UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MATEUS SANTOS ROCHA

Controlabilidade Aproximada e Nula para a Equação do Calor Linear

Campinas

2022

Mateus Santos Rocha

Controlabilidade Aproximada e Nula para a Equação do Calor Linear

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Mateus Santos Rocha e orientada pela Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R582c Rocha, Mateus Santos, 1997-
Controlabilidade aproximada e nula para a equação do calor linear / Mateus Santos Rocha. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equação de calor. 3. Controlabilidade. 4. Desigualdades de Carleman. 5. Observabilidade. I. Calsavara, Bianca Morelli Rodolfo, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Approximate and null controllability for the linear heat equation
Palavras-chave em inglês:
Partial differential equations
Heat equation
Controllability
Carleman inequalities
Observability
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Bianca Morelli Rodolfo Calsavara [Orientador]
João Vitor da Silva
Fágner Dias Araruna
Data de defesa: 22-02-2022
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-8180-5748
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5651714196562503

Dissertação de Mestrado defendida em 22 de fevereiro de 2022 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Prof(a). Dr(a). JOÃO VITOR DA SILVA

Prof(a). Dr(a). FÁGNER DIAS ARARUNA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Este trabalho é dedicado a José Pinto dos Santos,
eterno avô, amigo e exemplo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela salvação em Jesus Cristo, santificação e bênção de permitir que eu contribua com a matemática no Brasil.

Agradeço aos meus pais, Joelson Rocha e Madalena Santos, por providenciar as condições para o meu desenvolvimento, por me incentivar em todas as minhas jornadas e pelo amor com que sempre me trataram.

Agradeço a minha irmã, Raquel Rocha, pela amizade e por, desde criança, me incentivar e me ajudar em tudo que eu preciso.

Agradeço a minha amada esposa e melhor amiga, Laís Rocha, pelo seu amor, pelo seu carinho, pela sua lealdade e por seu exemplo.

Agradeço aos meus amigos que se tornaram irmãos, Eneias Junior, Fernando Karim, Lucas Lima, Lucas Silvestre, Lucca Concon, Pedro Lazari e Thales Pereira, que sempre estiveram comigo durante os bons e maus momentos da graduação e do mestrado.

Agradeço ao 5BAG, grupo querido de amigos, por todos os momentos de diversão compartilhados durante os últimos anos.

Agradeço a minha orientadora Bianca pelos ensinamentos, pela dedicação durante o período de orientação, e também pela amizade desenvolvida desde às orientações de iniciação científica.

Agradeço aos meus professores da Unicamp por todo o conhecimento transmitido e por desenvolver em mim a paixão pela matemática.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão de bolsa durante todo o período do mestrado, sob o processo 132894/2020-3.

"Portanto, agora já não há condenação
para os que estão em Cristo Jesus."
(Bíblia Sagrada, Romanos 8,1)

Resumo

Este trabalho se propõe a investigar a controlabilidade aproximada e nula para um sistema associado à equação do calor linear com condições de Dirichlet. Para isto, primeiramente foi estudado o problema de existência e unicidade de solução para este sistema, bem como a regularidade destas soluções. Posteriormente, foram utilizados métodos variacionais para a demonstração da controlabilidade aproximada. Finalmente, utilizando uma desigualdade de Carleman e a desigualdade de observabilidade para a equação adjunta, demonstrou-se a controlabilidade a zero para o sistema estudado.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Equação do Calor. Controlabilidade. Desigualdade de Carleman. Observabilidade

Abstract

This work proposes to investigate the approximate controllability and null controllability for a system associated with the linear heat equation with Dirichlet conditions. For this purpose, the problem of existence and uniqueness of solution was studied for this system, as well as the regularity of these solutions. Then, variational methods were used to demonstrate approximate controllability. Finally, using a Carleman inequality and the observability inequality for the adjoint equation, the null controllability for the studied system was demonstrated.

Keywords: Partial Differential Equations. Heat Equation. Controllability. Carleman Inequality. Observability.

Sumário

1 Introdução e Resultados Principais

Um problema de controlabilidade pode ser formulado da seguinte forma: Dado um sistema de equações diferenciais, sejam ordinárias ou parciais, busca-se que a solução deste sistema atinja determinado resultado desejado. Para tanto, pode-se influenciar nas condições de contorno ou na não homogeneidade da equação.

Neste trabalho foi considerado o seguinte problema de valor inicial e de fronteira para a equação do calor linear:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f\chi_\omega & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ u = g & \text{em } \Omega \times \{t=0\} \end{cases} \tag{1.1}$$

Aqui, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, é um subconjunto aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $\omega \subset\subset \Omega$ é um aberto não vazio, $T > 0$ é fixo e $Q := \Omega \times (0,T)$ é o cilindro. A função $u = u(x,t)$ representa o estado do sistema, $f = f(x,t)$ é a função controle com suporte contido em ω, χ_ω denota a função característica de ω e $g = g(x)$ representa a função que descreve o estado inicial do sistema.

O objetivo deste trabalho é demonstrar resultados de controlabilidade para a equação do calor.

O problema (1.1) é dito aproximadamente controlável no tempo $T > 0$ se, dados um estado final $u_1 \in L^2(\Omega)$ desejado, uma condição inicial $g \in L^2(\Omega)$ e $\epsilon > 0$, existe uma função de controle $f \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução u do problema (1.1) satisfaz

$$||u(T) - u_1||_{L^2(\Omega)} < \epsilon.$$

O problema (1.1) é dito controlável a zero no tempo $T > 0$ se, dado uma condição inicial $g \in L^2(\Omega)$, existe uma função de controle $f \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução u do problema (1.1) satisfaz

$$u(T) = 0.$$

Os principais resultados obtidos neste trabalho são os seguintes:

Teorema 1.1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $\omega \subset\subset \Omega$ um aberto não vazio, $T > 0$ fixo e $g \in L^2(\Omega)$ um dado inicial. Então, o problema (1.1) é aproximadamente controlável no tempo T, com controle $f \in L^2(\omega \times (0,T))$.*

Teorema 1.1.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $\omega \subset\subset \Omega$ um aberto não vazio, $T > 0$ fixo e $g \in L^2(\Omega)$ um dado inicial. Então, o problema (1.1) é controlável a zero no tempo T, com controle $f \in L^2(\omega \times (0,T))$.*

2 Preliminares

Da Seção 2.1 até a Seção 2.4 foi tomado como base a referência [1], Capítulo 5, em que também se podem encontrar as demonstrações dos teoremas enunciados.

2.1 Espaços de Banach

Seja X um espaço vetorial. Uma **norma** em X é uma função $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ que satisfaz as seguintes propriedades:
(i) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$
(ii) $||\lambda u|| = |\lambda| \cdot ||u||$
(iii) $||u|| = 0 \iff u = 0$
para quaisquer $u, v \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

Quando X for equipado de uma norma, será denominado como **espaço normado**.

Quando $||\cdot||$ satisfizer apenas **(i)** e **(ii)**, $||\cdot||$ é dita uma **seminorma**.

A definição de norma permite definir o conceito de convergência de elementos do espaço X.

Uma sequência $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ **converge** para $u \in X$ se

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u|| = 0.$$

Neste caso, denota-se $u_n \to u$.

Uma sequência $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ é uma **sequência de Cauchy** se, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, n > N$, então

$$||u_m - u_n|| < \epsilon.$$

Se toda sequência de Cauchy converge em X, diz-se X é um **espaço completo**.

Definição 2.1.1. *Seja X um espaço normado. O **dual** (topológico) de X é definido por*

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ é aplicação linear e contínua}\}.$$

A dualidade entre os dois espaços é denotada por

$$\langle f, u\rangle = f(u), \quad \forall\, f \in X^*, u \in X.$$

*Em particular, define-se o **bidual** de X por $X^{**} = (X^*)^*$.*

Definição 2.1.2. *Quando X for um espaço vetorial normado completo, será denominado **espaço de Banach**.*

Definição 2.1.3. *Se X é um espaço normado tal que a imersão canônica $i_X : X \to X^{**}$ dada por*

$$i_X(x) = \hat{x}, \quad \text{onde} \quad \hat{x}(x^*) = x^*(x), \, \forall x^* \in X^*,$$

*é sobrejetora, diz-se que X é um **espaço reflexivo**.*

2.2 Espaços de funções contínuas e Hölder contínuas

Nesta seção será considerado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como um conjunto aberto.

Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita **contínua** se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in \Omega$,

$$||x - y|| < \delta \implies ||u(x) - u(y)|| < \epsilon.$$

Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita **Lipschitz contínua** se existe uma constante $C > 0$, chamada de **constante de Lipschitz** de u, tal que, para todo $x, y \in \Omega$,

$$|u(x) - u(y)| < C|x - y| \tag{2.1}$$

Seja $\gamma \in (0, 1]$. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita **Hölder contínua com expoente $\boldsymbol{\gamma}$** se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $x, y \in \Omega$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma. \tag{2.2}$$

Note que toda função Lipschitz contínua ou Hölder contínua é, em particular, contínua. Além disso, uma função Hölder contínua com expoente 1 é uma função Lipschitz contínua.

No que segue, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ representa um multi-índice, com $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para cada $i = 1, \ldots, n$, $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, e

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u.$$

Definição 2.2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $0 \leq k \leq \infty$. Denotam-se por $C^k(\bar{\Omega})$ o espaço de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ limitadas e de classe C^k, equipado com a norma*

$$||u||_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Em particular, para $k = 0$, denota-se $C^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$, e

$$||u||_{C(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} u(x). \tag{2.3}$$

Definição 2.2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\gamma \in (0,1]$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ limitada e contínua. A γ-ésima seminorma de u é definida por*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

Note que tal definição é, de fato, uma seminorma, pois, para qualquer função constante u, tem-se que $[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = 0$.

Definição 2.2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. O **espaço de Hölder** $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ é definido como o espaço de todas as funções $u \in C^k(\bar{\Omega})$ cuja norma*

$$||u||_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha u||_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \tag{2.4}$$

é finita.

Teorema 2.2.4. *Os espaços $C^k\left(\bar{\Omega}\right)$ e $C^{k,\gamma}\left(\bar{\Omega}\right)$ com as normas definidas acima são espaços de Banach.*

2.3 Espaços de Sobolev

2.3.1 Derivadas Fracas

Definição 2.3.1. *Seja X um espaço normado, $U \subset X$ um subconjunto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função. Define-se o **suporte** de f como o seguinte conjunto:*

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in U | f(x) \neq 0\}}.$$

Caso $\mathrm{supp}(f)$ *seja um conjunto compacto, diz-se que f é uma função com suporte compacto.*

Definição 2.3.2. *Denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço de todas as funções $\phi \in C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω. Neste caso, ϕ é dita uma **função teste**.*

Suponha que $u \in C^1(\Omega)$. Pela fórmula de integração por partes, se ϕ é uma função teste,

$$\int_\Omega u\phi_{x_i} dx = -\int_\Omega u_{x_i}\phi dx, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Note que, como o suporte de ϕ é compacto em Ω, os termos de fronteira se anulam.

Mais geralmente,

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \phi dx, \tag{2.6}$$

para qualquer multi-índice α. Isto motiva a definição de derivadas fracas.

Definição 2.3.3. *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi índice. Uma função v é dita uma **α-ésima derivada fraca** de u se, para qualquer função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx. \tag{2.7}$$

Neste caso, denota-se $v = D^\alpha u$.

Na definição acima, tem-se

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \; f|_K \in L^p(K), \, \forall K \subset \Omega \text{ com } K \text{compacto} \right\}.$$

Teorema 2.3.4. *Se a derivada fraca de uma função existe, então é única.*

É importante ressaltar que nem toda função possui derivada fraca. Um exemplo é a função $u : (0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

2.3.2 Definição de espaços de Sobolev

Definição 2.3.5. *Seja k um inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O **espaço de Sobolev** $W^{k,p}(\Omega)$ é o conjunto de todas as (classes de) funções localmente integráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que as derivadas fracas $D^\alpha u$ existem e pertencem a $L^p(\Omega)$ para cada multi índice α com $|\alpha| \leq k$. Em particular, denota-se $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.*

Definição 2.3.6. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. O **supremo essencial** de f é definido por*

$$\sup \text{ess} \, f = \inf \left\{ a \in \mathbb{R} : \mu \left(\{ x \in X : f(x) > a \} \right) = 0 \right\}.$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ será equipado com a seguinte norma:

Definição 2.3.7. *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, define-se*

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_\Omega \text{ess} \, |D^\alpha u| & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Para $1 \leq p \leq \infty, || \cdot ||_{W^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$.

Diz-se que uma sequência $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset W^{k,p}(\Omega)$ **converge** para $u \in W^{k,p}(\Omega)$ se

$$\lim_{m\to\infty} ||u_m - u||_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Neste caso, denota-se

$$u_m \to u \quad \text{em } W^{k,p}(\Omega).$$

Equipado com tal norma, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Define-se

$$W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \ f|_K \in W^{k,p}(K),\, \forall K \subset \Omega \text{ com } K\text{compacto} \right\}.$$

Quando, para cada $V \subset\subset \Omega$, valer que

$$u_m \to u \quad \text{em } W^{k,p}(V),$$

diz-se que

$$u_m \to u \quad \text{em } W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Acima, $V \subset\subset \Omega$ significa que $\bar{V} \subset \Omega$, isto é, V está compactamente contido em Ω.

Definição 2.3.8. *O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$ é denotado por $W_0^{k,p}(\Omega)$.*

Em particular, denota-se

$$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega).$$

Teorema 2.3.9 (Propriedades básicas das derivadas fracas)**.** *Sejam $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}$ e α um multi índice com $|\alpha| \leq k$. Então,*

1. *$D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ e $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ para quaisquer multi índices α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$.*

2. *$\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$, e $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.*

3. *Se $V \subset \Omega$ é aberto, então $u \in W^{k,p}(V)$.*

4. *Se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ é uma função teste, então $\phi u \in W^{k,p}(\Omega)$, e vale a regra de Leibniz:*

$$D^\alpha(\phi u) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \phi D^{\alpha-\beta} u. \tag{2.8}$$

Tal teorema mostra que as derivadas fracas possuem algumas propriedades similares às derivadas usuais.

A notação $D^\alpha u$, a menos de menção explícita, denotará derivada no sentido fraco da função u pelo restante deste trabalho.

2.3.3 Aproximações de funções em espaços de Sobolev

Nesta seção será mostrado que funções em espaços de Sobolev podem ser aproximadas por funções suaves. Os dois teoremas a seguir fornecem duas maneiras diferentes de obter tais aproximações.

Teorema 2.3.10 (Aproximação global por funções suaves). *Assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado, e seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência de funções $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \left(C^{\infty}(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)\right)$ tal que*

$$u_m \to u \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

Note que não se obtém a regularidade de u_m até a fronteira, isto é, não se pode garantir que $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\bar{\Omega})$. Para que isto seja obtido, mais regularidade da fronteira $\partial\Omega$ de Ω é necessária.

Teorema 2.3.11 (Aproximação global por funções suaves até a fronteira). *Assuma $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1, e seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência de funções $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \left(C^{\infty}(\bar{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)\right)$ tal que*

$$u_m \to u \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

2.3.4 Extensões e traço de funções em espaços de Sobolev

O teorema a seguir fornece um modo de estender funções no espaço $W^{1,p}(\Omega)$ ao espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 2.3.12 (Teorema de Extensão). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado de modo que $\Omega \subset\subset V$. Então, existe um operador linear limitado*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{2.9}$$

tal que, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos que

- *$Eu = u$ q.t.p em Ω,*
- *Eu tem suporte contido em V,*
- *$||Eu||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$, em que C é uma constante que depende apenas de p, Ω e V.*

*Neste caso, Eu é chamada de uma **extensão** de u a $\mathbb{R}^n$.*

O próximo teorema lida com o problema de assumir determinados valores para uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ na fronteira $\partial\Omega$. Como tais funções não são contínuas, não há uma única maneira de estendê-las. Ainda mais, sendo a fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1, possui medida nula em $\mathbb{R}^n$, logo, não possui um único valor possível, já que funções em $W^{k,p}$ são identificadas com funções iguais q.t.p.

