



**UNICAMP**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE  
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica

MAYARA BRAZ ANTUNES

**Recorrência por cadeia, sombreamento e  
sensibilidade em dinâmica linear e compacta**

Campinas

2022

Mayara Braz Antunes

**Recorrência por cadeia, sombreamento e sensibilidade em  
dinâmica linear e compacta**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica da Uni-  
versidade Estadual de Campinas como parte  
dos requisitos exigidos para a obtenção do  
título de Doutora em Matemática.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho

Este trabalho corresponde à versão  
final da Tese defendida pela aluna  
Mayara Braz Antunes e orientada pelo  
Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão  
Filho.

Campinas

2022

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

An89r Antunes, Mayara Braz, 1992-  
Recorrência por cadeia, sombreamento e sensibilidade em dinâmica linear e compacta / Mayara Braz Antunes. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Homeomorfismos. 2. Sistemas dinâmicos lineares. 3. Operadores lineares. 4. Operadores hipercíclicos. I. Varão Filho, José Régis Azevedo, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Chain recurrence, shadowing and sensitivity in linear and compact dynamic

**Palavras-chave em inglês:**

Homeomorphisms

Linear dynamical systems

Linear operators

Hypercyclic operators

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Doutora em Matemática

**Banca examinadora:**

José Régis Azevedo Varão Filho [Orientador]

Dominik Marek Kwietniak

Alfonso Artigue Carro

Gabriel Elias Mantovani

Ali Messaoudi

**Data de defesa:** 14-03-2022

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-0206-7359>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/9194908257824282>

**Tese de Doutorado defendida em 14 de março de 2022 e aprovada  
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO**

**Prof(a). Dr(a). DOMINIK MAREK KWIETNIAK**

**Prof(a). Dr(a). ALFONSO ARTIGUE CARRO**

**Prof(a). Dr(a). GABRIEL ELIAS MANTOVANI**

**Prof(a). Dr(a). ALI MESSAOUDI**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado a todas as meninas sonham em se tornar cientistas.*

# Agradecimentos

A matemática é um grande desafio, mas mais desafiador pra mim, nesta caminhada, é a incerteza do dia de amanhã. São muitas etapas com prazo de validade. O curso de graduação tem prazo de validade. O curso de mestrado tem prazo de validade. O curso de doutorado tem prazo de validade. Chegando ao fim de cada ciclo a pergunta mais pertinente que não conseguimos evitar é: O que vou fazer depois? Muitas vezes não sabemos a resposta. Ah, como é desesperador!

Dito isso, são tantas pessoas que gostaria de agradecer por me ajudarem de alguma forma enfrentar e vencer todas as dificuldades. Não citarei todos os nomes para não cometer injustiça por ter deixado de citar alguém. Não pensem que minha gratidão se restringe as pessoas que são do meu ciclo profissional/acadêmico. Sou muito grata pela minha família e amigos que me proporcionam os momentos de afeto, alegria, segurança e conforto.

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu namorado e colega de doutorado, Andrey, que é meu porto seguro e minha motivação para melhorar a cada dia. Ele me ajudou muito na realização deste trabalho, sempre que eu recorria a ele pedindo ajuda, ele estava disponível e não media esforços para me ajudar.

Quero agradecer meu orientador, Régis Varão, que sempre me incentivou e não me deixou desanimar. Em um momento importante de frustração ele me fez acreditar em meu potencial e me ajudou seguir nessa luta (acadêmica) que nunca foi fácil. O Régis nunca me deixou sozinha, além de me orientar profissionalmente, ele foi generoso e me colocou em contato com matemáticos que também são pessoas maravilhosas os quais foram essenciais na realização deste trabalho.

Bernardo Carvalho, meu coorientador, por estar presente todos os dias e por tantas portas que abriu para mim. Felizmente o professor Régis colocou o Bernardo em minha vida. O Bernardo é uma das pessoas mais generosas que já conheci. Sou grata e muito feliz por ele ter acreditado em mim e por ter me escolhido. Sua colaboração foi fundamental para realização desta tese.

Marisa Cantarino, minha amiga e colega de doutorado, por me ajudar com a revisão e sugestões para a melhoria da minha escrita. Desde do dia e que conheci a Marisa eu me encantei pela pessoa que é — inteligente, gentil, generosa, engraçada, emponderada e muito mais. Ela passou a ser uma inspiração para mim e tenho certeza que é e será para muitas outras mulheres também.

Gabriel Mantovani — meu amigo e coautor — pela parceria e também pela

generosidade em compartilhar comigo seu conhecimento e tempo.

No evento “Dinâmicas” em 2018 realizado no Icx na UFMG eu conheci a Margoth Tacuri que é orientanda de doutorado do Bernardo Carvalho. Foi o momento que surgiu nossa parceria. Eu gostaria de agradecer a Margoth pelo tempo que passamos juntas estudando. Sua companhia e parceria foi de grande valia para meu desenvolvimento com este trabalho. Espero poder retribuir todo carinho, paciência e acréscimo que me presenteou.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

# Resumo

Nesta tese, investigamos consequências de propriedades como sensibilidade, sombreamento e recorrência por cadeia em duas frentes, dinâmica linear e compacta.

No primeiro cenário estudamos conjuntos estáveis/instáveis locais de homeomorfismos sensíveis às condições iniciais. Provamos que os conjuntos instáveis/estáveis locais, de homeomorfismos sensíveis às condições iniciais com a propriedade de sombreamento, sempre contém um subconjunto compacto e perfeito do espaço. Como corolário, generalizamos resultados em [8] e [20] provando que homeomorfismos positivamente contável expansivos, definidos em espaços métricos compactos, que satisfazem ou transitividade e propriedade de sombreamento, ou a propriedade de L-sombreamento, só podem ser definidos em espaços contáveis. Além disso, introduzimos uma classe dos homeomorfismos sensíveis — que generaliza a *cw*-expansividade — a qual chamamos de *first-time sensibilidade*. Mostramos que, para os homeomorfismos *first-time* sensíveis definidos em contínuos de Peano, os conjuntos instáveis locais possuem contínuos de diâmetro uniforme, generalizando um resultado do Kato em [31]. Estes contínuos obtidos nos conjuntos instáveis locais são instáveis globais e têm crescimento uniforme. Por fim, mostramos que homeomorfismos *first-time* sensíveis, se admitem uma função compatível com a função diâmetro que faz com que estes contínuos obtidos nos conjuntos instáveis locais tenham comportamento hiperbólico, então têm entropia positiva.

No segundo cenário estudamos conceitos como sombreamento e recorrência por cadeia na dinâmica linear. Mostramos que sempre existe decomposição espectral do conjunto recorrente por cadeia de operadores lineares contínuos e que esta decomposição é trivial. Provamos também que todo sistema dinâmico linear transitivo por cadeia com a propriedade de sombreamento é frequentemente hipercíclico e, como um corolário, obtemos que todo sistema dinâmico linear hipercíclico com propriedade de sombreamento é frequentemente hipercíclico.

**Palavras-chave:** Sensibilidade, sombreamento, recorrência, hiperciclicidade.



# Abstract

In this thesis, we investigate consequences of properties such as sensitivity, shadowing and chain recurrence on two fronts, linear and compact dynamics.

In the first scenario we study local stable/unstable sets of sensitive to initial conditions homeomorphisms. We prove that local unstable/stable sets, of sensitive to initial conditions with the shadowing property, always contain a compact and perfect subset of the space. As a corollary we generalize results in [8] and [20] proving that expansive positively countable homeomorphisms defined in compact metric spaces which satisfy the transitivity and shadowing properties or the L-shadowing property can only be defined in countable spaces. Furthermore, we introduce a class of sensitive homeomorphisms — which generalizes the cw-expansivity — that we call *first-time sensitivity*. We show that, for first-time sensitive homeomorphisms defined in Peano continua, local unstable sets have continua of uniform diameter, generalizing a Kato result in [31]. These continua obtained from the local unstable sets are global unstable and have uniform growth. Finally, we show that first-time sensitive homeomorphisms, if they admit a function compatible with the diameter function and that makes these continua obtained in the local unstable sets have hyperbolic behavior, then they have positive entropy.

In the second scenario, we study concepts such as shadowing and chain recurrence in linear dynamics. We show that there is always spectral decomposition of the chain recurrent set of continuous linear operators and that this decomposition is trivial. We also prove that every chain-transitive linear dynamical system with the shadowing property is frequently hypercyclic and, as a corollary, we obtain that every hypercyclic linear dynamical system with the shadowing property is frequently hypercyclic.

**Keywords:** Sensitivity, shadowing, recurrence, hypercyclic.

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>DINÂMICA COMPACTA: SENSIBILIDADE, EXPANSIVIDADE E SOMBREAMENTO</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>1.1</b>	<b>Definições, exemplos e propriedades básicas</b> . . . . .	<b>18</b>
1.1.1	Objetos de interesse . . . . .	18
1.1.2	Caos: expansividade e sensibilidade . . . . .	19
1.1.3	Propriedade de sombreamento . . . . .	22
<b>1.2</b>	<b>Sensibilidade, sombreamento e conjuntos estáveis/instáveis locais</b> .	<b>28</b>
1.2.1	Cw-expansividade positiva e sombreamento . . . . .	32
<b>1.3</b>	<b>First-time sensibilidade</b> . . . . .	<b>35</b>
1.3.1	Exemplos . . . . .	45
1.3.2	Contínuos cw-instáveis/estáveis . . . . .	48
1.3.3	Entropia para homeomorfismos ft-sensíveis . . . . .	54
<b>2</b>	<b>DINÂMICA LINEAR: RECORRÊNCIA POR CADEIA E SOMBREAMENTO</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>2.1</b>	<b>Recorrência por cadeia para operadores lineares</b> . . . . .	<b>65</b>
2.1.1	Decomposição espectral . . . . .	66
2.1.2	O subespaço recorrente por cadeia . . . . .	72
<b>2.2</b>	<b>Transitividade por cadeia e propriedade de sombreamento</b> . . . . .	<b>76</b>
2.2.1	Recorrência e sombreamento . . . . .	86
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>89</b>

# Introdução

Este trabalho está dividido em duas partes. Na primeira parte estudamos propriedades dinâmicas — sensibilidade às condições iniciais, tipos de expansividade e sombreamento — de sistemas contínuos definidos em espaços métricos compactos. Alguns dos resultados desta parte pertencem a um artigo escrito em língua inglesa em parceria com Carvalho e Tacuri ([4]). Na segunda parte estudamos propriedades dinâmicas — recorrência por cadeia, transitividade, hiperciclicidade e sombreamento — de sistemas lineares limitados definidos em espaços vetoriais normados. Os principais teoremas contidos na Parte II desta tese pertencem ao artigo [5]. Os dois assuntos foram estudados paralelamente e de forma independente durante o período do doutorado, por isto decidimos escrever a tese dividida em duas partes assim como a introdução. Desta forma, podemos descrever devidamente o objetivo individual de cada um dos trabalhos.

## Parte I

A área da dinâmica se interessa por compreender a evolução de um determinado sistema dinâmico. Em particular, a dinâmica compacta importa-se com o que acontece quando consideramos

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n,$$

onde  $f : X \rightarrow X$  é uma aplicação contínua com  $X$  um espaço métrico compacto. Por exemplo, dado um ponto  $x \in X$  podemos investigar a órbita deste ponto: Ela tem pontos de acumulação? Ela é finita ou infinita? Ela é densa no espaço? Dentre outras questões. Também faz parte do estudo do comportamento de um sistema dinâmico entender e comparar iterações de condições iniciais próximas. Em algumas situações, condições iniciais próximas podem ter futuros dinâmicos (órbitas futuras) bem parecidos. Estas condições iniciais formam o conjunto

$$W_\varepsilon^s(x) := \{y \in X \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

conhecido como *conjunto estável local*. Em outras situações, condições iniciais arbitrariamente próximas podem ter futuros diferentes, passando a impressão de que este sistema tenha uma espécie de aleatoriedade no seu comportamento. Quanto mais restrito é o conjunto estável local de um sistema mais caótico ou imprevisível ele é. Analogamente, queremos entender o comportamento passado de condições iniciais próximas. Ou seja, queremos explorar os conjuntos

$$W_\varepsilon^u(x) := \{y \in X \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

chamados *conjuntos instáveis locais*, diante de algumas situações.

O conceito de caos está no núcleo da teoria dos sistemas dinâmicos. A compreensão de que comportamento aleatório pode ocorrer da evolução de sistemas determinísticos, como sistemas dinâmicos em espaços métricos compactos, conduziu muitos matemáticos a tentar formalizar a definição de caos. O primeiro a fazer isso, até onde sabemos, foi [27] no contexto de sistemas 1-dimensionais. R. Devaney, em seu livro [21], reuniu algumas dessas tentativas em uma definição que agora é conhecida como sistemas caóticos Devaney. A propriedade dinâmica que captura a ideia central de caos é a *sensibilidade às condições iniciais*.

Uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  definida em um espaço métrico  $(X, d)$  é *sensível às condições iniciais* (ou simplesmente *sensível*) se existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x \in X$  e todo  $\delta > 0$  existem  $y \in X$  com  $d(x, y) < \delta$  e  $n \in \mathbb{N}^*$  (onde  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) satisfazendo

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon.$$

Sensibilidade às condições iniciais significa que para cada condição inicial existem condições iniciais arbitrariamente próximas com futuros diferentes do seu. Podemos interpretar a sensibilidade às condições iniciais como uma condição sobre os conjuntos estáveis locais, ou seja, os conjuntos estáveis locais não contém nenhuma vizinhança. Isto é melhor ilustrado por Edward Lorenz e suas ideias sobre a instabilidade da atmosfera e o efeito Borboleta [33].

Neste trabalho estudamos sensibilidade às condições iniciais para homeomorfismos definidos em espaços métricos compactos e como isso implica na existência de condições iniciais com passados (órbitas passadas) similares. A ideia é entender se a sensibilidade pode ser vista como uma condição em todos os conjuntos instáveis locais, assegurando que eles são não-triviais em cenários distintos.

No primeiro cenário, assumimos que o espaço é métrico e compacto e que o sistema satisfaz a propriedade de sombreamento. Provamos a existência de subconjuntos compactos e perfeitos de condições iniciais com passado similares, isto é, o  $W_\varepsilon^u(x)$  de todo ponto  $x \in X$  contém um subconjunto compacto e perfeito do espaço. E como consequência disto, mostramos que homeomorfismos positivamente contáveis-expansivos que satisfazem: transitividade e têm propriedade de sombreamento; ou têm propriedade de L-sombreamento (conceito introduzido em [8]); podem somente ser definidos em espaços métricos compacto enumeráveis, generalizando resultados de [8] e [20].

A expansividade é outra propriedade topológica que está associada ao conceito de caos, onde condições iniciais distintas, mesmo que próximas, possuem trajetórias futuras ou passadas diferentes. Os *difeomorfismos de Anosov* — que são difeomorfismos cujo fibrado tangente se decompõe em direções complementares e  $Df$ -invariantes, uma com contração uniforme e outra com expansão uniforme — formam uma classe muito importante

dos sistemas expansivos. Tais difeomorfismos possuem a propriedade de sombreamento, a grosso modo, eles possuem bom comportamento diante de pequenas perturbações de órbitas. Os sistemas expansivos e com propriedade de sombreamento possuem propriedades hiperbólicas e por isso são chamados *topologicamente hiperbólicos*. Existem algumas variações de expansividade que a generalizam, como, por exemplo, a cw-expansividade, introduzida por Kato em 1993 [31].

A sensibilidade às condições iniciais diz que todo aberto do espaço atinge diâmetro maior que alguma constante em alguma iterada futura do sistema, neste sentido dizemos que todo aberto “cresce” quando iterado para o futuro. Esta noção, em contínuos de Peano — espaços métricos compacto, conexos e localmente conexos — generaliza a cw-expansividade. Através do estudo de como os abertos crescem, gostaríamos de generalizar a cw-expansividade mas ainda mantendo propriedades hiperbólicas. Dessa ideia surge a *first-time sensibilidade*. Ela se preocupa com o primeiro tempo de crescimento de bolas da seguinte maneira: considerando uma bola inicial, quando diminuimos o raio desta bola de maneira controlada — mantendo o ponto central — o tempo que a bola diminuída demorará para crescer é “pouco” mais que a bola inicial. Este “pouco” é limitado por uma constante que independe do ponto central da bola. Além disso, fixadas duas constantes de sensibilidade, cada bola depois que cresce mais do que a constante de sensibilidade menor, entre as duas constantes fixadas, demora no máximo um tempo uniforme para crescer mais do que a constante maior. Como este conceito é novo, vamos definir precisamente os homeomorfismos first-time sensíveis. Para defini-los, consideramos espaços métricos compactos satisfazendo duas hipóteses razoáveis, que são:

(P1) existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r')$  é conexa para todo  $r' \in (0, r)$  e todo  $x \in X$ ;

(P2) a aplicação  $(x, s) \rightarrow \overline{B(x, s)}$  é contínua na métrica Hausdorff.

**Definição.** Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo sensível definido em um espaço métrico compacto  $X$  satisfazendo as propriedades (P1) e (P2), com constante de sensibilidade  $\varepsilon > 0$ . Dado  $x \in X$  e  $r > 0$  seja  $n_{1,\varepsilon}(x, r) \in \mathbb{N}$  a primeira iterada de  $B(x, r)$  que o diâmetro é maior do que  $\varepsilon$ , isto é,

$$\text{diam } f^{n_{1,\varepsilon}(x,r)}(B(x, r)) > \varepsilon \quad \text{e}$$

$$\text{diam } f^j(B(x, r)) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } j \in [0, n_{1,\varepsilon}(x, r)) \cap \mathbb{N}.$$

Chamamos o número  $n_{1,\varepsilon}(x, r)$  o *primeiro tempo de crescimento* da bola  $B(x, r)$ . Dizemos que  $f$  é *first-time sensível* (ou *ft-sensível*) se existe uma sequência decrescente de funções,  $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , de  $X$  em  $\mathbb{R}_+^*$  tal que converge a 0 pontualmente,  $r_0$  é uma função constante e para cada  $0 < \gamma \leq \varepsilon$  existe  $M_\gamma$  satisfazendo as seguintes condições:

(F1)  $|n_{1,\gamma}(x, r_{k+1}(x)) - n_{1,\gamma}(x, r_k(x))| \leq M_\gamma, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall k \text{ tal que } r_k(x) \leq \gamma;$

$$(F2) \quad |n_{1,\gamma}(x, r_k(x)) - n_{1,\varepsilon}(x, r_k(x))| \leq M_\gamma, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall k \text{ tal que } r_k(x) \leq \gamma.$$

Mostramos que a ft-sensibilidade generaliza a cw-expansividade e o deslocamento no cubo de Hilbert  $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$  é um exemplo de homeomorfismo ft-sensível que não é cw-expansivo.

**Teorema.** Se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo cw-expansivo de um espaço métrico compacto satisfazendo as propriedades (P1) e (P2), então  $f$  e  $f^{-1}$  são ft-sensíveis.

Provamos que o produto de um homeomorfismo first-time sensível com um homeomorfismo equicontínuo em um espaço de dimensão positiva é first-time sensível e não é cw-expansivo, gerando uma classe de homeomorfismos first-time sensíveis que não são cw-expansivos. Por exemplo, o produto de um difeomorfismo de Anosov qualquer, que é first-time sensível, com a identidade no intervalo  $[0, 1]$ , que é equicontínua, é first-time sensível e não é cw-expansivo.

Provamos também que, para homeomorfismos first-time sensíveis, existe um contínuo de diâmetro uniforme em cada conjunto instável local, generalizando um resultado do Kato [31] no caso de homeomorfismos cw-expansivos. Mais precisamente, mostramos o seguinte resultado:

**Teorema.** Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo em um espaço métrico compacto  $X$  satisfazendo as propriedades (P1) e (P2). Então

(a) Se  $f$  é first-time sensível, então para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{diam}(C_\varepsilon^u(x)) \geq \delta \text{ para todo } x \in X.$$

(b) Se  $f^{-1}$  é first-time sensível, então para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{diam}(C_\varepsilon^s(x)) \geq \delta \text{ para todo } x \in X.$$

Denotamos por  $C_\varepsilon^s(x)$  e  $C_\varepsilon^u(x)$  as componentes conexas de  $x$  nos conjuntos estáveis e instáveis locais,  $W_\varepsilon^s(x)$  e  $W_\varepsilon^u(x)$ , respectivamente. E os chamamos de *contínuos estáveis* e *instáveis locais*, respectivamente.

Os contínuos instáveis locais dos homeomorfismos cw-expansivos são instáveis globais, têm crescimento uniforme dependendo somente do diâmetro e depois que eles crescem, mais do que uma certa constante de cw-expansividade, eles não voltam a ficar arbitrariamente pequenos nas iteradas futuras. Kato [31] usa estas propriedades dos contínuos instáveis locais para obter entropia positiva para os homeomorfismos cw-expansivos. Apesar dos homeomorfismos first-time sensíveis admitirem contínuos que não crescem

no futuro e nem no passado, mostramos que os contínuos de diâmetro uniforme obtidos no teorema acima (Teorema 1.3.1) em cada conjunto instável local são dinamicamente parecidos com os conjuntos instáveis locais dos homeomorfismos cw-expansivos — por isso os chamamos de *contínuos cw-instáveis locais*. Mais precisamente, eles são instáveis globais e têm crescimento uniforme, como mostra o resultado a seguir:

**Teorema.** Seja  $f : X \rightarrow X$  first-time sensível com constante de sensibilidade  $\varepsilon > 0$ . Existe,  $\delta > 0$  tal que, se  $C$  é um contínuo cw-instável local, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(C) = 0 \text{ e } \text{diam}(f^n(C)) \geq \delta \quad \forall n \geq 2M_\gamma,$$

onde  $M_\gamma$  vem da definição de first-time sensibilidade e  $\gamma$  é a constante de sensibilidade associada ao contínuo  $C$ .

Através da existência de contínuos instáveis locais, que crescem para o futuro de maneira uniforme dependendo somente do diâmetro, Kato [31] mostrou que os homeomorfismos cw-expansivos têm entropia positiva. No caso da ft-sensibilidade existem os contínuos cw-instáveis locais que se comportam de maneira semelhante aos contínuos dos cw-expansivos. Então foi natural tentarmos usar a mesma ideia, com os cw-instáveis locais, para provar que os homeomorfismos ft-sensíveis têm entropia positiva. Esta tentativa gerou alguns problemas e tais problemas são resolvidos se os contínuos cw-instáveis locais tiverem comportamento hiperbólico para alguma métrica. Artigue et al em [9] criam uma função para os homeomorfismos cw-expansivos, generalizando a construção de Fathi [23] de uma métrica hiperbólica usando apenas cw-expansividade, onde esta função tem propriedades métricas, é compatível com a função diâmetro e faz com que os contínuos estáveis e instáveis locais tenham comportamento hiperbólico. Esta construção é feita utilizando o bom comportamento dos contínuos de homeomorfismos cw-expansivos. A existência de uma função que torna os contínuos cw-instáveis locais hiperbólicos, para homeomorfismos ft-sensíveis, é suficiente para garantir entropia positiva. Chamamos uma função desta forma de *ft-métrica hiperbólica*. Provamos o seguinte teorema:

**Teorema.** Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo first-time sensível munido de uma ft-métrica hiperbólica. Então,  $f$  tem entropia positiva.

Em geral encontramos exemplos de homeomorfismos com entropia positiva com alguma propriedade de expansividade. Fathi em [23] provou que os homeomorfismos expansivos com dimensão positiva têm entropia positiva. Kato em [31, Teorema 4.1], mostra que os homeomorfismos cw-expansivos com dimensão positiva também têm entropia positiva. Em contra partida, nem todo sistema dinâmico sensível às condições iniciais tem entropia positiva (em [24] podemos ver um exemplo disto). Neste trabalho obtemos entropia positiva para uma classe de homeomorfismos sensíveis.

## Parte II

A Dinâmica Linear é o estudo de operadores lineares em espaços vetoriais topológicos. É relativamente simples descrever o comportamento dinâmico de qualquer operador linear em espaços vetoriais de dimensão finita. No entanto, quando a dimensão do espaço é infinita, o comportamento dinâmico dos operadores lineares se torna muito rico. Para entender o quão rica a dinâmica pode ser, mencionamos o resultado de Feldman [25] onde ele prova que existe um operador linear  $T : X \rightarrow X$  num espaço de Banach que “contém” todos os sistemas dinâmicos topológicos em espaços métricos compactos. Mais precisamente, dada uma aplicação contínua  $f : M \rightarrow M$  em um espaço métrico compacto  $M$ , existe um subespaço  $Y$  de  $X$  compacto e  $T$ -invariante tal que  $f$  é conjugado a  $T|_Y$ .

Em dinâmica linear, muitas vezes é interessante estudar comportamento de órbitas de um sistema. Por exemplo, pode-se perguntar se um sistema tem uma órbita que é densa no espaço. Na dinâmica topológica, um ponto cuja órbita é densa é denominado *ponto transitivo*, enquanto na dinâmica linear chamamos tal ponto de *vetor hipercíclico*. Um sistema que possui um vetor hipercíclico é denominado *sistema hipercíclico*. A Dinâmica Linear não é influenciada apenas por Sistemas Dinâmicos, é também influenciada pela Análise Funcional. É por isso que as definições não seguem necessariamente aquelas tipicamente encontradas na dinâmica compacta. Uma observação final da importância da dinâmica linear é o clássico problema aberto de Análise Funcional, o “Problema do Subespaço Invariante” (ver [12]) que pode ser formulado em termos de fechamento de órbitas de pontos, ou seja, de um ponto de vista da dinâmica.

Existem certas propriedades que são asseguradas pela compacidade em espaços, mas que não são válidas para sistemas em espaços topológicos gerais. Quando estudamos sistemas dinâmicos lineares não estamos trabalhando em espaços compactos, porém são sistemas que, em geral, se comportam bem e este bom comportamento pode ser suficiente para garantir tais propriedades. Neste sentido, tem havido um esforço recente para usar ferramentas que ajudaram os dinâmicos a entender os sistemas dinâmicos compactos no contexto dos sistemas dinâmicos lineares. Como exemplos de tal esforço podemos citar [13] e [14], que aplicou o conceito de sombreamento e hiperbolicidade para sistemas dinâmicos lineares. Podemos também citar [18], que usou entropia no estudo de operadores com propriedade de especificação. O foco principal deste trabalho é usar os conceitos de sombreamento positivo e recorrência por cadeia no estudo de operadores dinâmicos lineares.

Podemos dizer que tanto o sombreamento quanto a recorrência em cadeia estudam como o sistema responde a pseudo trajetórias. A grosso modo, uma pseudo trajetória (ou cadeia) é quase um pedaço de órbita do sistema. A diferença de uma órbita real é que a cada iteração da dinâmica há um possível deslocamento adicionado ao resultado. Esta definição de cadeia ocorre naturalmente na dinâmica computacional onde,



dado um sistema dinâmico, quase qualquer órbita calculada em um computador será uma pseudo-órbita, uma vez que poucas operações do computador estão livres de erros. As definições formais de recorrência por cadeia e sombreamento positivo serão fornecidas em suas respectivas seções.

A hiperciclicidade garante a existência de uma órbita que visita todos os abertos do espaço. Bayart e Grivaux em [11] introduziram a noção de hiperciclicidade frequente que garante a existência de uma órbita que visita todos os abertos do espaço com frequência positiva. Nosso principal resultado é o Teorema 2.2.2 onde mostramos que a recorrência por cadeia adicionada à condição de sombreamento, implica em hiperciclicidade frequente. Como sistemas hipercíclicos são transitivos por cadeia, então uma consequência imediata do nosso principal resultado é que se um sistema que for hipercíclico tiver a propriedade de sombreamento então ele é frequentemente hipercíclico.

Mostramos também que os operadores lineares limitados transitivos com propriedade de sombreamento são também misturadores topológicos. Esta implicação não é válida nem para os sistemas dinâmicos definidos em espaços métricos compactos. Juntando isto com o Teorema 2.2.2, mostramos que todos os conceitos: Hiperciclicidade, hiperciclicidade frequente, transitividade, mistura topológica e transitividade por cadeia são todos equivalentes quando assumimos propriedade de sombreamento.

Esta parte do trabalho está toda contida no Capítulo 2 desta tese. Na primeira seção do segundo capítulo, mostramos que o conjunto recorrente por cadeia de um operador linear limitado definido em um espaço de Banach é um subespaço fechado e estudamos o espaço recorrente por cadeia de operadores lineares diante de algumas situações. Vimos que se o espaço Banach possui decomposição em soma direta de dois subespaços fechados invariantes então o recorrente por cadeia é a soma direta dos espaços recorrentes por cadeia restrito aos subespaços fechados invariantes.

Na seção 2 do segundo capítulo, relacionamos diversos conceitos da dinâmica linear, como: Transitividade, recorrência, mistura topológica, hiperciclicidade e hiperciclicidade frequente. Mostramos que, tomando como hipótese a propriedade de sombreamento então todos estes conceitos são equivalentes.

# 1 Dinâmica Compacta: Sensibilidade, expansividade e sombreamento

## 1.1 Definições, exemplos e propriedades básicas

### 1.1.1 Objetos de interesse

A área da dinâmica se interessa por compreender a evolução de pontos de um espaço sob iterações de um determinado sistema. Nesta Parte I vamos trabalhar com sistemas da forma:  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo onde  $X$  é um espaço métrico compacto com métrica  $d$ . Queremos investigar o comportamento de homeomorfismos definidos em espaços métricos compactos através de suas iterações em diversos contextos.

