UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

ALEXANDRE REGGIOLLI TEIXEIRA

Uma Comparação das Teorias Abstrata e Topológica para Medidas Aleatórias e Processos Pontuais

Campinas

2022

Alexandre Reggiolli Teixeira

Uma Comparação das Teorias Abstrata e Topológica para Medidas Aleatórias e Processos Pontuais

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Guilherme Vieira Nunes Ludwig

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Alexandre Reggiolli Teixeira e orientada pelo Prof. Dr. Guilherme Vieira Nunes Ludwig.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

T235c Teixeira, Alexandre Reggiolli, 1997-
Uma comparação das teorias abstrata e topológica para medidas aleatórias e processos pontuais / Alexandre Reggiolli Teixeira. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Guilherme Vieira Nunes Ludwig.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Medidas aletórias. 2. Processos pontuais. 3. Teoria das medidas. 4. Teoria da medida topológica. 5. Estatística matemática. I. Ludwig, Guilherme Vieira Nunes, 1985-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A comparison of abstract and topological theories for random measures and point processes
Palavras-chave em inglês:
Random measures
Point processes
Measure theory
Topological measure theory
Mathematical statistics
Área de concentração: Estatística
Titulação: Mestre em Estatística
Banca examinadora:
Guilherme Vieira Nunes Ludwig [Orientador]
Christophe Frédéric Gallesco
Pablo Augusto Ferrari
Data de defesa: 08-03-2022
Programa de Pós-Graduação: Estatística

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-5598-4372
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/3692146388649298

Dissertação de Mestrado defendida em 08 de março de 2022 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). GUILHERME VIEIRA NUNES LUDWIG

Prof(a). Dr(a). PABLO AUGUSTO FERRARI

Prof(a). Dr(a). CHRISTOPHE FRÉDÉRIC GALLESCO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico este trabalho à minha mãe, Marcia, por tudo (e mais um pouco!).

Agradecimentos

Como não poderia ser diferente, meu primeiro e maior agradecimento vai à minha mãe, Marcia. Sem o seu amor, inspiração, ajudas, conselhos, mas também conflitos e discussões, nada disso seria possível. Por isso te agradeço por tudo, e por muito mais, mãe. Espero que este trabalho espelhe um pouco da minha admiração e amor por você.

Agradeço também à minha falecida avó, Amélia, por ter cuidado de mim por todos estes anos. É uma pena que a vida, as vezes cruelmente, possa interromper uma existência dessa maneira, e causar tanto sofrimento. Mas, no fim, apenas as boas experiências, e memórias, ficam. Muito obrigado, vó!

Agradeço imensamente ao meu orientador, Guilherme. Seja por discussões sobre estatística, a necessidade ou não de generalizações abstratas de teoremas, a necessidade do rigor, ou mesmo pelas conversas cotidianas, agradeço a você por tudo, Guilherme. Em particular, espero não ter te dado tanto trabalho assim, e desejo que continuemos a trabalhar juntos (e a jogar conversa fora!).

Sem as conversas com diversos amigos, dentre eles Augusto, Lucas (Hamada), Daniel, Vitor, Artur, Fabiano, Henrique, Felipe, Anderson, Rafael, Pedro, Marília, Adenilson, Oscar, Lucas (Souza), Caio, Tales, dentre vários outros que, me desculpem, não consigo citar no momento, este período de mestrado, e de pandemia, seria bem mais conturbado do que foi. Agradeço a vocês pela companhia e pelo apoio.

Às professoras Nancy e Hildete, e aos professores Christophe e Diego, meu muito obrigado. A presença de vocês no departamento de estatística do IMECC, e as disciplinas que vocês ministraram, me ajudaram imensamente durante o mestrado. Aos professores Christophe e Pablo pela participação em minha banca de mestrado: os comentários, elogios e correções de vocês tornaram todo este processo mais do que recompensador, muito obrigado !

Neste período de 2 anos, me correspondi com alguns acadêmicos que foram essenciais para este trabalho. Em particular, agradeço imensamente aos professores Jan Pachl, Alexander Kharazishvili, Fidel José Fernández, Hans Zessin, Erhard Glötzl, Yuri Kutoyants, Yuri Kabanov, Gulnara Mauleshova, Olav Kallenberg, Goran Peskir, Iwo Labuda, Lech Drewnowski, Lino Sant dentre outros, pelas dicas, por enviarem referências de difícil acesso, e pelos desejos acadêmicos em comum. Agradeço especialmente ao professor Pachl por enviar a referência (RAMACHANDRAN, 1979), e por sua imensa gentileza. Ao professor Zessin, meu agradecimento mais do que especial por ouvir sobre minha pesquisa, e por me enviar o livro (KRICKEBERG, 2014). Sem a inspiração do professor Peskir, e a ajuda do professor Kallenberg com o teorema de Harris, esta dissertação não teria sido concluída.

Um agradecimento especial vai para Gabriela Panu e Emilia Vodea pela ajuda em referências de livros e artigos romenos. Na conexão dinamarquesa, agradeço imensamente à Randi Mosegaard, secretária trilíngue do departamento de matemática da Universidade de Aarhus, por enviar alguns trabalhos de difícil acesso do professor J. Hoffmann-Jørgensen [1] - tak for alt, hvad du har gjort, Randi!.

Agradeço a todos os trabalhadores e trabalhadoras do IMECC e da Unicamp por possibilitarem meus estudos nestes últimos anos. Um agradecimento especial à Marcia e Silvania, da biblioteca do IMECC, pelo auxilio nestes anos de mestrado, e de Unicamp. Também, um agradecimento especial à Luciana da secretaria da pós do IMECC.

Por fim, agradeço a todos os autores que já utilizei do trabalho, que li ou que ponderei sobre. Espero que esta dissertação seja uma homenagem à presença de cooperação, e à memória daqueles que já se foram, na matemática.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

[1] Infelizmente, o professor Hoffmann-Jørgensen faleceu em 2017. Uma das minhas maiores inspirações na matemática - é uma pena não tê-lo conhecido.

“ We must change the system. Wealth is influence and power; the only way to avoid rule by the wealthy class is to not have a wealthy class. This revolution will be focused on spreading unfamiliar ideas, turning people to a very different way of life. Tell everyone."

(Eric Schechter - A Revolution Too Small)

Resumo

Neste trabalho, temos como objetivo estudar a interação entre hipóteses topológicas e hipóteses abstratas, puramente mensuráveis, na construção da teoria de medidas aleatórias e processos pontuais. Vistos enquanto mapas no espaço de todas as medidas em um espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$, equipado ou não com uma topologia, veremos que a estrutura distribucional, completa ou de dimensão finita, destes elementos aleatórios pode ser caracterizada completamente. Utilizando Funcionais de Laplace, faremos uma construção geral do processo de Poisson utilizando a abordagem de medidas s-finitas de (LAST; PENROSE, 2018). Pelo formalismo de δ-anéis e medidas localmente finitas de (KALLENBERG, 2017), unificamos, sob uma mesma notação, os resultados não-topológicos de (MECKE, 1979) e (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996), demonstrando a ampla aplicabilidade da hipótese de finitude local na teoria das medidas aleatórias. Da mesma utilização deste formalismo, exibiremos resultados gerais de existência de medidas aleatórias, e processos pontuais, no caso (pseudo-)topológico dos espaços standard Borel que cobrem, dentre outras, as hipóteses de compacidade local comumente utilizadas na literatura de processos pontuais (BRÉMAUD, 2020). Teoremas de regularidade de medidas aleatórias no caso (pseudo-)topológico serão demonstrados e comparados com certos fenômenos patológicos de ausência de decomposições atômicas no caso puramente abstrato, e veremos como estes fenômenos estão relacionados com certas construções na teoria da medida topológica (BOGACHEV, 2007). Comparando os formalismos de (LAST; PENROSE, 2018) e (KALLENBERG, 2017), veremos como o impacto de hipóteses diferentes sob o espaço de medidas em $(X, \mathcal{X})$ pode alterar, dentre outras coisas, a mensurabilidade de diferentes subespaços destes espaços de medidas, gerando a necessidade de técnicas de regularização presentes na teoria canônica dos processos estocásticos (SION, 1986). Por fim, utilizaremos a teoria abstrata para desenvolver resultados de continuidade absoluta de distribuições de processos de Poisson, permitindo uma teoria de inferência de máxima verossimilhança com resultados de convergência de estimadores e normalidade local assintótica destes.

Palavras-chave: Medidas Aleatórias. Processos Pontuais. Teoria da Medida. Processos de Poisson. Teoria da Medida Topológica. Medidas s-finitas. Medidas Localmente Finitas. Inferência para Processos Pontuais.

Abstract

In this work, our goal is to study the interaction between topological and abstract hypotheses, the latter purely measurable, in the construction of the theory of random measures and point processes. Viewed as maps in the space of all measures in a measurable space $(X, \mathcal{X})$, with or without a topology, the distributional structure, full or finite-dimensional, of random elements may be completely specified. Laplace Functionals will be used as a tool for a general construction of the Poisson process using the s-finite measures approach of (LAST; PENROSE, 2018). We unify, by the δ-ring and locally finite measures formalism of (KALLENBERG, 2017), the non-topological results of (MECKE, 1979) and (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996), demonstrating the wide applicability of the hypothesis of local finitude in the theory of random measures. From the same use of this formalism, we show general results of existence for random measures, and point processes, in the (pseudo-)topological case of standard Borel spaces that cover, among others, the hypotheses of local compactness commonly used in the literature of point processes (BRÉMAUD, 2020). Theorems of regularity of random measures in the (pseudo-)topological case will be demonstrated and compared with certain pathological phenomena, due to the lack of atomic decompositions in the abstract case, and how these phenomena are related to certain constructions in topological measure theory. Comparing the formalisms of (LAST; PENROSE, 2018) and (KALLENBERG, 2017), we will see how the impact of different hypotheses under the measure space $(X, \mathcal{X})$ can change, among other things, the measurability of different subspaces of these spaces of measures, generating a need for regularization techniques presented in the canonical theory of stochastic processes (SION, 1986). Finally, we will use the abstract theory to develop results of absolute continuity for distributions of Poisson processes, allowing a maximum likelihood inference theory with convergence results for estimators, and their local asymptotic normality.

Keywords: Random Measures. Point Processes. Measure Theory. Poisson Processes. Topological Measure Theory. S-finite Measures. Locally Finite Measures. Mathematical Statistics for Point Processes.

Sumário

Introdução

Desde a criação do tipo mais simples de medida aleatória discreta, uma variável aleatória com distribuição de Poisson, a teoria dos elementos aleatórios com valores em espaços de medidas tem sido desenvolvida numa ampla gama de formatos, sob diferentes hipóteses, e com diferentes objetivos (KALLENBERG, 2017). Parte dessa diversidade da teoria das medidas aleatórias e processos pontuais pode ser vista pela estrutura principal desta: fixando um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e um espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$, seja $\mathcal{M}_X$ o espaço de todas as medidas em $(X, \mathcal{X})$, e considere um mapa dado por:

$$(\omega, A) \in \Omega \times X \mapsto \xi(\omega, A) \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

de modo que ξ seja um núcleo mensurável (LAST; PENROSE, 2018)[2]. Nesta construção, condições de mensurabilidade deste mapa, assim como estruturas topológicas e mensuráveis em $(X, \mathcal{X})$ e $\mathcal{M}_X$, podem ser modificadas abundantemente sem modificar a condição de núcleo de ξ - dai a multiplicidade de abordagens possíveis. Apesar disso, tais escolhas determinam, largamente, o tipo de resultado, especialmente de existência, que podemos obter no estudo de núcleos mensuráveis deste tipo, vide o trabalho pioneiro de Moyal (1962).

Num primeiro aspecto, entre o desenvolvimento topológico ou abstrato da teoria, o primeiro possui maior gama de resultados de existência e regularidade, como pode ser visto pela abordagem em espaços (standard) Borel de Kallenberg (2017) ou Daley e Vere-Jones (2008). Em contraste, os métodos abstratos, como os de Mecke (1979) ou Last e Penrose (2018), mesmo com menos resultados estruturais, exibem teoremas gerais que podem ser utilizados em construções com menos hipóteses adjacentes. Além disso, hipóteses abstratas exibem métodos gerais de construções intrínsecas de processos pontuais, algo que segue a tendência moderna em teoria dos processos estocásticos (STROOCK, 2010). Por fim, é possível construir uma σ-álgebra em um conjunto X que não gerada por uma topologia (SCHILLING; KÜHN, 2021). Assim, os métodos abstratos podem se mostrar de grande valia em algumas situações.

Além da escolha de um desenvolvimento topológico ou abstrato, condições no espaço $\mathcal{M}_X$ são abundantes na literatura - o livro de Brémaud (2020) exibe, no mínimo, três diferentes hipóteses neste espaço. A escolha de σ-álgebras neste caso também exibe variações gerais, vide o primeiro capítulo de Daley e Vere-Jones (2008). Apesar disso, se considerarmos a escolha de uma σ-álgebra gerada pelos mapas projeção do tipo $\pi_\mu : \mu \mapsto \mu(B)$, com $\mu \in \mathcal{M}_X$ e $B \in \mathcal{X}$, tanto no caso abstrato quando topológico, obtemos

[2] Seremos vagos sobre os aspectos técnicos de teoria da medida neste ponto.

resultados distribucionais bastante gerais, como caracterizações cilíndricas de distribuições de medidas aleatórias, vide Last e Penrose (2018). Em particular, nesta estrutura, o uso dos funcionais de Laplace (vide o capítulo 2 de Kallenberg (2017)) podem exibir grande utilidade no cálculo distribucional destes processos.

As relações destas abordagens, especialmente na dicotomia mensurável vs. topológico, são bastante importantes, e emergem da relação entre teoria da medida clássica e topológica (BOGACHEV, 2007). De fato, a abordagem de espaços localizados por δ-anéis, exibida por Kallenberg (2017), pode ser utilizada mesmo no caso abstrato, vide a estruturação do artigo clássico de Mecke (1979). Similarmente, a abordagem localmente compacta de Brémaud (2020) pode ser abstraída com hipóteses fracas nas esperanças dos processos pontuais sob consideração, vide Finkelstein, Tucker e Veeh (1996).

É nessa interface das diferentes condições nos espaços mensuráveis e de medidas que esta dissertação se insere. Nosso objetivo é exibir elementos distribucionais, de teoria da integração, de topologia e de teoria da medida no contexto de elementos aleatórios com valores em espaços de medidas, especialmente processos pontuais, que possibilitem um estudo das condições sob as quais cada resultado, abstrato ou topológico, é válido.

No Capítulo 1, começamos exibindo o formalismo de medidas s-finitas de Last e Penrose (2018) para processos pontuais, uma encarnação moderna, como indicam os autores, das ideias de Moyal (1962). Neste contexto, veremos como os resultados destes autores permitem uma construção rigorosa da noção de processo pontual enquanto uma medida aleatória discreta, um núcleo mensurável discreto, associado à uma teoria distribucional análoga à da teoria de processos estocásticos (ROGERS; WILLIAMS, 1994). Em particular, utilizando um tipo específico de funcional, o funcional de Laplace de um processo pontual, o análogo da transformada de Laplace de variáveis aleatórias, veremos como é possível ligar analiticamente diferentes conceitos de distribuições de processos, unificando a apresentação destas. Com o uso de teoremas clássicos de limites projetivos de medidas de probabilidade, vide Kallenberg (2021), demonstraremos que a construção intrínseca do processo de Poisson em espaços abstratos dada pelos autores Last e Penrose (2018) é consistente com critérios de rigor da teoria da medida. Neste ponto, faremos uma analise cuidadosa de certas patologias, no sentido formal, que podem ocorrer em decomposições atômicas e representações de processos pontuais no caso abstrato. Por fim, uma teoria de transformações de processos pontuais será exibida, no caso abstrato, demonstrando a possibilidade de uma teoria geral de processos pontuais em espaços abstratos.

No Capítulo 2, utilizaremos as técnicas de Kallenberg (2017), consistindo nos espaços mensuráveis localizados, onde uma noção de limitação é possível sem topologia, para desenvolver a teoria de medidas aleatórias e processos pontuais. Resultados distribucionais análogos ao caso abstrato serão demonstrados. Através de um uso topológico da teoria, mostraremos que as patologias citadas no Capítulo 1 poderão ser resolvidas com o uso de certas técnicas de medidas de Stieltjes na reta (KALLENBERG, 2021). Faremos uma breve comparação entre Kallenberg (2017) e Last e Penrose (2018), priorizando questões de mensurabilidade que costumam ser apenas citadas nestas referências, mas que são importantes na construção rigorosa da teoria medidas aleatórias e processos pontuais. Neste ponto, começaremos um estudo de existência de medidas aleatórias sob hipóteses (pseudo-)topológicas, exibindo resultados de Harris (1968) na linguagem de Kallenberg (2017) e que permitem, com o uso de técnicas de limites projetivos de medidas de probabilidade e processos estocásticos, demonstrar a existência geral de medidas aleatórias em espaços standard Borel - faremos isto com base no Capítulo 2 de Kallenberg (2017). Por fim, exibiremos dois outros formalismos abstratos: o de Finkelstein, Tucker e Veeh (1996), com a abstração de processos pontuais enquanto configurações aleatórias de Brémaud (2020), e o de Mecke (1979) através da teoria da integração de bi-medidas, que permite teoremas de existência abstratos. Estes dois últimos tópicos serão unificados sob a alcunha da teoria de Kallenberg (2017).

Por fim, no Capítulo 3, utilizaremos as teorias abstrata e topológica desenvolvidas nos capítulos anteriores, em conjunto com Liese e Lorz (1999), para provar resultados de continuidade absoluta de distribuições de processos de Poisson em espaços abstratos, mas localizados no sentido de Kallenberg (2017). Em particular, veremos como o uso unificado destas técnicas pode ser utilizado para construir rudimentos de uma teoria de inferência, por máxima verossimilhança, de intensidades de processos de Poisson no caso topológico, o que permite a demonstração de critérios assintóticos de convergência e de eficiência para estimadores. Terminamos com breves comentários sobre a teoria abstrata neste contexto e sobre a teoria não-paramétrica de intensidades de processos de Poisson.

Muitos dos resultados desenvolvidos nesta dissertação foram originalmente enunciados pelos matemáticos e estatísticos citados. Apesar disso, como indicado em trechos específicos, as demonstrações destes resultados foram expandidas, modificadas e especializadas para este texto. São especialmente novos o uso do Teorema de Lominicki-Ulam na construção do processo de Poisson e os exemplos de processos pontuais impróprios no Capítulo 1; a unificação dos resultados de Mecke (1979) e Finkelstein, Tucker e Veeh (1996) através da linguagem de espaços localizado, e a comparação dos formalismos abstrato e topológico, ambos no Capítulo 2.

É de desejo do autor que os resultados angariados nesta dissertação, vistos enquanto unidade, possam servir para determinar as limitações, limites e diversidade da teoria de medidas aleatórias e processos pontuais. A unificação destes resultados sob uma, ou poucas, linguagens formais é um começo da realização deste desejo.

1 Teoria Geral

1.1 Noções Básicas

Como dito na introdução, há duas abordagens possíveis numa construção rigorosa e geral da teoria dos processos pontuais:

- A teoria dos espaços mensuráveis topológicos ou pseudo-topológicas, onde utilizamos uma estrutura topológica em conjunto com uma sigma-álgebra apropriada.
- A teoria abstrata, onde procuramos utilizar hipóteses puramente mensuráveis num espaço fixo, sem assumir uma estrutura topológica em conjunto com condições de mensurabilidade.

Em ambos os casos, precisamos garantir uma quantidade suficiente de teoremas de existência, para diferentes classes de processos, assim como teoremas de transformação (entre espaços) destes. Por outro lado, gostaríamos, similarmente, de ferramentas suficientemente poderosas para garantir que conheçamos propriedades estruturais importantes dos processos, como a presença de átomos, limites assintóticos de leis (distribuições), desintegrações, etc.

Neste sentido, nosso objetivo é fazer um breve resumo para o desenvolvimento de uma análise que possa identificar a suficiência, e talvez necessidade, de certas hipóteses. Neste primeiro capítulo, grande parte dos resultados terão como foco o processo de Poisson.

1.2 Processos Pontuais: Definição e Propriedades

De início, gostaríamos de uma definição geral (i.e, em espaços abstratos) de um processo pontual. Neste caso, utilizaremos algumas ferramentas da teoria de núcleos mensuráveis e da teoria dos espaços de medidas com a topologia das projeções (fraca). Neste tipo de contexto, podemos enunciar uma definição bastante geral dos processos de interesse, e sem introduzir conceitos topológicos. Seguindo o capítulo 1 de (LAST; PENROSE, 2018), considere $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável qualquer, e defina o espaço das medidas finitas com base em X como sendo:

$$N_{<\infty} = \{\mu : \mathcal{X} \to [0, \infty] : \mu \text{ medida em } (X, \mathcal{X}) \text{ e } \mu(B) \in \mathbb{N}\ \forall B \in \mathcal{X}\}.$$

Similarmente, defina $N(X)$ como a classe de medidas dada por:

$$\left\{\mu : \mathcal{X} \to [0, \infty] : \mu \text{ medida em } (X, \mathcal{X}) \text{ e } \mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(B),\ \ \mu_n \in N_{<\infty}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall B \in \mathcal{X}\right\}$$

O segundo espaço consiste numa subclasse estrita do espaço de todas as medidas s-finitas, isto é, que podem ser escritas como soma, no máximo contável, de medidas finitas, com valores no espaço dos inteiros positivos.

Um ponto importante da propriedade de s-finitude, que deve ser citado, é que podemos utilizá-la para reduzir problemas que envolvem conjuntos de medida infinita numa construção com base em somas de medidas finitas. Exemplos deste último fato são realmente abundantes (VÁKÁR; ONG, 2018), e aparecerão, nesta dissertação, especialmente em nossa discussão sobre o processo de Poisson. Por outro lado, precisamos introduzir uma estrutura de espaço mensurável nos espaços de medidas acima para realizarmos algumas operações importantes, como calcular a distribuição de elementos aleatórios com valores nestes espaços. Para isso, adotaremos uma construção similar àquela da σ-álgebra cilíndrica em espaços produto (FREMLIN, 2003, p. 48). Neste caso, considere a coleção de todos os subconjuntos de $N(X)$ da forma:

$$\mathcal{A}_{B,k} = \{\mu \in N(X) : \mu(B) = k\}, \text{ com } B \in \mathcal{X},\ k \in \mathbb{N}.$$

Definimos a sigma-álgebra canônica em $\mathbf{N}(\mathrm{X})$, $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}$, como sendo a sigma-álgebra gerada pela classe dos conjuntos $\mathcal{A}_{B,k}$, isto é:

$$\mathcal{N}(X) = \sigma(\{\mathcal{A}_{B,k} = \{\mu \in N(X) : \mu(B) = k\}, \text{ com } B \in \mathcal{X},\ k \in \mathbb{N}\}) = \sigma\left(\bigcup_{B \in \mathcal{X}} \tau_B^{-1}(2^{\mathbb{N}_0})\right),$$

com os mapas $\tau_B : N(X) \to \mathbb{N}_0$ que associam a cada medida $\mu \in N(X)$, e a cada conjunto $B \in \mathcal{X}$, seu valor (natural) neste último, isto é $\tau_B(\mu) = k$, com $k = \mu(B)$.

Para alguns resultados posteriores, precisaremos de outras representações desta σ-álgebra. Neste caso, temos que:

Lema 1 (Representação Cilíndrica de $\mathcal{N}(X)$)**.** *Considere $\mathcal{N}(X)$ a, σ-álgebra no espaço $N(X)$, e as classes de conjuntos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ em $N(X)$, respectivamente,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(X) = \sigma(\mathcal{A}_{B,k}) &= \sigma(\{\mathcal{A}_{B,k} = \{\mu \in N(X) : \mu(B) = k\},\ \textit{com } B \in \mathcal{X},\ k \in \mathbb{N}\}),\\
\mathcal{C} &= \{\{\mu \in N(X) : \mu(B_1) \in D_1, \ldots, \mu(B_n) \in D_n\},\\
&\qquad \textit{com } B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{X} \textit{ e } D_1, \ldots, D_n \subseteq \mathbb{N}_0\},\\
\mathcal{D} &= \{\mathcal{A}_{B,D} = \{\mu \in N(X) : \mu(B) \in D\},\ \textit{com } B \in \mathcal{X},\ D \subseteq \mathbb{N}_0\},
\end{aligned}$$

então

(i) $\mathcal{N}(X) = \sigma(\mathcal{D})$,

(ii) $\mathcal{N}(X) = \sigma(\mathcal{C})$.

Demonstração. (i) Seja $\mathcal{A}_{B,D}$ como no enunciado do teorema para $B \in \mathcal{X}$ e $D \subseteq \mathbb{N}_0$ arbitrários. Assim, por definição:

$$\mathcal{A}_{B,D} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0 \cap D} \{\mu \in N(X) : \mu(B) = k\},$$

onde a união é no máximo contável. Assim, temos que $\mathcal{A}_{B,D} \in \mathcal{N}(X)$ e, portanto, $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{N}(X)$.

Por outro lado, tomando $B \in \mathcal{X}$ e $D = \{k\}$, com $k \in \mathbb{N}_0$, na definição de $\mathcal{A}_{B,D}$, vemos que $\mathcal{A}_{B,k} \in \sigma(\mathcal{D})$ para $B \in \mathcal{X}$ arbitrário e $k \in \mathbb{N}_0$ qualquer. O que prova o primeiro item.

(ii) Similarmente, considere um elemento de $\mathcal{C}$ dado por:

$$\{\mu \in N(X) : \mu(B_1) \in D_1, \ldots, \mu(B_n) \in D_n\}, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{X} \text{ e } D_1, \ldots, D_n \subseteq \mathbb{N}_0.$$

Mas,

$$\mathcal{A}_{B,D} = \{\mu \in N(X) : \mu(B) \in D, \ldots, \mu(B) \in D\} = \{\mu \in N(X) : \mu(B) \in D\}.$$

Assim, para B, D análogos aos acima e arbitrários, a coleção de todos os subconjuntos de $N(X)$ da forma $\mathcal{A}_{B,D}$ é uma subclasse de $\mathcal{C}$. Desse modo, $\mathcal{N}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Por outro lado,

$$\{\mu \in N(X) : \mu(B_1) \in D_1, \ldots, \mu(B_n) \in D_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\mu \in N(X) : \mu(B_i) \in D_i\} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{B_i,D_i}.$$

Ou seja, para $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{X}$ e $D_1, \ldots, D_n \subseteq \mathbb{N}_0$ quaisquer, um elemento da classe $\mathcal{C}$ pode ser escrito como intersecção de elementos da classe todos os subconjuntos de $N(X)$ da forma $\mathcal{A}_{B,D}$. Assim, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}(X) \implies \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{N}(X)$. Ou seja, provamos que:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{N}(X).$$

O que prova nossa afirmação. □

Por fim, vale notar que as mesmas afirmações são válidas para o caso de $\overline{\mathbb{N}}_0$, isto é, para os conjuntos em $\mathcal{X}$ para os quais a medida $\mu \in N(X)$ é infinita. De fato, note que, para $B \in \mathcal{X}$ qualquer:

$$\{\mu \in N(X) : \mu(B) = \infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \{\mu \in N(X) : \mu \in D_k\}, \text{ onde } D_k = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant k\} \subseteq \mathbb{N}_0.$$

Sendo que esta última intersecção é um elemento de $\mathcal{N}(X)$ pelo Lema 1 (i). Desse modo, podemos lidar mensuravelmente, utilizando a σ-álgebra $\mathcal{N}(X)$, com eventos em $N(X)$ que envolvem o ponto de acumulação $\{\infty\}$ de $\overline{\mathbb{N}}_0$.

Numa analogia com o caso de σ-álgebras geradas por funções reais (FREMLIN, 2003), podemos interpretar $\mathcal{N}(X)$ como sendo a menor sigma-álgebra em $N(X)$ tal que o mapa definido por $\mu \mapsto \mu(B)$ é mensurável $\forall B \in \mathcal{X}$ e μ é uma medida em $(X, \mathcal{X})$. Essa formulação de $(N(X), \mathcal{N}(X))$ garante que as operações comumente realizadas em funções mensuráveis, como somas, limites e produtos, possam ser realizadas, de forma mensurável, com medidas vistas como mapas aleatórios. Em outras palavras, trocamos variáveis aleatórias com valores reais por variáveis aleatórias com valores em medida. Isso acaba por inspirar uma outra caracterização da σ-álgebra $\mathcal{N}(X)$ para o caso em que $\mathcal{X}$ é contavelmente gerada (veja a definição a seguir):

Definição 1 (σ-álgebra Contavelmente Gerada)**.** *Dizemos que uma σ-álgebra, $\mathcal{X}$, de um conjunto (fixo) X é contavelmente gerada se existe uma classe, de cardinalidade contável, de subconjuntos de X, $\mathcal{I}$, tal que $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{X}$.*

Assim, obtemos a caracterização citada (BACCELLI; BŁASZCZYSZYN; KARRAY, 2020, p. 9)

Teorema 1 ($\mathcal{N}(\mathcal{X})$ em $\mathcal{X}$ Contavelmente Gerada)**.** *Seja $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável tal que $\mathcal{X}$ é contavelmente gerada por uma classe $\mathcal{I}$. Suponha que $\mathcal{I}$ é fechada sob intersecções finitas. Então, $\mathcal{N}(X)$ é gerada pela classe de todos os conjuntos $\mathcal{A}^*_{B,k}$ da forma:*

$$\mathcal{A}^*_{B,k} = \{\mu \in N(X) : \mu(B) = k\}, \ \textit{com } B \in \mathcal{I}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Equipado o espaço de medidas $N(X)$ com uma estrutura mensurável, podemos enunciar formalmente a definição que utilizaremos de um processo pontual:

Definição 2 (Processo Pontual)**.** *Um processo pontual em um espaço X é um elemento aleatório η de um espaço de probabilidade fixo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ em $(N(X), \mathcal{N}(X))$. Ou seja, um mapa $\eta : \Omega \to N(X)$ tal que:*

$$\eta^{-1}(B) \in \mathcal{F} \ , \forall B \in \mathcal{N}(X).$$

Isto é, um processo pontual é uma medida aleatória com valores em $\overline{\mathbb{N}}_0$. Por construção, para cada $\omega \in \Omega$ fixo, temos:

$$\eta(\omega) \in N(X).$$

Isto é, o mapa $B \mapsto \eta(\omega, B)$ é uma medida em $N(X)$ para $B \in \mathcal{X}$. No contexto do Lema 1, fixada uma medida na imagem, o mapa $\omega \to \eta(\omega, B)$ é uma função mensurável (variável aleatória) para um $B \in \mathcal{X}$ fixo qualquer, visto que, para um A da forma $\mathcal{A}_{B,k}$ no lema citado, vale que

$$\eta^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : \eta(\omega, C) = k\} \in \mathcal{F}, \ \text{com } C \in \Sigma, \ k \in \overline{\mathbb{N}}_0.$$

Como a classe de todos os conjuntos da forma $\mathcal{A}_{B,k}$ é uma classe geradora da σ-álgebra $\mathcal{N}(X)$, a mensurabilidade do mapa $\omega \to \eta(\omega, B)$ segue do Teorema 136G de (FREMLIN, 2000, p. 92).

Pelas propriedades dos elementos aleatórios com valores no espaço $(N, \mathcal{N})$, temos uma outra caracterização útil de processos pontuais, e que aproxima o conceito deste à análise matemática. Neste caso, temos (DELLACHERIE; MEYER, 1983, p. 1):

Definição 3 (Núcleo Mensurável - Caso Contínuo)**.** *Sejam $(E, \mathcal{E})$ e $(F, \mathfrak{F})$ dois espaços mensuráveis. Um núcleo mensurável de E à F é um mapa N definido no espaço produto $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathfrak{F})$ em $([0, \infty], \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cap [0, \infty])$ com as seguintes propriedades:*

(i) $x \mapsto N(x, A)$ é $\mathcal{E}$-mensurável $\forall A \in \mathfrak{F}$.

(ii) $A \mapsto N(x, A)$ é uma medida em $\mathfrak{F}$ $\forall x \in \mathcal{E}$.

Especializando a Definição 3, substituindo $([0, \infty], \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cap [0, \infty])$ pelo espaço mensurável discreto $(\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, 2^{\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}})$,e identificando $(E, \mathcal{E}) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(F, \mathfrak{F}) = (\mathbf{N}, \mathcal{N})$, com o espaço produto correspondente, temos a construção da Definição 2, justificada pela construção de mensurabilidade no segundo parágrafo após a Definição 2. Sendo assim, um processo pontual é, no fim, um núcleo mensurável com valores discretos. Este fato é importante para obtermos mais simplicidade nas demonstrações de propriedades de processos pontuais que envolvam problemas de mensurabilidade, visto que há mais simplicidade em manipular núcleos, funções de duas variáveis, do que mapas que associam medidas à eventos num espaço de probabilidade - estas últimas não possuem uma forma instrumentalmente útil. Assim, pela equivalência de ambas as definições, podemos utilizar cada uma das formas de um processo pontual em contextos distintos, e obter o resultado desejado para um processo pontual qualquer. Vamos enunciar tal argumento como um teorema:

Teorema 2 (Equivalência Processo Pontual = Medida Aleatória Discreta)**.** *Dado um espaço de probabilidade fixo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e um espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$, são equivalentes:*

(i) η é um elemento aleatório com valores no espaço mensurável $(N(X), \mathcal{N}(X))$, isto é, um processo pontual.

(ii) η é um núcleo mensurável discreto no sentido da Definição 3, com $(E, \mathcal{E}) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(F, \mathfrak{F}) = (N(X), \mathcal{N}(X))$.

A definição de um processo pontual neste nível de generalidade, em conjunção com as equivalências acima, é, atualmente, clássica na literatura de processos pontuais e medidas aleatórias (como referência, veja (KALLENBERG, 2017)). Em outras abordagens, por outro lado, costuma-se encontrar a definição de um processo pontual enquanto um "processo pontual próprio" (LAST; PENROSE, 2018, p. 12):

Definição 4 (Processo Pontual Próprio)**.** *Dizemos que um processo pontual η em X é próprio se existem elementos aleatórios $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidos em X, e uma variáveis aleatória κ com valores em $\overline{\mathbb{N}}_0$ tal que:*

$$\eta = \sum_{i=1}^{\kappa} \delta_{X_i} \quad q.c.\text{-}\mathbb{P},$$

ou,

$$\eta = \sum_{i=1}^{\kappa} \beta_i \delta_{X_i} \quad q.c.\text{-}\mathbb{P},$$

com $\{\beta_i\} \in \mathbb{N}$ constantes naturais positivas.

Neste caso o processo pontual pode ser visto como uma coleção de pontos aleatórios com valores no espaço X, um conjunto aleatório (BOCSAN, 1986). Trata-se da forma pela qual muitos trabalhos, especialmente na estatística (por exemplo, (MØLLER; RUBAK, 2016)), ainda apresentam o conceito de processo pontual. Apesar disso, nem sempre podemos ver um processo pontual desta forma:

Proposição 1 (Processo Pontual Impróprio)**.** *Dado um espaço de probabilidade qualquer $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, existe um processo pontual $\eta : \Omega \to N(X)$, em um espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$, tal que η não é próprio.*

Demonstração. Segundo (BOGACHEV, 2007, p. 68) podemos encontrar um espaço topológico compacto totalmente ordenado X equipado com sua σ-álgebra Borel $\mathcal{B}(X)$, tal que existe uma medida μ definida em $\mathcal{B}(X)$ que assume apenas valores no conjunto $\{0, 1\}$, e que possui suporte vazio (veja a Definição 5 abaixo). Considere $(X, \mathcal{X}, \mu)$ como sendo este espaço. Assim, como μ possui suporte vazio, para cada ponto $x \in \mathcal{X}$, existe $V_x \in \mathcal{B}(X)$ vizinhança de x tal que $\mu(V_x) = 0$ (exceto para o elemento maximal de X, x^*, mas neste caso, como indicado na referência citada, $\mu(\{x^*\}) = 0$).

Neste caso, fixe $\omega \in \Omega$ qualquer e suponha que η possua representação própria como na Definição 4, ou seja, para $A \in \mathcal{X}$ qualquer:

$$\eta(A) = \sum_{i=1}^{\kappa(\omega)} \delta_{X_i(\omega)}(A).$$

Agora, para cada $X_i(\omega)$, escolha uma vizinhança de medida μ-nula que contenha este ponto, isto é, $V_{X_i(\omega)} \in \mathcal{B}(X)$, e coloque $A = \bigcup_{i=1}^{\kappa(\omega)} V_{X_i(\omega)} \in \mathcal{B}(X.)$ Como $\kappa(\omega) \in \overline{\mathbb{N}}_0$, temos que a união é no máximo contável. Caso algum $X_i(\omega) = x^*$, apenas adicionamos $\{x^*\}$, ao invés de V_{X_i} na união em A. Neste caso, notamos que:

$$\eta(A) = \sum_{i=1}^{\kappa(\omega)} \delta_{X_i(\omega)}(A) = \kappa(\omega).$$

Mas, pelo argumento acima, $\mu(A) = 0$. Assim, se definirmos:

$$\eta = \mu \implies \eta(A) \neq \kappa(\omega)$$

Temos um processo pontual em X que não é próprio, visto que:

(i) μ assume valores em $\mathbb{N}_0$, ou seja, $\mu \in N$.

(ii) Para a mensurabilidade, pelo critério dado na página 5, note que, se $B \in \mathcal{B}$ e $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$:

$$\{\omega : \eta(\omega, B) = k\} = \{\omega : \mu(B) = k\}.$$

Mas, note que B satisfaz a seguinte condição: este pode conter um subconjunto fechado e não-contável, ou não. Segundo a construção de (BOGACHEV, 2007, p. 68),

$$\mu(B) = \begin{cases} 1 & \text{se } B \text{ contém um subconjunto fechado e não-contável,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, no primeiro caso (i.e. B contém um subconjunto fechado e não-contável):

$$\{\omega : \mu(B) = k\} = \begin{cases} \varnothing & \text{se } k \neq 0, 1, \\ \varnothing & \text{se } k = 0, \\ \Omega & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

No segundo caso (i.e. B não contém um subconjunto fechado e não-contável):

$$\{\omega : \mu(B) = k\} = \begin{cases} \varnothing & \text{se } k \neq 0, 1, \\ \varnothing & \text{se } k = 1, \\ \Omega & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

O que prova, necessariamente, que η é um processo pontual em X. Mas, note que este não pode ser representado de maneira própria (visto que existe pelo menos um conjunto A tal que, $\forall \omega \in \Omega$, a equivalência não é válida).

$\square$

Sendo assim, a ideia de um processo pontual enquanto uma coleção aleatória de pontos não é sempre válida. A fim de pontuar o fenômeno que possibilita essa patologia na Proposição 1, notemos o conceito de suporte topológico de uma medida (BOGACHEV, 2007, p. 69):

Definição 5 (Suporte de Uma Medida)**.** *Considere* $(X, \mathcal{X}, \tau)$ *um espaço mensurável topológico. Isto é,* X *é um espaço topológico com topologia* τ *tal que* $\mathcal{X} = \sigma(\tau)$*. Então, dada uma medida Borel* $\mu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$*, dizemos que o conjunto:*

$$S_\mu = X \backslash \bigcup \{G \subseteq X : G \text{ é aberto em } \tau \text{ e } \mu(G) = 0\},$$

é o suporte de μ*. Isto é,* S_μ *é a intersecção de todos os conjuntos fechados Borel-mensuráveis de medida completa (i.e, não nula).*

Considerando $(X, \mathcal{X}, \tau)$ um espaço mensurável topológico onde a coleção de todos os pontos (singletons) $\{x\}_{x \in X}$ é mensurável, e μ uma medida da forma:

$$\mu = \sum_i \delta_{x_i}.$$

Com a soma finita ou contável, note que esta possui suporte dado por (KRICKEBERG, 2014, p. 36):

$$S_\mu = \{x_1, x_2, \dots\} = \{x \in X : \mu(\{x\}) \geqslant 1\}.$$

Portanto, se um processo pontual η assume valores em $(X, \mathcal{X}, \tau)$, um espaço mensurável topológico onde a coleção de todos os pontos (singletons) $\{x\}_{x \in X}$ é mensurável, e este possui uma representação própria segundo a Definição 4, então as medidas (Borel) formadas pelo processo, $\eta(\omega, \cdot)$, para cada $\omega \in \Omega$, possuem suporte não-vazio dado por $S_{\eta(\omega, \cdot)}$, este último composto pelos pontos com multiplicidade positiva.

Notemos, deste modo, que como a medida (Borel) exibida na demonstração da Proposição 4 possui suporte vazio, e trata-se de uma construção com espaço mensurável topológico contendo todos os pontos, o processo pontual formado pela medida não pode possuir representação própria segundo o último parágrafo.

Desse modo, a existência de representações próprias de processos pontuais,segundo a Definição 4, requer hipóteses adicionais no espaço de estados do processo pontual, $(X, \mathcal{X})$, e no espaço de medidas $N(X)$ deste. Notemos, similarmente, que mesmo espaços com topologia relativamente regular, como topologias compactas (é o caso da Proposição 1), não garantem a validade de tal representação. Veremos, no Teorema 20 desta dissertação, condições (pseudo-)topológicas, e mensuráveis, que garantem a validade das representações próprias de processos pontuais. Mas, no geral, como o exemplo da Proposição 1 indica, a representação própria no caso abstrato, no geral, não é diretamente tratável sem maiores hipóteses.

Antes de enunciarmos mais alguns exemplos das definições (e equivalências) relativas às propriedades mensuráveis de processos pontuais, vamos explorar com mais detalhes a estrutura distribucional e de (teoria da) integração dos processos pontuais – assim poderemos exibir exemplos mais ricos e sem a necessidade de interrompermos a narrativa para provar resultados. Para começar, vamos enunciar a definição de distribuição de um processo pontual qualquer (LAST; PENROSE, 2018, p. 14):

Definição 6 (Processo Pontual - Distribuição)**.** *Considere um processo pontual η visto como um elemento aleatório de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ em $(N(X), \mathcal{N}(X))$, e $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável fixo. Então, a medida $\mathbb{P}_\eta$ definida em $(N(X), \mathcal{N}(X))$ e dada por:*

$$\mathbb{P}_\eta(A) = \mathbb{P}(\eta \in A), \ \ \textit{com } A \in \mathcal{N}(X),$$

é dita a distribuição do processo pontual η.