Teorema 2.3.13 (Teorema do Traço)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1, $1 \leq p \leq \infty$. Então, existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega) \tag{2.10}$$

tal que

- $Tu = u|_{\partial\Omega}$ *se* $u \in \left(W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})\right)$
- $||Tu||_{L^p(\partial\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, *em que* C *é uma constante que depende apenas de* p *e* Ω*.*

Neste caso, Tu *é chamado de o* ***traço*** *de* u *em* $\partial\Omega$*.*

A definição do traço de uma função em $W^{1,p}(\Omega)$ permite outra caracterização do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.3.14. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1, e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então,*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{2.11}$$

Assim, funções em $W_0^{k,p}(\Omega)$ são vistas como funções em $W^{k,p}(\Omega)$ cujas derivadas, com exceção das de maior ordem, "se anulam na fronteira".

2.3.5 Desigualdade de Sobolev

Teorema 2.3.15 (Desigualdade de Sobolev Geral)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1.*
(i) *Se $1 \leq k < n/p$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$, em que $1/q = 1/p - k/n$. Ainda mais, vale a estimativa*

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leq C||u||_{W^{k,p}(\Omega)}, \tag{2.12}$$

em que C é uma constante que depende apenas de k, p, n, γ e Ω.
(ii) *Se $k > n/p$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então, $u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}$, em que*

$$\gamma = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right] - \dfrac{n}{p} + 1, & \text{se } n/p \notin \mathbb{Z}, \\ \text{qualquer constante positiva menor que } 1, & \text{se } n/p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ainda mais, vale a estimativa

$$||u||_{C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq C||u||_{W^{k,p}(\Omega)}, \tag{2.13}$$

em que C é uma constante que depende apenas de k, p, n e Ω.

2.4 Outros espaços de funções

Definição 2.4.1. *Denota-se por $H^{-1}(\Omega)$ o espaço dual a $H_0^1(\Omega)$, isto é,*

$$H^{-1}(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega)\right)^*.$$

A dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ será denotada por $\langle\ ,\ \rangle$. O espaço $H^{-1}(\Omega)$ será equipado com a norma

$$||f||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\left\{\langle f, u\rangle \mid u \in H_0^1(\Omega),\ ||u||_{H_0^1} \leq 1\right\}.$$

O teorema a seguir ajuda a caracterizar os elementos do espaço $H^{-1}(\Omega)$.

Teorema 2.4.2 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$)**.** *Seja $f \in H^{-1}(\Omega)$. Então, existem funções $f^0, \ldots, f^n \in L^2(\Omega)$ tais que, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\langle f, v\rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} dx. \tag{2.14}$$

Ainda mais,

$$||f||_{H^{-1}(\Omega)} = \inf\left\{\left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx\right)^{1/2}\right\}, \tag{2.15}$$

em que o ínfimo é tomado sobre todas as possíveis escolhas de $f^0, \ldots, f^n \in L^2(\Omega)$ satisfazendo (2.14).

Valendo a equação (2.14), denota-se

$$f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i}.$$

2.4.1 Espaços envolvendo tempo

Nesta seção, X denota um espaço de Banach com norma $||\cdot||$ e $T > 0$ é fixo.

Definição 2.4.3. *O espaço $L^p(0,T;X)$ é definido como o conjunto de todas as funções mensuráveis $u : [0,T] \to X$ com norma $||u||_{L^p(0,T;X)}$ finita, em que tal norma é dada por:*

- *Se $1 \leq p < \infty$,*

$$||u||_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T ||u(t)||^p dt\right)^{1/p}. \tag{2.16}$$

- *Se $p = \infty$,*

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{0\leq t\leq T} \text{ess}\, ||u(t)||. \tag{2.17}$$

Definição 2.4.4. *O espaço $C([0,T];X)$ é definido como o conjunto de todas as funções contínuas $u : [0,T] \to X$ com norma $||u||_{C([0,T];X)}$ finita, em que*

$$||u||_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} ||u(t)||. \tag{2.18}$$

O conceito de derivadas fracas na Definição 2.3.2 serve como motivação para se definir derivadas fracas no contexto de funções dependentes do tempo.

Definição 2.4.5. *Dada $u \in L^1(0,T;X)$, uma função $v \in L^1(0,T;X)$ é dita a* ***derivada fraca*** *de u, denotada por $u' = v$ se, para qualquer função teste escalar $\phi \in C_c^\infty(0,T)$, valer que*

$$\int_0^T \phi'(t)u(t)dt = -\int_0^T \phi(t)v(t)dt. \tag{2.19}$$

Também é possível definir espaços de Sobolev para funções dependentes do tempo.

Definição 2.4.6. *O* ***Espaço de Sobolev*** *$W^{1,p}(0,T;X)$ é definido como o conjunto de todas as funções $u \in L^p(0,T;X)$ que possuem derivada fraca $u' \in L^p(0,T;X)$. O espaço $W^{1,p}(0,T;X)$ será equipado com a norma*

$$||u||_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^T ||u(t)||^p + ||u'(t)||^p dt \right)^{1/p} & se \quad 1 \leq p < \infty, \\ \sup\limits_{0 \leq t \leq T} \text{ess}\, (||u(t)|| + ||u'(t)||) & se \quad p = \infty. \end{cases} \tag{2.20}$$

Em particular, denota-se

$$H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X).$$

Diversos resultados de cálculo continuam sendo válidos para derivadas fracas. Tais resultados são enunciados nos teoremas a seguir.

Teorema 2.4.7. *Seja $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Então, é possível redefinir u em um conjunto de medida nula de modo que $u \in C([0,T];X)$ e*

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)d\tau, \quad \forall \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{2.21}$$

Ainda mais, vale a estimativa

$$\max_{0 \leq t \leq T} ||u(t)|| \leq C||u||_{W^{1,p}(0,T;X)}, \tag{2.22}$$

em que C é uma constante que depende apenas de T.

Teorema 2.4.8. *Seja $u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ com derivada fraca $u' \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$. Então, é possível redefinir u em um conjunto de medida nula de modo que se tenha $u \in C\left([0,T];L^2(U)\right)$, e que a aplicação*

$$t \to ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}$$

seja absolutamente contínua, com

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} = 2\left\langle u'(t), u(t)\right\rangle \quad \forall\, 0 \leq t \leq T. \tag{2.23}$$

Ainda mais, vale a estimativa

$$\max_{0\leq t\leq T} ||u(t)||_{L^2(\Omega)} \leq C\left(||u||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||u'||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right), \tag{2.24}$$

em que C é uma constante que depende apenas de T.

Combinando os teoremas 2.4.7 e 2.4.8, junto com os resultados de extensão do Teorema 2.3.12, obtém-se o seguinte teorema, que será utilizado mais adiante.

Teorema 2.4.9. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com fronteira ∂U de classe C^1, e $m \in \mathbb{Z}_+$. Se $u \in L^2\left(0,T;H^{m+2}(\Omega)\right)$ é uma função com derivada fraca $u' \in L^2\left(0,T;H^m(\Omega)\right)$, então, é possível redefinir u em um conjunto de medida nula de modo que*

$$u \in C\left([0,T];H^{m+1}(\Omega)\right). \tag{2.25}$$

Ainda mais, vale a estimativa

$$\max_{0\leq t\leq T} ||u(t)||_{H^{m+1}(\Omega)} \leq C\left(||u||_{L^2(0,T;H^{m+2}(\Omega))} + ||u'||_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}\right), \tag{2.26}$$

em que C é uma constante que depende apenas de T, Ω e m.

2.5 Equação de Laplace

Esta seção é baseada na referência [1], Capítulo 6. Trata-se do seguinte problema de fronteira da equação de Laplace:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.27}$$

Acima, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma função dada, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado e Δ representa o operador Laplaciano, isto é,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Em $H_0^1(\Omega)$ define-se a seguinte forma bilinear:

$$B[u,v](x) := -\int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x) v_{x_i}(x)dx = -\int_\Omega Du(x)\cdot Dv(x)dx, \tag{2.28}$$

em que $\cdot$ representa o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.5.1 (Soluções Fracas)**.** *Uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é dita uma* ***solução fraca*** *do problema (2.27) se, para toda função $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle\,,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a dualidade de $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 2.5.2 (Regularidade das Soluções Fracas)**.** *Suponha $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca do problema (2.27). Se a fronteira $\partial\Omega$ de Ω é de classe C^2, então $u \in H^2(\Omega)$, e vale a estimativa*

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C \left(||f||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)} \right),$$

em que C é uma constante que depende apenas de Ω.

O Teorema 2.5.2 garante a regularidade $H^2(\Omega)$ para a solução fraca u do problema (2.27) se $f \in L^2(\Omega)$ e $\partial\Omega$ é de classe C^2. Ainda mais, o teorema a seguir diz que a solução fraca u pertence a $H^{m+2}(\Omega)$ se $f \in H^m(\Omega)$ e $\partial\Omega$ é de classe C^{m+2}.

Teorema 2.5.3. *Suponha $f \in H^m(\Omega)$ e seja $u \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca do problema (2.27). Se a fronteira $\partial\Omega$ de Ω é de classe C^{m+2}, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$, e vale a estimativa*

$$||u||_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \left(||f||_{H^m(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)} \right),$$

em que C é uma constante que depende apenas de Ω e m.

2.6 Desigualdades de Young e de Gronwall

Nesta seção as desigualdades de Young e de Gronwall (em sua versão diferencial) serão enunciadas e demonstradas. As demonstrações são baseadas em [1], Apêndice B.

Teorema 2.6.1 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $p, q \in (1, \infty)$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então, para quaisquer números $a, b > 0$, vale que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Utilizando a convexidade da função exponencial, vale que

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\log a^p} + \frac{1}{q} e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

$\square$

Teorema 2.6.2 (Desigualdade de Young com ϵ)**.** *Sejam $\epsilon > 0$ e $p, q \in (1, \infty)$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então, para quaisquer números $a, b > 0$, vale que

$$ab \leq \epsilon\, a^p + C(\epsilon)\, b^q,$$

em que $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p}\, q^{-1}$.

Demonstração. Note que

$$ab = \left((\epsilon p)^{1/p} a\right) \left(\frac{b}{(\epsilon p)^{1/p}}\right).$$

Aplicando a Desigualdade de Young do Teorema 2.6.1, obtém-se

$$ab \leq \epsilon\, a^p + (\epsilon p)^{-q/p}\, q^{-1}\, b^q.$$

□

Teorema 2.6.3 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Sejam $\eta : [0, T] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa e absolutamente contínua, e $\phi, \psi : [0, T] \to \mathbb{R}$ funções integráveis não negativas. Se*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \qquad \text{q.t.p. em } [0, T]. \tag{2.29}$$

Então,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right], \qquad \forall\, 0 \leq t \leq T. \tag{2.30}$$

Em particular, se $\psi \equiv 0$ e $\eta(0) = 0$, então

$$\eta \equiv 0.$$

Demonstração. Usando a desigualdade (2.29), tem-se que

$$\frac{d}{ds}\left(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\right) = e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\left(\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)\right) \leq e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\psi(s), \quad \text{q.t.p. em } [0, T].$$

Integrando em s de 0 a t, em que $0 \leq t \leq T$, obtém-se

$$\eta(t)e^{-\int_0^s \phi(r)dr} - \eta(0) \leq \int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\psi(s)ds, \quad \forall\, 0 \leq t \leq T.$$

Como ϕ é uma função não negativa,

$$-\int_0^s \phi(r)dr \leq 0.$$

Sendo a função exponencial crescente, multiplicando por $\psi(s)$,

$$e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\psi(s) \leq \psi(s), \quad \forall\, 0 \leq s \leq T.$$

Logo,

$$\eta(t)e^{-\int_0^s \phi(r)dr} - \eta(0) \leq \int_0^t \psi(s)ds, \quad \forall\, 0 \leq t \leq T,$$

o que implica a desigualdade (2.30). □

2.7 Convergência Fraca

Sejam X um espaço de Banach real e X^* o seu dual topológico.

Definição 2.7.1. *Uma sequência* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ ***converge fracamente*** *para* $u \in X$ *se*

$$\langle u^*, u_k \rangle \to \langle u^*, u \rangle\,, \quad \forall\, u^* \in X^*.$$

Neste caso, denotamos

$$u_k \rightharpoonup u.$$

Alguns fatos sobre convergência fraca serão enunciados a seguir. As demonstrações podem ser encontradas em [2].

Teorema 2.7.2. *Se* $u_k \to u$ *em* X*, então* $u_k \rightharpoonup u$ *em* X*.*

Vale notar que a recíproca não é verdadeira. Basta considerar o espaço das sequências

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty \right\},$$

e a base canônica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Temos que a sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge fortemente, mas $e_n \rightharpoonup 0$ em $\ell^2(\mathbb{N})$.

Teorema 2.7.3. *Se* $u_k \rightharpoonup u$ *em* X*, então* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *é uma sequência limitada em* X*. Ainda mais,*

$$||u|| \leq \liminf_{k\to\infty} ||u_k||.$$

Teorema 2.7.4 (Compacidade fraca)**.** *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *uma sequência limitada em* X*. Então, existem uma subsequência* $\left\{u_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ *e* $u \in X$ *tais que*

$$u_{k_j} \rightharpoonup u.$$

2.8 Teorema da Unicidade de Holmgren para a equação do calor adjunta

Esta seção é baseada em [3], Capítulo 5, e em [4], Seção 5.3, em que se pode encontrar as demonstrações para os fatos que serão enunciados. Neste trabalho, porém, será considerado apenas o caso particular do operador diferencial adjunto ao operador diferencial do calor.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $T > 0$. Considere o operador diferencial adjunto ao operador diferencial do calor P, definido em $\Omega \times (0, T)$ por

$$P = \partial_t + \Delta.$$

Definição 2.8.1. *Um hiperplano H em $\mathbb{R}^{n+1}$ é dito* ***característico*** *do operador adjunto ao operador do calor P se o seu vetor normal $(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um zero do operador laplaciano Δ, isto é, um zero de $\Delta(\xi, \zeta) = |\xi|^2$. Em particular, os hiperplanos característicos do operador P possuem vetores da forma $(0, \pm 1)$ como vetores normais unitários, isto é, os hiperplanos característicos são paralelos ao hiperplano $t = 0$.*

Teorema 2.8.2 (Holmgren)**.** *Seja u uma solução de $Pu = 0$ no aberto $Q_1 \subset \mathbb{R}^n$, em que P é o operador adjunto ao operador do calor. Suponha que $u = 0$ em um subconjunto aberto não vazio Q_2 de Q_1. Então, $u = 0$ em Q_3, em que Q_3 é um subconjunto aberto de Q_1 que contém Q_2, tal que todo hiperplano característico de P que intersecta Q_3, também intersecta Q_1.*

2.9 Mínimos de Funcionais

Nesta seção serão definidas algumas propriedades para funcionais em espaços de Banach e enunciado um teorema que garante a existência de um mínimo para funcionais neste espaço que satisfizerem certas propriedades. Para mais informações, veja [2], Seção 3.5.

Durante toda a seção, X denotará um espaço de Banach reflexivo e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ um funcional em X.

Definição 2.9.1. *O funcional φ é dito* ***semi-contínuo inferiormente*** *se, para qualquer sequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ com $u_k \to u$ em X, vale que*

$$\varphi(u) \leq \liminf_{k \to \infty} \varphi(u_k).$$

Em particular, todo funcional contínuo é semi-contínuo inferiormente.