Para isto vamos estabelecer algumas notações: Vamos denotar a composição de  $f$  por ele mesmo  $n$  vezes,

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}},$$

por  $f^n$  e  $f^0$  é a aplicação identidade. Como  $f$  é inversível faz sentido falarmos das iteradas de  $f^{-1}$ . Denotamos por  $f^{-n}$  as  $n$  composições de  $f^{-1}$ ,

$$\underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{n \text{ vezes}}.$$

Para cada  $x \in X$ , chamamos de *órbita de  $x$*  o conjunto de todas as iteradas por  $f$  de  $x$  e o denotamos por  $\mathcal{O}_f(x)$ . Mais precisamente,

$$\mathcal{O}_f(x) := \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dado um sistema dinâmico  $f : X \rightarrow X$  definido em um espaço métrico  $X$  com métrica  $d$ , definimos os seguintes conjuntos para cada ponto  $x \in X$

- *Conjunto  $\varepsilon$ -estável* ou *conjunto estável local* de  $x$ :

$$W_\varepsilon^s(x) := \{y \in X \mid d(f^n(y), f^n(x)) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\};$$

- *Conjunto estável* ou *conjunto estável global* de  $x$ :

$$W^s(x) := \left\{ y \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0 \right\}.$$

Denotamos a componente conexa de  $x$  em  $W_\varepsilon^s(x)$  por  $C_\varepsilon^s(x)$ .

Podemos definir conjuntos estáveis com respeito à  $f^{-1}$  que também são conhecidos como conjuntos instáveis com respeito à  $f$ . Ou seja, para cada ponto  $x \in X$ , definimos

- *Conjunto  $\varepsilon$ -instável* ou *conjunto instável local* de  $x$ :

$$W_\varepsilon^u(x) := \{y \in X \mid d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\};$$

- *Conjunto instável* ou *conjunto instável global* de  $x$ :

$$W^u(x) := \left\{ y \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) = 0 \right\}.$$

Denotamos a componente conexa de  $x$  em  $W_\varepsilon^u(x)$  por  $C_\varepsilon^u(x)$ .

O conjunto  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x)$  é chamado *bola dinâmica* de  $x \in X$  e raio  $\varepsilon$ .

Note que o estudo dos conjuntos estáveis e instáveis locais e globais é importante para a melhor compreensão do comportamento do sistema dinâmico em observação. Nesta Parte I (Capítulo 1) do trabalho investigamos os conjuntos estáveis e instáveis locais de homeomorfismos definidos em espaços métricos compactos que satisfazem algumas propriedades.

### 1.1.2 Caos: expansividade e sensibilidade

Nesta seção vamos abordar o conceito de sensibilidade às condições iniciais e noções de expansividade como a cw-expansividade. Os conceitos de expansividade e sensibilidade estão associadas a noção de caos, no sentido que mesmo condições arbitrariamente próximas têm comportamentos futuro ou passado distintos.

O cenário mais caótico é o da expansividade, em que quaisquer condições iniciais, mesmo que muito próximas, têm comportamentos diferentes. Matematicamente, um sistema dinâmico inversível  $f : X \rightarrow X$ , definido em um espaço métrico  $X$  com uma métrica  $d$ , é *expansivo* se existe uma constante  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x, y \in X$  com  $x \neq y$  existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon.$$

Chamamos o número  $\varepsilon$  de *constante de expansividade*.

A cw-expansividade permite a existência de condições iniciais com comportamentos dinâmicos similares, porém o conjunto formado por essas condições iniciais é totalmente desconexo. Ou seja, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x) \quad \text{é totalmente desconexo}$$

para todo  $x \in X$ . Chamamos o número  $\varepsilon$  de *constante de cw-expansividade*. Em outras palavras,  $f : X \rightarrow X$  é *continuum-wise expansivo* (ou *cw-expansivo*) se existe uma constante  $\varepsilon > 0$  tal que se  $A \subset X$  é um contínuo — conjunto compacto e conexo — não-degenerado então existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\text{diam}(f^n(A)) > \varepsilon,$$

onde  $\text{diam}(B) := \{d(y, z) \mid y, z \in B\}$  denota o diâmetro de  $B$ .

A sensibilidade às condições iniciais, comparada com as propriedades citadas acima, é a menos caótica. Ela exige que existam condições iniciais arbitrariamente próximas com futuros diferentes, mas, permite que se tenha um contínuo de condições iniciais com comportamentos similares — o que não ocorre na cw-expansividade e nem na expansividade. Uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  definida em um espaço métrico  $(X, d)$  é *sensível às condições iniciais* (ou *sensível*) se existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x \in X$  e todo  $\delta > 0$  existem  $y \in X$  com  $d(x, y) < \delta$  e  $n \in \mathbb{N}^*$  satisfazendo

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon.$$

O número  $\varepsilon$  é chamado *constante de sensibilidade* de  $f$ . Podemos explicar a sensibilidade de diferentes maneiras. Denotando por

$$B(x, \delta) = \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\}$$

a bola centrada em  $x$  e raio  $\delta$ , sensibilidade implica a existência de  $\varepsilon > 0$  tal que para toda bola  $B(x, \delta)$  com  $x \in X$  e  $\delta > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$\text{diam}(f^n(B(x, \delta))) > \varepsilon.$$

Então, sensibilidade aumenta diâmetro de bolas quando iteradas para o futuro. Para facilitar diremos simplesmente que um homeomorfismo é sensível quando ele for sensível às condições iniciais.

Em 1993 Kato mostrou em [30] a existência de contínuos estáveis e instáveis locais com diâmetro uniforme para cada ponto através do seguinte teorema:

**Teorema 1.1.1.** [30, Teorema 1.6] *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo cw-expansivo de um contínuo de Peano — contínuo localmente conexo —  $X$  com uma constante de cw-expansividade  $c > 0$ . Então, para todo  $c > \varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para qualquer  $x \in X$  existem subcontínuos  $A_x$  e  $B_x$  de  $X$  tal que  $x \in A_x \cap B_x$ ,  $\text{diam}(A_x) = \delta = \text{diam}(B_x)$  e  $A_x \subset W_\varepsilon^s(x)$  e  $B_x \subset W_\varepsilon^u(x)$ .*

Este teorema garante que, se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo cw-expansivo definido em um contínuo de Peano, então  $f$  é sensível. De fato, dada uma bola qualquer, existe um contínuo instável local não-degenerado contido nesta bola, pelo teorema acima. Como tal contínuo é instável local, pela cw-expansividade, existe uma iterada futura deste contínuo que tem diâmetro maior que a constante de cw-expansividade. Consequentemente, na mesma iterada a bola terá diâmetro grande também.

Veremos mais a frente um exemplo de um homeomorfismo sensível que não é cw-expansivo.

Temos as seguintes implicações, quando o espaço que o sistema dinâmico em observação está definido é um contínuo de Peano,

expansividade  $\Rightarrow$  cw-expansividade  $\Rightarrow$  sensibilidade

Nenhuma das recíprocas é verdadeira em geral, ou seja, existem exemplos de homeomorfismos cw-expansivos que não são expansivos e homeomorfismos sensíveis que não são cw-expansivos, como mostraremos a seguir.

**Exemplo 1.1.1.** Considere  $X = [0, 1]^{\mathbb{Z}}$  munido com a seguinte métrica:

Para  $\underline{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  e  $\underline{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  em  $X$ , seja

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}.$$

Considere o deslocamento bilateral à esquerda

$$\begin{aligned} \sigma : X &\rightarrow X \\ \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} &\mapsto \{x_{i+1}\}_{i \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

O deslocamento bilateral à esquerda  $\sigma$  em  $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$  é sensível. Vamos mostrar que qualquer  $\varepsilon < c = \frac{1}{4}$  é uma constante de sensibilidade para  $\sigma$ . Dado  $\delta > 0$  e  $\underline{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in X$ , escolha  $i_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $c/2^{i_0} < \delta$ . Seja

$$y_{i_0} = \begin{cases} x_{i_0} + c, & \text{se } x_{i_0} \in [0, 1/2] \\ x_{i_0} - c, & \text{se } x_{i_0} \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Então, a sequência  $\underline{y} = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{i_0-1}, y_{i_0}, x_{i_0+1}, \dots\}$  — que é basicamente a cópia de  $\underline{x}$  trocando somente a  $i_0$ -ésima coordenada por  $y_{i_0}$  — está em  $X$  e na bola centrada em  $\underline{x}$  e raio  $\delta$  pois,

$$d(\underline{y}, \underline{x}) = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{|y_i - x_i|}{2^{|i|}} \right\} = \frac{|x_{i_0} \pm c - x_{i_0}|}{2^{i_0}} = \frac{c}{2^{i_0}} < \delta.$$

Além disso, note que

$$d(\sigma^{i_0}(\underline{x}), \sigma^{i_0}(\underline{y})) = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{|x_{i+i_0} - y_{i+i_0}|}{2^{|i|}} \right\} = |x_{i_0} - x_{i_0} \pm c| = c > \varepsilon.$$

Portanto,  $\sigma$  é sensível.

Note que o contínuo  $C_r = \prod_{i < 0} \{0\} \times [0, r] \times \prod_{i > 0} \{0\}$ , com  $r > 0$ , é não-degenerado e não existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\text{diam } f^n(C_r) > r$ . Portanto,  $\sigma$  não é cw-expansivo.

**Exemplo 1.1.2.** Seja  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  o toro 2-dimensional, onde  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Considere a relação de equivalência  $p \sim -p$  para todo  $p \in \mathbb{T}^2$ . O espaço quociente é a esfera dois-dimensional  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{T}^2 / \sim$ . Denote por  $[p]$  a classe de equivalência de  $p$  com respeito à relação de equivalência  $\sim$ . A matriz hiperbólica

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

induz uma aplicação na esfera da seguinte forma:  $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ ,

$$g([p]) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot [p].$$

A aplicação  $g$  que é chamada Pseudo Anosov na esfera, é *cw-expansiva*, mas não é *expansiva* (para mais detalhes ver [7]).

### 1.1.3 Propriedade de sombreamento

O objetivo desta seção é introduzir a propriedade de sombreamento e outras noções de sombreamento como: sombreamento no limite e L-sombreamento. E também mostrar algumas relações entre essas versões de sombreamento a fim de usar essas relações para mostrar resultados nas próximas seções.

A grosso modo, os sistemas que possuem a propriedade de sombreamento admitem pequenas alterações a cada iteração sem “distorcer a realidade”. Mais precisamente:

Seja  $X$  um espaço métrico com métrica  $d$  e  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo sobre  $X$ . Dizemos que  $f$  tem a *propriedade de sombreamento* se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para cada sequência  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset X$  satisfazendo

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

existe  $y \in X$  tal que

$$d(f^n(y), x_n) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Neste caso, dizemos que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é uma  $\delta$ -*pseudo órbita* de  $f$  e que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é  $\varepsilon$ -*sombreada* por  $y$ .

**Exemplo 1.1.3.** Se  $f : X \rightarrow X$  é um difeomorfismo de Anosov definido em uma variedade Riemanniana compacta  $X$  — para cada  $x \in X$  o espaço tangente  $T_x X$  pode ser escrito como uma soma direta

$$T_x X = E_x^u \oplus E_x^s$$

de subespaços tais que

$$(a) \quad Df(E_x^s) = E_{f(x)}^s \text{ e } Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u;$$

(b) existem constantes  $c > 0$  e  $\lambda \in (0, 1)$  tal que

$$\|Df^n(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| \quad \text{onde } v \in E_x^s, n \geq 0$$

e

$$\|Df^{-n}(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| \quad \text{onde } v \in E_x^u, n \geq 0;$$

(c)  $E_x^s, E_x^u$  variam continuamente com  $x$ ,

— então  $f$  tem propriedade de sombreamento (ver [16, Proposição 3.6]).

**Exemplo 1.1.4.** A aplicação identidade

$$\begin{aligned} Id : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

não tem propriedade de sombreamento, pois se considerarmos, por exemplo,  $\varepsilon = 1/4$ . Para cada  $\delta > 0$  podemos escolher  $n = n(\delta)$  tal que  $0 < 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{2} < \delta$  e tomar a seguinte  $\delta$ -pseudo órbita

$$\left\{ \dots, 0, 0, 0, \frac{\delta}{2}, \sum_{i=1}^2 \frac{\delta}{2}, \sum_{i=1}^3 \frac{\delta}{2}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{2}, 1, 1, 1, \dots \right\}.$$

Note que todos os pontos de  $[0, 1]$  são pontos fixos para  $Id$  e qualquer ponto dista mais do que  $1/4$  de 0 ou de 1, então nenhum ponto sombreia a  $\delta$ -pseudo órbita acima.

**Observação 1.1.1.** Seja  $X$  um espaço métrico compacto. A aplicação identidade em  $X$ ,  $Id : X \rightarrow X$ , tem a propriedade de sombreamento se, e somente se,  $X$  é totalmente desconexo (ver [6, Teorema 2.3.2]).

Dizemos que  $f$  tem a propriedade de sombreamento no limite se para cada sequência  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset X$  satisfazendo

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} d(f(x_k), x_{k+1}) = 0$$

existe  $y \in X$  tal que

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} d(f^k(y), x_k) = 0.$$

Neste caso, dizemos que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é uma pseudo-órbita limite de  $f$  e que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é sombreada no limite por  $y$ .

Dizemos que um homeomorfismo  $f$ , definido em um espaço métrico compacto  $(X, d)$ , tem a propriedade de  $L$ -sombreamento, se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda sequência  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset X$  satisfazendo

$$d(f(x_k), x_{k+1}) \leq \delta \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ e}$$

$$d(f(x_k), x_{k+1}) \rightarrow 0 \text{ quando } |k| \rightarrow \infty,$$

existe  $z \in X$  satisfazendo

$$d(f^k(z), x_k) \leq \varepsilon \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

e

$$d(f^k(z), x_k) \rightarrow 0 \text{ quando } |k| \rightarrow \infty.$$

Neste caso, dizemos que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é uma  $\delta$ -pseudo órbita limite de  $f$  e que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é  $\varepsilon$ -sombreado no limite por  $z$ .

A propriedade de L-sombreamento parece ser a união das propriedades de sombreamento e sombreamento no limite. A diferença é que as sombras dadas pelo sombreamento e sombreamento no limite podem ser diferentes, já na propriedade de L-sombreamento obtém-se um ponto que satisfaz as duas condições, ou seja, sombreia e sombreia no limite. Em [8, Teorema E] é provado a equivalência entre L-sombreamento e sombreamento adicionado uma *estrutura de produto local assintótica*, i. e, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, y) < \delta$  implica que  $W_\varepsilon^s(x) \cap W^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \cap W^u(y) \neq \emptyset$ . Usaremos esta equivalência para mostrar que o deslocamento bilateral à esquerda é um exemplo de homeomorfismo que tem a propriedade de L-sombreamento.

**Exemplo 1.1.5.** O deslocamento à esquerda  $\sigma$  definido em  $X = [0, 1]$  como no Exemplo 1.1.1 tem a propriedade de L-sombreamento. Aoki e Hiraide, em [6, Theorem 2.3.12], mostram que  $\sigma$  tem a propriedade de sombreamento. Para ver que  $\sigma$  tem a propriedade de L-sombreamento é suficiente provar que  $\sigma$  satisfaz a estrutura de produto local assintótica. Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\delta = \varepsilon$  e  $\underline{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ,  $\underline{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  com  $d(\underline{x}, \underline{y}) < \delta$ . Note que, se  $\underline{z} = \{\dots, y_{-2}, y_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} d(\sigma^n(\underline{x}), \sigma^n(\underline{z})) &= \sup \left\{ \frac{|x_{i+n} - z_{i+n}|}{2^{|i|}} \mid i \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{|x_0 - y_0|}{2^n}, \frac{|x_{-1} - y_{-1}|}{2^{n+1}}, \frac{|x_{-2} - y_{-2}|}{2^{n+2}}, \dots \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{|x_{-i} - y_{-i}|}{2^{n+i}} \mid i \geq 0 \right\} \\ &= \frac{1}{2^n} \sup \left\{ \frac{|x_{-i} - y_{-i}|}{2^i} \mid i \geq 0 \right\} \\ &< \frac{\varepsilon}{2^n}. \end{aligned}$$

Uma conta similar mostra que  $d(\sigma^{-n}(\underline{y}), \sigma^{-n}(\underline{z})) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Isto assegura que  $\underline{z} \in W_\varepsilon^s(\underline{x}) \cap W^s(\underline{x}) \cap W_\varepsilon^u(\underline{y}) \cap W^u(\underline{y})$ . Ou seja,

$$W_\varepsilon^s(\underline{x}) \cap W^s(\underline{x}) \cap W_\varepsilon^u(\underline{y}) \cap W^u(\underline{y}) \neq \emptyset.$$

Não é difícil perceber que a propriedade de L-sombreamento implica na propriedade de sombreamento. Agora vamos ver como a propriedade de L-sombreamento implica na sombreamento no limite positivo. Para isto vamos definir sombreamento no limite positivo.



Dizemos que  $f$  tem a *propriedade de sombreamento no limite positivo* se para cada sequência  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  satisfazendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f(x_k), x_{k+1}) = 0$$

existe  $y \in X$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^k(y), x_k) = 0.$$

Neste caso, dizemos que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma *pseudo-órbita limite positivo* de  $f$  e que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é *sombreada no limite positivo* por  $y$ .

**Proposição 1.1.1.** *Se  $f$  tem a propriedade de L-sombreamento então tem a propriedade de sombreamento no limite positivo.*

*Demonstração.* Seja  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma pseudo-órbita no limite de  $f$  e seja  $\varepsilon = \text{diam}(X)$ . A propriedade de L-sombreamento garante a existência de  $\delta > 0$  tal que qualquer  $\delta$ -pseudo-órbita limite é  $\varepsilon$ -sombreada no limite. Escolha  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(f(x_k), x_{k+1}) < \delta \text{ para todo } k \geq N$$

e considere a sequência  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  definida por

$$y_k = \begin{cases} f^k(x_N), & k < 0 \\ x_{N+k}, & k \geq 0. \end{cases}$$

Claro que  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma  $\delta$ -pseudo-órbita limite, portanto, existe  $z \in X$  que  $\varepsilon$ -sombrea no limite  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Em particular,  $f^{-N}(z)$  sombrea no limite positivo  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

O L-sombreamento exerce impacto (positivamente) sobre o conjunto dos pontos recorrentes por cadeia oferecendo propriedades similares a de homeomorfismos topologicamente hiperbólicos — com propriedade de sombreamento e expansividade — sem exigir a expansividade. Para entender melhor o que isto significa vamos definir os pontos recorrentes por cadeia: Dizemos que uma sequência finita  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia, com  $\varepsilon > 0$ , se  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  e  $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$  para todo  $0 \leq i < n$ . Dados dois pontos  $x, y \in X$ , escrevemos  $x \mathcal{R} y$  se vale o seguinte:

$$\begin{aligned} &\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cadeia iniciando em } x \text{ e terminando em } y, \\ &\{x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y\}, \text{ e outra iniciando em } y \text{ e terminando em } x, \\ &\{y_0 = y, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m = x\}. \end{aligned}$$

O conjunto  $CR(f) = \{x \in X \mid x \mathcal{R} x\}$  é chamado *conjunto recorrente por cadeia*. Um ponto  $x \in CR(f)$  é chamado *recorrente por cadeia*. A relação  $\mathcal{R}$  em  $CR(f)$  é de equivalência e chamamos as classes de equivalência dada por esta relação de *classes recorrentes por cadeia*.

O Teorema da decomposição espectral [6, Theorem 3.4.4] — que é uma generalização da Decomposição Espectral dada por Smale em 1967 [40] — diz que, para homeomorfismos topologicamente hiperbólicos definidos em espaços métricos compactos, temos uma decomposição do seu conjunto recorrente por cadeia em uma união finita disjunta de classes recorrentes por cadeia, ou seja, eles admitem no máximo finitas classes recorrentes por cadeia. Em [8] Artigue, Carvalho, Cordeiro e Vieitez mostram o seguinte teorema:

**Teorema 1.1.2.** [8, Teorema F] *Se um homeomorfismo  $f$ , definido em um espaço métrico compacto  $X$ , satisfaz a propriedade de L-sombreamento, então existem  $C_1, \dots, C_n \subset CR(f)$  conjuntos compactos, disjuntos e  $f^n$ -invariantes tais que  $CR(f) = C_1 \cup \dots \cup C_n$ ,  $f(C_i) = C_{(i+1) \bmod n}$  e  $f|_{C_i}$  é topologicamente misturadora e satisfaz a propriedade de sombreamento no limite.*

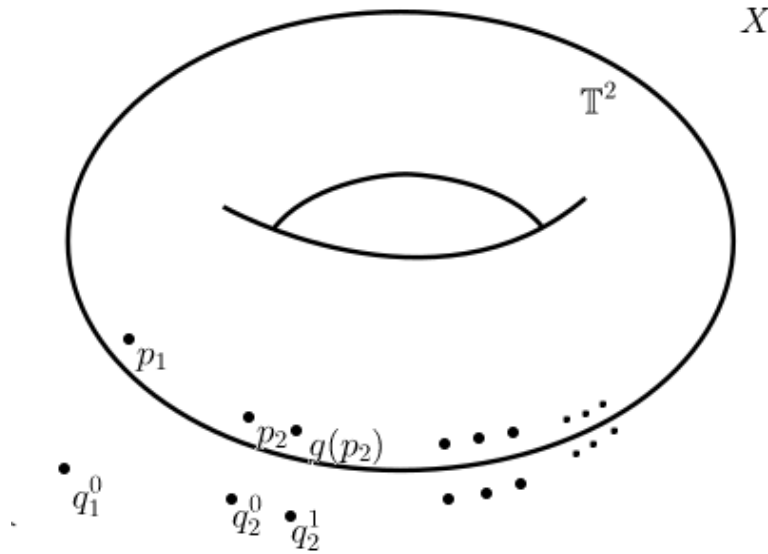
Isto significa que os homeomorfismos definidos em compactos com propriedade de L-sombreamento possuem decomposição espectral.

A título de curiosidade, veremos agora um exemplo de um homeomorfismo que possui a propriedade de sombreamento e não possui a propriedade de L-sombreamento. Além disso, tal homeomorfismo possui infinitas classes recorrentes por cadeia — o que garante que não tem L-sombreamento. Este exemplo mostra que: a propriedade de sombreamento sozinha não garante a finitude das classes recorrente por cadeia; e que o conjunto dos homeomorfismos com a propriedade de sombreamento e o conjunto dos homeomorfismos com a propriedade de L-sombreamento são distintos.

**Exemplo 1.1.6** ([8]). *Considere  $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um difeomorfismo de Anosov linear. Seja  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de pontos periódicos de  $g$  com períodos distintos, ou seja,  $P(p_n) \neq P(p_m)$  sempre que  $n \neq m$ , onde  $P(x) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^k(x) = x\}$  é o período do ponto  $x$ . Considere um novo espaço métrico*

$$X = \mathbb{T}^2 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n^0, \dots, q_n^{P(p_n)-1}\},$$

onde  $q_n^j \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{T}^2$  e  $|q_n^{j \bmod P(p_n)} - g^j(p_n)| = \frac{1}{n}$ . Vamos dizer que o ponto base de  $q_n^j$  é  $g^j(p_n)$ .



Consideramos em  $X$  a métrica definida por: a distância de um ponto  $q_n^j$  para um ponto qualquer  $x \in \mathbb{T}^2$  é a soma da distância de  $q_n^j$  para seu ponto de base e a distância natural do toro do ponto de base à  $x$ ; e a distância entre os pontos  $q_n^j$  e  $q_m^l$  é a soma das distâncias destes pontos para seus respectivos pontos de base mais a distância natural do toro de um ponto de base à outro. Não é difícil ver que o espaço métrico  $X$  com a métrica  $d$  é compacto.

O homeomorfismo

$$f : X \rightarrow X$$

$$x \mapsto \begin{cases} g(x), & \text{se } x \in \mathbb{T}^2 \\ q_n^{j+1 \bmod P(p_n)}, & \text{se } x = q_n^j. \end{cases}$$

tem a propriedade de sobreamento e possui infinitas classes recorrentes por cadeia. Note que para cada  $n$ ,  $\{q_n^0, \dots, q_n^{P(p_n)-1}\}$  é uma órbita periódica de período  $P(p_n)$  tal que a órbita de  $q_n^0 \frac{1}{n}$ -sobreia a órbita de  $p_n$ . Os pontos  $q_n^0$  e  $q_m^0$  estão em classes recorrentes por cadeia distintas sempre que  $m \neq n$ . Isto implica que  $f$  tem infinitas classes recorrente por cadeia. Como  $g$  tem propriedade de sobreamento e os pontos  $q_n^j$  são pontos isolados de  $X$ , não é difícil perceber que  $f$  tem propriedade de sobreamento.

Por último mostraremos que o L-sobreamento garante que qualquer ponto do espaço está no conjunto estável de algum ponto do conjunto dos pontos recorrentes por cadeia.

**Proposição 1.1.2.** *Se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo definido em um espaço métrico*

compacto e satisfaz a propriedade de  $L$ -sombreamento, então

$$X = \bigcup_{x \in CR(f)} W^s(x).$$

*Demonstração.* É provado em [20] que a propriedade de  $L$ -sombreamento implica que o conjunto recorrente por cadeia é uma união finita de classes recorrentes por cadeia

$$CR(f) = \bigcup_{i=1}^n C_i.$$

Isto implica que a restrição de  $f$  em cada uma das classes satisfaz a propriedade de  $L$ -sombreamento e, em particular, a propriedade de sombreamento no limite positivo. O argumento em [6, Teorema 3.2.2] prova que

$$X = \bigcup_{i=1}^n W^s(C_i),$$

onde  $W^s(C) = \left\{ y \in X \mid \lim_{k \rightarrow \infty} d(f^k(y), C) = 0 \right\}$ . Assim, se  $z \in X$ , então

$$z \in W^s(C_i) \text{ para algum } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Podemos projetar a órbita de  $z$  na classe  $C_i$  considerando uma sequência de pontos  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C_i$  que minimiza a distância entre  $f^k(z)$  e  $C_i$ . Segue de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^k(z), C_i) = 0$$

que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma pseudo-órbita no limite positivo de  $f$  e então a propriedade de sombreamento no limite assegura a existência de  $x \in C_i$  que sombreia no limite positivo  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Em particular, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^k(z), f^k(x)) = 0 \quad \text{i.e.} \quad z \in W^s(x).$$

□

## 1.2 Sensibilidade, sombreamento e conjuntos estáveis/instáveis locais

Nesta seção vamos entender como a sensibilidade junto com a propriedade de sombreamento agem sobre os conjuntos estáveis/instáveis locais. Vimos que a sensibilidade é uma generalização da  $cw$ -expansividade em contínuos de Peano. E os homeomorfismos  $cw$ -expansivos definidos em contínuos de Peano possuem contínuos de diâmetro relativamente grande em cada conjunto estável/instável local (resultado devido a Kato [31]). Em quais contextos de sensibilidade que podemos garantir a existência de contínuos estáveis e

instáveis locais para cada ponto do espaço? Mostramos que a combinação da sensibilidade com a propriedade de sombreamento gera conjuntos perfeitos — fechados e sem pontos isolados — de condições iniciais dentro de cada conjunto instável local. A prova disso foi inspirada na prova da Proposição 2.2.2 em [7]. Na seção 1.3 mostramos que os conjuntos instáveis locais possuem contínuos de diâmetro uniforme para uma determinada classe de homeomorfismos sensíveis que ainda generaliza a cw-expansividade.

O deslocamento bilateral à esquerda em  $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$  é um homeomorfismo sensível que satisfaz a propriedade de sombreamento (ver [6, Teorema 2.3.12]) e que não é cw-expansivo. A seguir, exibimos mais exemplos de homeomorfismos sensíveis que satisfazem a propriedade de sombreamento. Para isto vamos estabelecer algumas notações.

Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espaços métricos e considere  $X \times Y$  o espaço produto topológico com a métrica

$$d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

Considere o homeomorfismo produto  $f \times g : X \times Y \rightarrow X \times Y$  definido por

$$f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$$

para todo  $(x, y) \in X \times Y$ .

**Teorema 1.2.1.** [4] *Sejam  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  homeomorfismos definidos em espaços métricos compactos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$ , respectivamente. Se  $f$  e  $g$  têm a propriedade de sombreamento e um deles é sensível, então o produto  $f \times g$  tem a propriedade de sombreamento e é sensível. Além disso, se  $f$  ou  $g$  não é cw-expansivo, então  $f \times g$  não é cw-expansivo.*

*Demonstração.* Suponha que  $f$  e  $g$  têm a propriedade de sombreamento e  $f$  é sensível. Seja  $\varepsilon > 0$  uma constante de sensibilidade de  $f$ . Dado  $(x, y) \in X \times Y$  e  $\delta > 0$ , pela sensibilidade de  $f$ , existem  $x' \in B_X(x, \delta) = \{z \in X \mid d_X(x, z) < \delta\}$  e  $n \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$d_X(f^n(x), f^n(x')) > \varepsilon.$$

Como

$$d_{X \times Y}((x, y), (x', y)) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y)\} = d_X(x, x') < \delta,$$

então  $(x', y) \in B_{X \times Y}((x, y), \delta)$ . Portanto,  $(x', y)$  satisfaz

$$\begin{aligned} d_{X \times Y}((f \times g)^n(x, y), (f \times g)^n(x', y)) &= d_{X \times Y}((f^n(x), g^n(y)), (f^n(x'), g^n(y))) \\ &= \max\{d_X(f^n(x), f^n(x')), d_Y(g^n(y), g^n(y))\} \\ &= d_X(f^n(x), f^n(x')) > \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto mostra que  $f \times g$  é sensível. O fato que o produto de homeomorfismos que possuem a propriedade de sombreamento tem também a propriedade de sombreamento é conhecido e pode ser visto em [6, Theorem 2.3.5]. Agora, suponha que  $g$  não é cw-expansivo, i.e., para  $\varepsilon > 0$  dado existe um contínuo não-degenerado  $C \subset Y$  tal que  $\text{diam}(g^n(C)) < \varepsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . O conjunto  $\{x\} \times C$  de  $X \times Y$  é um contínuo não-degenerado satisfazendo

$$\text{diam}((f \times g)^n(\{x\} \times C)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z},$$

para qualquer  $x \in X$ . Portanto,  $f \times g$  não é cw-expansivo.  $\square$

**Exemplo 1.2.1.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  um difeomorfismo de Anosov e  $g : Y \rightarrow Y$  um difeomorfismo Morse-Smale. Pelo teorema acima, o homeomorfismo produto  $f \times g$  é sensível, tem propriedade de sombreamento e não é cw-expansivo, pois  $f$  é sensível e tem a propriedade de sombreamento e  $g$  tem a propriedade de sombreamento e não é cw-expansivo.*

Agora, enunciamos e demonstramos o resultado principal desta seção. Onde obtemos conjuntos não-enumeráveis de condições iniciais que possuem comportamentos similares para o passado, para homeomorfismos sensíveis com propriedade de sombreamento, apesar da caoticidade destes sistemas.