Do ponto de vista abstrato, tal definição nos garante pouca informação sobre a estrutura distribucional das medidas aleatórias. De fato, como a estrutura de um conjunto $A \in \mathcal{N}(X)$ está raramente disponível, precisamos de técnicas mais especificas para o cálculo de tais distribuições. Na literatura, existem diversas abordagens, mas basicamente em duas divisões: técnicas analíticas e probabilísticas. Do ponto de vista probabilístico, caracterizações em termos de medidas condicionais de processos pontuais, especialmente das ditas Medidas de Palm, são utilizadas - vide o capítulo 5 de (KALLENBERG, 2017). No lado analítico, temos as técnicas clássicas associadas aos funcionais de Laplace (por exemplo, ver (LAST; PENROSE, 2018, p. 14)).

Neste trabalho, faremos a escolha de priorizar os métodos analíticos. O motivo é razoavelmente pragmático: são de fácil utilização e não envolvem questões complicadas de desintegrações de medidas e mensurabilidade, além de serem aplicáveis em contextos não-topológicos. Neste caso, seguindo (LAST; PENROSE, 2018, p. 14):

Definição 7 (Funcional de Laplace)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função positiva $\mathcal{B}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{X}$-mensurável e η um processo pontual em X. O mapa $L_\eta : L^0(X) \to [0,1]$ dado por:*

$$L_\eta(f) = \int_\Omega e^{-\int_X f(x)\eta(dx)} \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}\left(e^{-\int_X f(x)\eta(dx)}\right).$$

Alguns breves comentários sobre a definição:

(i) Note que, como estamos integrando funções positivas, não há problema de integrabilidade admitindo a convenção em teoria da medida que $e^{-\infty} = 0$ e utilizando a noção de integral de Lebesgue dada em (FREMLIN, 2000, p. 51).

(ii) Como $\int_X f(x)\eta(dx) > 0$, $\forall f : X \to \mathbb{R}$ função positiva $\mathcal{B}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{X}$-mensurável, temos que, $e^{-\int_X f(x)\eta(dx)} \in [0,1]$ e que $\mathbb{E}(e^{-\int_X f(x)\eta(dx)}) \in [0,1]$. Logo trata-se de uma função limitada. Assim, a integral definida por $L_\eta(f)$ é sempre convergente. Daí a importância da positividade da função integrada no exponente do argumento exponencial do funcional de Laplace.

(iii) No domínio de $L_\eta(f)$, especificamos o conjunto de todas as classes de equivalências das funções positivas f. Trata-se de um "lembrete" de que, como estamos, essencialmente, integrando exponenciais de integrais que diferem num conjunto nulo, estas últimas assumem, a menos deste conjunto nulo, o mesmo valor escalar dado pela integral. Assim, estabelecer funcionais de Laplace em classes de equivalências de funções, e não apenas em funções, nos permite evitar problemas complicados que podem surgir em obter funcionais de Laplace que diferem em conjuntos de medida nula. Em casos necessários, podemos assumir que estamos escolhendo representantes específicos de f de modo a gerar resultados necessários. Neste caso, assumir que os espaços mensuráveis são completos é essencial.

Veremos agora que o funcional de Laplace determina completamente a estrutura distribucional de nossos processo pontual. Primeiro, introduzimos a noção de distribuições de dimensão finita (KALLENBERG, 2021, p. 84):

Definição 8 (Distribuições de Dimensão finita)**.** *Seja η uma medida aleatória em X, e considere $\mathcal{C}$ a coleção de todos os cilindros de base finita em $\mathcal{X}$ dados no Lema 1. Assim, as distribuições de dimensão finita de η são dadas pela coleção de todas as medidas de probabilidade $\mathbb{P}_{\eta\mathcal{C}} : \mathcal{N}(X) \to [0,1]$, para $A \in \mathcal{C}$, na forma:*

$$\mathbb{P}_{\eta\mathcal{C}}(\eta \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \eta(\omega, B_1) \in D_1, \cdots, \eta(\omega, B_n) \in D_n\}),$$

com $\{D_i\}_{i=1}^n$ conjuntos em $2^{\overline{\mathbb{N}}_0}$ e $\{B_i\}_{i=1}^n$ a base do cilindro $A \in \mathcal{C}$.

Trata-se da definição usual de distribuições de dimensão finita na teoria de processos estocásticos: observando uma medida aleatória enquanto um processo estocástico canônico, e definindo as distribuições finitas como as famílias projetivas do processo em conjuntos cilíndricos (KALLENBERG, 2021, p. 179). Em particular, esta definição pode ser utilizada para provar um resultado de determinação distribucional de processos pontuais, que consiste na Proposição 2.10 de (LAST; PENROSE, 2018, p. 14):

Teorema 3 (Distribuições, Distribuições de Dimensão Finita e Laplace)**.** *Para dois processos pontuais η e ψ em X, são equivalentes:*

(i) $\eta \stackrel{d}{=} \psi$.

(ii) *As distribuições de dimensão finita dos processos são iguais, isto é,* $\mathbb{P}_{\eta_{\mathcal{C}}} = \mathbb{P}_{\psi_{\mathcal{C}}}$*, ou mais geralmente* $(\eta(B_1), \cdots, \eta(B_m)) \stackrel{d}{=} (\psi(B_1), \cdots, \psi(B_m))$*,* $\forall m \in \mathbb{N}$ *e todos os subconjuntos dois-a-dois (disjuntos)* $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{X}$*.*

(iii) $L_\eta(f) = L_\psi(f)$*,* $\forall f : X \to \mathbb{R}$ *função positiva* $\mathcal{B}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{X}$*-mensurável.*

(iv) $\forall f : X \to \mathbb{R}$ *uma função positiva* $\mathcal{B}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{X}$*-mensurável,* $\eta(f) = \int_X f(x)\eta(dx) \stackrel{d}{=} \int_X f(x)\psi(dx) = \psi(f)$ *consideradas como variáveis aleatórias na reta real estendida.*

Antes da demonstração deste resultado, precisamos de um lema auxiliar garantindo a mensurabilidade dos mapas de integração, que trata-se de uma versão da Proposição 2.7 de (LAST; PENROSE, 2018, p. 13):

Lema 2 (Integração Paramétrica - Mensurabilidade)**.** *Seja μ uma medida em $(N(X), \mathcal{N}(X))$, e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ função $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash\mathcal{X}$-mensurável. Então, a função definida pelo mapa* $\mu \mapsto \int_X f(x)\mu(dx)$ *é uma função* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash\mathcal{N}(X)$*-mensurável.*

Para a demonstração deste lema, vamos detalhar a abordagem de (LAST; PENROSE, 2018) utilizando um lema da classe monótona dada por (HOFFMANN-JØRGENSEN, 2017, p. 54), denominado por este como o Lema Funcional de Sierpiński. De fato, trata-se de uma forma geral do Lema de Classe Monótona para funções (ou espaço vetorial de funções). Escolhemos utilizar este, em detrimento da abordagem usual de aproximação, ou de outras formas do lema para classes limitadas de funções, pela generalidade da abordagem – não precisamos reduzir para o caso finito como seria necessário na segunda abordagem –, e também não precisamos pedir integrabilidade da função f. Para uma lista quase exaustiva de formas do Lema da Classe Monótona (funcional ou não), ver o Capítulo 1 de (BLUMENTHAL; GETOOR, 2007); (DELLACHERIE; MEYER, 1975, p. 14); (POLLARD, 2002, p. 43); (SHARPE, 1988, p. 364).

Demonstração. Para utilizarmos o lema funcional de Sierpiński, defina a seguinte classe de funções:

$$\mathcal{V} = \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+ : \mu \to \int_X f(x)\mu(dx) \text{ é } \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash\mathcal{N}(X) - \text{mensurável} \right\}$$

Precisamos verificar as condições (i)-(v) de (HOFFMANN-JØRGENSEN, 2017, p. 54):

(i) A soma de funções $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash\mathcal{N}(X)$-mensuráveis é $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash\mathcal{N}(X)$-mensurável, e o mesmo com o produto de funções deste tipo por constantes, portanto segue que $\mathcal{V}$ é fechada sob as operações de soma e multiplicação por constantes.

(ii) Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções em $\mathcal{V}$ tal que $f_n \uparrow f$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que:

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\mu(dx)$$

Assim, $f \in \mathcal{V}$.

(iii) Seja $F \subseteq X$, e considere $g(x) = a + \mathbb{1}_F(x)$ para $a > 0$ constante qualquer. Assim, se $g(x) \in \mathcal{V}$,

$$\int_X g(x)\mu(dx) = a\mu(X) + \mu(F)$$

é uma função $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash\mathcal{N}(X)$-mensurável bem definida e, visto que isso ocorre se, e somente se, para um conjunto gerador do tipo $[0, x]$, com $x \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\{\mu : a\mu(X) + \mu(F) \leqslant x\} = \bigcup_{\substack{b,c\in\overline{\mathbb{N}}_0\\ b+c\leqslant x}} (\{\mu : a\mu(X) = b\} \cap \{\mu : \mu(F) = c\})$$

é um conjunto $\mathcal{N}(X)$-mensurável, temos que cada termo na intersecção interna precisa ser $\mathcal{N}(X)$-mensurável, e também que $F \in \mathcal{X}$. Assim, concluímos que $\{\mu : \mu(F) = c\}$ é $\mathcal{N}(X)$-mensurável, visto que a restrição em x é arbitrária. Além disso, $F \in \mathcal{X} \implies F^c \in \mathcal{X}$. Daí, como

$$\{\mu : \mu(F^c) \leqslant x\} = \bigcup_{\substack{n\in\overline{\mathbb{N}}_0\\ n\leqslant x}} \{\mu : \mu(F^c) = n\},$$

temos que $\mu(F^c)$ é $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash\mathcal{N}(X)$-mensurável, visto que os conjuntos acima estão na classe geradora de $\mathcal{N}(X)$ (vide Lema 1), e logo $\mathbb{1}_{F^c} \in \mathcal{V}$.

Agora, defina

$$\mathcal{W} = \{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{X}\},$$

e considere $\mathcal{H} = \mathrm{conv}_\sigma(\mathcal{W})$ o menor cone-convexo $(\uparrow)$-estável que contém $\mathcal{W}$. Assim,

(iv) Se $f, g \in \mathcal{W}$, temos que $f = \mathbb{1}_A$ e $g = \mathbb{1}_B$ para $A, B \in \mathcal{X}$. Assim, $f \times g = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$, que pertence à $\mathcal{H}$, visto que $\mathbb{1}_{A\cap B} \in \mathcal{W}$.

(v) Note que $\forall g \in \mathcal{W}$, g é da forma $g = \mathbb{1}_A$, para algum $A \in \mathcal{X}$. Em particular, $g \leqslant 1$. Além disso,

$$1 - g = \mathbb{1}_{A^c} \in \mathcal{W},$$

visto que $A^c \in \mathcal{X}$. Assim, $1 - g = \mathbb{1}_{A^c} \in \mathcal{H}$.

O que conclui a verificação das condições (i)-(v) do lema funcional de Sierpiński. Desse modo, pelo lema, $\mathcal{V}$ contém todas as funções positivas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash\sigma(\mathcal{W})$-mensuráveis, mas como $\sigma(\mathcal{W}) = \mathcal{X}$, provamos o resultado para o caso de $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ função $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash\mathcal{X}$-mensurável. □

No Lema 2, poderíamos mostrar o resultado para o caso geral de funções não necessariamente positivas. De fato utilizando a definição de integral para partes positiva e negativa de funções reais na reta real estendida (FREMLIN, 2000, p. 88), definimos:

$$\mu \to \int_X f(x)\mu(dx) =$$
$$\begin{cases} \int_X f^+(x)\mu(dx) - \int_X f^-(x)\mu(dx) & \text{se } f^+(x) - f^-(x) \text{ não é } \infty - \infty \text{ ou } -\infty + \infty \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Lema Funcional de Sierpiński, e pela mensurabilidade da diferença de funções com valores infinitos (BARTLE, 2014, p. 11), concluímos que o mapa $\mu \to \int_X f(x)\mu(dx)$ é $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\backslash\mathcal{N}(X)$-mensurável. O que concluí a extensão do resultado.

Voltando ao Teorema 3, para sua demonstração, seguiremos a Proposição 2.10 de (LAST; PENROSE, 2018, p. 14), mas expandindo as contas em alguns pontos.

Demonstração. [Teorema 3]

Provemos que $(i) \implies (iv)$. Neste caso, para $f : X \to \mathbb{R}$ função positiva $\mathcal{B}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{X}$-mensurável, defina $g_f : N(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ por

$$g_f(\mu) = \int f(x)\mu(dx).$$

Pelo Lema 2, temos que g_f é um mapa $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash\mathcal{N}(X)$-mensurável. Agora, note que, se construirmos um novo mapa definido pela relação $\eta(f) : \omega \mapsto \int f(x)\eta(\omega, dx)$, então

$$\eta(f)(\omega) = (g_f \circ \eta)(\omega) = \int f(x)\eta(\omega, dx).$$

Como $\eta(f)$ é $\mathcal{F}\backslash\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$-mensurável pelo Lema 2, então $(g_f \circ \eta)(\omega)$ é $\mathcal{F}\backslash\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$-mensurável enquanto composição de mapas mensuráveis. Note que a composição é consistente, visto que

$$\eta(\omega) : \Omega \to N(X),$$
$$g_f : N(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Assim, temos que (HOFFMANN-JØRGENSEN, 2017, p. 51) :

$$\mathbb{P}_{\eta(f)}(\cdot) = \mathbb{P}(\eta(f) \in \cdot) = \mathbb{P}((g_f \circ \eta) \in \cdot) = \mathbb{P}(\eta \in g_f^{-1}(\cdot)) = \mathbb{P}_\eta(g_f^{-1}(\cdot)).$$

Como, por hipótese, $\mathbb{P}_\eta = \mathbb{P}_\psi$, temos que, pelo desenvolvimento anterior:

$$\mathbb{P}_{\eta(f)}(\cdot) = \mathbb{P}_\eta(g_f^{-1}(\cdot)) = \mathbb{P}_\psi(g_f^{-1}(\cdot)) = \mathbb{P}_{\psi(f)}(\cdot).$$

Concluímos que $\eta(f) \stackrel{d}{=} \psi(f)$.

Agora, provemos que $(iv) \implies (iii)$. Como $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função positiva $\mathcal{B}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{X}$-mensurável, segue-se pelo teorema de troca de variáveis (HOFFMANN-JØRGENSEN, 2017, p. 171) e pela hipótese (iv) que

$$L_\eta(f) = E(e^{-\eta(f)}) = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} e^{-y}\mathbb{P}_{\eta(f)}(dy) = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} e^{-y}\mathbb{P}_{\psi(f)}(dy) = \int_\Omega e^{-\psi(f)}\mathbb{P}(d\omega) = E(e^{-\psi(f)}).$$

Assim, concluímos (iii).

Neste ponto, provemos que $(iii) \implies (ii)$. Assumindo (iii), escolha uma função simples $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$ com $\{c_i\}_{i=1}^n \in (0, \infty)$ e $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{X}$ quaisquer. Desse modo, pela definição do funcional de Laplace,

$$L_\eta(f) = E(e^{-\eta(f)}) = E(e^{-\sum_{i=1}^n c_i\eta(B_i)}) = \hat{\mathbb{P}}_{\eta(B_1),\ldots,\eta(B_n)}(c_1, \ldots, c_n),$$

onde $\hat{\mathbb{P}}_\cdot(\cdot)$ é a transformada de Laplace de $\mathbb{P}$. Assim, no caso em que $\eta(B_1), \ldots, \eta(B_n)$ e $\psi(B_1), \ldots, \psi(B_n)$ pertencem ao intervalo $(0, \infty)$, a transformada é analítica, e

$$L_\eta(f) = \hat{\mathbb{P}}_{\eta(B_1),\ldots,\eta(B_n)}(c_1, \ldots, c_n) = \hat{\mathbb{P}}_{\psi(B_1),\ldots,\psi(B_n)}(c_1, \ldots, c_n) = L_\psi(f).$$

Assim, (ii) é válido neste caso, visto que a transformada de Laplace de uma medida quando analítica num domínio determina completamente esta (KALLENBERG, 2021, p. 128). No caso em que pelo menos um dos termos em $\eta(B_1), \ldots, \eta(B_n)$ e $\psi(B_1), \ldots, \psi(B_n)$ é infinito, ou no caso em que todos são zeros, podemos tomar complementos nos eventos $B_1, \ldots, B_n$ para reduzir novamente ao caso finito. Assim, (ii) é válido no geral.

Por fim, precisamos provar que $(ii) \implies (i)$. Aqui, utilizaremos um argumento de classe monótona $(\lambda - \pi)$. Para isso, sejam $n \in \mathbb{N}$ e $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{X}$, não necessariamente dois-a-dois disjuntos. Defina $\mathcal{A} = \sigma(B_1, \ldots, B_n)$ e considere $C_1, \ldots, C_m$ os átomos de $\mathcal{A}$ (note que eles existem, pois $\mathcal{A}$ é finitamente gerada). Assim, por definição destes, temos que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $J_i \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$B_i = \bigcup_{j \in J_i} C_j.$$

Além disso, note que trata-se de uma união disjunta. De fato, suponha que existam $j, j' \in \{1, \ldots, m\}$ tais que $C_j \cap C_{j'} \neq \varnothing$. Assim, como a intersecção de conjuntos mensuráveis é mensurável, existe $A \in \mathcal{X}$ não vazio tal que $C_j \cap C_{j'} = A \implies A \subseteq C_j$ e $A \subseteq C_{j'}$, o que contradiz a definição de átomo. Desse modo, sejam $D_1, \ldots, D_n \subseteq \mathbb{N}_0$. Então, sendo $\eta(C_j) = k_j \in \mathbb{N}_0$, $j \in 1, \ldots, m$ temos que

$$\mathbb{P}(\eta(B_1) \in D_1, \ldots, \eta(B_n) \in D_n) = \mathbb{P}\left(\eta\left(\bigcup_{j\in J_1} C_j\right) \in D_1, \ldots, \eta\left(\bigcup_{j\in J_m} C_j\right) \in D_n\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j\in J_1} \eta(C_j) \in D_1, \ldots, \sum_{j\in J_m} \eta(C_j) \in D_n\right)$$

Mas, podemos escrever $\mathbb{P}\left(\sum_{j\in J_1} \eta(C_j) \in D_1, \ldots, \sum_{j\in J_m} \eta(C_j) \in D_n\right)$ na forma integral:

$$\int_{\{\sum_{j\in J_1} k_j \in D_1, \ldots, \sum_{j\in J_m} k_j \in D_n|\}} \mathbb{P}_{(\eta(B_1),\ldots,\eta(B_n))}(d(k_1, \ldots, k_n)),$$

logo, como estamos assumindo (ii) como hipótese, e como o mesmo desenvolvimento é valido para ψ, temos que

$$\mathbb{P}(\eta(B_1) \in D_1, \ldots, \eta(B_n) \in D_n) = \mathbb{P}(\psi(B_1) \in D_1, \ldots, \psi(B_n) \in D_n).$$

Aqui utilizamos o argumento de classe monótona: pelo do último parágrafo, $\mathbb{P}_\eta$ e $\mathbb{P}_\psi$ coincidem na classe $\mathcal{C}$ (classe dos cilindros de base finita) de todos os conjuntos da forma

$$\{\mu \in N(X) : \mu(B_1) \in D_1, \ldots, \mu(B_n) \in D_n\},$$

onde, com a mesma notação acima, $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{X}$ e $D_1, \ldots, D_n \subseteq \mathbb{N}_0$. Por outro lado, note que por um argumento análogo à Lahiri e Athreya (2003, p. 202), a classe $\mathcal{C}$ é uma álgebra, e logo um sistema-π. Assim, pela determinação de medidas de probabilidade em sistemas-π (KALLENBERG, 2021, p. 20), as medidas $\mathbb{P}_\eta$ e $\mathbb{P}_\psi$ coincidem em $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{N}(X)$, o que termina o argumento. □

1.3 Processo de Poisson: Definição e Construção Intrínseca

Nesta Seção, queremos discutir um dos principais objetos da teoria dos processos pontuais e medidas aleatórias: o processo de Poisson.

Do ponto de vista conceitual e histórico, vide (KALLENBERG, 2017), temos boas razões para desenvolver a teoria do processo de Poisson com certo cuidado (e com rigor). Em particular, do ponto de vista de resultados de existência, o número de construções deste é bastante amplo: visto como um processo estocástico num espaço de probabilidade, podemos construí-lo de maneira intrínseca (i.e, uma definição construtiva dos caminhos amostrais da medida aleatória), extrínseca (i.e, apelando à uma construção com métodos gerais da teoria da medida), e em diferentes estruturas topológicas e mensuráveis.

De início, adotaremos a abordagem geral de construir intrinsecamente o processo de Poisson utilizando técnicas de processos binomiais e medidas s-finitas, ideia originada em (MOYAL, 1962). A razão destas técnicas é razoavelmente simples: a construção não utiliza propriedades de espaços mensuráveis topológicos, e é construtiva. Deste modo, ganhamos generalidade e uma expressão "intuitiva" do processo. Neste caso, seguiremos com detalhes as construções e demonstrações de (LAST; PENROSE, 2018), mas faremos um detalhamento maior dos problemas de mensurabilidade e existência dos objetos citados nas duas referências.

Para começar, precisamos definir o processo de Poisson. Para isso, analogamente à seção 1.2, fixamos um espaço mensurável de estados $(X, \mathcal{X})$. Para o espaço de probabilidade das medidas aleatórias, fixamos um espaço de probabilidade qualquer $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Começamos com uma notação correspondente à distribuição de Poisson para a definição do processo:

Definição 9 (Distribuição de Poisson)**.** *Dizemos que uma variável aleatória X possui uma Distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda \in \overline{\mathbb{N}}_0$, denotada por $Po(\lambda)$, se:*

$$\mathbb{P}(X = k) = Po(\lambda, k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

para $k \in \mathbb{N}_0$. Se $\lambda = 0$, então $P(X = 0) = 1$, visto que assumimos $0^0 = 1$. Se $\lambda = \infty$, colocamos $P(X = \infty) = 1$, de modo que $Po(\infty, k) = 0$ para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$.

Sendo assim, para o caso de $\lambda = 0$ ou $\lambda = \infty$, uma distribuição de Poisson corresponde à uma medida de Dirac concentrada em 0 ou ∞ respectivamente.

Para o caso finito, temos as seguintes propriedades (LAST; PENROSE, 2018, p. 2):

Proposição 2. *Seja X uma variável aleatória Poisson com parâmetro λ finito. Então:*

(i) A esperança de X é dada por:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda.$$

(ii) X possui função geradora de momentos dada por:

$$\mathbb{E}(s^X) = e^{\gamma(s-1)}, \; s \in [0, 1].$$

(iii) X possui transformada de Laplace dada por:

$$\mathbb{E}(e^{-tX}) = e^{-\lambda(1-e^{-t})},\ t \geqslant 0.$$

O caso infinito, ou em 0, da proposição acima corresponde à uma medida de Dirac concentrada em ∞ ou 0 respectivamente.

Para mais informações desta definição, assim como uma propriedade de soma de variáveis Poisson válida no caso geral, ver (KINGMAN, 1992).

Assim, podemos enunciar a definição principal desta seção:

Definição 10 (Processo de Poisson)**.** *Seja λ uma medida s-finita em $(X, \mathcal{X})$. Um processo de Poisson com medida de intensidade λ em X é um processo pontual η, isto é, uma medida aleatória com valores discretos, com as seguintes propriedades:*

(i) $\forall B \in \mathcal{X}$ a distribuição da variáveis aleatória $\eta(\cdot, B)$ é Poisson com parâmetro $\lambda(B)$.

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}$ e $\forall B_1, ..., B_m$ sequência disjunta mensurável de conjuntos em $\mathcal{X}$, a sequência de variáveis aleatórias $\{\eta(\cdot, B_i)\}_{i=1}^m$ é independente.

A primeira propriedade acima é a condição homônima de Poisson, enquanto a segunda propriedade exibe aquilo que, segundo a terminologia clássica de (KINGMAN, 1992), é chamado de "aleatoriedade completa". Do ponto de vista de caminhos amostrais fixos da medida aleatória, isto é, mapas do tipo

$$\omega \in \Omega \mapsto \eta(\omega, B);\ B \in \mathcal{X},$$

podemos ver a aleatoriedade completa como a propriedade de **incrementos independentes** do processo.

Para realizar algumas manipulações formais de processos pontuais, a seguinte definição é necessária (LAST; PENROSE, 2018, p. 12):

Definição 11 (Intensidade de um Processo Pontual)**.** *Seja η um processo pontual em X. Então, para cada $B \in \mathcal{X}$, a medida definida por:*

$$\gamma(B) = \int_\Omega \eta(\omega, B)\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(\eta(B))$$

É dita a intensidade do processo pontual η.

Especificamente para a construção de existência do processo de Poisson, é interessante, enquanto ferramenta técnica, calcularmos a intensidade deste segundo a

Definição 11. Para isso, note que, pela propriedade de Poisson – (i) da Definição 10 – para qualquer $B \in \mathcal{X}$ fixo

$$\mathbb{E}(\eta(B)) = \int_\Omega \eta(\omega, B)P(d\omega) = \lambda(B)$$

Isto é, o parâmetro da distribuição de Poisson é a intensidade do processo.

Em mais um ponto técnico antes de começarmos a construção do processo propriamente dita, precisamos garantir que a Definição 10 não depende da escolha de intensidades distribucionalmente, isto é, que processos de Poisson com mesma intensidade são iguais em distribuição. Para isto, temos o seguinte resultado de unicidade, dado pela Proposição 3.2 de (LAST; PENROSE, 2018, p. 20):

Teorema 4 (Versões em Distribuição de um Processo de Poisson)**.** *Sejam η e η' dois processos de Poisson em X com mesma intensidade dada por uma medida s-finita λ. Então,*

$$\eta \overset{d}{=} \eta'$$

Ou seja, para cada medida aleatória (s-finita) de intensidade, temos, a menos de um conjunto $\mathbb{P}$-nulo , um processo de Poisson com tal intensidade. Por outro lado, isso não implica na indistinguibilidade, ou em igualdade em modificação, de dois processos de Poisson.

Para provarmos este resultado, utilizaremos o item (iii) do Teorema 2. Com esse objetivo, calculemos o funcional de Laplace de um processo de Poisson (LAST; PENROSE, 2018, p. 23):

Teorema 5 (Funcional de Laplace – Poisson)**.** *Seja η um processo de Poisson em X com medida de intensidade s-finita λ definida em $(X, \mathcal{X})$. Então, seu funcional de Laplace, para $f : X \to \mathbb{R}_+$ função $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\backslash\mathcal{X}$-mensurável, é dado por:*

$$L_\eta(f) = e^{-\int_X (1-e^{-f(x)})\lambda(dx)}.$$

Demonstração. Para esta demonstração, seguiremos a "prova usual" em teoria da medida (ver, por exemplo, (HOFFMANN-JØRGENSEN, 2017, p. 170)): isto é, mostraremos que ambos os lados da expressão do funcional de Laplace são iguais para funções f simples, e depois utilizaremos uma aproximação por funções simples (visto que a imagem de f é separável na topologia usual de $\mathbb{R}_+$), por fim concluindo com uma aplicação dos Teoremas de Convergência Monótona e Dominada.

Desse modo, seja $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{B_i}$ a representação canônica da função simples f, isto é, $\{c_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ distintos e $\{B_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{X}$ disjuntos. Aqui, é importante notar que nem toda função simples é representada canonicamente, mas é possível mostrar que, quando integramos uma função simples em qualquer representação, obtemos a expressão da integral da representação canônica (YEH, 2014, p. 132). Desse modo, não há perda de generalidade em supor que estamos trabalhando com a representação canônica.

Desse modo, temos que:

$$L_\eta(f) = E(e^{-\eta(f)}) = E\left(e^{-\sum_{i=1}^n c_i\eta(B_i)}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{-c_i\eta(B_i)}\right).$$

Agora, utilizando a fórmula para a transformada de Laplace de uma v.a. Poisson, e retirando o produto para fora da esperança utilizando a propriedade de independência completa (ou aleatoriedade completa) do processo de Poisson (ou seja, aqui utilizamos que trata-se da representação canônica de f):

$$L_\eta(f) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{-c_i\eta(B_i)}\right) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda(B_i)(1-e^{c_i})} = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda(B_i)(1-e^{c_i})} = e^{-\sum_{i=1}^n \int_{B_i}(1-e^{-f})}.$$

O que prova o resultado para o caso de uma função simples. Agora, pelo fato de que a imagem de f é separável na topologia euclideana induzida na reta real positiva, e portanto fortemente mensurável, escolha $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência $f_n : X \to \mathbb{R}_+$ de funções simples $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\backslash\mathcal{X}$-mensuráveis tais que $f_n \uparrow f$ (quase certamente na topologia usual de $\mathbb{R}_+$ para cada argumento fixo) (DINCULEANU, 2002). Assim, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que $\eta(f_n) \uparrow \eta(f)$ (no sentido de sequências de números reais possivelmente assumindo o valor $\{\infty\}$). Assim, visto que o argumento exponencial do funcional de Laplace é limitado, pelo Teorema da Convergência Dominada, utilizando que $\eta(f_n) \uparrow \eta(f)$, temos que:

$$L_\eta(f_n) = E(e^{-\eta(f_n)}) \to E(e^{-\eta(f)}),$$

e

$$L_\eta(f_n) = E(e^{-\eta(f_n)}) = e^{-\sum_{i=1}^n \int_{B_i}(1-e^{-f_n})} \to e^{-\sum_{i=1}^n \int_{B_i}(1-e^{-f})}.$$

Assim, neste caso, $L_\eta(f) = E(e^{-\eta(f)}) = e^{-\sum_{i=1}^n \int_{B_i}(1-e^{-f})}$, e pelo argumento usual, concluímos que a igualdade é válida no geral. O que termina a demonstração.

□

Agora, podemos demonstrar o Teorema 4

Demonstração. [Teorema 4]

Sejam η e η' dois processos de Poisson em X com mesma medida de intensidade s-finita λ. Desse modo, pelo Teorema 5, para uma $f : X \to \mathbb{R}_+$ função $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\backslash\mathcal{X}$-mensurável qualquer:

$$L_\eta(f) = e^{-\int_X (1-e^{-f(x)})\lambda(dx)},$$
$$L_{\eta'}(f) = e^{-\int_X (1-e^{-f(x)})\lambda(dx)}.$$

Assim, $L_\eta(f) = L_{\eta'}(f)\ \forall f : X \to \mathbb{R}_+$ função $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\backslash\mathcal{X}$-mensurável. Assim, pelo item (iii) do Teorema 2, concluímos que $\eta \stackrel{d}{=} \eta'$.

□

Por fim, apresentamos uma propriedade de somas de processos de Poisson (independentes) que será essencial na etapa final da construção do processo, a dita propriedade de superposição:

Teorema 6 (Superposição de Processos de Poisson). *Seja $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de processos de Poisson independentes em X com medidas de intensidade s-finitas λ_i. Então,*

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$$

é um processo de Poisson com medida de intensidade s-finita dada por $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que η da forma $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$ define um processo pontual, visto que uma soma contável de núcleos mensuráveis é um núcleo mensurável (LAST; PENROSE, 2018, p. 247). Por outro lado, como a soma contável de medidas s-finitas é uma medida s-finita (LAST; PENROSE, 2018, p. 247), segue-se que λ de fato é uma medida s-finita, visto que é uma soma contável de medidas s-finitas.

Agora, precisamos verificar as propriedades (i) e (ii) da Definição 10. Para isso, notemos que, da teoria elementar de probabilidade, uma soma (finita) de variáveis aleatórias de Poisson independentes com parâmetros γ_i é uma variável aleatória de Poisson com soma dos parâmetros, mesmo no caso em que algum dos parâmetros é infinito (KINGMAN, 1992, pp. 5-6), seguindo a Definição 9 da distribuição de Poisson desta seção. Assim, defina, para $n \in \mathbb{N}$ e $B \in \mathcal{X}$ fixo

$$\psi_n(\cdot, B) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\cdot, B).$$

Por (ii) de 10, $\{\eta_i(\cdot, B)\}_{i=1}^{n}$ é uma sequência de variáveis aleatórias Poisson independentes. Assim, pelo resultado de (KINGMAN, 1992) citado no parágrafo anterior, segue-se que $\{\psi(\cdot, B)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias Poisson com parâmetros $\lambda_n(\cdot, B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\cdot, B)$. Por outro lado, note que a sequência $\{\psi(\cdot, B)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monotonicamente crescente, visto que variáveis aleatórias de Poisson são funções que assumem valores nos inteiros positivos. Desse modo

$$\psi_n(\cdot, B) \uparrow \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(\cdot, B) = \eta(B).$$

Se pelo menos uma das medidas de intensidade $\lambda_i(B)$ é infinita, ou se $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(B)$ é infinita, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(B)$ será infinita por construção, e portanto $\eta(B)$ dado pelo limite crescente de $\{\psi_i(\cdot, B)\}_{i\in\mathbb{N}}$ estará concentrado em ∞ com probabilidade 1, o que verifica a propriedade (i) da Definição 10 no caso de $\eta(B)$ infinito. No caso finito, pela propriedade de continuidade inferior da medida de probabilidade, e levando em conta que a função exponencial é contínua, $\forall k \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{P}(\eta(\cdot, B) \leqslant k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\psi_n(\cdot, B) \leqslant k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \mathrm{Po}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\cdot, B); j\right) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{Po}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\cdot, B); j\right).$$

Ou seja, verificamos a propriedade de Poisson de η para os conjuntos do tipo

$$\{\eta(B) \in [0, k]\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0, i\leqslant k} \{\eta(B) = i\}, \qquad \mathrm{k} \in \mathbb{N}_0.$$

Como estes geram a σ-algebra $2^{\mathbb{N}_0}$ na imagem das variáveis aleatórias Poisson formadas pelas seções mensuráveis da medida aleatória η, e formam um π-sistema, por um argumento de classe monótona a distribuição de $\eta(\cdot, B) : \Omega \to \mathbb{N}_0$, com $B \in \mathcal{X}$ qualquer, é inteiramente determinada pelos conjuntos desta forma. Assim, o argumento acima demonstra a propriedade de Poisson, (i) na Definição 10, para o caso finito para qualquer $B \in \mathcal{X}$, o que termina este passo.

Por fim, verificamos (ii) da Definição 10. Para isso, sejam $B_1, ..., B_m$ conjuntos $\mathcal{X}$-mensuráveis e dois-a-dois disjuntos quaisquer. Então, $\{\eta_i(\cdot, B_j)\}_{j=1}^{m}$ para $i = 1, ...n$ forma uma família de variáveis aleatórias (de Poisson) independentes, e como a soma é uma função Borel no espaço das variáveis aleatórias com valores discretos possivelmente infinitos, segue-se que pelo Corolário 2.5.1 em (RAO; SWIFT, 2006), além de que o limite de funções mensuráveis é mensurável pelo Lema 1.11 de (KALLENBERG, 2021, p. 17), que $\{\eta(\cdot, B_j)\}_{j=1}^{m}$ forma uma família independente de variáveis aleatórias Poisson. Assim, η é completamente aleatória, ou seja, satisfaz a propriedade (ii) da Definição do processo de Poisson.

$\square$

Neste ponto, podemos iniciar os preparativos para a demonstração de existência do processo de Poisson. Para isso, precisamos de um resultado bastante geral em teoria da medida, demonstrado por Lomnicki e Ulam no início dos anos 30, que nos garante um suprimento de elementos aleatórios (processo estocásticos e medidas aleatórias, em nosso caso) definidos num espaço de probabilidade apropriado.

Para enunciar o teorema, precisamos de alguns elementos básicos de produtos não-contáveis de espaços de probabilidade, para elementos aleatórios gerais. Para isso, considere T um conjunto de índices, possivelmente não-contável, e $\{(\mathbb{X}_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in T}$ uma coleção (possivelmente não-contável) de espaços mensuráveis. Considere o produto cartesiano $\bigtimes_{t\in T} \mathbb{X}_t$ e defina neste a σ-álgebra gerada pelas projeções, para cada $t \in T$, $\pi_t : \bigtimes_{t\in T} \mathbb{X}_t \to \mathbb{X}_t$,

$$\bigotimes_{t\in T} \mathcal{F}_t = \sigma(\pi_t, t \in T) = \sigma\left(\bigcup_{t\in T} \pi_t^{-1}\right).$$

Esta σ-álgebra corresponde à σ-álgebra gerada pelos cilindros com base contável (FREMLIN, 2003, p. 52). Neste contexto, munidos os espaços $\{(\mathbb{X}_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in T}$ de medidas de probabilidade $\mathbb{P}_t$, obtemos o seguinte resultado (KALLENBERG, 2021, p. 181):

Teorema 7 (Lomnicki-Ulam, 1930)**.** *Para uma coleção qualquer de espaços de probabilidade $\{(\mathbb{X}_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)\}_{t\in T}$ indexada por um conjunto T, existem elementos aleatórios ξ_t definidos em $\mathbb{X}_t$ (i.e, com imagem em) dados por $\xi_t(\omega) = \pi_t(\omega)$ e uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $(\bigtimes_{t\in T} \mathbb{X}_t, \bigotimes_{t\in T} \mathcal{F}_t)$ tais que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{t\in I\subseteq T} \pi_t^{-1}(A)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{t\in I\subseteq T} (\xi_t \in A_t)\right) = \prod_{t\in I\subseteq T} \mathbb{P}_t(A_t) = \prod_{t\in I\subseteq T} \mathbb{P}_t(\xi_t \in A_t),$$

Para qualquer subconjunto finito I de T e $A \in \bigotimes_{t\in T} \mathcal{F}_t$, com A_t o elemento $t \in I$ do cilindro formado por A em I.

Omitiremos a demonstração do resultado, que pode ser vista no Corolário 8.25 em (KALLENBERG, 2021, p. 181).

Deste modo, note que o Teorema de Lomnicki-Ulam afirma que, dada uma coleção arbitrária de espaços de probabilidade, sempre podemos encontrar elementos aleatórios independentes, sejam eles medidas aleatórias ou processos estocásticos, definidos num mesmo espaço de probabilidade. Com esse Teorema em mãos, vamos a uma definição que será utilizada na demonstração da existência do processo de Poisson:

Definição 12 (Processo Binomial Misto)**.** *Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{Q}$ medidas de probabilidade em $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$ e $(X, \mathcal{X})$ respectivamente. Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção de elementos aleatórios independentes em X com distribuição $\mathbb{Q}$ e κ uma variável aleatória em $\mathbb{N}_0$ com distribuição $\mathbb{V}$, independente de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Então, $\eta : \mathcal{X} \times \Omega \to \mathbb{N}_0$ dado por*

$$\eta = \eta(\cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^{\kappa(\cdot)} \delta(\cdot)_{X_i(\cdot)} = \sum_{i=1}^{\kappa} \delta_{X_i}$$

é dito um processo binomial misto com distribuições de mistura $\mathbb{V}$ e amostral $\mathbb{Q}$ respectivamente.

A existência do processo binomial misto é uma consequência direta do Teorema de Lomnicki-Ulam. De fato, escolhendo

$$\{(\mathbb{X}_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_{t\in T} = \{(X, \mathcal{X}, \mathbb{Q})\} \,\forall\, \mathrm{t} \in \mathbb{N},$$

$$\{(\mathbb{X}_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_{n=\gamma} = \{(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{V})\},$$

com $T^* = \mathbb{N} \times \{\gamma\}$, obtemos pelo Teorema 5 a existência de elementos aleatórios no espaço

$$\{(\mathbb{X}_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)\}_{t\in T^*} = \left((\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} X) \times \mathbb{N}_0, (\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}) \otimes 2^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{P} \right),$$

onde $\mathbb{P}$ é o limite projetivo, que o leitor pode interpretar simplesmente como a medida resultante do teorema de Lomnicki-Ulam [1], de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{V}$ dado pelo Teorema de Lomnicki-Ulam (HOFFMANN-JØRGENSEN, 1991). De fato, pelo Teorema de Lomnicki-Ulam, e considerando a versão canônica do processo binomial (HOFFMANN-JØRGENSEN, 1991), podemos identificar os dois espaços

$$\{(\mathbb{X}_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)\}_{t\in T} \simeq \left((\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} X) \times \mathbb{N}_0, (\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}) \otimes 2^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{P} \right),$$

A identificação consiste em mapear o espaço de probabilidade base, i.e, o espaço de probabilidade onde o elemento está originalmente definido, no espaço de probabilidade da distribuição do elemento aleatório obtido pelo teorema de existência (note que isto sempre pode ser feito, vide (HOFFMANN-JØRGENSEN, 1991)). Ou seja, vemos os elementos aleatórios como um conjunto de caminhos no espaço de probabilidade definido pelo teorema de limite projetivo (HOFFMANN-JØRGENSEN, 1991) (a justificativa das questões de mensurabilidade podem ser encontradas no Lema 4.3 de (KALLENBERG, 2021, p. 81)). Assim, segue diretamente do fato de que a soma e composição de elementos aleatórios mensuráveis são funções mensuráveis, que o processo Binomial misto está bem definido e existe no espaço de caminhos acima.

A partir daqui, sempre que assumirmos a existência de elementos aleatórios independentes, a menos dito o contrário, estaremos assumindo uma estrutura para o espaço de probabilidade do tipo dada pelo Teorema de Lomnicki-Ulam. Assim, toda as operações com respeito a uma medida envolvendo tais elementos serão dadas com respeito à medida dada pelo limite projetivo - i.e, a distribuição (marginal ou conjunta) do processo (ou processos, no caso marginal).

A importância da hipótese de independência na construção do processo Binomial misto torna-se clara no contexto de teoremas de existência como Lomnicki-Ulam. De fato, por esta hipótese, podemos construir processos formados mensuravelmente (i.e,

[1] Detalharemos esta definição no capítulo 2.

utilizando operações como somas, composições, produtos e limites de funções mensuráveis) por elementos aleatórios independentes utilizando o Teorema de Lomnicki-Ulam, que não assume qualquer tipo de estrutura topológica do espaço de probabilidade ou do espaço de estados dos processos. Assim, a existência torna-se uma questão puramente probabilística/de teoria da medida, sem apelar para a forma com a qual a topologia do espaço se comporta (i.e, a quantidade de abertos, a presença de conjuntos compactos, etc). Como consequência, nos próximos dois resultados, veremos como esse fato permite um teorema de existência geral para o processo de Poisson. Posteriormente, formas topológicas do teorema serão comparadas com este. Neste caso, temos (LAST; PENROSE, 2018, p. 35):

Proposição 3 (Processos: Poisson por Binomial)**.** *Seja $\mathbb{Q}$ uma medida de probabilidade em $(X, \mathcal{X})$ e seja $\gamma \geqslant 0$ uma constante. Suponha η um processo binomial misto com distribuição de mistura $Po(\gamma)$ e distribuição amostral $\mathbb{Q}$. Então, η é um processo de Poisson com medida de intensidade $\gamma\mathbb{Q}$.*

Demonstração. Sejam κ e $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como na Definição 12. Vamos provar as propriedades (i) e (ii) da Definição 10 do processo de Poisson simultaneamente. Para isso, seguiremos a técnica de demonstração da Proposição 3.5 homônima de (LAST; PENROSE, 2018, p. 35).

