BMO^{-1}} < \left(1 + \frac{5}{4}C_1\right)^{-N} \frac{1}{16C_0C_1}$$

então podemos construir soluções brandas v indutivamente em $\left[\frac{k}{N}T_0, \frac{k+1}{N}T_0\right]$ para $0 \leq k < N$. Com efeito, temos $u\left(\frac{k}{N}T_0, \cdot\right) = \alpha_{\frac{k}{N}T_0} + \beta_{\frac{k}{N}T_0}$ com $\|\beta_{T_0}\|_\infty \leq M$,

$$\left\|\alpha_{\frac{k}{N}T_0}\right\|_{BMO^{-1}} < \frac{1}{16C_0C_1} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \left\|u\left(\frac{k}{N}T_0, \cdot\right) - v\left(\frac{k}{N}T_0, \cdot\right)\right\|_{BMO^{-1}} &\leq \left(1 + \frac{5}{4}C_1\right)^k \|u_0 - v_0\|_{BMO^{-1}} \\ &\leq \left(1 + \frac{5}{4}C_1\right)^{k-N} \frac{1}{16C_0C_1}. \end{aligned}$$

Logo, podemos construir solução v em $[0, T_0]$ e assim

$$\|v(T_0, \cdot)\|_{BMO^{-1}} \leq \|u(T_0, \cdot)\|_{BMO^{-1}} + \|v(T_0, \cdot) - u(T_0, \cdot)\|_{BMO^{-1}} \leq \frac{3}{16C_0C_1}.$$

Isso significa que $v(T_0, \cdot)$ é suficientemente pequeno para termos solução branda v em $[T_0, +\infty)$.

■

Capítulo 4

Conclusão

De acordo com Koch e Tataru [20] podemos cobrir resultados anteriores sobre as equações de Navier-Stokes em outros espaços, desde que BMO^{-1} ou BMO_R^{-1} contenha esses espaços. De fato, como aplicação dos resultados apresentados no capítulo anterior, discutiremos a seguir algumas inclusões.

Relembrando a Definição 3.4 (página 85), para $p > n$, o espaço de Besov $B_{p,\infty}^{-1+n/p}(\mathbb{R}^n)$ pode ser descrito via o semigrupo do calor $S(t)$, isto é,

$$u \in B_{p,\infty}^{-1+n/p}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ct^{-(1-n/p)/2} \quad \text{para} \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.1)$$

sendo v a extensão calórica $v = S(t)u$. Escolhendo $R \leq 1$ e como $p > n \Rightarrow -2 < -n/p$, então

$$\begin{aligned} \|u\|_{BMO^{-1}} &= \left(|B(x, R)|^{-1} \int_{Q(x, R)} |v|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq |B(x, R)|^{-n/p} \left(\int_0^{R^2} \|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq c\sqrt{p/n} |B(x, 1)|^{-n/p} \sup_{0 < t \leq R^2} t^{(1-n/p)/2} \|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que a última desigualdade é obtida com (4.1). Além disso, usando a desigualdade de Young para convoluções ([12, §1.2.3]) e estimativas do semigrupo do calor, chegamos a estimativa

$$(4\pi t)^{(1-n/p)/2} \|v(t)\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.3)$$

As estimativas (4.3) e (4.2) levam-nos às inclusões contínuas

$$L^n(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,\infty}^{-1+n/p}(\mathbb{R}^n) \subset BMO^{-1}.$$

Outra classe de espaços que são clássicas no estudo de equações diferenciais parciais, e importantes no contexto das equações de Navier-Stokes, são os espaços de Morrey $M_q^p(1 \leq q \leq n)$. Estes espaços são definidos como o conjunto de funções $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, tais que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, R \leq 1} R^{n/p} \left(|B(x, R)|^{-1} \int_{B(x, R)} |u|^q dx \right)^{1/q} < \infty.$$

Segue dos resultados de *M. Taylor, Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes equation* que $M_q^n \subset BMO_1^{-1}$ para $1 < q \leq n$. Portanto, esses casos estão incluídos nos resultados de [20] tratados nesta dissertação. Isso mostra a extensão e força destes resultados. Certamente, o espaço BMO^{-1} é um dos maiores espaços críticos em que a boa-colocação de soluções brandas globais (com dado pequeno) é conhecido. De fato, considerando em adição algumas condições estruturais na classe de espaços críticos, BMO^{-1} torna-se o maior espaço com tal propriedade (veja, e.g., [22, §20.2]).