**Teorema 1.2.2.** [4] *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo em um espaço métrico compacto  $X$  com propriedade de sombreamento.*

1. *Se  $f$  é sensível, com constante de sensibilidade  $\varepsilon > 0$ , então para cada  $x \in X$  existe um conjunto compacto e perfeito*

$$C_x \subset W_\varepsilon^u(x).$$

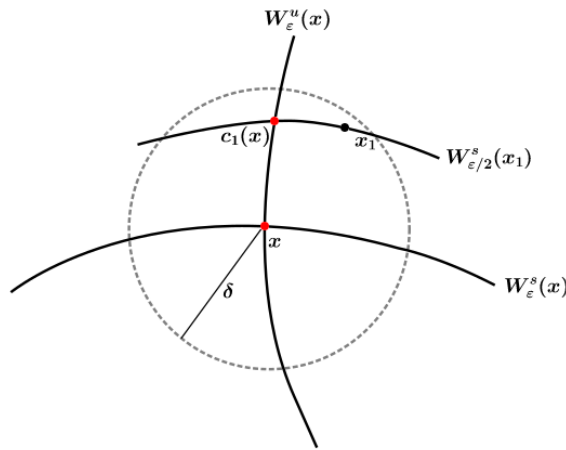
2. *Se  $f^{-1}$  é sensível, com constante de sensibilidade  $\varepsilon > 0$ , então para cada  $x \in X$  existe um conjunto compacto e perfeito*

$$C_x \subset W_\varepsilon^s(x).$$

*Demonstração.* Assuma que  $f$  é um homeomorfismo sensível com constante de sensibilidade  $\varepsilon > 0$ . A propriedade de sombreamento assegura a existência de  $\delta \in (0, \varepsilon)$  tal que toda  $\delta$ -pseudo órbita de  $f$  é  $\varepsilon/2$ -sombreada. Dado  $x \in X$ , podemos usar a sensibilidade de  $f$  para obter  $x_1 \in X$  tal que  $d(x, x_1) < \delta$  e  $x_1 \notin W_\varepsilon^s(x)$ . Considere a sequência  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  definida como segue

$$x^k = \begin{cases} f^k(x), & k < 0 \\ f^k(x_1), & k \geq 0. \end{cases}$$

A sequência  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é uma  $\delta$ -pseudo órbita de  $f$  e então pela propriedade de sombreamento existe  $c_1(x) \in W_{\varepsilon/2}^u(x) \cap W_{\varepsilon/2}^s(x_1)$ . Note que  $c_1(x) \neq x$ , pois  $c_1(x) \in W_{\varepsilon/2}^s(x_1)$  e  $x \notin W_{\varepsilon/2}^s(x_1)$ . Veja Figura 1. Considere o conjunto  $C_1 = \{x, c_1(x)\}$ .


 Figura 1 – Escolha de de  $x_1$  e  $c_1(x)$ .

Seja  $\varepsilon_1 > 0$  tal que

$$\varepsilon_1 < \min\{\varepsilon/4, d(x, c_1(x))/2\}$$

e escolha  $\delta_1 \in (0, \varepsilon_1)$ , dado pela propriedade de sombreamento, tal que toda  $\delta_1$ -pseudo órbita é  $\varepsilon_1$ -sombreada. Podemos usar a sensibilidade de  $f$  para cada  $y \in C_1$  para obter  $y_1 = y_1(y)$  tal que

$$d(y, y_1) < \delta_1 \text{ e } y_1 \notin W_\varepsilon^s(y).$$

A sequência  $\{y^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  dada por

$$y^k = \begin{cases} f^k(y), & k < 0 \\ f^k(y_1), & k \geq 0 \end{cases}$$

é uma  $\delta_1$ -pseudo órbita de  $f$ , logo a propriedade de sombreamento assegura que existe  $c_2(y) \in W_{\varepsilon_1}^u(y) \cap W_{\varepsilon_1}^s(y_1) \subset W_\varepsilon^u(x)$  com  $c_2(y) \neq y$ . Além disso, temos que  $c_2(y) \neq z$  para cada  $z \in C_1$ , pois  $d(c_2(y), y) < \varepsilon_1$  e  $d(y, z) > \varepsilon_1$  se  $z \in C_1 \setminus \{y\}$ . Veja Figura 2.

Desta forma, o conjunto

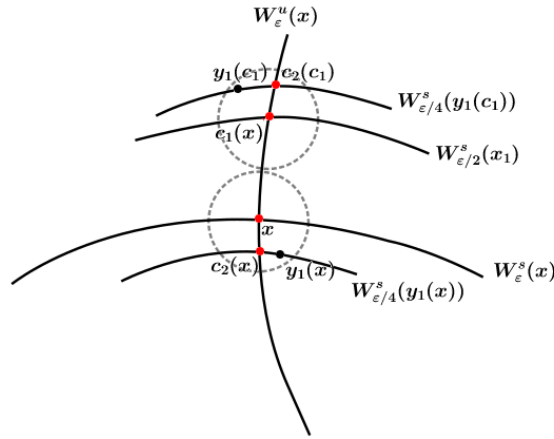
$$C_2 = C_1 \cup \{c_2(y) \mid y \in C_1\}$$

tem  $2^2$  elementos, está no conjunto  $\varepsilon$ -instável de  $x$  e para cada  $y \in C_1$  existe um ponto  $c_2(y)$  em  $C_2$  que está  $\varepsilon/2^2$ -próximo de  $y$ , ou seja,

$$d(c_2(y), y) < \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Pelo processo de indução podemos construir uma sequência crescente de subconjuntos encaixados  $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  tal que  $C_k$  tem  $2^k$  elementos,  $C_k$  está no conjunto  $\varepsilon$ -instável de  $x$  e, para cada  $y \in C_{k-1}$ , existe  $c_k(y) \in C_k$  tal que

$$d(c_k(y), y) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$


 Figura 2 – Construção de  $c_2(y)$ .

Então podemos considerar o conjunto

$$C_x = \overline{\bigcup_{k \geq 1} C_k},$$

que é um subconjunto compacto contido em  $W_\varepsilon^u(x)$ , pois  $W_\varepsilon^u(x)$  é fechado e  $C_k \subset W_\varepsilon^u(x)$  para todo  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Para ver que  $C_x$  é perfeito, considere  $z \in C_x$ . Se  $z \notin C_x$  para todo  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  então  $z$  é acumulado por pontos de  $C_x$ . Se  $z \in C_k$  para algum  $k \geq 1$  então

$$z \in C_n \text{ para todo } n \geq k,$$

pois  $\{C_k\}_{k \geq 1}$  é uma sequência crescente. Logo, para cada  $\alpha > 0$  podemos escolher  $N > k$  tal que

$$\frac{\varepsilon}{2^N} < \alpha.$$

E, como  $z \in C_N$ , segue que existe  $c_{N+1}(z) \in C_{N+1}$  satisfazendo

$$d(c_{N+1}(z), z) < \frac{\varepsilon}{2^N} < \alpha.$$

Então, para cada  $z \in C_x$  e  $\alpha > 0$ , podemos encontrar  $c_{N+1}(z) \in C_x$  tal que  $d(z, c_{N+1}(z)) < \alpha$ . Isto prova que  $z$  é um ponto de acumulação de  $C_x$  e que  $C_x$  é perfeito. A prova para o caso  $f^{-1}$  sensível pode ser feita de maneira análoga.  $\square$

**Observação 1.2.1.** *O desenho utilizado na demonstração do teorema anterior é para facilitar a compreensão da ideia. Observe que no desenho os conjuntos estáveis e instáveis locais são conjuntos “bons” e contínuos, o que pode não ocorrer.*

### 1.2.1 Cw-expansividade positiva e sombreamento

Nesta subseção obtemos consequências do Teorema 1.2.2 que generalizam resultados de [8] e [20]. Em [31] e [30] Kato introduziu a noção de cw-expansividade positiva.



**Definição 1.2.1.** Um homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  é positivamente cw-expansivo se existe  $c > 0$  tal que  $W_c^s(x)$  é totalmente desconexo para todo  $x \in X$ , i. e., qualquer conjunto  $c$ -estável não contém contínuos não degenerados.

Kato exibiu exemplos de homeomorfismos positivamente cw-expansivos e provou que eles não podem ser definidos em contínuos de Peano (ver Corolário 1.7 em [30]). Provaremos que restrições a certos conjuntos hiperbólicos — que são conjuntos cujo fibrado tangente se decompõe em direções complementares e  $Df$ -invariantes, uma com contração uniforme e outra com expansão uniforme — fornecem exemplos de homeomorfismos positivamente cw-expansivos satisfazendo a propriedade de sombreamento. Para isto usaremos o Teorema 1 de [1] que diz que um conjunto hiperbólico contido em  $\Omega(f) = \{x \in X \mid \forall U \subset X \text{ com } x \in U, U \text{ aberto de } X, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } U \cap f^n(U) \neq \emptyset\}$  ou tem interior vazio ou é a variedade toda.

**Teorema 1.2.3.** [4] Seja  $f : X \rightarrow X$  um difeomorfismo definido em uma variedade fechada e seja  $\Lambda$  um atrator hiperbólico  $f$ -invariante para  $f$ . Se  $\Lambda \subset \Omega(f)$ ,  $\Lambda \neq M$  e sua folheação estável (instável) tem dimensão 1 então  $f|_\Lambda$  ( $f^{-1}|_\Lambda$ ) é positivamente cw-expansivo.

*Demonstração.* Assuma que a folheação estável de  $\Lambda$  tem dimensão 1, i.e.,  $\dim(W^s(x)) = 1$  para todo  $x \in \Lambda$ , e vamos provar que  $f|_\Lambda$  é positivamente cw-expansivo. Por contradição, suponha que  $f|_\Lambda$  não é positivamente cw-expansivo. Então, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe um contínuo não degenerado  $C \subset \Lambda$  e  $x \in \Lambda$  tal que  $C \subset W_\varepsilon^s(x)$ . Seja

$$A = \bigcup_{x \in C} W_\varepsilon^u(x).$$

Como  $\Lambda$  é um conjunto atrator,

$$W_\varepsilon^u(x) \subset \Lambda \text{ para todo } x \in \Lambda.$$

O que implica que  $A \subset \Lambda$ . Como  $C$  é um contínuo não-degenerado em um conjunto estável de dimensão 1, segue que  $C$  é também uma variedade unidimensional. Isto assegura que o interior de  $A$  não é vazio. Logo, o interior de  $\Lambda$  é não-vazio, pois  $A \subset \Lambda$ . Pelo Teorema 1 em [1], temos que  $\Lambda = M$ , contradizendo a hipótese de que  $\Lambda \neq M$ .  $\square$

O Solenoide é um exemplo de atrator hiperbólico que ilustra o resultado acima (ver [37] para mais detalhes deste atrator). Este exemplo é um homeomorfismo positivamente cw-expansivo (e também sensível) satisfazendo a propriedade de sombreamento e que tem conjuntos estáveis locais não-enumeráveis. Agora vamos discutir o caso em que todos os conjuntos estáveis são contáveis.

**Definição 1.2.2.** Dizemos que um homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  no espaço métrico  $X$  é positivamente contável-expansivo se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $W_\varepsilon^s(x)$  é contável para todo  $x \in X$ .

Qualquer homeomorfismo definido em um espaço métrico compacto e enumerável é claramente contável expansivo. Então, a aplicação identidade em um espaço compacto contável é positivamente contável-expansiva e satisfaz a propriedade de sombreamento (ver Exemplo 1.1.1).

Um resultado clássico em dinâmica topológica é a dicotomia de Auslander-York: um homeomorfismo minimal de um espaço métrico compacto ou é sensível ou equicontínuo. Moothathu em [34] provou que um homeomorfismo transitivo satisfazendo a propriedade de sombreamento ou é sensível ou equicontínuo. Um homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  definido em um espaço métrico compacto é dito *equicontínuo* se, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$B(x, \delta) \subset W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Nós observamos que uma consequência do Teorema 1.2.2 é o seguinte resultado.

**Corolário 1.2.1.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo contável-expansivo definido em um espaço métrico compacto  $X$  e com a propriedade de sombreamento. Então  $f^{-1}$  não é sensível.*

*Demonstração.* Se  $f^{-1}$  é sensível, o Teorema 1.2.2 assegura a existência de conjuntos compactos e perfeitos em todo conjunto estável local, mas isto implica que conjuntos estáveis locais são não-enumeráveis, contradizendo a contável-expansividade positiva.  $\square$

Veremos que não existem homeomorfismos positivamente contável-expansivos transitivos com propriedade de sombreamento ou com propriedade de L-sombreamento definidos em espaços métricos não-enumeráveis.

**Teorema 1.2.4.** [4] *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo positivamente contável-expansivo definido em um espaço métrico compacto  $X$ . Se uma das seguintes condições é satisfeita*

- (1)  *$f$  é transitivo e tem a propriedade de sombreamento*
- (2)  *$f$  tem a propriedade de L-sombreamento*

*então  $X$  é enumerável.*

*Demonstração.* (1) Suponha que  $f$ , um homeomorfismo positivamente contável-expansivo, é transitivo e tem a propriedade de sombreamento. Note que  $f^{-1}$  é também transitivo e satisfaz a propriedade de sombreamento, então  $f^{-1}$  é ou sensível ou equicontínuo. O Corolário 1.2.1 garante que  $f^{-1}$  não pode ser sensível, então  $f^{-1}$  é equicontínuo. Seja  $c > 0$  uma constante de contável-expansividade positiva de  $f$  e escolha  $\delta > 0$ , dado pela equicontinuidade, tal que

$$d(x, y) < \delta \text{ implica } y \in W_c^s(x).$$

Assim, todo conjunto aberto de diâmetro menor que  $\delta$  está contido num mesmo conjunto  $c$ -estável e, portanto, é enumerável. Como  $X$  é compacto, podemos escolher uma cobertura aberta finita com elementos de diâmetro menor que  $\delta$ . Isto implica que  $X$  é enumerável, pois ele é escrito como uma união finita de conjuntos contáveis.

(2) Seja  $f$  um homeomorfismo positivamente contável-expansivo satisfazendo a propriedade de L-sombreamento. Neste caso, existe somente um número finito de classes recorrentes por cadeia e a restrição de  $f$  em cada uma destas classes é transitivo, tem a propriedade de sombreamento e, pela hipótese, é positivamente contável-expansivo. Então o item (1) assegura que cada classe recorrente por cadeia é enumerável e, como existe somente uma quantidade finita delas, o conjunto recorrente por cadeia é enumerável. A Proposição 1.1.2 garante que

$$X = \bigcup_{x \in CR(f)} W^s(x)$$

e, então, para provar que  $X$  é enumerável basta provar que  $W^s(x)$  é enumerável para todo  $x \in CR(f)$ . Como

$$W^s(x) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(W_\varepsilon^s(f^n(x))) \text{ para todo } x \in CR(f),$$

a existência de  $x \in CR(f)$  tal que  $W^s(x)$  é não enumerável implicaria que

$$f^{-n}(W_\varepsilon^s(f^n(x)))$$

é não enumerável para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Consequentemente,  $W_\varepsilon^s(f^n(x))$  seria não enumerável, gerando uma contradição.  $\square$

Este teorema generaliza os Teoremas A e B em [20] e o Teorema G em [8] para o caso de expansividade-contável positiva. Em [20] é provado que homeomorfismos positivamente  $n$ -expansivos com suposições adicionais de transitividade, ou L-sombreamento, podem ser definidos somente em espaços finitos. Mais geralmente, em [8] é provado que homeomorfismos positivamente finito-expansivos satisfazendo a propriedade de sombreamento podem somente ser definidos em espaços finitos. Um problema que, naturalmente, aparece é de enfraquecer as hipóteses do teorema anterior supondo apenas propriedade de sombreamento para provar que homeomorfismos positivamente contável-expansivos podem somente ser definidos em espaço enumeráveis.

**Pergunta 1.2.1.** *Se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo positivamente contável-expansivo, definido em um espaço métrico compacto, com propriedade de sombreamento, então  $X$  é enumerável?*

### 1.3 First-time sensibilidade

Neste seção vamos introduzir uma classe particular de homeomorfismos sensíveis que ainda contém propriamente os homeomorfismos cw-expansivos. Um homeomorfismo

desta tal classe será chamado *first-time sensível* (ft-sensível).

Mostraremos que ft-sensibilidade generaliza a cw-expansividade e que o deslocamento no cubo de Hilbert  $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$  é um exemplo de homeomorfismo ft-sensível que não é cw-expansivo. Mostraremos também que os homeomorfismos ft-sensíveis possuem contínuos — conjuntos compactos e conexos — instáveis locais, com diâmetro uniforme para todos os pontos do espaço, e com boas propriedades como: possuem crescimento uniforme e são instáveis globais. É importante ressaltar que, enquanto os contínuos instáveis locais para cw-expansivos são instáveis (globais), nem todo contínuo instável local para um homeomorfismo first-time sensível é instável global.

Durante esta seção, trabalharemos com espaços métricos satisfazendo as seguintes propriedades:

(P1) existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r')$  é conexa para todo  $r' \in (0, r)$  e todo  $x \in X$ ;

(P2) a aplicação  $(x, s) \rightarrow \overline{B(x, s)}$  é contínua na métrica Hausdorff.

Isto significa que bolas com raios suficientemente pequenos são conexas e que essas bolas variam continuamente com seus raios. Estas hipóteses são satisfeitas por todas as variedades e o cubo de Hilbert  $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$  e mais geralmente por contínuos de Peano, que são espaços métricos compactos, conexos e localmente conexos, quando eles são munidos com uma métrica convexa (ver [29]). Vale ressaltar que um contínuo de Peano não necessariamente satisfaz as hipóteses (P1) e (P2) acima. Mas, todo contínuo de Peano pode ser munido com uma métrica convexa e, neste caso, as hipóteses (P1) e (P2) são satisfeitas. Uma métrica  $D$  para um contínuo  $X$  é chamada *convexa* se para cada  $x, y \in X$ , existe  $z \in X$  tal que

$$D(x, z) = \frac{D(x, y)}{2} = D(y, z).$$

Isto assegura que o fecho de uma bola coincide com esta bola fechada, i. e.,

$$\overline{B_D(x, \delta)} = \{y \in X \mid D(x, y) \leq \delta\} \quad \text{para todo } x \in X \quad \text{e } \delta > 0.$$

Então, o Teorema 3.3 em [35] implica que (P2) é satisfeita. Ver [29, Proposition 10.6] para uma prova que as bolas com a métrica convexa satisfaz (P1).

Se um contínuo  $X$  admite uma métrica convexa  $D$ , a topologia gerada pela métrica  $D$  é a mesma que a topologia original. Então, se  $X$  for um contínuo de Peano, podemos supor que  $X$  está munido de uma métrica convexa.

**Lema 1.3.1.** *Se  $d$  e  $D$  são métricas compactas num mesmo espaço  $X$  gerando a mesma topologia, então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\rho > 0$  tal que*

$$D(x, y) < \rho \quad \text{implica} \quad d(x, y) < \varepsilon \quad \text{para todo } (x, y) \in X \times X.$$

*Demonstração.* Se este não for o caso, existe  $\varepsilon > 0$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $(x_n, y_n) \in X \times X$  tal que

$$D(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad d(x_n, y_n) \geq \varepsilon.$$

Assim,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  são seqüências de  $X$  que têm os mesmos pontos de acumulação na métrica  $D$ , mas são no mínimo  $\varepsilon$ -distantes um do outro na métrica  $d$ . Então, se  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $z$  na métrica  $D$ ,  $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  também converge. Mas na métrica  $d$  eles não podem convergir a  $z$  simultaneamente. Portanto, obtemos uma seqüência que converge a  $z$  na métrica  $D$  mas não em  $d$ , contradizendo o fato que eles geram a mesma topologia.  $\square$

Se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo sensível com constante de sensibilidade  $\varepsilon > 0$ , então toda bola atinge diâmetro grande excedendo  $\varepsilon$  para alguma iterada futura, e podemos falar da primeira iterada que isto ocorre.

Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo sensível, com constante de sensibilidade  $\varepsilon > 0$ . Dados  $x \in X$  e  $r > 0$ , seja  $n_{1,\varepsilon}(x, r) \in \mathbb{N}$  a primeira iterada de  $B(x, r)$  tal que o diâmetro é maior do que  $\varepsilon$ , isto é,

$$\text{diam } f^{n_{1,\varepsilon}(x,r)}(B(x, r)) > \varepsilon \quad \text{e}$$

$$\text{diam } f^j(B(x, r)) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } j \in [0, n_{1,\varepsilon}(x, r)) \cap \mathbb{N}.$$

Chamamos o número  $n_{1,\varepsilon}(x, r)$  de o *primeiro tempo de crescimento* (com respeito à  $\varepsilon$ ) da bola  $B(x, r)$ .

**Definição 1.3.1.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo sensível com constante de sensibilidade  $\varepsilon > 0$ . Dizemos que  $f$  é first-time sensível (ou ft-sensível) se existe uma seqüência decrescente de funções,  $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , de  $X$  em  $\mathbb{R}_+^*$  tal que converge a 0 pontualmente,  $r_0$  é uma função constante e para cada  $0 < \gamma \leq \varepsilon$  existe  $M_\gamma$  satisfazendo as seguintes condições:*

$$(F1) \quad |n_{1,\gamma}(x, r_{k+1}(x)) - n_{1,\gamma}(x, r_k(x))| \leq M_\gamma, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall k \text{ tal que } r_k(x) \leq \gamma;$$

$$(F2) \quad |n_{1,\gamma}(x, r_k(x)) - n_{1,\varepsilon}(x, r_k(x))| \leq M_\gamma, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall k \text{ tal que } r_k(x) \leq \gamma.$$

A Propriedade (F1) significa que as bolas centradas em  $x$  e com raios da seqüência  $\{r_k(x)\}$  crescem  $\gamma$  de maneira controlada para todo  $\gamma$ . O controle é no sentido que quando diminuimos o raio  $r_k$  para o raio seguinte  $r_{k+1}$  o tempo que a bola de raio menor, de raio  $r_{k+1}$ , demora para crescer  $\gamma$  não é muito mais do que a bola de raio maior, de raio  $r_k$ , demorou para crescer (onde o crescimento está relacionado a mesma constante de sensibilidade). Já a propriedade (F2), diz que para essa seqüência de raios, a bola de mesmo raio não demora muito para crescer  $\varepsilon$  depois que cresceu  $\gamma$ , com  $\gamma < \varepsilon$ . Sem nenhum prejuízo podemos supor que  $M_\gamma \leq M_\delta$  se  $\gamma > \delta$ . As propriedades (F1) e (F2) podem não ter relação. De fato, note que poderia ocorrer a seguinte situação: existe  $\delta > 0$  e  $x \in X$

tal que  $n_{1,\delta}(x, r_k(x)) = k$  e  $n_{1,\varepsilon}(x, r_k(x)) = 2k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Esta sequência de raios satisfaria a propriedade (F1) para  $\delta$  com  $M_\delta = 1$ , mas não iria satisfazer a propriedade (F2), pois

$$n_{1,\varepsilon}(x, r_k(x)) - n_{1,\delta}(x, r_k(x)) = k \longrightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Nosso principal resultado é o que vem a seguir. Mostramos que se  $f$  é ft-sensível então podemos encontrar um contínuo instável local para todo ponto do espaço com diâmetro uniforme.

**Teorema 1.3.1.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo definido em um espaço métrico compacto e conexo satisfazendo as propriedades (P1) e (P2). Então*

(a) *Se  $f$  satisfaz a propriedade (F1) da ft-sensibilidade, então para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\text{diam}(C_\varepsilon^u(x)) \geq \delta \text{ para todo } x \in X.$$

(b) *Se  $f^{-1}$  satisfaz a propriedade (F1) da ft-sensibilidade, então para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\text{diam}(C_\varepsilon^s(x)) \geq \delta \text{ para todo } x \in X.$$

Para provar este resultado, veremos que a sensibilidade garante que  $n_{1,\varepsilon}(x, r)$  depende basicamente do raio  $r$  e não exatamente de  $x \in X$ .

**Lema 1.3.2.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  sensível e  $X$  um espaço métrico compacto satisfazendo a propriedade (P2). Fixada  $\varepsilon > 0$  uma constante de sensibilidade de  $f$ , temos que, para cada  $r > 0$ , existe  $N(r) \in \mathbb{N}$  tal que*

$$n_{1,\varepsilon}(x, r) \leq N(r) \text{ para todo } x \in X.$$

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  uma constante de sensibilidade de  $f$ . Se a conclusão não é verdadeira, existe  $r > 0$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in X$  tal que  $n_{1,\varepsilon}(x_n, r) \geq n$ . Isto significa que

$$\text{diam}(f^j(B(x_n, r))) \leq \varepsilon \text{ para todo } j \in [0, n) \cap \mathbb{N}.$$

Se  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ , então a continuidade uniforme de  $f$  e a propriedade (P2) sobre o espaço  $X$  asseguram que

$$\text{diam}(f^j(B(x, r))) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(f^j(B(x_{n_k}, r))) \leq \varepsilon \text{ para todo } j \in \mathbb{N},$$

contradizendo a sensibilidade. □

*Demonstração do Teorema 1.3.1:* Assuma que  $f$  é um homeomorfismo sensível com constante de sensibilidade  $c > 0$  e escolha  $r \in (0, c)$ , dado pela Propriedade (P1) no espaço

$X$ , tal que  $B(x, r')$  é conexa para todo  $r' \in (0, r)$ . Seja  $\varepsilon \in (0, r)$  arbitrário e note que  $\varepsilon$  é também uma constante de sensibilidade de  $f$ . Pela hipótese (F1), existem  $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$  e para cada  $x \in X$ ,  $\{r_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  satisfazendo

$$n_{1,\varepsilon}(x, r_{k+1}(x)) - n_{1,\varepsilon}(x, r_k(x)) \leq M_\varepsilon.$$

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , seja  $x_m = f^{-m}(x)$  e, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , seja

$$r_{k,m} = r_k(x_m) \quad \text{e} \quad n_{k,m} = n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k,m}).$$

O Lema 1.3.2 assegura a existência de  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n_{1,\varepsilon}(x, \varepsilon/2) \leq N \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Então, pela Propriedade (F1) da ft-sensibilidade, para cada  $m \geq N$ , podemos escolher  $k_m \in \mathbb{N}$  tal que

$$n_{k_m-1,m} < m \leq n_{k_m,m}.$$

Segue que

$$|n_{k_m,m} - m| < |n_{k_m,m} - n_{k_m-1,m}| < M_\varepsilon.$$

As definições de  $n_{k_m,m}$  e  $r_{k_m,m}$  garantem que

$$\begin{aligned} \text{diam}(f^j(B(x_m, r_{k_m,m}))) &\leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad j \in [0, n_{k_m,m}) \cap \mathbb{N} \\ \text{e} \quad \text{diam}(f^{n_{k_m,m}}(B(x_m, r_{k_m,m}))) &> \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $f^{-1}$  é uniformemente contínuo, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{diam}(A) \geq \varepsilon \quad \text{implica} \quad \text{diam}(f^{-n}(A)) \geq \delta \quad \text{para todo} \quad n \in [0, M_\varepsilon].$$

Isto garante que

$$\text{diam}(f^m(B(x_m, r_{k_m,m}))) = \text{diam}(f^{m-n_{k_m,m}}(f^{n_{k_m,m}}(B(x_m, r_{k_m,m})))) \geq \delta.$$

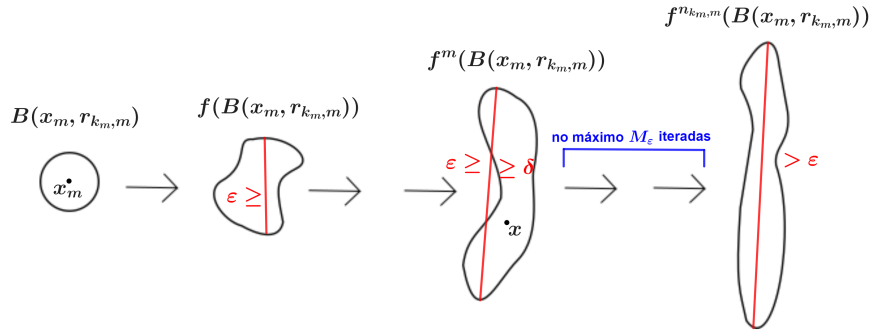
Para cada  $m \geq N$ , seja  $C_m = \overline{f^m(B(x_m, r_{k_m,m}))}$  e note que  $C_m$  é um contínuo satisfazendo:

- (1)  $x \in C_m$ ;
- (2)  $\text{diam}(C_m) \geq \delta$ ;
- (3)  $\text{diam}(f^{-j}(C_m)) \leq \varepsilon$  sempre que  $0 \leq j \leq m$ .

Assim, se  $C_x$  é um contínuo de acumulação na métrica Hausdorff da sequência  $\{C_m\}$ , digamos

$$C_x = \lim_{l \rightarrow \infty} C_{m_l},$$

então  $C_x$  satisfaz:


 Figura 3 – A escolha de  $k_m$  e  $C_m$ .

- (1)  $C_x$  é um contínuo, como um limite Hausdorff de conjuntos contínuos;
- (2)  $\text{diam}(C_x) \geq \delta$ , pois  $\text{diam}(C_{m_l}) \geq \delta$  para todo  $m_l \geq N$ ;
- (3)  $x \in C_x$ , como  $x \in C_{m_l}$  para todo  $m_l \geq N$ ;
- (4)  $C_x \subset W_\varepsilon^u(x)$ , pois para cada  $j \in \mathbb{N}$  temos

$$\text{diam}(f^{-j}(C_x)) = \lim_{l \rightarrow \infty} (f^{-j}(C_{m_l})) \leq \varepsilon.$$

Isto prova que  $\text{diam}(C_\varepsilon^u(x)) \geq \delta$  para todo  $x \in X$  e completa a prova do primeiro item do teorema. Um argumento similar para o caso em que  $f^{-1}$  satisfaz a Propriedade (F1) prova que  $\text{diam}(C_\varepsilon^s(x)) \geq \delta$  para todo  $x \in X$ .