Definição 2.9.2. *O funcional φ é dito* ***convexo*** *se, para quaisquer $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$,*

$$\varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Definição 2.9.3. *O funcional φ é dito* ***coercivo*** *se*

$$\lim_{||x|| \to \infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Teorema 2.9.4. *Seja $\varphi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semi-contínuo inferiormente, convexo e coercivo em um espaço de Banach reflexivo X. Então, φ assume um mínimo em X.*

3 A equação do calor

Este capítulo é baseado em [1], Capítulo 7. Sempre se assumirá que $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, é um aberto e limitado, $Q := \Omega \times (0, T]$, em que $T > 0$ é fixo. O objetivo é estudar o problema de valor inicial e de fronteira para a seguinte equação do calor linear,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \\ u = g & \text{em } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{3.1}$$

Acima, $f : Q \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções dadas e $u = u(x, t)$ é a incógnita do sistema.

3.1 Definição de Soluções Fracas

Considere a forma bilinear em $H_0^1(\Omega)$ definida por (2.28), isto é,

$$B[u, v](x) := -\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n u_{x_i}(x) v_{x_i}(x)\right] dx = -\int_\Omega [Du(x) \cdot Dv(x)]\, dx,$$

em que $\cdot$ representa o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.1.1 (Soluções fracas)**.** *Sejam $f \in L^2(Q)$ e $g \in L^2(\Omega)$. Uma função*

$$u \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \text{ com } u' \in L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$$

é dita uma ***solução fraca*** *para o problema de valor inicial e de fronteira (3.1) se*

$$\langle u', v\rangle + B[u, v] = (f, v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \text{ q.t.p. em } [0, T], \tag{3.2}$$

$$u(0) = g \tag{3.3}$$

Acima, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a dualidade em $L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$, $(\cdot, \cdot)$ representa o produto interno de $L^2(\Omega)$. Note que, pelo Teorema 2.4.8, temos que, $u \in C\left([0, T]; L^2(\Omega)\right)$. Logo, a condição (3.3) faz sentido.

3.2 Construção de soluções fracas: aproximações de Galerkin

O *Método de Galerkin* para encontrar soluções fracas para o problema (3.1) consiste em, primeiro, construir soluções fracas a certas aproximações de dimensão finita, e depois, passar o limite para obter uma solução fraca do problema original.

Assuma que $w_k = w_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, são funções de classe C^1 de modo que

$$\{w_k\}_{k=1}^\infty \text{ forma uma base } \textbf{ortogonal} \text{ de } H_0^1(\Omega), \tag{3.4}$$

e

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ forma uma base } \textbf{ortonormal} \text{ de } L^2(\Omega). \tag{3.5}$$

Como o operador $-\Delta$ é compacto e simétrico, então existe uma base enumerável e ortonormal de $L^2(\Omega)$ consistindo apenas de autovetores de $-\Delta$. Logo, tal base existe de fato. Para mais informações veja [1].

Para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, o objetivo é encontrar uma função $u_m : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ da forma

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, \tag{3.6}$$

tal que

$$(u_m', w_k) + B[u_m, w_k] = (f, w_k), \tag{3.7}$$

$$d_m^k(0) = (g, w_k), \tag{3.8}$$

para cada $k = 1, \dots, m$. Posteriormente, será provado que existe uma subsequência de $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ que converge para uma função u, e esta função u é solução fraca de (1.1). Ainda mais, tal solução é única (Teorema 3.2.4) e possui uma boa regularidade (Teorema 3.3.1).

Teorema 3.2.1 (Construção das soluções aproximadas)**.** *Sejam $f \in L^2(Q)$ e $g \in L^2(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, existe uma única função u_m da forma (3.6) satisfazendo o problema (3.7) e (3.8).*

Demonstração. Buscando encontrar uma função u_m da forma (3.6), tem-se que

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k \implies u_m'(t) = \sum_{k=1}^{m} {d_m^k}'(t) w_k.$$

Como $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$,

$$(u_m'(t), w_k) = {d_m^k}'(t) \tag{3.9}$$

Ainda mais, denotando $B_{l,k}(t) := B[w_l, w_k]$, $k, l = 1, \dots, m$, pela bilinearidade de B,

$$B[u_m, w_k] = \sum_{l=1}^{m} B_{l,k}(t) d_m^l(t). \tag{3.10}$$

Denotando por $f^k(t) := (f(t), w_k)$, a equação (3.7) implica que

$${d_m^k}'(t)(t) + \sum_{l=1}^{m} B_{l,k}(t) d_m^l(t) = f^k(t) \quad (k = 1, \dots, m) \tag{3.11}$$

Junto com as condições (3.8), o problema de encontrar as funções d_m^k pode ser descrito como o seguinte problema de valor inicial de um sistema linear de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} D_m'(t) = B_m(t) D_m(t) + F^k(t), \\ D_m(0) = D_m^0, \end{cases} \tag{3.12}$$

em que $D_m(t) := \left(d_m^1(t), \ldots, d_m^m(t)\right)^T$, $B_m(t) := (B_{l,k}(t))_{m\times m}$, $F^k(t) := \left(f^1(t), \ldots, f^m(t)\right)^T$ e $D_m^0 = ((g, w_1), \ldots, (g, w_k))^T$. Tal sistema possui única solução (ver referência [5], capítulo 1, seção 4, corolário 5), logo existe uma única função u_m da forma (3.6) satisfazendo (3.7) e (3.8). □

O teorema a seguir trata de uma estimativa de energia que será usada, posteriormente, para mostrar que existe uma subsequência $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ que converge para uma função que é solução única de (3.1).

Teorema 3.2.2 (Estimativas de Energia)**.** *As soluções aproximadas u_m obtidas pelo Teorema 3.2.1 satisfazem a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned}\max_{0\le t\le T} ||u_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||u_m||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||u_m'||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\ \le C\left(||f||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||g||_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Demonstração.

Parte 1: Multiplicando a equação (3.7) por $d_m^k(t)$, obtém-se

$$(u_m', d_m^k w_k) + B[u_m, d_m^k w_k] = (f, d_m^k).$$

Somando em $k = 1, \ldots, m$,

$$(u_m', u_m) + B[u_m, u_m] = (f, u_m), \quad \text{q.t.p. em } [0, T]. \tag{3.14}$$

Note que, pela definição de B em (2.28),

$$||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} = B[u_m, u_m] + ||u_m||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.15}$$

Ainda mais, pela desigualdade de Young, isto é, o Teorema 2.6.1,

$$|(f, u_m)| \le \frac{1}{2}||f||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||u_m||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Como

$$(u_m', u_m) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u_m||^2_{L^2(\Omega)}\right) \quad \text{q.t.p. em } [0, T],$$

substituindo em (3.14), tem-se que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u_m||^2_{L^2(\Omega)}\right) + ||u_m||^2_{H_0^1(\Omega)} - ||u_m||^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{2}||f||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||u_m||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Multiplicando por 2, obtém-se constantes C_1 e C_2 de modo que,

$$\frac{d}{dt}\left(||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + 2||u_m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} \le C_1||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C_2||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}, \text{q.t.p. em } [0, T]. \tag{3.16}$$

Parte 2: Defina as seguintes funções:

$$\eta(t) := ||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.17}$$

$$\xi(t) := ||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.18}$$

Por (3.16), vale que

$$\eta'(t) \leq C_1\eta(t) + C_2\xi(t) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Pela desigualdade de Gronwall (isto é, Teorema 2.6.3), obtém-se a estimativa

$$\eta'(t) \leq e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2\int_0^t \xi(s)ds\right) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.19}$$

Mas, pela ortogonalidade da base $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\eta(0) = ||u_m(0)||^2_{L^2\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} ||d_m^k(0)w_k||_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{m} ||(g, w_k)w_k||_{L^2(\Omega)} \leq ||g||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$\eta(t) \leq e^{C_1 t}\left(||g||^2_{L^2(\Omega)} + C_2\int_0^t \xi(s)ds\right) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Usando as definições de η e ξ, o fato de que $e^{C_1 t}$ possui máximo em $[0, T]$, e que a desigualdade é válida para todo $0 \leq t \leq T$, o máximo é tomado para obter a seguinte desigualdade:

$$\max_{0\leq t\leq T} ||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(||g||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.20}$$

Parte 3: Integrando a equação (3.16) de 0 a T,

$$||u_m||^2_{L^2(\Omega)}\Big|_0^T + 2||u_m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C_1||u_m||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C_2||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Logo,

$$||u_m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C_1||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C_2||u_m||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2}||u_m(0)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a estimativa (3.20),

$$||u_m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C\left(||g||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right). \tag{3.21}$$

Parte 4: Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ fixo, com norma $||v||_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Como $\{w_k\}_{k=1}^{m}$ é um conjunto ortogonal de $H_0^1(\Omega)$, existe uma decomposição

$$v = v^1 + v^2,$$

em que $v^1 \in \operatorname{span}\{w_k\}_{k=1}^m$ e $v^2 \in \left[\operatorname{span}\{w_k\}_{k=1}\right]^\perp$, isto é, $(v^2, w_k) = 0$ para cada $k = 1, \dots, m$ (ver referência [2], Corolário 5.10). Em particular,

$$||v^1||_{H_0^1(\Omega)} \leq ||v||_{H_0^1(\Omega)} \leq 1.$$

A partir da equação (3.7), tem-se que

$$(u'_m, v^1) + B[u_m, v^1] = (f, v^1).$$

Pela expressão de u_m em (3.6), obtém-se que

$$\langle u'_m, v\rangle = (u'_m, v) = (u'_m, v^1) = (f, v^1) - B[u_m, v^1].$$

Logo,

$$|\langle u'_m, v\rangle| \leq C\left(||f||_{L^2(\Omega)} + ||u_m||_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Mas, por hipótese, $||v^1||_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$, logo, pela definição de $||\cdot||_{H^{-1}(\Omega)}$,

$$||u'_m||_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\left(||f||_{L^2(\Omega)} + ||u_m||_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Elevando a última desigualdade ao quadrado e integrando de 0 a T,

$$||u'_m||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(||g||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right). \tag{3.22}$$

Somando as desigualdades (3.16), (3.20) e (3.22), obtém-se a estimativa desejada. □

A partir disto, pode-se demonstrar a existência de uma solução fraca para a equação do calor (3.1).

Teorema 3.2.3 (Existência de Solução Fraca)**.** *Sejam $f \in L^2(Q)$ e $g \in L^2(\Omega)$. Então, existe uma solução fraca u do problema (3.1).*

Demonstração. Como f e g são dados, sua norma se mantém constante. Logo, pela estimativa de energia (3.13) do Teorema 3.2.2, a sequência $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e a sequência $\{u'_m\}_{m=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Pelo Teorema 2.7.4, existe uma subsequência $\left\{u_{m_k}\right\}_{k=1}^\infty$ e uma função $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, com $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, de modo que

$$\begin{cases} u_{m_k} \rightharpoonup u & \text{em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ u'_{m_k} \rightharpoonup u' & \text{em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{cases} \tag{3.23}$$

Seja N um inteiro fixo e $v \in C^1([0,T];H_0^1(\Omega))$ uma função da forma

$$v(t) = \sum_{k=1}^N d_k(t) w_k, \tag{3.24}$$

em que $d_1, \ldots, d_n$ são funções suaves com $d_i(T) \equiv 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Note que o conjunto das funções da forma acima, tomando cada $N = 1, 2, \ldots$, forma um conjunto denso em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Para $m \geq N$, multiplica-se a equação (3.7) por d_k, soma-se de $k = 1$ a $k = N$ e integra-se de 0 a T. Isto fornece a igualdade

$$\int_0^T \langle u_m', v\rangle\, dt + B[u_m, v] = \int_0^t (f, v) dt. \tag{3.25}$$

Em particular, a igualdade acima vale para $m = m_k$, em que k é tomado suficientemente grande de modo que $m_k \geq N$. Utilizando a convergência fraca de (3.23),

$$\int_0^T \langle u', v\rangle\, dt + B[u, v] = \int_0^T (f, v) dt \tag{3.26}$$

Pelo Teorema 2.3.10, o conjunto das funções v da forma (3.24) é denso em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, logo, a igualdade acima vale para toda $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Assim,

$$\langle u', v\rangle + B[u, v] = (f, v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ \text{q.t.p. em } [0, T]. \tag{3.27}$$

Ainda mais, pelo Teorema 2.4.8 temos que $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, logo u satisfaz (3.2). Para que u seja solução fraca, então basta provar a condição inicial (3.3). Para isto, usando integração por partes em (3.26),

$$\int_0^T -\langle v', u\rangle + B[u, v] dt = \int_0^T (f, v) dt + (u(0), v(0)) \tag{3.28}$$

para toda $v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$ com $v(T) = 0$. Por outro lado, integrando a igualdade (3.25) por partes,

$$\int_0^T -\langle v', u_m\rangle + B[u_m, v] dt = \int_0^T (f, v) dt + (u_m(0), v(0)).$$

Como anteriormente, em particular, a equação acima vale para $m = m_k$ suficientemente grande de modo que $m_k \geq N$. Aplicando-se (3.23),

$$\int_0^T -\langle v', u\rangle + B[u, v] dt = \int_0^T (f, v) dt + (g, v(0)). \tag{3.29}$$

Comparando as equações (3.28) e (3.29), obtém-se $u(0) = g$. Conclui-se que u é solução fraca da equação do calor (3.1). □

Finalmente, será provado que tal solução é única.

Teorema 3.2.4 (Unicidade das soluções fracas)**.** *A solução fraca u da equação do calor (3.1) é única.*

Demonstração. Sejam u_1, u_2 soluções de (3.1). Então, a função $u := u_1 - u_2$ é solução de (3.1) com $f \equiv g \equiv 0$. Substituindo $v = u$ na equação (3.27), tem-se que

$$\langle u', u \rangle + B[u, u] = 0.$$

Usando o teorema 2.4.8,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u||^2_{L^2(\Omega)}\right) = \langle u_t, u \rangle .$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u||^2_{L^2(\Omega)}\right) + B[u, u] = 0.$$

Mas, pela definição de B em (2.28)

$$B[u, u] \geq -||u||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u||^2_{L^2(\Omega)}\right) \leq ||u||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Pela desigualdade de Gronwall no Teorema 2.6.3, tem-se que

$$u \equiv 0.$$

Portanto,

$$u_1 = u_2.$$

□

3.3 Regularidade da solução fraca

Nesta seção serão provados resultados de regularidade da solução u para o problema da equação do calor (3.1) uma vez que os dados iniciais, de fronteira e da não homogeneidade da equação sejam regulares.

Teorema 3.3.1 (Regularidade das soluções)**.**
(i) *Assuma que $g \in H^1_0(\Omega)$ e $f \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$. Se $u \in L^2\left(0, T; H^1_0(\Omega)\right)$ é uma função com $u' \in L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$ e é solução fraca da equação do calor (3.1), então*

$$u \in \left(L^2\left(0, T; H^2(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0, T; H^1_0(\Omega)\right)\right), u' \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

Ainda mais, vale a estimativa

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq t\leq T} \text{ess}\, ||u(t)||_{H^1_0(\Omega)} + ||u||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + ||u'||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ \leq C\left(||f||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||g||_{H^1_0(\Omega)}\right), \end{aligned} \tag{3.30}$$

em que C é uma constante que depende apenas de Ω e T.
(ii) *Assuma que, além das hipóteses do item (i),*

$$g \in H^2(\Omega),\ f' \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Então,

$$u \in L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\right), u' \in \left(L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\right)$$
$$u'' \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right).$$

Ainda mais, vale a estimativa

$$\begin{aligned} \sup_{0\le t\le T} \text{ess} \left(||u(t)||_{H^2(\Omega)} + ||u'(t)||_{L^2(\Omega)}\right) + ||u'(t)||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||u''||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\ \le C\left(||f||_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} + ||g||_{H^2(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Demonstração.