Finalmente, observamos que este trabalho possibilitou contatos com técnicas e elementos avançados de equações diferenciais parciais e análise harmônica, bem como conhecimentos sobre espaços funcionais importantes. Assim, no todo, ele nos leva a uma base matemática sólida que poderá ser útil em pesquisas futuras e originais sobre as equações de Navier-Stokes e modelos relacionados.

Referências

- [1] AUSCHER, P., DUBOIS, S., AND TCHAMITCHIAN, P. On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 83 (2004), 673–697. Citado na página 85.
- [2] AUSCHER, P., AND FREY, D. On the well-posedness of parabolic equations of Navier-Stokes type with BMO^{-1} data. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 16, 5 (2017), 947–985. Citado na página 81.
- [3] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, New York, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 23.
- [4] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., AND TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, 2 ed. SBM (Coleção Textos Universitários; 13), Rio de Janeiro, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 17, 19, 23, 28 e 70.
- [5] BROWDER, F. E. Nonlinear equations of evolution and nonlinear accretive operators in Banach spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society* 73, 6 (1967), 867 – 874. Citado na página 64.
- [6] CANNONE, M. A generalization of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations. *Revista Matemática Iberoamericana* 13 (1997), 515–541. Citado na página 14.
- [7] CHORIN, A. J., AND MARSDEN, J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, 3 ed. Springer, New York, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 19.
- [8] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, 2 ed. American Mathematical Society, 2010. Citado 10 vezes nas páginas 17, 28, 32, 33, 34, 38, 39, 43, 64 e 89.
- [9] FEFFERMAN, C. L. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. In *Princeton; NJ 08544-1000; 2000* (2000). Citado na página 13.
- [10] GALLAGHER, I., PLANCHON, I., AND PLANCHON, F. Asymptotics and stability for global solutions to the Navier-Stokes equations. *Annales de l’Institut Fourier* 5 (01 2003). Citado na página 85.

- [11] GIGA, Y., AND MIYAKAWA, T. Navier-stokes flow in \mathbb{R}^3 with measures as initial vorticity and morrey spaces. *Communications in Partial Differential Equations* 14, 5 (1989), 577–618. Citado na página 14.
- [12] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*, 2 ed. Graduate Texts in Mathematics, 249. Spriger, New York, 2008. Citado 9 vezes nas páginas 17, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 86 e 93.
- [13] GRAFAKOS, L. *Modern Fourier Analysis*, 2 ed. Graduate Texts in Mathematics, 250. Spriger, New York, 2009. Citado na página 34.
- [14] HOPF, E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt zu seinem 75. Geburtstag gewidmet. *Mathematische Nachrichten* 4, 1-6 (1950), 213–231. Citado na página 64.
- [15] IFTIMIE, D. The resolution of the Navier-Stokes equations in anisotropic spaces. *Revista Matematica Iberoamericana* 15 (1999), 1–36. Citado na página 14.
- [16] KATO, T. Nonlinear evolution equations in Banach spaces. *In Proceedings of the Symposium on Applied Mathematics* 17 (1965), 50–67. Citado na página 64.
- [17] KATO, T. Strong L^p -Solutions of the Navier-Stokes Equation in \mathbb{R}^m , with Applications to Weak Solutions. *Mathematische Zeitschrift* 187 (1984), 471–480. Citado 3 vezes nas páginas 14, 46 e 89.
- [18] KATO, T., AND PONCE, G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 41, 7 (1988), 891–907. Citado na página 14.
- [19] KISELEV, A. A., AND LADYZHENSKAYA, O. A. On the existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous, incompressible fluid. *Amer. Math. Soc. Transl* 24 (1963), 211–245. Citado na página 64.
- [20] KOCH, H., AND TATARU, D. Well-posedness for the Navier Stokes Equations. *Advances in Mathematics*, 157 (2001), 22–35. Citado 9 vezes nas páginas 8, 9, 14, 16, 38, 46, 65, 93 e 94.
- [21] LEMARIÉ-RIEUSSET, P. G. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. CRC Press, London, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 14, 49, 51, 69, 83 e 86.
- [22] LEMARIÉ-RIEUSSET, P. G. *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century*. CRC Press, Evry, France, 2016. Citado 17 vezes nas páginas 8, 9, 14, 16, 38, 39, 44, 48, 49, 51, 64, 65, 69, 77, 81, 85 e 94.
- [23] LERAY, J. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Mathematica* 63, none (1934), 193 – 248. Citado na página 64.