□

**Corolário 1.3.1.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo definido em um espaço métrico compacto e conexo satisfazendo as propriedades (P1) e (P2). Então*

- (a) *Se  $f$  é first-time sensível, então para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\text{diam}(C_\varepsilon^u(x)) \geq \delta \text{ para todo } x \in X.$$

- (b) *Se  $f^{-1}$  é first-time sensível, então para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\text{diam}(C_\varepsilon^s(x)) \geq \delta \text{ para todo } x \in X.$$

Vamos mostrar que os homeomorfismos cw-expansivos são first-time sensíveis, assim como seus inversos.

**Proposição 1.3.1.** *Se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo cw-expansivo de um espaço métrico compacto e conexo satisfazendo as propriedades (P1) e (P2), então  $f$  e  $f^{-1}$  são ft-sensíveis.*



*Demonstração.* Primeiro, observe que, como  $X$  satisfaz a Propriedade (P1) então ele é localmente conexo e em particular é um contínuo de Peano. Além disso, se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo cw-expansivo definido em um contínuo de Peano  $X$ , então  $f$  é sensível. Isto é uma consequência de [28, Teorema 1.1] onde é provado que homeomorfismos cw-expansivos definidos em contínuos de Peano não tem pontos estáveis — que são pontos  $x \in X$  satisfazendo: para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$B(x, \delta) \subset W_\varepsilon^s(x).$$

Fixado  $\varepsilon > 0$  constante de sensibilidade de  $f$ , para cada  $x \in X$ , podemos considerar uma sequência estritamente decrescente qualquer de números reais positivos  $\{r_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = 0$ ,  $\{n_{1,\varepsilon}(n, r_k(x))\}_k$  é uma sequência estritamente crescente e

$$\text{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x, r_k(x))}(B(x, r_{k+1}(x)))) = \varepsilon,$$

da seguinte maneira: seja  $r_1(x) = \varepsilon/2$  e note que a continuidade de  $f^{n_{1,\varepsilon}(x, r_1(x))}$  e a hipótese (P2) asseguram que se  $r$  está suficientemente perto de  $r_1(x)$ , então

$$\text{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x, r_1(x))}(B(x, r))) > \varepsilon.$$

Também, se  $r$  é suficientemente pequeno, então

$$\text{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x, r_1(x))}(B(x, r))) < \varepsilon.$$

Segue da hipótese (P2) que existe  $r_2(x) \in (0, r_1(x))$  tal que

$$\text{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x, r_1(x))}(B(x, r_2(x)))) = \varepsilon.$$

Considere  $n_{1,\varepsilon}(x, r_2(x)) \in \mathbb{N}$ , a primeira iterada de  $B(x, r_2(x))$  com diâmetro maior do que  $\varepsilon$ , i.e.,

$$\text{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x, r_2(x))}(B(x, r_2(x)))) > \varepsilon \quad \text{e}$$

$$\text{diam}(f^j(B(x, r_2(x)))) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } j \in \{0, \dots, n_{1,\varepsilon}(x, r_2(x)) - 1\},$$

e note que  $n_{1,\varepsilon}(x, r_2(x)) > n_{1,\varepsilon}(x, r_1(x))$ , pois

$$\text{diam}(f^j(B(x, r_2(x)))) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } j \in \{0, \dots, n_{1,\varepsilon}(x, r_1(x))\}$$

e  $\text{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x, r_2(x))}(B(x, r_2(x)))) > \varepsilon$ . Por indução podemos obter a sequência desejada.

Vamos mostrar que esta sequência  $\{r_k(x)\}$  satisfaz a propriedade (F2). Suponha por absurdo, que para alguma constante  $\gamma \in (0, \varepsilon]$ , existem sequências  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset X$  e  $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) - n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m))) = \infty.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m)) < n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m))$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$\gamma < \text{diam } f^{n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m))}(B(x_m, r_{k_m}(x_m))) \leq \varepsilon.$$

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , tome

$$C'_m = f^{n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m))}(\overline{B(x_m, r_{k_m}(x_m))}).$$

Cada  $C'_m$  é um contínuo com diâmetro maior ou igual a  $\gamma$ . Além disso,  $\text{diam } f^n(C'_m) \leq \varepsilon$  para todo  $n \in \{0, 1, \dots, n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) - n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m)) - 1\}$ . Desta forma,  $C'_m$  satisfaz as condições a seguir para cada  $m \in \mathbb{N}$ :

$$(4) \text{ diam}(C'_m) \geq \gamma;$$

$$(5) \text{ diam}(f^{-j}(C'_m)) \leq \varepsilon \text{ para todo } j \in \{0, 1, \dots, n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m))\};$$

$$(6) \text{ diam}(f^j(C'_m)) \leq \varepsilon \text{ para todo } j \in \{0, 1, \dots, n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) - n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m)) - 1\}.$$

Seja  $C'$  um contínuo de acumulação da sequência de subcontínuos  $\{C'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  na métrica Hausdorff, digamos

$$C' = \lim_{l \rightarrow \infty} C'_{m_l}.$$

A propriedade (4) garante que  $\text{diam}(C') \geq \gamma$ . Note que

$$n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) \geq n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) - n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m)).$$

Assim, como  $\lim_{m \rightarrow \infty} [n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) - n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m))] = \infty$ , então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) = \infty.$$

Então, pelo Lema 1.3.2, segue que  $\lim_{m \rightarrow \infty} r_{k_m}(x_m) = 0$  e, conseqüentemente,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m)) = \infty.$$

Por isso e pelas propriedades (5) e (6), temos que

$$\text{diam}(f^j(C')) = \lim_{l \rightarrow \infty} (f^j(C'_{m_l})) \leq \varepsilon \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Temos que  $C'$  é um contínuo não-degenerado dentro da bola dinâmica de  $x$ , o que contradiz a cw-expansividade. Portanto, a sequência de raios  $\{r_k(x)\}$  satisfaz a propriedade (F2).

Agora, vamos mostrar que  $\{r_k(x)\}$  satisfaz a propriedade (F1). Suponha que (F1) não é satisfeita, então existe  $\gamma \in (0, \varepsilon]$  e para cada  $m \in \mathbb{N}$  existem  $x_m \in X$  e  $k_m \in \mathbb{N}$  tais que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m+1}(x_m)) - n_{1,\gamma}(x_m, r_{k_m}(x_m))| = \infty.$$

Pela Propriedade (F2), que já mostramos válida, para a sequência  $\{r_k(x)\}$ , existe  $M_\gamma \in \mathbb{N}$  tal que

$$|n_{1,\varepsilon}(x, r_k(x)) - n_{1,\gamma}(x, r_k(x))| < M_\gamma$$

para todo  $x$  e todo  $k$ . Então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m+1}(x_m)) - n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m))| = \infty.$$

Suponha que

$$|n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m+1}(x_m)) - n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m))| \geq 2L_m \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}$$

com  $\lim_{m \rightarrow \infty} L_m = \infty$ .

Desta forma,

$$\text{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m))}(B(x_m, r_{k_m}(x_m)))) > \varepsilon \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N},$$

$$\text{diam}(f^j(B(x_m, r_{k_m}(x_m)))) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } j \in \{0, \dots, n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) - 1\},$$

$$\text{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m))}(B(x_m, r_{k_m+1}(x_m)))) = \varepsilon \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N} \quad \text{e}$$

$$n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m+1}(x_m)) - n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) \geq 2L_m.$$

Para a constante de cw-expansividade  $\varepsilon$  escolha  $\delta \in (0, \varepsilon)$ , dado por [31, Proposição 2.2], tal que se  $A$  é um subcontínuo de  $X$  com  $\text{diam}(A) \leq \delta$  e

$$\text{diam}(f^n(A)) \geq \varepsilon \quad \text{para algum } n \in \mathbb{N},$$

então

$$\text{diam}(f^j(A)) \geq \delta \quad \text{para todo } j \geq n.$$

Podemos assumir que

$$r_{k_m+1}(x_m) < \delta/2 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

De fato, o Lema 1.3.2 nos dá  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n_{1,\varepsilon}(x, \delta/2) \leq N \quad \text{para todo } x \in X,$$

logo, se  $r_{k_m+1}(x_m) \geq \delta/2$  para infinitos  $m$ 's, então

$$n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) \leq n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m+1}(x_m)) \leq N, \quad \text{para infinitos } m's$$

o que implica que

$$L_m \leq n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m+1}(x_m)) - n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) \leq N \quad \text{para infinitos } m's.$$

Isto contradiz o fato que  $\lim_{m \rightarrow \infty} L_m = \infty$ .

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , seja

$$C_m = f^{n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) + L_m}(\overline{B(x_m, r_{k_m+1}(x_m))}).$$

Como

$$\text{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m))}(\overline{B(x_m, r_{k_m+1}(x_m))})) = \varepsilon$$

e  $\overline{B(x_m, r_{k_m+1}(x_m))}$  é um subcontínuo de  $X$  com diâmetro menor que  $\delta$ , a escolha de  $\delta$  assegura que

$$\text{diam}(f^j(\overline{B(x_m, r_{k_m+1}(x_m))})) \geq \delta \quad \text{para todo } j \geq n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)).$$

Em particular,

$$\text{diam}(C_m) = \text{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m)) + L_m}(\overline{B(x_m, r_{k_m+1}(x_m))})) \geq \delta.$$

Assim,  $C_m$  satisfaz as seguintes condições para todo  $m \in \mathbb{N}$ :

- (1)  $\text{diam}(C_m) \geq \delta$ ,
- (2)  $\text{diam}(f^{-j}(C_m)) \leq \varepsilon$  para todo  $j \in \{0, \dots, L_m\}$  e
- (3)  $\text{diam}(f^j(C_m)) \leq \varepsilon$  para todo  $j \in \{0, \dots, L_m\}$ .

Considere o limite Hausdorff,

$$C = \lim_{m \rightarrow \infty} C_m$$

e note que  $C$  é um contínuo, como um limite Hausdorff de contínuos,  $\text{diam}(C) \geq \delta$ , pois  $\text{diam}(C_m) \geq \delta$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , e

$$\text{diam}(f^j(C)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{diam}(f^j(C_m)) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}$$

pois  $L_m \rightarrow \infty$ . Então,  $C$  é contínuo não trivial contido em uma bola dinâmica de raio  $\varepsilon$  e contradiz a cw-expansividade. Portanto, a sequência de raios  $\{r_k(x)\}$  satisfaz a propriedade (F1).

□

**Corolário 1.3.2.** *Se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo cw-expansivo de um contínuo de Peano  $X$  dotado com uma métrica convexa  $D$ , então  $f$  e  $f^{-1}$  são ft-sensíveis.*

O resultado anterior diz que a first-time sensibilidade é uma generalização da cw-expansividade. Na seção seguinte veremos exemplos de homeomorfismos ft-sensíveis que não são cw-expansivos, um desses exemplos é o deslocamento bilateral à esquerda definido no cubo de Hilbert.

### 1.3.1 Exemplos

Nesta seção veremos alguns exemplos de homeomorfismos que são  $ft$ -sensíveis e não são  $cw$ -expansivos, garantindo a generalidade do Teorema 1.3.1 com relação ao Teorema do Kato 1.1.1.

**Exemplo 1.3.1.** Considere  $X = [0, 1]^{\mathbb{Z}}$  munido com a seguinte métrica:

Para  $\underline{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  e  $\underline{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in X$ , seja

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}.$$

Considere o deslocamento bilateral à esquerda

$$\begin{aligned} \sigma : X &\rightarrow X \\ \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} &\mapsto \{x_{i+1}\}_{i \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Vimos no Exemplo 1.1.1 que  $\sigma$  é sensível e que qualquer  $\varepsilon < c = \frac{1}{4}$  é uma constante de sensibilidade de  $\sigma$ . Vejamos agora que  $\sigma$  é *first-time sensível*. Para cada  $\underline{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in X$ , note que, para  $\underline{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in X$ ,

$$\begin{aligned} \underline{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in B(\underline{x}, \varepsilon) &\Leftrightarrow \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} \right\} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x_i - y_i| < 2^{|i|} \varepsilon \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow y_i \in (x_i - 2^{|i|} \varepsilon, x_i + 2^{|i|} \varepsilon) \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Um argumento similar prova que

$$\underline{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \sigma^j \left( B \left( \underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right)$$

se, e somente se,

$$y_i \in \left( x_{i+j} - 2^{|i+j|} \frac{\varepsilon}{2^n}, x_{i+j} + 2^{|i+j|} \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \cap [0, 1] \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Para cada  $\underline{x} \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $j \in \mathbb{N}$  temos

$$2^{j-n} \varepsilon \leq \text{diam} \left( \sigma^j \left( B \left( \underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) \right) \leq 2^{j-n+1} \varepsilon \quad (1.1)$$

pois, se  $I_i = \left( x_{i+j} - 2^{|i+j|} \frac{\varepsilon}{2^n}, x_{i+j} + 2^{|i+j|} \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \cap [0, 1]$  temos

$$\frac{\varepsilon}{2^{n-j}} \leq \frac{\text{diam}(I_i)}{2^{|i|}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-j-1}}, \quad \forall i \geq 0,$$

$$\frac{\varepsilon}{2^{-2i+n-j}} \leq \frac{\text{diam}(I_i)}{2^{|i|}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{-2i+n-j-1}}, \quad \forall -j \leq i < 0,$$

e

$$\frac{\varepsilon}{2^{n+j}} \leq \frac{\text{diam}(I_i)}{2^{|i|}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+j-1}}, \quad \forall i < -j,$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon}{2^{n-j}} &= \max_{-j \leq i < 0} \left\{ \frac{\varepsilon}{2^{n-j}}, \frac{\varepsilon}{2^{-2i+n-j}}, \frac{\varepsilon}{2^{n+j}} \right\} \leq \text{diam } \sigma^j \left( B \left( \underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) \\
 &= \sup_{i \in \mathbb{Z}} \text{diam}(I_i) \\
 &\leq \max_{-j \leq i < 0} \left\{ \frac{\varepsilon}{2^{n-j-1}}, \frac{\varepsilon}{2^{-2i+n-j-1}}, \frac{\varepsilon}{2^{n+j-1}} \right\} \\
 &= \frac{\varepsilon}{2^{n-j-1}}.
 \end{aligned}$$

Dado  $\gamma \in (0, \varepsilon]$ , considere  $k_\gamma \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{\varepsilon}{2^{k_\gamma+1}} \leq \gamma < \frac{\varepsilon}{2^{k_\gamma}}$ . Pela Desigualdade 1.1, temos

$$\begin{aligned}
 \text{diam} \left( \sigma^j \left( B \left( \underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) \right) &\leq \frac{\varepsilon}{2^{k_\gamma+1}} \leq \gamma \quad \text{sempre que } 0 \leq j \leq n - k_\gamma - 2, \\
 \text{e } \text{diam} \left( \sigma^j \left( B \left( \underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) \right) &\geq \frac{\varepsilon}{2^{k_\gamma}} > \gamma \quad \text{se } j > n - k_\gamma.
 \end{aligned}$$

Isto implica que  $n_{1,\gamma} \left( \underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$  é ou  $n - k_\gamma - 1$  ou  $n - k_\gamma$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$n_{1,\gamma} \left( \underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) - n_{1,\gamma} \left( \underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \leq 2$$

e

$$n_{1,\varepsilon} \left( \underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) - n_{1,\gamma} \left( \underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \leq k_\gamma.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = 0$$

concluimos a prova de que  $\sigma$  é first-time sensível.

Note que

$$B_{X \times Y}((x, y), \delta) = B_X(x, \delta) \times B_Y(y, \delta)$$

e

$$n_{1,\gamma,f \times g}((x, y), \delta) = \min\{n_{1,\gamma,f}(x, \delta), n_{1,\gamma,g}(y, \delta)\}$$

para todo  $\gamma \in (0, \varepsilon]$ , onde  $n_{1,\gamma,h}(z, \delta)$  é o primeiro tempo de crescimento da bola  $B_Z(z, \delta)$  com respeito ao homeomorfismo  $h : Z \rightarrow Z$  e a constante de sensibilidade  $\gamma$  de  $h$ .

**Proposição 1.3.2.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Y$  homeomorfismos first-time sensíveis definidos em espaços métricos compactos. O homeomorfismo produto  $f \times g$  é first-time sensível.*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  a constante de sensibilidade da  $f$  e  $g$  simultaneamente. Dado  $(x, y) \in X \times Y$ , pela ft-sensibilidade de  $f$  e  $g$ , existe um número natural  $M$  e seqüências decrescentes de números reais positivos  $\{s_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  e  $\{r_m(y)\}_{m \in \mathbb{N}}$  tais que  $s_1(x) = r_1(y) = \varepsilon/2$  e para todo  $x \in X$  e  $y \in Y$ :

(F1- $f$ )  $n_{1,\gamma,f}(x, s_{k+1}(x)) - n_{1,\gamma,f}(x, s_k(x)) \leq M_{\gamma,f}$ , para  $k$  suficientemente grande;

(F2- $f$ )  $n_{1,\varepsilon,f}(x, s_k(x)) - n_{1,\gamma,f}(x, s_k(x)) \leq M_{\gamma,f}$ , para  $k$  suficientemente grande;

(F1- $g$ )  $n_{1,\gamma,g}(y, r_{m+1}(y)) - n_{1,\gamma,g}(y, r_m(y)) \leq M_{\gamma,g}$ , para  $m$  suficientemente grande;

(F2- $g$ )  $n_{1,\varepsilon,g}(y, r_m(y)) - n_{1,\gamma,g}(y, r_m(y)) \leq M_{\gamma,g}$ , para  $m$  suficientemente grande.

Seja  $\{t_l(x, y)\}_{l \in \mathbb{N}}$  a união das sequências  $\{s_k(x)\}$  e  $\{r_m(x)\}$  reordenada de forma não crescente e ignorando os raios coincidentes. Vamos ver que  $f \times g$  é first-time sensível com  $M_{\gamma,f \times g} = \max\{M_{\gamma,f}, M_{\gamma,g}\}$  e a sequência de raios  $\{t_l(x, y)\}$ . Dado  $\gamma \in (0, \varepsilon]$  temos que para cada  $l \in \mathbb{N}$ ,  $t_l(x, y) \in [s_{k_l}(x), s_{k_l+1}(x)] \cap [r_{m_l}(y), r_{m_l+1}(y)]$  para algum  $k_l$  e  $m_l$ . Assim,

$$\begin{aligned} \max\{n_{1,\gamma,f}(x, s_{k_l}(x)), n_{1,\gamma,g}(y, r_{m_l}(y))\} &\leq \max\{n_{1,\gamma,f}(x, t_l(x, y)), n_{1,\gamma,g}(y, t_l(x, y))\} \\ &= n_{1,\gamma,f \times g}((x, y), t_l(x, y)) \\ &\leq n_{1,\gamma,f \times g}((x, y), t_{l+1}(x, y)) \\ &= \max\{n_{1,\gamma,f}(x, t_{l+1}(x, y)), n_{1,\gamma,g}(y, t_{l+1}(x, y))\} \\ &\leq \max\{n_{1,\gamma,f}(x, s_{k_l+1}(x)), n_{1,\gamma,g}(y, r_{m_l+1}(y))\}. \end{aligned}$$

Se  $\max\{n_{1,\gamma,f}(x, s_{k_l+1}(x)), n_{1,\gamma,g}(y, r_{m_l+1}(y))\} = n_{1,\gamma,f}(x, s_{k_l+1}(x))$ , temos que

$$\begin{aligned} n_{1,\gamma,f}(x, s_{k_l}(x)) &\leq n_{1,\gamma,f \times g}((x, y), t_l(x, y)) \\ &\leq n_{1,\gamma,f \times g}((x, y), t_{l+1}(x, y)) \\ &\leq n_{1,\gamma,f}(x, s_{k_l+1}(x)). \end{aligned}$$

Portanto, como  $n_{1,\gamma,f}(x, s_{k_l+1}(x)) - n_{1,\gamma,f}(x, s_{k_l}(x)) \leq M_{\gamma,f}$ ,

$$n_{1,\gamma,f \times g}((x, y), t_{l+1}(x, y)) - n_{1,\gamma,f \times g}((x, y), t_l(x, y)) \leq M_{\gamma,f} \leq M_{\gamma,f \times g}.$$

De maneira análoga, podemos mostrar que

$$n_{1,\gamma,f \times g}((x, y), t_{l+1}(x, y)) - n_{1,\gamma,f \times g}((x, y), t_l(x, y)) \leq M_{\gamma,g} \leq M_{\gamma,f \times g}$$

se  $\max\{n_{1,\gamma,f}(x, s_{k_l+1}(x)), n_{1,\gamma,g}(y, r_{m_l+1}(y))\} = n_{1,\gamma,g}(y, r_{m_l+1}(y))$ . E também que

$$n_{1,\varepsilon,f \times g}((x, y), t_l(x, y)) - n_{1,\gamma,f \times g}((x, y), t_l(x, y)) \leq M_{\gamma,f \times g}.$$

Isto conclui a prova da proposição. □

A proposição seguinte, junto com o Teorema 1.2.1, nos fornece uma classe de exemplos de homeomorfismos first-time sensíveis e que não são cw-expansivo.

**Proposição 1.3.3.** *Se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo first-time sensível e  $g : Y \rightarrow Y$  é um homeomorfismo equicontínuo, então  $f \times g$  é first-time sensível.*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  uma constante de cw-expansividade de  $f$ . Pela ft-sensibilidade da  $f$ , para cada  $\gamma \in (0, \varepsilon]$ , existe  $M_\gamma$  e, para cada  $x \in X$ , existe uma sequência  $\{r_k(x)\}$  satisfazendo as propriedades (F1) e (F2). Como  $g$  é equicontínua e  $X$  é compacto, para cada  $\gamma \in (0, \varepsilon]$ , existe  $\delta_\gamma > 0$  tal que

$$B_Y(y, \delta_\gamma) \subset W_{\gamma, g}^s(y) \cap W_{\gamma, g}^u(y), \quad \text{para todo } y \in Y.$$

Por isso,

$$n_{1, \gamma, f \times g}(x, r_k(x)) = n_{1, \gamma, f}(x, r_k(x))$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $r_k(x) \leq \delta_\gamma$ . Podemos supor que  $r_k(x) \leq \delta_\gamma$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, as sequências  $\{r_k(x)\}$  e  $\{n_{1, \gamma, f \times g}(x, r_k(x))\}$  satisfazem as propriedades (F1) e (F2). Consequentemente,  $f \times g$  é ft-sensível.  $\square$

Como já sabemos a first-time sensibilidade generaliza a cw-expansividade, então, em particular, generaliza a expansividade em contínuos de Peano. Portanto, os difeomorfismos de Anosov — que são hiperbólicos — formam uma classe dos first-time sensíveis.

**Exemplo 1.3.2.** *Se  $f : X \rightarrow X$  um difeomorfismo de Anosov definido em uma variedade Riemanniana compacta, então  $f$  é first-time sensível, pois  $f$  é expansivo e em particular cw-expansivo. Pela proposição acima,  $f \times I : X \times Y \rightarrow X \times Y$  é first-time sensível, onde  $I : Y \rightarrow Y$  é a aplicação identidade.*

A *hiperbolicidade parcial* é uma generalização da hiperbolicidade. Os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos possuem variedades estáveis e instáveis, assim como os difeomorfismos de Anosov, com a diferença que os parcialmente hiperbólicos têm uma terceira direção que não é nem uma contração e nem uma expansão uniforme. Gostaríamos de entender a relação entre a hiperbolicidade parcial e a first-time sensibilidade.

**Pergunta 1.3.1.** *Existem difeomorfismos parcialmente hiperbólicos que não são first-time sensíveis?*

### 1.3.2 Contínuos cw-instáveis/estáveis

O Teorema 1.3.1 generaliza, de certa forma, o Teorema 1.6 do Kato em [30], onde ele mostra a existência, para cada ponto do espaço, de um contínuo no seu estável local e outro em seu instável local. Esses contínuos do Kato têm diâmetro uniforme assim como em nosso caso. No caso cw-expansivo os contínuos estáveis locais são estáveis globais e os instáveis locais são instáveis globais. Mostramos, nesta seção, que os homeomorfismos first-time sensíveis admitem contínuos estáveis locais que não são instáveis globais, mas que os contínuos instáveis vindos do Teorema 1.3.1 são instáveis globais. Além disso, os contínuos obtidos no Teorema 1.3.1 possuem crescimento uniforme.



Durante toda esta seção,  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo  $ft$ -sensível definido em um contínuo de Peano  $X$  e  $\varepsilon > 0$  é uma constante de sensibilidade fixada de  $f$ . Então, para cada  $\gamma \in (0, \varepsilon]$ , podemos construir um contínuo instável local, pelo Teorema 1.3.1, com diâmetro menor ou igual a  $\gamma$ . Observamos que podemos obter mais de um contínuo tomando o limite Hausdorff das iteradas das bolas para cada ponto. Iremos considerar todas as possibilidades de limites de iteradas de bolas, da seguinte maneira: denotando  $x_n = f^{-n}(x)$ , o conjunto

$$\mathcal{C}^u = \left\{ C = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k^\gamma}(\overline{B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma}))) \mid \begin{array}{l} \gamma \in (0, \varepsilon], \{n_k^\gamma\} \subset \mathbb{N} \text{ e } \{r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})\} \subset \mathbb{R}_+^* \\ \text{tal que } n_{1,\gamma}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})) \in (n_k^\gamma, n_k^\gamma + M_\gamma], \end{array} \right\}$$

é o conjunto dos contínuos instáveis locais obtidos a partir da demonstração do Teorema 1.3.1, variando as constantes de sensibilidade da  $f$ .

Para facilitar, denotaremos  $C$  por  $C_\gamma(x)$  quando

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k^\gamma}(\overline{B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma}))) \in \mathcal{C}^u.$$

Note que usamos a mesma notação para diferentes contínuos, pois podem estar associados a subsequências distintas. Veremos que as informações realmente relevantes são o ponto e a constante de sensibilidade que o contínuo está associado e não a subsequência que está sendo tomada. Por isso tomamos a liberdade de cometer este abuso de notação.

Iremos abordar propriedades dinâmicas dos contínuos de  $\mathcal{C}^u$ . Provaremos que os contínuos de  $\mathcal{C}^u$  são instáveis globais e que crescem uniformemente dependo somente da constante de sensibilidade que ele está associado. Por isso, podemos dizer que estes contínuos se comportam, em certo sentido, de maneira similar aos contínuos instáveis locais de um sistema  $cw$ -expansivo. Portanto, chamaremos um contínuo de  $\mathcal{C}^u$  de *contínuo  $cw$ -instável local*.

Para começar a apresentar os resultados, vamos estabelecer uma notação para o primeiro tempo de crescimento de conjuntos quaisquer de  $X$ . Quando estamos trabalhando com sistemas sensíveis, todos os abertos do espaço crescem quando iterados para o futuro. Mas nem todos os conjuntos atingirão diâmetros maior que alguma constante de sensibilidade do sistema. Por exemplo, o deslocamento definido no cubo de Hilbert,  $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ , contém conjuntos que “ficam sempre pequenos” (veja o Exemplo 1.1.1). Nestes casos, podemos pensar que um conjunto que fica sempre pequeno demora um tempo infinito para crescer. Neste sentido, vamos definir o primeiro tempo de crescimento de todo subconjunto do espaço.

Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo sensível definido em um espaço métrico compacto, com constante de sensibilidade  $\varepsilon > 0$ . Fixado  $\gamma \in (0, \varepsilon]$ , definiremos a função

primeiro tempo de crescimento (com respeito à  $\gamma$ ) dos conjuntos em  $X$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} n_{1,\gamma}(\cdot) &: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty \\ C &\mapsto n_{1,\gamma}(C) = \begin{cases} \infty, & \text{se } \text{diam}(f^n(C)) \leq \gamma, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}; \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{diam}(f^n(C)) > \gamma\}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

A proposição a seguir assegura um certo tempo de crescimento uniforme dos contínuos de  $\mathcal{C}^u$  dependendo somente da constante de sensibilidade a que estão relacionados.

**Proposição 1.3.4.** *Se  $C = C_\gamma(x)$ , então*

$$\text{diam}(f^{N_\gamma}(C)) \geq \varepsilon$$

para algum  $N_\gamma \in \{0, 1, \dots, 2M_\gamma\}$ .

*Demonstração.* Seja  $C_\gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k^\gamma}(\overline{B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma}))}) \in \mathcal{C}^u$ . Então,

$$n_{1,\gamma}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})) \in \{n_k^\gamma + 1, \dots, n_k^\gamma + M_\gamma\}.$$

A propriedade (F2) garante que cada bola  $B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma}))$  não demora mais do que  $M_\gamma$  para crescer  $\varepsilon$  depois que cresceu  $\gamma$ , logo

$$n_{1,\varepsilon}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})) \in \{n_k^\gamma + 1, \dots, n_k^\gamma + M_\gamma + M_\gamma\}.$$

Consequentemente,

$$n_{1,\varepsilon}(f^{n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})))) \in \{1, 2, \dots, 2M_\gamma\}.$$

Desta forma, podemos afirmar que existe  $N_\gamma \in \{1, 2, \dots, 2M_\gamma\}$  tal que

$$n_{1,\varepsilon}(f^{n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})))) = N_\gamma$$

para infinitos  $k$ 's. Tomando uma subsequência se necessário, temos que

$$\text{diam}(f^{N_\gamma}(f^{n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})))))) > \varepsilon.$$

Portanto,  $\text{diam}(f^{N_\gamma}(C_\gamma(x))) \geq \varepsilon$  com  $N_\gamma \in \{1, 2, \dots, 2M_\gamma\}$ . Finalizando a prova.  $\square$

A proposição anterior nos diz que todo contínuo cw-instável local cresce  $\varepsilon$ , isto acontece porque os iterados das bolas que constituem os contínuos cw-instáveis locais crescem  $\varepsilon$  em um tempo limitado, dependendo da constante de sensibilidade associada a cada contínuo. A ft-sensibilidade garante que as bolas de raios já escolhidos depois de crescerem  $\varepsilon$  não demorarão mais que  $M_\varepsilon$  para crescerem  $\varepsilon$  novamente. Isto sugere que, depois que um contínuo cw-instável local cresce  $\varepsilon$  pela primeira vez, ele não demora mais do que  $M_\varepsilon$  para crescer  $\varepsilon$  novamente e o ciclo se repete. Em outras palavras, um contínuo cw-instável local cresce  $\varepsilon$  infinitas vezes e de forma, digamos, regular. Esta certa

regularidade garante que o conjunto dos tempos de crescimento de um contínuo cw-instável local seja sindético. Dizemos que um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{N}$  é *sindético* se existe  $p = p(S) \in \mathbb{N}$  tal que

$$\{n, n + 1, \dots, n + p\} \cap S \neq \emptyset, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Vamos agora formalizar e provar estas ideias.