Assim, sejam, no contexto da propriedade (ii), conjuntos dois-a-dois disjuntos $\mathcal{X}$-mensuráveis $B_1, ..., B_m$, e assuma que $X = \bigcup_{i=1}^{m} B_m$. Note que podemos assumir isto sem perda de generalidade, visto que, no contexto da demonstração, se existir um B^* disjunto (i.e, $B^* = (\bigcup_{i=1}^{m} B_i)^c$) de $B_1, ..., B_m$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{m} B_i \cup B^*$, basta adicionarmos o complementar na sequência, e a solução torna-se adicionar mais um termo numa distribuição multinomial (o que podemos fazer sem problemas).

Desse modo, suponha $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}_0$ e defina $k = \sum_{i=1}^{m} k_i$. Assim, pela definição do processo binomial misto,

$$\mathbb{P}(\eta(B_1) = k_1, \dots, \eta(B_m) = k_m) = \mathbb{P}(\kappa = k)\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\{X_j \in B_1\}} = k_1, \dots, \sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\{X_j \in B_m\}} = k_m\right)$$

A interpretação da segunda medida de probabilidade do lado direito da igualdade pode ser interpretado como a probabilidade de se escolher, num total de k objetos, k_1 do conjunto B_1, ..., k_m do conjunto B_m, com reposição e de maneira ordenada. Isto é, temos uma medida, ou distribuição, multinomial. Assim, pelo fato de κ possuir distribuição Po(γ),

$$\mathbb{P}(\eta(B_1) = k_1, ..., \eta(B_m) = k_m) = \prod_{j=1}^{m} \frac{(\gamma\mathbb{Q}(B_j))^{k_j}}{k_j!} e^{\gamma\mathbb{Q}(B_j)}.$$

Desse modo, vemos que, para cada $i = 1, ..., m$:

$$\mathbb{P}(\eta(B_i) = k_i) = \sum_{k_l, l \neq i} \mathbb{P}(\eta(B_1) = k_1, ..., \eta(B_m) = k_m)$$
$$= \sum_{k_l, l \neq i} \prod_{j=1}^{m} \frac{(\gamma \mathbb{Q}(B_j))^{k_j}}{k_j!} e^{\gamma \mathbb{Q}(B_j)} = \frac{(\gamma \mathbb{Q}(B_j))^{k_i}}{k_i!} e^{\gamma \mathbb{Q}(B_i)}.$$

Por um argumento de classe monótona idêntico ao do Teorema 5, concluímos que $\eta(B_i)$, para $i = 1, ..., m$, possui distribuição de Poisson. Similarmente, como a distribuição conjunta de todas as variáveis $\eta(B_i)$, para $i = 1, ..., m$, pode ser fatorada num produto para cada conjunto num sistema-π da σ-álgebra do espaço imagem $\mathbb{N}_0$ das variáveis Poisson, concluímos independência. Finalizamos a demonstração, visto que verificamos as condições da definição do processo de Poisson.

□

Assim, podemos exibir uma demonstração da existência do Processo de Poisson (LAST; PENROSE, 2018, p. 21):

Teorema 8 (Processo de Poisson: Existência)**.** *Seja λ uma medida s-finita em $(X, \mathcal{X})$. Então, existe um processo de Poisson em X com medida de intensidade λ.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes: um para o caso de intensidade finita, e outro para o caso de medida de intensidade infinita.

No primeiro caso, isto é, $0 < \lambda(X) < \infty$ (o caso de $\lambda(X) = 0$ é direto, visto que neste caso temos um processo nulo), considere o espaço produto do processo Binomial misto, construído pelo teorema de Lomnicki-Ulam, e dado por

$$\left((\bigtimes_{n \in \mathbb{N}} X) \times \mathbb{N}_0, (\bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}) \otimes 2^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{P} \right),$$

que é, por sua vez, formado pelo produto dos espaços de distribuição de elementos aleatórios $\kappa, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, com κ tomando valores em $\mathbb{N}_0$ e possuindo distribuição $\text{Po}(\lambda(X))$, e $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sequência de elementos aleatórios tomando valores em X e possuindo distribuição $\dfrac{\lambda}{\lambda(X)}$. Desse modo, considere o processo binomial misto η construído nesse espaço (por Lomnicki-Ulam, como indicado) como na Definição 12. Assim, pela Proposição 3, η é um processo de Poisson com medida de intensidade λ.

Para o caso $\lambda(X) = \infty$, vamos utilizar a hipótese de λ ser s-finita de maneira essencial. Note que, por esta hipótese, existe uma sequência de medidas finitas positivas $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ em $(X, \mathcal{X})$ tal que $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$. Assim, pelo teorema de Lomnicki-Ulam, considere uma sequência de processos de Poisson independentes $\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ no espaço do limite projetivo obtido pela aplicação do Teorema de Lomnicki-Ulam em $\mathbb{N}$ cópias do espaço $((\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} X) \times \mathbb{N}_0, (\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}) \otimes 2^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$, cada um com medida de intensidade λ_i. Assim, pelo teorema da superposição (Teorema 6),

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$$

É um processo de Poisson com (medida de) intensidade λ, o que completa a demonstração.

$\square$

A partir da demonstração anterior, vemos que, sempre dada uma medida de intensidade s-finita λ em $(X, \mathcal{X})$, é possível construir um processo de Poisson num espaço de probabilidade apropriado. Assim como fazem (LAST; PENROSE, 2018, p. 22), vamos exibir um corolário descrevendo brevemente como obter este espaço, algo que já está contido, de uma forma ou outra, no Teorema 8 :

Corolário 1 (Espaço de Probabilidade do Processo de Poisson)**.** *Seja λ uma medida s-finita em $(X, \mathcal{X})$. Então, existe um espaço de probabilidade $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ no qual estão definidos elementos aleatórios $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, com valores em X, e κ, com valores em $\overline{\mathbb{N}}_0$, tais que*

$$\eta = \sum_{i=1}^{\kappa} \delta_{X_i}$$

é um processo de Poisson com (medida de) intensidade λ.

Demonstração. O corolário é consequência da utilização do Teorema de Lomnicki-Ulam no Teorema 8. De fato, considerando que λ é s-finita, escolha $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ as medidas finitas positivas como dadas no teorema anterior. Defina $\gamma_i = \lambda(X)$, $\mathbb{Q}_i = \dfrac{\lambda_i}{\gamma_i}$ e $\mathbb{P}_\alpha = \mathbb{V} = \mathrm{Po}(\gamma)$. Assim, escolhendo

$$\{(\mathbb{X}_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_{t\in T} = \{(X, \mathcal{X}, \mathbb{Q})\}, \quad \forall\, \mathrm{t} \in \mathbb{N},$$

e

$$\{(\mathbb{X}_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_{\gamma} = \{(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{V})\}.$$

Com $T^* = \mathbb{N} \times \{\alpha\}$, obtemos, pelo Teorema de Lomnicki-Ulam, a existência de elementos aleatórios no espaço

$$\{(\mathbb{X}_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)\}_{t\in T^*} = \left((\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} X) \times \mathbb{N}_0, (\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}) \otimes 2_0^{\mathbb{N}}, \mathbb{P} \right),$$

onde $\mathbb{P}$ é o limite projetivo de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{V}$ dado pelo Teorema de Lomnicki-Ulam. Esta primeira operação nos permite obter os elementos aleatórios $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, com valores em X, e κ, com valores em $\overline{\mathbb{N}}_0$, com distribuições $\mathbb{Q}_i$ e $\mathrm{Po}(\lambda)$ respectivamente. Repetindo a operação, mas agora com a seguinte escolha:

$$\{(\mathbb{X}_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_{l \in \mathcal{L}} = \left((\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} X) \times \mathbb{N}_0, (\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}) \otimes 2_0^{\mathbb{N}}, \mathbb{P} \right).$$

Desse modo obtemos um espaço com um limite projetivo dado pelo teorema de Lomnicki-Ulam aplicado ao espaço produto de $\{(\mathbb{X}_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_{l \in \mathcal{L}}$, onde cada processo canônico (como no enunciado do teorema de Lomnicki-Ulam) definido pelas projeções nas componentes do espaço produto são cópias dos elementos aleatórios $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, com valores em X, e κ. Assim, denotando por

$$\left(\bigtimes_{j\in\mathbb{N}} \left(\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} X \times \mathbb{N}_0 \right)_j, \bigotimes_{j\in\mathbb{N}} \left(\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X} \otimes 2^{\mathbb{N}_0} \right)_j, \mathbb{P}^* \right)$$

o espaço do limite projetivo de $\{(\mathbb{X}_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)\}_{l \in \mathcal{L}}$, e escolhendo

$$(\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{P}) = \left(\bigtimes_{j\in\mathbb{N}} \left(\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} X \times \mathbb{N}_0 \right)_j, \bigotimes_{j\in\mathbb{N}} \left(\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X} \otimes 2^{\mathbb{N}_0} \right)_j, \mathbb{P}^* \right),$$

obtemos um espaço de probabilidade com cópias (dadas pelas projeções, i.e processos canônicos) de elementos aleatórios independentes κ_i com distribuição $\mathrm{Po}(\lambda_i)$ e $\{X_{ij}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ com distribuição $\mathbb{Q}_i$, tais que

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$$

define um processo de Poisson em $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, com a mesma notação do Teorema 8. Cada processo de Poisson individual η_i é formado pelo "algoritmo" de construção do processo binomial misto com base em κ_i com distribuição $\mathrm{Po}(\lambda_i)$ e $\{X_{ij}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ com distribuição $\mathbb{Q}_i$. Note que o algoritmo envolve limites, somas e composições de elementos aleatórios mensuráveis, logo é mensurável. Assim, demonstramos a existência do espaço de probabilidade citado no enunciado.

□

Uma consequência das últimas duas demonstrações é a de que todo processo de Poisson construído a partir do Teorema 8 possui uma versão (em distribuição) própria, como na Definição 4 . Essa é uma propriedade distribucional bastante útil, visto que a forma própria de um processo deste tipo, ou seja, a forma de um processo binomial, é bastante tratável do ponto de vista de medidas de probabilidade (i.e, calcular distribuições, etc.) - vide o Capítulo 3 de (KALLENBERG, 2017).

Apesar disso, neste nível de generalidade, é possível construir versões não-próprias de um processo de Poisson, analogamente à 1:

Proposição 4 (Processo de Poisson Impróprio)**.** *Existe um espaço de medida $(X, \mathcal{X})$ equipado com uma medida s-finita λ tal que, dado um processo de Poisson η neste espaço com (medida de) intensidade λ, este possui uma versão que não é própria.*

Demonstração. Considere $X = [0,1]$ e $\mathcal{X} = \sigma(\{\{x\} : x \in [0,1]\})$, isto é:

$$\mathcal{X} = \{A \subseteq X : A \text{ é contável ou } A^c \text{ é contável}\}$$

Defina, em $(X, \mathcal{X})$, a medida de Dieudonné restrita dada por:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A^c \text{ é contável} \\ 0 & \text{se A é contável} \end{cases}$$

Notemos que, como trata-se de uma medida finita, esta também é s-finita - mais ainda, $\mu \in N(X)$. Assim, pelo Teorema 8, existe um processo de Poisson η em X com (medida de) intensidade μ. Vamos provar que este não é necessariamente próprio (i.e, existem conjuntos em $\mathcal{X}$ tal que $\eta(\omega, A)$ não é uma soma de Dirac). De fato, suponha que, $\forall A \in \mathcal{X}$ e $\forall \omega \in \Omega$, η possua representação própria em termos do Corolário 1 na forma

$$\eta = \sum_{i=1}^{\kappa} \delta_{X_i}.$$

Tome $A \in \mathcal{X}$ tal que A é contável, e $A' \in \mathcal{X}$ com $(A')^c$ contável. Podemos escolher A e A' disjuntos. Assim, temos que o seguinte conjunto é $\mathcal{N}(X)$-mensurável (pois é intersecção de conjuntos geradores):

$$\{\mu^* : \mu^*(A) = 0,\ \mu^*(A') = 1\}.$$

Mas, pela propriedade de independência completa de η, temos que

$$P_\eta(\{\mu^* : \mu^*(A) = 0,\ \mu^*(A') = 1\}) = P(\eta(A) = 0)P(\eta(A') = 1) > 0.$$

Assim, existe ω num conjunto não-nulo e mensurável em Ω tal que:

$$\eta(B, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } B = A, \\ 0 & \text{se } B = A'. \end{cases}$$

Neste caso, $\eta(\omega, A) = \mu(A)$. Mas, temos que $\mu(A) \neq \sum_{i=1}^{\kappa(\omega)} \delta_{X_i(\omega)}$. De fato, escolha, por exemplo, $A = X_1(\omega)$ e $A' = [0,1] \backslash X_1(\omega)$. Estes satisfazem os passos acima, mas, neste caso,

$$\sum_{i=1}^{\kappa(\omega)} \delta(A)_{X_i(\omega)} = 1,$$

$$\mu(A) = 0.$$

Assim, temos que o processo de Poisson η não é necessariamente próprio. O que termina o exemplo.

□

Outras demonstrações de existência para o caso de um processo de Poisson em espaços abstratos, com diferentes hipóteses mensuráveis, podem ser vistas em, por exemplo, (FREMLIN, 2006) e (KINGMAN, 2006).

Discussões adicionais sobre propriedades (de caminhos amostrais de) representações próprias, além de outros teoremas de decomposição atômica que não serão tratados nesta dissertação, podem ser vistos no Capítulo 1 de (DALEY; VERE-JONES, 2008).

A partir de agora, para o resto do capítulo, estudaremos algumas propriedades de transformações de processos pontuais.

1.4 Transformações de Processos Pontuais

Nesta Seção, discutiremos brevemente operadores agindo no espaço de caminhos de processos pontuais, isto é, em $N(X)$. A motivação de tais técnicas algébricas pode ser observada, por exemplo, na teoria de inferência de processos em variedades: dado um processo pontual num estado ambiente sem curvatura, é possível afirmar que mapeando este numa dada carta de uma variedade, há preservação de sua estrutura distribucional, ou melhor, da estrutura de seus caminhos? Outra operação bastante importante do ponto de vista estatístico é a chamada de "*thinning*" que, basicamente, consiste em remover pontos do processo (i.e, realizações de seus caminhos) baseado em algum critério. Um exemplo clássico consiste na censura dos caminhos: se o processo é observado apenas em um conjunto fixo, podemos descartar todos os outros pontos provenientes de conjuntos disjuntos deste, através desta operação.

Sendo assim, trata-se de um tópico importantíssimo, tanto do ponto de vista da teoria geral de processos pontuais quanto da inferência destes. Para apresentar algumas ideias deste tópico, seguiremos o Capítulo 5 de (LAST; PENROSE, 2018). Também utilizaremos algumas ideias de (BRÉMAUD, 2020)

Para começar, vamos definir a noção de um "processo pontual transformado". Fixemos $(Y, \mathcal{Y})$ e $(X, \mathcal{X})$ dois espaços mensuráveis, e considere $T : X \to Y$ um mapa $\mathcal{Y}\backslash\mathcal{X}$-mensurável. Considere μ uma medida no espaço $(X, \mathcal{X})$, então:

Definição 13 (Push-forward de uma Medida). *Seja μ medida em $(X, \mathcal{X})$ e considere $T : X \to Y$ um mapa $\mathcal{Y}\backslash\mathcal{X}$-mensurável. Então, a medida $T * \mu = T(\mu) : \mathcal{Y} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dada por*

$$T(\mu) = \mu(T^{-1}(C)), \; C \in \mathcal{Y},$$

é dita a medida push-forward de μ por T ou, numa linguagem comumente utilizada em teoria da probabilidade, a medida imagem de μ por T.

Dado este conceito, que já utilizamos no Teorema da Superposição (6), podemos apresentar a definição de um processo pontual transformado por um mapa mensurável.

Definição 14 (Processo Pontual Transformado)**.** *Seja η um processo pontual no espaço $(X, \mathcal{X})$, e considere $T : X \to Y$ um mapa $\mathcal{Y}\backslash\mathcal{X}$-mensurável. Assim, dizemos que o processo $T(\eta) : \Omega \to N(Y)$ definido por*

$$T(\eta)(\omega) = T(\eta(\omega)) = \eta(\omega, T^{-1}(C)),$$

para cada $C \in \mathcal{Y}$, é dita a transformação do processo pontual η por T, ou processo pontual transformado (quando não há possibilidade de confusão sobre o mapa em questão).

Antes de prosseguirmos, precisamos mostrar que tal definição é bem posta, ou seja, que de fato $T(\eta)$ é um processo pontual no espaço Y. A demonstração deste fato garante uma resposta para uma das perguntas feitas no início desta Seção: de fato, um mapa mensurável preserva a estrutura de um processo pontual (LAST; PENROSE, 2018, p. 38):

Teorema 9 (Transformações Estruturais de Processos Pontuais)**.** *Seja η um processo pontual em X com medida de intensidade s-finita λ, e considere $T : X \to Y$ um mapa $\mathcal{Y}\backslash\mathcal{X}$-mensurável. Então, o processo $T(\eta)$, como na Definição 14, é um processo pontual em Y com medida de intensidade dada pelo push-forward de λ por T, $T(\lambda)$.*

Demonstração. Relembremos que, para provar que $T(\eta)$ é de fato um processo pontual, devemos mostrar duas propriedades (3):

- Para cada $\omega \in \Omega$, $T(\eta(\omega))(\cdot) = \eta(\omega, T^{-1}(\cdot))$ é uma medida s-finita em $(Y, \mathcal{Y})$ com valores discretos (i.e, em $\overline{\mathbb{N}}_0$).
- $T(\eta) : \Omega \to N(Y)$ é um mapa $\mathcal{N}(Y)\backslash\mathcal{F}$-mensurável.

Para o primeiro item, sejam μ é uma medida s-finita qualquer em $(X, \mathcal{X})$ e $J : X \to Y$ um mapa $\mathcal{Y}\backslash\mathcal{X}$-mensurável, então para qualquer $C \in \mathcal{X}$

$$\mu(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(C).$$

Com $\{\mu_n\}$ uma coleção de medidas finitas em $(Y, \mathcal{Y})$. Desse modo, temos que

$$J(\mu) = \mu(J^{-1}(D)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(J^{-1}(D)) = \sum_{n=1}^{\infty} J(\mu)_n(D),$$

com $\{T(\mu)_n\}$ uma coleção de medidas finitas em $(Y, \mathcal{Y})$ e $D \in \mathcal{Y}$ qualquer. Assim, concluímos que o push-forward de uma medida s-finita por um mapa mensurável é s-finita. Desse modo, no caso de um processo pontual, para cada $\omega \in \Omega$, $T(\eta(\omega))(\cdot)$ é, por construção, o push-forward de uma medida s-finita em $(X, \mathcal{X})$ por $T : X \to Y$ um mapa $\mathcal{Y}\backslash\mathcal{X}$-mensurável, e logo uma medida s-finita em $(Y, \mathcal{Y})$. Isso prova o primeiro item.

Para o segundo, notemos que, por η ser um processo pontual em X,

$$\{\omega : \eta(\omega, C) = k\} \in \mathcal{F}, \ \forall C \in \mathcal{X} \text{ e } k \in \overline{\mathbb{N}}_0,$$

onde este conjunto é dado por $\eta^{-1}(\mathcal{A}_{C,k})$ com

$$\mathcal{A}_{C,k} = \{\mu : \mu(C) = k\},, \ C \in \mathcal{X} \text{ e } k \in \overline{\mathbb{N}}_0,$$

que, segundo o Lema 1, a coleção destes gera a σ-álgebra $\mathcal{N}(X)$. Mas, note que, destas relações e do Teorema 136G de (FREMLIN, 2000, p. 92), concluímos a mensurabilidade afirmada no segundo item acima, visto que para um $\mathcal{A}_{C,k}$ qualquer

$$(T \circ \eta)^{-1}(\mathcal{A}_{C,k}) = \{\omega : \eta(\omega, T^{-1}(C))\} \in \mathcal{F},$$

para $C \in \mathcal{X}$ qualquer e $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$ qualquer. Isto prova a afirmação sobre a preservação de estrutura de processo pontual. Para o segundo ponto do teorema ,isto é, que $T(\eta) : \Omega \to N(Y)$ possui intensidade dada, note que, para qualquer $D \in \mathcal{X}$, $\mathbb{E}(\eta)(D) = \lambda(D)$. Assim, com a mesma notação,

$$E(\eta)(D) = \lambda(T^{-1}(D)) = T(\lambda)(C).$$

Portanto, $T(\eta)$ possui intensidade $T(\lambda)$ como afirmado.

□

Para o caso do processo de Poisson, temos um resultado estrutural de transformação (LAST; PENROSE, 2018, p. 38):

Teorema 10 (Transformação Estrutural de um Processo de Poisson)**.** *Seja η um processo de Poisson no espaço X com medida de intensidade s-finita λ. Então, $T(\eta)$, como na Definição 14, é um processo de Poisson em Y com medida de intensidade $T(\lambda)$.*

Demonstração. A afirmação sobre a intensidade é consequência direta do Teorema 9. Para a invariância da transformação, precisamos verificar as duas condições da Definição 10 (definição do processo de Poisson). Mas, a verificação é direta, visto que:

(i) Por definição de η, $\forall B \in \mathcal{X}$ a distribuição de $\eta(\cdot, B)$ é Poisson com parâmetro $\lambda(\cdot, B)$. Desse modo, com $D \in \mathcal{Y}$ qualquer, temos que $T(\eta)(\cdot, D) = \eta(\cdot, T^{-1}(D))$ possui distribuição de Poisson com parâmetro $T(\lambda)(B)$ (segundo o Teorema 9).

(ii) Por definição de η, $\forall m \in \mathbb{N}$ e $\forall B_1, ..., B_m$ sequência disjunta mensurável de conjuntos em $\mathcal{X}$, a sequência de variáveis aleatórias $\{\eta(\cdot, B_i)\}_{i=1}^m$ é independente. Assim, $\{\eta(\cdot, T^{-1}(D_i))\}_{i=1}^m = \{T(\eta(\cdot, D_i))\}_{i=1}^m$ forma uma sequência independente para qualquer coleção disjunta de conjuntos $D_1, ..., D_m$ em $\mathcal{Y}$.

O que conclui a verificação das duas propriedades que definem o processo de Poisson.

□

Para um exemplo instrutivo, consideremos a translação de um processo de Poisson próprio em um espaço Euclidiano. (baseado no Exemplo 3.4.5 de (BRÉMAUD, 2020, p. 90)):

Exemplo. 0.4.1 (Translações) Seja η um processo de Poisson próprio em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ com medida de intensidade s-finita λ, isto é, um processo da forma

$$\eta = \sum_{i}^{\kappa} \delta_{X_i},$$

com $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma coleção de vetores aleatórios independentes em $\mathbb{R}^n$ e κ uma variável aleatória em $\overline{\mathbb{N}}_0$ independente de $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Agora, considere a transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$x \mapsto x + y,$$

com $x, y \in \mathbb{R}^n$. Assim, seja $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma coleção de vetores aleatórios independentes em $\mathbb{R}^n$ com distribuição $\mathbb{P}_Y$, e defina o processo aleatório η^* em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$T(\eta) = \eta^* = \eta = \sum_{i}^{\kappa} \delta_{X_i+Y_i},$$

que, pelo Teorema 10 é um processo de Poisson em $\mathbb{R}^n$ com medida de intensidade s-finita dada por

$$T(\lambda)(C) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}_Y(C - x)\lambda(dx),$$

com $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, que é a convolução das medidas $\mathbb{P}_Y$ e λ. ▲

De acordo com a introdução desta seção, a operação de remover pontos da realização de um processo pontual possui um papel importante na teoria estatística, e de convergência (vide o Capítulo 4 de (KALLENBERG, 2017)), destes processos. Para um estudo formal, começamos com a definição da seguinte operação ((LAST; PENROSE, 2018, p. 40)):

Definição 15 (Marcas de Processos Pontuais)**.** *Seja* $\eta = \sum_{n=1}^{\kappa} \delta_{X_n}$ *um processo pontual próprio em* X*. Seja* Q *um núcleo de probabilidade de* X *à* Y*. Seja* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma coleção* *de elementos aleatórios em* Y *tal que* $\mathbb{P}(Y_n \in \cdot \mid \kappa = m, X_n, \{X_k\}_{k \neq n}) = Q(X_n, \cdot)$, $n \leqslant m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. *Além disso, suponha que,* $Y_n \perp\!\!\!\perp_{\{\kappa = m, \{X_{m \leqslant n}\}\}} Y_k$ [2] *para* $k \neq n$ *e* $n \leqslant m$. *Então, o processo pontual dado por:*

$$\xi = \sum_{n=1}^{\kappa} \delta_{(X_n, Y_n)},$$

é dito o processo pontual Q*-marcado de* η.

Seguindo (LAST; PENROSE, 2018, p. 40), provemos que, se os elementos aleatórios da Definição 15, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existem, então podemos modificar o espaço de probabilidade do processo pontual η para suportar a Q-marca ξ. Para isso, precisamos do Teorema de Ionescu-Tulcea (KALLENBERG, 2021, p. 180):

Teorema 11 (Ionescu-Tulcea)**.** *Para qualquer coleção contável de espaços mensuráveis* $\{(S_n, \mathcal{S}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, *e núcleos de probabilidade* $\mu_n : S_1 \times \cdots \times S_{n-1} \to S_n$, $n \in \mathbb{N}$, *existem elementos aleatórios* $X_n \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$, *definidos num espaço de probabilidade comum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *tal que as distribuições de dimensão finita são dadas por*

$$\mathbb{P}_{X_1, \ldots, X_n}(A_1, \ldots, A_n) = \int_{A_1} \left(\int_{A_2} \cdots \left(\int_{A_n} \mu_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, dx_n) \right) \cdots \mu_2(x_1, dx_2) \right) \mu_1(dx_1).$$

A construção do espaço de probabilidade que suporta os elementos aleatórios da Definição 15, desse modo, será feita utilizando o Teorema 11 em um número contável de passos (para mais detalhes desta construção, veja (THORISSON, 2000)). Neste caso, suponha que a distribuição condicional de $Y_1 | X_1$, $Q(X_1(\omega), \cdot)$, definida como um núcleo de Ω em $\mathbb{Y}_1$ esteja bem definida. Assim, pelo Teorema de Ionescu-Tulcea, existe um espaço de probabilidade $(\overline{\Omega}, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{P}})$ tal que a distribuição conjunta dos elementos aleatórios pode ser escrita como:

$$\overline{\mathbb{P}}_{\kappa, X_1, \ldots, X_n, Y_1}(N_1, A_1, \cdots, A_n, B) = \overline{\mathbb{P}}_{\kappa}(N_1) \overline{\mathbb{P}}_{X_2}(A_2) \cdots \overline{\mathbb{P}}_{X_{n-1}}(A_{n-1}) \int_{A_1} Q(x_1, B) \overline{\mathbb{P}}_{X_1}(dx_1).$$

Note que isso corresponde a escolher os núcleos como distribuições de elementos aleatórios independentes no caso dos X e κ. Mas, por construção, com $B \in \mathcal{Y}$ e $A \in 2^{\overline{\mathbb{N}}_0} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} X)$:

$$\overline{\mathbb{P}}(\{Y_1 \in B\}, \{(\kappa, X_1, \ldots, X_n) \in A\}) = \int_A Q(x_1, B) \overline{\mathbb{P}}_{\kappa, X_1, \ldots, X_n}.$$

[2] Aqui, o uso de $\perp\!\!\!\perp$ consiste na notação de (KALLENBERG, 2021) para independência condicional de elementos aleatórios.

Desse modo,

$$\int_A Q(x_1, B)\overline{\mathbb{P}}_{\kappa,X_1,\ldots,X_n} = \int_A P(Y_1 \in B|\kappa, x_1, \{x_k\}_{k\neq 1})\overline{\mathbb{P}}_{\kappa,X_1,\ldots,X_n}.$$

Assim, $\overline{\mathbb{P}}(Y_1 \in B|\kappa = m, X_1, \{X_{n\neq 1}\}) = Q(X_1, B)$, de modo que a independência condicional realmente está verificada.

Agora, queremos introduzir uma outra variável Y_2 condicionalmente independente de Y_1, dados $\kappa = m, \{X_n\}_{n\leq m}$, tal que $P(Y_2 \in A|\kappa = m, X_2, \{X_i\}_{i\neq 2}) = Q(X_2, A)$. Para isso, utilizamos o Teorema de Ionescu-Tulcea novamente, pelo qual podemos afirmar a existência da seguinte distribuição conjunta num dado espaço de probabilidade $(\overline{\Omega}, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{P}})$ tal que:

$$\overline{\mathbb{P}}_{\kappa,X_1,\ldots,X_n,Y_1,Y_2}(N_1, A_1, \cdots, A_n, B_1, B_2) =$$

$$\overline{\mathbb{P}}_\kappa(N_1)\overline{\mathbb{P}}_{X_3}(A_3)\cdots\overline{\mathbb{P}}_{X_{n-1}}(A_{n-1})\left(\int_{A_1} Q(x_1, B)\overline{\mathbb{P}}_{X_1}(dx_1)\right)\left(\int_{A_2} Q(x_2, B_2)\overline{\mathbb{P}}_{X_2}(dx_2)\right),$$

que corresponde a uma distribuição conjunta onde vale a independência condicional de Y_1 e Y_2 como citada na Definição 15. De fato, pela definição de distribuição condicional, com $(B_1, B_2) \in \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{Y}$ e $A \in 2^{\overline{\mathbb{N}}_0} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} X)$,

$$\overline{\mathbb{P}}(\{\kappa \in N_1, X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n, Y_1 \in B_1, Y_2 \in B_2\}) =$$

$$\int_{N_1}\int_{A_1}\cdots\int_{A_n} \overline{\mathbb{P}}(Y_1 \in B_1, Y_2 \in B_2|\kappa, x_1, \ldots, x_n)\overline{\mathbb{P}}_{\kappa,X_1,\cdots,X_n}(dx_1, \cdots, dx_n).$$

Mas, por construção, o lado esquerdo é igual a

$$\int_{N_1}\int_{A_1}\cdots\int_{A_n} Q(x_1, B_1)Q(x_2, B_2)\overline{\mathbb{P}}_{\kappa,X_1,\cdots,X_n}(dx_1, \cdots, dx_n),$$

com $Q(X_1, B_1) = \mathbb{P}(Y_1 \in B_1|\kappa, X_1, \{X_i\}_{i\neq 1})$ e $Q(X_2, B_2) = \mathbb{P}(Y_2 \in B_2|\kappa, X_2, \{X_i\}_{i\neq 2})$. Assim, temos quase certamente - $\mathbb{P}$:

$$\overline{\mathbb{P}}(Y_1 \in B_1, Y_2 \in B_2|\kappa, X_1, \ldots, X_n) = Q(X_1, B_1) \cdot Q(X_2, B_2) =$$

$$\overline{\mathbb{P}}(Y_1 \in B_1|\kappa, X_1, \{X_i\}_{i\neq 1}) \cdot \overline{\mathbb{P}}(Y_2 \in B_2|\kappa, X_2, \{X_i\}_{i\neq 2}),$$

que, por definição, implica na independência condicional.

Sendo assim, repetindo o primeiro procedimento de extensão condicional, podemos obter um espaço de probabilidade único, derivado do Teorema de Ionescu-Tulcea, no qual todas as variáveis estão definidas conjuntamente (i.e, um espaço que suporta todas elas). Para o resultado principal de obter um espaço de probabilidade que suporta todos os elementos aleatórios da Definição 15, repetimos este procedimento um número equivalente à $card(\mathbb{N})$, que é possível graças ao Teorema de Ionescu-Tulcea, e obtemos um espaço de probabilidade indicado por Last e Penrose (2017), onde todas as marcas e elementos aleatórios que compõe o processo η estão definidos conjuntamente. Essencialmente, trata-se de uma construção de um espaço produto com contáveis cópias do espaço Y (LAST; PENROSE, 2018, pp. 40-41).

Esta construção permite garantir que a definição de um processo pontual marcado, Definição 15, é consistente do ponto de vista mensurável - isto é, existem espaços de probabilidade que suportam os elementos aleatórios citados conjuntamente.

Garantida a boa definição do procedimento de marcas, temos os seguintes resultados de caracterização distribucional (LAST; PENROSE, 2018, pp. 41-42):

Teorema 12 (Funcional de Laplace de Marcas)**.** *Seja, seguindo a Definição 15, ξ uma Q-marca de um processo pontual próprio η em X. Então, o funcional de Laplace de ξ é dado por:*

$$L_\xi(f) = L_\eta(f^*),$$

com f função $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\backslash(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$-mensurável e $f^*(x) = -\log[\int_Y e^{-f(x,y)} Q(x, dy)]$.

A demonstração, que omitimos, mas que pode ser vista em (LAST; PENROSE, 2018, p. 41) consiste em utilizar as distribuições (condicionais) dadas pelo Teorema de Ionescu-Tulcea.

Ainda para o caso de um processo marcado qualquer, sendo (LAST; PENROSE, 2018, p. 41):

$$(\lambda \otimes Q)(C) = \int \int \mathbb{1}(x, y)_C Q(x, dy) \lambda(dx),$$

com $C \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, temos o seguinte resultado dado pela Proposição 5.5. de (LAST; PENROSE, 2018, p. 41):

Proposição 5. *Seja η um processo pontual próprio em X com medida de intensidade s-finita λ e seja, seguindo a Definição 15, ξ uma Q-marca de η. Então, ξ é um processo pontual em $X \times Y$ com medida de intensidade $\lambda \otimes Q$.*

A demonstração, que igualmente ao último resultado, omitimos, pode ser vista em (LAST; PENROSE, 2018, p. 42) (esta consiste numa aplicação da fórmula de Campbell-Slyvnyak-Mecke - veja o capítulo 6 de (KALLENBERG, 2017) ou a seção 2.2. de (LAST; PENROSE, 2018)).

Por fim, obtemos o análogo da Proposição 5 para o caso do processo de Poisson (LAST; PENROSE, 2018, p. 41):

Teorema 13 (Marca de um Processo de Poisson). *Seja η um processo de Poisson em X com medida de intensidade s-finita λ. seja, seguindo a Definição 15, ξ uma Q-marca de η. Então, ξ é um processo de Poisson com medida de intensidade (s-finita) $\lambda \otimes Q$.*

Para a demonstração do teorema, ver (LAST; PENROSE, 2018, p. 42).

Por fim, podemos utilizar a definição de um processo pontual marcado para definir rigorosamente a retirada de pontos de sua realização (LAST; PENROSE, 2018, p. 43):

Definição 16. *Thinning de um Processo Pontual Seja $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $\mathcal{B}([0,1])\backslash\mathcal{X}$ mensuráveis de X à $[0,1]$ tais que:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i(x) = 1, \;\; x \in X.$$

Defina um núcleo de probabilidade Q de X à $\mathbb{N}$ por:

$$Q(x, \{i\}) = p_i(x), \;\; x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Se ξ é, seguindo a Definição 15, uma Q-marca de um processo pontual η em X, então $\eta_i = \xi(\cdot \times \{i\})$ é dito um p_i-thinning de η para todo $i \in \mathbb{N}$.

A Proposição 5 garante que a operação de thinning de um processo pontual está bem definida. Para o processo de Poisson temos a seguinte construção (LAST; PENROSE, 2018, p. 43), que novamente omitimos a demonstração:

Teorema 14 (Thinning de um Processo de Poisson). *Seja ξ, seguindo a Definição 15, uma Q-marca de um processo de Poisson η em X, onde $Q(x, \{i\}) = p_i(x)$, $x \in X, n \in \mathbb{N}$. Então, $\eta_i = \xi(\cdot \times \{i\})$, com $i \in \mathbb{N}$, são processo de Poisson independentes.*

Este último resultado possui aplicações importantes na teoria de redução suficiente de experimentos estatísticos envolvendo o processo de Poisson, vide o Capítulo 6 de (KARR, 1991).

Para mais aplicações da teoria de transformações de processos pontuais, especialmente na construção de teoremas limite destes, veja as seções 1.10 e Capítulo 3 de (KERSTAN; MATTHES; MECKE, 1978) e o Capítulo 4 de (KALLENBERG, 2017)

Esta exposição da teoria de transformação de processos Pontuais encerra nossa discussão sobre os elementos fundantes da teoria abstrata do processo de Poisson. Mais informações neste sentido, especialmente da relação entre a teoria de integração de processos de Poisson e transformações deste, podem ser vistas no Capítulo 4 de (LAST; PENROSE, 2018).

2 Teoria dos Espaços Localizados

2.1 Processos Pontuais e Medidas Aleatórias em Espaços Mensuráveis Localizados

Para obtenção de resultados estruturais, como representações próprias de processos pontuais, além do estudo inferencial destes , especializaremos a teoria abstrata dos processos pontuais no contexto de uma estrutura que permita uma harmonia com a (possível) topologia ambiente do espaço X. Para isso, vamos seguir a abordagem da teoria dos espaços localizados por δ-anéis de (KALLENBERG, 2017). Trata-se de um desenvolvimento mais recente da teoria de processos pontuais da escola de Jena (KERSTAN; MATTHES; MECKE, 1978).

Em poucas palavras, a teoria consiste em definir uma estrutura auxiliar no espaço $(X, \mathcal{X})$, o espaço de estados dos processos pontuais/medidas aleatórias, de modo que estes possuam realizações, i.e, medidas, finitas numa classe pré-definida de conjuntos limitados. Vamos formalizar esta de limitação enquanto um "anel de localização"em X. Antes disso, fixemos uma notação: qualquer afirmação que envolva um espaço de probabilidade no contexto de um processo pontual, ou medida aleatória, subentende-se um espaço de probabilidade fixo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Seguindo (KALLENBERG, 2017, p. 19), definimos:

Definição 17 (Anel, $\delta - Anel$ e Semi-Anel mensuráveis)**.** *Para um espaço X, uma classe não-vazia de subconjuntos deste, $\mathcal{U}$, é dita um anel se esta é fechada sob uniões finitas e intersecções de elementos, e também por diferenças próprias, isto é:*

(i) Se $A, B \in \mathcal{U} \implies A \cup B \in \mathcal{U}$,

(ii) Se $A, B \in \mathcal{U} \implies A \cap B \in \mathcal{U}$,

(iii) Se $A, B \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq B$, então $B \backslash A \in \mathcal{U}$.

Se em (ii) podemos tomar intersecções contáveis, $\mathcal{U}$ é dito um δ-anel.

Por outro lado, dizemos que uma classe não-vazia de subconjuntos de X, $\mathcal{I}$, é dita um semi-anel se esta é fechada sob intersecções finitas e tal que cada diferença própria é união finita e disjunta de elementos da classe, isto é:

(i) Se $A, B \in \mathcal{U} \implies A \cap B \in \mathcal{U}$,

(ii) Se $A, B \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq B$, então existe $\{I_n\}_{n<\infty, n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}$ tal que $B \backslash A = \bigcup_n I_n$.

Agora, seja $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável qualquer. Seguindo (KALLENBERG, 2017, p. 19), temos que:

Definição 18 (Anel de Localização de um Espaço Mensurável)**.** *Seja $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável qualquer, e considere $\hat{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}$ uma classe de subconjuntos de X. Dizemos que $\hat{\mathcal{X}}$, um δ-anel, é um anel de localização de X se esta satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\hat{\mathcal{X}}$ é um subanel de $\mathcal{X}$,

(ii) Se $A \in \hat{\mathcal{X}}$ e $B \in \mathcal{X} \implies A \cap B \in \hat{\mathcal{X}}$,

(iii) $\hat{\mathcal{X}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{X} \cap O_n)$, para $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em $\hat{\mathcal{X}}$ tal que $O_n \uparrow X$.

Seguindo o autor, escrevemos que $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência localizadora em X, e dizemos que um conjunto mensurável é limitado se este pertence ao anel de localização (note que isso induz uma noção de ”limitação” em um espaço mensurável, mas sem uma topologia). Além disso, para homogenizarmos nossa notação, dizemos que $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ é um espaço mensurável localizado com anel de localização $\hat{\mathcal{X}}$, ou mesmo que $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ é um espaço localizado. Antes de prosseguirmos com alguns resultados sobre anéis de localização, mais uma definição que utilizaremos para resultados de existência de processos pontuais (KALLENBERG, 2021, p. 15):

Definição 19 (Classe Dissecante)**.** *Seja $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ um espaço mensurável localizado consistindo de um espaço standard Borel* [1] *X equipado com sua σ-álgebra Borel (gerada pela topologia polonesa de X) $\mathcal{X}$ e $\hat{\mathcal{X}}$ um anel de localização em X. Dizemos que uma classe de subconjuntos de X, $\mathcal{C}$, tal que $\mathcal{C} \subseteq \hat{\mathcal{X}}$,é uma classe dissecante se:*

(i) Qualquer conjunto aberto $G \subseteq X$ é uma união contável de elementos de $\mathcal{C}$,

(ii) Para qualquer $B \in \hat{\mathcal{X}}$, B possui uma cobertura finita por conjuntos de $\mathcal{C}$.

Da Definição 18, obtemos diretamente algumas propriedades gerais dos anéis de localização (KALLENBERG, 2017, p. 19):

Proposição 6 (Propriedades do Anel de Localização)**.** *Seja $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável qualquer, e considere $\hat{\mathcal{X}}$ um anel de localização de X. Assim,*

(i) $\hat{\mathcal{X}}$ é fechado sob a operação de intersecções contáveis,

(ii) Se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{\mathcal{X}}$ é uma sequência de conjuntos tal que $B_n \subset C \in \hat{\mathcal{X}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \hat{\mathcal{X}}$,

[1] Para a definição deste espaço, e algumas propriedades, veja (KALLENBERG, 2017, pp. 17-18)

(iii) $\mathcal{X}$ *é um anel de localização,*

(iv) *Dada uma sequência* $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ *tal que* $O_n \uparrow X$*, então* $\hat{\mathcal{X}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(O_n \cap \mathcal{X})$ *é um anel de localização de* X*.*

Omitimos a demonstração, que pode ser vista em (KALLENBERG, 2017, p. 19).

Alguns exemplos clássicos de anéis de localização na literatura podem ser vistos em (KALLENBERG, 2017, pp. 19-20):

(i) Seja X munido de uma topologia métrica (τ, d_X), com τ a coleção de abertos geradores pela métrica (em X) d_X, e coloque $\mathcal{X} = \mathcal{B}_\tau(X)$ a σ-álgebra Borel gerada pela topologia de X. Então, é possível encontrar uma cobertura contável de X consistindo de conjuntos Borel metricamente limitados. Assim, pela proposição 6, item (iv), podemos formar um anel de localização com esta cobertura de conjuntos.