(i) Para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, multiplica-se a equação (3.7) por ${d_m^k}'(t)$ e soma-se para $k = 1, \ldots, m$. Isto fornece

$$(u_m', u_m') + B\left[u_m, u_m'\right] = (f, u_m'), \quad \text{q.t.p. em } [0,T].$$

Por definição,

$$B\left[u_m, u_m'\right] = -\int_\Omega \left[Du_m(x)\cdot Du_m'(x)\right]dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}B\left[u_m,u_m\right]\right).$$

Além disso, pela Desigualdade de Young com ϵ, isto é, o Teorema 2.6.2, para cada $\epsilon > 0$,

$$|(f, u_m')| \le \frac{C}{\epsilon}||f||^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon||u_m'||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Como $(u_m', u_m') = ||u_m'||^2_{L^2(\Omega)}$, a equação (3.3) implica que

$$||u_m'||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}B\left[u_m,u_m\right]\right) \le \frac{C}{\epsilon}||f||^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon||u_m'||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Seja $t_m \in [0,T]$ tal que $\sup\limits_{0\le t\le T} B\left[u_m(t),u_m(t)\right] = B\left[u_m(t_m),u_m(t_m)\right]$. Então, integrando a desigualdade acima de 0 a t_m,

$$\begin{aligned} ||u_m'||^2_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))} + \sup_{0\le t\le T}\frac{1}{2}B\left[u_m(t),u_m(t)\right] \le \frac{C}{\epsilon}||f||^2_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))} + \epsilon||u_m'||^2_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))} \\ -\frac{1}{2}B\left[u_m(0),u_m(0)\right]. \end{aligned}$$

Similarmente, integrando de 0 a T a mesma expressão,

$$\begin{aligned} ||u_m'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2}B\left[u_m(T),u_m(T)\right] \le \frac{C}{\epsilon}||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \epsilon||u_m'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ -\frac{1}{2}B\left[u_m(0),u_m(0)\right]. \end{aligned}$$

Somando as duas últimas inequações obtidas,

$$\begin{aligned}||u_m'||^2_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))} + \sup_{0\le t\le T}\frac{1}{2}B\left[u_m(t),u_m(t)\right] + ||u_m'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2}B\left[u_m(T),u_m(T)\right]\\ \le \frac{C}{\epsilon}||f||^2_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))} + \epsilon||u_m'||^2_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega))} - \frac{1}{2}B\left[u_m(0),u_m(0)\right]\\ +\frac{C}{\epsilon}||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \epsilon||u_m'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} - \frac{1}{2}B\left[u_m(0),u_m(0)\right].\end{aligned}$$

Usando o fato de que normas são positivas, e tomando $\epsilon = 1/4$, reduz-se o resultado acima à seguinte estimativa

$$\int_0^T ||u_m'||^2_{L^2(\Omega)}dt + \sup_{0\le t\le T} B\left[u_m(t),u_m(t)\right] \le C\left(B\left[u_m(0),u_m(0)\right] + ||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right).$$

Mas, pelo Teorema 3.2.2,

$$B\left[u_m(0),u_m(0)\right] \le ||u_m(0)||_{H^1_0(\Omega)} \le C\left(||f||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||g||_{L^2(\Omega)}\right).$$

Logo, somando a última desigualdade com a desigualdade anterior,

$$||u_m'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \sup_{0\le t\le T} B\left[u_m(t),u_m(t)\right] \le C\left(||f||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||g||_{L^2(\Omega)}\right).$$

Como $B\left[u_m(t),u_m(t)\right] = ||u_m(t)||_{H^1_0(\Omega)} - ||u_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}$, usando, novamente, a estimativa de energia (3.13),

$$||u_m'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \sup_{0\le t\le T} ||u_m(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} \le C\left(||g||^2_{H^1_0(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right).$$

Como na demonstração do Teorema 3.2.3, tomando o limite pela subsequência $m_k \to \infty$, de modo que $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_{m_k}$ seja solução da equação do calor (3.1),

$$u \in L^\infty\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right), u' \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Em particular,

$$(u',v) + B\left[u,v\right] = (f,v) \quad 0\le t\le T \quad \text{q.t.p. em } [0,T].$$

Denotando $h := f - u'$, a equação acima pode ser reescrita na forma

$$B[u,v] = (h,v).$$

Por definição,

$$h(t) \in L^2(\Omega) \quad \text{q.t.p. em } [0,T].$$

Logo, pelo Teorema 2.5.2, $u(t) \in H^2(\Omega)$ q.t.p. em $[0,T]$, com a estimativa

$$\begin{aligned}||u(t)||^2_{H^2(\Omega)} &\le C\left(||h(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\le C\left(||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u'(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Integrando de 0 a T, e utilizando as estimativas obtidas para $||u||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ e para $||u'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$, obtém-se que

$$||u||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C\left(||f||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||g||_{L^2(\Omega)}\right).$$

O que implica que

$$u \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right).$$

Assim, fica provada a parte (i) do teorema.

(ii) Agora, suponha $g \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e $f \in H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$. Para cada $m \geq 1$, deriva-se a equação (3.7) com relação a t, e tem-se

$$(u''_m, w_k) + B\left[u'_m, w_k\right] = (f', w_k), \quad k = 1, \dots, m.$$

Multiplicando a equação acima por ${d^k_m}'(t)$, e somando para $k = 1, \dots, m$, obtém-se que

$$(u''_m, u'_m) + B\left[u'_m, u'_m\right] = (f', u'_m).$$

Usando o Teorema 2.4.8 e definição de $B[\cdot,\cdot]$ do lado esquerdo, e a desigualdade de Hölder e de Young do lado direito da equação acima, tem-se que

$$\frac{d}{dt}||u'_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u'_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}||f'(t)||_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||u'_m(t)||_{L^2(\Omega)}. \tag{3.32}$$

Integrando a desigualdade (3.32) de 0 a t,

$$\begin{aligned}||u'_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t ||u'_m(s)||_{L^2(\Omega)}\,ds \leq ||u'_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||f'(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds \\ + \frac{1}{2}\int_0^t ||u'_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds.\end{aligned}$$

Denotando $\eta(t) = \displaystyle\int_0^t ||u'_m(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds$, a desigualdade acima pode ser reescrita como

$$\eta'(t) + \int_0^t ||u'_m(t)||^2_{H^1_0(\Omega)}\,ds \leq ||u'_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_0^t ||f'(s)||^2_{L^2(\Omega)} + \eta(t)$$

Utilizando a desigualdade de Gronwall, isto é, o Teorema 2.6.3, como $\eta(0) = 0$,

$$\begin{aligned}\eta(t) + \int_0^t ||u'_m(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq C\int_0^t \left(||u'_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^r ||f'(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds\right)dr \\ &\leq CT\left(||u'_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t ||f'(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds\right).\end{aligned}$$

Considerando os casos particulares de $t = T$ e de $t = t_0$, em que $||u'_m(t_0)||^2_{L^2(\Omega)} = \sup_{t\in[0,T]} ||u'_m||^2_{L^2(\Omega)}$ e somando-os, obtém-se que

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T} ||u'_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T ||u'_m(t)||^2_{H^1_0(\Omega)}dt &\leq C\left(||u'_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + ||f'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right)\\ &\leq C\left(||u_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right).\end{aligned} \tag{3.33}$$

O objetivo agora é estimar o primeiro termo do lado direito da desigualdade (3.33). Como $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ foi tomada como a coleção completa de autofunções suaves para o operador $-\Delta$ em $H^1_0(\Omega)$, vale que $\Delta u_m = 0$ em $\partial\Omega$. Assim,

$$||u_m(0)||^2_{H^2(\Omega)} \leq C||\Delta u_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} = C\left(u_m(0), \Delta^2 u_m(0)\right).$$

Mas $\Delta^2 u_m(0) \in \operatorname{span}\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $(u_m(0), w_k) = (g, w_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que, utilizando a desigualdade de Young, isto é, o Teorema 2.6.1,

$$\begin{aligned}||u_m(0)||^2_{H^2(\Omega)} \leq C\left(g, \Delta^2 u_m(0)\right) &= C\left(\Delta g, \Delta u_m(0)\right)\\ &\leq C\frac{1}{2}||u_m(0)||^2_{H^2(\Omega)} + C||g||^2_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Isto implica que

$$||u_m(0)||_{H^2(\Omega)} \leq C||g||_{H^2(\Omega)}.$$

Substituindo na desigualdade (3.33), obtém-se a primeira estimativa desejada.

$$\sup_{0\leq t\leq T} ||u'_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T ||u'_m(t)||^2_{H^1_0(\Omega)}dt \leq C\left(||g||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.34}$$

Para a próxima estimativa, note que

$$B[u_m, w_k] = \left(f - u'_m, w_k\right). \tag{3.35}$$

Multiplique a equação acima por $\lambda_k d^k_m(t)$ e some para $k \in \mathbb{N}$, em que λ_k representa o k-ésimo autovalor do operador $-\Delta$ em $H^1_0(\Omega)$. Isto implica que, para $0 \leq t \leq T$,

$$B[u_m, -\Delta u_m] = (f - u'_m, \Delta u_m). \tag{3.36}$$

Como $\Delta u_m = 0$ em $\partial\Omega$,

$$B[u_m, -\Delta u_m] = (-\Delta u_m, -\Delta u_m) = ||\Delta u_m||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Mas

$$||u_m||^2_{H^2(\Omega)} \leq ||\Delta u_m||^2_{L^2(\Omega)} + ||u_m||_{L^2(\Omega)},$$

logo, a igualdade (3.36) implica que

$$||u_m||_{H^2(\Omega)} \leq C\left(||f||_{L^2(\Omega)} + ||u'_m||_{L^2(\Omega)} + ||u_m||_{L^2(\Omega)}\right).$$

Esta desigualdade, juntamente com a estimativa (3.34), leva a conclusão de que

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left(||u_m'(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||u_m(t)||^2_{H^2(\Omega)}\right)+\int_0^T ||u_m'||^2_{H^1_0(\Omega)}\,dt$$
$$\leq C\left(||f||_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}+||g||^2_{H^2(\Omega)}\right).$$

Tomando o limite pela subsequência $m_k\to\infty$, de modo que $u=\lim_{k\to\infty}u_{m_k}$ seja solução da equação do calor (3.1),

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left(||u'(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||u(t)||^2_{H^2(\Omega)}\right)+\int_0^T ||u'||^2_{H^1_0(\Omega)}\,dt$$
$$\leq C\left(||f||_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}+||g||^2_{H^2(\Omega)}\right).$$

Para completar a demonstração do teorema, basta provar que $u''\in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$. Para isso, tome $v\in H^1_0(\Omega)$ com $||v||_{H^1_0(\Omega)}\leq 1$. Tal função pode ser escrita como $v=v^1+v^2$, em que $v^1\in\text{span}\left\{w_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $v^2\in\left[\text{span}\left\{w_k\right\}_{k=1}\right]^{\perp}$. Então,

$$\langle u_m'',v\rangle=(u_m'',v)=(u_m'',v^1)=(f',v^1)-B[u_m',v^1]\quad\text{q.t.p. em }[0,T].$$

Como $||v^1||_{H^1_0(\Omega)}\leq 1$,

$$||u_m''||_{H^{-1}(\Omega)}\leq|\langle u_m'',v\rangle|\leq C\left(||f'||_{L^2(\Omega)}+||u_m'||_{H^1_0(\Omega)}\right).$$

Isto implica que u_m'' é limitado em $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$. Tomando o limite pela subsequência $m_k\to\infty$, de modo que $u=\lim_{k\to\infty}u_{m_k}$ seja solução da equação do calor (3.1), obtém-se que

$$u''\in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right),$$

com a estimativa desejada. □

Uma vez estabelecida tal regularidade das soluções pelo teorema acima, é possível construir outros resultados de regularidade. O teorema abaixo é conhecido como *efeito regularizante* das soluções da equação do calor.

Teorema 3.3.2. *Suponha que*

$$g\in H^{2m+1}(\Omega),\,\frac{d^kf}{dt^k}\in L^2\left(0,T;H^{2m-2k}(\Omega)\right),$$

para $k=0,\ldots,m$. Suponha, também, que as seguintes condições de compatibilidade de m-ésima ordem sejam válidas:

$$\begin{cases} g_0 := g\in H^1_0(\Omega),\\ g_1 := f(0)+\Delta g_0\in H^1_0(\Omega),\\ g_2 := \dfrac{d}{dt}f(0)+\Delta g_1\in H^1_0(\Omega),\\ \vdots\\ g_m := \dfrac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}f(0)+\Delta g_{m-1}\in H^1_0(\Omega).\end{cases}\tag{3.37}$$

Então,

$$\frac{d^k u}{dt^k} \in L^2\left(0, T; H^{2m+2-2k}(\Omega)\right),$$

para $k = 0, \ldots, m$. *Ainda mais, vale a estimativa*

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(\Omega))} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m-2k}(\Omega))} + ||g||_{H^{2m+1}(\Omega)} \right). \tag{3.38}$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Pelo Teorema 3.3.1, o caso $m = 0$ é válido. Como passo de indução, assume-se que o teorema é válido para algum inteiro $m \geq 1$. Suponha que

$$g \in H^{2m+3}(\Omega), \frac{d^k f}{dt^k} \in L^2\left(0, T; H^{2m+2-2k}(\Omega)\right),$$

para $k = 0, \ldots, m{+}1$, e que sejam válidas as condições de compatibilidade de $(m{+}1)$-ésima ordem.

Denote $\tilde{u} := u'$. Derivando o problema (3.1) com respeito a t, temos que $\tilde{u}$ é a única solução fraca do problema

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \text{em } Q, \\ \tilde{u} = 0 & \text{em } \partial\Omega \times [0, T], \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{3.39}$$

em que $\tilde{f} := \dfrac{d}{dt} f$ e $\tilde{g} := f(\cdot, 0) + \Delta g$. Note que, em particular, para $m = 0$, pelo Teorema 3.3.1,

$$\tilde{u} \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \tilde{u}' \in L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right).$$

Por hipótese, f e g satisfazem as condições de compatibilidade de $(m + 1)$-ésima ordem, logo $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ satisfazem as condições de compatibilidade de m-ésima ordem. Aplicando a hipótese de indução, obtém-se que

$$\frac{d^k \tilde{u}}{dt^k} \in L^2\left(0, T; H^{2m+2-2k}(\Omega)\right),$$

para $k = 0, \ldots, m + 1$, e que

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k \tilde{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(\Omega))} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k \tilde{f}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m-2k}(\Omega))} + ||\tilde{g}||_{H^{2m+1}(\Omega)} \right),$$

em que $\tilde{f} := f'$. Por definição, $\tilde{u} = u'$, logo,

$$\frac{d^k u}{dt^k} \in L^2\left(0, T; H^{2m+4-2k}(\Omega)\right),$$

para $k = 1, \ldots, m+2$, e

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m+2} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+4-2k}(\Omega))} \\ &\leq C \left(\sum_{k=1}^{m+1} \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(\Omega))} + ||f(0)||_{H^{2m+1}(\Omega)} + ||\Delta g||_{H^{2m+1}(\Omega)} \right). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Note que, pelo Teorema 2.4.9,

$$||f(0)||_{H^{2m+1}(\Omega)} \leq C \left(||f||_{L^2(0,T;H^{2m+2}(\Omega))} + ||f'||_{L^2(0,T;H^{2m}(\Omega))} \right).$$

Substituindo na estimativa (3.40), obtém-se que

$$\sum_{k=1}^{m+2} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+4-2k}(\Omega))} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(\Omega))} + ||g||_{H^{2m+3}(\Omega)} \right). \tag{3.41}$$

Escreva, agora, $h := -\Delta u = f - u'$. Pelo Teorema 2.5.3, vale a estimativa

$$\begin{aligned} ||u||_{H^{2m+4}(\Omega)} &\leq C \left(||h||_{H^{2m+2}(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(||f|_{H^{2m+2}(\Omega)} + ||u'||_{H^{2m+2}(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Integrando de 0 a T, e somando com a estimativa (3.41),

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m+2} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+4-2k}(\Omega))} \\ \leq &C \left(\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(\Omega))} + ||g||_{H^{2m+3}(\Omega)} + ||g||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Observando-se que

$$||u||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \left(||f||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||g||_{L^2(\Omega)} \right),$$

conclui-se que o teorema é válido para $m+1$, o que completa a demonstração por indução. □

O teorema acima posui uma importante consequência.