**Proposição 1.3.5.** *Seja  $C_\gamma(x) \in \mathcal{C}^u$ . Para cada  $N \geq 2M_\gamma$ , existe  $N' \in \{N, \dots, N + M_\varepsilon\}$  tal que  $\text{diam}(f^{N'}(C)) \geq \varepsilon$ .*

*Demonstração.* Sejam  $N \geq 2M_\gamma$  e  $C_\gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k^\gamma}(\overline{B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma}))}) \in \mathcal{C}^u$ . Então,

$$n_{1,\gamma}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})) \in (n_k^\gamma, n_k^\gamma + M_\gamma] \cap \mathbb{N}.$$

A propriedade (F2) garante que cada bola  $B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma}))$  não demora mais do que  $M_\gamma$  para crescer  $\varepsilon$  depois que cresceu  $\gamma$ , logo

$$n_{1,\varepsilon}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})) \in (n_k^\gamma, \dots, n_k^\gamma + M_\gamma + M_\gamma] \cap \mathbb{N}.$$

Ou seja,

$$n_k^\gamma < n_{1,\varepsilon}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma}))) \leq n_k^\gamma + 2M_\gamma.$$

Pela propriedade (F1) da ft-sensibilidade, podemos diminuir o raio e escolher um raio menor de forma que a bola com este raio diminuído tem primeiro tempo de crescimento entre  $n_k^\gamma + N$  e  $n_k^\gamma + N + M_\varepsilon$ , ou seja, para cada  $k \in \mathbb{N}$  podemos escolher  $t_k > m_k^\gamma$  tal que

$$n_{1,\varepsilon}(x_{n_k^\gamma}, r_{t_k}(x_{n_k^\gamma})) \in \{n_k^\gamma + N, \dots, n_k^\gamma + N + M_\varepsilon\}.$$

Assim,

$$n_{1,\varepsilon}(f^{n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{t_k}(x_{n_k^\gamma})))) \in \{N, \dots, N + M_\varepsilon\}.$$

Isto garante que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $N_k \in \{N, \dots, N + M_\varepsilon\}$  tal que

$$\text{diam}(f^{N_k}(f^{n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})))) \geq \text{diam}(f^{N_k}(f^{n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{t_k}(x_{n_k^\gamma})))) > \varepsilon.$$

Portanto, tomando uma subsequência se necessário, temos que

$$\text{diam}\left(f^{N'}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})))\right)\right) \geq \varepsilon$$

para algum  $N' \in \{N, \dots, N + M_\varepsilon\}$ , ou seja,

$$\text{diam}(f^{N'}(C_\gamma(x))) \geq \varepsilon,$$

com  $N' \in \{N, \dots, N + M_\varepsilon\}$ . Isto finaliza a prova.  $\square$

**Corolário 1.3.3.** *Considere  $C \in \mathcal{C}^u$  e  $S_C = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{diam}(f^n(C)) \geq \varepsilon\}$ . Então, o subconjunto dos números naturais  $S_C$  é infinito e dois elementos consecutivos  $m, n$  de  $S_C$  satisfazem  $|m - n| \leq M_\varepsilon$ . Em particular,  $S_C$  é sindético.*

Este corolário e a proposição anterior implicam que todo homeomorfismo ft-sensível é sindeticamente sensível. Um homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  num espaço métrico compacto  $X$  é *sindeticamente sensível* se existe  $\delta > 0$  tal que para todo aberto não vazio  $U$  de  $X$ , o conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{existem } y, z \in U \text{ tais que } d(f^n(y), f^n(z)) > \delta\}$$

é sindético.

**Corolário 1.3.4.** *Se  $f$  é ft-sensível então  $f$  é sindeticamente sensível.*

*Demonstração.* Seja  $U \subset X$  aberto e não vazio. Considere  $x \in U$  e  $C = C_\gamma(x) \in \mathcal{C}^u$ , onde  $\gamma$  é uma constante de sensibilidade de  $f$  tal que  $B(x, 2\gamma) \subset U$ . Como  $\text{diam}(C_\gamma(x)) \leq \gamma$  e  $x \in C_\gamma(x)$ , então  $C_\gamma(x)$  está contido em  $U$ . Pela Proposição 1.3.5, o conjunto

$$S_C = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{diam}(f^n(C)) \geq \varepsilon\}$$

é sindético. Portanto, o conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{existem } y, z \in U \text{ tais que } d(f^n(y), f^n(z)) > \delta\}$$

é sindético para todo  $0 < \delta < \varepsilon$ , pois ele contém  $S_C$ .

□

Outro corolário imediato da Proposição 1.3.5 é que depois que o contínuo atinge diâmetro  $\varepsilon$  então ele não volta a ficar arbitrariamente pequeno.

**Corolário 1.3.5.** *Existe  $\delta > 0$  tal que se  $C = C_\gamma(x) \in \mathcal{C}^u$  então  $\text{diam}(f^n(C)) \geq \delta$  para todo  $n \geq 2M_\gamma$ .*

*Demonstração.* O Corolário 1.3.3 diz que  $m, n$  de  $S_C$  satisfazem  $|m - n| \leq M_\varepsilon$ . Basta tomar  $\delta > 0$ , garantido pela continuidade uniforme da  $f^{-1}$ , tal que se  $\text{diam}(A) \geq \varepsilon$  então  $\text{diam}(f^n(A)) \geq \delta$  para todo  $n \in \{0, 1, \dots, M_\varepsilon\}$ .

□

Mostraremos agora, que os contínuos cw-instáveis locais são instáveis (globais).

**Proposição 1.3.6.** *Se  $C_\gamma(x) \in \mathcal{C}^u$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(f^{-n}(C_\gamma(x))) = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $C_\gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k^\gamma}(\overline{B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma}))) \in \mathcal{C}^u$ . Considere  $\alpha > 0$  arbitrário, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\alpha < \gamma$ . Queremos encontrar  $N_\alpha \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq N_\alpha$  então

$$\text{diam}(f^{-n}(C_\gamma(x))) \leq \alpha.$$

Como  $C_\gamma(x) \in \mathcal{C}^u$ , então  $n_k^\gamma < n_{1,\gamma}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})) \leq n_{1,\varepsilon}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma}))$ . Disto e da propriedade (F2), segue que

$$n_k^\gamma - n_{1,\alpha}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})) \leq n_{1,\varepsilon}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})) - n_{1,\alpha}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})) \leq M_\alpha.$$

Tome  $N_\alpha = M_\alpha + 1$ . Para  $n \geq N_\alpha$ , pela desigualdade acima, temos que

$$n_k^\gamma - n_{1,\alpha}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})) < n.$$

Fixado  $n \geq N_\alpha$ , podemos considerar  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $k \geq k_0$  então

$$n \leq n_k^\gamma,$$

pois,  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k^\gamma = \infty$ . Assim,

$$0 \leq -n + n_k^\gamma < n_{1,\alpha}(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})).$$

Então, para todo  $k \geq k_0$ ,

$$\text{diam}(f^{-n}(f^{n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})))))) = \text{diam}(f^{-n+n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})))) \leq \alpha.$$

Isto garante que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(f^{-n}(f^{n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})))))) \leq \alpha.$$

Portanto,

$$f^{-n}(C_\gamma(x)) = f^{-n} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(f^{n_k^\gamma}(B(x_{n_k^\gamma}, r_{m_k^\gamma}(x_{n_k^\gamma})))) \right) \leq \alpha \quad \text{para todo } n \geq N_\alpha.$$

O que finaliza a prova.  $\square$

Mostraremos agora que os homeomorfismos first-time sensíveis admitem contínuos estáveis/instáveis locais que não são estáveis/instáveis globais.

**Exemplo 1.3.3.** Considere  $\sigma$  o deslocamento bilateral à esquerda definido no cubo de Hilbert  $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ . O deslocamento  $\sigma$  é ft-sensível, como mostramos no Exemplo 1.3.1, e contém contínuos instáveis/estáveis locais que não são instáveis/estáveis (globais). De fato, para  $\varepsilon > 0$  uma constante de sensibilidade de  $\sigma$  e  $\underline{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in X$ , o contínuo

$$C_{\underline{x}} = \prod_{i \in \mathbb{Z}} ([x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon] \cap [0, 1])$$

é um exemplo de contínuo estável e instável local que não é estável e nem instável. Pois, se  $\underline{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in C_{\underline{x}}$ , então

$$y_i \in [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon] \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}$$

e isto implica que

$$\begin{aligned} d(\sigma^n(\underline{x}), \sigma^n(\underline{y})) &= \sup_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|x_{i+n} - y_{i+n}|}{2^{|i|}} \\ &\leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|i|}} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Isto mostra que todo ponto que está em  $C_{\underline{x}}$  está na bola dinâmica  $W_{\varepsilon}^s(\underline{x}) \cap W_{\varepsilon}^u(\underline{x})$ . Além disso, para cada  $\alpha \in (0, \varepsilon]$ , as sequências  $\underline{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ,  $\underline{z} = \{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  definidas, respectivamente, como

$$y_i = \begin{cases} x_i, & i < 0 \\ x_i + \alpha, & i \geq 0 \text{ e } x_i \in [0, 1/2] \\ x_i - \alpha, & i \geq 0 \text{ e } x_i \in (1/2, 1] \end{cases} \text{ e } z_i = \begin{cases} x_i, & i > 0 \\ x_i + \alpha, & i \leq 0 \text{ e } x_i \in [0, 1/2] \\ x_i - \alpha, & i \leq 0 \text{ e } x_i \in (1/2, 1], \end{cases}$$

pertencem a  $C_{\underline{x}} \subset W_{\varepsilon}^s(\underline{x}) \cap W_{\varepsilon}^u(\underline{x})$ , mas

$$\begin{aligned} d(\sigma^n(\underline{y}), \sigma^n(\underline{x})) &= \sup_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|y_{i+n} - x_{i+n}|}{2^{|i|}} \\ &= \sup_{i \geq -n} \frac{|x_{i+n} \pm \alpha - x_{i+n}|}{2^{|i|}} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto é,  $\underline{y} \notin W^s(\underline{x})$  e

$$\begin{aligned} d(\sigma^{-n}(\underline{y}), \sigma^{-n}(\underline{x})) &= \sup_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|y_{i-n} - x_{i-n}|}{2^{|i|}} \\ &= \sup_{i \leq n} \frac{|x_{i-n} \pm \alpha - x_{i-n}|}{2^{|i|}} \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $\underline{z} \notin W^u(\underline{x})$ . Portanto,

$$\text{diam}(\sigma^n(C_{\underline{x}})) \geq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

e  $C_{\underline{x}}$  não é estável/instável.

### 1.3.3 Entropia para homeomorfismos ft-sensíveis

Nesta seção vamos provar entropia positiva para uma classe de homeomorfismos first-time sensíveis.

Seja  $X$  um espaço métrico compacto e  $f$  um sistema dinâmico definido em  $X$ . Dados  $\varepsilon > 0$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ , um subconjunto  $A$  de  $X$  é  $(n, \varepsilon)$ -separado se, para cada  $x, y \in A$  com  $x \neq y$ , existe  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  tal que

$$d(f^j(x), f^j(y)) > \varepsilon.$$

Seja  $S(n, \varepsilon)$  a maior cardinalidade dos subconjuntos  $(n, \varepsilon)$ -separados de  $X$ . Considere para  $\varepsilon > 0$

$$h(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S(n, \varepsilon).$$

Note que se  $\varepsilon' < \varepsilon$  então  $S(n, \varepsilon) \leq S(n, \varepsilon')$ . A entropia topológica de  $f$  é dada por

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(f, \varepsilon).$$

Através da existência de contínuos instáveis locais que crescem para o futuro de maneira uniforme dependendo somente do diâmetro, Kato em [31] mostrou que os homeomorfismos cw-expansivos têm entropia positiva. Vimos na seção anterior que no caso da ft-sensibilidade existem os contínuos cw-instáveis locais que se comportam de maneira semelhante aos contínuos dos cw-expansivos. Então é natural tentar usar a mesma ideia para provar que os ft-sensíveis têm entropia positiva. Vamos descrever a ideia da prova que os homeomorfismos cw-expansivos têm entropia positiva e apontar os problemas de seguir o mesmo raciocínio no caso ft-sensível.

**Teorema 1.3.2.** [31, Teorema 4.1] *Se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo cw-expansivo definido em um espaço métrico compacto  $X$ , com  $\dim(X) > 0$ , então  $h(f) > 0$ .*

*Ideia da demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  uma constante de cw-expansividade da  $f$ . A Proposição 2.3 em [31] diz que existe  $\delta > 0$  tal que, quando um contínuo atinge diâmetro  $\varepsilon > 0$  em alguma iterada futura, então ele não volta a ficar com diâmetro menor do que  $\delta$  nas iteradas seguintes. Para este  $\delta$ , o Teorema 1.6 de [30] garante que existe um contínuo  $C$  instável local com diâmetro  $\delta/3$ . Como este contínuo é instável local — não cresce para o passado — ele deve crescer  $\varepsilon$  quando iterado para o futuro. Pelo crescimento uniforme dos contínuos com diâmetro  $\delta/3$ , sabemos que este  $C$  deve crescer  $\varepsilon$  antes de uma iterada, digamos  $f^M$ . Além disso, nesta iterada  $f^M$ ,  $C$  deve ter diâmetro maior ou igual a  $\delta$ , por já ter atingido diâmetro  $\varepsilon$ . Então, podemos dividir  $f^M(C)$  em três subcontínuos de diâmetro  $\delta/3$ .

Desta forma, teremos dois subcontínuos de  $f^M(C)$  que estão  $\delta/3$  distantes e com diâmetro  $\delta/3$ . Sabemos que estes subcontínuos devem atingir diâmetro  $\varepsilon$  até a iterada  $f^M$ , pois são instáveis locais e possuem diâmetro  $\delta/3$ . Cada um desses subcontínuos terão diâmetro no mínimo  $\delta$  na  $M$ -ésima iterada. Daí, fazemos o mesmo processo de divisão de cada um deles em três subcontínuos com diâmetro  $\delta/3$  (ver Figura 4). Em cada passo, consideramos um ponto em cada um dos subcontínuos, tomando a imagem inversa desses pontos até chegar no contínuo de partida  $C$ . Obtendo, no  $n$ -ésimo processo,  $2^n$  pontos que

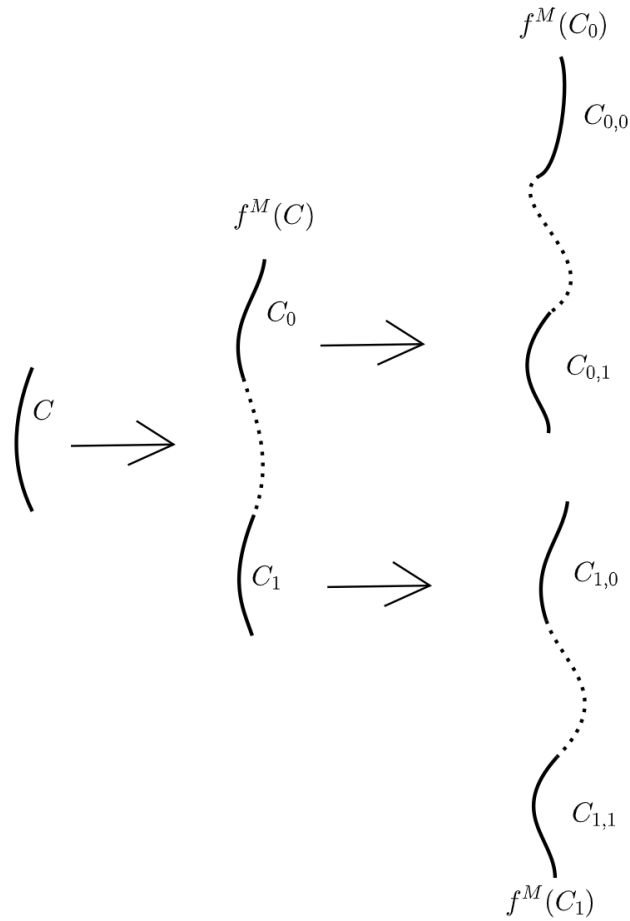


Figura 4 – Processo de divisão dos contínuos e iterações dos subcontínuos até crescerem.

estão em um conjunto  $(nM + 1, \delta/3)$ -separado. Isto implica que

$$\begin{aligned}
 h(f, \delta/3) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log S(n, \delta/3) \\
 &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{nM + 1} \cdot \log S(nM + 1, \delta/3) \right) \\
 &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nM + 1} \cdot \log 2^n \\
 &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{nM + 1} \cdot \log 2 \\
 &= \frac{1}{M} \cdot \log 2 > 0.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $h(f) > 0$ .

**Observação 1.3.1.** *Vimos no Lema 1.3.2 que a sensibilidade garante crescimento uniforme de bolas de mesmo raio. Além disso, a  $f$ -sensibilidade com a propriedade (F2) asseguram que as bolas, depois que atingem diâmetro maior que  $\varepsilon$  não voltam a ficar arbitrariamente*



pequenas. Desta forma, a primeira tentativa natural é usar este fato e aplicar o argumento do Kato para bolas ao invés de contínuos para provar entropia positiva da seguinte maneira:

Seja  $f$  um homeomorfismo  $ft$ -sensível definido em um contínuo de Peano  $X$  com constante de sensibilidade  $\varepsilon$ . Considere  $\delta > 0$  tal que, se uma bola atingiu diâmetro maior que  $\varepsilon$ , ela não volta a ter diâmetro menor que  $\delta$  nas iteradas seguintes e seja  $M$  um natural vindo do Lema 1.3.2 de forma que as bolas de raio  $\delta/3$  crescem até a iterada  $f^M$ .

Considere uma bola inicial  $B$  de raio  $\delta/3$ . O diâmetro de  $f^M(B)$  será maior ou igual a  $\delta$ . Então, podemos considerar dois pontos,  $x_0$  e  $x_1$ , que estão  $2\delta/3$  distantes em  $f^M(B)$  e as bolas,  $B_0$  e  $B_1$ , de raio  $\delta/3$  centradas em  $x_0, x_1$ , respectivamente. As bolas  $B_0$  e  $B_1$  irão satisfazer  $d(B_0, B_1) \geq \delta/3$ . Agora, iteramos  $M$  vezes  $B_0$  e  $B_1$  obtendo  $f^M(B_0), f^M(B_1)$ , que terão diâmetro maior ou igual a  $\delta$ . Podemos, portanto, escolher dois pontos  $x_{0,0}$  e  $x_{0,1}$  em  $f^M(B_0)$  e dois pontos  $x_{1,0}$  e  $x_{1,1}$  em  $f^M(B_1)$  tais que  $d(x_{0,0}, x_{0,1}) = 2\delta/3$  e  $d(x_{1,0}, x_{1,1}) = 2\delta/3$ . Assim,  $\{f^{-2M}(x_{0,0}), f^{-2M}(x_{0,1}), f^{-2M}(x_{1,0}), f^{-2M}(x_{1,1})\}$  tem  $2^2$  elementos e é um conjunto  $(2M + 1, \delta/3)$ -separado.

Agora considere  $B_{i,j}$  a bola de raio  $\delta/3$  centrada em  $x_{i,j}$  com  $i, j \in \{0, 1\}$ . Na  $M$ -ésima iterada  $B_{i,j}$  terá diâmetro maior ou igual a  $\delta$ , ou seja,  $\text{diam}(f^M(B_{i,j})) \geq \delta$ . Então podemos considerar para cada  $i, j \in \{0, 1\}$  pontos  $x_{i,j,0}$  e  $x_{i,j,1}$  em  $f^M(B_{i,j})$  tal

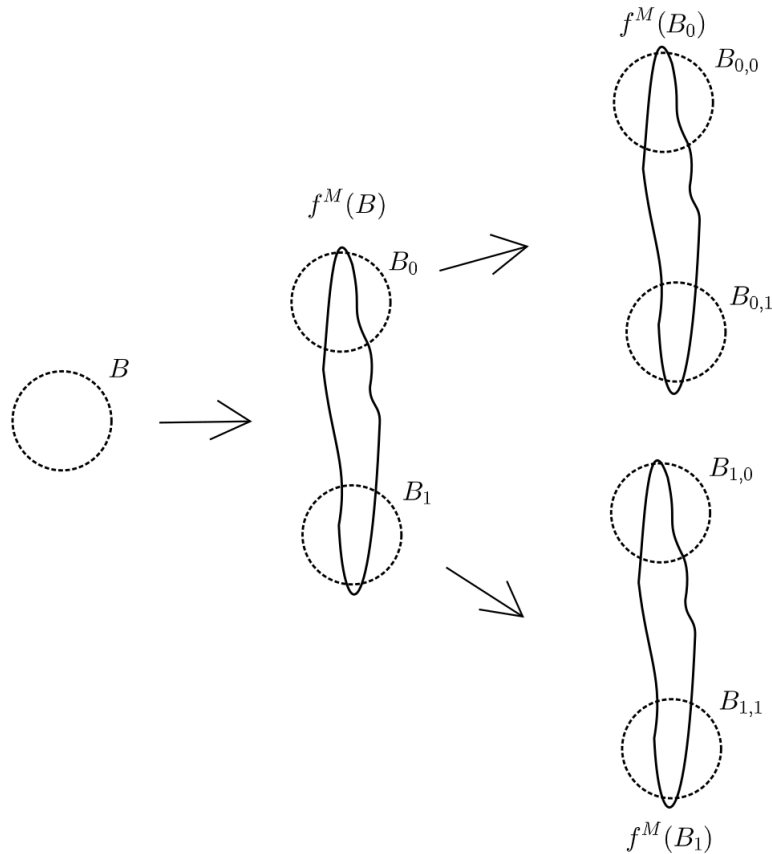


Figura 5 – Bolas de mesmo raio  $\delta/3$  distantes.

que  $d(x_{i,j,0}, x_{i,j,1}) = 2\delta/3$ . Podemos garantir que  $S_0 = \{f^{-3M}(x_{0,j,k}) \mid j, k \in \{0, 1\}\}$  e  $S_1 = \{f^{-3M}(x_{1,j,k}) \mid j, k \in \{0, 1\}\}$  são conjuntos  $(3M + 1, \delta/3)$ -separados, porém não conseguimos garantir que um ponto de  $S_0$  e outro de  $S_1$  se separam até a iterada  $3M + 1$ .

Note que este problema não acontece no caso cw-expansivo porque em cada passo tomamos um pedaço da imagem do contínuo anterior. No nosso caso, quando tomamos a bola de raio uniforme  $\delta/3$ , possivelmente estamos considerando pontos que não estão contidos na  $M$ -ésima iterada da bola anterior (Ver Figura 5). Assim, podemos não ter um crescimento exponencial de  $S(n, \delta/3)$  como acontecia no caso cw-expansivo.

O problema inicial de usar a mesma técnica do Kato usando nossos contínuos cw-instáveis locais é, que no processo de dividir o contínuo em três subcontínuos com diâmetro grande, os subcontínuos obtidos podem não crescer. Por exemplo, no caso do  $\sigma$ , deslocamento bilateral à esquerda — que é ft-sensível com constante de sensibilidade  $1/4$  — o contínuo

$$D = \prod_{i < 0} \{x_i\} \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times \prod_{i > 0} ([x_i - 2^i \varepsilon, x_i + 2^i \varepsilon] \cap [0, 1])$$

crece mais do que  $\varepsilon$ , porém quando dividimos uma iterada de  $D$  com diâmetro maior que  $1/4$  em subcontínuos com diâmetro grande, eles não atingem diâmetro  $1/4$  em nenhuma iterada futura. De fato, existe  $M$  tal que  $2^m \varepsilon > 1/4$  para todo  $m \geq M$ . Assim,

$$\text{diam}([x_m - 2^m \varepsilon, x_m + 2^m \varepsilon] \cap [0, 1]) \geq 1/4$$

o que implica que  $\text{diam}(\sigma^m(D)) \geq 1/4$  para todo  $m \geq M$ . Para cada  $m \geq M$  considere

$$y_m = \min([x_m - 2^m \varepsilon, x_m + 2^m \varepsilon] \cap [0, 1]) \text{ e } z_m = \max([x_m - 2^m \varepsilon, x_m + 2^m \varepsilon] \cap [0, 1])$$

e seja

$$C_1 = \prod_{i < M} \{x_i\} \times \underbrace{[y_M, y_M + 1/12]}_{0\text{-ésima coordenada}} \times \prod_{i > M} [y_m, y_m + 1/12]$$

e

$$C_2 = \prod_{i < M} \{x_i\} \times \underbrace{[z_M - 1/12, z_M]}_{0\text{-ésima coordenada}} \times \prod_{i > M} [z_m - 1/12, z_m].$$

Note que  $C_1$  e  $C_2$  são subcontínuos de  $\sigma^M(D)$  com  $\text{diam}(C_i) = 1/12$ ,  $d(C_1, C_2) = 1/12$  e que não crescem quando iteramos pelo deslocamento  $\sigma$ , pois  $\text{diam}(\sigma^n(C_i)) = 1/12$  para cada  $i \in \{1, 2\}$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Ao invés de dividir a iterada do contínuos cw-instáveis locais em três partes, podemos considerar pontos distantes e seus contínuos cw-instáveis locais relacionados a uma mesma constante de sensibilidade, suficientemente pequena, de forma que estes contínuos cw-instáveis locais estão separados. O mesmo problema que ocorreu no caso de considerar as bolas de raio  $\delta/3$  da Observação 1.3.1 pode acontecer neste cenário, podemos

perder o controle e não conseguir mostrar que alguns pontos obtidos neste processo sejam  $\varepsilon$ -separados. Porém, se os contínuos cw-instáveis locais tiverem contração uniforme quando iterados para o passado, eles terão comportamento hiperbólico e isto é suficiente para mostrar que os homeomorfismos ft-sensíveis têm entropia positiva. Em [9] os autores constroem uma função compatível com a função diâmetro, com propriedades métricas e que fazem que os contínuos instáveis e estáveis locais de um homeomorfismo cw-expansivo tenham comportamento hiperbólico. A existência de uma função que torna os contínuos cw-instáveis locais para homeomorfismos ft-sensíveis é suficiente para garantir entropia positiva.

Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo first-time sensível definido em um espaço métrico compacto  $X$  satisfazendo as propriedades (P1) e (P2), com constante de sensibilidade  $\varepsilon > 0$ . Suponha que  $f$  é first-time sensível e que existe uma função  $D : \mathcal{F}^u \rightarrow \mathbb{R}$ , onde

$$\mathcal{F}^u = \left\{ C = \bigcup_{i=0}^k f^{-n_i}(C_\gamma(x_i)) \left| \begin{array}{l} \gamma \in (0, \varepsilon], k \in \mathbb{N}^*, n_i \in \mathbb{N} \text{ e } x_i \in X \text{ para cada} \\ i \in \{0, 1, \dots, k\}, f^{-n_{i+1}}(x_{i+1}) \in f^{-n_i}(C_\gamma(x_i)), \\ \text{com } C_\gamma(x_i) \in \mathcal{C}^u \end{array} \right. \right\},$$

satisfazendo:

1. *Desigualdade triangular*: para cada  $\gamma \in (0, \varepsilon]$  e  $C = \bigcup_{i=0}^k f^{-n_i}(C_\gamma(x_i)) \in \mathcal{F}^u$ ,

$$D(C) = D\left(\bigcup_{i=0}^k f^{-n_i}(C_\gamma(x_i))\right) \leq \sum_{i=0}^k D(f^{-n_i}(C_\gamma(x_i)));$$

2. *Propriedade hiperbólica em  $\mathcal{C}^u$* : Existem constantes  $\lambda \in (0, 1)$  e  $c > 1$  tal que

$$\text{se } C \in \mathcal{C}^u \text{ então } D(f^{-n}(C)) \leq c\lambda^n D(C);$$

3. *Compatibilidade*: para cada  $\delta > 0$  existe  $\alpha > 0$  tal que

- (a) se  $\text{diam}(C) < \alpha$ , então  $D(C) < \delta$ , para todo  $C \in \mathcal{F}^u$ ;
- (b) se  $D(C) < \alpha$  então  $\text{diam}(C) < \delta$  para todo  $C \in \mathcal{F}^u$ .

Uma função  $D$  como acima será chamada *ft-métrica hiperbólica*.

**Teorema 1.3.3.** *Se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo ft-sensível munido de uma ft-métrica hiperbólica então,  $h(f) > 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $\delta > 0$  do Corolário 1.3.5. Pela compatibilidade de  $\text{diam}$  e  $D$ , para este  $\delta$ , existe  $\alpha > 0$  tal que se  $D(C) < \alpha$  então  $\text{diam}(C) < \frac{\delta}{6}$ . Considere  $M' \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{\lambda^{M'}}{1 - \lambda^{M'}} < \alpha$$

e  $M = \max\{M', 2M_{\delta/6}\}$ .