(ii) Considere X munido de uma topologia τ tal que X seja um espaço topológico localmente compacto, Hausdorff e separável. Então, podemos encontrar uma cobertura contável de X consistindo de conjuntos relativamente compactos. Um anel de localização pode ser definido por $\hat{\mathcal{X}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(O_n \cap \mathcal{X})$ pela cobertura do espaço.

É importante lembrar o fato de que X não é, necessariamente, um elemento de $\hat{\mathcal{X}}$. Nos casos em que é possível verificar positivamente este fato, temos mais uma propriedade re regularidade de um anel de localização:

Proposição 7 (Anéis de Localização e a σ-álgebra $\mathcal{X}$)**.** *Considere* $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ *um espaço mensurável localizado tal que* $X \in \hat{\mathcal{X}}$*. Então,* $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$*.*

Demonstração. A inclusão $\hat{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}$ é válida por definição. Por outro lado, tome $A \in \mathcal{X}$ qualquer. Como $\hat{\mathcal{X}}$ é um anel de localização que contém X, note que, pela propriedade (ii) da Definição 18, $A \in \mathcal{X}, X \in \hat{\mathcal{X}} \implies X \cap A = A \in \hat{\mathcal{X}}$. Assim, $\mathcal{X} \subseteq \hat{\mathcal{X}}$. Logo, $\mathcal{X} = \hat{\mathcal{X}}$. □

Mais geralmente, temos que, dado um σ-anel gerado por uma classe de subconjuntos de X (HALMOS, 1950, p. 34), obtemos o seguinte resultado (RIPLEY, 1976, p. 984) :

Proposição 8 (σ-anéis e Anéis de Localização)**.** *Considere* $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ *um espaço mensurável localizado, e defina* $\sigma_r(\hat{\mathcal{X}})$ *o* σ*-anel gerado pelo anel de localização* $\hat{\mathcal{X}}$*. Se* $\hat{\mathcal{X}}$ *satisfaz:*

(i) $A \in \hat{\mathcal{X}}$ *e* $B \subseteq A \implies B \in \hat{\mathcal{X}}$ *(i.e,* $\hat{\mathcal{X}}$ *é hereditário),*

(ii) Se $A \in \hat{\mathcal{X}}$, então existe $B \in \hat{\mathcal{X}}$ com $A \subseteq B$ ($\hat{\mathcal{X}}$ é cofinal sob inclusão).

Então,

$$\sigma_r(\hat{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}.$$

Em particular, se $X \in \hat{\mathcal{X}}$, $\sigma_r(\hat{\mathcal{X}}) = \sigma(\hat{\mathcal{X}})$.

Em particular, segundo (RIPLEY, 1976, p. 984), este resultado é verdadeiro no caso de qualquer espaço métrico munido de sua σ-álgebra Borel e anel de localização dos conjuntos Borel metricamente limitados.

Para extrair algumas propriedades estruturais dos espaços de medidas na presença de anéis de localização, como decomposições atômicas e unicidade destas, e que podem ser utilizadas no contexto de processos pontuais e regularidade das medidas formadas por estes, precisamos de mais uma noção técnica, conhecida como sistema de dissecação. Para este caso, seguindo (KALLENBERG, 2017, p. 20), especializamos nosso resultado para X um espaço standard Borel, sua σ-álgebra Borel $\mathcal{X}$, e $\hat{\mathcal{X}}$ consistindo dos conjuntos Borel metricamente limitados. Neste caso, temos a seguinte definição (KALLENBERG, 2017, p. 20)

Definição 20 (Sistema de Dissecação)**.** *Seja $I = \{I_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ uma sequência dupla consistindo de subconjuntos de X, $I_{ij} \in \hat{\mathcal{X}}$, com $n, j \in \mathbb{N}$, tal que:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, os conjuntos $\{I_{nj}\}_{j\in\mathbb{N}}$ formam uma partição de X,

(ii) $\forall m < n \in \mathbb{N}$, a partição $\{I_{mj}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é um refinamento de $\{I_{nj}\}_{j\in\mathbb{N}}$,

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, cada conjunto $B \in \hat{\mathcal{X}}$ admite uma cobertura por finitos elementos de $\{I_{nj}\}_{j\in\mathbb{N}}$,

(iv) $\sigma(\{I_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}) = \mathcal{X}$.

Então, dizemos que I é um sistema de dissecação de X

Como indicado por (KALLENBERG, 2017, p. 20), um caso de grande interesse da Definição 20 consiste no caso da reta real $X = \mathbb{R}$ equipada com sua σ-álgebra Borel. Neste caso, podemos escolher como sistema de dissecação a classe de todos os intervalos diádicos $I_{ij} = (\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$, o mesmo pode ser feito em $\mathbb{R}^n$, escolhendo um produto cartesiano de intervalos diádicos. Em um caso mais abstrato, sempre podemos encontrar um sistema de dissecação no caso standard Borel (KALLENBERG, 2017, p. 20):

Lema 3 (Sistema de Dissecação no Caso standard Borel)**.** *Considere $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ um espaço mensurável localizado consistindo de X standard Borel e $\mathcal{X}$ sua σ-álgebra Borel. Então, o anel de localização $\hat{\mathcal{X}}$ admite (i.e, contém) um sistema de dissecação $I = \{I_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$.*

A demonstração do lema, que omitimos, pode ser vista em (KALLENBERG, 2017, pp. 20-21).

No contexto de nossa discussão sobre processos pontuais, temos as seguintes estruturas (KALLENBERG, 2017, p. 21):

Definição 21 (Medida Localmente Finita)**.** *Dado um espaço mensurável localizado* $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$*, dizemos que uma medida* $\mu : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *é localmente finita se* $\mu(B) < \infty$*,* $\forall B \in \hat{\mathcal{X}}$*.*

Na notação da referência (KALLENBERG, 2017), denotamos por $\mathcal{M}_X$ a classe de todas as medidas localmente finitas em X, isto é:

$$\mathcal{M}_X = \{\mu : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+ : \mu \text{ medida em X localmente finita}\}.$$

Analogamente ao caso do espaço de medidas s-finitas, denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{M}_X)$ a σ-álgebra em $\mathcal{M}_X$ gerada pelos mapas $\pi_B : \mu \mapsto \mu(B)$, com $\mu \in \mathcal{M}_X$ e $B \in \mathcal{X}$. Assim, temos a seguinte noção de medida aleatória (KALLENBERG, 2017, p. 49):

Definição 22 (Medida Aleatória segundo (KALLENBERG, 2017))**.** *Seja* $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ *um espaço localizado e* ξ *um núcleo localmente finito em* X*, isto é, um elemento aleatório* $\xi : \Omega \to \mathcal{M}_X$*. Então, dizemos que* ξ *é uma medida aleatória em* X*.*

No caso em que o espaço de estados do elemento aletório ξ é dado por $\mathcal{N}_X^l$, o espaço das medidas localmente finitas em X com valores inteiros positivos, dizemos que este é um **processo pontual** (KALLENBERG, 2017, p. 49) - note que, neste nível de generalidade, não podemos afirmar que $\mathcal{N}_X^l$ é um subconjunto $\mathcal{B}(\mathcal{M}_X)$-mensurável de $\mathcal{M}_X$, algo que será resolvido com hipóteses adicionais (veja o Teorema 23 desta dissertação).

Para medidas aleatórias segundo a Definição 22, temos uma caracterização distribuição análoga àquela apresentada no Teorema 3 desta dissertação, mas com hipóteses (pseudo)-topológicas (KALLENBERG, 2017, p. 52):

Teorema 15 (Caracterização Distribuição de Medidas Aleatórias Segundo Kallenberg (2017))**.** *Fixe um anel dissecante* $\mathcal{U} \subseteq \hat{\mathcal{X}}$ *de um anel localizador* $\hat{\mathcal{X}}$ *de um espaço standard Borel* $(X, \hat{\mathcal{X}})$*. Fixe, também, um semi-anel* $\mathcal{I} \subseteq \hat{\mathcal{X}}$*. Então:*

(i) Para quaisquer medidas aleatórias ξ *e* η *em* X*, temos que* $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ *se e somente se:*

$$\xi(f) = \int_X f(x)\xi(dx) \stackrel{d}{=} \int_X f(x)\eta(dx) = \eta(f), f \in \hat{\mathcal{I}}_+,$$

com $\hat{\mathcal{I}}_+$ *a classe das funções simples positivas e* $\mathcal{I}$*-mensuráveis.*

(ii) *Para quaisquer processos pontuais η e ξ em X, temos que temos que $\xi \overset{d}{=} \eta$ se e somente se:*

$$\mathbb{P}(\{\xi(U) = 0\}) = \mathbb{P}(\{\eta(U) = 0\}), \ U \in \mathcal{U}.$$

Se X é polonês - isto é, se munirmos X de sua topologia polonesa-, então em (i) podemos tomar f como uma função simples e contínua com suporte compacto em X.

A demonstração do teorema pode ser vista em (KALLENBERG, 2017, p. 52). Analogamente ao caso do funcional de Laplace abstrato (Teorema 3), temos que (KALLENBERG, 2017, p. 53):

Teorema 16 (Unicidade Distribucional e Funcional de Laplace). *Fixe um anel localizador $\hat{\mathcal{X}}$ de um espaço standard Borel $(X, \hat{\mathcal{X}})$, e um semi-anel $\mathcal{I} \subseteq \hat{\mathcal{X}}$. Então, para duas medidas aleatórias ξ e η em X, temos que $\xi \overset{d}{=} \eta$ se e somente se $L_\xi(f) = L_\eta(f)$ para toda função $f \in \hat{\mathcal{I}}_+$ tal que $f \leqslant 1$, sendo $\hat{\mathcal{I}}_+$ a classe das funções simples positivas e $\mathcal{I}$-mensuráveis.*

Apresentaremos a demonstração baseada em (KALLENBERG, 2017, p. 53):

Demonstração. A parte necessária do teorema já foi demonstrada no Teorema 3 desta dissertação.

Considerando a parte suficiente, para uma função qualquer $f \in \hat{\mathcal{I}}_+$ tal que $f \leqslant 1$ fixa, temos que, por hipótese $L_\xi(f) = L_\eta(f)$ para o parâmetro do funcional restrito à $[0, 1]$. Pelo fato de que tais funcionais são funções real-analíticas em $(0, \infty)$ (RAO; SWIFT, 2006, p. 278), e pelo teorema da identidade de funções real-analíticas exposto no Capítulo 3, Seção III.3 de (FREITAG; BUSAM, 2009), temos que $L_\xi(f) = L_\eta(f)$ para o parâmetro do funcional em $(0, \infty)$. Assim, pelo Teorema 3, temos que essa relação implica em (i) do Teorema 15 pela unicidade dos funcionais de Laplace de variáveis aleatórias positivas (KALLENBERG, 2021, p. 128), o que termina a demonstração. □

Neste momento, com o próximo resultado, damos o primeiro passo para responder a um dos questionamentos da primeira parte desta demonstração, exibindo uma decomposição atômica de medidas localmente finitas em um espaço X no caso em que este satisfaz hipóteses (pseudo-) topológicas (KALLENBERG, 2021, p. 44) :

Teorema 17 (Decomposição Atômica de uma Medida Localmente Finita). *Seja μ uma medida localmente finita qualquer num espaço Borel localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$, isto é $\mu \in \mathcal{M}_X$. Então, μ possui uma decomposição a forma:*

$$\mu = \alpha + \sum_{k \leqslant \kappa} \beta_k \delta_{\sigma_k},$$

com $\alpha \in \mathcal{M}_X$ medida localmente finita difusa, $\kappa \in \overline{\mathbb{N}}_0$, $\{\beta_i\}_{i\leqslant\kappa}$ coeficientes reais positivos, e $\{\sigma_i\}_{i\leqslant\kappa}$ elementos (pontos) distintos em X.

Para a demonstração, seguiremos o argumento de (KALLENBERG, 2021, p. 44), mas desenvolvendo alguns pontos importantes citados pelo autor. Além disso, numa nota técnica sobre a terminologia de (KALLENBERG, 2021), é possível denotar, assim como afirma o autor, um átomo da medida μ na posição $\{x\}$ com tamanho $b \in \mathbb{R}$ como um ponto (singleton) $\{x\} \in X$ (que é $\mathcal{X}$-mensurável, visto que X é Borel) tal que $\mu(\{x\}) = b$. Afinal, podemos assumir, sem perda de generalidade (i.e, a menos de um conjunto μ-nulo), que todos os átomos de μ, no sentido geral do termo em teoria da medida (ver a próxima referência), são desta forma, vide o Apêndice F de (DUDLEY; NORVAIŠA, 2011). Mas, é importante notar que esta afirmação é uma particularidade do caso Borel, e não é válida no geral.

Demonstração. Primeiramente, faremos algumas reduções nas hipóteses. Note que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mu(S) < \infty$. A justificativa deste fato é análoga àquela de (LAST; PENROSE, 2018, p. 48). De fato, suponha que provamos a decomposição dada para o caso finito, e suponha que a medida μ não seja totalmente finita. Tome $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência localizadora de X em $\hat{\mathcal{X}}$, e note que $B_n = O_n \backslash O_{n-1}$, para $n > 1$, e $B_1 = O_1$, é uma sequência disjunta em $\hat{\mathcal{X}}$ tal que:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Do fato de que μ é localmente finita, temos que $\mu_{B_n} < \infty \ \forall n$. Assim, vale a decomposição atômica neste caso com:

$$\mu(B_n) = \alpha(B_n) + \sum_{k\leqslant\kappa^n} \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n},$$

onde os sobrescritos nos coeficientes indicam dependência no elemento n da sequência $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Mas, pela continuidade de μ (KALLENBERG, 2021, p. 18),

$$\mu(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(B_n) + \sum_{k\leqslant\kappa^n} \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n}).$$

Como as somas $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(B_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\leqslant\kappa^n} \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n}$ estão bem definidas, mas podendo ser infinitas, temos que:

$$\mu(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\leqslant\kappa^n} \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n}.$$

Agora, vamos analisar as somas $\sum\limits_{k \leqslant \kappa^n} \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n}$ separadamente.

Para um n fixo , suponha que $\sum\limits_{k \leqslant \kappa^n} \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n}$ seja não-nula (do contrário, o termo é irrelevante na soma para todo n). Defina:

$$k_1^n = \inf\{k \leqslant \kappa^n : \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n} \neq 0\}.$$

Similarmente, defina:

$$k_2^n = \inf\{k \leqslant \kappa^n, k > k_1^n : \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n} \neq 0\}.$$

Por um procedimento indutivo, construímos uma sequência $\{k_j^n\}_j$ de índices representando os termos não nulos da soma $\sum\limits_{k \leqslant \kappa^n} \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n}$. Denotamos por $k^n = \sup\limits_j k_j^n$ o elemento maximal destas, e logo obtemos uma sequência do tipo $\{k_j^n\}_{j \leqslant k^n}$ para cada n. Desse modo, note que podemos reescrever $\mu(B_n)$ como:

$$\mu(B_n) = \alpha(B_n) + \sum_{k \in \{k_1^n, \ldots, k^n\}} \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n} = \alpha(B_n) + (\beta_{k_1^n} + \cdots \beta_{k^n}).$$

Denote por σ_n o coeficiente da medida delta que corresponde ao último coeficiente não-nulo, isto é, ao coeficiente β_{k^n} (note que estes são distintos para cada n, visto que os conjuntos B_n são disjuntos). Deste modo, como $\sigma_n \in B_n \implies \sigma_n \in S$, e o termo correspondente à σ_n é não-nulo, temos que:

$$\mu(B_n) = \alpha(B_n) + (\beta_{k_1^n} + \cdots \beta_{k^n}) \delta(S)_{\sigma_n}.$$

Por fim, denote $\beta_n = \beta_{k_1^n} + \cdots \beta_{k^n}$ (que é finito, pela finitude das somas citada acima). Ou seja, obtemos que:

$$\mu(B_n) = \alpha(B_n) + \beta_n \delta(S)_{\sigma_n}.$$

Assim, escrevendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k^n = \kappa$

$$\mu(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \leqslant \kappa^n} \beta_k^n \delta(B_n)_{\sigma_k^n} = \alpha(S) + \sum_{n \leqslant \kappa} \beta_n \delta(S)_{\sigma_n},$$

que é a decomposição no caso em que a medida não é totalmente finita (note que o argumento é análogo para o caso de $\mu(B)$, $B \in \mathcal{X}$ qualquer). Assim, podemos assumir a hipótese de finitude da medida como enunciada.

Para a próxima redução, note que X é um espaço Borel. Assim, por (KALLENBERG, 2021, p. 14), podemos encontrar um isomorfismo Borel $f : S \to [0,1]$. Desse modo, para um $B \in \mathcal{X}$ qualquer, podemos encontrar $C \in \mathcal{B}_{[0,1]}$, a σ-álgebra Borel do intervalo unitário, tal que $B = f^{-1}(C)$. Assim, temos que:

$$\mu(B) = \mu(f^{-1}(C)) = \nu(C),$$

com $\nu(C) = \mu(f^{-1}(C))$ uma medida em $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$. Assim, basta provarmos a decomposição (atômica) para ν que obtemos uma decomposição (atômica) para μ. Em outras palavras, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $S = [0,1]$. Assim, defina:

$$F(x) = \mu([0,x]),$$

com $x \in [0,1]$. Note que, como μ é finita, esta possui um número (no máximo) contável de átomos, que correspondem aos saltos da função F (que é contínua à direita, com limites à esquerda, e não-decrescente), visto que:

$$\mu(\{x\}) = \lim_{y \downarrow x} F(y) - \lim_{y \uparrow x} F(y) = \Delta F(x).$$

Assim, enumere, em ordem não-crescente, a localização dos saltos da função, e suas magnitudes (positivas!), como pares (um número no máximo contável destes) $\{x, \Delta F(x)\}$, ou equivalente, enumeramos as localizações e magnitudes (novamente, positivas) dos átomos de μ, $\{\sigma_k, \beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Assim,

$$\mu - \sum_k \beta_k \delta_{\sigma_k} = \alpha,$$

é uma medida por (KALLENBERG, 2021, p. 19), notando que $\sum\limits_k \beta_k \delta_{\sigma_k}$ é uma medida bem definida (em $[0,1]$) por (KALLENBERG, 2021, p. 19) . Esta, por sua vez, é difusa, visto que, dado x um átomo (de μ) qualquer com magnitude β_x:

$$\alpha(x) = \mu(\{x\}) - \sum_k \beta_k \delta(\{x\})_{\sigma_k} = \beta_x - \beta_x = 0.$$

Ou seja,

$$\mu = \alpha + \sum_k \beta_k \delta_{\sigma_k},$$

é a decomposição atômica da medida como enunciada no teorema.

$\square$

Deste resultado, obtemos como corolário uma decomposição para o caso de medidas com valores inteiros positivos, i.e o caso relevante para processos pontuais, além de uma garantia de unicidade (KALLENBERG, 2021, p. 44):

Teorema 18 (Decomposição Atômica Discreta e Unicidade)**.** *Seja μ uma medida localmente finita qualquer num espaço Borel localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$, isto é $\mu \in \mathcal{M}_X$, com decomposição atômica como dada no teorema 0.1.1. Assim,*

(i) μ assume valores em $\overline{\mathbb{N}}_0$ se e somente se $\alpha = 0$ e $\beta_k \in \mathbb{N}_0$, para todo $k \leqslant \kappa$, na decomposição atômica de μ dada pelo Teorema 17.

(ii) A representação da decomposição atômica de μ dada pelo Teorema 17 é única a menos de uma permutação de termos.

A demonstração deste resultado, que omitimos, pode ser vista em (KALLENBERG, 2021, p. 45).

Os dois resultados acima podem indicar uma resposta a um questionamento presente na primeira seção desta dissertação, isto é, em quais condições um processo pontual é um processo pontual próprio. A resposta, de fato, seguiria diretamente dos Teoremas 17 e 18 se garantíssemos a mensurabilidade dos coeficientes da decomposição atômica em termos de μ (i.e, como funções mensuráveis de μ). Utilizando que todo espaço Borel possui um sistema de dissecação, Lema 3 desta seção, podemos obter o seguinte resultado (KALLENBERG, 2021, p. 45), para o qual a demonstração pode ser vista na referência citada:

Teorema 19 (Decomposição Atômica Mensurável)**.** *Seja μ uma medida localmente finita qualquer num espaço Borel localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$, isto é $\mu \in \mathcal{M}_X$, com decomposição atômica dada por:*

$$\mu = \alpha + \sum_{k \leqslant \kappa} \beta_k \delta_{\sigma_k},$$

onde $\alpha \in \mathcal{M}_X$ é uma medida localmente finita difusa, $\kappa \in \overline{\mathbb{N}}_0$, $\{\beta_i\}_{i \leqslant \kappa}$ coeficientes reais positivos, e $\{\sigma_i\}_{i \leqslant \kappa}$ elementos distintos em X.

Então, α, $\kappa \in \overline{\mathbb{N}}_0$, $\{\beta_i\}_{i \leqslant \kappa}$ e $\{\sigma_i\}_{i \leqslant \kappa}$ podem ser escolhidos como funções (de $\mathcal{M}_X$ à X) $\mathcal{B}(\mathcal{M}_X)/\mathcal{X}$-mensuráveis de μ.

Assim, utilizando este teorema em conjunto com os resultados dos Teoremas 17 e 18, obtemos que:

Teorema 20 (Representação Própria de um processo Pontual)**.** *Seja η um processo pontual em um espaço Borel localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$. Então, η possui uma versão própria, isto é, podemos representar η q.c.-$\mathbb{P}$ como:*

$$\eta = \sum_{k \leqslant \kappa} \beta_k \delta_{\sigma_k},$$

onde κ é uma variável aleatória com valores em $\overline{\mathbb{N}}_0$, $\{\beta_i\}_{i \leqslant \kappa}$ uma coleção de variáveis aleatórias com valores em $\mathbb{N}_0$, e $\{\sigma_i\}_{i \leqslant \kappa}$ elementos aleatórios em X. Se o processo η é simples, então $\{\beta_i\}_{i \leqslant \kappa}$ são todos 1.

A demonstração segue diretamente dos últimos 3 resultados, mas pode ser vista, numa formulação alternativa, mas equivalente, em (LAST; PENROSE, 2018, p. 48).

Assim, nota-se uma grande diferença do caso abstrato: com uma hipótese (pseudo-)topológica, ou seja, a de que X é um espaço standard Borel, e que nossos processos pontuais possuem realizações enquanto medidas localmente finitas, garantimos que qualquer processo pontual possui uma versão própria. Além disso, como demonstrado Teorema 23 da próxima seção, podemos afirmar que $\mathcal{N}_X^l$ é um subconjunto $\mathcal{B}(\mathcal{M}_X)$-mensurável de $\mathcal{M}_X$. Isto resolve, em grande medida, os problemas de mensurabilidade e representação que encontramos no caso de processos pontuais no caso abstrato s-finito.

Outras consequências importantes da possibilidade de representações próprias de processos Pontuais em espaços standard Borel, mas que não trataremos nesta dissertação, consistem no Teorema de metrizabilidade (Borel) de Prohorov de $\mathcal{M}_X$ (KALLENBERG, 2017, p. 21), e o desenvolvimento de uma teoria da integração de processos Pontuais utilizando somas de medidas Dirac (RAUCHENSCHWANDTNER, 1980). Mais informações sobre estes tópicos podem ser vistas, além das referências já citadas, nos Capítulos 1-6 de (KALLENBERG, 2017) e, para da teoria da integração de medidas aleatórias em espaços standard Borel/Suslin/Lusin (LIPTSER; SHIRYAYEV, 1989).

2.1.1 Comparação Entre os Esquemas Teóricos de Kallenberg (2017) e Last & Penrose (2017) para Medidas Aleatórias e Processos Pontuais

Nesta breve subseção, gostaríamos de comparar o esquema teórico de medidas aleatórias e processos pontuais de (KALLENBERG, 2017) com aquele de (LAST; PENROSE, 2018). De fato, trata-se de explorar as conexões entre os dois principais formalismos utilizados na dissertação até o momento, e que formam, em grande medida, duas das principais abordagens possíveis da teoria dos processos pontuais.

Primeiramente, exibimos a definição de (LAST; PENROSE, 2018) de uma medida aleatória, e das estruturas mensuráveis necessárias. Neste caso, fixe $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável e, como sempre, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade qualquer. Seja $M(X) = M$ o espaço de todas as medidas s-finitas em X, e equipe M com a σ-álgebra $\mathfrak{M}(X)$ gerada pelos conjuntos da forma:

$$\{\mu \in M : \mu(B) \leqslant t\}, \; B \in \mathcal{X} \;, t \in \mathbb{R}_+.$$

Isto é, temos que $\mathfrak{M}(X)$ é a σ-álgebra gerada por todos os mapas projeção $\mu \to \mu(B)$, com $\mu \in M$ e $B \in \mathcal{X}$ (LAST; PENROSE, 2018, p. 127). Assim, temos a noção de medida aleatória segundo (LAST; PENROSE, 2018, p. 127):

Definição 23 (Medida Aleatória segundo (LAST; PENROSE, 2018))**.** *Uma medida aleatória ξ em (com valores em) um espaço X é um elemento aleatório $\xi : \Omega \to M(X)$.*

A relação desta definição com aquela de medida aleatória segundo (KALLENBERG, 2017), Definição 22, pode ser elucidada com a seguinte proposição:

Proposição 9 (σ-finitude e finitude local)**.** *Dado um espaço mensurável localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ e μ medida localmente finita neste, então μ é σ-finita em $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$.*

Demonstração. Fixe $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência localizadora de X em $\hat{\mathcal{X}}$. Assim, μ é localmente finita em $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$, e logo $\mu(O_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, pela definição de sequência localizadora,

$$O_n \uparrow X \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = X.$$

Portanto, temos uma sequência de conjuntos $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\hat{\mathcal{X}}$, e logo em $\mathcal{X}$, tal que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$ e $\mu(O_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto μ é σ-finita em $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$.

□

Por outro lado, notemos o seguinte resultado, (KALLENBERG, 2017, p. 21):

Proposição 10 (Medidas s-finitas e σ-finitas)**.** *Fixe um espaço mensurável qualquer $(X, \mathcal{X})$. Então, se μ é uma medida σ-finita em $(X, \mathcal{X})$, esta é s-finita em $(X, \mathcal{X})$.*

Demonstração. Pelo fato de que μ é σ-finita em $(X, \mathcal{X})$, temos existe uma sequência de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_n \uparrow X$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina uma nova sequência de conjuntos em $\mathcal{X}$ dada por $\mathcal{A}_n = A_n \backslash A_{n-1}$ para $n > 1$ e $\mathcal{A}_1 = O_1$. Desse modo, temos que $\{\mathcal{A}_n\}$ de fato é uma sequência mensurável e disjunta em $\mathcal{X}$, e que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n = X$. Assim, para $A \in \mathcal{X}$ qualquer, temos que a sequência (mensurável) $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\mathcal{A}_n \cap A)$ é tal que $B_n \uparrow A$. Assim, por (KALLENBERG, 2021, p. 18):

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(\mathcal{A}_i \cap A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\mathcal{A}_i \cap A).$$

De modo que $\mu(\mathcal{A}_i \cap A) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, tomando as medidas finitas $\mu_i : \mathcal{X} \to [0, \infty)$ definidas por $\mu_i(A) = \mu(A \cap A_n)$, para $A \in \mathcal{X}$ qualquer, temos que:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A).$$

Assim, existe uma sequência de medidas finitas $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definidas em $(X, \mathcal{X})$ tais que $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A)$ para um $A \in \mathcal{A}$ qualquer. Assim μ é s-finita em $(X, \mathcal{X})$.

$\square$

Sendo assim, tomando $\mu \in \mathcal{M}_X$ no sentido de (KALLENBERG, 2017), obtemos que esta é, pelas Proposições 9 e 10, uma medida s-finita em $(X, \mathcal{X})$. Assim, temos a seguinte inclusão de espaços de medidas:

$$\mathcal{M}_X \subseteq M(X),$$

isto é, a definição de medidas aleatórias dadas por(LAST; PENROSE, 2018), vide Definição 23, é mais ampla (e geral) que aquela dada por (KALLENBERG, 2017), Definição 23. Similarmente, $\mathfrak{M}(X)$ é mais ampla que $\mathcal{B}(\mathcal{M}_X)$ por definição. O caso dos processos pontuais é totalmente análogo, mas restrito à medidas aleatórias com valores nos inteiros não-negativos.

No geral, a equivalência do último parágrafo não é mensurável, visto que , neste nível de generalidade, não é possível provar que $\mathcal{M}_X$ é um subconjunto $\mathfrak{M}(X)$-mensurável de $M(X)$, impedindo uma possível redução (mensurável) do formalismo de (LAST; PENROSE, 2018) para o caso localmente finito. De fato, não conseguimos sequer provar que $N(X)$ é um $\mathfrak{M}(X)$-mensurável de $M(X)$ (LAST; PENROSE, 2018, p. 128). Uma possível solução para este problema consiste na ideia de localizar um elemento aleatório em um subconjunto não-mensurável de interesse (HOFFMANN-JØRGENSEN, 1991, p. 92), algo que detalharemos brevemente no contexto de medidas aleatórias [2].

No contexto citado, suponha que temos um subconjunto $A \subseteq M(X)$ tal que $A \notin \mathfrak{M}(X)$, mas que seja possível demonstrar a existência de uma medida aleatória ξ em X tal que $\mathbb{P}^*(\xi \in A) = 1$, onde $\mathbb{P}^*$ é a medida exterior induzida por $\mathbb{P}$, isto é:

[2] Infelizmente, trata-se de uma referência de difícil acesso, mas essencial no assunto. Faremos este detalhamento para garantir que o leitor tenha acesso ao procedimento geral.

$$\mathbb{P}^*(A) = \inf\{\mathbb{P}(E) : A \subseteq E, E \in \mathcal{F}.\}$$

Neste caso, escolha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ como sendo o espaço canônico induzido pela versão canônica da medida aleatória ξ, ξ_c - para versões canônicas de elementos aleatórios, já citados anteriormente na dissertação no contexto do teorema de Lomnicki-Ulam, ver o Capítulo 3 de (RAO, 1981). Assim, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\xi$ (onde esta última é a distribuição de ξ), e pelo seguinte resultado (KALLIANPUR; SUNDAR, 2014, p. 11) :

Teorema 21 (Localização de Espaços de Probabilidade)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade qualquer, e seja $A \subseteq \Omega$, não necessariamente $\mathcal{F}$-mensurável, tal que $\mathbb{P}^*(A) = 1$. Então, existe uma única medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ em $(A, \mathcal{F} \cap A)$ tal que $\mathbb{Q}(E \cap A) = \mathbb{P}(E)$, para qualquer $E \in \mathcal{F}$.*

Podemos escolher o espaço de probabilidade $(A, \mathfrak{M}(X) \cap A, \mathbb{Q})$, tomando $\mathbb{Q}(\cdot) = \mathbb{P}_\xi(A \cap \cdot) = \mathbb{P}(A \cap \cdot)$ de modo que A é um conjunto $\mathfrak{M}(X) \cap A$ -mensurável e com a validade de $\mathbb{Q}(\{\xi \in A\}) = \mathbb{Q}(\xi_c \in A) = 1$, e com as distribuições de dimensão finita (e, logo, completas) de ξ preservadas - sobre isso, veja também a discussão em (KALLIANPUR; SUNDAR, 2014, p. 11) após a proposição 1.1.13 do livro. Isto é, regularizamos os caminhos da medida aleatória, que sabemos pertencer à um conjunto não-mensurável, localizando-os em um espaço mensurável para o qual a não-mensurabilidade do espaço alvo é extinta, resolvendo nosso problema inicial enunciado no contexto de $A = N(X)$. É importante notar, porém, que este tipo de técnica depende, necessariamente, de métodos para construção de espaços de probabilidade onde seja possível definir medidas aleatórias satisfazendo as condições de medida exterior citadas anteriormente (ver, por exemplo, os resultados da próxima seção, e as referências contidas nesta).

Por outro lado, se estivermos dispostos a munir o espaço de uma topologia métrica, há uma solução mais simples e de mais utilidade. Neste caso, seja X um espaço métrico (com uma métrica, digamos, ρ) e considere $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ o espaço mensurável localizado no qual $\mathcal{X}$ é a σ-álgebra dos conjuntos Borel de X e $\hat{\mathcal{X}}$ consiste nos conjuntos Borel metricamente limitados de X. Para adaptar uma notação comum para o espaço de medidas localmente finitas, a notação de (LAST; PENROSE, 2018, p. 16) será utilizada em comum com a de (KALLENBERG, 2017), ou seja, $\mathcal{M}_X$. Visto que, no caso (métrico) localmente finito, as noções destes espaços de medidas para ambas as obras são essencialmente as mesmas. Assim, obtemos um teorema de redução mensurável de espaços de medidas - vide (LAST; PENROSE, 2018, p. 132):

Teorema 22 (Mensurabilidade de Subconjuntos de Medidas)**.** *Seja $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ um espaço standard Borel localizado com os conjuntos metricamente limitados da topologia polonesa de X. Então, o espaço das medidas localmente finitas em X, $\mathcal{M}_X$, é um subconjunto mensurável de $M(X)$ munido com a σ-álgebra $\mathfrak{M}(X)$.*

A demonstração deste resultado, que omitimos, pode vista em (LAST; PENROSE, 2018, p. 133).

Desse modo, no caso standard Borel, o formalismo de (LAST; PENROSE, 2018), mais geral que aquele de (KALLENBERG, 2017), pode ser reduzido à este último de maneira mensurável. De fato, pelo seguinte resultado (KALLENBERG, 2021, p. 45):

Teorema 23 (Mensurabilidade de Subconjuntos de Medidas - Caso Discreto). *Sejam* $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ *um espaço standard Borel localizado com os conjuntos metricamente limitados da topologia polonesa de* X*. Então, a classe de medidas localmente finitas discretas em* X*,* $\mathcal{N}_X^l$*, é um subconjunto* $\mathcal{B}(\mathcal{M}_X)$*-mensurável de* $\mathcal{M}_X$*.*

Para o qual a demonstração pode ser consultada em (KALLENBERG, 2021, p. 46), há garantia de que a mesma redução ocorre no caso dos processos pontuais.

Sendo assim, no caso localmente finito, onde as duas teorias compartilham similaridades, reduzido ao contexto de uma topologia polonesa, não apresenta qualquer problema de mensurabilidade e pode ser utilizada em ambos os esquemas que estamos trabalhando nesta dissertação. Além disso, no contexto (pseudo-)topológico de espaços standard Borel com topologia polonesa, a obtenção de uma gama bastante grande de resultados de existência para medidas aleatórias e processos pontuais é possível (ver, por exemplo, o Capítulo 2 de (KALLENBERG, 2017). Assim, o desenvolvimento até o momento pode servir, em algum sentido, como um argumento em favor de um uso topológico da teoria - mesmo que seja possível, como vimos, construir ótimos resultados de existência do processo de Poisson, e outros processos, no caso abstrato.

Por outro lado, também obtemos resultados de generalização bastante claros: o contexto de (KALLENBERG, 2017), no geral, está contido em (LAST; PENROSE, 2018). E, no caso métrico localmente finito, ambas as teorias são de uso equivalente. De fato, numa nota técnica para o resto das seções deste capítulo que tratam de teoremas de existência de medidas aleatórias, tratando-se de um caso topológico, vamos preferir, essencialmente, a notação e desenvolvimentos de(KALLENBERG, 2017) - neste caso, há uma maior disponibilidade de técnicas e resultados de regularidade.

2.2 Processos Pontuais em Espaços de Configurações e o Formalismo de Espaços Mensuráveis Localizados

Nesta seção, será apresentada uma alternativa à teoria não-topológica de processos pontuais com base na teoria de medidas s-finitas. Aqui, construiremos o formalismo de processos pontuais utilizando medidas localmente finitas no sentido de (KALLENBERG, 2017) e uma definição conhecida como abordagem de espaço de configurações (BRÉMAUD, 2020). Similarmente ao caso abstrato baseado em medidas s-finitas, temos uma teoria distribucional bem definida, e uma construção (i.e, um resultado de existência construtivo) do processo de Poisson.

Seguiremos o desenvolvimento de resultados e as demonstrações de (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996), mas apresentando detalhes adicionais nas demonstrações e adaptando a notação para maior homogeneização com a abordagem de (KALLENBERG, 2017).

Considere um espaço mensurável localizado $(X, \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$ fixo. Temos a seguinte definição (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996):

Definição 24 (Medida Pontual)**.** *Seja μ uma medida no espaço mensurável $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$. Dizemos que μ é uma medida pontual sobre $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ se os valores de μ nos conjuntos $\mathcal{X}$-mensuráveis são determinados por sequências finitas ou contáveis de pontos não necessariamente distintos $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, com $|I|$ no máximo contável, em X, tais que $\mu(E)$ é o número de pontos de tal sequência no conjunto $E \in \mathcal{X}$.*

Isto é:

$$\mu(E) = f_E(x_1, x_2, \dots),$$

com função $f : X \times \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{N}}_0$ e $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ sequência de pontos definida acima, tais que:

$$f_E(x_1, x_2, \dots) = |E \cap \{x_i\}_{i \in I}|.$$

Sendo assim, uma medida pontual consiste numa medida de contagem determinada por uma sequência, no máximo contável, de pontos pertencentes ao conjunto X.

Similarmente aos desenvolvimentos de (LAST; PENROSE, 2018) e (KALLENBERG, 2017), definimos:

$$M^p = \{\mu : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{N}}_0 : \mu \text{ é uma medida pontual em } \mathcal{X}\}.$$

Isto é,o conjunto de todas as medidas pontuais em $(X, \mathcal{X})$ munido com a σ-álgebra gerada pelos mapas projeção:

$$\mathcal{M}^p = \sigma(\{\mu \in M^p : \mu(E) \leqslant k\} : \ E \in \mathcal{X}, \ k \in \overline{\mathbb{N}}_0).$$

Neste contexto, temos a definição de medida média de (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996):

Definição 25 (Medida Média)**.** *Dada uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $(M^p, \mathcal{M}^p)$, dizemos que sua medida média ν_p consiste na integral (de Lebesgue) dada por:*

$$\nu_{\mathbb{P}}(E) = \int_{M^p} \mu(E)\mathbb{P}(d\mu),$$

para $E \in \mathcal{X}$.

Nesta estrutura, como afirmado por (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996), temos a principal ferramenta da teoria. De fato, no lugar de hipóteses topológicas em X ou em lugar de assumir que $\mu \in M^p$ é s-finita, os autores (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996) assumem, como hipótese principal, a σ-finitude da medida média. Faremos uma construção similar, mas substituindo a hipótese de σ-finitude pela de finitude local em $\hat{\mathcal{X}}$, que corresponde ao caso de (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996) com $\hat{\mathcal{X}}$ gerado pelos conjuntos $O_n \uparrow X$ de medida finita obtidos pela hipótese de σ-finitude.

Assim, temos a definição de um processo pontual segundo (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996), que inclui a hipótese de uma medida média localmente finita citada no parágrafo anterior:

Definição 26 (Processo Pontual - (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996))**.** *Uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $(M^p, \mathcal{M}^p)$ é dita um processo pontual em $(X, \mathcal{X})$ se a medida média de $\mathbb{P}$ é localmente finita em $(X, \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$. Numa notação auxiliar, subentendido o espaço $(X, \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$,dizemos que $(\mathbb{P}, M^p, \mathcal{M}^p)$ é um processo pontual.*

Assim, a definição de processo pontual neste caso segue a identificação de medidas aleatórias com valores discretos e sua distribuição (KRICKEBERG, 2014, p. 45), mas com a hipótese adicional de que a intensidade desta (medida aleatória) é localmente finita. Note que, nas propriedades estruturais das medidas associadas à processos pontuais, a Definição 26 satisfaz as hipóteses do formalismo de processos pontuais de (LAST; PENROSE, 2018), visto que medidas localmente finitas são s-finitas - como já provamos em 9 e 10.

Para determinar propriedades distribucionais de processos pontuais segundo a Definição 26, precisamos do seguinte lema (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996, p. 67), modificado para um anel de localização:

Lema 4. *Seja $(\mathbb{P}, M^p, \mathcal{M}^p)$ um processo pontual em $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$, e suponha que temos uma subclasse de conjuntos de X, $\mathcal{I} \subseteq \hat{\mathcal{X}}$, satisfazendo:*

(i) $\mathcal{I}$ é um sistema π,

(ii) $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{X}$, e

(iii) *Existe uma sequência de conjuntos* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{I}$ *tal que* $E_n \uparrow X$ *e* $\nu_{\mathbb{P}}(E_n) < \infty$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Isto é,* $\mathcal{I}$ *contém uma sequência localizadora.*

Então, sendo $\mathcal{N}^p = \sigma(\{\mu \in M^p : \mu(E) \leqslant k\} : E \in \mathcal{I},\ k \in \mathbb{N}_0)$ *e* $(M^p, \overline{\mathcal{M}^p}, \overline{\mathbb{P}})$*, e* $(N^p, \overline{\mathcal{N}^p}, \overline{\mathbb{P}}|_{\mathcal{N}^p})$*, os completamentos de* $(M^p, \mathcal{M}^p, \mathbb{P})$*, e* $(N^p, \mathcal{N}^p)$ *com respeito à* $\mathbb{P}$ *e* $\mathbb{P}|_{\mathcal{N}^p}$ *respectivamente, temos que* $\overline{\mathcal{M}^p} = \overline{\mathcal{N}^p}$*.*

Seguiremos a demonstração de (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996, p. 67), mas completando alguns detalhes.

Demonstração. A ideia da demonstração consiste em utilizar o lema da classe monótona de Sierpinski (KALLENBERG, 2021, p. 20).

Numa primeira inclusão, note que, por construção, $\mathcal{N}^p \subseteq \mathcal{M}^p$. Assim, $\overline{\mathcal{N}^p} \subseteq \overline{\mathcal{M}^p}$. A implicação não-trivial consiste em provar que $\overline{\mathcal{M}^p} \subseteq \overline{\mathcal{N}^p}$. Assim, defina a seguinte classe de conjuntos em $\mathcal{X}$, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{G}_n = \{F \in \mathcal{X} : \{\mu \in M^p : \mu(F \cap E_n) \leqslant k\} \in \overline{\mathcal{N}^p} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Agora, considere as seguintes etapas divididas em itens:

1. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{G}_n$.

De fato, seja $H \in \mathcal{I}$. Por hipótese, temos que $E_n \in \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ é um sistema π. Assim, $H \cap E_n \in \mathcal{I}$. Por definição de $\mathcal{N}^p$, $\{\mu \in M^p : \mu(H \cap E_n) \leqslant k\} \in \mathcal{N}^p \subseteq \overline{\mathcal{N}^p}$ para um $k \in \mathbb{N}_0$ qualquer. Assim, por definição de $\mathcal{G}_n$, temos que $H \in \mathcal{G}_n$ para um n qualquer.