Corolário 3.3.3. *Sejam $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f \in C^\infty(Q)$. Suponha também que as condições de compatibilidade de m-ésima ordem (3.37) sejam válidas para todo $m = 0, 1, \ldots$. Então, o problema (3.1) possui uma única solução*

$$u \in C^\infty(Q).$$

Finalmente, será demonstrado que a solução do problema (3.1) depende continuamente da condição inicial g.

Teorema 3.3.4. *As soluções do problema do calor (3.1) variam continuamente, em $L^2(\Omega \times (0,T))$ em relação à condição inicial.*

Demonstração. Sejam $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ duas condições iniciais dadas e denote por u_1, u_2 as soluções dos problemas adjuntos com estas condições iniciais, respectivamente. Defina

$$g := g_1 - g_2,$$

e denote

$$u := u_1 - u_2.$$

Assim, u satisfaz

$$u_t - \Delta u = 0,$$

com condição inicial g. Multiplicando a equação acima por u e integrando por partes em Ω, obtém-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2\,dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = 0.$$

Integrando em (t,T) para algum $0 \leq t \leq T$,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega g^2\,dx - \iint_{\Omega\times(t,T)} |\nabla u|^2\,dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega u(t)^2\,dx.$$

Isto implica que

$$\int_\Omega u(t)^2\,dx \leq \int_\Omega g^2\,dx.$$

Relembrando as definições de u e g, obtém-se que

$$||u_1(t) - u_2(t)||_{L^2(\Omega)} \leq ||g_1 - g_2||_{L^2(\Omega)},$$

o que prova a dependência contínua em $L^2(\Omega)$ de u em relação ao dado final g. $\square$

4 Controlabilidade Interior Aproximada para a Equação do Calor

Este capítulo é baseado na referência [3], Capítulo 5. O objetivo é estudar o problema de controlabilidade interior aproximada para a equação do calor.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, aberto e limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $\omega \subset \Omega$ aberto não vazio e $T > 0$. Considere o problema de valor inicial e de fronteira para equação do calor (1.1), isto é,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f\chi_\omega & \text{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ u = g & \text{em } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Em (1.1), $f = f(x,t)$ é uma função de controle com suporte contido em ω e $g \in L^2(\Omega)$ é a condição inicial. Pelo Teorema 3.3.1, para qualquer $f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, o Problema (1.1) possui uma única solução fraca u satisfazendo

$$u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), u' \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Para cada $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, define-se o **problema adjunto** ao sistema (1.1) como o seguinte problema:

$$\begin{cases} \varphi_t + \Delta\varphi = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \varphi = \varphi_T & \text{em } \Omega \times \{t = T\}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Note que o problema adjunto (4.1) pode ser obtido através do problema do calor homogêneo com a mudança de variáveis $t \to T - t$, logo, todas as propriedades para a solução do problema do calor (3.1) também são válidas para as soluções do problema adjunto.

Para cada $\epsilon > 0$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$, considere o seguinte funcional:

$$J_\epsilon(\varphi_T) = \frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 dxdt + \epsilon||\varphi_T||_{L^2(\Omega)} - (u_1, \varphi_T), \tag{4.2}$$

para $\varphi_T \in L^2(\Omega)$. Acima, φ representa a solução do problema adjunto (4.1) com condição final φ_T, e $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno de $L^2(\Omega)$.

Teorema 4.0.1. *Se $\hat{\varphi}_T$ é um ponto mínimo de J_ϵ em $L^2(\Omega)$, então $f = \hat{\varphi}|_\omega$ é um controle para a equação do calor (1.1) tal que*

$$||u(T) - u_1||_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon, \tag{4.3}$$

em que $\hat{\varphi}$ representa a solução do problema adjunto (4.1) com condição final $\hat{\varphi}_T$.

Em outras palavras, se for possível encontrar um mínimo para o funcional J_ϵ, então é possível o controle aproximado para o dado u_1 no tempo T.

Demonstração. Sejam $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $\psi_T \in L^2(\Omega)$. Sendo $\hat{\varphi}_T$ ponto mínimo de J_ϵ, vale que

$$0 \leq J_\epsilon(\hat{\varphi}_T + h\psi_T) - J_\epsilon(\hat{\varphi}_T).$$

Mas

$$\begin{aligned} J_\epsilon(\hat{\varphi}_T + h\psi_T) = \frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\hat{\varphi}|^2 dxdt + \frac{h^2}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + h\iint_{\omega\times(0,T)} \hat{\varphi}\psi\, dxdt \\ + \epsilon||\hat{\varphi}_T + h\psi_T||_{L^2(\Omega)} - (u_1, \hat{\varphi}_T + h\psi_T), \end{aligned}$$

em que ψ denota a solução do problema adjunto (4.1) com condição final ψ_T, e $\hat{\varphi}$ representa a solução do problema adjunto (4.1) com condição final $\hat{\varphi}_T$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq \epsilon\left(||\hat{\varphi}_T + h\psi_T||_{L^2(\Omega)} - ||\hat{\varphi}_T||_{L^2(\Omega)}\right) + \frac{h^2}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt \\ + h\left(\iint_{\omega\times(0,T)} \hat{\varphi}\psi\, dxdt - (u_1, \psi_T)\right). \end{aligned}$$

Como

$$||\hat{\varphi}_T + h\psi_T||_{L^2(\Omega)} - ||\hat{\varphi}_T||_{L^2(\Omega)} \leq |h| \cdot ||\psi_T||_{L^2(\Omega)},$$

então

$$0 \leq \epsilon\,|h| \cdot ||\psi_T||_{L^2(\Omega)} + \frac{h^2}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + h\left(\iint_{\omega\times(0,T)} \hat{\varphi}\psi\, dxdt - (u_1, \psi_T)\right).$$

Se $h > 0$, dividindo a desigualdade acima por h e fazendo o limite com $h \to 0$, obtém-se que

$$0 \leq \epsilon||\psi_T||_{L^2(\Omega)} + \iint_{\omega\times(0,T)} \hat{\varphi}\psi\, dxdt - (u_1, \psi_T).$$

Pode-se realizar o mesmo procedimento para $h < 0$ e conclui-se que para todo $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\left|\iint_{\omega\times(0,T)} \hat{\varphi}\psi\, dxdt - (u_1, \psi_T)\right| \leq \epsilon||\psi_T||_{L^2(\Omega)}, \tag{4.4}$$

para toda $\psi_T \in L^2(\Omega)$.

Considere, agora, o controle $f := \hat{\varphi}$. Segundo a Observação 5.1 da referência [3], pode-se assumir que $g = 0$. Para mais detalhes sobre semigrupos de operadores lineares, veja [6].

Multiplicando a equação do calor em (1.1) por ψ e integrando por partes, tem-se que

$$\iint_Q u_t\psi\, dxdt - \iint_Q \Delta u\psi\, dxdt = \iint_Q \hat{\varphi}\psi\cdot\chi_\omega\, dxdt$$
$$(u(T),\psi_T) - \iint_Q u(\psi_t+\Delta\psi)\, dxdt = \iint_{\omega\times(0,T)} \hat{\varphi}\psi\, dxdt.$$

Como $\psi_t+\Delta\psi=0$, obtém-se que

$$(u(T),\psi_T) = \iint_{\omega\times(0,T)} \hat{\varphi}\psi\, dxdt.$$

Esta igualdade, junto com a desigualdade (4.4) fornece que

$$|(u(T)-u_1,\psi_T)| \leq \epsilon||\psi_T||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, \psi_T\in L^2(\Omega).$$

Utilizando o fato de que o dual topológico de L^2 é identificado com L^2, conclui-se que

$$||u(T)-u_1||_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Isto demonstra o controle aproximado desejado. □

Teorema 4.0.2. *Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, aberto e limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $\omega\subset\subset\Omega$ aberto não vazio e $T>0$. Então a equação do calor (1.1) é aproximadamente controlável no tempo T.*

Demonstração. Considerando o Teorema 4.0.1, basta demonstrar que o funcional J_ϵ sempre admite ponto mínimo. Considerando o Teorema 2.9.4, é suficiente demonstrar que J_ϵ é um funcional convexo, contínuo e coercivo.

(i) Convexidade: Para provar que J_ϵ é um funcional convexo basta demonstrar que, para todo $0\leq t\leq 1$ e $\varphi_T,\psi_T\in L^2(\Omega)$, vale a desigualdade

$$J_\epsilon\left(t\varphi_T+(1-t)\psi_T\right) \leq t\,J_\epsilon\left(\varphi_T\right)+(1-t)J_\epsilon\left(\psi_T\right). \tag{4.5}$$

Como o problema adjunto (4.1) é linear, se φ e ψ representam as soluções com condições finais φ_T e ψ_T respectivamente, então a solução associada à condição final $t\varphi_T+(1-t)\psi_T$ é $t\varphi+(1-t)\psi$. Assim,

$$\begin{aligned}
&J_\epsilon\left(t\varphi_T+(1-t)\psi_T\right)\\
&=\frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |t\varphi+(1-t)\psi|^2 dxdt+\epsilon||t\varphi+(1-t)\psi||_{L^2(\Omega)}-(u_1,t\varphi+(1-t)\psi)\\
&\leq\frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 dxdt+(1-t)\frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt+t\,\epsilon||\varphi_T||_{L^2(\Omega)}\\
&+(1-t)\,\epsilon||\psi_T||_{L^2(\Omega)}-t(u_1,\varphi_T)-(1-t)(u_1,\psi_T)\\
&=J_\epsilon\left(\varphi_T\right)+(1-t)J_\epsilon\left(\psi_T\right).
\end{aligned}$$

Logo, J_ϵ é um funcional convexo.
(ii) Continuidade: Para provar que J_ϵ é um funcional contínuo basta mostrar que, para qualquer $\varphi_T \in L^2(\Omega)$,

$$\lim_{||\psi_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} ||J_\epsilon(\varphi_T + \psi_T) - J_\epsilon(\varphi_T)||_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{4.6}$$

Note que, para qualquer $\psi_T \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&J_\epsilon(\varphi_T + \psi_T) - J_\epsilon(\varphi_T)\\
&= \frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} \left(|\varphi+\psi|^2 - |\varphi|^2\right) dxdt + \epsilon\left(||\varphi_T+\psi_T||_{L^2(\Omega)} - ||\varphi_T||_{L^2(\Omega)}\right) - (u_1, \psi_T)\\
&\leq \frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi+\psi-\varphi|^2 dxdt + \epsilon||\varphi_T+\psi_T-\varphi_T||_{L^2(\Omega)} - (u_1, \psi_T)\\
&= \frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2\, dxdt + \epsilon||\psi_T||_{L^2(\Omega)} - (u_1, \psi_T)\\
&= J_\epsilon(\psi_T).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{||\psi_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} ||J_\epsilon(\varphi_T + \psi_T) - J_\epsilon(\varphi_T)||_{L^2(\Omega)} = \lim_{||\psi_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} ||J_\epsilon(\psi_T)||_{L^2(\Omega)}.$$

Calculando esse limite, obtém-se que

$$\begin{aligned}
&\lim_{||\psi_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} ||J_\epsilon(\psi_T)||_{L^2(\Omega)}\\
&= \lim_{||\psi_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} \left\|\frac{1}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2\, dxdt + \epsilon||\psi_T||_{L^2(\Omega)} - (u_1, \psi_T)\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

O segundo termo tende a zero quando $||\psi_T||_{L^2(\Omega)} \to 0$. Pelo Teorema 3.3.4, a solução do problema adjunto (4.1) depende continuamente da condição final, então o primeiro termo também tende a zero quando $||\psi_T||_{L^2(\Omega)} \to 0$. Finalmente, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, o último termo também tende a zero quando $||\psi_T||_{L^2(\Omega)} \to 0$, logo conclui-se que

$$\lim_{||\psi_T||_{L^2(\Omega)}\to 0} ||J_\epsilon(\psi_T)||_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Isto implica que o funcional J_ϵ é contínuo.

(iii) Coercividade: Para provar que J_ϵ é coercivo será demonstrado que

$$\lim_{||\varphi_T||_{L^2(\Omega)}\to \infty} J_\epsilon(\varphi_T) = +\infty.$$

É suficiente mostrar que

$$\liminf_{||\varphi_T||_{L^2(\Omega)}\to\infty} \frac{J(\varphi_T)}{||\varphi_T||_{L^2(\Omega)}} \geq \epsilon > 0.$$

Seja $\left(\tilde{\varphi}_{T,j}\right)_{j=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ uma sequência de dados finais que satisfaz

$$\lim_{j\to\infty} ||\tilde{\varphi}_{T,j}||_{L^2(\Omega)} = \infty.$$

Esta sequência pode ser normalizada, criando-se uma nova sequência $\left(\varphi_{T,j}\right)_{j=1}^{\infty}$ definida por

$$\varphi_{T,j} := \frac{\tilde{\varphi}_{T,j}}{||\tilde{\varphi}_{T,j}||_{L^2(\Omega)}}.$$

Desta forma, $||\varphi_{T,j}||_{L^2(\Omega)} = 1$ para todo $j = 1, 2, \ldots$. Por outro lado, se φ_j denota a solução do problema adjunto (4.1) com condição final $\varphi_{T,j}$, então

$$\frac{J_\epsilon(\tilde{\varphi}_{T,j})}{||\tilde{\varphi}_{T,j}||_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{2}||\tilde{\varphi}_{T,j}||_{L^2(\Omega)} \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi_{T,j}|^2\, dxdt + \epsilon - (u_1, \varphi_{T,j}).$$

Serão considerados dois casos diferentes. Primeiramente, assume-se que

$$\liminf_{j\to\infty} \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi_{T,j}|^2\, dxdt > 0.$$

Neste caso,

$$\lim_{j\to\infty} J(\tilde{\varphi}_{T,j})/||\tilde{\varphi}_{T,j}||_{L^2(\Omega)} = \infty,$$

e fica demonstrada a coercividade.

Assim, resta considerar o caso

$$\liminf_{j\to\infty} \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi_{T,j}|^2\, dxdt = 0.$$

Neste caso, como $\left(\varphi_{T,j}\right)$ é uma sequência limitada em $L^2(\Omega)$, pelo Teorema 2.7.4, existem uma subsequência $\left(\varphi_{T,j_l}\right)$ e uma função $\psi_T \in L^2(\Omega)$ tais que $\varphi_{T,j_l} \rightharpoonup \psi_T$ em $L^2(\Omega)$. Se ψ denota a solução do problema adjunto (4.1) com dado final ψ_T, então

$$\varphi_{j_l} \rightharpoonup \psi \quad \text{em} \quad L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \cap H^1\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right).$$

Mas

$$\iint_{\omega\times(0,T)} |\psi|^2\, dxdt \leq \liminf_{l\to\infty} \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi_{j_l}|^2\, dxdt = 0.$$

Logo $\psi = 0$ em $\omega \times (0,T)$. Aplicando o Teorema de Unicidade de Holmgren 2.8.2 para $Q_1 = Q_3 = Q$ e $Q_2 = \omega \times (0,T)$, obtém-se que $\psi \equiv 0$ em Q, logo, $\psi_T = 0$. Isto implica que

$$\varphi_{T,j_l} \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Conclui-se que

$$(u_1, \varphi_{T,j_l}) \to 0 \implies \liminf_{j\to\infty} \frac{J_\epsilon(\tilde{\varphi}_{T,j})}{||\tilde{\varphi}_{T,j}||} \leq \liminf_{j\to\infty} \left(\epsilon - (u_1, \varphi_{T,j})\right) = \epsilon,$$

que prova o resultado desejado. Assim, J_ϵ é um funcional coercivo. $\square$

5 Desigualdade de Carleman e Controlabilidade Nula para a Equação do Calor

Neste capítulo será enunciada a desigualdade de observabilidade para a equação do calor. Posteriormente será demonstrado que, se a desigualdade de observabilidade for válida, então a equação do calor é controlável a zero. Finalmente, será demonstrada uma desigualdade de Carleman que será usada para provar que a desigualdade de observabilidade é válida nas hipóteses trabalhadas até aqui.