Tome  $C_{\delta/6}(x)$  um contínuo em  $\mathcal{C}^u$ . Pela Proposição 1.3.4, existe

$$n \in \{1, 2, \dots, 2M_{\delta/6}\}$$

tal que

$$\text{diam}(f^n(C_{\delta/6}(x))) > \varepsilon.$$

Além disso, pelo Corolário 1.3.5

$$\text{diam}(f^n(C_{\delta/6}(x))) \geq \delta, \quad \text{para todo } n \geq 2M_{\delta/6}.$$

Então podemos considerar dois pontos em  $f^M(C_{\delta/6}(x))$  que estão  $\delta$  distantes, digamos  $x_0$  e  $x_1$ , ou seja,  $x_0, x_1 \in f^M(C_{\delta/6}(x))$  com  $d(x_0, x_1) \geq \delta$ . Considere

$$B_0 = \overline{B(x_0, \delta/3)} \text{ e } B_1 = \overline{B(x_1, \delta/3)}.$$

Temos que

$$d(B_0, B_1) \geq \frac{\delta}{3}.$$

Sejam  $C_0 = C_{\delta/6}(x_0)$  e  $C_1 = C_{\delta/6}(x_1)$  contínuos de  $\mathcal{C}^u$ . Pelo Corolário 1.3.5,

$$\text{diam}(f^M(C_0)) \geq \delta \text{ e } \text{diam}(f^M(C_1)) \geq \delta,$$

pois  $M \geq 2M_{\delta/6}$ . Para cada  $i \in \{0, 1\}$ , considere  $x_{i,0}$  e  $x_{i,1}$  em  $C_i$  tal que  $d(x_{i,0}, x_{i,1}) \geq \delta$  e denote

$$B_{i,0} = \overline{B(x_{i,0}, \delta/3)} \text{ e } B_{i,1} = \overline{B(x_{i,1}, \delta/3)}.$$

Temos que, fixado  $i \in \{0, 1\}$ ,  $d(B_{i,0}, B_{i,1}) \geq \delta/3$ . Considere  $C_{i,j} = C_{\delta/6}(x_{i,j})$  (ver figura 6). O contínuo  $C_{i,j}$  está contido em  $B_{i,j}$  e

$$D(f^{-M}(C_{i,j})) = \lambda^M \lambda^{n_{1,\varepsilon}(C_{i,0})} < \lambda^M < \alpha.$$

Veja a Figura 7. Logo,

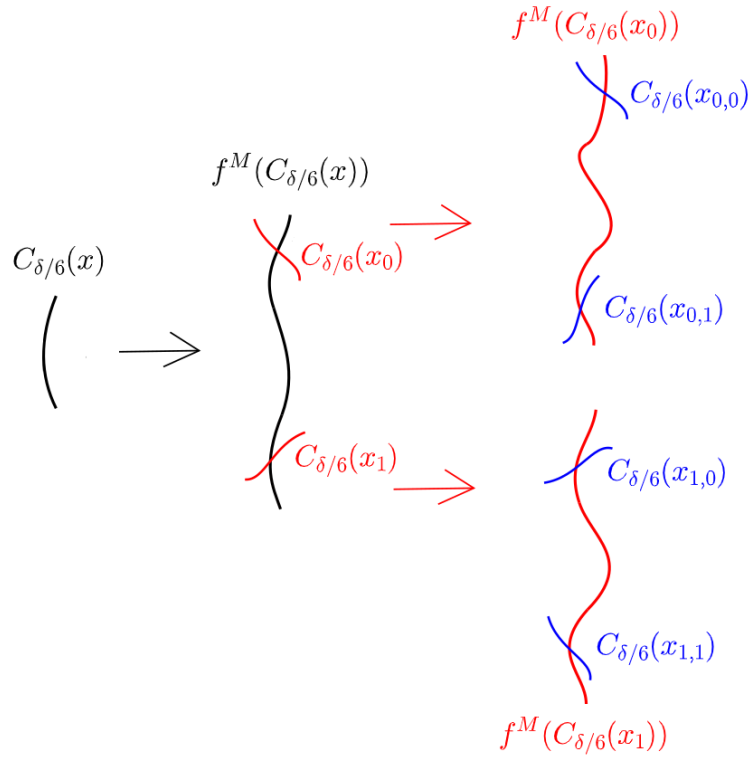
$$\text{diam}(C_i \cup f^{-M}(C_{i,j})) \leq \text{diam}(C_i) + \text{diam}(f^{-M}(C_{i,j})) < \frac{\delta}{6} + \frac{\delta}{6}.$$

Isto garante que  $C_i \cup f^{-M}(C_{i,j}) \subset B_i$ , já que  $x_i \in C_i$ .

Seguindo o mesmo raciocínio, para cada  $n \geq 2$ , criamos por indução contínuos

$$C_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, 0} \text{ e } C_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, 1}$$

tais que  $i_j \in \{0, 1\}$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  satisfazendo as seguintes condições:


 Figura 6 – Contínuos cw-instáveis locais  $\delta/3$  distantes

- (1) existem  $x_{i_1, \dots, i_{n-1}, 0}, x_{i_1, \dots, i_{n-1}, 1} \in f^M(C_{i_1, \dots, i_{n-1}})$  com  $d(x_{i_1, \dots, i_{n-1}, 0}, x_{i_1, \dots, i_{n-1}, 1}) \geq \delta$  tais que  $C_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, 0} = C_{\delta/6}(x_{i_1, \dots, i_{n-1}, 0})$  e  $C_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, 1} = C_{\delta/6}(x_{i_1, \dots, i_{n-1}, 1})$
- (2) (a)  $D(f^{-M}(C_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, j})) \leq \lambda^M < \alpha$  com  $j \in \{0, 1\}$ ;
- (b) para cada  $m \in \{2, \dots, n-1\}$ ,

$$\sum_{k=1}^{m-1} D(f^{-kM}(C_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m}})) + D(f^{-mM}(C_{i_1, \dots, i_{n-1}, j})) \leq \sum_{k=1}^m \lambda^{kM} < \alpha$$

para  $j \in \{0, 1\}$ .

A condição (2) garante que para cada  $m \in \{1, \dots, n-1\}$  temos que

$$\text{diam} \left( \bigcup_{k=1}^m f^{-kM}(C_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m}}) \right) < \frac{\delta}{6}.$$

Assim,

$$\text{diam} \left( C_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m-1}} \cup \bigcup_{k=1}^m f^{-kM}(C_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m}}) \right) \leq \frac{\delta}{6} + \frac{\delta}{6} = \frac{\delta}{3}.$$

Isto assegura que

$$C_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m-1}} \cup \bigcup_{k=1}^m f^{-kM}(C_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m}}) \subset B_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m-1}},$$

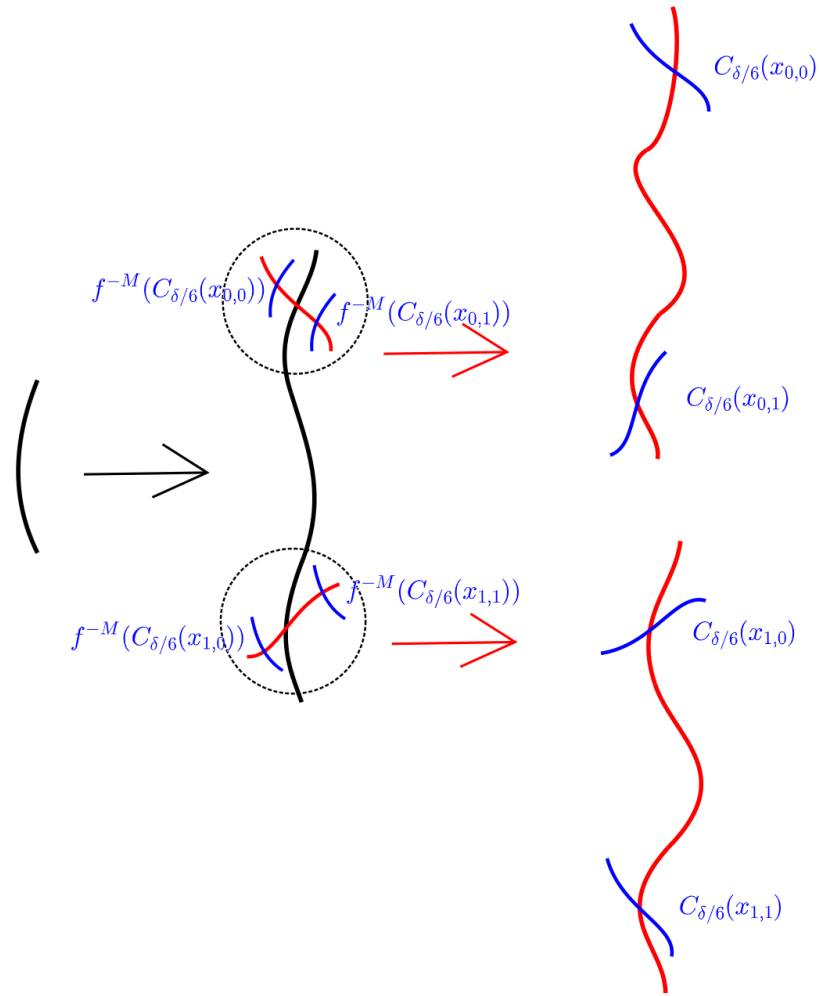


Figura 7 – Contração uniforme dos contínuos cw-instáveis locais.

pois  $C_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m-1}} \subset B_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m-1}}$ , onde  $B_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m-1}} = \overline{B(x_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-m-1}}, \delta/3)}$ . Isto garante que para cada  $n \in \mathbb{N}$  temos que

$$d(f^{nM}(y_{i_1, \dots, i_{n-1}, i_n}), f^{nM}(y_{i_1, \dots, i_{n-1}, i_n})) \geq \frac{\delta}{3},$$

onde  $y_{i_1, \dots, i_{n-1}, i_n} = f^{-nM}(x_{i_1, \dots, i_{n-1}, i_n})$ . Desta forma, para cada  $N \in \mathbb{N}$  temos pelo menos  $2^N$  pontos que são  $(NM + 1, \delta/4)$ -separados. Portanto, a maior cardinalidade dos conjuntos

$(NM + 1, \delta/4)$ -separados é no mínimo  $2^N$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 h(f, \delta/4) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log S(n, \delta/4) \\
 &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{nM + 1} \cdot \log S(nM + 1, \delta/4) \right) \\
 &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nM + 1} \cdot \log 2^n \\
 &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{nM + 1} \cdot \log 2 \\
 &= \frac{1}{M} \cdot \log 2 > 0.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $h(f) > 0$ . □

**Observação 1.3.2.** *Seja  $0 < \lambda < 1$  e defina  $\rho : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  por*

$$\rho(C) = \begin{cases} \lambda^{n_{1,\varepsilon}(C)} & \text{se } C \text{ cresce} \\ 0 & \text{se } C \text{ não cresce quando iterado pro futuro} \end{cases},$$

onde

$$\mathcal{C}(X) = \{C \subset X \mid C \text{ contínuo não trivial}\}.$$

Definindo uma função  $D$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 D : \mathcal{F}^u &\rightarrow \mathbb{R} \\
 C &\mapsto \sum_{i=1}^n \rho(f^{-n_i}(C_\gamma(x_i)))
 \end{aligned}$$

onde  $C = \bigcup_{i=0}^k f^{-n_i}(C_\gamma(x_i))$ , temos que as condições (1) e (2) acima são satisfeitas. De fato, a condição (1) sai direto da definição de  $D$ . Seja  $C \in \mathcal{C}^u$ . Note que  $n_{1,\varepsilon}(f^{-n}(C)) = n + n_{1,\varepsilon}(C)$  para todo  $n \geq 0$ . Então,

$$\begin{aligned}
 D(f^{-n}(C)) &\leq \rho(f^{-n}(C)) = \lambda^{n_{1,\varepsilon}(f^{-n}(C))} = \lambda^{n+n_{1,\varepsilon}(C)} = \lambda^n \lambda^{n_{1,\varepsilon}(C)} \\
 &= \lambda^n \rho(C) = \lambda^n D(C)
 \end{aligned}$$

para todo  $n \geq 0$ .

O problema está com a compatibilidade entre  $D$  e  $\text{diam}$  (item (3)). Seja

$$C = \bigcup_{i=0}^k f^{-n_i}(C_\gamma(x_i)) \in \mathcal{F}^u$$

com  $D\left(\bigcup_{i=0}^k f^{-n_i}(C_\gamma(x_i))\right)$  pequeno. Então,  $\rho(f^{-n_i}(C_\gamma(x_i)))$  é pequeno para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ . Isto significa que os primeiros tempos de crescimento,  $n_{1,\varepsilon}(f^{-n_i}(C_\gamma(x_i)))$

para  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ , são grandes. No caso da  $ft$ -sensibilidade o tempo de crescimento de contínuos não está associado aos seus diâmetros, como acontece na  $cw$ -expansividade. Podem existir contínuos com diâmetros grandes que nunca crescem ou que demoram muito para crescer quando iterados para o futuro. O contínuo  $C$  não está necessariamente em  $\mathcal{C}^u$  e, além disso, a união dos iterados passados dos contínuos em  $\mathcal{C}^u$  que formam  $C$  pode resultar em um diâmetro grande para  $C$  e que demora muito tempo para crescer. Isto é, é possível que  $D(C)$  seja “pequeno”, mas que  $\text{diam}(C)$  seja “grande”, e isto compromete a compatibilidade de  $D$  e  $\text{diam}$ .



## 2 Dinâmica Linear: Recorrência por cadeia e sombreamento

### 2.1 Recorrência por cadeia para operadores lineares

Neste capítulo vamos abordar o conceito de recorrência por cadeia para operadores lineares. Pontos recorrentes por cadeia são aqueles que voltam arbitrariamente pra perto de si através de uma pseudo-trajetória. Uma pseudo-trajetória (ou cadeia, que é como estamos chamando aqui) é um conjunto de pontos que é “quase uma órbita” com relação ao sistema.

A menos de menção contrária,  $T : X \rightarrow X$  é um operador linear contínuo (ou equivalentemente, limitado),  $X$  é um espaço vetorial normado sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Dizemos que uma sequência finita  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia, com  $\varepsilon > 0$ , se  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $\|T(x_i) - x_{i+1}\| < \varepsilon$  para todo  $0 \leq i < n$ . Dados dois pontos  $x, y \in X$ , escrevemos  $x\mathcal{R}y$  se vale o seguinte:

dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma  $\varepsilon$ -cadeia iniciando em  $x$  e terminando em  $y$ ,  
 $\{x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y\}$ , e outra iniciando em  $y$  e terminando em  $x$ ,  
 $\{y_0 = y, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m = x\}$ .

**Definição 2.1.1.** Dizemos que  $T : X \rightarrow X$ , um sistema dinâmico definido em um espaço métrico  $X$ , é transitivo por cadeia se  $x\mathcal{R}y$  para quaisquer  $x, y \in X$ .

O conjunto  $CR(T) = \{x \in X \mid x\mathcal{R}x\}$  é chamado *conjunto recorrente por cadeia*. Um ponto  $x \in CR(T)$  é chamado *recorrente por cadeia*. Não é difícil checar que  $\mathcal{R}$  é uma relação de equivalência em  $CR(T)$ . Chamamos as classes de equivalência dada pela relação  $\mathcal{R}$  de *classes recorrentes por cadeia*.

Na segunda seção deste capítulo mostramos que os operadores lineares limitados admitem uma única classe recorrente por cadeia. Isto implica que quaisquer dois pontos recorrentes por cadeia podem ser conectados por cadeias. Na dinâmica compacta esta situação em geral não ocorre, um sistema dinâmico definido em um espaço métrico compacto pode ter mais de uma classe recorrente por cadeia, podendo até ter infinitas (como acontece no Exemplo 1.1.6). Este fato diz que as noções de transitividade por cadeia e recorrência por cadeia são equivalentes no contexto da Dinâmica Linear. Um sistema dinâmico  $T : X \rightarrow X$ , definido em um espaço métrico  $X$ , é *recorrente por cadeia* se  $X = CR(T)$ .

Na segunda seção provamos que o conjunto recorrente por cadeia de um operador linear é um subespaço fechado e invariante. Além disso, provamos que se existe uma decomposição do espaço em subespaços fechados e invariantes então o conjunto recorrente por cadeia é a soma direta dos conjuntos recorrentes por cadeia do sistema linear restrito a cada um dos subespaços que decompõem o espaço todo.

### 2.1.1 Decomposição espectral

Na dinâmica compacta, Smale mostrou em 1967 que são finitas as classes recorrentes para difeomorfismos de Anosov — que são difeomorfismos cujo fibrado tangente se decompõe em direções complementares e  $Df$ -invariantes, uma com contração uniforme e outra com expansão uniforme. Este resultado é conhecido como o Teorema da decomposição espectral.

**Teorema 2.1.1** (Teorema da decomposição espectral [40]). *Seja  $M$  uma variedade compacta e  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo de Anosov. Então o conjunto recorrente por cadeia de  $f$  pode ser escrito como união disjunta de finitos conjuntos fechados e invariantes tal que  $f$  é topologicamente transitiva restrita a cada um desses conjuntos.*

Posteriormente esse resultado foi generalizado para homeomorfismos que têm propriedades hiperbólicas topológicas — expansividade e propriedade de sombreamento. Mais precisamente, temos

**Teorema 2.1.2.** [6, Teorema 3.1.11] *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo definido em um espaço métrico compacto  $X$ . Se  $f$  é expansivo e possui a propriedade de sombreamento então o conjunto recorrente por cadeia de  $f$  pode ser escrito como união disjunta de finitos conjuntos fechados e invariantes tal que  $f$  é topologicamente transitiva restrita a cada um desses conjuntos.*

Podemos ver em [19] um exemplo de homeomorfismo definido em um espaço métrico compacto que possui infinitas classes recorrentes por cadeia. Veremos a seguir que qualquer operador linear limitado admite uma única classe recorrente por cadeia. Para isso, vejamos que todos os pontos do espaço gerado por um ponto recorrente por cadeia  $x$ ,  $\text{span}[x]$ , está no conjunto recorrente por cadeia.

**Teorema 2.1.3.** [5] *Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $T : X \rightarrow X$  um operador linear limitado. Se  $x \in CR(T)$ , então  $\text{span}[x] \subset CR(T)$ . Além disso, todos os pontos de  $\text{span}[x]$  estão na mesma classe recorrente por cadeia.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que  $\text{span}[x] \subset CR(T)$  sempre que  $x \in CR(T)$ . Seja  $x \in CR(T)$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Queremos mostrar que  $\lambda x \in CR(T)$ . Se  $\lambda = 0$ , não há o que

mostrar. Suponha que  $\lambda \neq 0$ . Como  $x \in CR(T)$  então dado  $\varepsilon > 0$  existe uma  $\frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ -cadeia,  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , iniciando e terminando em  $x$ . Note que

$$\|T(\lambda x_i) - \lambda x_{i+1}\| = |\lambda| \|Tx_i - x_{i+1}\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon \quad \text{para todo } i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

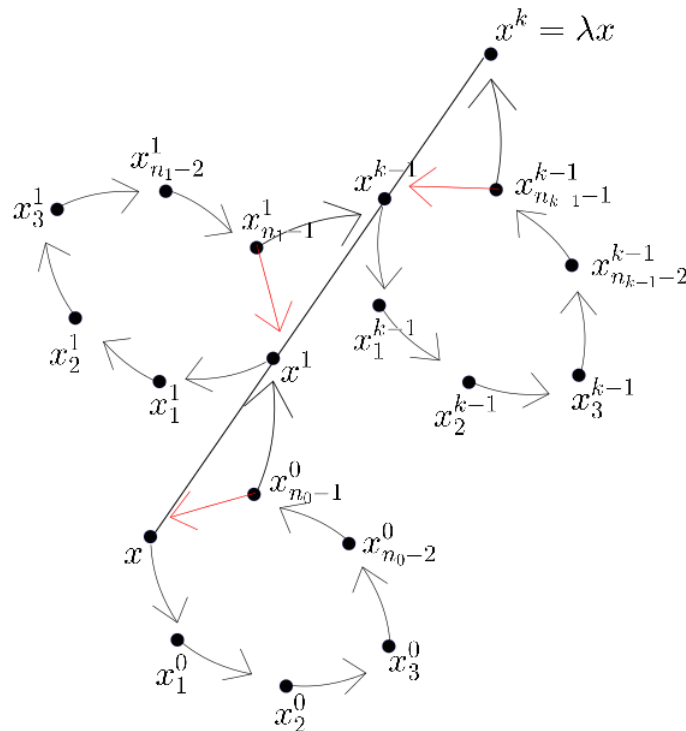
Isto implica que  $\{\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia iniciando e terminando em  $\lambda x$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, temos que  $x$  é um ponto recorrente por cadeia.

Agora vamos provar que se  $x \in CR(T)$  então  $\lambda x$  e  $x$  estão na mesma classe recorrente por cadeia, para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dados  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $\varepsilon > 0$ , queremos encontrar uma  $\varepsilon$ -cadeia iniciando em  $x$  e terminando em  $\lambda x$  e outra iniciando em  $\lambda x$  e terminando em  $x$ .

Seja  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{\|x - \lambda x\|}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Para cada  $j \in \{0, \dots, k\}$ , considere

$$x^j = \left(1 - \frac{j}{k}\right)x + \frac{j}{k}\lambda x \in \text{span}[x].$$

Já provamos acima que  $x^j$  é um ponto recorrente por cadeia para todo  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ . Então, para cada  $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  existe uma  $\varepsilon/2$ -cadeia,  $\{x_0^j = x^j, x_1^j, \dots, x_{n_j-1}^j, x_{n_j}^j = x^j\}$ , que liga  $x^j$  a ele mesmo. A  $\varepsilon$ -cadeia de  $x$  a  $\lambda x$  que iremos considerar é quase a união em ordem crescente dos  $j$ 's das cadeias relacionadas aos  $x^j$ 's. O que irá diferir é que o último termo de cada cadeia  $\{x_0^j = x^j, x_1^j, \dots, x_{n_j-1}^j, x_{n_j}^j = x^j\}$  será substituído por  $x^{j+1}$ . O desenho a seguir ilustra esta ideia, onde as setas pretas representam a ordem da cadeia que será considerada e as setas em vermelho nas cadeias de  $x^j$  para  $x^j$  significam que foram trocadas por outras.



Formalmente, a sequência finita

$$\{x_0^0 = x, x_1^0, \dots, x_{n_0-1}^0, x_0^1 = x^1, x_1^1, \dots, x_{n_1-1}^1, \dots, x_0^{k-1} = x^{k-1}, x_1^{k-1}, \dots, x_{n_{k-1}-1}^{k-1}, x^k = \lambda x\}$$

é uma  $\varepsilon$ -cadeia iniciando em  $x$  e terminando em  $\lambda x$ . De fato, para ver que isto é verdadeiro, basta verificarmos que

$$\|T(x_{n_j-1}^j) - x^{j+1}\| < \varepsilon, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, k-1\}.$$

E isto segue do fato que

$$\|x^j - x^{j+1}\| = \left\| \left(1 - \frac{j}{k}\right)x + \frac{j}{k}\lambda x - \left(1 - \frac{j+1}{k}\right)x - \frac{j+1}{k}\lambda x \right\| = \frac{1}{k}\|x - \lambda x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\|T(x_{n_j-1}^j) - x^{j+1}\| \leq \|T(x_{n_j-1}^j) - x^j\| + \|x^j - x^{j+1}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todo  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ .

Resta encontrar uma  $\varepsilon$ -cadeia que se inicia em  $\lambda x$  e termina em  $x$ . Vimos que  $\lambda x$  é um ponto recorrente por cadeia. Então, se  $\lambda \neq 0$  podemos aplicar o raciocínio análogo ao anterior para criar uma  $\varepsilon$ -cadeia de  $y = \lambda x$  para  $\lambda' y = x$  com  $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ . Se  $\lambda = 0$ , isto é,  $\lambda x = 0$ , considere  $\lambda' \neq 0$  tal que  $\|\lambda' x\| < \varepsilon/2$  e use o raciocínio anterior para criar uma  $\varepsilon/2$ -cadeia,  $\{x_0 = \lambda' x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x\}$ , que inicia em  $\lambda' x$  e termina em  $x$ . Isto gera uma  $\varepsilon$ -cadeia,  $\{0, x_0, x_1, \dots, x_n = x\}$ , começando na origem e terminando em  $x$ .  $\square$

Note que 0 é sempre um ponto recorrente por cadeia para qualquer que seja o sistema linear, pois  $\{0, 0 = T(0), \dots, 0\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia iniciando e terminando em 0 para qualquer  $\varepsilon$ . Além disso, pelo teorema anterior, a origem está na classe de cadeia recorrente de qualquer ponto recorrente por cadeia. Isto garante o que segue:

**Corolário 2.1.1.** *Um operador  $T$  agindo em espaço vetorial normado  $X$  admite uma única classe recorrente por cadeia.*

O corolário acima mostra que sempre existe decomposição espectral de Smale do conjunto recorrente por cadeia para operadores lineares e esta decomposição é trivial, no sentido que existe uma única classe recorrente por cadeia. Tendo isto em vista, podemos nos referir à classe recorrente por cadeia como conjunto recorrente por cadeia. Além disso, este corolário facilita o argumento quando queremos mostrar que algum operador linear é transitivo por cadeia. Não precisamos construir cadeias que ligam quaisquer dois pontos, basta mostrar que todo ponto do espaço vetorial é recorrente por cadeia ou que qualquer ponto está conectado por cadeia com a origem e a origem com ele.

**Corolário 2.1.2.** *Seja  $T : X \rightarrow X$  um operador linear de um espaço vetorial normado. Se  $X = CR(T)$  então  $T$  é transitivo por cadeia.*

Alves, Bernardes e Messaoudi em [3] caracterizaram os deslocamentos ponderados transitivos por cadeia da seguinte maneira:

**Exemplo 2.1.1.** [3] Considere o espaço de Banach  $l^p(\mathbb{N})$  ( $1 \leq p < \infty$ ) das seqüências  $p$ -somáveis com a norma

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad x = \{x_n\} \in l^p.$$

Dada uma seqüência  $\underline{w} = \{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , defina o deslocamento ponderado à esquerda em  $l^p(\mathbb{N})$  por:

$$\begin{aligned} B_{\underline{w}} : l^p(\mathbb{N}) &\rightarrow l^p(\mathbb{N}) \\ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \{w_{n+1}x_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

$B_{\underline{w}}$  é transitivo por cadeia se, e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_1 \cdot \dots \cdot w_n| = \infty.$$

Outro exemplo bastante simples de operador linear transitivo por cadeia é o operador identidade,  $id : X \rightarrow X$  ( $x \mapsto x$ ). Podemos ver facilmente que isto é verdade mostrando que todo ponto é recorrente por cadeia. Pois, dado qualquer ponto  $x \in X$ , a seqüência  $\{x, x\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia de  $x$  para  $x$  para qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ .

Os resultados a seguir geram classes de exemplos de operadores lineares que são e que não são transitivos por cadeia.

**Proposição 2.1.1.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $T : X \rightarrow X$  um operador linear limitado que é uma sobrejeção isométrica (ou equivalentemente,  $\|T^{-1}\| = \|T\| = 1$ ). Então,  $T$  é transitivo por cadeia. Em particular, se  $X$  é um espaço com produto interno, todo operador unitário  $T : X \rightarrow X$  é transitivo por cadeia.*

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$ . Vamos mostrar que  $x$  é um ponto recorrente por cadeia. Escolha  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{\|x\|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Defina a seqüência

$$\begin{aligned} x_0 &= x, \\ x_1 &= T(x) + \frac{T^{-n+1}(x)}{n} - \frac{T(x)}{n}, \\ x_2 &= T(x_1) + \frac{T^{-n+2}(x)}{n} - \frac{T^2(x)}{n} = T^2(x) + \frac{2T^{-n+2}(x)}{n} - \frac{2T^2(x)}{n}, \\ &\vdots \\ x_k &= T(x_{k-1}) + \frac{T^{-n+k}(x)}{n} - \frac{T^k(x)}{n} = T^k(x) + \frac{kT^{-n+k}(x)}{n} - \frac{kT^k(x)}{n}, \end{aligned}$$

para todo  $1 \leq k \leq n$ . Note que  $x_n = x$ , e que

$$\|x_k - T(x_{k-1})\| = \left\| \frac{T^{-n+k}(x)}{n} - \frac{T^k(x)}{n} \right\| \leq \left\| \frac{T^{-n+k}(x)}{n} \right\| + \left\| \frac{T^k(x)}{n} \right\| < \varepsilon$$

para  $1 \leq k \leq n$ . Portanto,  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia que começa e termina em  $x$ . Isto significa que  $x$  é um ponto recorrente por cadeia.  $\square$

**Proposição 2.1.2.** [5] *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados,  $T : X \rightarrow X$  e  $S : Y \rightarrow Y$  operadores lineares limitados e inversíveis. Se  $T$  e  $S$  são transitivos por cadeia então o operador produto  $T \times S$  é transitivo por cadeia. Em geral, o produto finito de quaisquer operadores lineares limitados transitivos por cadeia definidos em espaços de Banach é transitivo por cadeia.*

*Demonstração.* Considere em  $X \times Y$  qualquer norma produto típica (norma da soma ou do máximo, por exemplo). Suponha que  $T$  e  $S$  são transitivos por cadeia. O Teorema 2.1.3 garante que para provar que o produto  $T \times S$  é transitivo por cadeia basta mostrar que, para todo  $\varepsilon > 0$ , podemos conectar qualquer ponto  $(x, y) \in X \times Y$  à origem e a origem ao ponto  $(x, y)$  por  $\varepsilon$ -cadeias.