2. $X \in \mathcal{G}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, como, por construção, $E_n \subseteq X$, temos que:

$$\{\mu \in M^p : \mu(X \cap E_n) \leqslant k\} = \{\mu \in M^p : \mu(E_n) \leqslant k\}.$$

Por hipótese, $E_n \in \mathcal{I}$ para um n qualquer, e pela definição de $\mathcal{N}^p$, temos que $\{\mu \in M^p : \mu(E_n) \leqslant k\} \in \mathcal{N}^p \subseteq \overline{\mathcal{N}^p}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Desse modo, pela definição de $\mathcal{G}_n$, temos que $X \in \mathcal{G}_n$.

3. Seja $M_1^p = \{\mu \in M^p : \mu(E_n) \leqslant \infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$. Então, $M_1^p \in \mathcal{N}^p$ e $\mathbb{P}(M_1) = 1$.

De fato, por hipótese, temos que $E_n \in \mathcal{I}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada n, pela definição de $\mathcal{N}^p$, temos que $\{\mu \in M^p : \mu(E_n) \leqslant k\} \in \mathcal{N}^p$ para um $k \in \mathbb{N}_0$ qualquer. Como $\mathcal{N}^p$ é uma σ-álgebra, e logo fechada sob a operação de uniões e intersecções contáveis, temos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\mu \in M^p : \mu(E_n) \leqslant k\} = \{\mu \in M^p : \mu(E_n) < \infty\} \in \mathcal{N}^p.$$

Assim, temos que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\mu \in M^p : \mu(E_n) < \infty\} = \{\mu \in M^p : \mu(E_n) < \infty \text{ para todo } n\} \in \mathcal{N}^p.$$

Logo, $M_1^p \in \mathcal{N}^p$. Por outro lado, note que, por hipótese, $\nu_{\mathbb{P}}(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pela desigualdade de Markov, e para um $k \in \mathbb{N}_0$ qualquer:

$$\mathbb{P}(\{\mu \in M^p : \mu(E_n) \geqslant k\}) \leqslant \frac{\int_{M^p} \mu(E_n)\mathbb{P}(d\mu)}{k} = \frac{\nu_{\mathbb{P}}(E_n)}{k}.$$

Tomando o limite $k \to \infty$, e utilizando que os eventos $\{\mu \in M^p : \mu(E_n) \geqslant k\}$ formam uma sequência decrescente em k em M^p, temos que:

$$\mathbb{P}(\{\mu \in M^p : \mu(E_n) = \infty\}) = 0.$$

Assim, $\mathbb{P}(M_1^p) = 1$.

4. Para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer, $\mathcal{G}_n$ é fechada sob a operação de diferenças próprias.

De fato, sejam F_1 e F_2 conjuntos em $\mathcal{G}_n$ tais que $F_1 \subseteq F_2$. Note que, para $\mu \in M^p$ qualquer:

$$\mu(F_2 \cap E_n) = \mu((F_2 \backslash F_1) \cap E_n) + \mu(F_1 \cap E_n).$$

Além disso, para qualquer $\mu \in M_1^p$, podemos escrever:

$$\mu((F_2 \backslash F_1) \cap E_n) = \mu(F_2 \cap E_n) - \mu(F_1 \cap E_n),$$

visto que estes termos são finitos pela definição de M_1^p. Assim, pelo fato de que $\{\mu \in M^p : \mu(F_i \cap E_n) \leqslant k\} \in \mathcal{N} \subseteq \overline{\mathcal{N}^p}$, para $i = 1, 2$, e como pela afirmação 3, $M_1 \in \mathcal{N}^p \subseteq \overline{\mathcal{N}^p}$, segue-se que $M_1 \cap \{\mu \in M^p : \mu(F_2 \backslash F_1) \leqslant k\} \in \overline{\mathcal{N}^p}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Novamente pela afirmação 3, temos que $\mathbb{P}(M_1^p) = 1$, e portanto $\mathbb{P}(M^p \backslash M_1^p) = 0$, o que implica em $M^p \backslash M_1^p \in \overline{\mathcal{N}^p}$. Assim, $(M_1 \backslash M_1^p) \cap \{\mu \in M^p : \mu(F_2 \cap F_1) \leqslant\} \in \overline{\mathcal{N}^p}$. Assim,

$$\{\mu \in M^p : \mu((F_2 \backslash F_1) \cap E_n) \leqslant k\} \in \overline{\mathcal{N}^p},$$

para um $k \in \mathbb{N}_0$ qualquer. Assim, $F_2 \backslash F_1 \in \mathcal{G}_n$.

5. Se $A_k \in \mathcal{G}_n$ e se $A_k \subseteq A_{k+1}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{G}_n$.

De fato, pela definição de $\mathcal{G}_n$, como $A_k \in \mathcal{G}_n$, então $A_k \in \mathcal{X}$ e $\{\mu \in M^p : \mu(A_k \cap E_n) \leqslant r\} \in \overline{\mathcal{N}^p}$ para $r \in \mathbb{N}_0$ qualquer. Assim, a função $\mu \to \mu(A_k \cap E_n)$ é $\overline{\mathcal{N}^p}$-mensurável. Utilizando a propriedade de continuidade superior de $\mu \in M^p$, temos que $\mu(A_k \cap E_n) \uparrow \mu((\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap E_n)$ quando $k \to \infty$. Como o limite monótono de funções $\overline{\mathcal{N}^p}$-mensuráveis é $\overline{\mathcal{N}^p}$-mensurável (ZIEMER; TORRES, 2017, p. 130), temos que $\{\mu \in M^p : \mu((\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap E_n) \leqslant r\} \in \overline{\mathcal{N}^p}$ para qualquer $r \in \mathbb{N}_0$. Combinado com o fato de que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{X}$, temos que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{G}_n$.

Agora, podemos aplicar o lema da classe monótona de Sierpinski para provar o lema. De fato, pelos itens 2,4 e 5, temos que $\mathcal{G}_n$ é um sistema λ. Além disso, pelo item 1, temos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{G}_n$, e portanto pelo lema da classe monótona de Sierpinski (KALLENBERG, 2021, p. 20), temos que $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{G}_n$. Por hipótese, $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{X}$, logo $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}_n$. Além disso, por construção, $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{X}$. Assim, $\mathcal{G}_n = \mathcal{X}$. Por definição de $\mathcal{G}_n$, isso implica que, para cada $F \in \mathcal{X}$, $\{\mu \in M^p : \mu(F \cap E_n) \leqslant k\} \in \overline{\mathcal{N}^p}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$.

Agora, seja $F \in \mathcal{X}$ fixo, e defina $f_n : M^p \to \overline{\mathbb{N}}_0$ uma sequência de funções por $f_n(\mu) = \mu(F \cap E_n)$. Note que f_n é, por construção da σ-álgebra $\overline{\mathcal{N}^p}$, uma função $\overline{\mathcal{N}^p}$-mensurável. Neste ponto, vamos utilizar a σ-aditividade novamente. De fato, como $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo n, e como cada $\mu \in M^p$ é uma medida, temos que $f_n(\mu) \uparrow f(\mu)$, quando $n \to \infty$, para qualquer $\mu \in M^p$, onde $f(\mu) = \mu(F \cap X) = \mu(F)$. Desse modo, f é limite de funções $\overline{\mathcal{N}^p}$-mensuráveis, e logo é $\overline{\mathcal{N}^p}$-mensurável (ZIEMER; TORRES, 2017, p. 130). Isso significa que $\{\mu \in M^p : \mu(F) \leqslant k\} \in \overline{\mathcal{N}^p}$. Logo,

$$\sigma(\{\mu \in M^p : \mu(F) \leqslant k\}, F \in \mathcal{X}, k \in \mathbb{N}_0) \subseteq \overline{\mathcal{N}^p}.$$

Ou seja, temos que $\mathcal{M}^p \subseteq \overline{\mathcal{N}^p}$. Assim, segue-se que $\overline{\mathcal{M}^p} \subseteq \overline{\mathcal{N}^p}$. O que prova o resultado. □

Este lema nos permite demonstrar um resultado análogo ao Lema 1 do primeiro capítulo desta dissertação, que caracteriza a distribuição dos processos pontuais em termos de medidas de probabilidade em cilindros (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996, p. 68):

Teorema 24 (Distribuições Cilíndricas)**.** *Seja* $(M^p, \mathcal{M}^p, \mathbb{P})$ *um processo pontual em* $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$*, e suponha que* $\mathcal{I} \subseteq \hat{\mathcal{X}}$ *satisfaz:*

(i) $\mathcal{I}$ *é um sistema* π*,*

(ii) $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{X}$, *e,*

(iii) *Existe uma sequência de conjuntos* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{I}$ *tal que* $E_n \uparrow X$ *e* $\nu_{\mathbb{P}}(E_n) < \infty$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Isto é,* $\mathcal{I}$ *contém uma sequência localizadora.*

Seja $\mathbb{Q}$ *uma medida de probabilidade em* $(M, \mathcal{M}^p)$ *que satisfaz:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k}\{\mu \in M^p : \mu(I_j) \leqslant n_j\}\right) = \mathbb{Q}\left(\bigcap_{j=1}^{k}\{\mu \in M^p : \mu(I_j) \leqslant n_j\}\right),$$

para todo $k \geqslant 1$ *e para todo* $I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{I}$, *e* $n_1 \geqslant 0, \ldots, n_k \geqslant 0$. *Então,* $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ *em* $\mathcal{M}^p$.

Apresentamos uma demonstração com base em (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996, p. 69).

Demonstração. Defina a classe de conjuntos (de cilindros) em $\mathcal{M}^p$ por:

$$\mathcal{J} = \left\{\bigcap_{j=1}^{k}\{\mu \in M^p : \mu(I_j) \leqslant n_j\} : I_j \in \mathcal{I}, n_j \geqslant 0, 1 \leqslant j \leqslant k, k \geqslant 1\right\}.$$

Note que por um argumento análogo ao de (ATHREYA; LAHIRI, 2006, p. 202), a classe $\mathcal{C}$ é uma álgebra, e logo um sistema-π. Notemos que $\mathcal{N}^p = \sigma(\mathcal{J})$. Como $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ são medidas de probabilidade em $(M^p, \mathcal{M}^p)$, pelo teorema de determinação de medidas de probabilidade em sistemas-π (KALLENBERG, 2021, p. 20), temos que as as medidas $\mathbb{P}_\eta$ e $\mathbb{P}_\psi$ coincidem em $\mathcal{N}^p$. Assim, temos que $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ em $\overline{\mathcal{N}^p}$, e como pelo Lema 4, $\overline{\mathcal{N}^p} = \overline{\mathcal{M}^p}$, segue-se que $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ em $\overline{\mathcal{M}^p}$. Como $M^p \subseteq \overline{\mathcal{M}^p}$, temos que $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ em M^p. O que prova o resultado. $\square$

Em analogia com a definição do funcional de Laplace no caso s-finito, Definição 7, temos a seguinte definição (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996, p. 69):

Definição 27 (Funcional de Laplace em Espaços de Configurações)**.** *Seja* $(M^p, \mathcal{M}^p, \mathbb{P})$ *um processo pontual. Definimos seu funcional de Laplace* $\hat{\mathbb{P}} : \mathcal{F} \to [0,1]$, *para* $\mathcal{F}$ *o espaço de funções em* $\overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{M}^p$*-mensuráveis, e para qualquer* $f \in \mathcal{F}$, *como sendo:*

$$\hat{\mathbb{P}} = \int_{M^p} e^{-\int_{M^p} f(x)\mu(dx)}\mathbb{P}(d\mu)$$

Assim, temos o resultado de determinação para distribuições de processos pontuais em termos de funcionais de Laplace (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996, p. 69):

Teorema 25 (Funcionais de Laplace e Distribuições)**.** *Sejam* $(M^p, \mathcal{M}^p, \mathbb{P})$ *e* $(M, \mathcal{M}^p, \mathbb{Q})$ *processos pontuais e suponha que* $\hat{\mathbb{P}}(f) = \hat{\mathbb{Q}}(f)$ *para qualquer* $f \in \mathcal{F}$*. Então* $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ *em* $\mathcal{M}^p$*.*

Apresentamos uma demonstração do teorema com base em (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996, pp. 69-70).

Demonstração. Seja $\mathcal{I} = \{F \in \mathcal{X} : \nu_{\mathbb{P}}(F) < \infty \text{ e } \nu_{\mathbb{Q}}(F) < \infty\}$. Note que, por definição, $\nu_{\mathbb{P}}$ e $\nu_{\mathbb{Q}}$ são localmente finitas, visto que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{P}$ são processos pontuais. Assim, existe uma sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\hat{\mathcal{X}}$ tal que $E_n \uparrow E$, e $\nu_{\mathbb{P}}(E_n) < \infty$, e $\nu_{\mathbb{Q}}(E_n) < \infty$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}$. Note que $\mathcal{I}$ é um sistema π. Além disso, $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{X}$. De fato, tome $F \in \mathcal{X}$. Então, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty}(F \cap E_n)$, mas $F \cap E_n \in \mathcal{I}$ para cada n, e como $\nu_{\mathbb{P}}(F \cap E_n)\nu_{\mathbb{P}}(F \cap E_n) \leqslant \nu_{\mathbb{P}}(E_n)\nu_{\mathbb{P}}(E_n) < \infty$ para todo n, logo $F \in \sigma(\mathcal{I})$. Como $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{X}$ por definição, temos a igualdade. Agora, seja $F_1, \ldots, F_k$ uma coleção finita de conjuntos em $\mathcal{I}$, e seja $f \in \mathcal{F}$ definida por $f(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbb{1}_{F_j}(x)$ para $\lambda_j \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Para qualquer $\mu \in M^p$ temos que $\int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu(F_i)$. Por hipótese, temos que $\hat{\mathbb{P}}(f) = \hat{\mathbb{Q}}(f)$, então:

$$\int_{M^p} e^{-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mu(F_j)} \mathbb{P}(d\mu) = \int_{M^p} e^{-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mu(F_j)} \mathbb{Q}(d\mu).$$

Como $\nu_{\mathbb{P}}(F_i)\nu_{\mathbb{Q}}(F_i) < \infty$, $1 \leqslant i \leqslant k$, segue-se que as variáveis aleatórias $\mu \to \mu(F_i)$ são finitas q.c. $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$. Assim, pela unicidade de transformadas de Laplace em $\mathbb{R}^k$ (KALLENBERG, 2021, p. 128), temos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{\mu \in M^p : \mu(F_j) \leqslant n_j\right) = \mathbb{Q}\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{\mu \in M^p : \mu(F_j) \leqslant n_j\right), \}$$

para todo $k \geqslant 1$ e $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{I}$. Daí, pelo Teorema 24, temos que $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ em $\mathcal{M}^p$.

□

Seguindo (MECKE, 1979) (veja a Seção 2.3 desta dissertação para mais detalhes), além de (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996, p. 70), podemos identificar uma variável aleatória com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$, $Y_F(\mu) = \mu(F)$, para cada $F \in \mathcal{X}$ e $\mu \in M^p$. Então, $Y = \{Y_F\}_{F\in\mathcal{X}}$ forma um elemento aleatório com valores em M^p. Se realizarmos esta construção no contexto de um processo pontual $(M^p, \mathcal{M}^p, \mathbb{P})$, dizemos que Y é o processo estocástico associado à $(M^p, \mathcal{M}^p, \mathbb{P})$.

Assim, temos o análogo do processo de Poisson no caso do espaço de configurações (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996, p. 70):

Definição 28 (Processo de Poisson - Espaço de Configurações)**.** *Um processo pontual* $(M^p, \mathcal{M}^p, \mathbb{P})$ *é dito um processo de Poisson com medida média* $\nu_{\mathbb{P}}$ *se:*

(i) Para cada $k \geqslant 2$*, e para conjuntos disjuntos arbitrários* $F_1, \dots, F_k$ *em* $\mathcal{X}$*, as variáveis aleatórias* $X_{F_1}, \dots, X_{F_k}$ *são independentes, e*

(ii) A distribuição de X_F *é Poisson com esperança* $\nu_{\mathbb{P}}(F)$ *para todo* $F \in \mathcal{X}$*.*

Assim como fizemos no Corolário 1, podemos construir o processo de Poisson no espaço de configurações através de processos binomiais mistos. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar, além das demonstrações da seção 1.3 desta dissertação, as páginas 70 e 71 de (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996). Terminamos a apresentação desta abordagem com um teorema de representação própria (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996, p. 72):

Teorema 26 (Representação Própria de Um Processo de Poisson)**.** *Para qualquer medida localmente finita* μ *em* $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$*, existe um processo de Poisson* $(M^p, \mathcal{M}^p, \mathbb{P})$ *com medida média* μ *e uma sequência de elementos aleatórios* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *com valores em* X*, e definidos em* M^p*, e uma variável aleatória* κ *com valores em* $\overline{\mathbb{N}}_0$*, definida em* M^p*, tal que:*

$$X_F = \sum_{i=1}^{\kappa} \delta_{\{X_n \in F\} \cap \{Y \geqslant 1\}},$$

para qualquer $F \in \mathcal{X}$*, onde* $\{X_F\}_{F\in\mathcal{X}}$ *é o processo estocástico associado à* $(M^p, \mathcal{M}^p, \mathbb{P})$*.*

Este teorema encerra nossa exposição da abordagem de processos pontuais de (FINKELSTEIN; TUCKER; VEEH, 1996). Além dos resultados citados nesta seção, os autores desenvolvem, na seção 4 do artigo, uma teoria de marcas abstrata como feito na Seção 1.4 desta dissertação, de modo que ambas as abordagens, com medidas s-finitas ou medidas média localmente finitas, exibem propriedades estruturais gerais que podem ser utilizadas, com sucesso, no contexto abstrato da teoria de processos pontuais e medidas aleatórias sem topologia.

2.3 Sobre a Existência de Medidas Aleatórias e Processos Pontuais no Contexto (Pseudo)-Topológico

Em contraste com a abordagem construtiva de existência exibida para o processo de Poisson no caso da Seção 1.3, e no espaço de configurações na seção 2.3, queremos, agora, tratar de alguns métodos gerais para a existência de processos pontuais (e, mais geralmente, medidas aleatórias) quando nosso espaço X está munido de alguma estrutura topológica, ou pseudo-topológica. Neste contexto, vamos exibir a construção de processos pontuais, em espaços standard Borel, com base na regularização de medidas vetoriais, isto é, medidas com valores em um espaço vetorial topológico - ver (RAO, 2011) para mais informações- proposta por (KALLENBERG, 2017, p. 62). Trata-se de um desenvolvimento das ideias apresentadas na seção 2.1 desta dissertação.

Neste caso, a menos de indicação, assuma que $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ é um espaço Borel localizado. Além disso, assumimos que o espaço de probabilidade base $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde estão definidos os elementos aleatórios, é completo (i.e, todos os conjuntos $\mathbb{P}$-nulos são mensuráveis)[3]. Seguindo (KALLENBERG, 2017, p. 62), mas modificando o resultado para uma álgebra dissecante, temos o seguinte resultado, inspirado no trabalho de T. E. Harris (HARRIS, 1968):

Teorema 27 (Regularização de Medidas Vetoriais e Processos Aditivos)**.** *Dado um processo estocástico não-negativo η indexado em um anel dissecante $\mathcal{U} \subseteq \hat{\mathcal{X}}$, existe uma medida aleatória ξ em X tal que $\eta_U = \xi(U)$ q.c.-$\mathbb{P}$ $\forall U \in \mathcal{U}$ se e somente se*

(i) $\eta_{(A \bigcup B)} = \eta_A + \eta_B$ *q.c. para $A, B \in \mathcal{U}$ disjuntos,*

(ii) $\eta_{A_n} \to 0$ *em probabilidade com respeito à $\mathbb{P}$ se $A_n \downarrow \varnothing$ em $\mathcal{U}$.*

Neste caso, ξ é única q.c.-$\mathbb{P}$.

A demonstração do resultado será comentada a partir de (KALLENBERG, 2017, p. 62). Em particular, seguiremos a demonstração do autor, pontuando algumas extensões, para maior clareza, em alguns pontos. Além disso, numa noma técnica: note que todos os conjuntos nulos citados na discussão da demonstração são tomados com respeito à $\mathbb{P}$, medida definida no espaço de probabilidade onde os elementos aleatórios (medidas e processos) estão definidos. Para mais detalhes, recomendamos a leitura da referência citada.

Demonstração. Em um primeiro passo, note que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $X \in \mathcal{U}$ e que $\eta_X < \infty$. De fato, no caso geral, utilizando que o limite pontual monótono de núcleos preserva a mensurabilidade destes (ZIEMER; TORRES, 2017, p. 130), e que podemos aproximar X por uma sequência localizadora de $\mathcal{U}$, existe uma aproximação de η por limites monótonos de núcleos (medidas aleatórias) definidos(as) em $\mathcal{U}$ tais que $\xi_U = \eta_U$, visto que ξ é finito em $\mathcal{U}$. Assim, o caso geral segue do caso finito.

[3] Note que isto sempre pode ser feito, vide (KALLENBERG, 2021, p. 24)

Por outro lado, o processo estocástico definido (indexado) em $\mathcal{U}$ dado por (daí a necessidade da finitude de η_X):

$$\eta^* = \frac{\eta}{(1 + \eta_X)},$$

satisfaz as propriedades (i) e (ii) do teorema em $\mathcal{U}$, e podemos, sem perda de generalidade, substituir η por η^*, mas mantendo a notação, e logo assumir que $\eta_X \leqslant 1$ q.c.

Neste caso, continuando a demonstração, defina o conteúdo totalmente finito (visto que $\eta_X < \infty$) λ em $\mathcal{U}$ dado por:

$$\lambda(A) = \mathbb{E}(\eta_A), \;\; A \in \mathcal{U}.$$

Provemos que $\lambda(\varnothing) = 0$ e que esta é σ-aditiva em $\mathcal{U}$, e logo uma medida totalmente finita em $\mathcal{U}$. De fato,

(i) Note que $\varnothing \in \mathcal{U}$ e $X \in \mathcal{U}$, e como $\mathcal{U}$ é um anel, $X = X \cup \varnothing \in \mathcal{U}$ (união disjunta) e, por (i) do teorema, $\eta_X = \eta_{X \cup \varnothing} = \eta_X + \eta_\varnothing$, e portanto $\eta_\varnothing = 0$ a menos de um conjunto $\mathbb{P}$-nulo. Assim, $\lambda(\varnothing) = \mathbb{E}(\eta_\varnothing) = 0$ (lembrando que a integral elemina a dependência no conjunto nulo - o que vamos denominar por uma "suavização"dos conjuntos nulos pelo (operador) integral) .

(ii) Considere $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de conjuntos dois-a-dois disjuntos em $\mathcal{U}$ tal que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ é um anel, logo fechado sob diferenças próprias e uniões finitas,

$$\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \backslash (\bigcup_{j=1}^{n} E_j) \in \mathcal{U}.$$

Além disso, $\bigcup\limits_{j=n+1}^{\infty} E_j$ é uma sequência (indexada por n) decrescente de conjuntos, de modo que $\bigcup\limits_{j=n+1}^{\infty} E_j \downarrow \varnothing$ em $\mathcal{U}$ (vide (KALLIANPUR; SUNDAR, 2014, p. 1)). Assim, pela aditividade finita de η ((i) nas hipóteses do teorema), e assumindo a suavização dos conjuntos nulos pela integral em cada operação, como no caso acima, temos que:

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = E(\eta_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}) = E(\eta_{\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j}) + E(\eta_{\bigcup_{j=1}^{n} E_j}) = \lambda(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j) + \lambda(\bigcup_{j=1}^{n} E_j).$$

Por outro lado, como $\eta_X \leqslant 1$, temos que $\eta_{\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j} \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos uma sequência dominada, e como $\bigcup\limits_{j=n+1}^{\infty} E_j$ é uma sequência (indexada por

n) decrescente de conjuntos, de modo que $\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j \downarrow \varnothing$ em $\mathcal{U}$, temos que pela hipótese (ii) do teorema,

$$\eta_{\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j} \to 0, \text{ em probabilidade quando } n \to \infty.$$

Assim, pelo teorema da convergência dominada para convergência em probabilidade ,

$$E(\eta_{\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j}) \to 0, \text{ q.c.}$$

Por outro lado, novamente pelo fato de η ser dominada para qualquer conjunto (índice) em $\mathcal{U}$, e pela hipótese de aditividade (i) do teorema, temos que

$$\lambda(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = E(\eta_{\bigcup_{j=1}^{n} E_j}) = \sum_{j=1}^{n} E(\eta_{E_j}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(E_j),$$

forma uma sequência (indexada por n) dominada superiormente (por 1), e logo é convergente com limite finito dado por:

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(E_j).$$

Assim,

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E_n).$$

Provando, a σ-aditividade de λ em $\mathcal{U}$, e logo provando que esta é, de fato, uma medida totalmente finita em $\mathcal{U}$ (note que, basicamente, provamos o teorema de extensão de (KALLIANPUR; SUNDAR, 2014, p. 1) para o caso de anéis).

Agora, pelo teorema da extensão de Carathéodory (por exemplo, (KALLENBERG, 2021, p. 36)), levando em conta que λ é medida totalmente finita, temos que esta possui uma extensão (única) à uma medida (totalmente finita) em $\sigma(\mathcal{U})$. Mas, como $\mathcal{U}$ é um anel dissecante que contém X, temos que $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{X}$, visto que $\sigma(\mathcal{U})$ contém todos os abertos da topologia polonesa de X que gera $\mathcal{X}$. Assim, obtemos uma extensão σ-aditiva (ou contavelmente aditiva) de λ à $\mathcal{X}$.

Neste caso, seguindo a construção de (VIDMAR, 2017), a função $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to [0, \infty)$ dada por $\rho(A, B) = \lambda(A\Delta B)$ é uma pseudo-métrica no espaço $\mathcal{X}$. Além disso, por um argumento de classe monótona (HALMOS, 1950, p. 56) , $\mathcal{U}$ é denso, com respeito à pseudo-métrica ρ, no σ-anel gerado por este. Mas, novamente, como $\mathcal{U}$ é um anel que contém X, pelo teorema da classe monótona de Sierpinski (KALLENBERG, 2021, p. 20), o σ-anel gerado por este equivale à σ-álgebra gerada por este, ou seja, $\mathcal{U}$ é denso em $\mathcal{S}$ com respeito à metrica ρ. Neste contexto, utilizando novamente a hipótese de aditividade de η (hipótese (i) do teorema), além de uma suavização por conjuntos nulos, sendo $A, B \in \mathcal{U}$, vale que:

$$\|\eta_A - \eta_B\|_{L^1} = E(\eta_A - \eta_B) = E(|\eta_{A\setminus B} - \eta_{B\setminus A}|) \leqslant E(\eta_{A\setminus B}) + E(\eta_{B\setminus A}) = \lambda(A\Delta B),$$

com $\|\cdot\|_{L^1}$ a norma de $L^1(\mathbb{P})$.

Sendo assim, dado um $\epsilon > 0$ qualquer, existe (escolha $\delta = \epsilon$!) um $\delta > 0$ (que não depende de A, B) tal que para quaisquer $A, B \in \mathcal{U}$ $\rho(A, B) = \lambda(A\Delta B) < \delta$, implica que (pela expressão acima):

$$\|\eta_A - \eta_B\|_{L^1} \leqslant \lambda(A\Delta B) < \epsilon.$$

Isto é, η é um mapa uniformemente contínuo do espaço pseudo-métrico $(\mathcal{U}, \rho)$ ao espaço métrico completo $L^1(\mathbb{P})$ (equipado com a métrica induzida pela norma $L^1(\mathbb{P})$. Assim, por (DOBERKAT, 2015, p. 356), η admite uma extensão uniformemente contínua à $\mathcal{X}$, que denotamos por $\tilde{\eta}$. Provemos que esta extensão mantém as propriedades (i) e (ii) do teorema.

(i) Pela densidade de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{X}$ com respeito à pseudo-métrica ρ, sendo $A, B \in \mathcal{X}$, podemos escolher sequências $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{U}$ tais que estas convirjam à A e B respectivamente (na topologia induzida por ρ) (FREIWALD, 2014, p. 92). Desse modo,

$$\rho(A \cup B, A_n \cup B_n) = \lambda((A \cup B)\Delta(A_n \cup B_n)) \leqslant \lambda(A\Delta A_n) + \lambda(B\Delta B_n).$$

Tomando o limite em $n \to \infty$, concluímos que a sequência $\{A_n \cup B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ converge à $A \cup B$ com respeito à ρ. Assim, levando em conta que η e $\tilde{\eta}$ coincidem em $\mathcal{U}$, pela continuidade de $\tilde{\eta}$ (FREIWALD, 2014, p. 94), e pela aditividade q.c. $\mathbb{P}$ de η em $\mathcal{U}$:

$$\tilde{\eta}_{(A\cup B)} = \lim_{n\to\infty} \tilde{\eta}_{(A_n\cup B_n)} = \lim_{n\to\infty} \eta_{(A_n\cup B_n)} = \tilde{\eta}_A + \tilde{\eta}_B.$$

Ou seja, (i) é preservada pela extensão.

(ii) Suponha $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{X}$ tal que $A_n \downarrow \varnothing$ em $\mathcal{X}$. Para cada n, pela densidade de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{X}$ com respeito à ρ, podemos escolher sequências $\{B_j^n\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ tais que $B_j^n \to A_n$ quando $j \to \infty$ (com respeito à ρ) (FREIWALD, 2014, p. 92). Novamente pelas continuidades de $\tilde{\eta}$ (FREIWALD, 2014, p. 94) e de λ em $\mathcal{X}$ ((VIDMAR, 2017, p. 1) com respeito à ρ, esta última consequência direta da σ-aditividade de λ em $\mathcal{X}$, temos que:

$$E(\tilde{\eta}_{A_n}) = E(\tilde{\eta}_{\lim_{n\to\infty} B_j^n}) = \lambda(\lim_{n\to\infty} \tilde{\eta}_{B_j^n}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_j^n) = \lambda(A_n).$$

Tomando o limite $n \to \infty$ nesta expressão, e levando em conta que $\lambda(A_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, pois $A_n \downarrow \varnothing$, temos que $\tilde{\eta}_{A_n}$ converge à 0 em $L^1(\mathbb{P})$, e logo em probabilidade para 0. Ou seja, (ii) também é preservada pela extensão.

Assim, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mathcal{U} = \mathcal{X}$, visto que temos uma extensão (uniformemente contínua) de η de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{X}$ que preserva as hipóteses (i) e (ii) do teorema.

Para mais uma redução, vamos ver que podemos nos restringir ao caso real. De fato, como X é um espaço standard Borel, existe um conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e um mapa bijetor, bimensurável f tal que $f : X \to B \subseteq \mathbb{R}$. Assim, como o mapa consiste numa transformação que preserva mensurabilidade (nas duas direções), podemos assumir, sem perda de generalidade, que $X = B$, aplicando o mapa f em η caso seja necessário. Assim, podemos considerar η não como um mapa com domínio (de indexação) em $\mathcal{X}$, mas $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap B$. Neste caso, realizando a extensão de η como um mapa de $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap B$ à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, isto é,

$$\eta_A = \eta_{A\cap X} = \eta_{A\cap B}, \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap B \text{ qualquer.}$$

Podemos considerar η (sempre aplicando o mapa f para transformar conjuntos mensuráveis de $\mathcal{X}$ em conjuntos mensuráveis de $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap B$) , ainda mais, como um mapa com domínio em $\mathcal{X} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que $X = \mathbb{R}$. Em uma nota técnica, poderíamos ter construído, numa divisão do caso X com cardinalidade contável/não-contável, a bijeção, bimensurável f direto com o caso real, isto é, com $B = \mathbb{R}$, através do teorema de Kuratowski (ver, por exemplo, (KECHRIS, 1995, p. 90)).

Nos movendo para o fim da demonstração da suficiência, defina o mapa (processo) $Y = \mathbb{R} \to L^1(\mathbb{P})$ por $Y_r = \eta_{(-\infty,r]}$, com $r \in \mathbb{R}$. Assim,

(i) Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ com $r < s$. Desse modo, pela aditividade q.c. $\mathbb{P}$ de η (hipótese (i) do teorema), temos que:

$$Y_r \leqslant Y_s \text{ q.c,}$$

visto que $Y_s = \eta_{(\infty,r]} + \eta_{(r,s]}$ q.c. $\mathbb{P}$.

(ii) Pelo item anterior, concluímos que, a menos de um conjunto nulo, Y é uma função monótona. Assim, considere $A_r = (-\infty, r]$ uma sequência de conjuntos indexada por $r \in \mathbb{Q}$. Assim, $A_r \downarrow \varnothing$, $r \to -\infty$, $r \in \mathbb{Q}$, e por (ii) de nossas hipóteses, temos que, q.c. $\mathbb{P}$, $Y_r \to 0$ em probabilidade. Pela monotonicidade de Y, e por (GUT, 2013, p. 212), temos que a convergência é quase certa (como sempre, em $\mathbb{P}$). Similarmente, para a mesma sequência A_r, mas tomando $r \to \infty$, utilizando (ii) e a fórmula para a medida do complementar de um conjunto para uma medida absolutamente finita, obtemos que q.c. a convergência $Y_r \to \eta_X$ é quase certa.

Numa outra nota técnica, como indica (KALLENBERG, 2017), tais relações são válidas a menos de uma coleção contável (indexada em $\mathbb{Q}$) de conjuntos nulos. Desse modo, redefinindo Y arbitrariamente num conjunto nulo formado pela união destes para (i) e (ii) acima, podemos obter que tais relações são válidas identicamente.

Por fim, defina o mapa (processo) $X : \mathbb{R} \to L^1(\mathbb{P})$ por:

$$X_t = Y_{t^+} = \liminf_{r \to t, r \in \mathbb{Q}, r > t} Y_q = \inf_{r \in \mathbb{Q}, r > t} Y_r,$$

com $t \in \mathbb{R}$. Note que sempre podemos realizar esta construção, visto que $\mathbb{Q}$ é um conjunto denso, na métrica euclidiana, em $\mathbb{R}$, e levando em conta que η é um mapa limitado, logo o limite inferior à direita está bem definido e é igual ao ínfimo neste conjunto (dada a monotonicidade de Y).

Sendo assim, novamente pela monotonicidade de Y, e levando em conta que X é, por definição, a versão contínua à direita de Y, temos que X é monotonicamente não-decrescente e é contínuo à direita. Além disso, por (i) acima, $X_{-\infty} = 0$ e $X_\infty = \eta_X$. Assim, pela identificação de medidas de Lebesgue-Stieltjes e funções não-decrescentes e contínuas à direita na reta real (KALLENBERG, 2021, p. 42), existe uma função (mapa/processo) $\xi : \Omega \to \hat{\mathcal{M}}_\mathbb{R}$ definido na classe de todas as medidas localmente finitas em $\mathbb{R}$ tal que $\xi(-\infty, t] = X_t \ \forall t \in \mathbb{R}$, de modo que ξ é uma medida aleatória em $\mathbb{R}$ (precisamos garantir mensurabilidade, que segue pelo próximo lema citado) vide (KALLENBERG, 2021, p. 30).

Num dos últimos passos da demonstração, seja, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ (na topologia euclidiana usual), $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{Q}$ tal que $q_n \downarrow t$, $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Assim, novamente argumento como em (ii) acima, pela hipóteses (ii) do teorema e pela monotonicidade de Y, temos que $\eta_{(-\infty, q_n]} = Y_{q_n} \downarrow Y_t$ q.c. $\mathbb{P}$. Levando em conta que X é a versão contínua à direita de Y, temos que (lembrando que os limites existem e estão bem definidos pelo fato de η ser limitada):

$$Y_{t^+} = X_t = \lim_{n \to \infty} Y_{q_n} = \xi(-\infty, t].$$

Assim, combinando os dois limites, $\eta_{(-\infty,t]} = \xi(-\infty, t]$ q.c. $\mathbb{P}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ ($\blacktriangle$). Assim, para $q \in \mathbb{Q}$, defina:

$$\mathcal{A}_q = \{\omega : \eta(\omega)_{(-\infty,q]} = \xi(\omega, (-\infty, q])\}.$$

Por (▲) no parágrafo acima, $\mathbb{P}(\mathcal{A}_q) = 1$. Defina o sistema-$\pi$ dado por $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = (\infty, q], q \in \mathbb{Q}\}$. Assim, $\omega \in \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathcal{A}_q \implies \eta(\omega)_. = \xi(\omega, \cdot)\ \forall I \in \mathcal{I}$. Mas $\mathcal{I}$ é um sistema-π que gera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Assim, temos que por (KALLENBERG, 2021, p. 20), $\omega \in \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathcal{A}_q \implies \eta(\omega)_. = \xi(\omega, \cdot)\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Desse modo,

$$\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathcal{A}_q = \{\omega : \eta(\omega)_B = \xi(\omega, B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

E, pela aditividade contável de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathcal{A}_q) = 1$. Assim, $\eta_A = \xi(A)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ q.c. Que, pela identificação de X com $\mathbb{R}$ pelo mapa f, concluí a demonstração da suficiência.

A parte necessária do teorema é direta, visto que, como ξ é uma medida aleatória, esta é aditiva e satisfaz a continuidade para sequências decrescentes de conjuntos ao conjunto vazio. Ou seja, se $\eta_A = \xi(A)$ q.c. $\mathbb{P}$ para $A \in \mathcal{U}$ qualquer, as condições (i) e (ii) seguem diretamente do fato de, para cada $\omega \in \Omega$ fixo, $\xi(\omega, \cdot)$ é uma medida. □

Neste momento, é importante retirar a mensagem principal do teorema: dado um processo estocástico não-negativo indexado numa estrutura geral, um subanel gerador de um anel de localização de um espaço Borel localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$, podemos encontrar uma medida aleatória, definida na estrutura de medidas localmente finitas induzida em $\hat{\mathcal{X}}$, de modo que podemos associar a indexação do processo como as seções de medida da medida aleatória - de fato, a demonstração de (KALLENBERG, 2017, p. 62) mostra que podemos fazer isso em $\sigma(\mathcal{U})$, e não apenas em $\mathcal{U}$. Trata-se de um resultado bastante geral, e que conecta áreas, à primeira vista, distintas: processos estocásticos aditivos, medidas aleatórias e medidas vetoriais.

Versões equivalentes deste teorema, especialmente para o caso (metrizável) polonês, podem ser encontradas em (DALEY; VERE-JONES, 2008, pp. 16-18) e no Capítulo 1 de (KERSTAN; MATTHES; MECKE, 1978). É especialmente interessante a discussão na página 17 , da primeira referência, sobre o problema de satisfazer um número não-contável de condições (mensuráveis) do tipo (i) e (ii) no enunciado do Teorema de Regularização, no processo η, para garantir a extensão à uma medida aleatória. Note que, neste caso, a estrutura Borel é essencial: identificando X com $\mathbb{R}$, podemos reduzir essas condições à um número contável de operações em $\mathbb{Q}$, obtendo uma medida aleatória com a identificação clássica de Lebesgue-Stieltjes no caso real.

Resolvido o problema da extensão de um processo estocástico aditivo à uma medida aleatória, gostaríamos de traduzir este resultado à um teorema de existência de processos pontuais e medidas aleatórias. Para o caso de $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$, um espaço Borel localizado (no mesmo sentido desta seção), tal tradução é possível. Para isto, seguiremos o argumento de (KALLENBERG, 2017, p. 63). Neste caso, relembremos o conceito de família projetiva de medidas de probabilidade (KALLENBERG, 2021, p. 179):

Definição 29 (Família Projetiva de Probabilidade)**.** *Seja T um conjunto de índices qualquer e considere uma coleção qualquer de espaços mensuráveis $\{(\mathbb{X}_t, \mathcal{X}_t)\}_{t\in T}$. Seja $I \subseteq T$, e defina $\mathbb{X}_I = \bigtimes_{t\in I} \mathbb{X}_t$. Considere $\hat{T}$ e $\overline{T}$ as coleções de subconjuntos finitos e contáveis de T, respectivamente. Assim, uma família de medidas de probabilidade $\{\mu_I\}_{I\in\hat{T}}$ (ou indexada em $\overline{T}$) ,definida no espaço produto da coleção $\{(\mathbb{X}_t, \mathcal{X}_t)\}_{t\in T}$, é dita projetiva se*

$$\mu_J(\cdot \times S_{J\setminus I}) = \mu_I, \ \ I \subseteq J, J \in \hat{T} \ ou \ \overline{T}.$$

Seguindo esta definição, precisamos de mais um teorema de existência de limites projetivos e processos estocásticos, o qual retiramos de (KALLENBERG, 2021, p. 179):

Teorema 28 (Teorema da Existência de Kolmogorov-Bochner)**.** *Sejam $\{(\mathbb{X}_t, \mathcal{X}_t)\}_{t\in T}$ uma coleção de espaços standard Borel munidos das σ-álgebras geradas pela topologia polonesa destes, e T um conjunto de índices qualquer (possivelmente não contável). Considere $\hat{T}$ como sendo a classe de todos os subconjuntos finitos de T. Então, dada uma família projetiva de medidas de probabilidade $\{\mu_I\}_{I\in\hat{T}}$, esta possui um limite projetivo, isto é existem elementos aleatórios $\{X_t\}_{t\in T}$ definidos num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com valores (individualmente) em $\mathbb{X}_t$, $t \in T$, tais que a distribuição conjunta (o limite projetivo) destes, μ em $(\bigtimes_{t\in T} \mathbb{X}_t, \bigotimes_{t\in T} \mathcal{X}_t)$, satisfaz:*

$$\mu|_{\{t_1,\ldots,t_n\}\in\hat{T}} = \mathbb{P}(\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in (A_1, \ldots, A_n)\}) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1, \ldots, A_n),$$

onde $\{t_1, \ldots, t_n\} \in \hat{T}$ é uma coleção finita de elementos de T quaisquer, e $(A_1, \ldots, A_n) \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{t_i}$.

A demonstração do teorema pode ser vista em (KALLENBERG, 2021, p. 179) - notando que esta utiliza, de maneira essencial, a estrutura Borel dos espaços. Uma versão mais geral, para medidas totalmente finitas e espaços perfeitos pode ser vista no capítulo 5 do volume 4 do tratado de teoria da medida de D. Fremlin, (FREMLIN, 2006). Também, é interessante notar que o limite projetivo obtido acima é único, visto que, se houvesse outro limite projetivo com as mesmas distribuições finitas (algo que vale por hipótese), ambos seriam iguais nos cilindros de $\bigtimes_{t\in T} \mathbb{X}_t$, um sistema-π que gera $\bigotimes_{t\in T} \mathcal{X}_t$ (ROGERS; WILLIAMS, 1994, p. 120), e logo o teorema de determinação de medidas de probabilidade em sistemas-π (KALLENBERG, 2021, p. 20) garante a unicidade. De fato, a unicidade é explicitamente citada em (FREMLIN, 2006). Para o próximo resultado, um teorema de existência de medidas aleatórias, denotamos as distribuições de dimensão finita de uma medida aleatória ξ da seguinte maneira:

$$\mathbb{P}((\xi(B_1), \ldots, \xi(B_n)) \in \cdot) = \mu_{B_1,\ldots,B_n}(\cdot) = \mu_{B_1,\ldots,B_n},$$

com $\mu_{B_1,\ldots,B_n}$ medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$.