A maior parte deste capítulo é baseada na referência [7].

5.1 Equação Adjunta e Desigualdade de Observabilidade

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, aberto e limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $\omega \subset \Omega$ aberto não vazio e $T > 0$. Como no capítulo anterior, considere o problema de valor inicial e de fronteira para a equação do calor (1.1) e seu problema adjunto (4.1).

Definição 5.1.1. *Diz-se que o problema adjunto (4.1) satisfaz a* ***desigualdade de observabilidade*** *se existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda condição final $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, a solução φ do problema adjunto (4.1) satisfaz*

$$||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 dxdt. \tag{5.1}$$

Posteriormente, será provado que tal desigualdade sempre é verificada. Porém, antes, será demonstrado que, uma vez que a desigualdade de observabilidade é satisfeita, a equação do calor (1.1) é controlável a zero.

Teorema 5.1.2. *Se vale a desigualdade de observabilidade para o problema adjunto (4.1), então a equação do calor (1.1) é controlável a zero.*

Demonstração. Para cada $\epsilon > 0$, defina o funcional $\tilde{J}_\epsilon$ em $L^2(\Omega)$ por

$$\tilde{J}_\epsilon(\varphi_T) := \frac{1}{2} \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt + \epsilon||\varphi_T||_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), g),$$

em que φ é a solução do problema adjunto (4.1) com condição final φ_T. Similarmente à demonstração do Teorema 4.0.2, o funcional $\tilde{J}_\epsilon$ é contínuo, convexo e coercivo. Logo, pelo Teorema 2.9.4, possui um ponto de mínimo, que será denotado por $\hat{\varphi}_T$. Defina o controle $f_\epsilon := \hat{\varphi} \cdot \chi_\omega$, em que $\hat{\varphi}$ é a solução do problema adjunto (4.1) com condição final $\hat{\varphi}_T$, e denote por $\hat{u}_\epsilon$ a solução do problema (1.1) com controle f_ϵ.

Seja u^0 a solução do problema (1.1) com controle nulo. Se assumirá que $||u^0(T)|| > \epsilon$, pois o caso contrário é equivalente a $\hat{\varphi}_T = 0$. Para mais detalhes, veja [8].

Derivando o funcional $\tilde{J}_\epsilon$ no ponto de mínimo $\hat{\varphi}_T$, vale que

$$\iint_{\omega\times(0,T)} \hat{\varphi}\,\varphi\,dxdt + \epsilon\left(\frac{\hat{\varphi}_T}{||\hat{\varphi}_T||_{L^2(\Omega)}}, \varphi_T\right) + (\varphi(0), g) = 0, \tag{5.2}$$

para qualquer condição final $\varphi_T \in L^2(\Omega)$. Em particular, para $\varphi_T = \hat{\varphi}_T$, tem-se que

$$||\hat{\varphi}||^2_{L^2(\omega\times(0,T))} + \epsilon||\hat{\varphi}_T||_{L^2(\Omega)} + (\hat{\varphi}(0), g) = 0. \tag{5.3}$$

Utilizando Cauchy-Schwarz e a desigualdade de observabilidade na igualdade acima, obtém-se a estimativa

$$||f_\epsilon||_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq \sqrt{C}\,||g||_{L^2(\Omega)}, \tag{5.4}$$

com C independente de ϵ. Por outro lado, para o controle $f_\epsilon = \hat{\varphi}$, multiplicando a equação do calor (1.1) por φ e integrando, obtém-se que

$$\iint_{\omega\times(0,T)} \hat{\varphi}\,\varphi\,dxdt = (\hat{u}_\epsilon(T), \varphi_T) - (g, \varphi(0)). \tag{5.5}$$

Acima, para cada $\epsilon > 0$, $\hat{u}_\epsilon$ representa a solução do problema (1.1) com o controle $f_\epsilon = \hat{\varphi}$. Utilizando a igualdade (5.5) na igualdade (5.2), obtém-se que

$$(\hat{u}_\epsilon(T), \varphi_T) + \epsilon\left(\frac{\hat{\varphi}_T}{||\hat{\varphi}_T||_{L^2(\Omega)}}, \varphi_T\right) = 0.$$

Assim,

$$|(\hat{u}_\epsilon(T), \varphi_T)| = \epsilon\left|\left(\frac{\hat{\varphi}_T}{||\hat{\varphi}_T||_{L^2(\Omega)}}, \varphi_T\right)\right|.$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz do lado direito, obtém-se que

$$|(\hat{u}_\epsilon(T), \varphi_T)| \leq \epsilon||\varphi_T||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, \varphi_T \in L^2(\Omega)$$

A estimativa acima é válida para toda $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, logo, usando a norma do dual de $L^2(\Omega)$,

$$||\hat{u}_\epsilon(T)||_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Este processo fornece uma sequência $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ de controles aproximados para zero. Por (5.4), esta sequência é limitada. Logo, pelo Teorema 2.7.4, e pela regularidade das soluções da equação do calor, a menos de uma subsequência,

$$\hat{u}_\epsilon \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Em particular, $\hat{u}_\epsilon(T) \rightharpoonup 0$ em $L^2(\Omega)$, logo, $u(T) = 0$. Isto prova a controlabilidade nula. $\square$

5.2 Desigualdade de Carleman

Nesta seção será enunciada e demonstrada uma desigualdade de Carleman. Para isto, será considerada uma função η^0 que possui determinadas propriedades e, depois, duas funções peso, α e ξ que serão úteis. Posteriormente, serão enunciadas certas propriedades sobre estas funções peso e, finalmente, será enunciada e demonstrada uma desigualdade de Carleman.

Lema 5.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado não vazio e $\omega_0 \subset\subset \Omega$ um aberto não vazio. Então existe uma função $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- $\eta^0 > 0$ *em* Ω,
- $\eta^0 = 0$ *em* $\partial\Omega$,
- $|\nabla \eta^0| > 0$ *em* $\overline{\Omega \setminus \omega_0}$.

A prova deste lema pode ser encontrada em [9].

Definição 5.2.2. *Seja $\omega_0 \subset\subset \omega$ um aberto não vazio. Define-se as funções peso por*

$$\begin{aligned} \alpha(x,t) &= \frac{e^{2\lambda m \|\eta^0\|_{C(\bar{\Omega})}} - e^{\lambda\left(m\|\eta^0\|_{C(\bar{\Omega})} + \eta^0(x)\right)}}{t(T-t)}, \\ \xi(x,t) &= \frac{e^{\lambda\left(m\|\eta^0\|_{C(\bar{\Omega})} + \eta^0(x)\right)}}{t(T-t)}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

para $\lambda, m > 1$, em que η^0 é a função dada pelo Lema 5.2.1 para ω_0.

Note que, por definição, α e ξ são funções positivas, com $\alpha, \xi \in C^2(\Omega \times (0,T))$. Além disso, calculando as derivadas de α e ξ, obtém-se que

$$\begin{cases} \alpha_t = -\dfrac{T-2t}{t(T-t)}\alpha, & (5.7) \\[2ex] \alpha_{tt} = \dfrac{2(3t^2 - 3tT + T^2)}{t^2(T-t)^2}\alpha, & (5.8) \\[2ex] \xi_t = -\dfrac{T-2t}{t(T-t)}\xi, & (5.9) \\[2ex] \partial_i \xi = -\partial_i \alpha = \lambda \partial_i \eta^0 \xi & (5.10) \\[2ex] \nabla \xi = -\nabla \alpha = \lambda \nabla \eta^0 \xi. & (5.11) \end{cases}$$

Teorema 5.2.3 (Estimativas para as funções peso)**.** *Valem as seguintes estimativas para as funções peso definidas acima:*

$$\begin{cases} \partial_i \alpha \leq C\lambda\xi, & (5.12) \\ \alpha_t \leq T\xi^2, & (5.13) \\ \alpha_{tt} \leq CT^2\xi^3, & (5.14) \\ |\nabla \alpha_t| \leq CT\lambda\xi^2, & (5.15) \\ \xi_t \leq T\xi^2, & (5.16) \end{cases}$$

em que $C = C(\Omega, \omega)$ é uma constante positiva.

Demonstração.

(i) Para a estimativa (5.12), note que

$$\partial_i \alpha \leq |\partial_i \alpha| = \lambda \, |\partial_i \eta^0| \, \xi.$$

Como η^0 é de classe $C^2(\overline{\Omega})$, $|\partial_i \eta^0|$ atinge seu máximo em $\overline{\Omega}$, logo

$$\partial_i \alpha \leq C\lambda\xi.$$

(ii) Para a estimativa (5.13), note que

$$e^{2\lambda m ||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}} \leq e^{2\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})} + \eta^0\right)}.$$

Além disso, como $0 \leq t \leq T$, vale que

$$-(T - 2t) \leq T.$$

Logo, por (5.7),

$$\begin{aligned} \alpha_t &= -\frac{T - 2t}{t(T - t)}\alpha \\ &\leq T \frac{e^{2\lambda m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}} - e^{\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})} + \eta^0\right)}}{t^2(T - t)^2} \\ &\leq T \frac{e^{2\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})} + \eta^0\right)} - e^{\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})} + \eta^0\right)}}{t^2(T - t)^2} \\ &= T\xi^2 - T\frac{e^{\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})} + \eta^0\right)}}{t^2(T - t)^2} \end{aligned}$$

Como o segundo termo da última expressão é negativo, obtém-se que

$$\alpha_t \leq T\xi^2.$$

Similarmente, para a estimativa (5.16)

$$\begin{aligned}
\xi_t &= -\frac{T-2t}{t(T-t)}\xi \\
&\leq T\frac{e^{\lambda m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}}}{t^2(T-t)^2} \\
&\leq T\frac{e^{2\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}+\eta^0\right)}}{t^2(T-t)^2} \\
&= T\xi^2.
\end{aligned}$$

(iii) Para a estimativa (5.14), note que

$$e^{3\lambda m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}} \leq e^{3\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}+\eta^0\right)}.$$

Além disso, como $0 \leq t \leq T$, vale que

$$3t^2 - 3tT + T^2 \leq 3T^2 - 3tT + T^2 = 4T^2 - 3tT \leq 4T^2.$$

Logo, por (5.8),

$$\begin{aligned}
\alpha_{tt} &= \frac{2(3t^2-3tT+T^2)}{t^2(T-t)^2}\alpha \\
&\leq 8T^2\frac{e^{3\lambda m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}} - e^{\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}+\eta^0\right)}}{t^3(T-t)^3} \\
&\leq 8T^2\frac{e^{3\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}+\eta^0\right)} - e^{\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}+\eta^0\right)}}{t^3(T-t)^3} \\
&= 8T^2\xi^3 - \frac{e^{\lambda\left(m||\eta^0||_{C(\bar{\Omega})}+\eta^0\right)}}{t^3(T-t)^3}.
\end{aligned}$$

Como o segundo termo da última expressão é negativo, obtém-se que

$$\alpha_{tt} \leq 8T^2\xi^3 \leq CT^2\xi^3,$$

para qualquer constante $C \geq 8$.

(iv) Para a estimativa (5.15), usando (5.11), vale que

$$|\nabla\alpha_t| = \lambda|\nabla\eta^0\xi_t| \leq C\lambda|\nabla\eta^0|\,T\,\xi^2 \leq CT\lambda\,\xi^2.$$

$\square$

Com estas ferramentas em mão, a desigualdade de Carleman pode ser enunciada e demonstrada. Algumas técnicas foram obtidas a partir de [10], porém, a demonstração em geral é baseada em [7].

Lema 5.2.4 (Desigualdade de Carleman)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado não vazio com fronteira de classe C^2, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\omega \subset\subset \Omega$ aberto não vazio e $q \in C^2(\overline{\Omega} \times (0,T))$ tal que $q = 0$ em $\partial\Omega \times (0,T)$. Então, existem constantes $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega,\omega) \geq 1$, $s_1 = s_1(\Omega,\omega,T)$ e $C_1 = C_1(\Omega,\omega)$ tais que para todo $\lambda \geq \lambda_1$ e $s \geq s_1$, vale a desigualdade*

$$\begin{aligned} s^{-1} \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1} \left(|q_t|^2 + |\Delta q|^2\right) dxdt + s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2 dxdt \\ + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2 dxdt \\ \leq C_1 \left(\iint_Q e^{-2s\alpha}|q_t + \Delta q|^2 dxdt + s^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|q|^2 dxdt. \right. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Demonstração. Durante a demonstração C denotará sempre uma constante que depende apenas de Ω e ω.

<u>Passo 1 - Mudança de Variáveis:</u>
Defina as seguintes funções:

$$\psi = e^{-s\alpha}q, \quad g = e^{-s\alpha}(q_t + \Delta q).$$

Calcula-se diretamente que

$$M_1\psi + M_2\psi = g_{s,\lambda},$$

em que

$$\begin{aligned} M_1\psi &= -2s\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\,\xi\,\psi - 2s\lambda\xi(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi) + \psi_t, \\ M_2\psi &= s^2\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\,\xi^2\,\psi + \Delta\psi + s\alpha_t\psi \\ g_{s,\lambda} &= g + s\lambda\Delta\eta^0\,\xi\,\psi - s\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\,\xi\,\psi \end{aligned} \tag{5.18}$$

No decorrer da demonstração $(M_i\psi)_j$ denotará o j-ésimo termo da expressão de M_i em (5.18). Assim, integrando em Q, obtém-se

$$||M_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||M_2\psi||^2_{L^2(Q)} + 2\sum_{i,j}\left((M_1\psi)_i,(M_2\psi)_j\right) = ||g_{s,\lambda}||^2_{L^2(Q)}. \tag{5.19}$$

O objetivo dos próximos passos gerar estimativas para cada um dos termos da igualdade (5.19). Serão utilizadas integração por partes, tanto na variável temporal quanto na variável espacial, logo as derivadas das funções peso α e ξ aparecerão. As igualdades (5.7) - (5.11) e o Teorema 5.2.3 serão úteis nos passos seguintes.

<u>Passo 2 - Estimativa de $(M_1\psi,(M_2\psi)_1)$:</u>
Passo 2.1 - Estimativa de $((M_1\psi)_1,(M_2\psi)_1)$: Por definição,

$$((M_1\psi)_1,(M_2\psi)_1) = -2s^3\lambda^4 \iint_Q |\nabla\eta^0|^4\,\xi^3\,|\psi|^2\,dxdt =: A. \tag{5.20}$$

Passo 2.2 - Estimativa de $((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_1)$: Por definição,

$$((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_1) = -2s^3\lambda^3 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi^3 \, (\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi) \, \psi \, dxdt. \tag{5.21}$$

Utilizando integração por partes na variável espacial e (5.11),

$$\begin{aligned} -2s^3\lambda^3 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi^3 \, (\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi) \, \psi \, dxdt &= 3s^3\lambda^4 \iint_Q |\nabla\eta^0|^4 \, \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\ &+ s^3\lambda^3 \iint_Q \operatorname{div}\left(|\nabla\eta^0|^2 \, \nabla\eta^0\right) \xi^3 \, |\psi|^2 \, dxdt \\ &=: B_1 + B_2. \end{aligned} \tag{5.22}$$

O termo $A + B_1$ é positivo. Pelas propriedades de η^0 no Lema 5.2.1, $|\nabla\eta^0|^4$ assume um mínimo positivo em $\Omega\backslash\omega$

$$\begin{aligned} A + B_1 &= s^3\lambda^4 \iint_Q |\nabla\eta^0|^4 \, \xi^3 \, |\psi|^2 \, dxdt \\ &\geq s^3\lambda^4 \iint_{(\Omega\backslash\omega_0)\times(0,T)} |\nabla\eta^0|^4 \, \xi^3 \, |\psi|^2 \, dxdt \\ &\geq Cs^3\lambda^4 \iint_{(\Omega\backslash\omega_0)\times(0,T)} \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \\ &= Cs^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3 \, |\psi|^2 \, dxdt - Cs^3\lambda^4 \iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi^3 \, |\psi|^2 \, dxdt \\ &=: \tilde{A} - \tilde{B}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

O termo B_2 pode ser reescrito, usando que

$$\begin{aligned} |\nabla\eta^0|^2 \, \nabla\eta^0 &= \sum_{i=1}^n \left(\partial_i\eta^0\right)^2 \left(\partial_1\eta^0, \dots, \partial_n\eta^0\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left(\partial_i\eta^0\right)^2 \, \partial_1\eta^0, \dots, \left(\partial_i\eta^0\right)^2 \, \partial_n\eta^0\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(|\nabla\eta^0|^2 \, \nabla\eta^0\right) &= \operatorname{div}\left[\sum_{i=1}^n \left(\left(\partial_i\eta^0\right)^2 \, \partial_1\eta^0, \dots, \left(\partial_i\eta^0\right)^2 \, \partial_n\eta^0\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\partial_j \left(\partial_i\eta^0\right)^2 \left(\partial_j\eta^0\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[2\partial_i\eta^0 \, \partial_{ij}\eta^0 \, \partial_j\eta^0 + |\nabla\eta^0|^2 \, \Delta\eta^0\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$B_2 = 2s^3\lambda^3 \sum_{i,j=1}^n \iint_Q \partial_i\eta^0 \, \partial_{ij}\eta^0 \, \partial_j\eta^0 \, \xi^3 \, |\psi|^2 \, dxdt + s^3\lambda^3 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \Delta\eta^0 \, \xi^3 \, |\psi|^2 \, dxdt \tag{5.24}$$

Como η^0 é de classe C^2 em $\overline{\Omega}$, o termo B_2 pode ser absorvido por $\tilde{A}$ para λ suficientemente grande.