Dados  $(x, y) \in X \times Y$  e  $\varepsilon > 0$ , podemos considerar uma  $\varepsilon/2$ -cadeia  $\{x_0 = x, x_1, \dots, x_n = 0\}$  iniciando em  $x$  e terminando em 0, pois  $T$  é transitivo por cadeia. Podemos ver que

$$\{(x_0, y), (x_1, S(y)), (x_2, S^2(y)), \dots, (x_n, S^n(y))\}$$

é uma  $\varepsilon$ -cadeia que liga  $(x, y)$  à  $(0, S^n(y))$ . Seguindo o mesmo argumento podemos criar uma  $\varepsilon$ -cadeia que conecta  $(0, S^n(y))$  com  $(0, 0)$ . Para ir de  $(0, 0)$  a  $(x, y)$  considere uma  $\varepsilon/2$ -cadeia  $\{x_0 = 0, x_1, \dots, x_n = x\}$  em  $X$  que começa em 0 e termina em  $x$  e outra  $\{y_0 = 0, y_1, \dots, y_m = y\}$  em  $Y$  que começa em 0 e termina em  $y$ . Podemos supor que  $m = n$ , pois se acrescentarmos zeros antes da primeira coordenada de qualquer uma das cadeias acima, elas continuam sendo  $\varepsilon/2$ -cadeias ligando a origem ao ponto desejado. Então a  $\varepsilon$ -cadeia,  $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  vai de  $(0, 0)$  a  $(x, y)$ .  $\square$

Podemos dizer que os conceitos de transitividade por cadeia e hiperbolicidade na dinâmica linear são opostos, no sentido de que operadores lineares hiperbólicos definidos em espaços não-triviais não são transitivos por cadeia. Vamos agora definir a hiperbolicidade.

Seja  $X$  um espaço vetorial normado. Dizemos que um operador linear limitado  $T : X \rightarrow X$  é uma *contração própria* se  $\|T\| < 1$ , e uma *contração* se  $\|T\| \leq 1$ . Dizemos que  $T$  é uma *dilatação própria* se  $T$  é invertível e  $T^{-1}$  é uma contração própria e uma *dilatação* se  $\|T^{-1}\| \leq 1$ .

Um operador linear limitado  $T$  definido em um espaço de Banach  $X$  é dito *hiperbólico* [22] se existe uma decomposição

$$X = X_s \oplus X_u, \quad T = T_s \oplus T_u,$$

onde  $X_s$  e  $X_u$  são subespaços fechados e  $T$ -invariantes de  $X$ ,  $T_s = T|_{X_s}$  é uma contração própria, e  $T_u = T|_{X_u}$  é uma dilatação própria.

Alves, em sua tese de doutorado [2], mostra que  $T$  não é transitivo por cadeia quando  $T$  é hiperbólico. Aqui provaremos algo mais forte do que isso, mostraremos que o conjunto recorrente por cadeia de operadores hiperbólicos é trivial. Para isto usaremos os resultados a seguir.

**Proposição 2.1.3.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $T : X \rightarrow X$  um operador linear. Se  $T$  é uma contração própria, então  $CR(T) = \{0\}$ .*

*Demonstração.* Claro que  $0 \in CR(T)$ . Vamos ver que se  $x$  é um ponto recorrente,  $x = 0$ . Vimos que se  $x \neq 0$  é um ponto recorrente se, e somente se,  $\frac{x}{\|x\|}$  também é. Assim, basta mostrar que  $\mathbb{S}_X := \{x \in X \mid \|x\| = 1\} \subset CR(T)$ . Seja  $x \in \mathbb{S}_X$ . Então, para  $\varepsilon = (\|x\| - \|Tx\| - \delta)(1 - \|T\|)$ , onde  $\delta > 0$  é pequeno o suficiente para que  $\varepsilon$  seja positivo, existe uma  $\varepsilon$ -cadeia,  $\{x = x_0, x_1, \dots, x_n = x\}$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 \|x\| &= \|x + (T(x_{n-1}) - T(x_{n-1})) + \dots + (T^{n-1}(x_1) - T^{n-1}(x_1)) + (T^n(x) - T^n(x))\| \\
 &= \|(x - T(x_{n-1})) + T(x_{n-1} - T(x_{n-2})) + \dots + T^{n-1}(x_1 - T(x_0)) + T^n(x)\| \\
 &\leq \|(x - T(x_{n-1}))\| + \|T\|\|x_{n-1} - T(x_{n-2})\| + \dots + \|T^{n-1}\|\|x_1 - T(x_0)\| + \|T^n(x)\| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{1 - \|T\|} + \|T^n(x)\| \\
 &= \|x\| - (\|T(x)\| - \|T^n(x)\| + \delta) \\
 &< \|x\|,
 \end{aligned}$$

pois  $\|T(x)\| \geq \|T^n(x)\|$ , ou seja,  $\|T(x)\| - \|T^n(x)\| + \delta > 0$ . Isto gera um absurdo.  $\square$

**Proposição 2.1.4.** *Se  $T$  é um operador linear inversível em um espaço vetorial normado  $X$ , então  $CR(T) = CR(T^{-1})$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x \in CR(T)$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $\{x_0 = x, \dots, x_n = x\}$  uma  $\varepsilon/\|T^{-1}\|$ -cadeia para  $T$ . Isto garante que

$$\|T(x_i) - x_{i+1}\| < \frac{\varepsilon}{\|T^{-1}\|},$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
 \|T^{-1}(x_{i+1}) - x_i\| &= \|T^{-1}(x_{i+1}) - T^{-1}(T(x_i))\| \\
 &= \|T^{-1}(T(x_i) - x_{i+1})\| \\
 &\leq \|T^{-1}\| \|T(x_i) - x_{i+1}\| \\
 &< \|T^{-1}\| \frac{\varepsilon}{\|T^{-1}\|} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Isto significa que  $\{y_0 = x, y_1 = x_{n-1}, \dots, y_{n-1} = x_1, y_n = x\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia para  $T^{-1}$  de  $x$  em  $x$ . Portanto,  $CR(T) \subset CR(T^{-1})$  e trocando os papéis de  $T$  e  $T^{-1}$  obtemos a conclusão.  $\square$

**Corolário 2.1.3.** *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $T : X \rightarrow X$  um operador linear. Se  $T$  é uma dilatação própria, então  $CR(T) = \{0\}$ .*

*Demonstração.* Segue imediato da proposição acima e da Proposição 2.1.3.  $\square$

## 2.1.2 O subespaço recorrente por cadeia

O fato que o conjunto recorrente por cadeia é fechado e invariante é verdade para sistemas dinâmicos topológicos em geral. Mas incluímos a prova deste fato para conveniência do leitor.

A novidade nesta seção é que através do teorema da seção anterior, que diz que o subespaço gerado por um ponto recorrente por cadeia está no conjunto recorrente por cadeia, podemos provar que o conjunto recorrente por cadeia é um subespaço do espaço todo.

**Teorema 2.1.4.** *Seja  $X$  espaço vetorial normado e  $T : X \rightarrow X$  um operador linear limitado. O conjunto recorrente por cadeia é um subespaço fechado e invariante. Se  $T$  é invertível,  $T(CR(T)) = CR(T)$ .*

*Demonstração.* O Teorema 2.1.3 nos diz que  $CR(T)$  é fechado pela multiplicação por escalares. Sejam  $x, y \in CR(T)$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $\{x_0 = x, x_1, \dots, x_n = 0\}$ ,  $\{y_0 = y, y_1, \dots, y_m = 0\}$  duas  $\varepsilon/2$ -cadeias que vão de  $x$  para 0 e de  $y$  para 0, respectivamente. Podemos supor que  $m > n$ , então

$$\{x + y = x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, 0 + y_{n+1}, \dots, 0 + y_m = 0\}$$

é uma  $\varepsilon$ -cadeia que conecta  $x + y$  a 0. Uma ideia similar pode ser usada para mostrar que existe uma  $\varepsilon$ -cadeia da origem até  $x + y$ . Portanto,  $x + y$  é recorrente por cadeia.



Para mostrar que  $CR(T)$  é fechado considere  $\{x_n\}_n$  uma sequência em  $CR(T)$  convergindo para um ponto  $x$  em  $X$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $x_n$  tal que  $\|x_n - x\| < \varepsilon/2$  e  $\|T(x_n) - T(x)\| < \varepsilon/2$ , e seja  $\{y_0 = x_n, y_1, \dots, y_N = x_n\}$  uma  $\varepsilon/2$ -cadeia que sai de  $x_n$  e chega em  $x_n$ . É imediato ver que  $\{x, y_1, \dots, y_{N-1}, x\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia que vai de  $x$  para  $x$ . Portanto,  $x$  é recorrente por cadeia.

Provemos agora a invariância. Dado  $x$  um ponto recorrente por cadeia, existe uma  $\varepsilon/(2 \max\{\|T\|, 1\})$ -cadeia,  $\{x_0 = x, x_1, \dots, x_N = x\}$ , que começa em  $x$  e termina em  $x$ . A dificuldade para mostrar que a sequência

$$\{y_0 = T(x), y_1 = x_2, y_2 = x_3, \dots, y_{N-1} = x_N = x, y_N = T(x)\}$$

é uma  $\varepsilon$ -cadeia de  $T(x)$  para  $T(x)$  está em ver que  $\|T(y_0) - y_1\|$  é menor que  $\varepsilon$ . Mas, temos que

$$\begin{aligned} \|T(y_0) - y_1\| &= \|T(y_0) - x_2\| \\ &= \|T^2(x) - T(x_1) + T(x_1) - x_2\| \\ &\leq \|T^2(x) - T(x_1)\| + \|T(x_1) - x_2\| \\ &\leq \|T\| \|T(x) - x_1\| + \|T(x_1) - x_2\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Suponha agora que  $T$  é invertível. Para mostrar a igualdade  $T(CR(T)) = CR(T)$  é suficiente provar que  $T^{-1}(CR(T)) \subset CR(T)$ , uma vez que já provamos que  $T(CR(T)) \subset CR(T)$ . Sejam  $x$  um ponto recorrente por cadeia e  $\varepsilon > 0$ . Então existe uma  $\varepsilon/(2 \max\{\|T^{-1}\|, 1\})$ -cadeia,  $\{x_0 = x, x_1, \dots, x_N = x\}$ , que inicia e termina em  $x$ . A sequência finita  $\{y_0 = T^{-1}(x), y_1 = x_0 = x, y_2 = x_1, \dots, y_{N-1} = x_{N-2}, y_N = T^{-1}(x)\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia de  $T^{-1}x$  para  $T^{-1}(x)$ , pois

$$\begin{aligned} \|T(y_{N-1}) - y_N\| &= \|T(x_{N-2}) - T^{-1}(x)\| \\ &\leq \|T(x_{N-2}) - x_{N-1}\| + \|x_{N-1} - T^{-1}(x)\| \\ &\leq \|T(x_{N-2}) - x_{N-1}\| + \|T^{-1}\| \|T(x_{N-1}) - x\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Os próximos resultados nos mostram como o conjunto recorrente por cadeia se comporta diante de uma decomposição do espaço de Banach por subespaços fechados e invariantes.

Durante o restante desta seção, consideremos  $X$  um espaço de Banach e  $T : X \rightarrow X$  um operador linear limitado. Além disso, suponha que  $X = M \oplus N$  com  $M, N$  subespaços fechados e  $T$ -invariantes de  $X$ .

**Teorema 2.1.5.** *O conjunto recorrente por cadeia de  $T|_M$  é formado por todos os pontos recorrentes por cadeia de  $T$  que estão em  $M$ , ou seja,  $CR(T) \cap M = CR(T|_M)$ .*

*Demonstração.* É claro que  $CR(T|_M) \subset CR(T) \cap M$ . Mostraremos que  $CR(T) \cap M \subset CR(T|_M)$ . Por [17, Teorema 2.10], existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\|m\| \leq \alpha \|m + n\| \quad \text{e} \quad \|n\| \leq \alpha \|m + n\| \quad (2.1)$$

sempre que  $m \in M$  e  $n \in N$ . Dados  $x \in CR(T) \cap M$  e  $\varepsilon > 0$  existe uma  $\varepsilon/\alpha$ -cadeia,  $\{x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x\}$ , de  $x$  em  $x$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  existem  $z_i \in M$  e  $w_i \in N$  tais que  $x_i = z_i + w_i$ . Vamos mostrar que  $\{x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia em  $M$  de  $x$  e  $x$ , isto é, é uma  $\varepsilon$ -cadeia conectando  $x$  com ele mesmo e todos os pontos que compõem esta cadeia estão em  $M$ , o que completa a prova. Como  $M$  e  $N$  são  $T$ -invariantes e  $X = M \oplus N$ , por (2.1) temos que

$$\|T(x) - z_1\| \leq \alpha \|T(x) - (z_1 + w_1)\| < \alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon,$$

$$\|T(z_i) - z_{i+1}\| \leq \alpha \|T(z_i + w_i) - (z_{i+1} + w_{i+1})\| < \alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n-2\},$$

$$\|T(z_{n-1}) - x\| \leq \alpha \|T(z_{n-1} + w_{n-1}) - x\| < \alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon.$$

Isto garante que  $\{x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x\}$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia em  $M$  começando e finalizando em  $x$ . Consequentemente,  $x \in CR(T|_M)$ .  $\square$

**Corolário 2.1.4.** *O conjunto recorrente por cadeia de  $T$  é a soma direta do conjunto recorrente por cadeia de  $T|_M$  com o de  $T|_N$ , i. e.,  $CR(T) = CR(T|_M) \oplus CR(T|_N)$ .*

*Demonstração.* O Teorema 2.1.4 junto com o fato de que  $M$  e  $N$  são subespaços fechados e invariantes implicam que  $CR(T) \cap M$  e  $CR(T) \cap N$  são subespaços fechados e invariantes de  $X$  e portanto o são de  $CR(T)$ . Escolha  $x \in CR(T)$ , pelas hipóteses,  $x$  pode ser escrito unicamente como soma de um elemento em  $M$  e um elemento em  $N$ , digamos que  $x = m + n$ , com  $m \in M$  e  $n \in N$ . Seguindo um raciocínio similar ao usado na prova do Teorema 2.1.5, temos que  $m$  e  $n$  são recorrentes por cadeia. Portanto,  $m \in CR(T) \cap M$  e  $n \in CR(T) \cap N$ , pela arbitrariedade na escolha de  $x$ , isto implica que

$$CR(T) = (CR(T) \cap M) \oplus (CR(T) \cap N). \quad (2.2)$$

Pelo Teorema 2.1.5 a expressão acima pode ser escrita como

$$CR(T) = CR(T|_M) \oplus CR(T|_N).$$

□

Dados  $M$  e  $N$  dois espaços vetoriais, podemos considerar um isomorfismo entre  $M \oplus N$  e  $M \times N$ . Então o corolário anterior nos diz o conjunto recorrente por cadeia de um produto de operadores lineares é o produtos dos conjuntos recorrentes por cadeia de cada um dos fatores.

**Exemplo 2.1.2.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado,  $T : X \rightarrow X$  uma contração própria e  $I : X \rightarrow X$  o operador identidade. O operador produto  $T \times I : X \times X \rightarrow X \times X$ , onde  $X \times X$  é munido com as normas produtos típicas, satisfaz  $CR(T \times I) = \{0\} \times X$ .*

O corolário anterior junto com o Corolário 2.1.2 implicam que:

**Corolário 2.1.5.** *O operador  $T$  é transitivo por cadeia se, e somente se,  $T|_M$  e  $T|_N$  são ambos transitivos por cadeia.*

**Corolário 2.1.6.** *Seja  $T$  um operador hiperbólico em um espaço de Banach  $X$ . Então,  $CR(T) = \{0\}$ .*

*Demonstração.* Isto segue imediatamente dos Corolários 2.1.4 e 2.1.3 e da Proposição 2.1.3.

□

Robinson em [36] mostra que, se  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo definido em um espaço métrico compacto  $X$ , então o recorrente por cadeia de  $f|_{CR(f)}$  coincide com  $CR(f)$ . Naturalmente nos perguntamos se isto é verdade no contexto da dinâmica linear.

**Pergunta 2.1.1.** *Se  $T : X \rightarrow X$  é um operador linear em um espaço vetorial normado então  $CR(T|_{CR(T)}) = CR(T)$ ?*

No resultado seguinte, respondemos afirmativamente esta questão para  $X$  é um espaço de Hilbert e  $T$  é autoadjunto.

**Corolário 2.1.7.** *Seja  $T$  um operador linear limitado autoadjunto em um espaço de Hilbert  $X$ . Então o conjunto recorrente por cadeia de  $T|_{CR(T)}$  coincide com  $CR(T)$ . Em particular,  $T|_{CR(T)}$  é transitivo por cadeia.*

*Demonstração.* Como  $X$  é um espaço de Hilbert e  $CR(T)$  é um subespaço fechado de  $X$ , então  $X = CR(T) \oplus (CR(T))^\perp$ . Já vimos que o conjunto recorrente por cadeia de qualquer operador linear limitado é invariante, logo  $CR(T)$  é invariante por  $T$ , o que implica que seu espaço ortogonal,  $(CR(T))^\perp$ , é invariante por  $T^* = T$ . Pelo Teorema 2.1.5, podemos concluir que  $CR(T|_{CR(T)}) = CR(T)$ . □

## 2.2 Transitividade por cadeia e propriedade de sombreamento

Nesta seção relacionamos propriedades de dinâmica linear como: hiperciclicidade, hiperciclicidade frequente, transitividade e mistura topológica com transitividade por cadeia.

A noção de hiperciclicidade foi introduzida em 1969 por Rolewicz ([38]). Um operador linear limitado  $T$  definido em um espaço de Banach separável  $X$  é dito *hipercíclico* se existe  $x \in X$  cuja órbita é densa, isto é,  $\overline{\mathcal{O}_T(x)} = \overline{\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}} = X$ . Os vetores cuja órbita é densa em  $X$  são chamados *vetores hipercíclicos* de  $T$ .

Note que só faz sentido definir hiperciclicidade em espaço métricos separáveis. Além de espaços métricos que não são separáveis, espaços de dimensão finita também não suportam operadores hipercíclicos como provam Bayart e Matheron em [12].

O conceito de hiperciclicidade está relacionado com a transitividade topológica da seguinte maneira:

**Teorema 2.2.1** (Teorema da transitividade de Birkhoff [15]). *Seja  $T$  um operador linear limitado agindo em um espaço de Banach separável  $X$ . São equivalentes;*

- (a)  $T$  é hipercíclico;
- (b)  $T$  é topologicamente transitivo, ou seja, dados abertos não-vazios  $U, V \subset X$  existe  $N = N(U, V) \in \mathbb{N}^*$  tal que  $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$ .

É fácil ver que hiperciclicidade implica em transitividade topológica, pois um vetor hipercíclico visita infinitas vezes todos os abertos do espaço.

Bayart e Grivaux em [11] introduziram uma noção mais forte de hiperciclicidade, que é quando existe um vetor cuja órbita visita todo aberto do espaço com densidade inferior positiva. Formalmente, a *densidade inferior positiva* de um subconjunto de números naturais  $A$  é definida por

$$\underline{\text{dens}}(A) := \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(A \cap [1, N])}{N},$$

onde  $\#(B)$  denota a cardinalidade do conjunto  $B$ . Um operador linear  $T : X \rightarrow X$  em um espaço de Banach separável  $X$  é *frequentemente hipercíclico* se existe um vetor  $x \in X$  tal que

$$\underline{\text{dens}}(\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in V\}) > 0$$

para qualquer subconjunto aberto não-vazio  $V$  de  $X$ . Tal vetor  $x$  é chamado *vetor frequentemente hipercíclico* para  $T$ .

É fácil ver que valem as seguintes implicações:

Hiperciclicidade frequente  $\Rightarrow$  Hiperciclicidade  $\Rightarrow$  Transitividade por cadeia

Os exemplos a seguir mostram que as implicações inversas em geral não são válidas, ou seja,

Hiperciclicidade frequente  $\nLeftarrow$  Hiperciclicidade  $\nLeftarrow$  Transitividade por cadeia

**Exemplo 2.2.1.** O operador identidade definido em qualquer espaço vetorial normado é um exemplo de operador transitivo por cadeia e que não é hipercíclico, pois não possui vetores com órbita é densa.

**Exemplo 2.2.2.** Considere o deslocamento ponderado à esquerda em  $\ell^p(\mathbb{N})$

$$\begin{aligned} B_{\underline{w}} : \ell^p(\mathbb{N}) &\rightarrow \ell^p(\mathbb{N}) \\ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \{w_{n+1}x_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

com  $\underline{w} = \{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Salas, em 1995 (ver [39]), caracterizou os deslocamentos ponderados hipercíclicos da seguinte forma:  $B_{\underline{w}}$  é hipercíclico se, e somente se,

$$\sup_{n \geq 1} \prod_{j=1}^n |w_j| = \infty.$$

Bem mais tarde, em 2009, Bayart e Matheron em [12, Exemplo 6.19] caracterizaram os frequentemente hipercíclico. O deslocamento ponderado  $B_{\underline{w}}$  em  $\ell^p(\mathbb{N})$ , com  $\underline{w} = \{w_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , é frequentemente hipercíclico se, somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (w_1 \dots w_n)^{-p} < \infty.$$

Por estas caracterizações, o deslocamento ponderado à esquerda  $B_{\underline{w}}$  em  $\ell^2(\mathbb{N})$  com a sequência peso  $\{w_n\}$ , onde

$$w_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}},$$

é hipercíclico mas não é frequentemente hipercíclico.

Veremos que, quando a propriedade de sombreamento estiver presente, valem as equivalências:

$$\begin{aligned} \text{Hiperciclicidade frequente} + \text{sombreamento} &\Leftrightarrow \text{Hiperciclicidade} + \text{sombreamento} \Leftrightarrow \\ &\text{Transitividade por cadeia} + \text{sombreamento} \end{aligned}$$

A propriedade de sombreamento diz que para cada quase órbita existe uma órbita real que a acompanha.

Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $T : X \rightarrow X$  um operador linear limitado. Dizemos que  $T$  tem a *propriedade de sombreamento positivo* se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para cada sequência  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  satisfazendo

$$\|T(x_n) - x_{n+1}\| < \delta \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

existe  $y \in X$  tal que

$$\|T^n(y) - x_n\| < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, dizemos que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma  $\delta$ -*pseudo órbita* de  $T$  e que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é  $\varepsilon$ -*sombreada* por  $y$ .

É fácil ver que a identidade não tem a propriedade de sombreamento, por outro lado, também é fácil ver que as contrações próprias e as dilatações próprias têm a propriedade de sombreamento. Mais geralmente qualquer operador hiperbólico em um espaço de Banach tem a propriedade de sombreamento [13]. Em [14] uma condição necessária e suficiente para o deslocamento ponderado ter a propriedade de sombreamento é obtida, como segue:

**Exemplo 2.2.3.** *Considere o deslocamento ponderado à esquerda em  $\ell^p(\mathbb{N})$ ,*

$$\begin{aligned} B_{\underline{w}} : \ell^p(\mathbb{N}) &\rightarrow \ell^p(\mathbb{N}) \\ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \{w_{n+1}x_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned} ,$$

com peso  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Bernardes e Messaoudi, em [14], caracterizaram os deslocamento ponderado com propriedade de sombreamento da seguinte forma:  $B_{\underline{w}}$  tem propriedade de sombreamento positivo se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

- (a)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{1/n} < 1;$
- (b)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{1/n} > 1.$

Para ilustrar a propriedade de sombreamento apresentamos dois exemplos abaixo. O primeiro é um operador que tem um autovalor igual a 1 (e portanto não é hiperbólico) e tem a propriedade de sombreamento. O segundo exemplo é uma contração invertível que não tem a propriedade de sombreamento.

**Exemplo 2.2.4.** *No espaço  $\ell_p(\mathbb{N})$  para  $1 \leq p \leq \infty$ , considere o operador  $T : \ell_p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$  dado por  $T(e_0) = e_0$ , e  $T(e_i) = 2e_{i-1}$  se  $i \geq 1$ , onde  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  é a base canônica. Note que existe um autoespaço associado ao autovalor 1. Este operador tem propriedade de sombreamento. Para mostrar isto, considere o operador  $S e_i = e_{i+1}/2$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Note que  $\|S\| = 1/2$  e que  $S$  é uma inversa pela direita para  $T$ . Dado qualquer  $\delta$ -pseudo órbita  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  note que o ponto*

$$x = x_0 + S(x_1 - Tx_0) + S^2(x_2 - Tx_1) + \cdots$$

está em  $\ell_p(\mathbb{N})$  e  $2\delta$ -sombreia a pseudo-órbita. Portanto  $T$  tem a propriedade de sombreamento positivo.

**Exemplo 2.2.5.** Considere  $L_1([1/2, 1])$  o espaço de funções reais Lebesgue integráveis em  $[1/2, 1]$ , e o operador  $T : L_1([1/2, 1]) \rightarrow L_1([1/2, 1])$ , dado por  $T(f)(x) = f(x)x$  para todo  $x \in [1/2, 1]$ , note que  $T$  é invertível. Provaremos que este operador não tem propriedade de sombreamento. De fato, seja  $f \in L_1([1/2, 1])$ , dado  $\delta > 0$  considere a  $2\delta$ -pseudo órbita dada por  $\{f_n\}$ , onde  $f_n(x) = f(x)x^n + \delta(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  para todo  $x \in [1/2, 1]$ . Assumimos que  $T$  tem propriedade de sombreamento, portanto existe  $g \in L_1([1/2, 1])$  tal que  $\|T^n g - f_n\|_1 < \varepsilon$  para algum  $\varepsilon > 0$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Note que

$$\begin{aligned} \|T^n g - f_n\|_1 &= \|x^n g(x) - x^n f(x) - \delta(x^{n-1} + \dots + 1)\|_1 \\ &= \|x^n(g(x) - f(x)) - \delta(x^{n-1} + \dots + 1)\|_1 \\ &\geq |\|x^n(g(x) - f(x))\|_1 - \|\delta(x^{n-1} + \dots + 1)\|_1|. \end{aligned}$$

Note que, como  $x < 1$  quase sempre então  $x^n(g(x) - f(x)) \rightarrow 0$  quase sempre quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que  $\|x^n(g(x) - f(x))\|_1 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e então este termo é limitado. Mas o segundo termo na soma não é limitado. Pois,

$$\begin{aligned} \|\delta(x^{n-1} + \dots + 1)\|_1 &= \delta \int_{1/2}^1 (x^{n-1} + \dots + 1) dx \\ &= \delta \left[ \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + x \right]_{1/2}^1 \\ &= \delta \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 - \frac{1}{2^n} \frac{1}{n} - \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{n-1} - \dots - \frac{1}{2} \right) \\ &= \delta \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{2^k} \right), \end{aligned}$$

usando o teste de comparação com a série harmônica, e.g. o teste de comparação limite [10], podemos ver que o lado direito vai para  $+\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Portanto esta pseudo-órbita não pode ser sombreada.

A transitividade por cadeia e a propriedade de sombreamento positivo possuem uma combinação interessante que nos permite obter os resultados mais importantes deste trabalho. Por um lado, a transitividade por cadeia nos permite conectar diferentes pontos do espaço com  $\varepsilon$ -cadeias e a propriedade de sombreamento nos diz que haverá um ponto que sombreia tal cadeia.

Mostraremos agora que a transitividade por cadeia implica em hiperciclicidade frequente quando adicionada a hipótese de propriedade de sombreamento. Para isto usaremos o lema a seguir.

**Lema 2.2.1.** [12, Lema 6.19] *Seja  $\{N_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  uma sequência de números reais positivos. Então podemos encontrar uma sequência de subconjuntos disjuntos de  $\mathbb{N}$ ,  $\{\mathcal{N}_p\}_{p \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , satisfazendo:*

1. para cada  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\underline{\text{dens}}(\mathcal{N}_p) > 0$ ;
2.  $\min(\mathcal{N}_p) \geq N_p$  e  $|n - m| \geq N_p + N_q$  sempre que  $n \neq m$  e  $(n, m) \in \mathcal{N}_p \times \mathcal{N}_q$ .

**Teorema 2.2.2.** [5] *Seja  $X$  um espaço de Banach separável e  $T : X \rightarrow X$  um operador transitivo por cadeia e com a propriedade de sombreamento positivo. Então  $T$  é frequentemente hipercíclico.*

*Demonstração.* Seja  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  um conjunto denso de vetores em  $X$ . Pela propriedade de sombreamento positiva de  $T$ , para cada  $p \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon_p = 1/2^p$ , existe  $\delta_p > 0$  tal que toda  $\delta_p$ -pseudo órbita positiva é  $\varepsilon_p$ -sombreada.

Como  $T$  é transitivo por cadeia, para cada  $p \in \mathbb{N}$ , podemos considerar uma  $\delta_p/2$ -cadeia ligando 0 a  $x_p$  e a 0 novamente. Note que podemos acrescentar quantos zeros quisermos no começo e no final da cadeia que continua sendo uma  $\delta_p/2$ -cadeia ligando 0 a 0 e passando por  $x_p$ . Podemos tomar uma  $\delta_p$ -cadeia de forma que saia e volte a origem passando por  $x_p$  na metade do “caminho”, ou seja, considere

$$\{x_0^p = 0, x_1^p, \dots, x_{R_p}^p, x_p, \dots, x_p^{2R_p}\}. \quad (2.3)$$

Além disso, suponha que  $R_p < R_{p-1}$  e  $\frac{1}{R_p} < \frac{\delta_p}{4}$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ . Para a sequência  $\{N_p = 2R_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ , obtemos uma sequência  $\{\mathcal{N}_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  como no Lema 2.2.1.

Nosso desejo é através de um processo de indução criar uma sequência de vetores  $\{z_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  de  $X$  satisfazendo as seguintes propriedades

(a)  $\|z_p\| < \frac{1}{2^p}$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ ;

(b) a  $m \in \mathcal{N}_p$  então  $\left\| \sum_{0 \leq q \leq p} T^{m+R_p}(z_q) - x_p \right\| < \frac{1}{2^p}$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ ;

(c) dado  $n, p \in \mathbb{N}$  com  $n \notin \{m, m+1, \dots, m+N_p-1 \mid m \in \mathcal{N}_p\}$ , então  $\|T^n(z_p)\| < \frac{1}{2^p}$ .

Como assumimos  $T^0(z_p) = z_p$ , o leitor notará que a Propriedade (a) é uma consequência da Propriedade (c), mas decidimos explicitar a Propriedade (a) por uma questão de clareza.