Assim, obtemos diretamente (KALLENBERG, 2017, p. 63), mas modificando novamente o resultado para um anel dissecante:

Teorema 29 (Existência de Medidas Aleatórias)**.** *Fixe um espaço Borel localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ e um anel dissecante $\mathcal{U} \subseteq \hat{\mathcal{X}}$ em X. Então, uma família de medidas de probabilidade $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas em $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$, para $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{U}$, para $n < \infty \in \mathbb{N}$ qualquer, consiste na família de distribuições de dimensão finita de uma medida aleatória ξ em X se e somente se esta é uma família projetiva e satisfaz:*

(i) $\mu_{A,B,A\cup B}(\{(x, y, z) : x + y = z\}) = 1$ para $A, B \in \mathcal{U}$ conjuntos disjuntos quaisquer e $\{(x, y, z) : x + y = z\}$ o conjunto de todas as tuplas de $\mathbb{R}_+^3$ que satisfazem a condição dada.

(ii) $\mu_{A_n} \to \delta_0$ fracamente quando $n \to \infty$, para uma sequência $A_n \downarrow \varnothing$ em $\mathcal{U}$.

A distribuição de ξ é única.

Apresentaremos, assim como no caso anterior, uma discussão da demonstração de (KALLENBERG, 2017, p. 63), adicionando algumas extensões para maior clareza dos passos.

Demonstração. Para a parte necessária da demonstração, note que, se $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma família de distribuições de dimensão finita de uma medida aleatória ξ,

(i) ξ é uma medida aleatória em X, portanto $\xi(A \cup B) = \xi(A) + \xi(B)$ para $A, B \in \mathcal{U}$ conjuntos disjuntos quaisquer. Assim, $\mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega, A \cup B) = \xi(\omega, A) + \xi(\omega, B)\}) = 1$. Por outro lado, podemos escrever o conjunto $\{\omega : \xi(\omega, A \cup B) = \xi(\omega, A) + \xi(\omega, B)\}$ como:

$$\{\omega : (\xi(A), \xi(B), \xi(A \cup B)) \in \{(x, y, z) : x + y = z\}\}.$$

Desse modo,

$$\mu_{A,B,A\cup B}(\{(x,y,z):x+y=z\})=\mathbb{P}(\{\omega:\xi(\omega,A\cup B)=\xi(\omega,A)+\xi(\omega,B)\})=1.$$

E a primeira condição, (i), é válida.

(ii) Pelo item (ii) do teorema 0.1.2 (que vale, visto que ξ é medida aleatória), $\xi(A_n)\to 0$ q.c. quando $n\to\infty$ para para uma sequência $A_n\downarrow\varnothing$ em $\mathcal{U}$. Por (GUT, 2013, p. 212), isto é equivalente à convergência fraca da distribuição de ξ à δ_0, ou seja, $\mu_{A_n}\to\delta_0$ fracamente quando $n\to\infty$, para uma sequência $A_n\downarrow\varnothing$ em $\mathcal{U}$. Logo, a condição (ii) é válida.

O que demonstra a parte necessária do teorema.

Para a parte suficiente do teorema, a condição de família projetiva na hipótese do teorema nos garante, pelo Teorema de Kolmogorov-Bochner (Teorema 28), um processo estocástico positivo η indexado em $\mathcal{U}$ com distribuições de dimensão finita dadas pela família $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n_+)$, para $B_1,\ldots,B_n\in\mathcal{U}$. Por outro lado, as condições (i) e (ii) deste teorema garantem, pelo mesmo argumento da parte necessária do teorema, que as condições (i) e (ii) do Teorema 27 estão satisfeitas. Assim, pelo Teorema 27, existe uma medida aleatória ξ em X tal que $\eta_U=\xi(U)$ q.c. para todo $U\in\mathcal{U}$. Por outro lado, a condição de igualdade em $\mathcal{U}$ nos garante que $(\xi(B_1),\ldots,\xi(B_n))=(\eta_{B_1},\ldots,\eta_{B_n})$. Assim:

$$\mathbb{P}((\xi(B_1),\ldots,\xi(B_n))\in\cdot)=\mathbb{P}((\eta_{B_1},\ldots,\eta_{B_n})\in\cdot)=\mu_{B_1,\ldots,B_n},$$

para $B_1,\ldots,B_n\in\mathcal{U}$ quaisquer (como sempre, $n<\infty, n\in\mathbb{N}$). Assim, temos que a família $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n_+)$, para $B_1,\ldots,B_n\in\mathcal{U}$ consiste nas distribuições de dimensão finita de ξ e η. Mas, visto que as distribuições de dimensão finita determinam unicamente a distribuição de um elemento aleatório/processo estocástico (KALLENBERG, 2021, p. 84), temos que a distribuição de ξ é dada pelo limite projetivo (dado pelo Teorema de Kolmogorov-Bochner) da família $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, ou seja, é única (isto é, fixada uma família de distribuições de dimensão finita, a distribuição "completa" é única) - vide nossa discussão anterior da unicidade do limite projetivo dado pelo Teorema de Kolmogorov-Bochner, e pelo fato de que conjuntos $\mathbb{P}$-nulos não alteram a unicidade distribucional. O que termina a demonstração da parte suficiente, e logo do teorema.

$\square$

Desse modo, a questão da existência de medidas aleatórias em um espaço standard Borel localizado $(X,\mathcal{X},\hat{\mathcal{X}})$ qualquer está totalmente resolvida. Similarmente, podemos afirmar que o caso da existência de processos pontuais quaisquer também está resolvido: afinal, todo processo pontual é, como já discutimos, por definição, uma medida aleatória (ver, por exemplo, (LAST; PENROSE, 2018, p. 128). De fato, um processo pontual, no contexto de (KALLENBERG, 2017) é uma medida aleatória com valores inteiros não-negativos (KALLENBERG, 2017, p. 49). Assim, pelo fato de que o espaços das medidas discretas é mensurável na σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{M}_X)$, Teorema 23, podemos aplicar o teorema de existência no caso de processos pontuais.

Para o caso dos processos pontuais, o Teorema 29 pode ser simplificado, de modo que um corolário direto é a demonstração topológica da existência do processo de Poisson em um espaço Borel localizado (DALEY; VERE-JONES, 2008, p. 31). Para outros resultados de existência que utilizam hipóteses (pseudo-)topológicas, assumindo que o espaço localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ é perfeito munido com uma medida rígida, ver (RIPLEY, 1976).

Para processos de Poisson (mistos) na reta, uma abordagem alternativa do Teorema de existência 29 pode ser formulada em termos do Teorema da Desintegração de Pachl (RAMACHANDRAN, 1979). Pelo uso de desintegrações, esta abordagem pode ser conectada diretamente com a teoria de medidas condicionais de processos pontuais, conectando o processo de Poisson diretamente com métodos mais recentes de análise de processos pontuais - vide os Capítulos 6-8 (KALLENBERG, 2017). Para mais informações desta abordagem, além de uma introdução à teoria da desintegração de medidas, ver (LYBEROPOULOS; MACHERAS, 2013).

2.4 A Existência de Medidas Aleatórias e Processos Pontuais no Caso Puramente Mensurável e o Formalismo de Mecke

Nesta seção, veremos que é possível relaxar as hipóteses (pseudo-)topológicas dos Teoremas de Existência e Regularização de medidas aleatórias da última seção e, ainda assim, obter um resultado de existência para processos pontuais e medidas aleatórias. Faremos este estudo seguindo o artigo de (MECKE, 1979), que utiliza elementos da teoria de integração de Morse-Transue-Chang-Rao (CHANG; RAO, 1986), isto é, a integração de bimedidas, para provar tais resultados.

Neste caso, para a escrita desta seção, utilizaremos as definições e resultados de (MECKE, 1979). Mas, nas demonstrações, faremos algumas modificações para maior detalhamento das técnicas. Além disso, unificaremos a notação do artigo com àquele de (KALLENBERG, 2017) com a utilização dos anéis de localização.

Para começar, fixamos um espaço mensurável qualquer $(X, \mathcal{X})$ com um anel de localização $\hat{\mathcal{X}}$, e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade no qual todos os elementos aleatórios serão definidos (i.e, feita uma referência sobre um elemento aleatório, este estará definido no espaço de probabilidade citado). Na notação de (MECKE, 1979), $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ é dito um espaço limitado, sendo que denotamos este, como visto acima, por um espaço localizado. Na mesma seção em que o autor apresenta esta definição, alguns exemplos são dados para deixar a noção de espaço limitado/localizado mais intuitiva, mas tratam-se dos mesmos exemplos que apresentamos, portanto não repetiremos tal apresentação.

Denotamos, por $\mathcal{M}_X$ o espaço de todas as medidas localmente finitas em $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$, e equipamos este espaço com a σ-álgebra gerada por todos os mapas projeção $\mu \mapsto \mu(B)$, com $B \in \hat{\mathcal{X}}$ e $\mu \in \mathcal{M}_X$, que denotamos por $\mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X)$, que também é gerada, como visto no Lema 1, pelos conjuntos da forma:

$$\{\mu \in \mathcal{M}_X : \mu(B) \leqslant t\}, \ B \in \hat{\mathcal{X}} \ , t \in \mathbb{R}_+.$$

Neste caso, note que a seguinte relação é válida:

$$\mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{M}_X)$$

Seguindo (MECKE, 1979), temos a seguinte definição:

Definição 30 (Medida Aleatória Segundo (MECKE, 1979))**.** *Dados um espaço localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ e $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X))$ o espaço mensurável de todas as medidas localmente finitas em X, um elemento aleatório $\xi : \Omega \to \mathcal{M}_X$ é dito uma medida aleatória.*

É importante frisar que, nesta seção, a partir daqui, nesta seção, todas as medidas aleatórias serão entendidas como medidas aleatórias no sentido de (MECKE, 1979) (Definição 30).

Vamos introduzir uma estrutura que será essencial na demonstração puramente mensurável da existência de processos pontuais e medidas aleatórias: os espaços mensuráveis amplos [4].

Neste caso, numa definição preliminar, mas essencial para a teoria, temos (MECKE, 1979):

Definição 31 (bimedida)**.** *Sejam $(X, \mathcal{X})$ e $(Y, \mathcal{Y})$ espaços mensuráveis quaisquer. Uma função de conjuntos $\beta : \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \to [0, \infty)$ é dita uma bimedida em $((X, \mathcal{X}); (Y, \mathcal{Y}))$ se:*

(i) Para cada $A \in \mathcal{Y}$ fixo, $\beta(A, \cdot)$ é uma medida em X (ou, mais rigorosamente, em $\mathcal{X}$).

(ii) Para cada $B \in \mathcal{X}$ fixo, $\beta(\cdot, B)$ é uma medida em Y (ou, mais rigorosamente, em $\mathcal{Y}$).

[4] Trata-se de uma tradução livre, por parte do presente autor, de "full measurable space" utilizado por (MECKE, 1979)

Dada esta estrutura, podemos definir com clareza o conceito de espaço mensurável amplo, criado em (KERSTAN; LIESE, 1974):

Definição 32 (Espaço Mensurável Amplo). *Um espaço mensurável* $(X, \mathcal{X})$ *é dito amplo se, para cada espaço mensurável* $(Y, \mathcal{Y})$ *e para cada bimedida em* $((X, \mathcal{X}); (Y, \mathcal{Y}))$*, existe um núcleo de probabilidade* $\nu : (Y, \mathcal{Y}) \to (X, \mathcal{X})$ *tal que:*

$$\beta(A, B) = \int_A \nu(g, B)\beta(dg, X)$$

Basicamente, esta definição é uma abstração mensurável do conceito de distribuição condicional regular, válida apenas em contextos (pseudo-) topológicos, vide (RAMACHANDRAN, 1979). De fato, a conexão com o contexto topológico é clara mediante o Teorema 7 de (KERSTAN; LIESE, 1974):

Teorema 30 (Kerstan-Liese). *Suponha que* $(X, \mathcal{X})$ *é um espaço mensurável amplo. Então, o espaço mensurável formado pelo traço de* X *por* D*, onde* $D \in \mathcal{X}$ *é um subconjunto (de* X*)* $\mathcal{X}$*-mensurável qualquer, é amplo. Isto é, o espaço mensurável* $(D, \mathcal{X} \cap D)$ *é amplo.*

De fato, trata-se da generalização mensurável do resultado (clássico) de teoria descritiva dos conjuntos de que um subconjunto G_δ de um espaço standard Borel é, ele próprio, um espaço standard Borel com a topologia do subespaço (KECHRIS, 1995). Em particular, temos o análogo deste caso topológico pelo seguinte resultado (KERSTAN; LIESE, 1974):

Teorema 31 (Espaços Amplos e Borel). *Seja* $(X, \mathcal{X})$ *um espaço standard Borel. Então, este é um espaço mensurável amplo.*

Ambos resultados garantem uma comparação bastante interessante com o caso topológico clássico. De fato, veremos mais adiante nesta seção como estas semelhanças nos garantem resultados análogos aos Teoremas 29 e 27 desta dissertação, mas fora do contexto de espaços standard Borel.

É importante notar que as ideias de (MECKE, 1979) estão construídas sob o formalismo canônico de medidas aleatórias: isto é, o procedimento de vê-las enquanto processos estocásticos indexados em conjuntos (algo que já encontramos nas Seções 1.3 , 2.2 e 2.3 desta dissertação). Neste caso, seja $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ um espaço localizado e denote por $Z_{\hat{\mathcal{X}}}$ o espaço de todas as funções $\mu : \hat{\mathcal{X}} \to [0, \infty)$ equipado com a σ-álgebra gerada pelas projeções:

$$\pi_\mu^B : Z_{\hat{\mathcal{X}}} \to [0, \infty).$$

Definidas pela relação $\mu \mapsto \mu(B)$, com $B \in \hat{\mathcal{X}}$, e que denotaremos por $\mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}}$. Neste caso, note que, dada $\mu \in \mathcal{M}_X$, podemos considerar μ como um mapa definido em $\hat{\mathcal{X}}$. De fato, considere $\{O_n\}_n$ uma sequência localizadora em $\hat{\mathcal{X}}$, e seja $C \in \mathcal{X}$ qualquer. Assim, defina $B_n = O_n \backslash O_{n-1}$, para $n > 1$, e $B_1 = O_1$, uma sequência em $\hat{\mathcal{X}}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X$, e note que:

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap C),$$

onde $B_n \cap C \in \hat{\mathcal{X}}$ para qualquer n, visto que $\hat{\mathcal{X}}$ é um anel de localização. Assim, pela continuidade de μ:

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap C),$$

onde $\mu(B_n \cap \cdot)$ é uma medida definida em $\hat{\mathcal{X}}$, e logo $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap \cdot)$ é uma medida definida em $\hat{\mathcal{X}}$. Ou seja, de fato podemos considerar μ como uma função de conjuntos tomando valores em $\hat{\mathcal{X}}$. Assim, segundo (MECKE, 1979),

$$\mathcal{M}_X \subseteq Z_{\hat{\mathcal{X}}},$$

e,

$$\mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X) = \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}} \cap \mathcal{M}_X.$$

Além disso, segundo a seção 4 de (MECKE, 1979), qualquer medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}(\mathcal{M}_X))$ induz uma medida de probabilidade em $(Z_{\hat{\mathcal{X}}}, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}})$ dada por $\mathbb{Q} = \mathbb{P}(\cdot \cap \mathcal{M}_X)$ com a seguinte propriedade [5]:

(S) Seja $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência disjunta em $\hat{\mathcal{X}}$ tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \hat{\mathcal{X}}$, então:

$$\mathbb{Q}(\{\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}} : \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)\}) = 1.$$

Visto que se $\mu \in \mathcal{M}_X$, está é σ-aditiva, e logo:

$$\mathbb{Q}(\{\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}} : \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)\}) = \mathbb{P}(\{\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}} : \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)\} \cap \mathcal{M}_X) = 1.$$

Segundo (MECKE, 1979), esse desenvolvimento demonstra que, para qualquer medida aleatória segundo a Definição 30, η em X, podemos associar a esta um processo estocástico $X = \{X_t\}_{t \in T}$ com conjunto de índices $T = \hat{\mathcal{X}}$ que satisfaz a propriedade (S) [6].

Nosso interesse, desse modo, é descobrir se, dado um processo estocástico com distribuição $\mathbb{Q}$, satisfazendo (S), em $(Z_{\hat{\mathcal{X}}}, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}})$ indexado em $\hat{\mathcal{X}}$, podemos encontrar

[5] Basicamente, uma localização em $\mathcal{M}_X$.
[6] Note que, como indicado acima, a condição (S) é, em outras palavras, a afirmação de que o processo X possui caminhos concentrados em $\mathcal{M}_X$, exatamente o que possibilita o processo de localização de X.

uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X))$, que corresponde à distribuição de uma medida aleatória, tal que $\mathbb{Q} = \mathbb{P}(\cdot \cap \mathcal{M}_X)$. Assim, garantida a existência das medidas/distribuições citadas neste parágrafo, conseguimos mostrar a existência de uma medida aleatória com distribuição prescrita por estas. De fato, note que se provarmos a existência de uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X))$ que satisfaz a condição em $\mathbb{Q}$ dada, a existência de uma medida aleatória com distribuição $\mathbb{P}$ é direta: defina $\Omega = \mathcal{M}_X$ e $\mathcal{F} = \mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X)$, e considere Y o processo canônico associado à $\mathbb{P}$ - isto é, Y possui distribuição $\mathbb{P}$ (ROGERS; WILLIAMS, 1994, p. 122). Temos que se definirmos $\eta : \Omega \times \mathcal{X} \to [0, \infty]$ por:

$$\eta(\omega, A) = Y(\omega, A),$$

com $\omega \in \Omega$ e $A \in \mathcal{X}$, temos que, para $B \in \mathcal{X}$ e $x \in X$ quaisquer:

$$\{\omega \in \Omega : \eta(\omega, B) \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega, B) \leqslant x\} = \{\mu \in \mathcal{M}_X : \mu(B) \leqslant x\},$$

sendo que este último conjunto é, por definição, $\mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X)$-mensurável. Além disso, para cada $\omega \in \Omega$ fixo, $\eta(\omega, \cdot) \in \mathcal{M}_X$. Ou seja, temos que η é uma medida aleatória, e esta possui distribuição $\mathbb{P}$ (a mesma distribuição de Y). Como já discutimos na seção anterior, tal construção é, essencialmente, a construção de um processo estocástico canônico.

Numa síntese da discussão dos últimos dos parágrafos, temos a equivalência da existência de uma medida aleatória com distribuição $\mathbb{P}$ em $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X))$ e a existência da própria medida $\mathbb{P}$ no mesmo espaço. Assim, seguindo (KRICKEBERG, 2014, p. 45) e (MECKE, 1979), vamos identificar $\mathbb{P}$ e a medida aleatória com distribuição dada por esta (o mesmo com $\mathbb{Q}$ e o processo estocástico com esta distribuição). Para mais informações sobre estes aspectos da teoria de processos estocásticos canônicos, ver (KALLENBERG, 2021, pp. 83-84), (ROGERS; WILLIAMS, 1994, p. 122-130), (SION, 1986), (RAO, 1981) e (SION, 1990).

Note que do ponto de vista técnico, tal discussão verbal corresponde, a menos de hipóteses topológicas, às conclusões dos Teoremas 29 e 27 desta dissertação (dados por (KALLENBERG, 2017)). Neste sentido, a inovação de (MECKE, 1979) consiste na demonstração de que, se o espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$ for amplo, então os análogos não-topológicos destes teoremas de existência são verdadeiros.

Para o análogo do Teorema 27 em (MECKE, 1979), precisamos do seguinte lema técnico (MECKE, 1979), para o qual a demonstração pode ser vista na referência citada:

Lema 5. *(Bimedidas e Distribuições de Probabilidade) Sejam $C \in \hat{\mathcal{X}}$, $D \in \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}}$ quaisquer e $\mathbb{Q}$ uma medida de probabilidade em $(Z_{\hat{\mathcal{X}}}, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}})$ satisfazendo (S) e*

$$\int_D \mu(C)\mathbb{Q}(d\mu) < \infty,$$

então, a função de conjuntos $H_{\mathbb{Q},C,B} : (\mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}} \cap D) \times (\mathcal{X} \cap C) \to [0, \infty)$ *definida por:*

$$H_{\mathbb{Q},C,B}(A, B) = \int_A \mu(B)\mathbb{Q}(d\mu),$$

com $A \in \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}} \cap D$ *e* $B \in \mathcal{X} \cap C$ *quaisquer, é uma bimedida em* $((D, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}} \cap D), (C, \mathcal{X} \cap C))$.

Agora, com este resultado em mãos, podemos enunciar o equivalente do Teorema 27 (MECKE, 1979):

Teorema 32 (Teorema da Regularização de Mecke)**.** *Seja* $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ *um espaço localizado tal que* $(X, \mathcal{X})$ *é um espaço mensurável amplo. Suponha que exista uma medida de probabilidade* $\mathbb{Q}$ *em* $(Z_{\hat{\mathcal{X}}}, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}})$ *satisfazendo (S). Então, existe uma medida de probabilidade* $\mathbb{P}$ *em* $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}(\mathcal{M}_X))$ *unicamente determinada tal que* $\mathbb{Q}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \cap \mathcal{M}_X)$.

Demonstração. Para provar a porção da existência no teorema, considere $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência localizadora de X em $\hat{\mathcal{X}}$. Defina $C_n = O_n \backslash O_{n-1}$, para $n > 1$, e $C_1 = O_1$ uma sequência disjunta em $\hat{\mathcal{X}}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = X$. Deste modo, defina:

$$D_{nk} = \{\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}} : k - 1 \leqslant \mu(C_n) < k\}.$$

E denote por, seguindo o lema 5,

$$H_{nk} = H_{\mathbb{Q},C_n,D_{nk}}.$$

Assim, note que, como $k - 1 \leqslant \mu(C_n) < k$, para $\mu \in D_{nk}$,

$$H_{nk}(D_{nk}, C_n) = \int_{D_{nk}} \mu(C_n)\mathbb{Q}(d\mu) < \int_{D_{nk}} k\mathbb{Q}(d\mu) = k\mathbb{Q}(D_{nk}) \leqslant k < \infty.$$

Assim, pelo Lema 5, H_{nk} é uma bimedida em $((D_{nk}, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}} \cap D_{nk}), (C_n, C_n \cap \mathcal{X}))$. Por outro lado, como $(X, \mathcal{X})$ é um espaço mensurável amplo, pelo teorema de Kerstan-Liese (30), o espaço mensurável formado pelo traço de X por C_n, isto é, $(C_n, C_n \cap \mathcal{X})$, é amplo. Assim, por definição, existem núcleos de probabilidade

$$\nu_{nk} : (D_{nk}, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}} \cap D_{nk}) \to (C_n, C_n \cap \mathcal{X}),$$

tais que:

$$H_{nk}(A, B) = \int_A \nu_{nk}(\mu, B)H_{nk}(d\mu, C_n),$$

com $A \in \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}} \cap D_{nk}$ e $B \in C_n \cap \mathcal{X}$. Mas, novamente pelo Lema 5, sabemos que:

$$H_{nk}(d\mu, C_n) = \mu(C_n)\mathbb{Q}(d\mu).$$

Assim,

$$\int_A \mu(B)\mathbb{Q}(d\mu) = \int_A \nu_{nk}(\mu, B)H_{nk}(d\mu, C_n) = \int_A \mu(C_n)\nu_{nk}(\mu, B)\mathbb{Q}(d\mu) \ (\blacktriangle),$$

para $k, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}} \cap D_{nk}$ e $B \in C_n \cap \mathcal{X}$. Agora, note que, para qualquer $\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}}$, e para um n fixo qualquer,

$$\mu(C_n) < \infty,$$

visto que $C_n \in \hat{\mathcal{X}}$. Assim, tomando $k = \lfloor \mu_{C_n} \rfloor + 1$, temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k - 1 \leqslant \mu(C_n) < k.$$

Ou seja, temos que, para $\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}}$ e n qualquer, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu \in D_{nk}$. Assim, para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer, $\{D_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ forma uma partição (note que estes são disjuntos) de $Z_{\hat{\mathcal{X}}}$.

Desse modo, dado $\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}}$ qualquer, e $n \in \mathbb{N}$ fixo, $\mu \in D_{nk}$, e portanto para os núcleos de probabilidade $\{\nu_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ existem núcleos de probabilidade $\nu_n : (Z_{\hat{\mathcal{X}}}, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}}) \to (C_n, C_n \cap \mathcal{X})$ tais que

$$\nu_{nk}(\cdot, \mu) = \nu_n(\cdot, \mu),$$

para $\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}}$ qualquer.

De fato, para $\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}}$ qualquer, tome:

$$\nu(\cdot, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{nk}(\cdot, \mu)\mathbb{1}(\mu)_{D_{nk}}.$$

Assim,

(i) Para $\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}}$ fixo, existe $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $\mu \in D_{nk}$, e logo:

$$\nu(\cdot, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{nk}(\cdot, \mu)\mathbb{1}(\mu)_{D_{nk}} = \nu_{nk}(\cdot, \mu),$$

,onde este último é uma função $C_n \cap \mathcal{X}$-mensurável, e logo o mesmo é válido para $\nu(\cdot, \mu)$.

(ii) Para cada $A \in C_n \cap \mathcal{X}$ fixo,

$$\nu_n(A, \cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{nk}(A, \cdot)\mathbb{1}(\cdot)_{D_{nk}}$$

Que é uma soma (contável) de medidas, e logo uma medida por (KALLENBERG, 2021, p. 19).

Assim, temos que ν_n é um núcleo de probabilidade $\nu_n : (Z_{\hat{\mathcal{X}}}, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}}) \to (C_n, C_n \cap \mathcal{X})$ satisfazendo a propriedade citada. Assim, a partir de (▲) concluímos que:

$$\int_A \mu(B)\mathbb{Q}(d\mu) = \int_A \mu(C_n)\nu_n(\mu, B)\mathbb{Q}(d\mu) \ (\blacktriangle\blacktriangle),$$

para $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}}$ e $B \in C_n \cap \mathcal{X}$. Assim, defina o mapa $\psi : Z_{\hat{\mathcal{X}}} \to \mathcal{M}_X$ por:

$$(\psi(\mu))(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)\nu_n(\mu, G \cap C_n),$$

para $G \in \mathcal{X}$.

Assim, de (▲▲) e (S),

$$\int_A \mu(G)\mathbb{Q}(d\mu) = \int_A (\psi(\mu))(G)\mathbb{Q}(d\mu),$$

para $A \in \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}}$ e $G \in \mathcal{X}$ (quaisquer). Assim, para $G \in \mathcal{X}$ qualquer:

$$\mathbb{Q}(\{\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}} : \mu(G) = (\psi(\mu))(G)\}) = 1.$$

Deste modo, defina a medida de probabilidade $\mathbb{P}(\cdot) = \mathbb{Q}(\psi^{-1}(\cdot))$. Desse modo, para $\{G_i\}_{i=1}^n \in \hat{\mathcal{X}}$ e H um subconjunto Borel de $[0, \infty)^m$:

$$Q(\{\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}} : (\mu(G_1), \ldots, \mu(G_n)) \in H\}) =$$

$$Q(\{\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}} : ((\psi(\mu))(G_1), \ldots, (\psi(\mu))(G_n)) \in H\}).$$

Além disso,

$$Q(\{\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}} : ((\psi(\mu))(G_1), \ldots, (\psi(\mu))(G_n)) \in H\}) =$$

$$\mathbb{Q}(\psi^{-1}(\{\mu \in \mathcal{M}_X : (\mu(G_1), \ldots, \mu(G_n)) \in H\})).$$

Mas, pela definição de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{Q}(\psi^{-1}(\{\mu \in \mathcal{M}_X : (\mu(G_1), \ldots, \mu(G_n)) \in H\})) = \mathbb{P}(\{\phi \in \mathcal{M}_X : (\phi(G_1), \ldots, \phi(G_n)) \in H\}).$$

E, por construção,

$$\mathbb{P}(\{\phi \in \mathcal{M}_X : (\phi(G_1), \ldots, \phi(G_n)) \in H\}) = \mathbb{P}(\{\mu \in Z_{\hat{\mathcal{X}}} : (\mu(G_1), \ldots, \mu(G_n)) \in H\} \cap \mathcal{M}_X).$$

E, pelo fato já discutido nesta dissertação após o Teorema de Kolmogorov-Bochner (0.6.11), as medidas em $(Z_{\hat{\mathcal{X}}}, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}})$ são unicamente determinadas pelos valores nos cilindros, segue que $\mathbb{Q}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \cap \mathcal{M}_X)$, e também segue-se a unicidade de $\mathbb{P}$.

□

Recordando a identificação de um processo estocástico com sua versão canônica e, também, a identificação de uma medida aleatória com sua distribuição induzida, temos que Teorema da Regularização de Mecke garante o análogo (da parte suficiente) do Teorema 27 de (KALLENBERG, 2017): dado um processo estocástico positivo satisfazendo uma condição de aditividade (S), podemos regularizá-lo numa medida aleatória em $\hat{\mathcal{X}}$ (e, logo, em $\mathcal{X}$). Como anteriormente, isso por si só não garante a existência de uma medida aleatória com distribuições de dimensão finita (e, logo, distribuição completa) prescritas(ta). Mas, temos o análogo do teorema de existência, Teorema 29, que também é baseado no teorema de Kolmogorov-Bochner. Relembramos brevemente este contexto de existência com base na seção 5 de (MECKE, 1979).

Neste caso, seja η uma medida aleatória, no sentido da Definição 30, no espaço localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$. Para $\{B_i\}_{i=1}^n \in \hat{\mathcal{X}}$ denotamos por $\mu_{B_1,\ldots,B_n}$ a distribuição do vetor aleatório dado por:

$$(\eta(B_1), \ldots, \eta(B_n)).$$

Então, a coleção de todas estas distribuições para $\{B_i\}_{i=1}^n \in \hat{\mathcal{X}}$ qualquer, que denotamos por $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, é projetiva (como vimos acima), e satisfaz as condições (também discutidas na seção anterior):

(i) $\mu_{B_1,B_2,B_1\cup B_2}(\{(z_1, z_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}_+^3 : z_1, z_2 \geqslant 0\}) = 1$, para $B_1, B_2 \in \hat{\mathcal{X}}$ disjuntos quaisquer.

(ii) Para uma sequência $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{\mathcal{X}}$ tal que $C_n \downarrow \varnothing$ e para qualquer $z > 0$ real,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{C_n}([0, z)) = 1.$$

Como é sabido do Teorema 29, dada uma família (de distribuições) projetiva $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, para $\{B_i\}_{i=1}^n \in \hat{\mathcal{X}}$ qualquer, e que satisfaz as condições (i) e (ii) acima, se o espaço $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ for Borel localizado, então temos a existência de uma medida aleatória com limite projetivo que possui distribuições de dimensão finitas dadas por $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por outro lado, no caso mensurável geral, tal afirmação não é válida, como notada por (RIPLEY, 1976). Mas, o teorema da Regularização de Mecke nos garante uma demonstração de existência no caso em que $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ é um espaço mensurável localizado e amplo (sem hipóteses (pseudo-)topológicas). De fato, temos o seguinte resultado, originado do Teorema 3 de (MECKE, 1979):

Teorema 33 (Teorema da Existência de Mecke)**.** *Seja $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ um espaço mensurável localizado tal que $(X, \mathcal{X})$ é amplo. Então, dada uma família projetiva de medidas de probabilidade $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $(\mathbb{R}_+^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n))$ que satisfaz as condições (i) e (ii) acima, então esta possui um limite projetivo $\mathbb{P}$ em $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}(\mathcal{M}_X))$ tal que, para $n \in \mathbb{N}$, $\{B_i\}_{i=1}^n \in \hat{\mathcal{X}}$ e $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ quaisquer,*

$$\mathbb{P}(\{\phi \in \mathcal{M}_X : (\phi(B_1, \ldots, \phi(B_n)) \in D\}) = \mu_{B_1,\ldots,B_n}(D)$$

Lembrando, novamente, de nossa identificação de medidas aleatórias e suas distribuições, temos que o teorema nos diz, numa linguagem mais clara: dado um espaço mensurável localizado amplo equipado com uma família de distribuições finitas, então existe uma medida aleatória com distribuições de dimensão finitas prescritas por estas.

A demonstração deste é bastante similar ao Teorema 29:

Demonstração. Como temos uma família projetiva em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_+)$, pelo teorema de Kolmogorov-Bochner (Teorema 28), temos uma medida (o limite projetivo) de probabilidade $\mathbb{Q}$ em $(Z_{\hat{\mathcal{X}}}, \mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{X}}})$ que possui $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ como família projetiva.

De (i) e (ii) acima, segue-se que $\mathbb{Q}$ satisfaz a condição (S), assim como demonstrado no Teorema 29. Assim, pelo teorema da Regularização de Mecke (Teorema 32), existe uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}(\mathcal{M}_X))$ que satisfaz:

$$\mathbb{P}(\{\mu \in \mathcal{M}_X : (\phi(B_1, \ldots, \phi(B_n)) \in D\}) = \mu_{B_1,\ldots,B_n}(D),$$

o que termina o teorema.

□

Para o caso de processos pontuais, para usar o método do Teorema de Regularização de Mecke, precisamos garantir que $\mathcal{N}^l_X$ é um subconjunto $\mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X)$-mensurável de $\mathcal{M}_X$.

Mas, seguindo (RIPLEY, 1976), isso é possível quando o espaço X possui uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ contavelmente gerada, vide o Lema 2 de (MECKE, 1979):

Lema 6 (σ-Álgebra Contavelmente Gerada e Processos Pontuais)**.** *Dado um espaço mensurável* $(X, \mathcal{X})$ *tal que* $\mathcal{X}$ *é contavelmente gerada, então* $\mathcal{N}^l_X \in \mathcal{B}^*(\mathcal{M}_X)$.

Similarmente, temos um resultado de decomposição atômica neste contexto, dado pelo Lema 3 de (MECKE, 1979):

Lema 7 (Decomposição Atômica no Caso Contavelmente Gerado)**.** *Dado um espaço mensurável* $(X, \mathcal{X})$ *tal que* $\mathcal{X}$ *é contavelmente gerada e* $\{x\} \in \mathcal{X}$ *para qualquer* $x \in \mathcal{X}$*, então qualquer medida* $\mu \in \mathcal{N}^l_X$ *pode ser escrita como:*

$$\mu = \sum \{\mu(\{x\})\delta_x : x \in X, \mu(\{x\}) > 0\}.$$

Com estes dois lemas em mãos, e pelo Teorema da Existência de Mecke, o seguinte teorema é válido - vide Teorema 4 de (MECKE, 1979):

Teorema 34 (Teorema da Existência de Mecke - Processos Pontuais)**.** *Seja* $(X, \mathcal{X})$ *um espaço mensurável amplo tal que* $\mathcal{X}$ *é contavelmente gerada. Então, dada uma família projetiva de medidas de probabilidade* $\{\mu_{B_1,\ldots,B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $(\mathbb{N}_0^n, 2^{\mathbb{N}_0^n})$*, com* $\{B_i\}_{i=1}^n \in \hat{\mathcal{X}}$*, que satisfaz:*

(i) $\mu_{B_1,B_2,B_1\cup B_2}(\{(z_1, z_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{N}_0^3 : z_1, z_2 \in \mathbb{N}_0\}) = 1$*, para* $B_1, B_2 \in \hat{\mathcal{X}}$ *disjuntos quaisquer.*

(ii) Para uma sequência $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{\mathcal{X}}$ *tal que* $C_n \downarrow \varnothing$ *vale*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{C_n}(\{0\}) = 1$$

Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ *em* $(\mathcal{N}_X^l, \mathcal{N}_X^l \cap \mathcal{B}(\mathcal{M}_X))$ *tal que:*

$$\mathbb{P}(\{\phi \in \mathcal{N}_X^l : (\phi(B_1, \ldots, \phi(B_n)) \in (k_1, \ldots, k_n)\}) = \mu_{B_1,\ldots,B_n}(\{(k_1, \ldots, k_n)\}),$$

com $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$*,* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\{B_i\}_{i=1}^n \in \hat{\mathcal{X}}$*.*

Note que, como qualquer espaço standard Borel possui a σ-álgebra Borel contavelmente gerada e contendo todos os pontos (singletons) (PRESTON, 2008), os resultados de (KALLENBERG, 2017) seguem diretamente dos resultados de (MECKE, 1979) apresentados nesta seção, visto que medidas aleatórias no sentido de (KALLENBERG, 2017) podem ser regularizadas à medidas aleatórias no sentido de (MECKE, 1979), o mesmo para processos pontuais. Apesar disso, o uso dos resultados desta seção podem ser utilizados em espaços que falham em ser standard Borel, e logo não suportam os resultados de (KALLENBERG, 2017). Um exemplo deste fenômeno consiste na construção de medidas aleatórias no espaço topológico dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis de perímetro finito, que não é completo, e logo não satisfaz as condições do formalismo de (KALLENBERG, 2017) - para mais informações deste caso, ver (JURČO, 2021).

Um outro ponto de interesse consiste na generalização dos resultados de (MECKE, 1979) para estruturas locais, como os anéis dissecantes/geradores de (KALLENBERG, 2017), e estruturas em espaços produto de medidas. Resultados deste tipo podem ser vistos em (ZÄHLE, 1982) e (ZÄHLE, 1988). Atentamos ao fato do uso de certas técnicas avançadas de teoria da medida, como sistemas de diferenciação de Vitali (HAYES; PAUC, 1970; AUMANN; HAUPT, 1983), nas referências citadas, demonstrando um pouco da grande diversidade de abordagens (e dificuldades) na teoria de medidas aleatórias e processos pontuais.

3 Continuidade Abosulta e Elementos de Teoria Inferencial de Processos de Poisson

3.1 Continuidade Absoluta e Singularidade de Distribuições de Processos de Poisson

Neste capítulo, vamos exibir alguns resultados de continuidade absoluta de distribuições (medidas) induzidas por processos de Poisson, com aplicações em inferência estatística destes processos. No espirito de resultados anteriores, veremos que os teoremas podem ser reduzidos à continuidade absoluta das medidas de intensidade dos processos.

Para obter estes resultados, vamos abandonar, por um momento, o esquema topológico das seções anteriores e retornar ao esquema abstrato de (LAST; PENROSE, 2018). De fato, utilizando alguns resultados da teoria de integrais de Hellinger (BOGACHEV, 2007, p. 230), não será necessário assumir qualquer hipótese topológica na construção de critérios para continuidade absoluta, e singularidade, de distribuições de processos de Poisson. Neste sentido, seguiremos o desenvolvimento e resultados de (LIESE; LORZ, 1999).

Comecemos com as definições das integrais de Hellinger (LIESE; LORZ, 1999, p. 282):

Definição 33 (Integrais de Hellinger). *Sejam μ_1 e μ_2 medidas σ-finitas em um espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$. Denote por μ uma medida em $(E, \mathcal{E})$ que domina μ_1 e μ_2, e sejam:*

$$p_1 = \frac{d\mu_1}{d\mu},$$

$$p_2 = \frac{d\mu_2}{d\mu},$$

as derivadas de Radon-Nikodym de μ_1 e μ_2 com respeito à μ respectivamente. Assim, para $0 < s < 1$, dizemos que:

$$H_s(\mu_1, \mu_2) = \int_E p_1^s p_2^{1-s} \mu(dx),$$

$$J_s(\mu_1, \mu_2) = \int_E (sp_1 + (1-s)p_2 - p_1^s p_2^{1-s})\mu(dx),$$

são as integrais de Hellinger de ordem s de μ_1 e μ_2 com respeito à μ.

Para demonstrações posteriores, precisamos das seguintes propriedades das integrais de Hellinger (LIESE; LORZ, 1999, p. 285). Neste caso, denote por, na mesma notação da Definição 33:

$$\mu_1 = \mu_{1,a} + \mu_{1,si},$$

a decomposição de Lebesgue-Nykodim de μ_1 com respeito à μ_2 (BOGACHEV, 2007). Então, vale que:

Proposição 11. *Suponha μ_1 e μ_2 medidas como Definição 33. Suponha que $J_{\frac{1}{2}}(\mu_1, \mu_2) < \infty$. Então,*

$$\lim_{s \uparrow 1} J_s(\mu_1, \mu_2) = \mu_{1,si}(\Omega).$$

Além disso, temos que (LIESE; LORZ, 1999, p. 285):

Proposição 12. *Suponha μ_1 e μ_2 medidas como na Definição 33, e que estas são finitas. Então,*

$$\lim_{s \uparrow 1} H_s(\mu_1, \mu_2) = \mu_{1,a}(\Omega).$$

Desta última proposição, obtemos que (LIESE; LORZ, 1999, p. 285):

Proposição 13. *(Singularidade e Integrais de Hellinger) Suponha μ_1 e μ_2 medidas como na Definição 33. Então, μ_1 e μ_2 são mutuamente singulares se e somente se:*

$$H_{\frac{1}{2}}(\mu_1, \mu_2) = 0.$$

Ou, equivalentemente,

$$H_s(\mu_1, \mu_2) = 0, \ \forall \ 0 < s < 1.$$

Neste sentido, obtemos um resultado homônimo para a continuidade absoluta (LIESE, 1986, p. 63):

Proposição 14. *(Teorema de Nemetz) Suponha μ_1 e μ_2 medidas como na Definição 33, e que estas são finitas. Então, μ_1 e μ_2 são absolutamente contínuas se e somente se:*

$$\lim_{s \uparrow 1} H_s(\mu_1, \mu_2) = 1.$$

Estes resultados são a base para demonstrarmos os resultados de continuidade absoluta e singularidade de distribuições de processos de Poisson. Neste caso, para enunciarmos o resultado principal, e sua demonstração, precisamos fixar algumas notações.

Suponha $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável qualquer, e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade fixo. Consideramos η_1 e η_2 dois processos de Poisson definidos no espaço de probabilidade, e com valores em $N(X)$, com medidas de intensidade σ-finitas Λ_1 e Λ_2. Denote por ν uma medida em $(X, \mathcal{X})$ que domina as intensidades dos processos, e fixe

$\hat{\mathcal{X}}$ um anel de localização em $(X, \mathcal{X})$, de modo que as intensidades e ν sejam localmente finitas (em $\hat{\mathcal{X}}$).