Passo 2.3 - Estimativa de $((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_1)$: Por definição,

$$((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_1) = s^2\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi^2 \, \psi_t \, \psi \, dxdt. \tag{5.25}$$

Utilizando integração por partes na variável temporal,

$$\begin{aligned} s^2\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi^2 \, \psi_t \, \psi \, dxdt &= s^2\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi^2 \, \partial_t \left(|\psi|^2/2\right) \, dxdt \\ &= -s^2\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \partial_t \left(\xi^2/2\right) |\psi|^2 \, dxdt \\ &= -s^2\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi \, \xi_t \, |\psi|^2 \, dxdt. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Pelo Teorema 5.2.3 e pelo Lema 5.2.1,

$$-s^2\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi \, \xi_t |\psi|^2 \, dxdt \geq C s^2 \lambda^2 T \iint_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \tag{5.27}$$

Este termo também pode ser absorvido por $\tilde{A}$ para s e λ suficientemente grandes.

Passo 2.4 - Estimativa de $(M_1\psi, (M_2\psi)_1)$: Considerando as estimativas (5.20) - (5.27), conclui-se que

$$\begin{aligned} (M_1\psi, (M_2\psi)_1) &= ((M_1\psi)_1 + (M_1\psi)_2 + (M_1\psi)_3, (M_2\psi)_1) \\ &\geq C s^3 \lambda^4 \iint_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt - C s^3 \lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt, \end{aligned} \tag{5.28}$$

para λ e s suficientemente grandes.

Passo 3 - Estimativa de $(M_1\psi, (M_2\psi)_2)$:

Passo 3.1 - Estimativa de $((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_2)$: Por definição,

$$((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_2) = -2s\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi \, \Delta\psi \, \psi \, dxdt. \tag{5.29}$$

Utilizando integração por partes na variável espacial e (5.11),

$$\begin{aligned} -2s\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi \Delta\psi \, \psi \, dxdt &= 2s\lambda^3 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi \left(\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi\right) \psi \\ &\quad + 2s\lambda^2 \iint_Q \operatorname{div}\left(|\nabla\eta^0|^2 \, \psi\right) \xi \, \nabla\psi \, dxdt \\ &=: C_1 + C_2. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Utilizando que

$$\operatorname{div}\left(|\nabla\eta^0|^2\right) \nabla\psi = \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n (\partial_i \eta^0)^2\right) \nabla\psi = 2 \sum_{i,j=1}^n \partial_i\eta^0 \, \partial_{ij}\eta^0 \, \partial_j\psi,$$

vale que

$$
\begin{aligned}
C_2 &= 2s\lambda^2 \iint_Q \operatorname{div}\left(|\nabla\eta^0|^2\,\psi\right)\xi\,\nabla\psi\,dxdt \\
&= 2s\lambda^3 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2\,\xi\,|\nabla\psi|^2\,dxdt + 4s\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n} \iint_Q \partial_i\eta^0\,\partial_{ij}\eta^0\,\xi\,\partial_j\psi\,\psi\,dxdt \\
&= C_{21} + C_{22}.
\end{aligned}
$$

Utilizando que η^0 é de classe $C^2(\overline{\Omega})$ e a desigualdade de Young, isto é, o Teorema 2.6.1

$$
\begin{aligned}
|C_{21}| &\leq Cs^2\lambda^4 \iint_Q \xi\,|\psi|^2\,dxdt + Cs \iint_Q \xi\,|\nabla\psi|^2\,dxdt \\
|C_{22}| &\leq Cs^2\lambda^4 \iint_Q \xi^2\,|\psi|^2\,dxdt + C\lambda^2 \iint_Q |\nabla\psi|^2\,dxdt.
\end{aligned}
$$

Deste modo,

$$
\begin{aligned}
C_1 + C_2 = C_1 + C_{21} + C_{22} \geq{}& 2s\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2\,\xi\,|\nabla\psi|^2\,dxdt \\
&- Cs^2\lambda^4 \iint_Q \xi^2\,|\psi|^2\,dxdt - C\iint_Q (s\xi+\lambda^2)|\nabla\psi|^2\,dxdt,
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

para λ e s suficientemente grandes.

Passo 3.2 - Estimativa de $((M_1\psi)_2,(M_2\psi)_2)$: Por definição,

$$
((M_1\psi)_2,(M_2\psi)_2) = -2s\lambda \iint_Q \xi\left(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi\right)\Delta\psi\,dxdt. \tag{5.32}
$$

Utilizando integração por partes na variável espacial e (5.11),

$$
\begin{aligned}
&-2s\lambda \iint_Q \xi\left(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi\right)\Delta\psi\,dxdt \\
&= -2s\lambda \iint_{\partial\Omega\times(0,T)} \xi\left(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi\right)\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma dt + 2s\lambda \iint_Q \xi\left(\nabla\left(\nabla\eta^0\right)\cdot\nabla\psi\right)\cdot\nabla\psi\,dxdt \\
&+ 2s\lambda^2 \iint_Q \xi\left|\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi\right|^2\,dxdt + s\lambda \iint_Q \xi\,\nabla\eta^0\cdot\nabla\left|\nabla\psi\right|^2\,dxdt \\
&=: D_1 + D_2 + D_3 + D_4.
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Como $\psi = 0$ em $\partial\Omega \times (0,T)$, vale que $\partial_i \psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial n} n^i$, logo,

$$\begin{aligned}
D_1 &= -2s\lambda \iint_{\partial\Omega\times(0,T)} \xi \left(\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi\right) \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma dt \\
&= -2s\lambda \iint_{\partial\Omega\times(0,T)} \xi \left(\nabla\eta^0 \cdot (\partial_1\psi, \dots, \partial_n\psi)\right) \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma dt \\
&= -2s\lambda \iint_{\partial\Omega\times(0,T)} \xi \left(\nabla\eta^0 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial n} n\right) \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma dt \\
&= -2s\lambda \iint_{\partial\Omega\times(0,T)} \xi \left(\nabla\eta^0 \cdot n\right) \left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt \\
&= -2s\lambda \iint_{\partial\Omega\times(0,T)} \xi \frac{\partial\eta^0}{\partial n} \left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Note que D_3 é um termo positivo. Além disso, usando que

$$\nabla\left(\nabla\eta^0\right) = \left(\partial_{ij}\eta^0\right)_{1\le i,j\le n},$$

o termo D_2 pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
D_2 &= 2s\lambda \iint_Q \xi \left(\nabla\left(\nabla\eta^0\right)\cdot\nabla\psi\right)\cdot\nabla\psi\, dxdt \\
&= 2s\lambda \sum_{i,j=1}^{n} \iint_Q \partial_{ij}\eta^0\, \xi \partial_i\psi\, \partial_j\psi\, dxdt.
\end{aligned}$$

Ainda mais, como η^0 é de classe $C^2(\overline{\Omega})$ e pela desigualdade Young, isto é, o Teorema 2.6.1

$$\begin{aligned}
D_2 &\le 2Cs\lambda \iint_Q \xi \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\psi\, \partial_j\psi\, dxdt \\
&\le 2Cs\lambda \iint_Q \xi \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}(\partial_i\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_j\psi)^2\, dxdt \\
&\le Cs\lambda \iint_Q \xi \left[\sum_{i=1}^{n}(\partial_i\psi)^2 + \sum_{j=1}^{n}(\partial_j\psi)^2\right] dxdt \\
&\le Cs\lambda \iint_Q \xi\, |\nabla\psi|^2\, dxdt
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Utilizando integração por partes na variável espacial e as propriedades de ξ,

$$\begin{aligned}
D_4 &= s\lambda \iint_Q \xi\, \nabla\eta^0 \cdot \nabla|\nabla\psi|^2\, dxdt \\
&= s\lambda \iint_{\partial\Omega\times(0,T)} \xi\, \nabla\eta^0\, \left|\nabla\psi\right|^2 n\, d\sigma dt - s\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2\, \xi\, |\nabla\psi|^2\, dxdt \\
&- s\lambda \iint_Q \Delta\eta^0\, \xi\, |\nabla\psi|^2\, dxdt =: D_{41} + D_{42} + D_{43}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Utilizando, novamente, que $\psi = 0$ em $\partial\Omega \times (0,T)$, vale que $\partial_i \psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial n} n^i$, logo,

$$D_{41} = s\lambda \iint_{\partial\Omega\times(0,T)} \xi \, \frac{\partial \eta^0}{\partial n} \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt.$$

Pelas propriedades de η^0, $D_1 + D_{41} \geq 0$. Além disso, sendo η^0 de classe $C^2(\overline{\Omega})$

$$D_{43} = -s\lambda \iint_Q \Delta\eta^0 \, \xi |\nabla\psi|^2 \, dxdt \leq Cs\lambda \iint_Q \xi |\nabla\psi|^2 \, dxdt.$$

Assim,

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \geq -s\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi |\nabla\psi|^2 \, dxdt - Cs\lambda \iint_Q \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt. \tag{5.36}$$

Passo 3.3 - Estimativa de $((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_2)$: Vale que

$$((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_2) = \iint_Q \psi_t \, \Delta\psi \, dxdt = 0. \tag{5.37}$$

Passo 3.4 - Estimativa de $(M_1\psi, (M_2\psi)_2)$: Pelas estimativas (5.29) - (5.37), obtém-se que

$$\begin{aligned}
(M_1\psi, (M_2\psi)_2) &= ((M_1\psi)_1 + (M_1\psi)_2 + (M_1\psi)_3, (M_2\psi)_2) \\
&\geq s\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&- Cs^2\lambda^4 \iint_Q \xi^2 \, |\psi|^2 \, dxdt - C \iint_{\omega_0\times(0,T)} (s\lambda\xi + \lambda^2)|\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&=: E_1 + E_2 + E_3.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

para λ e s suficientemente grandes. Para estimar E_1, note que $|\nabla\eta^0|$ não se anula no fechado $\overline{\Omega\backslash\omega_0}$, logo $|\nabla\eta^0| \geq \alpha > 0$ em $\overline{\Omega\backslash\omega_0}$ para alguma constante α. Assim,

$$\begin{aligned}
E_1 &= s\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&\geq s\lambda^2 \iint_{\Omega\backslash\omega_0} |\nabla\eta^0|^2 \, \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&\geq Cs\lambda^2 \iint_{\Omega\backslash\omega_0} \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&= Cs\lambda^2 \iint_{\Omega} \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt - Cs\lambda^2 \iint_{\omega_0} \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt \\
&= E_{11} + E_{12}.
\end{aligned}$$

O termo E_2 será mantido como está. Para estimar o termo E_3, note que, para λ e s suficientemente grandes,

$$s\lambda\xi + \lambda^2 \leq Cs\lambda^2\xi,$$

logo,

$$\begin{aligned} E_3 &= -C \iint_{\omega_0 \times (0,T)} (s\lambda\xi + \lambda^2)|\nabla\psi|^2 \, dxdt \\ &\geq -Cs\lambda^2 \iint_{\omega_0 \times (0,T)} \xi|\nabla\psi|^2 \, dxdt. \end{aligned}$$

O termo E_{12} pode ser absorvido por E_3, logo

$$\begin{aligned} (M_1\psi, (M_2\psi)_2) &= ((M_1\psi)_1 + (M_1\psi)_2 + (M_1\psi)_3, (M_2\psi)_2) \\ &\geq Cs\lambda^2 \iint_Q \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt \\ &- Cs^2\lambda^4 \iint_Q \xi^2 \, |\psi|^2 \, dxdt - Cs\lambda^2 \iint_{\omega_0 \times (0,T)} \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt, \end{aligned} \tag{5.39}$$

para λ e s suficientemente grandes.

Passo 4 - Estimativa de $(M_1\psi, (M_2\psi)_3)$:

Passo 4.1 - Estimativa de $((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_3)$: Por definição,

$$((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_3) = -2s^2\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \alpha_t \, \xi \, |\psi|^2 \, dxdt. \tag{5.40}$$

Utilizando o Teorema 5.2.3 e que η^0 é de classe $C^2(\overline{\Omega})$,

$$-2s^2\lambda^2 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2 \, \alpha_t \, \xi \, |\psi|^2 \, dxdt \leq Cs^2\lambda^2 T \iint_Q \xi^3 \, |\psi|^2 \, dxdt \tag{5.41}$$

Este termo pode ser absorvido por $\tilde{A}$ para s e λ suficientemente grandes.

Passo 4.2 - Estimativa de $((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_3)$: Por definição,

$$((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_3) = -2s^2\lambda \iint_Q \alpha_t \, \xi \, (\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi) \, \psi \, dxdt. \tag{5.42}$$

Utilizando integração por partes na variável espacial e (5.11),

$$\begin{aligned} -2s^2\lambda \iint_Q \alpha_t \, \xi \, (\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi) \, \psi \, dxdt &= s^2\lambda^2 \iint_Q \alpha_t \, |\nabla\eta^0|^2 \, \xi \, |\psi|^2 \, dxdt \\ +s^2\lambda \iint_Q (\nabla\alpha_t \cdot \nabla\eta^0) \, \xi \, |\psi|^2 \, dxdt &+ s^2\lambda \iint_Q \alpha_t \, \Delta\eta^0 \, \xi \, |\psi|^2 \, dxdt. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Pelo Teorema 5.2.3, os três termos acima podem ser estimados inferiormente por

$$Cs^2\lambda^2 T \iint_Q \xi^3 \, |\psi|^2 \, dxdt,$$

para λ suficientemente grande. Isto implica que

$$((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_3) \geq -Cs^2\lambda^2 T \iint_Q \xi^3 \, |\psi|^2 \, dxdt \tag{5.44}$$

Passo 4.3 - Estimativa de $((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_3)$: Por definição,

$$((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_3) = s \iint_Q \alpha_t\, \psi_t\, \psi\, dxdt. \tag{5.45}$$

Utilizando integração por partes na variável temporal e o Teorema 5.2.3,

$$s \iint_Q \alpha_t\, \psi_t\, \psi\, dxdt = -\frac{1}{2} s \iint_Q \alpha_{tt}\, |\psi|^2\, dxdt \geq -CsT^2 \iint_Q \xi^3\, |\psi|^2\, dxdt. \tag{5.46}$$

Passo 4.4 - Estimativa de $(M_1\psi, (M_2\psi)_3)$: Pelas estimativas (5.40) - (5.46), obtém-se que

$$\begin{aligned} (M_1\psi, (M_2\psi)_3) &= ((M_1\psi)_1 + (M_1\psi)_2 + (M_1\psi)_3, (M_2\psi)_3) \\ &\geq -Cs^3\lambda^2 \iint_Q \xi^3\, |\psi|^2\, dxdt, \end{aligned} \tag{5.47}$$

para λ e s suficientemente grandes.