Se isto for feito, a soma

$$z =: \sum_{p \in \mathbb{N}} z_p$$

é um vetor cuja boa definição está assegurada pela Propriedade (a), pois

$$\|z\| = \left\| \sum z_p \right\| \leq \sum \frac{1}{2^p} = 2.$$

Afirmamos que  $z$  é um vetor frequentemente hipercíclico. De fato, seja  $V$  um subconjunto aberto não-vazio de  $X$ . Considere  $w \in V$  e  $\lambda > 0$  tal que  $B(w, \lambda) \subset V$ . Seja  $q_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $1/2^{q_0} < \lambda/2$ . Pela densidade de  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ , podemos escolher  $x_p \in B(w, \lambda/2)$  com  $p \geq q_0$ . Para cada  $m \in \mathcal{N}_p$ , temos que, pelas Propriedades (b), (c) e item 2 do Lema 2.2.1

$$\begin{aligned} |T^{m+R_p}(z) - x_p| &\leq \left| \sum_{1 \leq q \leq p} T^{m+R_p}(z_q) - x_p \right| + \left| \sum_{q > p} T_{m+R_p}(z_q) \right| \\ &\leq \frac{1}{2^p} + \sum_{q > p} \|T^{m+R_p}(z_q)\| \\ &< \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+2}} + \frac{1}{2^{p+3}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2^{p-1}} \\ &\leq \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

O que implica que  $T^{m+R_p}(z) \in B(x_p, \lambda/2) \subset V$  para todo  $m \in \mathcal{N}_p$ , ou seja,

$$\underline{\text{dens}}(\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(z) \in V\}) \geq \underline{\text{dens}}(\mathcal{N}_p + R_p) = \underline{\text{dens}}(\mathcal{N}_p) > 0,$$

onde  $\mathcal{N}_p + R_p = \{m + R_p \mid m \in \mathcal{N}_p\}$  (para a igualdade acima, ver [32]). Provando, portanto, que  $z$  é um vetor frequentemente hipercíclico para  $T$  e conseqüentemente  $T$  é frequentemente hipercíclico.

Agora, vamos obter os vetores  $z_p$  satisfazendo as propriedades desejadas. O primeiro passo para o processo de indução será gerar  $z_0$ . Para este fim, considere a seqüência  $\{\gamma_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$  dada por

$$\gamma_n^0 = \begin{cases} x_k^0 & \text{se } n = m + k \text{ com } m \in \mathcal{N}_0 \text{ e } k \in \{0, 1, \dots, N_0 - 1\} \\ 0 & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus \{m, m + 1, \dots, m + N_0 - 1 \mid m \in \mathcal{N}_0\}. \end{cases}$$

Pela definição de 2.3 temos que  $\{\gamma_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\delta_0$ -pseudo órbita positiva. Pela propriedade de sombreamento positiva, existe  $z_0 \in X$  tal que

$$|T^n(z_0) - \gamma_n^0| < \varepsilon_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isto implica imediatamente que  $\|z_0\| = \|T^0(z_0) - 0\| = \|T^0(z_0) - \gamma_0^0\| < \varepsilon_0$ , e portanto  $z_0$  satisfaz a Propriedade (a). Note que para cada  $m \in \mathcal{N}_0$ ,

$$\|T^{m+R_0}(z_0) - \gamma_{m+R_0}^0\| = \|T^{m+R_0}(z_0) - x_{R_0}^0\| = \|T^{m+R_0}(z_0) - x_0\| < \varepsilon_0$$

o que implica que  $z_0$  satisfaz a Propriedade (b). Para todo  $n \in \mathbb{N} \setminus \{m, m+1, \dots, m+N_0-1 \mid m \in \mathcal{N}_0\}$ , temos que,  $\|T^n(z_0) - 0\| = \|T^n(z_0)\| < \varepsilon_0 < 1$  e portanto a Propriedade (c) é satisfeita por  $z_0$ .

Como hipótese de indução, suponha que existam  $z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$  satisfazendo as Propriedades (a), (b) e (c). Vamos agora obter  $z_p$ , para  $p \geq 1$ . Defina a sequência  $\{\gamma_n^p\}_{n \in \mathbb{N}}$  da seguinte forma:

$$\gamma_n^p = \begin{cases} x_k^p - \frac{k}{R_p} T^n(z_0 + z_1 + \dots + z_{p-1}) & \text{se } n = m + k \text{ com } m \in \mathcal{N}_p \\ & \text{e } k \in \{0, 1, \dots, R_p\} \\ x_k^p - \frac{N_p - k}{R_p} T^n(z_0 + z_1 + \dots + z_{p-1}) & \text{se } n = m + k \text{ com } m \in \mathcal{N}_p \\ & \text{e } k \in \{R_p + 1, \dots, N_p - 1\} \\ 0 & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus \{m, \dots, m + N_p - 1\} \\ & \text{e } m \in \mathcal{N}_p. \end{cases}$$

Veremos a seguir que  $\{\gamma_n^p\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\delta_p$ -pseudo órbita. Isto garante a existência de um vetor  $z_p$  que  $\varepsilon_p$ -sombreia  $\{\gamma_n^p\}_{n \in \mathbb{N}}$ , isto é, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|T^n(z_p) - \gamma_n^p\| < \varepsilon_p = \frac{1}{2^p}.$$

Como  $\gamma_0^p = 0$ , segue que  $\|z_p\| = \|T^0(z_p) - 0\| < \varepsilon_p = 1/2^p$ . Então  $z_p$  satisfaz a Propriedade (a). Note que com  $z_p$  obtido desta maneira, para cada  $m \in \mathcal{N}_p$ , temos que

$$\|T^{m+R_p}(z_0 + z_1 + \dots + z_p) - x_p\| < \varepsilon_p = \frac{1}{2^p}.$$

De fato, como  $z_p$  sombreia  $\{\gamma_n^p\}$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_p > \|T^{m+R_p}(z_p) - \gamma_{m+R_p}^p\| &= \|T^{m+R_p}(z_p) - x_p + T^{m+R_p}(z_0 + \dots + z_{p-1})\| \\ &= \|T^{m+R_p}(z_0 + \dots + z_p) - x_p\|. \end{aligned}$$

Portanto, a Propriedade (b) é satisfeita. Como  $\gamma_n^p = 0$ , se  $n \notin \{m, m+1, \dots, m+N_p-1 \mid m \in \mathcal{N}_p\}$ , temos a Propriedade (c).

O último passo é mostrar que  $\{\gamma_n^p\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\delta_p$ -pseudo órbita. Primeiro note que das definições de  $\mathcal{N}_p$  e  $\mathcal{N}_q$  e o item (2) do Lema 2.2.1 segue que  $\{k, \dots, k+N_p \mid k \in \mathcal{N}_p\} \cap \{m, \dots, m+N_q \mid m \in \mathcal{N}_q\} = \emptyset$  se  $p \neq q$ . Este fato e a Propriedade (c) implicam que, se  $n \in \{m, \dots, m+N_p-1 \mid m \in \mathcal{N}_p\}$ , então

$$\|T^n(z_0 + z_1 + \dots + z_{p-1})\| = \left\| \sum_{0 \leq q < p} T^n(z_q) \right\| \leq \sum_{0 \leq q < p} \|T^n(z_q)\| \leq \sum_{0 \leq q < p} \frac{1}{2^q} < 2. \quad (2.4)$$

É óbvio que se  $n, n + 1 \in \mathbb{N} \setminus \{m, \dots, m + N_p - 1 \mid m \in \mathcal{N}_p\}$ , então

$$\|T(\gamma_n^p) - \gamma_{n+1}^p\| = 0 < \delta_p.$$

Se  $n$  ou  $n + 1$  pertencem a  $\{m, \dots, m + N_p - 1 \mid m \in \mathcal{N}_p\}$ , temos 5 possibilidades:

*Caso 1:*  $n \in \mathbb{N} \setminus \{m, \dots, m + N_p - 1 \mid m \in \mathcal{N}_p\}$  e  $n + 1 \in \mathcal{N}_p$ .

Neste caso, temos que

$$\gamma_n^p = 0 \text{ e } \gamma_{n+1}^p = x_0^p - \frac{0}{R_p} T^{n+1}(z_0 + \dots + z_{p-1}) = 0.$$

Logo,

$$\|T(\gamma_n^p) - \gamma_{n+1}^p\| = 0 < \delta_p.$$

*Caso 2:*  $n = m + k$  com  $m \in \mathcal{N}_p$  e  $k \in \{0, \dots, R_p - 1\}$ .

Neste caso,

$$\gamma_n^p = x_k^p - \frac{k}{R_p} T^n(z_0 + \dots + z_{p-1}) \text{ e } \gamma_{n+1}^p = x_{k+1}^p - \frac{k+1}{R_p} T^{n+1}(z_0 + \dots + z_{p-1}).$$

Então,

$$\begin{aligned} \|T(\gamma_n^p) - \gamma_{n+1}^p\| &= \left\| T(x_k^p) - \frac{k}{R_p} T(T^n(z_0 + \dots + z_{p-1})) - \right. \\ &\quad \left. - \left( x_{k+1}^p - \frac{k+1}{R_p} T^{n+1}(z_0 + \dots + z_{p-1}) \right) \right\| \\ &\leq \|T(x_k^p) - x_{k+1}^p\| + \frac{1}{R_p} \|T^{n+1}(z_0 + \dots + z_{p-1})\| \\ &< \frac{\delta_p}{2} + \frac{\delta_p}{4} \cdot 2 \\ &< \delta_p. \end{aligned}$$

A segunda desigualdade é assegurada pela Equação (2.4).

*Caso 3:*  $n = m + R_p$  com  $m \in \mathcal{N}_p$ .

Temos,

$$\gamma_n^p = x_{R_p}^p - \frac{R_p}{R_p} T^n(z_0 + \dots + z_{p-1}) = x_p - T^n(z_0 + \dots + z_{p-1}) \text{ e}$$

$$\gamma_{n+1}^p = x_{R_p+1}^p - \frac{N_p - (R_p + 1)}{R_p} T^{n+1}(z_0 + \dots + z_{p-1}).$$

O que garante que,

$$\begin{aligned}
 \|T(\gamma_n^p) - \gamma_{n+1}^p\| &= \left\| T(x_p) - T^{n+1}(z_0 + \dots + z_{p-1}) - x_{R_p+1}^p + \frac{R_p - 1}{R_p} T^{n+1}(z_0 + \dots + z_{p-1}) \right\| \\
 &\leq \|T(x_p) - x_{R_p+1}^p\| + \frac{1}{R_p} \|T^{n+1}(z_0 + \dots + z_{p-1})\| \\
 &< \frac{\delta_p}{2} + \frac{\delta_p}{4} \cdot 2 \quad (\text{pela Eq. (2.4)}) \\
 &= \delta_p.
 \end{aligned}$$

*Caso 4:*  $n = m + k$  com  $m \in \mathcal{N}_p$  e  $k \in \{R_p + 1, R_p + 2, \dots, N_p - 2\}$ . É análogo a caso 2.

*Caso 5:*  $n = m + N_p - 1$  com  $m \in \mathcal{N}_p$ .

Neste caso, obtemos

$$\gamma_n^p = x_{N_p-1}^p - \frac{N_p - (N_p - 1)}{R_p} T^n(z_0 + \dots + z_{p-1}) = 0 - \frac{1}{R_p} T^n(z_0 + \dots + z_{p-1}) \text{ e } \gamma_{n+1}^p = 0.$$

Pela Equação (2.4)

$$\|T(\gamma_n^p) - \gamma_{n+1}^p\| = \frac{1}{R_p} \|T^{n+1}(z_0 + \dots + z_{p-1})\| < \frac{\delta_p}{4} \cdot 2 < \delta_p.$$

Isto conclui que  $\{\gamma_n^p\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\delta_p$ -pseudo órbita. □

**Exemplo 2.2.6.** Para  $1 \leq p < \infty$  e  $\lambda > 1$  o deslocamento ponderado à esquerda  $B_{\underline{w}} : \ell^p(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{Z})$  com  $\underline{w} = \{\lambda\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tem a propriedade de sombreamento positiva. Além disso,

$$\sup_{n \geq 1} \prod_{j=1}^n w_j = \sup_{n \geq 1} \prod_{j=1}^n \lambda = \sup_{n \geq 1} \lambda^n = \infty \text{ e } \inf_{n \geq 0} \prod_{j=0}^n w_{-j} = \inf_{n \geq 0} \prod_{j=0}^n \frac{1}{\lambda} = \inf_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda^n} = 0,$$

então  $B_{\underline{w}}$  é hipercíclico devido a caracterização dos deslocamentos ponderados hipercíclicos de Salas [39]. Como  $B_{\underline{w}}$  tem propriedade de sombreamento positivo e é hipercíclico, então o Teorema 2.2.2, garante que  $B_{\underline{w}}$  é frequentemente hipercíclico.

**Exemplo 2.2.7.** Considere  $T : \ell_p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$  como no Exemplo 2.2.4. Não é difícil ver que  $T$  é transitivo e portanto é transitivo por cadeia quando  $1 \leq p < \infty$ . De fato, sejam  $U$  e  $V$  dois subconjuntos abertos de  $\ell_p(\mathbb{N})$ . Como sequências com uma quantidade finita de elementos não nulos são densas em  $\ell_p(\mathbb{N})$ , podemos considerar  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in U$  e  $y = (y_0, y_1, \dots, y_m, 0, 0, \dots) \in V$ . Tome

$$r = \sum_{i=0}^n x_i 2^i$$

e escolha  $k, l \in \mathbb{N}$  tal que

$$z = \underbrace{\left(x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0, -\frac{r}{2^k}, 0, \dots, 0, \frac{y_0}{2^l}, \frac{y_1}{2^{l+1}}, \dots, \frac{y_m}{2^{l+m}}, 0, 0, \dots\right)}_{l \text{ posições}} \in U.$$

Logo  $T^l(z) = y$  e então  $T^l(U) \cap V \neq \emptyset$ , portanto  $T$  é transitivo. Como  $T$  tem propriedade de sombreamento positiva então o Teorema 2.2.2 nos dá que  $T$  é na verdade topologicamente misturador e frequentemente hipercíclico.

Sabemos que a propriedade de sombreamento positivo e a transitividade por cadeia são preservadas sobre produto cartesiano (ver Proposição 2.1.2 e Proposição 6 de [13]). Usando este fato, o Teorema 2.2.2 tem como corolário o seguinte resultado:

**Corolário 2.2.1.** *Sejam  $T : X \rightarrow X$  e  $S : Y \rightarrow Y$  dois operadores lineares limitados definidos em espaços de Banach separáveis  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Se  $T$  e  $S$  são transitivos por cadeia e possuem a propriedade de sombreamento positivo, então  $T \times S$  é frequentemente hipercíclico. Mais geralmente, o produto finito de operadores satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.2.2 é frequentemente hipercíclico.*

A propriedade de hiperciclicidade frequente está fortemente conectada com teoria da medida. Grivaux e Matheron mostraram em [26] que, todo operador linear  $T : X \rightarrow X$  definido em um espaço Banach separável e reflexivo que é frequentemente hipercíclico admite uma medida de probabilidade invariante de suporte total. Dado um sistema dinâmico topológico  $(X, T)$ . Uma *medida invariante com suporte total* para  $(X, T)$  é uma medida  $\mu$  definida sobre a  $\sigma$ -álgebra Boreliana de  $X$  tal que  $\mu(X) = 1$ ,  $\mu(U) > 0$  para todo aberto  $U \subset X$  e  $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$  para qualquer subconjunto mensurável  $A$ .

**Corolário 2.2.2.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach separável e reflexivo e  $T$  um operador linear sobre  $X$ . Se  $T$  é transitivo por cadeia e tem a propriedade de sombreamento, então existe uma medida invariante com suporte total para  $T$ .*

Existem exemplos de operadores topologicamente misturadores que não são frequentemente hipercíclicos A mistura topológica é uma forma mais forte de transitividade, em particular de transitividade por cadeia.

**Definição 2.2.1.** *Uma aplicação  $T : X \rightarrow X$  definida em um espaço métrico  $X$  é dita topologicamente misturadora se dados dois abertos não vazios  $U, V$  de  $X$  existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tal que*

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \text{para todo } n \geq N.$$

O teorema a seguir diz que transitividade e sombreamento implicam em mistura topológica no caso linear. No caso de dinâmica compacta esta implicação não é verdadeira

em geral. De fato, a aplicação  $f : \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$  que leva  $b$  em  $a$  e  $a$  em  $b$  é transitiva, tem propriedade de sombreamento, mas não é topologicamente misturadora.

**Teorema 2.2.3.** [5] *Seja  $X$  um espaço de Banach, e  $T : X \rightarrow X$  um operador linear transitivo por cadeia com propriedade de sombreamento positiva. Então  $T$  é topologicamente misturador.*

*Demonstração.* Sejam  $U, V$  subconjuntos abertos não vazios de  $X$ . Sejam  $x \in V, y \in U$  e  $\lambda > 0$  tal que  $B(x, \lambda) \subset V$  e  $B(y, \lambda) \subset U$ . Para  $\varepsilon = \lambda/2$  podemos escolher  $\delta > 0$  tal que toda  $\delta$ -pseudo órbita positiva é  $\varepsilon$ -sombreada positivamente por algum ponto de  $X$ . Como  $T$  é transitivo por cadeia, existe uma  $\delta$ -cadeia que vai de  $y$  a  $0, \{y_1, y_2, \dots, y_M\}$ , e uma  $\delta$ -cadeia que vai de  $0$  até  $x, \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ . Então temos que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\{y, y_1, y_2, \dots, y_M, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\text{total de } k \text{ zeros}}, x_1, x_2, \dots, x_N, x, T(x), T^2(x), \dots\}$$

é uma  $\delta$ -pseudo órbita e portanto existe  $z_k \in X$  que a  $\varepsilon$ -sombreia para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Note que  $z_k \in V$  e  $T^{N+M+k}(z_k) \in U$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . O que implica que  $T^{N+M+k}(V) \cap U \neq \emptyset$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Logo,  $T$  é topologicamente misturadora. □

O fato que transitividade por cadeia com propriedade de sombreamento implica transitividade já é conhecido e é válido para sistemas dinâmicos contínuos em geral.

**Corolário 2.2.3.** *Sejam  $T : X \rightarrow X$  e  $S : Y \rightarrow Y$  são dois operadores lineares definidos em espaços vetoriais normados  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Se  $T$  e  $S$  são transitivos por cadeia e possuem a propriedade de sombreamento, então  $T \times S$  é topologicamente misturador.*

### 2.2.1 Recorrência e sombreamento

Na dinâmica compacta o conjunto recorrente por cadeia e o não errante coincidem diante da propriedade de sombreamento (ver Teorema 3.1.2 de [6]). Veremos que no caso da dinâmica linear essa igualdade também é válida.

Dado um sistema dinâmico  $(X, f)$ , um ponto  $x \in X$  é dito *ponto não-errante* se, para todo subconjunto aberto não-vazio  $U$  de  $X$  contendo  $x$ , existe  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . O conjunto dos pontos não-errantes é chamado de *conjunto não-errante* de  $f$  e é denotado por  $\Omega(f)$ . Dizemos que  $f : X \rightarrow X$  é *recorrente* se todos os pontos de  $X$  são não-errantes.

Usando o Teorema 2.1.3 é fácil ver que todo operador linear limitado que é recorrente é também recorrente por cadeia. O exemplo a seguir ilustra que geralmente a recíproca disto não é verdadeira.

**Exemplo 2.2.8.** *Seja  $X = \ell_p(\mathbb{Z})$  para  $1 \leq p < \infty$  e  $T : X \rightarrow X$  o deslocamento bilateral à esquerda  $T(\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) = \{x_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Pela Proposição 2.1.1,  $T$  é transitivo por cadeia, mas não é recorrente, pois para o vetor  $x$  cuja 0-ésima coordenada vale 1 e as demais valem 0 e para qualquer  $n > 0$  temos que*

$$T^n(B(x, 1/2)) \cap B(x, 1/2) = \emptyset.$$

**Teorema 2.2.4.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $T$  um operador linear em  $X$  que tem a propriedade de sombreamento positiva. Então o conjunto não-errante coincide com o conjunto recorrente por cadeia de  $T$ .*

*Demonstração.* É fácil ver que todo ponto não-errante é também recorrente por cadeia, ou seja, vale a inclusão:  $\Omega(T) \subset CR(T)$ . Para a inclusão contrária, considere um ponto recorrente por cadeia  $x$  e um conjunto aberto  $U$  contendo  $x$ . Então, para  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, 2\varepsilon) \subset U$  existe  $0 < \delta < \varepsilon$  da propriedade de sombreamento e existe um pedaço de uma  $\delta$ -pseudo órbita que começa e termina em  $x$ . Pela propriedade de sombreamento positivo, existe uma órbita que  $\varepsilon$ -sombreia esta  $\delta$ -pseudo órbita. Tal órbita que faz a sombra intersecta  $U$  em algum ponto que no futuro volta pra  $U$  novamente. Logo,  $x$  é um ponto não-errante. Isto mostra a igualdade desejada.  $\square$

O resultado seguinte é um corolário imediato do teorema acima e do fato que o conjunto recorrente por cadeia é um subespaço fechado e invariante de  $X$  (ver Teorema 2.1.4).

**Corolário 2.2.4.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $T$  um operador linear em  $X$  que tem a propriedade de sombreamento positiva. Então,  $\Omega(T)$  é um subespaço fechado de  $X$  e  $T$ -invariante.*

O próximo resultado é também um corolário do teorema anterior. Ele diz que  $T$  restrito ao conjunto não-errante é frequentemente hipercíclico se  $T$  tem sombreamento e é auto-adjunto. Para provar isto, usaremos o seguinte resultado sobre propriedade de sombreamento:

**Proposição 2.2.1.** [13, Proposição 6] *Seja  $T$  um operador definido em um espaço de Banach  $X$ . Suponha que  $X = M \oplus N$ , onde  $M$  e  $N$  são dois subespaços fechados e  $T$ -invariantes de  $X$ . Então,  $T$  tem a propriedade de sombreamento positivo se, e somente se,  $T|_M$  e  $T|_N$  tem a propriedade de sombreamento positivo.*

**Corolário 2.2.5.** [5] *Seja  $X$  um espaço de Hilbert separável e  $T$  um operador linear auto-adjunto em  $X$  que tem a propriedade de sombreamento positiva. Então,  $T|_{\Omega(T)} : \Omega(T) \rightarrow \Omega(T)$  é frequentemente hipercíclico. Em particular,  $\Omega(T) = \{0\}$  ou  $\Omega(T)$  tem dimensão infinita.*

*Demonstração.* Pelo corolário anterior, temos que  $\Omega(T) = CR(T)$ . O Corolário 2.1.4 implica que  $\Omega(T)$  é  $T$ -invariante. Isto implica que o conjunto perpendicular ao não-errante,  $\Omega(T)^\perp$ , é  $T^*$ -invariante, conseqüentemente, ele é  $T$ -invariante, pois  $T = T^*$ . Como  $X$  é um espaço de Hilbert e  $\Omega(T)$  é um subespaço fechado de  $X$ , então  $X = \Omega(T) \oplus \Omega(T)^\perp$ . Logo, pela Proposição 2.2.1,  $T|_{\Omega(T)}$  tem propriedade de sombreamento positivo. O Corolário 2.1.7 assegura que  $T|_{\Omega(T)}$  é transitivo por cadeia. Como  $T|_{\Omega(T)} : \Omega(T) \rightarrow \Omega(T)$  tem propriedade de sombreamento positiva e é transitivo por cadeia, o Teorema 2.2.2 nos dá que  $T|_{\Omega(T)}$  é frequentemente hipercíclico.  $\square$

A restrição de um homeomorfismo, definido em um espaço métrico compacto com a propriedade de sombreamento, ao seu conjunto não-errante tem a propriedade de sombreamento e, além disso, a restrição à cada classe recorrente por cadeia é transitivo por cadeia. Não precisamos de hipóteses adicionais no caso da dinâmica compacta para obter a conclusão do corolário anterior. Talvez podemos fornecer uma prova do corolário acima sob suposições mais gerais do que  $X$  sendo Hilbert e  $T$  sendo autoadjunto.

**Pergunta 2.2.1.** *Se  $T : X \rightarrow X$  é um operador linear limitado, definido em um espaço vetorial normado (ou Banach), com propriedade de sombreamento, então  $T|_{\Omega(T)}$  é frequentemente hipercíclico?*



# Referências

- [1] F. Abdenur, C. Bonatti, and L. J. Díaz. Non-wandering sets with non-empty interiors. *Nonlinearity*, 17(1):175, 2003. Citado na página 33.
- [2] F. F. Alves. Aspectos dinâmicos de operadores lineares. 2020. Citado na página 71.
- [3] F. F. Alves, N. C. Bernardes, and A. Messaoudi. Chain recurrence and average shadowing in dynamics. *Monatshefte für Mathematik*, 196(4):665–697, 2021. Citado na página 69.
- [4] M. Antunes, B. Carvalho, and M. Tacuri. Sensitivity, local stable/unstable sets and shadowing. *arXiv preprint arXiv:2012.08894*, 2020. Citado 5 vezes nas páginas 11, 29, 30, 33 e 34.
- [5] M. Antunes, G. E. Mantovani, and R. Varão. Chain recurrence and positive shadowing in linear dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 506(1):125622, 2022. Citado 6 vezes nas páginas 11, 66, 70, 80, 86 e 87.
- [6] N. Aoki and K. Hiraide. *Topological theory of dynamical systems*, volume 52 of *North-Holle Mathematical Library*. North-Holle Publishing Co., Amsterdam, 1994. Recent advances. Citado 8 vezes nas páginas 23, 24, 26, 28, 29, 30, 66 e 86.
- [7] A. Artigue. Dendritations of surfaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 38(8):2860–2912, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 29.
- [8] A. Artigue, B. Carvalho, W. Cordeiro, and J. Vieitez. Beyond topological hyperbolicity: the l-shadowing property. *Journal of Differential Equations*, 268(6):3057–3080, 2020. Citado 7 vezes nas páginas 8, 9, 12, 24, 26, 32 e 35.
- [9] A. Artigue, B. Carvalho, W. Cordeiro, and J. Vieitez. Continuum-wise hyperbolicity. *arXiv preprint arXiv:2011.08147*, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 59.
- [10] J. M. Ash. The limit comparison test needs positivity. *Mathematics Magazine*, 85(5):374–375, 2012. Citado na página 79.
- [11] F. Bayart and S. Grivaux. Frequently hypercyclic operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(11):5083–5117, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 76.
- [12] F. Bayart and É. Matheron. *Dynamics of linear operators*. Number 179. Cambridge university press, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 16, 76, 77 e 80.

- 
- [13] N. C. Bernardes Jr, P. R. Cirilo, U. B. Darji, A. Messaoudi, and E. R. Pujals. Expansivity and shadowing in linear dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 461(1):796–816, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 16, 78, 85 e 87.
- [14] N. C. Bernardes Jr and A. Messaoudi. Shadowing and structural stability for operators. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, pages 1–20, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 78.
- [15] G. D. Birkhoff. Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Mathematica*, 43(1):1–119, 1922. Citado na página 76.
- [16] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, revised edition, 2008. With a preface by David Ruelle, Edited by Jean-René Chazottes. Citado na página 23.
- [17] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011. Citado na página 74.
- [18] W. Brian and J. P. Kelly. Linear operators with infinite entropy. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 487(2):123981, 2020. Citado na página 16.
- [19] B. Carvalho and W. Cordeiro. N-expansive homeomorphisms with the shadowing property. *Journal of Differential Equations*, 261(6):3734–3755, 2016. Citado na página 66.
- [20] B. Carvalho and W. Cordeiro. Positively n-expansive homeomorphisms and the l-shadowing property. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 31(2):1005–1016, 2019. Citado 6 vezes nas páginas 8, 9, 12, 28, 32 e 35.
- [21] R. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. CRC Press, 2018. Citado na página 12.
- [22] M. Eisenberg and J. Hedlund. Expansive automorphisms of banach spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 34(3):647–656, 1970. Citado na página 70.
- [23] A. Fathi. Expansiveness, hyperbolicity and hausdorff dimension. *Communications in mathematical physics*, 126(2):249–262, 1989. Citado na página 15.
- [24] B. R. Fayad. Topologically mixing and minimal but not ergodic, analytic transformation on  $t^5$ . *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 31(3):277–285, 2000. Citado na página 15.
- [25] N. S. Feldman. Linear chaos. *preprint*, 2001. Citado na página 16.

- [26] S. Grivaux and É. Matheron. Invariant measures for frequently hypercyclic operators. *Advances in Mathematics*, 265:371–427, 2014. Citado na página 85.
- [27] J. Guckenheimer. Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps. *Communications in Mathematical Physics*, 70(2):133–160, 1979. Citado na página 12.
- [28] J. R. Hertz. There are no stable points for continuum-wise expansive homeomorphisms. *arXiv preprint math/0208102*, 2002. Citado na página 41.
- [29] A. Illanes and S. Nadler. *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*, volume 216. CRC Press, 1999. Citado na página 36.
- [30] H. Kato. Concerning continuum-wise fully expansive homeomorphisms of continua. *Topology Appl.*, 53(3):239–258, 1993. Citado 5 vezes nas páginas 20, 32, 33, 48 e 55.
- [31] H. Kato. Continuum-wise expansive homeomorphisms. *Canadian Journal of Mathematics*, 45(3):576–598, 1993. Citado 9 vezes nas páginas 8, 9, 13, 14, 15, 28, 32, 43 e 55.
- [32] P. Leonetti and S. Tringali. On the notions of upper and lower density. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 63(1):139–167, 2020. Citado na página 81.
- [33] E. N. Lorenz. Three approaches to atmospheric predictability. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 50(3454):349, 1969. Citado na página 12.
- [34] T. S. Moothathu. Implications of pseudo-orbit tracing property for continuous maps on compacta. *Topology and its Applications*, 158(16):2232–2239, 2011. Citado na página 34.
- [35] S. B. Nadler. A characterization of locally connected continua by hyperspace retractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 67(1):167–176, 1977. Citado na página 36.
- [36] C. Robinson. Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages 425–437, 1977. Citado na página 75.
- [37] C. Robinson. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC press, 1998. Citado na página 33.
- [38] S. Rolewicz. On orbits of elements. *Studia Mathematica*, 32(1):17–22, 1969. Citado na página 76.
- [39] H. N. Salas. Hypercyclic weighted shifts. *Transactions of the American Mathematical Society*, 347(3):993–1004, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 84.
- [40] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 66.