Agora, denote por $\mathcal{G}$ a coleção de todos as classes de cardinalidade finita consistindo de subconjuntos disjuntos de $\hat{\mathcal{X}}$. Isto é, temos que:

$$g \in \mathcal{G} \iff g = \{B_1, \ldots, B_n\},\ n \in \mathbb{N},\ \{B_i\}_{i=1}^{n} \in \hat{\mathcal{X}} \text{ coleção disjunta.}$$

Neste sentido, introduzimos uma relação binária (de elementos) em $\hat{\mathcal{X}}$ dada por: dados $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, então $g_1 \leqslant g_2$ se para qualquer $B \in g_1$ temos que B é união disjunta de elementos de g_2. Note que $\mathcal{G}$ é direcionado pela relação $\leqslant$. De fato, temos que, sendo g_1, g_2 e g_3 elementos de $\mathcal{G}$:

(i) Se $g_1 \leqslant g_2$ e $g_2 \leqslant g_3$, então todo elemento de g_1 pode ser escrito como união de elementos de g_3. Assim, $g_1 \leqslant g_3$.

(ii) Se $B \in g_1$, então B é uma união (consistindo de um único elemento, o próprio B) de elementos de g_1. Assim, $g_1 \leqslant g_1$.

(iii) Se $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, então $g_4 = g_1 \cup g_2$ é uma coleção finita de elementos disjuntos de $\mathcal{G}$. Além disso, por construção, $g_1 \leqslant g_4$ e $g_2 \leqslant g_4$. Assim, dados quaisquer dois elementos de $\mathcal{G}$, podemos encontrar um terceiro que é maximal com respeito a estes.

Assim, no conjunto direcionado $(\mathcal{G}, \leqslant)$ defina a rede $J_{s,\mathcal{G}} : (\mathcal{G}, \leqslant) \to [0, \infty)$, com $s \in (0, 1)$ fixo, dada por:

$$J_{s,\mathcal{G}}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \sum_{B \in \mathcal{G}} [s\frac{\Lambda_1(B)}{\nu(B)} + (1-s)\frac{\lambda_2(B)}{\nu(B)} - (\frac{\Lambda_1(B)}{\nu(B)})^s(\frac{\lambda_2(B)}{\nu(B)})^{1-s}].$$

Então, temos o seguinte resultado (LIESE, 1975, p. 18) e (LIESE; LORZ, 1999, pp. 286-287), denotando por $\mathbb{P}_{\lambda_i,\mathcal{G}}$, $i = 1, 2$, a restrição das distribuições de η_1 e η_2 à σ-álgebra $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$:

Lema 8. *(Fórmulas de Liese) Sejam $\pi_{\Lambda(B)}(k) = \mathbb{P}(\eta(B) = k)$, com $k \in \mathbb{N}_0$ e $B \in \mathcal{X}$ e η um processo de Poisson com intensidade Λ. Assim, sendo λ_1 e λ_2 as derivadas de Radon-Nikodym de Λ_1 e Λ_2 com respeito à ν,*

$$H_s(\pi_{\lambda_1}, \pi_{\lambda_2}) = \exp\{-(s\lambda_1 + (1-s)\lambda_2 - \lambda_1^s\lambda_2^{1-s}\}.$$

Além disso, sendo $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ a σ-álgebra gerada pelos mapas projeção de medidas definidas em $\mathcal{G}$,

$$H_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1,\mathcal{N}_{\mathcal{G}}}, \mathbb{P}_{\Lambda_2,\mathcal{N}_{\mathcal{G}}}) = \exp\{J_{s,\mathcal{G}}(\Lambda_1, \Lambda_2)\}.$$

Agora, considere $\mathcal{I}$ a família de todas as sub-σ-álgebras $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$. Note que $\mathcal{I}$ é um conjunto dirigido pela relação α de inclusão de σ-álgebras de $\mathcal{I}$. Assim, temos o seguinte resultado (LIESE; LORZ, 1999, p. 285):

Teorema 35 (Limites de Redes de Integrais de Hellinger)**.** *Seja $\mathcal{I}_0$ um subconjunto de $\mathcal{I}$ dirigido por α, e denote por $\sigma(\mathcal{I}_0)$ a σ-álgebra gerada por todas as σ-álgebras em $\mathcal{I}_0$. Suponha que, dadas μ_i, $i = 1, 2$, medidas em $(E, \mathcal{E})$, $\mu_{i,\mathcal{A}}$ sejam σ-finitas para qualquer $\mathcal{A} \in \mathcal{I}_0$ e para $i = 1, 2$. Então, para qualquer $s \in (0, 1)$*

$$\lim_{\mathcal{A}\in\mathcal{I}_0} J_s(\mu_{1,\mathcal{A}}, \mu_{2,\mathcal{A}}) = J_s(\mu_{1,\sigma(\mathcal{I}_0)}, \mu_{2,\sigma(\mathcal{I}_0)}).$$

Além disso, se para algum $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{I}_0$, $H_s(\mu_{1,\mathcal{A}_0}, \mu_{2,\mathcal{A}_0}) \leqslant \infty$, então, para qualquer $s \in (0, 1)$:

$$\lim_{\mathcal{A}\in\mathcal{I}_0} H_s(\mu_{1,\mathcal{A}}, \mu_{2,\mathcal{A}}) = H_s(\mu_{1,\sigma(\mathcal{I}_0)}, \mu_{2,\sigma(\mathcal{I}_0)}).$$

Onde os limites acima são tomados enquanto limites de redes - veja (ENGELKING, 1989) ou (SCHECHTER, 1996). Note, também, que faz sentido assumirmos a unicidade do **limite** das redes no teorema acima, visto que estas tomam valores em $[0, \infty]$, que é Hausdorff na topologia euclidiana usual da reta real estendida (ENGELKING, 1989).

Com estes preliminares em mãos, podemos mostrar o resultado principal sobre continuidade absoluta e singularidade de distribuições de processos de Poisson, que consiste na Proposição 1 de (LIESE; LORZ, 1999, p.. 287):

Teorema 36 (Teorema de Liese-Lorz)**.** *Sejam P_{Λ_1} e P_{Λ_2} distribuições de processos de Poisson η_1 e η_2 em X com medidas de intensidade σ-finitas Λ_1 e Λ_2. Então,*

$$P_{\Lambda_1} \perp P_{\Lambda_2}.$$

Se e somente se $J_{\frac{1}{2}}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \infty$. Além disso,

$$P_{\Lambda_1} \ll P_{\Lambda_2}.$$

Se e somente se $\Lambda_1 \ll \Lambda_2$ e $J_{\frac{1}{2}}(\Lambda_1, \Lambda_2) < \infty$.

Demonstração. No Teorema 35, escolha $\mathcal{I}_0 = \{\mathcal{M}_g, g \in \mathcal{G}\}$. Então, aplicando os limites com respeito à $\mathcal{I}_0$ dados no Teorema 35 nos lados direito e esquerdo da fórmula de Liese (Lema 8):

$$H_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1,\mathcal{N}_\mathcal{G}}, \mathbb{P}_{\Lambda_2,\mathcal{N}_\mathcal{G}}) = \exp\{J_{s,\mathcal{G}}(\Lambda_1, \Lambda_2)\},$$

respectivamente, obtemos que:

$$H_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2}) = \exp\{-J_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2})\}.$$

Para a parte de singularidade das distribuições, gostaríamos de utilizar a Proposição 13 em conjunção com a expressão logo acima. Neste caso, denote por $\lambda_i = \frac{d\Lambda_i}{d\nu}$, $i = 1, 2$, as derivadas de Radon-Nikodym das intensidades, e perceba que:

$$H_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2}) = \exp\{-J_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2})\} = 0,$$

para qualquer $0 < s < 1$ se e somente se, pela Proposição 13,

$$H_{\frac{1}{2}}(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2}) = 0.$$

Mas, neste caso, por (LIESE; LORZ, 1999, p. 282) e pela penúltima expressão desta demonstração:

$$H_{\frac{1}{2}}(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2}) = 0 \iff (\int_\Omega (\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})^2 d\nu)^{\frac{1}{2}} = \infty \iff J_{\frac{1}{2}}(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2}) = \infty.$$

Desse modo, novamente pela Proposição 13, concluímos que $P_{\Lambda_1} \perp P_{\Lambda_2}$ se e somente se $J_{\frac{1}{2}}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \infty$.

Para a continuidade absoluta, utilizamos o Teorema de Nemetz (Teorema 14). Neste caso, note que, por este teorema,

$$P_{\Lambda_1} \ll P_{\Lambda_2} \iff \lim_{s \uparrow 1} H_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2}) = 1.$$

Mas, pelas Proposições 12 e 11, e por $H_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2}) = \exp\{-J_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2})\}$ obtemos que se, e somente se, $J_{\frac{1}{2}}(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2}) < \infty$:

$$\lim_{s \uparrow 1} H_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2}) = \lim_{s \uparrow 1} \exp\{-J_s(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2})\} = \exp\{-\Lambda_{1,si}(\mathcal{X})\}.$$

Mas, neste caso,

$$\exp\{-\Lambda_{1,si}(\mathcal{X})\} = 1 \iff \Lambda_{1,si}(\mathcal{X}) = 0 \iff \Lambda_1 \ll \Lambda_2.$$

O que conclui a demonstração. Visto que demonstramos:

$$P_{\Lambda_1} \ll P_{\Lambda_2} \iff \Lambda_1 \ll \Lambda_2 \text{ e } J_{\frac{1}{2}}(\mathbb{P}_{\Lambda_1}, \mathbb{P}_{\Lambda_2}) < \infty.$$

□

Um outro critério de continuidade absoluta disponível na literatura consiste no seguinte, dado pelo Teorema 1 de (BROWN, 1971, p. 775):

Teorema 37 (Critério de Continuidade Absoluta de Brown)**.** *Sejam η_1 e η_2 processos de Poisson em X com intensidades σ-finitas Λ_1 e Λ_2. Então, $\mathbb{P}_{\Lambda_1} \ll \mathbb{P}_{\Lambda_2}$ se e somente se as seguintes condições são válidas:*

(i) $\Lambda_1 \ll \Lambda_2$.

(ii) *Sendo* $B_c = \{x \in X : |f(x) - 1| > c\}$, *com* $c > 0$ *real qualquer e* $f = \dfrac{d\Lambda_1}{d\Lambda_2}$,

$$\Lambda_1(B_c) < \infty \text{ e } \Lambda_2(B_c) < \infty$$

Para qualquer $c > 0$ *real.*

(iii) *Para algum* $c > 0$, *sendo* B_c^c *o complementar do conjunto* B_c, $\int_{B_c^c} (f(x)-1)^2 \Lambda_2(dx) < \infty$.

A demonstração, que omitimos, pode ser vista em (BROWN, 1971, p. 775). Com este resultado em mãos, conseguimos construir um exemplo interessante do fenômeno citado por (KARR, 1991): podemos obter continuidade absoluta das distribuições de dois processos de Poisson em qualquer conjunto limitado (i.e, em $\hat{\mathcal{X}}$) -isto é, localmente- mas a continuidade absoluta global, em X, não ser válida:

Exemplo 1. ((BROWN, 1971, p. 776) - Modificado) Considere $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{X} = 2^{\mathbb{N}}$ e, sendo $S_n = \{1, \ldots, n\}$, temos que $S_n \uparrow \mathbb{N}$, e:

$$\hat{\mathcal{X}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{X} \cap S_n),$$

é um anel de localização de X. Defina Λ_1 e Λ_2 medidas σ-finitas em $\mathcal{X}$ dadas pela relação $\Lambda_1(\{m\}) = m$ e $\Lambda_2(\{m\}) = m + 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Note que estas são finitas em qualquer $C \in \hat{\mathcal{X}}$, visto que a cardinalidade de C é sempre finita. Deste modo, considere η_1 e η_2 processos de Poisson em X com intensidades Λ_1 e Λ_2 respectivamente. Agora, perceba que se $\Lambda_2(A) = 0$, para $A \in \mathcal{X}$, então $A = \varnothing$. O mesmo para Λ_1. Assim, $\Lambda_1 \ll \Lambda_2$ e temos que:

$$\frac{d\Lambda_1}{d\Lambda_2}(m) = 1 + \frac{1}{m},$$

é a derivada de Radon-Nikodym das medidas. Segundo (BROWN, 1971, p. 776), temos que, para um $c > 0$ qualquer (visto que as cardinalidades destes conjuntos são finitas):

$$\Lambda_1(B_c) < \infty \text{ e } \Lambda_2(B_c) < \infty.$$

Isto é, as duas primeiras condições do Teorema 37 são válidas. Mas, note que, para um $c > 0$ qualquer:

$$\int_{B_c^c} (f(x) - 1)^2 \Lambda_2(dx) = \sum_{m > \frac{1}{c}, m \in X} \frac{1}{m} = \infty.$$

Visto que trata-se de uma série harmônica. Este fenômeno ocorre pois a soma $\sum_{m>\frac{1}{c}} \frac{1}{m}$ envolve um número contável de valores (no caso da integração em X).Apesar disso, se computarmos esta mesma expressão em cada espaço dado pelo traço por conjuntos limitados $C \in \hat{\mathcal{X}}$, isto é, em $(C, C \cap \mathcal{X})$, os conjuntos $B_c|_C = \{x \in C : |f(x) - 1| > c\}$ são todos finitos, e logo a expressão da integral $\int_{B_c^c} (f(x) - 1)^2 \Lambda_2(dx)$ seria finita com as restrições de Λ_1 e Λ_2 em $(C, C \cap \mathcal{X})$. E, portanto, as três condições do Teorema 37 seriam válidas, e obteríamos continuidade absoluta das distribuições do processo.

Ou seja, podemos obter continuidade local, mas não continuidade global, das distribuições de η_1 e η_2 pelo Teorema 37. ▲

Por fim, obtemos um resultado de dicotomia de distribuições de processos de Poisson (KARR, 1991, p. 233) e (BROWN, 1971, p. 776):

Teorema 38 (Dicotomia de Distribuições de Poisson)**.** *Suponha que temos medidas σ-finitas Λ_1 e Λ_2 em um espaço de medida $(X, \mathcal{X})$, com $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$. Então, $\mathbb{P}_{\Lambda_1} \sim \mathbb{P}_{\Lambda_2}$ ou $\mathbb{P}_{\Lambda_1} \perp \mathbb{P}_{\Lambda_2}$ se a seguinte integral converge ou divergir respectivamente:*

$$\int_X (1 - \frac{d\Lambda_2}{d\Lambda_1}(x))^2 \Lambda_2(dx).$$

Basicamente, estes resultados garantem as técnicas necessárias para estudarmos testes de hipóteses no caso do processo de Poisson, com resultados de dicotomia de medidas necessários para distinguir entre hipóteses sobre a intensidade do processo - veja (BROWN, 1972), (KRICKEBERG, 1978) e (KRICKEBERG, 1982).

Algo importante a se notar do formalismo acima é que, pelo nível de generalidade deste, mesmo com as condições de continuidade absoluta satisfeitas, não é possível garantir a existência de uma densidade entre as distribuições dos processos η_1 e η_2 (KARR, 1991, p. 232). Apesar disso, como indicado por (LIESE; LORZ, 1999, p. 296), temos a existência de uma densidade garantida no caso em que $\Lambda_1(X)$ e $\Lambda_2(X)$ são finitas. Como veremos na seção sobre metodologias de estimação para o processo de Poisson, tal simplificação pode ser feita sem perda de generalidade. Neste caso, obtemos o seguinte resultado (KARR, 1991, p. 232), mas adaptada para o caso abstrato (LIESE; LORZ, 1999, p. 296), e originado do trabalho de (BROWN, 1971, p. 774):

Teorema 39 (Teorema de Karr-Liese-Brown)**.** *Suponha que $\Lambda_1 \ll \Lambda_2$ em $\mathcal{X}$ e que $\Lambda_1(X)$ e $\Lambda_2(X)$ são finitas. Então $\mathbb{P}_{\Lambda_1} \ll \mathbb{P}_{\Lambda_2}$ em $\mathcal{F}^\eta(X) = \sigma(\eta(A), A\ \mathcal{X})$, com derivada de Radon-Nykodim dada por:*

$$\frac{d\mathbb{P}_{\Lambda_2}}{d\mathbb{P}_{\Lambda_1}}(\eta) = \frac{d\mathbb{P}_{\Lambda_2}}{d\mathbb{P}_{\Lambda_1}}|_{\mathcal{F}^\eta(X)} = \exp\{\int_X \ln S(x)\eta(dx) - \int_X (S(x) - 1)\Lambda_1(dx)\}.$$

Onde $S(x) = \dfrac{d\Lambda_1}{d\Lambda_2}(x)$.

Se $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$, *então* $\mathbb{P}_{\lambda_1} \sim \mathbb{P}_{\lambda_2}$.

Seguimos a demonstração do teorema exibida em (KARR, 1991, p. 232):

Demonstração. Note que, a afirmação do teorema é equivalente à, para um $A \in \mathcal{N}(X)$ qualquer:

$$\mathbb{P}(\eta_2 \in A) = \int_A \frac{d\mathbb{P}_{\Lambda_2}}{d\mathbb{P}_{\Lambda_1}}(\mu)\mathbb{P}_{\Lambda_1}(d\mu).$$

Isto é, equivalente a uma igualdade envolvendo distribuições de processos pontuais. Assim, pelo Teorema 3 de unicidade de distribuições de processos pontuais em termos de funcionais de Laplace, basta provarmos que, para $f : X \to \mathbb{R}$ função positiva $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\backslash\mathcal{X}$-mensurável qualquer:

$$\mathbb{E}_{\Lambda_1}(e^{-I(f)} \exp\{\int_X \ln S(x)\eta(dx) - \int_X (S(x)-1)\lambda_1(dx)\}) = L_{\eta_2}(f),$$

com $\mathbb{E}_{\Lambda_1}$ a esperança com respeito à distribuição de η_1.

Mas, note que:

$$\mathbb{E}_{\Lambda_1}(e^{-I(f)} \exp\{\int_X \ln S(x)\eta(dx) - \int_X (S(x)-1)\lambda_1(dx)\}) =$$

$$\exp\{\int_X (S(x)-1)\Lambda_1(dx)\}\mathbb{E}_{\Lambda_1}(\exp\{-\int_X (f - \ln S(x))\eta(dx)\}) =$$

$$\exp\{\int_X (S(x)-1)\Lambda_1(dx)\}\exp\{-\int_X (1 - e^{-f}S(x))\Lambda_1(dx)\} =$$

$$\exp\{-\int_X (1-e^{-f})\Lambda_2(dx)\} = \mathbb{E}_{\Lambda_2}(e^{-I(f)}) = L_{\eta_2}(f).$$

Em que utilizamos, na penúltima linha, a forma do funcional de Laplace de um processo de Poisson (Teorema 5). Como indicado no primeiro parágrafo da demonstração, por uma aplicação do Teorema 3, terminamos a demonstração. □

Para um exemplo de cálculo clássico de uma densidade de interesse na estatística matemática no contexto dos processos de Poisson, temos o processo de Poisson não-homogêneo na reta:

Exemplo 2. Considere $(X, \mathcal{X})$ como sendo o espaço Borel na reta real positiva, isto é, $X = \mathbb{R}_+$ e $\mathcal{X} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$. Equipamos este espaço mensurável com um anel de localização $\hat{\mathcal{X}}$ consistindo nos conjuntos relativamente compactos na topologia euclidiana de $\mathbb{R}_+$.

Neste caso, seja $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função real (não constante) localmente integrável com respeito à medida de Lebesgue, μ_L em $\mathbb{R}_+$, isto é,

$$\int_B g(x)\mu_L(dx) < \infty,$$

para qualquer $B \in \hat{\mathcal{X}}$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} g(x)\mu_L(dx) = \infty$.

Então, um processo de Poisson, η em $\mathbb{R}_+$ com intensidade dada por $\lambda(A) = \displaystyle\int_A g(x)\mu_L(dx)$, $A \in \mathcal{X}$, é dito um processo de Poisson não-homogêneo. Neste caso, note que a intensidade do processo é finita para qualquer conjunto em $\hat{\mathcal{X}}$. Assim, pelo Teorema de Karr-Liese-Brown (Teorema 39, se considerarmos um processo de Poisson não-homogêneo restrito à $(B, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \cap B)$, com $B \in \hat{\mathcal{X}}$, e medidas de intensidade $\Lambda_1 = \mu_L$, a medida de Lebesgue, e $\Lambda_1 = \lambda$, a intensidade do processo, temos que estas são finitas em B, e por construção:

$$\frac{d\Lambda_2}{d\Lambda_1}(x) = g(x).$$

E, desse modo,

$$\frac{d\mathbb{P}_{\Lambda_2}}{d\mathbb{P}_{\Lambda_1}}|_{\mathcal{F}^\eta(X)} = \exp\{\int_B \ln g(x)\eta(dx) - \int_B (g(x) - 1)\mu_L(dx)\}.$$

Neste ponto, temos todas as ferramentas necessárias para exibir os rudimentos de uma teoria de estimação (por máxima verossimilhança) do processo de Poisson.

3.2 O Problema de Estimação para um Processo de Poisson e o Método de Máxima Verossimilhança.

Para a teoria de estimação do processo de Poisson propriamente dita, vamos adotar a abordagem paramétrica de máxima verossimilhança. Trata-se de uma abordagem com uma grande gama de resultados disponíveis sobre consistência, existência e tratamento numérico de estimadores, e com interpretações instrumentais mais diretas (KARR, 1991).

O foco da exposição nesta seção, a partir da abordagem citada no parágrafo anterior, seguirá a teoria de estimação exibida em (KUTOYANTS, 1998), mas utilizando a notação de espaços localizados de (KALLENBERG, 2017). Isto é, assumimos que os processos pontuais nesta seção são tomados no sentido de (KALLENBERG, 2017), Definição 22 desta dissertação. Neste caso, começaremos, exibindo as definições relevantes para a teoria de experimentos estatísticos de processos pontuais para o caso paramétrico.

Consideramos um espaço de probabilidade fixo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e um espaço de estados dado por um espaço mensurável localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$. Introduzimos por um espaço de parâmetros um conjunto $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ com sua topologia euclidiana induzida e σ-álgebra Borel correspondente, e um conjunto (fixo), dito de observação do processo, $A \in \hat{\mathcal{X}}$.

Nesse contexto, suponha que temos uma família de medidas de probabilidade $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ em $(\Omega, \mathcal{F})$ (baseadas em $\mathbb{P}$), e um processo de Poisson η_A, definido em $(\Omega, \mathcal{F})$, com valores em $(A, A \cap \mathcal{X})$, tal que, sob $\mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}$, η_A possui intensidade λ_θ, $\theta \in \Theta$, definida em A (i.e, o traço da intensidade em $(A, A \cap \mathcal{X})$). Nossas observações consistem nas realizações do processo η_A com intensidade dada por λ_{θ_0}, com um $\theta_0 \in \Theta$ desconhecido. Com estes dados em mãos, o objetivo é estimar o verdadeiro valor parâmetro θ_0.

Relembremos a seguinte definição (KUTOYANTS, 1998, p. 31):

Definição 34 (Estimador - Processo Pontual)**.** *Dizemos que uma função $\mathcal{B}(\overline{\Theta})\backslash(\mathcal{B}(\mathcal{N}_X^l) \cap \mathcal{N}_A^{l,\Theta})$-mensurável*

$$\hat{\theta} : \mathcal{N}_A^{l,\Theta} \to \overline{\Theta},$$

em que $\mathcal{N}_A^{l,\Theta}$ é o espaço das realizações do processo η_A indexado parametricamente em Θ (i.e. o espaço de medidas discretas localmente finitas em A), e $\overline{\Theta}$ o fecho de Θ (na topologia euclidiana deste), é um estimador de θ_0.

Note que tomar o fecho e não o espaço original é um ponto importante, especialmente no caso em que o método de construção de estimadores pode produzir valores na fronteira do espaço paramétrico.

Um ponto conceitual importante a ser citado é o de que a inferência para processos pontuais difere, no quesito interpretativo e teórico, da inferência clássica para observações i.i.d. de variáveis aleatórias - ver, por exemplo, o capítulo 4 de (KARR, 1991). No formalismo exibido nesta seção, não há múltiplas realizações do processo de Poisson no conjunto A, apenas uma - algo que difere da teoria usual. Apesar de ser possível desenvolver a teoria do ponto de vista de múltiplas realizações de um processo pontual, vide (KARR, 1991), os métodos de estimação acabam reduzidos ao caso de apenas uma observação, vide o Capítulo 6 de (KARR, 1991).

Neste sentido, não apenas a teoria inferencial não-assintótica e assintótica de processos de Poisson difere da teoria de estimação clássica para variáveis aleatórias, mas também a teoria de redução suficiente e completude de experimentos, como pode ser observado, por exemplo, em (RÜSCHENDORF, 1989).

3.2.0.1 Abordagem de Máxima Verossimilhança.

Seguindo a seção 1.2 do Capítulo 1 de (KUTOYANTS, 1998), vamos supor que a família de intensidades $\{\lambda_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ [1] é mutuamente absolutamente contínua. Fixamos uma medida $\lambda \in \{\lambda_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ que domina a família $\{\lambda_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, isto é:

$$\lambda_\theta \ll \lambda, \ \forall\theta \in \Theta.$$

Temos, então, uma família de derivadas de Radon-Nykodim, as funções de intensidade, $\{S(\theta, x)\}_{\theta\in\Theta}$ com:

[1] Perceba que a notação para intensidades diferen da seção 3.1

$$S(\theta, x) = \frac{d\lambda_\theta}{d\lambda}(x),$$

visto que, como $A \in \hat{\mathcal{X}}$, a família de medidas $\{\lambda_\theta\}_\theta$ é (totalmente) finita.

Considerando novamente a família de medidas de probabilidade $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ para as quais η_A é um processo de Poisson com intensidade λ_θ, pelo Teorema de Karr-Liese-Brown (Teorema 39), a função verossimilhança do Processo neste modelo é dada por, na mesma notação do teorema:

$$\frac{dP_{\lambda_\theta}}{dP_\lambda}(\eta_A) = \exp\{\int_A \ln S(x,\theta)\eta(dx) - \int_A (S(x,\theta) - 1)\lambda(dx)\}.$$

E, seguindo (KUTOYANTS, 1998), podemos utilizar esta fórmula para definir a razão de verossimilhanças do processo para $\theta, \theta_1 \in \Theta$:

$$L(\theta, \theta_1, \eta_A) = \frac{dP_{\lambda_\theta}}{dP_{\lambda_{\theta_1}}}(\eta_A) = \exp\{\int_A \ln \frac{S(\theta,x)}{S(\theta_1,x)}\eta(dx) - \int_A (\frac{S(\theta,x)}{S(\theta_1,x)} - 1)\lambda_{\theta_1}(dx)\}.$$

Note que esta é uma *bona fide* derivada de Radon-Nykodim pela equivalência das medidas na família paramétrica de intensidades. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 35 (Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV))**.** *Dizemos que o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro θ no conjunto A, $\hat{\theta}_A$, consiste, caso seja única, na solução da seguinte equação:*

$$L(\hat{\theta}_A, \theta_1, A) = \sup_{\theta\in\Theta} L(\theta, \theta_1, N_A).$$

Caso a solução não seja necessariamente única, como indica (KUTOYANTS, 1998), adotaremos o EMV como uma solução qualquer. Além disso, como indica o autor citado, θ_1 é um valor fixo, do qual o estimador não depende. Ou seja, a depender do contexto, podemos escolher diferentes valores de θ_1 para facilitar as contas.

No geral, pontua (KUTOYANTS, 1998), se o estimador de máxima verossimilhança não pertencer ao fecho $\overline{\Theta}$, e é regular num sentido que veremos posteriormente (basicamente, satisfaz condições que permitem trocar derivada com integral), podemos encontrar o estimador resolvendo a seguinte equação (Score), onde $\dot{S}(x,\theta) = \dfrac{dS(x,\theta)}{d\theta}$:

$$\int_A \frac{\dot{S}(x,\theta)}{S(\theta,x)}\eta(dx) - \int_A \frac{\dot{S}(x,\theta)}{S(\theta,x)}\Lambda_\theta(dx) = 0, \ \theta \in \theta.$$

Antes de partirmos para alguns resultados gerais sobre a teoria de estimação EMV, vamos ver alguns exemplos de cálculo dos estimadores analiticamente. Considere, primeiramente, o processo de Poisson homogêneo (KUTOYANTS, 1998, p. 32):

Exemplo 1. Escolhemos $\Theta = \mathbb{R}_+$, e consideramos uma família de intensidades indexada neste espaço com $\lambda_\theta(dx) = \theta\mu_L(dx)$, onde μ_L é a medida de Lebesgue na reta positiva. Como $A \in \hat{\mathcal{X}}$ é um conjunto limitado, temos que $\mu_L(A) < \infty$ e portanto estamos sob hipóteses válidas na inferência do processo. Portanto, com $\lambda_{\theta_1} = \mu_L$ e $\lambda = \mu_L$, obtemos as seguintes expressões:

$$S(\theta, x) = \frac{d\lambda_\theta}{d\lambda}(x) = \theta,$$
$$S(\theta_1, x) = \frac{d\lambda}{d\lambda}(x) = 1,$$

Desse modo,

$$L(\theta_A, \theta_1, A) = \exp\{\int_A ln(\theta)\eta(dx) - \int_A (\theta - 1)\mu_L(dx)\} = \exp\{ln(\theta)\eta(A) - (\theta - 1)\mu_L(A)\}.$$

O supremo na Definição 35 é atingido (como pode ser verificado, por exemplo, tomando derivadas), e portanto o EMV é dado por:

$$\hat{\theta}_A = \frac{\eta(A)}{\mu_L(A)}.$$

▲

Analogamente ao Exemplo 1, consideramos o cálculo do EMV para o processo de Poisson não-homogêneo na reta real positiva. De fato, considere η_A um processo de Poisson não-homogêneo, com $A \in \hat{\mathcal{X}}$, e $\hat{\mathcal{X}}$ os conjuntos Borel metricamente limitados (na métrica euclidiana) da reta real positiva, com uma família de intensidades parametrizadas, $\{\lambda_\theta\}_{\theta\in\Theta}$, em que:

$$\lambda_\theta(B) = \int_B g(x, \theta)\mu_L(dx),$$

com $B \in A \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ qualquer. Neste caso, tomando $\lambda_{\theta_1} = \mu_L$ e $\lambda = \mu_L$, obtemos as seguintes fórmulas:

$$S(x, \theta) = \frac{d\lambda_\theta}{d\mu_L}(x) = g(x, \theta),$$
$$S(x, \theta_1) = \frac{d\lambda}{d\lambda}(x) = 1.$$

Assim,

$$L(\hat{\theta}_A, \theta_1, \eta_A) = \exp\{\int_A ln(g(x, \theta)\eta(dx) - \int_A (g(x, \theta) - 1)\mu_L(dx)\}.$$

Mas, neste caso:

$$\int_A ln(g(x,\theta))\eta(dx) = \sum_{i=1, x_i \in A}^{\tau(\omega)} ln(g(x_i,\theta)),$$

$$\int_A (g(x,\theta)-1)\mu_L(dx) = \int_A g(x,\theta)\mu_L(dx) - \mu_L(A).$$

Portanto, obtemos a forma final da razão de verossimilhanças:

$$L(\theta_A, \theta_1, \eta_A) = \exp\{\sum_{i=1, x_i \in A}^{\tau} ln(g(x_i,\theta)) - \int_A g(x,\theta)\mu_L(dx) - \mu_L(A)\}.$$

Neste caso, não há forma geral analítica do EMV. Similarmente, mesmo se for possível utilizar a equação Score sob condições de regularidade, não há garantia de resultados analiticamente tratáveis. Neste ponto, a inferência precisaria ser realizada do ponto de vista número por experimentos de simulação - por exemplo, (MØLLER; WAAGEPETERSEN, 2004).

Um outro caso passível de análise exata é o seguinte (KUTOYANTS, 1998, p. 32):

Exemplo 2. Considere $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ com $A_i \in \hat{\mathcal{X}}$, conjuntos Borel metricamente limitado, para qualquer $i = 1, \ldots, d$ formando uma coleção disjunta. Coloque

$$\lambda_\theta(dx) = \sum_{i=1}^{d} \theta_i f_i(x) \mathbb{1}_{A_i}(x)\mu_L(dx),$$

com $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d) \in \Theta = \mathbb{R}_+^d$ e f_i funções localmente integráveis, para $i = 1, \ldots, d$, e $\int_A f_i(x)\mu_L(dx) > 0$. Podemos mostrar (calculando um gradiente e uma matriz hessiana) que o supremo é atingido em

$$\hat{\theta}_A = (\hat{\theta}_{1,A}, \ldots, \hat{\theta}_{d,A}).$$

Dado por:

$$\hat{\theta}_{i,A} = \frac{\eta_{A_i}}{\int_{A_i} f_i(x)\mu_L(dx)}, \quad i = 1, \ldots, d.$$

▲

Neste ponto, com a disponibilidade (ampla) de estimadores dados pelo método de máxima verossimilhança, do ponto de vista estatístico, é necessário desenvolver critérios (e técnicas) para a seleção destes estimadores, com ditas propriedades ótimas dentro de uma classe fixa (RAO, 2014).

3.3 Eficiência dos EMV: A Desigualdade de Cramér-Rao e Condições de Regularidade

Como dito no final da seção anterior, do ponto de vista da teoria de inferência estatística de processos estocásticos, há grande interesse em condições que qualificam um estimador como ótimo, comparativamente, em uma classe fixa destes, que satisfaçam alguma propriedade, seja ela de integrabilidade, limites ou outros (RAO, 2014). Nesta seção, seguindo (KUTOYANTS, 1998), estudaremos uma condição de otimalidade, ou eficiência, com base na desigualdade de Cramér-Rao para processos pontuais.

Neste caso, precisamos fixar uma notação que será útil na discussão sobre as condições de regularidade impostas sobre os estimadores e que garantem uma definição rigorosa da noção de eficiência. Trabalharemos, nesta seção, numa função dita de perda quadrática (RAO, 2014) - daí a necessidade de introduzir alguns espaços de funções apropriados. De fato, começamos denotando por $L^2(\lambda_\theta)$ o espaço de (classes de equivalência por conjuntos nulos de λ_θ de) funções reais mensuráveis $f(x)$, com $x \in A$ (o mesmo conjunto $A \in \hat{\mathcal{X}}$ fixo na seção 3.2), com a norma:

$$\|f\| = (\int_A f(x)^2 \lambda_\theta(dx))^{1/2}.$$

Que, para $f \in L^2(\lambda_\theta)$, é finita por definição. Também utilizaremos a notação $\|f\|_\theta$ para a esta mesma norma. Podemos equipar este espaço com um produto interno, para $f, g \in L^2(\lambda_\theta)$, dado por:

$$< f, g >= \int_A f(x) g(x) \lambda_\theta(dx).$$

E, como anteriormente, utilizamos a notação de $< \cdot, \cdot >_\theta$.

Para uma função vetorial $\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, com componentes em $L^2(\lambda_\theta)$, entendemos a norma de $\boldsymbol{f}$ em $L^2(\lambda_\theta)$ como sendo a norma de $|\boldsymbol{f}(x)| = (\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2)^{1/2}$. Para uma matriz qualquer $\boldsymbol{M}(x)$ definida em $\mathbb{R}_+$, sua norma será denotada (e definida) por $M(x) = |\boldsymbol{M}(x)| = \sup_{|\boldsymbol{u}|=1} < \boldsymbol{M}(x) \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} >$ com $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ e $< \cdot, \cdot >$ o produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^n$ (com norma $| \cdot |$). A partir daqui, não vamos manter uma uniformidade com a diferenciação de vetores e matrizes em negrito, mas especificando quando este for o caso.

Com uma modificação anterior, denotamos por $S(o, \theta, x) = \dfrac{S(o, x)}{S(\theta, x)} = \dfrac{d\lambda_o}{d\lambda_\theta}(x)$, para $\theta, o \in \Theta$. Assim, podemos enunciar as condições de regularidade:

(i) Todas as medidas $\{\lambda_o\}_{o \in \Theta}$ são equivalentes (ou seja, mutuamente absolutamente contínuas) em A.

(ii) As funções $S(o, \theta, x)$, $x \in A$, são diferenciáveis com respeito à o em $L^2(\lambda_\theta)$ no ponto $\theta = o$, isto é, existe uma função (com valor vetorial) $\dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, x)$, $x \in A$, tal que:

$$\|S(\theta + \delta, \theta, \cdot) - 1 - < \delta, \dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot) >_E \|_\theta = \boldsymbol{o}(|\delta|).$$

(iii) $\forall \theta \in \Theta$ a matriz de informação de Fisher:

$$\boldsymbol{I}_A(\theta) = < \dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot), \dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot)^T >_\theta, \text{ Onde T detona o símbolo de transposição,}$$

é positiva definida.

Na notação acima das condições (i) e (ii), é importante lembrar que a matriz de informação é dada, explicitamente, por:

$$< \dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot), \dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot)^T >_\theta = < (\dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot))_i, (\dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot))_j >_\theta, \; i, j = 1, \ldots, d,$$

onde $(\dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot))_i$ e $(\dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot))_j$ são as componentes i e j do vetor $\dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot)$.

Assim, com essas condições em mãos, podemos obter um limite interior para o erro quadrático médio dos estimadores (não necessariamente de máxima verossimilhança) pela seguinte desigualdade:

Teorema 40 (Desigualdade de Cramér-Rao)**.** *Suponha que as condições de regularidade (i)-(iii) acima estejam satisfeitas e seja $\hat{\theta}_A$ um estimador de θ_0 (o "verdadeiro valor"do parâmetro θ) arbitrário com $\mathbb{E}_\theta(|\hat{\theta}_A|^2) < \infty$. Então, o viés $\boldsymbol{b}(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_A) - \theta$ é diferenciável com respeito à θ e:*

$$\mathbb{E}_\theta((\hat{\theta}_A - \theta)(\hat{\theta}_A - \theta)^T) \geqslant \frac{\partial(\theta + \boldsymbol{b}(\theta))}{\partial \theta^T} \boldsymbol{I}_A(\theta)^{-1} \frac{(\partial \theta + \boldsymbol{b}(\theta))}{\partial \theta^T} + < \boldsymbol{b}(\theta), \boldsymbol{b}(\theta)^T >_E .$$

Omitimos a demonstração, que pode ser vista em (KUTOYANTS, 1998, pp. 33-35).

As condições para a Desigualdede de Cramér-Rao podem ser especializadas para diferentes formas do processo de Poisson, na reta ou no plano, por exemplo, podendo tomar uma forma mais utilitária nestes casos.

Num exemplo prático, considere o processo de Poisson não-homogêneo em $\mathbb{R}_+$. As condições de regularidade e, logo, as condições do Teorema 40, podem ser reduzidas às seguintes (na mesma ordem das condições acima - e com o mesmo significado) (RATHBUN; CRESSIE, 1994) - lembrando da notação do processo de Poisson não-homogêneo que utilizamos na seção 3.2:

(i) $\forall \theta \in \Theta$ e $\forall x \in A$, $g(x, \theta) > 0$.

(ii) As funções $S(o, \theta, x) = \dfrac{g(o, x)}{g(\theta, x)}$, $x \in A$, são diferenciáveis com respeito à o em $L_2(\lambda_\theta)$ no ponto $\theta = o$ no sentido de (KUTOYANTS, 1998).

(iii) $\forall \theta \in \Theta$ a matriz de informação de Fisher:

$$\boldsymbol{I}_A(\theta) =< \dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot), \dot{\boldsymbol{S}}(\theta, \theta, \cdot)^T >_\theta, \text{ em que T detona o símbolo de transposição,}$$

é positiva definida.

E, neste caso, podemos escrever $\boldsymbol{I}_A(\theta) = (\phi_A(\theta)\phi_A(\theta)^T)^{-1}$, com a dita matriz de normalização $\phi_A(\theta)$ dada por:

$$\phi_A(\theta) = (\int_A \dot{\psi}(\cdot, \theta)\dot{\psi}(\cdot, \theta)^T \mu_L(dx))^{-1/2},$$

para $\theta \in \Theta$, e $\psi(\cdot, \theta) = 2(g(\cdot, \theta))^{1/2}$, e $\dot{\psi}(\cdot, \theta)$ sua derivada em $L^2(\lambda_\theta)$ (com respeito à θ).

Um outro ponto importante e simplificador do formalismo acima é o de que a derivada L^2 de uma função (de valor vetorial, ou vetorial, isto é, com valores em um espaço vetorial topológico), contida na condição de regularidade (ii), dita ser sua "derivada de Fréchet", é também o diferencial de Gateaux desta, denotado por:

$$\dot{f}(x, \theta_0) = (\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta_k})|_{\theta = \theta_0},$$

com $\theta_0 \in \Theta$, basicamente, o gradiente da função. Essa discussão pode ser vista na página 125 do já citado artigo de (RATHBUN; CRESSIE, 1994). O leitor pode assumir, assim como faremos, que toda derivada de Fréchet será substituída por sua derivada de Gateaux.

No caso em que temos um estimador não-enviesado $\hat{\theta}_A$, a expressão da Desigualdade de Cramér-Rao (Teorema 40) pode ser simplificada para (novamente, sob as condições de regularidade):

$$\mathbb{E}_\theta((\hat{\theta}_A - \theta)(\hat{\theta}_A - \theta)^T) \geqslant \boldsymbol{I}_A(\theta)^{-1}$$

Neste caso, temos a seguinte definição de eficiência citada no início desta seção:

Definição 36 (Estimador Eficiente Sob Perda Quadrática)**.** *Dizemos que um estimador não-enviesado de θ, $\hat{\theta}_A$, é eficiente sob perda quadrática para θ se a igualdade é atingida por este na desigualdade de Cramér-Rao para todo $\theta \in \Theta$, isto é:*

$$\mathbb{E}_\theta((\hat{\theta}_A - \theta)(\hat{\theta}_A - \theta)^T) = \boldsymbol{I}_A(\theta)^{-1}, \ \forall \theta \in \Theta.$$

Em casos de interesse, como o do processo de Poisson não-homogêneo, como já discutido anteriormente, não podemos encontrar o EMV analiticamente no caso geral. Similarmente, isso impossibilita a verificação das condições de regularidade para um estimador deste tipo, e, portanto, a verificação da eficiência sob perda quadrática. Tal problemática é razoavelmente mais simples no caso assintótico, em que é possível garantirmos eficiência do ponto de vista assintótico, assim como outras propriedades de convergência interessantes, como normalidade assintótica (local), para uma ampla gama de estimadores. Antes de enunciarmos alguns resultados deste tipo, alguns dos exemplos anteriores podem ser tratados, com respeito à eficiência sob perda quadrática, no caso analítico.