Passo 5 - Combinando as estimativas obtidas: Utilizando as estimativas (5.28), (5.39) e (5.47), obtém-se que

$$\begin{aligned} &(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q)} \\ &\geq C \iint_Q (s\lambda^2\, \xi\, |\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\, \xi^3\, |\psi|^2)\; dxdt - C \iint_{\omega_0\times(0,T)} (s\lambda^2 \xi\, |\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3\, |\psi|^2)\; dxdt, \end{aligned} \tag{5.48}$$

para λ e s suficientemente grandes. Acima, foi usado que $\xi^2 \leq \xi^3$ para λ suficientemente grande. Substituindo na igualdade (5.19),

$$\begin{aligned} &||M_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||M_2\psi||^2_{L^2(Q)} + \iint_Q (s\lambda^2\, \xi\, |\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3\, |\psi|^2)\; dxdt \\ &\leq C \left(||g_{s,\lambda}||^2_{L^2(Q)} + \iint_{\omega_0\times(0,T)} (s\lambda^2\, \xi\, |\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\, \xi^3\, |\psi|^2)\; dxdt \right). \end{aligned} \tag{5.49}$$

Pela definição de $g_{s,\lambda}$, e usando que η^0 é de classe $C^2(\overline{\Omega})$, tem-se que, para λ e s suficientemente grandes,

$$\begin{aligned} &||M_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||M_2\psi||^2_{L^2(Q)} + \iint_Q (s\lambda^2\, \xi\, |\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\, \xi^3\, |\psi|^2\, dxdt \\ &\leq C \Bigg(\iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\, dxdt + s^2\lambda^4 \iint_Q \xi^2\, |\psi|^2\, dxdt + s\lambda^2 \iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi\, |\nabla\psi|^2\, dxdt \\ &\qquad + s^3\lambda^4 \iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi^3\, |\psi|^2\, dxdt \Bigg). \end{aligned} \tag{5.50}$$

Conclui-se que, para λ e s suficientemente grandes,

$$\begin{aligned}
&||M_1\psi||^2_{L^2(Q)} + ||M_2\psi||^2_{L^2(Q)} + \iint_Q \left(s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\right) dxdt \\
&\leq C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\, dxdt + s\lambda^2 \iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi|\nabla\psi|^2\, dxdt + s^3\lambda^4 \iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\, dxdt\right).
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Por outro lado, usando a definição de $M_1\psi$ e $M_2\psi$ em (5.18), obtém-se que

$$s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\, dxdt \leq C\left(s\lambda^2\iint_Q \xi\,|\nabla\psi|^2\, dxdt + s\lambda^4\iint_Q \xi\,|\psi|^2\, dxdt + ||M_1\psi||^2_{L^2(Q)}\right),$$

$$\begin{aligned}
s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\, dxdt \leq C\Bigg(&s^3\lambda^4\iint_Q \xi^3\,|\nabla\psi|^2\, dxdt \\
&+sT^2\iint_Q \xi^3\,|\psi|^2\, dxdt + ||M_2\psi||^2_{L^2(Q)}\Bigg).
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.51) para λ e s suficientemente grandes,

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \left(s^{-1}\xi^{-1}\left(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2\right) + s\lambda^2\xi\,|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3\,|\psi|^2\right) dxdt \\
&\leq C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\, dxdt + s\lambda^2\iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi\,|\nabla\psi|^2\, dxdt + s^3\lambda^4\iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi^3\,|\psi|^2\, dxdt\right).
\end{aligned} \tag{5.52}$$

<u>Passo 6 - Eliminando uma integral:</u> O objetivo é eliminar a integral que possui o termo de $|\nabla\psi|^2$ do lado direito da desigualdade (5.52). Para isto, considere uma função de corte $\theta \in C_0^2(\Omega)$ que satisfaz

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad \theta|_{\omega_0} \equiv 1.$$

Assim, integrando por partes na variável espacial,

$$\begin{aligned}
s\lambda^2\iint_{\omega_0\times(0,T)} \xi\,|\nabla\psi|^2\, dxdt &\leq s\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} \theta\,\xi\,|\nabla\psi|^2\, dxdt \\
&= -s\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} \theta\,\xi\,\Delta\psi\,\psi\, dxdt \\
&\quad - s\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} \xi\,(\nabla\theta\cdot\nabla\psi)\,\psi\, dxdt \\
&\quad - s\lambda^3\iint_{\omega\times(0,T)} \theta\,\xi\,(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi)\,\psi\, dxdt \\
&=: F_1 + F_2 + F_3.
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Young com $\epsilon > 0$, isto é, o Teorema 2.6.2,

$$\begin{aligned}
F_1 &= -s\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} \theta\,\xi\,\Delta\psi\,\psi\,dxdt = -\int_{\omega\times(0,T)} \left(s^{-1/2}\,\xi^{-1/2}\,\Delta\psi\right)\left(s^{3/2}\,\lambda^2\theta\,\xi^{3/2}\psi\right)\,dxdt \\
&\leq \epsilon s^{-1} \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^{-1}\,|\Delta\psi|^2\,dxdt + C_\epsilon\,s^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \theta^2\,\xi^3\,|\psi|^2\,dxdt \\
&\leq \epsilon s^{-1} \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^{-1}\,|\Delta\psi|^2\,dxdt + C_\epsilon\,s^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3\,|\psi|^2\,dxdt.
\end{aligned}$$

Integrando por partes na variável espacial, utilizando (5.11) e o fato de que θ e η^0 são de classe $C^2(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned}
F_2 &= -\,s\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi\,(\nabla\theta\cdot\nabla\psi)\,\psi\,dxdt \\
&= \frac{s\lambda^3}{2} \iint_{\omega\times(0,T)} \xi\,(\nabla\eta^0\cdot\nabla\theta)\,|\psi|^2\,dxdt + \frac{s\lambda^2}{2} \iint_{\omega\times(0,T)} \xi\,\Delta\theta\,|\psi|^2\,dxdt \\
&\leq C\left(s^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\,dxdt + s\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\,dxdt\right),
\end{aligned}$$

para s e λ suficientemente grandes. Similarmente,

$$\begin{aligned}
F_3 &= -s\lambda^3 \iint_{\omega\times(0,T)} \theta\,\xi\,(\nabla\eta^0\cdot\nabla\psi)\,\psi\,dxdt \\
&\leq C\left(s^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\,dxdt + s\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\,dxdt\right),
\end{aligned}$$

para s e λ suficientemente grandes. Assim,

$$\begin{aligned}
F_1+F_2+F_3 \leq \epsilon s^{-1} \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^{-1}\,|\Delta\psi|^2\,dxdt + C_\epsilon &\left(s^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3\,|\psi|^2\,dxdt\right. \\
&\left.+s\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi\,|\psi|^2\,dxdt\right).
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.52) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtém-se que

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \left(s^{-1}\xi^{-1}\left(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2\right) + s\lambda^2\,\xi\,|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\,\xi^3\,|\psi|^2\right)\,dxdt \\
&\leq C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}|\psi_t + \Delta\psi|^2\,dxdt + s^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3\,|\psi|^2\,dxdt\right).
\end{aligned} \tag{5.53}$$

<u>Passo 7 - Voltando à função original:</u> Para o último passo, relembre que

$$q = e^{s\alpha}\psi. \tag{5.54}$$

Assim,

$$\nabla q = e^{s\alpha}(\nabla\psi - s\lambda\,\nabla\eta^0\,\xi\,\psi).$$

A igualdade acima implica que

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\,dxdt &= s\lambda^2 \iint_Q \xi|\nabla\psi - s\lambda\nabla\eta^0\,\xi\,\psi|^2\,dxdt \\ &\leq s\lambda^2 \iint_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt + s^3\lambda^4 \iint_Q |\nabla\eta^0|^2\,\xi^2\,|\psi|^2\,dxdt \\ &\leq Cs\lambda^2 \iint_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt + Cs^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\,|q|^2\,dxdt. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Similarmente, usando que

$$\Delta q = e^{s\alpha}\Delta\psi - s\lambda\Delta\eta^0 \;- s\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\,\xi q - 2s\lambda\,\xi\,\nabla\eta^0\cdot\nabla q - s^2\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\,\xi^2 q,$$

obtém-se que

$$\begin{aligned} s^{-1}\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}|\Delta q|^2\,dxdt \leq C\Bigg(& s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,dxdt \\ &+ s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|q|^2\,dxdt + s\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|q|^2\,dxdt \\ &+ s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|\nabla q|^2\,dxdt + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\,|q|^2\,dxdt\Bigg). \end{aligned} \tag{5.56}$$

Finalmente, como

$$q_t = \alpha_t e^{s\alpha}\psi + e^{s\alpha}\psi_t,$$

usando o Teorema (5.2.3), vale que

$$s^{-1}\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}|q_t|^2\,dxdt \leq C\left(s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,dxdt + sT^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\,|q|^2\,dxdt\right). \tag{5.57}$$

Rescrevendo a desigualdade (5.53),

$$\begin{aligned} & s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,dxdt + s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,dxdt \\ & + s\lambda^2 \iint_Q \xi\,|\nabla\psi|^2\,dxdt + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\,\xi^3\,|q|^2\,dxdt \\ \leq C &\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}\,|\psi_t + \Delta\psi|^2\,dxdt + s^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\,\xi^3\,|q|^2\,dxdt\right). \end{aligned} \tag{5.58}$$

Utilizando as estimativas (5.54), (5.55), (5.56) e (5.57) na desigualdade (5.58), obtém-se a desigualdade de Carleman (5.17). □

5.3 Controlabilidade a zero

Finalmente, a desigualdade de Carleman do Lema 5.2.4 pode ser utilizada para demonstrar que a equação do calor (1.1) é controlável a zero. Antes, será provado o seguinte lema:

Lema 5.3.1. *Se φ é solução do problema adjunto (4.1) com condição final $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, então vale a estimativa*

$$||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{T}\int_{T/4}^{3T/4} ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt \tag{5.59}$$

Demonstração. Multiplicando a equação adjunta por φ e integrando Ω, obtém-se que

$$\int_\Omega \varphi\varphi_t dx + \int_\Omega \Delta\varphi dx = 0. \tag{5.60}$$

Note que

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} = \frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi|^2 dx = 2\int_\Omega \varphi\varphi_t dx.$$

Substituindo na equação (5.60) e integrando por partes o segundo termo, tem-se que

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} = 2\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\, dx. \tag{5.61}$$

O segundo termo da equação (5.61) é não negativo, logo a função $||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}$ é não decrescente. Isto implica que

$$\int_{T/4}^{3T/4} ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt \geq \left(\frac{3T}{4} - \frac{T}{4}\right)||\varphi(3T/4)||^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{T}{2}\,||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)}\,. \tag{5.62}$$

Isto demonstra a estimativa (5.59). □

Teorema 5.3.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, aberto e limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $\omega \subset \Omega$ aberto não vazio e $T > 0$. Então, dada uma condição inicial $g \in L^2(\Omega)$, a equação do calor (1.1) é controlável a zero no tempo T, com controle $f \in L^2(\omega \times (0,T))$ que satisfaz*

$$||f||_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C||g||_{L^2(\Omega)}, \tag{5.63}$$

em que C é uma constante positiva que depende apenas de Ω e ω.

Demonstração. O conjunto das funções suaves é denso no espaço de todas as soluções da equação do calor adjunta (4.1) com condição final $\varphi_T \in L^2(\Omega)$. Neste caso, a solução satisfaz a desigualdade de Carleman do Lema 5.2.4. Fixando $\lambda = \lambda_1$, como $\varphi_t + \Delta\varphi = 0$, tem-se que

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 dxdt \leq C\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2 dxdt, \tag{5.64}$$

para todo $s \geq s_1$.

Agora note que

$$0 \leq t \leq T \implies t^{-3}(T-t)^{-3} \geq T^{-6}.$$

Além disso, α é uma função de classe $C^2(Q)$, sendo Q fechado, logo, assume seu máximo em algum ponto. Assim,

$$e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \geq C_1 T^{-6}, \quad \text{em} \quad \Omega \times (T/4, 3T/4),$$

em que C_1 é uma constante positiva que depende apenas de Ω, ω e T.

Por outro lado, temos que $\alpha \to \infty$ quando $t \to 0^+$ ou $t \to T^-$, logo $e^{2_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}$ é limitado. Em particular, existe uma constante C_2 positiva tal que

$$e^{-2s_1\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \leq C_2 T^{-6}, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T).$$

Utilizando estas estimativas na desigualdade (5.64), obtém-se que

$$\iint_{\Omega \times (T/4, 3T/4)} |\varphi|^2 dx dt \leq C \iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt,$$

sendo $C = C(\Omega, \omega, T)$ uma constante positiva. Esta desigualdade, junto com o Lema 5.3.1 provê a desigualdade de observabilidade (5.1). Pelo Teorema 5.1.2, a equação do calor (1.1) é controlável a zero. $\square$

6 Conclusões

Neste trabalho foi considerado, primeirmanete, o problema de controlabilidade aproximada e, posteriormente, a zero para o problema (1.1).

Pelo Teorema 4.0.1, dados um tempo final $T > 0$, um dado inicial $g \in L^2(\Omega)$, um estado final $u_1 \in L^2(\Omega)$ desejado e $\epsilon > 0$, existe um controle $f \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a correspondente solução u do problema (1.1) satisfaz

$$||u(T) - u_1||_{L^2(\Omega)} < \epsilon.$$

Além disso, pelo Teorema 5.3.2, dado um tempo final $T > 0$, um dado inicial $g \in L^2(\Omega)$, existe um controle $f \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a correspondente solução u do problema (1.1) satisfaz

$$u(T) \equiv 0.$$

Ainda mais, este controle satisfaz

$$||f||_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C||g||_{L^2(\Omega)},$$

em que C é uma constante positiva que depende apenas de Ω e ω.

É importante ressaltar que não há unicidade de controle garantida pelo método apresentado neste trabalho, apenas a existência.

Conclui-se que a equação do calor (1.1) é aproximadamente controlável e controlável a zero.

Referências

1 EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 2. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 2010. v. 19. Citado na(s) página(s): 13, 22, 23, 27, 28

2 BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. 1. ed. [S.l.]: Springer, New York, NY. (Universitext). Citado na(s) página(s): 25, 26, 31

3 MICU, S.; ZUAZUA, E. An introduction to the controllability of partial differential equations. 2005. Citado na(s) página(s): 25, 42, 43

4 HÖRMANDER, L. *Linear Partial Differential Operators*. [S.l.]: Springer, New York, NY, 1963. Citado na(s) página(s): 25

5 SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. 1. ed. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. Citado na(s) página(s): 29

6 PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. 1. ed. [S.l.]: Springer, New York, NY, 1983. Citado na(s) página(s): 43

7 FERNÁNDEZ-CARA, E.; GUERRERO, S. Global carleman inequalities for carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 45, 2006. Citado na(s) página(s): 47, 51

8 FABRE, C.; ZUAZUA, E.; JEAN-PIERRE, P. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1995. Citado na(s) página(s): 48

9 FURSIKOV, A.; IMANUVILOV, O. Controllability of evolution equations. *Lecture Note Series*, Seoul National University, v. 34. Citado na(s) página(s): 49

10 SANTOS, M. C. *Desigualdade de Carleman e Controlabilidade Nula para uma EDP com Coeficientes Complexos*. Dissertação (Mestrado) — UFPB, 2010. Citado na(s) página(s): 51