- [24] LIMA, E. L. *Curso de análise vol.2*, 11 ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- [25] LIONS, P.-L., AND MASMOUDI, N. Unicité des solutions faibles de Navier-Stokes dans $L^N(\Omega)$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics* 327, 5 (1998), 491–496. Citado na página 14.
- [26] LORENTZ, H. Eene algemeene stelling omtrent de beweging eener vloeistof met wrijving en eenige daaruit afgeleide gevolgen. *Zittingsverslag vand de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* 5 (1896), 168–175. Citado na página 64.
- [27] OSEEN, C. Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications. *Acta Mathematica* 34 (12 1911), 205–284. Citado 3 vezes nas páginas 38, 52 e 64.
- [28] OSEEN, C. W. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 52.
- [29] PHAM, D. A note on weak convergence methods. <http://www.math.wisc.edu/~hung/note-DoanhPham.pdf>. Acessado em: 25 dez 2021. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 31.
- [30] PLANCHON, F. Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the incompressible Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 . *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire* 13, 3 (1996), 319–336. Citado na página 14.
- [31] SAWANO, Y. *Theory of Besov Spaces*. Springer, Developments in Mathematics, vol. 56., Singapore, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 86.
- [32] STEIN, E. M. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton University Press, New Jersey, 1993. Citado 8 vezes nas páginas 17, 35, 36, 37, 38, 46, 47 e 66.
- [33] TADASHI, K. Stability estimate for strong solutions of the Navier-Stokes system and its applications. *Electronic Journal of Differential Equations* 1998 (06 1998). Citado na página 85.
- [34] TAYLOR, M. E. Analysis on Morrey Spaces and Applications to Navier-Stokes and Other Evolution Equations. *Communications in Partial Differential Equations* 17, 9-10 (1992), 1407–1456. Citado na página 14.
- [35] YOSIDA, K. *Functional Analysis*, 5 ed. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 123. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. Citado na página 89.

APÊNDICE A

Índice

- Atoms, 36
- Classe de Schwartz, 24
- Convergência Fraca, 31
- Convolução, 24
 - Convolução com uma distribuição, 27
- Dado Regular, 57
- Decomposição de Helmholtz, 44
- Derivada
 - Derivada fraca, 32
 - Derivadas Distribucionais, 27
- Desigualdade
 - de Hölder para integrais, 21
 - de Minkowski para integrais, 21
 - de Poincaré, 33
 - de Young, 20
- Distribuição
 - Distribuições Temperadas Módulo Polinômios, 27
 - Distribuição Limitada, 27
 - Distribuições Temperadas, 26
- Equação
 - Equação de Poisson, 39
 - Equação do Calor Geral, 43
 - Equação do Calor homogênea, 41
 - Equação do Calor não homogênea, 42
 - Equações de Navier-Stokes, 39, 53
 - Equações de Stokes, 48
- Espaço
 - BMO , 66
 - BMO^{-1} , 67
 - L^∞ , 23
 - L^p , 20
 - Espaço de Sobolev, 32
 - Espaços de Besov, 85, 93
 - Espaços de Morrey, 93
 - Espaço Crítico, 65
 - Espaços de Hardy, 36
 - Espaços de Sobolev Homogêneo, 34
 - Espaços de Sobolev não Homogêneo, 34
- Estabilidade, 86
- Função
 - Função de Green, 39
- Fórmulas
 - Fórmulas de Green, 18
 - Fórmulas de Oseen, 50
- Imersões de Sobolev, 33
- Integral Singular, 46
- Integração por Partes, 18
- Laplaciano, 13, 18
- Mergulho
 - Continuamente Mergulhado, 33
 - Compactamente Mergulhado, 33

- Multi-índice, 24
- Norma
do Espaço de Sobolev, 32
- Núcleo
Núcleo de Poisson, 35
Núcleo do Calor, 40
- Projeção de Leray, 45, 47, 49
- Scaling, 65, 77
- Semigrupo do Calor, 47
- Sequência
de Cauchy, 23
- Soluções
Soluções Clássicas de Navier-Stokes,
58
Soluções Globais, 58
- Suporte, 25
- Tensor de Oseen, 50
- Teorema
Regra de Leibniz para Integrais, 19
Rellich - Kondrachov, 34
Teorema da Divergência, 18
Teorema de Gauss-Green, 17
Teorema do Transporte de Reynolds,
19
- Transformada
de Fourier, 28
de Fourier de distribuições
temperadas, 30
de Riesz, 47
inversa de Fourier, 29