Em particular, considere novamente o Exemplo 2 da seção 3.2. Temos que, para qualquer $i = 1, \ldots, n$:

$$E_\theta(\hat{\theta}_{i,A}) = \frac{\theta_i \int_{A_i} f_i(x)\mu_L(dx)}{\int_{A_i} f_i(x)\mu_L(dx)} = \theta_i.$$

Assim, o conjunto de estimadores (independentes, vide a propriedade (ii) do processo de Poisson - Definição 10) $\{\hat{\theta}_{i,A}\}_{i=1}^n$ é não-enviesado para o conjunto de parâmetros $\{\theta_i\}_{i=1}^n$. Além disso,

$$Var_\theta(\hat{\theta}_{i,A}) = \frac{\theta_i}{\int_{A_i} f_i(x)\mu_L(dx)},$$

que corresponde exatamente ao limite inferior de Cramér-Rao neste caso (RATHBUN; CRESSIE, 1994, p. 128). Ou seja, os estimadores não eficientes sob perda quadrática.

Similarmente, temos o seguinte exemplo (RATHBUN; CRESSIE, 1994, p. 128):

Exemplo 3 Considere que a intensidade do processo de Poisson não-homogêneo é dada por $\lambda_\theta(B) = \displaystyle\int_A \theta f(x)\mu_L(dx)$, com $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \cap A$ qualquer, e f uma função positiva (mensurável) conhecida. Então, utilizando a verossimilhança do processo, num cálculo similar ao exemplo 2 da seção 3.2, podemos mostrar que

$$\hat{\theta}_A = \frac{\eta(A)}{\int_A f(x)\mu_L(dx)},$$

é o EMV de θ. Além disso, pelo mesmo cálculo do exemplo anterior, trata-se de um estimador não-enviesado para θ com variância dada por

$$Var_\theta(\hat{\theta}_{i,A}) = \frac{\theta}{\int_A f(x)\mu_L(dx)},$$

que é exatamente igual ao limite inferior de Cramér-Rao neste caso. Ou seja, temos que este estimador é eficiente sob perda quadrática para o parâmetro (RATHBUN; CRESSIE, 1994, p. 128). ▲

Para outras noções de otimalidade de estimadores, além de uma teoria geral de eficiência sob perdas convexas não necessariamente quadráticas, (RAO, 2014) e (KOZEK, 1977).

Neste ponto, a discussão nos leva, invariavelmente, às propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança, que tratamos brevemente na próxima seção.

3.4 Consistência, Eficiência e Normalidade Assintóticas dos Estimadores de Máxima Verossimilhança e Outros Resultados.

Nesta seção, seguindo o capítulo 2 de (KUTOYANTS, 1998), apresentaremos alguns resultados de natureza assintótica para os estimadores de máxima verossimilhança do processo de Poisson apresentados na seção 3.2 e 3.3. Trata-se de um assunto bastante técnico, como pode ser visto pelas demonstrações contidas no capítulo citado de (KUTOYANTS, 1998). Assim, apresentaremos algumas poucas demonstrações, e sugerimos ao leitor a leitura do capítulo citado para maiores informações.

Similarmente, é importante frisar que, no contexto que estamos trabalhando, os resultados assintóticos demandam, em grande parte, um contexto topológico de aplicação. Assim, faremos a teoria de estimação assintótica em um espaço Borel localizado no sentido de (KALLENBERG, 2017). Há a possibilidade de um desenvolvimento puramente abstrato de certos elementos da teoria assintótica, mas este utiliza técnicas sofisticadas, como a teoria combinatória de Vapnik–Chervonenkis (HOFFMANN-JØRGENSEN, 1992), que não desenvolveremos nesta dissertação. Mais informações neste sentido serão dadas no final da seção.

Neste caso, fixamos um espaço Standard Borel localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$, e uma família de processos de Poisson $\{\eta^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidos, para cada n, em conjuntos $A_n \in \hat{\mathcal{X}}$, tais que estes processos possuam medidas de intensidade difusas $\{\lambda_\theta^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N},\theta\in\Theta}$ (definidas em $A_n \cap \mathcal{X}$). Supomos que o espaço paramétrico, Θ, é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^d$, com d finito. Denotamos por $\{\mathbb{P}_\theta^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N},\theta\in\Theta}$ o conjunto das distribuições dos processos de Poisson $\{\eta^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

No contexto citado na seção 3.2, observações únicas do processo de Poisson , podemos obter a sequência citada, $\{\eta^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, da seguinte maneira: tome $A_n \uparrow X$ uma sequência localizadora em $\hat{\mathcal{X}}$, e considere um processo de Poisson η, com família paramétrica de intensidades λ_θ definido em $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$ e família de distribuições $\{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ (Θ é dado como no parágrafo anterior). Considerando os processos Pontuais restritos à A_n para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\eta|_{A_n} = \eta^{(n)} = \eta(\cdot, \cdot \cap A_n),$$

temos que estes são processos de Poisson definidos em $(A, A \cap \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}} \cap A)$ com intensidades $\lambda_\theta^{(n)} = \lambda_\theta|_{A_n}$ (a restrição, para cada $\theta \in \Theta$, de λ_θ à $(A, A \cap \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}} \cap A)$) - veja o Teorema 5.2 de (LAST; PENROSE, 2018, p. 39). Denotando as distribuições destes processos $\eta^{(n)}$ por $\{\mathbb{P}_\theta^{(n)}\}_{\theta \in \Theta}$, obtemos a construção do parágrafo anterior no contexto de observações únicas de um processo de Poisson.

A recíproca desta argumentação também é verdadeira: isto é, obter o processo de inferência de um Poisson único através da sequência $\{\eta^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (KARR, 1991).

Dada esta equivalência, vamos seguir (KUTOYANTS, 1998) e manter o esquema de múltiplas observações, $\{\eta^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Para resultados de normalidade assintótica, a seguinte definição é essencial (KUTOYANTS, 1998, p. 45):

Definição 37 (Normalidade Assintótica Local - LAN)**.** *Dizemos que uma família de medidas de probabilidade $\{\mathbb{P}_\theta^n\}_{\theta \in \Theta, n \in \mathbb{N}}$ é localmente assintóticamente normal em um ponto $\theta \in \Theta$ quando $n \to \infty$ se existe uma matriz não-degenerada (i.e, positiva definida) de dimensão $d \times d$,$\phi_n(\theta)$, tal que para qualquer $u \in U_n = \{u \in \Theta : \theta + \phi_n(\theta)u \in \Theta\}$ a representação:*

$$Z_n(u) = \frac{d\mathbb{P}_{\theta+\phi_n(\theta)u}^{(n)}}{d\mathbb{P}_\theta^{(n)}} = \exp\{< u, \Delta_n(\theta) > -\frac{1}{2}|u|^2 + r_n(\theta, u)\},$$

é válida, onde o vetor aleatório $\Delta_n(\theta)$ é assintoticamente normal com matriz de variância-covariância (assintótica) identidade de dimensão d, que denotamos por J, e $r_n(\theta, u)$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta^{(n)}(|r_n(\theta, u)| > \varepsilon) = 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Dizemos que uma família de medidas de probabilidade $\{\mathbb{P}_\theta^n\}_{\theta \in \Theta, n \in \mathbb{N}}$ é localmente assintoticamente normal se esta é LAN para todo $\theta \in \Theta$.

Famílias de distribuições LAN possuem uma série de propriedades de regularidade, além de resultados distribucionais assintóticos, de interesse (KUTOYANTS, 1998). Para provarmos que a família de distribuições $\{\mathbb{P}_\theta^n\}_{\theta \in \Theta, n \in \mathbb{N}}$ do processo de Poisson exibido nos parágrafos anteriores é LAN, precisamos das seguintes condições de regularidade (KUTOYANTS, 1998, p. 46):

Denote, para $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ a derivada de Radon-Nykodim:

$$S_n(\theta_1, \theta_2, x) = \frac{d\lambda_{\theta_2}^{(n)}}{d\lambda_{\theta_1}^{(n)}}(x)$$

(i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, as medidas de intensidade $\{\lambda_\theta^n\}$ são equivalentes (isto é, mutuamente absolutamente contínuas).

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma função (vetorial) $q_n(\theta, x) \in L^1(\lambda_\theta^{(n)}) \cap L^2(\lambda_\theta^{(n)})$ tal que a matriz

$$Q_n(\theta) =< q_n(\theta, \cdot), q_n(\theta, \cdot)^T >,$$

é positiva definida para todo $\theta \in \Theta$ e, para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |Q_n^{-1/2} q_n(\theta, x)|^2 \mathbb{1}(x)_{\{|Q_n^{-1/2} q_n(\theta,x)|>\varepsilon\}} \lambda_\theta^{(n)}(dx) = 0.$$

(iii) Para qualquer $u \in U_n$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} (\ln(S_n(\theta_u, \theta, x) - < u, Q_n^{-1/2}(\theta) q_n(\theta, x) >_E)^2 \lambda_\theta^{(n)}(dx) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} (S_n(\lambda_u, \theta, x) - 1 - \ln(S_n(\theta_u, \theta, x)) - (< u, Q_n^{-1/2}(\theta) q_n(\theta, x) >_E)^2) \lambda_\theta^{(n)}(dx) = 0.$$

Sob estas condições, o seguinte resultado é válido (KUTOYANTS, 1998, p.47):

Teorema 41 (LAN - Processo de Poisson)**.** *Sob as condições de regularidade (i)-(iii)., a família de distribuições* $\{\mathbb{P}_\theta^{(n)}\}_{\theta\in\Theta}$ *é LAN em* Θ*, com matriz de normalização* $\phi_n(\theta) = Q_n^{-1/2}(\theta)$ *e vetor:*

$$\Delta_n(\theta) = Q_n^{-1/2}(\theta) \int_{A_n} q_n(\theta, x)[N^n(dx) - \lambda_\theta^n(dx)].$$

A demonstração deste teorema, que consiste na aplicação das condições de regularidade em combinação com uma expansão de Taylor, pode ser vista em (KUTOYANTS, 1998, p.47).

Para mais propriedades de famílias LAN de medidas de probabilidade, veja (KUTOYANTS, 1998, pp. 47-49).

Para o resultado principal de regularidade e convergência assintóticas dos EMV do Processo de Poisson, precisamos de mais algumas condições de regularidade (KUTOYANTS, 1998, pp. 49-50) [2]:

Defina a função $\Psi_n(\theta^*, \theta, x) = 2\sqrt{S_n(\theta^*, \theta, x)}$, com $\theta^*, \theta \in \Theta$.

(i) As medidas de intensidade $\{\lambda_\theta^{(n)}\}_{\theta\in\Theta}$, $n \in \mathbb{N}$, são mutuamente absolutamente contínuas nos conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{\mathcal{X}}$, e Θ é um conjunto aberto e limitado (i.e, está no anel de localização dos conjuntos metricamente limitados) de $\mathbb{R}^d$.

[2] A partir daqui, qualquer referência às condições de regularidade será feita sobre as que seguem.

(ii) A função $S_n(\theta^*, \theta, x)$, $\theta^* \in \Theta$ e $x \in A_n$, é continuamente diferenciável com respeito à θ^*. Esta derivada $\dot{\Psi}_n(\theta^*, \theta, \cdot)$ é uma função de $L^3(\lambda_\theta^{(n)})$. A matriz de informação de Fisher:

$$I_n(\theta) =< \dot{\Psi}_n(\theta^*, \theta, \cdot), \dot{\Psi}_n(\theta^*, \theta, \cdot)^t >_\theta,$$

é positiva definida para qualquer $\theta \in \Theta$. Escolha:

$$\phi_n(\theta) = I_n(\theta)^{-1/2},$$

e suponha que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\Theta} |I_n^{-1}(\theta)| = 0.$$

Além disso, existe uma constante real positiva C_0 tal que:

$$\sup_{\theta_1,\theta_2\in\Theta} |\phi_n(\theta_1)\phi_n^{-1}(\theta_2)| < C_0$$

Agora, denote por $\theta_u = \theta + \phi_n(\theta)u$, onde $u \in U_n = \{u \in \mathbb{R}^d : \theta + \phi_n(\theta)u \in \Theta\}$.

(iii) Existe uma sequência de reais positivos $a_n \to \infty$, quando $n \to \infty$, tal que para qualquer conjunto compacto $K \subseteq \Theta$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta,\theta_1\in K} a_n \| |\phi_n(\theta)\dot{\Psi}_n(\theta_1, \theta_1, \cdot)|^{3/2}\|_\theta^2 = 0,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in K} \sup_{|u|<a_n} \|\phi_n(\theta) < \dot{\Psi}_n(\theta_u, \theta_u, \cdot), \dot{\Psi}_n(\theta, \theta, \cdot) > \|_\theta = 0.$$

(iv) Existe uma constante racional $b > 0$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\theta\in K} \inf_{|u|>a_n} |\phi_n(\theta)|^b \|\dot{\Psi}_n(\theta_u, \theta, \cdot) - 2\|_\theta > 0.$$

(v) Para algum inteiro $m > d/2$:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\theta,\theta_1\in\Theta} \| |\phi_n(\theta)\dot{\Psi}_n(\theta_1, \theta_1, \cdot)|^m\| < \infty$$

Sob estas condições, por (i), considere a seguinte razão de verossimilhanças dada pela aplicação do Teorema de Liese-Karr-Brown (Teorema 39) à $\{\mathbb{P}_\theta^{(n)}\}_{\theta\in\Theta}$:

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta^{(n)}}{d\mathbb{P}_\theta^{(n)}}(\eta_{A_n}) = \exp\{\int_{A_n} \ln(S_n(\theta, \theta_1, x))\eta^{(n)}(dx) - \lambda_\theta(A_n) + \lambda_{\theta_1}(A_n)\},$$

com $\theta_1 \in \Theta$ um valor fixo, e $S_n(\theta, \theta_1, x) = \dfrac{d\lambda_{\theta_1}^{(n)}}{d\lambda_\theta^{(n)}}(x)$. Para o próximo teorema, precisamos das seguintes definições (KUTOYANTS, 1998, p. 49):

Definição 38 (Funções Perda)**.** *Considere W a classe de funções $\{l(u), u \in \mathbb{R}^d\}$ tais que:*

1. *A função l é não-negativa em $\mathbb{R}^d$, $l(0) = 0$, e é contínua em $u = 0$.*
2. *A função l é simétrica.*
3. *Os conjuntos $\{u \in \mathbb{R}^d : l(u) < c\}$ são convexos para qualquer $c > 0$ real positivo.*

Então, dizemos que W consiste na classe de funções perda convexas.

Definição 39 (Eficiência Assintótica)**.** *Um estimador (i.e, a sequência de estimadores) $\{\overline{\theta}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dito assintoticamente eficiente para a função perda $l(\phi_n^{-1/2}(\theta_0)u) \in W$ se:*

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\sup_{|\theta-\theta_0|<\delta}\mathbb{E}_\theta(l(\phi_n^{-1}(\theta_0)(\overline{\theta}_n - \theta))) = \mathbb{E}(l(X)),$$

, para todo $\theta_0 \in \Theta$, com $X \sim N(0, J)$, onde J é a matriz identidade de dimensão $d \times d$.

Seguindo (KUTOYANTS, 1998, p. 51), pelas condições de regularidade (i), (iii) e (v), e pelo Lema 2.2 de (KUTOYANTS, 1998, p. 54), temos que a razão de verossimilhanças dada por:

$$L^{(n)}(\theta, \theta_1, \eta_{A_n}) = \frac{d\mathbb{P}_\theta^{(n)}}{d\mathbb{P}_\theta^{(n)}}(\eta_{A_n}),$$

é contínua com probabilidade 1. Assim, temos que o EMV $\hat{\theta}_n \in \overline{\Theta}$ existe e é solução da seguinte equação:

$$L^{(n)}(\hat{\theta}_n, \theta_1, \eta_{A_n}) = \sup_{\theta\in\Theta} L^{(n)}(\theta, \theta_1, \eta_{A_n}).$$

Garantida a existência do estimador, temos que este satisfaz o seguinte teorema de convergência (KUTOYANTS, 1998, p. 51):

Teorema 42. *Suponha que as condições de regularidade (i)-(v) sejam satisfeitas. Então, uniformemente em $\theta \in K$, o MLE $\hat{\theta}_n$ possui as seguintes propriedades:*

1. *$lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_\theta^{(n)}(|\hat{\theta}_n| > \varepsilon) = \theta$, para todo $\varepsilon > 0$.*
2. *$\phi_n^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_n - \theta)$ converge fracamente à $X \sim N_d(0, J)$, onde J é a matriz identidade $d \times d$.*
3. *$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_\theta(|\phi_n^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_n - \theta)|^p) = \mathbb{E}(|X|^p)$, para qualquer $p > 0$ e $X \sim N_d(0, J)$, onde J é a matriz identidade $d \times d$.*

Além disso, o EMV $\hat{\theta}_n$ é assintoticamente eficiente para a função perda $l(\cdot) \in W_p$.

Para a (longa) demonstração deste resultado, sugerimos ao leitor consultar (KUTOYANTS, 1998, pp. 51-58).

O Teorema 42 garante, enquanto ferramente estatística, que, para grandes amostras de realizações de um processo de Poisson, os estimadores paramétricos baseados no método de máxima verossimilhança possuem condições de regularidade importantes. Tal resultado possui implicações para, por exemplo, a seleção de modelos para processos pontuais (KUTOYANTS, 1998) e os testes de intensidade (paramétricos) destes (KRICKEBERG, 1982).

Resultados adicionais sobre os estimadores de máxima verossimilhança paramétricos para o caso do processo de Poisson podem ser vistos no capítulo 2 e 3 de (KUTOYANTS, 1998).

Para o caso abstrato, mas ainda paramétrico, resultados análogos da propriedade LAN da família de distribuições de um processo de Poisson, além da convergência dos estimadores EMV da intensidade deste, podem ser obtidos com técnicas de convergência fraca de processos estocásticos infinitamente divisíveis, além de martingais - vide (LIESE; LORZ, 1999).

O caso não paramétrico da estimação de intensidade de um processo de Poisson, especialmente no caso abstrato, é razoavelmente mais complicada que a teoria exposta acima. Neste caso, a classe natural de estimadores consiste na sequência de funcionais empíricos do tipo (LIESE; ZIEGLER, 1999):

$$\hat{\Lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i$$

Com $\{\eta_i\}_i$ uma sequência de processos de Poisson em $(X, \mathcal{X})$ com medida de intensidade (comum) Λ, que assumimos ser σ-finita (ou, no contexto de um espaço localizado com anel $\hat{\mathcal{X}}$, uma medida localmente finita). Os resultados de estimação assintótica neste caso são baseados numa versão uniforme da lei dos grandes números do tipo (LIESE; ZIEGLER, 1999):

$$\Delta_n(\mathcal{A}) = \sup_{f\in\mathcal{A}} |\int_X f(x)\hat{\Lambda}_n(dx) - \int_X f(x)\Lambda(dx)| \to 0, \text{ quando } n \to \infty$$

Com $\mathcal{A}$ uma classe de funções reais satisfazendo certas propriedades de mensurabilidade - vide (LIESE; ZIEGLER, 1999, p. 534). Em particular, técnicas do cálculo não-mensurável de funções reais são necessários para lidar com estes teoremas de convergência (ZIEGLER, 1997).

Os principais resultados desta abordagem podem ser vistos em (ZIEGLER, 2001), (KUTOYANTS; LIESE, 1998) e (LIESE; ZIEGLER, 1999).

4 Considerações Finais

Como dito na introdução deste trabalho, a teoria de medidas aleatórias e processos pontuais possui diversas abordagens distintas. Neste trabalho, observamos pelo menos 3 delas:

(i) No Capítulo 1, vimos processos pontuais enquanto elementos aleatórios com valores no espaço de medidas s-finitas em um espaço mensurável fixo (LAST; PENROSE, 2018).

(ii) No capítulo 2, vimos duas outras abordagens: no caso de Kallenberg (2017) e Mecke (1979), medidas aleatórias, e processos pontuais, são vistos enquanto elementos aleatórios com valores no espaço de medidas localmente finitas em um espaço mensurável fixo; e no caso de Finkelstein, Tucker e Veeh (1996), processos pontuais são vistos enquanto elementos aleatórios com valores de medida, como nos casos acima, mas apenas com uma hipótese de finitude local da medida média destes.

Todas estas abordagens, assim como indicado na introdução, podem ser classificadas pela abordagem de Dellacherie e Meyer (1983), apresentada na Definição 3, de núcleos mensuráveis em espaços mensuráveis. Tratam-se, assim, de diferentes abordagens sob um mesmo plano formal analítico. Em questão de similaridade, todas estas possuem uma teoria distribucional bem definida, tendo a distribuição de medidas aleatórias construídas em termos cilíndricos e funcionais (Laplace) - vide os resultados, na ordem dos formalismos citados, Lema 1, Teoremas 15 e 25. Além disso, na definição dos elementos aleatórios, vide os desenvolvimentos da Seção 2.1.1 do Capítulo 2, temos a seguinte linha de generalidade (crescente):

Mecke (1979), Kallenberg (2017), Finkelstein, Tucker e Veeh (1996) $\implies$ Last e Penrose (2018)

Mesmo assim, no plano mensurável dos 4 formalismos acima, diferenças claras emergem:

(i) Sem maiores restrições topológicas, vide Capítulo 2, os diferentes subespaços de medidas considerados na teoria s-finita de Last e Penrose (2018), como as medidas localmente finitas e com valores discretos e localmente finitas, não são mensuráveis na σ-álgebra $\mathfrak{M}(X)$.

(ii) No capítulo 2, a abordagem de Mecke (1979) também requer maiores hipóteses sob $\mathcal{X}$ para garantir a mensurabilidade destes subespaços e garantir teoremas de existência para processos pontuais. Em particular, que estem contenham todos os singletons $\{x\} \in X$. O caso de Kallenberg (2017) é mais regular dada a hipótese de um espaço localizado Borel. Obtemos resultados, como os do Teorema 23, que garantem diretamente a mensurabilidade de diferentes subespaços de medidas. Neste caso, a hipótese (pseudo-)topológica é a origem desta regularidade.

Assim, a dicotomia dos casos topológicos e abstratos se traduz, concretamente, nos problemas de mensurabilidade exibidos nos Capítulos 1 e 2. Nos teoremas de existência, o mesmo ocorre. Em espaços abstratos sem maiores hipóteses sob o espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$, o caso do Capítulo 1 com a abordagem de Last e Penrose (2018), apenas resultados intrínsecos podem ser demonstrados, vide o Corolário 1. Neste caso, o uso de teoremas de limites projetivos abstratos, sem hipóteses topológicas, é estritamente necessário. De fato, note que a construção intrínseca do processo de Poisson apresentada no Teorema 8, por meio do processo binomial e o Teorema de Lominicki-Ulam, é uma consequência direta da ausência de topologia: neste caso, precisamos, em primeiro lugar, passar por um resultado de limites projetivos abstratos a fim de construir um espaço de probabilidade que suporte um elemento aleatório construído a partir de componentes independentes, o processo Binomial, para depois obter o processo de Poisson. No caso de espaços standard Borel de Kallenberg (2017) a partir dos Teoremas de Regularidade e Existência, vide Teoremas 27 e 29, a construção é universal, no sentido de se aplicar a uma grande classe de medidas aleatórias e processos pontuais. Neste caso, o uso do Teorema de Kolmogorov, Teorema 28, também é esclarecida: com a presença de uma topologia, limites projetivos podem ser obtidos topologicamente, e com mais estrutura, podendo envolver elementos com propriedades que sejam mais gerais que a independência.

O caso dos teoremas de existência de Mecke (1979) pode ser visto, no contexto da discussão do parágrafo anterior, como uma concessão no abstrato para obter resultados analógos ao caso topológico. De fato, precisamos supor que, nesta abordagem, os espaços mensuráveis satisfazem uma hipótese específica: serem amplos. Nestes espaços, onde bimedidas comportam-se enquanto distribuições condicionais regulares, Teoremas de regularidade e existência, Teoremas 32 e 34 respectivamente, podem ser obtidos utilizando técnicas de demonstrações do caso topológico no caso abstrato. Assim, enquanto o formalismo de Last e Penrose (2018) não exibe tais teoremas, pela estrutura geral dos espaços mensuráveis, o formalismo de Mecke (1979), com mais hipóteses no espaço mensurável, obtém algo neste sentido. Uma possível objeção consiste em pontuar que o caráter local, no sentido de anéis dissecantes, dos resultados de Kallenberg (2017) os torna mais gerais que os de Mecke (1979). As generalizações de Zähle (1988) mostram que essa objeção não é válida.

Para questões de regularidade dos caminhos de medidas aleatórias e processos pontuais, o caso (pseudo-)topológico standard Borel localizado de Kallenberg (2017) é mais amplo: podemos encontrar resultados de metrizabilidade, representação própria de processos, vide o Teorema 20, e uma análise mais fina, no sentido de específica, das questões distribucionais, como pode ser visto no Teorema 15, que possibilita uma determinação da distribuição completa de processos pontuais em termos dos eventos $\{\eta(B) = 0\}$, com η processo pontual segundo Kallenberg (2017), Definição 22, e $B \in \hat{\mathcal{X}}$. Aqui, as patologias exibidas no Capítulo 1 no formalismo de Last e Penrose (2018), como o exemplo de um processo de Poisson impróprio, Proposição 4, podem ser explicadas num contexto natural da teoria da medida topológica: topologicamente, as medidas que representam os processos de Kallenberg (2017) no contexto de espaços standard Borel possuem suporte não-vazio - de fato, são medidas Radon (FREMLIN, 2006). Por outro lado, no caso abstrato, não temos uma definição utilizável de regularidade interior, medidas Radon, ou de suportes. Assim, obtemos representações impróprias abundantes como no caso da Proposição 4 - notemos, de fato, que o espaço de probabilidade exibido nesta proposição não é gerado diretamente pela topologia Euclideana de $[0, 1]$, gerando uma σ-álgebra menos regular que a de Borel. Uma solução possível, adotada por Mecke (1979), consiste em completar $\mathcal{X}$ com os singletons, operação que diminui a generalidade das hipóteses mensuráveis no espaço $(X, \mathcal{X})$ e, logo, no espaço localizado $(X, \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$.

Apesar destas grandes diferenças entre o esquema abstrato e topológico, alguns fios condutores podem ser obtidos pelos desenvolvimentos do Capítulo 2. Em particular, reduzindo ao caso métrico, todos os formalismos possuem uma mesma estrutura, e os problemas de mensurabilidade são dissolvidos, vide a seção 2.2.1. Por outro lado, podemos construir os formalismos de Finkelstein, Tucker e Veeh (1996) e Mecke (1979) utilizando o conceito abstrato de limitação de Kallenberg (2017) a partir dos espaços mensuráveis localizados, unificando, sob uma mesma linguagem, todas as três abordagens. O caso de Last e Penrose (2018) não é diretamente redutível à espaços localizados, vide a hipótese de medidas s-finitas; esta é uma característica única do formalismo destes autores. Um possível estudo futuro é determinar, dentro de uma classe ampla de medidas, como as s-finitas, localizáveis ou semi-finitas, vide (FREMLIN, 2003), quais, quando assumimos que processos pontuais tomam valores nos espaços destas, assumem uma unificação em termos de princípios abstratos de limitações, possivelmente com generalizações à classe de espaços localizados de Kallenberg (2017). Neste contexto, generalizações dos resultados de existência podem, assim como no exemplo de Moyal (1962), esbarrar em problemas de teoria de conjuntos, como o de Banach-Ulam para determinação de medidas localizáveis (FREMLIN, 2003).

Por fim, é importante notar que esta mesma relação de idas e vindas entre topologia e medida aparece na inferência de processos pontuais. Resultados abstratos de continuidade absoluta e representação de densidades de processos de Poisson, como o Teorema de Karr-Liese-Brown, Teorema 39, podem ser obtidos pelo formalismo de espaços localizados de Kallenberg (2017) em conjunto com os teoremas de convergência de redes de integrais de Hellinger de Liese e Lorz (1999). Apesar disso, propriedades mais finas de convergência de estimadores de máxima verossimilhança, além de propriedades LAN, necessitam de hipóteses topológicas, vide o desenvolvimento do Capítulo 3 com base nas ideias de Kutoyants (1998).

Não há uma escolha simples entre as abordagens de mensurabilidade, representação e existência que fundamentam os diferentes formalismos de processos pontuais e medidas aleatórias. Nesta dissertação, trazemos uma síntese de algumas destas técnicas comumente exibidas na teoria recente de elementos aleatórios com valores de medida. Também desenvolvemos um aparato inferencial com base na teoria abstrata para qual, em um trabalho futuro, iremos explorar as consequências.

Referências

ATHREYA, K. B.; LAHIRI, S. N. *Measure Theory and Probability Theory*. New York, NY: Springer, 2006. v. 19. Citado na página 71.

AUMANN, G.; HAUPT, O. *Einführung in Die Reelle Analysis Vol. III, Integralrechnung der Funktionen Mehrerer VerÄnderlicher*. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 1983. Citado na página 94.

BACCELLI, F.; BŁASZCZYSZYN, B.; KARRAY, M. *Random measures, Point Processes, and Stochastic Geometry*. Hal: Inria, 2020. Citado na página 18.

BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014. Citado na página 27.

BLUMENTHAL, R. M.; GETOOR, R. K. *Markov processes and Potential Theory*. New York, NY: Courier Corporation, 2007. Citado na página 25.

BOCSAN, G. *Random Sets and Related Topics*. Timisoara: Universitatea din Timisoara., 1986. v. 27. Citado na página 20.

BOGACHEV, V. *Measure Theory, Volumes 1 and 2*. New York, NY: Springer, 2007. Citado 7 vezes nas páginas 9, 13, 20, 21, 22, 95 e 96.

BRÉMAUD, P. *Point Process Calculus in Time and Space: An Introduction with Applications*. New York, NY: Springer Nature, 2020. v. 98. Citado 8 vezes nas páginas 9, 10, 12, 13, 14, 43, 46 e 66.

BROWN, M. Discrimination of Poisson processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, v. 42, n. 2, p. 773–776, 1971. Citado 3 vezes nas páginas 99, 100 e 101.

______. Statistical analysis of non-homogeneous Poisson processes. *Stochastic point processes*, Wiley New York, p. 67–89, 1972. Citado na página 101.

CHANG, D. K.; RAO, M. Bimeasures and nonstationary processes. *Real and stochastic analysis*, Wiley New York, p. 7–118, 1986. Citado na página 84.

DALEY, D. J.; VERE-JONES, D. *An Introduction to the Theory of Point processes: General Theory and Structure*. 2. ed. New York, NY: Springer, 2008. v. 2. Citado 4 vezes nas páginas 12, 43, 80 e 84.

DELLACHERIE, C.; MEYER, P.-A. *Probabilités et Potentiel, vol.A, chap. I à IV, Espaces Mesurables*. Paris: Hermann, 1975. Citado na página 25.

______. *Probabilités et Potentiel, vol.C, chap. IX à XI, Théorie Discrète du Potentiel*. Paris: Hermann, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 118.

DINCULEANU, N. Vector integration in banach spaces and application to stochastic integration. *Handbook of measure theory*, North-Holland, v. 1, p. 345–399, 2002. Citado na página 33.

DOBERKAT, E.-E. *Special Topics in Mathematics for Computer Scientists: Sets, Categories, Topologies and Measures*. New York, NY: Springer, 2015. Citado na página 77.

DUDLEY, R. M.; NORVAIŠA. *Concrete Functional Calculus*. New York, NY: Springer, 2011. Citado na página 57.

ENGELKING, R. *General Topology*. Berlin: Heldermann, 1989. Citado na página 98.

FINKELSTEIN, M.; TUCKER, H. G.; VEEH, J. A. Point processes without topology. *Lecture Notes-Monograph Series*, JSTOR, p. 65–81, 1996. Citado 13 vezes nas páginas 9, 10, 13, 14, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 118 e 120.

FREITAG, E.; BUSAM, R. *Complex analysis*. 2. ed. Berlin: Springer, 2009. Citado na página 56.

FREIWALD, R. C. *An introduction to Set theory and Topology*. St. Louis: Washington University in St. Louis, 2014. Citado na página 77.

FREMLIN, D. H. *Measure theory*. Colchester: Torres Fremlin, 2000. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 19, 24, 27 e 45.

______. *Measure Theory: Further Topics in the General Theory*. Colchester: Torres Fremlin, 2003. v. 2. Citado 4 vezes nas páginas 16, 18, 36 e 120.

______. *Measure Theory: Topological Measure Spaces Parts I and II*. Colchester: Torres Fremlin, 2006. v. 4. Citado 4 vezes nas páginas 43, 81, 82 e 120.

GUT, A. *Probability: a Graduate Course*. New York, NY: Springer Science & Business Media, 2013. v. 75. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 83.

HALMOS, P. R. *Measure theory*. New York, NY: Springer, 1950. v. 18. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 76.

HARRIS, T. Counting measures, monotone random set functions. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, Springer, v. 10, n. 2, p. 102–119, 1968. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 74.

HAYES, C. A.; PAUC, C. Y. *Derivation and martingales*. New York, NY: Springer Science & Business Media, 1970. v. 49. Citado na página 94.

HOFFMANN-JØRGENSEN, J. *Stochastic Processes on Polish Spaces*. [S.l.]: Aarhus Universitet Press: Various Publication Series, 1991. v. 39. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 63.

______. Asymptotic likelihood theory. *Proc. Funct. Anal*, p. 5–192, 1992. Citado na página 112.

______. *Probability With a View Toward Statistics*. Dordrecht: Routledge, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 28 e 32.

JURČO, A. Random measurable sets and particle processes. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2021. Citado na página 94.

KALLENBERG, O. *Random Measures, Theory and Applications*. Switzerland: Springer International Publishing, 2017. (Probability Theory and Stochastic Modelling). Citado 38 vezes nas páginas 9, 10, 12, 13, 14, 19, 23, 29, 41, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 74, 79, 80, 81, 82, 84, 88, 92, 94, 103, 112, 118, 119 e 120.

_____. *Foundations of Modern Probability*. 3. ed. Switzerland: Springer International Publishing, 2021. (Probability Theory and Stochastic Modelling 99). Citado 29 vezes nas páginas 13, 14, 24, 28, 29, 35, 36, 37, 47, 52, 56, 57, 59, 60, 62, 65, 68, 70, 71, 72, 74, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 88 e 90.

KALLIANPUR, G.; SUNDAR, P. *Stochastic Analysis and Diffusion Processes*. Oxford: Oxford University Press, 2014. v. 24. Citado 3 vezes nas páginas 64, 75 e 76.

KARR, A. *Point Processes and Their Statistical Inference*. 2. ed. New York, NY: CRC / Marcel Dekker, Inc., 1991. (Probability: Pure and Applied). Citado 7 vezes nas páginas 50, 100, 101, 102, 103, 104 e 113.

KECHRIS, A. *Classical Descriptive Set Theory*. New York, NY: Springer Science & Business Media, 1995. v. 156. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 86.

KERSTAN, J.; LIESE, F. Zur existenz bedingter verteilungsgesetze i. *Mathematische Nachrichten*, Wiley Online Library, v. 61, n. 1, p. 279–310, 1974. Citado na página 86.

KERSTAN, J.; MATTHES, K.; MECKE, J. *Infinitely Divisible Point Processes*. Hoboken: John Wiley & Sons, 1978. Citado 3 vezes nas páginas 50, 51 e 80.

KINGMAN, J. F. C. *Poisson Processes*. Oxford: Clarendon Press, 1992. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 34.

_____. Poisson processes revisited. *Probability and Mathematical Statistics*, v. 26, 2006. Citado na página 43.

KOZEK, A. On the theory of estimation with convex loss functions. *Proc. Hon. J. Neyman*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, p. 177–202, 1977. Citado na página 112.

KRICKEBERG, K. Satistical problems of point processes. *Mathematica Applicanda*, v. 6, n. 13, p. 29–57, 1978. Citado na página 101.

_____. Processus ponctuels en statistique. In: *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour X-1980*. New York, NY: Springer, 1982. p. 205–313. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 117.

_____. *Point Processes: A Random Radon Measure Approach: Augmented with Several Scholia by Hans Zessin*. Leipzig: Warmuth Verlag, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 6, 22, 67 e 88.

KUTOYANTS, Y. A. *Statistical Inference for Spatial Poisson Processes*. 1. ed. New York, NY: Springer-Verlag New York, 1998. (Lecture Notes in Statistics 134). Citado 15 vezes nas páginas 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117 e 121.

KUTOYANTS, Y. A.; LIESE, F. Estimation of linear functionals of Poisson processes. *Statistics & probability letters*, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 43–55, 1998. Citado na página 117.

LAST, G.; PENROSE, M. *Lectures on the Poisson Process*. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. (Institute of Mathematical Statistics Textbooks 7). Citado 39 vezes nas páginas 9, 10, 12, 13, 14, 15, 20, 23, 24, 25, 27, 30, 31, 32, 34, 38, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 57, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 84, 95, 113, 118, 119 e 120.

LIESE, F. Eine informationstheoretische bedingung für die äquivalenz unbegrenzt teilbarer punktprozesse. *Mathematische Nachrichten*, Wiley Online Library, v. 70, n. 1, p. 183–196, 1975. Citado na página 97.

______. Hellinger integrals of diffusion processes. *Statistics*, Taylor & Francis, v. 17, n. 1, p. 63–78, 1986. Citado na página 96.

LIESE, F.; LORZ, U. Contiguity and lan-property of sequences of Poisson processes. *Kybernetika*, v. 35, n. 3, p. 281–308, 1999. Disponível em: http://www.kybernetika.cz/content/1999/3/281. Citado 9 vezes nas páginas 14, 95, 96, 97, 98, 99, 101, 117 e 120.

LIESE, F.; ZIEGLER, K. A note on empirical process methods in the theory of Poisson point processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, Wiley Online Library, v. 26, n. 4, p. 533–537, 1999. Citado na página 117.

LIPTSER, R.; SHIRYAYEV, A. N. *Theory of Martingales*. New York, NY: Springer Science & Business Media, 1989. v. 49. Citado na página 61.

LYBEROPOULOS, D.; MACHERAS, N. A construction of mixed Poisson processes via disintegrations. *Mathematica Slovaca*, Versita, v. 63, n. 1, p. 167–182, 2013. Citado na página 84.

MECKE, J. A remark on the construction of random measures. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1979. v. 85, n. 1, p. 111–115. Citado 18 vezes nas páginas 9, 10, 12, 13, 14, 72, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 93, 94, 118, 119 e 120.

MØLLER, J.; RUBAK, E. Functional summary statistics for point processes on the sphere with an application to determinantal point processes. *Spatial Statistics*, Elsevier, v. 18, p. 4–23, 2016. Citado na página 20.

MØLLER, J.; WAAGEPETERSEN, R. P. *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. 1. ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004. Citado na página 107.

MOYAL, J. E. The general theory of stochastic population processes. *Acta mathematica*, Institut Mittag-Leffler, v. 108, p. 1–31, 1962. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 30 e 120.

POLLARD, D. *A User's Guide to Measure Theoretic Probability*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Citado na página 25.

PRESTON, C. Some notes on standard Borel and related spaces. *arXiv preprint arXiv:0809.3066*, 2008. Citado na página 94.

RAMACHANDRAN, D. *Perfect measures I and II. I SI-Macmillan Lecture Notes Series, 5, 7*. New Delhi: Macmillan, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 6, 84 e 86.

RAO, M. M. *Foundations of Stochastic Analysis*. New York, NY: Courier Corporation, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 88.

_____. *Random and Vector Measures*. Singapore: World Scientific, 2011. v. 9. Citado na página 74.

_____. *Stochastic Processes: Inference Theory*. 2. ed. New York, NY: Springer, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 107, 108 e 112.

RAO, M. M.; SWIFT, R. J. *Probability Theory with Applications*. New York, NY: Springer Science & Business Media, 2006. v. 582. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 56.

RATHBUN, S.; CRESSIE, N. Asymptotic properties of estimators for the parameters of spatial inhomogeneous Poisson point processes. *Advances in Applied Probability*, v. 26, p. 122–154, 03 1994. Citado 3 vezes nas páginas 109, 110 e 111.

RAUCHENSCHWANDTNER, B. *Gibbsprozesse und Papangeloukerne*. Wien: VWGÖ, 1980. Citado na página 61.

RIPLEY, B. Locally finite random sets: foundations for point process theory. *The Annals of Probability*, JSTOR, p. 983–994, 1976. Citado 5 vezes nas páginas 53, 54, 84, 92 e 93.

ROGERS, L. C. G.; WILLIAMS, D. *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 1: Foundations*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 1994. v. 7. Citado 3 vezes nas páginas 13, 82 e 88.

RÜSCHENDORF, L. Inference for random sampling processes. *Stochastic processes and their applications*, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 129–140, 1989. Citado na página 104.

SCHECHTER, E. *Handbook of Analysis and its Foundations*. San Diego: Academic Press, 1996. Citado na página 98.

SCHILLING, R. L.; KÜHN, F. *Counterexamples in Measure and Integration*. Cambridge: Cambridge University Press, 2021. Citado na página 12.

SHARPE, M. *General theory of Markov processes*. San Diego: Academic press, 1988. Citado na página 25.

SION, M. Cylinder measures, local bases and nuclearity. In: *Probability and Analysis*. New York, NY: Springer, 1986. p. 259–280. Citado 3 vezes nas páginas 9, 10 e 88.

_____. Integration processes. *Séminaire d'initiation à l'analyse*, Université Pierre et Marie Curie, v. 30, p. 6, 1990. Citado na página 88.

STROOCK, D. W. *Probability theory: An Analytic View*. Cambridge: Cambridge university press, 2010. Citado na página 12.

THORISSON, H. *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. New York, NY: Springer, 2000. Citado na página 47.

VÁKÁR, M.; ONG, L. On s-finite measures and kernels. *arXiv preprint arXiv:1810.01837*, 2018. Citado na página 16.

VIDMAR, M. The "measure of symmetric difference" metric. Lecture Notes, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 77.

YEH, J. *Real analysis: Theory of Measure and Integration*. 3. ed. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2014. Citado na página 33.

ZÄHLE, U. Measurable processes and approximate limits. *Mathematische Nachrichten*, Wiley Online Library, v. 107, n. 1, p. 123–129, 1982. Citado na página 94.

______. The fractal character of localizable measure-valued processes. i—random measures on product spaces. *Mathematische Nachrichten*, Wiley Online Library, v. 136, n. 1, p. 149–155, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 119.

ZIEGLER, K. On Hoffmann-Jørgensen-type inequalities for outer expectations with applications. *Results in Mathematics*, Springer, v. 32, n. 1, p. 179–192, 1997. Citado na página 117.

______. Uniform laws of large numbers for triangular arrays of function-indexed processes under random entropy conditions. *Results in Mathematics*, Springer, v. 39, n. 3, p. 374–389, 2001. Citado na página 117.

ZIEMER, W. P.; TORRES, M. *Modern Real Analysis*. New York, NY: Springer, 2017. v. 278. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 74.